



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS CONTRAVENTAMENTOS NA  
INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
AORTICADAS**

Eng<sup>a</sup> : ROSILENE DE FÁTIMA VIEIRA

Orientador : Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA

Campinas, dezembro de 1998



99 09693

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

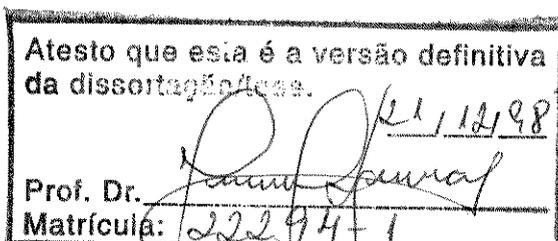
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS CONTRAVENTAMENTOS NA  
INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
APORTICADAS**

Eng<sup>a</sup> : ROSILENE DE FÁTIMA VIEIRA

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração em Engenharia de Estruturas.

Orientador : Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA



Campinas, dezembro de 1998

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V673e      Vieira, Rosilene de Fátima  
              Estudo da influência dos contraventamentos na  
              instabilidade de estruturas metálicas aporticadas. /  
              Rosilene de Fátima Vieira.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

              Orientador: João Alberto Venegas Requena  
              Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
              Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

              1. Estruturas metálicas. 2. Teorias não-lineares. I.  
              Requena, João Alberto Venegas. II. Universidade  
              Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil.  
              III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS CONTRAVENTAMENTOS NA  
INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
APORTICADAS**

Eng<sup>a</sup> ROSILENE DE FÁTIMA VIEIRA

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA

Presidente e Orientador - FEC / UNICAMP

Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR

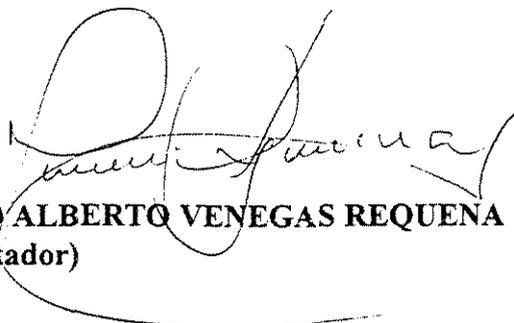
UNESP

Prof. Dr. JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA

FEC / UNICAMP

Campinas, 04 dezembro de 1998

Ata da Defesa da Dissertação a que foi submetida a candidata **ROSILENE DE FÁTIMA VIEIRA, RA 960884**, como parte dos Requisitos do Grau de Mestre em Engenharia Civil - Área de Concentração em Estruturas. Aos **quatro dias do mês de dezembro de hum mil novecentos e noventa e oito**, às 14 horas, reuniu-se na Sala de Reuniões da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas a Comissão Julgadora designada pela Comissão Central dos Cursos de Pós-Graduação da UNICAMP e constituída pelos Professores Doutores: **JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA** (Presidente-Orientador, matrícula 22294-1), **RENATO BERTOLINO JUNIOR** (UNESP) e **JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA** (FEC/UNICAMP), para examinar a candidata em prova de Defesa de sua Dissertação intitulada, "**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS CONTRAVENTAMENTOS NA INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS APORTICADAS**". O Senhor Presidente solicitou a candidata que apresentasse os pontos principais de seu trabalho. Concluída a exposição os examinadores argüiram alternadamente a candidata sobre questões relativas à dissertação. Após a arguição que terminou às 16 horas, a Comissão reuniu-se e deliberou pela **Aprovação com distinção**, por unanimidade, da candidata que fará jus ao título de Mestre em Engenharia Civil na Área de Concentração em Estruturas. Para constar, lavrou-se a presente Ata que foi assinada pelos membros da Comissão. Campinas, 04 de dezembro de 1998.



**PROF. DR. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA**  
(Presidente-Orientador)



**PROF. DR. RENATO BERTOLINO JUNIOR**



**PROF. DR. JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA**

“Só os verdadeiros Mestres sabem que continuarão  
sempre a ser alunos”

Anne e Daniel Meurois Givaudan

Dedicado a meus pais Sr. Romildo e D. Cida  
e a meus irmãos Romildinho, Ronalda, Rogério,  
Roberval e Rodolfo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena pelo carinho, atenção, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Luiz Fernandes Arruda Serra pela contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan pela contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu irmão Rogério pelo empréstimo de seu computador pelo tempo em que eu precisar.

À minha irmã Ronalda pela ajuda financeira nos congressos que eu participei.

# SUMÁRIO

<b><u>LISTA DE FIGURAS</u></b> .....	i
--------------------------------------	---

<b><u>LISTA DE TABELAS</u></b> .....	iv
--------------------------------------	----

<b><u>RESUMO</u></b> .....	vi
----------------------------	----

<b><u>ABSTRACT</u></b> .....	vii
------------------------------	-----

## **CAPÍTULO I**

### INTRODUÇÃO

<b>1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS</b> .....	1
---------------------------------------	---

<b>1.2 SITUAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	3
---------------------------------------	---

<b>1.2.1 INSTABILIDADE POR FLEXÃO DE BARRAS NO         REGIME ELÁSTICO</b> .....	4
--	---

<b>1.2.2 ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE         SEGUNDA ORDEM</b> .....	12
--	----

<b>1.2.2.1 PROCESSOS ANALÍTICOS APROXIMADOS PARA             ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM             TEORIA DE SEGUNDA ORDEM</b> .....	14
--	----

<b>A) Efeito P-<math>\Delta</math></b> .....	14
--	----

<b>B) Processo da Expressão Analítica de Amplificação do                 Momento Fletor</b> .....	16
---	----

<b>C) Processo <math>B_1 - B_2</math></b> .....	22
---	----

1.2.2.2 PROCESSOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM.....	25
A) Processo dos Elementos Finitos.....	26
B) Processo das Funções de Rigidez.....	27
1.2.2.3 PROCESSO PROPOSTO POR AL-MASHARY & CHEN PARA - ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM.....	28
1.2.3 PROCESSO DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA POR FLEXÃO DE PÓRTICOS PLANOS.....	31
1.2.4 PROCESSO DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA DE TRELIÇAS PLANAS CONSIDERANDO SEUS CONTRAVENTAMENTOS.....	33
<b>1.3 PROPOSTA DO TRABALHO.....</b>	<b>35</b>
1.3.1 JUSTIFICATIVAS.....	36
1.3.2 OBJETIVOS.....	36
1.3.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	38

## **CAPÍTULO II**

### INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS PLANAS

2.1 INTRODUÇÃO.....	39
2.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA.....	39

2.2.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DE EIXOS PARA ESTRUTURAS PLANAS.....	39
2.2.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL DE EIXOS PARA O ELEMENTO DE BARRA.....	40
<b>2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA COM FUNÇÕES DE RIGIDEZ.....</b>	<b>41</b>
2.3.1 FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA CONSIDERANDO O EFEITO DA FORÇA AXIAL.....	42
2.3.1.1 Caso P = Zero.....	46
2.3.1.2 Caso P de Compressão.....	52
2.3.1.3 Caso P de Tração.....	63
<b>2.4 FUNÇÕES DE RIGIDEZ.....</b>	<b>73</b>
<b>2.5 PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DA INSTABILIDADE DE PÓRTICO PLANO ( CARGA CRÍTICA ).....</b>	<b>74</b>
<b>2.6 FLUXOGRAMA DAS PROGRAMAÇÕES PARA COMPUTADOR.....</b>	<b>75</b>
2.6.1 FLUXOGRAMA RESUMIDO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA CÁLCULO DA INSTABILIDADE DE PÓRTICO PLANO.....	77

### **CAPÍTULO III**

#### **INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS**

<b>3.1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>84</b>
----------------------------	-----------

<b>3.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA.....</b>	<b>84</b>
3.2.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DE EIXOS PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS.....	84
3.2.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL DE EIXOS PARA O ELEMENTO DE BARRA.....	85
<b>3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA COM     FUNÇÕES DE RIGIDEZ TRIDIMENSIONAIS.....</b>	<b>86</b>
3.3.1 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	87
3.3.2 FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA TRIDIMENSIONAL CONSIDERANDO O EFEITO DA FORÇA AXIAL.....	100
<b>3.4 FUNÇÕES DE RIGIDEZ PARA O CASO TRIDIMENSIONAL.....</b>	<b>107</b>
<b>3.5 PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DA INSTABILIDADE DE     PÓRTICO TRIDIMENSIONAL ( CARGA CRÍTICA ).....</b>	<b>109</b>
<b>3.6 FLUXOGRAMA DAS PROGRAMAÇÕES PARA COMPUTADOR PARA     O CASO TRIDIMENSIONAL.....</b>	<b>110</b>

## **CAPÍTULO IV**

### **ANÁLISE DE INSTABILIDADE DOS PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS COM VÍNCULOS RÍGIDOS E ELÁSTICOS**

<b>4.1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>111</b>
----------------------------	------------

<b>4.2 PROGRAMA ANSYS V-5.2.....</b>	<b>112</b>
<b>4.3 VÍNCULOS ELÁSTICOS.....</b>	<b>112</b>
<b>4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS DO PROGRAMA TIPO I.....</b>	<b>113</b>
4.4.1 EXEMPLO NUMÉRICO 4.1.....	114
4.4.2 EXEMPLO NUMÉRICO 4.2.....	116
4.4.3 EXEMPLO NUMÉRICO 4.3.....	118
4.4.4 EXEMPLO NUMÉRICO 4.4.....	119
4.4.5 EXEMPLO NUMÉRICO 4.5.....	121
4.4.6 EXEMPLO NUMÉRICO 4.6.....	122
<b>4.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS DO PROGRAMA TIPO II.....</b>	<b>124</b>
4.5.1 EXEMPLO NUMÉRICO 4.7.....	124
4.5.2 EXEMPLO NUMÉRICO 4.8.....	126
4.5.3 EXEMPLO NUMÉRICO 4.9.....	129
4.5.4 O EFEITO DOS VÍNCULOS RÍGIDOS E ELÁSTICOS.....	131
4.5.5 EXEMPLO NUMÉRICO 4.10.....	137
4.5.6 EXEMPLO NUMÉRICO 4.11.....	140
4.5.7 EXEMPLO NUMÉRICO 4.12.....	142

4.5.8 EXEMPLO NUMÉRICO 4.13.....	145
4.5.9 EXEMPLO NUMÉRICO 4.14.....	148

## **CAPÍTULO V**

### ESTUDO DO EFEITO DOS CONTRAVENTAMENTOS ELÁSTICOS NA RIGIDEZ DAS ESTRUTURAS

<b>5.1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>153</b>
<b>5.2 COEFICIENTE DE FLAMBAGEM “K”.....</b>	<b>153</b>
<b>5.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>156</b>
5.3.1 EXEMPLO NUMÉRICO 5.1.....	156
5.3.2 EXEMPLO NUMÉRICO 5.2.....	159
5.3.3 EXEMPLO NUMÉRICO 5.3.....	162
5.3.4 EXEMPLO NUMÉRICO 5.4.....	164
<b>5.4 EXEMPLOS DE ESTRUTURAS CONTRAVENTADAS.....</b>	<b>168</b>
5.4.1 CONTRAVENTAMENTOS DE TRELIÇA.....	168
5.4.1.1 EXEMPLO NUMÉRICO 5.5.....	168
5.4.1.2 EXEMPLO NUMÉRICO 5.6.....	172

5.4.2 CONTRAVENTAMENTOS DE PILAR.....	175
5.4.2.1 EXEMPLO NUMÉRICO 5.7.....	175

## **CAPÍTULO VI**

### CONCLUSÕES

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	180
-------------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	183
---------------------------------	-----

### ANEXO A

## LISTA DE FIGURAS

Figura I-1 -	Barra para Determinação da Carga de Flambagem Elástica	8
Figura I-2 -	Efeito P- $\Delta$	16
Figura I-3 -	Momentos de Extremidades Desiguais com Carregamento Transversal	17
Figura I-4 -	Momentos Iguais sem Carregamento Transversal	19
Figura I-5 -	Processo $B_1$ - $B_2$	23
Figura II-1 -	Sistema de Referência no Plano	40
Figura II-2 -	Sistema de Coordenada para o Plano	43
Figura II-3 -	Matriz de Rigidez da Barra com Funções de Rigidez para o Plano	43
Figura II-4 -	Estados de Deslocamento (Plano)	44
Figura III-1 -	Sistema de Referência Tridimensional	85
Figura III-2 -	Barra Genérica	87
Figura III-3 -	Elemento de Volume "dSdx"	91
Figura III-4 -	Acréscimo na CDY	92

Figura III-5 -	Acréscimo na CTD	92
Figura III-6 -	Deslocamento de um Ponto Genérico	94
Figura III-7 -	Sistema de Coordenada Tridimensional	101
Figura III-8 -	Matriz de Rigidez da Barra com Funções de Rigidez Tridimensionais	102
Figura III-9 -	Estados de Deslocamento (Tridimensional)	103
Figura IV-1 -	Exemplo Numérico 4.1	114
Figura IV-2 -	Exemplo Numérico 4.2	116
Figura IV-3 -	Exemplo Numérico 4.3	118
Figura IV-4 -	Exemplo Numérico 4.4	120
Figura IV-5 -	Exemplo Numérico 4.5	121
Figura IV-6 -	Exemplo Numérico 4.6	122
Figura IV-7 -	Exemplo Numérico 4.7	124
Figura IV-8 -	Exemplo Numérico 4.8	127
Figura IV-9 -	Exemplo Numérico 4.9	129
Figura IV-10 -	Exemplo Numérico 4.10	138
Figura IV-11 -	Exemplo Numérico 4.11	141
Figura IV-12 -	Exemplo Numérico 4.12	143

Figura IV-13 -	Exemplo Numérico 4.13	146
Figura IV-14 -	Exemplo Numérico 4.14	148
Figura V-1 -	Coefficiente de Flambagem	154
Figura V-2 -	Exemplo Teórico	155
Figura V-3 -	Exemplo Numérico 5.1	156
Figura V-4 -	Exemplo Numérico 5.2	159
Figura V-5 -	Exemplo Numérico 5.3	162
Figura V-6 -	Exemplo Numérico 5.4	165
Figura V-7 -	Exemplo Numérico 5.5	169
Figura V-8 -	Deformada do Exemplo Numérico 5.5	171
Figura V-9 -	Exemplo Numérico 5.6	172
Figura V-10 -	Deformada do Exemplo Numérico 5.6	174
Figura V-11 -	Exemplo Numérico 5.7	176
Figura V-12 -	Deformada do Exemplo Numérico 5.7	178
Figura V-13 -	Deformada do Exemplo Numérico 5.7	179

## LISTA DE TABELAS

Tabela II-1 -	Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial, Força Cortante e Flexão (Plano)	73
Tabela III-1 -	Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial, Força Cortante e Flexão (Tridimensional)	108
Tabela IV-1 -	Exemplo Numérico 4.1	115
Tabela IV-2 -	Exemplo Numérico 4.2	117
Tabela IV-3 -	Exemplo Numérico 4.3	119
Tabela IV-4 -	Exemplo Numérico 4.4	118
Tabela IV-5 -	Exemplo Numérico 4.5	122
Tabela IV-6 -	Exemplo Numérico 4.6	123
Tabela IV-7 -	Exemplo Numérico 4.7	125
Tabela IV-8 -	Exemplo Numérico 4.8	128
Tabela IV-9 -	Exemplo Numérico 4.9	130
Tabela IV-10 -	Exemplo Numérico 4.10	139
Tabela IV-11 -	Exemplo Numérico 4.11	142

Tabela IV-12 -	Exemplo Numérico 4.12	144
Tabela IV-13 -	Exemplo Numérico 4.13	147
Tabela IV-14 -	Exemplo Numérico 4.14	150
Tabela IV-15 -	Resultados	152
Tabela V-1 -	Exemplo Numérico 5.1	157
Tabela V-2 -	Exemplo Numérico 5.1	158
Tabela V-3 -	Exemplo Numérico 5.2	160
Tabela V-4 -	Exemplo Numérico 5.2	161
Tabela V-5 -	Exemplo Numérico 5.3	163
Tabela V-6 -	Exemplo Numérico 5.3	164
Tabela V-7 -	Exemplo Numérico 5.4	166
Tabela V-8 -	Exemplo Numérico 5.4	167
Tabela V-9 -	Exemplo Numérico 5.5	169
Tabela V-10 -	Exemplo Numérico 5.5	171
Tabela V-11 -	Exemplo Numérico 5.6	173
Tabela V-12 -	Exemplo Numérico 5.7	177

## **RESUMO**

O presente trabalho aborda a análise de instabilidade de estruturas reticuladas tridimensionais constituídas por barras deformáveis em seu plano e fora dele com o objetivo de estudar a influência que os contraventamentos exercem nas estruturas. Estas barras são deformáveis por flexão, por força axial, por força cortante e torção. Um programa de computador foi desenvolvido para possibilitar a determinação dos parâmetros de instabilidade da estrutura, considerando a não linearidade geométrica, em teoria de segunda ordem, no regime elástico. A técnica empregada é a matricial utilizando funções de rigidez tridimensionais (Funções de Estabilidade desenvolvidas para considerar os efeitos simultâneos de flexão, força cortante, força axial e torção). A instabilidade global da estrutura é atingida quando um determinado carregamento provocar a degeneração da matriz de rigidez global da estrutura, ou seja, tornando-a singular. Neste caso, o carregamento é considerado crítico e através dele pode-se determinar os parâmetros de instabilidade da estrutura global. Com as ferramentas desenvolvidas foi possível o estudo da instabilidade das estruturas com vínculos rígidos e elásticos. Possibilitou também o estudo dos efeitos dos contraventamentos elásticos nestas estruturas.

Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a potencialidade do processo desenvolvido e para comparar com resultados de análises obtidas por outros autores que utilizam outros processos e pelo programa ANSYS 5.2.

## **ABSTRACT**

This paper approaches the analysis of instability of tridimensional reticulation structures composed by deformable frames along its plane and out of it with the goal of study the influence of the bracing on the structures. This frames are deformable by flexion, axial force, shear force and torsion. A software was developed to determine the parameters of instability of the structure, considering geometrical non linearity, in theory of elastic second order. The technique used is the matricial using tridimensional stability functions (Stability functions developed to consider simultaneous effects of flexion, axial force, shear force and torsion.). The global instability of the structure is reached when loading to cause the degeneration of the global stiffness matrix of the structure, i.e., it becomes a singular matrix. In this case, the loading is considered critical and through it the instability of global structures parameters can be calculated. Examples are showed to demonstrate the potentiality of the process developed and to compare with results obtained from other authors who use other process and ANSYS 5.2 program.

# ***CAPÍTULO I***

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Hoje, o avanço no uso de edificações em Estruturas Metálicas é devido às vantagens econômicas do processo industrial de fabricação dessas estruturas, a redução no tempo de execução da obra, o aumento do espaço útil interno da obra, com vãos maiores e pilares menores, o alívio das fundações devido ao menor peso próprio do aço em relação às estruturas de concreto, a redução na mão-de-obra para execução e facilidade de montagem. Estas estruturas são normalmente utilizadas para construção de galpões, edifícios, pavilhões e coberturas em geral.

A Engenharia de hoje busca aperfeiçoar as estruturas através do refinamento dos processos de cálculo e através de novas concepções estruturais. Para que isto aconteça, é necessário compreender o comportamento da estrutura quando esta está sob a ação dos carregamentos que lhe são impostos. O carregamento crítico é aquele que ao ser aplicado na estrutura provoca o colapso da mesma. Desta forma, considerações ligadas à instabilidade das estruturas são de fundamental

importância para qualquer projeto em desenvolvimento. Neste aspecto, é importante na análise dessas estruturas a determinação do ponto crítico de instabilidade. Como se tem observado, algumas estruturas metálicas têm entrado em ruína devido à não verificação deste conceito. Este tipo de colapso produz grandes danos; isto acontece porque quando as estruturas se encontram com carregamentos próximos do carregamento crítico de instabilidade, estas estão sujeitas a grandes deslocamentos para pequenos incrementos de carga. Estes grandes deslocamentos podem fazer com que a estrutura entre em ruína sem a capacidade de aviso prévio, pois o colapso pode acontecer de forma rápida. Assim, a estrutura perde as características geométricas para a qual foi projetada, perdendo sua finalidade. Desta forma, a análise de instabilidade global é de fundamental importância devendo ser considerada como uma fase de cálculo do projeto, que tem como objetivo garantir a segurança das estruturas.

Os fenômenos de instabilidade das estruturas são conhecidos graças à própria evolução das pesquisas da Teoria das Estruturas. Isto permitiu que fossem projetadas estruturas cada vez mais esbeltas, através de formas adequadas, o que estimula o engenheiro a ser cada vez mais audacioso, concebendo estruturas mais econômicas e seguras e com capacidade de cargas maiores.

A teoria de instabilidade das estruturas teve seu início com o estudo de Leonard Euler. Em 1744 ele apresentou o estudo do problema de instabilidade de barras por flexão. Desde então, muitos pesquisadores têm apresentado estudos a respeito da análise da instabilidade. Existem hoje vários tipos de análises para uma estrutura reticulada plana. Estas análises são baseadas na hipótese de pequenos deslocamentos. Para a teoria de primeira ordem tem-se a hipótese do equilíbrio da estrutura ser considerado na posição indeformada e para a teoria de segunda ordem na posição deformada. Neste caso pode-se analisar o equilíbrio da estrutura na posição deformada ou na posição indeformada sujeita a perturbação em sua

vizinhança. Este tipo de análise é conhecida como Efeito da Não-Linearidade Geométrica. Quando esta análise é feita considerando expressões aproximadas, ou linearizadas, esta análise é conhecida como teoria de segunda ordem. Quando se consideram as expressões exatas, esta é chamada de teoria de terceira ordem.

## 1.2 - SITUAÇÃO DO PROBLEMA

A fórmula de Euler para carregamento crítico de flambagem elástica por flexão de uma barra esbelta é uma das mais antigas fórmulas que até hoje é utilizada pela engenharia. Segundo JOHNSTON <sup>(1)</sup>, o histórico desta fórmula, junto com suas modificações realizadas por Engesser e Shanley para o comportamento inelástico, fornecem a base para a história da instabilidade de barras iniciada a mais de 254 anos atrás.

Existem muitos fatos que compõem o histórico da flambagem. A história será recontada de uma forma sucinta levando em consideração as seguintes hipóteses:

- 1) a barra é perfeitamente reta e a carga é aplicada ao longo de seu eixo centroidal;
- 2) a seção transversal é constante e feita de um material homogêneo;
- 3) a relação tensão-deformação é assumida linear;
- 4) adota-se a relação tensão-deformação igual tanto na tração quanto na compressão;

5) as condições de extremidade da barra isolada são consideradas perfeitas (os estudos de Euler foi para uma barra em balanço, ou seja, apoio fixo em uma extremidade e apoio livre na outra);

A função estrutural da barra perfeita em estudo é transmitir a força aplicada de compressão de um ponto para outro. Para pequenos incrementos de carga esta barra deve permanecer reta. Com o acréscimo do carregamento axial uma barra esbelta alcança um estado no qual uma perturbação infinitesimal provoca a flexão da barra. A carga para a qual a barra fica instável é denominada de carga crítica.

### **1.2.1 - INSTABILIDADE POR FLEXÃO DE BARRAS NO REGIME ELÁSTICO**

Em 1678, Robert Hooke (1635-1703) estabeleceu a hipótese preliminar do estudo da teoria da flambagem elástica quando declarou que o deslocamento de um corpo elástico era proporcional à carga causadora do deslocamento, JOHNSTON<sup>[1]</sup>. Hooke afirmou que esta relação linear entre força e deslocamento, conhecida hoje como Lei de Hooke, poderia ser aplicada a corpos elásticos como metal, madeira, pedras, tijolos, e coisas parecidas, TIMOSKENKO<sup>[2]</sup>. Esta conclusão foi utilizada mais tarde como base para o desenvolvimento da mecânica dos corpos elásticos.

Outro importante passo foi dado por Jacob Bernoulli (1654-1705), quando estudou a deflexão e a curvatura de uma viga retangular em balanço, TIMOSKENKO<sup>[2]</sup>. Jacob Bernoulli afirmou, em 1705, com base na Lei de Hooke, que para uma viga fletida a curvatura da elástica em cada ponto é proporcional ao momento de flexão naquele ponto. O que estava

correto e foi usado mais tarde por outros matemáticos principalmente por Euler em suas considerações sobre curvas elásticas.

O irmão mais novo de Jacob Bernoulli, John Bernoulli (1667-1748), foi considerado o maior matemático de seu tempo. O resultado de seu trabalho traduz-se entre outros no desenvolvimento do cálculo diferencial e na formulação dos princípios dos trabalhos virtuais. Mas, a sua mais importante contribuição para a resistência dos materiais foi o fato de ter sido professor de Leonard Euler e ter um filho, Daniel Bernoulli, que avançou seus estudos.

Daniel Bernoulli (1700-1782), além de matemático era um experimentador e suas experiências forneciam novos problemas matemáticos para Euler. Daniel Bernoulli sugeriu a Euler que ele deveria aplicar o cálculo variacional para obter as equações das curvas elásticas. O trabalho de Euler, mais tarde, foi baseado nesta sugestão. A "World Who's Who in Science", apresenta nove membros da família Bernoulli que entre os anos de 1654 e 1863 contribuíram substancialmente para o desenvolvimento da matemática e da mecânica, JOHNSTON<sup>[1]</sup>.

Leonard Euler (1707-1783) é considerado o mais produtivo matemático de todos os tempos, JOHNSTON<sup>[1]</sup>. Em 1736, Euler publicou seu famoso livro sobre mecânica, "Mechanica sive motus scientia analytice exposita", TIMOSHENKO<sup>[2]</sup>. Neste livro em vez de empregar o método geométrico usado por Newton e seus seguidores, Euler introduziu o método analítico. Ele mostrou como as equações diferenciais do movimento da partícula podem ser derivadas e como o movimento de um corpo pode ser encontrado por integração destas equações diferenciais. Este método simplificou a solução dos problemas, e o livro teve uma grande influência proporcionando o desenvolvimento da mecânica. Lagrange (1736-1813) afirmou em seu livro "Mécanique analytique" (1788), que o livro de Euler era

o primeiro tratado mecânico no qual o cálculo era aplicado à ciência dos movimentos dos corpos.

No período da publicação de seu livro, Euler voltou seu interesse para as curvas elásticas. Seguindo a sugestão de Daniel Bernoulli e baseado na teoria de Jacob Bernoulli, Euler começou a investigar as formas das curvas de vigas elásticas esbeltas sobre várias condições de carregamento. O principal resultado do trabalho de Euler foi publicado em seu livro "Methodus Inveniendi Lineas Curvas..." publicado em 1744. Este era o primeiro livro de cálculo variacional e que também continha o primeiro tratamento sistemático das curvas elásticas. Neste livro ele apresenta a "fórmula da coluna" que ainda hoje carrega seu nome chamada de Fórmula de Euler. A carga de Euler é a carga crítica para qual uma barra esbelta elástica pode suportar um carregamento axial em uma configuração ligeiramente fletida. As colunas do tempo de Euler eram feitas de alvenaria ou de madeira. As de madeira eram consideradas por Euler como "propensa a flambar", e, portanto, apropriada para a aplicação de sua fórmula. Euler, como o mais produtivo matemático, possui uma extensa bibliografia composta de 866 publicações.

Euler baseou sua fórmula na hipótese de que o momento de rigidez em qualquer ponto da barra era igual a " $Ek^2 / \rho$ ", onde " $Ek^2$ " era uma constante que devia ser determinada por meios experimentais e " $\rho$ " era o raio de curvatura da barra fletida, JOHNSTON<sup>[1]</sup>. Euler tinha apenas idéias errôneas da relação entre a forma geométrica da seção transversal e o termo " $Ek^2$ ". Ele declarou, mais tarde, em 1759, em seu tratado sobre barras: "Parece que o momento de rigidez é proporcional ao quadrado da espessura, ou mesmo seu cubo; do qual podemos concluir que se a barra é cilíndrica seu momento de rigidez será proporcional à terceira potência, ou possivelmente à quarta potência do diâmetro da base". Desta forma, Euler ilustra a incerteza sobre o conceito do momento de inércia da seção

transversal desconhecido naquela época, bem como o desconhecimento da distribuição das tensões e da localização do eixo neutro de uma barra fletida. O primeiro a estabelecer o conceito de momento de inércia foi Christian Huygens (1629-1695), TIMOSKENKO<sup>[2]</sup>.

Em sua fórmula que apresenta a força necessária para uma barra flambar:

$$P_e = \frac{\pi^2 E k^2}{L^2} \quad (1.1)$$

Euler definiu "E" como uma propriedade elástica e "k<sup>2</sup>" como uma propriedade dimensional da barra. Esta não foi apenas a primeira solução teórica para um problema de instabilidade, mas também a primeira solução de um problema de auto valores, THÜRLIMANM<sup>[3]</sup>. Embora Euler não tivesse nenhuma base para a determinação independente de "E" e "k<sup>2</sup>", ele propôs corretamente que o termo "E k<sup>2</sup>" poderia ser determinado por um ensaio em uma viga em balanço com carga "P" na extremidade livre, no qual "Δ" é a deflexão da viga, como mostra a eq.(1.2):

$$E k^2 = \frac{P L^3}{3 \Delta} \quad (1.2)$$

A transição de "E k<sup>2</sup>" de Euler para "EI" requer a aplicação da Lei de Hooke em conjunto com a correta consideração da distribuição das tensões internas de uma barra fletida.

Hoje, sabe-se que a Fórmula de Euler poderia ter sido deduzida da seguinte maneira: seja uma barra com extremidades rotuladas e indeslocáveis perpendicularmente ao seu eixo. Para a determinação da carga de flambagem elástica a Fig.1-1 mostra esta barra na sua configuração fletida para um carregamento "P" centrado. Da resistência dos materiais tem-se:

$$\frac{M}{EI_z} = \frac{1}{R} \quad (1.3)$$

sendo "M" o momento fletor num ponto "A" qualquer igual a "Py"; "E" é o módulo de elasticidade longitudinal; "I<sub>z</sub>" é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo de flexão z-z (perpendicular ao plano da Fig.I-1); e " $\frac{1}{R}$ " é a curvatura no ponto "A".

A expressão aproximada da curvatura é dada por:

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.4)$$

Desta forma tem-se:

$$\frac{Py}{EI_z} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.5)$$

Fazendo  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$ , resulta:

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (1.6)$$

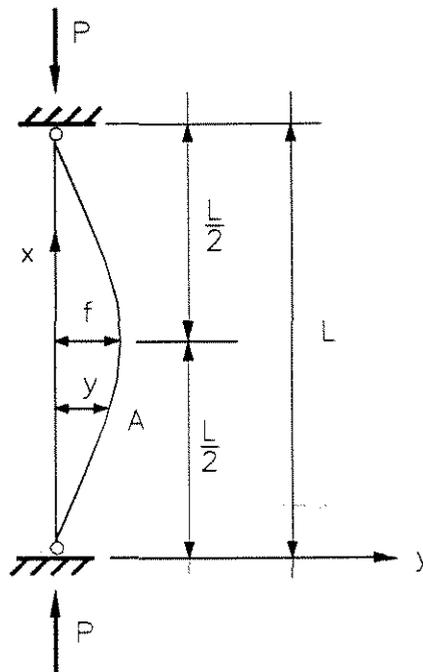


Figura I-1 Barra para Determinação da Carga de Flambagem Elástica.

A solução desta equação diferencial é dada por:

$$y = C1 \operatorname{sen} \alpha x + C2 \operatorname{cos} \alpha x \quad (1.7)$$

Aplicando-se as condições de contorno na eq.(1.7) para  $x=0$  e  $x=L$  e lembrando que para os dois casos  $y=0$ , obtém-se:

$$x = 0 \Rightarrow C2 = 0 \quad (1.8)$$

$$x = L \Rightarrow C1 \operatorname{sen} \alpha L = 0 \quad (1.9)$$

A eq.(1.9) pode ser interpretada de duas maneiras: para  $C1=0$  tem-se a forma reta da barra e para  $\operatorname{sen} \alpha L = 0$  tem-se a forma curva, ou seja, barra fletida ( $C1 \neq 0$ ). A expressão  $\operatorname{sen} \alpha L = 0$  representa, portanto, a condição de flambagem da barra. Assim, para  $\alpha L = n\pi$  ou  $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ , sendo  $n=1, 2, 3, \dots$ , obtém-se a linha elástica de flambagem:

$$y = C1 \operatorname{sen} \alpha x = C1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (1.10)$$

Lembrando que  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$  e  $\alpha = \frac{n\pi}{L}$  pode-se concluir que a carga

teórica de flambagem é dada pela seguinte expressão:

$$P_{fl} = EI_z \alpha^2 = EI_z \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (1.11)$$

O valor  $n=0$  conduz a uma forma reta para a barra o que não é interessante neste caso. O valor de  $n=1$  corresponde ao primeiro modo de flambagem, conforme mostrado na Fig.1-1. Outros valores para "n" (2, 3, 4,...) correspondem a outros modos de flambagem e cargas de flambagem mais elevadas, sem interesse prático.

Desta forma, para  $n=1$ , tem-se a atual "Fórmula de Euler", dada por:

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (1.12)$$

Alguns outros pesquisadores contribuíram paralelamente para o desenvolvimento da teoria de flambagem. Mariotte (1620-1684) realizou experimentos com vigas em balanço, TIMOSKENKO<sup>[2]</sup>. Mariotte não estava apenas interessado na resistência dos materiais mas também nas propriedades elásticas e concluiu que em todo material testado o alongamento era proporcional à aplicação de forças. Ele afirmou que fraturas ocorrem quando o alongamento excede certo limite. Os resultados de seus experimentos foram publicados em 1686, após sua morte. Ele foi o primeiro a reconhecer que as fibras superiores de uma viga em balanço, com uma carga em sua extremidade livre, eram estendidas, enquanto as fibras inferiores eram encurtadas. Leibniz (1646-1716) em 1684, afirmou que eram corretas as conclusões de Mariotte e recomendou a aplicação da Lei de Hooke para o problema. Parent (1666-1716) em 1713 mostrou a correta distribuição das tensões em uma viga fletida retangular, mas seu trabalho dava margens para investigações futuras. Em 1773, 29 anos depois da apresentação da fórmula da coluna de Euler, Coulomb (1736-1806) aplicou corretamente a Lei de Hooke e as equações do equilíbrio estático para desenvolver a fórmula que relaciona o momento de flexão com as tensões normais em uma viga em balanço. As deformações por cortante foram negligenciadas por Coulomb e uma teoria mais completa de uma viga fletida utilizando a teoria da elasticidade foi desenvolvida mais tarde pelo trabalho de Navier e St. Venant, JOHNSTON<sup>[1]</sup>.

Embora a fórmula de Euler seja conhecida universalmente e tida como sendo a base para o dimensionamento de barra esbelta de aço, ela foi bastante criticada nos anos de 1800, isto porque falhava quando previa a capacidade de resistência à compressão dos materiais utilizados naquela época, como a alvenaria, madeira ou ferro fundido. Somente 100 anos depois da contribuição de Euler é que os materiais para os quais sua

fórmula é mais apropriada tornaram-se disponível para uso comercial em estruturas. As estruturas que eram inicialmente de ferro forjado passaram a ser de aço, por volta de 1850. A partir de 1900, as estruturas de liga de alumínio têm sido acrescentadas na família destes metais para construção, JOHNSTON<sup>[1]</sup>.

Por falta de experimentos que comprovassem a eficácia da fórmula de Euler seu trabalho foi bastante criticado. Em 1822, J. Robinson classificou o trabalho de Euler como "... um árido discurso matemático, procedimento de suposição que (para falar favoravelmente) são extremamente desnecessários ... sua teoria da resistência de barras é uma das mais fortes evidências deste seu desmedido procedimento ...", JOHNSTON<sup>[1]</sup>. Em 1840, E. Hodgkinson relatou experimentos com barras esbeltas de ferro forjado. Em revisão desses resultados Todhunter e Pearson dão algum crédito, ainda com relutância, ao trabalho de Euler, mas fazem uma previsão das coisas que estariam por vir; eles afirmaram: "... eu arrisco uma opinião para pensar que a teoria de Euler de forma modificada pode ajudar-nos...". Em 1905, na oitava edição de seu livro "Modern Framed Structures" Johnson, Bryan e Turneure recomendam a Fórmula de Euler, precedida por uma constante de modificação obtida através de dados experimentais, JOHNSTON<sup>[1]</sup>. Estava firmada a teoria de Euler.

Concluindo, a história da Fórmula de Euler persiste a mais de 250 anos. Embora conhecido pelos engenheiros até hoje pelo desenvolvimento da Fórmula de Euler, é ainda pouco prestigiado, até pela "World Who's Who in Science" que falha ao mencionar suas contribuições, JOHNSTON<sup>[1]</sup>. É necessário, portanto, de tempos em tempos, recontar esta história para que ela não se perca no tempo. Ao mesmo tempo deve ser reconhecido que não existe em estruturas reais barras perfeitas. As barras nunca são perfeitamente retas e apresentam imperfeições e tensões residuais vinda do próprio processo de fabricação. As barras quando carregadas, quase sempre, apresentam apreciável redução de resistência a momentos fletores,

o qual pode somente ser estimado. Barras reais não possuem ligações perfeitamente rígidas em suas extremidades que podem variar com a vida da estrutura. Existe uma vasta, e às vezes confusa, literatura dedicada aos fatores que fazem uma barra real diferente da barra perfeita de nossa história, mas sua história continua fascinante, que devido a sua proporção pode ser considerada uma verdadeira epopéia.

É importante salientar que toda análise descrita acima, até agora, foi feita sempre supondo a barra isolada da estrutura e admitindo-se vínculos perfeitos em suas extremidades. Portanto, ainda não analisando a barra acoplada em um pórtico.

### **1.2.2 - ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM**

A análise agora será feita considerando a barra acoplada à estrutura do pórtico. Cada extremidade da barra estará rigidamente ligada à barra adjacente compartilhando a rigidez do conjunto da estrutura do pórtico.

A análise elástica linear de estruturas, ou a chamada análise elástica em teoria de primeira ordem, é bem conhecida pelos engenheiros da época atual. Esta teoria analisa o equilíbrio na posição indeslocada quando as deformações e deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da estrutura. Com o uso dos micro-computadores, a análise matricial tem se tornado muito popular porque fornece um consistente método de análise estrutural. Entretanto, na análise realista para o dimensionamento de estruturas, vários efeitos secundários deveriam ser adicionados aos esforços de primeira ordem. AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> citam entre esses efeitos secundários:

- 1) a não-linearidade geométrica dos efeitos  $P-\delta$  e  $P-\Delta$ , conhecidos como efeitos de segunda ordem. O efeito  $P-\delta$  seria o momento obtido pelo produto da carga axial com o deslocamento transversal da barra e o efeito  $P-\Delta$  seria o momento obtido pelo produto das cargas verticais multiplicadas pelos deslocamentos longitudinais da estrutura;
- 2) o efeito de encurtamento ou arqueamento da barra quando ela é carregada axialmente;
- 3) o comportamento semi-rígido das conexões ao invés de completamente rígido;
- 4) a incerteza na idealização do tipo de apoio;
- 5) os efeitos do recalque diferencial nas fundações;
- 6) os efeitos da variação não-uniforme da temperatura;
- 7) os efeitos causados pelas imperfeições geométricas, ou seja, as barras não são perfeitamente retas;
- 8) os efeitos causados pela excentricidade do carregamento;
- 9) os efeitos causados pela presença das tensões residuais.

Esses efeitos influenciarão no comportamento estrutural o que resultará na redução da rigidez da estrutura e/ou da sua resistência; isto afetará a distribuição dos esforços internos no sistema estrutural.

A introdução desses efeitos na análise estrutural durante o dimensionamento não é usualmente considerado na prática, principalmente devido ao fato que:

- 1) as técnicas desenvolvidas até o momento não têm alcançado um estado de maturidade;

- 2) a introdução destes efeitos na análise pode envolver considerável tempo de programação;
- 3) e também pelo fato dos engenheiros acostumados com o dimensionamento prático não estarem familiarizados com as implicações desses efeitos e suas possíveis influências nas análises.

### **1.2.2.1 PROCESSOS ANALÍTICOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM**

Existem vários processos aproximados para análise elástica de estruturas em teoria de segunda ordem, mas nestas análises dificilmente se consideram todos os efeitos secundários. Será feita uma breve revisão de alguns desses processos.

#### **A) Efeito P- $\Delta$**

O efeito P- $\Delta$  seria o momento produzido pelas cargas verticais vezes o deslocamento longitudinal da estrutura. Este efeito é caracterizado, portanto, pela atuação das cargas verticais aplicadas à estrutura deformada. Desta forma, a carga vertical vezes o deslocamento provoca um momento extra na estrutura que deve ser considerado. O processo consiste em calcular os esforços solicitantes e deslocamentos adicionais provocados pelas cargas verticais. Estes novos esforços são incorporados ao carregamento da estrutura. Neste processo, o efeito P- $\delta$ , ou a redução da rigidez da barra, devido a carga axial é negligenciado.

A norma NBR 8800<sup>[5]</sup> recomenda as seguintes etapas para a aplicação da combinação de ações:

Etapa 1) Aplicar à estrutura a combinação apropriada de ações de cálculo, ver Fig.1\_2;

Etapa 2) Fazer a análise elástica em teoria de primeira ordem da estrutura, determinando os deslocamentos horizontais " $\Delta_i$ " ao nível de cada andar;

Etapa 3) Calcular os valores das forças cortantes fictícias " $V_i$ ":

$$V_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (1.13)$$

sendo " $V_i$ " a força cortante fictícia agindo no andar " $i$ "; " $\sum P_i$ " é o somatório das forças normais nos pilares do andar " $i$ ", inclusive nos pilares que não pertencem ao sistema resistente a cargas horizontais; " $h_i$ " é a altura do pilar " $i$ "; e " $\Delta_{i+1}$ ", " $\Delta_i$ " são os deslocamentos horizontais dos níveis " $i+1$ " e " $i$ ", respectivamente.

Etapa 4) Calcular os valores das forças horizontais fictícias " $H_i$ ":

$$H_i = V_{i-1} - V_i \quad (1.14)$$

Etapa 5) Aplicar novamente o carregamento inicial à estrutura como na etapa 1, incluindo agora as forças " $H_i$ ";

Etapa 6) Repetir as etapas 2 até 5, até que os resultados sejam convergentes, ou seja, quando o valor " $\Delta_i$ " no final de um ciclo for quase igual à previsão para este ciclo. Se, após cinco ciclos de iteração, os resultados não convergirem, talvez a estrutura seja excessivamente flexível.

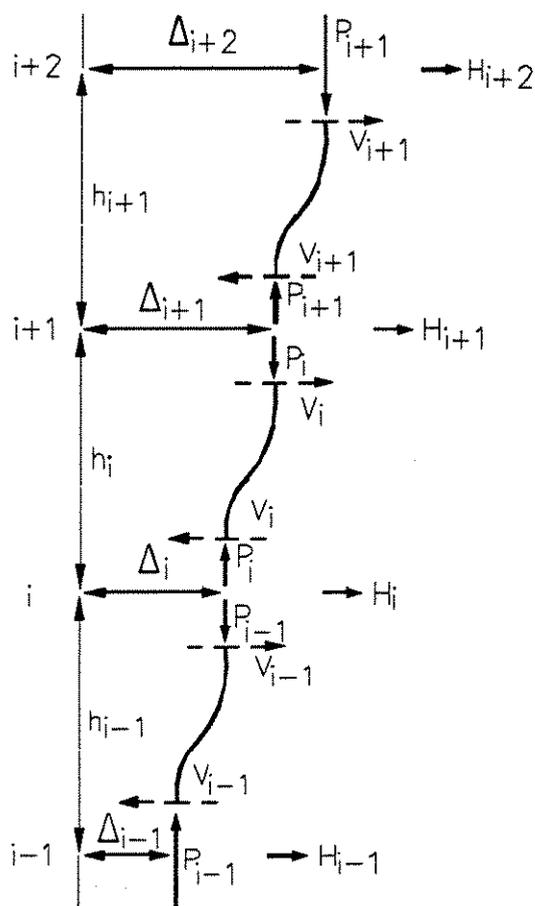


Figura I-2 Efeito P- $\Delta$ .

Após a convergência do processo as forças e momentos resultantes em cada barra agora incluem o efeito P- $\Delta$ .

## B) Processo da Expressão Analítica de Amplificação do Momento Fletor

Este processo tem por base a amplificação dos momentos obtidos pela análise em teoria de primeira ordem produzidos pelo carregamento atuante. Seja o caso geral dado pela Fig.I\_3:

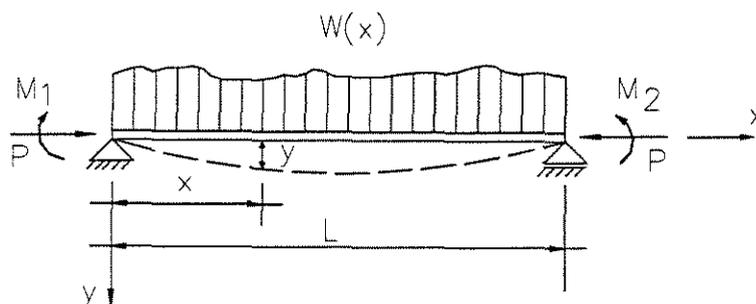


Figura I\_3 Momentos de Extremidades Desiguais Com Carregamento Transversal.

sendo "w" o carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra; " $M_1$ " e " $M_2$ " são os momentos aplicados nas extremidades da barra; "y" é o deslocamento transversal da barra no plano da estrutura; "x" é a direção do eixo ao longo do comprimento da barra; "EI" é a rigidez à flexão e "P" é a força axial atuante na barra. Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra denominado de " $M_x$ " e lembrando da equação clássica da resistência dos materiais, onde o momento está relacionado com a curvatura, tem-se:

$$M_x = M_i + Py = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.15)$$

sendo " $M_i$ " o momento resultante do carregamento transversal da barra.

Dividindo ambos os lados da eq.(1.15) por "EI" e admitindo barra de seção transversal constante, resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = -\frac{M_i}{EI} \quad (1.16)$$

Derivando duas vezes a eq.(1.16), tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_i}{dx^2} \quad (1.17)$$

Reescrevendo a eq.(1.15), tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} \quad (1.18)$$

Derivando duas vezes a eq.(1.18), chega-se a:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_x}{dx^2} \quad (1.19)$$

Substituindo a eq.(1.18) e eq.(1.19) na eq.(1.17), resulta:

$$-\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{P}{EI} \left( -\frac{M_x}{EI} \right) = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_i}{dx^2} \quad (1.20)$$

Fazendo  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ , tem-se:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \alpha^2 M_x = \frac{d^2 M_i}{dx^2} \quad (1.21)$$

A solução para esta equação diferencial pode ser dada por:

$$M_x = C1 \operatorname{sen} \alpha x + C2 \operatorname{cos} \alpha x \quad (1.22)$$

Considere o caso particular de  $M_1 = M_2 = M$  sem o carregamento transversal apresentado na Fig.1-4, citado por SALMON e JOHNSON<sup>[6]</sup>, como o caso da "Fórmula Secante".

O máximo valor de " $M_x$ ", dado pela eq.(1.22), pode ser obtido igualando sua derivada a zero, assim:

$$\frac{dM_x}{dx} = C1 \alpha \operatorname{cos} \alpha x - C2 \alpha \operatorname{sen} \alpha x = 0$$

$$C1 \alpha \cos \alpha x = C2 \alpha \operatorname{sen} \alpha x$$

$$\frac{C1}{C2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\cos \alpha x} = \tan \alpha x$$

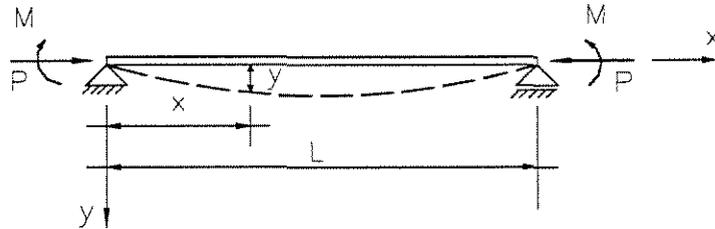


Figura I\_4 Momentos Iguais sem Carregamento Transversal.

Assim, pode-se concluir que:

$$\cos \alpha x = \frac{C2}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} \quad (1.23)$$

$$\operatorname{sen} \alpha x = \frac{C1}{\sqrt{C1^2 + C2^2}}$$

Substituindo a eq.(1.23) em eq.(1.22), obtém-se a expressão para o momento máximo:

$$M_{x\text{MAX}} = \frac{C1^2}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} + \frac{C2^2}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} = \sqrt{C1^2 + C2^2} \quad (1.24)$$

As constantes "C1" e "C2" podem ser determinadas pelas condições de contorno aplicadas à eq.(1.22). Para  $x=0$  e  $x=L$  tem-se  $M_x=M$ , assim:

$$x=0 \Rightarrow C2 = M \quad (1.25)$$

$$x=L \Rightarrow M = C1 \operatorname{sen} \alpha L + M \cos \alpha L$$

$$C1 = \frac{M - M \cos \alpha L}{\operatorname{sen} \alpha L} \quad (1.26)$$

Substituindo a eq.(1.26) e a eq.(1.25) na eq.(1.24), tem-se:

$$\begin{aligned}
 M_{x\text{MAX}} &= \sqrt{\left(\frac{M(1-\cos\alpha L)}{\text{sen}\alpha L}\right)^2 + M^2} \\
 M_{x\text{MAX}} &= M\sqrt{\left(\frac{(1-\cos\alpha L)}{\text{sen}\alpha L}\right)^2 + 1} \\
 M_{x\text{MAX}} &= M\sqrt{\frac{1-2\cos\alpha L + \cos^2\alpha L + \text{sen}^2\alpha L}{\text{sen}^2\alpha L}} \\
 M_{x\text{MAX}} &= M\sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha L)}{1-\cos^2\alpha L}} \\
 M_{x\text{MAX}} &= M\sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha L)}{(1-\cos\alpha L)(1+\cos\alpha L)}} = M\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha L}} \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

Lembrando das relações goniométricas que  $\cos\frac{\alpha L}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha L}{2}}$  e

que  $\sec\frac{\alpha L}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha L}{2}}$ , na eq.(1.27), tem-se:

$$M_{x\text{MAX}} = M\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha L}{2}}\right) = M\sec\frac{\alpha L}{2} \quad (1.28)$$

Através da teoria dos pequenos deslocamentos pode-se considerar

que  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$ , ou seja,  $\cos\frac{\alpha L}{2} = 1 - \frac{(\alpha L)^2}{2! 4}$ , assim voltando na eq.(1.28), tem-se:

$$M_{xMAX} = M \left( \frac{1}{\cos \frac{\alpha L}{2}} \right) = M \left( \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2 L^2}{8}} \right) \quad (1.29)$$

Substituindo o valor de  $\alpha^2$  em eq.(1.29), obtém-se:

$$M_{xMAX} = M \left( \frac{1}{1 - \frac{PL^2}{EI 8}} \right) = M \left( \frac{1}{1 - \frac{PL^2 \pi^2}{EI 8 \pi^2}} \right) \quad (1.30)$$

Lembrando que  $P_{CRIT}$  é dado pela eq.(1.12), pode-se fazer:

$$M_{xMAX} = M \left( \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{CRIT}} \frac{\pi^2}{8}} \right) = M \left( \frac{1}{1 - \frac{P}{0.81 P_{CRIT}}} \right) \quad (1.31)$$

Esta é a solução correta do  $M_{xMAX}$ . Comparando com a NBR 8800<sup>[5]</sup>, item 5.6.1.3.2- Estados Limites - é necessário a multiplicação do fator de segurança  $\phi_c=0.9$  na eq.(1.31). Assim, resulta:

$$M_{xMAX} = M \left( \frac{1}{1 - \frac{P}{0.81 P_{CRIT} 0.9}} \right) = M \left( \frac{1}{1 - \frac{P}{0.73 P_{CRIT}}} \right) \quad (1.32)$$

Desta forma, o fator  $\left( \frac{1}{1 - \frac{P}{0.73 P_{CRIT}}} \right)$  amplia o momento "M" calculado

em teoria de primeira ordem.

### C) Processo $B_1$ - $B_2$

O processo  $B_1$ - $B_2$ , apresentado pela AISC/LRFD<sup>[7]</sup>, não separa o efeito  $P$ - $\delta$  do efeito  $P$ - $\Delta$ . Estes efeitos são considerados na amplificação dos momentos resultantes para dois casos particulares: o de não haver translação lateral, onde são colocados vínculos adequados que impedem sua translação e o caso da translação lateral permitida no qual a translação é livre, conforme Fig I-5. Segundo AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup>, esta solução tem sido largamente discutida por vários autores como Cheong-Sait-Moy e Downs, Grundy e Lemessurier. Em 1986, a especificação AISC/LRFD<sup>[7]</sup> recomendou um procedimento no qual dois fatores de amplificação diferentes fossem utilizados um para o caso de não haver translação e outro para o caso de translação permitida. Estes coeficientes são sugeridos na determinação do momento de dimensionamento de barras para o caso em que fosse realizada a análise apenas em teoria de primeira ordem.

O processo se resume em calcular o momento de dimensionamento " $M_u$ " da barra como:

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (1.33)$$

sendo " $M_{nt}$ " o momento elástico em teoria de primeira ordem da barra assumindo não haver deslocamento horizontal na estrutura, caso de não haver translação; " $M_{lt}$ " é o momento elástico em teoria de primeira ordem da barra assumindo translação lateral da estrutura, caso da translação permitida; " $B_1$ " é o fator de amplificação do momento  $P$ - $\delta$ ; e " $B_2$ " é o fator de amplificação do momento  $P$ - $\Delta$ .

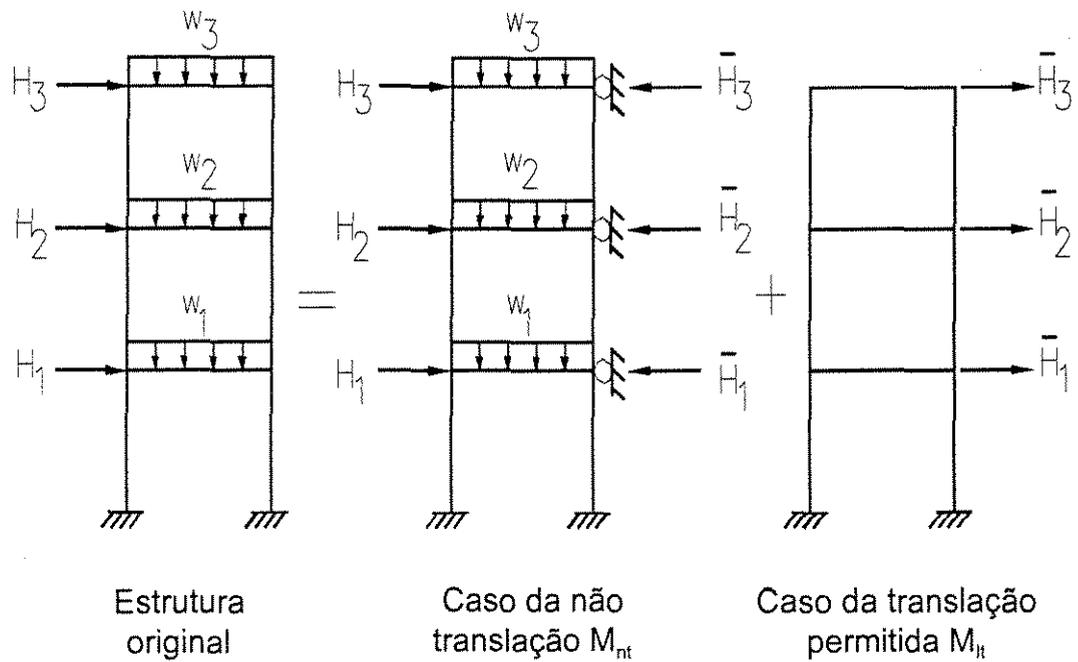


Figura I-5 Processo  $B_1$ - $B_2$ .

O valor de " $M_u$ " determinado desta forma será utilizado para o dimensionamento de barras comprimidas nas expressões de iteração para flexo-compressão.

O fator " $B_1$ " é dado por:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{P}{P_e}} \geq 1 \quad (1.34)$$

sendo " $P$ " a força axial de compressão na barra; " $C_m$ " é um coeficiente de equivalência do momento aplicado definido da seguinte maneira:

- a) para barras comprimidas restringidas em estruturas indeslocáveis e não sujeitas a carregamentos transversais entre seus apoios:

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \quad (1.35)$$

sendo " $\frac{M_1}{M_2}$ " a relação entre o menor e o maior dos momentos fletores de cálculo, nas extremidades apoiadas da barra. A relação " $\frac{M_1}{M_2}$ " é positiva quando estes momentos provocam curvatura reversa na barra e negativa quando provocam curvatura simples;

b) para barras comprimidas em estruturas indeslocáveis e sujeitas a carregamentos transversais entre apoios, o valor de " $C_m$ " pode ser determinado por análise ou ser tomado igual a:

- barras cujas extremidades são engastadas  $C_m=0.85$
- barras cujas extremidades são articuladas  $C_m=1.0$

O valor " $P_e$ " é dado por:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (1.36)$$

sendo " $K$ " o comprimento efetivo de flambagem. No caso de não haver translação permitida, ou seja, estruturas contraventadas, o valor de " $K$ " para barras comprimidas deve ser unitário, a não ser que a análise estrutural mostre que um valor menor deva ser utilizado.

O fator " $B_2$ " é dado por:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P}{\sum P_e}} \quad (1.37)$$

sendo " $\sum P$ " o somatório de todas as forças axiais em todas as colunas de um pavimento; para a " $\sum P_e$ " o valor de " $P_e$ " é o mesmo dado pela eq.(1.36), mas neste caso da translação permitida onde a estabilidade depende da rigidez à flexão da conexão viga coluna o valor de " $K$ " para barras comprimidas deve ser determinado por análise estrutural e não deve ser menor que a unidade.

Desta forma, o momento " $M_u$ " obtido pela eq.(1.33) inclui os efeitos  $P-\delta$  e  $P-\Delta$ .

### 1.2.2.2 - PROCESSOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM

A equação diferencial que governa uma barra tem a seguinte fórmula:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = w \quad (1.38)$$

sendo " $w$ " o carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra; " $y$ " é o deslocamento transversal da barra no plano da estrutura; " $x$ " é a direção do eixo ao longo do comprimento da barra; " $EI$ " é a rigidez à flexão e " $P$ " é a força axial atuante na barra.

Para resolver esta equação diferencial pode-se recorrer a dois processos: o processo aproximado feito através do método dos elementos finitos ou através da solução da própria equação diferencial do problema, conhecido como processo das funções de rigidez. Estes processos numéricos consideram a degeneração geométrica da estrutura através dos

efeitos  $P-\delta$  e  $P-\Delta$ , conhecidos como efeitos de segunda ordem, quando ao ser aplicado um carregamento a estrutura passa a apresentar uma configuração deformada.

## A) Método dos Elementos Finitos

Para resolver esta equação pelo método dos elementos finitos há necessidade de assumir uma função aproximada para o deslocamento "y" e uma função aproximada para a deformação axial ao longo da barra. Assim, definindo-se os graus de liberdade da barra e as novas funções aproximadoras, através do método dos elementos finitos obtém-se a matriz de rigidez  $[K_e]$  e a matriz de rigidez geométrica  $[K_g]$ . Sendo conhecido o vetor de cargas nodais equivalentes obtém-se os deslocamentos através da equações de equilíbrio:

$$[K_e + K_g]\{d\} = \{F\} \quad (1.39)$$

sendo  $[K_e + K_g]$  a matriz de rigidez;  $\{d\}$  é o vetor das componentes deslocamentos da estrutura e  $\{F\}$  é o vetor de cargas nodais equivalentes.

A matriz  $[K_e]$  é a matriz de rigidez elástica obtida com as hipóteses da teoria de primeira ordem e  $[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica que é linearmente proporcional à força na barra "P". Quando "P" é negativo, ou seja de compressão, então esta matriz reduzirá a rigidez da barra, e quando "P" é positivo, no caso de tração, a rigidez da barra será acrescida.

Esta formulação matricial não é exata porque foram utilizadas funções aproximadoras para os deslocamentos a fim de representar a curva de deflexão da barra. Alguns autores como Grundy, Allen e Bulson e Goto e

Chen afirmam que a imprecisão desta função torna-se evidente quando “P” é muito grande, AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup>. Este problema pode ser vencido dividindo a barra em sub-elementos, mas esta solução dificulta a modelagem e aumenta o esforço numérico e torna a interpretação dos resultados mais complicada. Um dos primeiros a levar em consideração a influência geométrica foi MARTIN<sup>[8]</sup> em 1960. O termo “matriz geométrica” somente foi utilizado pela primeira vez por ARGYRIS<sup>[9]</sup> em 1964. Estas matrizes podem ser encontradas no trabalho de AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> e no livro de PRZEMIENIECKI<sup>[10]</sup>, entre outros.

Quando a barra apresenta carregamento entre suas extremidades a eq.(1.39) será acrescida de um vetor de ações de engastamento perfeito  $\{F_f\}$ , desta forma tem-se:

$$[K_e + K_g]\{d\} + \{F_f\} = \{F\} \quad (1.40)$$

## B) Processo das Funções de Rigidez

Neste processo a equação diferencial, dada pela eq.(1.38), é resolvida de forma exata assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos. A solução é feita através das equações de equilíbrio e das condições de contorno que aparecem na barra quando esta é analisada na posição deformada e deslocada. A matriz de rigidez é obtida através da solução da equação diferencial que fornece as funções de rigidez. Este processo é conhecido desde 1930. Entretanto, Livesley e Chandler e Horne e Merchant foram os primeiros a tabular na forma conveniente para ser usada na análise de instabilidade, escrita com fatores de correção baseados na matriz de primeira ordem, AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup>.

Desde então a matriz de rigidez da barra baseada nas funções de rigidez pode ser escrita de várias formas. Estas podem ser obtidas nas referências AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> e GERE e WEAVER<sup>[11]</sup>.

A equação elementar da matriz de rigidez neste caso, através do processo dos deslocamentos, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_2]\{d\} + \{F_f\} + \{F_b\} = \{F\} \quad (1.41)$$

sendo  $[K_2]$  a matriz de rigidez baseada nas funções de rigidez;  $\{d\}$  é o vetor das componentes dos deslocamento da estrutura;  $\{F_f\}$  é um vetor das componentes das forças de extremidade devido a carga lateral "P";  $\{F_b\}$  é um vetor das componentes das forças de extremidade devido ao efeito de encurtamento da barra; e  $\{F\}$  é o vetor de forças.

### **1.2.2.3-PROCESSO PROPOSTO POR AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> PARA ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM**

Foram mostrados anteriormente alguns processos aproximados e o processo matricial com funções de rigidez. Estes processos analisados aqui, sob vários pontos de vista, com suas simplificações e generalizações, visam abranger todo tipo de estrutura e carregamento com exatidão. Estas simplificações podem muitas vezes levar a interpretações errôneas dos processos. Por outro lado, o avanço no uso de micro-computadores facilita análises mais complexas para o dimensionamento das estruturas.

A vantagem dos processos aproximados é que somente a análise em primeira ordem é necessária para o dimensionamento. O efeito de segunda ordem é considerado através da aplicação de fatores de amplificação.

Entretanto, as desvantagens destes processos são muitas, por exemplo, podemos citar algumas delas para o processo  $B_1 - B_2$  :

- 1) é restringido para estruturas retangulares;
- 2) é feita uma correção local nas barras, mas não é analisado o comportamento global desta barra na estrutura (na verdade, as barras sobre a ação do efeito de segunda ordem redistribuem as suas forças internas);
- 3) interpretações errôneas do processo pode levar a colocação errada dos suportes artificiais para o caso de não haver translação e também erros no cálculo de alguns fatores, tais como: o fator " $C_m$ " ou no comprimento efetivo de flambagem " $K$ ";
- 4) a soma dos dois momentos amplificados, no caso de não haver translação e para o caso da translação permitida, embora eles possam não ocorrer na mesma localização;
- 5) não se pode prever os momentos finais corretos nas barras, assim como as forças axiais. Entretanto, na análise de segunda ordem, os momentos são amplificados para tentar levar em consideração a ação global da estrutura que é o caso real;
- 6) é exigido um esforço considerável no cálculo do fator de amplificação, principalmente se esse cálculo é manual, e portanto existe uma boa chance de se cometer em erros no processo;
- 7) são necessárias duas análises em teoria de primeira ordem para a solução da estrutura com diferentes carregamentos e condições de contorno: uma para o caso de não haver translação e outra para o caso da translação permitida.

Por outro lado, o processo matricial também apresenta alguns inconvenientes, tais como:

- 1) ele requer uma ferramenta especial para a análise incluindo habilidade computacional de hardware e software, o que não está disponível para a maioria dos engenheiros calculistas;
- 2) é necessário prever uma tolerância ou dividir a barra em sub-elementos, no caso da análise baseada na matriz geométrica do método dos elementos finitos;
- 3) A precisão das respostas obtidas nos processos sofisticados utilizando os recursos de hardware e software pode não ser relevante no dimensionamento.

Por esses motivos fica claro que se faz necessário um processo de análise em segunda ordem mais simples e versátil, o qual possa ser aplicado a todo tipo de estruturas e para qualquer carregamento; e que também seja simples de entender e fácil de ser aplicado, não exigindo um tempo extra de execução ou uma grande capacidade computacional. Esse processo deve ajudar o calculista no dimensionamento sem exigir rotinas desnecessárias e deve simplificar o processo exato ao invés de acrescentar mais complicações na análise em teoria de primeira ordem. Com o objetivo de resolver o citado acima, AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup>, propõem um processo de análise em teoria de segunda ordem baseado nas funções de rigidez.

Observando as duas equações fundamentais da matriz de rigidez dadas pelas eq.(1.40) e eq.(1.41), pode se concluir que o efeito da não-linearidade na equação é resultado da presença da carga axial "P" na matriz de rigidez e da presença do deslocamento nodal no vetor força quando se considera o efeito de encurtamento das barras na análise.

O processo proposto por AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> para a análise simplifica o problema por considerar dois aspectos:

- 1) a força axial na barra calculada pela análise em teoria de segunda ordem usualmente não diverge muito da correspondente calculada pela análise em teoria de primeira ordem;
- 2) a inclusão do efeito de encurtamento das barras não altera significativamente os resultados finais dos momentos e forças cortantes, mas complica significativamente o esforço computacional na análise e requer mais iterações.

Portanto, o processo proposto por AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> para a análise é baseado nas seguintes suposições:

- 1) O efeito de encurtamento nas barras é negligenciado;
- 2) apenas uma iteração baseada na análise da formulação em teoria de segunda ordem com funções de rigidez é realizada;
- 3) a matriz de rigidez é a mesma dada pela eq.(1.41);
- 4) o valor da força "P" para cada barra é analisado dentro do programa pela análise em teoria de primeira ordem, a qual usa a mesma formulação da análise em segunda ordem, mas com  $P=0$ .

### **1.2.3- PROCESSO DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA POR FLEXÃO DE PÓRTICOS PLANOS**

YAGUI<sup>[12]</sup> em 1978, SERRA<sup>[13]</sup> em 1994 e REQUENA<sup>[14]</sup> em 1995, apresentaram novas funções de rigidez capazes de considerar os efeitos da

não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem, de forma mais completa. Com base nos conceitos de flambagem de barras e na análise de estrutura em teoria de segunda ordem, REQUENA<sup>[14]</sup> abordou o problema de como determinar o carregamento crítico de instabilidade por flexão. Segundo GALAMBOS<sup>[15]</sup>, o primeiro modo de falha de uma estrutura é denominado de instabilidade. REQUENA<sup>[14]</sup> apresenta em seu trabalho um fluxograma para a determinação da instabilidade da estrutura para estruturas planas constituídas de elementos de barras deformáveis por flexão, por força axial e por força cortante, em seu plano, no regime elástico. REQUENA<sup>[14]</sup> utiliza a técnica matricial com funções de rigidez desenvolvidas para a determinação da instabilidade completa do pórtico plano. As hipóteses para análise do sistema estrutural são as seguintes:

- 1) a estrutura do pórtico transversal é considerada plana constituída de elementos de barra, deformáveis por flexão, por força axial e por força cortante, em seu plano;
- 2) o desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos para estruturas no regime elástico;
- 3) na análise da instabilidade do pórtico é levada em conta a influência da força axial nos elementos de barra, caracterizada pelo efeito da não-linearidade geométrica em teoria de pequenos deslocamentos;
- 4) o carregamento crítico da estrutura é alcançado quando ela deixa de ser estável em seu próprio plano, admitindo-a estável no plano perpendicular por vinculações adequadas;
- 5) as seções transversais permanecem inalteradas durante o processo;
- 6) as barras são consideradas perfeitamente retas;
- 7) as ações são aplicadas apenas no plano do pórtico

A verificação da estabilidade é feita através do processo dos deslocamentos. A matriz de rigidez de cada elemento de barra, a qual relaciona as forças com os deslocamentos em seus vínculos externos, sofrerá a influência da força axial para um determinado carregamento. As matrizes de rigidez dos elementos contribuirão para a montagem da matriz de rigidez da estrutura. Esta relaciona as ações nas coordenadas nodais da estrutura com os respectivos deslocamentos. Desta forma, a matriz de rigidez global da estrutura também estará afetada pelo efeito da força axial (não-linearidade geométrica). Portanto, pesquisa-se um carregamento crítico capaz de degenerar a rigidez da estrutura, através da singularização de sua matriz de rigidez.

#### **1.2.4- PROCESSO DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE DE TRELIÇAS PLANAS CONSIDERANDO SEUS CONTRAVENTAMENTOS**

Em 1992, GALAMBOS e XYKIS<sup>[16]</sup> fizeram um relato sobre o problema da instabilidade lateral para um sistema onde se considera o efeito dos contraventamentos em treliças. As hipóteses consideradas por eles para a análise são:

- 1) comportamento elástico antes e durante a flambagem;
- 2) o equilíbrio é formulado na posição deformada usando a teoria de pequenas deformações e pequenos deslocamentos;
- 3) as forças devidas ao comportamento plano no instante da flambagem são determinadas, na análise, em teoria de primeira ordem para uma treliça plana com nós articulados;
- 4) para análise de flambagem todas as barras da estrutura formada pela treliça e contraventamentos são considerados rigidamente conectados;

- 5) as seções transversais permanecem em sua forma original;
- 6) a seção transversal é idealizada sem empenamento;
- 7) é considerado que as cargas sejam aplicadas verticalmente nos pontos contraventados do banzo superior da treliça;

Neste processo são apresentadas três equações diferenciais que regem o problema de uma barra tridimensional sujeita aos efeitos de flexo-torção. As equações diferenciais são resolvidas e expressões exatas são obtidas para a matriz de rigidez de cada elemento. Estas são matrizes de dimensão 12x12. As matrizes de rigidez de cada elemento são convenientemente agrupadas para formar a matriz de rigidez global da estrutura tridimensional. Para qualquer aplicação da força vertical, a força axial em cada elemento é determinada pela análise em teoria de primeira ordem. Estas forças axiais são então substituídas na matriz de rigidez lateral torcional global e o seu determinante é calculado. Este processo é repetido até descobrir qual o menor valor da força aplicada "P" que torna o determinante igual a zero. O carregamento aplicado correspondente a esta condição de determinante zero é o carregamento de flambagem para o sistema. Esta análise é realizada com a utilização do método dos elementos finitos para verificação da instabilidade elástica do sistema.

Segundo os próprios autores GALAMBOS e XYKIS<sup>[15]</sup>, algumas críticas podem ser feitas a esse tipo de análise:

- 1) a matriz de rigidez global é muito grande e requer um grande esforço computacional para calcular o determinante;
- 2) analiticamente é complicado calcular as propriedades das matrizes de transformações utilizadas neste processo;
- 3) devido ao grande esforço computacional requerido, somente estruturas com uma, duas ou três treliças podem ser resolvido.

### 1.3 - PROPOSTA DO TRABALHO

A primeira etapa do estudo objetiva conhecer o comportamento de estruturas reticuladas planas através da análise de sua instabilidade. Para tanto, desenvolveu-se um programa de computador capaz de analisar esta instabilidade baseado no fluxograma proposto por REQUENA<sup>[14]</sup> que considera o efeito da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem baseada nas funções de rigidez. Este programa determina o carregamento crítico de instabilidade por flexão de pórticos planos com barras no regime elástico. Conseqüentemente, é possível determinar também os comprimentos efetivos de flambagem das barras. Este programa forneceu a base para o desenvolvimento do trabalho.

A segunda etapa do estudo aborda estruturas tridimensionais constituídas por barras com seções transversais duplamente simétricas deformáveis em seu plano e fora dele. Este estudo tem a finalidade de conhecer o comportamento de estruturas reticuladas tridimensionais através da análise de sua instabilidade. Com este intuito, pretende-se desenvolver um programa de computador capaz de fazer esta análise de instabilidade em estruturas tridimensionais. Este programa levará em consideração o efeito da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem baseado nas funções de rigidez tridimensionais. E também determinará o carregamento crítico de instabilidade por flexão de pórticos tridimensionais com barras no regime elástico.

### 1.3.1 - JUSTIFICATIVAS

Estruturas aporticadas planas são consideradas rígidas em seu plano. Por isso, uma das hipóteses assumidas para análise de pórticos planos é que estes não sofrem deslocamentos fora do seu plano. É admitido que o pórtico seja estável fora do plano por vinculações adequadas. Estas vinculações são chamadas de contraventamentos. As estruturas devem ser adequadamente contraventadas, pois além das cargas aplicadas no seu plano, certamente ao longo de sua vida útil, haverá também carregamento fora dele. Os contraventamentos são mais comumente fabricados em barras de pouca rigidez e podem apenas ser solicitados à tração. Entretanto, pouco se sabe se essas vinculações realmente conseguem garantir a estabilidade da estrutura fora do plano. Os contraventamentos são os principais elos de ligação entre pórticos planos possibilitando a formação de estruturas mais complexas. Portanto, são um dos responsáveis pela estabilidade global das estruturas.

### 1.3.2- OBJETIVOS

Com os mesmos objetivos propostos por GALAMBOS e XYKIS<sup>[15]</sup>, item 1.2.4, de analisar a influência que os contraventamentos exercem sobre as estruturas, e sendo conhecedora das limitações encontradas por eles, é que se propõe um novo tipo de análise. Esta análise leva em consideração o avanço dos micro-computadores e o desenvolvimento de funções de rigidez para o caso tridimensional, as quais são capazes de

considerar as deformações por flexão, por força axial e por força cortante. Esta proposta é baseada nas seguintes hipóteses:

- 1) a estrutura do pórtico tridimensional é considerada constituída de elementos de barras tubulares deformáveis por flexão, por força axial e por força cortante em seu plano e fora dele;
- 2) o desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos para estruturas no regime elástico;
- 3) na análise da instabilidade do pórtico tridimensional é levada em conta a influência da força axial nos elementos de barras, caracterizada pelo efeito da não-linearidade geométrica em teoria de pequenos deslocamentos;
- 4) apenas para inicializar a análise as forças axiais "P" são obtidas em teoria de primeira ordem; com os valores de "P" inicia-se o processo iterativo em teoria de segunda ordem;
- 5) a análise de instabilidade é realizada considerando a estrutura tridimensional, ou seja, formada pelos pórticos e sistema de contraventamentos;
- 6) as seções transversais permanecem inalteradas durante o processo;
- 7) as seções transversais são idealizadas sem empenamento;
- 8) as seções transversais são duplamente simétrica;
- 9) as forças axiais "P" são aplicadas sem excentricidade;
- 10) as barras são consideradas perfeitamente retas;
- 11) é considerado que as cargas sejam aplicadas no plano do pórtico e fora dele.

Com base nestas hipóteses resolvem-se as equações diferenciais do sistema e obtêm-se as funções de rigidez para o caso tridimensional. Então aplica-se o mesmo processo proposto para análise de instabilidade elástica por flexão no plano, mas agora a análise de instabilidade por flexão é feita considerando o comportamento global da estrutura, ou seja, o

comportamento tridimensional que corresponde a um comportamento mais real da estrutura.

### **1.3.3 - OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Será apresentado nos próximos capítulos o desenvolvimento da formulação das funções de rigidez no plano e para o caso tridimensional. Para o caso tridimensional será desenvolvido um outro programa de computador, que leve em consideração o efeito da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem. Este programa analisará o comportamento global da estrutura. Portanto, a análise da estrutura estará bem mais próxima do seu comportamento real.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de computador para a análise de instabilidade de estruturas tridimensionais, para avaliar a real eficiência dos contraventamentos no comportamento global das estruturas.

Como extensão do trabalho, utilizando esta teoria, pretende-se analisar estruturas tridimensionais, para o caso de perfis duplamente simétricos.

## ***CAPÍTULO II***

### **INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS PLANAS**

#### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Este capítulo aborda apenas as estruturas planas deformáveis em seu plano. Estas estruturas são constituídas de elementos de barra deformáveis por flexão, por força axial e por força cortante. Apresenta-se aqui o desenvolvimento completo da formulação das funções de rigidez, bem como o fluxograma do programa de computador para análise de instabilidade de pórticos planos, em teoria de segunda ordem, com as funções de rigidez.

#### **2.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA**

##### **2.2.1 - SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DE EIXOS PARA ESTRUTURAS PLANAS**

O sistema de referência global de eixos adotado para estruturas planas será dextrorso, com eixos " $X_G$ ", " $Y_G$ ", " $Z_G$ " e origem "O" num ponto

de referência global e local. Os eixos " $x_s$ ", " $y_s$ " são eixos paralelos aos eixos globais com origem " $O_s$ " coincidente com a origem do sistema local " $O_i$ " da barra "i".

### 2.3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA COM FUNÇÕES DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez do elemento com funções de rigidez, também chamadas de funções de estabilidade, pode ser encontrada no trabalho de AL-MASHARY e CHEN<sup>[4]</sup> e GERE e WEAVER<sup>[11]</sup>. Esta matriz de rigidez do elemento considera as deformações nos elementos de barra admitindo as interações entre forças axiais e flexão. Assim, através do uso dessa matriz com funções de rigidez é possível considerar os efeitos da não-linearidade geométrica no cálculo dos deslocamentos da estrutura. Novos estudos realizados por YAGUI<sup>[12]</sup>, SERRA<sup>[13]</sup> e REQUENA<sup>[14]</sup>, apresentam novas funções de rigidez capazes de considerar simultaneamente as deformações por força axial, por força cortante e por flexão. Estas novas funções de rigidez consideram os efeitos da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem de forma mais completa.

O presente trabalho apresenta a dedução desses coeficientes de rigidez para elementos de barras, admitindo que essas funções de rigidez regem os deslocamentos do elemento de barra no plano considerando o efeito da força axial de forma mais completa. A matriz de rigidez de um elemento de barra será definida em função de suas coordenadas locais e dos deslocamentos admitidos em seu plano.

### 2.3.1- FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA CONSIDERANDO O EFEITO DA FORÇA AXIAL

Para uma barra fletida a presença do esforço normal causa variação nos momentos fletores. Como consequência sua derivada, que fornece o esforço cortante, também será alterada pela presença do esforço normal. Neste caso os coeficientes da matriz de rigidez da barra são determinados em teoria de segunda ordem e resultam funções não-lineares da força axial. Quando as tensões se mantêm proporcionais às deformações e com a hipótese assumida de pequenos deslocamentos estas funções podem ser consideradas exatas.

A influência da força axial e os efeitos da força cortante nas deformações serão consideradas na dedução das funções de rigidez. Nesta etapa será considerado o caso de flexão apenas no plano. A extensão para o caso tridimensional será realizada no capítulo III.

Na Fig.II-2 é esquematizado o sistema de coordenadas para uma barra de seção prismática engastada nas extremidades.

Levando-se em conta a simetria, o equilíbrio de esforços e a aplicação do Teorema da Reciprocidade, a matriz de rigidez que relaciona os deslocamentos "D" com os esforços "F" em relação às seis coordenadas definidas tem a forma mostrada na Fig.II-3, na qual os valores não nulos são designados por S1, S2, S3, S4 e S5.

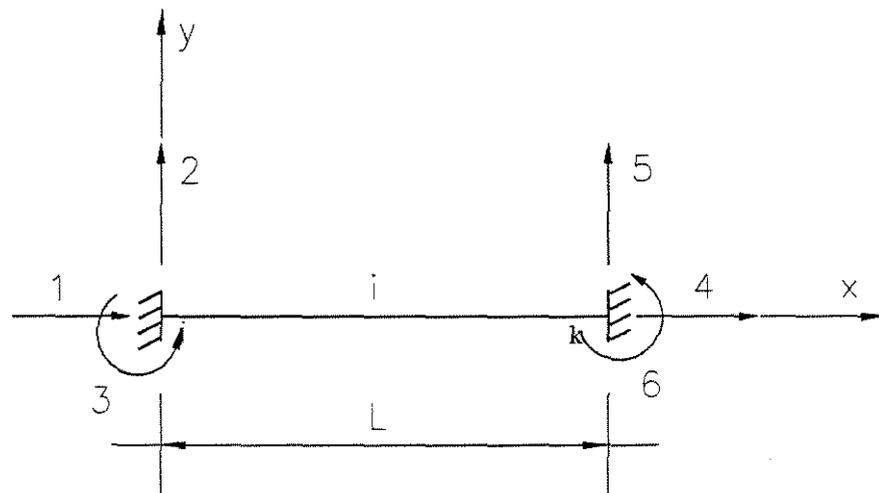


Figura II-2 Sistema de Coordenadas para o Plano.

Os valores de  $S_1$ ,  $S_2$  até  $S_6$  serão deduzidos de forma sistemática, com o propósito de programação para computadores possibilitando a análise de estruturas mais complexas. A dedução terá como base a barra prismática, da Fig.II-2, engastada em ambas as extremidades designadas por "j" e "k". Cada coluna da matriz de rigidez (Fig.II-3) representa os valores dos esforços exercidos pelas restrições quando é imposto um deslocamento unitário na direção e sentido da coordenada respectiva mantendo todos os outros nulos. Na Fig.II-4 são ilustrados os três tipos básicos possíveis de deslocamento.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

Figura II-3 Matriz de Rigidez da Barra com Funções de Rigidez para o Plano.

O coeficiente "S1" é o valor da rigidez axial da barra. Este coeficiente não é afetado com a presença do esforço normal "P". Assim, tem-se que  $S_{11} = -S_{41} = S1$ .

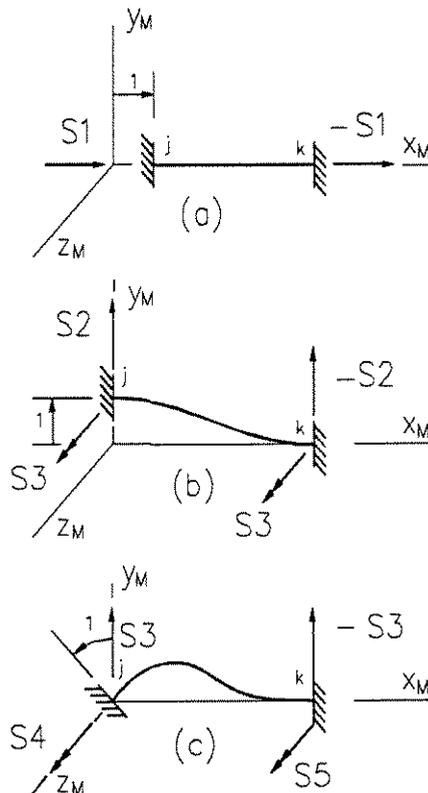


Figura II-4 Estados de Deslocamento: (a) Translação Unitária Horizontal, (b) Translação Unitária Vertical, e (c) Giro Unitário.

Adotando a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elásticas do material, tem-se:

$$S1 = \frac{EA}{L} \quad (2.1)$$

Fazendo a somatória dos momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um deslocamento unitário na direção do eixo "y", conforme mostrado na Fig.II-4(b), admitindo "P" de tração, obtém-se:

$$S_3 + S_3 - L S_2 + P = 0 \quad (2.2)$$

$$S_2 = \frac{2S_3 + P}{L} \quad (2.3)$$

Fazendo-se o mesmo para o estado de deslocamento da Fig.II-4(c) obtém-se:

$$S_4 + S_5 - L S_3 = 0 \quad (2.4)$$

$$S_5 = S_3 L - S_4 \quad (2.5)$$

Para a montagem da matriz de rigidez, portanto, é necessário apenas o cálculo dos coeficientes "S1", "S3" e "S4". Os valores "S2" e "S5" são obtidos através do equilíbrio das ações exercidas na barra.

O valor dos coeficientes "S3" e "S4" depende do sentido do esforço normal "P" que influi no valor do momento fletor e sua derivada, esforço cortante. A distorção " $\gamma$ " definida pela diferença entre a inclinação " $\theta$ " da linha elástica e o giro " $\phi$ " da seção transversal que independem do valor e sentido de "P", são

$$y' = \theta = \phi + \gamma \quad (2.6)$$

$$\gamma = \frac{cQ}{GA} \quad (2.7)$$

Substituindo eq.(2.7) na eq.(2.6), tem-se:

$$y' = \phi + \frac{cQ}{GA} \quad (2.8)$$

Derivando "y'" e lembrando que  $\phi' = -\frac{M}{EI}$ , resulta:

$$y'' = -\frac{M}{EI} + \frac{c}{GA} \left( \frac{dQ}{dx} \right) \quad (2.9)$$

Sendo:P	Força axial no elemento de barra;
A	Área da seção transversal;
I	Momento de inércia em relação ao eixo z;
G	Módulo de elasticidade transversal;
E	Módulo de elasticidade longitudinal;
c	Coefficiente de forma;
L	Comprimento da barra;

Existem três casos a serem considerados para a determinação da matriz de rigidez. O primeiro é quando o valor da força axial na barra é nulo, o segundo quando este valor é negativo e finalmente quando este valor é positivo. O valor no sinal do esforço normal influenciará no tipo de solução geral que será utilizado para solução da equação diferencial do problema.

### 2.3.1.1- Caso P = zero

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra para o caso mostrado na Fig.II-4(c), obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x \quad (2.10)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 \quad (2.11)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (2.12)$$

Substituindo as eq.(2.11) na eq.(2.8), resulta:

$$y' = \phi - \frac{cS3}{GA} \quad (2.13)$$

Substituindo as eq.(2.10) e eq.(2.12) na eq.(2.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S4 - S3x)}{EI} = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3}{EI}x \quad (2.14)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.14) para  $x = 0$  e  $x = L$ , obtém-se:

$$y''_{(0)} = -\frac{S4}{EI} \quad (2.15)$$

$$y''_{(L)} = -\frac{S4}{EI} + \frac{L S3}{EI} \quad (2.16)$$

Derivando duas vezes a equação eq.(2.14), resulta:

$$y^{IV} = 0 \quad (2.17)$$

A equação diferencial para o caso de  $P=0$  tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (2.18)$$

$$y' = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3 \quad (2.19)$$

$$y'' = 6C_1x + 2C_2 \quad (2.20)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.20) para  $x = 0$  e  $x = L$ , resulta:

$$y''_{(0)} = 2C_2 \quad (2.21)$$

$$y''_{(L)} = 6C_1L + 2C_2 \quad (2.22)$$

Comparando a eq.(2.21) com a eq.(2.15) e a eq.(2.22) com a eq.(2.16), tem-se:

$$-\frac{S4}{EI} = 2C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{S4}{2EI} \quad (2.23)$$

$$6C_1L + 2C_2 = -\frac{S4}{EI} + \frac{L S3}{EI} \quad (2.24)$$

Substituindo o valor de "C<sub>2</sub>" obtido pela eq.(2.23) na eq.(2.24) tem-se o valor de "C<sub>1</sub>", portanto:

$$6C_1L - 2\frac{S4}{2EI} = -\frac{S4}{EI} + \frac{L S3}{EI}$$

Isolando "C<sub>1</sub>", tem-se:

$$C_1 = \frac{S3}{6EI} \quad (2.25)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.18), tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (2.26)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1L^3 + C_2L^2 + C_3L + C_4 = 0 \quad (2.27)$$

Com as condições de contorno na eq.(2.13) e eq.(2.19) para x=0 e lembrando que  $\phi_j = 1$  no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \phi_j - \frac{cS3}{GA} \Rightarrow y'_{(0)} = 1 - \frac{cS3}{GA} \quad (2.28)$$

$$y'_{(0)} = 3C_1L + 2C_2L + C_3 \Rightarrow y'_{(0)} = C_3 \quad (2.29)$$

Igualando a eq.(2.28) com a eq.(2.29), resulta que:

$$C_3 = 1 - \frac{cS3}{GA} \quad (2.30)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.13) e eq.(2.19) para  $x=L$  e lembrando que  $\phi_k = 0$  no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \phi_k - \frac{cS3}{GA} \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS3}{GA} \quad (2.31)$$

$$y'_{(L)} = 3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 \quad (2.32)$$

Igualando a eq.(2.31) com a eq.(2.32), tem-se:

$$3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 = -\frac{cS3}{GA} \quad (2.33)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>" e "C<sub>3</sub>" dados por eq.(2.25), eq.(2.23) e eq.(2.30) na eq.(2.33), obtém-se:

$$3 \frac{S3}{6EI} L^2 - 2 \frac{S4}{2EI} L + 1 - \frac{cS3}{GA} = -\frac{cS3}{GA}$$

Fazendo-se as simplificações, chega-se:

$$\frac{S3}{2EI} L^2 - \frac{S4}{EI} L + 1 = 0 \Rightarrow \frac{S3}{2EI} L^2 = \frac{S4}{EI} L - 1$$

Multiplicando por "2EI", resulta:

$$S3L^2 = 2L S4 - 2EI \Rightarrow S3 = \frac{2 S4}{L} - \frac{2EI}{L^2} \quad (2.34)$$

Voltando na eq.(2.27) e substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>", "C<sub>3</sub>" e "C<sub>4</sub>" dados por eq.(2.25), eq.(2.23), eq.(2.30) e eq.(2.26), tem-se:

$$\frac{S3}{6EI} L^3 - \frac{S4}{2EI} L^2 + L - \frac{cS3}{GA} L + 0 = 0$$

Multiplicando por  $\frac{12EI}{L^3}$ , resulta:

$$2S_3 - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - \frac{cS_3}{GA} \frac{12EI}{L^2} = 0$$

Assumindo  $K = \frac{12cEI}{GAL^2}$ , tem-se:

$$2S_3 - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - KS_3 = 0 \quad (2.35)$$

Substituindo o valor de "S3" dado pela eq.(2.34) na eq.(2.35), obtém-se:

$$2\left(\frac{2S_4}{L} - \frac{2EI}{L^2}\right) - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - K\left(\frac{2S_4}{L} - \frac{2EI}{L^2}\right) = 0$$

$$\frac{4S_4}{L} - \frac{4EI}{L^2} - \frac{6S_4}{L} + \frac{12EI}{L^2} - K\frac{2S_4}{L} + K\frac{2EI}{L^2} = 0$$

$$-\frac{2S_4}{L} + \frac{8EI}{L^2} - K\frac{2S_4}{L} + K\frac{2EI}{L^2} = 0$$

Multiplicando por "L", tem-se:

$$-2S_4 + \frac{8EI}{L} - K2S_4 + K\frac{2EI}{L} = 0$$

$$2S_4 + K2S_4 = \frac{8EI}{L} + K\frac{2EI}{L}$$

$$2S_4(1+K) = \frac{2EI}{L}(4+K)$$

$$S_4 = \frac{EI}{L(1+K)}(4+K) \quad (2.36)$$

Fazendo  $I' = \frac{I}{(1+K)}$ , obtém-se:

$$S4 = \frac{EI'}{L}(4+K) \quad (2.37)$$

Substituindo o valor de "S4" dado por eq.(2.36) na eq.(2.34), resulta:

$$S3 = \frac{2}{L} \frac{EI}{L(1+K)}(4+K) - \frac{2EI}{L^2} \Rightarrow S3 = \frac{2EI}{L^2} \left( \frac{4+K}{1+K} - 1 \right)$$

$$S3 = \frac{2EI}{L^2} \left( \frac{4+K-1-K}{1+K} \right) = \frac{2EI}{L^2} \frac{3}{(1+K)}$$

Lembrando-se que  $I' = \frac{I}{(1+K)}$ , tem-se:

$$S3 = \frac{6EI'}{L^2} \quad (2.38)$$

O valor de "S2" dado pela eq.(2.3) pode ser obtido substituindo o valor de "S3" dado por eq.(2.38) e fazendo  $P=0$ ; desta forma, chega-se que:

$$S2 = \frac{2}{L} \frac{6EI'}{L^2} \Rightarrow S2 = \frac{12EI'}{L^3} \quad (2.39)$$

Para obter o valor de "S5" será substituído na eq.(2.5) o valor de "S3" e "S4" dado pelas eq.(2.38) e eq.(2.37), assim obtendo:

$$S5 = \frac{6EI'}{L^2}L - \frac{EI'}{L}(4+K) = \frac{EI'}{L}(6-4-K)$$

$$S5 = \frac{EI'}{L}(2-K) \quad (2.40)$$

### 2.3.1.2- Caso P de Compressão

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra para o caso mostrado na Fig.II-4(c) e levando em consideração a atuação de uma força normal "P" de compressão, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x + Py \quad (2.41)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 + Py' \quad (2.42)$$

$$\frac{dQ}{dx} = Py'' \quad (2.43)$$

Substituindo a eq.(2.42) na eq.(2.8), resulta:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S_3 + Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} + \frac{cP}{GA}y'$$

$$y' - \frac{cP}{GA}y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y' \left(1 - \frac{cP}{GA}\right) = \phi - \frac{cS_3}{GA}$$

Fazendo  $a = 1 - \frac{cP}{GA}$ , chega-se:

$$y' = \frac{1}{a} \left( \phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (2.44)$$

Substituindo eq.(2.41) e eq.(2.43) na eq.(2.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x + Py)}{EI} + \frac{c}{GA}Py'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI} + \frac{cP}{GA}y''$$

$$y'' - \frac{cP}{GA}y'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI}$$

$$y'' \left( 1 - \frac{cP}{GA} \right) = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3}{EI}x - \frac{Py}{EI}$$

Lembrando que  $a = 1 - \frac{cP}{GA}$ , tem-se:

$$y'' = \frac{1}{aEI} (-S4 + S3x - Py) \quad (2.45)$$

Derivando duas vezes a eq.(2.45), obtém-se:

$$y''' = \frac{S3}{aEI} - \frac{Py'}{aEI} \quad (2.46)$$

$$y^{IV} = -\frac{Py''}{aEI} \Rightarrow y^{IV} + \frac{P}{aEI}y'' = 0$$

Fazendo  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , tem-se:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0 \quad (2.47)$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de "P" de compressão tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (2.48)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivadas da solução geral da equação diferencial:

$$y' = \alpha C_1 \cos \alpha x - \alpha C_2 \operatorname{sen} \alpha x + C_3 \quad (2.49)$$

$$y'' = -\alpha^2 C_1 \operatorname{sen} \alpha x - \alpha^2 C_2 \cos \alpha x$$

$$y'' = -\alpha^2 (C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \quad (2.50)$$

e aplicando as condições de contorno na eq.(2.45) para  $x = 0$  e  $x = L$ , e lembrando que para os dois casos  $y = 0$ , obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{aEI}(-S4) \quad (2.51)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{aEI}(-S4 + L S3) \quad (2.52)$$

Com as condições de contorno na eq.(2.50) para  $x = 0$  e  $x = L$ , resulta em:

$$y''_{(0)} = -\alpha^2 C_2 \quad (2.53)$$

$$y''_{(L)} = -\alpha^2 (C_1 \text{sen} \alpha L + C_2 \text{cos} \alpha L) \quad (2.54)$$

Comparando a eq.(2.51) com a eq.(2.53) e a eq.(2.52) com a eq.(2.54), tem-se:

$$\frac{1}{aEI}(-S4) = -\alpha^2 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{S4}{aEI\alpha^2}$$

Lembrando que  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , obtém-se:

$$C_2 = \frac{S4}{aEI} \frac{aEI}{P} \Rightarrow C_2 = \frac{S4}{P} \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{aEI}(-S4 + L S3) = -\alpha^2 (C_1 \text{sen} \alpha L + C_2 \text{cos} \alpha L)$$

Substituindo o valor de "C<sub>2</sub>" tem-se o valor de "C<sub>1</sub>", portanto:

$$\frac{1}{aEI\alpha^2}(-S4 + L S3) = \left( -C_1 \text{sen} \alpha L - \frac{S4}{P} \text{cos} \alpha L \right)$$

Multiplicando por "P" e lembrando que  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , tem-se:

$$\frac{P}{aEI} \frac{aEI}{P} (-S4 + L S3) = (-C_1 P \text{sen } \alpha L - S4 \cos \alpha L)$$

Simplificando, resulta:

$$C_1 P \text{sen } \alpha L = S4 - L S3 - S4 \cos \alpha L$$

$$C_1 = \frac{-L S3 + S4(1 - \cos \alpha L)}{P \text{sen } \alpha L} \quad (2.56)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.48) para  $x=0$  e  $x=L$ , tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (2.57)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1 \text{sen } \alpha L + C_2 \cos \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (2.58)$$

Supondo as condições de contorno na eq.(2.44) e eq.(2.49) para  $x=0$  e lembrando que  $\phi_j = 1$  no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left( \phi_j - \frac{cS3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (2.59)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (2.60)$$

Igualando a eq.(2.59) com a eq.(2.60), resulta:

$$\frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) = \alpha C_1 + C_3 \quad (2.61)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.44) e na eq.(2.49) para  $x=L$  e lembrando que  $\phi_k = 0$  no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \frac{1}{a} \left( \phi_k - \frac{cS3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS3}{aGA} \quad (2.62)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 \quad (2.63)$$

Igualando eq.(2.62) com eq.(2.63), tem-se:

$$-\frac{cS3}{aGA} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 \quad (2.64)$$

As equações eq.(2.55), eq.(2.56), eq.(2.57), eq.(2.58), eq.(2.61) e eq.(2.64) formam um sistema de seis equações a seis incógnitas, sendo as incógnitas "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>", "C<sub>3</sub>", "C<sub>4</sub>", "S3" e "S4". Da eq.(2.55) e da eq.(2.57) obtém-se o valor de "C<sub>4</sub>":

$$C_4 = -\frac{S4}{P} \quad (2.65)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>" dado por eq.(2.56) na eq.(2.61), chega-se a:

$$C_3 + \alpha \left( \frac{-L S3 + S4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \right) = \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA}$$

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA} - \alpha \left( \frac{-L S3 + S4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) - \frac{\alpha}{P \sin \alpha L} (-L S3 + S4(1 - \cos \alpha L)) \quad (2.66)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>", "C<sub>3</sub>" e "C<sub>4</sub>", dado pelas eq.(2.56), eq.(2.55), eq.(2.66) e eq.(2.65), respectivamente, na eq.(2.58), resulta:

$$\frac{-L S_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} \operatorname{sen} \alpha L + \frac{S_4}{P} \cos \alpha L + \left[ \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS_3}{GA} \right) - \frac{\alpha}{P \operatorname{sen} \alpha L} (-L S_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)) \right] L - \frac{S_4}{P} = 0$$

Então:

$$-\frac{L S_3}{P} + \frac{S_4}{P} - \frac{S_4 \cos \alpha L}{P} + \frac{S_4}{P} \cos \alpha L + \frac{L}{a} \left( 1 - \frac{cS_3}{GA} \right) - \frac{\alpha L}{P \operatorname{sen} \alpha L} (-L S_3 + S_4(1 - \cos \alpha L)) - \frac{S_4}{P} = 0$$

Simplificando:

$$-\frac{L S_3}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cL S_3}{aGA} + \frac{\alpha S_3 L^2}{P \operatorname{sen} \alpha L} - \frac{\alpha L S_4(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} = 0$$

Multiplicando por  $\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{L}$ , resulta:

$$-\frac{S_3 P \operatorname{sen} \alpha L}{P} + \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} - \frac{cS_3 P \operatorname{sen} \alpha L}{aGA} + \alpha S_3 L - \alpha S_4(1 - \cos \alpha L) = 0$$

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{sen} \alpha L + \frac{cS_3 P \operatorname{sen} \alpha L}{aGA} - \alpha S_3 L + \alpha S_4(1 - \cos \alpha L)$$

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{sen} \alpha L \left( \frac{Pc}{aGA} + 1 \right) - \alpha S_3 L + \alpha S_4(1 - \cos \alpha L)$$

Sendo que  $a = 1 - \frac{cP}{GA} \Rightarrow \frac{cP}{GA} = 1 - a$ , então fica:

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = S_3 \operatorname{sen} \alpha L \left( \frac{1-a}{a} + 1 \right) - \alpha S_3 L + \alpha S_4(1 - \cos \alpha L)$$

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = S_3 \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L \right) + \alpha S_4(1 - \cos \alpha L) \quad (2.67)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>" e "C<sub>3</sub>" dado por eq.(2.56), eq.(2.55) e eq.(2.66), respectivamente, na eq.(2.64), resulta:

$$-\frac{cS3}{aGA} = \alpha \cos \alpha L \left( \frac{-S3L + S4(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} \right) - \frac{\alpha S4}{P} \operatorname{sen} \alpha L + \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) - \frac{\alpha}{P \operatorname{sen} \alpha L} (-S3L + S4(1 - \cos \alpha L))$$

Então, tem-se:

$$-\frac{cS3}{aGA} = \frac{-\alpha S3L \cos \alpha L}{P \operatorname{sen} \alpha L} + \frac{\alpha S4 \cos \alpha L (1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} - \frac{\alpha S4 \operatorname{sen} \alpha L}{P} + \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA} + \frac{\alpha S3L}{P \operatorname{sen} \alpha L} - \frac{\alpha S4(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L}$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\alpha S3L}{P \operatorname{sen} \alpha L} (1 - \cos \alpha L) + \frac{\alpha S4}{P \operatorname{sen} \alpha L} [\cos \alpha L (1 - \cos \alpha L) - \operatorname{sen}^2 \alpha L - (1 - \cos \alpha L)] + \frac{1}{a} = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\alpha S3L}{P \operatorname{sen} \alpha L} (1 - \cos \alpha L) + \frac{\alpha S4}{P \operatorname{sen} \alpha L} [\cos \alpha L - \cos^2 \alpha L - 1 + \cos^2 \alpha L - 1 + \cos \alpha L] + \frac{1}{a} = 0$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$\frac{\alpha S3L}{P \operatorname{sen} \alpha L} (1 - \cos \alpha L) + \frac{\alpha S4}{P \operatorname{sen} \alpha L} (2 \cos \alpha L - 2) + \frac{1}{a} = 0$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{P \operatorname{sen} \alpha L} [-\alpha S3L(1 - \cos \alpha L) - \alpha S4(2 \cos \alpha L - 2)]$$

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = -\alpha S_3 L (1 - \cos \alpha L) + 2\alpha S_4 (1 - \cos \alpha L)$$

$$\alpha S_4 (1 - \cos \alpha L) = \frac{\left( \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} + \alpha S_3 L (1 - \cos \alpha L) \right)}{2} \quad (2.68)$$

Da eq.(2.68) na eq.(2.67), resulta:

$$\left( \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (1 - \cos \alpha L)}{2} \right) + S_3 \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L \right) = \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a}$$

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{2a} = S_3 \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L + \frac{\alpha L (1 - \cos \alpha L)}{2} \right)$$

$$P \operatorname{sen} \alpha L = 2a S_3 \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L + \frac{\alpha L}{2} - \frac{\alpha L \cos \alpha L}{2} \right)$$

$$P \operatorname{sen} \alpha L = S_3 (2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \cos \alpha L)$$

Mas  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI} \Rightarrow P = \alpha^2 aEI$ , assim:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \cos \alpha L)} \quad (2.69)$$

Substituindo "S3" dado por eq.(2.69) na eq.(2.67) obtém-se o valor de "S4", portanto:

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a} = \frac{\alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a \alpha L - a \alpha L \cos \alpha L)} \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a} - \alpha L \right) + \alpha S_4 (1 - \cos \alpha L)$$

Multiplicando por  $\frac{a}{P \operatorname{sen} \alpha L}$ , e sabendo que  $P = \alpha^2 aEI$ , tem-se:

$$\frac{S4a\alpha(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} = 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)}$$

Multiplicando por  $(2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)$ , obtém-se:

$$\frac{S4a\alpha(1 - \cos \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} (2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L) = 2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L + a\alpha L$$

Simplificando e substituindo o valor de  $P = \alpha^2 aEI$ , tem-se:

$$S4a\alpha(1 - \cos \alpha L)(2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L) = \alpha^2 aEI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$S4(2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + a\alpha L \cos \alpha L + a\alpha L \cos^2 \alpha L) = \alpha EI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)$$

Sendo que:

$$a\alpha L \cos^2 \alpha L = a\alpha L(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha L) = a\alpha L - a\alpha L \operatorname{sen}^2 \alpha L$$

Portanto, tem-se:

$$S4(2 \operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L - a\alpha L \cos \alpha L - 2 \operatorname{sen} \alpha L \cos \alpha L + a\alpha L \cos \alpha L + a\alpha L - a\alpha L \operatorname{sen}^2 \alpha L) = \alpha EI \operatorname{sen} \alpha L (\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)$$

Simplificando e dividindo por  $\operatorname{sen} \alpha L$ , tem-se:

$$S4(2 - 2 \cos \alpha L - a\alpha L \operatorname{sen} \alpha L) = \alpha EI (\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)$$

$$S4 = \frac{\alpha EI (\operatorname{sen} \alpha L - a\alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a\alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (2.70)$$

Para que o denominador das eq.(2.69) e eq.(2.70) se tornem iguais, facilitando a programação, multiplica-se o numerador e o denominador da eq.(2.69) por  $(1 - \cos \alpha L)$ , assim tem-se:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a E \text{sen} \alpha L}{(2 \text{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)} \frac{1 - \cos \alpha L}{1 - \cos \alpha L}$$

Portanto, fica:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a E \text{sen} \alpha L (1 - \cos \alpha L)}{(2 \text{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L - 2 \text{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L \cos^2 \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a E \text{sen} \alpha L (1 - \cos \alpha L)}{(2 \text{sen} \alpha L - \alpha \alpha L - 2 \text{sen} \alpha L \cos \alpha L + \alpha \alpha L - \alpha \alpha L \text{sen}^2 \alpha L)}$$

Assim, resulta:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a E (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \text{sen} \alpha L)} \quad (2.71)$$

Através das condições de equilíbrio dado por eq.(2.3), lembrando que "P" é de compressão, podemos fazer:

$$S2 = \frac{2S3 - P}{L}$$

Substituindo o valor de "S3" dado pela eq.(2.71), tem-se:

$$S2 = \frac{2 \left[ \frac{\alpha^2 a E (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \text{sen} \alpha L)} \right] - \alpha^2 a E}{L}$$

$$S2 = \frac{2\alpha^2 a E (1 - \cos \alpha L) - \alpha^2 a E (2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \text{sen} \alpha L)}{L(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \text{sen} \alpha L)}$$

Fazendo as multiplicações, obtém-se:

$$S2 = \frac{2\alpha^2 aEI - 2\alpha^2 aEI \cos \alpha L - 2\alpha^2 aEI + 2\alpha^2 aEI \cos \alpha L + \alpha^3 a^2 EIL \sin \alpha L}{L(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L)}$$

Simplificando, resulta:

$$S2 = \frac{\alpha^3 a^2 EIL \sin \alpha L}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L)} \quad (2.72)$$

Através das condições de equilíbrio dado por eq.(2.5), podemos fazer:

$$S5 = S3L - S4$$

Substituindo o valor de "S3" e "S4" dado pela eq.(2.71) e eq.(2.70), respectivamente:

$$S5 = \frac{\alpha^2 aEI(1 - \cos \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L} L - \frac{\alpha EI(\sin \alpha L - \alpha \alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L)}$$

Assim, tem-se:

$$S5 = \frac{\alpha^2 aEIL - \alpha^2 aEIL \cos \alpha L - \alpha EI \sin \alpha L + \alpha^2 aEIL \cos \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L}$$

Simplificando, tem-se:

$$S5 = \frac{\alpha EI(\alpha aL - \sin \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha \alpha L \sin \alpha L} \quad (2.73)$$

### 2.3.1.3- Caso P de Tração

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra para o caso mostrado na Fig.II-4(c), levando em consideração a atuação de uma força normal "P" de tração, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x - Py \quad (2.74)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 - Py' \quad (2.75)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -Py'' \quad (2.76)$$

Substituindo eq.(2.75) na eq.(2.8), resulta:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S_3 - Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} - \frac{cP}{GA}y'$$

$$y' + \frac{cP}{GA}y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \Rightarrow y' \left( 1 + \frac{cP}{GA} \right) = \phi - \frac{cS_3}{GA}$$

Fazendo  $a = 1 + \frac{cP}{GA}$ , chega-se:

$$y' = \frac{1}{a} \left( \phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (2.77)$$

Substituindo eq.(2.74) e eq.(2.76) na eq.(2.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x - Py)}{EI} + \frac{c}{GA}(-Py'') = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI} - \frac{cP}{GA}y''$$

$$y'' + \frac{cP}{GA}y'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI}$$

$$y''\left(1 + \frac{cP}{GA}\right) = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI}$$

Seja  $a = 1 + \frac{cP}{GA}$ , portanto:

$$y'' = \frac{1}{aEI}(-S_4 + S_3x + Py) \quad (2.78)$$

Derivando duas vezes a eq.(2.78), obtém-se:

$$y''' = \frac{S_3}{aEI} + \frac{Py'}{aEI} \quad (2.79)$$

$$y^{IV} = \frac{Py''}{aEI} \Rightarrow y^{IV} - \frac{P}{aEI}y'' = 0$$

Fazendo  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , resulta:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = 0 \quad (2.80)$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de "P" de tração tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (2.81)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivadas da solução geral da equação diferencial, obtém-se:

$$y' = \alpha C_1 \cosh \alpha x + \alpha C_2 \sinh \alpha x + C_3 \quad (2.82)$$

$$y'' = \alpha^2 C_1 \sinh \alpha x + \alpha^2 C_2 \cosh \alpha x$$

$$y'' = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x) \quad (2.83)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.78) para  $x=0$  e  $x=L$ , lembrando que para os dois casos  $y=0$ , obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{aEI} (-S4) \quad (2.84)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{aEI} (-S4 + L S3) \quad (2.85)$$

Com as condições de contorno na eq.(2.83) para  $x=0$  e  $x=L$ , resulta em:

$$y''_{(0)} = \alpha^2 C_2 \quad (2.86)$$

$$y''_{(L)} = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (2.87)$$

Comparando eq.(2.84) com eq.(2.86) e eq.(2.85) com eq.(2.87), tem-se:

$$\frac{1}{aEI} (-S4) = \alpha^2 C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{S4}{aEI \alpha^2}$$

Lembrando  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , tem-se:

$$C_2 = -\frac{S4}{aEI} \frac{aEI}{P} \Rightarrow C_2 = -\frac{S4}{P} \quad (2.88)$$

$$\frac{1}{aEI} (-S4 + L S3) = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (2.89)$$

Substituindo o valor de "C<sub>2</sub>" obtido na eq.(2.88) na eq.(2.89) tem-se o valor de "C<sub>1</sub>", portanto:

$$\frac{1}{aEI\alpha^2}(-S4 + L S3) = \left( C_1 \sinh \alpha L - \frac{S4}{P} \cosh \alpha L \right)$$

Multiplicando por "P" e lembrando  $\alpha^2 = \frac{P}{aEI}$ , tem-se:

$$\frac{P}{aEI} \frac{aEI}{P}(-S4 + L S3) = \left( C_1 P \sinh \alpha L - S4 \cosh \alpha L \right)$$

$$C_1 P \sinh \alpha L = -S4 + L S3 + S4 \cosh \alpha L$$

$$C_1 = \frac{L S3 + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \quad (2.90)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.81) para x=0 e x=L, tem-se:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (2.91)$$

$$y_{(L)} = 0 \Rightarrow C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (2.92)$$

Aplicando as condições de contorno nas eq.(2.77) e eq.(2.82) para x=0 e lembrando que  $\phi_j = 1$  no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left( \phi_j - \frac{cS3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (2.93)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (2.94)$$

Igualando eq.(2.93) com eq.(2.94), resulta:

$$\frac{1}{a} \left( 1 - \frac{cS3}{GA} \right) = \alpha C_1 + C_3 \quad (2.95)$$

Aplicando as condições de contorno na eq.(2.77) e eq.(2.82) para  $x=L$  e lembrando que  $\phi_k = 0$  no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = \frac{1}{a} \left( \phi_k - \frac{cS3}{GA} \right) \Rightarrow y'_{(L)} = -\frac{cS3}{aGA} \quad (2.96)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (2.97)$$

Igualando eq.(2.96) com eq.(2.97), tem-se:

$$-\frac{cS3}{aGA} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (2.98)$$

As eq.(2.88), eq.(2.89), eq.(2.91), eq.(2.92), eq.(2.95) e eq.(2.98) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>", "C<sub>3</sub>", "C<sub>4</sub>", "S3" e "S4". De eq.(2.88) e eq.(2.91) obtém-se o valor de "C<sub>4</sub>":

$$C_4 = \frac{S4}{P} \quad (2.99)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>" dado por eq.(2.90) na eq.(2.95), tem-se:

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA} - \alpha \left( \frac{S3L + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA} - \frac{\alpha S3L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \quad (2.100)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>", "C<sub>3</sub>" e "C<sub>4</sub>" dado pelas eq.(2.90), eq.(2.88), eq.(2.100) e eq.(2.99), respectivamente, na eq.(2.92), resulta:

$$\frac{S3L + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \sinh \alpha L - \frac{S4}{P} \cosh \alpha L + \left[ \frac{1}{a} - \frac{cS3}{aGA} - \frac{\alpha S3L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right] L + \frac{S4}{P} = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{S3L}{P} + \frac{S4 \cosh \alpha L}{P} - \frac{S4}{P} - \frac{S4 \cosh \alpha L}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cS3L}{aGA} - \frac{\alpha S3L^2}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4L(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} + \frac{S4}{P} = 0$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$\frac{S3L}{P} + \frac{L}{a} - \frac{cS3L}{aGA} - \frac{\alpha S3L^2}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4L(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} = 0$$

Multiplicando por  $\frac{P \sinh \alpha L}{L}$ , resulta:

$$S3 \sinh \alpha L + \frac{P \sinh \alpha L}{a} - \frac{cS3P \sinh \alpha L}{aGA} - \alpha S3L - \alpha S4(\cosh \alpha L - 1) = 0$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = -S3 \sinh \alpha L + \frac{cS3P \sinh \alpha L}{aGA} + \alpha S3L + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S3 \sinh \alpha L \left( \frac{Pc}{aGA} - 1 \right) + \alpha S3L + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1)$$

Sendo que  $a = 1 + \frac{cP}{GA} \Rightarrow \frac{cP}{GA} = a - 1$ , então fica:

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S3 \sinh \alpha L \left( \frac{a-1}{a} - 1 \right) + \alpha S3L + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S3 \sinh \alpha L \left( -\frac{1}{a} \right) + \alpha S3L + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1)$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S3 \left( \alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a} \right) + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1) \quad (2.101)$$

Substituindo o valor de "C<sub>1</sub>", "C<sub>2</sub>" e "C<sub>3</sub>" dado pelas eq.(2.90), eq.(2.88) e eq.(2.100), respectivamente, na eq.(2.98), resulta:

$$-\frac{cS3}{aGA} = \alpha \cosh \alpha L \left( \frac{S3L + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \right) - \frac{\alpha S4}{P} \sinh \alpha L +$$

$$\frac{1}{a} \frac{cS3}{aGA} - \frac{\alpha S3L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L}$$

Simplificando, resulta:

$$\frac{[\alpha S3L + \alpha S4(\cosh \alpha L - 1)] \cosh \alpha L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4 \sinh \alpha L}{P} +$$

$$\frac{1}{a} \frac{\alpha S3L}{P \sinh \alpha L} - \frac{\alpha S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} = 0$$

Multiplicando por  $P \sinh \alpha L$ , tem-se:

$$\alpha S3L \cosh \alpha L + \alpha S4 \cosh \alpha L (\cosh \alpha L - 1) - \alpha S4 \sinh^2 \alpha L +$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} - \alpha S3L - \alpha S4(\cosh \alpha L - 1) = 0$$

Simplificando, resulta:

$$\alpha S3L \cosh \alpha L + \alpha S4 \cosh^2 \alpha L - \alpha S4 \cosh \alpha L - \alpha S4 \sinh^2 \alpha L +$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} - \alpha S3L - \alpha S4 \cosh \alpha L + \alpha S4 = 0$$

Lembrando que  $\cosh^2 \alpha L - \sinh^2 \alpha L = 1$ , tem-se:

$$\alpha S3L \cosh \alpha L + \alpha S4 - \alpha S4 \cosh \alpha L +$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} - \alpha S3L - \alpha S4 \cosh \alpha L + \alpha S4 = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\alpha S3L \cosh \alpha L + 2\alpha S4 - 2\alpha S4 \cosh \alpha L + \frac{P \sinh \alpha L}{a} - \alpha S3L = 0$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = 2\alpha S4(\cosh \alpha L - 1) - \alpha S3L(\cosh \alpha L - 1) \quad (2.102)$$

Portanto, têm-se duas equações e duas incógnitas dadas por eq.(2.101) e eq.(2.102), assim isolando eq.(2.102) e substituindo na eq.(2.101), resulta:

$$\alpha S_4(\cosh \alpha L - 1) = \frac{P \sinh \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)}{2}$$

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = S_3 \left( \alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a} \right) + \frac{P \sinh \alpha L}{2a} + \frac{\alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)}{2}$$

$$2P \sinh \alpha L = 2a S_3 \left( \alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a} \right) + P \sinh \alpha L + a \alpha S_3 L (\cosh \alpha L - 1)$$

$$P \sinh \alpha L = 2a S_3 \alpha L - 2 S_3 \sinh \alpha L + a \alpha S_3 L \cosh \alpha L - a \alpha S_3 L$$

$$P \sinh \alpha L = S_3 (a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L)$$

$$\text{Mas } \alpha^2 = \frac{P}{aEI} \Rightarrow P = \alpha^2 aEI, \text{ assim:}$$

$$S_3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh \alpha L}{(a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L)} \quad (2.103)$$

Substituindo "S3" dado por eq.(2.103) na eq.(2.102) tem-se o valor de "S4", portanto:

$$\frac{P \sinh \alpha L}{a} = 2 \alpha S_4 (\cosh \alpha L - 1) - \alpha L (\cosh \alpha L - 1) \frac{P \sinh \alpha L}{(a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L)}$$

$$2a \alpha S_4 = \frac{P \sinh \alpha L (a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L) + a \alpha L P \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{(a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L) (\cosh \alpha L - 1)}$$

$$2a \alpha S_4 = \frac{P \sinh \alpha L (a \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a \alpha L \cosh \alpha L) + a \alpha L P \sinh \alpha L (\cosh \alpha L - 1)}{\sinh \alpha L (2 - 2 \cosh \alpha L + a \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$2a\alpha S4 = \frac{P[\alpha\alpha L - 2 \sinh\alpha L + \alpha\alpha L \cosh\alpha L + \alpha\alpha L \cosh\alpha L - \alpha\alpha L]}{(2 - 2 \cosh\alpha L + \alpha\alpha L \sinh\alpha L)}$$

Simplificando novamente, e sabendo que  $P = \alpha^2 aEI$ , tem-se:

$$S4 = \frac{\alpha EI(\alpha\alpha L \cosh\alpha L - \sinh\alpha L)}{(2 - 2 \cosh\alpha L + \alpha\alpha L \sinh\alpha L)} \quad (2.104)$$

Para que o denominador das eq.(2.103) e eq.(2.104) se tornem iguais, o que facilita a programação, multiplica-se o numerador e o denominador da eq.(2.103) por  $(\cosh\alpha L - 1)$ , assim tem-se:

$$S3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh\alpha L (\cosh\alpha L - 1)}{(\alpha\alpha L - 2 \sinh\alpha L + \alpha\alpha L \cosh\alpha L) (\cosh\alpha L - 1)}$$

$$S3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh\alpha L (\cosh\alpha L - 1)}{(-\alpha\alpha L - 2 \sinh\alpha L \cosh\alpha L + 2 \sinh\alpha L + \alpha\alpha L + \alpha\alpha L \sinh^2 \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S3 = \frac{\alpha^2 aEI \sinh\alpha L (\cosh\alpha L - 1)}{\sinh\alpha L (2 - 2 \cosh\alpha L + \alpha\alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$S3 = \frac{\alpha^2 aEI (\cosh\alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh\alpha L + \alpha\alpha L \sinh \alpha L)} \quad (2.105)$$

Através das condições de equilíbrio dado por eq.(2.3), lembrando que "P" é de tração, podemos fazer:

$$S2 = \frac{2S3 + P}{L}$$

Substituindo o valor de "S3" dado por eq.(2.105), tem-se:

$$S2 = \frac{2 \left[ \frac{\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)} \right] + \alpha^2 aEI}{L}$$

$$S2 = \frac{2\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1) + \alpha^2 aEI (2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}{L(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}$$

$$S2 = \frac{2\alpha^2 aEI \cosh \alpha L - 2\alpha^2 aEI + 2\alpha^2 aEI - 2\alpha^2 aEI \cosh \alpha L + \alpha^3 a^2 EIL \sinh \alpha L}{L(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}$$

Simplificando, tem-se:

$$S2 = \frac{\alpha^3 a^2 EI \cdot \sinh \alpha L}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (2.106)$$

Através das condições de equilíbrio dado por eq.(2.5), podemos fazer:

$$S5 = L S3 - S4$$

Substituindo o valor de "S3" e "S4" dado por eq.(2.105) e eq.(2.104), respectivamente, resulta:

$$S5 = \frac{\alpha^2 aEI (\cosh \alpha L - 1)}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L} L - \frac{\alpha EI (\alpha \alpha L \cosh \alpha L - \sinh \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L)}$$

$$S5 = \frac{\alpha^2 aEIL \cosh \alpha L - \alpha^2 aEIL - \alpha^2 aEIL \cosh \alpha L + \alpha EI \sinh \alpha L}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L}$$

Simplificando, tem-se:

$$S5 = \frac{\alpha EI (\sinh \alpha L - \alpha \alpha L)}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha \alpha L \sinh \alpha L} \quad (2.107)$$

## 2.4 - FUNÇÕES DE RIGIDEZ

Para facilitar a utilização dos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez do elemento de barra é mostrada a seguir a Tabela II-1 com seus termos representados por fatores que podem ser alterados conforme a condição de influência da força cortante ou sob a variação da força axial. Convém observar que para o caso  $P=0$ , quando se faz o coeficiente de forma igual a zero, " $c=0$ ", ou seja desprezando o efeito da cortante, os coeficientes são idênticos aos usualmente apresentados para a matriz de rigidez em teoria de primeira ordem. Nas colunas laterais tem-se os coeficientes em segunda ordem no qual as funções de rigidez são funções não-lineares de "P".

Tabela II-1 Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial, Força Cortante e Flexão			
S	Compressão ( $P < 0$ )	( $P=0$ )	Tração ( $P > 0$ )
S1	$\frac{E A_x}{L}$	$\frac{E A_x}{L}$	$\frac{E A_x}{L}$
S2	$\frac{E I_z a^2 \alpha^3 \text{sen } \alpha L}{\phi_c}$	$\frac{12 E I'_z}{L^3}$	$\frac{E I_z a^2 \alpha^3 \text{senh } \alpha L}{\phi_t}$
S3	$\frac{E I_z a \alpha^2 (1 - \cos \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{6 E I'_z}{L^2}$	$\frac{E I_z a \alpha^2 (\cosh \alpha L - 1)}{\phi_t}$
S4	$\frac{E I_z \alpha (\text{sen } \alpha L - \alpha L \cos \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{E I'_z}{L} (4 + K)$	$\frac{E I_z \alpha (\alpha L \cosh \alpha L - \text{senh } \alpha L)}{\phi_t}$
S5	$\frac{E I_z \alpha (\alpha L - \text{sen } \alpha L)}{\phi_c}$	$\frac{E I'_z}{L} (2 - K)$	$\frac{E I_z \alpha (\text{senh } \alpha L - \alpha L)}{\phi_t}$
$\phi_c = 2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \text{sen } \alpha L$ $a = 1 + \frac{cP}{G A_x}$		$K = \frac{12cE I_z}{G A_x L^2}$ $\alpha = \sqrt{\frac{ P }{a E I_z}}$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \text{senh } \alpha L$ $I'_z = \frac{I_z}{1+K}$

## 2.5 -PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DA INSTABILIDADE DE PÓRTICO PLANO (CARGA CRÍTICA)

A matriz de rigidez de um elemento de barra  $[S_{KB}]_i$ , dada pela Fig.II\_3, relaciona o vetor dos esforços  $\{F\}_i$  com o vetor dos deslocamentos  $\{D_L\}_i$  nas coordenadas locais do elemento, ver Fig.II\_2.

Portanto, a formulação matricial para o i-ésimo elemento da estrutura fica:

$$\{F\}_{i(6 \times 1)} = [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} \{D_L\}_{i(6 \times 1)} \quad (2.108)$$

A matriz de rigidez da estrutura  $[S_{KG}]$  relaciona o vetor das ações  $\{A\}$  com o vetor dos deslocamentos  $\{D\}$ , nas "n" coordenadas do sistema global, desta forma tem-se:

$$\{A\}_{(n \times 1)} = [S_{KG}]_{(n \times n)} \{D\}_{(n \times 1)} \quad (2.109)$$

A matriz de rigidez da estrutura  $[S_{KG}]$  pode ser obtida através da contribuição dos elementos de barra, segundo GERE e WEAVER <sup>[11]</sup>, tem-se que:

$$[S_{KG}]_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 6)}^T [S_{KB}]_{i(6 \times 6)} [b]_{i(6 \times n)} \quad (2.110)$$

onde n = número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra, no sistema global; nb = número de elementos de barra;  $[b]_i$  = submatriz de ordem 6 x n, correspondente ao elemento "i", da matriz de

transformação [b] de ordem  $6n_b \times n$ , que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos.

A técnica para determinação do carregamento crítico, denominado de " $W_{crit}$ ", consiste em avaliar os deslocamentos da estrutura produzidos por um determinado carregamento, inicialmente sem o efeito das forças normais e posteriormente considerando os seus efeitos.

A estrutura é calculada sucessivas vezes até que haja convergência nos valores dos deslocamentos, mediante uma tolerância previamente estabelecida.

Uma estrutura será considerada estável sob um certo carregamento se sua matriz de rigidez for definida positiva. Neste caso, todos os deslocamentos da estrutura serão determinados; porém, se este carregamento levar a estrutura a uma situação de instabilidade, a matriz de rigidez da estrutura deixará de ser definida positiva; portanto os deslocamentos tornar-se-ão indeterminados.

Finalmente, o carregamento crítico de instabilidade de uma estrutura será considerado definido quando após sucessivos aumentos no carregamento da estrutura a rigidez for se degenerando até que o determinante de sua matriz de rigidez se torne nulo, indicando o surgimento do menor auto valor igual a zero.

## **2.6- FLUXOGRAMA DAS PROGRAMAÇÕES PARA COMPUTADOR**

O fluxograma resumido, apresentado a seguir, visa esclarecer o programa de computador desenvolvido para o cálculo do parâmetro crítico de instabilidade " $W_{crit}$ " de pórticos planos, com base no fluxograma desenvolvido por REQUENA<sup>[14]</sup>.

O programa foi desenvolvido em linguagem BORLAND PASCAL V7.0, em dupla precisão, com a finalidade de determinar a capacidade máxima de carregamentos nas estruturas ao se atingirem os limites de suas estabilidades:

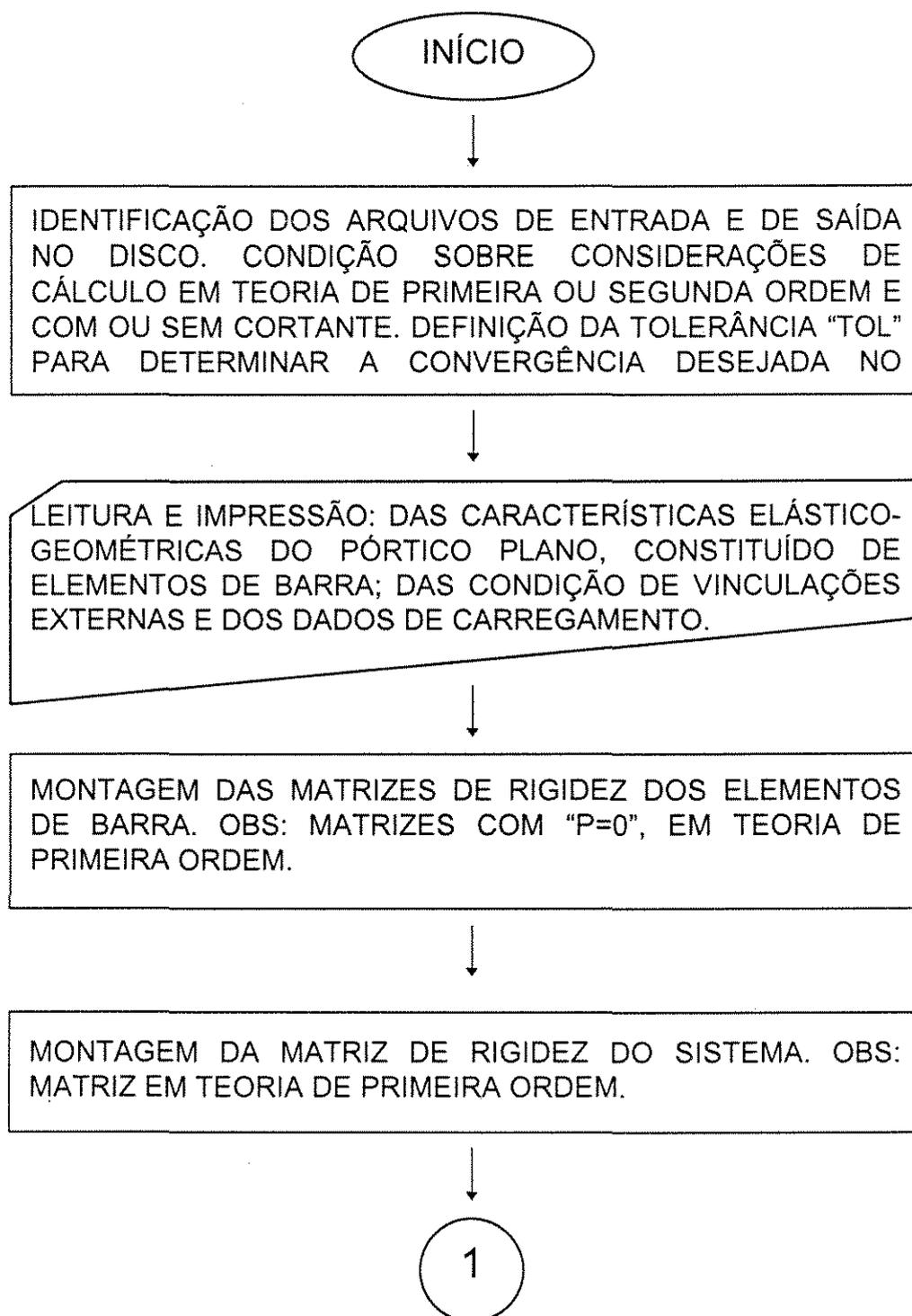
O programa foi montado em sub-rotinas que facilitam a separação das etapas de cálculo além de propiciarem melhor entendimento do processo.

A deformação por cortante pode ser ou não considerada no programa.

Caso não se consiga convergência em um número de ciclos previamente estabelecido de 50 ciclos, mediante também uma precisão desejada previamente estabelecida em  $10^{-3}$ , o programa para o processamento avisando que ultrapassou o número de ciclos previsto sem ter entretanto obtido convergência.

Este fluxograma visa a determinação do parâmetro crítico de instabilidade para pórticos planos e a partir dele será elaborado um programa que considera a determinação do parâmetro crítico de instabilidade para pórticos tridimensionais, utilizando as funções de rigidez tridimensionais que será deduzida no Capítulo III.

## 2.6.1 - FLUXOGRAMA RESUMIDO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA CÁLCULO DA INSTABILIDADE DE PÓRTICO PLANO



1



MONTAGEM DA MATRIZ DE ENGASTAMENTO PERFEITO PARA O CASO DE CARGA DISTRIBUÍDA E CARGA CONCENTRADA. CÁLCULO DO VETOR DE CARGA NODAL EQUIVALENTE.



MONTAGEM DO VETOR DAS AÇÕES COMBINADAS: CARGA APLICADA NOS NÓS E CARGA NODAL EQUIVALENTE.



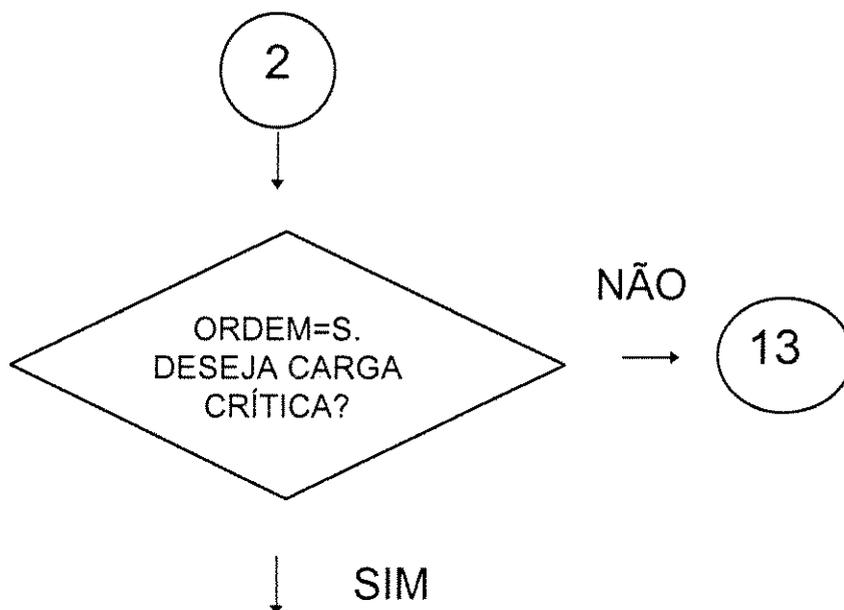
CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS GLOBAIS DO SISTEMA. OBS: DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ POR CHOLESKI.



CÁLCULO DAS AÇÕES DE EXTREMIDADE DOS ELEMENTOS, EM ESPECIAL AS FORÇAS AXIAIS, E CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO. OBS: EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM.



2



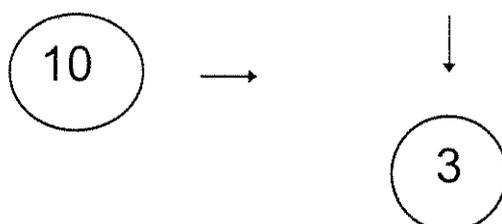
PROCURA-SE A BARRA CRÍTICA, OU SEJA, A BARRA COM MAIOR ESFORÇO DE COMPRESSÃO  $P_{\text{Barra crítica}}$ . CÁLCULA

$$W_{\text{max}} = \frac{4P_{\text{Euler}}}{P_{\text{Barra crítica}}}; \text{ FAZ } WA_{\text{INIC}} = 0 \text{ E } WB_{\text{INIC}} = W_{\text{MAX}},$$

PARA OBTEN O PARÂMETRO INICIAL "W" MULTIPLICADOR DAS CARGAS. (ZERA O NCICLOS=0)



OBTEM O PARÂMETRO MULTIPLICADOR:  $W = \frac{(WA + WB)}{2}$ ; INCREMENTO DO (NCICLOS+1); INCREMENTA-SE COM "W" O VETOR DAS AÇÕES COMBINADAS, OS DESLOCAMENTOS E AS AÇÕES DE EXTREMIDADE.



3



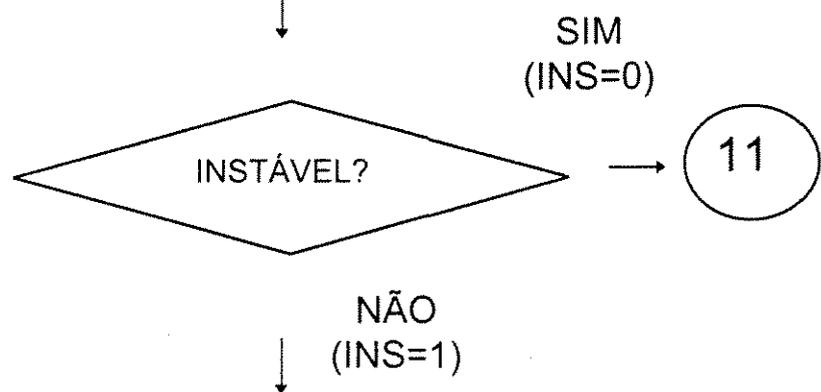
MONTAGEM DAS MATRIZES DOS ELEMENTOS DE BARRA AFETADAS PELAS FORÇAS AXIAIS. OBS: MATRIZES COM  $P \neq 0$ , EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM. FAZ-SE AUX1=0.



MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA AFETADA PELAS FORÇAS AXIAIS. OBS: MATRIZES COM  $P \neq 0$ , EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM.



DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DO SISTEMA POR CHOLESKY. VERIFICA SE A MATRIZ É DEFINIDA POSITIVA. SE DEF. POS. => INS=1 ; SE NÃO DEF. POS. => INS=0.



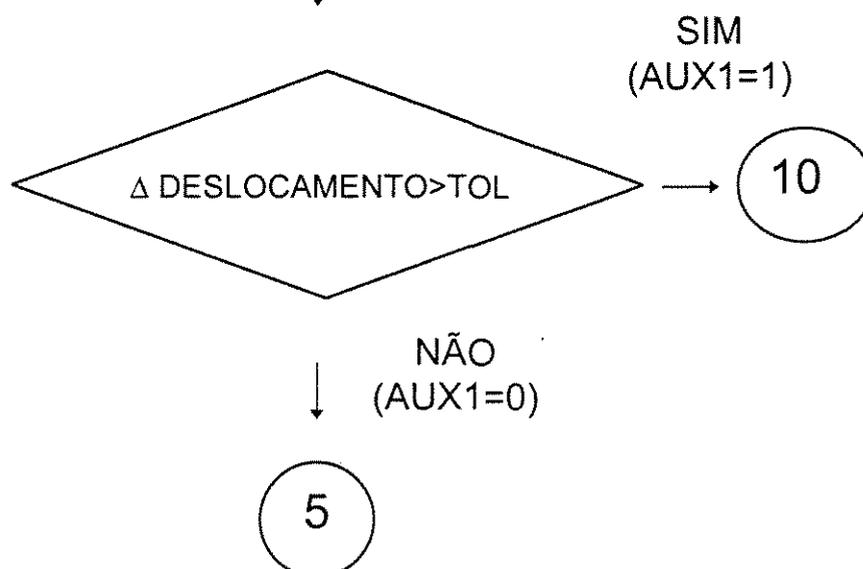
4

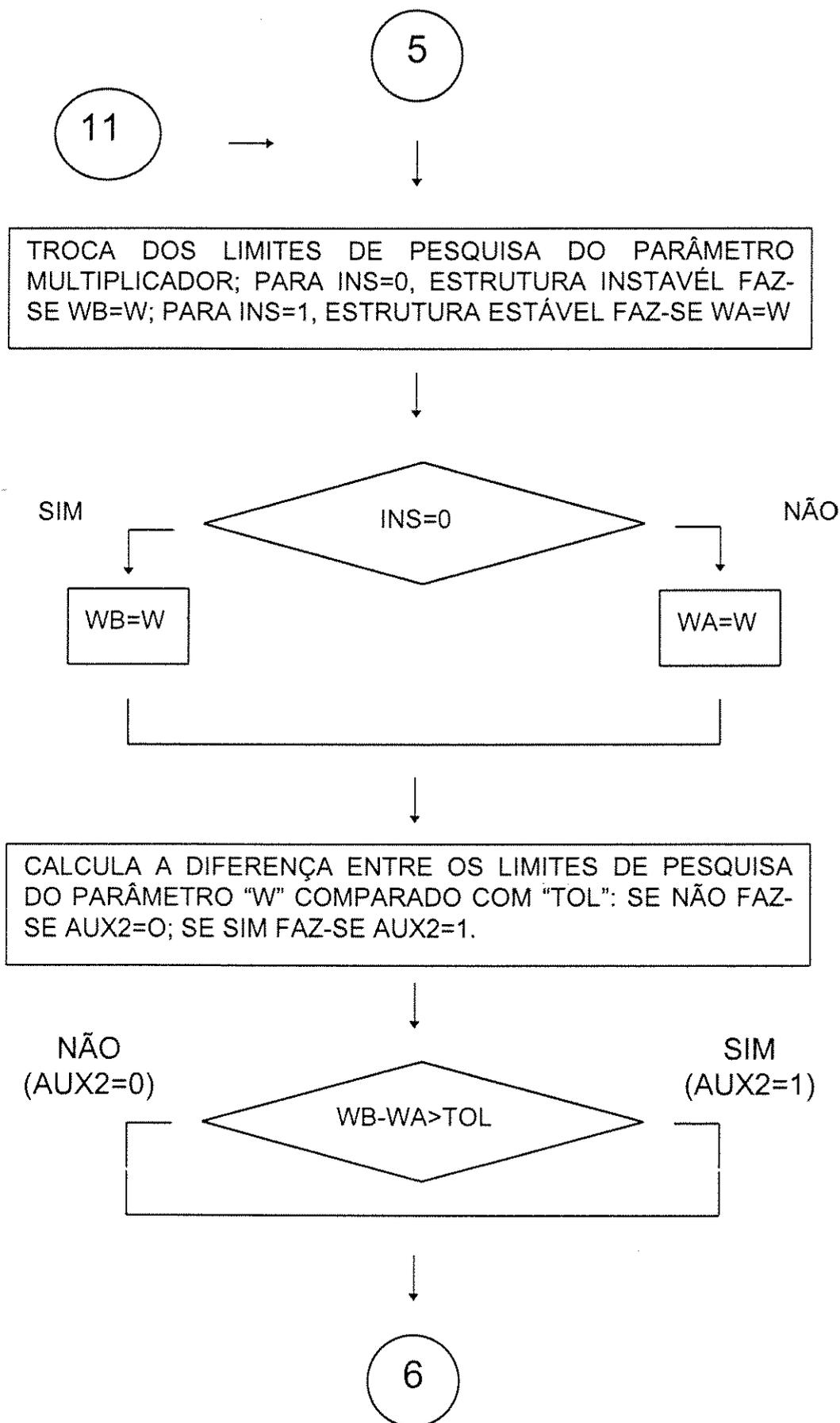
4

OBTEM-SE OS DESLOCAMENTOS GLOBAIS PROVOCADO PELAS AÇÕES COMBINADAS INCREMENTADAS POR "W", EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM.

NOVOS ESFORÇOS AXIAIS PARA O MESMO CARREGAMENTO QUE PRODUZIRÃO NOVOS EFEITOS AXIAIS NA MATRIZ DE RIGIDEZ.

COMPARAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS ATUAIS DO SISTEMA COM OS ANTERIORES. VERIFICAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DOS DESLOCAMENTOS; SE SIM FAZ-SE AUX1=1; SE NÃO FAZ-SE AUX1=0.

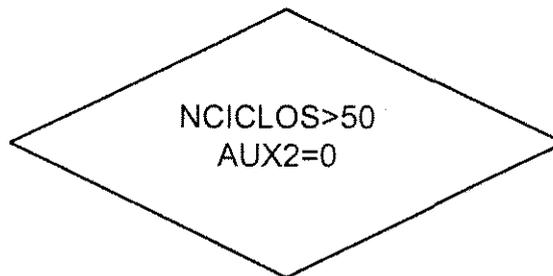




6



VERIFICA-SE O NCICLOS>50; SE SIM FIM DO PROCESSO; SE NÃO TEM-SE DUAS SAÍDAS: PARA AUX2=1 CONTINUA O PROCESSO MAS PARA AUX2=0 FIM DO PROCESSO.



NÃO



12



SIM

O VALOR DO PARÂMETRO CRÍTICO FOI ENCONTRADO:  
 $W_{CRIT} = W$  . IMPRIME O VALOR DE  $W_{CRIT}$  E O NCICLOS.  
 CÁLCULA  $P_{CRIT}[i]$  E PARÂMETRO DE FLAMBAGEM DADO  
 POR:  $K[i] = \sqrt{\frac{P_{Euler}[i]}{P_{CRIT}[i]}}$  PARA CADA ELEMENTO.

13



FIM

## ***CAPÍTULO III***

# **INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS**

### **3.1 - INTRODUÇÃO**

Este capítulo aborda estruturas tridimensionais constituídas por barras deformáveis em seu plano e fora dele. Estas barras são admitidas como deformáveis por flexão, por força axial e por força cortante. Apresenta-se aqui o desenvolvimento da formulação das funções de rigidez tridimensionais, bem como o fluxograma do programa de computador para análise de instabilidade de pórticos tridimensionais, em teoria de segunda ordem, com as funções de rigidez tridimensionais.

### **3.2- SISTEMA DE REFERÊNCIA**

#### **3.2.1- SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DE EIXOS PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS**

O sistema de referência global de eixos adotado para o caso de estruturas tridimensionais será dextrorso, com eixos " $x_G$ ", " $y_G$ ", " $z_G$ " e origem "O" num ponto qualquer. O eixo " $x_G$ ", horizontal, será orientado da esquerda para a direita, o eixo " $y_G$ ", vertical, será orientado de baixo para cima, conforme mostrado na Fig.III-1.

### 3.2.2- SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL DE EIXOS PARA O ELEMENTO DE BARRA

O sistema de referência local de eixos adotado para o elemento de barra "i" será dextrorso, com eixos " $x$ ", " $y$ ", " $z$ " e origem " $O_i$ " no nó inicial "j" da barra "i", no centro de gravidade da seção transversal da barra, conforme mostrado na Fig.III-1.

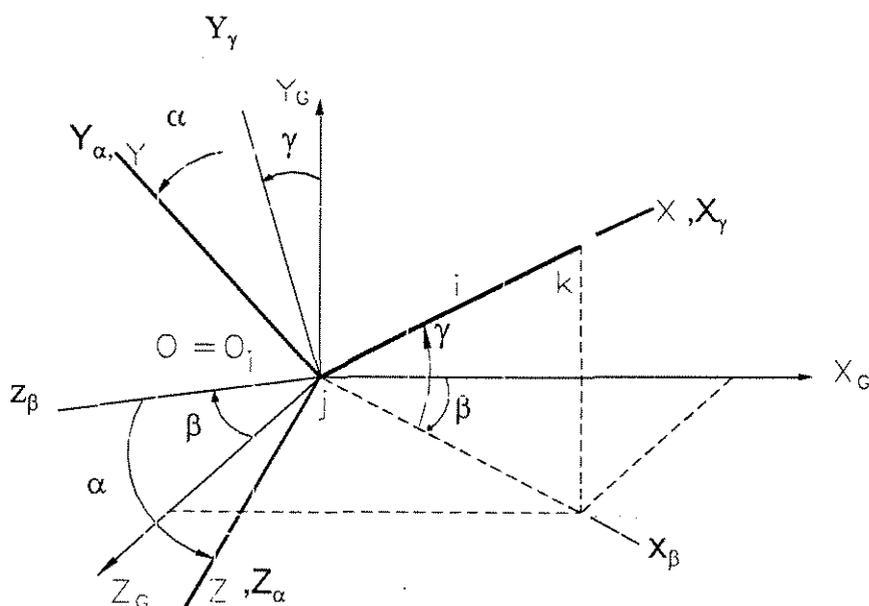


Figura III-1 Sistema de Referência Tridimensional.

Para facilitar a visualização o eixo "O<sub>i</sub>" será tido como coincidente com o eixo "O", assim "O<sub>i</sub>=O". O eixo "x" será o próprio eixo da barra orientado do nó inicial "j" para o nó final "k". Para estabelecer as direções para os eixos "y" e "z" devido a muitas possíveis escolhas convém tomar o eixo "z" horizontal, ou seja, pertencente ao plano formado pelos eixos "x<sub>G</sub>" e "z<sub>G</sub>". Assim, conclui-se que o eixo "y" se localiza perpendicularmente ao plano definido pelos eixos "x" e "z". Para especificar a posição dos eixos será tomado um ângulo de giro em torno de "x". Assim, para visualizar melhor como se mede tal ângulo, considere as três sucessivas rotações dos eixos da estrutura (eixos globais) para os eixos da barra (eixos locais): as primeiras duas rotações do ângulos "β" em torno do eixo "y<sub>G</sub>" e "γ" em torno do eixo "z<sub>β</sub>". A terceira transformação consiste numa rotação através do ângulo "α" em torno do eixo "x", fazendo com que os eixos se tornem coincidentes com os eixos da barra "y" e "z". A definição destes ângulos se torna importante quando for realizada a programação da matriz de rotação da estrutura.

### **3.3- MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA COM FUNÇÕES DE RIGIDEZ TRIDIMENSIONAIS**

A matriz de rigidez do elemento com funções de rigidez tridimensionais, também chamadas de funções de estabilidade tridimensionais, serão desenvolvidas aqui. Os coeficientes de rigidez do elemento tridimensional consideram simultaneamente as deformações por força axial, por força cortante, por flexão e torção, além dos efeitos da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem.

### 3.3.1 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Com o propósito de diminuir o peso próprio das estruturas metálicas começou-se a reduzir as espessuras das paredes das barras criando o grupo das barras com seção delgada. Entretanto estas barras passaram a apresentar problemas de instabilidade. A partir da teoria para barras de seção delgada, proposta por VLASSOV<sup>[17]</sup> em 1940, houve um avanço no estudo da resistência dos materiais. Constatou-se que é possível obter o mesmo módulo de resistência com uma espessura da parede da barra menor, reduzindo desta forma o seu peso próprio, MORI<sup>[18]</sup>.

A Fig.III-2 mostra uma barra genérica com seção transversal constante ao longo de "x", cuja estabilidade será estudada. São consideradas duas hipóteses básicas de cálculo na dedução das equações diferenciais. A primeira hipótese é que a barra é considerada rígida em seu plano "z-y", ou seja, a seção transversal projeta-se indeformada no seu plano "z-y" após a deformação da barra. A segunda hipótese é que a superfície definida pela linha do esqueleto e pela perpendicular à seção transversal, chamada de superfície média, não sofre distorção, ou seja, são admitidas apenas translações e rotações da seção inteira sendo que os deslocamentos são admitidos apenas na direção longitudinal da peça.

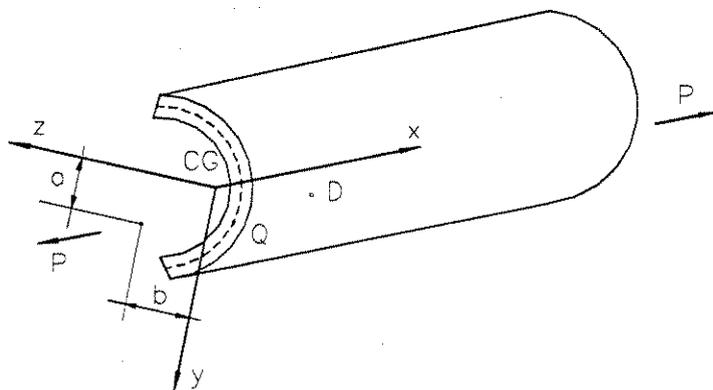


Figura III-2 - Barra Genérica.

Serão admitidos deslocamentos lineares “u”, “v” e “w” respectivamente nas direções e sentidos dos eixos “x”, “y” e “z” e o deslocamento angular “ $\phi$ ” em torno do eixo “x”. Os deslocamentos “u”, “v” e “w” podem ser escritos como funções de “x”, “y” e “z”. Com base na hipótese de que a barra é considerada rígida no plano “z-y” pode-se admitir que os deslocamentos serão funções apenas de “x”. Os eixos “y” e “z” são eixos principais de inércia da seção transversal.

Será adotado para referência dos deslocamentos o ponto “D”, coincidente com o centro de torção da seção transversal. O centro de torção é definido como um ponto pertencente ao plano da seção pelo qual passando a resultante das cargas transversais não ocorre torção. Assim, os deslocamentos da barra serão escritas em relação a ele através das funções:

$v_D(x)$  : deslocamento do centro de torção na direção de y;

$w_D(x)$  : deslocamento do centro de torção na direção de z; e,

$\phi(x)$  : rotação da seção em torno de um eixo longitudinal passando pelo centro de torção;

Admitindo-se o carregamento composto por duas forças longitudinais aplicadas nas seções extremas com excentricidade “a” e “b” em relação aos eixos “y” e “z”, respectivamente, obtém-se os esforços solicitantes, em teoria de primeira ordem:

$$N = P$$

$$M_y = Pb \tag{3.1}$$

$$M_z = Pa$$

A tensão normal “ $\sigma$ ” admitinda ser positiva no caso da tração é dada por:

$$\sigma = \frac{N}{A_x} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (3.2)$$

sendo “N” a força normal; “ $M_y$ ” e “ $M_z$ ” os momentos fletores, conforme eq.(3.1), “B” o bimomento, “ $A_x$ ” a área da seção transversal, “ $I_y$ ” e “ $I_z$ ” os momentos principais de inércia, “ $J_\omega$ ” o momento setorial de inércia e “ $\omega$ ” um valor genérico da área setorial com polo no centro de torção “D”.

Para a dedução das equações diferenciais não será considerado o efeito do bimomento, portanto a eq (3.2) passa a ser:

$$\sigma = \frac{N}{A_x} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (3.3)$$

Utilizando a conhecida relação da resistência dos materiais entre o momento fletor e a segunda derivada do deslocamento obtêm-se as flexões nos planos “x-y” e “x-z”. Para a rotação em torno do eixo “x” a teoria da flexo-torção apresenta a relação correspondente à torção. Desta forma, tem-se:

$$EI_z v_D'' = -M_z$$

$$EI_y w_D'' = -M_y \quad (3.4)$$

$$EJ_\omega \phi''' - GJ_t \phi' = -M_t$$

sendo “ $J_t$ ” o momento de inércia à torção da seção, “ $M_t$ ” o momento torçor, “E” o módulo de elasticidade do material, e “G” o módulo de elasticidade transversal. Salienta-se que as eq.(3.4) são válidas apenas no regime elástico onde o módulo de elasticidade permanece constante.

Derivando-se as duas primeiras equações da eq.(3.4) duas vezes e uma vez a última, obtém-se:

$$EI_z v_D'''' = p_y$$

$$EI_y w_D'''' = p_z \quad (3.5)$$

$$EJ_\phi \phi'''' - GJ_t \phi'' = -m$$

A primeira derivada do momento permite calcular a cortante e a segunda derivada permite calcular as forças transversais distribuídas “ $p_y$ ” e “ $p_z$ ”. Estas forças são consideradas positivas quando no sentido dos respectivos eixos. O momento torçor distribuído “ $m$ ”, resultante da derivada do momento torçor, é considerada positiva quando no sentido horário para um observador olhando no sentido positivo do eixo “ $x$ ”. A barra genérica em estudo possui apenas forças axiais aplicadas nas extremidades, portanto:

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ p_y &= 0 \\ p_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pode-se realizar o estudo em teoria de segunda ordem, ou seja, o estudo do equilíbrio na posição deslocada considerando-se os acréscimos nas cargas distribuídas provocadas pelos esforços axiais, RACHID e MORI<sup>[19]</sup> (1989). Denomina-se por CDY o acréscimo de carga distribuída na direção de “ $y$ ”, CDZ o acréscimo de carga distribuída na direção “ $z$ ” e CTD o acréscimo de momento torçor distribuído. Desta forma, da eq (3.5) e eq (3.6), tem-se:

$$EI_z v_D'''' = CDY$$

$$EI_y w_D'''' = CDZ \quad (3.7)$$

$$EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = -CTD$$

A fig.III-3 mostra um elemento de volume "dSdx" e os seus deslocamentos. A fig.III-4 mostra, para a determinação de CDY, que a força adicional na direção de "y" é dada por:

$$-\sigma dS v' + \sigma dS (v' + dv') = \sigma dS dv'$$

Distribuindo em "dx" obtém-se:

$$\sigma dS \frac{dv'}{dx} = \sigma dS v''$$

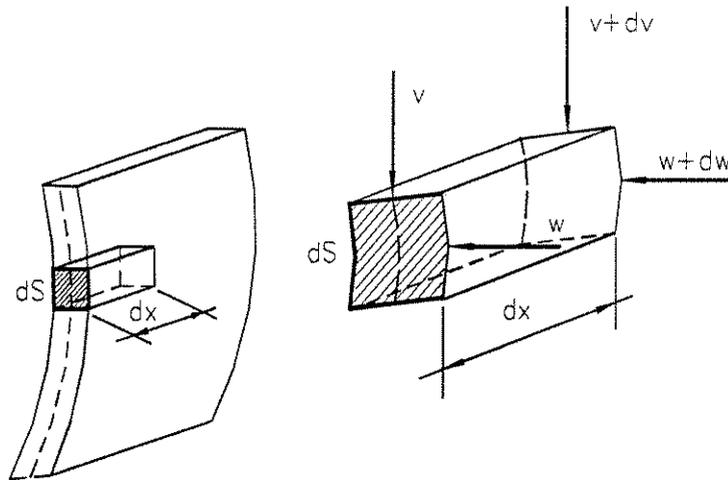


Figura III-3 - Elemento de Volume "dSdx".

A carga distribuída na direção de "y", CDY, vale:

$$CDY = \int_S \sigma v'' dS \quad (3.8)$$

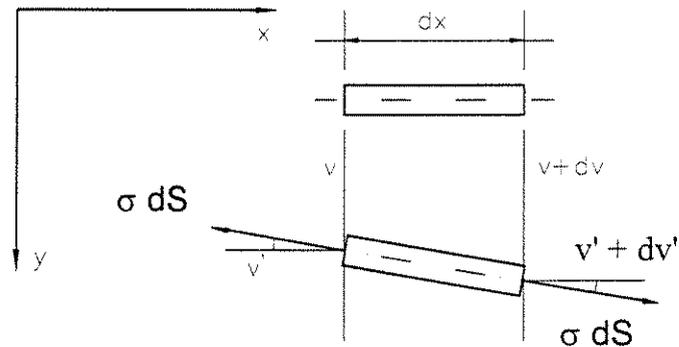


Figura III-4 - Acréscimo na CDY.

Analogamente para a direção "z" obtém-se:

$$CDZ = \int_S \sigma w'' dS \quad (3.9)$$

O acréscimo no momento torçor distribuído, CTD, é obtido considerando que as resultantes infinitesimais por unidade de comprimento CDY e CDZ dado pela eq (3.8) e eq (3.9), respectivamente, estão aplicadas no ponto " Q' ", ver Fig. III-5, da posição deslocada.

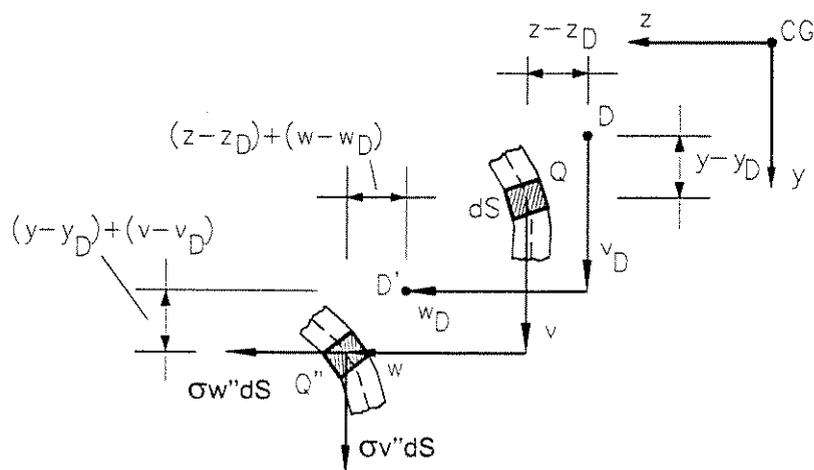


Figura III-5 - Acréscimo na CTD.

Estão indicados na fig. III-5, as distâncias destas resultantes até a nova posição " D' " do centro de torção. Desta forma, o acréscimo no momento torçor distribuído fica:

$$CTD = \int_S [\sigma w'' (y - y_d + v - v_d) - \sigma v'' (z - z_d + w - w_d)] dS \quad (3.10)$$

Seja o deslocamento de um ponto genérico "Q<sub>y-z</sub>" do esqueleto, utilizado para vincular "v", "w" e "φ" mostrado na Fig. III-6. Este deslocamento é tido como a superposição de uma translação e uma rotação da seção. A translação é representada pela passagem de um ponto genérico de "Q" para um outro ponto " Q' " e é representada por duas componentes "v<sub>D</sub>" e "w<sub>D</sub>". A rotação é representada pela rotação em torno do ponto " D' ", ou seja, passa de "D'Q' " para "D'Q" " através de um ângulo "φ". Observe-se que o sinal negativo de "w<sub>1</sub>" é devido ao seu deslocamento ser contrário ao eixo "z", assim obtém-se:

$$v_1 = r\phi \cos \theta = (z - z_d)\phi$$

$$-w_1 = r\phi \sin \theta = (y - y_d)\phi$$

Por superposição de "v<sub>1</sub>" e "w<sub>1</sub>", obtém-se:

$$v = v_D + (z - z_D)\phi$$

$$w = w_D - (y - y_D)\phi \quad (3.11)$$

Utilizando a eq.(3.11) na eq.(3.10), resulta:

$$CTD = \int_S \sigma w'' (y - y_D) dS - \int_S \sigma v'' (z - z_D) dS + \int_S \sigma w'' \phi (z - z_D) dS + \int_S \sigma v'' \phi (y - y_D) dS \quad (3.12)$$

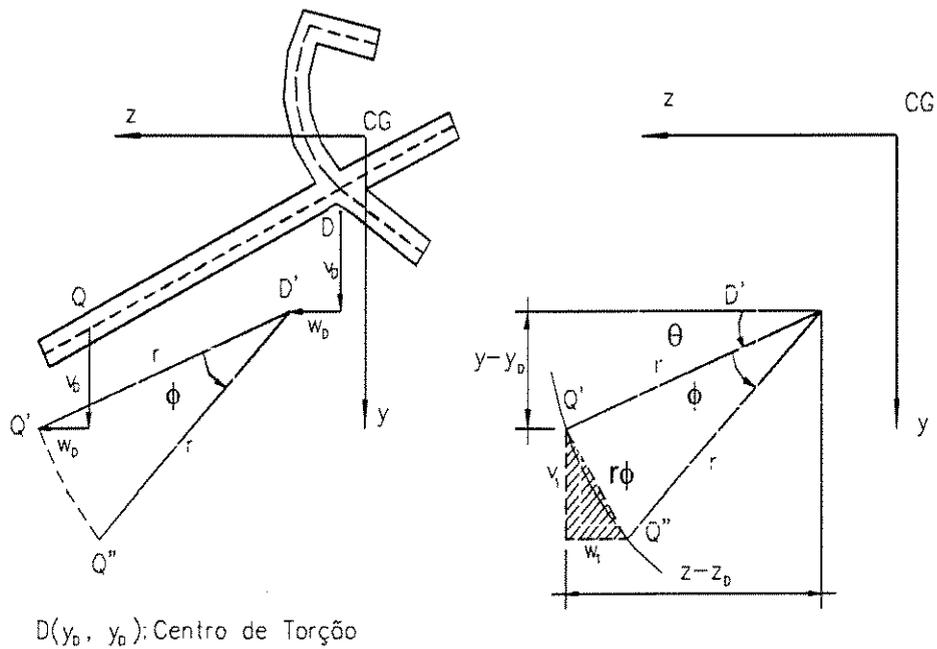


Figura III-6 - Deslocamento de um Ponto Genérico.

As funções "v", "w" e " $\phi$ " são consideradas suficientemente pequenas, dentro das aproximações da teoria de segunda ordem, para que os quadrados e os produtos das funções e derivadas possam ser desprezados. Desta forma, a eq.(3.12) se torna:

$$CTD = \int_S \sigma w'' (y - y_D) dS - \int_S \sigma v'' (z - z_D) dS \quad (3.13)$$

Através da expressão de CDY, CDZ e CTD dado pelas eq.(3.8), eq.(3.9), eq.(3.13), respectivamente, e da substituição de "v" e "w" dados pela eq.(3.11) na eq.(3.7), obtém-se:

$$EI_z v_D'''' = \int_S \sigma [v_D + (z - z_D) \phi]'' dS$$

$$EI_y w_D'''' = \int_S \sigma [w_D - (y - y_D) \phi]'' dS \quad (3.14)$$

$$EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = - \int_S [\omega_D - (y - y_D) \phi]'' (y - y_D) dS + \int_S [\nu_D + (z - z_D) \phi]'' (z - z_D) dS$$

Substituindo o valor de "σ" dado pela eq.(3.3) e derivando como indicado na eq.(3.14), resulta:

$$EI_z \nu_D'''' = \int_S \left[ \frac{N}{A_x} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right] [\nu_D'' + z \phi'' - z_D \phi''] dS$$

ou:

$$EI_z \nu_D'''' = \frac{N}{A_x} \nu_D'' \int_S dS + \frac{N}{A_x} \phi'' \int_S z dS - \frac{N}{A_x} \phi'' z_D \int_S dS + \frac{M_z}{I_z} \nu_D'' \int_S y dS + \frac{M_z}{I_z} \phi'' \int_S y z dS - \frac{M_z}{I_z} z_D \phi'' \int_S y dS + \frac{M_y}{I_y} \nu_D'' \int_S z dS + \frac{M_y}{I_y} \phi'' \int_S z^2 dS - \frac{M_y}{I_y} z_D \phi'' \int_S z dS$$

Integrando e lembrando que  $I_y = \int_S z^2 dS$  e que os momentos estáticos  $\int_S z dS$ ,  $\int_S y dS$  e o momento de inércia centrífugo  $\int_S y z dS$  são nulos quando calculados em relação aos eixos principais de inércia, resulta:

$$EI_z \nu_D'''' = N \nu_D'' - N z_D \phi'' + M_y \phi'' \quad (3.15)$$

Analogamente, substituindo o valor de "σ" dado pela eq.(3.3) e realizando as operações de derivação e integração indicadas na segunda eq.(3.14), obtém-se:

$$EI_y \omega_D'''' = N \omega_D'' + N y_D \phi'' - M_z \phi'' \quad (3.16)$$

Para a terceira eq.(3.14), obtém-se:

$$EJ_{\omega}\phi''''-GJ_t\phi''=\int_S\left[\frac{N}{A_x}+\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z\right]\left[v_D''+z\phi''-z_D\phi''\right](z-z_D)dS-$$

$$\int_S\left[\frac{N}{A_x}+\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z\right]\left[w_D''-y\phi''+y_D\phi''\right](y-y_D)dS$$

Multiplicando, resulta:

$$EJ_{\omega}\phi''''-GJ_t\phi''=$$

$$\int_S\left[\frac{N}{A_x}+\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z\right]\left[zv_D''+z^2\phi''-2zz_D\phi''-z_Dv_D''+z_D^2\phi''\right]dS-$$

$$\int_S\left[\frac{N}{A_x}+\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z\right]\left[yw_D''-y^2\phi''+2yy_D\phi''-y_Dw_D''-y_D^2\phi''\right]dS$$

Sendo:

$$EJ_{\omega}\phi''''-GJ_t\phi''=$$

$$\frac{N}{A_x}v_D''\int_Sz dS+\frac{N}{A_x}\phi''\int_Sz^2 dS-2\frac{N}{A_x}z_D\phi''\int_Sz dS-\frac{N}{A_x}z_Dv_D''\int_SdS+\frac{N}{A_x}z_D^2\phi''\int_SdS$$

$$+\frac{M_z}{I_z}v_D''\int_Syz dS+\frac{M_z}{I_z}\phi''\int_Syz^2 dS-2\frac{M_z}{I_z}z_D\phi''\int_Syz dS-\frac{M_z}{I_z}z_Dv_D''\int_Sy dS$$

$$+\frac{M_z}{I_z}z_D^2\phi''\int_Sy dS+\frac{M_y}{I_y}v_D''\int_Sz^2 dS+\frac{M_y}{I_y}\phi''\int_Sz^3 dS-2\frac{M_y}{I_y}z_D\phi''\int_Sz^2 dS$$

$$-\frac{M_y}{I_y}z_Dv_D''\int_Sz dS+\frac{M_y}{I_y}z_D^2\phi''\int_Sz dS-\frac{N}{A_x}w_D''\int_Sy dS+\frac{N}{A_x}\phi''\int_Sy^2 dS$$

$$-2\frac{N}{A_x}y_D\phi''\int_Sy dS+\frac{N}{A_x}y_Dw_D''\int_SdS+\frac{N}{A_x}y_D^2\phi''\int_SdS-\frac{M_z}{I_z}w_D''\int_Sy^2 dS$$

$$+\frac{M_z}{I_z}\phi''\int_Sy^3 dS-2\frac{M_z}{I_z}y_D\phi''\int_Sy^2 dS+\frac{M_z}{I_z}y_Dw_D''\int_Sy dS+\frac{M_z}{I_z}y_D^2\phi''\int_Sy dS$$

$$-\frac{M_y}{I_y}w_D''\int_Syz dS+\frac{M_y}{I_y}\phi''\int_Sy^2z dS-2\frac{M_y}{I_y}y_D\phi''\int_Syz dS+\frac{M_y}{I_y}y_Dw_D''\int_Sz dS$$

$$+\frac{M_y}{I_y}y_D^2\phi''\int_Sz dS$$

Integrando, tem-se:

$$\begin{aligned}
& EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = \\
& \frac{N}{A_x} \phi'' I_y - N z_D v_D'' + N z_D^2 \phi'' + \frac{M_z}{I_z} \phi'' \int_S y z^2 dS + M_y v_D'' + \frac{M_y}{I_y} \phi'' \int_S z^3 dS - \\
& 2 M_y z_D \phi'' + \frac{N}{A_x} I_z \phi'' + N y_D w_D'' + N y_D^2 \phi'' - M_z w_D'' + \frac{M_z}{I_z} \phi'' \int_S y^3 dS - \\
& 2 M_z y_D \phi'' + \frac{M_y}{I_y} \phi'' \int_S y^2 z dS
\end{aligned} \tag{3.17}$$

O raio de giração polar em relação ao centro de torção, "i<sub>D</sub>", é dado por:

$$i_D^2 = y_D^2 + z_D^2 + \frac{I_y + I_z}{A_x} \tag{3.18}$$

As características geométricas da seção dadas por "K<sub>y</sub>" e "K<sub>z</sub>" são definidas por:

$$\begin{aligned}
K_y &= \frac{1}{2I_z} \int_S y (y^2 + z^2) dS = \frac{1}{2I_z} \int_S y^3 dS + \frac{1}{2I_z} \int_S y z^2 dS \\
K_z &= \frac{1}{2I_y} \int_S z (y^2 + z^2) dS = \frac{1}{2I_y} \int_S z^3 dS + \frac{1}{2I_y} \int_S z y^2 dS
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Reagrupando a eq.(3.17), resulta:

$$\begin{aligned}
& EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = \\
& \left[ y_D^2 + z_D^2 + \frac{1}{A_x} I_y + \frac{1}{A_x} I_z \right] N \phi'' - 2 M_y z_D \phi'' - 2 M_z y_D \phi'' + \\
& M_z \phi'' \left[ \frac{1}{I_z} \int_S y^3 dS + \frac{1}{I_z} \int_S y z^2 dS \right] + M_y \phi'' \left[ \frac{1}{I_y} \int_S z^3 dS + \frac{1}{I_y} \int_S y^2 z dS \right] - \\
& N z_D v_D'' + M_y v_D'' + N y_D w_D'' - M_z w_D''
\end{aligned}$$

E utilizando as eq.(3.18) e eq.(3.19), tem-se:

$$EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = \\ N i_D^2 \phi'' - 2 M_y z_D \phi'' - 2 M_z y_D \phi'' + M_z \phi'' 2 K_y + M_y \phi'' 2 K_z - \\ N z_D v_D'' + M_y v_D'' + N y_D w_D'' - M_z w_D''$$

Reagrupando os termos, obtém-se:

$$EJ_{\omega} \phi'''' - GJ_t \phi'' = \left[ N i_D^2 + 2 M_y (K_z - z_D) + 2 M_z (K_y - y_D) \right] \phi'' + \\ (M_y - N z_D) v_D'' - (M_z - N y_D) w_D'' \quad (3.20)$$

Portanto, o sistema de equações diferenciais procurado será dado pelas eq.(3.15), eq.(3.16) e eq.(3.20). Assim:

$$EI_z v_D'''' - N v_D'' + (N z_D - M_y) \phi'' = 0 \\ EI_y w_D'''' - N w_D'' - (N y_D - M_z) \phi'' = 0 \quad (3.21)$$

$$EJ_{\omega} \phi'''' - \left[ N i_D^2 + 2 M_y (K_z - z_D) + 2 M_z (K_y - y_D) + GJ_t \right] \phi'' \\ - (M_y - N z_D) v_D'' + (M_z - N y_D) w_D'' = 0$$

O sistema de equações lineares a coeficientes constantes, dado pela eq.(3.21), é válido para os casos de sollicitação por momento fletor constante e forças longitudinais em barras prismáticas, RACHID e MORI <sup>[20]</sup> (1993). A perda de estabilidade neste caso pode ocorrer de três modos. A primeira é através da instabilidade por flexão na direção do eixo "z" e na direção do eixo "y" tida como flambagem de Euler. A segunda através da instabilidade por torção caracterizada pela rotação "φ" em torno do centro de torção "D". E a terceira por instabilidade lateral caracterizada pela flexão e torção, simultaneamente.

A resolução deste sistema de equações diferenciais ordinárias, homogêneas e de coeficientes constantes, eq.(3.21), conduz basicamente a dois tipos de soluções: problema de auto-valores e problema de segunda espécie. Por problema de auto-valores entende-se que não é possível

determinar a equação da elástica, apenas sua forma porque não é possível determinar as constantes multiplicadoras. O valor crítico do carregamento é obtido através das condições de contorno. Por problemas de segunda espécie entende-se aquele em que a equação da elástica é determinada para qualquer carregamento sendo que para o carregamento definido como carregamento último as funções que definem a elástica degeneram para valores infinitos.

A resolução do sistema de equações diferenciais dado pela eq.(3.21), não será enfocada neste trabalho devido as simplificações admitidas nas hipóteses da análise proposta. Com base na hipótese de seção duplamente simétrica resulta que:

$$y_D = z_D = 0$$

$$i_D^2 = \frac{I_y + I_z}{A_x}$$

$$K_y = K_z = 0$$

Considere, também, uma seção com área setorial nula de modo que:

$$J_w = 0$$

Por fim, considerando a força aplicada sem excentricidade, portanto,  $a=b=0$ , obtém-se um sistema com três equações desacopladas. Para um carregamento de compressão centrada tem-se:

$$\begin{aligned} N &= -P \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

As equações desacopladas são obtidas da eq.(3.22) em eq.(3.21), assim tem-se:

$$EI_z v_D'''' + P v_D'' = 0$$

$$EI_y w_D'''' + P w_D'' = 0 \quad (3.23_a)$$

$$\left[ P i_D^2 - GJ_t \right] \phi'' = 0$$

Pelo fato de se considerar as derivadas dos deslocamentos transversais como desprezíveis, as equações ficam simplificadas e podem ser escritas como:

$$EI_z v_D'' + P v_D = 0$$

$$EI_y w_D'' + P w_D = 0 \quad (3.23_b)$$

$$\left[ P i_D^2 - GJ_t \right] \phi = 0$$

Estas são as equações diferenciais que serão utilizadas neste trabalho para o desenvolvimento das funções de rigidez tridimensionais.

### 3.3.2- FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA TRIDIMENSIONAL CONSIDERANDO O EFEITO DA FORÇA AXIAL

Continuando a assumir que quando as tensões se mantêm proporcionais às deformações e valendo a hipótese de pequenos deslocamentos, as funções de rigidez tridimensionais também podem ser consideradas exatas. A influência da força axial e os efeitos da força cortante nas deformações serão consideradas na dedução das funções de rigidez tridimensionais.

Na Fig.III-7 é esquematizado o sistema de coordenadas para uma barra de seção prismática engastada nas extremidades.

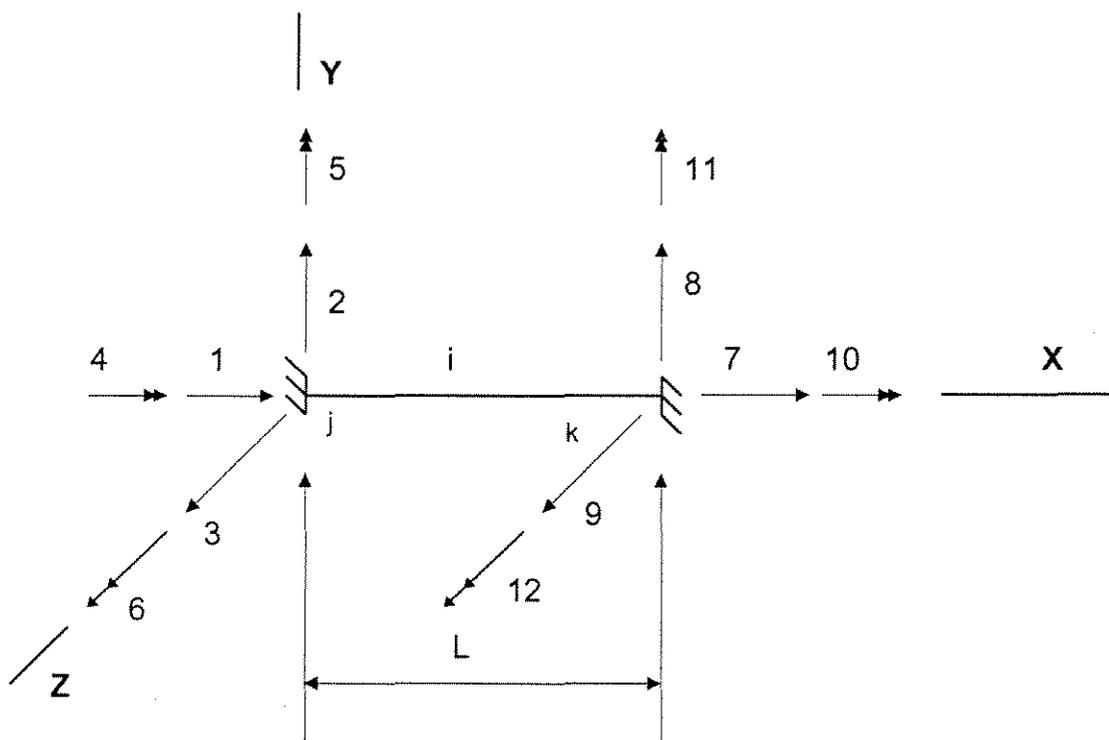


Figura III-7 Sistema de Coordenadas para o Caso Tridimensional.

A Fig.III-8 mostra a matriz de rigidez que relaciona os deslocamentos "D" com os esforços "F", analogamente ao procedimento usado no caso plano descrito no capítulo II.

Utilizando-se a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elástica do material. Os coeficientes também serão deduzidos numa forma sistemática, com o propósito de programação para computadores.

$$S_{KG} = \begin{bmatrix} S1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S2 & 0 & 0 & 0 & S3 & 0 & -S2 & 0 & 0 & 0 & S3 \\ 0 & 0 & S4 & 0 & -S5 & 0 & 0 & 0 & -S4 & 0 & -S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S5 & 0 & S7 & 0 & 0 & 0 & S5 & 0 & S8 & 0 \\ 0 & S3 & 0 & 0 & 0 & S9 & 0 & -S3 & 0 & 0 & 0 & S10 \\ -S1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S2 & 0 & 0 & 0 & -S3 & 0 & S2 & 0 & 0 & 0 & -S3 \\ 0 & 0 & -S4 & 0 & S5 & 0 & 0 & 0 & S4 & 0 & S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S5 & 0 & S8 & 0 & 0 & 0 & S5 & 0 & S7 & 0 \\ 0 & S3 & 0 & 0 & 0 & S10 & 0 & -S3 & 0 & 0 & 0 & S9 \end{bmatrix}$$

Figura III-8 Matriz de Rigidez da Barra com Funções de Rigidez Tridimensionais.

Considere esta barra prismática engastada em ambas as extremidades designadas por "j" e "k", como mostrado na Fig III-7. Os coeficientes de rigidez para a barra engastada são os esforços exercidos sobre a barra pelas restrições, quando são impostos a cada extremidade da barra deslocamentos unitários (translações e giros). Para a determinação dos coeficientes de rigidez são impostos deslocamentos unitários de translação na direção do eixo "x", translação na direção do eixo "y", translação na direção do eixo "z", rotação em torno do eixo "x", rotação em torno do eixo "y" e rotação em torno do eixo "z" em ambas as extremidade da barra. Os deslocamentos unitários são considerados como produzidos um de cada vez, enquanto que todos os outros deslocamentos de extremidade se mantêm nulos. Os sentidos positivos das três translações e das três rotações em cada extremidade da barra estão indicados na Fig.III-7. Como resultado, destes deslocamentos, obtém-se os valores não nulos

da matriz da Fig.III-8. Na Fig.III-9 são ilustrados os seis tipos básicos possíveis de deslocamentos.

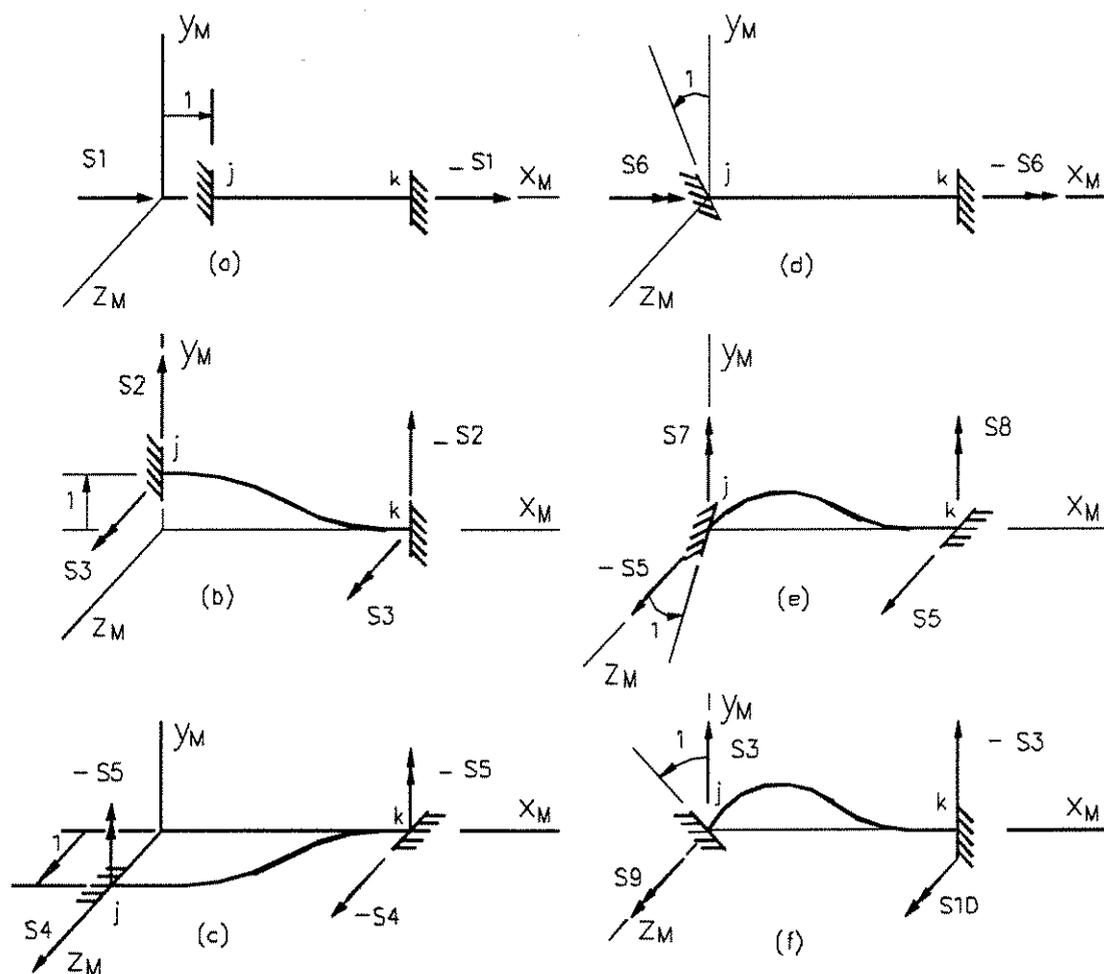


Figura III-9 Estados de Deslocamento: (a) Translação Unitária na Direção do Eixo X ; (b) Translação Unitária na Direção do Eixo Y; (c) Translação Unitária na Direção do Eixo Z; (d) Giro Unitário em relação ao Eixo X; (e) Giro Unitário em relação ao Eixo Y; (f) Giro Unitário em relação ao Eixo Z.

O coeficiente "S1" é o valor da rigidez axial da barra. Este coeficiente não é afetado com a presença do esforço normal "P", Fig.III-9(a). Assim, tem-se que  $S_{11} = -S_{71} = S1$ .

Adotando a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elásticas do material e lembrando da resistência dos materiais, tem-se:

$$\sigma = E\xi$$

$$\frac{N}{A_x} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Para um deslocamento unitário  $\Delta L=1$ , obtém-se o valor do coeficiente  $S_1$  dado por:

$$S_1 = \frac{EA_x}{L} \quad (3.24)$$

O coeficiente  $S_{44} = -S_{104} = S_6$  são afetados pelo valor da força normal "P", Fig.III-9(d). Para se obter a equação relativa ao momento torçor considere a terceira equação da eq.(3.4) e da eq.(3.21).

A terceira equação da eq.(3.4), mostrada abaixo, traz o momento torçor total, "M<sub>t</sub>", em teoria de primeira ordem dado por duas parcelas: a parcela relativa a flexo-torção,  $EJ_\omega \phi'''$ , e a parcela relativa a torção livre  $GJ_t \phi'$ .

$$EJ_\omega \phi''' - GJ_t \phi' = -M_t \quad (3.4)$$

A terceira equação da eq.(3.21), mostrada abaixo, ao ser integrada uma vez, traz o momento torçor total em teoria de segunda ordem:

$$EJ_\omega \phi'''' - \left[ N i_D^2 + 2 M_y (K_z - z_D) + 2 M_z (K_y - y_D) + GJ_t \right] \phi'' - (M_y - N z_D) v_D'' + (M_z - N y_D) w_D'' = 0 \quad (3.21)$$

Integrando-se uma vez, e lembrando que  $J_\omega=0$ ,  $K_z=K_y=0$ ,  $z_D=Y_d=0$ , e fazendo  $N=P$  sendo "P" positivo considerado de tração tem-se:

$$(GJ_t + P i_D^2) \phi' = M_t \quad (3.25)$$

Onde " $i_D$ " é o raio de giração da seção transversal e " $M_t$ " é o momento torçor em teoria de segunda ordem na extremidade "j" e "k".

Chamando de " $\phi_j$ " e " $\phi_k$ " as rotações em torno do eixo "x" nas extremidades "j" e "k" respectivamente, resulta:

$$\phi' = \frac{\phi_k - \phi_j}{L} \quad (3.26)$$

$$M_t = (\phi_k - \phi_j) \frac{GJ_t + Pi_D^2}{L} \quad (3.27)$$

Fazendo,  $(\phi_k - \phi_j) = 1$  como deslocamento relativo unitário, pode-se obter o coeficiente de rigidez "S6", desta forma tem-se:

$$S_{44} = -S_{104} = S6 = \frac{GJ_t + Pi_D^2}{L} \quad (3.28)$$

O valor de "P" deve entrar na eq.(3.28) com sinal negativo para compressão e positivo para tração.

Fazendo a somatória dos momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um deslocamento unitário na direção do eixo "y", conforme mostrado na Fig.III-9(b), obtém-se:

$$S3 + S3 - S2L + 1P = 0 \quad (3.29)$$

$$S2 = \frac{2S3 + P}{L} \quad (3.30)$$

Observa-se que a eq.(3.30) é igual a eq.(2.3), portanto os coeficientes "S2" e "S3" do caso tridimensional são os mesmos "S2" e "S3" do caso plano.

Fazendo agora, a somatória dos momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um deslocamento unitário na direção do eixo "z", conforme mostrado na Fig.III-9(c), obtém-se:

$$-S5 - S5 + S4L - 1P = 0 \quad (3.31)$$

$$S4 = \frac{2S5 + P}{L} \quad (3.32)$$

Observa-se que a eq.(3.32) é semelhante a eq.(2.3), diferindo no fato que para este caso tridimensional o deslocamento unitário é na direção do eixo "z", portanto, momento de inércia passa a ser em relação ao eixo "y" e não mais no eixo "z". Assim, os coeficientes "S2" e "S3" do caso plano são semelhante ao "S4" e "S5" do caso tridimensional, respectivamente. Os coeficientes "S2" e "S3" do plano apresentam momento de inércia em relação ao eixo "z", enquanto "S4" e "S5" do caso tridimensional apresentam momento de inércia em relação ao eixo "y".

Fazendo-se a somatória de momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um giro unitário do eixo "y" para o estado de deslocamento dado pela Fig.III-9(f), obtém-se:

$$S9 + S10 - S3L = 0 \quad (3.33)$$

$$S10 = S3L - S9 \quad (3.34)$$

Observa-se que a eq.(3.34) é semelhante a eq.(2.5), portanto os coeficientes "S9" e "S10" do caso tridimensional são iguais ao coeficiente "S4" e "S5" do caso plano, respectivamente, com os momento de inércia em relação ao mesmo eixo "z", pois o giro ocorre em "y" para ambos os casos.

Fazendo-se a somatória dos momentos no nó inicial da barra, ao se aplicar um giro unitário do eixo "z" para o estado de deslocamento dado pela Fig.III-9(e), obtém-se:

$$S7 + S8 - S5L = 0 \quad (3.35)$$

$$S8 = S5L - S7 \quad (3.36)$$

Observa-se que a eq.(3.36) é semelhante a eq.(2.5), diferindo no fato que para este caso tridimensional o giro unitário é no eixo "z", portanto, momento de inércia passa a ser em relação ao eixo "y" e não mais no eixo "z". Assim, os coeficientes "S4" e "S5" do caso plano são semelhante ao "S7" e "S8" do caso tridimensional, respectivamente. Os coeficientes "S4" e "S5" do plano apresentam momento de inércia em relação ao eixo "z", enquanto "S7" e "S8" do caso tridimensional apresentam momento de inércia em relação ao eixo "y".

Portanto, a matriz de rigidez para o caso tridimensional está montada baseada nos coeficientes de rigidez do caso plano. O desenvolvimento dos coeficientes de rigidez para o caso tridimensional segue a mesma formulação do capítulo II.

### **3.4 -FUNÇÕES DE RIGIDEZ PARA O CASO TRIDIMENSIONAL**

A Tabela III\_1, traz um resumo dos coeficientes de rigidez para facilitar a montagem das matrizes de rigidez do elemento de barra tridimensional com seus termos representados por fatores que podem ser alterados conforme a condição de influência da força cortante ou sob variação da força axial.

Tabela III-1 Funções de Rigidez de Barra com Interação entre Força Axial; Força Cortante, Flexão e Torção			
S \ P	Compressão (P < 0)	(P=0)	Tração (P > 0)
S1	$\frac{E A_x}{L}$	$\frac{E A_x}{L}$	$\frac{E A_x}{L}$
S2	$\frac{E I_z a^2 \alpha_z^3 \operatorname{sen} \alpha_z L}{\phi_{cz}}$	$\frac{12 E I'_z}{L^3}$	$\frac{E I_z a^2 \alpha_z^3 \operatorname{senh} \alpha_z L}{\phi_{tz}}$
S3	$\frac{E I_z a \alpha_z^2 (1 - \cos \alpha_z L)}{\phi_{cz}}$	$\frac{6 E I'_z}{L^2}$	$\frac{E I_z a \alpha_z^2 (\cosh \alpha_z L - 1)}{\phi_{tz}}$
S4	$\frac{E I_y a^2 \alpha_y^3 \operatorname{sen} \alpha_y L}{\phi_{cy}}$	$\frac{12 E I'_y}{L^3}$	$\frac{E I_y a^2 \alpha_y^3 \operatorname{senh} \alpha_y L}{\phi_{ty}}$
S5	$\frac{E I_y a \alpha_y^2 (1 - \cos \alpha_y L)}{\phi_{cy}}$	$\frac{6 E I'_y}{L^2}$	$\frac{E I_y a \alpha_y^2 (\cosh \alpha_y L - 1)}{\phi_{ty}}$
S6	$\frac{G J_t + P i_D^2}{L}$	$\frac{G J_t}{L}$	$\frac{G J_t + P i_D^2}{L}$
S7	$\frac{E I_y \alpha_y (\operatorname{sen} \alpha_y L - \alpha_y L \cos \alpha_y L)}{\phi_{cy}}$	$(4 + k_y) \frac{E I'_y}{L}$	$\frac{E I_y \alpha_y (a \alpha_y L \cosh \alpha_y L - \operatorname{senh} \alpha_y L)}{\phi_{ty}}$
S8	$\frac{E I_y \alpha_y (a \alpha_y L - \operatorname{sen} \alpha_y L)}{\phi_{cy}}$	$(2 - k_y) \frac{E I'_y}{L}$	$\frac{E I_y \alpha_y (\operatorname{senh} \alpha_y L - a \alpha_y L)}{\phi_{ty}}$
S9	$\frac{E I_z \alpha_z (\operatorname{sen} \alpha_z L - \alpha_z L \cos \alpha_z L)}{\phi_{cz}}$	$(4 + k_z) \frac{E I'_z}{L}$	$\frac{E I_z \alpha_z (a \alpha_z L \cosh \alpha_z L - \operatorname{senh} \alpha_z L)}{\phi_{tz}}$
S10	$\frac{E I_z \alpha_z (a \alpha_z L - \operatorname{sen} \alpha_z L)}{\phi_{cz}}$	$(2 - k_z) \frac{E I'_z}{L}$	$\frac{E I_z \alpha_z (\operatorname{senh} \alpha_z L - a \alpha_z L)}{\phi_{tz}}$
$\phi_{cz} = 2 - 2 \cos \alpha_z L - a \alpha_z L \operatorname{sen} \alpha_z L$ $\phi_{cy} = 2 - 2 \cos \alpha_y L - a \alpha_y L \operatorname{sen} \alpha_y L$ $a = 1 + \frac{c P}{G A_x}$ $i_D^2 = \frac{I_y + I_z}{A_x}$ $k_z = \frac{12 c E I_z}{G A_x L^2}$ $k_y = \frac{12 c E I_y}{G A_y L^2}$ $\alpha_z = \sqrt{\frac{ P }{a E I_z}}$ $\alpha_y = \sqrt{\frac{ P }{a E I_y}}$		$\phi_{tz} = 2 - 2 \cosh \alpha_z L + a \alpha_z L \operatorname{senh} \alpha_z L$ $\phi_{ty} = 2 - 2 \cosh \alpha_y L + a \alpha_y L \operatorname{senh} \alpha_y L$	

### 3.5- PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DA INSTABILIDADE DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL ( CARGA CRÍTICA )

A matriz de rigidez de um elemento de barra  $[S_{KB}]_i$  dada pela Fig.III-8 relaciona o vetor dos esforços  $\{F\}_i$  com o vetor dos deslocamentos  $\{D_L\}_i$  nas coordenadas locais do elemento, ver Fig.III-7.

Portanto, a formulação matricial para o i-ésimo elemento da estrutura fica:

$$\{F\}_{i(12 \times 1)} = [S_{KB}]_{i(12 \times 12)} \{D_L\}_{i(12 \times 1)} \quad (3.37)$$

A matriz de rigidez da estrutura  $[S_{KG}]$  relaciona o vetor das ações  $\{A\}$  com o vetor dos deslocamentos  $\{D\}$ , nas "n" coordenadas do sistema global:

$$\{A\}_{(n \times 1)} = [S_{KG}]_{(n \times n)} \{D\}_{(n \times 1)} \quad (3.38)$$

A matriz de rigidez da estrutura  $[S_{KG}]$  pode ser obtida através da contribuição dos elementos de barra:

$$[S_{KG}]_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 12)}^T [S_{KB}]_{i(12 \times 12)} [b]_{i(12 \times n)} \quad (3.39)$$

onde "n" é número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra, no sistema global; "nb" é número de elementos de barra;  $[b]_i$  é submatriz de ordem  $12 \times n$ , correspondente ao elemento "i", da matriz de transformação  $[b]$  de ordem  $12nb \times n$ , que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos.

A técnica para determinação do carregamento crítico, para o caso de pórtico tridimensional, denominado também de " $W_{crit}$ ", é a mesma utilizada para o caso de pórtico plano.

### 3.6 - FLUXOGRAMA DAS PROGRAMAÇÕES PARA COMPUTADOR PARA O CASO TRIDIMENSIONAL

O fluxograma, para o cálculo do parâmetro crítico de instabilidade de pórticos tridimensionais, é o mesmo utilizado para o caso de pórtico plano.

O programa será desenvolvido em linguagem BORLAND PASCAL V7.0, em dupla precisão, com a finalidade de determinar as capacidades máximas de carregamentos nas estruturas ao atingirem os limites de suas estabilidades.

O programa será montado em sub-rotinas que facilitam a separação das etapas de cálculo, além de propiciarem melhor entendimento do processo.

Caso não se consiga convergência em um número de ciclos previamente estabelecido de 50 ciclos, mediante também uma precisão desejada previamente estabelecida em  $10^{-3}$ , o programa pára o processamento avisando que ultrapassou o número de ciclos previsto sem ter entretanto obtido convergência.

Através deste programa será possível abordar estruturas tridimensionais constituídas por barras de seções transversais duplamente simétricas deformáveis em seu plano e fora dele. O programa levará em consideração o efeito da não-linearidade geométrica em teoria de segunda ordem com base nas funções de rigidez tridimensionais desenvolvidas neste capítulo. E também permitirá a determinação do carregamento crítico de instabilidade por flexão de pórticos tridimensionais com barras no regime elástico.

# ***CAPÍTULO IV***

## **ANÁLISE DE INSTABILIDADE DOS PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS COM VÍNCULOS RÍGIDOS E ELÁSTICOS**

### **4.1 - INTRODUÇÃO**

Através do fluxograma proposto no capítulo II, item 2.6, mas utilizando-se as funções de rigidez tridimensionais dadas no capítulo III, foram desenvolvidos dois programas para computador: o primeiro faz a análise de instabilidade de pórticos tridimensionais, em teoria de segunda ordem, no regime elástico, com as funções de rigidez tridimensionais, denominado de programa tipo I e o segundo faz esta mesma análise considerando o efeito dos vínculos elásticos, programa tipo II. Estes programas foram utilizados na solução de uma série de problemas relativos à determinação de parâmetros críticos " $W_{CRIT}$ ".

Os exemplos numéricos foram separados em dois tipos: no primeiro, utilizando o programa tipo I e no segundo utilizando o programa

tipo II. Os exemplos de estruturas tridimensionais analisadas separadamente em cada plano ou analisadas de forma globalizada tiveram seus resultados comparados com resultados teóricos, resultados de publicações e resultados obtidos através do programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup>.

## 4.2 - PROGRAMA ANSYS V-5.2

O programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> utilizado para comparações de resultados utiliza o Método dos Elementos Finitos, por isso, faz-se necessário a discretização das barras em vários sub-elementos. Os elementos de barra tridimensionais utilizados foram: o "BEAM4 3-D" e o "LINK8 3-D". O elemento "BEAM4 3-D" apresenta seis coordenadas por nó sendo três de translações nas direções de "X", "Y" e "Z" e três de rotações em torno de "X", "Y" e "Z". O elemento "LINK8 3-D" apresenta três coordenadas por nó sendo as três de translações nas direções "X", "Y" e "Z". A carga crítica é obtida apenas por flambagem elástica por flexão, pois o ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> não considera a flambagem por torção. Isto, juntamente com a necessidade de subdivisão das barras, quanto mais sub-elementos melhores resultados, talvez explique a divergência de alguns resultados que serão apresentados.

## 4.3- VÍNCULOS ELÁSTICOS

Vínculos elásticos são apoios com condições de restrições intermediárias entre uma restrição nula e uma restrição total. Estas restrições podem impedir parcialmente as translações nas direções dos

eixos "X", "Y" e "Z", como também, as rotações em torno dos eixos "X", "Y" e "Z". O número de vínculos elásticos que uma estrutura pode ter é igual ao número de graus de liberdade desta estrutura, assim, um nó livre (sem nenhuma restrição) pode ter seis vínculos elásticos no caso tridimensional.

Os vínculos elásticos podem ser ilustrados por molas elásticas com suas constantes de rigidez. No Método da Rigidez estas constantes de rigidez podem ser incorporadas na matriz de rigidez global da estrutura, da seguinte maneira:

- 1) localiza-se a posição da coordenada que será afetada pela restrição elástica na matriz de rigidez global da estrutura;
- 2) soma-se na diagonal principal, da matriz de rigidez global da estrutura, correspondente a posição da restrição elástica o valor da constante de rigidez da mola;

Desta forma, os deslocamentos obtidos através desta matriz de rigidez considera o efeito dos vínculos elásticos. Para o cálculo das ações de extremidades procede-se da mesma maneira descrita no fluxograma do capítulo III, mas as reações de apoios nos vínculos elásticos devem ser calculados como o produto, com sinal negativo, da constante de rigidez da mola pelo deslocamento do nó, na coordenada considerada.

#### **4.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DO PROGRAMA TIPO I**

O programa do tipo I faz a análise de instabilidade de pórticos tridimensionais formados por barras com seção duplamente simétrica, em teoria de segunda ordem, no regime elástico, com as funções de rigidez tridimensionais.

#### 4.4.1 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.1

Neste primeiro exemplo, será apresentada uma barra bi-apoiada dada pela Fig.IV-1.

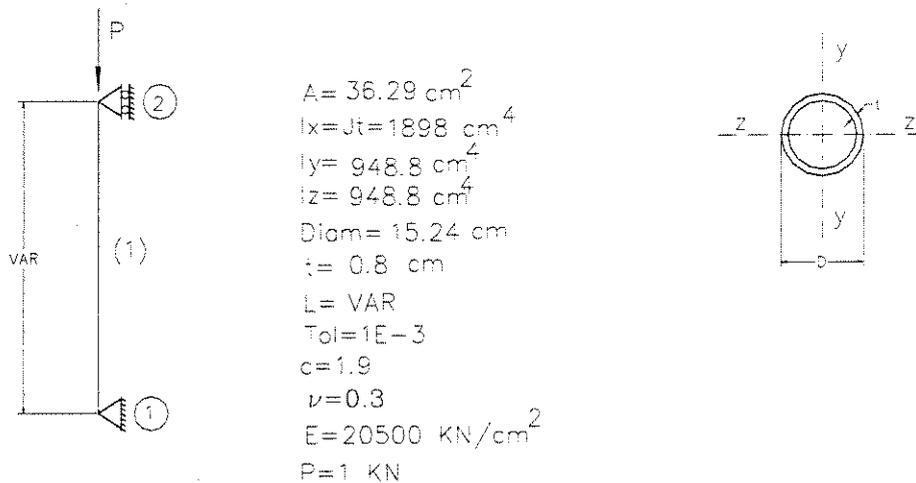


Figura IV-1 Exemplo Numérico 4.1

Com o objetivo de analisar o efeito da torção foi determinado o comprimento mínimo necessário no qual a barra flamba por torção, denominado de " $L_{\text{limite}}$ ". Para isto considere que a carga crítica de Euler dado pela eq.(1.12) seja igual a carga crítica de torção definida por:

$$P_{\text{TORÇÃO}} = \frac{GJ_t}{i_D^2} \quad (4.1)$$

Lembrando-se que "G" é o módulo de elasticidade transversal, " $J_t$ " é o momento de inércia à torção da seção e " $i_D$ " é o raio de giração da seção transversal. Assim, tem-se:

$$\frac{GJ_t}{i_D^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Isolando o valor de "L", tem-se " $L_{Limite}$ ":

$$L_{Limite} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI i_D^2}{GJ_t}} \quad (4.2)$$

Este é o valor limite do comprimento da barra, o qual para valores menores que este a barra deverá flambar por torção e para valores maiores a barra deverá flambar por flexão.

No exemplo numérico 4.1, utilizando a eq.(4.2), tem-se " $L_{Limite}=25.89\text{cm}$ ". A partir deste dado foi montada a Tabela IV-1 com valores variados de "L" acima e abaixo do valor limite.

Tabela IV-1 Exemplo Numérico 4.1				
TESTE	L(cm)	P(Euler)	P(torção)	P(encontrado)
1	20	479919.3835	<u>286193.007</u>	<u>286193.0064</u>
2	25	307148.4054	<u>286193.007</u>	<u>286193.0064</u>
3	26	283975.9666	<u>286193.007</u>	<u>283975.9672</u>
4	30	<u>213297.5038</u>	286193.007	<u>213297.5030</u>
5	40	<u>119979.8459</u>	286193.007	<u>119979.8450</u>
6	50	<u>76787.1014</u>	286193.007	<u>76787.1008</u>
7	60	<u>53324.3759</u>	286193.007	<u>53324.3752</u>
8	70	<u>39177.0925</u>	286193.007	<u>39177.0931</u>
9	80	<u>29994.9615</u>	286193.007	<u>29994.9606</u>
10	90	<u>23699.7226</u>	286193.007	<u>23699.7234</u>
11	100	<u>19196.7753</u>	286193.007	<u>19196.7759</u>

Na Tabela IV\_1 é mostrado o valor teórico esperado e o valor denominado por "P(encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido, (valores sublinhados).

Conclui-se que para valores menores do que " $L_{Limite}$ ", o programa apresenta flambagem por torção e para valores maiores do que " $L_{Limite}$ ", o programa apresenta flambagem por flexão. Tanto para flambagem por torção quanto para flambagem por flexão, os valores apresentados pelo programa fornece cargas críticas iguais aos valores teóricos esperados.

#### 4.4.2 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.2

Neste segundo exemplo, será apresentada a mesma barra bi-apoiada, mas agora com três nós intermediários, dada pela Fig.IV-2.

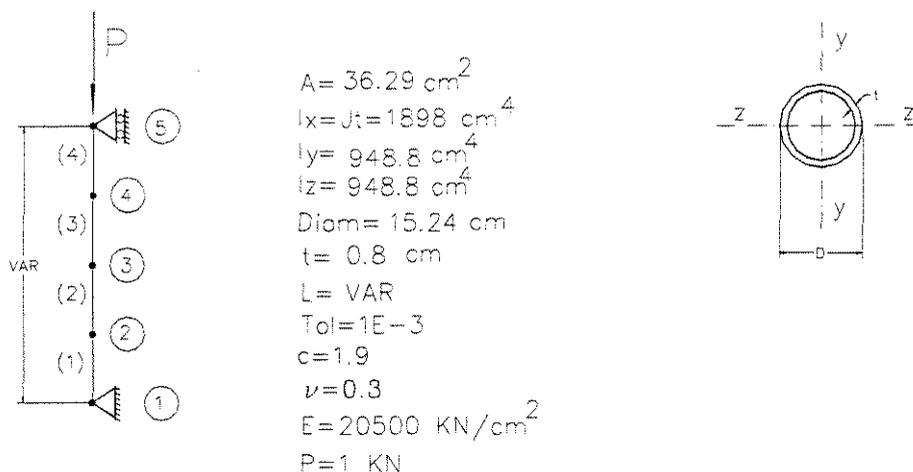


Figura IV-2 Exemplo Numérico 4.2

Neste exemplo, a barra foi subdividida em quatro elementos para verificar a interação entre eles. Desta forma apresenta-se dois casos: CASO A onde a coordenada correspondente à torção é deixada livre e CASO B onde esta coordenada é impedida. Isto foi feito para comprovar que quando a coordenada da torção é deixada livre, abaixo do " $L_{Limite}$ " calculado, a flambagem ocorre por torção e acima deste valor ocorre por flexão.

Quando a coordenada da torção for impedida, para qualquer valor de "L" a flambagem ocorre por flexão.

Na Tabela IV-2 é mostrado o valor teórico esperado e o valor denominado por "P(encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido, para cada um dos casos.

	TESTE	L(cm)	P(Euler)	P(torção)	P(encontrado)
CASO A	1	20	479919.3835	<u>286193.007</u>	<u>286193.0064</u>
	2	40	<u>119979.8459</u>	286193.007	<u>119979.8459</u>
	3	60	<u>53324.3759</u>	286193.007	<u>53324.3759</u>
	4	80	<u>29994.9615</u>	286193.007	<u>29994.9619</u>
	5	100	<u>19196.7753</u>	286193.007	<u>19196.7758</u>
CASO B	6	20	<u>479919.3835</u>	286193.007	<u>479919.3833</u>
	7	40	<u>119979.8459</u>	286193.007	<u>119979.8459</u>
	8	60	<u>53324.3759</u>	286193.007	<u>53324.3759</u>
	9	80	<u>29994.9615</u>	286193.007	<u>29994.9619</u>
	10	100	<u>19196.7753</u>	286193.007	<u>19196.7758</u>

Conclui-se, para o CASO A, que para valores menores do que " $L_{Limite}$ " o programa apresenta flambagem por torção e para valores maiores do que " $L_{Limite}$ " o programa apresenta flambagem por flexão. Para o CASO B, conclui-se que para valores menores ou maiores do que " $L_{Limite}$ " o programa apresenta flambagem por flexão pois a coordenada da torção está impedida. Nos dois casos os valores apresentados pelo programa fornece cargas críticas iguais aos valores teóricos esperados. Isto demonstra a confiabilidade do programa desenvolvido quando ocorre a subdivisão da barra e a variação das restrições nos vínculos considerados.

### 4.4.3- EXEMPLO NUMÉRICO 4.3

Neste terceiro exemplo, será apresentada uma barra bi-apoiada tridimensional, com seção transversal retangular e com três nós intermediários, dada pela Fig.IV-3. Para este exemplo o " $L_{Limite}=15.71\text{cm}$ ".

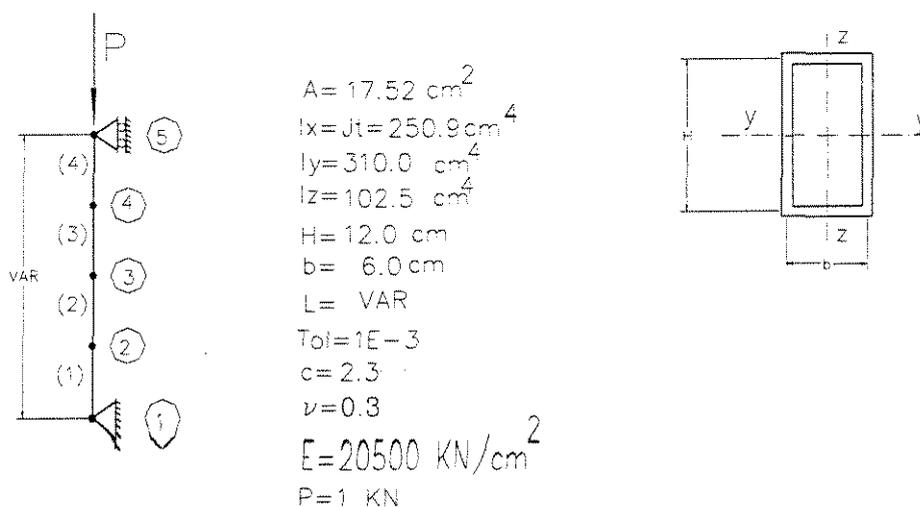


Figura IV-3 Exemplo Numérico 4.3

Este exemplo foi subdividido em três casos. No CASO A, para um " $L=80\text{cm}$ ", cada barra apresenta um " $L=20 \text{ cm}$ " superior ao " $L_{Limite}$ ". Deixando-se os pontos intermediários sem contraventamentos, a flambagem ocorrerá por flexão em torno do eixo z-z. No CASO B, adotando-se o mesmo comprimento de " $L=80 \text{ cm}$ " mas contraventando o nó três em torno de z-z, ocorrerá flambagem por flexão em torno do eixo y-y. No CASO C, objetivando atingir flambagem por torção adota-se " $L=60\text{cm}$ ", para que cada barra tenha um " $L=15 \text{ cm}$ ", portanto, inferior ao " $L_{Limite}$ ", considerando todos os nós restringidos em torno de z-z e y-y, desta forma, deverá ocorrer flambagem por torção.

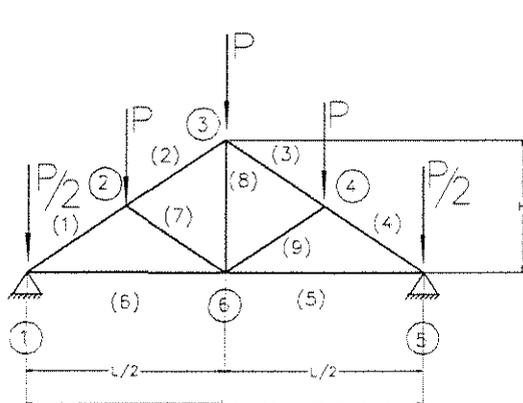
Na Tabela IV-3 é mostrado o valor teórico esperado e o valor, denominado por "P(encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido, para cada caso.

	TESTE	L(cm)	P(EULER Y)	P(EULER Z)	P(torção)	P(encontrado)	Obs:
CASO A	1	80	9800.2087	<u>3240.3916</u>	84021.6727	<u>3240.3924</u>	sem controv.
CASO B	2	80	<u>9800.2087</u>	12961.5664	84021.6727	<u>9800.2094</u>	com controv. n.º 3 em torno de z-z
CASO C	3	60	278761.4932	92171.1389	<u>84021.6727</u>	<u>84021.6721</u>	com controv. n.ºs 2,3 e 4 em torno de z-z e y-y

Conclui-se, que no CASO A a carga crítica obtida denota flambagem por flexão em torno do eixo z-z, CASO B carga crítica denota flambagem por flexão em torno do eixo y-y e CASO C carga crítica denota flambagem por torção como era desejado, sendo que os valores apresentados pelo programa da carga crítica estão iguais aos valores teóricos esperados.

#### 4.4.4 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.4

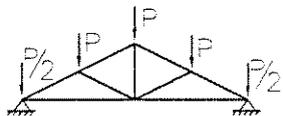
Neste quarto exemplo, será apresentada uma treliça contida no plano dada pela Fig.IV-4.



$$\begin{aligned}
 A &= 0.0005 \text{ m}^2 \\
 I_x = I_t &= 1 \text{ m}^4 \\
 I_y &= 0.00000001 \text{ m}^4 \\
 I_z &= 0.00000001 \text{ m}^4 \\
 Tol &= 1E-3 \\
 \nu &= 0.3 \\
 E &= 20500000000.0 \text{ KN/m}^2 \\
 P &= 50 \text{ KN} \\
 L &= 5.8 \text{ m} \\
 H &= 0.777 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Figura IV-4 Exemplo Numérico 4.4

A Tabela IV-4 mostra os valores dos " $W_{\text{CRIT}}$ " obtidos através do programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup>, onde cada barra da treliça foi subdividida em quatro elementos por se tratar do Método dos Elementos Finitos e o valor obtido pelo programa desenvolvido chamado de " $W_{\text{CRIT}}(\text{encontrado})$ ", lembrando que neste caso, não é necessário subdividir a barra.

Tabela IV-4 Exemplo Numérico 4.4			
TESTE	CARREGAMENTO	$W_{\text{crit}}$ (ANSYS) (4 ELEMENTOS)	$W_{\text{crit}}$ (ENCONTRADO) (1 ELEMENTO)
1		5.8262	5.8453

Conclui-se que o " $W_{\text{CRIT}}(\text{encontrado})$ " obtido pelo programa desenvolvido está satisfatório quando comparado ao " $W_{\text{CRIT}}(\text{ANSYS})$ " do programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup>.

#### 4.4.5- EXEMPLO NUMÉRICO 4.5

Neste quinto exemplo, será apresentada uma estrutura tridimensional dada pela Fig.IV-5.

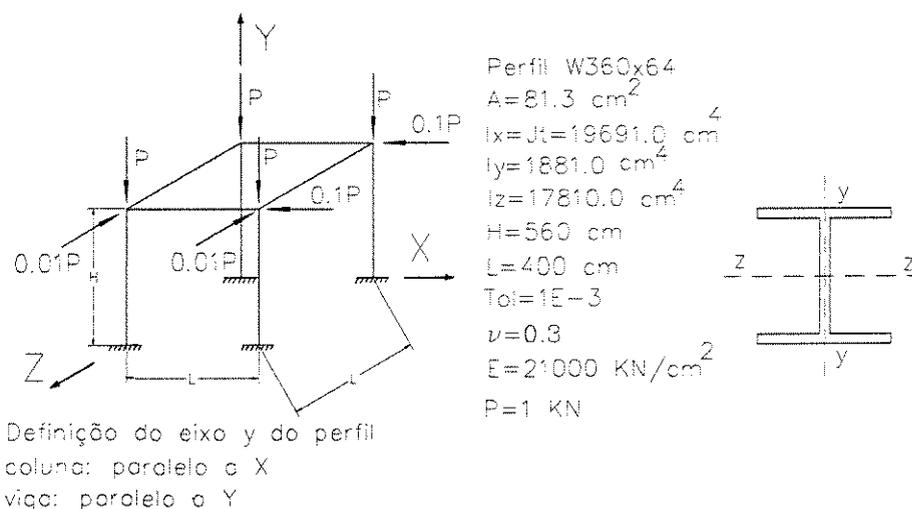


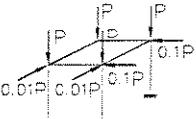
Figura IV-5 Exemplo Numérico 4.5

Este exemplo foi proposto por BENJAMIN e EBECKEN<sup>[23]</sup> no qual as colunas recebem a quase totalidade das cargas, enquanto as vigas tem como função principal fazer a ligação entre elas. Para a análise através do Método dos Elementos Finitos os autores discretizaram o pórtico em quarenta elementos, oito em cada coluna e dois em cada viga.

Tanto no caso do Método dos Elementos Finitos, proposto por BENJAMIN e EBECKEN<sup>[23]</sup>, quanto para o programa desenvolvido pelo Processo das Funções de Rigidez, o coeficiente de empenamento " $c_w$ " foi considerado igual a zero, pois ambos os programas foram desenvolvidos para seções transversais duplamente simétricas. Neste caso, preocupou-se apenas com os efeitos de flexão ou de torção, não sendo considerados os efeitos de flexo-torção. Portanto, para este exemplo foi admitido " $c_w=0$ ".

Na Tabela IV-5, é mostrado o valor de " $W_{CRIT}$ " obtido pelo programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> para dois casos: um quando a barra for

subdividida em quatro elementos e outro quando a barra é subdividida em dez elementos. Apresenta-se, também, o valor de " $W_{CRIT}$ " obtido pelos autores BENJAMIN e EBECKEN<sup>[23]</sup> denominado por " $W_{CRIT}(\text{autores})$ " e o resultado obtido pelo programa desenvolvido denominado por " $W_{CRIT}(\text{encontrado})$ ".

Tabela IV-5 Exemplo Numérico 4.5					
TESTE	CARREGAMENTO	$W_{crit}$ (ANSYS) (4 ELEMENTOS)	$W_{crit}$ (ANSYS) (10 ELEMENTOS)	$W_{crit}$ (autores) (6 ELEMENTOS-plat)	$W_{crit}$ (ENCONTRADO) (1 ELEMENTO)
1		1209.9	1209.3	1200.0	1190.0869

Conclui-se que o " $W_{CRIT}(\text{encontrado})$ " obtido pelo programa desenvolvido está satisfatório quando comparado ao resultado obtido pelos autores ou pelo programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup>.

#### 4.4.6- EXEMPLO NUMÉRICO 4.6

Neste sexto exemplo, será apresentada uma estrutura tridimensional um pouco mais complexa, dada pela Fig.IV-6.

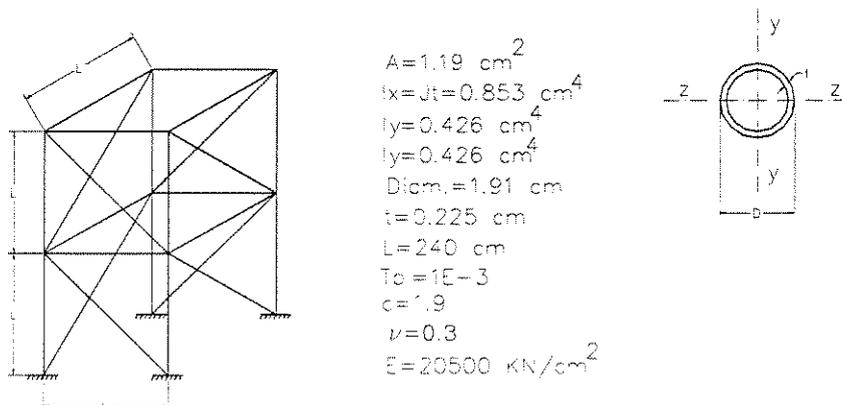
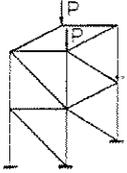
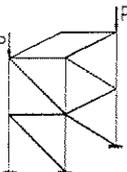
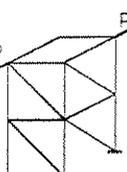
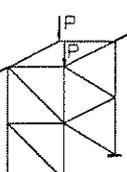
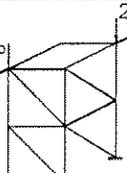


Figura IV-6 Exemplo Numérico 4.6

Na Tabela IV-6 é mostrado o valor de " $W_{CRIT}$ " obtido pelo programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> para a barra subdividida em quatro e dez elementos respectivamente. Apresenta também, o valor de " $W_{CRIT}$ " obtido pelo programa desenvolvido denominado por " $W_{CRIT}$ (encontrado)".

TESTE	CARREGAMENTO	$W_{crit}$ (ANSYS) (4 ELEMENTOS)	$W_{crit}$ (ANSYS) (10 ELEMENTOS)	$W_{crit}$ (ENCONTRADO) (1 ELEMENTO)
1		3.7442	3.7368	3.7226
2		3.7442	3.7368	3.7226
3		1.6459	1.6403	1.6404
4		1.6261	1.6209	1.6206
5		1.3996	1.3963	1.3929

Conclui-se que para determinados tipos de carregamento seria necessário uma subdivisão maior para cada uma das barras. Note que o valor do " $W_{CRIT}$ " decai quando a barra subdividida em quatro elementos passa para dez elementos. E que para outros tipos de carregamentos a subdivisão em dez elementos já trazem resultados satisfatórios.

## 4.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DO PROGRAMA TIPO II

O programa do tipo II faz a análise de instabilidade de pórticos tridimensionais em teoria de segunda ordem, no regime elástico, com as funções de rigidez tridimensionais considerando o efeitos dos vínculos elásticos.

### 4.5.1- EXEMPLO NUMÉRICO 4.7

Neste sétimo exemplo, serão apresentadas três condições de vinculação: a primeira com uma extremidade engastada e outra livre; a segunda com uma extremidade engastada e outra com apoio fixo (articulação móvel) e a terceira com uma extremidade engastada e a outra com apoio mola (vínculo elástico), conforme mostrado pela Fig.IV-7.

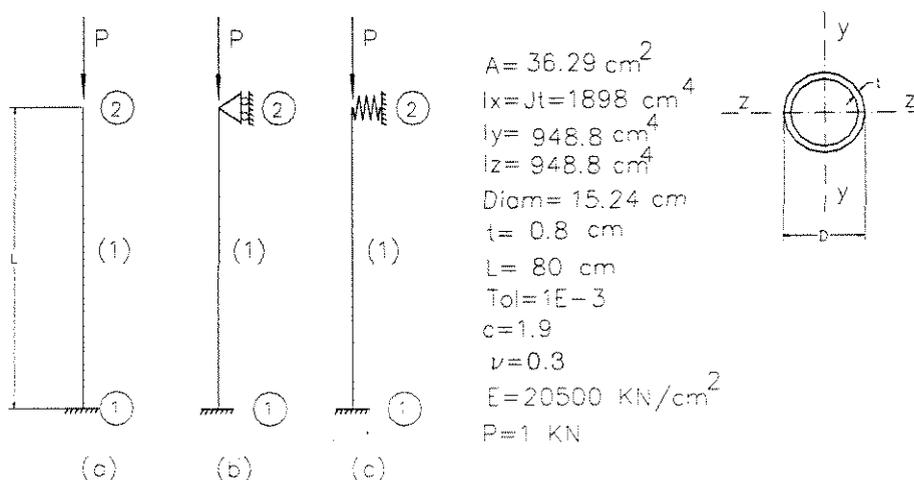
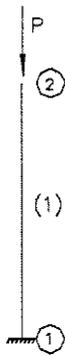
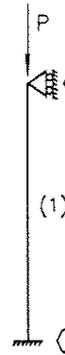
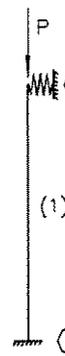


Figura IV-7 Exemplo Numérico 4.7

Tabela IV-7 Exemplo Numérico 4.7				
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	Wcrit (TEÓRICO)	Wcrit (ENCONTRADO)
(a)		—	7498.7404	<u>7498.7413</u>
(b)		—	61362.1479	<u>61362.1475</u>
(c)		0.00001		<u>7498.7413</u>
		0.0001		7498.7466
		0.1		7505.2240
		1		7563.5772
		10		8146.2751
		100		13883.7706
		1000		51449.9317
		10000		60862.7272
		100000		61315.2114
		1000000		61357.4830
		10000000		61361.6809
		100000000		61362.1010
		1000000000		61362.1439
10000000000		<u>61362.1475</u>		

O objetivo deste exemplo é mostrar que através do vínculo elástico pode-se obter o mesmo efeito de um apoio real na barra. Os apoios reais podem ser obtidos através de constantes de rigidez de mola compatíveis com o tipo de apoio que se deseja. Para comprovar este fato, calcula-se o " $W_{CRIT}$ " para a Barra (a) e para a Barra (b), considerando ser os limites de comportamento dos apoios.

Varia-se a rigidez da constante da mola de modo que uma rigidez muito pequena simula um apoio livre, resultando um " $W_{CRIT}$ " igual ao da Barra (a) e uma rigidez muito grande simula um apoio fixo, resultando um " $W_{CRIT}$ " igual ao da Barra (b).

Na Tabela IV-7 é mostrado o valor da constante da mola, o valor teórico do " $W_{CRIT}$ " esperado e o valor denominado por " $W_{CRIT}$  (encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido.

Conclui-se que para valores da constante da mola por volta de  $10^{-5}$  o apoio elástico se comporta como um apoio livre e para valores da constante da mola por volta de  $10^{10}$  o apoio elástico se comporta como um apoio fixo, sendo que o valor apresentado pelo programa da carga crítica no caso dos apoios molas estão iguais aos valores teóricos esperados. Assim, conclui-se que o apoio elástico pode ser considerado como apoio real desde que tenham a constante de mola compatível.

#### **4.5.2 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.8**

Neste oitavo exemplo, serão apresentadas três estruturas contidas no plano: a primeira estrutura sendo um pórtico engastado nas bases; na segunda estrutura o mesmo pórtico com um apoio móvel no nó "2" impedindo seu deslocamento horizontal e na terceira tem-se o mesmo pórtico com um apoio elástico no nó "2" impedindo parcialmente seu

deslocamento horizontal, conforme mostrado pela Fig.IV-8. Este pórtico é submetido a carregamento vertical nos nós "2" e "3".

O objetivo deste exemplo também é mostrar que através do vínculo elástico pode-se obter o mesmo efeito de um apoio real na estrutura.

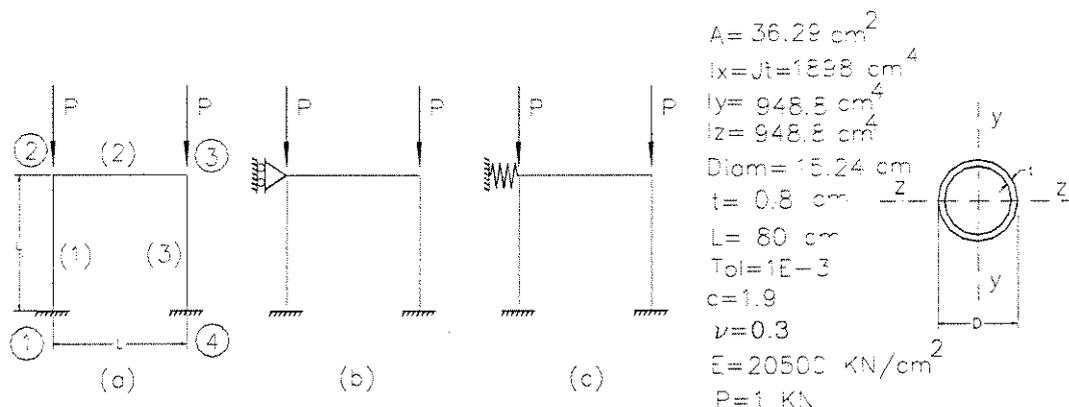


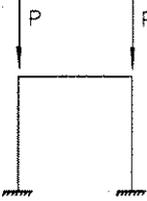
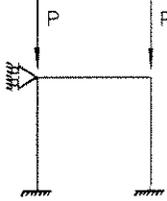
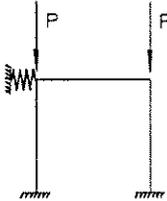
Figura IV-8 Exemplo Numérico 4.8

Da mesma forma mostrada no exemplo anterior, para comprovar este fato calcula-se o " $W_{\text{CRIT}}$ " para a Estrutura (a), para a Estrutura (b) e para Estrutura (c), neste caso fazendo a variação da constante da mola.

Na Tabela IV-8 é mostrado o valor da constante da mola, o valor do " $W_{\text{CRIT}}$ " obtido pelo programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> e o valor denominado por " $W_{\text{CRIT}}$  (encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido.

Observa-se que como as cargas ocorrem diretamente em direção às barras verticais, não há aplicação de esforços na barra horizontal até o instante de ocorrer a instabilidade. Neste caso, a seção transversal da barra horizontal, mesmo que pequena pode ser considerada como indeformável e portanto transmitindo todos os efeitos do nó "2" para o nó "3" e vice-versa.

Tabela IV-8 Exemplo Numérico 4.8

TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	Wcrit(ANSYS) (10 ELEMENTOS)	Wcrit (ENCONTRADO)
(a)		—	21907.993	21907.8764
(b)		—	76428.169	76422.6245
(c)		0.000001		21907.8764
		0.00001		21907.8764
		0.0001		21907.8799
		0.001		21907.9103
		0.01		21908.2250
		1		21942.6999
		10		22255.9633
		100		25374.4319
		1000		55020.1283
		10000		76421.5572
		100000		76422.5351
		1000000		76422.6156
		10000000		76422.6245
1000000000		76422.6245		

Conclui-se que para valores da constante da mola por volta de  $10^5$ , tem-se o apoio elástico do nó "2" se comportando como se ele não existisse e para valores da constante da mola por volta de  $10^7$ , tem-se o apoio elástico do nó "2" se comportando como um apoio móvel. Assim conclui-se que o apoio elástico do nó "2" pode ser considerado como apoio real, desde que tenham a constante de mola compatível.

### 4.5.3 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.9

Neste nono exemplo, serão apresentadas três estruturas contidas no plano: a primeira estrutura é um pórtico engastado nas bases; na segunda estrutura tem-se o mesmo pórtico com apoios fixos nas bases (ou seja apenas a coordenada de rotação em torno de "Z" está liberada) e a terceira tem-se o mesmo pórtico com um apoio elástico nas bases na coordenada de rotação em torno do eixo "Z", conforme mostrado pela Fig.IV-9. Este pórtico é submetido a carregamento vertical no nó "2" e nó "3".

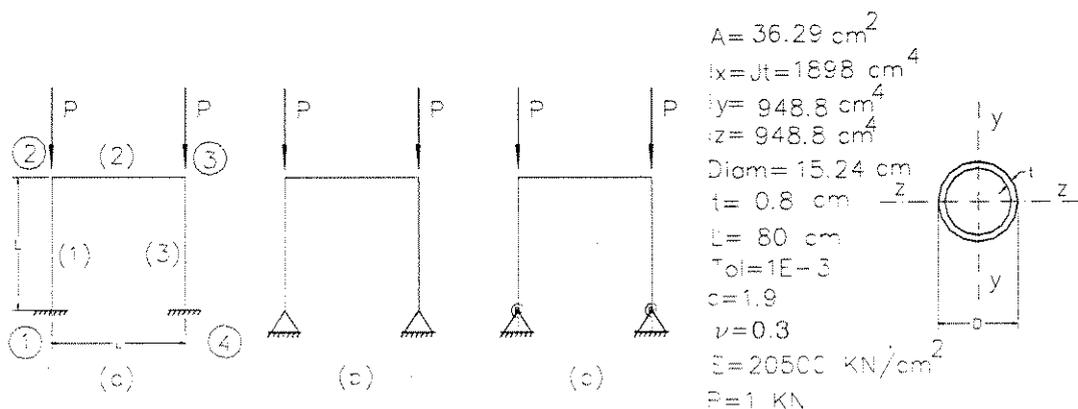
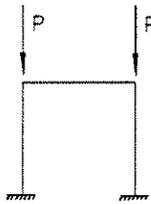
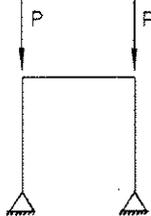
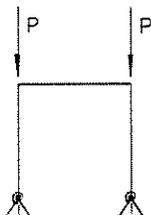


Figura IV-9 Exemplo Numérico 4.9

Tabela IV-9 Exemplo Numérico 4.9				
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	Wcrit(ANSYS) (10 ELEMENTOS)	Wcrit (ENCONTRADO)
(a)		—	21907,993	<u>21907.8764</u>
(b)		—	5389.9767	<u>5389.9744</u>
(c)		0.000001		<u>5389.9744</u>
		0.00001		<u>5389.9744</u>
		0.001		<u>5389.9744</u>
		1		5389.9959
		100		5392.1073
		10000		5601.0914
		1000000		15389.7889
		100000000		21815.3342
		10000000000		21906.9485
		1000000000000		21907.7834
		10000000000000		21907.8674
		100000000000000		21907.8745
		1000000000000000		<u>21907.8764</u>
10000000000000000		<u>21907.8764</u>		

Neste caso o efeito do vínculo mola afeta apenas a coordenada de rotação em torno de "Z" do nó das bases. Neste caso o efeito de um engastamento pode ser obtido através um apoio elástico na coordenada de rotação do nó.

De forma similar aos exemplos anteriores os " $W_{CRIT}$ " são calculados. Na Tabela IV-9 é mostrado o valor da constante da mola, o valor do " $W_{CRIT}$ " obtido pelo programa de computador ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> e o valor denominado por " $W_{CRIT}$  (encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido.

Da mesma forma, conclui-se que os apoios elásticos na coordenada de rotação dos nós das bases podem ser considerados como apoios reais desde que tenham a constante de mola compatíveis.

#### **4.5.4 - O EFEITO DOS VÍNCULOS RÍGIDOS E ELÁSTICOS**

Os vínculos, também chamados de contraventamentos, não devem ser considerados como elemento estrutural porque as restrições para estes são diferentes das demais barras da estrutura, isto é, os contraventamentos não tem vínculos perfeitos com a estrutura e requerem uma rigidez mínima para impedirem o deslocamento da estrutura. Estas restrições variam através da vida da estrutura e dependem da deformabilidade dos demais contraventamentos, do tipo de ligação entre eles, do tipo de ligações com as demais barras e do carregamento aplicado entre outras coisas.

A fim de resolver tais problemas tem-se buscado cada vez mais refinados métodos de análises, entretanto segundo BALLIO e MAZZOLANI<sup>[24]</sup>, não há ainda instrumentos sofisticados para calcular essa influência e permitir a completa simulação da flambagem global da estrutura.

É importante, então, que o engenheiro mantenha o bom senso aliado aos métodos aproximados de cálculo, que já provaram ser satisfatórios e são agora estabelecidos na prática, para poder alertá-lo em relação ao fenômeno da instabilidade e orientá-lo de como prevê-la.

O exemplo numérico 4.10, ver Fig.IV\_10, traz alguns métodos comumente utilizados. Estes métodos mostrados são adaptações de problemas práticos a respeito da determinação do comprimento efetivo de flambagem e da determinação do tipo de restrições para os contraventamentos, bem como, para prever a mínima rigidez e resistência necessária que estes devem ter para garantir a indeslocabilidade das estruturas. Neste exemplo, no CASO (a) a barra (2) representa um exemplo típico de um contraventamento, no CASO (b) este contraventamento será substituído por um apoio fixo (vínculo rígido) e para o CASO (c) será substituído por um apoio mola (vínculo elástico).

Para se determinar o limite entre um apoio fixo e um apoio elástico, considere o CASO ( b ), onde a barra é carregada axialmente. O apoio fixo, no topo da barra, não permite qualquer deslocamento horizontal da barra, portanto, esta barra deve ser considerada como um sistema contraventado. O contraventamento necessário para criar este tipo de apoio fixo foi idealizado por uma mola, como mostrado no CASO (c), a qual é capaz de desenvolver uma reação horizontal "Q" diretamente proporcional a sua constante de rigidez. Quando esta mola tiver uma constante de rigidez acima de um valor limite a estrutura será considerada como tendo um contraventamento rígido e portanto sem deslocamento lateral. Se a mola tiver uma constante de rigidez abaixo de um valor limite a estrutura será considerada como tendo um contraventamento não suficientemente rígido para evitar o deslocamento lateral. O equilíbrio exigido, portanto, se faz com a barra numa configuração ligeiramente fletida, onde o deslocamento lateral é representado por " $\Delta$ " e "Q" é considerado a força da mola, ver Fig.IV10(d), então pode-se fazer:

$$P \Delta = Q L = (K_{\text{mola}} \Delta) L \quad (4.1)$$

Se “ $(K_{\text{mola}}\Delta)L$ ” for menor que “ $P\Delta$ ” ocorre o deslocamento lateral da barra, ou seja, a rigidez da mola não é suficiente para impedir o deslocamento lateral da barra. Se “ $(K_{\text{mola}}\Delta)L$ ” for maior que “ $P\Delta$ ” não ocorrerá o deslocamento lateral da barra, ou seja, a rigidez da mola é suficiente para impedir o deslocamento lateral da barra, portanto, a coluna deve ser considerada contraventada. O contraventamento ideal, então, deve ser aquele que tenha rigidez suficiente para prevenir o deslocamento lateral do topo da barra. Cancelando na eq.(4.1) “ $\Delta$ ”, e isolando-se “ $K_{\text{mola}}$ ”, têm-se:

$$K_{\text{mola}} = \frac{P}{L} \quad (4.2)$$

No caso, o máximo carregamento para o qual o contraventamento deve ser exigido é o carregamento crítico de flambagem elástica, dado pela eq.(1.12). Portanto, substituindo a eq.(1.12) na eq.(4.2) tem-se o “ $K_{\text{ideal}}$ ” para uma barra:

$$K_{\text{ideal}} = \frac{P_{\text{crit}}}{L} = \frac{\pi^2 E I}{L^3} \quad (4.3)$$

Então, quando o “ $P_{\text{crit}}$ ” é atingido e o “ $K_{\text{mola}}$ ” for igual ao “ $K_{\text{ideal}}$ ” a coluna flambará sem que haja deslocamento lateral do topo da barra, em outras palavras, isto caracteriza um sistema contraventado. Quando “ $K_{\text{mola}}$ ” for menor que o “ $K_{\text{ideal}}$ ” ao se atingir o “ $P_{\text{crit}}$ ” ocorrerá um deslocamento lateral do topo da barra. Em outras palavras, isto caracteriza um sistema não contraventado.

Este conceito pode ser estendido para uma coluna de dois tramos conforme mostrado no exemplo numérico 4.11, ver Fig.IV\_11. Considere que ocorra um deslocamento no nó “2” chamado por “ $\Delta$ ”, então pode-se escrever que:

$$P_{\text{crit}} \Delta = \frac{Q}{2} L = \frac{(K_{\text{mola}} \Delta)}{2} L \quad (4.4)$$

Cancelando na eq.(4.4) “ $\Delta$ ”, substituindo “ $P_{\text{CRIT}}$ ” dado pela eq.(1.12) e isolando-se “ $K_{\text{mola}}$ ”, obtém-se o “ $K_{\text{ideal}}$ ” para uma barra com dois tramos:

$$K_{\text{ideal}} = 2 \frac{P_{\text{crit}}}{L} = 2 \frac{\pi^2 E I}{L^3} \quad (4.5)$$

Da mesma forma pode-se estender este conceito para uma coluna de três tramos conforme mostrado no exemplo numérico 4.12, ver Fig.IV\_12. Considere que ocorra um deslocamento no nó “2” e no nó “3” chamado de “ $\Delta$ ”, então pode-se escrever que:

$$P_{\text{crit}} \Delta = \frac{Q}{3} L = \frac{(K_{\text{mola}} \Delta)}{3} L \quad (4.6)$$

Cancelando na eq.(4.6) “ $\Delta$ ”, substituindo “ $P_{\text{CRIT}}$ ” dado pela eq.(1.12) e isolando-se “ $K_{\text{mola}}$ ”, obtém-se o “ $K_{\text{ideal}}$ ” para uma barra com três tramos:

$$K_{\text{ideal}} = 3 \frac{P_{\text{crit}}}{L} = 3 \frac{\pi^2 E I}{L^3} \quad (4.7)$$

Por esse mesmo processo, segundo SALMON e JOHNSON<sup>[6]</sup>, pode-se determinar o “ $K_{\text{ideal}}$ ” para alguns casos com número de tramos iguais. Em geral, tem-se:

$$K_{\text{ideal}} = \beta \frac{P_{\text{crit}}}{L} = \beta \frac{\pi^2 E I}{L^3} \quad (4.8)$$

sendo, que “ $\beta$ ” varia de 1 a 4 para um número infinito de tramos conforme mostra o Gráfico IV-1. O valor de “ $\beta$ ” pode ser obtido através da eq.(4.8) da seguinte forma:

$$\beta = \frac{K_{ideal} L}{P_{crit}} = K_{ideal} \frac{L^3}{\pi^2 EI} \quad (4.9)$$

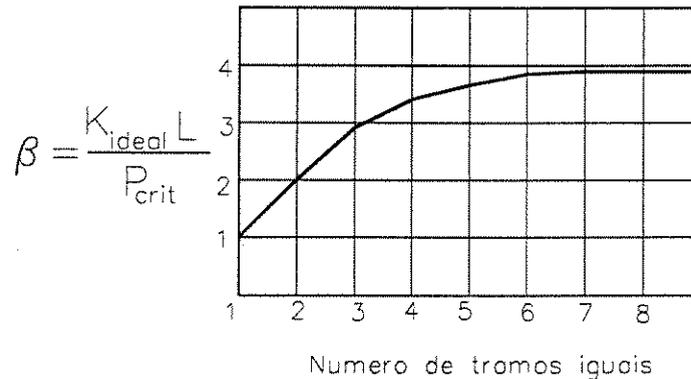


Gráfico IV-1 Valor de “ $\beta$ ”

Fonte: SALMON e JOHNSON<sup>[6]</sup>, pag.546.

GALAMBOS<sup>[15]</sup> apresenta os seguintes valores para o valor de “ $\beta$ ”:

- para coluna de um tramo           =>   “ $\beta=1.0$ ”;
- para coluna de dois tramos       =>   “ $\beta=2.0$ ”;
- para coluna de três tramos       =>   “ $\beta=3.0$ ”;
- para coluna de quatro tramos     =>   “ $\beta=3.41$ ”;
- para coluna de cinco tramos      =>   “ $\beta=3.63$ ”;
- para coluna de infinitos tramos   =>   “ $\beta=4.0$ ”.

Estes valores serão testados pelos exemplos apresentados a seguir.

No exemplo numérico 4.10, ver Fig.IV\_10, para o CASO (a) tem-se a barra (1) e a barra (2). A barra (2) representa um exemplo típico de um contraventamento. Através da eq.(3.37), reescrita a seguir, pode-se

determinar também, a área ideal para os contraventamentos, definida por “ $A_{ideal}$ ”.

$$\{F\} = [S_{KB}] \{D_L\} \quad (4.10)$$

Para um elemento submetido apenas a esforço axial, como é o caso dos elementos admitidos como contraventamentos, no caso a barra (2) do exemplo numérico 4.10, terá sua matriz de rigidez dada por:

$$[S_{KG}]_{(2)} = \frac{E_{(2)} A_{(2)}}{L_{(2)}} \quad (4.11)$$

Da eq.(4.1) sabe-se que “ $Q$ ” é a força da mola e que “ $\Delta$ ” é o deslocamento lateral da mola. Pode-se fazer “ $Q = \{F\}$ ” e “ $\Delta = \{D_L\}$ ”, na eq.(4.10). Assim, substituindo eq.(4.11) em eq.(4.10), resulta em:

$$Q = \frac{E_{(2)} A_{(2)}}{L_{(2)}} \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{QL_{(2)}}{E_{(2)} A_{(2)}} \quad (4.12)$$

Mas, a força da mola é dada por “ $Q = K_{mola} \Delta$ ”, então pode-se fazer que:

$$\Delta = \frac{Q}{K_{mola}} \quad (4.13)$$

Igualando a eq.(4.13) e eq.(4.12) resulta em:

$$\frac{Q}{K_{mola}} = \frac{QL_{(2)}}{E_{(2)} A_{(2)}} \Rightarrow K_{mola} = \frac{E_{(2)} A_{(2)}}{L_{(2)}} \quad (4.14)$$

Sabendo que o “ $K_{ideal}$ ” da mola é dado pela eq.(4.8) pode-se igualar a eq.(4.8) a eq.(4.14), assim tem-se que:

$$K_{ideal} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} = \frac{E_{(2)} A_{(2)}}{L_{(2)}} \quad (4.15)$$

Portanto, a área ideal " $A_{ideal}$ " necessária é dada por:

$$A_{ideal} = K_{ideal} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} \quad (4.16)$$

sendo que o índice (2) representa a barra considerada como elemento do contraventamento. No caso " $L_{(2)}$ " e " $E_{(2)}$ " representam o comprimento e o módulo de elasticidade longitudinal do contraventamento respectivamente. A eq.(4.16) pode ser utilizada para alguns casos de estruturas com número de tramos iguais, variando-se o valor de " $\beta$ ". Quando se tem um contraventamento com uma área acima da " $A_{ideal}$ " o contraventamento é considerado rígido e suficiente para conter o deslocamento da estrutura. Se o contraventamento possuir uma área inferior a " $A_{ideal}$ " o contraventamento não será suficiente para evitar o deslocamento da estrutura.

Os exemplos a seguir demonstrarão a validade das fórmulas do " $K_{ideal}$ " e da " $A_{ideal}$ " dados pelas eq.(4.8) e eq.(4.16) respectivamente.

#### 4.5.5 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.10

Neste décimo exemplo, será apresentada uma estrutura contida no plano. No CASO (a), a barra (2), representa um exemplo típico de um contraventamento. A ligação entre a coluna, no caso barra (1), e a barra do contraventamento, no caso barra (2) é uma articulação, isto vale para os demais exemplos. No CASO (b) este contraventamento será substituído por um apoio rígido (vínculo rígido). Para o CASO (c) será substituído por um apoio mola (vínculo elástico) e no CASO (d) apresenta-se o deslocamento " $\Delta$ " da mola, conforme Fig.IV-10.

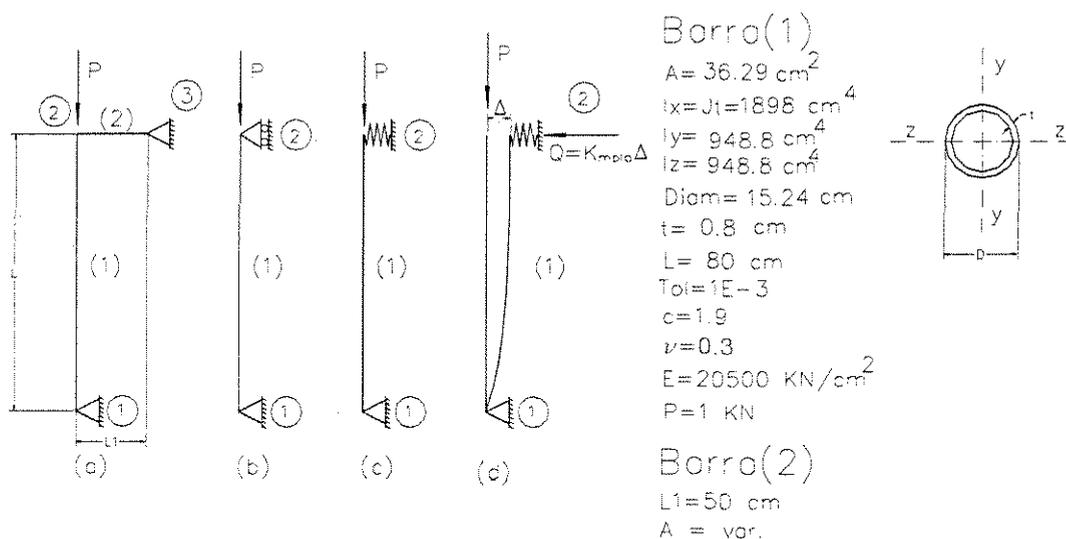


Figura IV-10 Exemplo Numérico 4.10

Neste exemplo, calcula-se o " $W_{\text{CRIT}}$ " para o CASO (a) para diferentes valores de áreas para barra(2) que simula o contraventamento, inclusive para o valor da " $A_{\text{ideal}}$ ". Calcula-se também o " $W_{\text{CRIT}}$ " para o CASO (b) onde o contraventamento foi substituído por um apoio rígido. Estes " $W_{\text{CRIT}}$ " deverão ser iguais quando a área do contraventamento for superior " $A_{\text{ideal}}$ ", dado pela eq.(4.16). Para CASO (c), varia-se a rigidez da constante da mola de uma rigidez muito pequena para uma rigidez capaz de simular um apoio fixo resultando um " $W_{\text{CRIT}}$ " igual ao do CASO (b).

Na Tabela IV-10 é mostrado o valor da constante da mola, o valor de " $\beta$ ", a área do contraventamento denominada como "Área(2)", o valor teórico do " $W_{\text{CRIT}}(\text{teórico})$ " esperado e o valor denominado por " $W_{\text{CRIT}}(\text{encontrado})$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Seja " $\beta=1$ ", apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, da eq.(4.8) tem-se o valor do " $K_{\text{ideal}}$ " teórico dado por:

$$K_{ideal} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} = 1 \frac{\pi^2 20500 948.8}{80^3} = 374.9370184$$

Tabela IV-10 Exemplo Numérico 4.10

TESTE	CARREGAMENTO	K (moic)	$\beta$	Area(2)	Wcrit (TEÓRICO)	Wcrit (ENCONTRADO)
(a)		—	—	0.53	29994.9615	17384.0000
			—	0.90		29519.9997
			—	0.9145		29994.9606
			—	1.19		29994.9606
			—	4.5		29994.9606
			—	10.66		29994.9606
			—	36.29		29994.9606
(b)		—	—	—	29994.9615	29994.9606
(c)		0.00001	—	—	—	0.0009
		0.001	—	—	—	0.0796
		1	—	—	—	79.9995
		100	—	—	—	7999.9995
		200	—	—	—	15999.9998
		374	—	—	—	29920.0000
		374.937018	1.000	—	—	29994.9606
		400	—	—	—	29994.9606
		1000	—	—	—	29994.9606
		1000000	—	—	—	29994.9606

Pela Tabela IV-10 conclui-se que o “ $K_{ideal}$ ” é realmente o “ $K_{limite}$ ” para que a mola passe a representar um comportamento de apoio fixo (vínculo rígido) apresentando um “ $W_{CRIT}$ ” igual ao CASO (b). Portanto, o valor de “ $\beta$ ”, apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, “ $\beta=1$ ” está correto.

Através do “ $K_{ideal}$ ”, obtém-se da eq.(4.16) a “ $A_{ideal}$ ”:

$$A_{ideal} = K_{ideal} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 374.9370184 \frac{50}{20500} = 0.9144805327 \text{ cm}^2$$

Conclui-se da Tabela IV-10, que o valor da “ $A_{ideal}$ ” obtido pela eq.(4.16) está correto, onde para áreas inferiores a estrutura deixa de ser considerada contraventada apresentando um valor de “ $W_{CRIT}(\text{encontrado})$ ” menor que o “ $W_{CRIT}(\text{teórico})$ ” esperado e para áreas superiores, a estrutura passa a ser considerada contraventada, apresentando um valor de “ $W_{CRIT}(\text{encontrado})$ ” igual ao “ $W_{CRIT}(\text{teórico})$ ” esperado. Assim, conclui-se que o apoio elástico pode ser tido como apoio rígido desde que tenham a constante de mola compatível. E que um contraventamento pode ser considerado como um elemento que possa impedir o deslocamento lateral da estrutura desde que a sua área seja superior a uma “ $A_{ideal}$ ”.

De forma similar é apresentado a seguir os exemplos numéricos 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 para dois tramos iguais, para três tramos iguais, para quatro tramos iguais e para seis tramos iguais, respectivamente.

#### 4.5.6 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.11

Neste décimo primeiro exemplo, será apresentada uma estrutura contida no plano para cinco casos distintos. No CASO (a), a barra(3) representa um exemplo típico de um contraventamento; no CASO (b) esta estrutura é representada por uma barra bi-apoiada; no CASO (c) esta barra é contraventada no meio por um apoio rígido (vínculo rígido); no CASO (d) esta barra é contraventada no meio por um apoio mola (vínculo elástico) e no CASO (e) é mostrado o deslocamento “ $\Delta$ ” da mola, conforme Fig.IV-11.

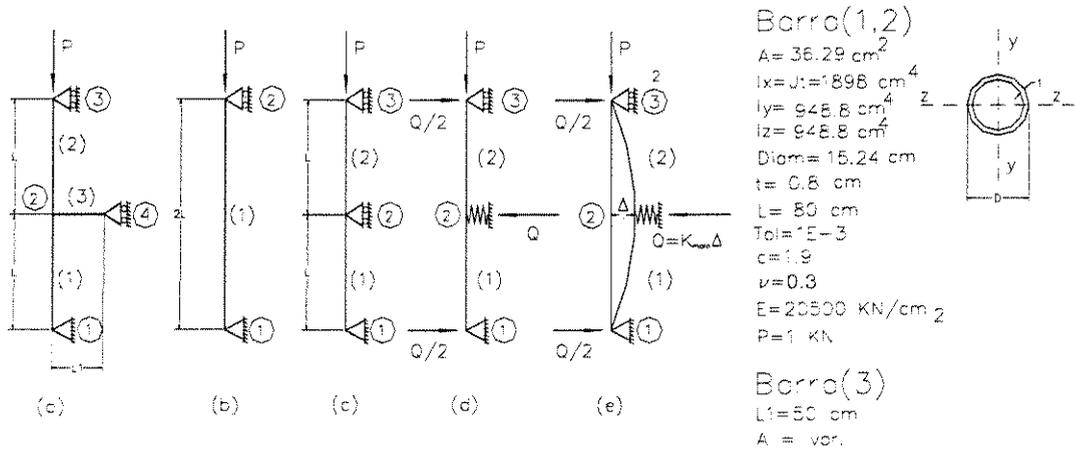


Figura IV-11 Exemplo Numérico 4.11

De forma similar ao exemplo numérico 4.10, na Tabela IV-11 é mostrado o valor da constante da mola, o valor de “ $\beta$ ”, a área do contraventamento denominada como “Área(2)”, o valor teórico do “ $W_{\text{CRIT}}$ ” esperado e o valor denominado por “ $W_{\text{CRIT}}$  (encontrado)”, obtido pelo programa desenvolvido.

Seja “ $\beta = 2$ ”, apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, na eq.(4.8), tem-se o valor do “ $K_{\text{ideal}}$ ” teórico dado por:

$$K_{\text{ideal}} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} = 2 \frac{\pi^2 20500 948.8}{80^3} = 749.8740368$$

Através do “ $K_{\text{ideal}}$ ”, obtém-se da eq.(4.16) a “ $A_{\text{ideal}}$ ”:

$$A_{\text{ideal}} = K_{\text{ideal}} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 749.8740368 \frac{50}{20500} = 1828961065 \text{ cm}^2$$

Conclui-se da Tabela IV-11, que o valor de “ $\beta = 2.0$ ” adotado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, o valor de “ $K_{\text{ideal}}$ ” dado pela eq.(4.8) e o valor da “ $A_{\text{ideal}}$ ” obtido pela eq.(4.16) estão corretos.

Tabela IV-11 Exemplo Numérico 4.11						
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	$\beta$	$A_{\text{contr.}}$	Wcrit (TEÓRICO)	Wcrit (ENCONTRADO)
(a)		—	—	0.53	29994.9615	14425.8201
			—	1.19		22641.6395
			—	1.82		29896.9066
			—	1.8299		29994.9606
			—	4.50		29994.9606
			—	36.29		29994.9606
(b)		—	—	—	7498.7404	7498.7413
(c)		—	—	—	29994.9615	29994.9606
(d)		0.00001	—	—	—	7498.7413
		0.001	—	—	—	7498.7734
		1	—	—	—	7531.1601
		100	—	—	—	10717.1912
		200	—	—	—	13883.7706
		500	—	—	—	22995.8694
		749	—	—	—	29971.6489
		749.874037	2.000	—	—	29994.9606
		800	—	—	—	29994.9606
		1000000	—	—	—	29994.9606

#### 4.5.7 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.12

Neste décimo segundo exemplo, será apresentada uma estrutura contida no plano para quatro casos distintos.

No CASO (a), as barras (4) e (5) representam um exemplo típico de contraventamentos; no CASO (b) esta estrutura é representada por uma barra bi-apoiada; no CASO (c) estas barras (4) e (5) são substituídas por apoios rígidos (vínculos rígidos); no CASO (d) estas barras (4) e (5) são substituídas por apoios molas (vínculos elásticos), conforme Fig.IV-12.

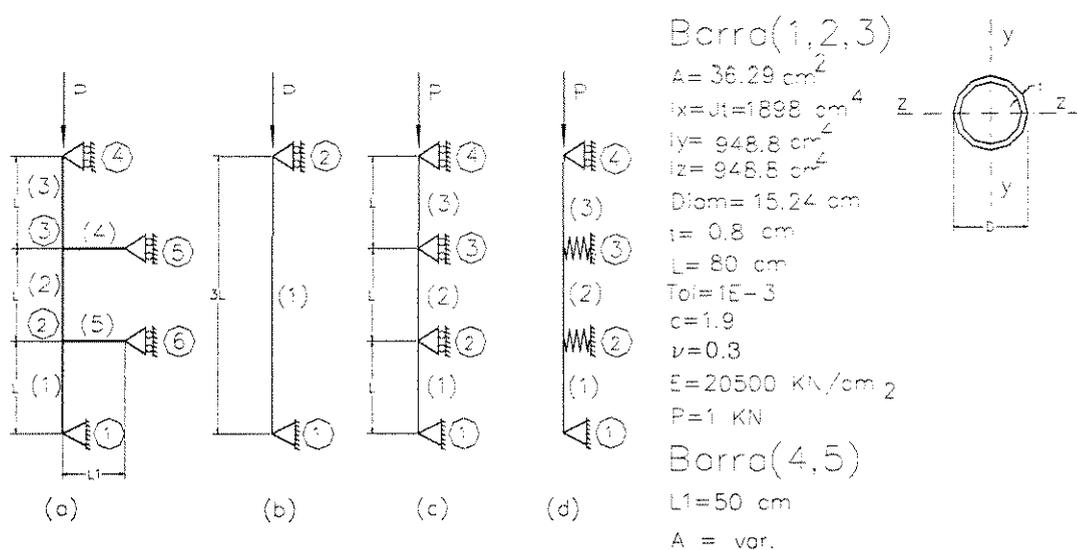


Figura IV-12 Exemplo Numérico 4.12

De forma similar ao exemplo numérico 4.10, na Tabela IV-12 é mostrado o valor da constante da mola, o valor de " $\beta$ ", a área do contraventamento denominada como "Área(2)", o valor teórico do " $W_{\text{CRIT}}$ " esperado e o valor denominado por " $W_{\text{CRIT}}$  (encontrado)", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela IV-12 Exemplo Numérico 4.12						
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	$\beta$	$A_{contr.}$	$W_{crit}$ (TEÓRICO)	$W_{crit}$ (ENCONTRADO)
(a)		—	—	0.53	29994.9615	17180.7370
			—	1.19		21609.7506
			—	2.74		29979.9016
			—	2.7434		29994.9606
			—	4.50		29994.9606
			—	36.29		29994.9606
(b)		—	—	—	3332.7735	3332.7742
(c)		—	—	—	29994.9615	29994.9606
(d)		0.00001	—	—	—	3332.7742
		0.001	—	—	—	3332.8457
		1	—	—	—	3405.7216
		250	—	—	—	17738.9164
		500	—	—	—	21797.0500
		1000	—	—	—	28601.3293
		1124	—	—	—	29986.3074
		1124.811055	3.000	—	—	29994.9606
		1400	—	—	—	29994.9606
		1000000	—	—	—	29994.9606

Seja " $\beta = 3$ ", apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, na eq.(4.8), tem o valor do " $K_{ideal}$ " teórico dado por:

$$K_{ideal} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} = 3 \frac{\pi^2 20500 948.8}{80^3} = 1124.811055$$

Através do “ $K_{ideal}$ ”, obtém-se da eq.(4.16) a “ $A_{ideal}$ ”:

$$A_{ideal} = K_{ideal} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 1124.811055 \frac{50}{20500} = 2.743441598 \text{ cm}^2$$

Conclui-se da Tabela IV-12, que o valor de “ $\beta=3.0$ ” adotado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, o valor de “ $K_{ideal}$ ” dado pela eq.(4.8) e o valor da “ $A_{ideal}$ ” obtido pela eq.(4.16) estão corretos.

#### 4.5.8 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.13

Neste décimo terceiro exemplo, será apresentado uma estrutura contida no plano para quatro casos distintos. No CASO (a), as barras (5), (6) e (7) representam um exemplo típico de contraventamentos; no CASO (b) esta estrutura é representada por uma barra bi-apoiada; no CASO (c) estas barras (5), (6) e (7) são substituídas por apoios rígidos (vínculos rígidos); no CASO (d) estas barras (5), (6) e (7) são substituídas por apoios molas (vínculos elásticos), conforme Fig.IV-13.

De forma similar aos exemplos numéricos anteriores, na Tabela IV-13 é mostrado o valor da constante da mola, o valor de “ $\beta$ ”, a área do contraventamento denominada como “Área(2)”, o valor teórico do “ $W_{CRIT}$ ” esperado e o valor denominado por “ $W_{CRIT}$  (encontrado)”, obtido pelo programa desenvolvido.

Seja “ $\beta = 3.41$ ”, apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, na eq.(4.8), tem-se o valor do “ $K_{ideal}$ ” teórico dado por:

$$K_{ideal} = \beta \frac{\pi^2 EI}{L^3} = 3.41 \frac{\pi^2 20500 948.8}{80^3} = 1278.535233$$

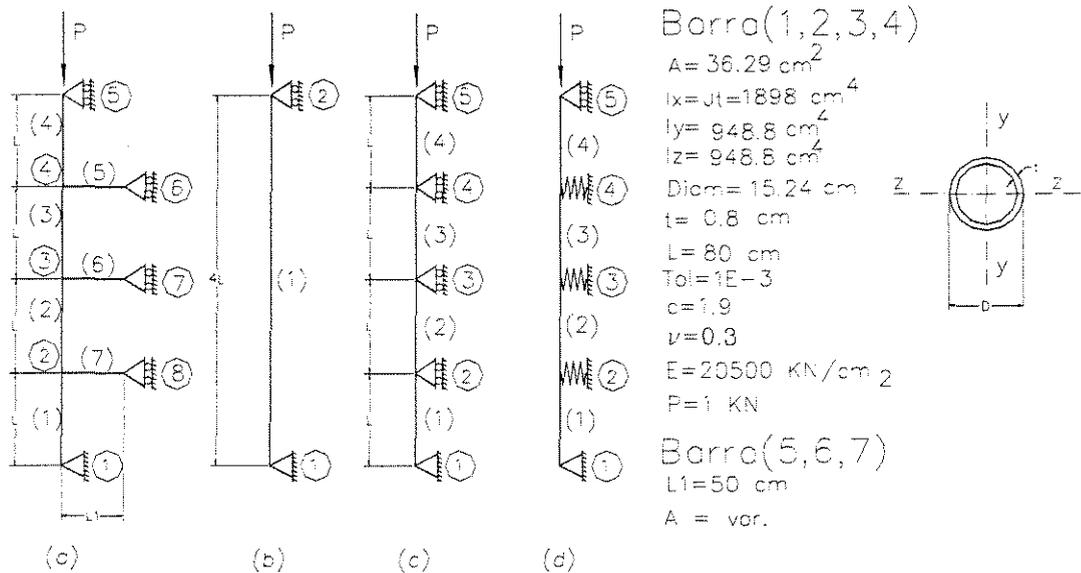


Figura IV-13 Exemplo Numérico 4.13

Através do " $K_{ideal}$ ", obtém-se da eq.(4.16) a " $A_{ideal}$ ":

$$A_{ideal} = K_{ideal} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 1278.535233 \frac{50}{20500} = 3.118378617 \text{ cm}^2$$

Pela Tabela IV-13 conclui-se que o " $K_{ideal}$ " teórico não é exatamente igual ao " $K_{limite}$ ". O " $K_{ideal}$ " encontrado pelo programa, denominado de " $K_{novo}$ ", é " $K_{novo} = 1280,5$ ". Este foi o " $K_{limite}$ " para o qual a mola passou a apresentar um comportamento de apoio fixo (vínculo rígido) apresentando um " $W_{CRIT}$ " igual ao CASO (c).

Tabela IV-13 Exemplo Numérico 4.13						
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	$\beta$	$A_{\text{contr.}}$	$W_{\text{crit}}$ (TEÓRICO)	$W_{\text{crit}}$ (ENCONTRADO)
(a)		—	—	0.53	29994.9615	14425.8201
			—	3.1184		29985.4976
			—	3.12		29989.4809
			—	3.1232		29994.9606
			—	4.50		29994.9606
			—	36.29		29994.9606
(b)		—	—	—	1874.6851	1874.6842
(c)		—	—	—	29994.9615	29994.9606
(d)		0.0000001	—	—	—	1874.6860
		0.00001	—	—	—	1874.6860
		1	—	—	—	2004.3705
		500	—	—	—	22995.8694
		1000	—	—	—	28081.6474
		1278.535233	3.41	—	—	29985.4976
		1280	—	—	—	29994.2723
		1280.5	3.415	—	—	29994.9606
		1500	—	—	—	29994.9606
		1000000	—	—	—	29994.9606

Através do " $K_{\text{novo}}=1280.5$ " obtido pelo programa, obtém-se da eq.(4.9) o novo valor de " $\beta$ " denominado de " $\beta_{\text{novo}}$ " e obtém-se da eq.(4.16) a nova área denominada de " $A_{\text{nova}}$ ":

$$\beta_{\text{novo}} = \frac{K_{\text{ideal}} L}{P_{\text{crit}}} = K_{\text{ideal}} \frac{L^3}{\pi^2 E I} = 1280.5 \frac{80^3}{\pi^2 20500 948.8} = 3.415240259$$

$$A_{\text{nova}} = K_{\text{ideal}} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 1280.5 \frac{50}{20500} = 3.123170732 \text{ cm}^2$$

Portanto, o valor de “ $\beta$ ”, apresentado por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, “ $\beta=3.41$ ” é aproximadamente igual ao “ $\beta_{\text{novo}}=3.4152$ ” obtido através do “ $K_{\text{novo}}$ ” dado pelo programa e o valor da “ $A_{\text{ideal}}=3.1184 \text{ cm}^2$ ” obtido pela eq.(4.16) é também aproximadamente igual ao obtido através do programa de “ $A_{\text{nova}}=3.1232 \text{ cm}^2$ ”. Neste caso os valores de “ $\beta$ ” e da “ $A_{\text{ideal}}$ ” são considerados corretos.

#### 4.5.9 - EXEMPLO NUMÉRICO 4.14

Neste décimo quarto exemplo, será apresentada uma estrutura contida no plano para quatro casos distintos.

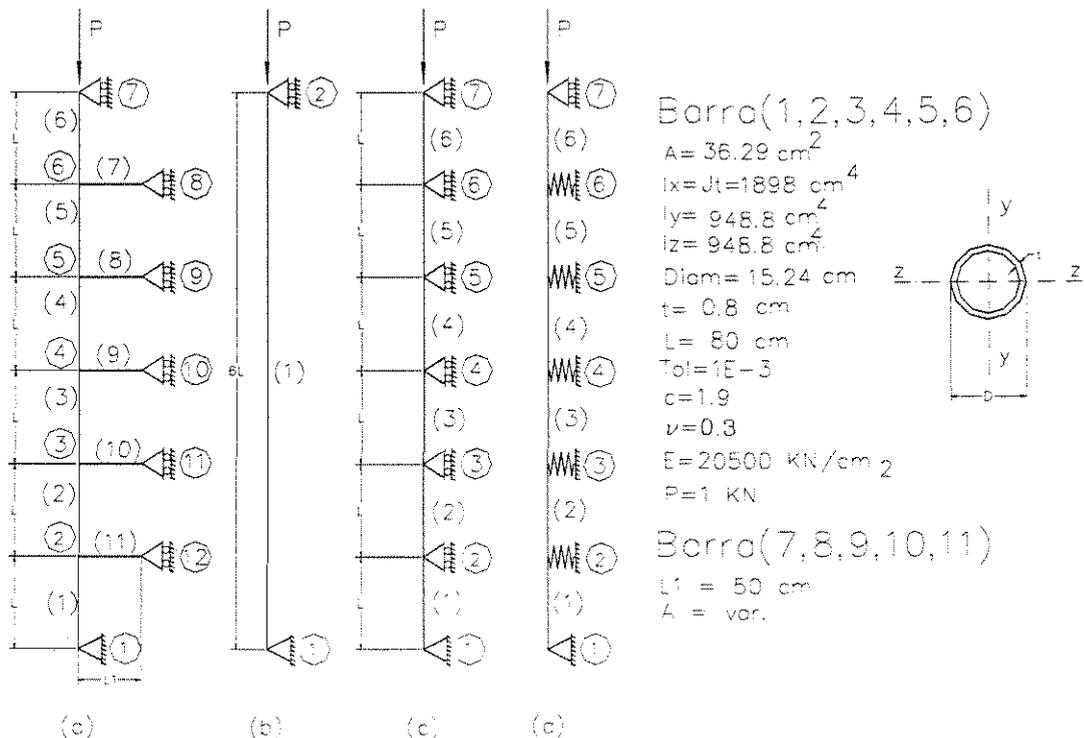


Figura IV-14 Exemplo Numérico 4.14

No CASO (a), as barras (7), (8), (9), (10) e (11) representam um exemplo típico de contraventamentos; no CASO (b) esta estrutura é representada por uma barra bi-apoiada; no CASO (c) estas barras (7), (8), (9), (10) e (11) são substituídas por apoios rígidos (vínculos rígidos); no CASO (d) estas barras (7), (8), (9), (10) e (11) são substituídas por apoios molas (vínculos elásticos), conforme Fig.IV-14.

De forma similar aos exemplos numéricos anteriores, na Tabela IV-14 é mostrado o valor da constante da mola, o valor de “ $\beta$ ”, a área do contraventamento denominada como “Área(2)”, o valor teórico do “ $W_{CRIT}$ ” esperado e o valor denominado por “ $W_{CRIT}$  (encontrado)”, obtido pelo programa desenvolvido.

Seja “ $\beta = 3.85$ ”, adotado pelo Gráfico IV-1(estimado), na eq.(4.8), tem o valor do “ $K_{ideal}$ ” teórico:

$$K_{ideal} = \beta \frac{\pi^2 E I}{L^3} = 3.85 \frac{\pi^2 20500 948.8}{80^3} = 1443.507521$$

Através do “ $K_{ideal}$ ”, obtém-se da eq.(4.16) a “ $A_{ideal}$ ”:

$$A_{ideal} = K_{ideal} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 1443.507521 \frac{50}{20500} = 3.520750051 \text{ cm}^2$$

Pela Tabela IV-14 conclui-se que o “ $K_{ideal}$ ” teórico não é exatamente o “ $K_{limite}$ ”. O “ $K_{ideal}$ ” encontrado pelo programa, denominado de “ $K_{novo}$ ”, é “ $K_{novo} = 1400.0$ ”. Portanto, o valor de “ $\beta$ ” aproximado, obtido pelo Gráfico IV-1, “ $\beta = 3.85$ ” não é exato. Conclui-se também da Tabela IV-14 que, o valor da “ $A_{ideal}$ ” obtido pela eq.(4.16) também não é exato.

Tabela IV-14 Exemplo Numérico 4.14						
TESTE	CARREGAMENTO	K (mola)	$\beta$	$A_{\text{contr.}}$	$W_{\text{crit}}$ (TEÓRICO)	$W_{\text{crit}}$ (ENCONTRADO)
(a)		—	—	0.53	29994.9615	14425.8201
			—	2.71		29074.1287
			—	3.41		29991.7729
			—	<u>3.4146</u>		<u>29994.9606</u>
			—	3.5208		29994.9606
			—	36.29		29994.9606
			(b)			—
(c)		—	—	—	29994.9615	<u>29994.9606</u>
(d)		0.0000001	—	—	—	<u>833.1929</u>
		0.00001	—	—	—	833.1965
		1	—	—	—	1124.9861
		500	—	—	—	21797.0500
		1000	—	—	—	28601.3293
		1300	—	—	—	29711.9975
		1399	—	—	—	29994.1972
		<u>1400</u>	<u>3.734</u>	—	—	<u>29994.9606</u>
		<u>1443.507521</u>	<u>3.85</u>	—	—	<u>29994.9606</u>
1000000	—	—	—	<u>29994.9606</u>		

Através do " $K_{\text{novo}}=1400.0$ " obtido pelo programa, obtém-se da eq.(4.9) o novo valor de " $\beta$ " denominado de " $\beta_{\text{novo}}$ " e obtém-se da eq.(4.16) a nova área denominada de " $A_{\text{nova}}$ ":

$$\beta_{\text{novo}} = \frac{K_{\text{ideal}} L}{P_{\text{crit}}} = K_{\text{ideal}} \frac{L^3}{\pi^2 E I} = 1400.0 \frac{80^3}{\pi^2 20500 948.8} = 3.733960455$$

$$A_{\text{nova}} = K_{\text{ideal}} \frac{L_{(2)}}{E_{(2)}} = 1400.0 \frac{50}{20500} = 3.414634146 \text{ cm}^2$$

Conclui-se da Tabela IV-14 que, o valor da “A<sub>nova</sub>” obtido pela eq.(4.16) através do “K<sub>novo</sub>=1400.0” não é exata.

Para este exemplo numérico os valores do “K<sub>ideal</sub>” e da “A<sub>ideal</sub>” obtidos através do “β” estimado não são considerados satisfatórios, deve-se estimar um valor novo, de “β=3.85” para “β=3.73” por exemplo.

Através das análises realizadas anteriormente pode-se concluir que as equações para o cálculo de “K<sub>ideal</sub>” dado pela eq.(4.8) e para o cálculo da “A<sub>ideal</sub>” dado pela eq.(4.16) são satisfatórias para comparar com os dados resultantes do programa desde que se utilize os valores de “β” fornecidos por GALAMBOS<sup>[15]</sup>, na falta de valores o Gráfico IV-1, fornecido por SALMON e JOHNSON<sup>[6]</sup> serve como uma referência que deve ser utilizada com cuidado porque induz a uma margem de erro maior, como é mostrado na Tabela IV-15. Para barras com 1, 2, 3 ou 4 tramos iguais, apresentadas respectivamente pelos exemplos numéricos 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 os valores de “β” fornecidos por GALAMBOS<sup>[15]</sup> são considerados satisfatórios. Para o exemplo numérico 4.14 com uma barra com seis tramos iguais o valor de “β” estimado pelo Gráfico IV-1 não foi considerado satisfatório.

Estas equações para o cálculo de “K<sub>ideal</sub>” dado pela eq.(4.8) ou a o cálculo da “A<sub>ideal</sub>” dado pela eq.(4.16) representam, respectivamente, a rigidez de uma mola ou a área necessária de uma barra para garantir que um pilar isolado esteja contraventado. Mas para se descobrir como um sistema de contraventamento formado por uma treliça pode garantir a

estabilidade entre pórticos, exige o desenvolvimento de outros tipos de equações, outros tipos de análises, novos métodos. Sabe-se que este estudo depende do tipo de ligação entre contraventamentos, da sua deformabilidade, do tipo de ligação entre o pórtico e o contraventamento, do tipo de carregamento aplicado entre outras variáveis. Mas, o programa proposto pode esclarecer alguns pontos deste tipo de sistema de contraventamento treliçado, que é utilizado na prática, o que será visto no capítulo V. Segundo BALLIO e MAZZOLANI<sup>[24]</sup>, como já foi dito, não há ainda instrumentos sofisticados para calcular esta influência e permitir a simulação completa da flambagem global da estrutura.

Tabela IV-15 Resultados				
Exemplos	Dados	Teórico	Programa	Erro
Exemplo	$\beta$	1.000	1.000	0%
Numérico 4.10	$K_{ideal}$	374.9370184	374.9370184	0%
	$A_{ideal}$	0.9144805327	0.9144805327	0%
Exemplo	$\beta$	2.000	2.000	0%
Numérico 4.11	$K_{ideal}$	749.8740368	749.8740368	0%
	$A_{ideal}$	1.828961065	1.828961065	0%
Exemplo	$\beta$	3.000	3.000	0%
Numérico 4.12	$K_{ideal}$	1124.811055	1124.811055	0%
	$A_{ideal}$	2.743441598	2.743441598	0%
Exemplo	$\beta$	3.41	3.415240259	0.1536732895%
Numérico 4.13	$K_{ideal}$	1278.535233	1280.5	0.1536732895%
	$A_{ideal}$	3.118378617	3.123170732	0.1536732895%
Exemplo	$\beta$	3.85	3.733960455	3.014014156%
Numérico 4.14	$K_{ideal}$	1443.507521	1400.0	3.014014154%
	$A_{ideal}$	3.520750051	3.414634146	3.014014158%

# **CAPÍTULO V**

## **ESTUDO DO EFEITO DOS CONTRAVENTAMENTOS ELÁSTICOS NA RIGIDEZ DAS ESTRUTURAS**

### **5.1 - INTRODUÇÃO**

Este capítulo mostra os resultados do estudo do efeito dos contraventamentos com alguns exemplos numéricos práticos. O programa desenvolvido foi utilizado na solução de uma série de problemas com o objetivo de obter o parâmetro crítico " $W_{CRIT}$ ", o coeficiente de flambagem "K" e principalmente obter as informações necessárias para comprovar a real influência dos contraventamentos.

### **5.2 - COEFICIENTES DE FLAMBAGEM "K"**

Através da eq.(1.12), da "Fórmula de Euler", que mostra a menor carga de flambagem de uma barra com extremidades rotuladas e

indeslocáveis perpendicularmente ao eixo, pode-se obter o coeficiente de flambagem da barra:

$$P_{Euler} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (5.1)$$

Sendo, "K" denominado por coeficiente de fambagem e é função das condições de extremidade da barra. O produto "KL" é conhecido como comprimento efetivo de flambagem, " $L_{Flam}=KL$ ", que pode ser definido, para uma barra dada, como sendo o comprimento real de uma barra bi-rotulada com os mesmos valores de "E", "I" e " $P_{Euler}$ " da barra dada, ou seja:

$$(KL)^2 = (L_{Flam})^2 = \frac{\pi^2 EI}{P_{Euler}} \quad (5.2)$$

O comprimento de flambagem é também igual à distância entre dois pontos de curvatura nula (pontos de inflexão) na curva de flambagem ver Fig.V-1.

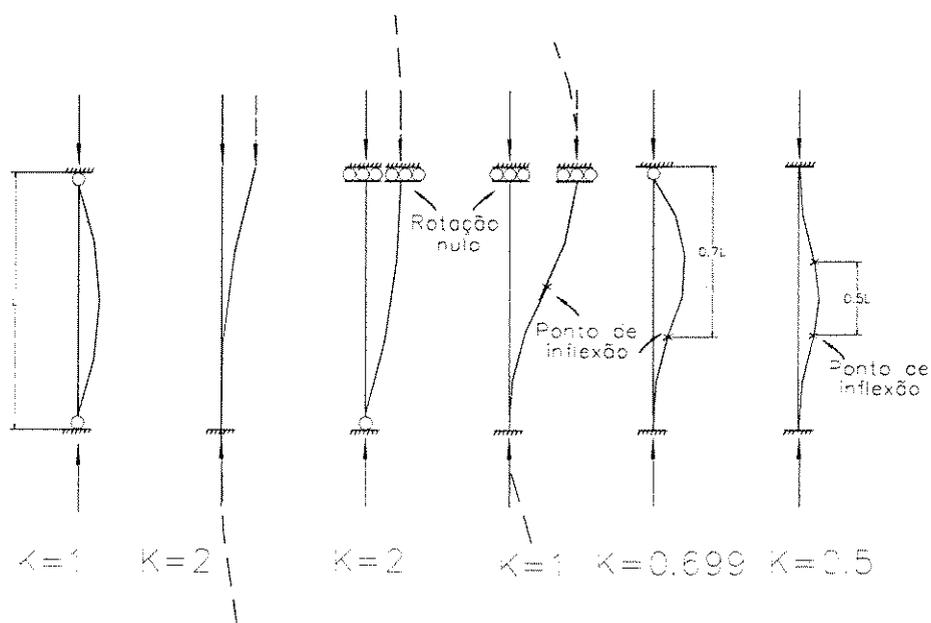


Figura V-1 Coeficiente de Flambagem

Na prática, para uma coluna contraventada, ver Fig.V-2, é adotado para a flambagem em torno eixo y-y (local) " $K_{y(\text{prático})}=2$ " e para flambagem em torno do eixo z-z (local) " $K_{z(\text{prático})}=1$ " representando o comportamento isolado de cada barra, mas somente quando a barra está isolada não sofrendo influência de carga ao longo de seu comprimento. Portanto, a interpretação tradicional mostra "K" diferentes para cada lado e " $P_{\text{CRIT}}$ " diferentes para cada lado, então deve-se calcular para ambos os lados o " $P_{\text{CRIT}}$ " e o menor deles será o " $P_{\text{CRIT}}$ " da coluna.

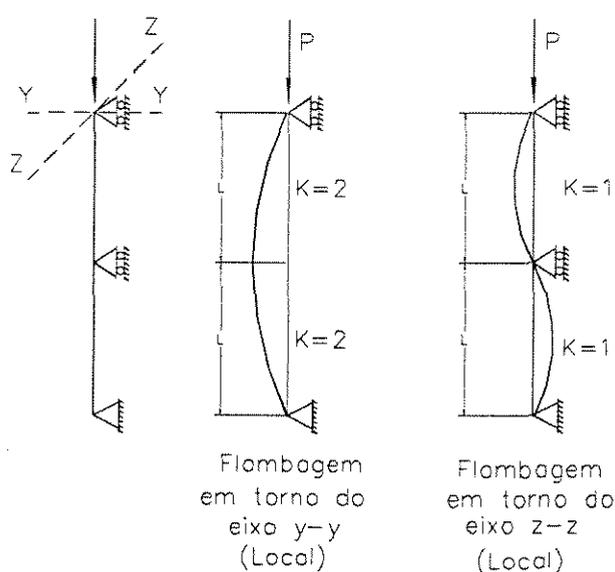


Figura V-2 Exemplo Teórico

O programa proposto calcula o "K" da seguinte maneira: a partir da eq.(5.2) o " $P_{\text{Euler}}$ " que representa o valor da carga crítica da estrutura como um todo será denominado por " $P_{\text{CRIT}}$ ", desta forma, pode-se obter o valor do "K":

$$(KL)^2 = \frac{\pi^2 EI}{P_{\text{CRIT}}} \Rightarrow K^2 = \frac{\pi^2 EI}{P_{\text{CRIT}} L^2} \Rightarrow K_{(i)} = \sqrt{\frac{P_{\text{Euler}(i)}}{P_{\text{CRIT}(i)}}} \quad (5.3)$$

Portanto, o "K" do programa, denominado por " $K_{\text{prog}}$ ", será um valor no qual para cada barra obter-se-á, já de início, o valor da carga crítica da coluna que seria o menor valor do caso prático. Então o programa

tridimensional permite informar uma relação de "K" que represente para cada lado o que acontece com o global da barra, ou seja, com este programa os valores de "K" representam o comportamento global da barra. Assim, a carga crítica estará automaticamente definida como será demonstrado nos exemplos a seguir.

### 5.3 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com base no exemplo teórico, ver Fig.V-2, utilizar-se-á quatro tipos de perfis com o objetivo de avaliar o " $K_{prog}$ " em relação ao " $K_{prático}$ ", bem como entender a carga crítica obtida através do programa.

#### 5.3 1- Exemplo Numérico 5.1

Neste primeiro exemplo, a coluna da Fig.V-2 será mostrada com o perfil abaixo:

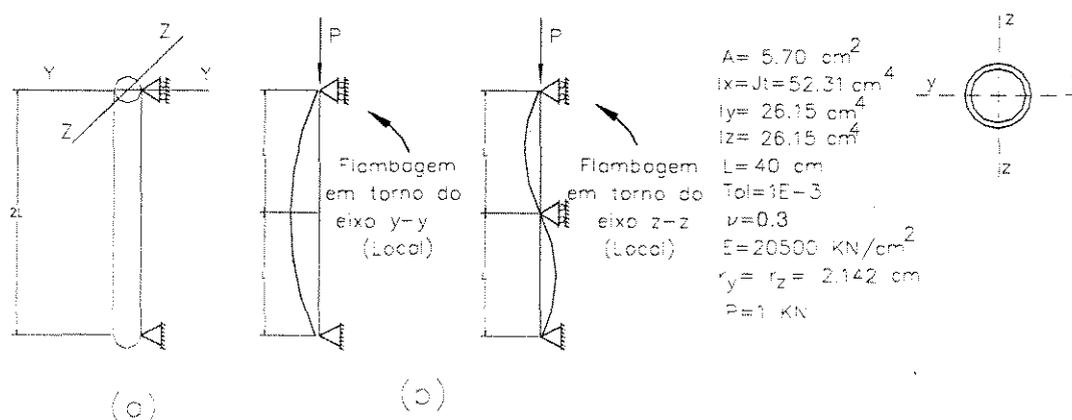


Figura V-3 Exemplo Numérico 5.1

Para o CASO (a) tem-se a coluna sem contraventamento e para o CASO (b) tem-se a coluna contraventada ao meio da barra e para este caso é mostrado a configuração flambada da coluna nas duas direções, conforme Fig.V-3.

Neste exemplo, no CASO (a), calcula-se o " $P_{CRIT}$ " para a coluna com o " $K_{prático}=1$ " nas duas direções, como " $P=1$ " e a barra é isolada implica em " $P_{CRIT}=W_{CRIT}$ ":

$$P_{CRIT}(z-z) = P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 EI}{(K_{prático} L)^2}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.15}{(1 \times 80)^2} = 826.6950 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (a), sem contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{CRIT}(\text{Teórico})=826.6950 \text{ KN}$ ".

Na Tabela V-1 é mostrado o valor de " $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ " esperado, o valor de " $P_{CRIT}(\text{Encontrado})$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-1 Exemplo Numérico 5.1				
Barra	$P_{CRIT}(\text{Teórico})$	$P_{CRIT}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	826.6950	826.6942	1.000	1.000

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " obtido através do programa, calcula-se dois valores iguais de " $P_{CRIT}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ ", assim tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.15}{(1 \times 80)^2} = 826.6950 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

No CASO (b), calcula-se o “ $P_{\text{CRIT}}$ ” para a coluna com o “ $K_{y(\text{prático})}=2$ ” para flambagem em torno do eixo y-y (local) e “ $K_{z(\text{prático})}=1$ ” para flambagem em torno do eixo z-z (local) nas duas direções:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{y(\text{prático})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.15}{(2 \times 40)^2} = 826.6950 \text{ KN}$$

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{z(\text{prático})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.15}{(1 \times 40)^2} = 3306.7801 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (b), com contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de “ $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})=826.6950 \text{ KN}$ ”, que representa a flambagem em torno do eixo y-y.

Na Tabela V-2 é mostrado o valor de “ $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ ” esperado, o valor de “ $P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$ ”, bem como o “ $K_z$ ” e o “ $K_y$ ”, obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-2 Exemplo Numérico 5.1				
Barra	$P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$	$P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	826.6950	826.6958	2.000	2.000
(2)	826.6950	826.6958	2.000	2.000

Com o “ $K_z$ ” e o “ $K_y$ ” são obtido dois valores iguais de “ $P_{\text{CRIT}}$ ” que é o mesmo obtido como “ $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ ”, assim tomando por exemplo a barra (1) tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.15}{(2 \times 40)^2} = 826.6950 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

Portanto, o " $K_{\text{prog}}$ " apresenta a carga crítica final da coluna.

### 5.3 2- Exemplo Numérico 5.2

Neste segundo exemplo, a coluna da Fig.V-2 será mostrada com o perfil abaixo:

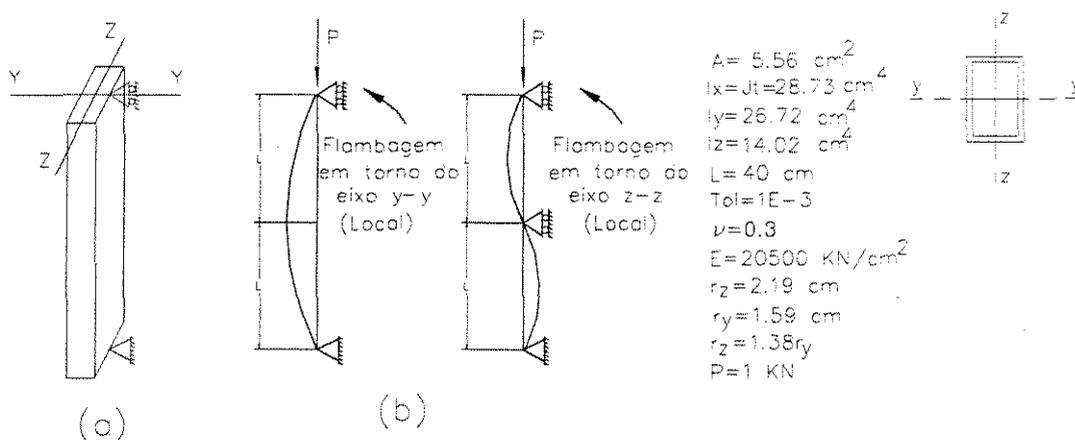


Figura V-4 Exemplo Numérico 5.2

Para o CASO (a) tem-se a coluna sem contraventamento e para o CASO (b) tem-se a coluna contraventada ao meio da barra e para este caso é mostrado a configuração flambada da coluna nas duas direções, conforme Fig.V-4.

Neste exemplo, no CASO (a), calcula-se o " $P_{\text{CRIT}}$ " para a coluna com o " $K_{\text{prático}} = 1$ " nas duas direções:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{\text{prático}} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.72}{(1 \times 80)^2} = 844.7148 \text{ KN}$$

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{\text{prático}} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(1 \times 80)^2} = 443.2223 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (a), sem contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})=443.2223 \text{ KN}$ " em torno do eixo z-z.

Na Tabela V-3 é mostrado o valor de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ " esperado, o valor de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-3 Exemplo Numérico 5.2				
Barra	$P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$	$P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	443.2223	443.2215	1.0000	1.3805

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " obtido através do programa, calcula-se dois valores iguais de " $P_{\text{CRIT}}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ ", assim tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.72}{(1.3805 \times 80)^2} = 443.2383 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(1 \times 80)^2} = 443.2223 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

No CASO (b), calcula-se o " $P_{\text{CRIT}}$ " para a coluna com o " $K_{y(\text{prático})}=2$ " para flambagem em torno do eixo y-y (local) e " $K_{z(\text{prático})}=1$ " para flambagem em torno do eixo z-z (local) nas duas direções:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{y(\text{pratico})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.72}{(2 \times 40)^2} = 844.7148 \text{ KN}$$

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{z(\text{pratico})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(1 \times 40)^2} = 1772.8894 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (b), com contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Téorico})=844.7148 \text{ KN}$ ", que representa a flambagem em torno do eixo y-y.

Na Tabela V-4 é mostrado o valor de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ " esperado, o valor de " $P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-4 Exemplo Numérico 5.2				
Barra	$P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$	$P_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	844.7148	844.7142	1.4487	2.000
(2)	844.7148	844.7142	1.4487	2.000

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " são obtido dois valores iguais de " $P_{\text{CRIT}}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{\text{CRIT}}(\text{Teórico})$ ", assim tomando por exemplo a barra (1) tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 26.72}{(2 \times 40)^2} = 844.7148 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(1.4487 \times 40)^2} = 844.7432 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

Portanto, o " $K_{\text{prog}}$ " apresenta a carga crítica final da coluna.

### 5.3 3- Exemplo Numérico 5.3

Neste terceiro exemplo, a coluna da Fig.V-2 será mostrada com o perfil abaixo:

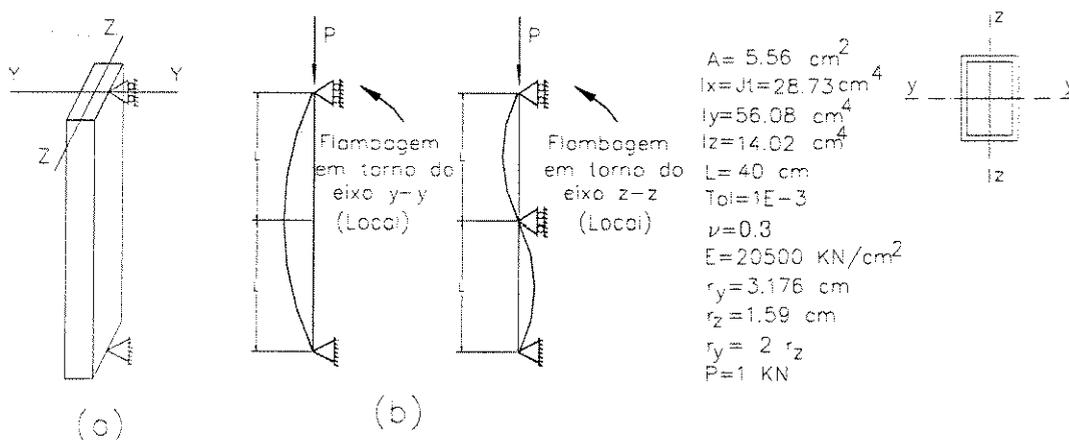


Figura V-5 Exemplo Numérico 5.3

Para o CASO (a) tem-se a coluna sem contraventamento e para o CASO (b) tem-se a coluna contraventada ao meio da barra e para este caso é mostrado a configuração flambada da coluna nas duas direções, conforme Fig.V-5.

Neste exemplo, no CASO (a), calcula-se o " $P_{CRIT}$ " para a coluna com o " $K_{prático} = 1$ " nas duas direções:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{prático} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 56.08}{(1 \times 80)^2} = 1772.8894 \text{ KN}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{prático} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 14.02}{(1 \times 80)^2} = 443.2223 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (a), sem contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{CRIT}(Teórico)=443.2223$  KN" em torno do eixo z-z.

Na Tabela V-5 é mostrado o valor de " $P_{CRIT}(Teórico)$ " esperado, o valor de " $P_{CRIT}(Encontrado)$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-5 Exemplo Numérico 5.3				
Barra	$P_{CRIT}(Teórico)$	$P_{CRIT}(Encontrado)$	$K_z$	$K_y$
(1)	443.2223	443.2215	1.0000	2.0000

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " obtido através do programa, calcula-se dois valores iguais de " $P_{CRIT}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{CRIT}(Teórico)$ ", assim tem-se:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 56.08}{(2 \times 80)^2} = 443.2223 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 20500 14.02}{(1 \times 80)^2} = 443.2223 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

No CASO (b), calcula-se o " $P_{CRIT}$ " para a coluna com o " $K_{y(prático)}=2$ " para flambagem em torno do eixo y-y (local) e " $K_{z(prático)}=1$ " para flambagem em torno do eixo z-z (local) nas duas direções:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{y(prático)} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 56.08}{(2 \times 40)^2} = 1772.8894 \text{ KN}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{z(prático)} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 14.02}{(1 \times 40)^2} = 1772.8894 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (b), com contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{CRIT}(Teórico)=844.7148$  KN", que representa a flambagem em torno do eixo y-y ou também a flambagem em torno do eixo z-z. Isto ocorre porque a relação entre os raios de giração é exatamente igual a dois. Neste caso o " $K_{prog}$ " deve ser igual ao " $K_{prático}$ ".

Na Tabela V-6 é mostrado o valor de " $P_{CRIT}(Teórico)$ " esperado, o valor de " $P_{CRIT}(Encontrado)$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-6 Exemplo Numérico 5.3				
Barra	$P_{CRIT}(Teórico)$	$P_{CRIT}(Encontrado)$	$K_z$	$K_y$
(1)	1772.8894	1772.8902	1.0000	2.000
(2)	1772.8894	1772.8902	1.0000	2.000

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " são obtido dois valores iguais de " $P_{CRIT}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{CRIT}(Teórico)$ ", assim tomando por exemplo a barra (1) tem-se:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 56.08}{(2 \times 40)^2} = 1772.8894 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(1 \times 40)^2} = 1772.8894 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

Portanto, o " $K_{prog}$ " apresenta a carga crítica final da coluna.

### 5.3 4- Exemplo Numérico 5.4

Neste quarto exemplo, a coluna da Fig.V-2 será mostrada com o perfil abaixo:

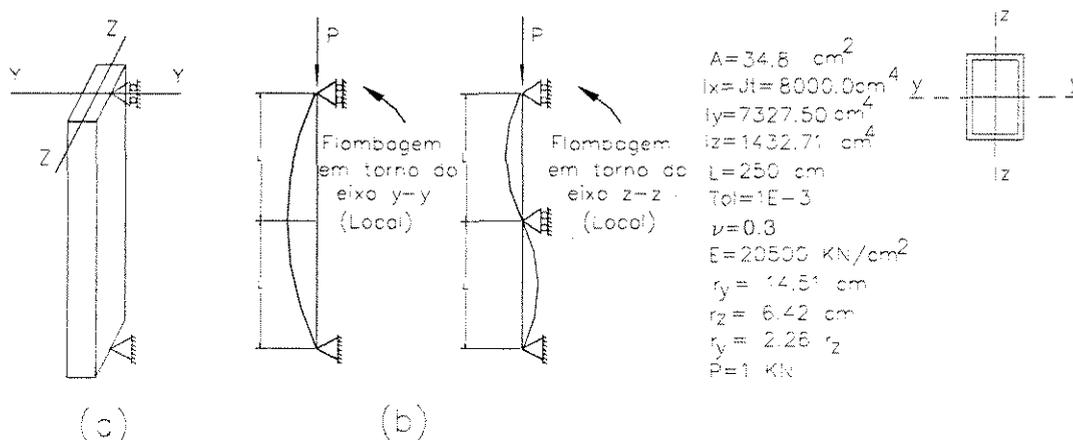


Figura V-6 Exemplo Numérico 5.4

Para o CASO (a) tem-se a coluna sem contraventamento e para o CASO (b) tem-se a coluna contraventada ao meio da barra e para este caso é mostrado a configuração flambada da coluna nas duas direções, conforme Fig.V-6.

Neste exemplo, no CASO (a), calcula-se o " $P_{CRIT}$ " para a coluna com o " $K_{prático} = 1$ " nas duas direções:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{prático} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 7327,5}{(1 \times 500)^2} = 5930,2012 \text{ KN}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{prático} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 1432,71}{(1 \times 500)^2} = 1159,5030 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (a), sem contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{CRIT}(Téorico) = 1159,5030 \text{ KN}$ " em torno do eixo z-z.

Na Tabela V-7 é mostrado o valor de " $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ " esperado, o valor de " $P_{CRIT}(\text{Encontrado})$ ", bem como o " $K_z$ " e o " $K_y$ ", obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-7 Exemplo Numérico 5.4				
Barra	$P_{CRIT}(\text{Teórico})$	$P_{CRIT}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	1159.5030	1159.5034	1.0000	2.2615

Com o " $K_z$ " e o " $K_y$ " obtido através do programa, calcula-se dois valores iguais de " $P_{CRIT}$ " que é o mesmo obtido como " $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ ", assim tem-se:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \ 7327.5}{(2.2615 \times 500)^2} = 1159.5147 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 20500 \ 1432.71}{(1 \times 500)^2} = 1159.5030 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

No CASO (b), calcula-se o " $P_{CRIT}$ " para a coluna com o " $K_{y(\text{prático})}=2$ " para flambagem em torno do eixo y-y (local) e " $K_{z(\text{prático})}=1$ " para flambagem em torno do eixo z-z (local) nas duas direções:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{y(\text{prático})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \ 7327.5}{(2 \times 250)^2} = 5930.2012 \text{ KN}$$

$$P_{CRIT}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{z(\text{prático})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \ 1432.71}{(1 \times 250)^2} = 4638.0121 \text{ KN}$$

Portanto a flambagem no CASO (b), com contraventamento, deverá ocorrer com o valor esperado de " $P_{CRIT}(\text{Teórico})=4638.0121 \text{ KN}$ ", que representa a flambagem em torno do eixo z-z.

Na Tabela V-8 é mostrado o valor de “ $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ ” esperado, o valor de “ $P_{CRIT}(\text{Encontrado})$ ”, bem como o “ $K_z$ ” e o “ $K_y$ ”, obtido pelo programa desenvolvido.

Tabela V-8 Exemplo Numérico 5.4				
Barra	$P_{CRIT}(\text{Teórico})$	$P_{CRIT}(\text{Encontrado})$	$K_z$	$K_y$
(1)	4638.0121	4638.0120	1.000	2.2615
(2)	4638.0121	4638.0120	1.000	2.2615

Com o “ $K_z$ ” e o “ $K_y$ ” são obtido dois valores iguais de “ $P_{CRIT}$ ” que é o mesmo obtido como “ $P_{CRIT}(\text{Teórico})$ ”, assim tomando por exemplo a barra (1) tem-se:

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \ 7327.5}{(2.2615 \times 250)^2} = 4638.0586 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

$$P_{CRIT}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 \ 1432.71}{(1 \times 250)^2} = 4638.0121 \text{ KN} \quad \text{OK!}$$

Portanto, o “ $K_{prog}$ ” apresenta a carga crítica final da coluna.

Através destes exemplos foi possível interpretar os coeficientes de flambagem obtidos pelo programa e também entender que estes valores de “ $K$ ” já interpreta a carga crítica da estrutura global.

## 5.4 - EXEMPLOS DE ESTRUTURAS CONTRAVENTADAS

Para avaliar a influência real dos contraventamentos, que é o objetivo do trabalho, será mostrado dois casos usuais de contraventamentos em estruturas como: contraventamentos de treliça e contraventamentos de pilar.

Os exemplos utilizados nesta fase foram também calculados pelo programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> e será mostrado no trabalho, a título de ilustração, os desenhos da estrutura indeformada e deformada. Cada barra da estrutura será dividida apenas em quatro elementos porque o objetivo foi de obter apenas as deformadas das estruturas e não o valor real do " $W_{CRIT}$ ", já que torna-se complicado, nestes exemplos, subdividir cada barra em mais elementos. Portanto o " $W_{CRIT}$ " fornecido pelo ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> não será o exato. Para que se obtenha um " $W_{CRIT}$ " mais preciso pelo ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> cada elemento deverá ser dividido no mínimo em dez elementos<sup>[25]</sup>.

### 5.4.1 - Contraventamentos de treliça

Antes de avaliar a influência real dos contraventamentos em treliças mostrar-se-á um exemplo em que o programa irá fornecer os coeficientes de flambagem, " $K_{prog}$ ", e comparar com os " $K_{prático}$ " utilizados pelos calculistas para treliças.

#### 5.4.1.1 - Exemplo Numérico 5.5

Neste quinto exemplo será mostrado uma treliça, ver Fig.V-7:

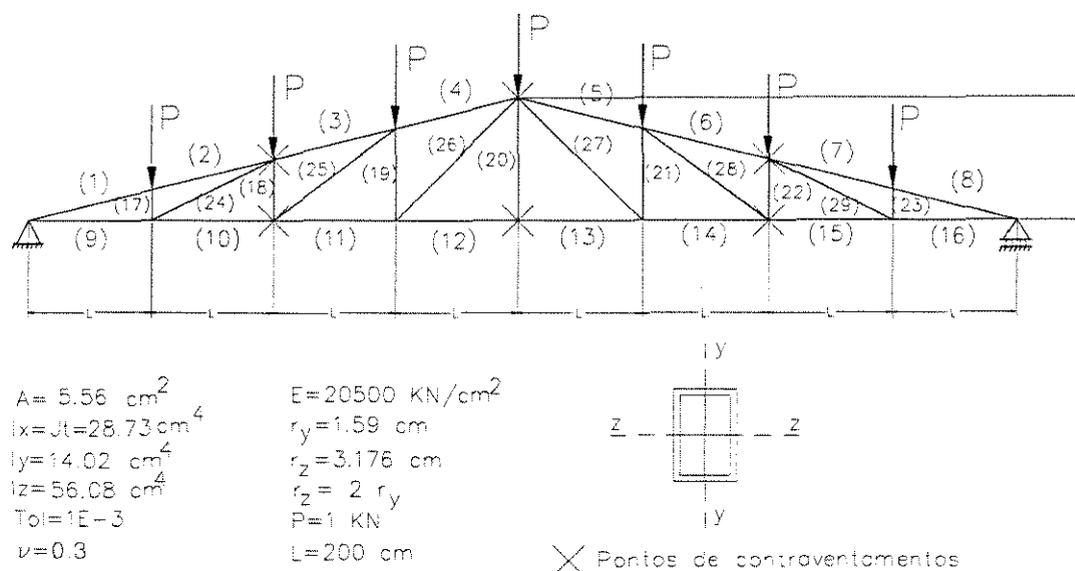


Figura V-7 Exemplo Numérico 5.5

Para esta treliça obtém-se o " $W_{CRIT}$ " através do programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> e através do programa, ver Tabela V-9:

Tabela V-9 Exemplo Numérico 5.5	
$W_{CRIT}(ANSYS)$	$W_{CRIT}(PROGRAMA)$
5.3848	4.3221

Para esta treliça o valor de "P" vai ser substituído por um carregamento pouco menor que o " $W_{CRIT}$ " com o objetivo de obter os esforços máximos anterior a perda de estabilidade da estrutura. Estes esforços estão próximos a carga crítica suportada pela barra. Assim fazendo " $P = 4.315 \text{ KN}$ " resulta num " $W_{CRIT} = 1.0021 \text{ KN}$ ".

Na prática, os calculistas adotam, neste caso onde a relação entre raios de giração é igual a 2, que o " $K_{y(\text{prático})} = 2$ " para flambagem em torno do eixo y-y (local) e " $K_{z(\text{prático})} = 1$ " para flambagem em torno do eixo z-z

(local) e como já foi dito adota-se o menor valor para o dimensionamento da barra. Por exemplo adotando-se a barra (1), tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_{y(\text{pratico})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 14.02}{(2 \times 206.16)^2} = 16.6853 \text{ KN}$$

$$P_{\text{CRIT}}(z-z) = \frac{\pi^2 E I_z}{(K_{z(\text{pratico})} L)^2} = \frac{\pi^2 20500 \cdot 56.08}{(1 \times 206.16)^2} = 266.9641 \text{ KN}$$

Então, pela prática, a barra seria dimensionada com carga crítica " $P_{\text{CRIT}}=16.6853 \text{ KN}$ ".

O programa obteve, para barra (1) um esforço igual a " $P=59.4431 \text{ KN}$ ", para um carregamento próximo ao crítico. Neste caso, mesmo que a relação entre raios de giração seja igual a 2, o programa obteve " $K_{y(\text{prog})}=1.0588$ " para flambagem em torno do eixo y-y (local) e " $K_{z(\text{prog})}=2.1175$ " para flambagem em torno do eixo z-z (local).

Através dos resultados obtidos, pode-se observar que a interpretação tradicional do parâmetro "K" só pode ser feita com barras isoladas ou no máximo para barras acopladas a uma treliça plana. No caso da análise tridimensional com ações aplicadas ao longo dos nós da estrutura o parâmetro " $W_{\text{CRIT}}$ " surge como fator limitante de instabilidade global. Os parâmetros "K" encontrados representam apenas relações entre a barra isolada e a barra acoplada na estrutura.

Então, através do programa, a barra deveria ser dimensionada com carga crítica " $P_{\text{CRIT}}=59.5340 \text{ KN}$ ". Isto mostra que o cálculo prático é conservativo e está a favor da segurança, mas não representa o real da estrutura. A Tabela V-10 mostra para o banzo superior, os coeficientes de flambagem " $K_z$ " e o " $K_y$ ", o esforço crítico obtido para um carregamento próximo ao crítico denominado por " $P_{\text{CRIT}}(\text{Próximo})$ ", o esforço crítico obtido através dos " $K_{\text{prog}}$ " denominado por " $P_{\text{CRIT}}(\text{Programa})$ ", o esforço crítico obtido pela prática denominado por " $P_{\text{CRIT}}(\text{Prático})$ ".

Tabela V-10 Exemplo Numérico 5.5					
Barra	$K_z$	$K_y$	$P_{CRIT}(Próximo)$	$P_{CRIT}(Programa)$	$P_{CRIT}(Prático)$
(1)	2.1175	1.0588	59.4431	59.5340	16.6853
(2)	2.1168	1.0584	59.4849	59.5790	16.6853
(3)	2.2444	1.1222	52.9123	52.9971	16.6853
(4)	2.4551	1.2275	44.2207	44.2909	16.6853

A deformada desta estrutura pode ser observada através do programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> como mostra a Fig.V-8.

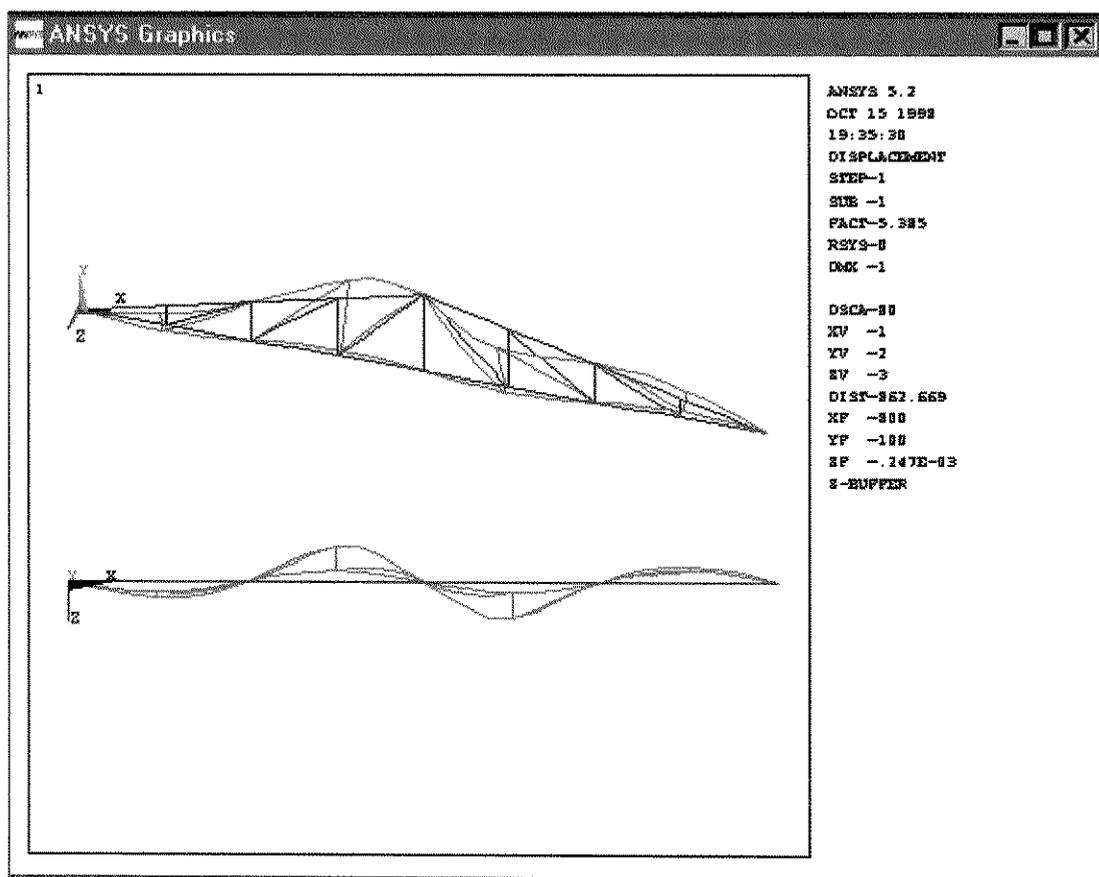


Figura V-8 Deformada do Exemplo Numérico 5.5

### 5.4.1.2 - Exemplo Numérico 5.6

Neste sexto exemplo será mostrado um pórtico composto de duas treliças unida pelos contraventamentos e pelas terças. A treliça é a mesma mostrada no exemplo numérico 5 com o mesmo tipo de carregamento, ver Fig.V-9.

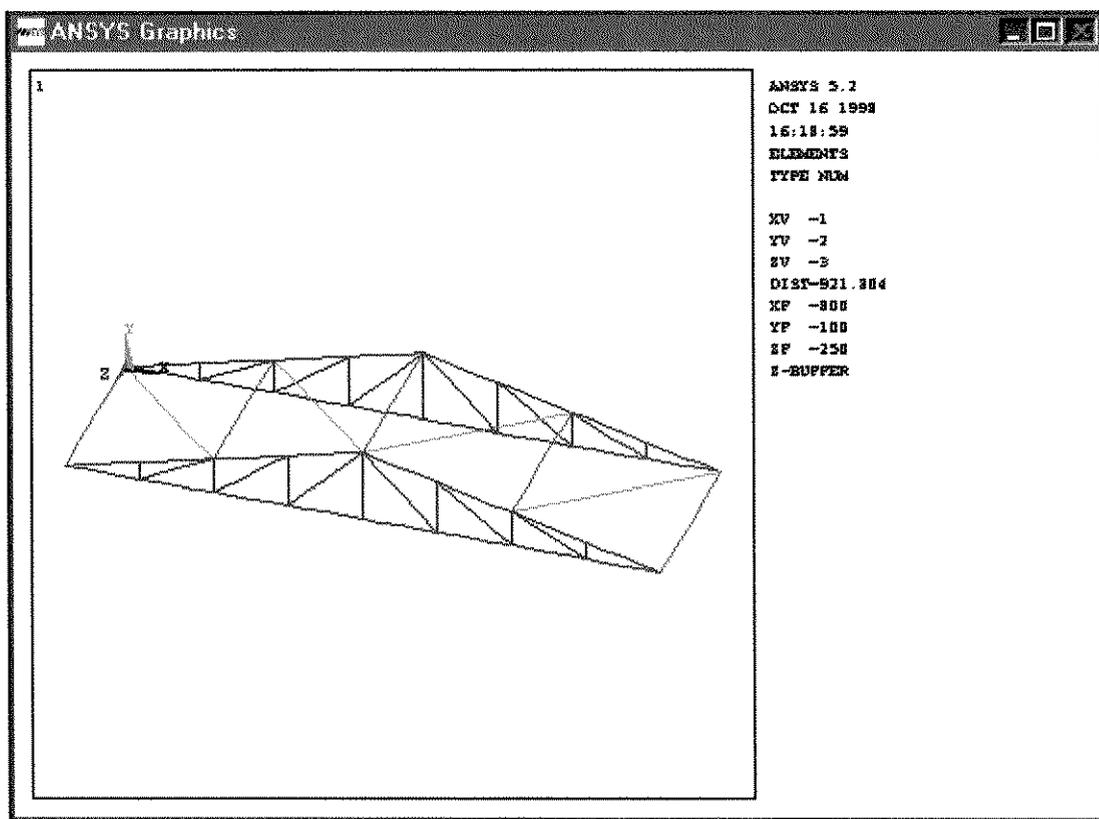


Figura V-9 Exemplo Numérico 5.6

Os contraventamentos formam um treliça no plano do telhado onde os banzos desta treliça são compostos pelo banzo superior da treliça principal. Seus montantes são compostos pelas terças e as diagonais são representadas pelos contraventamentos. Na prática são utilizadas diagonais em cruz mas que resistem apenas a esforços de tração, assim quando os

esforços impõem esforços de compressão em uma delas a outra passa a trabalhar tracionada. Assim por apenas uma delas estar submetida a esforço, e esforço de tração, a modelagem para explicar a influência dos contraventamentos apresenta apenas uma delas.

A fim de evitar que houvesse transmissão de momentos fletores para a treliça os contraventamentos e as terças tiveram suas inércias reduzidas, mas de tal forma que não causasse um problema numérico no programa. A área da terça foi estimada em " $A=6.51\text{cm}^2$ ", visto que a distância entre as treliças foi estipulado em cinco metros. Variou-se as áreas dos contraventamentos a fim de se obter o mesmo " $W_{\text{CRIT}}$ " da treliça isolada do exemplo numérico 5.5, que foi de " $W_{\text{CRIT}}(\text{Programa})=4.3221\text{KN}$ ". O resultado do programa para este caso encontra-se na Tabela V-11 e o novo " $W_{\text{CRIT}}$ " será denominado de " $W_{\text{CRIT}}(\text{Conjunto})$ ":

Tabela V-11 Exemplo Numérico 5.6	
Área (cm <sup>2</sup> )	$W_{\text{CRIT}}(\text{Conjunto})$
0.1	4.3327
$\phi\ 3/8\ '' = 0.72$	4.3327
$\phi\ 1/2\ '' = 1.27$	4.3327
$\phi\ 1\ '' = 5.07$	4.3327
100	4.3327

Portanto, o " $W_{\text{CRIT}}(\text{Conjunto})=4.3327\text{KN}$ " e muito próximo do " $W_{\text{CRIT}}(\text{Programa})=4.3221\text{KN}$ " obtido através da treliça isolada. Assim pode

se afirmar que neste caso, o contraventamento utilizado na prática, que é de “ $\phi$  3/8”, é suficiente para garantir a estabilidade da treliça.

Será mostrado na Fig.V-10 a deformada obtida pelo programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> para este exemplo e o “ $W_{CRIT}(ANSYS)$ ” para o conjunto foi de “ $W_{CRIT}(ANSYS)=5.5032$  KN” e para a treliça isolada do exemplo anterior era de “ $W_{CRIT}(ANSYS)=5.3848$  KN”. Devido a inércia ser considerada baixa, mas ainda existente, quando ocorre a perda de estabilidade da treliça esta provoca um giro nos nós que também afetam as terças e as barras de contraventamentos, conforme pode-se ver na Fig.V-10, mas pelos esforços obtido pelo programa a barra dos contraventamentos apresentam esforços de tração.

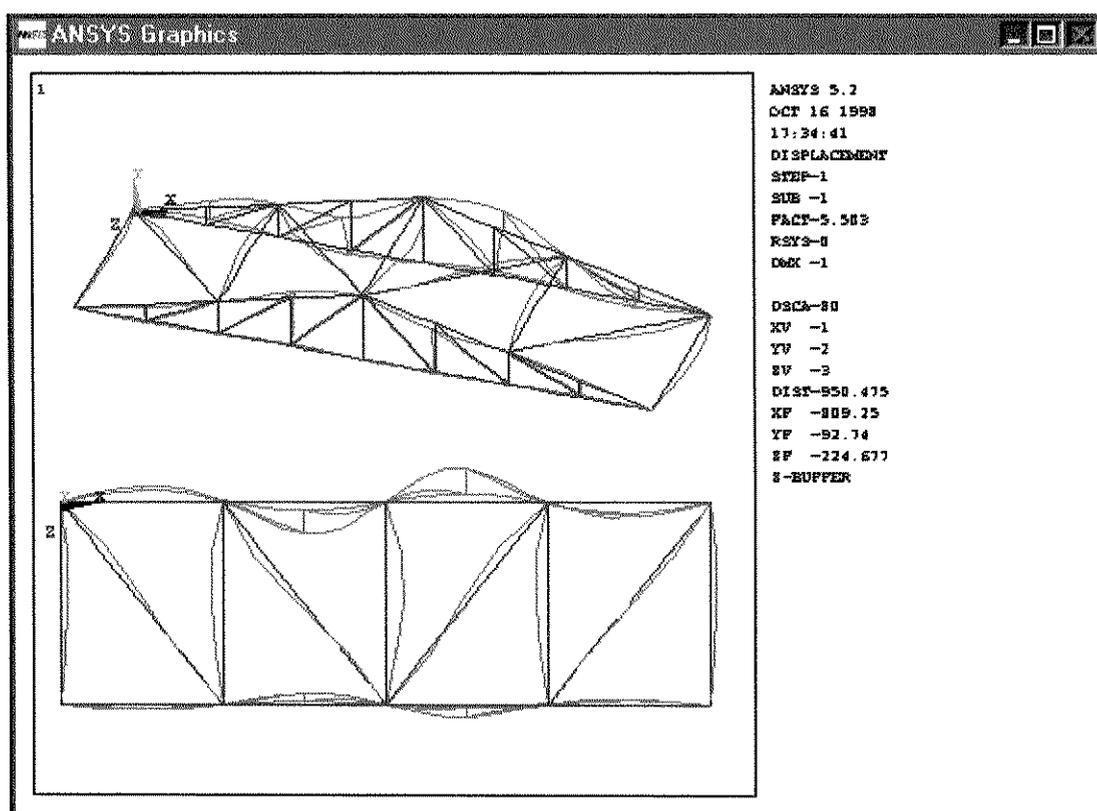


Figura V-10 Deformada do Exemplo Numérico 5.6

## 5.4.2 - Contraventamentos de Pilar

Recomenda que os pilares metálicos sejam contraventados no eixo de menor inércia. Assim diminui-se o comprimento de flambagem do pilar aumentando a carga crítica que o pilar pode suportar. O exemplo numérico 5.7, que será mostrado a seguir, utiliza o mesmo perfil adotado no exemplo numérico 5.4, e tem por objetivo avaliar a influência real dos contraventamentos em pilares. É recomendado que entre pórticos a cada seis vãos tenha-se um sistema de contraventamento. Portanto cada sistema de contraventamento deve suportar três vãos adjacentes. Com base nestas informações foi montado o exemplo a seguir.

### 5.4.2.1 - Exemplo Numérico 5.7

Neste sétimo exemplo será mostrado um conjunto de cinco pilares com o sistema de contraventamento, ver Fig.V-11.

Como foi dito no caso da treliça, exemplo 5.6, na prática utiliza-se para o sistema de contraventamento diagonais em cruz, mas estas resistem apenas esforços de tração. Quando os pilares são carregados apenas uma delas esta submetida a esforços, por isso no modelo apresentado aparece apenas uma delas.

A fim de evitar que houvesse transmissão de momentos fletores para os pilares os contraventamentos tiveram suas inércias também reduzida, mas de tal forma que não causasse um problema numérico no programa.

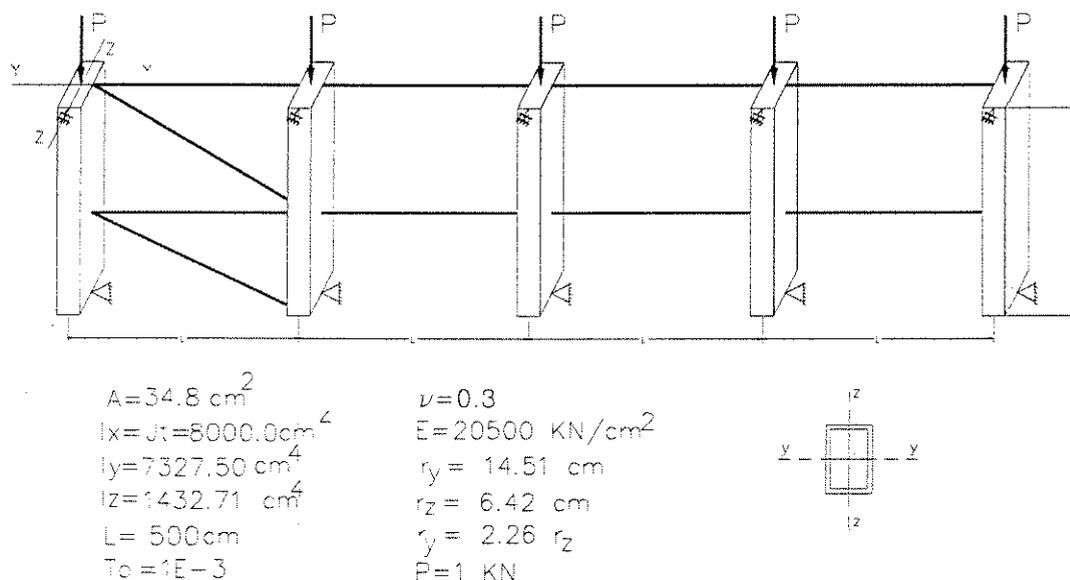


Figura V-11 Exemplo Numérico 5.7

Na prática é utilizado, como já foi dito no exemplo numérico 4.4, para calcular o " $W_{\text{CRIT}}$ " da coluna, adotar " $K_{y(\text{prático})} = 2$ " para flambagem em torno do eixo y-y e " $K_{z(\text{prático})} = 1$ " para flambagem em torno do eixo z-z. E também utilizar cantoneiras para as barras dos contraventamentos admitindo que estas são suficientes para garantir a estabilidade do pilar.

Com o objetivo de verificar a veracidade da afirmação acima variou-se as áreas dos contraventamentos, utilizando ferros redondos e cantoneiras, a fim de se obter o mesmo " $W_{\text{CRIT}}$ " obtido com o pilar isolado dado pelo exemplo numérico 4.4 (b), que foi de " $W_{\text{CRIT}} = 4638.0121 \text{ KN}$ " representando a flambagem em torno do eixo z-z. Caso o " $W_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$ " pelo programa seja igual ao " $W_{\text{CRIT}}$ " da coluna isolada os perfis utilizados nos contraventamentos são suficientes para garantir a estabilidade do conjunto de pilares. Os resultados são apresentados na Tabela V-12. Nesta Tabela é mostrado as áreas dos contraventamentos, o " $W_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})$ " e o " $K_z$ " e o " $K_y$ " obtidos pelo programa.

Tabela V-12 Exemplo Numérico 5.7				
Perfil	Área(cm <sup>2</sup> )	W <sub>CRIT</sub> (Encontrado)	K <sub>z</sub>	K <sub>y</sub>
φ 3/8"	0.72	541.9319	2.9255	6.6160
φ 1/2 "	1.27	881.1114	2.2943	5.1886
φ 1"	5.07	2661.4846	1.3201	2.9854
L 2" x 2" #1/4"	6.06	3156.3492	1.2122	2.7414
L 3" x 3" #3/8	13.61	4180.8907	1.0533	2.3819
L 4" x 4" #3/8	18.45	4490.5225	1.0163	2.2984
L 5" x 5" #1/2	30.64	4571.0448	1.0073	2.2780
L 6" x 6" #1/2	37.09	4570.2907	1.0074	2.2782
-	1000.0	4584.0058	1.0059	2.2748

Observe que para qualquer uma das cantoneiras adotada o "W<sub>CRIT</sub>(Encontrado)" não chega em "W<sub>CRIT</sub>=4638.0121 KN" do pilar isolado. Nem que num absurdo utilizando uma área igual a "A=1000.0 cm<sup>2</sup>" o "W<sub>CRIT</sub>(Encontrado)" não chega no valor crítico, então conclui-se, que os perfis cantoneiras adotados para os contraventamentos dos pilares, para este caso, não são suficientes para garantir a sua estabilidade e portanto não esta correto o uso de "K<sub>y(prático)</sub>=2" para flambagem em torno do eixo y-y e "K<sub>z(prático)</sub>=1" para flambagem em torno do eixo z-z. Assim ao se adotar cantoneiras para perfis de contraventamentos os "K" devem ser devidamente calculados.

De acordo com os resultados obtidos pelo programa ao utilizar-se a cantoneira 2" x 2" #1/4 para os contraventamentos deveriam-se utilizar " $K_{y(\text{prog})}=2.7414$ " e " $K_{z(\text{prog})}=1.2122$ ", assim tem-se:

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 7327.5}{(2.7414 \times 250)^2} = 3156.3460 \text{ KN}$$

$$P_{\text{CRIT}}(y-y) = \frac{\pi^2 20500 1432.71}{(1.2122 \times 250)^2} = 3156.3368 \text{ KN}$$

Então a carga crítica do pilar é de " $W_{\text{CRIT}}(\text{Encontrado})=3156.3492 \text{ KN}$ " e não " $W_{\text{CRIT}}=4638.0121 \text{ KN}$ " como é adotado na prática pelos calculistas. Neste caso, de contraventamentos de pilares, o erro esta contra a segurança da estrutura e deveria ser analisado com mais cuidado. O ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> obtém para este caso um " $W_{\text{CRIT}}(\text{ANSYS})=3486.6736 \text{ KN}$ " e apresenta a deformada mostrada pela Fig.V-12.

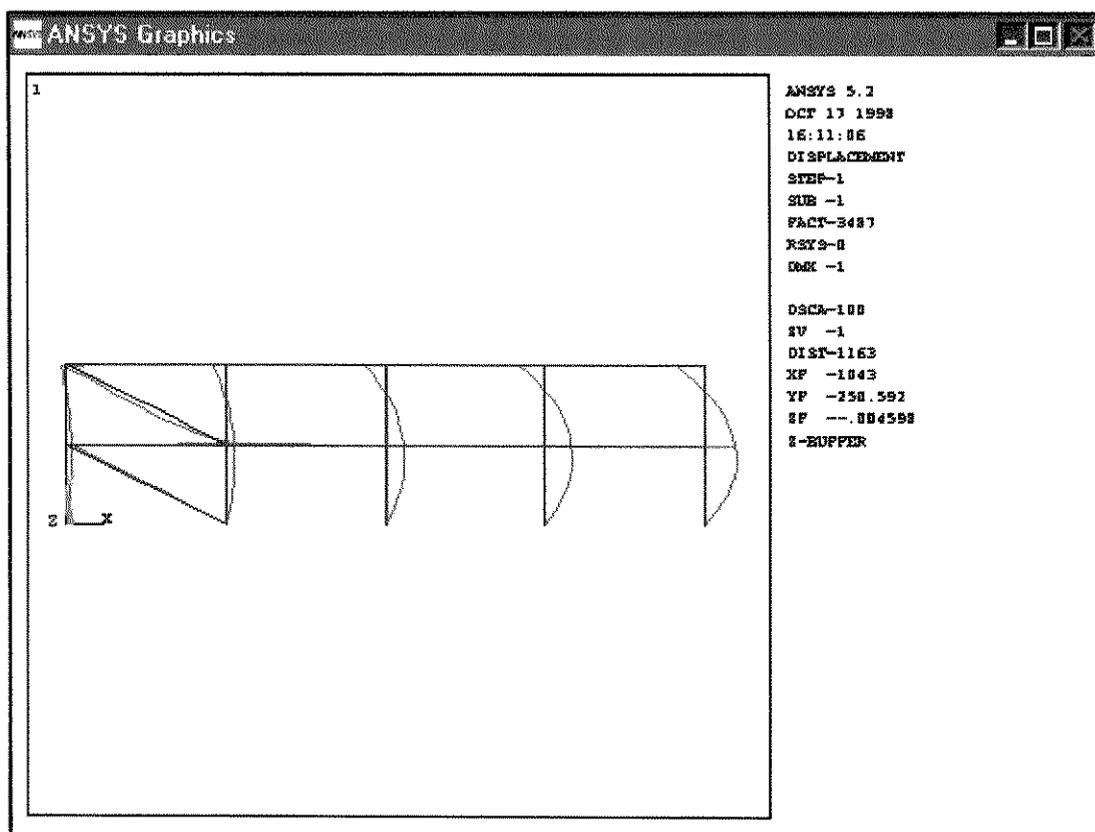


Figura V-12 Deformada do Exemplo Numérico 5.7

Aumentando-se a área dos contraventamentos, por exemplo para “ $A=1000.0 \text{ cm}^2$ ”, a deformada passa a ser a apresentada pela Fig.V13.

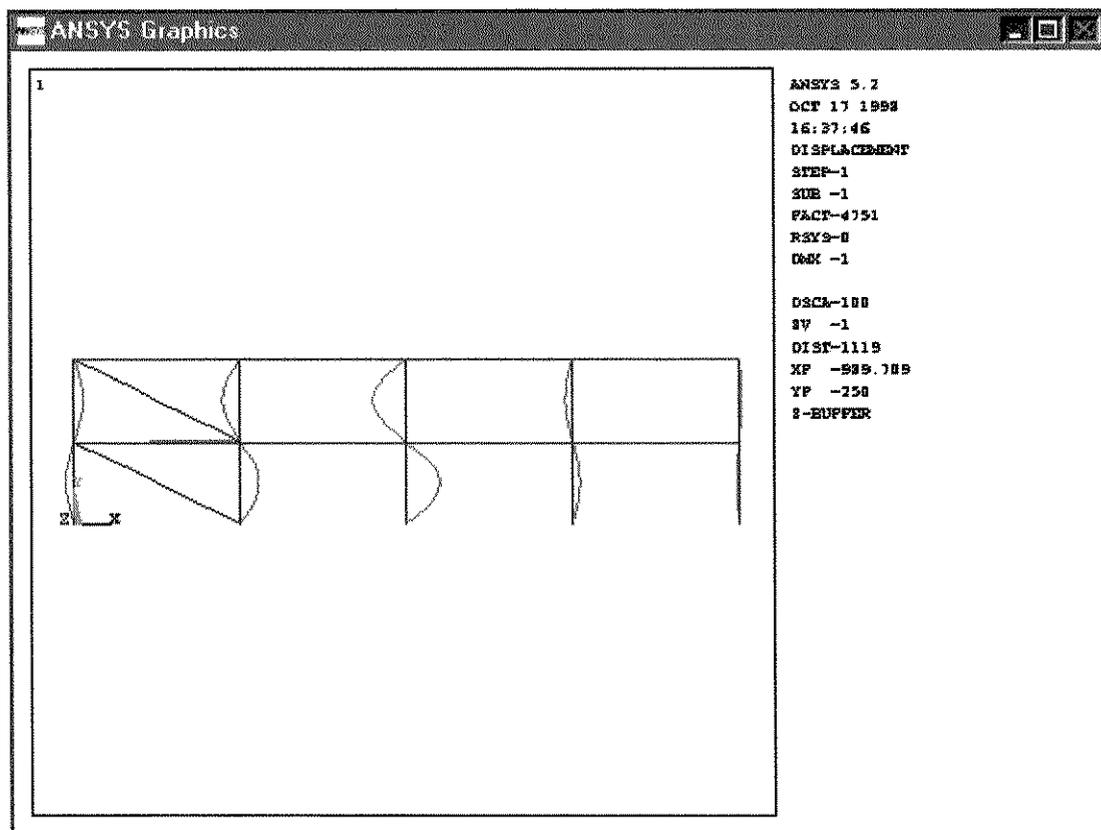


Figura V-13 Deformada do Exemplo Numérico 5.7

# **CAPÍTULO VI**

## **CONCLUSÕES**

### **6.1 - CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A) No dimensionamento de barras de treliças metálicas são utilizadas, normalmente, as expressões teóricas de Euler, no regime elástico, que admitem os coeficientes de flambagem teóricos recomendados pelas normas, conseqüentemente os valores dos esforços máximos, " $P_{CRIT}$ ", admitidos sem os efeitos dos coeficientes de segurança, fornecem informações individualizadas das barras como se fossem isoladas. Constata-se, através de um processo que utiliza o efeito da instabilidade global da estrutura, que os coeficientes de flambagem são característicos das relações de rigidezes entre as barras e da geometria global da estrutura. Conseqüentemente, os valores reais encontrados modificam os resultados dos valores dos " $P_{CRIT}$ " estimados. Exemplificando estas

considerações, observa-se no exemplo numérico 5.5, ver Tabela V-10, que os valores teóricos de Euler não correspondem aos valores encontrados. Demonstrando que o efeito globalizado é muito diferente do individualizado.

- B) Os contraventamentos utilizados nas treliças metálicas de cobertura, normalmente constituídos por perfis esbeltos, representados através do exemplo numérico 5.6, apresentam a rigidez suficiente para garantir a estabilidade global, fora do plano da treliça. Isto, dentro dos padrões de estruturas treliçadas consideradas leves e com carregamentos moderados.
- C) Nos casos de pilares metálicos, normalmente constituídos por seções transversais mais pesadas e muito rígidas, exigem contraventamentos também rígidos. Através do exemplo numérico 5.7, verifica-se que por mais que se enrijeça as seções transversais dos contraventamentos não se consegue chegar aos valores teóricos consagrados, " $P_{Euler}$ ". Portanto, deve-se adotar perfis comerciais nestes contraventamentos e verificar a instabilidade global para se definir os coeficientes de flambagem que realmente demonstrem o comportamento dos pilares da estrutura.
- D) A utilização do programa ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> é bastante trabalhosa e não conduz a resultados precisos, quando utilizado com pouca discretização. O fato do ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> utilizar o método dos elementos finitos faz com que as barras necessitem de subdivisões para se obter um resultado mais preciso, o que torna o programa algumas vezes inviável, dependendo do exemplo. Para utilização do programa desenvolvido não é necessário fazer subdivisões por utilizar-se das funções de rigidez. No exemplo numérico 5.6, para o programa desenvolvido, utilizou-se 32 nós e 67 barras, já para o ANSYS V-5.2<sup>[22]</sup> foram utilizados 233 nós e 268 barras, subdividindo cada barra em apenas quatro elementos. Portanto, a utilização do programa desenvolvido é bastante viável no uso cotidiano

de qualquer engenheiro, visto que sua utilização é menos onerosa e apresenta resultados precisos. A análise de estruturas tridimensionais, conhecidas como espaciais, que utilizam ligações rígidas e barras tubulares, necessitam de um programa eficiente para a verificação da instabilidade global da estrutura, o que foi visto no exemplo numérico 4.6, com resultados mostrados na Tabela IV-6. Este programa demonstrou bons resultados com pouco tempo de processamento, porque utiliza a mesma quantidade de barras adotadas na estrutura, sem necessidade de subdivisões.

- E) Todas as análises realizadas neste trabalho utilizaram a hipótese de regime elástico das barras. Propõe-se para futuros trabalhos, a complementação deste para análises no regime inelástico das barras.
- F) Propõe-se, também, o estudo das ligações semi-rígidas. No caso do exemplo numérico 5.6, foi necessária a redução das inércias das barras das terças e dos contraventamentos para evitar que houvessem transmissões de momentos fletores nas conexões, o que não seria necessário com o efeito das ligações semi-rígidas.
- G) Apesar dos exemplos apresentados não serem totalmente conclusivos, demonstrou-se a potencialidade do programa tridimensional desenvolvido e a necessidade da análise de instabilidade global para cada estrutura, após seu dimensionamento convencional, pois só após esta análise pode-se garantir, para cada caso analisado, a real segurança da estrutura.

## Referências Bibliográficas

- 1) JOHNSTON, B.G. Column buckling: historic highlights. **Journal of Structural Engineering**, New York, v. 109, n. 9, p. 2086-2096, Sept. 1983.
- 2) TIMOSHENKO, S. **History of strenght of materials**. New York: McGraw-Hill, 1953. 452p.
- 3) THÜRLIMANN, B. Column buckling - historical and actual notes. **Journal of Constructional Steel Research**, Oxford, n. 17, p. 95-111, 1990.
- 4) AL-MASHARY, F., CHEN, W.F. Elastic second-order analysis for frame design. **Journal of Constructional Steel Research**, Oxford, n. 15, p. 303-322, 1993.
- 5) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, Rio de Janeiro. **NBR-8800: projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (método dos estados limites)**. Rio de Janeiro, 1986. 129 p.
- 6) SALMON, C. G., JOHNSON, J. E. **Steel structures: design and behavior**. New York: Harper & Row, 1980. ed. 2, 1007 p.
- 7) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, **Load and resistence factor design: specification for structural steel buildings, AISC-LRFD**. 1ª. ed. Chicago, Illinois, 1986.

- 8) MARTIN, H.C. On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. In: CONFERENCE MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS. **Proceedings...** Wright-Paterson: AFB, Oct. 1965.
- 9) ARGYRIS, J.H. **Recent advances in matrix methods of structural analysis.** Oxford: Pergamon Press, 1964.
- 10) PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of matrix structural analysis.** New York: McGraw-Hill, 1968. 463 p.
- 11) GERE, J.M., WEAVER, W.Jr. **Análise de estruturas reticuladas.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.
- 12) YAGUI, T. **Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço: carregamento crítico de instabilidade geral.** Limeira: FEL, UNICAMP, 1978. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Engenharia de Limeira, 1978. 160 p.
- 13) SERRA, J.L.F.A. **Contribuição ao estudo de núcleos resistentes de concreto armado.** São Carlos: EESC-USP, 1994. Tese (Doutorado) Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1994. 128 p.
- 14) REQUENA, J.A.V. **Carregamento crítico de instabilidade geral de pilares de seção composta variável, de edifícios industriais metálicos.** São Carlos: EESC-USP, 1995. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1995. 157 p.

- 15) GALAMBOS, T.V. **Guide to stability design criteria for metal structures**. New York: John Wiley, 1988. 786 p.
- 16) GALAMBOS, T., XYKIS, C. The effect of lateral bracing on the of steel trusses. **Journal of Constructional Steel Research**, Oxford, n. 20, p. 251-258, 1991.
- 17) VLASSOV, B.Z. **Pièces longues en voiles minces**. 10<sup>a</sup>. ed. Paris: Eyrolles, 1962. 655 p.
- 18) MORI, D.D. **Flexo-Torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas**. São Carlos, EESC-USP, 1988. Publicação 024/93. 133 p.
- 19) RACHID, M., MORI, D.D. **Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão**. São Carlos, EESC-USP, 1989. Publicação 044/93. 130 p.
- 20) RACHID, M., MORI, D.D. **Instabilidade: flambagem de barras de seção delgada por torção e flexão**. São Carlos, EESC-USP, 1993. Publicação 056/93. 166 p.
- 21) HALLDORSSON, O.P., WANG, C.K. Stability analysis of frameworks by matrix methods. **Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Engineers**, Madison, v. 94, n. ST7, p. 1745-1760, Jul 1968.
- 22) **ANSYSuser 's MANUAL Volume I - Procedure, Volume II - Commands, Volume III - Elements e Volume IV - Theory**. Ansys Revision 5.2 SAS IP, August, 1995.

- 23) BENJAMIN, A.C., EBECKEN, N.F.F. Formulação de um elemento finito de pórtico elasto-plástico não-linear com matriz de rigidez determinada explicitamente. **Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Estrutural**, v. 4, n. 2, p. 45-72, 1986.
- 24) BALLIO, G., MAZZOLANI, F. M. **Theory and design of steel structures**. London: Chapman and Hall, 1983. 632p.
- 25) CALLEJAS, I.J.A., REQUENA, J.A.V., VIEIRA, R.F. Elastic second-order instability analysis for plane rigid frames: comparative analysis of the finite element method and stability function method. In: **FOURTH WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, XVIII CILANCE - CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA**, 1998, Buenos Aires. **Proceedings... New Trends and Applications** S. Idelsohn, E.Oñate and E.Dvorkin (Eds.): CIMNE, Barcelona, Spain 1998.

## **ANEXO A**

# MANUAL DE INSTRUÇÃO DO PROGRAMA

Dissertação de Mestrado:

**“ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS CONTRAVENTAMENTOS NA INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS METÁLICAS APORTICADAS”**

Eng<sup>a</sup>: **ROSILENE DE FÁTIMA VIEIRA**

Orientador: **Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA**

Nome do programa: **vi\_elas.pas**

Este programa processa estruturas no máximo com seis nós devido a capacidade limitada de memória do turbo pascal.

Exemplo para teste: vi3.dat (arquivo de entrada)

vi3.out (arquivo de saída)

Nome do programa: **vin.pas**

Este programa pode ser rodado apenas na estação de trabalho portanto processa estruturas com um número de nós limitado pela capacidade de memória da estação.

Exemplo para teste: exx6.dat (arquivo de entrada)

exx6.out (arquivo de saída)

## Tela de Entrada do Programa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP  
POS GRADUACAO EM ESTRUTURA - ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICO ESPACIAL

ALUNA: ROSILENE DE FATIMA VIEIRA RA - 960884

POR FAVOR DESLIGUE A TECLA CAPSLOCK DO TECLADO

QUAL É O NOME DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS.DAT: <nome>

QUAL É O NOME DO ARQUIVO DE SAIDA.OUT: <nome>

VOCE DESEJA OS CALCULOS EM TEORIA DE:

PARA O CASO DE PRIMEIRA ORDEM DIGITE => 1

PARA O CASO DE SEGUNDA ORDEM DIGITE => 2

PARA O CASO DE INSTABILIDADE DIGITE => 3

Para o caso "2" ou "3"

COM CORTANTE <cc> OU SEM CORTANTE <sc> :

QUAL A TOLERANCIA DESEJADA :

## Arquivo de Entrada

Primeiro Passo: Dados da Estrutura

**Linha=>** número de barras (M) - número de nós (NJ) - número restrições (NR) - número de nós com restrições (NRJ) - número de materiais (NMAT) - número de nós com restrições elásticas (NVEJ).

Segundo Passo: Coordenadas dos Nós

REPETIR ATÉ NJ:

**Linha=>** número do nó - coord. X - coord. Y - coord. Z

Terceiro Passo: Propriedades e Orientações das barras

REPETIR ATÉ M:

**Linha=>** número da barra - nó inicial - nó final - tipo de material - aux AA

Obs: AA=0 indica seção transversal normal

AA=1 indica seção transversal inclinada (Ver GERE e WEAVER<sup>[11]</sup> pag.272)

Neste caso: Coordenadas do Ponto P

**Linha=>** número da barra - coord. X - coord. Y - coord. Z

Quarto Passo: Restrições de Nós

REPETIR ATÉ NRJ:

**Linha=>** número do nó - trans. X - trans. Y - trans. Z - rot. X - rot. Y - rot. Z

Quinto Passo: Vínculos Elásticos de Nós

Caso haja restrições elásticas nos nós (NVEJ<>0)

REPETIR ATÉ NVEJ:

**Linha=>** número do nó - trans. X - trans. Y - trans. Z - rot. X - rot. Y - rot. Z

Sexto Passo: Tipos de Materiais

REPETIR ATÉ NMAT:

**Linha=>** número do material

**Linha=>** área (Ax) - momento de inércia em relação ao eixo X (Jt) - momento de inércia em relação ao eixo Y (Iy) - momento de inércia em relação ao eixo Z (Iz) - Poisson - coeficiente de forma (c) - módulo de elasticidade longitudinal (E)

Sétimo Passo: Dados de Carregamento

**Linha=>** número de nós carregados (NLJ) - número de barras carregadas (NLM)

Oitavo Passo: Ações aplicadas nos nós

Caso haja nós carregados (NLJ<>0):

REPETIR ATÉ NLJ:

**Linha=>** número do nó - força X - força Y - força Z - momento X - momento Y - momento Z

Nono Passo: Ações aplicadas nas barras

Caso haja barras carregadas (NLM<>0):

Obs: carregamento =1: indica carregamento concentrado

carregamento =2: indica carregamento distribuído

REPETIR ATÉ NLM:

*Linha*=> número da barra carregada (barra) - número de cargas (ncargas)

*Linha*=> carregamento - carga em Y CAY- carga em Z CAZ

Caso carregamento seja concentrado:

*Linha*=> distância da aplicação do carregamento a partir do nó inicial (a)  
( $0 < a < L$ )

## ARQUIVO DE SAÍDA

PROGRAMA DE ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICO ESPACIAL

=====

DADOS DA ESTRUTURA

CALCULO DA INSTABILIDADE DA ESTRUTURA

COM CORTANTE <CC> OU SEM CORTANTE <SC> :

TOLERANCIA :

BARRA - G.LIB - NOS - N.RES - NO.RES - N.MATE - N.VIN  
M N NJ NR NRJ NMAT NVEJ

COORDENADAS DOS NOS

J X Y Z

PROPRIEDADES E ORIENTACOES DOS MEMBROS

MEMBRO JJ JK TIPO AA L CX CY CZ

RESTRICOES DE NO

NO TRANS.X TRANS.Y TRANS.Z ROT.X ROT.Y ROT.Z

VÍNCULOS ELÁSTICOS DE NÓS

NO TRANS.X TRANS.Y TRANS.Z ROT.X ROT.Y ROT.Z

TIPO DE MATERIAIS - DEFINICOES

TIPO Ax Jt ly lz POISSON c E G

DADOS DE CARGA

NOS CARREG. BARRAS CARREG.

AÇÕES APLICADAS NOS NÓS  
NO FORÇA X FORÇA Y FORÇA Z MOMENTO X MOMENTO Y MOMENTO Z

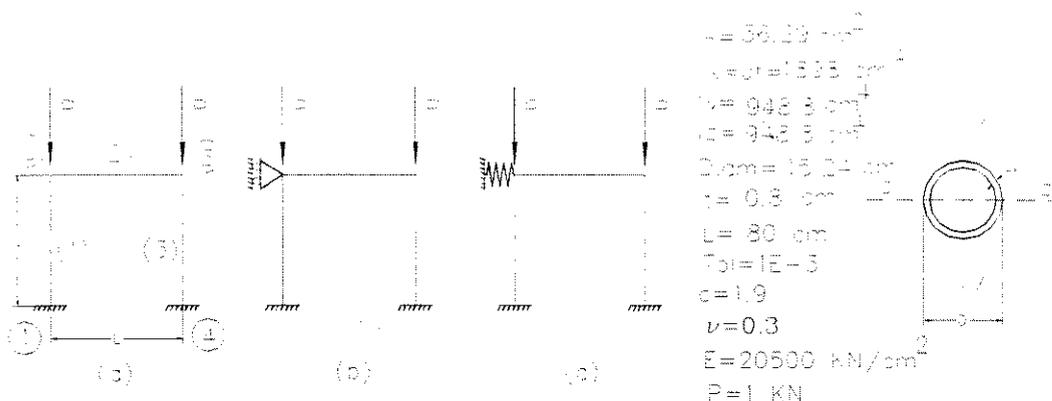
FIM DA PRIMEIRA ORDEM.  
INICIO DA SEGUNDA ORDEM.

NUMERO DE CICLOS EXTERNO:

O Wcrit:

BARRA L PCRIT PeulerZ PeulerY Ptor KZ KY KZ\*L KY\*L

FIM DA SEGUNDA ORDEM.

**DADOS DO EXEMPLO: vi3.dat****ARQUIVO DE ENTRADA: vi3.dat****CASO (c)  $K_{\text{MOLA}}=0.00001$** 

```

3 4 18 4 1 1
1 0. 0.0 0.
2 0. 80.0 0.
3 80. 80.0 0.
4 80. 0.0 0.
1 1 2 1 0
2 2 3 1 0
3 3 4 1 0
1 1 1 1 1 1 1
2 0 0 1 1 1 0
3 0 0 1 1 1 0
4 1 1 1 1 1 1
2 0.00001 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1
36.29 1898.0 948.8 948.8 0.3 1.9 20500.
2 0
2 0. -1. 0. 0. 0. 0.
3 0. -1. 0. 0. 0. 0.

```

**ARQUIVO DE SAÍDA: vi3.out****PROGRAMA DE ANÁLISE DA INSTABILIDADE DE PORTICO ESPACIAL**

DADOS DA ESTRUTURA

CALCULO DA INSTABILIDADE DA ESTRUTURA

COM CORTANTE &lt;cc&gt; OU SEM CORTANTE &lt;sc&gt; : sc

TOLERANCIA : 1.000000000000000E-0003

```

BARRA G.LIB NOS N.RES NO.RES N.MATENO.VIN
M N NJ NR NRJ NMAT NVEJ
3 6 4 18 4 1 1

```

## COORDENADAS DOS NOS

J	X	Y	Z
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	80.00	0.00
3	80.00	80.00	0.00
4	80.00	0.00	0.00

## PROPRIEDADES E ORIENTACOES DOS MEMBROS

MEMBRO	JJ	JK	TIPO	AA	L	CX	CY	CZ
1	1	2	1	0	80.00	0.000	1.000	0.000
2	2	3	1	0	80.00	1.000	0.000	0.000
3	3	4	1	0	80.00	0.000	-1.000	0.000

## RESTRICOES DE NO

NO	TRANS.X	TRANS.Y	TRANS.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	1	0
4	1	1	1	1	1	1

## VINCULOS ELASTICOS DE NO

NO	TRANS.X	TRANS.Y	TRANS.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

## TIPO DE MATERIAIS - DEFINICOES

TIPO	Ax	Jt	Iy	Iz	POISSON	c	E	G
1	36.29	1898.00	948.80	948.80	0.30	1.90	20500.00	7884.62

## DADOS DE CARGA

NOS	CARREG.	BARRAS	CARREG.
2			0

## ACOES APLICADAS NOS NOS

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z
2	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

FIM DA PRIMEIRA ORDEM.

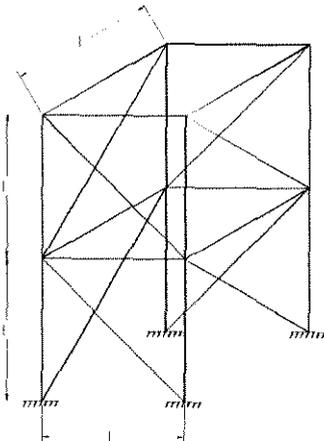
INICIO DA SEGUNDA ORDEM.

NUMERO DE CICLOS: 27

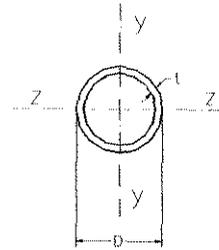
O Wcrit: 2.19078763588861E+0004

BARRA	L	PCRIT	PeulerZ	PeulerY	Ptor	KZ	KY	KZ*L	KY*L
1	80.00	21907.88	29994.96	29994.96	286193.01	1.1701	1.1701	93.6082	93.61
3	80.00	21907.88	29994.96	29994.96	286193.01	1.1701	1.1701	93.6082	93.61

FIM DA SEGUNDA ORDEM.

**DADOS DO EXEMPLO: exx6.dat**

$A = 1.19 \text{ cm}^2$   
 $I_x = I_y = 0.853 \text{ cm}^4$   
 $I_y = 0.426 \text{ cm}^4$   
 $I_y = 0.426 \text{ cm}^4$   
 Diam. = 1.91 cm  
 $t = 0.225 \text{ cm}$   
 $L = 240 \text{ cm}$   
 $I_{ol} = I_f = 3$   
 $c = 1.9$   
 $\nu = 0.3$   
 $E = 20500 \text{ KN/cm}^2$

**ARQUIVO DE ENTRADA: exx6.dat**

```

24 12 24 4 1 0
1 0.00 0.00 240.00
2 0.00 0.00 0.00
3 240.00 0.00 0.00
4 240.00 0.00 240.00
5 0.00 240.00 240.00
6 0.00 240.00 0.00
7 240.00 240.00 0.00
8 240.00 240.00 240.00
9 0.00 480.00 240.00
10 0.00 480.00 0.00
11 240.00 480.00 0.00
12 240.00 480.00 240.00
1 1 5 1 0
2 2 6 1 0
3 3 7 1 0
4 4 8 1 0
5 5 9 1 0
6 6 10 1 0
7 7 11 1 0
8 8 12 1 0
9 1 6 1 0
10 2 7 1 0
11 3 8 1 0
12 4 5 1 0
13 5 10 1 0
14 6 11 1 0
15 7 12 1 0
16 8 9 1 0
17 5 6 1 0
18 6 7 1 0
19 7 8 1 0
20 5 8 1 0
21 9 10 1 0
22 10 11 1 0
23 12 11 1 0

```

24 9 12 1 0  
 1 1 1 1 1 1 1  
 2 1 1 1 1 1 1  
 3 1 1 1 1 1 1  
 4 1 1 1 1 1 1  
 1  
 1.19 0.853 0.426 0.426 0.3 1.2 20500.0  
 2 0  
 10 0. -1. 0. 0. 0. 0.  
 12 0. -1. 0. 0. 0. 0.

## ARQUIVO DE SAÍDA: exx6.out

PROGRAMA DE ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICO ESPACIAL

---

DADOS DA ESTRUTURA

CALCULO DA INSTABILIDADE DA ESTRUTURA

COM CORTANTE <CC> OU SEM CORTANTE <SC> : sc

TOLERANCIA : 1.000000000000E-003

BARRA G.LIB NOS N.RES NO.RES N.MATEN.VIN

M N NJ NR NRJ NMAT NVEJ

24 48 12 24 4 1 0

COORDENADAS DOS NOS

J X Y Z

1 0.00 0.00 240.00  
 2 0.00 0.00 0.00  
 3 240.00 0.00 0.00  
 4 240.00 0.00 240.00  
 5 0.00 240.00 240.00  
 6 0.00 240.00 0.00  
 7 240.00 240.00 0.00  
 8 240.00 240.00 240.00  
 9 0.00 480.00 240.00  
 10 0.00 480.00 0.00  
 11 240.00 480.00 0.00  
 12 240.00 480.00 240.00

PROPRIEDADES E ORIENTACOES DOS MEMBROS

MEMBRO JJ JK TIPO AA L CX CY CZ

1 1 5 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 2 2 6 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 3 3 7 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 4 4 8 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 5 5 9 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 6 6 10 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 7 7 11 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 8 8 12 1 0 240.00 0.000 1.000 0.000  
 9 1 6 1 0 339.41 0.000 0.707 -0.707  
 10 2 7 1 0 339.41 0.707 0.707 0.000  
 11 3 8 1 0 339.41 0.000 0.707 0.707  
 12 4 5 1 0 339.41 -0.707 0.707 0.000

13	5	10	1	0	339.41	0.000	0.707	-0.707
14	6	11	1	0	339.41	0.707	0.707	0.000
15	7	12	1	0	339.41	0.000	0.707	0.707
16	8	9	1	0	339.41	-0.707	0.707	0.000
17	5	6	1	0	240.00	0.000	0.000	-1.000
18	6	7	1	0	240.00	1.000	0.000	0.000
19	7	8	1	0	240.00	0.000	0.000	1.000
20	5	8	1	0	240.00	1.000	0.000	0.000
21	9	10	1	0	240.00	0.000	0.000	-1.000
22	10	11	1	0	240.00	1.000	0.000	0.000
23	12	11	1	0	240.00	0.000	0.000	-1.000
24	9	12	1	0	240.00	1.000	0.000	0.000

## RESTRICOES DE NO

NO TRANS.X TRANS.Y TRANS.Z ROT.X ROT.Y ROT.Z							
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1

## TIPO DE MATERIAIS - DEFINICOES

TIPO	Ax	Jt	Iy	Iz	POISSON	c	E	G
1	1.19	0.85	0.43	0.43	0.30	1.20	20500.00	7884.62

## DADOS DE CARGA

NOS CARREG. BARRAS CARREG.	
2	0

## ACOES APLICADAS NOS NoS

NO FORCA X FORCA Y FORCA Z MOMENTO X MOMENTO Y MOMENTO Z						
10	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

FIM DA PRIMEIRA ORDEM.  
INICIO DA SEGUNDA ORDEM.

NUMERO DE CICLOS EXTERNO: 13

O Wcrit: 3.722588977352E+000

BARRA	L	PCRIT	PeulerZ	PeulerY	Ptor	KZ	KY	KZ*L	KY*L
1	240.00	0.01	1.50	1.50	9393.70	13.6312	13.6312	3271.4837	3271.48
2	240.00	3.71	1.50	1.50	9393.70	0.6348	0.6348	152.3403	152.34
3	240.00	0.01	1.50	1.50	9393.70	13.6312	13.6312	3271.4837	3271.48
4	240.00	3.71	1.50	1.50	9393.70	0.6348	0.6348	152.3403	152.34
6	240.00	3.72	1.50	1.50	9393.70	0.6343	0.6343	152.2210	152.22
8	240.00	3.72	1.50	1.50	9393.70	0.6343	0.6343	152.2210	152.22
9	339.41	0.00	0.75	0.75	9393.70	12.4894	12.4894	4239.0340	4239.03
11	339.41	0.00	0.75	0.75	9393.70	12.4894	12.4894	4239.0340	4239.03
17	240.00	-0.00	1.50	1.50	9393.70	22.6792	22.6792	5443.0005	5443.00
18	240.00	0.00	1.50	1.50	9393.70	24.2439	24.2439	5818.5317	5818.53
19	240.00	-0.00	1.50	1.50	9393.70	22.6792	22.6792	5443.0005	5443.00
20	240.00	0.00	1.50	1.50	9393.70	24.2439	24.2439	5818.5317	5818.53
21	240.00	-0.00	1.50	1.50	9393.70	33.0636	33.0636	7935.2728	7935.27
23	240.00	-0.00	1.50	1.50	9393.70	33.0636	33.0636	7935.2728	7935.27

FIM DA SEGUNDA ORDEM.