



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS
PLANAS CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE
GEOMÉTRICA E FÍSICA**

Eng^o: Ivan Julio Apolonio Callejas

Orientador: João Alberto Venegas Requena

Campinas, Dezembro de 1998



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

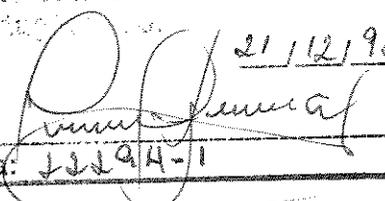
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS
PLANAS CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE
GEOMÉTRICA E FÍSICA**

Eng^o: Ivan Julio Apolonio Callejas

Orientador: João Alberto Venegas Requena

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil como parte dos requisitos exigidos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil - Área de Engenharia de Estruturas.

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação de 21/12/98
Prof. Dr. 
Matrícula: 11194-1

Campinas, Dezembro de 1998



9909321

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	Ex.
TIPO DE BC	37345
PREÇO	229/99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	23/04/99
N.º CPD	

CM-00122471-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C132a

Callejas, Ivan Julio Apolonio

Análise e dimensionamento de estruturas metálicas planas considerando a não linearidade geométrica e física. / Ivan Julio Apolonio Callejas.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: João Alberto Venegas Requena
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Estruturas metálicas. 2. Teorias não-lineares. I. Requena, João Alberto Venegas. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS
METÁLICAS PLANAS CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE
GEOMÉTRICA E FÍSICA**

Eng ° IVAN JULIO APOLONIO CALLEJAS

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA

Presidente e Orientador - FEC - UNICAMP

Prof. Dr. MAXIMILIANO MALITE

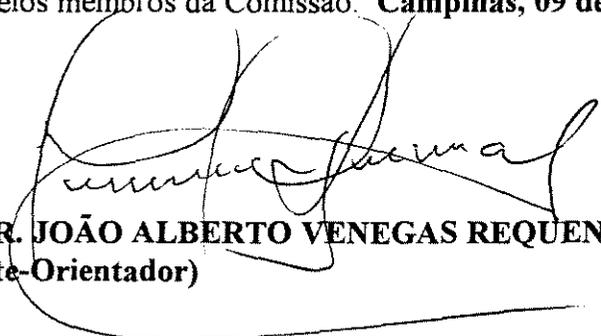
EESC-USP

Prof. Dr. JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA

FEC - UNICAMP

Campinas, 09 dezembro de 1998

Ata da Defesa da Dissertação a que foi submetida o candidato **IVAN JÚLIO APOLONIO CALLEJAS, RA 960900**, como parte dos Requisitos do Grau de Mestre em Engenharia Civil - Área de Concentração em Estruturas. Aos **nove dias do mês de dezembro de hum mil novecentos e noventa e oito**, às 14 horas, reuniu-se na Sala de Reuniões da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas a Comissão Julgadora designada pela Comissão Central dos Cursos de Pós-Graduação da UNICAMP e constituída pelos Professores Doutores: **JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA** (Presidente-Orientador, matrícula 22294-1), **MAXIMILIANO MALITE** (EESC-USP) e **JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA** (FEC/UNICAMP), para examinar o candidato em prova de Defesa de sua Dissertação intitulada, "**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS FORMADAS POR BARRAS PLANAS CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FÍSICA DO MATERIAL**". O Senhor Presidente solicitou ao candidato que apresentasse os pontos principais de seu trabalho. Concluída a exposição os examinadores argüiram alternadamente ao candidato sobre questões relativas à dissertação. Após a arguição que terminou às 17h15min, a Comissão reuniu-se e deliberou pela **Aprovação**, por unanimidade, do candidato que fará jus ao título de Mestre em Engenharia Civil na Área de Concentração em Estruturas. Para constar, lavrou-se a presente Ata que foi assinada pelos membros da Comissão. **Campinas, 09 de dezembro de 1998.**



PROF. DR. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA
(Presidente-Orientador)



PROF. DR. MAXIMILIANO MALITE



PROF. DR. JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA

TÍTULO DEFINITIVO:

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS PLANAS
CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FÍSICA**

Dedico a meus pais Júlio e Ivone.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena pela atenção, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Luiz Fernandes Arruda Serra e Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan pela contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal do Mato Grosso pela bolsa de estudos concedida para a realização deste Mestrado.

À Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida por intermédio da Universidade Federal do Mato Grosso.

Sumário

	Pág.
Lista de Tabelas	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Símbolos	vi
Resumo	xiii
Abstract	xiv
Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 <i>Considerações Gerais</i>	1
1.2 <i>Situação do Problema</i>	5
1.2.1 Flambagem Elástica de Barras por Flexão	5
1.2.2 Flambagem Inelástica de Barras por Flexão	7
1.2.3 Instabilidade Elástica de Estruturas Reticuladas Planas	11
1.2.4 Instabilidade Inelástica de Estruturas Reticuladas Planas	12
1.3 <i>O Presente Trabalho</i>	18
Capítulo 2 - Análise de Estruturas Reticuladas	20
2.1 <i>Introdução</i>	20
2.2 <i>Análise de Instabilidade de Estruturas Reticuladas</i>	21
2.3 <i>Modelos para a Análise de Estrutura Reticuladas</i>	27
2.4 <i>Fatores que Influenciam a Estabilidade das Estruturas Reticuladas</i>	29
2.4.1 <i>Efeitos Geométricos</i>	29
2.4.2 <i>Efeitos do Material</i>	31
2.4.3 <i>Efeitos do Carregamento</i>	31
Capítulo 3 – Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Planos	33
3.1 <i>Introdução</i>	33
3.2 <i>Hipóteses assumidas na análise não linear geométrica</i>	34
3.3 <i>Sistema de Referência Global de Eixos para a Estrutura do Pórtico Plano</i>	34
3.4 <i>Sistema de Referência Local de Eixos para o Elemento de Barra "i" no plano</i>	35

3.5	<i>O método dos elementos finitos</i>	36
3.6	<i>Desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos</i>	37
3.7	<i>Aplicação do Método dos Elementos Finitos - Determinação da Matriz de Rigidez do Pórtico Plano</i>	41
3.7.1	<i>O Método de Rayleigh-Ritz</i>	41
3.7.2	<i>Hipótese Cinemática Assumida</i>	42
3.7.3	<i>Função Aproximadora para os Deslocamentos Longitudinais</i>	44
3.7.4	<i>Função Aproximadora para os Deslocamentos Transversais</i>	45
3.7.5	<i>Primeira Parcela - Energia de Deformação por Esforço Axial (U_N)</i>	47
3.7.6	<i>Segunda Parcela - Energia de Deformação por Flexão (U_F)</i>	48
3.7.7	<i>Terceira Parcela - Componente Não Linear da Energia de Deformação (U_{NL})</i>	49
3.7.8	<i>Matriz de Rigidez para Elemento de Pórtico Plano</i>	50
3.8	<i>Formulação Matricial para Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Planos</i>	53
3.8.1	<i>Formulação da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra Considerando o Efeito da Força Axial</i>	54
3.9	<i>Matriz de Rigidez da Estrutura Formada por Elementos de Barra</i>	68
3.10	<i>Cálculo dos Esforços e Deslocamentos da Estrutura em Teoria de Primeira e Segunda Ordem</i>	70
3.11	<i>Processo Iterativo com Aproximações Sucessivas</i>	71
3.12	<i>Verificação da Estabilidade da Estrutura Submetida a um Determinado Carregamento</i>	72
3.13	<i>Carregamento Crítico de Instabilidade de Pórticos Planos</i>	75
3.14	<i>Análise Comparativa entre os Métodos Apresentados</i>	79
3.15	<i>Análise Numérica Comparativa</i>	81
3.15.1	<i>Exemplo Numérico 1</i>	81
3.15.2	<i>Exemplo Numérico 2</i>	83
3.15.3	<i>Exemplo Numérico 3</i>	84
3.15.4	<i>Exemplo Numérico 4</i>	85
3.15.5	<i>Exemplo Numérico 5</i>	86
3.16	<i>Considerações sobre as Análises</i>	88

Capítulo 4 – Estudo da Inelasticidade das Barras	89
4.1 <i>Introdução</i>	89
4.2 <i>Efeito de Não Linearidade Física do Material</i>	90
4.3 <i>Teoria do Modulo Tangente</i>	93
4.4 <i>Teoria do Duplo Módulo ou Módulo Reduzido</i>	97
4.5 <i>Teoria de Shanley</i>	102
4.5.1 <i>Desenvolvimento Matemático</i>	104
4.5.2 <i>Comparação com a Teoria do Módulo Reduzido</i>	107
4.5.3 <i>Variação das Deformações com a Força Axial</i>	108
4.5.4 <i>Considerações sobre a Teoria de Shanley</i>	111
4.6 <i>Influência das Tensões Residuais</i>	112
Capítulo 5 – Aplicação do Estudo da Inelasticidade das Barras	116
5.1 <i>Introdução</i>	116
5.2 <i>Formas de Determinação da Curva Tensão-Deformação</i>	117
5.2.1 <i>Método Experimental para Determinação da Curva Tensão-Deformação</i>	117
5.2.2 <i>Método Numérico para Determinação da Curva Tensão-Deformação</i>	119
5.3 <i>Aproximações Utilizadas para o Determinação do Módulo Tangente</i>	122
5.3.1 <i>Curva Proposta pelo "Column Research Council"</i>	123
5.3.2 <i>Curva Proposta pela "AISC Load and Resistance Factor Design- LRFD"</i>	125
5.3.3 <i>Curvas Proposta pela "NBR 8800 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios"</i>	128
5.4 <i>Hipóteses Utilizadas na Análise Elasto-Plástica</i>	135
5.5 <i>Procedimento Utilizado para a Análise Elasto-Plástica</i>	135
5.6 <i>Verificação da Plastificação da Seção Transversal da Barra</i>	138
5.7 <i>Análise de Pórticos Planos Levando em Consideração os Efeitos de Não Linearidade Física do Material</i>	140
5.7.1 <i>Exemplo Numérico 1</i>	142
5.7.2 <i>Exemplo Numérico 2</i>	143
5.7.3 <i>Exemplo Numérico 3</i>	145
5.7.4 <i>Exemplo Numérico 4</i>	148

5.7.5 Exemplo Numérico 5	150
5.7.6 Exemplo Numérico 6	152
5.7.7 Exemplo Numérico 7	153
5.7.8 Exemplo Numérico 8	154
5.7.9 Exemplo Numérico 9	156
5.7.10 Exemplo Numérico 10	157
Capítulo 6 - Dimensionamento Automatizado	159
6.1 <i>Introdução</i>	159
6.2 <i>Hipóteses assumidas no dimensionamento automatizado</i>	160
6.3 <i>Estados Limites</i>	161
6.4 <i>O Método Semi-Probabilístico</i>	162
6.5 <i>Análise Estrutural - Determinação dos Esforços de Cálculo</i>	164
6.6 <i>Dimensionamento das Barras</i>	165
6.6.1 <i>Barras Tracionadas</i>	165
6.6.2 <i>Barras Comprimidas</i>	170
6.7 <i>Banco de Dados dos Perfis</i>	174
6.8 <i>Dimensionamento automatizado dos Perfis Metálicos</i>	174
6.9 <i>Exemplos Numéricos</i>	178
6.9.1 <i>Exemplo Numérico 1 – Treliça Metálica</i>	178
6.9.2 <i>Exemplo Numérico 2 – Galpão com telhado em estrutura metálica treliçada em duas águas</i>	185
6.9.3 <i>Exemplo Numérico 3 – Galpão com telhado em estrutura metálica treliçada em arco</i>	189
Capítulo 7 - Considerações Finais	194
Referências Bibliográficas	196

Lista de Tabelas

	Pág.
Tabela 3.1 - Coeficientes de rigidez para análise não linear pelo método dos elementos finitos.	52
Tabela 3.2 - Funções de rigidez para elemento de barra plano.	67
Tabela 3.3 - Carga crítica de Euler , carga crítica dada pelo programa desenvolvido utilizando as funções de rigidez e programa ANSYS52.	82
Tabela 3.4 - Resultados obtidos na análise realizada por HALDORSSON e WANG, pelo programa do Autor e programa ANSYS52.	83
Tabela 3.5 - Resultados obtidos na análise realizada por HALDORSSON e WANG ⁵⁶ , pelo programa do Autor e programa ANSYS52.	85
Tabela 3.6 - Resultados obtidos pelo programa desenvolvido pelo Autor, REQUENA e programa ANSYS52.	86
Tabela 3.7 - Resultados comparativos entre o programa desenvolvido pelo Autor e programa ANSYS52.	87
Tabela 5.1 - Erros máximos encontrados entre a expressão analítica e "ECCS".	132
Tabela 5.2 - Funções de rigidez de barra com interação entre força axial, força cortante e flexão e módulo de elasticidade tangente.	141
Tabela 5.3 - Deslocamentos do nó 6 e esforços na barra 1-2 da treliça.	143
Tabela 5.4 - Resultados comparativos entre o programa desenvolvido, fórmulas das especificações, normas e o ANSYS5.2.	145
Tabela 5.5 - Resultados das análises obtidas por CHU e PABARCIUS ²² e programa desenvolvido.	149
Tabela 5.6 - Dados geométricos e de carregamento da estrutura analisada.	151
Tabela 5.7 - Resultados obtidos por MOSES ²³ e programa desenvolvido.	151
Tabela 5.8 - Resultados obtidos por LU ²⁴ e programa desenvolvido.	152
Tabela 5.9 - Resultados obtidos por ALVAREZ e BIRNSTIEL ²⁵ e programa desenvolvido pelo autor.	154
Tabela 5.10 - Resultados obtidos na análise realizado por VOGEL ²⁹ , CHEN ³⁵ e programa desenvolvido.	155

Tabela 5.11 - Perfis utilizados nos exemplos 5.7.8, 5.7.9 e 5.7.10.	156
Tabela 5.12 - Resultados obtidos na análise realizada por VOGEL e autor.	157
Tabela 6.1 - Diâmetro do parafuso em função da aba da cantoneira.	167
Tabela 6.2 - Diâmetro do parafuso em função da alma do perfil "C".	168
Tabela 6.3 - Relações entre " r_x " e " r_y " para os perfis cadastrados.	171
Tabela 6.4 - Combinação das ações aplicadas na estrutura treliçada.	178
Tabela 6.5 - Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada.	180
Tabela 6.6 - Ações e combinações das ações para a estrutura em duas águas.	186
Tabela 6.7 - Perfis obtidos no dimensionamento da treliça em duas águas.	188
Tabela 6.8 - Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada.	188
Tabela 6.9 - Ações e combinações das ações para a estrutura em arco.	190
Tabela 6.10 - Perfis obtidos no dimensionamento da estrutura em arco.	192
Tabela 6.11 - Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada.	193

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 2.1 - Curvas carregamento-deslocamento. Situações de instabilidade estrutural.	21
Figura 2.2 - Análise de instabilidade - estrutura reticulada plana.	23
Figura 2.3 - Estrutura reticulada com pilares desaprumados	24
Figura 2.4 - Estrutura reticulada com pilares desaprumados e flexão devido a carga uniformemente distribuída.	25
Figura 2.5 - Estrutura reticulada com pilares desaprumados e flexão devido a carga uniformemente distribuída e força horizontal.	26
Figura 2.6 - Tipos de análise em uma estrutura reticulada.	28
Figura 3.1 - Sistemas de referência global e local para barra plana.	35
Figura 3.2 - Elemento de barra plano no estado indeformado e deformado.	43
Figura 3.3 - Matriz de rigidez para barra prismática e seção transversal constante para análise de pórticos planos.	52
Figura 3.4 - Sistema de coordenadas locais para barra.	54
Figura 3.5 - Estados de deslocamentos: translação unitária horizontal nas direções (1) e (4); translação unitária vertical nas direções (2) e (5) e giro unitário nas direções (3) e (6).	55
Figura 3.6 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.	55
Figura 3.7 - Matriz de rigidez da barra prismática de seção transversal constante com funções de rigidez para análise de pórticos planos.	67
Figura 3.8 - Submatriz de transformação $[b]$, de ordem $6 \times n$ do elemento de barra.	70
Figura 3.9 - Efeitos de segunda ordem nos membros - efeito "P- Δ " e "P- δ ".	80
Figura 3.10 - Barra bi-articulada de Euler.	82
Figura 3.11 - Estrutura reticulada plana analisada por HALDORSSON e WANG.	83
Figura 3.12 - Estrutura reticulada plana analisada por HALDORSSON e WANG.	85
Figura 3.13 - Pilar com variação brusca de seção transversal.	86
Figura 3.14 - Estrutura do edifício industrial.	87

Figura 4.1	- Diagramas de tensão e deformação - representação do efeito de não linearidade física do material	92
Figura 4.2	- Representação esquemática da flambagem inelástica de barras.	94
Figura 4.3	- Teoria do módulo tangente.	95
Figura 4.4	- Teoria do módulo reduzido.	98
Figura 4.5	- Modelo de barra proposto na teoria de Shanley.	104
Figura 4.6	- Variação do carga axial com o deslocamento lateral da barra assumindo que E_t permanece constante.	107
Figura 4.7	- Variação da deformação com a carga axial para uma barra hipotética.	110
Figura 4.8	- Deformações nas faces opostas obtidas em um ensaio de uma barra Retangular (fonte SHANLEY ¹⁰).	110
Figura 4.9	- Distribuição padrão de tensões residuais em um perfil "I" laminado.	114
Figura 4.10	- Distribuição típica de tensões residuais em perfil soldados.	114
Figura 4.11	- Relação tensão - deformação para perfis metálicos.	115
Figura 5.1	- Relação tensão - deformação para perfis metálicos.	117
Figura 5.2	- Distribuição de tensões residuais em um perfil "I".	118
Figura 5.3	- Mudança nas distribuições de tensões na alma e mesa de um perfil "I" a medida que a força axial na barra é aumentada.	119
Figura 5.4	- Discretização de uma seção transversal.	119
Figura 5.5	- Redução do módulo de elasticidade em função da força axial.	125
Figura 5.6	- Relação força axial e deformação para as curvas propostas pelo "CRC - E_t " e "LRFD - E_t ".	127
Figura 5.7	- Curvas de Flambagem.	134
Figura 5.8	- Equação de interação.	139
Figura 5.9	- Vários tipos de análise em uma treliça plana.	142
Figura 5.10	- Análise de instabilidade elástica e inelástica de uma barra bi-articulada de comprimento variável.	143
Figura 5.11	- Tensão Crítica x Índice de Esbeltez.	144
Figura 5.12	- Barra bi-articulada com força axial aplicada excentricamente.	145
Figura 5.13	- Força axial aplicada na barra x deslocamento no meio da barra.	147
Figura 5.14	- Pórtico plano analisado por CHU e PABARCIUS.	148
Figura 5.15	- Gráfico Carregamento x Deslocamento Horizontal.	150
Figura 5.16	- Estrutura aporticada analisada por MOSES ²³ .	151

Figura 5.17 - Estrutura aporticada analisada por LU.	152
Figura 5.18 - Estrutura aporticada analisada por ALVAREZ e BIRNSTIEL.	153
Figura 5.19 - Pórtico retangular de bases engastadas analisado por VOGEL.	155
Figura 5.20 - Pórtico em alma cheia bi-articulado analisado por VOGEL.	157
Figura 5.21 - Pórtico analisado para a verificação da formação da primeira rótula plástica.	158
Figura 6.1 - Exemplos de estados limites últimos.	161
Figura 6.2 - Ligação parafusada padrão adotada para perfis dupla cantoneira.	166
Figura 6.3 - Ligação parafusada padrão adotada para perfis "C".	168
Figura 6.4 - Comprimentos de flambagem das estruturas reticuladas treliçadas.	171
Figura 6.5 - Parâmetros de flambagem para as estruturas treliçadas.	172
Figura 6.6 - Perfis utilizados no dimensionamento automatizado.	174
Figura 6.7 - Treliça metálica composta por perfis dupla cantoneira de abas iguais.	178
Figura 6.8 - Pórtico transversal constituído de pilares em concreto armado e trave treliçada de aço.	185
Figura 6.9 - Pórtico transversal constituído de pilares em concreto armado e arco treliçado de aço.	189

Lista de Símbolos

a) Letras romanas maiúsculas

A	- área da seção transversal da barra
A_{el}	- área da seção transversal que permanece elástica
A_{el}^i	- área da seção transversal que ainda permanece elástico no ciclo i
A_{el}^{i-1}	- área da seção transversal que ainda permanece elástico no final ciclo $i-1$
A_j^e	- área do j elementos em que a seção transversal foi dividida
B	- constante de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
C_c	- ponto de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
$C_1...C_4$	- coeficientes da solução da equação diferencial a ser resolvida
D	- tensor das das tensões
$\{D\}$	- vetor dos deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas de ordem $n \times 1$ para análise matricial
$\{D_L\}$	- vetor dos deslocamentos da barra para a análise pelo método das funções de rigidez
$\{D_L\}_i$	- vetor dos deslocamentos do elemento de barra " i " no sistema local de coordenadas de ordem 6×1 para análise matricial
$\{D_n\}$	- vetor deslocamento na n -ésima iteração
$\{D_{n-1}\}$	- vetor deslocamento na $(n-1)$ -ésima iteração
E	- módulo de elasticidade longitudinal
E_r	- módulo de elasticidade reduzido
E_t	- módulo de elasticidade tangente
E_1 e E_2	- módulo de elasticidade efetivo das células unitárias
$\{F\}$	- vetor de forças na análise pelo método das funções de rigidez
$\{F_e\}$	- vetor de engastamento perfeito da barra que é somado ao vetor das forças
G	- módulo de elasticidade transversal
I	- momento de inércia da seção transversal
IBC	- barra " i " obtida com força axial " P_i " mais próxima da carga de flambagem de Euler produzido pelo " ρ_{max} "
I_1	- momento de inércia da face aliviada

I_2	- momento de inércia da face estendida
I'	- coeficiente dado por " $I/(1+K)$ "
J	- momento estático da seção transversal
K	- coeficiente que leva em consideração o efeito da cortante
$[K_e]$	- matriz de rigidez que incorpora as propriedades geométricas da barra
$[K_g]$	- matriz de rigidez geométrica proporcional ao esforço axial "P" presente na barra
L	- comprimento da barra
M	- momento em uma posição qualquer da seção transversal
m	- parâmetro de imperfeição da barra
M_{ext}	- momento atuante externo
M_{int}	- momento resistente interno
M_{pl}	- momento de plastificação da seção transversal
P	- força axial atuando na barra
P_{cr}	- carga crítica de uma barra
P_{Euler}	- carga crítica de Euler
P_{Ei}	- força axial da barra "i" obtida da expressão de Euler para barra bi-articulada
P_i	- força axial da barra "i" para o carregamento aplicado na estrutura
P_r	- carga crítica dada pelo módulo reduzido ou duplo módulo
P_t	- carga crítica tangente
P_y	- força axial de plastificação da seção transversal
$P-\Delta$	- efeito de rotação da corda que reduz a rigidez a flexão da barra a medida que o elemento se desloca
$P-\delta$	- efeito de curvatura do membro que reduz a rigidez a flexão devido a curvatura que a barra apresenta quando esta se desloca
P_1 e P_2	- forças axiais nos elemento de célula
Q	- esforço cortante em uma posição qualquer da seção transversal
R	- relação entre P/P_t
S	- superfície de integração
$S1...S5$	- coeficientes de rigidez para a análise não linear de pórticos planos pelo método das funções de rigidez
$[S_{KB}]$	- matriz de rigidez do elemento "i" de ordem 6 x 6 na coordenadas locais para análise matricial
$[S_{KG}]$	- matriz de rigidez da estrutura de ordem n x n nas coordenadas globais para análise matricial

TOL	- tolerância adotada
U_F	- energia de deformação por flexão
U_i	- energia de deformação armazenada por um elemento finito
U_N	- energia de deformação por esforço axial
U_{NL}	- energia de deformação da parcela não linear
V	- volume de integração
{V}	- vetor dos deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas de ordem $n \times 1$ para análise pelo método dos elementos finitos
W	- módulo resistente elástico
W^*	- parâmetro multiplicador da ações da estrutura
W_A	- limite inferior do parâmetro multiplicador da ações na estrutura
W_B	- limite superior do parâmetro multiplicador da ações na estrutura
W_{cr}	- parâmetro de instabilidade da estrutura que multiplica as ações que estão sendo incrementadas na análise de instabilidade
W_{max}	- limite máximo do parâmetro multiplicador considerando que a barra seja bi-engastada com ligações indeslocáveis
Z	- módulo resistente plástico

b) Letras romanas minúsculas

a_j	- parâmetros dos deslocamentos nodais
a_1	- coeficiente dado por "1-cP/GA"
a_2	- coeficiente dado por "1+cP/GA"
b	- forças de volume
$[b]_i$	- submatriz de ordem $6 \times n$ correspondente ao elemento "i" da matriz de transformação [b] de ordem $6n \times n$ que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos
c	- coeficiente de forma da seção transversal
c^*	- distância da fibra mais afastada na seção transversal
d	- deslocamento lateral da barra de Shanley
dA_1	- diferencial de área na face aliviada
dA_2	- diferencial de área na face estendida
d_1	- distância da fibra mais aliviada da seção transversal
d_2	- distância da fibra mais estendida da seção transversal
$d\theta$	- variação da rotação na seção transversal

e_1	- alongamento na célula unitária de Shanley
e_2	- encurtamento na célula unitária de Shanley
h	- altura da seção transversal
i	- número de barras
k	- relação entre E/E_t
k_F	- matriz de rigidez do elemento finito de barra plana devido de deformação por flexão
k_N	- matriz de rigidez do elemento finito de barra plana devido a parcela da energia de deformação por esforço axial
$[k_B]$	- matriz de rigidez do elemento "i" de ordem 6 x 6 nas coordenadas locais para análise pelo método dos elementos finitos
$[k_G]$	- matriz de rigidez da estrutura de ordem n x n nas coordenadas globais para análise pelo método dos elementos finitos
n	- número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra no sistema global
nb	- número de elementos de barra
n_j	- número do nó inicial da barra
n_k	- número do nó final da barra
p	- forças de superfície
r	- raio de giração da seção transversal
$\{r\}$	- vetor de forças na análise pelo método dos elementos finitos
$\{r_e\}$	- vetor de engastamento perfeito que é somado ao vetor de forças
r^*	- fator que ajusta o incremento de deformação
u	- vetor das funções aproximadoras
u_x	- função dos deslocamentos longitudinais
$u_x(x)$	- função aproximadora para os deslocamentos longitudinais
u_y	- função dos deslocamentos transversais
$u_y(x)$	- função aproximadora para os deslocamentos transversais
$u_1...u_6$	- deslocamento na coordenada 1...6 da barra
v	- vetor das incógnitas nodais do elemento finito
$v(x)$	- função aproximadora
$v_i(x)$	- funções de forma
$\{v\}$	- vetor dos deslocamentos da estrutura para a análise pelo método dos elementos finitos
$\{v_L\}_i$	- vetor dos deslocamentos do elemento de barra "i" no sistema local de coordenadas de ordem 6 x 1 para análise pelo método dos elementos finitos

y	- deslocamento transversal do membro no plano da estrutura
y_1	- distância de uma fibra qualquer na face aliviada
y_2	- distância de uma fibra qualquer na face estendida
$y(x)$	- função que representa a solução exata para minimizar o funcional
y'	- derivada primeira do deslocamento transversal da barra
y''	- derivada segunda do deslocamento transversal da barra
w	- carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra

c) Letras gregas maiúsculas

ΔP^i	- incremento de força axial ocasionado pelo incremento de deformação $\Delta \varepsilon^i$
$\Delta \varepsilon^i$	- incremento de deformação no ciclo i
$\Delta \varepsilon_{\max}$	- variação máxima da deformação normal na seção transversal
$\Delta \varepsilon_1$	- variação da deformação normal em uma fibra qualquer aliviada
$\Delta \varepsilon_2$	- variação da deformação normal em uma fibra qualquer estendida
$\Delta \sigma^i$	- incremento de deformação ocasionado pelo incremento de deformação $\Delta \varepsilon^i$
$\Delta \sigma_{\max}$	- variação máxima da tensão normal na seção transversal
$\Delta \sigma_{\text{med}}^i$	- tensão média no final do ciclo i
$\Delta \sigma_1$	- variação da tensão normal em uma fibra qualquer aliviada
$\Delta \sigma_2$	- variação da tensão normal em uma fibra qualquer estendida
$\Delta \sigma_{1(\max)}$	- variação máxima da tensão normal na face aliviada
$\Delta \sigma_{2(\max)}$	- variação máxima da tensão normal na face estendida
Φ	- curvatura da seção transversal
Π	- somatório da energia potencial total de todos os elementos finitos
Π_i	- energia potencial total armazenada em um elemento finito
Ω_i	- trabalho realizado pelas forças volumétricas e por ações externas em um elemento finito

c) Letras gregas minúsculas

α	- constante de ajustamento das curvas européias e brasileiras
α_1	- coeficiente obtido pela raiz quadrada de $P / a_1 EI$

α_2	- coeficiente obtido pela raiz quadrada de P/a_2EI
β	- coeficiente utilizado para simplificar a fórmula da carga crítica a compressão na norma NBR 8800
δ	- distância entre a linha neutra e centro de gravidade da seção transversal
δ_0	- deslocamento no meio do barra ou imperfeição geométrica inicial da barra
ϵ	- vetor das deformações
ϵ_{xx}	- deformações normais em teoria dos pequenos deslocamentos
ϵ_c	- deformação normal de compressão
ϵ_t	- deformação normal de tração
ϵ^i	- deformação total da seção transversal da barra no ciclo i
ϵ^{i-1}	- deformação total da seção transversal da barra no ciclo $i-1$
ϕ	- matriz das funções de forma
ϕ_c	- coeficiente simplificador utilizado nas funções de rigidez com interação de força axial de compressão
ϕ_i	- giro da seção transversal no nó inicial da barra
ϕ_k	- giro da seção transversal no nó final da barra
ϕ_t	- coeficiente simplificador utilizado nas funções de rigidez com interação de força axial de tração
γ	- distorção da seção transversal provocada pelo esforço do cortante presente na barra
η	- parâmetro adimensional de imperfeição
λ_c	- parâmetro de esbeltez
ν	- coeficiente de Poisson
π	- constante $\pi=3.14159265359$
θ_3	- giro na extremidade da coordenada 3 da barra
θ_6	- giro na extremidade da coordenada 6 da barra
ρ	- relação entre P/P_y
ρ_{max}	- variável que armazena a barra que está com força axial mais próxima possível da flambagem de Euler
σ	- vetor das tensões
σ_c	- tensão normal de compressão
σ_{cr}	- tensão crítica da barra
σ^i	- tensão no elemento no ciclo i

σ_{med}^i	- tensão total média da seção transversal da barra no ciclo i
σ_{med}^{i-1}	- tensão total média da seção transversal da barra no ciclo i-1
σ_r	- tensão residual presente no elemento
σ_t	- tensão normal de tração
σ_y	- tensão de escoamento do material
τ	- relação entre E_t/E
ξ	- parâmetro adimensional representado por "x/L"

Resumo

Este trabalho apresenta uma formulação para a análise não linear de pórticos planos. Esta formulação é baseada no método das funções de estabilidade (rigidez). Estas funções são obtidas através da solução da equação diferencial que rege o problema de barras planas. Através destas funções, é possível determinar a matriz de rigidez da barra que leva em consideração os efeitos da não linearidade geométrica. O efeito da não linearidade física é introduzida na análise através do módulo tangente. Este módulo é obtido através de curvas que relacionam o estado de tensão na barra com a respectiva redução na capacidade portante (módulo tangente). Estas curvas são utilizadas para calcular o módulo tangente da barra de acordo com o estado de tensão que está atuando nela. Utilizando o método das funções de rigidez e as curvas citadas acima, um programa de computador foi desenvolvido para análise numérica não linear de pórticos planos.

O principal objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um programa de dimensionamento de perfis metálicos no qual os efeitos de não linearidade geométrica e física pudessem ser levados em consideração no dimensionamento. Para tanto, as fórmulas de verificação à tração e à compressão da norma brasileira "NBR 8800" foram programadas e acopladas ao programa de análise estrutural citado anteriormente. Para que o dimensionamento pudesse ser feito automaticamente, foram criados bancos de dados de perfis de dupla cantoneira de abas iguais e perfis em "C". Quatro tipos de dimensionamento foram desenvolvidos: dimensionamento admitindo comportamento elasto-linear da estrutura; dimensionamento considerando o efeito de não linearidade física do material; dimensionamento considerando o efeito de não linearidade geométrica; e dimensionamento considerando o efeito de não linearidade geométrica e física do material atuando em conjunto. O objetivo principal destas análises é verificar se estes efeitos são capazes de modificar os perfis obtidos no dimensionamento elasto-linear comumente realizado na prática pelos calculistas.

Abstract

This work presents a formulation to consider the nonlinear effects in the structural analysis of rigid plane frames. This formulation is based on the stability functions matrix method. The stability functions are obtained after solving the governing differential equations of the problem (assuming that strains are small and neglecting the axial deformation of the member). Utilizing these functions, it is possible to determine the matrix $[K_B]$ that takes into account the geometric nonlinear effects. The material nonlinear effect is introduced in the analysis utilizing the tangent modulus. Three types of curves are utilized to obtain the tangent modulus: the first is based on the Column Research Council (CRC) Curve; the second is based on the Load and Resistance Factor Design (LRFD) Curve and the last is based on the "NBR 8800 – Projeto e Execução de Estruturas de aço de Edifícios – Método dos Estados Limites" Curve (Brazilian Code of Steel Structures). In these curves, the tangent modulus depends on the stress acting in the cross sectional area of the member. Utilizing the concept of tangent modulus and the stability function method, a program was developed to perform numerical structural analysis of rigid plane frames.

The main objective of this work is to develop a program that allows to design steel trusses. The material nonlinear effect and the geometric nonlinear effects were taken into consideration in the design. The equations of "NBR 8800" (Brazilian Code) were programmed to determine the tensile strength and compressive strength (flexural buckling) of the bars of the structure. These equations were introduced into the structural analysis program developed. A table of double angles with equal legs angles (structural shapes) and Channels structural shapes were introduced into the program too. Therefore, the design of the steel trusses could be performed automatically by the program. Four types of designing were developed: in the first type, the structure was considered to remain completely elastic (the nonlinear geometric effects are not considered); in the second, the material nonlinear effect was taken into consideration; in the third, just the nonlinear geometric effects were taken into consideration; and in the last, both types of effects were taken into accounts. The aim of these analyses is to verify if the introduction of these effects can modify the structural shapes obtained in the elastic designing that is commonly performed in practice by the designers.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Desde o surgimento dos computadores pessoais, estes passaram a ter grande uso na engenharia. Através da sua velocidade de processamento, utilizando algoritmos programados, estes são capazes de agilizar as tarefas para o engenheiro. Devido a possibilidade de programação de algoritmos, surgiram então os primeiros programas de computadores capazes de realizar análise estrutural. Pode-se citar como um dos programas comerciais mais difundidos no Brasil, o programa Structural Analysis Program (SAP)¹. Este programa é baseado no método dos elementos finitos, tendo a capacidade de realizar análise elasto-linear de estruturas (reticulares, placas e cascas). Este tornou-se bastante difundido entre os projetistas de estruturas. A sua utilização reduz bastante o tempo de análise estrutural. Ele emite como resposta os deslocamentos dos nós considerados e esforços solicitantes nas barras da estrutura. Um dos problemas enfrentados nos últimos anos foi a pequena velocidade dos processadores e a pequena capacidade de memória que os computadores dispunham. Desta forma, as análises ficavam restritas a pequenas estruturas. É importante mencionar que o programa SAP apenas fornece os esforços solicitantes nos elementos da

estrutura, não fazendo o dimensionamento da mesma. A tarefa do dimensionamento ainda fica para o engenheiro.

Um dos primeiros programas a realizar a verificação do dimensionamento de estruturas metálicas foi o SAPSTL² (A steel stress check). Este programa foi baseado no Método das Tensões Admissíveis de acordo com a especificação americana AISC³ (American Institute of Steel Construction). Este programa é usado como um pós-processador em conjunto com o programa SAP90. Utilizando o arquivo de esforços emitido na análise estrutural realizada pelo SAP90, este programa faz a verificação dos perfis que foram utilizados na análise estrutural. Neste programa, foram introduzidas as expressões recomendadas pela especificação americana AISC para a verificação dos esforços de tração, compressão, flexão, cortante e flexão composta. É importante ressaltar que este programa somente realiza a verificação de um perfil que foi previamente fornecido pelo usuário. Este não possui a capacidade de realizar a automação dos perfis, ou seja, encontrar dentro de uma lista de perfis previamente fornecidos, aquele que consiga resistir aos esforços solicitantes.

A evolução dos computadores fez com que a velocidade dos processadores aumentasse e os problemas de memória fossem resolvidos. Isto propiciou o surgimento de programas mais completos capazes de fazer a análise estrutural de grandes estruturas e, em seguida, fazerem o dimensionamento automatizado da mesma.

Recentemente, foi lançado no mercado um programa de computador capaz de realizar a análise estrutural e o dimensionamento de estruturas metálicas. Este programa foi chamado de Cypecad Metálicas-3D⁴. Este programa é capaz de realizar a análise estrutural e em seguida fazer o dimensionamento da mesma. Caso os perfis previamente utilizados pelo usuário não sejam capazes de suportar os esforços atuantes, estes perfis serão automaticamente trocados por perfis de maior capacidade. Nova verificação será feita neste novo perfil. Este processo é repetido até que se encontre um perfil capaz de suportar os esforços que estão atuando numa determinada barra da estrutura. Após toda a estrutura ser dimensionada, nova análise estrutural é realizada, e posteriormente toda a estrutura é recalculada novamente. Neste programa, o usuário tem ainda possibilidade de dimensionar a estrutura utilizando diferentes tipos de

especificações e normas. Estas podem ser baseadas no Método dos Estados Limites ou no Método das Tensões Admissíveis. Como o dimensionamento é feito automaticamente, este programa dispõe de bancos de dados de perfis laminados, soldados e formados a frio.

Tanto o programa SAP quanto o Cypecad-3D são programas que baseiam a sua análise estrutural no comportamento elasto-linear da estrutura em teoria dos pequenos deslocamentos (Primeira Ordem). Nesta teoria, ao se aplicar um carregamento na estrutura, esta sempre encontrará uma configuração de equilíbrio. Pode-se ressaltar ainda que a resposta da estrutura (deslocamentos, esforços, deformações, etc.) é sempre proporcional ao carregamento. Desta forma, não existe um limite de aplicação de carregamento para a estrutura. Claro que este tipo de análise estrutural não representa o real comportamento de uma estrutura. Como se observa, a capacidade portante da estrutura vai diminuindo a medida que o carregamento nesta vai aumentando, até um ponto em que esta não consegue mais suportar o carregamento aplicado e entra em colapso.

A redução da capacidade portante da estrutura é ocasionada devido a dois efeitos que agem em conjunto na estrutura. Estes efeitos são chamados de Não Linearidade Geométrica e Não Linearidade Física do Material. O primeiro efeito produz a redução a capacidade portante da estrutura devido a mudança da configuração geométrica que esta sofre a medida que o carregamento vai sendo aplicado, ou seja, a medida que a geometria da estrutura se modifica em relação a original. O segundo efeito é produzido pela degradação da própria rigidez do material. A medida que o material é solicitado com estados de tensões que ultrapassam o limite de proporcionalidade do material, as fibras começam a se plastificar, fazendo com que o material perca capacidade portante. Os programas mencionados acima não levam em consideração estes efeitos. Assim, as análises estruturais feitas por eles não representam o real comportamento da estrutura.

O dimensionamento de uma estrutura reticular é feito isolando as barras e tratando-as como problemas separados, ou seja, as barras da estrutura podem ser consideradas como barras simplesmente apoiadas submetidas a momentos e forças cortantes nas extremidades e forças axiais ao longo do elemento. Estes momentos, forças cortantes e axiais são determinados através dos carregamentos que são impostos na estrutura. Tendo em vista o conceito de

barras isoladas, para se considerar o problema da instabilidade, duas aproximações devem ser feitas com o propósito do dimensionamento da estrutura. A primeira aproximação modifica o dimensionamento das barras individuais para levar em consideração as ações aplicadas pelo resto da estrutura nas suas extremidades. Isto é feito através da inclusão de termos nas fórmulas de dimensionamento para ajustar os efeitos da instabilidade da estrutura. A segunda aproximação se refere ao fato das normas recomendarem que a verificação da estabilidade das barras isoladas da estrutura podem ser feitas isoladamente da estabilidade global da estrutura. Desta forma, após a verificação da estabilidade das barras da estrutura, é necessário verificar a estabilidade global da mesma. Na realidade, é sabido que o máximo carregamento que uma estrutura pode suportar e os máximos esforços que uma barra isolada pode suportar são interdependentes.

O dimensionamento da estrutura realizado por estes programas é feito baseado apenas nos esforços solicitantes obtidos nas envoltórias das análises estruturais. Assim, os elementos das estruturas são verificados apenas isoladamente, conforme mencionado anteriormente. Entretanto, pode acontecer que uma estrutura dimensionada desta forma entre em colapso para um carregamento inferior àquele para o qual foi dimensionada. Por esta razão, as normas e especificações recomendam a verificação da instabilidade global da estrutura. A instabilidade global da estrutura acontece devido ao fato dos elementos estruturais apresentarem um comportamento quando estão desmembrados da estrutura e outro quando estão conectados a ela, formando um conjunto. O comportamento global da estrutura deve ser verificado através de uma análise de instabilidade da mesma. Entretanto, os programas citados anteriormente apenas fazem o dimensionamento da estrutura através das expressões de uma determinada especificação ou norma. Geralmente, a verificação da estabilidade global da estrutura é negligenciada por estes programas.

1.2 Situação do Problema

1.2.1 Flambagem Elástica de Barras por Flexão

A equação de Euler para flambagem de barras elásticas por flexão é uma das fórmulas da engenharia que hoje é ainda muito útil e utilizada. Esta equação e suas modificações realizadas por Engesser, Considère e Shanley, para o comportamento inelástico, fornece a base da história da análise de instabilidade das estruturas. É importante mencionar que o estudo da instabilidade vem se desenvolvendo por mais de 254 anos, desde seu início realizado por Euler.

Robert Hooke (1635-1703), em 1678, verificou que o deslocamento de um corpo elástico era proporcional ao carregamento que provocava este deslocamento. Este não podia saber que mais tarde, esta relação proveria a base para o desenvolvimento da teoria da flambagem elástica. Hooke afirmou que esta relação, chamada hoje de lei de Hooke, poderia ser aplicada a "...todos os corpos elásticos, seja metal, madeira, pedras, (...), vidro, e coisas parecidas." (TIMOSHENKO⁵). Suas deduções foram obtidas através de experimentos realizados.

Jacob Bernoulli (1667-1748) estudou a deflexão e a curvatura de uma viga retangular (TIMOSHENKO⁵). Em 1705, este afirmou, baseando-se na lei de Hooke, que a curvatura de qualquer ponto em uma viga fletida era proporcional ao momento resistente desenvolvido ao longo do comprimento desta.

Daniel Bernoulli (1700-1782) sugeriu para Leonard Euler (1707-1783) que este aplicasse o cálculo variacional para obter as equações das curvas elásticas (TIMOSHENKO⁵). Assim, Euler, baseado na sugestão de Daniel Bernoulli e na teoria de seu irmão Jacob Bernoulli de que a curvatura de uma barra elástica em um dado ponto é proporcional ao momento resistente atuando neste ponto, apresentou a fórmula para a flambagem de barras que leva hoje o seu nome. A carga de Euler é a carga crítica para a qual uma barra esbelta elástica pode suportar um carregamento axial em uma configuração ligeiramente fletida.

Euler baseou sua fórmula na hipótese de que o "momento de rigidez" em qualquer ponto da barra era igual a " E_k^2 / ρ ", sendo que " E_k^2 ", segundo ele, deveria ser determinado através de muitos experimentos e " ρ " definido como o raio de curvatura da barra fletida (TIMOSHENKO⁵). Euler teve idéias errôneas a

respeito da relação entre a forma geométrica da seção transversal e “ E_k^2 ”. Mais tarde, em tratado publicado em 1759, Euler disse “ Parece que o momento de rigidez seja proporcional ao quadrado da espessura, ou mesmo, ao cubo; desta forma, pode-se dizer que se a barra for cilíndrica, seu momento de resistência será proporcional a terceira potência, ou possivelmente a quarta potência do diâmetro da base.” (JOHNSTON⁶). Euler demonstrou, desta forma, que não conhecia o conceito de momento de inércia da seção transversal, das distribuições das tensões e da localização do eixo neutro de uma barra fletida. É importante ressaltar que Christian Huygens (1629-1695) foi o primeiro a estabelecer o conceito de momento de inércia (TIMOSHENKO⁵).

Assim, a força necessária para fletir uma barra, de acordo com Euler, é dada por :

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 E k^2}{L^2} \quad (1.1)$$

sendo para Euler “E” como uma propriedade elástica e “ k^2 ” como uma propriedade dimensional da barra. Segundo THÜRLIMANN⁷, esta não foi apenas a primeira solução teórica para um problema de instabilidade mas também a primeira solução de um problema de autovalores.

Apesar de referenciar a carga crítica de Euler como a de uma barra bi-articulada, na realidade, Euler em seu trabalho estudou uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra (TIMOSHENKO⁵). A transição de “ E_k^2 ” para “EI” requer a aplicação da lei de Hooke em conjunto com a corrente avaliação das distribuições das tensões internas de um membro fletido.

Huygens, Beeckman and Hooke verificaram que em uma viga (engastada em uma extremidade e livre na outra) fletida, as fibras superiores mais afastadas estavam estendidas enquanto que as fibras inferiores mais afastadas estavam encurtadas (TIMOSHENKO⁵). Mariote (1620-1684), em 1680, realizou experimentos em vigas. Resultados publicados posteriormente a sua morte, em 1686, confirmaram as observações mencionadas anteriormente pelos pesquisadores (TIMOSHENKO⁵).

Leibniz realizou em 1684 a primeira análise de tensões nas fibras interiores de uma viga carregada. Baseado na hipótese de que as tensões variam linearmente na seção transversal, ele conclui, para um caso especial, que o

momento de flexão é proporcional ao momento de inércia da seção transversal (TIMOSHENKO⁵).

Jacob Bernoulli descobriu através de experimentos que existia uma relação linear entre o alongamento e a tensão produzida pela força. Parent mostrou em 1713 a correta distribuição de tensões para uma viga retangular fletida. Em 1773, 39 anos depois de Euler ter divulgado sua fórmula para prever a capacidade de uma barra comprimida, Coulomb (1736-1806) aplicou corretamente a lei de Hooke e as equações de equilíbrio da estática, desenvolvendo a expressão que relaciona o momento devido a flexão com as tensões normais em uma viga retangular fletida (TIMOSHENKO⁵). O efeito das deformações por cisalhamento foram negligenciadas por este. Uma teoria mais geral da elasticidade somente foi desenvolvida mais tarde por Navier e St. Venant.

Embora a fórmula de Euler seja hoje em dia universalmente conhecida, servindo como base para o dimensionamento de barras esbeltas de aço, ela foi bastante criticada no início 1800 porque não conseguia prever com precisão a capacidade de resistência à compressão dos materiais utilizados naquela época (JOHNSTON⁶).

Em 1840, E. Hodgkinson realizou testes em membros esbeltos de ferro. Após a análise destes resultados, Todhunter e Pearson deram crédito ao trabalho de Euler. Em 1905, Johnson, Bryan e Turneaure publicaram o livro "Modern Framed Structures" onde recomendaram a fórmula de Euler precedida por uma constante de modificação que foi obtida através de experimentos. Estava estabelecida a teoria de Euler (JOHNSTON⁶).

1.2.2 Flambagem Inelástica de Barras por Flexão

Apesar de Euler ser considerado o pai da flambagem elástica, ele mesmo impôs um limite para a aplicação de sua fórmula, demonstrando desta forma, o entendimento do comportamento da flambagem inelástica. De acordo com a tradução do trabalho de Euler feita por VAN DEN BROEK⁸, Euler disse que " para começar, eu gostaria de indicar que este momento de rigidez não está apenas limitado a corpos elásticos...". Quando Euler utilizava a expressão momento de rigidez, ele estava se referindo ao termo que é hoje conhecido como rigidez "EI"

(no campo elástico). Sua declaração a respeito do comportamento inelástico demonstrou sua intuitiva compreensão do processo de flambagem.

Progresso, além das declarações feitas por Euler, somente foi possível após a descoberta das relações entre tensão-deformação, curvatura e momento de flexão no campo inelástico. Em 1889, Engesser sugeriu que a capacidade resistente de uma barra no campo inelástico poderia ser obtida pela simples substituição do módulo de elasticidade elástico "E" pelo módulo de elasticidade tangente "E_t" (CHEN e LUI⁹). Assim, para uma barra bi-articulada nas extremidades, a carga crítica para uma barra no campo inelástico pode ser obtida pela seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (1.2)$$

sendo "E_t" definido como o módulo tangente do material obtido do diagrama tensão-deformação para cada tensão particular no campo inelástico; "I" o momento de inércia da barra e "L" o comprimento da barra. A expressão acima é conhecida como "*fórmula do módulo tangente*".

Paralelamente ao trabalho de Engesser, Considère em 1889, com base no trabalho de Euler, realizou uma série de 32 ensaios em barras. Como resultado, sugeriu que se a flambagem ocorresse acima do limite de proporcionalidade do módulo elástico "E" da fórmula de Euler, este deveria ser substituído pelo módulo efetivo "E_{eff}". Ele declarou que o módulo efetivo estaria em algum lugar entre o módulo elástico e o módulo tangente (JOHNSTON⁶).

Jasinski (1895) trouxe o trabalho de Considère para Engesser. No mesmo ano, Engesser publicou a fórmula correta e geral do módulo reduzido, que também deveria estar contido entre "E_t" e "E". Entretanto, este declarou que o módulo reduzido não dependia somente de "E_t" e "E", mas também da forma geométrica da seção transversal. Em 1910, Theodor von Kármán obteve expressões para o módulo reduzido para barras de seção transversal retangular e perfis "H" (JOHNSTON⁶). A equação para carga crítica utilizando o conceito de módulo reduzido para uma barra bi-articulada é dada por :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (1.3)$$

sendo que $E_r = f(E_t, E)$ definido como *módulo reduzido*. Em (1.2) e (1.3), é assumido que a barra pode estar em equilíbrio tanto na posição em que ela se encontra (perfeitamente reta) ou em uma configuração ligeiramente fletida.

O *módulo reduzido* é também apropriadamente chamado de *duplo módulo*. Por mais de 35 anos houve controvérsias sobre a aplicação do módulo tangente ou duplo módulo na equação de Euler. É importante ressaltar que para vários ensaios feitos em laboratório de forma cautelosa, foram obtidos resultados em que as barras flambaram e falharam com cargas ligeiramente acima das cargas previstas pelo módulo tangente. Muitos pesquisadores, através de ensaios realizados, chegaram a afirmar que a fórmula de Engesser, que utilizava o conceito de módulo tangente, estava em concordância com os resultados obtidos.

Em 1946, SHANLEY¹⁰ conciliou a controvérsia entre as teorias do módulo tangente e duplo módulo. Ele mostrou que era possível para uma barra fletir simultaneamente com um aumento da carga axial, fazendo com que a barra pudesse flambar com um carregamento previsto através do módulo de elasticidade tangente. Desta forma, dada uma imperfeição infinitesimal para provocar flexão na barra, a carga proposta pela teoria do duplo módulo não poderia jamais ser encontrada. Um ano após a divulgação do seu conceito em 1946, Shanley validou sua teoria através da análise de um modelo de flambagem de duas barras rígidas conectadas no centro com dois pontos separados com concentração da inelasticidade. Em uma carta publicada juntamente com o artigo de Sharley de 1947, von Kármán redefiniu o conceito de carregamento crítico tangente tendo como suporte o conceito de SHANLEY¹⁰:

“O carregamento crítico tangente é o menor valor da carga axial para o qual a bifurcação do equilíbrio pode ocorrer apesar de esta transição para o posição fletida requerer ou não um aumento de carregamento axial”.

Desta forma, Engesser definiu o conceito de carregamento crítico tangente. Shanley, 57 anos mais tarde, acrescentou o conceito de carregamento crítico de bifurcação. Duberg e Wilder aplicaram o conceito de Shanley a uma seção “H” idealizada. Eles assumiram um material com uma curva tensão-deformação não linear desenvolvida por Ramberg e Osgood. Esta curva fornecia a relação tensão-deformação para o campo inelástico a qual era expressa através de uma simples expressão. Eles analisaram o comportamento inelástico ao longo de todo o

comprimento da barra. Eles confirmaram o conceito de Shanley e melhoraram a definição :

“Se o comportamento de uma barra perfeitamente reta for considerado como o comportamento limite de uma barra fletida quando sua imperfeição inicial desaparece, então o carregamento crítico tangente é o carregamento crítico da barra, ou seja, o carregamento para o qual a flexão se inicia” (JOHNSTON⁶).

Duberg e Wilder (JOHNSTON⁶) mostraram que se uma barra estiver suportada lateralmente para permanecer perfeitamente reta acima do carregamento do módulo tangente e abaixo do módulo reduzido, então se retirado o suporte lateral, a barra iniciará a fletir para um pequeno aumento de carregamento. Se a barra estiver suportada lateralmente acima do carregamento de módulo reduzido, e se retirado o suporte lateral, a barra não poderá suportar nenhum aumento de carregamento e o colapso será iminente. JOHNSTON¹¹ analisou um modelo de flambagem similar ao utilizado por Shanley. Entretanto, ele trocou os dois pontos localizados de área por um segmento retangular sólido de alumínio. Em vários estágios acima do carregamento de módulo tangente, a distribuição das tensões previstas intuitivamente por Shanley foram determinadas quantitativamente, e então, o máximo carregamento foi determinado. Malvick e Lee, mais tarde, divulgaram resultados de estudos de flambagem inelástica feitos em todo o comprimento de uma barra retangular bi-articulada. Em 1967, Batterman desenvolveu um programa de computador para determinar o máximo carregamento para barras de alumínio de seção transversal “H” com abas de áreas finitas, fletidas em torno do eixo de maior e menor inércia (JOHNSTON⁶). Em ambos os eixos de flexão, foram determinados os máximos carregamentos tanto para a configuração perfeitamente reta quanto para barras com curvaturas iniciais.

A definição de Engesser-Shanley para a carga crítica é hoje geralmente aceita para barras feitas de material que apresentam relação tensão-deformação não linear. Dentro de certos limites, uma modificação do mesmo procedimento é aplicável para barras estruturais de aço.

1.2.3 Instabilidade Elástica de Estruturas Reticuladas Planas

Na análise de instabilidade de estruturas planas são feitas as seguintes hipóteses: as barras são consideradas geometricamente perfeitas e os deslocamentos fora do plano não são considerados. A equação diferencial que governa o problema de uma barra plana tem a seguinte forma:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = w \quad (1.4)$$

sendo “w” definido como carregamento transversal distribuído ao longo do comprimento da barra; “y” o deslocamento transversal do membro no plano da estrutura; “x” a direção do eixo ao longo do comprimento do membro; “EI” é a rigidez à flexão e “P” a força axial atuando no membro.

A solução desta equação diferencial pode ser feita através de um processo aproximado ou diretamente através da solução da própria equação diferencial do problema.

A solução da equação pelo processo aproximado é feita através do método dos elementos finitos. Neste processo, utilizam-se funções aproximadoras para descrever o comportamento da estrutura em termos de deslocamentos axiais e transversais. Utilizando-se como base o processo dos deslocamentos, pode-se determinar os coeficientes da matriz de rigidez para a análise de instabilidade. A análise de instabilidade das estruturas pelo processo dos deslocamentos é baseado na seguinte expressão:

$$[K_e + K_g]\{V\} = \{R\} \quad (1.5)$$

sendo que “[K_e + K_g]” é a matriz de rigidez obtida pela resolução da equação diferencial mostrada acima através do método dos elementos finitos; “{V}” é o vetor de deslocamentos da estrutura no sistema global e “{R}” o vetor dos ações nodais no sistema global da estrutura.

É importante ressaltar que “[k_e]” é a matriz de rigidez usada na análise onde o equilíbrio é feito na posição indeformada (também conhecida como análise de primeira ordem) e “[K_g]” é a matriz de rigidez geométrica que é proporcional a força axial atuante na barra. Quando “P” for negativo (compressão) então a matriz de rigidez geométrica reduzirá a rigidez da barra e quando “P” for positivo (tração), a rigidez da barra será aumentada. Um dos primeiros a levar em consideração a influência geométrica foi MARTIN¹² em 1960. O termo “matriz

geométrica” somente foi utilizado pela primeira vez por ARGYRIS¹³ em 1964. Estas matrizes podem ser obtidas no livro de PRZEMIENIECKI¹⁴.

Para o caso de forças entre as extremidades da barra, será somado em (1.5) um vetor de ações de engastamento perfeito. Desta forma, esta equação pode ser reescrita da seguinte forma :

$$[K_e + K_g]\{V\} + \{R_e\} = \{R\} \quad (1.6)$$

Uma outra forma de se determinar a matriz de rigidez para a análise de instabilidade é através da resolução da própria equação diferencial do problema. A solução é feita utilizando-se as equações de equilíbrio e impondo-se as condições de contorno que aparecem na barra quando esta é analisada na posição deformada. A matriz de rigidez obtida através da solução da equação diferencial é baseada nas funções de estabilidade. Este método é conhecido desde da década de 30, sendo JAMES¹⁵ o primeiro a apresentar estes coeficientes. Entretanto, um dos primeiros a tabular as funções de estabilidade de forma adequada para a análise de instabilidade pelo processo dos deslocamentos foi LIVESLEY e CHANDLER¹⁶ e HORNE e MERCHANT¹⁷.

Desde então, a matriz de rigidez de barras, baseado nas funções de estabilidade, têm sido escritas de várias formas. Estas podem ser obtidas nas referências ALLEN¹⁸, CHEN e AL-MASHARY¹⁹ e GERE e WEVER²⁰.

Para a análise matricial de estruturas através do processo dos deslocamentos, a expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$[S_B]\{d\} + \{f_e\} = \{f\} \quad (1.7)$$

sendo que “[S_B]” é a matriz de rigidez baseada nas funções de estabilidade (rigidez); “{f_e}” o vetor de engastamento perfeito no sistema global e “{f}” o vetor de ações nodais no sistema global.

1.2.4 Instabilidade Inelástica de Estruturas Reticuladas Planas

Os esforços solicitantes em uma barra geralmente provocam tensões superiores ao limite de proporcionalidade do material, fazendo com que este passe a trabalhar no campo inelástico. Para barras na fase inelástica, a equação diferencial que governa o problema passa a ser a seguinte:

$$E_I \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = w \quad (1.8)$$

sendo o módulo de elasticidade elástico "E" substituído pelo módulo de elasticidade tangente " E_t ". Esta equação diferencial pode ser resolvida tanto pelo processo aproximado ou mesmo pela resolução da própria equação diferencial conforme mencionado anteriormente.

O efeito da inelasticidade pode ser levado em consideração de diferentes formas. Entretanto, pode-se sintetizar estas aproximações em duas formas básicas: a inelasticidade pode ser considerada concentrada nos nós extremos da barra ou esta pode ser considerada ao longo de todo o comprimento da barra e também em toda a extensão da seção transversal da barra.

Uma das primeiras análises de instabilidade de estruturas aporticadas utilizando inelasticidade concentrada nos nós foi realizada por OJALVO e LU²¹ em 1961. Os efeitos da inelasticidade, força axial e forma de carregamento foram considerados na análise. Uma estrutura reticulada simétrica composta por uma viga e dois pilares sujeita a carregamento simétrico foi analisada através de fórmulas desenvolvidas para se determinar a carga crítica da estrutura. As relações entre momento-curvatura foram determinadas através de um processo numérico de integração. Estas curvas foram determinadas levando em consideração o esforço axial presente na barra, as propriedades geométricas da seção transversal e propriedades do material utilizado.

Alguns anos depois, CHU e PABARCIUS²² em 1964 desenvolveram uma análise inelástica também em uma estrutura reticulada composta por uma viga e dois pilares. Porém, nesta análise os autores consideraram que o pórtico estava sujeito a carregamentos assimétrico (forças verticais e horizontais). A carga crítica foi calculada manualmente em teoria dos pequenos deslocamentos utilizando as funções de rigidez. A inelasticidade foi introduzida na análise através de curvas de rotação-curvatura. Estas curvas apresentavam um comportamento não linear devido a presença das tensões residuais adotadas no perfil "I" metálico para o eixo de maior inércia.

No mesmo ano de 1964, MOSES²³ apresentou um método para resolver o problema de instabilidade inelástica de estruturas aporticadas. A solução do problema foi baseada no método das diferenças finitas. A técnica de determinação da carga crítica utilizada consistia em plotar a curva de carregamento aplicado versus o deslocamento da estrutura. Foram utilizadas

equações para representar a curvatura da seção transversal sendo esta função do material utilizado, das propriedades geométricas da seção transversal, dos esforços axiais e momentos fletores presentes no elemento. A inelasticidade foi considerada concentrada nos nós do elemento.

Um ano mais tarde, em 1965, LU²⁴ calculou manualmente a instabilidade inelástica de um pórtico plano composto por três barras. Funções de rigidez simplificadas foram utilizadas neste cálculo. A inelasticidade foi introduzida na análise através das curvas que relacionam rotações de extremidade da barras versus momentos de extremidade. Estas curvas foram obtidas utilizando um procedimento numérico de integração desenvolvido por T. von Kármán. As análises foram feitas utilizando perfis "I".

Majid e Anderson, em 1968 (GALAMBOS²⁵), desenvolveram um programa utilizando inelasticidade concentrada nos nós do elemento. O programa era baseado no método dos deslocamentos para a análise de instabilidade de pórticos planos em teoria dos pequenos deslocamentos (teoria de segunda ordem). O programa considerava a inelasticidade concentrada nos nós. As incógnitas básicas a serem determinadas eram os deslocamentos nodais (no caso três) e as rótulas plásticas ocasionadas pela presença da inelasticidade. O programa podia resolver estruturas de grande porte.

KORN e GALAMBOS²⁶, em 1968 (Maio), desenvolveram um programa para análise de instabilidade inelástica em teoria dos pequenos deslocamentos utilizando as funções de rigidez com interação de força axial. O programa considerava a redução da rigidez da barra em função da força axial presente na barra através de uma fórmula bilinear para perfis "I" fletidos em torno do eixo de maior inércia. O programa era capaz de trabalhar com a formação de rótulas plásticas.

Neste mesmo ano (Novembro de 1968), MAJID e ANDERSON²⁷ desenvolveram um programa para a análise de estruturas reticuladas de grande porte. O programa era baseado no método dos deslocamentos e era capaz de analisar as estruturas em teoria de primeira e segunda ordem, análise de instabilidade elástica e inelástica. Os efeitos de segunda ordem foram introduzidos na análise através das funções de rigidez. O programa era capaz de lidar com a formação de rótulas plásticas. A verificação da formação das rótulas

plásticas era feito através de uma superfície de plastificação adotada pelos autores.

No ano seguinte, em 1969, ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁸ apresentaram uma análise de instabilidade inelástica utilizando o método dos elementos finitos. O carregamento na estrutura era aplicado em incrementos de carregamento até que a estrutura atingisse a instabilidade. Um procedimento numérico foi desenvolvido para determinar a curvatura da seção transversal e a parte da seção transversal que ainda permanecia elástica para os esforços de momento fletores e força axial atuantes na barra. O efeito de não linearidade geométrica foi levado em consideração através da matriz geométrica "[k_g]".

VOGEL²⁹, em 1985, apresenta em seu artigo uma série de análises de instabilidade em estruturas apertadas sob diferentes teorias. O objetivo deste artigo foi fornecer exemplos numéricos que possam ser utilizados para calibrar os diferentes tipos de programas que estavam sendo desenvolvidos. É apresentado também um ensaio real em uma estrutura apertada e o resultado obtido é comparado com os resultados teóricos baseados na teoria de plasticidade distribuída ao longo do elemento e ao longo da altura da seção transversal.

Nos últimos anos, muitos pesquisadores têm estudado o problema da instabilidade inelástica de pórticos planos. Em 1990, SIMITSES e MOHAMED³⁰ apresentaram um procedimento numérico para a análise de instabilidade de pórticos planos. O procedimento leva em consideração os efeitos de não linearidade geométrica através de relações não lineares da cinemática. A não linearidade física do material é introduzida no procedimento através de plasticidade concentrada nas extremidades do elemento. O efeito das ligações semi-rígidas é incorporado no procedimento através de modelos polinomiais.

CHEN e AL-MASHARY³¹, em 1991, propõe um método para a análise de instabilidade de pórticos planos em teoria de segunda ordem levando em consideração o efeito de inelasticidade nas barras. O método é baseado nas funções de rigidez, sendo estas modificadas para incorporar a presença de molas nas extremidades da barra. Estas molas simulam a degradação da rigidez da barra. A análise se baseia no fato de a rigidez a flexão se reduzir gradualmente de completamente elástica para a inelástica até perfeitamente plástica. A detecção da plastificação total da seção é feita através de um critério de plastificação.

KING et al³², em 1992, desenvolveram um programa para a análise de instabilidade de pórticos planos baseado no método dos elementos finitos. A não linearidade geométrica é introduzida no programa através da matriz geométrica “[K_g]”. A expressão do Column Research Council (CRC)³³ para o módulo de elasticidade tangente é introduzida no programa para levar em consideração o efeito da não linearidade do material. Juntamente com o módulo tangente, é utilizado um parâmetro “ p ” que leva em consideração o aumento da plastificação produzido pela presença de flexão nas extremidades da barra. O programa é capaz de trabalhar com a formação de rótulas plásticas nas extremidades das barras (plasticidade concentrada nos nós).

MCGUIRE et al³⁴, em 1992, fizeram análises inelásticas em pórticos planos utilizando um programa desenvolvido na Universidade de Cornell em 1989 por Hsieh. O programa é baseado no método dos elementos finitos. O efeito da não linearidade geométrica é obtido através da matriz geométrica “[K_g]”. A não linearidade física é considerada através da plasticidade concentrada nos nós do elemento. A plastificação das extremidades da barra é verificada utilizando superfícies de plastificação. É levado em consideração se o membro é capaz de sustentar a rotação que lhe está sendo imposta, ou seja, verifica-se se a capacidade de rotação do membro não foi excedida. Toda a análise foi realizada utilizando perfis “H”.

LIEW et al³⁵ (1993a) desenvolveram um programa para análise de instabilidade inelástica de pórticos planos. O método é baseado na modificação das funções de rigidez para levar em consideração a formação de rótulas plásticas nas extremidades da barra. O módulo de elasticidade tangente é introduzido na análise através de expressões propostas pela Load Resistance Factor Design (AISC LRFD)³⁶ ou pelo Column Research Council (CRC)³³ para levar em consideração a degradação da rigidez da estrutura devido ao efeito da força axial nas barras. É introduzido também um parâmetro escalar “ ϕ ” para levar em consideração o aumento da plastificação da seção pelo efeito de flexão. Em LIEW et al³⁷ (1993b) é acrescentado o efeito das ligações semi-rígidas.

WHITE³⁸, em 1993, realizou uma comparação entre dois métodos de análise inelástica para pórticos planos. Em ambos os casos, a inelasticidade foi assumida estar concentrada nos nós. O primeiro método é baseado na análise elasto-

plástica perfeita, ou seja, a seção transversal é assumida permanecer completamente elástica até que a plastificação da seção é alcançada. No segundo método, a transição da fase elástica se dá progressivamente para a fase inelástica até perfeitamente plástica. Esta transição é feita utilizando-se o módulo de elasticidade tangente.

CHAN e YAU³⁹, em 1994, apresenta um programa para a análise inelástica baseado no método dos elementos finitos. O efeito da não linearidade geométrica é levado em consideração através da matriz geométrica “[K_g]”. São utilizadas molas conectadas nas extremidades das barras para degenerar a rigidez da estrutura. Ligações semi-rígidas são consideradas no programa. A plastificação da seção transversal é verificada através de critério de plastificação.

CHEN e CHAN⁴⁰, em 1995, desenvolveu um programa para análise elasto-plástica de pórticos planos em teoria de grandes deslocamentos (teoria exata). O elemento de barra proposto neste trabalho apresenta a possibilidade de detectar rótulas plásticas nas extremidades da barra e também no meio desta. A inelasticidade é introduzida no programa através de molas que simulam a degradação da rigidez nas extremidades da barra e no meio desta. Devido a possibilidade de considerar formação de rótulas plásticas no meio da barra, reduziu-se o número de barras em que o membro deveria ser subdividido para se encontrar bons resultados.

CHEN e KIM⁴¹ (1996a) apresenta um método denominado de “refinado” para análise inelástica de estruturas planas contraventadas fora do plano. Este considera o espraimento da plasticidade ao longo do membro e imperfeições geométricas na barra. O método também leva em consideração a redução gradual da rigidez devido à flexão e tensões residuais. Em outro artigo, CHEN e KIM⁴² (1996b) apresenta o mesmo método acima acrescentando o efeito das ligações semi-rígidas.

Recentemente, CHAN e CHUI⁴³, em 1997, propõe um método para a análise de instabilidade de pórticos planos pelo método dos elementos finitos. Este utiliza uma formulação para a função de plastificação diferente das apresentadas por CHEN e CHAN⁴⁰ e WHITE³⁸. São utilizadas molas para simular o comportamento inelástico das barras. Quando a seção transversal da barra está elástica, então a mola nesta extremidade tem um valor infinito que indica a transferência completa

de momentos. Quando a seção transversal está plastificada, a rigidez da mola é igual a zero, implicando desta forma em nenhuma transferência de momentos. O efeito da não linearidade geométrica é levada em consideração através da matriz “[K_g]”. As tensões residuais também são levadas em consideração. As análises são feitas utilizando apenas perfis “I” e “H”.

1.3 O Presente Trabalho

Conforme mencionado anteriormente, o tipo de análise estrutural realizada pelos programas que fazem o dimensionamento da estrutura é baseada no regime de primeira ordem (análise elasto-linear). O que as normas ou especificações tentam fazer ao introduzir o fator de amplificação nas fórmulas de dimensionamento de uma barra da estrutura, é representar o comportamento de uma análise não linear geométrica. A introdução dos fatores “ P_u ” e “ M_u ”, sendo o primeiro a capacidade última à compressão e o segundo a capacidade última à flexão, nas expressões de interação tentam representar uma análise de primeira ordem elasto-plástica, ou seja, a degradação da rigidez da barra é feita apenas por não linearidade física do material. Por fim, a combinação dos dois tipos de análise mencionados anteriormente, tentam fazer com que o comportamento da barra seja representado através de uma análise em regime de segunda ordem considerando o efeito da inelasticidade na barra. Entretanto, todo o dimensionamento é feito dentro do contexto que as barras são membros isolados da estrutura.

Tendo como base o que foi mencionado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de computador capaz de fazer análise de estruturas metálicas planas. O termo análise está sendo utilizado neste trabalho no sentido que a estrutura é analisada estruturalmente, determinando os esforços e deslocamentos, e posteriormente feito o dimensionamento dos elementos estruturais da mesma. O presente programa a ser desenvolvido se diferencia dos programas citados anteriormente pelo fato de levar em consideração os efeitos simultâneos da não linearidade física do material e da não linearidade geométrica. Desta forma, os esforços obtidos nas barras da estrutura estarão afetados por estes efeitos. O dimensionamento a ser realizado será baseado na norma brasileira “NBR 8800 - Projeto e Execução de Estruturas

de Aço de Edifícios: Método dos Estados Limites”⁴⁴. Serão fornecidos bancos de dados de perfis para o programa. Desta forma, através da programação das fórmulas da norma, o programa será capaz de realizar o dimensionamento automatizado da estrutura. Todo o dimensionamento será baseado na análise de perfis laminados e compactos, ou seja, perfis nos quais a relação de esbeltez das abas ou mesas seja inferior a “ λ_p ” recomendado por norma. Isto é feito para evitar que o problema de flambagem local do perfil aconteça antes do problema de flambagem por flexão da barra. Será admitido também que todos os perfis estejam contidos fora do plano para a análise global dos elementos da estrutura. Esta hipótese é feita porque o elemento de barra plano a ser utilizado na análise não consegue levar em consideração o efeito de instabilidade por flexo-torção. Os perfis serão verificados a flambagem por flexão no plano perpendicular à estrutura admitindo o comprimento de flambagem fora do plano a distância entre os contraventamentos instalados na estrutura.

O programa será desenvolvido propiciando ao usuário a escolha do tipo de análise que este deseja fazer. Os tipos de análises que estarão disponíveis no programa são: análise e dimensionamento segundo a “NBR 8800” da estrutura no regime de primeira ordem; análise e dimensionamento segundo a “NBR 8800” da estrutura no regime de primeira ordem levando em consideração os efeitos de não linearidade física do material; análise e dimensionamento segundo a “NBR 8800” da estrutura no regime de segunda ordem (não linearidade geométrica); e análise e dimensionamento segundo a “NBR 8800” da estrutura no regime de segunda ordem levando em consideração a não linearidade física do material. O principal objetivo destas análises é verificar se a introdução dos efeitos de não linearidade geométrica e física do material podem causar mudança nos perfis obtidos no dimensionamento elasto-linear comumente feito na prática pelos projetistas.

Capítulo 2

Análise de Estruturas Reticuladas

2.1 Introdução

Este capítulo abordará o estudo do comportamento das estruturas reticuladas quando sujeitas a carregamentos externos. Estes estudos são feitos através da determinação das curvas carregamento-deslocamento da estrutura até o ponto de bifurcação ou ponto limite. As hipóteses dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações são adotadas. Os efeitos das imperfeições geométricas e inelasticidade são considerados nestas análises com o objetivo de verificar o comportamento das estruturas sujeitas a estes efeitos. Gráficos são apresentados para demonstrar estes comportamentos e facilitar a compreensão destas análises. São apresentados e descritos também outros fatores que influenciam a capacidade portante de uma estrutura reticulada.

2.2 Análise de Instabilidade de Estruturas Reticuladas

Para compreender o comportamento das estruturas, torna-se necessário compreender os tipos de respostas que estas podem apresentar quando estão sujeitas a carregamentos externos. Uma maneira de apresentar o comportamento das estruturas é através das curvas carregamento-deslocamento mostradas na figura 2.1. Estas curvas podem ser compreendidas como a representação do comportamento dos graus de liberdade da estrutura.

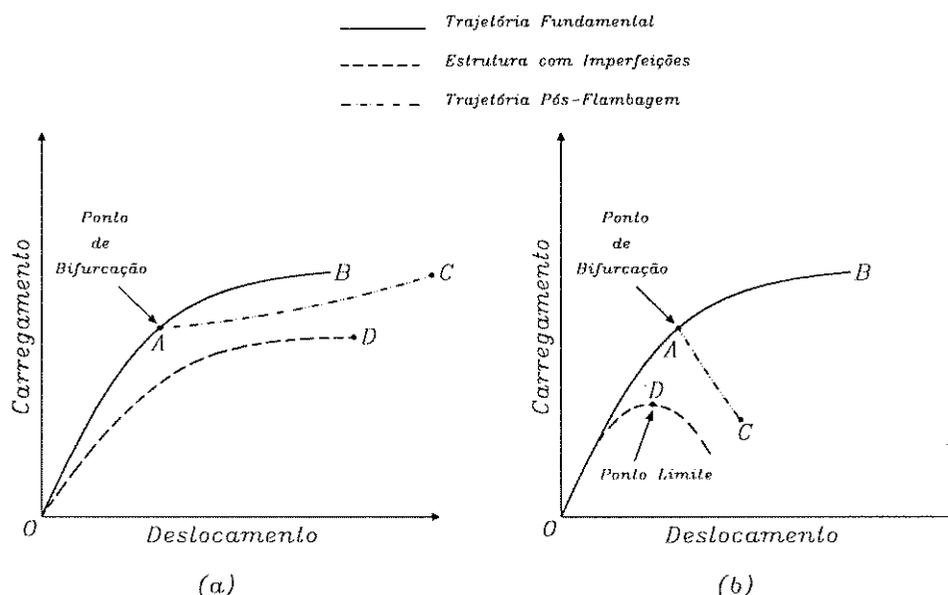


Figura 2.1 - Curvas carregamento-deslocamento. Situações de instabilidade estrutural.

As linhas sólidas mostradas na figura 2.1 são aplicadas às estruturas perfeitas (sem imperfeições geométricas). Neste caso, a estrutura primeiramente se desloca ao longo de uma “trajetória fundamental” (“OAB”) com ponto de bifurcação para uma trajetória secundária no *ponto* “A”. Esta trajetória secundária “AC”, chamada de trajetória pós-flambagem, pode ser ascendente ou descendente conforme mostrado na figura 2.1(a) e figura 2.1(b). A ascensão ou descensão da trajetória de uma curva carregamento-deslocamento dependerá das características da estrutura e/ou do carregamento aplicado.

Para certos tipos de estrutura ou quando as imperfeições geométricas são levadas em consideração, o comportamento carregamento-deslocamento pode ser retratado através das linhas tracejadas “OD” na figura 2.1. Algumas estruturas

podem apresentar trajetórias pós-flambagem ascendente ("AC", figura 2.1(a)), apresentado desta forma capacidade de resistir a carregamentos que excedem o carregamento de bifurcação. A capacidade de carregamento de uma estrutura com imperfeições geométricas que apresenta comportamento pós-flambagem descendente (Figura 2.1(b)) será menor que o correspondente carregamento de bifurcação de uma estrutura perfeita a não ser que a trajetória ascenda novamente para grandes deslocamentos. Esta máxima capacidade de carregamento, ou ponto limite ocorre no *ponto "D"* conforme mostrado na figura 2.1(b).

Neste trabalho, será abordado a análise de estruturas reticuladas em teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Quando uma estrutura é analisada dentro dessas hipóteses, o comportamento pós-flambagem não é possível ser representado devido as simplificações feitas. Assim, o comportamento da estrutura pode ser obtido até o ponto de bifurcação ou ponto limite da estrutura. Vale ressaltar que o ponto de bifurcação é caracterizado pela mudança da trajetória da estrutura, fazendo com que a geometria da estrutura se desconfigure da inicial. A perda da configuração inicial da estrutura caracteriza um estado limite da estrutura. A teoria dos grandes deslocamentos é utilizada quando se deseja compreender o comportamento da estrutura após o ponto de bifurcação. Este comportamento acontece quando a estrutura apresenta reserva de resistência após o ponto de bifurcação. Entretanto, devido a imperfeições geométricas e inelasticidade (entre outros fatores que serão apresentados no final deste capítulo) presente nas barras das estruturas reticuladas, na maioria das vezes o comportamento das trajetórias após o ponto de bifurcação (ou ponto limite) é descendente (Figura 2.1(b)).

O primeiro ponto de bifurcação ou ponto limite de uma estrutura reticulada é denominado de instabilidade estrutural (GALAMBOS²⁵). As análises realizadas em teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações com o objetivo de traçar a trajetória da estrutura conforme realizado na figura 2.1 até que esta atinja o ponto de bifurcação ou ponto limite são denominadas de análises de instabilidade. Estas trajetórias da estrutura (curvas carregamento-deslocamento)

podem ser utilizadas para verificar o nível de segurança que a estrutura apresenta para o carregamento aplicado.

Este capítulo abordará o comportamento das estruturas reticuladas desde o início do carregamento até a estrutura alcançar a instabilidade. Instabilidade pode ser entendida, conforme mencionado anteriormente, dentro das hipóteses assumidas, como sendo o ponto de bifurcação do equilíbrio ou ponto limite da estrutura. Os efeitos de imperfeições geométricas e inelasticidade serão considerados nestas análises. Este estudo, por simplicidade, será feito através da análise de uma estrutura plana. Será considerado que os deslocamentos fora do plano sejam prevenidos por vinculações adequadas. Estas vinculações são denominadas de contraventamentos. As análises apresentadas para estruturas planas podem ser estendidas para o caso de estruturas reticuladas tridimensionais.

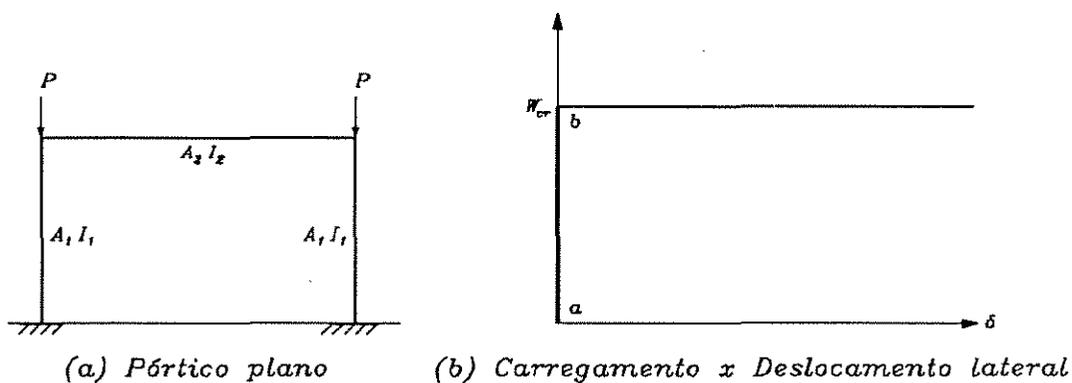


Figura 2.2 - Análise de instabilidade - estrutura reticulada plana.

Considere a estrutura plana e simétrica mostrada na figura 2.2(a). Na sua análise serão consideradas as seguintes hipóteses: a estrutura não apresenta nenhuma imperfeição geométrica; a estrutura está perfeitamente apurada; as ligações entre os nós são consideradas rígidas; e o carregamento é simétrico e aplicado proporcionalmente nos nós da estrutura. Para este caso, ao se realizar a análise de instabilidade na estrutura, objetiva-se obter o comportamento da estrutura em termos de deslocamentos horizontais para cada incremento de carregamento. O comportamento da estrutura é mostrado na *curva ab* da figura 2.2(b). Como pode-se observar, o comportamento da estrutura é similar ao de uma barra comprimida isolada (problema de primeira espécie para barras

comprimidas). O máximo carregamento que a estrutura pode suportar é denominado de carregamento crítico. Neste trabalho, este carregamento é denominado de " W_{cr} ".

A figura 2.3(a) apresenta a mesma estrutura plana analisada anteriormente. Entretanto, será admitido que seus pilares estejam fora de prumo uma quantidade " Δ_0 ". Analisando o comportamento desta estrutura imperfeita, obtém-se a curva *abc* mostrada na figura 2.3(b). O seu comportamento é similar ao de uma barra comprimida carregada excentricamente (problema de segunda espécie para barras comprimidas). É importante ressaltar que quanto menor for a imperfeição dada, mais próximo o carregamento de instabilidade, representado pelo ponto "b", se aproxima do carregamento crítico " W_{cr} " encontrado na análise de instabilidade do problema anterior.

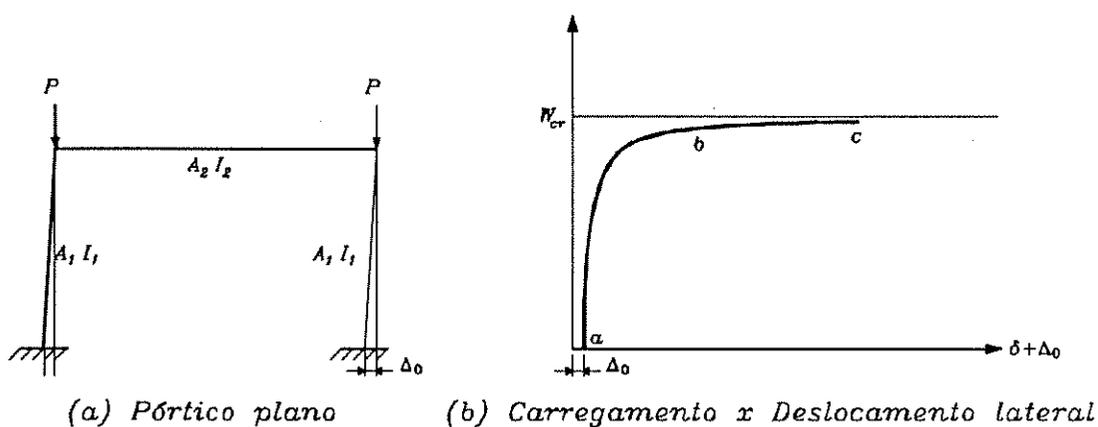


Figura 2.3 - Análise de instabilidade - estrutura reticulada com pilares desaprumados

O próximo tipo de análise será feita com a mesma estrutura anterior, ou seja, os pilares estão desaprumados. Entretanto, o carregamento concentrado nos nós é substituído por uma carga uniformemente distribuída na viga (figura 2.4(a)). Neste caso, quando os carregamentos nodais são substituídos por um carregamento distribuído ao longo da viga do pórtico, tanto o pilar quanto a viga estarão sujeitos a esforços de flexão. Os efeitos de flexão introduzirão novas tensões nas barras, fazendo com que as barras sejam solicitadas no campo inelástico. A presença da inelasticidade nas barras fará com que inicie a plastificação em certas regiões na estrutura. Como consequência, a capacidade

portante da estrutura irá se reduzir mais rapidamente, e o carregamento crítico de instabilidade será inferior ao encontrado na análise da figura 2.3(a). Devido ao efeito da imperfeição e da presença da inelasticidade provocada pela presença da flexão, a curva que representa o comportamento da estrutura é mostrada na figura 2.4(b), *curva ab'c'*. Neste caso, como existe imperfeição, haverá deslocamentos horizontais desde o início do carregamento, e a soma da flexão oriunda da imperfeição mais a produzida pela carga uniformemente distribuída irão fazer com que o carregamento crítico de instabilidade seja inferior ao obtido na análise anterior.

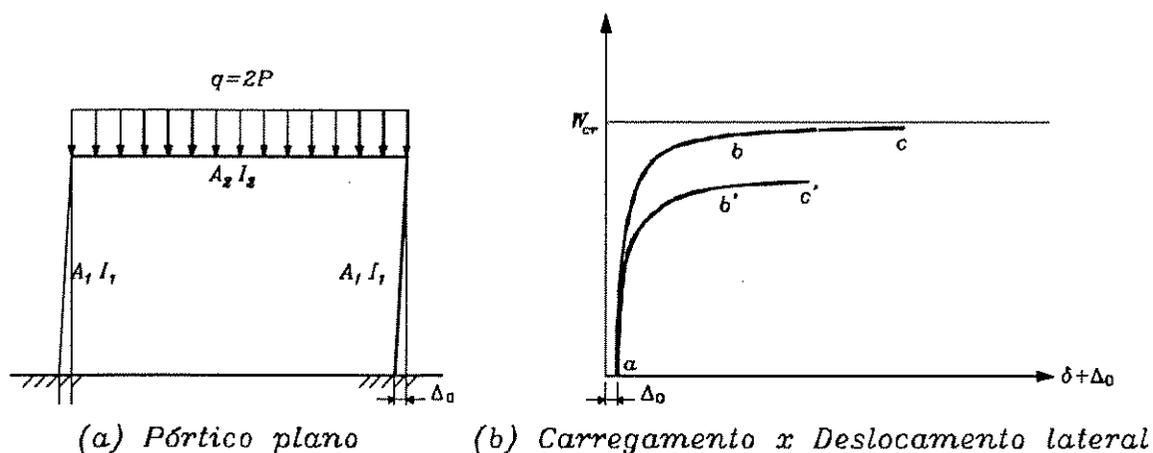


Figura 2.4 - Análise de instabilidade - estrutura reticulada com pilares desaprumados e flexão devido a carga uniformemente distribuída.

Para finalizar, analisar-se-á a estrutura sujeita a um carregamento assimétrico com carga horizontal, cargas verticais concentradas nos nós e uniformemente distribuída conforme figura 2.5(a). A resposta da estrutura é mostrada na *curva ab''c''* da figura 2.5(b). A estrutura translada rapidamente na horizontal devido a força "H" e a imperfeição inicial. Estes efeitos fazem com que a capacidade portante da estrutura diminua mais rapidamente que no caso anterior. Como resultado, o parâmetro crítico de instabilidade é ainda inferior ao encontrado na análise anterior.

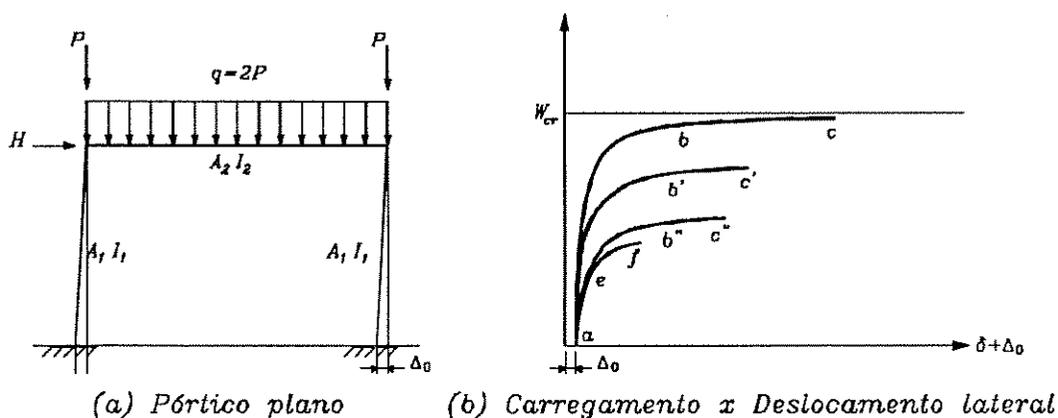


Figura 2.5 - Análise de instabilidade - estrutura reticulada com pilares desaprumados e flexão devido a carga uniformemente distribuída e força horizontal.

As respostas das análises feitas acima não levaram em consideração o efeito da flambagem local das abas e mesas dos perfis, da flambagem por flexo-torção das barras e a formação de rótulas plásticas na estrutura. Se as dimensões das barras são tais que a flambagem local ou por flexo-torção possam ocorrer, então, o comportamento da estrutura pode ser analisado pela *curva aef* mostrada na figura 2.5(b). É importante ressaltar que deslocamentos fora do plano e torção nas barras podem modificar substancialmente a resposta da estrutura.

O comportamento de estruturas com múltiplos pavimentos é similar ao descrito para o pórtico plano analisado anteriormente. Os fatores que causam a instabilidade são análogos aos citados nas análises realizadas anteriormente.

Muitos experimentos tem sido realizados para verificar o comportamento das estruturas reais e, desta forma, comparar os resultados obtidos através das análises computacionais. Estes experimentos são realizados assumindo-se as seguintes hipóteses:

- os nós da estrutura são considerados rígidos;
- a inelasticidade do material é assumida estar concentrada nos nós da estrutura;
- é assumido que não há deslocamentos fora do plano de ação das cargas;
- as tensões residuais não são consideradas nos experimentos;

- despreza-se a participação da rigidez das lajes na análise;
- o carregamento é aplicado proporcionalmente; e,
- a geometria da estrutura é considerada perfeita.

Os experimentos são feitos com o propósito de verificação dos modelos analíticos. Desta forma, devem representar de forma mais precisa possível estes modelos. Entretanto, esta modelagem é de extrema dificuldade. As barras devem ser selecionados de forma a impedir a flambagem flexo-torção, o comportamento semi-rígido das ligações devem ser evitados e o carregamento deve ser aplicado proporcionalmente.

Na realidade, muitas das estruturas não apresentam ligações rígidas, as barras não são perfeitas, os carregamentos são aplicados desproporcionalmente e as barras podem flambar lateralmente. Pode-se dizer ainda que algumas estruturas possuem certas regiões que apresentam capacidade de resistência inferior, fazendo com que o carregamento último da estrutura seja limitado. Desta forma, estes fatores tendem a reduzir a capacidade das estruturas abaixo das previsões feitas através da análise numérica.

2.3 Modelos para a Análise de Estrutura Reticuladas

As estruturas reticuladas podem ser analisadas através de vários modelos analíticos. Considere a estrutura plana mostrada na figura 2.6 sujeita a carregamentos verticais e horizontais. Esta estrutura pode ser analisada elasticamente, fazendo-se o equilíbrio da estrutura na posição indeformada, ou seja, a posição deformada é confundida com a posição indeformada (teoria de primeira ordem). Para este caso, o comportamento da estrutura é dado pela curva (a). Na análise elástica, dado um carregamento na estrutura, sempre haverá um deslocamento proporcional associado, ou seja, sempre existirá uma posição de equilíbrio para a estrutura. Este tipo de análise não leva em consideração que a rigidez da estrutura se degrada a medida em que esta se desloca e a medida que o estado de tensão em uma barra vai se aproximando da máxima capacidade do material. A curva (b) representa a análise elástica da mesma estrutura em teoria dos pequenos deslocamentos. Nesta teoria, também chamada de segunda ordem, o equilíbrio da estrutura é realizado na posição deformada. Neste caso, a

redução da capacidade portante da estrutura é provocada pelo efeito de não linearidade geométrica, ou seja, a rigidez da estrutura vai se reduzindo a medida que esta se desloca. Este efeito faz com que a estrutura apresente um carregamento crítico de instabilidade elástica ($W_{cr/elast}$). Outra forma de analisar a estrutura é mostrada na curva (c). Este tipo de análise é designada de elasto-plástica, sendo realizada em teoria de primeira ordem. Na análise, é levado em consideração que a rigidez da estrutura vai se deteriorando devido ao efeito de não linearidade física do material, ou seja, a rigidez da estrutura vai se deteriorando a medida que o material se aproxima da máxima capacidade do material. O efeito de plastificação das barras faz com que a estrutura apresente um carregamento último denominado de carregamento limite de plastificação (W_{plast}). A curva (d) representa a análise inelástica em teoria dos pequenos deslocamentos (segunda ordem) sendo o equilíbrio feito na posição deformada. Nesta análise, ambos os efeitos de não linearidade geométrica e não linearidade física são considerados. O carregamento crítico encontrado é denominado de carregamento crítico de instabilidade inelástica ($W_{cr/inelas}$). Se existe a possibilidade de falha por flambagem local ou flambagem lateral-torcional, então o carregamento crítico da estrutura poderá apresentar um valor menor conforme mostrado na curva (e).

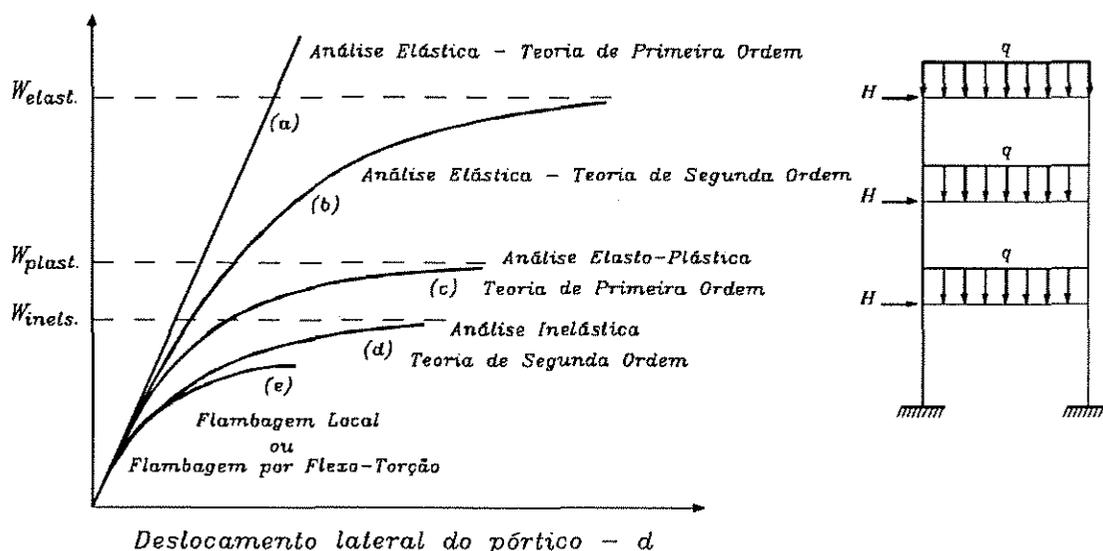


Figura 2.6 - Tipos de análise em uma estrutura reticulada.

2.4 Fatores que Influenciam a Estabilidade das Estruturas Reticuladas

A capacidade portante (rigidez) de uma estrutura sob um certo carregamento representa uma medida do fator de segurança que esta apresenta em relação ao fenômeno de instabilidade para este carregamento (BIRNSTIEL e IFFLAND⁴⁵). Desta forma, é de fundamental importância o conhecimento dos fatores que influenciam o limite de estabilidade de uma estrutura. Estes efeitos podem ser classificados em três grupos: efeitos geométricos, efeitos do material, e efeitos do carregamento.

2.4.1 Efeitos Geométricos

Efeito da Força Axial na Rigidez da Barra - Este efeito reduz a rigidez da barra quando existe uma força axial de compressão e aumenta quando a força axial é de tração. Uma força de compressão aplicada em uma barra reduz a rigidez ao giro de seus nós de extremidade. A força de tração provoca o efeito contrário.

Efeito do Deslocamento transversal do eixo da Barra - Este efeito, conhecido como efeito "P- Δ ", altera o comportamento estrutural da seguinte maneira : os deslocamentos transversais produzidos pelo carregamento externo, modificarão o equilíbrio da estrutura, pois estes introduzirão novos esforços na estrutura; estes novos esforços farão com que o equilíbrio da estrutura seja alterado; ao se alterar o equilíbrio da estrutura, os deslocamentos também serão modificados; Desta forma, uma solução iterativa é necessária para a obtenção dos resultados dos deslocamentos finais da estrutura. O efeito destes deslocamentos transversais influenciam o comportamento de instabilidade da estrutura. Este efeito é levado em consideração deduzindo as equações de equilíbrio na posição deformada da estrutura.

Efeito de Curvatura da Barra - Também conhecido como "P- δ ", este efeito reduz a rigidez a flexão devido a barra se curvar a medida que a estrutura se desloca. Juntamente com o efeito "P- Δ ", este efeito altera o equilíbrio da estrutura.

Efeito da Mudança do Comprimento da Barra - Devido a presença dos esforços axiais de compressão ou de tração, as barras sofrerão modificações no

seu comprimento devido as deformações axiais. Este efeito é parecido com o citado anteriormente e pode ser levado em consideração de forma similar a exposta anteriormente.

Efeito das Imperfeições Geométricas da Barra - Todas as barras reais são imperfeitas, ou seja, são inicialmente curvas e torcidas. A magnitude e orientação destas imperfeições são aleatórias. As imperfeições geométricas têm grande influência no carregamento crítico de instabilidade.

Variação das Dimensões Geométricas dos Valores Obtidos em Catálogos - Durante o processo de fabricação dos perfis metálicos, é comum os perfis serem moldados com dimensões e propriedades geométricas inferiores ou superiores as tabeladas nos catálogos. Estas variações nas dimensões geométricas modificam o comportamento real das estruturas.

Inclinação das Barras Durante o Processo de Fabricação das Barras - Durante o processo de execução da estrutura, as barras ao serem instaladas podem ficar desniveladas tanto horizontalmente (caso de vigas) como verticalmente (caso de pilares). O desnivelamento dos pilares (fora de prumo) influencia de forma bastante significativa na análise de instabilidade da estrutura.

Efeito das Deformações por Cortante - Na maioria dos casos, as deformações por cortante são pequenas. Entretanto, este efeito deve ser levado em consideração quando o esforço cortante for de grande intensidade e quando este for predominante sobre os outros esforços. As deformações por cortante reduzem as ações de extremidade das barras induzidas pelos deslocamentos unitários impostos nestas.

Efeito das Distorções locais - Distorções locais dos elementos durante o processo de carregamento tais como flambagem local ou plastificação afetam o carregamento limite de instabilidade. Entretanto, este efeito é de difícil modelamento em teoria de barras.

Efeito do Movimento da Estrutura Fora do Plano de Cargas - Deslocamentos das barras fora do plano de aplicação das cargas influenciam o comportamento limite da estrutura.

2.4.2 Efeitos do Material

Relação Tensão x Deformação Não Linear - Durante a análise de instabilidade, algumas partes da estrutura podem ser solicitadas por tensões que estão acima do limite de proporcionalidade do material. Desta forma, estes elementos estarão trabalhando dentro do campo inelástico. A inelasticidade do elemento pode ser levada em consideração de duas formas : esta pode ser considerada concentrada nos nós de extremidade do elemento ou pode ser considerada como distribuída ao longo do comprimento do elemento e ao longo da altura da seção transversal. O efeito da inelasticidade tem grande influência na análise de instabilidade.

Efeito das Tensões Residuais - As tensões residuais são geradas durante o processo de fabricação dos elementos de aço da seguinte forma : as barras de aço são aquecidas e resfriadas; a parte da seção transversal na qual a relação área e volume for maior irá perder calor mais rápido que a parte na qual a relação entre a área e volume seja menor; este resfriamento desigual das partes da barra de aço cria dentro da seção transversal um estado de equilíbrio de tensões; estas tensões são chamadas de residuais pois permanecem nas barras após a sua confecção.

Distribuição da Inelasticidade a Medida que o Carregamento Aumenta - Durante o processo de carregamento da estrutura, a inelasticidade vai se espalhando pela estrutura. Para se levar em consideração este efeito, as barras devem ser divididas em subelementos. Assim, utilizando-se o conceito de inelasticidade distribuída, pode-se levar em consideração este efeito que influencia o comportamento de instabilidade da estrutura.

2.4.3 Efeitos do Carregamento

Carregamentos Não Proporcionais - A forma como o carregamento é aplicado na estrutura influencia a resposta da mesma. Existe a possibilidade de certas ações não estarem acontecendo ao mesmo tempo que outras ações, como é o caso da ação de vento, abalos sísmicos, impacto, etc. Assim, os carregamentos, que são conjunto de ações que estão atuando em uma estrutura, não representam o real estado de solicitação de uma estrutura. Estas estão

sempre sendo solicitadas com carregamentos não proporcionais. É importante mencionar que o carregamento não proporcional afeta o comportamento das estruturas que estão solicitadas no campo inelástico.

Carregamento e Descarregamento da Estrutura - O efeito da variação e repetição de um carregamento pode provocar deformações reversas em um elemento. Desta forma, uma análise do caminho de carregamento é requerida para poder representar o comportamento da estrutura. Este tipo de efeito influencia no comportamento inelástico da estrutura.

Capítulo 3

Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Planos

3.1 Introdução

A instabilidade de uma estrutura reticulada é ocasionada devido a degradação de sua capacidade portante. O efeito de não linearidade física e efeito de não linearidade geométrica são uns dos principais ocasionadores da perda da capacidade portante de uma estrutura reticulada. Este capítulo abordará o estudo da instabilidade ocasionada pelo efeito da não linearidade geométrica. A degeneração geométrica da estrutura é ocasionada a medida que o carregamento é aplicado e esta passa da posição indeslocada para a deslocada. Alguns métodos podem ser empregados para levar em consideração o efeito de não linearidade geométrica. No presente trabalho, serão apresentados dois métodos que são usualmente empregados para se considerar o efeito de não linearidade geométrica nas barras: método dos elementos finitos e método das funções de estabilidade (também conhecidas como funções de rigidez).

O objetivo deste capítulo é apresentar e desenvolver estas duas formulações que podem ser utilizadas para se realizar tanto a análise considerando o efeito de não linearidade geométrica nas barras quanto a análise de instabilidade de estruturas reticuladas. A título de comparação são apresentadas as diferenças entres estes dois métodos e também as vantagens e desvantagens que implicam na utilização de um ou do outro. Exemplos numéricos são apresentados para validar e comparar os resultados obtidos por ambos os métodos. As análises utilizando o métodos das funções de rigidez foram realizadas através de um programa desenvolvido pelo autor, enquanto as análises feitas pelo método dos elementos finitos, foram realizadas através do programa comercial ANSYS⁴⁶.

3.2 Hipóteses assumidas na análise não linear geométrica

As hipóteses assumidas na análise não linear geométrica de pórticos planos são apresentadas a seguir:

- os elementos de barras são considerados perfeitamente retos;
- as forças axiais são aplicadas ao longo do eixo centroidal das barras;
- o material obedece a lei de Hooke, ou seja, as tensões são proporcionais as deformações;
- as seções permanecem planas após a deformação, ou seja, não há distorção na seção transversal;
- a estrutura do pórtico é considerada constituída de elementos de barra deformáveis por flexão, por força axial e força cortante em seu plano (esta última não se aplica na análise pelo método dos elementos finitos);
- o desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos para estrutura no regime elástico;
- o desenvolvimento pelo método dos elementos finitos é feito utilizando a formulação variacional para estruturas o qual representa a energia potencial total do problema;
- as ações são aplicadas apenas no plano do pórtico;
- a não linearidade geométrica é levada em consideração através da influência da força axial nos elementos de barra;
- o desenvolvimento matricial é baseado na teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações;
- a formulação variacional é baseada neste trabalho na teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações; e,
- para o caso de análise de instabilidade, o carregamento crítico da estrutura é alcançado quando esta deixa de ser estável em seu próprio plano, admitindo estável fora do plano por vinculações adequadas.

3.3 Sistema de Referência Global de Eixos para a Estrutura do Pórtico Plano

Para referência da estrutura do pórtico será adotado um sistema global dextrorso com eixos " X_G ", " Y_G ", " Z_G " e origem "O" em um ponto qualquer do plano. O eixo " X_G " tem a direção horizontal e é orientado da esquerda para direita. O

eixo " Y_G " tem a direção vertical e é orientado de baixo para cima. O plano "XY" define o plano da estrutura do pórtico conforme apresentado na figura 3.1. O eixo " Z_G " é definido através do produto vetorial entre " X_G " e " Y_G ".

3.4 Sistema de Referência Local de Eixos para o Elemento de Barra "i" no plano

Para referência do elemento de barra "i" será adotado um sistema local dextrorso com eixos "x", "y" e "z" e origem " O_i " da barra "i" no centro de gravidade da mesma. O eixo "x" será o próprio eixo da barra orientado do nó inicial "j" para o nó final "k". O eixo "y" será orientado perpendicularmente ao eixo "x" com início no nó "j" da barra. O ângulo " γ ", formado entre o eixo " X_G " global da estrutura e o eixo "x" local do elemento de barra, medido no sentido antihorário a partir do primeiro, em relação ao eixo " Z_G ", define a relação entre sistemas de referência global e local. Os eixos " x_s " e " y_s " são eixos paralelos aos eixos globais com origem coincidente a origem do sistema local da barra. A figura 3.1 mostra uma barra genérica de extremidades "j" e "k" e ilustra os sistemas de eixos acima descritos.

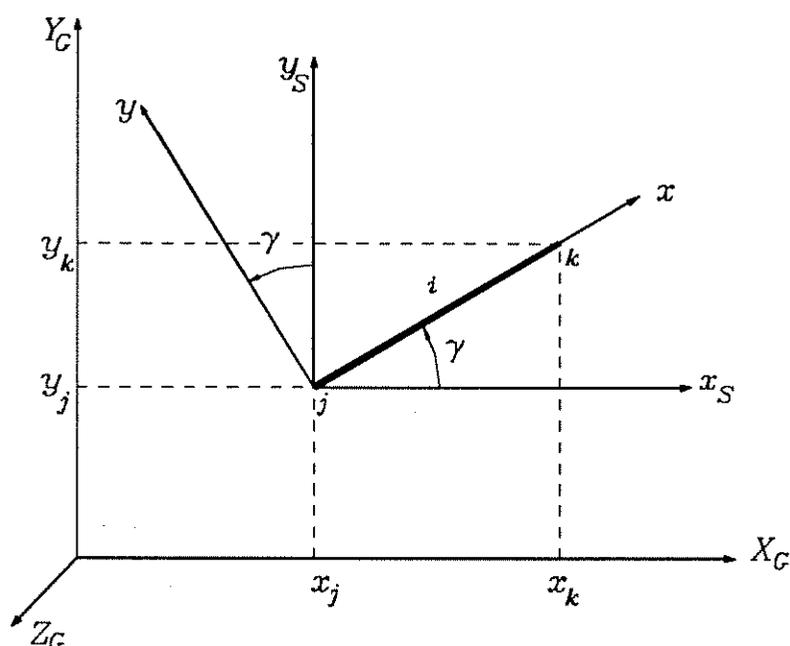


Figura 3.1 - Sistemas de referência global e local para barra plana.

3.5 O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos se baseia na divisão do domínio de integração (contínuo) em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos. Desta forma, o meio contínuo é transformado em discreto.

A forma deste reticulado é arbitrária, podendo ser aumentada ou diminuída conforme se aumente ou diminua o elemento finito. Os pontos de interseção das linhas são chamadas nós.

Ao invés de se tentar encontrar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio do problema, no método dos elementos finitos, as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito.

Para cada elemento finito "i" é montado um funcional " Π_i " que somado aos demais elementos finitos formam o funcional " Π " para todo o domínio:

$$\Pi = \sum_{j=1}^m \Pi_j \quad (3.1)$$

Para cada elemento finito "i", as funções aproximadoras são formadas em termos de variáveis referidas aos nós do elemento (variáveis nodais) e de funções denominadas de funções de forma. Assim, as funções aproximadoras podem ser expressas da seguinte maneira:

$$v = \sum_{j=1}^m a_j v_j \quad (3.2)$$

O funcional " Π " fica sendo expresso por:

$$\Pi(a_j) = \sum_{j=1}^m \Pi_j(a_j) \quad (3.3)$$

O funcional " Π_i " representa a energia potencial total de cada elemento finito. A energia potencial total é formada pela soma da energia de deformação que é absorvida pelo elemento finito em questão e pelo trabalho das forças externas atuando neste elemento. O funcional tem como característica ser uma função que tem como variáveis funções e suas derivadas. No cálculo variacional, aplicam-se métodos que permitem achar os valores extremos dos funcionais. Desta forma, procura-se uma função, tal que, dentre todas as funções admissíveis possíveis,

aquela que é solução exata para minimizar um determinado funcional. As leis da mecânica que aplicam esses métodos são chamadas de princípios variacionais e dentre eles podemos destacar o princípio da mínima energia potencial. Este princípio estabelece que a configuração de equilíbrio é sempre aquela em que dentre todos os campos de deslocamentos geometricamente possíveis e compatíveis, satisfazendo as condições de contorno, aqueles que satisfazem as condições de equilíbrio resultam em valor estacionário de energia potencial total. Desta forma, no equilíbrio, a variação da energia potencial total é nula.

Ao se aplicar o princípio da mínima energia potencial total, a condição de estacionariedade do funcional gera um sistema de equações lineares, tais como:

$$\delta\Pi(a_j) = \sum_{j=1}^m \delta\Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial\Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (3.4)$$

A solução do sistema de equações fornece os valores dos parâmetros nodais "a_j". Como o princípio utilizado é baseado na mínima energia potencial total, estas incógnitas são os deslocamentos nodais. O método dos elementos finitos onde as incógnitas são os deslocamentos nodais é chamado de modelo dos deslocamentos ou modelo de rigidez.

3.6 Desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos

Uma formulação genérica para o método dos elementos finitos pode ser realizada a partir da forma geral do funcional que representa a energia potencial total deste elemento.

Considere um vetor "u" que apresenta as funções aproximadoras para os deslocamentos de cada elemento finito. Para o caso de pórticos planos, este vetor é dado por $u = \{ u_x \ u_y \}^T$.

É possível representar as funções aproximadoras em função dos deslocamentos nodais do elemento finito. Estes deslocamentos nodais serão chamados de incógnitas nodais do elemento finito e serão representados pelo vetor "v_i". Desta forma, o vetor "u" pode ser escrito da seguinte forma:

$$u = \phi v \quad (3.5)$$

sendo "φ" a matriz das funções de forma e "v" as incógnitas nodais do elemento finito.

É possível ainda escrever as funções aproximadoras em função dos parâmetros generalizados "a":

$$u = N a \quad (3.6)$$

sendo esta forma a mais freqüentemente utilizada e encontrada nas publicações.

Cada elemento finito apresenta as incógnitas "v_i". Para o caso de pórticos planos, o elemento finito apresenta dois nós: nó inicial "j" e nó final "k". O nó inicial apresenta as incógnitas "u₁", "u₂" e "u₃" e o nó final "u₄", "u₅" e "u₆".

O vetor de incógnitas nodais pode ser escrito da seguinte forma:

$$v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \end{Bmatrix} = A a \quad (3.7)$$

A equação (3.7) pode ser reordenada e escrita conforme apresentado a seguir:

$$a = A^{-1} v \quad (3.8)$$

É importante ressaltar que a matriz "A" tem que ser inversível e caso isto não ocorra, as funções aproximadoras não são adequadas para serem utilizadas.

A relação entre tensão e deformação é representada pela seguinte igualdade:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (3.9)$$

sendo "σ" o vetor das tensões, "D" o tensor das tensões e "ε" o vetor das deformações.

As deformações em função dos deslocamentos podem ser expressas pela seguinte igualdade:

$$\varepsilon = L u \quad (3.10)$$

sendo "L" a matriz dos operadores diferenciais ou gradiente de deslocamentos.

Substituindo a equação (3.6) em (3.10), as deformações ficam expressas por:

$$\varepsilon = L N a \quad (3.11)$$

Introduzindo a equação (3.8) em (3.11), a igualdade fica:

$$\varepsilon = L N A^{-1} v \quad (3.12)$$

Comparando a equação (3.5) com (3.12), conclui-se que:

$$\phi = N A^{-1} \quad (3.13)$$

Chamando $B = L N A^{-1}$, a equação para as deformações pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = B v \quad (3.14)$$

A energia de deformação armazenada por um elemento finito pode ser representada de forma genérica por:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (3.15)$$

sendo "dV" o volume diferencial onde está instalado o estado de tensões e correspondentes deformações.

O trabalho realizado pelas forças volumétricas "b" e ações externas "p", cujas componentes estão dirigidas para as incógnitas nodais, pode ser expresso por:

$$\Omega_i = - \int_V u^T b dV - \int_S u^T p dS \quad (3.16)$$

sendo "S" a região onde as ações estão aplicadas.

A energia potencial total de um elemento finito é formada pela soma da energia de deformação com o trabalho das forças volumétricas e ações externas. Desta forma, pode-se escrever:

$$\Pi_i = U_i + \Omega_i = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV - \int_V u^T b dV - \int_S u^T p dS \quad (3.17)$$

A energia potencial total obtida na equação (3.17) representa o funcional do elemento finito. Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial, no equilíbrio resulta na nulidade de " Π_i ":

$$\delta \Pi_i = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_V \delta u^T b dV - \int_S \delta u^T p dS = 0 \quad (3.18)$$

Reordenados os termos, chega-se em:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T b dV + \int_S \delta u^T p dS \quad (3.19)$$

A equação (3.19) representa a igualdade entre os trabalhos interno e externo, representando as equações de equilíbrio do elemento finito.

Aplicando-se uma variação na equação (3.6), esta fica expressa por:

$$\delta u = N \delta a \quad (3.20)$$

Como $a = A^{-1} v$, então a variação desta igualdade fica dada por:

$$\delta a = A^{-1} \delta v \quad (3.21)$$

Substituindo a equação (3.21) em (3.20), esta fica representada da seguinte forma:

$$\delta u = N A^{-1} \delta v \quad (3.22)$$

Aplicando-se uma variação nas deformações correspondentes, obtém-se:

$$\delta \varepsilon = L N A^{-1} \delta v \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.22) e a (3.23) na (3.19), esta fica expressa da seguinte maneira:

$$\delta v^T \int_V L^T N^T (A^{-1})^T \sigma dV = \delta v^T \int_V N^T (A^{-1})^T b dV + \delta v^T \int_S N^T (A^{-1})^T p dS \quad (3.24)$$

Como os deslocamentos " δv^T " são arbitrários, a equação (3.24) pode ser expressa por:

$$\int_V L^T N^T (A^{-1})^T \sigma dV = (A^{-1})^T \left(\int_V N^T b dV + \int_S N^T p dS \right) \quad (3.25)$$

Através da equação (3.14) sabe-se que $B = L N A^{-1}$. Substituindo esta equação em (3.25), a última assume a seguinte forma:

$$\int_V B^T \sigma dV = (A^{-1})^T \left(\int_V N^T b dV + \int_S N^T p dS \right) \quad (3.26)$$

Substituindo a igualdade (3.12) na equação (3.9), chega-se em:

$$\sigma = D \varepsilon = D L N A^{-1} v = D B v \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.27) em (3.26), esta igualdade fica:

$$\left(\int_V B^T D B dV \right) v = (A^{-1})^T \left(\int_V N^T b dV + \int_S N^T p dS \right) \quad (3.28)$$

O termo entre parênteses do lado esquerdo da equação (3.28) representa a matriz de rigidez do elemento finito, calculada por:

$$k = \int_V B^T D B dV \quad (3.29)$$

Caso não se tenha explicitada a matriz “B”, então “k” pode ser desenvolvida e obtida através da seguinte expressão:

$$\int_V L^T N^T (A^{-1})^T D A^{-1} N L dV \quad (3.30)$$

As duas integrais do lado direito da equação (3.28) constituem o vetor das cargas nodais equivalentes:

$$r = (A^{-1})^T \left(\int_V N^T b dV + \int_S N^T p dS \right) \quad (3.31)$$

Escrevendo as funções aproximadoras em função das incógnitas nodais de acordo com a equação (3.5), o vetor de cargas nodais equivalentes pode ser escrito da seguinte forma:

$$r = \int_V \phi^T b dV + \int_S \phi^T p dS \quad (3.32)$$

Da equação (3.28) resulta o sistema de equações para o método do elementos finitos:

$$k v = r \quad (3.33)$$

Fazendo uma extensão para todos os elementos finitos que representam todo o contínuo (corpo), a matriz “K” representa a matriz de rigidez para todo o problema, o vetor “V” representa todas as incógnitas nodais e o vetor “R” todas as cargas nodais equivalentes. Desta forma, a solução do contínuo pode ser expressa por:

$$K V = R \quad (3.34)$$

3.7 Aplicação do Método dos Elementos Finitos - Determinação da Matriz de Rigidez do Pórtico Plano

3.7.1 O Método de Rayleigh-Ritz

O cálculo variacional é aplicado a um funcional com o objetivo de se obter uma função “y(x)” que dentre todas as funções admissíveis possíveis, esta seja a solução exata para minimizar o funcional.

Dependendo do tipo de problema que está sendo analisado, a obtenção desta solução exata se torna difícil. Desta forma, são utilizados métodos aproximados para resolver o problema. No método de Rayleigh-Ritz, a suposta

função exata “ $y(x)$ ” é substituída por uma função aproximadora “ $v(x)$ ”. Esta função “ $v(x)$ ” é formada por uma combinação linear de funções “ $v_i(x)$ ”. Após a substituição de “ $y(x)$ ” por “ $v(x)$ ”, o funcional é minimizado.

Assume-se que a solução pode ser obtida considerando a função “ $v(x)$ ” como uma combinação linear de funções “ $v_i(x)$ ” tal que:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \quad (3.35)$$

As funções “ $v_i(x)$ ” são denominadas funções de forma e são linearmente independentes, satisfazendo as condições de contorno. Estas funções devem ser contínuas até o grau “ $m-1$ ”, sendo “ m ” a ordem da maior derivada do funcional.

Os coeficientes “ a_i ” são desconhecidos e denominados parâmetros de deslocamentos. A função “ $v(x)$ ” é chamada de função aproximadora.

Substituindo “ y ” por “ v ” no funcional e impondo-se as condição de estacionalidade, chega-se a um sistema de equações homogêneas que resolvido, fornece os valores dos deslocamentos nodais.

3.7.2 Hipótese Cinemática Assumida

Considere a barra que se deforma devido as ações externas aplicadas apenas nas extremidades desta conforme mostrado na figura 3.2. Para o cálculo da energia de deformação “ U_i ” desta barra serão consideradas apenas deformações normais, negligenciando as deformações por cisalhamento. As deformações normais para pequenos deslocamentos podem ser expressas pela seguinte igualdade:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (3.36)$$

sendo “ y ” a distância do centro de gravidade a uma fibra qualquer da seção transversal, “ u_x ” representa a função dos deslocamentos longitudinais e “ u_y ” representa uma função para os deslocamentos transversais.

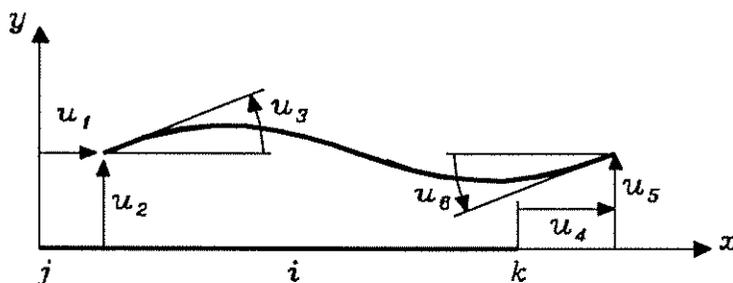


Figura 3.2 - Elemento de barra plano no estado indeformado e deformado.

A energia de deformação armazenada nesta barra é dada pela seguinte igualdade apresentada a seguir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dV \quad (3.37)$$

Substituindo a equação (3.9) em (3.37), chega-se em:

$$U_i = \frac{D}{2} \int_V \varepsilon^2 \, dV \quad (3.38)$$

Introduzindo a equação (3.36) em (3.38), a energia de deformação fica expressa por:

$$U_i = \frac{E}{2} \int_V \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dV \quad (3.39)$$

Desenvolvendo a equação (3.39), tem-se:

$$U_i = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 + \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 y + \frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] dA dx \quad (3.40)$$

Lembrando o conceito de momento estático e momento de inércia:

$$J = \int_A y \, dA \quad I = \int_A y^2 \, dA \quad (3.41)$$

Introduzindo a igualdade (3.41) em (3.40), desprezando os termos de quarta ordem $1/4 (\partial u_y / \partial x)^4$, realizando a integral na área "A" da seção transversal e lembrando que "y" é a medida de uma fibra qualquer em relação ao centro de gravidade da seção transversal (desta forma, todas as integrais da forma " $\int_A y \, dA$ " devem ser iguais a zero), a equação (3.40) fica:

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.42)$$

Conforme apresentado na equação (3.28), a matriz de rigidez é obtida através da contribuição da energia de deformação. Desta forma, de acordo com a equação (3.42), a matriz de rigidez do elemento de barra plano será formada pela contribuição de três parcelas: as duas primeiras constituem a contribuição da parte linear da matriz que é obtida utilizando a teoria dos pequenos deslocamentos; a terceira representa a contribuição da parcela não linear da matriz. Estas parcelas serão desenvolvidas a seguir utilizando o método de Rayleigh-Ritz e utilizando a nomenclatura apresentada no desenvolvimento do método do elementos finitos.

3.7.3 Função Aproximadora para os Deslocamentos Longitudinais

Admitindo que a deformação longitudinal “ ϵ ” seja constante ao longo do elemento finito, os deslocamentos longitudinais podem ser representados por um reta:

$$u_x(x) = a_1 + a_4 x \quad (3.43)$$

Impondo-se as condições de contorno na equação (3.43) e substituindo os valores encontrados para “ a_1 ” e “ a_4 ” nesta mesma igualdade, pode-se chegar em:

$$u_x(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_4 \left(\frac{x}{L} \right) \quad (3.44)$$

Conforme apresentado por ASSAN⁴⁷, é conveniente trabalhar em coordenadas adimensionais. Fazendo $\xi = x/L$, a equação (3.44) pode ser escrita como:

$$u_x(\xi) = u_1(1 - \xi) + u_4 \xi \quad (3.45)$$

Derivando a equação (3.45), chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{du_x(\xi)}{d\xi} = \frac{du_x}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_4 - u_1}{L} \quad (3.46)$$

A equação (3.46) representa a variação do deslocamento por unidade de comprimento.

A equação (3.45) pode ser expressa na forma vetorial da seguinte maneira:

$$u_x(\xi) = \{(1-\xi) \ 0 \ 0 \ \xi \ 0 \ 0\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Introduzindo o conceito de fator de forma " $\phi(\xi)$ ", a equação (3.47) fica:

$$u_x(\xi) = \phi(\xi)v \quad (3.48)$$

conforme apresentado na equação (3.5).

O operador diferencial "L" é dado por:

$$L = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] \quad (3.49)$$

Aplicando o operador diferencial na equação (3.48), esta fica:

$$\frac{\partial u_x(\xi)}{\partial \xi} = L \phi(\xi) v \quad (3.50)$$

sendo $L \phi(\xi) = \{-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}$.

Conforme apresentado em (3.14), tem-se que:

$$B = L \phi(\xi) v \quad (3.51)$$

3.7.4 Função Aproximadora para os Deslocamento Transversais

Para representar os deslocamentos transversais da barra será adotada uma função aproximadora do terceiro grau do tipo:

$$u_y(x) = a_2 + a_3x + a_5x^2 + a_6x^3 \quad (3.52)$$

Impondo-se as condições de contorno na equação (3.52) e substituindo os valores encontrados para " a_2 ", " a_3 ", " a_5 " e " a_6 " nesta mesma igualdade, pode-se chegar em:

$$\begin{aligned} u_y(x) = & u_2 \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) + u_3 \left(x - 2L \frac{x^2}{L^2} + L \frac{x^3}{L^3} \right) + \\ & + u_5 \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right) + u_6 \left(-L \frac{x^2}{L^2} + L \frac{x^3}{L^3} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Introduzindo a coordenada homogêneas "ξ" e chamando $u_3L = \theta_3$ e $u_6L = \theta_6$, a equação (3.53) fica:

$$u_y(\xi) = u_2(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \theta_3(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) + u_5(3\xi^2 - 2\xi^3) + \theta_6(-\xi^2 + \xi^3) \quad (3.54)$$

A igualdade apresentada em (3.54) pode ser expressa na forma vetorial da seguinte maneira:

$$u_y(\xi) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 & (3\xi^2 - 2\xi^3) & (-\xi^2 + \xi^3) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \theta_6 \end{array} \right\} \quad (3.55)$$

Introduzindo o conceito de fator de forma " $\phi(\xi)$ ", a equação (3.55) fica:

$$u_y(\xi) = \phi(\xi)v \quad (3.56)$$

conforme apresentado na equação (3.5).

O primeiro operador diferencial "L" é dado por:

$$L = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] \quad (3.57)$$

Aplicando o operador diferencial na equação (3.56), esta fica como:

$$\frac{\partial u_y(\xi)}{\partial \xi} = L \phi(\xi) v \quad (3.58)$$

sendo $L \phi(\xi) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & (-6\xi + 6\xi^2) & (1 - 4\xi + 3\xi^2) & 0 & (6\xi - 6\xi^2) & (-2\xi + 3\xi^2) \end{array} \right\}$.

Conforme apresentado na equação (3.14), tem-se que:

$$B = L \phi(\xi) v \quad (3.59)$$

O segundo operador diferencial "L" é dado por:

$$L = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \quad (3.60)$$

Aplicando o operador diferencial na equação (3.60), esta fica expressa por:

$$\frac{\partial^2 u_y(\xi)}{\partial \xi^2} = L \phi(\xi) v \quad (3.61)$$

sendo $L \phi(\xi) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & (-6 + 12\xi) & (-4 + 6\xi) & 0 & (6 - 12\xi) & (-2 + 6\xi) \end{array} \right\}$.

Conforme apresentado na equação (3.14), tem-se que:

$$B = L \phi(\xi) v \quad (3.62)$$

3.7.5 Primeira Parcela - Energia de Deformação por Esforço Axial (U_N)

A primeira parcela da energia de deformação apresentada na equação (3.42) é dada por:

$$U_N = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.63)$$

Passando a equação (3.63) para coordenadas adimensionais "ξ", esta fica:

$$U_N = \frac{EA}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 L d\xi = \frac{EA}{2L} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (3.64)$$

Substituindo a equação (3.50) em (3.64) e chamando $D = [EA]$, chega-se:

$$U_N = \frac{1}{2L} \int_0^1 D (L \phi(\xi) v)^2 d\xi \quad (3.65)$$

A equação apresentada em (3.65) pode ainda ser escrita da seguinte maneira:

$$U_N = \frac{1}{2L} \int_0^1 v^T \phi^T(\xi) L^T D L \phi(\xi) v d\xi \quad (3.66)$$

Aplicando uma variação na equação (3.66), pode-se escrever:

$$\delta U_N = \delta v^T \left(\frac{1}{L} \int_0^1 \phi^T(\xi) L^T D L \phi(\xi) d\xi \right) \quad (3.67)$$

Substituindo a equação (3.51) em (3.67), chega-se em:

$$\delta U_N = \delta v^T \left(\frac{1}{L} \int_0^1 B^T D B d\xi \right) v \quad (3.68)$$

Comparando a equação (3.68) com (3.28), percebe-se que:

$$k_N = \frac{1}{L} \int_0^1 B^T D B d\xi \quad (3.69)$$

sendo que " k_N " representa a contribuição na matriz de rigidez do elemento finito de barra plana devido a parcela da energia de deformação por esforço normal.

Substituindo "B" e "D" na equação (3.69) e realizando a integral obtém-se os coeficientes de rigidez devido a parcela de energia de deformação por esforço normal. Estes coeficientes são apresentados a seguir:

$$K_{11} = \frac{EA}{L}, K_{14} = \frac{-EA}{L}, K_{41} = \frac{-EA}{L} \text{ e } K_{44} = \frac{EA}{L} \quad (3.70)$$

A contribuição nos demais elementos da matriz de rigidez são nulas.

3.7.6 Segunda Parcela - Energia de Deformação por Flexão (U_F)

A segunda parcela da energia de deformação apresentada na equação (3.42) é dada por:

$$U_F = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.71)$$

Passando a equação (3.71) para coordenadas homogêneas "ξ", esta fica:

$$U_F = \frac{EI}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 L d\xi = \frac{EI}{2L^3} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (3.72)$$

Substituindo a equação (3.61) em (3.72) e chamando $D=[EI]$, chega-se em:

$$U_F = \frac{1}{2L^3} \int_0^1 D (L \phi(\xi) v)^2 d\xi \quad (3.73)$$

A equação apresentada na equação (3.73) pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_F = \frac{1}{2L^3} \int_0^1 v^T \phi^T(\xi) L^T D L \phi(\xi) v d\xi \quad (3.74)$$

Aplicando uma variação na equação (3.74), pode-se escrever:

$$\delta U_F = \delta v^T \left(\frac{1}{L^3} \int_0^1 \phi^T(\xi) L^T D L \phi(\xi) d\xi v \right) \quad (3.75)$$

Introduzindo a equação (3.62) em (3.75), percebe-se que:

$$\delta U_F = \delta v^T \left(\frac{1}{L^3} \int_0^1 B^T D B d\xi v \right) \quad (3.76)$$

Comparando a equação (3.28) com (3.76), percebe-se que :

$$k_F = \frac{1}{L^3} \int_0^1 B^T D B d\xi \quad (3.77)$$

sendo que "k_F" representa a contribuição na matriz de rigidez do elemento finito de barra plana devido a energia de deformação por flexão.

Substituindo "B" e "D" na equação (3.77) e realizando a integral, obtém-se os coeficientes de rigidez devido a parcela de energia de deformação por flexão. Estes coeficientes são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} K_{22} = K_{55} = \frac{12EI}{L^3}, K_{23} = K_{32} = \frac{6EI}{L^2}, K_{25} = K_{52} = \frac{-12EI}{L^3}, K_{26} = K_{62} = \frac{-6EI}{L^2} \\ K_{33} = K_{66} = \frac{4EI}{L}, K_{35} = K_{53} = \frac{-6EI}{L^2}, K_{36} = K_{63} = \frac{2EI}{L} \text{ e } K_{56} = K_{65} = \frac{-6EI}{L^2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

A contribuição nos demais elementos da matriz de rigidez são nulas.

3.7.7 Terceira Parcela - Componente Não Linear da Energia de Deformação (U_{NL})

A terceira parcela da energia de deformação apresentada na equação (3.42) é dada por:

$$U_{NL} = \frac{EA}{2} \int_0^1 \frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.79)$$

Passando a equação (3.79) para coordenadas homogêneas "ξ", a igualdade fica:

$$U_{NL} = \frac{EA}{2} \int_0^1 \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 L d\xi \quad (3.80)$$

Substituindo a equação (3.46) em (3.80), obtém-se:

$$U_{NL} = \frac{EA}{2L} \int_0^1 \left(\frac{u_4 - u_1}{L} \right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (3.81)$$

Assumindo a hipótese de que a força axial seja constante ao longo da barra (de acordo com PRZEMIENIECKI¹⁴), tem-se que:

$$P \cong EA \frac{(u_4 - u_1)}{L} \quad (3.82)$$

Substituindo a equação (3.82) em (3.81), chega-se:

$$U_{NL} = \frac{P}{2L} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (3.83)$$

Substituindo a equação (3.58) em (3.83), esta fica expressa por:

$$U_{NL} = \frac{P}{2L} \int_0^1 (L \phi(\xi) v)^2 d\xi \quad (3.84)$$

A equação apresentada em (3.84) pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_{NL} = \frac{P}{2L} \int_0^1 v^T \phi^T(\xi) L^T L \phi(\xi) v d\xi \quad (3.85)$$

Aplicando uma variação na equação (3.85), esta fica:

$$\delta U_{NL} = \delta v^T \left(\frac{P}{L} \int_0^1 \phi^T(\xi) L^T L \phi(\xi) d\xi v \right) \quad (3.86)$$

Substituindo a equação (3.59) em (3.86), a igualdade fica:

$$\delta U_{NL} = \delta v^T \left(\frac{P}{L} \int_0^1 B^T B d\xi v \right) \quad (3.87)$$

A parcela da matriz de rigidez do elemento finito barra plana devido a parcela não linear da energia de deformação é dada por:

$$k_g = \frac{P}{L} \int_0^1 B^T B d\xi \quad (3.88)$$

Substituindo "B" e realizando a integral, obtém-se os coeficientes de rigidez devido a parcela não linear da energia de deformação. Estes coeficientes são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} K_{22} = K_{55} = \frac{-6P}{5L}, K_{23} = K_{32} = \frac{-P}{10}, K_{25} = K_{52} = \frac{6P}{5L}, K_{26} = K_{62} = \frac{-P}{10} \\ K_{33} = K_{66} = \frac{-2PL}{15}, K_{35} = K_{53} = \frac{P}{10}, K_{36} = K_{63} = \frac{PL}{30} \text{ e } K_{56} = K_{65} = \frac{P}{10} \end{aligned} \quad (3.89)$$

A contribuição nos demais elementos da matriz de rigidez são nulas.

3.7.8 Matriz de Rigidez para Elemento de Pórtico Plano

A matriz de rigidez para a análise de pórticos planos pode ser obtida somando as contribuições de cada parcela das matrizes obtidas separadamente no desenvolvimento anterior. Desta forma, a matriz "k" pode ser obtida da seguinte forma:

$$[k_B] = [k_e] + [k_g] \quad (3.90)$$

Colocando a equação apresentada em (3.90) na forma matricial, chega-se em:

$$[k_B] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \pm \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Esta mesma matriz é apresentada de maneira diferente na tabela 3.1. Como pode ser observado, a matriz de rigidez para pórticos planos consiste de duas partes. A primeira parte $[k_B]$, formada pelas matrizes $[k_N]$ e $[k_F]$, incorpora as propriedades geométricas da barra para pórtico plano (EA e EI). Esta parte da matriz é idêntica a matriz de rigidez obtida através da teoria dos pequenos deslocamentos de primeira ordem. Esta parte da matriz é exata (dentro das hipóteses assumidas) porque a função aproximada (polinômio do terceiro grau) utilizada para representar os deslocamentos transversais da barra é a solução correta da equação diferencial para barras. A segunda parcela $[k_g]$ é independente das propriedades elásticas da barra, sendo proporcional ao esforço axial presente na barra (P). Esta segunda parte altera a rigidez devido a presença da força axial. Este esforço pode ser de tração ou compressão (por isso a presença do sinal mais ou menos na matriz de rigidez). Se a carga for de tração, então a rigidez da barra é aumentada, caso contrário, esta é reduzida. Esta matriz é utilizada pelo programa comercial ANSYS52 para análise numérica de instabilidade de estruturas reticuladas planas.

O vetor das cargas nodais equivalentes representado por (3.32) não será desenvolvido no presente trabalho pois isto foge ao objetivo deste. Entretanto,

caso se queira obter informações sobre o assunto, recomenda-se a bibliografia PRZEMIENIECKI¹⁴ e ASSAN³⁰ como fonte de consulta.

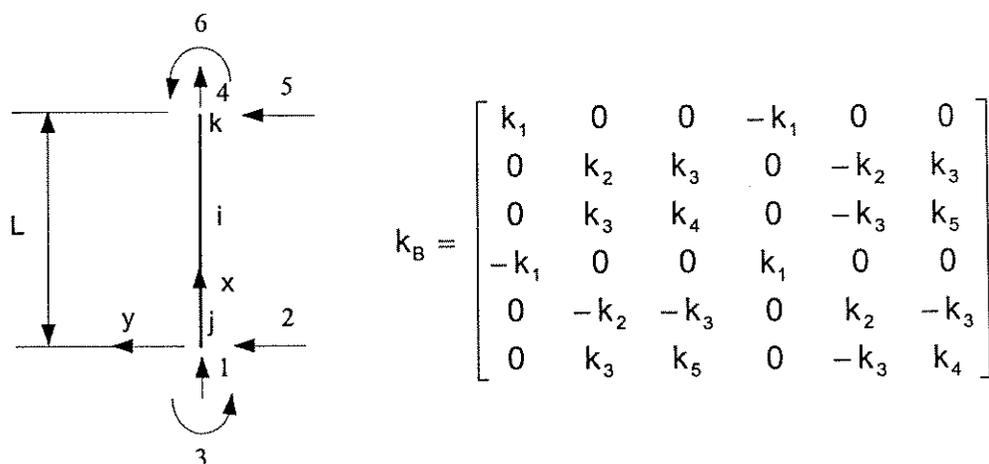


Figura 3.3 - Matriz de rigidez para barra prismática e seção transversal constante para análise de pórticos planos.

Tabela 3.1 - Coeficientes de rigidez para análise não linear pelo método dos elementos finitos.

	Compressão ($P < 0$)	($P=0$)	Tração ($P > 0$)
k_1	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$
k_2	$\frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{12EI}{L^3} + \frac{6P}{5L}$
k_3	$\frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10}$
k_4	$\frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15}$
k_5	$\frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30}$	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30}$

3.8.1 Formulação da Matriz de Rigidez do Elemento de Barra Considerando o Efeito da Força Axial

Considere a barra mostrada na figura 3.4. É admitido que esta esteja totalmente engastada em ambas as extremidades denominadas de "j" e "k". As rigidezes da barra serão determinadas tendo como base o conjunto de eixos ortogonais orientados com o eixo da barra conforme apresentado na figura 3.4. Estes eixos são idênticos aos apresentados na figura 3.1 no início deste capítulo e desta forma não serão detalhados novamente aqui. As propriedades da barra serão definidas em uma forma sistemática com o propósito de programação para computadores. O comprimento da barra será denominado de "L", a área da seção transversal de "A" e o momento de inércia da seção transversal no plano "xy" de "I".

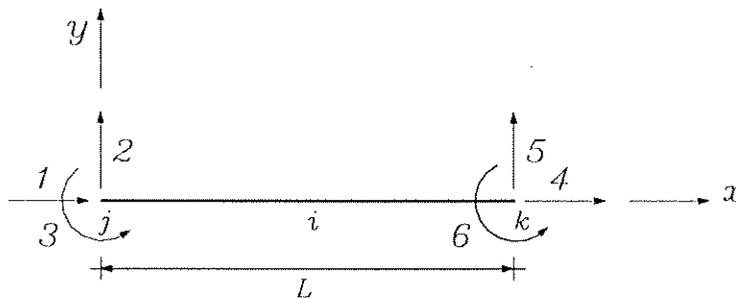


Figura 3.4 - Sistema de coordenadas locais para barra.

Os coeficientes de rigidez da barra biengastada apresentados na figura 3.5 são os esforços resultantes sobre a barra pelas restrições quando são impostos a cada extremidade da barra deslocamentos unitários independentes de translações e giros. Estes deslocamentos unitários são considerados como produzidos um de cada vez enquanto todos os outros deslocamentos de extremidade se mantêm nulos. Os deslocamentos unitários são considerados positivos nas direções de "x", "y" e "z". Os sentidos positivos das translações e rotações em cada extremidade são apresentados na figura 3.5.

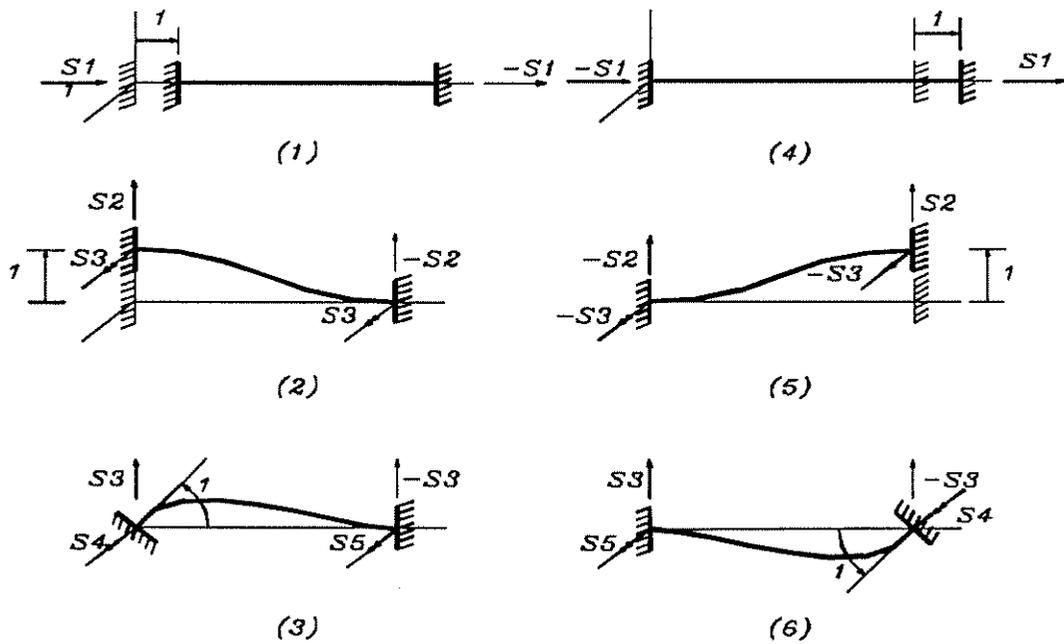


Figura 3.5 - Estados de deslocamentos: translação unitária horizontal nas direções (1) e (4); translação unitária vertical nas direções (2) e (5) e giro unitário nas direções (3) e (6).

Para determinar a matriz de rigidez de barra de pórticos planos são dados deslocamentos unitários nas direções das coordenadas apresentadas na figura 3.5. Devido aos deslocamentos impostos nas coordenadas "1", "2", "3", "4", "5" e "6" surgem ações de extremidade necessárias para manter o equilíbrio da barra na posição deformada. Desta forma, é possível obter uma matriz que relaciona os deslocamentos "D" com os esforços "F". Esta matriz é da ordem de 6×6 onde cada coluna representa as ações de extremidade originadas devido aos deslocamentos unitários impostos na barra. Esta matriz é apresentada na figura 3.6. Os valores não nulos são designados por "S1", "S2", "S3", "S4" e "S5". Devido ao teorema da reciprocidade, é possível mostrar que esta matriz é simétrica conforme apresentada na figura 3.6.

$$\begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{Bmatrix}$$

Figura 3.6 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.

O coeficiente "S1" cujo valor é a rigidez axial da barra é afetado pela presença do esforço normal "P" ao longo da barra. Entretanto, como o efeito de encurtamento da barra é desprezado, a rigidez axial é obtida conforme apresentado no método dos deslocamentos onde o efeito de segunda ordem não é levado em consideração. Assim, tem-se que $S_{11} = -S_{41} = S1$.

Adotando a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elásticas do material, chega-se em:

$$S1 = \frac{EA}{L} \quad (3.92)$$

Fazendo a somatória dos momentos no nó inicial da barra, aplicada no estado de deslocamento da Fig.3.4(2), admitindo que haja um esforço "P" de tração na barra, obtém-se:

$$S3 + S3 - S2L + P = 0 \quad (3.93)$$

$$S2 = \frac{2S3 + P}{L} \quad (3.94)$$

Para o estado de deslocamento da Fig.3.4(3), obtém-se:

$$S4 + S5 - S3L = 0 \quad (3.95)$$

$$S5 = S3L - S4 \quad (3.96)$$

Conforme verificado através de (3.94) e (3.96), para a montagem da matriz de rigidez é necessário apenas o cálculo dos coeficientes "S1", "S3" e "S4".

O esforço normal "P" afeta o valor dos coeficientes "S3" e "S4". Desta forma, o valor do momento fletor e sua derivada também serão afetados. A distorção "γ" definida pela diferença entre o giro "φ" da seção transversal e a inclinação "θ" da linha elástica independe do valor e sentido de "P", ou seja:

$$y' = \theta = \phi + \gamma \quad (3.97)$$

$$\gamma = \frac{cQ}{GA} \quad (3.98)$$

Substituindo a equação (3.98) em (3.97), tem-se:

$$y' = \phi + \frac{cQ}{GA} \quad (3.99)$$

3.8 Formulação Matricial para Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Planos

A análise não linear geométrica de pórticos planos será baseada no processo dos deslocamentos para estruturas. Será admitido que o pórtico plano seja constituído de elementos de barras deformáveis por flexão, por força axial e força cortante.

A matriz de rigidez do elemento de barra será obtida fazendo o equilíbrio desta na posição deformada e deslocada, o que caracteriza considerar os efeitos de segunda ordem nas barras. Baseado no que foi dito anteriormente, é possível através das condições de equilíbrio da barra determinar os diferentes tipos de equações diferenciais que regem os problemas. Como será visto posteriormente, dependendo do tipo de esforço axial presente na barra, diferentes equações diferenciais serão obtidas. A solução destas fornecem os coeficientes de rigidez que são utilizados para se fazer a análise não linear. Estes coeficientes também são denominados de funções de rigidez ou funções de estabilidade.

Esta matriz de rigidez de barra para a análise de pórticos planos com funções de rigidez são apresentadas por CHEN e LUI⁹ e GERE e WEAVER²⁰. Esta matriz era capaz de considerar as deformações nos elementos de barra através da interação entre forças axiais e flexão somente. YAGUI⁴⁸, SERRA⁴⁹ e REQUENA⁵⁰ apresentaram matrizes com novas funções de rigidez capazes de levar em consideração simultaneamente deformações por força axial, força cortante e flexão. Desta forma, as funções apresentadas por eles são capazes de levar em consideração os efeitos da não linearidade geométrica de forma mais completa.

Nesta parte do trabalho, será apresentada a dedução destes coeficientes de rigidez apresentados por YAGUI⁴⁸, SERRA⁴⁹ e REQUENA⁵⁰. A matriz de rigidez do elemento de barra será obtida em função de suas coordenadas locais apresentadas na figura 3.3.

Derivando y' e lembrando que $\phi' = -\frac{M}{EI}$, resulta em:

$$y'' = -\frac{M}{EI} + \frac{c}{GA} \left(\frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.100)$$

sendo "P" a força axial no elemento de barra; "A" a área da seção transversal; "I" o momento de inércia em relação ao eixo z; "G" o módulo de elasticidade transversal; "E" o módulo de elasticidade longitudinal; "c" o coeficiente de forma; e "L" o comprimento da barra.

As expressões para o coeficiente de forma da seção transversal "c" podem ser obtidos em COWPER⁵¹ para os diferentes tipos de seção transversal.

a) Determinação dos coeficientes de rigidez para o caso de esforço axial igual zero (P=0)

Utilizando a condição de equilíbrio de momento em uma posição "x" na Fig.3.4(3), obtém-se:

$$M = S4 - S3x \quad (3.101)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S3 \quad (3.102)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3.103)$$

Substituindo a equação (3.102) em (3.99), resulta:

$$y' = \phi - \frac{cS3}{GA} \quad (3.104)$$

Substituindo a equação (3.101) e (3.103) em (3.100), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S4 - S3x)}{EI} = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3}{EI}x \quad (3.105)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.105) para $x = 0$ e $x = L$, chega-se em:

$$y''_{(0)} = -\frac{S4}{EI} \quad (3.106)$$

$$y''_{(L)} = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3L}{EI} \quad (3.107)$$



Derivando duas vezes a equação (3.105), obtém-se:

$$y^{IV} = 0 \quad (3.108)$$

A solução geral da equação diferencial (3.108) de quarta ordem é dada por:

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (3.109)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial:

$$y' = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3 \quad (3.110)$$

$$y'' = 6C_1x + 2C_2 \quad (3.111)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.111) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = 2C_2 \quad (3.112)$$

$$y''_{(L)} = 6C_1L + 2C_2 \quad (3.113)$$

Comparando a equação (3.112) com (3.106), obtém-se:

$$C_2 = -\frac{S4}{2EI} \quad (3.114)$$

Igualando a equação (3.113) com (3.107), chega-se em:

$$6C_1L + 2C_2 = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3L}{EI} \quad (3.115)$$

Substituindo o valor de " C_2 " obtido na equação (3.114) na (3.115) e fazendo as devidas simplificações, o valor de " C_1 " fica dado por:

$$C_1 = \frac{S3}{6EI} \quad (3.116)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.109), para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$C_4 = 0 \quad (3.117)$$

$$C_1L^3 + C_2L^2 + C_3L + C_4 = 0 \quad (3.118)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.104) e (3.110) para $x = 0$ e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = 1 - \frac{cS3}{GA} \quad (3.119)$$

$$y'_{(0)} = C_3 \quad (3.120)$$

Igualando a equação (3.119) com (3.120), resulta em:

$$C_3 = 1 - \frac{cS3}{GA} \quad (3.121)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.104) e (3.110) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{GA} \quad (3.122)$$

$$y'_{(L)} = 3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 \quad (3.123)$$

Igualando a equação (3.122) com (3.123), resulta em:

$$3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 = -\frac{cS3}{GA} \quad (3.124)$$

As equações (3.114), (3.116), (3.117), (3.118), (3.121) e (3.124) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas "C₁", "C₂", "C₃", "C₄", "S3" e "S4". Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chamando $K = 12cEI/GAL^2$ e $I' = I/(1+K)$, chega-se em:

$$S3 = \frac{6EI'}{L^2} \quad (3.125)$$

$$S4 = \frac{EI'}{L}(4+K) \quad (3.126)$$

O valor de "S2" dado pela equação (3.94) pode ser obtido substituindo o valor de "S3" dado por (3.125) fazendo $P=0$, portanto:

$$S2 = \frac{12EI'}{L^3} \quad (3.127)$$

Para obter o valor de "S5", substitui-se em (3.96) o valor de "S3" e "S4" dado por (3.125) e (3.126). Ao se fazer as devidas simplificações, pode-se chegar:

$$S5 = \frac{EI'}{L}(2-K) \quad (3.128)$$

b) Determinação dos coeficientes de rigidez para caso de esforço axial de compressão ($P < 0$)

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra para o caso mostrado na Fig.3.4(3) e levando em consideração a atuação de uma força normal "P" de compressão, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x + Py \quad (3.129)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 + Py' \quad (3.130)$$

$$\frac{dQ}{dx} = Py'' \quad (3.131)$$

Substituindo a equação (3.130) em (3.94), resulta:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S_3 + Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} + \frac{cP}{GA}y' \quad (3.132)$$

Fazendo $a_1 = 1 - cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (3.132), chega-se em:

$$y' = \frac{1}{a_1} \left(\phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (3.133)$$

Substituindo as equações (3.129) e (3.131) em (3.100), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x + Py)}{EI} + \frac{c}{GA}Py'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI} + \frac{cP}{GA}y'' \quad (3.134)$$

Lembrando que $a_1 = 1 - cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (3.134), tem-se:

$$y'' = \frac{1}{a_1EI}(-S_4 + S_3x - Py) \quad (3.135)$$

Derivando duas vezes (3.135) e fazendo $\alpha^2 = P/a_1EI$, obtém-se:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0 \quad (3.136)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_1EI}}$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de "P" de compressão tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (3.137)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial:

$$y' = \alpha C_1 \cos \alpha x - \alpha C_2 \operatorname{sen} \alpha x + C_3 \quad (3.138)$$

$$y'' = -\alpha^2 (C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \quad (3.139)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.135) para $x = 0$ e $x = L$ e lembrando que para o dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{a_1 EI} (-S4) \quad (3.140)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{a_1 EI} (-S4 + S3L) \quad (3.141)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.139) para $x = 0$ e $x = L$, resulta:

$$y''_{(0)} = -\alpha^2 C_2 \quad (3.142)$$

$$y''_{(L)} = -\alpha^2 (C_1 \operatorname{sen} \alpha L + C_2 \operatorname{cos} \alpha L) \quad (3.143)$$

Comparando a (3.140) com a (3.142), obtém-se o seguinte valor para "C₂":

$$C_2 = \frac{S4}{a_1 EI \alpha^2} \quad (3.144)$$

Lembrando que $\alpha^2 = P/a_1 EI$ e substituindo em "C₂", tem-se:

$$C_2 = \frac{S4}{P} \quad (3.145)$$

Igualando a equação (3.141) com (3.143), obtém-se:

$$\frac{1}{a_1 EI} (-S4 + S3L) = -\alpha^2 (C_1 \operatorname{sen} \alpha L + C_2 \operatorname{cos} \alpha L) \quad (3.146)$$

Substituindo o valor de "C₂" obtido em (3.145) na (3.146), lembrando que $\alpha^2 = P/a_1 EI$ e fazendo as devidas simplificações, o valor de "C₁" fica dado por:

$$C_1 = \frac{-S3L + S4(1 - \operatorname{cos} \alpha L)}{P \operatorname{sen} \alpha L} \quad (3.147)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.137) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (3.148)$$

$$C_1 \operatorname{sen} \alpha L + C_2 \operatorname{cos} \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (3.149)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.133) e (3.138) para $x = 0$ e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (3.150)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (3.151)$$

Igualando a equação (3.150) com (3.151), resulta:

$$\alpha C_1 + C_3 = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (3.152)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (3.133) e (3.138) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{a_1GA} \quad (3.153)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \operatorname{sen} \alpha L + C_3 \quad (3.154)$$

Igualando a equação (3.153) com (3.154), tem-se:

$$\alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \operatorname{sen} \alpha L + C_3 = -\frac{cS3}{a_1GA} \quad (3.155)$$

As equações (3.145), (3.147), (3.148), (3.149), (3.152) e (3.155) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas "C₁", "C₂", "C₃", "C₄", "S3" e "S4". Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chega-se em:

$$2\alpha (1 - \cos \alpha L) S4 - \alpha L (1 - \cos \alpha L) S3 = \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a_1} \quad (3.156)$$

$$\alpha (1 - \cos \alpha L) S4 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha L}{a_1} - \alpha L \right) S3 = \frac{P \operatorname{sen} \alpha L}{a_1} \quad (3.157)$$

Resolvendo o sistema apresentado acima por substituição e utilizando a igualdade $P = \alpha^2 a_1 EI$, chega-se aos valores de "S3" e "S4" apresentados a seguir:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a_1 EI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 \operatorname{sen} \alpha L - a_1 \alpha L - a_1 \alpha L \cos \alpha L)} \quad (3.158)$$

$$S4 = \frac{\alpha EI (\operatorname{sen} \alpha L - a_1 \alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (3.159)$$

Para facilitar a programação é conveniente que o denominador das equações (3.158) e (3.159) se tornem iguais. Multiplica-se o numerador e o denominador de (3.158) por "(1-cos αL)" e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a_1 EI (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (3.160)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (3.94), lembrando que "P" é de compressão, pode-se escrever:

$$S2 = \frac{2S3 - P}{L}$$

Substituindo o valor de "S3" dado pela equação (3.160) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S2 = \frac{\alpha^3(a_1)^2 EI \operatorname{sen} \alpha L}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (3.161)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (3.96), pode-se fazer:

$$S5 = S3L - S4$$

Substituindo o valor de "S3" e "S4" dado pelas equações (3.160) e (3.159) e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S5 = \frac{\alpha EI (\alpha a_1 L - \operatorname{sen} \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \operatorname{sen} \alpha L)} \quad (3.162)$$

c) Determinação dos coeficientes de rigidez para o caso de esforço axial de tração ($P > 0$)

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição "x" da barra para o caso mostrado na Fig.3.4(3) e levando em consideração a atuação de uma força normal "P" de tração, obtém-se:

$$M = S4 - S3x - Py \quad (3.163)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S3 - Py' \quad (3.164)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -Py'' \quad (3.165)$$

Substituindo a equação (3.164) em (3.99), resulta em:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA} (-S3 - Py') = \phi - \frac{cS3}{GA} - \frac{cP}{GA} y' \quad (3.166)$$

Fazendo $a_2 = 1 + cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (3.166), chega-s em:

$$y' = \frac{1}{a_2} \left(\phi - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (3.167)$$

Substituindo as equações (3.163) e (3.165) em (3.100), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S4 - S3x - Py)}{EI} + \frac{c}{GA} (-Py'') = -\frac{S4}{EI} + \frac{S3}{EI} x + \frac{Py}{EI} - \frac{cP}{GA} y'' \quad (3.168)$$

Lembrando que $a_2 = 1 + cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (3.168), chega-se em:

$$y'' = \frac{1}{a_2 EI} (-S4 + S3x + Py) \quad (3.169)$$

Derivando duas vezes a equação (3.169) e fazendo $\alpha^2 = P/a_2 EI$, obtém-se:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = 0 \quad (3.170)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_2 EI}}$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de "P" de tração tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (3.171)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial, obtém-se:

$$y' = \alpha C_1 \cosh \alpha x + \alpha C_2 \sinh \alpha x + C_3 \quad (3.172)$$

$$y'' = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x) \quad (3.173)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.169) para $x = 0$ e $x = L$, lembrando que para o dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{a_2 EI} (-S4) \quad (3.174)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{a_2 EI} (-S4 + S3L) \quad (3.175)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.173) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = \alpha^2 C_2 \quad (3.176)$$

$$y''_{(L)} = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (3.177)$$

Igualando a equação (3.174) com (3.176), chega-se em:

$$C_2 = -\frac{S4}{a_2 EI \alpha^2} \quad (3.178)$$

Lembrando $\alpha^2 = P/a_2 EI$ e substituindo em "C₂", tem-se:

$$C_2 = -\frac{S4}{P} \quad (3.179)$$

Igualando a equação (3.175) com (3.177), tem-se

$$\frac{1}{a_2 EI} (-S4 + S3L) = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (3.180)$$

Substituindo o valor de "C₂" obtido na equação (3.179) em (3.180), lembrando que $\alpha^2 = P/a_2 EI$ e fazendo as devidas simplificações, o valor de "C₁" fica dado por:

$$C_1 = \frac{S3L + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \quad (3.181)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.171) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (3.182)$$

$$C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (3.183)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (3.167) e (3.172) para $x = 0$ lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a_2} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (3.184)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (3.185)$$

Igualando a equação (3.184) com (3.185), resulta em:

$$\alpha C_1 + C_3 = \frac{1}{a_2} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (3.186)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (3.167) e (3.172) para $x = L$ lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{a_2 GA} \quad (3.187)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (3.188)$$

Igualando a equação (3.187) com (3.188), resulta em:

$$\alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 = -\frac{cS3}{a_2 GA} \quad (3.189)$$

As equações (3.179), (3.181), (3.182), (3.183), (3.186) e (3.189) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas "C₁", "C₂", "C₃", "C₄", "S3" e "S4". Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chega-se em:

$$2\alpha (\cosh\alpha L - 1) S4 - \alpha L (\cosh\alpha L - 1) S3 = \frac{P \sinh\alpha L}{a_2} \quad (3.190)$$

$$\alpha (\cosh\alpha L - 1) S4 + \left(\alpha L - \frac{\sinh\alpha L}{a_2} \right) S3 = \frac{P \sinh\alpha L}{a_2} \quad (3.191)$$

Resolvendo o sistema apresentado acima por substituição e utilizando a igualdade $P = \alpha^2 a_2 EI$, chega-se aos valores de "S3" e "S4" apresentados a seguir:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a_2 EI \sinh\alpha L}{(a_2 \alpha L - 2 \sinh\alpha L + a_2 \alpha L \cosh\alpha L)} \quad (3.192)$$

$$S4 = \frac{\alpha EI (a_2 \alpha L \cosh\alpha L - \sinh\alpha L)}{(2 - 2 \cosh\alpha L + a_2 \alpha L \sinh\alpha L)} \quad (3.193)$$

Para facilitar a programação, é conveniente que o denominador das equações (3.192) e (3.193) se tornem iguais. Para tanto, multiplica-se o numerador e o denominador da equação (3.192) por " $(\cosh\alpha L - 1)$ " e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a_2 EI (\cosh\alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh\alpha L + a_2 \alpha L \sinh\alpha L)} \quad (3.194)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (3.94) e lembrando que "P" é de tração, pode-se escrever:

$$S2 = \frac{2S3 + P}{L}$$

Substituindo o valor de "S3" dado pela equação (3.194) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S2 = \frac{\alpha^3 (a_2)^2 EI \sinh\alpha L}{(2 - 2 \cosh\alpha L + a_2 \alpha L \sinh\alpha L)} \quad (3.195)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (3.96), pode-se fazer:

$$S5 = S3L - S4$$

Substituindo o valor de "S3" e "S4" dado pelas equações (3.194) e (3.193) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S5 = \frac{\alpha EI (\sinh\alpha L - a_2 \alpha L)}{(2 - 2 \cosh\alpha L + a_2 \alpha L \sinh\alpha L)} \quad (3.196)$$

d) Matriz de Rigidez com Funções de Estabilidade (Rigidez)

Para facilitar a utilização das matrizes, é mostrado a seguir um esquema de matriz de rigidez do elemento de barra com seus termos representados por fatores que podem ser alterados conforme a condição de influência da força cortante ou sob a variação da força axial, como mostra a Tabela 3.2.

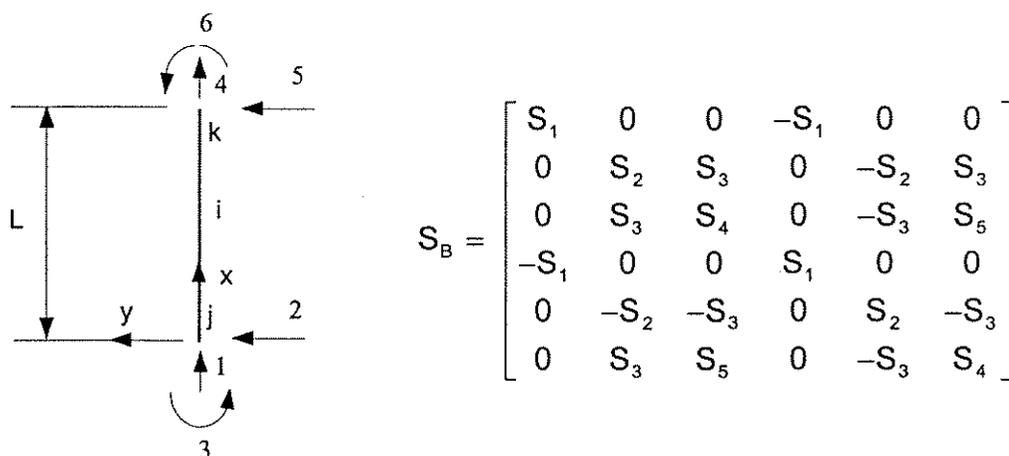


Figura 3.7 - Matriz de rigidez da barra prismática de seção transversal constante com funções de rigidez para análise de pórticos planos.

Tabela 3.2 - Funções de rigidez para elemento de barra plano.

S \ P	Compressão (P < 0)	(P=0)	Tração (P > 0)
S1	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$
S2	$\frac{EI (a_1)^2 \varepsilon^3 \text{sen } \varepsilon}{L^3 \phi_c}$	$\frac{12 EI}{L^3 (1+2K)}$	$\frac{EI (a_2)^2 \varepsilon^3 \text{senh } \varepsilon}{L^3 \phi_t}$
S3	$\frac{EI a_1 \varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{L^2 \phi_c}$	$\frac{6 EI}{L^2 (1+2K)}$	$\frac{EI a_2 \varepsilon^2 (\cosh \varepsilon - 1)}{L^2 \phi_t}$
S4	$\frac{EI \varepsilon (\text{sen } \varepsilon - a_1 \varepsilon \cos \varepsilon)}{L \phi_c}$	$\frac{2 EI (2+K)}{L (1+2K)}$	$\frac{EI \varepsilon (a_2 \varepsilon \cosh \varepsilon - \text{senh } \varepsilon)}{L \phi_t}$
S5	$\frac{EI \varepsilon (a_1 \varepsilon - \text{sen } \varepsilon)}{L \phi_c}$	$\frac{2 EI (1-K)}{L (1+2K)}$	$\frac{EI \varepsilon (\text{senh } \varepsilon - a_2 \varepsilon)}{L \phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos \varepsilon - a_1 \varepsilon \text{sen } \varepsilon$ $a_1 = 1 - \frac{c P }{GA}$ $\varepsilon = \alpha L \quad \alpha = \sqrt{\frac{ P }{a_1 EI}}$	$K = \frac{6 c EI}{GA L^2}$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \varepsilon + a_2 \varepsilon \text{senh } \varepsilon$ $a_2 = 1 + \frac{c P}{GA}$ $\varepsilon = \alpha L \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{a_2 EI}}$

3.9 Matriz de Rigidez da Estrutura Formada por Elementos de Barra

Conforme apresentado anteriormente, é possível relacionar o vetor de esforços $\{f_L\}_i$ com o vetor de seus deslocamentos $\{d_L\}_i$ nas coordenadas locais do elemento através da matriz de rigidez do elemento de barra $[S_B]$. Desta forma, para o i -ésimo elemento da estrutura, tem-se:

$$\{f_L\}_{i(6 \times 1)} = [S_B]_{i(6 \times 6)} \{d_L\}_{i(6 \times 1)} \quad (3.197)$$

A notação apresentada acima é utilizada para a análise matricial. Para o caso de análise pelo método dos elementos finitos, a equação (3.197) pode ser escrita conforme apresentado em (3.33):

$$\{f_L\}_{i(6 \times 1)} = [k_B]_{i(6 \times 6)} \{v_L\}_{i(6 \times 1)} \quad (3.198)$$

Da mesma forma que para o elemento de barra, é possível relacionar o vetor das ações $\{f\}$ com o vetor dos deslocamentos $\{d\}$ nas "n" coordenadas do sistema global através da matriz de rigidez da estrutura $[S_G]$:

$$\{f\}_{(n \times 1)} = [S_G]_{(n \times n)} \{d\}_{(n \times 1)} \quad (3.199)$$

Para a análise pelo método dos elementos finitos, a equação (3.199) fica expressa da seguinte forma:

$$\{R\}_{(n \times 1)} = [K_G]_{(n \times n)} \{V\}_{(n \times 1)} \quad (3.200)$$

A matrizes de rigidez da estrutura $[S_G]$ e $[K_G]$ podem ser obtidas através da contribuição dos elementos de barra (GERE e WEAVER²⁰, RUBISTEIN⁵²):

$$[S_G]_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 6)}^T [S_B]_{i(6 \times 6)} [b]_{i(6 \times n)} \quad (3.201)$$

$$[K_G]_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{nb} [b]_{i(n \times 6)}^T [k_B]_{i(6 \times 6)} [b]_{i(6 \times n)} \quad (3.202)$$

sendo:

"n" - número total de coordenadas da estrutura formada apenas por elementos de barra no sistema global;

"nb" - número de elementos de barra;

" $[b]_i$ " - submatriz de ordem $6 \times n$ correspondente ao elemento "i" da matriz de transformação $[b]$ de ordem $6nb \times n$, que relaciona os deslocamentos da estrutura com os deslocamentos dos elementos (para o caso de análise utilizando o

método dos elementos finitos, o vetor $\{d_L\}$ é substituído por $\{r_L\}$ e o vetor $\{d\}$ por $\{R\}$:

$$\begin{Bmatrix} \{d_L\}_1 \\ \{d_L\}_2 \\ \vdots \\ \{d_L\}_{nb} \end{Bmatrix}_{(6nb \times 1)} = \begin{bmatrix} [b]_1 \\ [b]_2 \\ \vdots \\ [b]_{nb} \end{bmatrix}_{(6nb \times n)} \cdot \{d\}_{(n \times 1)} \quad (3.203)$$

" $[S_B]$ " - matriz de rigidez do elemento "i" de ordem 6 x 6 nas coordenadas locais para análise matricial;

" $[S_G]$ " - matriz de rigidez da estrutura de ordem n x n nas coordenadas globais para análise matricial;

" $[k_B]$ " - matriz de rigidez do elemento "i" de ordem 6 x 6 nas coordenadas locais para análise pelo método dos elementos finitos;

" $[K_G]$ " - matriz de rigidez da estrutura de ordem n x n nas coordenadas globais para análise pelo método dos elementos finitos;

" $\{d_L\}_i$ " - vetor dos deslocamentos do elemento de barra "i" no sistema local de coordenadas de ordem 6 x 1 para análises utilizando as funções de rigidez;

" $\{d\}$ " - vetor dos deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas de ordem n x 1 para análises utilizando as funções de rigidez;

" $\{r_L\}_i$ " - vetor dos deslocamentos do elemento de barra "i" no sistema local de coordenadas de ordem 6 x 1 para análises utilizando o método dos elementos finitos ; e,

" $\{R\}$ " - vetor dos deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas de ordem n x 1 para análises utilizando o métodos dos elementos finitos.

A figura 3.8 mostra a submatriz $[b]_i$ de ordem 6 x n do elemento de barra "i". A primeira linha de $[b]_i$ corresponde a 6 x (i - 1) + 1 linha da matriz de rigidez $[b]$, sucessivamente até a sexta linha da matriz $[b]_i$ correspondente a 6 x (i - 1) + 6 linha da matriz de rigidez $[b]$. A coluna 1^{ji} de $[b]_i$ corresponde a coluna 3 nj - 2 de $[b]$; a coluna 2^{ji} de $[b]_i$ corresponde a coluna 3 nj - 1 de $[b]$; a coluna 3^{ji} de $[b]_i$ corresponde a 3 nj de $[b]$; a coluna 4^{ki} de $[b]_i$ corresponde a coluna 3 nk - 2 de $[b]$; a coluna 5^{ki} de $[b]_i$ corresponde a coluna 3 nk - 1 de $[b]$ e a coluna 6^{ki} corresponde a coluna 3 nk de $[b]$, sendo:

"i" - número de barras;

"nj" - número do nó inicial da barra;

"nk" - número do nó final da barra; e,

"n" - número total de coordenadas no sistema global.

$$[b]_i = \begin{array}{cccccccc|c}
 \dots & \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 \dots & -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\
 \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 & \dots & 4 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 & \dots & 5 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 6 \\
 \hline
 \dots & 1_{ji} & 2_{ji} & 3_{ji} & \dots & 4_{ki} & 5_{ki} & 6_{ki} & \dots & \\
 \hline
 \leftarrow & & & & & n & & & & \rightarrow
 \end{array}$$

Figura 3.8 - Submatriz de transformação $[b]_i$ de ordem $6 \times n$ do elemento de barra.

As matrizes de rigidez dos elementos de barra $[S_B]$ e $[k_B]$ em regime de segunda ordem são funções das forças axiais que estão presentes nestas barras. Desta forma, suas matrizes ficarão afetadas devido a presença destes esforços. Como as matrizes de rigidez da estrutura $[S_G]$ e $[K_G]$ são obtidas através das contribuições das matrizes de rigidez dos elementos de barra, estas também estarão afetadas pelo efeito de segunda ordem.

3.10 Cálculo dos Esforços e Deslocamentos da Estrutura em Teoria de Primeira e Segunda Ordem

As expressões (3.199) , (3.200), (3.201) e (3.202) permitem determinar os deslocamentos nas coordenadas do sistema global e os esforços nos elementos de barra nas suas coordenadas locais a partir das ações nas coordenadas globais. A análise da estrutura em regime de primeira ordem é realizada através de um sistema de equações lineares de solução direta. Porém, a análise de estrutura em regime de segunda ordem depende de um sistema de equações não lineares pois as matrizes dos elementos de barra $[S_B]$ ou $[k_B]$, que contribuem para a montagem da matriz de rigidez da estrutura $[S_G]$ ou $[K_G]$, dependem das

forças axiais que estão atuando em suas barras. Como as próprias forças axiais são incógnitas a serem determinadas, não é viável encontrar uma solução direta para o problema.

Para determinar então os esforços e deslocamentos da estrutura em regime de segunda ordem, torna-se necessário adotar um processo iterativo com aproximações sucessivas. Este processo será explicado a seguir.

3.11 Processo Iterativo com Aproximações Sucessivas

A técnica que será utilizada é a da iteração direta. Esta técnica consiste em atualizar a matriz de rigidez da estrutura devido a variação do esforço axial que se modifica em cada iteração. Os deslocamentos são estimados em cada iteração e quando estes convergem para uma tolerância previamente estipulada, a estrutura atinge sua configuração de equilíbrio.

Inicialmente, na primeira iteração, a influência da força axial no cálculo das matrizes de rigidez dos elementos de barra é desprezada. Como estas matrizes contribuem para a montagem da matriz de rigidez da estrutura, a estrutura será então calculada em regime de primeira ordem. Dado um carregamento e determinada a matriz de rigidez da estrutura, é possível determinar os deslocamentos globais da estrutura. Com os deslocamentos globais, calcula-se os deslocamentos nos elementos de barra. Com estes deslocamentos, torna-se possível determinar os esforços axiais "P" atuante em cada barra.

Com os valores iniciais das forças axiais "P" obtidas em regime de primeira ordem, é iniciado o processo iterativo para determinar a matriz de rigidez com termos não lineares em regime de segunda ordem. Com estas forças axiais, recalcula-se a matriz de rigidez dos elementos de barra que serão afetadas pelos coeficientes que são funções dos esforços axiais das barras presentes nestas matrizes. Desta forma, ao final, a matriz de rigidez da estrutura estará afetada por estes termos. Utilizando o mesmo procedimento mencionado anteriormente, recalculam-se os novos deslocamentos da estrutura e as novas forças axiais nos elementos de barra, submetidos ao mesmo carregamento anterior. Os valores dos deslocamentos e esforços axiais se alterarão devido a presença dos termos que são função do esforço axial presente nas barras. Com os novos valores

obtidos, o processo é repetido, mantendo o mesmo carregamento . As iterações são processadas sucessivamente até que na n-ésima vez, o vetor deslocamento $\{d_n\}$ seja praticamente coincidente com $\{d_{n-1}\}$ da (n-1)-ésima iteração (para o caso de análise utilizando o método dos elementos finitos, o vetor “ $\{d\}$ ” é substituído pelo vetor “ $\{V\}$ ”).

Como o processo é iterativo, este somente terminará quando ocorrer a convergência dos deslocamentos para os valores definidos em cada etapa. Para agilizar o processo, é necessário definir uma tolerância para as iterações. No presente trabalho foi adotado o seguinte critério de convergência dos deslocamentos:

$$\left| \frac{\{d_n\} - \{d_{n-1}\}}{\{d_n\}} \right| \leq \text{TOL} \quad (3.204)$$

sendo “ $\{d_n\}$ ” o vetor deslocamento na n-ésima iteração; “ $\{d_{n-1}\}$ ” o vetor deslocamento da (n-1)-ésima iteração, e “TOL” a tolerância adotada. Para o caso do método dos elementos finitos, o vetor $\{d\}$ é substituído pelo vetor $\{V\}$.

O valor recomendado para a tolerância em algumas literaturas é o valor de 10^{-3} . Entretanto, é recomendável instalar no programa uma entrada interativa para facilitar alterações que se fazem necessárias na determinação de algumas estruturas próximas do limite de estabilidade. Isto se deve a dificuldade de convergência no processo em termos de precisão e tempo de computação.

3.12 Verificação da Estabilidade da Estrutura Submetida a um Determinado Carregamento

De acordo com a teoria das pequena deformações e deslocamentos, existem três casos a serem considerados na análise de instabilidade de uma estrutura reticulada: quando “ $W < W_{cr}$ ” (sendo “ W ” o carregamento aplicado na estrutura e “ W_{cr} ” o carregamento de instabilidade da estrutura) a estrutura se deforma e o equilíbrio da estrutura é estável; Quando “ $W = W_{cr}$ ”, a estrutura se deforma e o equilíbrio é indiferente e quando “ $W > W_{cr}$ ”, a estrutura se deforma e o equilíbrio é instável. Desta forma, o carregamento crítico de uma estrutura pode ser entendido como o carregamento limite que pode ser aplicado em uma estrutura.

Existem alguns métodos para se determinar a instabilidade de uma estrutura que está sob a influência de esforços axiais. O método que será descrito neste trabalho se baseia no cálculo do determinante da matriz de rigidez da estrutura. Uma estrutura será considerada estável sob um certo carregamento se sua matriz de rigidez for definida positiva, ou seja, todos os seus autovalores são positivos (REQUENA⁵⁰). O determinante da matriz de rigidez pode ser representado pelo produto de seus autovalores. Quando todos os autovalores são positivos, o seu determinante também o será e desta forma a matriz de rigidez será dita não singular.

Se a matriz é definida positiva, então é possível exprimi-la através de uma transformação linear sobre as linhas e colunas, correspondente a uma mudança de base, na forma de uma matriz diagonal ainda positiva.

Os autovalores dessa matriz de rigidez diagonalizada de ordem $n \times n$ são em número de "n" e correspondem exatamente aos termos da diagonal. A cada autovalor negativo ou nulo corresponde a um modo de flambagem. Desta forma, definido um carregamento, o número de elementos negativos ou nulos na diagonal é igual ao número de graus de liberdade que tem o modo de flambagem para este carregamento.

Para verificar se uma matriz é definida positiva, basta tentar decompor esta matriz por Cholesky, pois esta é uma condição necessária e suficiente demonstrada por JENNINGS⁵³ e GOLUB⁵⁴. Como o processo de decomposição por Cholesky é muito simples de ser programado, este foi utilizado no presente trabalho. Desta forma, a verificação da estabilidade da estrutura submetida a um determinado carregamento passa pela verificação da matriz de rigidez da estrutura. A estabilidade da estrutura será verificada no momento da decomposição por Cholesky da matriz de rigidez. Ao se detectar um termo negativo ou nulo na diagonal durante a decomposição da matriz através da fatoração LDL^T , com "L" representando a matriz triangular inferior (com "1" na diagonal) e "D" a matriz diagonal, o processo pode ser interrompido. Alternativamente, a fatoração da matriz pode ser feita através de $\tilde{L} \tilde{L}^T$ com " \tilde{L} " representando a matriz triangular inferior com $\tilde{L} = LD^{1/2}$. Portanto, para uma

matriz de rigidez "S", simétrica e definida positiva, esta pode ser decomposta como segue:

$$[S] = [L][D][L]^T = [\tilde{L}][\tilde{L}]^T \quad (3.205)$$

$$\tilde{L} = LD^{1/2}$$

Assim, definido um carregamento, ao se levar em consideração o efeito da não linearidade geométrica, a matriz da estrutura é calculada sucessiva vezes buscando a convergência dos deslocamentos. Isto é feito, conforme explicado anteriormente, porque a análise não linear é um processo iterativo. O determinante calculado da matriz de rigidez, que foi afetada pelos termos que são função da força axial (sendo estas forças predominantemente de compressão), é inferior ao determinante calculado não considerando este efeito (REQUENA⁵⁰). Como consequência, os deslocamentos resultantes da matriz de rigidez em regime de segunda ordem são superiores aos da matriz em regime de primeira ordem. Entretanto, pode acontecer que durante o processo de convergência dos deslocamentos, o processo de Cholesky detectar um termo negativo ou nulo na diagonal. Isto caracterizará matriz não definida positiva conforme explicado anteriormente. Desta forma, a estrutura não será considerada estável para aquele carregamento.

Baseado no que foi explicado anteriormente, pode-se fazer a análise de estabilidade de uma estrutura. Para tanto, definido um carregamento, basta aplicá-lo de forma crescente na estrutura. Ao se aplicar o carregamento em acréscimos sucessivos, acontecerá que as forças axiais atuantes em cada barra serão aumentadas progressivamente. Assim, a medida que as forças axiais de compressão forem aumentado, o valor do determinante para cada incremento de carregamento irá diminuindo e os deslocamentos resultantes irão aumentando. Estes acréscimos sucessivos serão aumentados na estrutura até que para um dado carregamento, o valor do determinante da matriz de rigidez será nulo e os deslocamentos resultarão indeterminados. Este carregamento é chamado de crítico. O processo descrito é válido para tanto para problemas de primeira quanto de segundo espécie. A seguir, este processo será descrito com mais detalhes.

3.13 Carregamento Crítico de Instabilidade de Pórticos Planos

Nesta parte do trabalho, será explicado o processo de determinação do carregamento crítico de instabilidade para pórticos planos. Este parâmetro representa um valor multiplicador do carregamento e será denominado de “ W_{cr} ”.

O programa foi desenvolvido de tal forma que seja possível determinar o carregamento crítico da estrutura submetida às ações permanentes (cargas mortas) e às ações variáveis. Desta forma, a estrutura pode ser considerada carregada por dois carregamentos distintos: o primeiro carregamento composto pelas ações cujas intensidade são mantidas constantes durante a análise (como por exemplo, peso próprio, sobrecarga, etc) e o segundo carregamento cujas intensidade são afetadas por um parâmetro de proporcionalidade “ W ” chamado de cargas vivas (como por exemplo, ações de vento, ponte rolante, etc).

Inicialmente, a matriz de rigidez é calculada em regime de primeira ordem com os coeficientes não afetados pelos efeitos das forças axiais. Com esta matriz de rigidez, são calculados os esforços internos, em especial as forças axiais nas barras através das cargas constantes e das cargas vivas multiplicadas pelo parâmetro $W=1$. Estas forças serão utilizadas posteriormente para calcular as matrizes de rigidez que são afetadas pela presença deste esforço nas barras.

Em seguida, calcula-se um parâmetro “ W ” que será utilizado como um parâmetro limite para o processo de carregamentos e verificações da estabilidade da estrutura. A determinação de “ W ” é feita através da seguinte maneira:

a) Com o valor do parâmetro “ W ” unitário, procura-se a barra “ i ” com força axial “ P ” mais próxima possível da flambagem de Euler. Isto é feito através de uma variável “ ρ ” dada por:

$$\rho_{\max} = \frac{P_i}{P_{Ei}}$$

$$P_{Ei} = \frac{\pi^2 E_i I_i}{L_i^2}$$

$$P_i = P_{ci} + W P_{vi}$$

$$\rho_{\max} = \left(\frac{P_{ci} + P_{vi}}{P_{Ei}} \right)_{\max} \Rightarrow \text{IBC} \quad (3.206)$$

sendo " P_i " a força axial da barra "i" para o carregamento total com $W=1$ aplicado na estrutura; " P_{vi} " a força axial da barra "i" obtida das cargas vivas; " P_{Ei} " a força axial da barra "i" obtida da expressão de Euler para barras bi-articulada; " P_{ci} " a força axial da barra "i" obtida das cargas constantes e "IBC" a barra "i" obtida com força axial " P_i " mais próxima da carga de flambagem de Euler produzido pelo " p_{max} " com $W=1$.

b) De posse da barra "IBC" mais próxima da flambagem de Euler, passa-se agora para a determinação do parâmetro " W " para a barra "IBC" para que esta atinja o limite de estabilidade. Adotando " p " unitário em P_i/P_{Ei} e substituindo o valor de " P_i " na expressão de " p ", chega-se:

$$P_{ci} + W_E P_{vi} = P_{Ei}$$

$$W_E = \frac{(P_{Ei} - P_{ci})}{P_{vi}} \quad (3.207)$$

sendo que " W " passa a ser denominado de " W_E ", parâmetro das cargas vivas que levará a barra "IBC" até o limite de Euler.

Nesta etapa, o limite de estabilidade do pórtico foi alcançado através da instabilidade da barra "IBC" por flexão no plano do pórtico. Esta determinação considerou as barras como sendo bi-articuladas, nas condições de Euler. Porém, como as barras do pórtico são ligadas rigidamente, o limite máximo do parâmetro " $W_{máx}$ " será alcançado quando as barras forem consideradas bi-engastadas com ligações indeslocáveis. Para esta caso, o parâmetro " $W_{máx}$ " fica expresso por:

$$P_{Emax} = 4 P_{Ei}$$

$$W_{max} = \frac{4 P_{Ei} - P_{ci}}{P_{vi}}$$

$$W_{max} = \frac{3 P_{Ei}}{P_{vi}} + W_E$$

sendo " W_{max} " o parâmetro máximo das cargas vivas que um pórtico pode suportar sem perder a estabilidade.

De posse do parâmetro máximo " $W_{máx}$ ", a primeira verificação da estabilidade da estrutura será feita com o valor de " W " intermediário entre zero e

o parâmetro máximo. O processo convergirá rapidamente pesquisando os intervalos:

$$W = \frac{(W_A + W_B)}{2} \quad (3.208)$$

sendo " W_A " o limite inferior do parâmetro das cargas vivas inicialmente adotado igual a zero e " W_B " o limite superior do parâmetro das cargas vivas inicialmente adotado igual a " $W_{máx}$ ".

Como o carregamento será sempre a soma das cargas constantes com as cargas vivas multiplicadas pelo parâmetro " W ", este parâmetro será pesquisado no intervalo compreendido entre o limite superior " W_B ", para o qual a estrutura pode alcançar ou ultrapassar o limite de estabilidade, e um limite inferior " W_A ", para o qual a estrutura é sempre considerada estável. Através do processo iterativo com aproximações sucessivas, pode-se alcançar rapidamente o parâmetro crítico " W_{cr} " de instabilidade do pórtico.

Definido o carregamento inicial, inicia-se a fase de cálculo da matriz de rigidez em regime de segunda ordem. Com esta matriz, calculam-se os esforços axiais e analisa-se a convergência dos deslocamentos da estrutura, através do processo iterativo de aproximações sucessivas, já descrito anteriormente. No caso de êxito na convergência, ou seja, não foi detectado nenhum termo negativo ou nulo nas matrizes de rigidez da estrutura durante o processo iterativo, a estrutura é dita estável. Como conseqüência, o limite inferior " W_A " é alterado para o valor atual de " W ", mantendo-se o valor de " W_B " inalterado. O processo é realizado novamente para um novo valor de parâmetro intermediário calculado através dos novos limites determinados anteriormente. Com o novo valor do parâmetro intermediário, determinam-se as novas forças axiais e os novos deslocamentos na estrutura. Caso não haja convergência do processo ou sequer a matriz de rigidez da estrutura possa ser decomposta por Cholesky, isto significará que a estrutura não é estável para aquele carregamento aplicado. Logo, o limite superior " W_B " é alterado para o valor atual de " W ", mantendo " W_A " inalterado. O processo descrito acima é repetido sucessiva vezes buscando a igualdade entre os limites " W_A " e " W_B ". O processo é interrompido quando além

de satisfeitas as condições de convergência da matriz de rigidez, a tolerância do valor pesquisado for :

$$\left(\frac{(W_B - W_A)}{W_B} \right) \leq \text{TOL} \quad (3.209)$$

sendo "TOL" a tolerância adotada no início da execução do programa (sugerido neste trabalho para um valor de 10^{-3}).

A convergência satisfeita implicará em valores praticamente coincidentes para os limites " W_A " e " W_B ". Isto significa que o parâmetro crítico máximo " W_{cr} " foi encontrado. Pode-se afirmar então que se a estrutura for submetida ao carregamento majorado pelo parâmetro " W_{cr} " nas cargas vivas, esta alcançará o limite de estabilidade, ou seja, o carregamento crítico de instabilidade elástica por flexão do pórtico plano foi atingido.

Através do carregamento crítico do pórtico, é possível comparar em cada barra a força crítica de Euler com a força crítica obtida do carregamento citado. Com esta relação, pode-se conhecer o comportamento de cada elemento de barra no instante da instabilidade da estrutura. Os chamados comprimentos efetivos de flambagem de cada barra podem ser determinados multiplicando cada comprimento de barra pelo parâmetro "K", definido como sendo a raiz quadrada da relação entre a força de Euler e a carga crítica em cada barra do pórtico, no instante do carregamento crítico.

O processo descrito acima é uma das formas de se obter o carregamento crítico de instabilidade na estrutura. Entretanto, existem outras forma de se fazer a análise de instabilidade. Como por exemplo, o parâmetro " $W_{máx}$ " pode ser subdividido em um número de intervalos de carregamentos. Estes intervalos de carregamentos são aplicados de forma progressiva na estrutura até que se encontre o parâmetro de instabilidade de forma semelhante a descrita anteriormente. A escolha de uma forma de análise ou de outra deverá ser feita considerando o tempo de computação necessário para se encontrar a solução do problema, ou ainda, dependendo da variável que se queira acompanhar durante o processo.

3.14 Análise Comparativa entre os Métodos Apresentados

É importante ressaltar que ambos os métodos são utilizados para se fazer análise elástica em regime de segunda ordem ou análise de instabilidade elástica. A fundamental diferença entre estes dois métodos apresentados, é que as funções de rigidez são obtidas através da equação diferencial que governa o problema de barras no regime elástico. Esta equação é obtida através das condições de equilíbrio da barra na posição deformada e deslocada. Já os coeficientes de rigidez, obtidos através do método dos elementos finitos, são determinados através da formulação variacional para problemas de barras no regime elástico. Para se determinar a solução deste funcional, que representa a energia potencial total de uma barra, são assumidas funções aproximadoras para representar os deslocamentos transversais e longitudinais da barra.

Em ambos os métodos apresentados, a análise de instabilidade em teoria de segunda ordem é baseada nas seguintes hipóteses: pequenas deformações e deslocamentos (ou seja, $\sin\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$ sendo θ a rotação relativa da corda do membro em qualquer seção transversal ao longo da barra); e as deformações axiais ao longo da barra são negligenciadas (a inclusão deste efeito não muda de forma significativa os resultados obtidos para momentos fletores e força cortante mas por outro lado torna a análise mais complicada fazendo com que o número de interações seja aumentado).

A matriz geométrica $[k_g]$ obtida através do método dos elementos finitos apresentado é linearmente proporcional a força axial "P" presente na barra. Por outro lado, a matriz de rigidez $[k_B]$ obtida através do método das funções de rigidez é função não linear da força axial "P" presente na barra.

Ao se fazer o equilíbrio da barra na posição deformada e deslocada, surgem dois efeitos que são responsáveis pela degradação da rigidez da barra: efeito "P- Δ " e "P- δ ". Estes efeitos são apresentados na figura 3.9. O efeito "P- Δ " representa a rotação da corda, enquanto "P- δ ", a curvatura do membro. O primeiro efeito reduz a rigidez a flexão da barra a medida que o elemento se desloca. Já o segundo, reduz a rigidez a flexão da barra devido a curvatura que esta apresenta quando se desloca. As funções de rigidez conseguem modelar

com precisão os efeitos mencionados anteriormente dentro do campo das pequenas deformações. Já os coeficientes obtidos através do método dos elementos finitos conseguem modelar com precisão apenas o efeito "P- Δ ". Isto não acontece com o efeito "P- δ ". Devido a este fato, uma análise realizada por este método exigirá que as barras sejam subdivididas para que o efeito "P- δ " seja representado com melhor precisão. Caso isto não seja feito, os resultados obtidos apresentarão erros de precisão. Este fato é bastante acentuado na análise de instabilidade pois a não subdivisão das barras, fará com que o parâmetro de instabilidade obtido por este método, apresente um erro considerável se comparado com o valor real. Segundo ALLEN¹⁸, raramente é necessário utilizar mais do que três elementos para modelar a rigidez elástica do elemento.

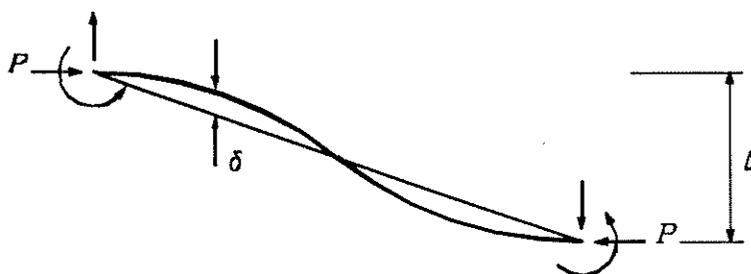


Figura 3.9 - Efeitos de segunda ordem nos membros - efeito "P- Δ " e "P- δ ".

A principal vantagem do método dos elementos finitos é que este pode ser estendido para a análise tridimensional de forma mais direta se comparada com o método das funções de rigidez. Conforme apresentado por VLASSOV⁵⁵, as equações diferenciais que regem os problemas para o caso tridimensionais são em número de três: duas relacionadas a flexão e uma relacionada a torção. Devido ao efeito de flexo-torção (a flexão influencia na torção e vice-versa), estas três equações diferenciais se tornam dependentes (acopladas), formando um sistema de três equações diferenciais. Uma solução analítica para estas equações, conforme apresentado para o caso plano, é de difícil obtenção. É importante ressaltar que esta é uma área que ainda existe necessidade de se aprofundar as pesquisas. Devido ao método dos elementos finitos ser baseado no princípio variacional, a extensão para o caso tridimensional é direta. Entretanto, existem duas dificuldades para esta extensão: a representação da

resposta a torção incluindo os efeitos de empenamento nas seções de parede fina e a correta representação das grandes rotações para o caso tridimensional. É importante ressaltar que o elemento de barra tridimensional apresentará graus de liberdade maiores que seis caso o efeito de empenamento seja considerado na análise. Os novos graus de liberdade estarão relacionadas com os esforços de bimomento e bicortante. Assim, funções aproximadoras deverão ser adotadas para representar os deslocamentos longitudinais da barra, deslocamentos transversais em relação aos dois planos de flexão e deslocamentos de torção. Da mesma forma que para o caso plano, para representar os efeitos de torção e flexo-torção dos membros, é necessário que as barras sejam subdivididas em vários elementos de barra.

Finalizando, em ambos os métodos apresentados, a análise de instabilidade apenas levou em consideração os efeitos geométricos na redução da capacidade portante das barras. Foi assumido que durante a análise, o material que compunha a estrutura permanecia completamente elástico durante toda a análise. Não se levou em consideração que durante a análise que as fibras da seção transversal pudessem se plastificar. Quando na análise da estrutura se leva em consideração os efeitos de não linearidade do material, este tipo de análise é denominado de análise de instabilidade inelástica. Este assunto será abordado no capítulo 5 deste trabalho.

3.15 Análise Numérica Comparativa

3.15.1 Exemplo Numérico 1

Este primeiro exemplo tem como objetivo avaliar os resultados obtidos através das análises feitas pelos métodos descritos anteriormente. Neste intuito, determinou-se a carga de instabilidade de uma barra bi-articulada. Este exemplo representa um problema de autovalor de solução conhecida e cujo o valor é dado pela equação de Euler. Os dados geométricos da barra são apresentados na figura 3.10. Na análise utilizando o método das funções de rigidez, a barra foi representada por apenas um elemento. A análise utilizando o método dos elementos finitos foi feita utilizando o programa ANSYS52. Neste método, a

discretização do problema em apenas um elemento não forneceu um resultado preciso conforme verificado na tabela 3.3. Desta forma, a barra bi-articulada foi subdividida em vários subelementos até que o resultado obtido se aproximasse do valor dado pela equação de Euler conforme apresentado na tabela 3.3.

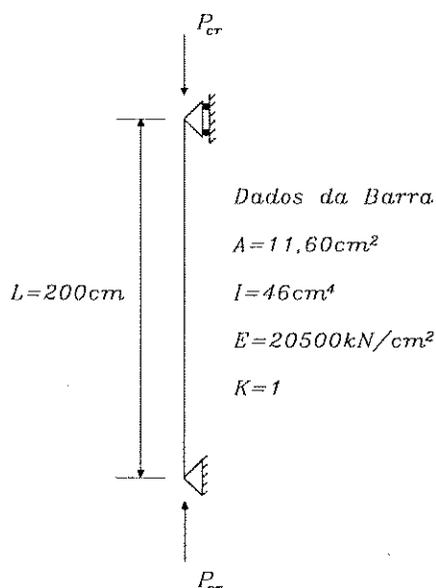


Figura 3.10 - Barra bi-articulada de Euler.

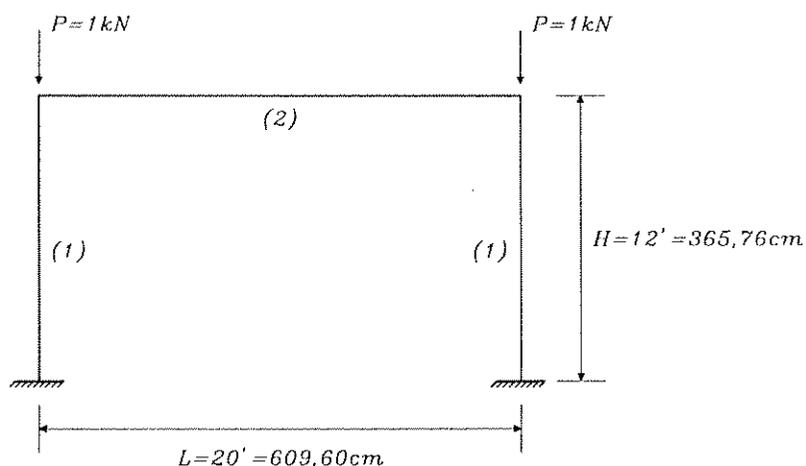
É importante ressaltar que o valor encontrado para “ W_{cr} ” representa um parâmetro que multiplica as ações que estão aplicadas na barra em análise. Como se pode observar, a subdivisão da barra em subelementos para a análise pelo método das funções de rigidez não modifica o resultado encontrado na análise quando esta é feita utilizando apenas um elemento. O resultado obtido utilizando as funções de rigidez é praticamente idêntica a carga crítica de Euler. O resultado obtido pelo método dos elementos finitos se aproxima do resultado da carga de Euler a medida que a discretização da barra é aumentada.

Tabela 3.3 - Carga crítica de Euler , carga crítica dada pelo programa desenvolvido utilizando as funções de rigidez e o programa ANSYS52.

Nº de elementos	$P_{euler} = \pi^2 EI / (KL)^2$ (kN)	Programa Autor (W_{cr} - kN)	Programa ANSYS52 (W_{cr} -kN))
1	232,6759	232,6759	282,9000
2	-	"	234,4262
3	-	"	233,0437
4	-	"	232,7951
6	-	"	232,6998
10	-	"	232,6791

3.15.2 Exemplo Numérico 2

A análise de instabilidade de uma barra representa o problema mais simples na análise de estruturas apertadas. Com o objetivo de tornar as análises mais complexas, extraiu-se do artigo escrito por HALDORSSON e WANG⁵⁶ dois exemplos de estruturas reticuladas. No primeiro exemplo, a estrutura analisada apresenta simetria de geometria e carregamento. Os dados geométricos da estrutura são apresentados na figura 3.11. A análise de instabilidade da estrutura realizada pelos autores HALDORSSON e WANG⁵⁶ foi baseada no método das funções de rigidez, sendo que o efeito "P-Δ" não foi levando em consideração na análise.



Dados da Estrutura

$$\begin{array}{ll}
 (1) : A = 41,57 \text{ in}^2 = 268,19 \text{ cm}^2 & (2) : A = 52,35 \text{ in}^2 = 337,74 \text{ cm}^2 \\
 I = 144,00 \text{ in}^4 = 5993,73 \text{ cm}^4 & I = 288,00 \text{ in}^4 = 11987,46 \text{ cm}^4 \\
 E = 30000,00 \text{ ksi} = 20684,27 \text{ kN/cm}^2 & E = 30000,00 \text{ ksi} = 20684,27 \text{ kN/cm}^2
 \end{array}$$

Figura 3.11 - Estrutura reticulada plana analisada por HALDORSSON e WANG⁵⁶.

Tabela 3.4 - Resultados obtidos na análise realizada por HALDORSSON e WANG⁵⁶, pelo programa do Autor e programa ANSYS52.

Nº de elementos (Discretização da estrutura)	HALDORSSON e WANG ⁵⁶ (W_{cr})	Programa Autor (W_{cr})	Programa ANSYS52 (W_{cr})
3	7130,4992	7127,7333	7191,3605
6	-	"	7152,4692
9	-	"	7133,0615
12	-	"	7129,4740

Este mesmo exemplo foi analisado pelo programa desenvolvido pelo autor e pelo programa ANSYS52. Os resultados encontrados nas análises são apresentados na tabela 3.4. Como se pode observar, existe uma pequena diferença entre o resultado obtido pelos autores HALDORSSON e WANG⁵⁶ e o autor do presente trabalho. Este fato se deve as simplificações adotadas pelo autores do referido artigo. Entretanto, os resultados obtidos estão muito próximo do valor de " W_{cr} " encontrado pelos autores do artigo.

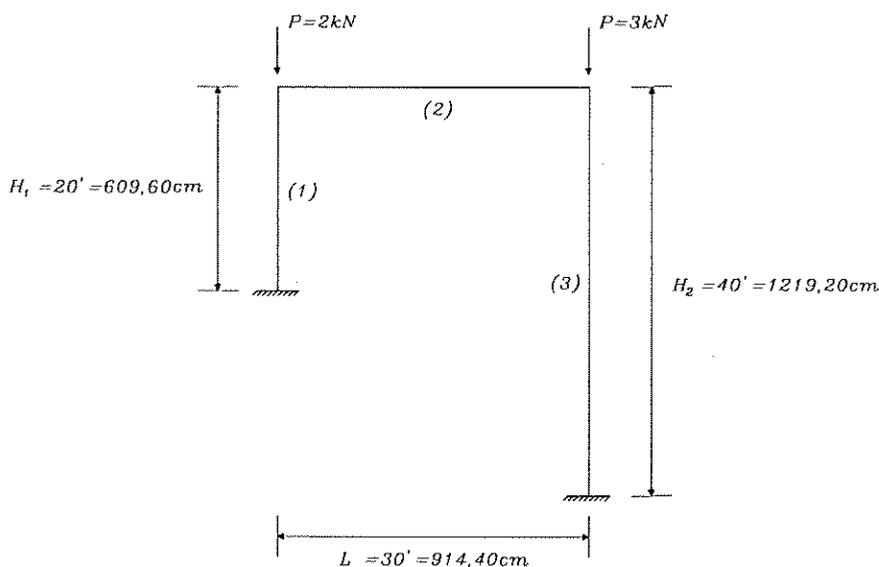
Ao realizar a análise pelo método dos elementos finitos houve a necessidade de se modelar os elementos de barra da estrutura em subelementos. Os resultados obtidos foram se aproximando dos obtidos pela análise de instabilidade através do método das funções de rigidez à medida que as barras da estruturas eram discretizadas com um número maior de elementos.

3.15.3 Exemplo Numérico 3

Este segundo exemplo, extraído do artigo escrito por HALDORSSON e WANG⁵⁶, apresenta uma estrutura reticulada geometricamente não simétrica e carregamento aplicado com intensidade diferentes nos nós da estrutura. Os dados geométricos da estrutura são apresentados na figura 3.12.

Na análise feita por HALDORSSON e WANG⁵⁶, a mesma simplificação apresentada no exemplo anterior foi utilizada. Os resultados obtidos por HALDORSSON e WANG⁵⁶, pelo programa desenvolvido pelo autor e programa ANSYS52 são mostrados na tabela 3.5.

Como se pode observar, o resultado obtido pelo programa desenvolvido pelo autor deste trabalho é muito próxima do valor encontrado pelos autores do artigo. O mesmo pode-se dizer a respeito da análise feita pelo método dos elementos finitos após cada barra da estrutura ter sido subdivida em quatro elementos de barra.



Dados da Estrutura

$$\begin{aligned}
 (1) : A &= 52,35 \text{ in}^2 = 337,74 \text{ cm}^2 & (2) : A &= 72,63 \text{ in}^2 = 468,56 \text{ cm}^2 \\
 I &= 288,00 \text{ in}^4 = 11987,47 \text{ cm}^4 & I &= 768,00 \text{ in}^4 = 31966,56 \text{ cm}^4 \\
 E &= 30000,00 \text{ ksi} = 20684,27 \text{ kN/cm}^2 & E &= 30000,00 \text{ ksi} = 20684,27 \text{ kN/cm}^2 \\
 (3) : A &= 62,11 \text{ in}^2 = 400,73 \text{ cm}^2 \\
 I &= 480,00 \text{ in}^4 = 19979,11 \text{ cm}^4 \\
 E &= 30000,00 \text{ ksi} = 20684,27 \text{ kN/cm}^2
 \end{aligned}$$

Figura 3.12 - Estrutura reticulada plana analisada por HALDORSSON e WANG⁵⁶.

Tabela 3.5 - Resultados obtidos na análise realizada por HALDORSSON e WANG⁵⁶, pelo programa do Autor e programa ANSYS52.

Nº de elementos (discretização da estrutura)	HALDORSSON e WANG (W_{cr})	Programa Autor (W_{cr})	Programa ANSYS52 (W_{cr})
3	1814,8744	1814,9991	1847,6996
6	-	"	1832,9952
9	-	"	1818,8238
12	-	"	1816,4762

3.15.4 Exemplo Numérico 4

Na figura 3.13 é apresentado um pilar com variação brusca de seção transversal. Este exemplo tem uma característica importante apresentar uma descontinuidade de características geométricas onde ocorre a variação de seção brusca da seção transversal do pilar, o que torna a análise mais complexa. Os valores das cargas verticais e horizontais aplicadas no pilar são: $P_1 = 137,90 \text{ kN}$, $P_2 = 222,40 \text{ kN}$ e $P_h = 15,10 \text{ kN}$, respectivamente. Com o programa desenvolvido pelo Autor, que utiliza as funções de rigidez, este pilar foi modelado com apenas

dois elementos prismáticos de barra, um elemento de barra para discretizar a seção transversal inferior do pilar e outro para discretizar a parte superior. O resultado obtido na análise de instabilidade é apresentado na tabela 3.6. Este mesmo exemplo foi analisado por REQUENA^{50,66} utilizando as funções de rigidez em sua tese de doutorado (ver terceira coluna da tabela 3.6). Observa-se que o resultado obtido pelo programa desenvolvido pelo autor está muito próximo do resultado obtido por REQUENA^{50,66}. O mesmo pode-se dizer a respeito da análise realizada pelo método dos elementos finitos após cada barra do pilar (inferior e superior) ter sido discretizada em dez subelementos de barra.

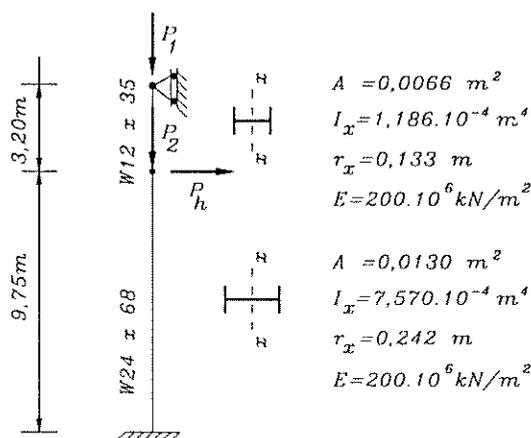


Figura 3.13 - Pilar com variação brusca de seção transversal.

Tabela 3.6 - Resultados obtidos pelo programa desenvolvido pelo Autor, REQUENA e programa ANSYS52.

Discretização do Pilar - Nº de elementos	Programa Autor (W_{cr})	Programa REQUENA (W_{cr})	Programa ANSYS52 (W_{cr})
2	41,5793	41,5678	41,9874
6	"	"	41,6017
10	"	"	41,5825
20	"	"	41,5797

3.15.5 Exemplo Numérico 5

Neste último exemplo, determinou-se a carga crítica de instabilidade elástica do edifício Industrial mostrado na figura 3.14. Este edifício foi analisado por FRASER e BRIDGE⁵⁷ e por REQUENA^{50,66}. Na análise feita através do programa desenvolvido pelo Autor, a estrutura foi discretizada com o mínimo de barras possíveis. Para este exemplo, seis elementos de barra foram então utilizados. O

resultado obtido na análise é apresentado na tabela 3.7. Na análise utilizando o programa ANSYS52, o edifício foi inicialmente discretizado utilizando o mínimo de barras possíveis, depois 18 barras, 36 e finalmente 60 barras. Os resultados obtidos nestas análises são apresentados na tabela 3.7.

Observa-se que a partir de um certo grau de discretização da seção transversal das barras, o resultado obtido na subsequente análise não difere muito do resultado obtido na análise anterior. Isto indica que os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos tende a convergir para um valor.

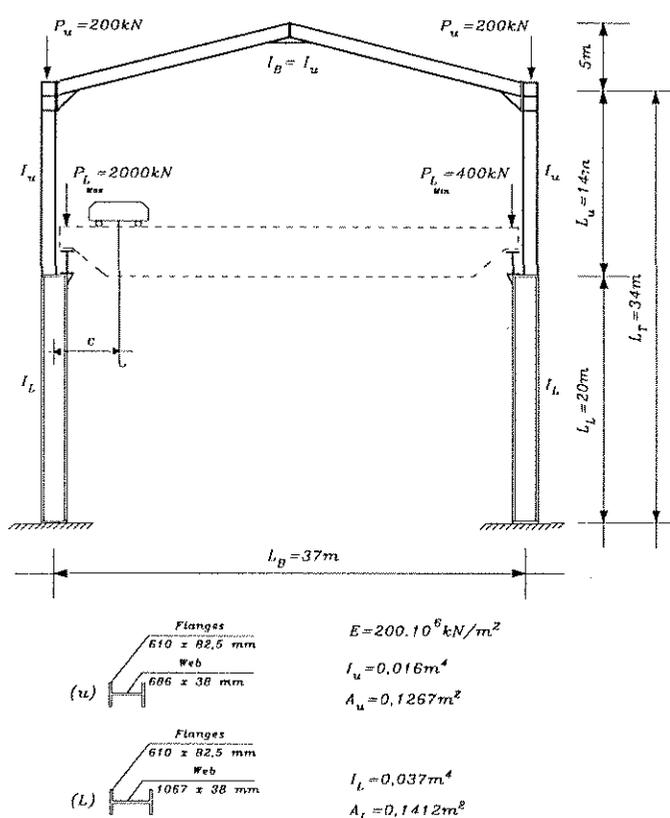


Figura 3.14 - Estrutura do edifício industrial.

Tabela 3.7 - Resultados comparativos entre o programa desenvolvido pelo Autor e programa ANSYS52.

Discretização do Edifício - Nº de Elementos	Programa desenvolvido pelo Autor (W_{cr})	Programa Requena (W_{cr})	Programa ANSYS52 (W_{cr})
6	35,9120	35,8976	36,3511
18	"	"	36,0154
36	"	"	36,0101
60	"	"	36,0098

3.16 Considerações sobre as Análises

Como era esperado, quando a discretização do problema é pequena, a análise feita utilizando o método dos elementos finitos não conseguiu determinar com exatidão o valor para a carga crítica de instabilidade dos exemplos analisados. Este fato acontece, conforme mencionado anteriormente, devido as simplificações que são feitas no desenvolvimento do método (a curva adotada para representar os deslocamentos transversais foi aproximada para uma curva do terceiro grau). Devido a esta aproximação, os efeitos "P- δ " não puderam ser representados de forma exata. Desta forma, torna-se necessário que as barras da estrutura sejam subdivididas para poder representar de forma mais precisa o comportamento da estrutura. O número de elementos que a barra deve ser subdividida depende da precisão que se queira obter na análise e do tipo de problema que está sendo analisado. Por outro lado, a subdivisão das barras é inconveniente na análise de estruturas com um grande número de barras devido ao grande consumo de memória e tempo de computação. As análises feitas utilizando as funções de rigidez representam a solução "exata", dentro das hipóteses assumidas, para o problema de autovalores.

Tendo em vista que o objetivo deste trabalho é fazer dimensionamento automatizado da estrutura, a subdivisão das barras faria com que aumentasse o número de verificações que seriam necessárias para o dimensionamento de uma barra e como conseqüência, de toda a estrutura. Diante dos fatos expostos, optou-se neste trabalho utilizar o desenvolvimento matricial baseado nas funções de rigidez. O desenvolvimento para a análise não linear geométrica e física do material será apresentada no próximo capítulo deste trabalho.

Capítulo 4

Estudo da Inelasticidade das Barras

4.1 Introdução

A discussão realizada no capítulo 3 baseou-se na hipótese de que o material que compõe a estrutura permanecia completamente elástico e obedecia a lei de Hooke. Entretanto, esta hipótese é válida somente para barras que estão solicitadas a um nível de tensão inferior ao limite de proporcionalidade da relação tensão-deformação do material. Durante a análise de uma estrutura reticulada, irão existir barras que estarão solicitadas acima do limite de proporcionalidade do material e a consideração deste efeito na análise se torna importante para poder representar de forma mais precisa o comportamento da estrutura.

As barras que estão trabalhando no campo inelástico são caracterizadas por apresentar algumas fibras na seção transversal já plastificadas. Para poder expressar o comportamento inelástico das barras, o módulo de elasticidade (E), que era elástico, deve ser substituído pelo módulo de elasticidade efetivo (E_{eff}). Este capítulo aborda o comportamento das barras que estão sujeitas a esforços predominantemente de compressão e flexão acima do limite de proporcionalidade do material (campo inelástico). Para tanto, a *teoria do módulo tangente* apresentada por Engesser e a *teoria do módulo reduzido* proposta por Considère - Engesser serão desenvolvidas e discutidas neste capítulo. Para mostrar a diferença entre as duas teorias citadas anteriormente, torna-se

necessário apresentar a teoria de Shanley para barras no campo inelástico. Foi ele quem resolveu as controvérsias a respeito de qual das duas teorias era capaz de representar o comportamento inelástico de uma barra. Ele mostrou que a máxima tensão suportada por uma barra estaria contida entre os intervalos fornecidos pela teoria do módulo tangente e reduzido.

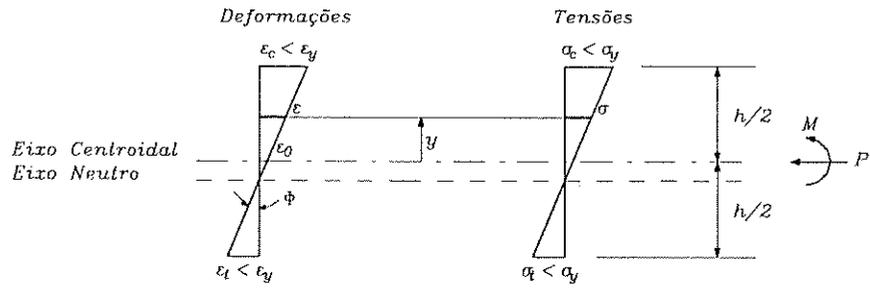
4.2 Efeito de Não Linearidade Física do Material

Uma das principais hipóteses assumidas no desenvolvimento do capítulo 3 foi a consideração de que as barras da estrutura permaneciam completamente elásticas durante toda a análise realizada. Ao se admitir esta hipótese, considerou-se que todas as fibras da seção transversal permaneceriam elásticas e que nenhuma plastificação do material poderia ocorrer em qualquer parte da seção transversal da barra. Entretanto, sabe-se que quando as barras de uma estrutura alcançam um certo estágio de sollicitação, as fibras da seção transversal começam a se plastificar. Neste sentido, a inclusão dos efeitos de não linearidade física do material na análise propicia a representação do comportamento de uma estrutura reticulada de forma mais precisa.

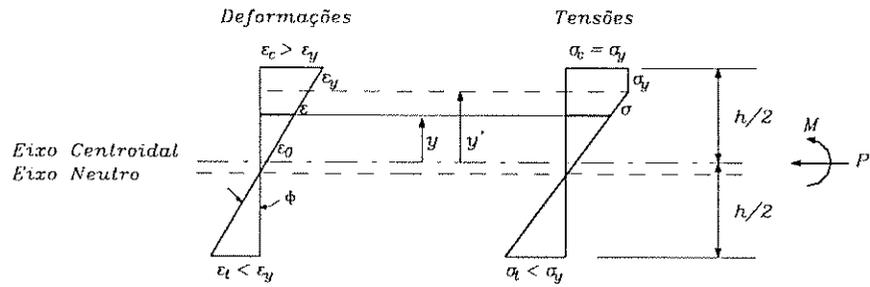
O fenômeno de não linearidade física do material pode ser ocasionado devido aos efeitos das tensões residuais, imperfeições geométricas e efeitos de flexão na seção transversal da barra. As tensões residuais podem ser geradas durante o processo de fabricação das barras de aço. As imperfeições geométricas são introduzidas nas barras durante o próprio processo de fabricação, no seu transporte e no seu manuseio. Os esforços de flexão nas barras são ocasionados devido a rigidez à flexão que a barra apresenta a este tipo de sollicitação. Para exemplificar o efeito de não linearidade física do material, considere os diagramas de tensão e deformação apresentados na figura 4.1, onde são apresentados quatro estágios de carregamentos em uma seção transversal de uma barra. No caso 1, toda a seção transversal permanece elástica, ou seja, nenhuma fibra da seção transversal atingiu a tensão de plastificação do material. Assim, todas as fibras apresentam módulo de elasticidade igual ao módulo elástico (é assumido que o material permanece perfeitamente elástico até alcançar a tensão de plastificação). O caso 2

representa o comportamento da seção transversal na qual algumas fibras na parte comprimida da seção alcançaram a tensão de escoamento do material. Como conseqüência, somente a parte da seção transversal que ainda permanece elástica é capaz de absorver a um aumento de sollicitação das ações. Neste caso, a capacidade portante da barra foi reduzida devido ao efeito de plastificação parcial da seção transversal. O caso 3 representa o comportamento em que algumas fibras na parte tracionada e comprimida alcançaram a tensão de plastificação do material. Portanto, a capacidade portante da barra foi ainda mais reduzida. O caso 4 mostra a seção transversal completamente plastificada onde todas as fibras alcançaram a tensão de plastificação.

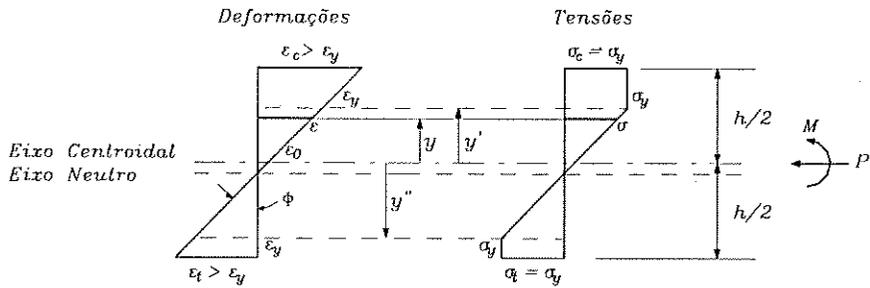
Nos casos analisados acima, as fibras que estão plastificadas apresentam módulo de elasticidade igual a zero, enquanto as fibras que não plastificaram, módulo de elasticidade elástico. Para poder representar o comportamento de toda seção transversal, torna-se necessário determinar um módulo de elasticidade que leve em consideração esta variação de módulos de elasticidade ao longo da seção transversal. Este comportamento desigual da seção transversal pode ser representado através do módulo de elasticidade efetivo. Este módulo tem como característica ser sempre inferior ao módulo elástico. Devido a este fato, as deformações médias na seção transversal serão maiores se estas fossem calculadas com o módulo elástico. A partir do momento em que as fibras da seção iniciarem a plastificar, o módulo efetivo é introduzido na análise e as deformações devido ao efeito de plastificação parcial da seção transversal não serão mais linearmente proporcionais as tensões. Como resultado, o gráfico plotado da relação entre tensão e deformação apresentará um comportamento não linear entre a fase elástica (abaixo do limite de proporcionalidade do material) e a fase completamente plástica. Por este motivo, este efeito é denominado de não linearidade física do material, pois causa uma relação não linear entre tensão e deformação.



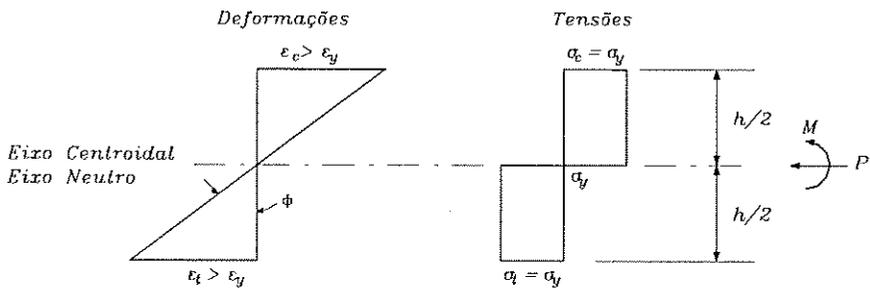
(a) caso 1



(a) caso 2



(a) caso 3



(a) caso 4

Figura 4.1 - Diagramas de tensão e deformação - representação do efeito de não linearidade física do material.

Os efeitos de tensões residuais não foram levados em consideração na análise anterior. Entretanto, quando estes efeitos estão presentes na análise, eles modificam o comportamento das fibras da seção transversal. A presença das tensões residuais de compressão fazem com que as fibras se plastifiquem mais rapidamente enquanto as que apresentam tensões residuais de tração mais tardiamente. Os efeitos de imperfeições geométricas introduzem mais flexão na barra, fazendo com que as fibras alcancem a tensão de plastificação do material mais rapidamente. É importante ressaltar que neste trabalho serão considerados os efeitos das tensões residuais, imperfeições geométricas, excentricidade de aplicação de carga e efeitos de flexão como agentes redutores da capacidade portante de uma barra devido ao fenômeno de não linearidade física do material.

4.3 Teoria do Modulo Tangente

A teoria proposta por Euler apenas consegue representar o comportamento de instabilidade de barras comprimidas abaixo do limite de proporcionalidade do material. Acima deste limite, devido aos efeitos de plastificação da seção transversal, a carga prevista pela teoria de Euler superestima a capacidade da barra. Uma das primeiras tentativas de explicar o comportamento de instabilidade de barras acima do limite de proporcionalidade foi proposta por Engesser em 1889. No desenvolvimento da teoria do módulo tangente, Engesser utilizou algumas hipóteses que serão descritas a seguir:

- a) a barra é considerada perfeitamente reta;
- b) as extremidades das barras são consideradas articuladas e o carregamento axial é aplicado ao longo do eixo centroidal da barra;
- c) as deformações por flexão da barra são consideradas pequenas;
- d) as seções planas permanecem planas após a deformação por flexão; e,
- e) durante a flexão, não ocorrem deformações reversas na seção transversal da barra (ou seja, não ocorre descarregamento nas fibras da seção transversal).

Quando a barra sofre instabilidade inelástica, as tensões nas fibras da seção transversal estão acima do limite de proporcionalidade do material

conforme apresentado na figura 4.2. Desta forma, o módulo tangente (E_t) governa o comportamento das fibras durante a instabilidade da barra.

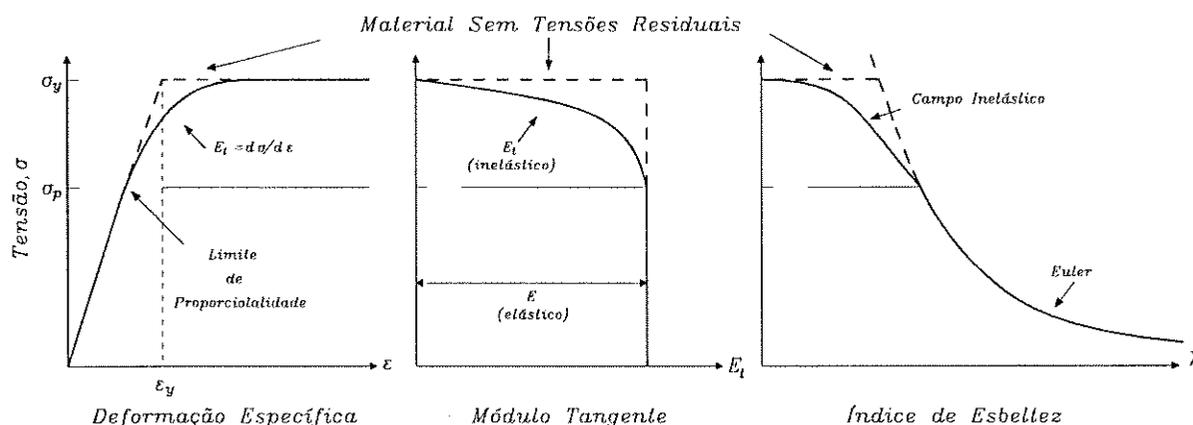


Figura 4.2 - Representação esquemática da flambagem inelástica de barra.

Considere que a barra bi-articulada mostrada na figura 4.3(a) sofra instabilidade para uma carga " P_t " acima do limite de proporcionalidade do material. As distribuições de tensões e deformações na seção transversal da barra são apresentadas na figura 4.3(b). Nesta figura, " σ_t " e " ϵ_t " são respectivamente a tensão e deformação antes da carga crítica tangente. Quando a carga crítica tangente é alcançada e a barra flamba, assume-se que ocorra um acréscimo de força axial " ΔP " em conjunto com um acréscimo de momento " ΔM ". Este acréscimo de força axial " ΔP " combinado com o acréscimo de momento " ΔM " irá causar um aumento na deformação axial da seção transversal da barra de tal forma que nenhuma fibra da seção transversal sofra alívio de deformações. Desta forma, o módulo de elasticidade tangente (E_t) irá governar o comportamento da relação tensão-deformação de todas as fibras da seção transversal conforme apresentado na figura 4.3(c).

Através do comportamento da seção transversal da barra apresentado nos diagramas da figura 4.3(b), a equação diferencial que governa o comportamento da barra no campo inelástico segundo a teoria do módulo tangente pode ser determinada. Para um determinada seção de coordenada " x " da barra, a equação de equilíbrio da barra é dada por:

$$-M_{int} + Py = 0 \quad (4.1)$$

sendo, "P" a força axial aplicada no eixo centroidal da barra e "y" a distância da linha de ação da força axial ao eixo centroidal da seção transversal da barra quando a barra se flexiona.

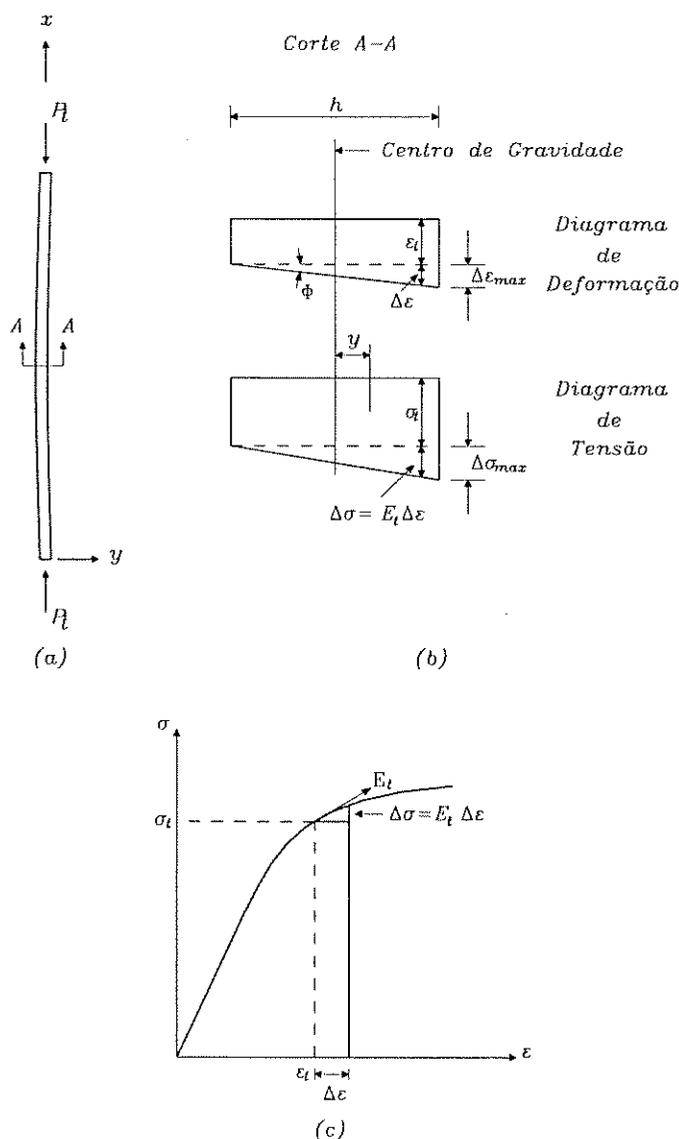


Figura 4.3 - Teoria do módulo tangente.

O momento resistente interno da seção transversal da barra devido a flexão é dado pela seguinte expressão abaixo:

$$M_{\text{int}} = \int_A \sigma y \, dA \quad (4.2)$$

sendo, "σ" a tensão longitudinal de uma fibra da seção transversal e "y" a medida de uma fibra qualquer ao eixo centroidal da seção transversal da barra.

Utilizando o diagrama de tensão apresentado na figura 4.2(b), a tensão “ σ ” em uma fibra qualquer da seção transversal pode ser expressa por:

$$\sigma = \sigma_t + \Delta\sigma = \sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \left(y + \frac{h}{2} \right) \quad (4.3)$$

Substituindo a equação (4.3) em (4.2), obtém-se:

$$M_{\text{int}} = \int_A \left[\sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] y \, dA \quad (4.4)$$

Desenvolvendo a segunda parte da equação (4.4), chega-se em:

$$M_{\text{int}} = \sigma_t \int_A y \, dA + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} \int_A y^2 \, dA + \frac{\Delta\sigma_{\max}}{2} \int_A y \, dA \quad (4.5)$$

Realizando a integral na área “A” da seção transversal e lembrando que “y” é a medida de uma fibra qualquer em relação ao centro de gravidade da seção transversal (desta forma, todas as integrais da forma $\int_A y \, dA$ devem ser iguais a zero e $\int_A y^2 \, dA = I$), a igualdade (4.5) fica portanto:

$$M_{\text{int}} = \frac{\Delta\sigma_{\max}}{h} I = \Delta M \quad (4.6)$$

Substituindo $\Delta\sigma_{\max} = E_t \Delta\varepsilon_{\max}$ na equação (4.6) e lembrando que “ $\Delta\varepsilon_{\max}/h$ ” é a curvatura “ Φ ” da seção transversal da barra após esta fletir, conforme mostrado na figura 4.2(b), a equação (4.6) fica expressa por:

$$M_{\text{int}} = E_t I \Phi \quad (4.7)$$

Conforme apresentado no capítulo anterior, para a teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a curvatura “ Φ ” pode ser aproximada pela segunda derivada dos deslocamentos ($\Phi = -d^2y/dx^2$). Desta forma, a equação (4.7) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$M_{\text{int}} = -\frac{d^2y}{dx^2} E_t I \quad (4.8)$$

Substituindo a equação do momento interno obtida anteriormente na equação de equilíbrio (4.1), chega-se em:

$$\frac{d^2y}{dx^2} E_t I + P y = 0 \quad (4.9)$$

A equação (4.9) representa a equação diferencial que governa o problema de instabilidade de barras desenvolvido com base na teoria do módulo tangente.

A única diferença entre a teoria de Euler e a teoria do Módulo tangente é que o módulo de elasticidade elástico (E) foi substituído pelo módulo de elasticidade tangente (E_t). Resolvendo a equação (4.9), a carga crítica para uma barra baseada na teoria do módulo tangente que sofre instabilidade acima do limite de proporcionalidade fica expressa por:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} = \frac{E_t}{E} P_{Euler} \quad (4.10)$$

sendo, "L" o comprimento da barra e " P_{Euler} " a carga crítica de Euler.

Será mostrado posteriormente no desenvolvimento da teoria de Shanley que esta carga corresponde ao menor valor para o qual a bifurcação do equilíbrio de uma barra perfeitamente reta pode ocorrer no campo inelástico. É importante ressaltar que o módulo tangente utilizado na equação (4.10) depende apenas das propriedades do material que é composta a barra, ou seja, da relação tensão-deformação que este material apresenta.

4.4 Teoria do Duplo Módulo ou Módulo Reduzido

Uma outra teoria a tentar explicar o comportamento de barras no campo inelástico foi proposta por Engesser em 1895. A teoria foi designada de teoria do Duplo módulo ou teoria do módulo Reduzido.

As quatro primeiras hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria do módulo tangente também são utilizadas nesta teoria. Entretanto, a quinta hipótese se difere daquela utilizada na teoria do módulo tangente. Na teoria do módulo reduzido, assume-se que a força axial permanece constante durante a flambagem da barra. Assim, durante a flambagem, a flexão produzirá alívio de deformações em um dos lados da seção transversal da barra e no outro, as deformações ocorrerão incrementos de deformações. Como resultado, os incrementos de tensões e deformações induzidos devido a flexão da barra no momento da flambagem farão com que as fibras de um lado da seção transversal estejam relacionadas com o módulo de elasticidade elástico e as outras fibras, da outra parte da seção transversal, estejam relacionadas com o módulo de elasticidade tangente. Desta forma, dois módulos de elasticidade distintos, "E" e " E_t ", são necessários para descrever o comportamento momento-curvatura da

seção transversal da barra. Por este motivo, esta teoria é chamada de teoria do duplo módulo, por estar relacionada a dois tipos distintos de módulos de elasticidade. Como o duplo módulo é inferior ao módulo elástico que aparece na carga crítica de Euler, a carga crítica prevista por esta teoria é inferior a carga crítica de Euler. O duplo módulo é também chamado de módulo reduzido.

Considere a barra bi-articulada mostrada na figura 4.4(a) que sofre instabilidade para uma carga " P_r " acima do limite de proporcionalidade do material. As distribuições de tensões e deformações na seção transversal da barra são apresentadas na figura 4.4(b). A relação entre os incrementos de tensão e deformação é apresentada na figura 4.4(c).

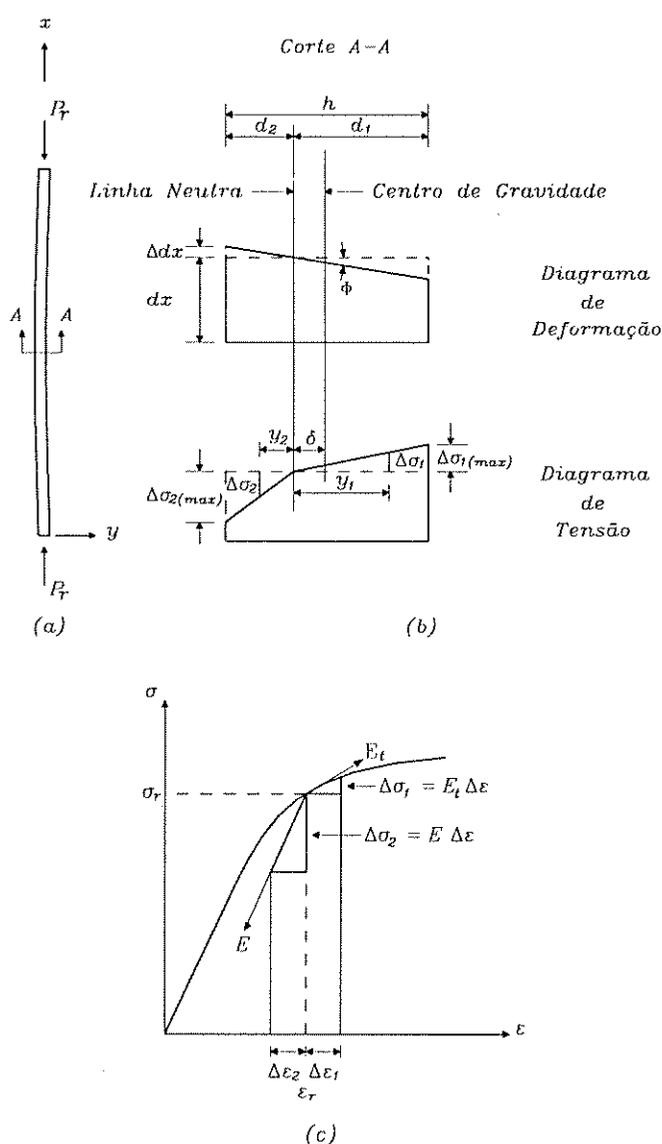


Figura 4.4 - Teoria do módulo reduzido.

Através do comportamento da seção transversal apresentado nos diagramas da figura 4.4.(b), a equação diferencial que governa o comportamento da barra no campo inelástico segundo a teoria do módulo reduzido pode ser determinada. Para um determinada seção de coordenada "x" da barra, a equação de equilíbrio da barra é dada por:

$$-M_{int} + Py = 0 \quad (4.11)$$

sendo, "P" a força axial aplicada no eixo centroidal da barra e "y" a distância da linha de ação da força axial ao eixo centroidal da seção transversal da barra quando a barra se flexiona.

No momento da flambagem, a linha neutra se desloca do eixo centroidal da barra um distância "δ" devido a efeito de flexão da barra. Por este motivo, parte da seção transversal apresenta fibras que foram encurtadas, sendo o aumento de tensão em uma fibra qualquer nesta face da seção transversal dada pela seguinte relação $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$. Por outro lado, a outra parte da seção transversal apresentará fibras que foram aliviadas, sendo que estas fibras apresentarão tensões proporcionais ao módulo elástico (E).

Conforme apresentado na figura 4.4(b), a distribuição de deformações ao longo da seção transversal é linear. O comportamento da fibra aliviada mais afastada da seção transversal, aplicando a lei de Hooke é dada por:

$$\Delta\sigma_{2(max)} = \frac{\Delta dx}{dx} E \quad (4.12)$$

Relacionando a fibra mais aliviada com a fibra mais encurtada, chega-se a seguinte relação:

$$\varepsilon_{1(max)} = \frac{d_1}{d_2} \Delta dx \quad (4.13)$$

O comportamento da fibra encurtada mais afastada da seção transversal é dado por:

$$\Delta\sigma_{1(max)} = \frac{d_1 \Delta dx}{d_2} \frac{E_t}{dx} \quad (4.14)$$

De acordo com a figura 4.4(b), a variação da rotação da seção transversal pode ser expressa por:

$$d\theta = \frac{\Delta dx}{d_2} \quad (4.15)$$

Substituindo a equação (4.15) em (4.12) e em (4.14), as tensões na fibra mais aliviada e mais estendida ficam expressas por:

$$\Delta\sigma_{2(\max)} = E d_2 \frac{d\theta}{dx} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_{1(\max)} = E_1 d_1 \frac{d\theta}{dx} \quad (4.16)$$

O momento resistente interno dado pela condição de tensão na figura 4.4(b) é expresso por:

$$M_{\text{int}} = \int_0^{d_1} \Delta\sigma_1 (y_1 - \delta) dA_1 + \int_0^{d_2} \Delta\sigma_2 (y_2 + \delta) dA_2 \quad (4.17)$$

Utilizando a equação (4.16) para determinar as tensões em uma fibra posicionada a uma distância "y₁" na parte da seção transversal encurtada e a uma distância "y₂" na parte da seção transversal aliviada, chega-se em:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= \Delta\sigma_{1(\max)} \frac{y_1}{d_1} = E_1 d_1 \frac{d\theta}{dx} \frac{y_1}{d_1} \\ \Delta\sigma_2 &= \Delta\sigma_{2(\max)} \frac{y_2}{d_2} = E d_2 \frac{d\theta}{dx} \frac{y_2}{d_2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Conforme apresentado no capítulo anterior, para a teoria dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a curvatura "Φ" pode ser aproximada pela segunda derivada dos deslocamentos. Assim, "Φ" é dado por:

$$\Phi = -\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{d\theta}{dx} \quad (4.19)$$

Substituindo dθ/dx por d²y/dx² na equação (4.18), chega-se em:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= E_1 d_1 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{y_1}{d_1} \\ \Delta\sigma_2 &= E d_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{y_2}{d_2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo a equação (4.20) em (4.17) e substituindo a expressão encontrada para o M_{int} na equação (4.11), obtém-se:

$$E_1 \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^{d_1} y_1 (y_1 - \delta) dA_1 + E \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^{d_2} y_2 (y_2 + \delta) dA_2 + P y = 0 \quad (4.21)$$

A condição de equilíbrio de forças na seção transversal requer que:

$$\int_0^{d1} \Delta\sigma_1 dA_1 = \int_0^{d2} \Delta\sigma_2 dA_2 \quad (4.22)$$

Desenvolvendo a equação (4.22), chega-se a seguinte condição de igualdade:

$$E_1 \frac{d^2y}{dx^2} \int_0^{d1} y_1 dA_1 = E \frac{d^2y}{dx^2} \int_0^{d2} y_2 dA_2 \quad (4.23)$$

Desenvolvendo a equação (4.21) e utilizando a equação (4.23), nota-se que as integrais envolvendo "δ" se cancelam uma com a outra e desta forma a equação (4.21) fica expressa da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[E_1 \int_0^{d1} y_1^2 dA_1 + E \int_0^{d2} y_2^2 dA_2 \right] + Py = 0 \quad (4.24)$$

A equação (4.24) representa a equação diferencial que governa o problema de instabilidade de barras desenvolvido com base na teoria do módulo reduzido. Desta forma, a carga crítica para uma barra baseada na teoria do módulo reduzido que sofre instabilidade acima do limite de proporcionalidade é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} \left[E_1 \int_0^{d1} y_1^2 dA_1 + E \int_0^{d2} y_2^2 dA_2 \right] \quad (4.25)$$

Como a expressão entre colchetes depende do tipo de seção transversal, torna-se necessário especificar a geometria da seção transversal para avaliar o módulo reduzido da seção em estudo. De uma forma genérica, as duas integrais dentro do colchetes são iguais aos momentos de inércia das áreas da seção transversal onde ocorreu o carregamento e descarregamento das fibras. Representado estas integrais por "I₁" e "I₂", tem-se:

$$I_1 = \int_0^{d1} y_1^2 dA_1 \quad \text{e} \quad I_2 = \int_0^{d2} y_2^2 dA_2 \quad (4.26)$$

Substituindo a equação (4.26) em (4.25), a segunda fica expressa da seguinte forma:

$$P_r = \frac{\pi^2}{L^2} [E_1 I_1 + E I_2] \quad (4.27)$$

Finalmente, introduzindo a notação $E_r = (E_1 I_1 + E_2 I_2)/I$ e substituindo na equação (4.27), chega-se em:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} = \frac{E_r}{E} P_{\text{euler}} \quad (4.28)$$

Comparando novamente a equação da carga crítica de Euler, percebe-se que o módulo de elasticidade elástico foi substituído pelo módulo reduzido. A principal diferença entre o módulo reduzido e o módulo tangente é que o primeiro além de ser função das propriedades do material, é também função do tipo de geometria da seção transversal. Assim, para perfis com seções transversais diferentes mas feitos do mesmo material, estes apresentarão módulo de reduzidos diferentes pois estes não são apenas função do material mas também do tipo de seção transversal bem como das propriedades geométricas destes perfis.

Realizando uma comparação entre os diferentes módulos de elasticidade obtidos nas teorias apresentadas, o módulo reduzido (E_r) será sempre menor que o módulo elástico (E), porém, maior que o módulo tangente (E_t):

$$E_t < E_r < E \quad (4.27)$$

e desta forma,

$$P_t < P_r < P_{\text{euler}} \quad (4.28)$$

4.5 Teoria de Shanley

Se o módulo tangente é usado diretamente na fórmula de Euler, então o valor da carga crítica para uma barra bi-articulada é inferior ao valor encontrado pela teoria do duplo módulo, conforme apresentado anteriormente. A fórmula do módulo tangente foi e continua sendo amplamente utilizada pelos engenheiros pois esta fornece valores que estão bem próximos aos valores encontrados em ensaios de laboratórios. Entretanto, antes de Shanley expor sua teoria, a teoria do módulo reduzido era considerada a verdadeira solução teórica para o problemas de instabilidade de barras perfeitas e retas. Naquela época, os valores inferiores aos sugeridos pela teoria do módulo reduzido, que eram encontrados em ensaios de laboratório, eram explicados como sendo causados devido a presença de inevitáveis excentricidades, técnicas de ensaios e outros erros.

SHANLEY⁵⁸ começa o desenvolvimento de sua teoria fazendo alguns questionamentos a respeito de algumas hipóteses feitas no desenvolvimento das teorias apresentadas anteriormente. Na teoria do módulo tangente, é assumido que a barra permanece perfeitamente reta enquanto as deformações aumentam de um valor dado pela teoria do módulo tangente. Entretanto, não há nada que previne esta de fletir simultaneamente com um aumento de força axial. Sobre tais condições, as deformações por compressão poderiam aumentar em um lado da seção transversal enquanto as deformações no outro lado permaneceriam constantes, ou, as deformações poderiam aumentar de forma diferente em ambos os lados. Se tais situações fossem assumidas, o módulo tangente poderia ser aplicado em toda a seção transversal da barra e carga de flambagem seria aquela dada pela teoria do módulo tangente. Isto criaria um paradoxo, pois se todas as deformações fossem iguais ou superiores aos valores dado pelo módulo tangente, a média das deformações seria superior a aquela dada pela teoria do módulo tangente.

Por outro lado, uma das hipóteses envolvida na teoria do módulo reduzido também representa um paradoxo. Esta teoria se baseia na hipótese de que a barra permanece perfeitamente reta até que a barra alcance a força crítica axial. Entretanto, esta teoria também mostra que deformações reversas na seção transversal da barra são necessárias para prover à barra adicional rigidez para que esta possa suportar um carregamento superior ao calculado pela teoria do módulo tangente. É impossível haver deformações reversas em uma barra que permanece perfeitamente reta, ou seja, em uma barra em que não está flexionada.

Baseado nos fatos mencionados anteriormente, SHANLEY¹⁰ declarou que a flexão em uma barra perfeitamente reta e carregada irá se iniciar assim que o carregamento previsto pela teoria do módulo tangente for alcançado e que o máximo carregamento que uma barra perfeitamente reta pode alcançar está compreendido entre as duas teorias apresentadas anteriormente. O problema de flambagem de barras no regime inelástico deve ser revisto tendo como base que o carregamento axial e a flexão da barra podem ocorrer simultaneamente.

4.5.1 Desenvolvimento Matemático

Considere o modelo de barra mostrado na figura 4.5 na qual esta é representada por duas barras rígidas conectadas por uma célula de comprimento unitário deformável formada por dois pequenos elementos (SHANLEY¹⁰). Fazendo o equilíbrio em uma posição ligeiramente fletida, os dois elementos da célula se deslocam em direções opostas de uma distância “ e_1 ” e “ e_2 ” conforme mostrado na figura 4.5. Os valores de “ e_1 ” e “ e_2 ” podem ser compreendidos como sendo as deformações que ocorrem quando a barra está na posição ligeiramente fletida. É importante mencionar que “ e_1 ” e “ e_2 ” podem assumir diferentes valores, o que indica uma combinação de flexão com variação da força axial.

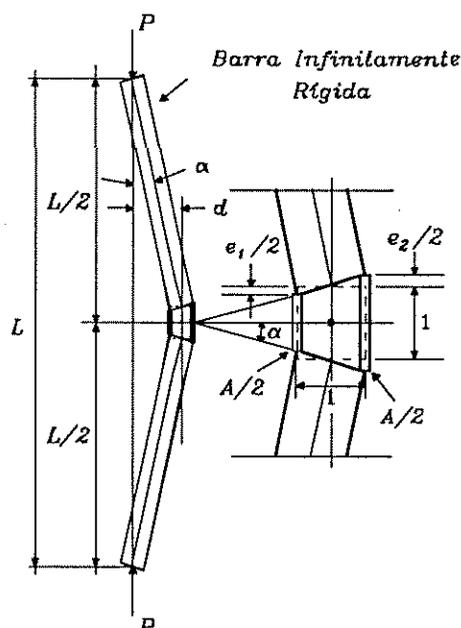


Figura 4.5 - Modelo de barra proposto na teoria de Shanley¹⁰.

O carga crítica da barra pode ser facilmente encontrada fazendo os equilíbrios de momento interno e externo da barra. O deslocamento “ d ” pode ser expresso em termos de deformação como segue:

$$d = \frac{\alpha L}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} \right) L = \frac{L}{4} (e_1 + e_2) \quad (4.29)$$

O momento externo na célula é dado por:

$$M_{\text{ext}} = Pd = \frac{PL}{4} (e_1 + e_2) \quad (4.30)$$

O força axial em cada elemento da célula, devido a flexão, é representada por:

$$P_1 = e_1 E_1 (A/2) \text{ e } P_2 = e_2 E_2 (A/2) \quad (4.31)$$

É importante notar que E_1 e E_2 indicam os valores para "E" para os quais estes são considerados efetivos para cada elemento da célula.

O momento interno na célula em relação ao ponto de rótula no centro do elemento pode ser expresso por:

$$M_{\text{int}} = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}e_1 E_1 \frac{A}{2} + \frac{1}{2}e_2 E_2 \frac{A}{2} = \frac{A}{4}(e_1 E_1 + e_2 E_2) \quad (4.32)$$

Fazendo o equilíbrio dos momentos internos com os momentos externos, chega-se em:

$$\frac{PL}{4}(e_1 + e_2) = \frac{A}{4}(e_1 E_1 + e_2 E_2)$$

que desenvolvida, o valor de "P" fica dado por:

$$P = (A/L)[(e_1 E_1 + e_2 E_2)/(e_1 + e_2)] \quad (4.33)$$

Observa-se que a equação de Euler pode ser obtida fazendo $E_1 = E_2 = E$ na equação (4.33). O mesmo pode ser dito a respeito da equação de Engesser que pode ser obtida fazendo $E_1 = E_2 = E_t$. Se é assumido que em elemento da célula a tensão é aumentada e no outro elemento a tensão é diminuída, então " E_1 " passa ser expresso por " E_t " e " E_2 " por " E ", respectivamente. Chamando $k = E/E_t$, então a equação (4.33) fica representada por:

$$P = (AE_t/L)[(e_1 + ke_2)/(e_1 + e_2)] \quad (4.34)$$

a qual representa uma nova expressão para a fórmula de Engesser.

Da equação (4.29), sabe-se que:

$$4d/L = e_1 + e_2 \text{ e } e_1 = (4d/L) - e_2 \quad (4.35)$$

Substituindo a equação (4.35) em (4.34), obtém-se:

$$P = \frac{AE_t}{L} \left[1 + \frac{L}{4d}(k-1)e_2 \right] \quad (4.36)$$

Uma outra expressão pode ser obtida para "P" se for considerado que quando o carregamento previsto pela teoria do módulo tangente é encontrado, o carregamento na barra continua a aumentar. O aumento da força axial é dado

pela diferença entre o carregamento no elemento "P₁" e "P₂". Isto pode ser expresso por:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = e_1 E_1 (A/2) - e_2 E_2 (A/2) = (A/2) E_1 (e_1 - k e_2) \quad (4.37)$$

Substituindo o valor de "e₁" dado na equação (4.35) em (4.37), chega-se em:

$$\Delta P = \frac{A}{2} E_t \left[\frac{4d}{L} - (1+K)e_2 \right] \quad (4.38)$$

O valor encontrado na equação (4.38) deve ser somado à carga crítica calculada pela teoria do módulo tangente para se obter o valor total para "P":

$$P = \frac{A E_t}{L} \left\{ 1 + \left[2d - \frac{L}{2} (1+k) e_2 \right] \right\} \quad (4.39)$$

Comparando a equação (4.39) com a equação (4.36), a seguinte equação pode ser obtida por:

$$\frac{4d}{L} (k-1) e_2 = 2d - \frac{L}{2} (1+k) e_2$$

para o qual o valor de "e₂" fica dado por:

$$e_2 = 8d^2/L [k - 1 + 2d(1+k)] \quad (4.40)$$

Substituindo o valor de "e₂" na equação (3.36), chega-se em:

$$P = \frac{A E_t}{L} \left[1 + \frac{2d(k-1)}{k-1+2d(1+k)} \right]$$

a qual pode se reduzida para:

$$P = \frac{A E_t}{L} \left(1 + \left\{ 1 / \left[\frac{1}{2d} + \left(\frac{k+1}{k-1} \right) \right] \right\} \right) \quad (4.41)$$

Se a razão "E_t/E" for representada pelo símbolo usual "τ", então a equação (4.41) fica expressa da seguinte forma:

$$P = \frac{A E_t}{L} \left(1 + \left\{ 1 / \left[\frac{1}{2d} + \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right) \right] \right\} \right) \quad (4.42)$$

Chamando R=P/P_t, a equação (4.42) fica representada da seguinte maneira:

$$R = 1 + \left\{ 1 / \left[\frac{1}{2d} + \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right) \right] \right\} \quad (4.43)$$

O comportamento inelástico de uma barra segundo a teoria de Shanley (equação 4.42) é mostrado na figura 4.6 para valores de $\tau = 0.5$ e $\tau = 0.75$. Nesta figura, são apresentados os deslocamento laterais “d” de uma barra em função de “R”. É importante indicar que as equações (4.42) e (4.43) não são aplicadas quando o módulo tangente for igual a zero ($E_t=0$). Se é assumido que o módulo tangente diminui com o aumento da tensão (o que geralmente acontece), a curva irá aumentar para um valor máximo e então começará a cair.

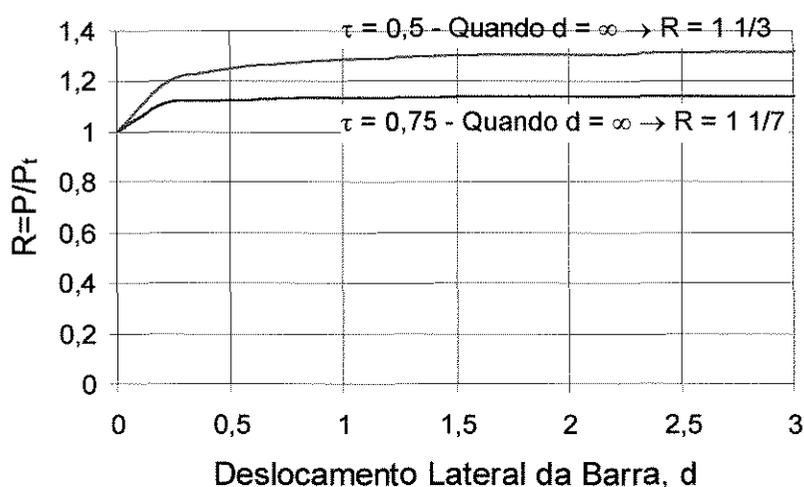


Figura 4.6 - Variação do carga axial com o deslocamento lateral da barra assumindo que E_t permanece constante (Fonte SHANLEY¹⁰).

4.5.2 Comparação com a Teoria do Módulo Reduzido

A equação para a carga crítica de uma barra irá agora ser obtida tendo como base as hipóteses assumidas na teoria do módulo reduzido. Será assumido que a barra permanece perfeitamente reta até encontrar a carga crítica fornecida pela teoria do módulo reduzido, para o qual a barra se flexiona. A obtenção da equação da carga crítica assumido esta hipótese segue o desenvolvimento feito neste trabalho até a equação (4.36). Agora, ao invés de assumir que pode haver aumento no carregamento da barra, será assumido que $\Delta P=0$. Para tanto, tem-se que $P_1 = P_2$ e $E_1 e_1 = E_2 e_2$. Desta forma, chega-se em:

$$e_2 = e_1 (E_t/E) = e_1 / k \quad (4.44)$$

Substituindo a equação (4.44) em (4.35), obtém-se uma equação para “ e_2 ”:

$$e_2 = (1/k)[(4d/L) - e_2]$$

$$e_2 = (4d/L)[1/(1+k)] \quad (4.45)$$

Substituindo a equação anterior na equação (4.36), pode-se obter a equação para a carga crítica segundo a hipótese assumida na teoria do módulo reduzido:

$$P_r = \frac{AE_t}{L} \left\{ 1 + \left[\frac{k-1}{k+1} \right] \right\} \quad (4.46)$$

Nota-se que a equação (4.46) representa a equação (4.41) quando o valor de "d" se aproxima do infinito. Esta equação mostra que a teoria do módulo reduzido fornece o valor limite para uma barra comprimida axialmente quando o deslocamento lateral desta se aproxima do infinito, assumindo que o módulo tangente permanece constante. Desta forma, a carga limite prevista pela teoria do módulo reduzido não pode nunca ser alcançada, mesmo que seja assumido que haja uma redução do módulo tangente com o aumento da deformação.

A equação (4.42) representa a teoria mais completa para o problema de carga crítica de uma barra perfeitamente reta comprimida com carga passando no centro de gravidade da seção transversal, assumindo que a barra possa ser representada esquematicamente como mostrado na figura 4.5 e que o valor do módulo tangente permaneça constante durante a análise.

4.5.3 Variação das Deformações com a Força Axial

É possível obter as equações que expressam as deformações nos dois elementos da célula a medida em que a força axial vai sendo aplicada na barra. Utilizando as equações (4.43), (4.35) e (4.40), as seguintes equações podem ser determinadas:

$$e_1 = \frac{2}{L} \left[\frac{k-R}{\left(\frac{k-1}{R-1} \right) - (k+1)} \right] \quad (4.47)$$

$$e_2 = \frac{2}{L} \left[\frac{R-1}{\left(\frac{k-1}{R-1} \right) - (k+1)} \right] \quad (4.48)$$

As equações anteriores somente se aplicam após a barra iniciar a fletir, ou seja, após a força axial alcançar o valor previsto pela teoria do módulo tangente. A tensão de compressão para a força axial igual a "P_t" é dada pela seguinte expressão:

$$P_t/A = E_t/L$$

A deformação correspondente ao estado de tensão apresentado anteriormente pode ser obtido do diagrama tensão-deformação do material. Se a tensão estiver no campo elástico, a deformação pode ser calculada por:

$$e_t = P/A E = E_t/EL = 1/kL \quad (4.49)$$

O valor da deformação apresentado acima é obtido quando R=1. As deformações adicionais em cada elemento da célula, para valores além de R=1, serão fornecidos em função da deformação "e_t", conforme apresentado a seguir:

$$\frac{\Delta e_1}{e_t} = 2 \left[\frac{k(k-R)}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (4.50)$$

$$\frac{\Delta e_2}{e_t} = 2 \left[\frac{k(R-1)}{\left(\frac{k-1}{R-1}\right) - (k+1)} \right] \quad (4.51)$$

Os valores das deformações para os elementos da célula analisada são plotados na figura 4.7 para um valor de k=1,333. O gráfico apresentado representa a variação das deformações em função do esforço axial na barra.

A figura 4.7 representa o comportamento de uma barra baseado em uma simplificação do problema, conforme exposto no início deste desenvolvimento. SHANLEY¹⁰ ao iniciar a tentativa de explicar o comportamento de uma barra no campo inelástico requisitou a realização de um ensaio de um corpo-de-prova. Naquela ocasião, o ensaio foi realizado em um corpo-de-prova de seção retangular feito de material alumínio. O corpo-de-prova foi dimensionado para apresentar flambagem no campo inelástico e foi instrumentado com "strain gages" em ambas as faces de forma a avaliar o comportamento das deformações nestas faces. O resultado deste ensaio é apresentado na figura 4.8. É importante

notar que na face onde as tensões são aumentadas, as deformações aumentam mais rapidamente quando a carga crítica tangente é encontrada, ao passo que as deformações onde as tensões são reduzidas, decrescem suavemente. Ao se comparar o gráfico obtido de um ensaio de um corpo-de-prova com o gráfico obtido através da teoria proposta por SHANLEY¹⁰, observa-se um comportamento semelhante entre a teoria e a prática.

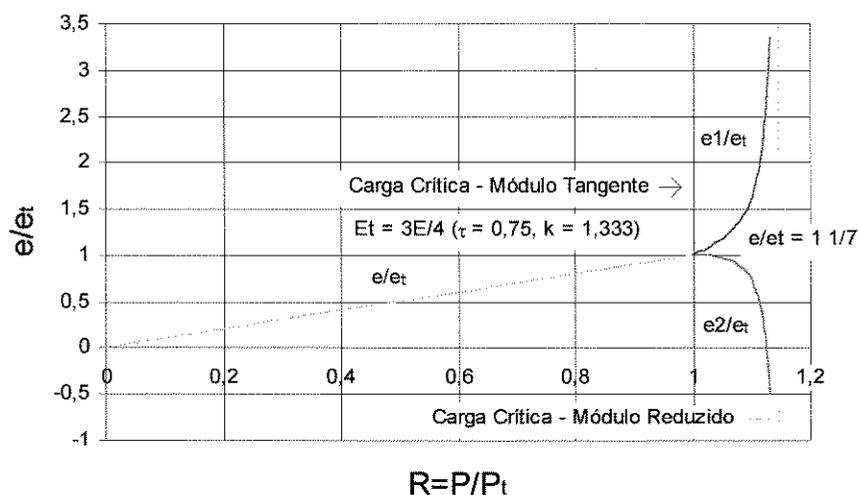


Figura 4.7 - Variação da deformação com a carga axial para uma barra hipotética.

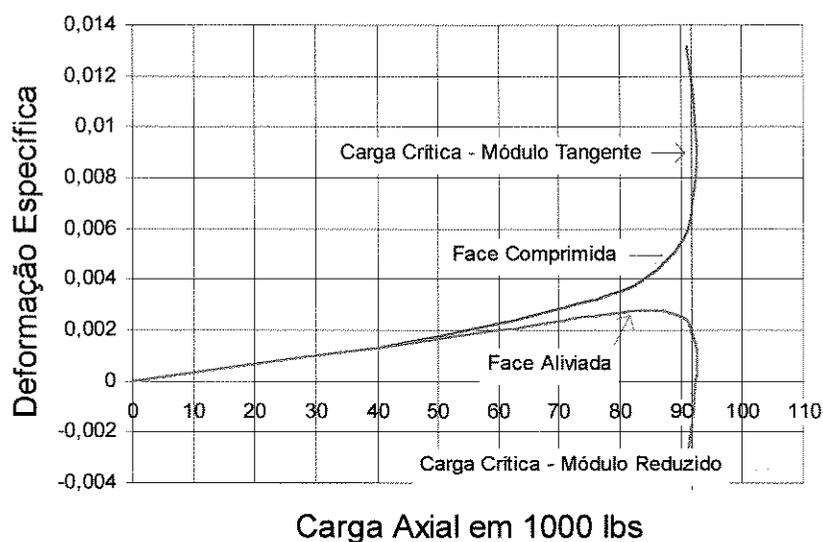


Figura 4.8 - Deformações nas faces opostas obtidas em um ensaio de uma barra retangular (fonte SHANLEY¹⁰).

4.5.3 Considerações sobre a Teoria de Shanley

Embora a análise anterior seja baseada em uma barra hipotética, ela guarda uma certa semelhança com o problema real, como observado nas figuras 4.7 e 4.8. Entretanto, caso se queira estender a análise para o caso geral, isto é apenas uma questão de matemática. Observando os resultados obtidos da teoria de Shanley, as seguintes conclusões foram tiradas por ele através do desenvolvimento apresentado anteriormente:

a) a equação do módulo tangente (Engesser) fornece a máxima força axial para o qual uma barra permanecerá perfeitamente reta;

b) a força axial que uma barra pode suportar pode exceder a carga prevista pela teoria do módulo tangente mas não pode ser maior que a carga prevista pela teoria do módulo reduzido (esta afirmação não foi provada para o caso geral);

c) cargas acima do valor dado pela teoria do módulo tangente irão causar deformações de flexão permanentes na barra;

d) existirão algumas fibras da seção transversal que não apresentarão tensões superiores as tensões dadas pelo módulo tangente;

e) após a carga tangente ser ultrapassada, as deformações de compressão irão aumentar mais rapidamente que a média das deformações da seção transversal da barra;

f) para os materiais utilizados na engenharia, a diminuição do módulo tangente com o aumento das deformações irá limitar a máxima força que a barra pode suportar acima do módulo tangente;

g) através das hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria apresentada por Shanley, a barra apresentada por ele não é capaz de suportar a carga prevista pela teoria do módulo reduzido, a não ser que a barra esteja contida lateralmente enquanto a força axial na barra for aplicada; e,

h) a carga prevista pela teoria do módulo tangente deve ser utilizada como base para a determinação da máxima carga que uma barra pode suportar no campo inelástico.

O módulo tangente pode ser considerado como um valor conservador para a determinação da máxima capacidade de uma barra no campo inelástico. Entretanto, ao se pensar neste módulo para fins de engenharia, este apresenta

um nível de segurança quando comparado com o valor real que está contido o valor fornecido pela teoria do módulo tangente e módulo reduzido. Conforme apresentado no item anterior "a", a sua utilização está a favor da segurança pois representa o menor valor que uma barra pode suportar permanecendo perfeitamente reta. Por outro lado, este módulo é função apenas das características do material que está sendo utilizado, não dependendo das características geométricas do perfil utilizado. Outra vantagem na utilização do módulo tangente, é que pode ser determinado uma forma simples através de ensaios de corpos-de-prova ou através de um modelo matemático adotado. Levando em consideração o que foi mencionado anteriormente, o módulo tangente será utilizado no presente trabalho para representar o comportamento de uma barra no campo inelástico. Para finalizar este capítulo, apresentar-se-á a seguir as influências das tensões residuais no comportamento inelástico das barras.

4.6 Influência das Tensões Residuais

Tensões residuais são tensões que permanecem nas barras após estas terem sido moldadas em um produto final. Tais tensões podem ser geradas dentro das barras de aço por diversas razões: resfriamento desigual das partes de um perfil formado por chapas; abaulamento dos perfis durante a fabricação; puncionamento de furos, operações de corte das chapas do perfil durante a fabricação e soldagem. Os efeitos mais importantes que causam as tensões residuais são os produzidos pelo resfriamento desigual das partes do perfil e pelos efeitos de soldagem. É importante ressaltar que as tensões residuais produzidas pela soldagem são geradas pelo resfriamento desigual das chapas que compõem o perfil.

Para perfis laminados, as tensões residuais são criadas nas barras de aço da seguinte forma: as barras de aço são usualmente aquecidas até um estágio durante o processo de fabricação. A medida que este começa a se resfriar, as partes da seção transversal que apresentam relação área sob volume maior irão perder calor mais rapidamente que as partes que apresentam relação área sob volume menor. Este resfriamento desigual cria dentro do perfil um equilíbrio de

tensões na seção transversal. As tensões geradas são chamadas de residuais pois permanecem no perfil após a sua fabricação. É importante mencionar que as tensões residuais são independentes da tensão de plastificação do material e dependentes das dimensões, forma da seção transversal e dos fatores área sob volume das partes em resfriamento.

Em seções de perfis laminados e perfis "H" que apresentam mesas, após a fabricação, as regiões das mesas irão se resfriar mais rapidamente que as regiões da alma. As pontas da mesa do perfil apresentam maior exposição ao ar e por isso resfriam mais rapidamente que a região onde ocorre a junção da mesa com a alma. Assim, tensões residuais de compressão irão surgir na região das extremidade das mesas e na região central da alma. Por outro lado, tensões residuais de tração surgirão na região de junção entre a alma e mesa. Na figura 4.9 é apresentada uma distribuição padrão de tensões residuais em um perfil laminado. Variações consideráveis das tensões residuais de compressão e tração são esperadas pois esta é função do tipo de seção transversal, de suas dimensões, da temperatura de fabricação, das condições de resfriamento e das propriedades do material (GALAMBOS²⁵). Conforme verificado por BJORHOVDE et al⁵⁹, a medida que as espessuras dos perfis variam e estes se tornam mais pesados, as tensões residuais variam de forma significativa. Nota-se também que a distribuição das tensões residuais nos perfis e chapas não são uniformes na espessura. A medida que a espessura varia, a diferença entre as tensões na superfície e no interior se tornam consideráveis. Entretanto, verificou-se que a carga crítica calculada considerando a distribuição completa das tensões residuais ao longo da seção transversal é um pouco inferior a calculada considerando a distribuição constante com a espessura e igual a medida de superfície da seção transversal (GALAMBOS²⁵).

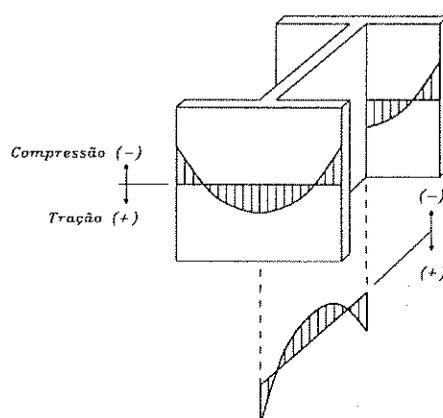


Figura 4.9 - Distribuição padrão de tensões residuais em um perfil "I" laminado (Fonte SALMON e JOHNSON⁶⁰).

Os perfis soldados formados por associações de chapas são mais susceptíveis as tensões residuais que os perfis laminados. As chapas geralmente apresentam pequenas tensões residuais devido ao resfriamento uniforme que estas apresentam após a fabricação. Entretanto, devido a necessidade de se aplicar calor nestas chapas para moldar o perfil através da solda, o subsequente resfriamento não uniforme e restrição contra a distorção causam altas tensões residuais. Uma distribuição média de tensões residuais para perfis soldados é apresentada na figura 4.10. É importante notar que as tensões residuais de compressão que ocorrem nas extremidades da mesa são maiores que em um perfil "H" laminado. Desta forma, a resistência de tais barras será menor que a de um mesmo perfil laminado. Por outro lado, para a seção caixão soldada, as tensões residuais de tração nas regiões dos cantos contribuirão muito para a rigidez da barra e desta forma, as resistências desta será superior a de barra caixão laminada com a mesma esbelteza.

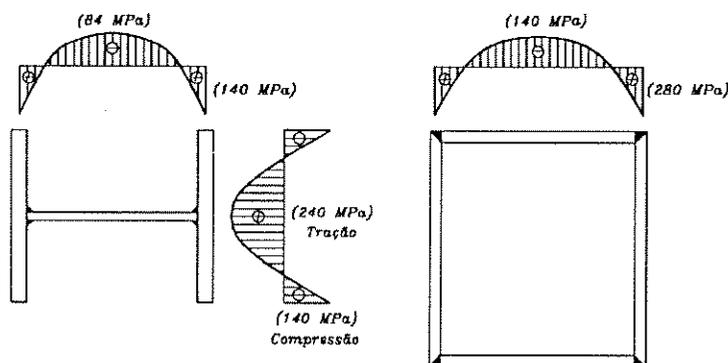


Figura 4.10 - Distribuição típica de tensões residuais em perfil soldados (Fonte SALMON e JOHNSON⁶⁰).

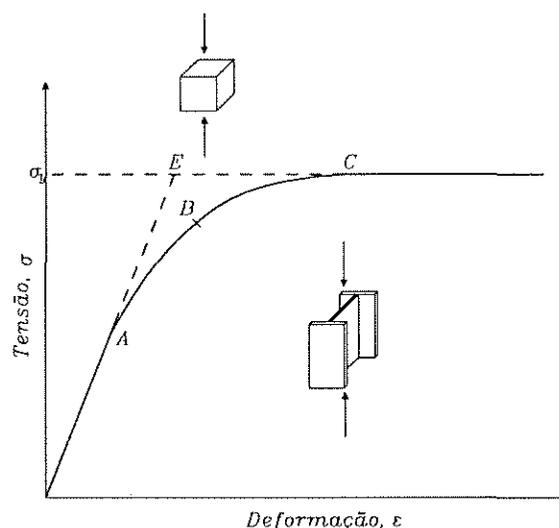


Figura 4.11 - Relação tensão - deformação para perfis metálicos.

Neste ponto, questiona-se se as fórmulas apresentadas nas teorias do módulo tangente e módulo reduzido ainda são aplicáveis. Pode-se afirmar que estas teorias são aplicáveis mas nem todas as fibras da seção transversal podem ser consideradas como tensionadas com o mesmo nível de tensão quando se aplica uma força axial nesta barra. O módulo tangente (E_t) em uma determinada fibra da seção transversal não é o mesmo para uma fibra adjacente. Considere um perfil laminado sujeito a presença das tensões residuais na seção transversal. Devido a presença destas tensões, o diagrama tensão-deformação para esta barra fica representado pela curva não linear conforme apresentado na figura 4.11. As deformações ao longo da seção transversal da barra é representada na figura 4.11 pela média das deformações. Nota-se que as tensões residuais em material elásto-plástico causam o mesmo efeito que os obtidos nos materiais tais como alumínio, o qual não é linearmente elástico quando este não contém tensões residuais. Como se pode observar, o conceito do módulo tangente se aplica a materiais com a presença das tensões residuais sendo que a máxima carga em uma barra no campo inelástico pode ser obtida utilizando o módulo tangente obtido da relação tensão-deformação do material que foi obtida com a presença das tensões residuais.

Capítulo 5

Aplicação do Estudo da Inelasticidade de barras

5.1 Introdução

Conforme apresentado no capítulo 4, o módulo tangente será utilizado neste trabalho para representar o comportamento inelástico das barras. Para tanto, torna-se necessário determiná-lo para que este possa ser utilizado na análise de estruturas reticuladas. O módulo tangente pode ser obtido através das curvas de tensão-deformação do material. Estas curvas podem ser geradas através de métodos experimentais ou numéricos. Neste sentido, estes métodos serão apresentados no decorrer deste capítulo, ilustrando as formas de determinação das curvas de tensão-deformação do material.

As normas e especificações utilizam expressões para representar o comportamento inelástico das barras acima do limite de proporcionalidade do material. Estas expressões podem ser modificadas e desenvolvidas de tal forma que estas possam ser utilizadas para avaliar a redução do módulo de elasticidade (E_t) a medida que a barra for solicitada com tensões superiores ao limite de proporcionalidade do material. O estudo destas expressões será feito com o objetivo de se introduzir estas na análise não linear geométrica e física do material. Este tipo de análise será desenvolvida no final deste capítulo. Ao final, exemplos serão apresentados ilustrando este tipo de análise.

5.2 Formas de Determinação da Curva Tensão-Deformação

Utilizando-se as curvas de tensão-deformação para as barras de aço, é possível acompanhar a redução da capacidade portante de uma barra por efeito de não linearidade física do material à medida que a tensão nesta vai aumentando até que esta alcance a instabilidade ou simplesmente se plastifique. A introdução deste efeito é possível através da determinação do módulo de elasticidade tangente obtido da curva tensão-deformação. Estas curvas podem ser obtidas através de dois métodos: *experimental* e *numérico*.

5.2.1 Método Experimental para Determinação da Curva Tensão-Deformação

Considere um corpo de prova cortado de uma barra de aço. Ao se realizar um ensaio neste corpo-de-prova, a relação tensão-deformação que se obtém é apresentada na figura 5.1 através das linhas tracejadas "AEC". Este comportamento é designado de elasto-plástico perfeito pois todas as fibras do material permanecem perfeitamente elásticas até alcançar a tensão de plastificação do material. Por outro lado, ao se realizar um ensaio em um barra de aço de pequeno comprimento e pequena esbeltez, a relação tensão-deformação irá se diferenciar da obtida do ensaio realizado com o pequeno corpo-de-prova cortado desta mesma barra conforme mostrado na figura 5.1 através das linhas cheias. Quando um certo estado de tensão for alcançado na barra, a relação tensão-deformação segue a curva "ABC" ao invés da curva "AEC". Este fenômeno é atribuído a presença das tensões residuais e/ou excentricidades de aplicação de carga presentes nas barras e é chamado de não linearidade física do material.

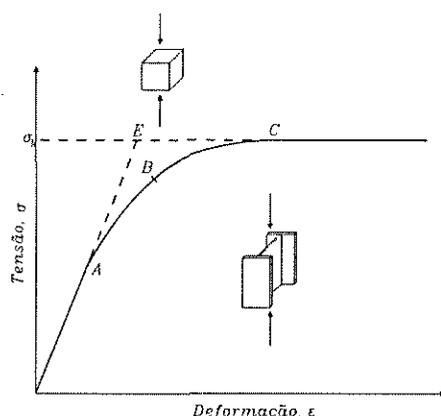


Figura 5.1 - Relação tensão - deformação para perfis metálicos.

Este fenômeno pode ser representado de forma simples utilizando como exemplo um perfil laminado "I" com as distribuições de tensões residuais para a mesa e alma apresentadas na figura 5.2. A medida que a força axial é aplicada na seção transversal da barra, a distribuição de tensão em toda a seção transversal mudará em estágios conforme apresentado na figura 5.3. Quando a tensão em uma fibra da seção transversal igualar ou exceder a tensão de plastificação do material, aquela fibra irá se plastificar e qualquer incremento de força axial será suportada pelas fibras que ainda permanecem elásticas. É possível perceber através da figura 5.3 que a plastificação da seção transversal é um processo gradual. As fibras que apresentam valores altos de tensões de compressão irão se plastificar mais rapidamente que as fibras que apresentam valores baixos de tensões de compressão ou tração devido a presença das tensões residuais. Por fim, as fibras que apresentam tensões residuais de tração irão se plastificar a medida que o força axial é aumentada. Devido a este processo gradual de plastificação de toda a seção transversal, a curva tensão-deformação não se comporta mais linearmente, seguindo uma curva suave da fase elástica para a fase completamente plástica (curva "ABC" na figura 5.1).

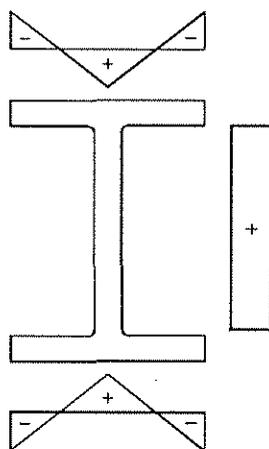


Figura 5.2 - Distribuição de tensões residuais em um perfil "I".

Com a curva tensão-deformação obtida através do método experimental, é possível determinar o módulo tangente (E_t) do material através da inclinação desta mesma curva para um determinado estado de tensão na barra. Desta forma, é possível fazer a redução da capacidade portante da peça estrutural por efeito de não linearidade física do material por força axial e/ou flexão.

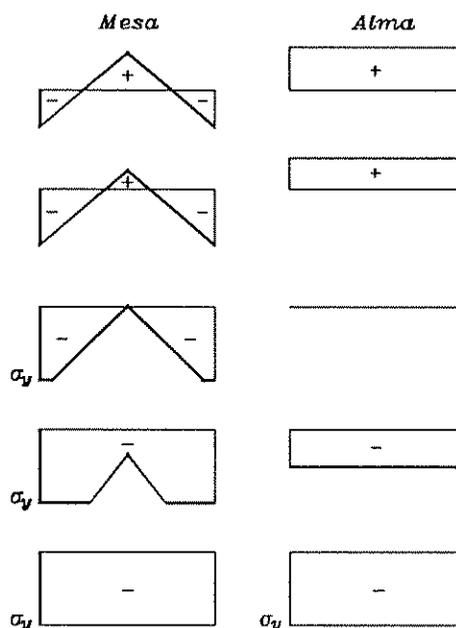


Figura 5.3 - Mudança nas distribuições de tensões na alma e mesa de um perfil "I" a medida que a força axial na barra é aumentada.

5.2.2 Método Numérico para Determinação da Curva Tensão-Deformação

Para gerar uma curva de tensão-deformação numericamente para uma determinada barra de aço, inicialmente adota-se uma distribuição de tensões residuais padrão na seção transversal do perfil. Após este passo, a mesma seção transversal deve ser subdividida em um número de pequenos elementos conforme mostrado na figura 5.4. Considere " A_j^e " como sendo a área dos "j" elementos em que a seção transversal foi dividida e " A_{el} " como sendo a área da seção transversal que ainda permanece elástica. A curva de tensão-deformação pode ser traçada da seguinte forma:

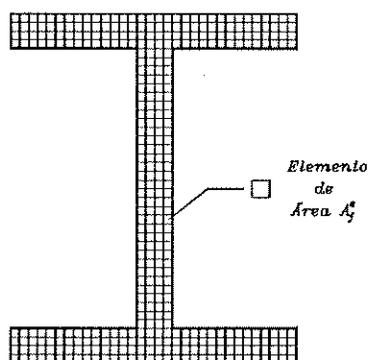


Figura 5.4 - Discretização de uma seção transversal.

a) Inicialmente, é necessário especificar um incremento de deformação " $\Delta\varepsilon^i$ " (uma quantidade negativa) que será aplicada em toda a seção transversal da barra em um determinado ciclo " i ".

b) Calcula-se o valor de incremento de tensão " $\Delta\sigma^i$ " ocasionado pelo incremento de deformação " $\Delta\varepsilon^i$ " para todos os elementos que ainda permaneceram elásticos conforme apresentado abaixo:

$$\Delta\sigma^i = E \Delta\varepsilon^i \quad (5.1)$$

sendo, " E " o módulo de elasticidade elástico da barra.

c) O atual estado de tensão " σ " para os elementos que ainda permanecem elásticos pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\sigma^i = \sigma_r + \sum \Delta\sigma^i \quad (5.2)$$

sendo " σ_r " o valor da tensão residual presente em cada elemento de área em que a seção transversal foi dividida sendo o valor positivo se a tensão residual for de tração e negativo se for de compressão.

d) Neste estágio, é necessário verificar as tensões presentes em cada elemento da seção transversal:

1) Se $|\sigma^i| = \sigma_y$, este elemento se plastificou. Logo, a área deste elemento deve ser subtraída da área da seção transversal que ainda permanece elástica:

$$A_{el}^i = A_{el}^{i-1} - \sum A_j^e \quad (5.3)$$

sendo, " A_{el}^i " a área da seção transversal que ainda permanece elástica no ciclo " i " e " A_{el}^{i-1} " a área da seção transversal que ainda permanece elástica no final do ciclo " $i-1$ ". Aplica-se os mesmo procedimento para os demais elementos.

2) $|\sigma^i| < \sigma_y$, o elemento ainda permanece elástico. Verifica-se o próximo elemento.

3) $|\sigma^i| > \sigma_y$, o estado de tensão no elemento é maior que a tensão de plastificação do material. Torna-se necessário diminuir a escala de incremento das deformações " $\Delta\varepsilon^i$ " para fazer com que este elemento alcance a tensão de plastificação sem ultrapassá-la. Isto é feito através de um fator " r " dado por:

$$r = \frac{\sigma_y - \sigma^{i-1}}{\Delta\sigma^i} \quad (5.4)$$

sendo, " σ^{i-1} " o estado de tensão no elemento no final do ciclo anterior. Neste estágio, torna-se necessário voltar ao passo "b" e substituir " $\Delta\varepsilon^i$ " por " $r\Delta\varepsilon^i$ " e refazer os passos "c" e "d".

e) O próximo passo é calcular o incremento " ΔP^i " correspondente ao incremento de deformação " $\Delta\varepsilon^i$ ":

$$\Delta P^i = \Delta\sigma^i A_{el}^i = E A_{el}^i \Delta\varepsilon^i \quad (5.5)$$

f) Calcula-se a tensão média para o incremento " $\Delta\sigma_{med}^i$ " no final do ciclo "i":

$$\Delta\sigma_{med}^i = \Delta P^i / A \quad (5.6)$$

g) Com a tensão média " $\Delta\sigma_{med}^i$ ", calcula-se a tensão total média da seção transversal da barra:

$$\sigma_{med}^i = \sigma_{med}^{i-1} + \Delta\sigma_{med}^i \quad (5.7)$$

h) Finalmente, avalia-se o estado atual de deformação na seção transversal da barra:

$$\varepsilon^i = \varepsilon^{i-1} + \Delta\varepsilon^i \quad (5.8)$$

Para cada valor calculado da deformação no passo "h", existe um correspondente valor para a tensão média calculada no passo "g". Desta forma, repetindo o processo explicado anteriormente até que a seção transversal do perfil se plastifique completamente, é possível traçar a curva que represente as tensões médias atuante no perfil pelas correspondentes deformações. Esta curva representa numericamente o comportamento tensão-deformação para o material. Com esta curva, é possível determinar o módulo tangente (E_t) através da inclinação da curva para cada estado de deformação.

Para cada valor de incremento " ΔP ", este é expresso por:

$$\Delta P = A \Delta\sigma_{med} \quad (5.9)$$

sendo, "A" a área da seção transversal e " $\Delta\sigma_{med}$ " a média do incremento das tensões da seção transversal. Por outro lado, " ΔP " pode ser relacionado com " $\Delta\varepsilon$ " através de:

$$\Delta P = E A_{el} \Delta\varepsilon \quad (5.10)$$

sendo, "E" o módulo de elasticidade e " A_{el} " a área da seção transversal que permanece elástico.

Igualando a equação (5.9) com (5.10), chega-se em:

$$A \Delta\sigma_{med} = E A_{el} \Delta\varepsilon \quad (5.11)$$

A equação (5.11) pode ser reordenada, ficando expressa da seguinte forma:

$$\frac{\Delta\sigma_{med}}{\Delta\varepsilon} = \frac{E A_{el}}{A} \quad (5.12)$$

Como o módulo tangente (E_t) é dado pela inclinação da curva tensão-deformação, então este pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$E_t = \frac{d\sigma_{med}}{d\varepsilon} \approx \frac{\Delta\sigma_{med}}{\Delta\varepsilon} = \frac{E A_{el}}{A} \quad (5.13)$$

É importante ressaltar que a " A_{el}/A " pode ser facilmente determinado no procedimento numérico apresentado anteriormente. Caso seja de interesse, existe a possibilidade de se introduzir uma excentricidade de aplicação de carga e flexão no procedimento descrito anteriormente. Esta excentricidade fará com que os elementos de área sejam solicitados não apenas por força axial mas também por efeito de flexão. Assim, os elementos de área que apresentem tensões residuais de compressão alcançarão mais rapidamente a tensão de plastificação. É importante ressaltar que a curva obtida através deste procedimento dependerá do eixo da barra em que a flexão está sendo introduzida, da forma geométrica da seção transversal e das distribuições das tensões residuais que foi adotada para o perfil.

5.3 Aproximações Utilizadas para a Determinação do Módulo Tangente

Conforme mencionado anteriormente, o módulo de elasticidade tangente pode ser utilizado para reduzir a capacidade portante de uma peça estrutural de aço devido ao efeito de não linearidade física do material. O módulo tangente pode ser obtido através das equações que são utilizadas para o dimensionamento das barras de aço. As curvas de flambagem utilizadas pelas normas e/ou especificações foram desenvolvidas baseadas em ensaios feitos em laboratório em corpos de prova ou através de métodos numéricos onde se assumiu uma distribuição de tensões residuais para um determinado perfil e/ou também uma determinada excentricidade de aplicação de carga. A seguir, serão apresentadas algumas curvas que serão utilizadas para realizar a redução da

capacidade portante de uma barra devido ao efeito de não linearidade física do material (obtenção do módulo tangente).

5.3.1 Curva Proposta pelo “Column Research Council”

O “Column Research Council - CRC” recomendou na primeira e segunda edição do seu guia³³ que o comportamento de barras na fase inelástica poderia ser representado por uma parábola da seguinte forma:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - B \left(\frac{KL}{r} \right)^2 \quad (5.14)$$

sendo, “ σ_{cr} ” a tensão crítica na barra, “ σ_y ” a tensão de plastificação do material, “ KL ” o comprimento efetivo de flambagem da barra, e “ r ” raio de giração da seção transversal da barra.

No campo elástico, o comportamento da barra pode ser representado pela equação de Euler. O ponto de interseção entre o campo elástico e inelástico foi escolhido ser igual a $\sigma_{cr} = 0,5\sigma_y$ (CHEN e LUI⁹). O número 0,5 é um valor conservador da máxima medida da tensão residual presente nos perfis laminados que apresenta um valor médio em torno de $0,3\sigma_y$. Para se obter uma transição suave da hipérbole de Euler para a parábola que representa o campo inelástico, mantendo um compromisso entre a flexão em torno do eixo de maior e menor inércia, o valor da constante “ B ” foi escolhido ser igual a “ $\sigma_y^2/4\pi^2E$ ”. A esbelteza correspondente ao ponto de interseção da curva de Euler com a curva para a fase inelástica proposta pelo “CRC” é chamado de “ C_c ” e expresso pelo seguinte valor:

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= 0,5\sigma_y \\ \frac{\pi^2E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} &= \frac{1}{2}\sigma_y \\ \frac{KL}{r} &= C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_y}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Substituindo o valor de “ B ” na equação (5.14) e lembrando que o valor de “ C_c ” dado pela equação (5.15), a curva do “CRC” assume a forma de uma parábola para valores de esbelteza menores ou igual a “ C_c ” e a curva do “CRC”

assume a forma de uma hipérbole para valores superiores a “ C_c ” conforme apresentado abaixo:

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c} \right] & \frac{KL}{r} \leq C_c \\ \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r} \right)^2} & \frac{KL}{r} > C_c \end{cases} \quad (5.16)$$

Com o propósito de comparação, as equações apresentadas acima podem ser escritas em termos de quantidades adimensionais “ σ/σ_y ” e “ λ_c ”:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \begin{cases} 1 - 0,25\lambda_c^2 & \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ 1/\lambda_c^2 & \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (5.17)$$

sendo, “ σ_y ” a tensão de plastificação da barra e “ λ_c ” um parâmetro de esbelteza dado por $\lambda_c = (KL/r)\sqrt{\sigma_y/\pi^2 E}$.

Fazendo a relação entre a curva de Euler e a curva proposta pelo “CRC” para o campo inelástico conforme apresentado em SMITH⁶¹, é possível obter:

$$\frac{\sigma_{CRC-Euler}}{\sigma_{CRC-Inelas.}} = \frac{4}{(4 - \lambda_c^2)\lambda_c^2} \quad \lambda_c \leq \sqrt{2} \quad (5.18)$$

Lembrando que $\sigma_{CRC-Euler} = \pi^2 E / (KL/r)^2$ e $\sigma_{CRC-Inelas.} = \pi^2 E_t / (KL/r)^2$, a equação anterior fica expressa da seguinte forma:

$$\frac{E}{E_t} = \frac{4}{(4 - \lambda_c^2)\lambda_c^2} \quad \lambda_c \leq \sqrt{2} \quad (5.19)$$

Utilizando a equação (5.17), é possível expressar a equação (5.19) em termos do parâmetro adimensional “ σ/σ_y ”. Fazendo-se as devidas reordenações, chega-se em:

$$\frac{E_t}{E} = \begin{cases} \frac{4\sigma}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right) & \sigma > 0,5\sigma_y \\ 1 & \sigma \leq 0,5\sigma_y \end{cases} \quad (5.20)$$

A equação (5.20) é plotada na figura 5.5 (cor verde). Nota-se que o módulo de elasticidade permanece constante até o valor de $\sigma = 0,5\sigma_y$. Após a tensão axial ultrapassar este valor, o módulo elástico é reduzido gradativamente para o

módulo tangente até que quando o valor de “ σ ” se iguala ao valor de “ σ_y ”, o módulo tangente se reduz a praticamente zero. É importante ressaltar que a curva proposta pelo “CRC- E_t ” implicitamente inclui os efeitos de tensões residuais que estão presentes nos perfis metálicos (CHEN e TOMA⁶²).

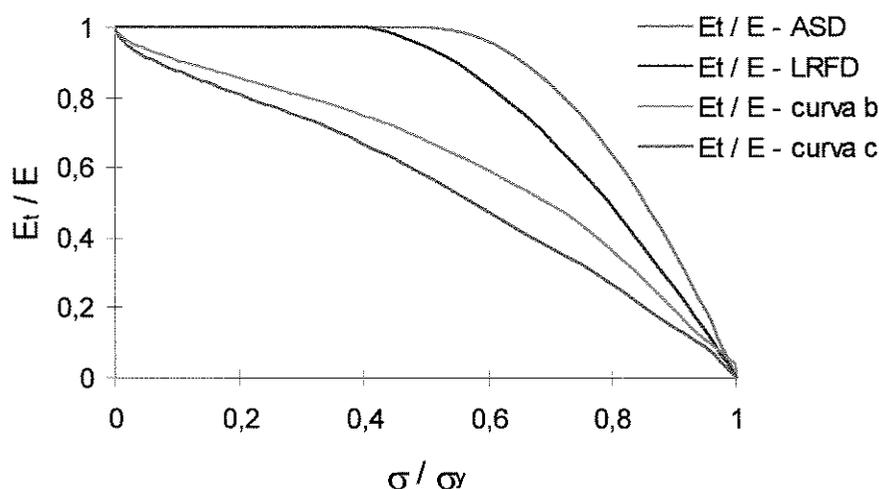


Figura 5.5 - Redução do módulo de elasticidade em função da força axial

5.3.2 Curva Proposta pela “AISC Load and Resistance Factor Design-LRFD”

A especificação “LRFD³⁶” é baseada no método dos estados limites, enquanto a especificação “ASD³”, no método das tensões admissíveis. Da mesma forma que na especificação “ASD”, o comitê da especificação “AISC Load and Resistance Factor Design - LRFD” decidiu continuar utilizando apenas uma curva para determinar a máximo esforço axial que uma barra consegue suportar no campo inelástico. A equação proposta foi escolhida para ajustar o mais próximo possível a curva 2 apresentada no guia “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures - SSRC” (SALMON e JOHNSON⁶⁰). Entretanto, esta curva foi modificada para refletir uma imperfeição geométrica ao longo da barra na forma de uma curva senoidal com uma amplitude no meio do vão da barra de $(1/1500)L$, sendo, “L” o comprimento da barra. A equação da curva proposta é apresentada a seguir:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \begin{cases} \exp[-0,419\lambda_c^2] & \lambda_c \leq 1,5 \\ 0,877/\lambda_c^2 & \lambda_c > 1,5 \end{cases} \quad (5.21)$$

sendo que o valor de " λ_c " já foi definido anteriormente. Como se pode perceber, a curva para o campo elástico apresentada pela "LRFD" difere da curva de Euler pelo fator "0,877" presente na sua equação.

De acordo com HARICHANDRAN⁶³, é possível fazer uma relação entre a curva proposta pela "LRFD" para o campo elástico com a curva proposta pelo "LRFD-E_i" para o campo inelástico através das equações apresentadas anteriormente. Procedendo desta forma, chega-se em:

$$\frac{\sigma_{\text{LRFD-Euler}}}{\sigma_{\text{LRFD-Inelas.}}} = \frac{0,877}{\lambda_c^2 \exp[-0,419 \lambda_c^2]} \quad \lambda_c \leq 1,5 \quad (5.22)$$

A equação para o campo elástico é expressa por $\sigma_{\text{LRFD-Euler}} = \pi^2 E / (KL/r)^2$ e a para o campo inelástico dada por $\sigma_{\text{LRFD-Inelas.}} = \pi^2 E_i / (KL/r)^2$. Assim, a equação anterior pode ser expressada da seguinte forma:

$$\frac{E}{E_i} = \frac{0,877}{\lambda_c^2 \exp[-0,419 \lambda_c^2]} \quad \lambda_c \leq 1,5 \quad (5.23)$$

Utilizando a equação (5.21), é possível expressar a equação (5.23) em termos do parâmetro adimensional " σ/σ_y ". Fazendo-se as devidas reordenações, chega-se em:

$$\frac{E_i}{E} = \begin{cases} -2,7243 \frac{\sigma}{\sigma_y} \ln \left[\frac{\sigma}{\sigma_y} \right] & \sigma > 0,39\sigma_y \\ 1 & \sigma \leq 0,39\sigma_y \end{cases} \quad (5.24)$$

A curva apresentada acima é utilizada para representar a variação do módulo de elasticidade para o campo inelástico das barras. Esta curva também é plotada na figura 5.5 (cor vermelha). Nota-se que o módulo de elasticidade permanece constante até o valor de $\sigma = 0,39\sigma_y$. Após a tensão ultrapassar este valor, o módulo elástico é reduzido gradativamente para o módulo tangente até praticamente zero quando o valor da tensão se iguala a força de escoamento ($\sigma = \sigma_y$). Como pode-se verificar, existe uma pequena diferença entre as curvas propostas pelo "CRC" e "LRFD". A redução da capacidade portante da barra dada pela curva da "LRFD-E_i" inicia-se para um valor de " $0,39\sigma_y$ ", enquanto para a curva do "CRC-E_i" inicia-se para um valor de " $0,50\sigma_y$ ". É importante ressaltar que a curva proposta pelo "LRFD-E_i" implicitamente inclui os efeitos de tensões

residuais e imperfeições geométricas que estão presentes nos perfis metálicos (CHEN e TOMA⁶²). A principal diferença entre as curvas é que a curva proposta pelo “CRC- E_t ” não inclui os efeitos de imperfeições geométricas. Assim, a última curva citada é mais apropriada para representar o comportamento inelástico de barras tracionadas, pois a inclusão de imperfeições geométricas para estas barras favoreceria o seu comportamento na tração. Por outro lado, a curva proposta pela “LRFD- E_t ” é mais recomendada para representar o comportamento de barras comprimidas pois leva em consideração tanto o efeito de tensões residuais como imperfeições geométricas, sendo que ambos os efeitos contribuem para diminuição da capacidade portante de uma barra flexo-comprimida. Ambas as curvas apresentadas anteriormente são plotadas em função da tensão e deformação específica na figura 5.6. A título de comparação, é apresentada a curva para um material elasto-plástico perfeito representado pela curva em azul. Como pode-se perceber, as curvas propostas pelo “CRC- E_t ” e “LRFD- E_t ” são não lineares a partir de um certo ponto da relação “ σ/σ_y ”.

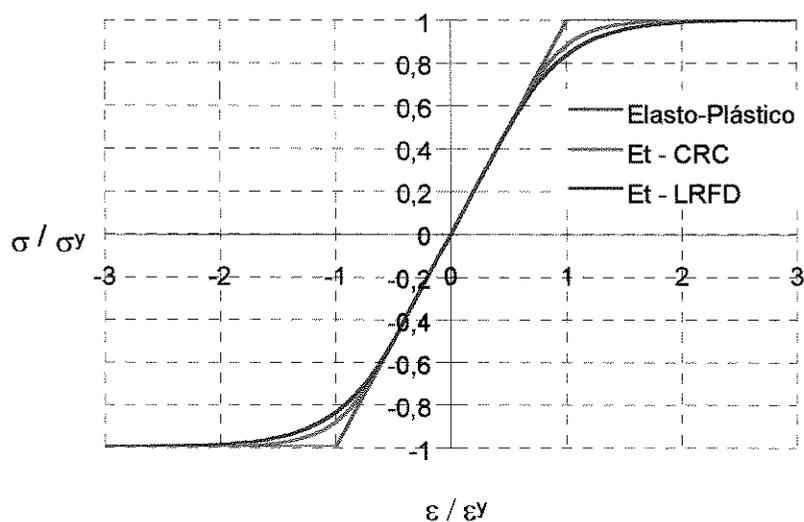


Figura 5.6 - Relação força axial e deformação para as curvas propostas pelo “CRC - E_t ” e “LRFD - E_t ”.

5.5.3 Curvas Proposta pela “NBR 8800 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios”

A norma brasileira “NBR 8800 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios⁴⁴” apresenta quatro curvas de flambagem para a determinação da resistência de cálculo de barras axialmente comprimidas. Estas curvas expressam o comportamento da barra tanto no campo elástico quanto no campo inelástico. A diversidade de curvas se deve ao fato de que os resultados obtidos em ensaios de protótipos serem funções dos tipos seção transversal analisados, o quais são diferentes, dependendo do tipo de processo utilizado na fabricação, das diferentes relações entre as espessuras das chapas utilizadas, do tipo do grau do aço utilizado, dos diferentes eixos de flexão analisados, etc. Desta forma, os resultados obtidos variam consideravelmente para cada tipo de perfil ensaiado sendo necessária a obtenção de várias curvas para representar o comportamento dos perfis metálicos.

Esta diversidade de curvas presentes na norma brasileira se deve ao fato desta ser baseada na especificação européia “European Recommendations for Steel Construction - ECCS⁶⁴” a qual adota várias curvas para representar o comportamento de barras axialmente comprimidas. As curvas utilizadas pelo “ECCS” foram inicialmente obtidas através de uma variedade de resultados de ensaios realizados. Desta forma, estas curvas não foram derivadas diretamente de uma formulação analítica. Esta deficiência somente foi superada quando Maquoi e Rondal examinaram a possibilidade de expressar as curvas de flambagem propostas pelo “ECCS” através de uma formulação analítica (BALLIO e MAZZOLANI⁶⁵). Como as curvas utilizadas na norma brasileira tiveram sua origem no trabalho proposto por Rondal-Maquoi, o desenvolvimento desta formulação é de grande interesse e será apresentada a seguir neste trabalho. A utilização de apenas uma curva para representar o comportamento dos perfis metálicos axialmente comprimidos, que as especificações “ASD” e “LRFD” fazem uso, tem como vantagem facilitar o dimensionamento das peças estruturais. Entretanto, dependendo dos tipos de perfis que estão sendo dimensionados, pode acontecer de o valor encontrado para a máxima carga axial ser subestimado (o valor encontrado está abaixo da real capacidade da peça estrutural) ou

superestimado (o valor encontrado está acima da real capacidade do perfil, contra a segurança). Isto acontece porque quando se utiliza apenas uma curva, esta não consegue representar o comportamento de todos os perfis metálicos existentes.

A expressão matemática proposta por Rondal-Maquoi para uma barra com imperfeição inicial pode ser desenvolvida assumindo que a máxima tensão é encontrada quando a plastificação ocorre na fibra mais tencionada. Matematicamente, isto pode ser expresso da seguinte forma:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad (5.25)$$

Conforme apresentado por CHEN e LUI⁹, o momento em uma barra com imperfeição inicial (assumindo que esta imperfeição pode ser representada por uma senóide) é dado por:

$$M = \left(\frac{1}{1 - P/P_{Euler}} \right) P \delta_0 \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (5.26)$$

sendo, "δ₀" o deslocamento no meio da barra ou a imperfeição inicial da barra adotada.

Assumindo que o máximo momento em uma barra com imperfeição inicial ocorre no meio desta (x=L/2), o momento máximo fica dado por:

$$M = \frac{P \delta_0}{1 - P/P_{Euler}} \quad (5.27)$$

Substituindo a equação (5.27) em (5.25), a segunda fica expressa por:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P \delta_0}{\left(1 - P/P_{Euler}\right) M_y} = 1$$

ou por:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P \delta_0}{\left(1 - \frac{P}{P_y} \frac{P_y}{P_{Euler}}\right) M_y} = 1 \quad (5.28)$$

Lembrando que $M_y = W \sigma_y$ e que "λ²" pode ser expresso por $\bar{\lambda}^2 = P_y/P_{Euler}$ e definindo o parâmetro $\eta = \delta_0 A / W$, a expressão acima fica representada por:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{\frac{P}{P_y}}{1 - \frac{P}{P_y} \bar{\lambda}^2} \eta = 1 \quad (5.29)$$

É possível expressar a equação (5.29) em termos do parâmetro adimensional "P/P_y" que representa o valor "ρ" definido na norma "NBR 8800". Fazendo-se as devidas reordenações, chega-se:

$$\rho = \frac{P}{P_y} = \frac{\left(1 + \eta + \bar{\lambda}^2\right) - \sqrt{\left(1 + \eta + \bar{\lambda}^2\right)^2 - 4 \bar{\lambda}^2}}{2 \bar{\lambda}^2} \quad (5.30)$$

O problema consiste em escolher corretamente o fator adimensional de imperfeição "η" para poder gerar as curvas propostas pela especificação européia. Lembrando que "l/W = c", o parâmetro "η" pode ser desenvolvido de forma que este fique representado pela seguinte expressão:

$$\eta = \frac{\delta_0 c}{r^2} \quad (5.31)$$

sendo, "c" a distância da fibra mais afastada na seção transversal e "r" o raio de giração da seção transversal.

A imperfeição geométrica pode ser representada por "KL/m", que substituída na expressão anterior fornece:

$$\eta = \frac{KL}{r} \frac{c}{mr}$$

e lembrando que KL/r = λ, chega-se em:

$$\eta = \lambda \frac{c}{mr} \quad (5.32)$$

sendo "m" o parâmetro de imperfeição da barra, "K" parâmetro de flambagem e "L" comprimento da barra.

Sendo $\lambda = \bar{\lambda} \pi \sqrt{\frac{E}{P_y}}$ e substituindo este valor na equação (5.32), esta fica

expressa da seguinte maneira:

$$\eta = \bar{\lambda} \left(\pi \sqrt{\frac{E}{P_y}} \frac{c}{mr} \right) \quad (5.33)$$

O termo entre parênteses é uma constante que depende do tipo de aço utilizado, do grau de imperfeição geométrica adotado, do tipo de seção transversal da barra que está sendo analisada, das configurações das tensões residuais que estão presentes no perfil, etc. Esta constante foi chamada na especificação europeia e na norma brasileira de “ α ”. Substituindo “ α ” na equação (5.33), esta finalmente fica expressa por:

$$\eta = \bar{\lambda} \alpha \quad (5.34)$$

As curvas propostas pelo “SSRC” são caracterizadas pela existência de um patamar na região de esbeltez entre $0 \leq \bar{\lambda} \leq 0,2$ pois para estas esbeltezes, os perfis metálicos após serem ensaiados conseguiram atingir completamente a plastificação ($\rho = P/P_y = 1$). Para se levar em consideração este efeito, a expressão para “ η ” foi modificada e outras expressões foram propostas:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_1(\bar{\lambda} - 0,2) \\ \eta_2 &= \alpha_2 \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} \\ \eta_3 &= \alpha_3(\bar{\lambda} - 0,2)^2 \\ \eta_4 &= \alpha_4(\bar{\lambda}^2 - 0,04) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Os valores dos parâmetros “ α ” para cada curva da especificação europeia foram determinados de tal forma a minimizar a soma das dispersões $(\Delta P)^2$ entre os valores teóricos computados pela relação analítica proposta e os valores dados pelo “ECCS”. Este estudo foi realizado variando as esbeltezes “ $\bar{\lambda}$ ” entre os valores de 0,2 a 3,61 em incrementos de 0,1. Foi verificado que a primeira e segunda expressões “ η_1 ” e “ η_2 ” ofereceram os melhores resultados (BALLIO e MAZZOLANI⁶⁵). No campo de aplicação das curvas entre as esbeltezes $0,6 \leq \bar{\lambda} \leq 2,1$, a curva obtida substituindo o valor de “ η_2 ” na equação (5.30) é mais satisfatória pois minimiza o erro neste intervalo. Porém, quando se leva em consideração a esbeltez variando entre 0,2 a 3,61, a curva obtida substituindo o valor de “ η_1 ” produz um minimização dos erros melhor que quando “ η_2 ” é utilizado (BALLIO e MAZZOLANI⁶⁵). A especificação europeia adota como parâmetro “ η ” o valor dado pela primeira expressão “ η_1 ” enquanto a norma

brasileira utiliza a expressão “ η_2 ” para representar as curvas desta norma. Substituindo o valor de “ η_2 ” na equação (5.30), a equação da norma brasileira pode ser obtida:

$$\rho = \frac{P}{P_y} = \frac{\left(1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2\right) - \sqrt{\left(1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2\right)^2 - 4 \bar{\lambda}^2}}{2 \bar{\lambda}^2} \quad (5.36)$$

A tabela 5.1 apresentada os valores de “ α ” para as quatro curvas da norma brasileira e o erro em porcentagem obtido entre o valor calculado pela expressão analítica e valor dado pela recomendação “ECCS”. Os máximos erros encontrados entre o intervalo de “ $\bar{\lambda}$ ” entre 0,6 e 2,1 também são apresentados.

Tabela 5.1 - Erros máximos encontrados entre a expressão analítica e “ECCS” (fonte BALLIO e MAZZOLANI⁶⁵).

Curva	Equação (5.30) utilizando η_1		Equação (5.30) utilizando η_2	
	α (ECCS)	Máx. Erro (%) ($\bar{\lambda} \leq 3,0$)	α (NBR 8800)	Máx. Erro (%) ($0,6 \leq \bar{\lambda} \leq 2,1$)
a	0,206	- 0,79 ($\bar{\lambda} = 0,6$) +2,15 ($\bar{\lambda} = 1,8$)	0,158	- 0,39 ($\bar{\lambda} = 0,8$) +0,48 ($\bar{\lambda} = 1,8$)
b	0,339	- 1,80 ($\bar{\lambda} = 3,0$) +0,51 ($\bar{\lambda} = 1,2$)	0,281	- 2,58 ($\bar{\lambda} = 2,1$) +2,60 ($\bar{\lambda} = 0,6$)
c	0,489	- 1,26 ($\bar{\lambda} = 0,8$) +3,23 ($\bar{\lambda} = 2,1$)	0,384	- 1,81 ($\bar{\lambda} = 1,0$) +1,77 ($\bar{\lambda} = 0,6$)
d	0,756	- 1,78 ($\bar{\lambda} = 0,7$) +5,71 ($\bar{\lambda} = 2,0$)	0,587	-1,87 ($\bar{\lambda} = 0,9$) +1,89 ($\bar{\lambda} = 2,1$)

Chamando $\beta = \left(1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2\right) / 2 \bar{\lambda}^2$ e substituindo este na equação

(5.36), a equação apresentada na norma brasileira pode ser obtida como ela é apresentada nesta:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 & 0 \leq \bar{\lambda} < 0,20 \\ \rho &= \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} & \bar{\lambda} \geq 0,20 \end{aligned} \quad (5.37)$$

O principal objetivo deste trabalho é o dimensionamento de estruturas metálicas formadas por perfis em dupla cantoneira de abas iguais e perfis "C". Assim, a curva "c" é a que terá principal interesse neste trabalho. É importante ressaltar que as curvas apresentadas na norma brasileira apresentam tensões máximas inferiores as calculadas na fase elástica pela fórmula de Euler. O mesmo pode ser dito para a fase inelástica quando se considera apenas o efeito de tensões residuais. Isto acontece porque as curvas desenvolvidas pela especificação européia, as quais a norma brasileira faz uso, levam em consideração que na fase elástica os perfis metálicos estão sujeitos a imperfeições geométricas. As imperfeições geométricas causam uma redução na tensão máxima que a barra pode suportar e desta forma, as curvas apresentadas por esta especificação estão defasadas da curva de Euler (estão abaixo da curva de Euler). O mesmo pode-se dizer a respeito do campo inelástico, só que neste caso, os perfis metálicos estão sujeitos aos efeitos de imperfeições geométrica e também aos efeitos das tensões residuais. A variação do módulo de elasticidade para as curvas "b" e "c" em função de " P/P_y " (σ/σ_y) são plotadas na figura 5.5.

Como pode-se perceber na figura 5.5, a redução do módulo de elasticidade elástico inicia-se com as primeiras relações de " P/P_y " (σ/σ_y). Esta redução, mesmo no campo elástico, é feita para levar em consideração os efeitos de imperfeições geométricas que causam a redução da capacidade máxima de um perfil metálico devido a introdução de flexão na barra. Quando a barra está no campo inelástico, a redução do módulo de elasticidade é feita tanto devido as imperfeições geométricas quanto devido as tensões residuais. A título de comparação, as curvas de flambagem utilizadas pelo "CRC³³", "LRFD³⁶" e "NBR 8800⁴⁴" são plotadas em função da esbeltez na figura 5.7.

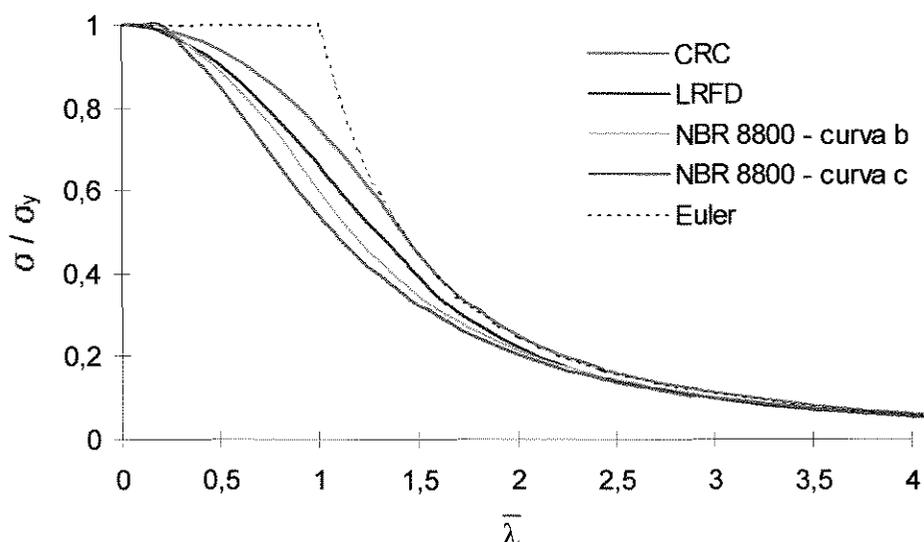


Figura 5.7 - Curvas de Resistência à Compressão.

Nota-se que a curva “c” utilizada na “NBR 8800” está situada abaixo das curvas propostas pelo “CRC” e “LRFD”. Pode-se pensar que esta curva apresenta valores conservadores se comparados com as curvas das especificações citadas. Entretanto, esta representa o comportamento de perfis “C”, cantoneiras, “T”, perfis quadrados e tubulares de seção cheia enquanto as curvas propostas por aquelas especificações tentam representar o comportamento de todos os tipos de perfis existentes. Através da utilização das equações (5.20), (5.24) e através de uma modificação da equação (5.36), é possível determinar o módulo de elasticidade tangente. Estas equações podem ser introduzidas na análise não linear geométrica apresentada no capítulo 3 deste trabalho. Para tanto, novas hipóteses devem ser assumidas neste tipo de análise onde se considera os efeitos de não linearidade do material. A matriz de rigidez obtida na análise não linear geométrica também deve ser modificada para poder representar este efeito.

5.4 Hipóteses Utilizadas na Análise Elasto-Plástica

As hipóteses assumidas na análise elasto-plástica (não linearidade física do material) são:

- o sistema é considerado conservativo, ou seja, não há dissipação de energia no sistema;

- a curva tensão-deformação é considerada elasto-plástica, ou seja, até o limite de proporcionalidade do material a relação tensão-deformação é linear, após este limite, a relação é não linear até o material se plastificar;

- a relação tensão-deformação é igual tanto na tração quanto na compressão; existirão casos em que se adotará curvas diferentes na tração e na compressão; nestes casos, esta mudança de curvas será mencionada no respectivo exemplo em análise;

- caso aconteça o descarregamento em alguma barra da estrutura, este se dará ao longo da curva tensão-deformação, não gerando desta forma deformações plásticas na barras;

- a tensão de plastificação do material é igual a σ_y (limite de escoamento do aço utilizado), não sendo considerado o efeito de encruamento do aço (Efeito "Strain-Hardening");

- será considerada que a redução da capacidade portante da barra devido ao efeito de não linearidade física do material seja provocado pelas tensões normais de compressão ou tração e tensões normais de flexão presentes na barra; e

- a plastificação do material é produzida por tensões normais de compressão ou tração e tensões normais de flexão (não será considerada a contribuição das tensões de cisalhamento na plastificação da barra).

5.5 Procedimento Utilizado para a Análise Elasto-Plástica

A análise não linear física do material proposta neste trabalho é baseada no fato da rigidez à flexão da seção transversal da barra se reduzir gradualmente da rigidez elástica (fase em que as tensões na barra são inferiores ao limite de proporcionalidade) para a rigidez inelástica (fase acima do limite de proporcionalidade do material em que parte da seção transversal está

plastificada) até praticamente zero (quando a seção transversal está completamente plastificada). Existem algumas formas de se fazer a redução da rigidez à flexão da barra conforme explicado anteriormente. Neste trabalho, serão utilizados os procedimentos propostos pela "E_t - LRFD", "E_t - CRC" e "E_t - NBR 8800". A seguir, estes procedimentos serão descritos.

Na análise utilizando o procedimento "E_t - CRC" serão considerados os seguintes casos: barras que durante a análise estejam com tensão inferior a "0,50σ_y", serão consideradas estarem no regime elástico; barras com tensão acima de "0,50σ_y" são consideradas no regime inelástico e barras com estado de tensão igual ou superior a "σ_y" são consideradas plastificadas. Desta forma, utiliza-se como critério de plastificação da seção a tensão de escoamento "σ_y" do aço utilizado. Assim, o módulo tangente na análise pode ser determinado da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} \leq 0,50 \Rightarrow E_t = E \quad (5.38)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} > 0,50 \Rightarrow \frac{E_t}{E} = \frac{4\sigma}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right) \quad (5.39)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} \geq 1,00 \Rightarrow E_t = 0 \quad (5.40)$$

sendo, "σ" a tensão atuante na barra; "σ_y" a tensão de escoamento da barra; "E" o módulo de elasticidade longitudinal elástico da barra e "E_t" o módulo tangente da barra. É importante ressaltar que este procedimento leva em consideração apenas os efeitos de tensões residuais no campo inelástico.

A tensão atuante na barra é determinada pela expressão tradicional da resistência dos materiais dada por:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \quad (5.41)$$

sendo, "P" o esforço axial presente na seção transversal da barra, "M" o momento fletor presente na seção transversal da barra, "A" a área da seção transversal da barra e "W" o módulo elástico resistente da barra.

Na análise utilizando o procedimento "E_t - LRFD" serão considerados os seguintes casos: barras que durante a análise estejam com tensão inferior a

" $0,39\sigma_y$ ", serão consideradas estarem no regime elástico; barras com tensão acima de " $0,39\sigma_y$ " são consideradas no regime inelástico e barras com estado de tensão igual ou superior a " σ_y " são consideradas plastificadas. Da mesma forma que no procedimento anterior, utiliza-se como critério de plastificação da seção a tensão de escoamento " σ_y " do aço utilizado. Assim, o módulo tangente na análise pode ser determinado da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} \leq 0,39 \Rightarrow E_t = E \quad (5.42)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} > 0,39 \Rightarrow \frac{E_t}{E} = -2,7243 \frac{\sigma}{\sigma_y} \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right) \quad (5.43)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} \geq 1,00 \Rightarrow E_t = 0 \quad (5.44)$$

sendo, " σ " a tensão axial atuante na barra; " σ_y " a tensão de escoamento da barra; "E" o módulo de elasticidade longitudinal elástico da barra e " E_t " o módulo tangente da barra. É importante ressaltar que o procedimento para a análise não linear leva em consideração os efeitos de tensões residuais e imperfeições geométricas no campo inelástico.

O procedimento para a " E_t - NBR8800" é diferente dos apresentados anteriormente. Nos procedimentos anteriores, a redução do módulo tangente somente era feito na fase inelástica, admitindo que antes do limite de proporcionalidade o material permanecia elástico. A "NBR-8800" admite que a existência de imperfeições geométricas no perfis metálicos no campo elástico. Para levar em consideração este efeito, a norma brasileira admite uma redução da capacidade portante da barra na fase elástica através da redução do módulo elástico. Esta redução é variável com a relação " P/P_y " atuante na barra conforme é possível verificar na figura 5.5. O módulo tangente neste procedimento, tanto para levar em consideração os efeitos de imperfeição geométrica (fase elástica) e imperfeições geométricas e tensões residuais (fase inelástica), pode ser obtido da seguinte forma seção:

$$\rho = 1 \quad \Rightarrow E_t = 0 \quad 0 \leq \bar{\lambda} < 0,20 \quad (5.45)$$

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} \Rightarrow E_t = \frac{\rho \sigma_y}{\pi^2} \left(\frac{KL}{r} \right)^2 \quad \bar{\lambda} \geq 0,20 \quad (5.46)$$

sendo a expressão de "β" já apresentada anteriormente.

As expressões para a determinação do módulo tangente em função das tensões normais podem ser programadas e desta forma, os efeitos de não linearidade física do material podem ser levados em consideração na análise de estruturas metálicas. Para tanto, algumas modificações na matriz de rigidez do elemento de barra plano apresentadas no capítulo 3 deste trabalho devem ser realizadas. Estas modificações serão apresentadas item 5.7 deste trabalho.

5.6 Verificação da Plastificação da Seção Transversal da Barra

Para a verificação da plastificação da seção transversal serão levados em consideração os efeitos combinados de força axial de compressão ou de tração e de momentos fletores atuando nas barras. Esta verificação será feita através de uma equação de iteração. Será admitido como hipótese que as barras estejam contidas lateralmente por vinculações adequadas. Desta forma, a resistência dos perfis ao momento fletor é dada por:

$$M = M_y = \sigma_y Z \quad (5.47)$$

sendo, "M_y" o momento de plastificação da seção transversal, "σ_y" a tensão de escoamento do aço e "Z" o módulo de resistência plástico da seção transversal em relação ao eixo de flexão.

A resistência dos perfis ao esforço axial de compressão ou de tração é dada pelos valores obtidos com o escoamento da seção bruta. Para este caso, os valores da resistência à compressão e à tração são obtidos por:

$$P_y = A \sigma_y \quad (5.48)$$

sendo, "A" a área bruta da seção transversal e "σ_y" já definido anteriormente.

A equação de interação pode ser obtida admitindo que a soma das tensões na fibra mais afastada da seção não pode ser superior a tensão de escoamento do aço. Representando matematicamente, tem-se:

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{Z} = \sigma_y \quad (5.49)$$

Dividindo ambos os lados da equação (5.49) por “ σ_y ” e lembrando que $A\sigma_y = P_y$ e chamando $\sigma_y Z = M_y$, a equação (5.49) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad (5.50)$$

A equação de interação encontrada será utilizada como critério de plastificação da seção transversal. As forças axiais “P” e momentos fletores “M” são obtidos de acordo com o tipo de análise que está sendo realizada. Os tipos de análise que serão feitas no desenvolvimento deste trabalho serão apresentados no próximo item 5.7. Esta equação será utilizada tanto para verificação da plastificação em torno do eixo de maior inércia do perfil quanto o de menor. O comportamento da equação (5.50) é apresentado na figura 5.8.

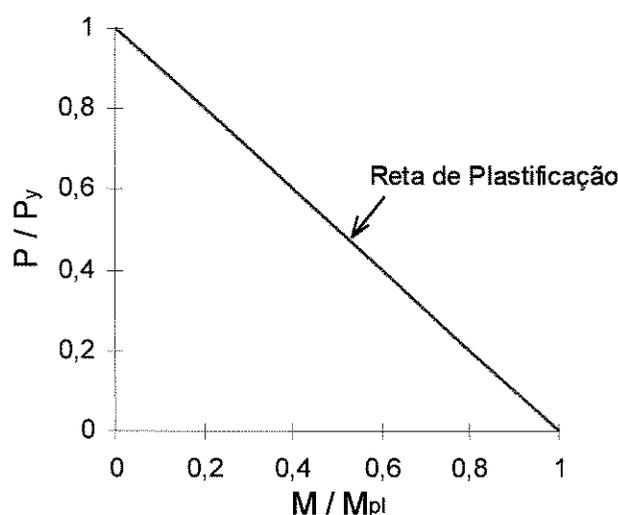


Figura 5.8 - Equação de interação.

Existem várias curvas de interação apresentadas na literatura para verificar a plastificação da seção transversal de um perfil sujeito aos esforços axiais e de compressão. Esta equação de interação mostrada na figura 5.8 foi adotada por apresentar um comportamento semelhante a equação de interação apresentada na norma brasileira “NBR 8800”.

5.7 Análise de Pórticos Planos Levando em Consideração os Efeitos de Não Linearidade Física do Material

Basicamente, todas as hipóteses citadas para a análise não linear geométrica são válidas na análise considerando os efeitos de não linearidade física do material. Entretanto, algumas hipóteses são diferentes e estas serão apresentadas a seguir:

- o material obedece a lei de Hooke até o limite de proporcionalidade do material, a partir do qual as deformações passam a não ser mais linearmente proporcionais as tensões e a transição da fase elástica para a fase inelástica se dá através de uma curva suave até que a seção atinja o limite de escoamento do material utilizado;

- o desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos para estrutura no regime elástico e inelástico das barras;

- na formulação apresentada, não se considera as formações de rótulas plásticas na estrutura, ou seja, quando a tensão de plastificação do perfil é alcançado na análise não linear física do material, seja esta em teoria de primeira ordem, segunda ordem ou análise de instabilidade, o programa desenvolvido emite uma mensagem informando que determinada seção transversal está se plastificando e o programa é interrompido; e,

- na análise de instabilidade considerando os efeitos de não linearidade física do material, é possível que alguma barra da estrutura se plastifique antes que estrutura se torne instável; neste caso, não ocorrerá instabilidade por flexão antes do limite de plastificação da estrutura; assim, a estrutura é considerada estável para o carregamento aplicado, sendo este carregamento definido como carregamento de plastificação da estrutura.

Para se introduzir o efeito de não linearidade física do material na análise de pórticos planos, torna-se necessário modificar a matriz de rigidez do elemento prismático de barra plano apresentado no capítulo 3. Esta modificação é feita substituindo o módulo de elasticidade elástico pelo módulo tangente. Com a introdução do módulo tangente na matriz de rigidez do elemento, é possível representar o comportamento elástico e inelástico das barras pois como foi descrito no item dos procedimentos para a análise elasto-plástica, quando a

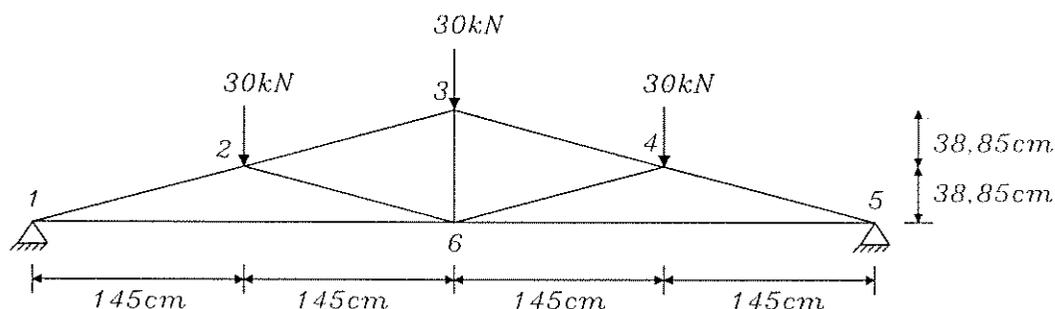
tensão na barra é inferior ao limite de proporcionalidade do material, o módulo tangente se torna o próprio módulo elástico, e quando este limite é ultrapassado, o módulo elástico se reduz gradativamente até zero, dependendo da tensão atuante na barra. A matriz modificada é apresentada na tabela 5.2. Como pode-se perceber o módulo elástico (E) foi substituído pelo módulo tangente (E_t). Esta matriz pode ser utilizada tanto para se fazer análise em teoria de primeira ordem (através da coluna com $P=0$ da tabela na qual os efeitos de segunda ordem são desprezados), análise em teoria de segunda ordem (através das colunas com $P \neq 0$ nas quais se considera os efeitos de segunda ordem) e análise de instabilidade. É possível também manter o módulo de elasticidade elástico ou variá-lo. Desta forma, seis tipos de análise são possíveis de serem realizadas: análise em teoria de primeira ordem com módulo de elasticidade constante ou variável, análise em teoria de segunda ordem com módulo de elasticidade constante ou variável e análise de instabilidade com módulo de elasticidade constante ou variável.

Tabela 5.2-Funções de rigidez de barra com interação entre força axial, força cortante e flexão e módulo de elasticidade tangente.

S \ P	Compressão ($P < 0$)	($P=0$)	Tração ($P > 0$)
S1	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$
S2	$\frac{E_t I (a_1)^2 \varepsilon^3 \text{sen } \varepsilon}{L^3 \phi_c}$	$\frac{12 E_t I}{L^3 (1+2K)}$	$\frac{E_t I (a_2)^2 \varepsilon^3 \text{senh } \varepsilon}{L^3 \phi_t}$
S3	$\frac{E_t I a_1 \varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{L^2 \phi_c}$	$\frac{6 E_t I}{L^2 (1+2K)}$	$\frac{E_t I a_2 \varepsilon^2 (\cosh \varepsilon - 1)}{L^2 \phi_t}$
S4	$\frac{E_t I \varepsilon (\text{sen } \varepsilon - a_1 \varepsilon \cos \varepsilon)}{L \phi_c}$	$\frac{2 E_t I (2+K)}{L (1+2K)}$	$\frac{E_t I \varepsilon (a_2 \varepsilon \cosh \varepsilon - \text{senh } \varepsilon)}{L \phi_t}$
S5	$\frac{E_t I \varepsilon (a_1 \varepsilon - \text{sen } \varepsilon)}{L \phi_c}$	$\frac{2 E_t I (1-K)}{L (1+2K)}$	$\frac{E_t I \varepsilon (\text{senh } \varepsilon - a_2 \varepsilon)}{L \phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos \varepsilon - a_1 \varepsilon \text{sen } \varepsilon$ $a_1 = 1 - \frac{c P }{G A}$ $\varepsilon = \alpha L$ $\alpha = \sqrt{\frac{ P }{a_1 E_t I}}$	$K = \frac{6 c E_t I}{G A L^2}$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \varepsilon + a_2 \varepsilon \text{senh } \varepsilon$ $a_2 = 1 + \frac{c P}{G A}$ $\varepsilon = \alpha L$ $\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_2 E_t I}}$

5.7.1 Exemplo Numérico 1

Este primeiro exemplo foi desenvolvido para demonstrar a influência dos efeitos de não linearidade geométrica e física do material na análise de uma estrutura reticulada. A geometria e os dados das barras da treliça analisada são apresentados na figura 5.9. Inicialmente, realizou-se uma análise elasto-linear (equilíbrio na posição indeslocada). Neste tipo de análise, os efeitos de não linearidade física e geométrica não são levados em consideração. Nas análises seguintes, considerou-se apenas os efeitos de não linearidade física do material, depois apenas os efeitos de não linearidade geométrica e por fim considerou-se ambos os efeitos de não linearidade física e geométrica atuando em conjunto. O deslocamento vertical do nó 6 da estrutura e o esforços na barra 1-2 da treliça para todas as análises citadas anteriormente foram determinados e são apresentados na tabela 5.3.



Dados das Barras

$$A=11,60\text{cm}^2 \quad I=46,00\text{cm}^4 \quad Z=13,34\text{cm}^3 \quad F_y=25\text{kN/cm}^2 \quad E=20500\text{kN/cm}^2$$

Figura 5.9 - Treliça plana analisada no exemplo numérico 1.

Como pode-se perceber, para cada tipo de análise realizada, os deslocamentos do nó "6" da estrutura se modificam. Quando o equilíbrio da estrutura foi considerado na posição indeslocada e os efeitos de não linearidade física foram levados em consideração, o deslocamento encontrado para o nó "6" da estrutura foi 29,05% maior que o encontrado na análise elasto-linear. Ao se considerar apenas os efeitos de não linearidade geométrica (equilíbrio na posição deslocada), o deslocamento encontrado foi apenas 1,61% maior que na análise elasto-linear. Ao se considerar os efeitos de não linearidade física e geométrica atuando em conjunto, o deslocamento do nó "6" se tornou 44,08% maior que na análise elasto-linear. É importante ressaltar que os valores obtidos nas análises

anteriores dependem das características geométricas da estrutura que está sendo analisada. Nota-se que não somente os deslocamentos se modificam na estrutura, mas que os esforços solicitantes nas barras se alteram dependendo do tipo de efeitos que são considerados na estrutura.

Tabela 5.3 - Deslocamentos do nó "6" e esforços na barra 1-2 da treliça.

Tipo de Análise	Desloc. Vertical Nó "6" (cm)	Esforços Barra 1-2 - nó inicial		
		N (kN)	V (KN)	M (kNcm)
1ª. ordem - E- constante	-0,7081	171,567	0,446	14,497
1ª. ordem - E- variável	-0,9138	171,391	0,491	18,577
2ª. ordem - E- constante	-0,7195	174,511	0,333	21,933
2ª. ordem - E- variável	-1,0202	175,693	0,639	31,125

5.7.2 Exemplo Numérico 2

Neste exemplo, determinou-se a carga de instabilidade elástica e inelástica da barra bi-articulada mostrada na figura 5.10. Para testar o programa desenvolvido, variou-se a esbeltez da barra para fazer com que, inicialmente, a barra atingisse a instabilidade na fase elástica e posteriormente na fase inelástica.

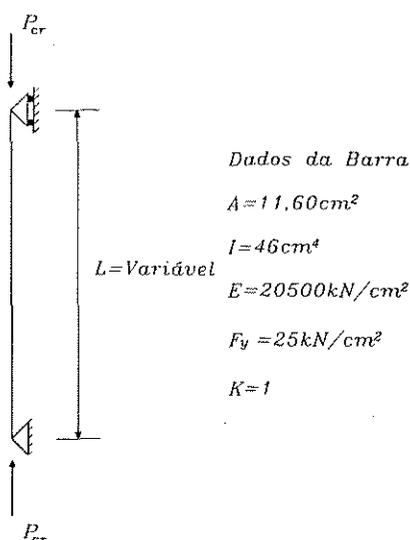


Figura 5.10 - Barra bi-articulada de comprimento variável.

Para se poder plotar as curvas $\sigma_{cr} \times \lambda$ mostradas na figura 5.11, foram realizadas 23 análises de instabilidade através da variação do comprimento da barra. As curvas, obtidas através dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, foram determinadas utilizando a redução do módulo de elasticidade proposta pelo "CRC" (1), "LRFD" (2) e "NBR-8800" (4). Para comparar os

resultados obtidos pelo programa, as tensões críticas, para alguns valores de índice de esbeltez, foram calculadas através das fórmulas propostas pela especificação “ASD” (que utiliza a curva proposta pelo “CRC”), pela especificação “LRFD” e pela norma brasileira “NBR-8800”. Os resultados encontrados tanto pelo programa como pelas fórmulas das especificações e norma são apresentados na tabela 5.4.

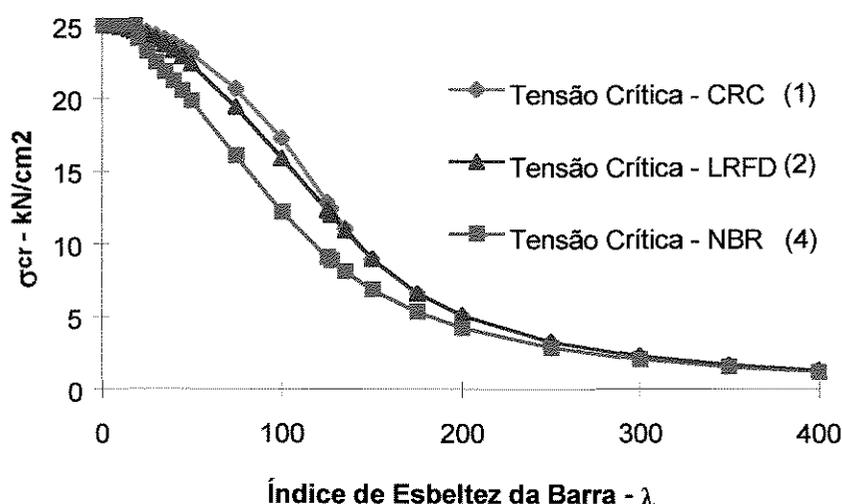


Figura 5.11 - Tensão Crítica x Índice de Esbeltez.

Algumas análises para determinados índices de esbeltez foram realizadas no programa ANSYS 5.2 (3) utilizando a curva proposta pela “LRFD”. Os resultados obtidos através deste programa são apresentados na tabela 5.4. É importante ressaltar que o programa desenvolvido, com as funções de rigidez, possibilita usar apenas um elemento para representar a barra analisada. Entretanto, para que o programa ANSYS 5.2 obtivesse resultados próximos do programa desenvolvido, foi necessário que o mesmo elemento de barra fosse dividido em 10 partes (elementos). Isto se deve ao fato do programa ANSYS 5.2 utilizar o processo dos elementos finitos conforme explicado no capítulo 3. Como se pode observar, os resultados obtidos através do programa desenvolvido estão muito próximos dos resultados fornecidos pelas fórmulas de dimensionamento utilizadas pelo “CRC”, “LRFD” e “NBR-8800”. É importante ressaltar que estas fórmulas foram utilizadas para desenvolver as curvas utilizadas para calcular a redução do módulo de elasticidade do material. As maiores diferenças entre os valores obtidos pela análise computacional e pelas fórmulas foram encontradas

na análise utilizando as expressões fornecidas pela especificação "LRFD". O erro encontrado na análise para o índice de esbeltez igual a 100 foi de 6,15%. Os resultados obtidos utilizando o programa ANSYS 52 se apresentaram próximos dos valores obtidos pelo programa desenvolvidos pelo autor.

Tabela 5.4 - Resultados comparativos entre o programa desenvolvido, fórmulas das especificações, normas e o ANSYS 5.2.

Análises Programas	Índice de Esbeltez da Barra - (λ)		
	100	50	25
σ_{cr} (E_t - LRFD) (2)	15,822	22,301	24,299
Fórmula LRFD	14,905	21,967	24,204
σ_{cr} (E_t - LRFD) ** (3)	15,813	22,297	24,295
σ_{cr} (E_t - CRC) (1)	17,213	23,045	24,514
Fórmula ASD	17,210	23,052	24,513
σ_{cr} (E_t -NBR-8800) (4)	12,110	19,755	23,143
Fórmula NBR-8800	12,171	19,785	23,152

*Tensão crítica em kN/cm^2

** (3) programa ANSYS52

5.7.3 Exemplo Numérico 3

Neste exemplo, modelou-se uma barra bi-articulada com pequena excentricidade na aplicação da força axial. Devido a esta excentricidade, existirão esforços de flexão que influenciarão no comportamento inelástico da barra. A barra foi dividida em 6 elementos para exemplificar o efeito de barra de pórtico. Os dados da barra são apresentados na figura 5.12.

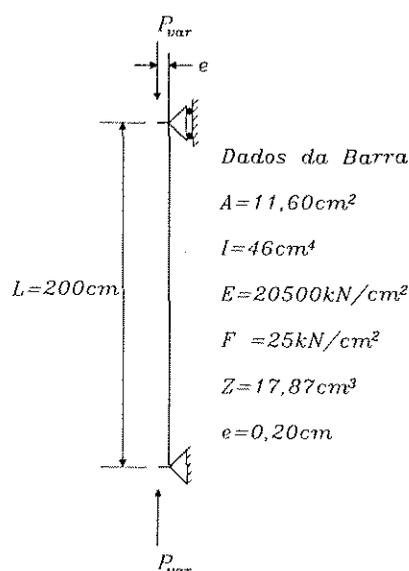


Figura 5.12 - Barra bi-articulada com força axial aplicada excentricamente.

O objetivo deste exemplo é demonstrar a influência da flexão na carga crítica inelástica da barra. São apresentadas as curvas de carregamentos em função dos deslocamentos horizontais no centro, denominado de “ δ ”, para as várias análises realizadas. Cada curva foi plotada variando a força axial na barra, e para cada valor de força axial, obteve-se o seu respectivo deslocamento.

A curva 1 foi obtida através da análise de primeira ordem com módulo de elasticidade constante (E). É importante ressaltar que esta análise apresenta um comportamento linear, ou seja, os deslocamentos são sempre linearmente proporcionais à força.

A curva 2 representa uma análise em teoria de primeira ordem com módulo de elasticidade variável (E_1). Neste caso, a redução do módulo de elasticidade foi feita utilizando a expressão dada pela equação da especificação “LRFD”. Devido aos efeitos da força axial e momento fletores presente na barra, a barra vai gradativamente perdendo capacidade portante, até que esta se plastifique completamente. O carga de plastificação determinada pelo programa foi igual a $P_{\text{último-LRFD}}=256,61\text{kN}$. A curva 5 também representa uma análise em teoria de primeira ordem com módulo de elasticidade variável. Entretanto, a redução do módulo de elasticidade foi obtido através da equação proposta pelo “CRC”. Como esta curva inclui os efeitos de tensões residuais mas não inclui os efeitos de imperfeições geométricas, a redução da capacidade portante da barra é inferior a redução promovida pela curva do “LRFD”. Assim, a curva obtida pela redução do “CRC” se localiza acima da curva do “LRFD”. É importante ressaltar que a redução da capacidade portante da barra se inicia posteriormente a redução promovida pelo “LRFD” e a capacidade última da barra (plastificação) é um pouco superior ao valor obtido na análise anterior ($P_{\text{último-CRC}}=256,64\text{kN}$). As diferenças entre o valor encontrado utilizando a curva do “CRC” e “LRFD” se deve ao fato da presença de diferentes valores de momento fletores atuando na barra para os dois casos analisados.

A curva 3 apresenta uma análise em teoria de segunda ordem com módulo de elasticidade constante (E). Neste caso, a capacidade última da barra está limitada pela instabilidade por flexão, devido apenas ao efeito da não linearidade

geométrica ($P_{cr}=232,62\text{kN}$). Valor de carga crítica elástica fictícia pois o índice de esbelteza da barra se encontra no regime inelástico.

A curva 4 representa a análise em teoria de segunda ordem com módulo de elasticidade variável (E_t). A expressão do “LRFD” foi utilizada para representar os efeitos de não linearidade física do material nesta análise. Neste caso, a capacidade última da barra também será obtida por instabilidade por flexão, porém devido ao efeito combinado da não linearidade geométrica e da não linearidade física do material ($P_{cr}=132,99\text{kN}$). A presença de flexão fez com que a carga crítica da barra fosse diminuída de $183,43\text{kN}$ (carga crítica da mesma barra sem excentricidade de aplicação de carga) para $132,99\text{kN}$. Uma redução de 28% na carga crítica da barra centrada.

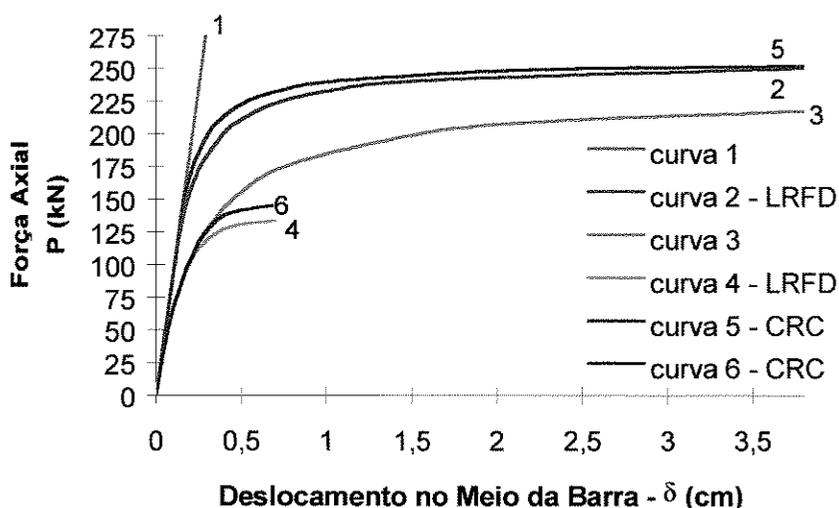


Figura 5.13 - Força axial aplicada na barra x deslocamento no meio da barra.

Por fim, a curva 6 também representa a análise de segunda ordem, sendo o módulo de elasticidade variável e obtido através da expressão do “CRC”. Novamente, a capacidade última da barra foi obtida por instabilidade por flexão devido ao efeito combinado da não linearidade geométrica e não linearidade física do material. O valor da capacidade última da barra encontrado nesta análise é superior ao valor encontrado na análise anterior que considera a redução do módulo de elasticidade pela expressão do “LRFD” ($P_{cr}=144,59\text{kN}$). Isto se deve ao fato de a redução do módulo de elasticidade da barra pela expressão do “CRC” ser inferior a redução dada pela expressão do “LRFD”. A presença de flexão na barra fez com que a capacidade portante da barra fosse

diminuída de 199,67kN (instabilidade inelástica da mesma barra com carga centrada) para 144,59kN (redução de 27,59% na carga crítica).

5.7.4 Exemplo Numérico 4

Os exemplos numéricos que serão apresentados a seguir neste trabalho foram estudados por outros autores e têm a finalidade de servir como parâmetro para testar o programa desenvolvido. O primeiro exemplo estudado é mostrado na figura 5.14. Esta estrutura apertada foi analisada por CHU e PABARCIUS²². Estes pesquisadores determinaram a carga crítica do pórtico submetido a ações verticais e posteriormente a ações verticais e horizontais. O efeito da inelasticidade foi considerado através de uma relação em que a curvatura da seção transversal era função dos esforços axiais e de flexão na barra. A instabilidade da estrutura foi determinada através de um processo manual o qual se utilizava das funções de rigidez de forma simplificada para verificar a estabilidade da estrutura. Os resultados obtidos por estes pesquisadores são apresentados na tabela 5.5 em função da força axial de plastificação da seção transversal " P_y " igual a 1366,63kN, de forma idêntica à apresentada no artigo.

Este mesmo pórtico foi analisado no presente trabalho. Inicialmente, determinou-se a instabilidade elástica e inelástica do pórtico sujeito apenas a forças verticais " Q ". Posteriormente, aplicou-se uma força horizontal " H ", que foi mantida constante, e variou-se as forças verticais " Q " até que a estrutura atingisse a instabilidade. Os resultados obtidos nestas análises são também apresentados na tabela 5.5 em função de " P_y ".

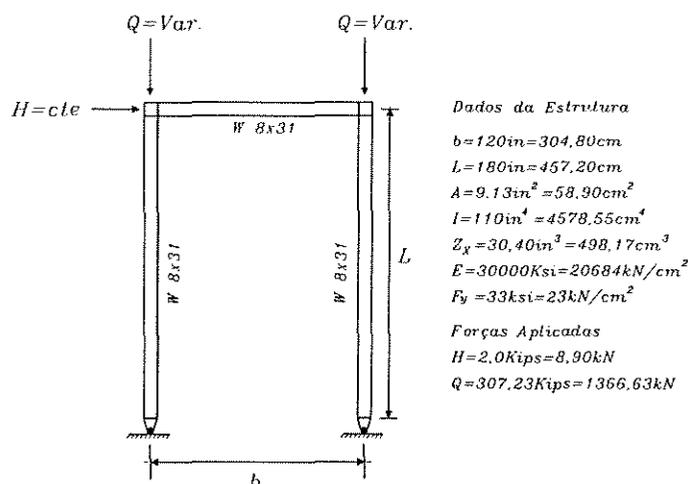


Figura 5.14 - Pórtico plano analisado por CHU e PABARCIUS²².

Ao se comparar as análises, verifica-se que os resultados obtidos quando se utiliza a redução do módulo de elasticidade dado pela curva do "CRC" estão próximos dos resultados apresentados pelos pesquisadores. Ao se utilizar a redução do módulo de elasticidade dado pela curva do "LRFD", os resultados se distanciaram um pouco dos obtidos pelos referidos pesquisadores. Isto se deve ao fato de CHU e PABARCIUS²² considerarem a redução da capacidade portante das barras da estrutura apenas devido ao efeito das tensões residuais e efeitos de flexão. Estes efeitos são considerados quando se utiliza a curva do "CRC". Entretanto, ao se fazer a análise de instabilidade utilizando a curva do "LRFD", além dos efeitos citados anteriormente, considera-se o efeito de imperfeições geométricas. Desta forma, a redução da capacidade portante da estrutura é mais acentuada, conforme verificado na análise.

Tabela 5.5 - Resultados das análises obtidas por CHU e PABARCIUS²² e programa desenvolvido.

Instabilidade	Elástica Q=var.	Inelástica Q=var.	Elástica H=cte Q=var	Inelástica H=cte Q=var
CHU e PABARCIUS ²²	0,677P _y	0,641P _y	0,677P _y	0,420P _y
Programa (CRC)	0,660P _y	0,625P _y	0,642P _y	0,397P _y
Programa (LRFD)	0,660P _y	0,582 P _y	0,642P _y	0,358P _y

Quando a carga horizontal foi admitida igual a zero, a carga de instabilidade inelástica utilizando a curva do "CRC" foi igual a 0,625P_y e 0,582P_y quando adotou-se a curva da "LRFD". Ao se comparar a carga crítica de instabilidade elástica (0,660P_y) com a inelástica, nota-se que a redução da capacidade portante da estrutura devido ao efeito da não linearidade física não foi muito acentuada (94,70% do valor da carga crítica elástica para o caso do "CRC" e 88,18% para o caso da "LRFD").

Constata-se também que quando a força horizontal foi considerada diferente de zero (H=8,90kN), a carga de instabilidade elástica da estrutura sofreu uma pequena redução, passando de "0,660P_y" para "0,642P_y". Quando a força horizontal é considerada na análise, esta faz com que um dos pilares da estrutura seja aliviado enquanto o outro seja mais solicitado. Desta forma, o pilar mais solicitado alcança a instabilidade mais rapidamente que o outro, causando uma redução na capacidade portante da estrutura.

Ao se analisar a instabilidade inelástica da estrutura devido a presença da força horizontal ($H=8,90\text{kN}$), verifica-se que a redução da capacidade portante da estrutura foi acentuada. Ao se considerar a redução da capacidade portante da barra pela curva do “CRC”, a carga de instabilidade inelástica se reduziu de $0,625P_y$ para $0,395P_y$ (63,20% de redução). Por outro lado, quando se considera a redução da capacidade portante da barra pela curva do “LRFD”, a redução da carga de instabilidade inelástica foi de $0,582P_y$ para $0,358P_y$ (61,51% de redução). Pode-se afirmar que a introdução de forças horizontais na estrutura causaram significantes reduções na carga crítica de instabilidade inelástica. O comportamento da estrutura para vários incrementos de carga é apresentado na figura 5.15.

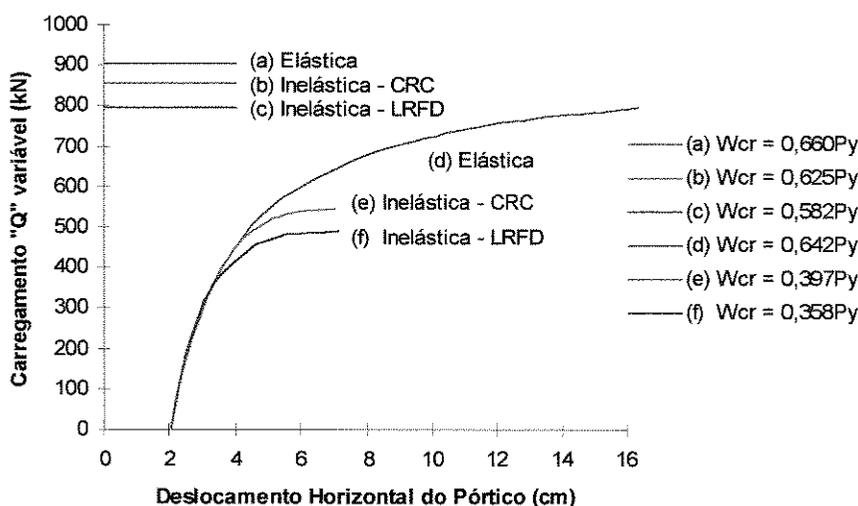


Figura 5.15 - Gráfico Carregamento x Deslocamento Horizontal.

5.7.5 Exemplo Numérico 5

Outra estrutura apertada analisada na literatura é mostrada na figura 5.16. Esta estrutura foi estudada por MOSES²³ através do método das diferenças finitas. O efeito da inelasticidade das barras foi considerado na análise através da introdução de curvas que relacionam curvatura da seção transversal em função dos esforços axiais e momentos fletores na barra. Os dados geométricos e de carregamento da estrutura são apresentados na tabela 5.16 e correspondem aos casos 26, 27, 28 e 29 analisados pelo referido pesquisador.

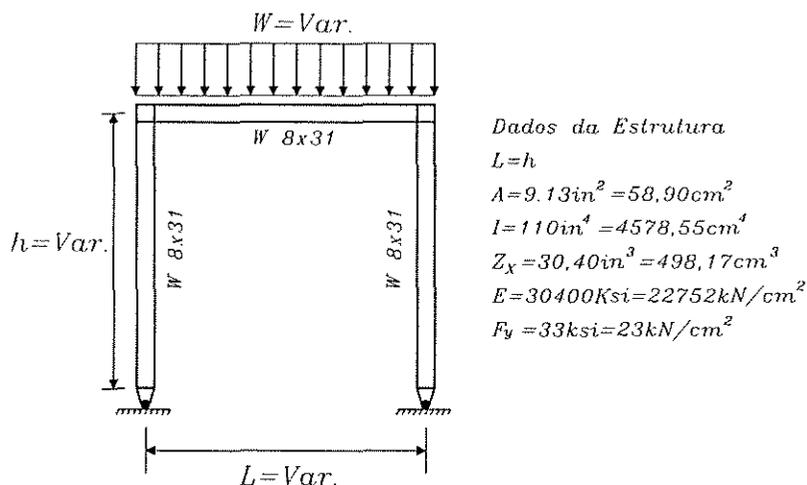


Figura 5.16 - Estrutura aperticada analisada por MOSES²³.

Esta mesma estrutura foi analisada utilizando o programa desenvolvido para os casos citados acima. Para os casos 26 e 27 analisados, as cargas de instabilidade inelástica obtidas pelo programa ficaram mais próximas do resultado obtido por MOSES²³ quando se utilizou a curva do "CRC" para fazer a redução da capacidade portante das barras devido a inelasticidade. Já para os casos 28 e 29, as cargas de instabilidade inelástica obtidas pelo programa ficaram mais próximas quando se utilizou a curva do "LRFD". Os resultados obtidos pelo referido pesquisador e no presente trabalho são apresentados na tabela 5.7.

Tabela 5.6 - Dados geométricos e de carregamento da estrutura analisada.

Caso	L (in)	L (cm)	W (Kip/in)	W (kN/cm)
26	319,240	810,870	0,2056	0,3600
27	159,620	405,435	1,6445	2,8800
28	79,810	202,717	13,1560	23,0397
29	63,848	162,174	25,6953	45,0000

Os resultados foram apresentados por MOSES²³ em termos de parâmetros adimensionais $p_f = P_f h^2/EI$, sendo " P_f " a força axial presente nos pilares no momento da instabilidade dada por $P_f = W_{cr}L/2$. O parâmetro " W_{cr} " é um parâmetro que multiplica as ações variáveis da estrutura (no caso, apenas " W ").

Tabela 5.7 - Resultados obtidos por MOSES²³ e programa desenvolvido.

Caso	p_f (MOSES)	p_f (CRC)	p_f (LRFD)
26	0,662	0,659	0,617
27	0,330	0,325	0,308
28	0,156	0,165	0,160
29	0,120	0,140	0,138

5.7.6 Exemplo Numérico 6

A estrutura reticulada apresentada na figura 5.17 foi analisada por LU²⁴. Esta estrutura apresenta como carregamento uma carga uniformemente distribuída na viga do pórtico e uma carga concentrada em cada pilar da estrutura. A instabilidade da estrutura foi determinada pelo pesquisador através de um processo matemático o qual utiliza as funções de rigidez simplificadas para verificar a estabilidade da estrutura. Da mesma forma que no exemplo anterior, o efeito da inelasticidade das barras foi considerado na análise através da introdução de curvas que relacionam curvatura da seção transversal em função dos esforços axiais e momentos fletores na barra. Os resultados obtidos por LU²⁴ são apresentados na tabela 5.8 para os casos $h=60r_x$ e $h=80r_x$.

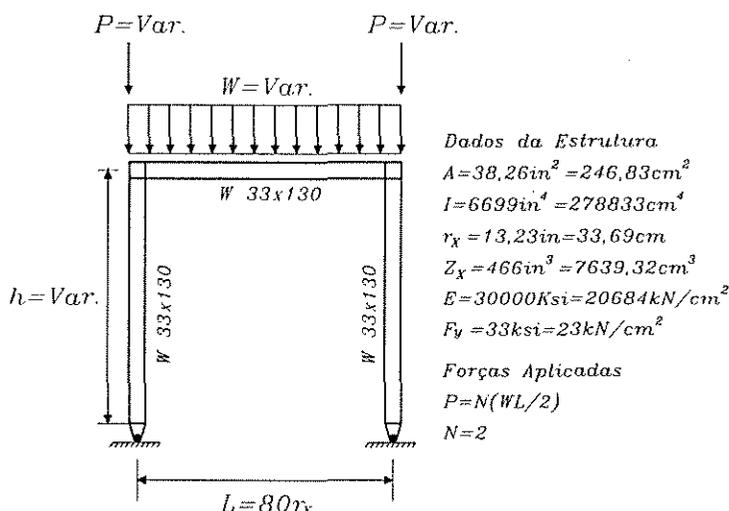


Figura 5.17 - Estrutura apórtico analisada por LU²⁴.

Esta estrutura foi analisada através do programa desenvolvido para os casos propostos pelo referido autor. Para o caso de $h=60r_x$, o resultado obtido pelo programa se aproximou mais do resultado obtido por LU²⁴ quando a curva do "CRC" foi utilizada. Por outro lado, quando a estrutura foi analisada para o caso de $h=80r_x$, o resultado se aproximou mais quando se utilizou a curva do "LRFD". Os resultados obtidos pelo programa também são apresentados na tabela 5.8.

Tabela 5.8 - Resultados obtidos por LU²⁴ e programa desenvolvido.

Caso	LU ²⁴ (W_{cr} - kN/cm)	Programa - CRC (W_{cr} - kN/cm)	Programa - LRFD (W_{cr} - kN/cm)
$h=60r_x$	3,997	3,991	3,905
$h=80r_x$	3,590	3,956	3,642

5.7.7 Exemplo Numérico 7

A estrutura aperticada analisada neste exemplo numérico tem características semelhantes a estrutura analisada no exemplo 5.7.4. Ambas as estruturas apresentam cargas verticais e horizontais aplicadas na estrutura. Entretanto, a estrutura analisada neste exemplo apresenta momentos fletores resultantes da ação de uma carga uniformemente distribuída na viga da estrutura. A presença dos momentos fletores faz com que a inelasticidade nas barras se pronuncie de forma mais acentuada.

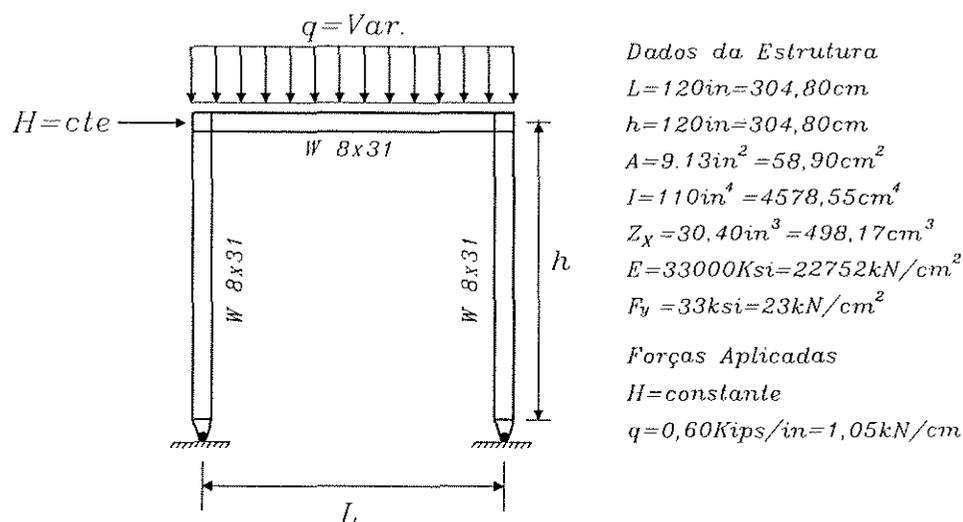


Figura 5.18 - Estrutura aperticada analisada por ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁵.

A estrutura mostrada na figura 5.18 foi estudada pelos pesquisadores ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁵ utilizando o método dos elementos finitos. A degeneração da capacidade portante da estrutura devido ao efeito de não linearidade geométrica foi introduzida na análise através da matriz geométrica $[k_g]$. O processo incremental para o carregamento foi utilizado para determinar a carga de instabilidade da estrutura. A alma e a mesa da seção transversal foram subdivididas em um número finito de áreas para poder representar o comportamento inelástico das barras. Através de um procedimento matemático, a medida que algumas áreas da seção transversal iam se plastificando, elas eram subtraídas das áreas que ainda permaneciam elásticas. Caso um novo incremento de carregamento fosse dado na estrutura, somente a parte da porção da seção transversal que ainda permanecia elástica era admitida ser capaz de resistir aos incrementos de força axial e momento fletores que surgiam. Através

do procedimento descrito sucintamente acima, o comportamento inelástico das barras foi possível de ser representado.

Esta estrutura foi analisada pelos pesquisadores para três casos distintos de forças horizontais aplicadas: $H=0$, $H=0,4448\text{kN}$ e $H=2,224\text{kN}$. Em todas as análises, a força horizontal foi mantida constante enquanto a carga uniformemente distribuída foi variada até que a estrutura atingisse a instabilidade. Os resultados determinados por ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁵ e pelo programa desenvolvido são apresentados na tabela 5.9.

Tabela 5.9 - Resultados obtidos por ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁵ e programa desenvolvido pelo autor.

Caso (kN)	ALVAREZ e BIRNSTIEL ²⁵ kN/cm	q_{cr} - kN/cm (CRC)	q_{cr} - kN/cm (LRFD)
H=0,0	1,795	1,695	1,679
H=0,4448	1,795	1,694	1,677
H=2,2240	1,795	1,692	1,675

Nas análises realizadas por ALVAREZ e BIRNSTIEL²⁵, a introdução das forças horizontais perturbadoras não modificou o resultado obtido quando a força horizontal foi considerada igual a zero. Entretanto, através da análise realizada pelo programa desenvolvido, nota-se que quando a força horizontal foi introduzida na análise, ela ocasionou uma pequena redução na carga de instabilidade da estrutura. Os resultados utilizando as curvas do "CRC" e "LRFD" foram mais conservadores quando comparado com os resultados apresentados pelos referidos pesquisadores.

5.7.8 Exemplo Numérico 8

VOGEL²⁹ em um artigo intitulado "Calibrating Frames" apresenta uma série de análises de instabilidade em estruturas reticuladas. Estas análises foram feitas através da consideração da inelasticidade concentrada nos nós da estrutura e através da consideração da inelasticidade distribuída ao longo do elemento e da altura da seção transversal. Segundo VOGEL²⁹, o principal objetivo daquele trabalho foi fornecer exemplos que pudessem ser utilizados para calibrar os diferentes tipos de programas que possam ser desenvolvidos para determinar a capacidade última das estruturas reticuladas.

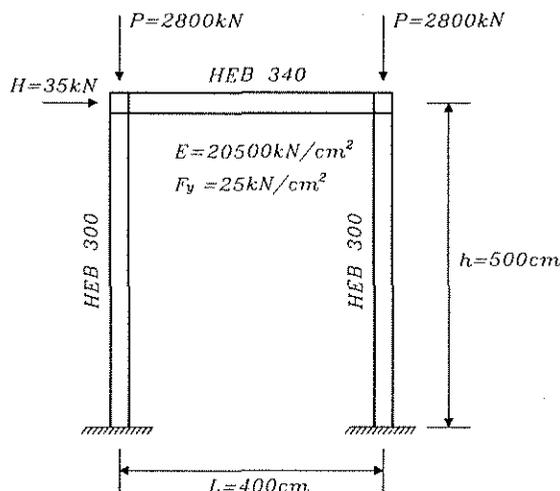


Figura 5.19 - Pórtico retangular de bases engastadas analisado por VOGEL²⁹.

Uns dos exemplos analisados por VOGEL²⁹ é o pórtico retangular com as bases engastadas mostrado na figura 5.19. Este pórtico está sujeito a forças verticais e horizontais que são incrementadas durante a análise para determinação do parâmetro de instabilidade. As dimensões dos perfis utilizados nos exemplos 5.7.8 a 5.7.10 são apresentados na tabela 5.11.

Esta estrutura apresenta carga de instabilidade próxima a carga de plastificação dos pilares da estrutura. Os resultados obtidos pelo referido pesquisador e pelo programa desenvolvido são apresentados na tabela 5.10. Apresenta-se também os resultados obtidos por CHEN³⁵ que também analisou esta estrutura através de um programa desenvolvido utilizando o método das funções de rigidez.

Tabela 5.10 - Resultados obtidos na análise realizado por VOGEL²⁹, CHEN³⁵ e programa desenvolvido.

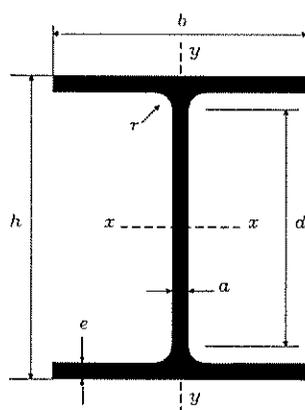
Instabilidade Inelástica	VOGEL ²⁹	CHEN ³⁵	Programa (CRC)	Programa (LRFD)
W_{cr}	1,017	0,945	1,002	0,950

Observa-se que quando a curva do "CRC" foi utilizada na análise, o resultado obtido pelo programa se aproximou da análise realizada por VOGEL²⁹. O resultado apresentado por VOGEL²⁹ foi obtido através de uma análise em que a inelasticidade foi considerada apenas nos nós de extremidade das barras. Por outro lado, quando a curva do "LRFD" foi considerada na análise, o resultado obtido aproximou-se do determinado por CHEN³⁵. A análise realizada por este

autor além de considerar a inelasticidade concentrada nos nós do elemento de barra, considera também os efeitos de imperfeições geométricas como agentes redutores da capacidade portante das barras da estrutura.

Tabela 5.11 - Perfis utilizados nos exemplos 5.7.8, 5.7.9 e 5.7.10.

Perfis	h (mm)	b (mm)	a (mm)	e (mm)	r (mm)	A (cm ²)	I _x (cm ⁴)	I _y (cm ⁴)	Z _{px} (cm ³)	Z _{py} (cm ³)
IPE240	240	120	6,2	9,8	15	39,1	3892	284	367	74
IPE300	300	250	7,1	10,7	15	53,8	8356	604	628	125
IPE330	330	160	7,5	11,5	18	62,6	11770	788	804	154
IPE360	360	170	8,0	12,7	18	72,7	16270	1043	1019	191
IPE400	400	180	8,6	13,5	21	84,5	23160	1318	1307	229
HEB160	160	160	8,0	13,0	15	54,3	2492	889	354	170
HEB200	200	200	9,0	15,0	18	78,1	5696	2003	643	306
HEB220	220	220	9,5	16,0	18	91,0	8091	2843	827	394
HEB240	240	240	10,0	17,0	21	106,0	11260	3923	1053	498
HEB260	260	260	10,0	17,5	24	118,0	14920	5135	1283	602
HEB300	300	300	11,0	19,0	27	149,0	25170	8563	1869	870
HEB340	330	300	9,5	16,5	27	133,0	27690	7436	1850	756



5.7.9 Exemplo Numérico 9

Outra estrutura reticulada analisada por VOGEL²⁹ é o pórtico em alma cheia com bases rotuladas mostrado na figura 5.20. Este exemplo numérico também apresenta carga de instabilidade próxima da carga de plastificação dos pilares da estrutura. A carga crítica de instabilidade inelástica obtida por VOGEL²⁹ é apresentada na tabela 5.12 (considerando inelasticidade concentrada nas

extremidades da barra). Os resultados obtidos no presente trabalho também são apresentados na tabela 5.12.

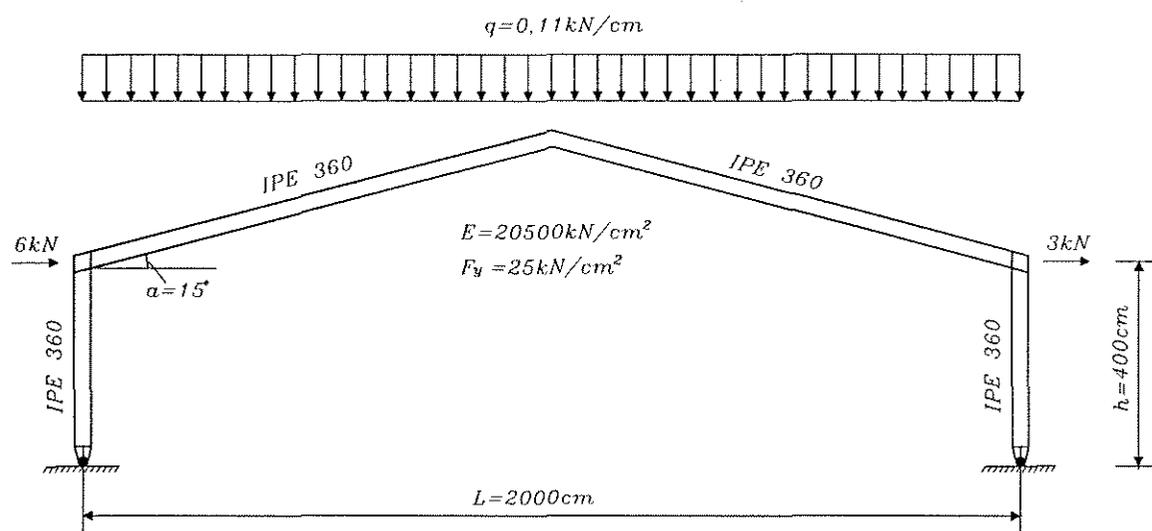


Figura 5.20 - Pórtico em alma cheia bi-articulado analisado por VOGEL²⁹.

Neste exemplo, ao contrário do anterior, nota-se que a carga crítica inelástica determinada através da curva do "LRFD" está mais próxima do resultado encontrado por VOGEL²⁹. Consta-se também que a carga crítica determinada através da curva do "CRC" encontra-se acima do valor determinado por VOGEL²⁹.

Tabela 5.12 - Resultados obtidos na análise realizado por VOGEL e autor.

Instabilidade Inelástica	VOGEL ²⁹	Autor (CRC)	Autor (LRFD)
W_{cr}	0,961	1,023	0,995

5.7.10 Exemplo Numérico 10

Este último exemplo foi analisado com o objetivo de determinar o carregamento que produz a primeira formação de rótula plástica na estrutura. A estrutura analisada é mostrada na figura 5.21. É importante mencionar que nesta análise todas as cargas na estrutura foram variadas até que a formação da primeira rótula plástica na estrutura fosse alcançada. Quando a curva do "LRFD" foi utilizada na análise, a primeira rótula plástica foi encontrada para um carregamento igual a 0,876 do carregamento aplicado mostrado na figura 5.21.

Para o caso do "CRC", o valor encontrado foi igual a 0,902. Esta mesma estrutura foi analisada por CHEN e TOMA⁶². A formação da primeira rótula plástica obtida por eles foi encontrado para um carregamento igual a 0,873 do carregamento aplicado. Este valor está muito próximo do valor determinado quando se utilizou a curva do "LRFD".

É importante ressaltar que os referidos pesquisadores consideraram o efeito da inelasticidade concentrada nos nós de extremidades das barras da estrutura. Os efeitos de imperfeições geométricas também foram levados em consideração nesta análise. Por este motivo, o resultado obtido pelo programa se aproximou mais do resultado obtido por CHEN e TOMA⁶² quando se utilizou a curva do "LRFD". Como foi mencionado, esta curva considera o efeito de imperfeições geométricas.

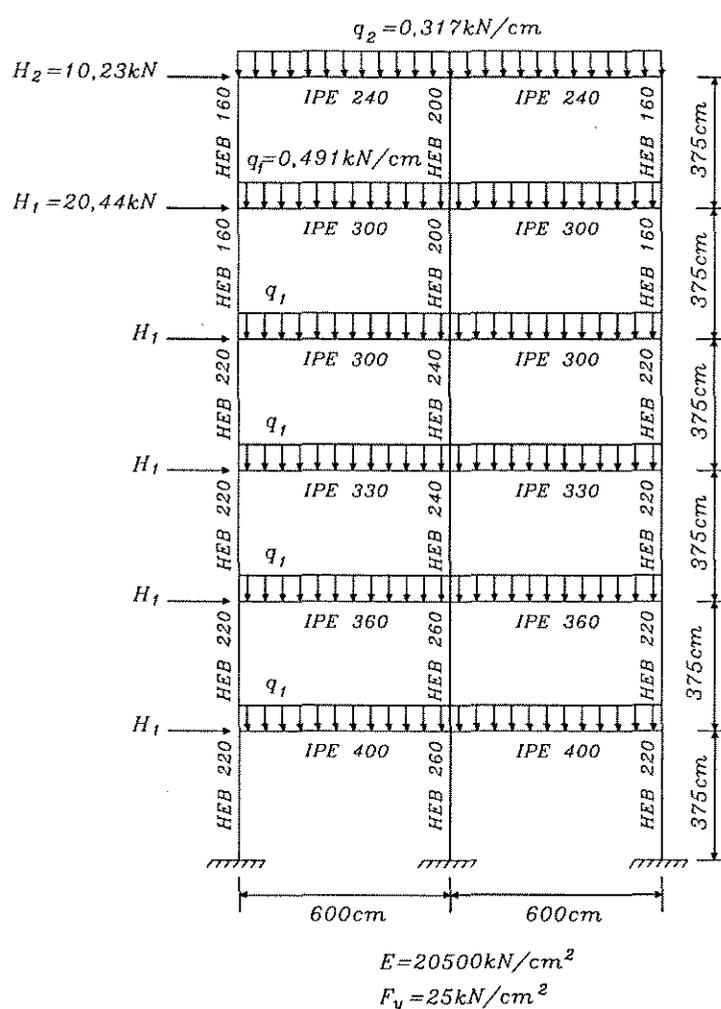


Figura 5.21 - Pórtico analisado para a verificação da formação da primeira rótula plástica (Fonte VOGEL²⁹).

Capítulo 6

Dimensionamento Automatizado

6.1 Introdução

Neste capítulo serão descritos os critérios utilizados no dimensionamento de estruturas metálicas treliçadas planas. O dimensionamento foi desenvolvido de tal forma que durante a análise estrutural, os efeitos de não linearidade geométrica e física do material pudessem ser levados em consideração. O dimensionamento é baseado na norma brasileira NBR 8800 "Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios: Método dos Estados Limites" a qual estabelece os critérios a serem utilizados no dimensionamento de uma estrutura de aço. As formulações da norma de verificação da resistência à compressão e à tração foram programadas e bancos de dados de perfis em dupla cantoneira de abas iguais e perfis "C" foram armazenados em arquivos para que o dimensionamento da estrutura pudesse ser realizado automaticamente pelo programa de computador desenvolvido. Desta forma, através da automatização do dimensionamento, o programa desenvolvido é capaz de procurar um perfil dentro dos bancos de dados que consiga suportar os esforços solicitantes de tração e de compressão que determinada barra esteja sujeita. Os tipos de dimensionamento que estão disponíveis no programa desenvolvido são: análise e dimensionamento da estrutura segundo a "NBR 8800" no regime elasto-linear; análise e dimensionamento da estrutura segundo a "NBR 8800" levando em consideração os efeitos de não linearidade física do material com " E_t " obtido pela curva de resistência à compressão; análise e dimensionamento da estrutura segundo a "NBR 8800" levando em consideração os efeitos de não linearidade geométrica; e análise e dimensionamento segundo a "NBR 8800" levando em consideração os efeitos de não linearidade geométrica e física do material em conjunto.

6.2 Hipóteses assumidas no dimensionamento automatizado

As hipóteses assumidas no dimensionamento automatizado das estruturas metálicas treliçadas são apresentadas a seguir:

- os perfis utilizados no dimensionamento automático são laminados e considerados compactos;

- ao utilizar a hipótese anterior, assume-se que o problema de flambagem por flexão da barra aconteça antes que o problema de flambagem local da aba e mesa do perfil;

- é admitido que todos os perfis estejam contraventados fora do plano por vinculações adequadas;

- os carregamentos são aplicados apenas no plano da estrutura a ser analisada;

- todas as estruturas metálicas planas analisadas nesta parte do trabalho são treliçadas; como o programa desenvolvido analisa estruturas aperticadas, os esforços solicitantes obtidos nesta análise são: esforços normais, cortante e momento fletor; nas estruturas treliçadas com ações aplicadas nos nós, os esforços de compressão e tração são predominantes sobre os outros esforços solicitantes sendo desta forma os esforços de flexão e cortante desprezados no dimensionamento; assim, apenas as expressões de verificação de compressão e tração da norma brasileira foram programadas;

- os efeitos de não linearidade geométrica e física do material podem ser levados em consideração dependendo do tipo de dimensionamento adotado;

- as barras da estrutura são dimensionadas para os esforços máximos de tração e compressão encontrados nos diferentes tipos de carregamentos que estão atuando na estrutura;

- os parâmetros "K" de flambagem foram adotados iguais a 1,0 no dimensionamento à compressão tanto para a flambagem no plano da estrutura (K_x) quanto para a flambagem fora do plano da estrutura (K_y), conforme apresentado no item 6.6.2.1 deste trabalho; e,

- após do dimensionamento, a segurança da estrutura aos carregamentos que esta está sujeita é avaliada através de análise de instabilidade.

6.3 Estados Limites

É possível presumir a segurança de uma estrutura apenas se as ações e materiais são definidos e se certos estados limites que se desejam evitar são especificados. A definição destes estados limites permite escolher o método de cálculo que poderá ser usado para avaliar os efeitos "S" das ações "F" aplicadas e as resistências "R(f)" que são funções das propriedades dos materiais "f" utilizados.

Estados limites podem ser definidos como condições que quando ultrapassadas, a estrutura ou parte dela não mais satisfaz a finalidade para a qual foi projetada. Estes estados podem ser divididos em duas categorias:

- *estados limites últimos* - segundo definição da própria "NBR 8800", são estados que correspondem à ruína de toda a estrutura ou parte dela; e,
- *estados limites de utilização* - estados que pela ocorrência, repetição ou duração, provocam efeitos incompatíveis com as condições de uso da estrutura.

Os estados limites últimos da estrutura incluem: perda de equilíbrio de toda a estrutura (figura 6.1(a)); transformação da estrutura ou de uma das partes da estrutura em um mecanismo devido a formação de rótulas plásticas (figura 6.1(b)); ruptura de uma seção crítica da estrutura ou deformações excessivas antes que o mecanismo se forme na estrutura, devido a ductilidade do material (figura 6.1(c)) e instabilidade global ou local devido aos efeitos de segunda ordem (figura 6.1.(d)).

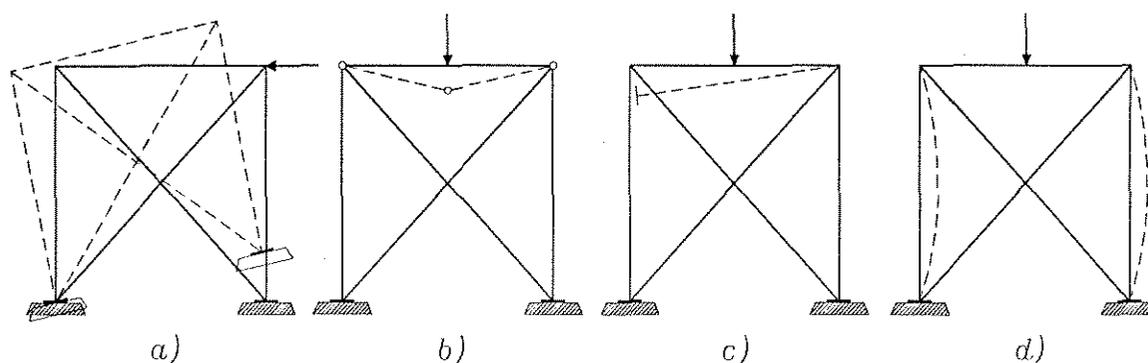


Figura 6.1 – Exemplos de estados limites últimos.

Os estados limites de utilização incluem: deformações da estrutura ou parte dela as quais poderão desfavoravelmente afetar a aparência e eficiência da

estrutura; flechas excessivas de vigas, vibrações devidas ao vento ou devidas a máquinas que podem fazer com que a estrutura se torne pouco utilizável e conduzir a desconforto, etc.

6.4 O Método Semi-Probabilístico

Uma vez estipulado o estado limite a não ser ultrapassado e definida as distribuições de probabilidade para as ações e resistência do material a ser utilizado, a condição de que " $p \leq p_u$ " implica que o efeito da ação nominal amplificado por um coeficiente de ponderação apropriado deve ser menor que o valor nominal da resistência do material reduzida também por um coeficiente de ponderação apropriado. De forma sucinta, a condição " $p \leq p_u$ " significa:

$$S (\gamma_f F_n) \leq R (f_n/\gamma_m) \quad (6.1)$$

sendo, " F_n " e " f_n " valor nominal de " F " (ação) e " R " (resistência), " γ_f " e " γ_m " são coeficientes de ponderação que dependem da função densidade de probabilidade de " F " e " R ", do nível de probabilidade para o qual os valores nominais " F_n " e " f_n " são definidos e de um nível de probabilidade aceitável.

Se existem duas ou mais ações nominais que atuam na estrutura, a condição " $p \leq p_u$ " implica que o efeito de uma ou mais combinações de valores nominais das ações devem ser menores que a resistência nominal do material utilizado dividida pelo coeficiente de ponderação:

$$S (\gamma_{f,1} F_1 + \gamma_{f,2} F_2 + \dots + \gamma_{f,i} F_i) \leq R (f_n/\gamma_m) \quad (6.2)$$

Assim, para se aplicar o método semi-probabilístico, torna-se necessário definir as solicitações de cálculo " F_d " formadas pelas combinação dos valores nominais das ações multiplicados pelos coeficientes de ponderação " $\gamma_{f,i}$ " e determinar a resistência de cálculo " f_d " obtida dividindo o valor da resistência nominal " f_n " por " γ_m " e então aplicar a inequação:

$$S (F_d) \leq R (f_d) \quad (6.3)$$

A equação de " F_d " (solicitações de cálculo) pode ser desenvolvida e geralmente expressa da seguinte forma:

$$F_d = \sum \gamma_g G + \gamma_{q,1} Q_1 + \sum_{j=2}^n (\gamma_{g,j} \Psi_j Q_j) \quad (6.4)$$

sendo, "G" as ações permanentes, " γ_g " o coeficiente de ponderação das ações permanentes, " Q_1 " a ação variável predominante para o efeito analisado, " γ_q " o coeficiente de ponderação das ações variáveis, " Q_j " demais ações variáveis e " ψ_j " fator de combinação das ações. A expressão acima somente não é válida para o caso de combinações excepcionais.

Os valores nominais das ações são fixados em normas e geralmente determinados com base na experiência. A norma brasileira que fixa os valores das ações é a NBR-6120 "Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações"⁶⁷. Já as ações exercidas pelo vento devem ser determinadas através da norma NBR-6123 "Forças devidas ao vento em edificações"⁶⁸. As resistências nominais são obtidas a partir do valor nominal das propriedades do material e das seções, em conjunto com uma fórmula deduzida racionalmente, baseada em modelo analítico e/ou experimental.

Os coeficientes de ponderação das ações são fatores que multiplicam as ações para considerar a incertezas a elas inerentes. Os valores dos coeficientes de ponderação das ações " γ_g " e " γ_q " dependem da forma da função densidade de probabilidade assumida para as ações, da possibilidade da ocorrência de ações simultâneas e do nível de probabilidade arbitrado. Os valores destes coeficientes são indicados na norma brasileira NB-8681 "Ações e Segurança nas Estruturas"⁶⁹ e também na "NBR 8800" no item 4.8.1.

Os fatores de combinação das ações " ψ_j " dependem da natureza da ação, da probabilidade das ações variáveis ocorrem simultaneamente com as outras ações, do tipo de estrutura e do estado limite a ser analisado. Estes coeficientes não foram ainda propriamente definidos e existe ainda a necessidade de se estudar e avaliar estes coeficientes mais racionalmente. Atualmente, as normas e especificações indicam os valores dos fatores de combinação definidos através de considerações empíricas e qualitativas.

Os coeficientes de ponderação das resistências são fatores que multiplicam as resistências nominais também para considerar as incertezas inerentes a elas. Os coeficientes de ponderação " γ_m " para os materiais dependem do tipo de colapso e do grau de conhecimento do fenômeno que está sendo analisado. Para

o caso dos estados limites últimos, muitas especificações e normas fornecem valores para " γ_m " que dependem do tipo de estado limite analisado e do tipo de método de cálculo. Assim, para diferentes tipos verificações em um elemento estrutural, diferentes valores para " γ_m " são adotados.

É importante ressaltar que na análise estrutural admitindo o comportamento do material elasto-linear, a superposição dos efeitos é válida, ou seja, é possível obter a solicitação ou deslocamento em uma determinada posição da estrutura através da soma dos efeitos produzidos pelos vários tipos de ações consideradas separadamente. Entretanto, a superposição dos efeitos não é mais válida quando não mais se considera o comportamento de uma estrutura como linear. Desta forma, quando se considera os efeitos de não linearidade geométrica e física do material, torna-se necessário definir as ações atuantes na estrutura e aplicá-las na estrutura de forma já combinada. É importante mencionar que quando se realiza análise considerando os efeitos de não linearidade geométrica, a norma NB-8681 "Ações e Segurança nas Estruturas"⁶⁹ no item 5.1.2.1 permite que o coeficiente de ponderação " γ_f " seja desdobrados em seus coeficientes parciais. Entretanto, os valores de " γ_f " foram adotados neste trabalho conservadoramente (a favor da segurança) iguais aos valores recomendados pela "NBR 8800".

6.5 Análise Estrutural - Determinação dos Esforços de Cálculo

Os esforços solicitantes na estrutura são determinados através de análise estrutural para as combinações das ações que agem na estrutura. Como o programa desenvolvido consegue levar em consideração os efeitos de não linearidade geométrica e física do material, os esforços solicitantes serão afetados por estes efeitos. Para estudar a influência destes efeitos no dimensionamento de uma estrutura, quatro opções de análise estrutural foram desenvolvidas:

- a) análise estrutural elasto-linear ;
- b) análise estrutural levando em consideração os efeitos de não linearidade física do material;
- c) análise estrutural levando em consideração os efeitos de não linearidade geométrica; e,

d) análise estrutural levando em consideração os efeitos simultâneos de não linearidade geométrica e física do material.

Os tipos de análise estrutural citados acima foram bastante descritos nos capítulos anteriores e desta forma não serão detalhados nesta parte do trabalho. É importante ressaltar que a consideração dos efeitos de não linearidade geométrica e física modificam os esforços solicitantes e os deslocamentos encontrados na análise de uma estrutura reticulada.

6.6 Dimensionamento das Barras

6.6.1 Barras Tracionadas

6.6.1.1 Área Bruta

A bruta " A_g " de uma seção transversal qualquer de uma barra deve ser calculada pela soma dos produtos da espessura pela largura bruta de cada elemento.

No dimensionamento de uma peça estrutural, as propriedades geométricas de um perfil são utilizadas para verificar se esta peça consegue suportar os esforços solicitantes impostos. Para que o programa pudesse obter as propriedades geométricas dos perfis e desta forma realizar o dimensionamento automatizado da estrutura, houve a necessidade de se criar banco de dados contendo estas informações. Como a proposta deste trabalho é o de dimensionamento de estruturas metálicas treliçadas planas, dois tipos de bancos de dados de perfis foram criados: perfis "dupla cantoneira em abas iguais" e perfis "C". Através destes bancos de dados, o programa é capaz de obter as características geométricas dos perfis que irão ser verificados aos esforços de tração e compressão.

6.6.1.2 Área Líquida

A área líquida " A_n " de uma seção transversal qualquer de uma barra deve ser calculada substituindo a largura bruta pela largura efetiva. A largura efetiva está relacionada com a presença ou não de furos na seção transversal da barra. Devido a possibilidade de se confeccionar uma ligação através de parafusos ou soldas, estes dois tipos de dispositivos de ligação podem ser utilizados no programa desenvolvido. Como existem várias formas de se dispor os parafusos

na seção transversal de uma barra, neste presente trabalho foram adotados os seguintes critérios para o cálculo automático da área líquida:

a) *Ligações parafusadas*

Conforme exigência da "NBR 8800", na determinação da área líquida em ligações parafusadas, a largura dos furos deve ser considerada 2,0 mm maior que a dimensão nominal do furo fornecida no item 7.3.4 da norma. Considerou-se furos padrão nas ligações parafusadas conforme recomendação de norma no item 7.3.4.2. Assim, a área líquida pode ser calculada da seguinte forma:

$$A_n = A_g - N^{\circ} \text{ de parafusos} \cdot (d_n + 2 \text{ mm}) \cdot t \quad (6.5)$$

sendo, " d_n " o diâmetro nominal do furo igual ao diâmetro do furo acrescido 1,5mm conforme designação da norma "NBR 8800" na tabela 16 e " t " a espessura da chapa onde o furo foi realizado.

O diâmetro do parafuso e o número de furos dependem do tipo de perfil e das dimensões da aba ou mesa do perfil utilizado. Para que o dimensionamento pudesse ser feito automaticamente, padronizou-se um tipo de ligação parafusada para os "perfis cantoneira de abas iguais" e outro para os perfis "C". Estes tipos padronizados de ligação são apresentados a seguir.

a.1) Perfis Cantoneira em Abas Iguais

Considerou-se que os perfis cantoneira apresentem apenas um furo na seção transversal da barra conforme mostrado na figura 6.2. A distância mínima entre o furo e a borda da cantoneira " d_1 " é estabelecida na norma brasileira na tabela 18. O espaçamento mínimo entre dois furos consecutivos não deve ser menor que três vezes o diâmetro do furo conforme designação da norma.

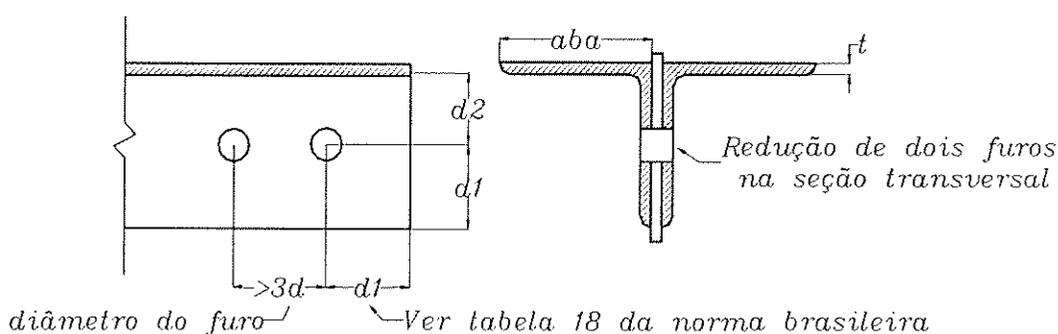


Figura 6.2 – Ligação parafusada padrão adotada para perfis dupla cantoneira.

Admitindo que as ligações nas cantoneiras sequem os critérios estabelecidos na ligação padrão mostrada na figura 6.2, a área líquida para a seção transversal de um perfil em dupla cantoneira de abas iguais pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$A_n = A_g - 2 \cdot (d_n + 2 \text{ mm}) \cdot t \quad (6.6)$$

Estabeleceu-se que o diâmetro nominal dos furos " d_n " a serem adotados dependem da dimensão da aba da cantoneira. Assim, o diâmetro nominal dos furos nas ligações são determinados conforme mostrado na tabela 6.1. É importante lembrar que ao diâmetro final do furo deve ser somado a quantia de 3,5mm conforme citado no item 6.6.1.1 deste trabalho. A espessura do furo (t) é dado pela própria espessura da cantoneira que está sendo verificada.

Tabela 6.1 - Diâmetro do parafuso em função da aba da cantoneira.

Aba da Cantoneira	Diâmetro do Parafuso
$\leq 4,40\text{cm}$	1/2"
$4,40\text{cm} < \text{aba} \leq 6,40\text{cm}$	5/8"
$6,40\text{cm} < \text{aba} \leq 7,60\text{cm}$	3/4"
$> 7,60\text{cm}$	7/8"

a.2) Perfis "C"

Considerou-se que os perfis "C" apresentem dois furos na seção transversal da barra conforme mostrado na figura 6.3. A distância mínima entre o furo e a borda do perfil "C" (d_1) é estabelecida na norma brasileira na tabela 18. O valor mínimo para a distância " d_2 " deve ser tal que permita ser possível parafusar, lembrando que a porca tem diâmetro maior que o mesmo.

O espaçamento mínimo entre dois furos consecutivos não deve ser menor que três vezes o diâmetro do furo conforme designação do item 7.3.6 da norma. As distâncias " d_3 " e " d_4 " são fornecidas nas tabelas de dimensões para desenho de detalhe de estruturas para perfis "C".

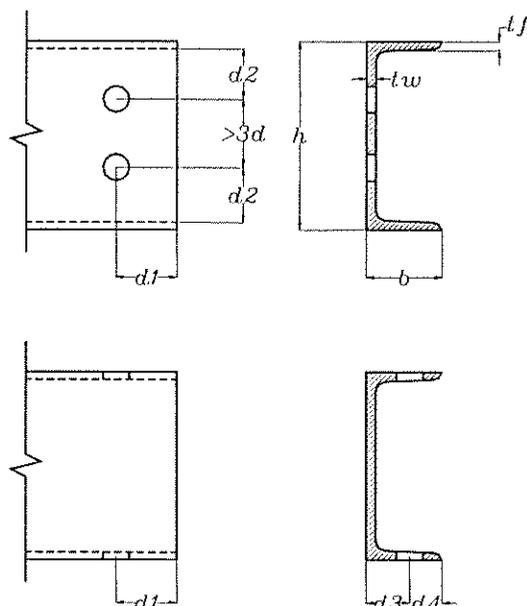


Figura 6.3 - Ligação parafusada padrão adotada para perfis "C".

Admitindo que as ligações nos perfis "C" sequeem os critérios estabelecidos na ligação padrão mostrada na figura 6.3, a área líquida para a seção transversal de um perfil "C" pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$A_n = A_g - 2 \cdot (d_n + 2 \text{ mm}) \cdot t \quad (6.7)$$

Novamente, estabeleceu-se que o diâmetro nominal dos furos a serem adotados dependem da dimensão da mesa do perfil "C". Assim, o diâmetro dos parafusos são determinados conforme mostrado na tabela 6.2. É importante lembrar que ao diâmetro final do furo deve ser somado a quantia de 3,5mm conforme citado no item 6.6.1.1 deste trabalho.

Tabela 6.2 - Diâmetro do parafuso em função da alma do perfil "C".

Alma do Perfil "C"	Diâmetro do Parafuso
7,62cm ≤ alma < 10,16cm	1/2"
10,16cm ≤ alma < 15,24cm	5/8"
15,24cm ≤ alma < 25,40cm	3/4"
25,40cm ≤ alma < 30,48cm	7/8"
30,48cm ≤ alma ≤ 38,10cm	1"

Na determinação da espessura do furo "t", existem dois casos a considerar: primeiro quando a ligação é feita na alma e segundo quando a ligação é feita na mesa. Para simplificar o problema, admitiu-se que a espessura do furo "t" é

fornecida apenas pela espessura média da mesa " t_f " do perfil "C" pois esta é sempre superior a espessura da alma " t_w ". Este fato acontece para o banco de dados do perfil "C" cadastrado. Desta forma, quando o furo está localizado na alma do perfil "C", a redução de área do perfil será sempre maior do que se admitisse a espessura da própria alma.

b) Ligações Soldadas

Como nas ligações soldadas não há furos, então a área líquida é igual a área bruta ($A_n = A_g$).

6.6.1.3 Área Líquida efetiva

Quando uma solicitação de tração for transmitida a uma barra diretamente para cada um dos elementos de sua seção por solda ou parafusos, tem-se que:

$$A_e = A_n \quad (6.8)$$

Por outro lado, quando a transmissão for feita por alguns elementos da seção, a área líquida efetiva deve ser calculada conforme designação da "NBR 8800":

$$A_e = C_t A_n \quad (6.9)$$

sendo, " C_t " um coeficiente de redução.

O coeficiente de redução " C_t " é função do tipo de perfil utilizado, da posição onde é feita a ligação e do número de parafusos por linha de furação na direção da solicitação. Para o caso de ligações soldadas, admitiu-se o caso (d) do item 5.1.1.3 da norma "NBR 8800", onde $C_t = 1,0$. Para o caso de ligações parafusadas com perfis "dupla cantoneira de abas iguais" e perfis "C", admitiu-se o caso (c) do item 5.1.1.3 da norma "NBR 8800", onde $C_t = 0,75$. Estes casos foram admitidos para que se pudesse padronizar os tipos de ligações utilizadas no dimensionamento automatizado da estrutura.

6.6.1.4 Resistência de Cálculo à Tração

Segundo a "NBR 8800", a resistência de cálculo " $\phi_t N_n$ " a ser usada no dimensionamento é o menor dos valores obtidos de acordo com os estados limites de escoamento da seção bruta e ruptura da seção líquida efetiva:

a) Para o estado limite de escoamento da seção bruta:

$$\phi_t = 0,90$$

$$N_n = A_g f_y$$

b) Para o estado limite de ruptura da seção líquida efetiva:

$$\phi_t = 0,75$$

$$N_n = A_e f_u$$

A fórmulas apresentadas nos itens (a) e (b) foram programadas para levar em consideração os estados limites citados anteriormente.

6.6.1.5 Índice de Esbeltez Limite à Tração

A norma brasileira "NBR 8800" estabelece um valor limite para o índice de esbeltez "L/r" para barras tracionadas de 240. Este valor foi adotado como valor padrão no programa desenvolvido. Entretanto, este valor limite pode ser alterado no programa de acordo com a conveniência do usuário.

6.6.2 Barras Comprimidas

O dimensionamento à compressão adotado no presente trabalho está baseado na hipótese de que as barras são prismáticas e sujeitas à compressão provocada por solicitações agindo segundo o eixo que passa pelos centros de gravidade da seção transversal. A flambagem por flexo-torção não será considerada no presente trabalho pois o programa desenvolvido não é capaz de considerar os efeitos de torção e flexo-torção na análise estrutural.

6.6.2.1 Comprimento Efetivo de Flambagem

Uma barra comprimida em uma estrutura reticulada pode perder estabilidade em qualquer direção. As barras tendem a perder estabilidade na direção do eixo de menor inércia da barra, a não ser que dispositivos sejam colocados para impedir que as barras flambem nesta direção. Geralmente, as barras tendem a flambar na direção dos eixos principais de inércia. Nas armações (estruturas treliçadas), existem dois sentidos de perda de estabilidade das barras que devem ser analisados: instabilidade no plano da armação e instabilidade perpendicular ao plano da armação. Para o caso da instabilidade no plano da armação, as barras comprimidas podem se deformar entre os nós da armação conforme mostrado na figura 6.4(a). Por outro lado, a deformação no plano

perpendicular ao plano da armação pode acontecer com grandes comprimentos de flambagem conforme mostrado na figura 6.4(b) e (d). Para evitar grandes comprimentos de flambagem, utiliza-se o artifício de travar os nós das barras em determinadas posições na direção fora do plano da armação através de peças estruturais denominadas de contraventamentos. Ao se utilizar estes elementos, os comprimentos de flambagem fora do plano ficam reduzidos conforme mostrado na figura 6.4(c) e (e). A distância recomendada para a colocação destes contraventamentos depende da relação entre " r_x " e " r_y " da seção transversal utilizada. Para o caso de perfis "dupla cantoneira de abas iguais" e perfis "C", estas relações são apresentadas na tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Relações entre " r_x " e " r_y " para os perfis cadastrados.

Tipo de perfil adotado	Relação entre " r_x " e " r_y "
perfis dupla cantoneira de abas iguais	$r_y \cong 1,5r_x$
perfis "C"	$2r_x \leq r_y \leq 5r_x$

Assim, para o caso de armações formadas por perfis dupla cantoneira em abas iguais, os contraventamentos são geralmente colocados entre duas barras consecutivas. Para o caso de armações com perfis "C", os contraventamentos são geralmente colocados entre três barras consecutivas. Estes valores podem ser alterados dependendo do tipo de arranjo estrutural utilizado.

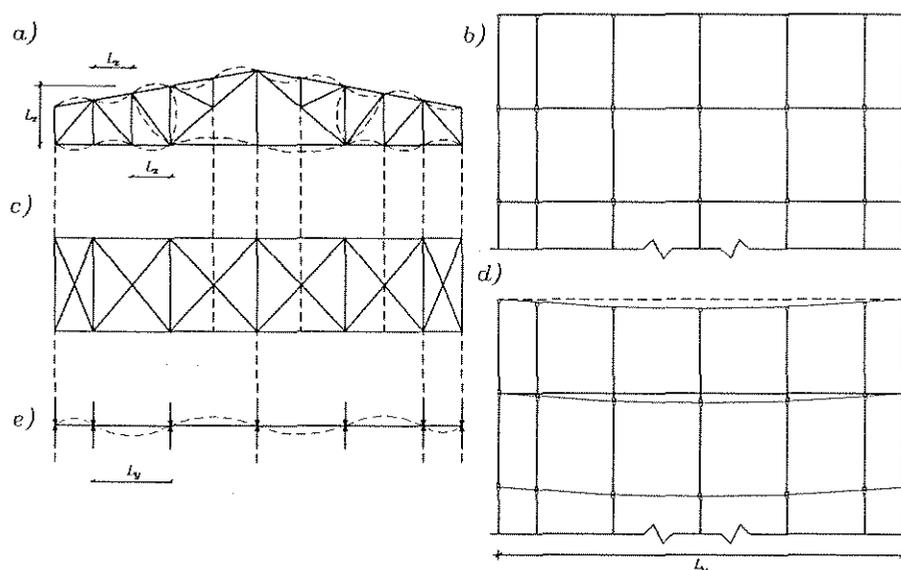
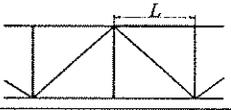
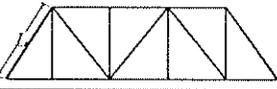


Figura 6.4 – Comprimentos de flambagem das estruturas reticuladas treliçadas.

No programa desenvolvido, o comprimento de flambagem das barras no plano da estrutura é igual a distância entre os nós que formam as barras. Por outro lado, como o programa apenas consegue analisar estruturas no plano, os comprimentos de flambagem fora do plano devem ser informados pelo usuário. Assim, desenvolveu-se no arquivo de entrada da estrutura (onde são informados a geometria e carregamentos aplicados) um bloco no qual o usuário informa ao programa quais os comprimentos de flambagem das barras fora do plano da estrutura. Este bloco é opcional e caso o usuário não informe os comprimentos de flambagem fora do plano, o programa assume que estes comprimentos são iguais aos comprimentos de flambagem no plano.

Para se determinar o comprimento efetivo de flambagem, é necessário determinar o parâmetro de flambagem "K" da barra. Estes parâmetros podem ser determinados por análise de estabilidade, ou segundo as recomendações do item 4.9.2 e dos Anexos "H" e "I" da norma "NBR 8800".

	CASO	ELEMENTO CONSIDERADO	K
Flambagem no plano da treliça	1		corda 1,0
	2		diagonal extrema 1,0
	3		montante ou diagonal 1,0
Flambagem fora do plano da treliça	4		corda com todos os nós contidos fora do plano da treliça 1,0
	5		cordas contínuas onde A e B são contidos fora do plano $(F_1 > F_2)$ $0,75 + 0,25 \frac{F_2}{F_1}$
	6		montante ou diagonal 1,0

Obs.: Para o caso 5, o valor de K foi adotado igual a 1,0

Figura 6.5 – Parâmetros de flambagem para as estruturas treliçadas.

Para os quatro tipos de dimensionamentos desenvolvidos neste trabalho, os valores de "K" adotados para barras foram obtidos no item "H-6" do Anexo "H" da norma. Estes casos são mostrados na figura 6.5.

6.6.2.2 Resistência de Cálculo - Flambagem por Flexão

Segundo a "NBR 8800", a resistência de cálculo de barras axialmente comprimidas sujeitas à flambagem por flexão é dada por " $\phi_c N_n$ " sendo $\phi_c = 0,90$ e a resistência nominal " N_n " é igual a:

$$N_n = \rho Q N_y = \rho Q A_g f_y$$

Os valores aproximados de " ρ " são dados pelas fórmulas a seguir:

$$\rho = 1,0 \quad \text{para } 0 \leq \bar{\lambda} < 0,20$$

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} \quad \text{para } \bar{\lambda} \geq 0,20$$

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{KL}{r} \cdot \sqrt{\frac{Q f_y}{E}}$$

Os valores de " α " dependem do tipo de seção e eixos de flambagem no qual esta pode acontecer. Os valores de alfa em função do tipo seção e eixo de flambagem são apresentados na tabela 3 da "NBR 8800". Para o caso de perfis dupla cantoneira e perfis "C", tem-se que $\alpha = 0,384$ (curva c) para ambos os eixos de flexão. É importante mencionar que no dimensionamento das estruturas treliçadas, utilizou-se a curva "c" da norma "NBR 8800" para se fazer a redução na capacidade portante da barra (obtenção do módulo tangente), de acordo com a equação 5.46 apresentada no capítulo 5.

O coeficiente "Q" leva em consideração os efeitos de flambagem local da peça estrutural. Considerou-se que este coeficiente seja igual a 1,0 admitindo que todos os elementos apresentem relação "b/t" iguais ou inferiores às dadas na tabela 1 para as seções classe 3 (solicitadas por força normal). As fórmulas citadas acima foram programadas e desta forma, as verificações dos perfis cadastrados nos bancos de dados foram possíveis de serem feitas automaticamente.

6.6.2.3 Índice de Esbeltez Limite à Compressão

A norma brasileira "NBR 8800" estabelece um valor limite para o índice de esbeltez " KL/r " para barras comprimidas de 200. Este valor foi adotado como valor padrão no programa desenvolvido. Entretanto, este valor limite pode ser alterado para menos no programa de acordo com a conveniência do usuário.

6.7 Banco de Dados dos Perfis

Dois tipos de bancos de dados de perfis foram montados para que o dimensionamento pudesse ser feito automaticamente: banco de dados de perfis "dupla cantoneira de abas iguais" e perfis "C". Nestes bancos de dados estão contidas todas as informações geométricas necessárias ao dimensionamento de uma peça estrutural. Estas propriedades geométricas são: dimensão da aba, dimensão da mesa, espessura da aba, espessura da mesa, peso do perfil, área do perfil, momento de inércia em relação ao eixo x-x, momento de inércia em relação ao eixo y-y, raio de giração em relação ao eixo x-x, raio de giração em relação ao eixo y-y, posição do centro de gravidade do perfil, etc. Os eixos x-x e y-y são mostrados na figura 6.6.

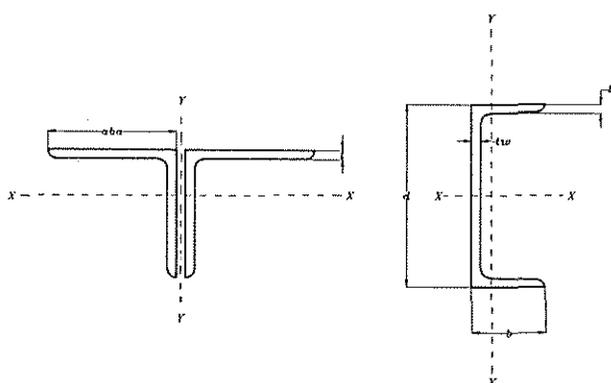


Figura 6.6 – Perfis utilizados no dimensionamento automatizado.

6.8 Dimensionamento automatizado dos Perfis Metálicos

O dimensionamento se inicia com a análise estrutural para os vários tipos de carregamentos a que a estrutura está sujeita. A análise estrutural pode ser feita considerando os efeitos de não linearidade geométrica e física do material conforme citado no item 6.5 deste trabalho. Os esforços atuantes nas barras para cada carregamento são armazenados (gravados) em arquivos de saída para que

possam ser acessados após a análise estrutural da estrutura. Com os esforços atuantes nas barras para os vários carregamentos, torna-se possível determinar o maior esforço de tração e compressão que atuam na barra. Para tanto, desenvolveu-se um procedimento no programa capaz de avaliar o maior esforço de tração e compressão em uma determinada barra da estrutura para os vários carregamentos que atuam na estrutura. Como os carregamentos aplicados na estrutura já são os carregamentos combinados, os esforços obtidos são os de cálculo. Os máximos esforços de cálculo de compressão são armazenados em dois vetores: um vetor que armazena os esforços de tração e outro de compressão. Estes vetores serão utilizados no dimensionamento da estrutura.

Com os esforços de cálculo determinados, o programa inicia o dimensionamento determinando a área necessária para suportar o esforço de tração que atua na barra a ser dimensionada. O cálculo desta área é feito admitindo que não há furos na seção transversal da barra. Assim, a área de seção transversal necessária para suportar o esforço de tração é dada pela seguinte expressão:

$$\text{área} = \frac{N_{dt}}{\phi_t f_y} \quad (6.10)$$

De posse desta área, a lista de perfis é acessada seqüencialmente até que a área de um perfil no banco de dados seja igual ou superior ao da fórmula 6.7. As propriedades geométricas deste perfil são lidas e então a verificação à tração é iniciada. No início, torna-se necessário determinar a área líquida do perfil. Isto é feito verificando se a ligação no perfil é parafusada ou soldada. Para o caso de ligação soldada, a área bruta é igual a área líquida. No caso de ligação parafusada, torna-se necessário calcular a área líquida do perfil. Como a ligação nos dois tipos de perfil foi padronizada, já se sabe previamente o número de furos que a seção transversal apresentará. Desta forma, a redução da área é feita automaticamente. O diâmetro do furo é escolhido de acordo com a dimensão da aba ou alma do perfil que está sendo dimensionado. O próximo passo é determinar a área líquida efetiva. No caso de ligação soldada, $C_t = 1,0$. Para o caso de ligação parafusada, $C_t = 0,75$ (caso mais desfavorável). Assim, a área

líquida pode ser determinada automaticamente pelo programa. De posse da área bruta e da área líquida efetiva, três verificações devem ser feitas: verificação do limite de escoamento da seção bruta, verificação do limite de ruptura da seção líquida efetiva e verificação do limite de esbeltez da barra. Caso o perfil escolhido não passe em uma destas verificações, novo perfil é escolhido no banco de dados. Esta escolha é feita seqüencialmente, ou seja, escolhe-se um perfil que esteja na lista abaixo do perfil determinado anteriormente. Novamente, calcula-se a área líquida e área líquida efetiva do perfil. Este processo é repetido até que o perfil passe nas três verificações citadas acima.

O perfil que passou nas verificações para o dimensionamento à tração, será utilizado para se fazer a verificação à compressão. Para se calcular a resistência deste perfil a compressão, torna-se necessário determinar o parâmetro " ρ ". Fazendo uso das propriedades geométricas do perfil e dos comprimentos de flambagem no plano e fora do plano informados no arquivo de entrada, é possível avaliar o valor dos parâmetros " $\bar{\lambda}_x$ " e " $\bar{\lambda}_y$ " que serão utilizados para calcular " ρ_x " e " ρ_y ". A verificação à compressão é feita com o menor dos valores determinados anteriormente. Caso o perfil não passe na verificação, novo perfil é escolhido no banco de dados. Novamente, calcula-se os valores para " ρ_x " e " ρ_y ". Nova verificação é feita. Este processo é repetido até que o perfil passe nesta verificação. Finalmente, faz-se a verificação do limite de esbeltez à compressão da barra. Caso o perfil não passe nesta verificação, novo perfil é escolhido até que este consiga atender os requisitos de esbeltez mínima para a peça estrutural. Terminada esta verificação, o perfil é considerado dimensionado. O processo descrito acima é repetido sistematicamente para todas as barras da estrutura para que estas possam ser dimensionadas.

Um procedimento foi desenvolvido para agrupar os perfis dimensionados. Este procedimento é utilizado após a estrutura ser completamente dimensionada. O grupo de cada barra da estrutura é informado no bloco de entrada das designações das barras. Uma linha neste bloco deve conter as seguintes informações: barra, nó inicial da barra, nó final da barra, grupo que a barra pertence. Esta última informação é opcional. Caso nenhum grupo seja definido,

os perfis não serão agrupados, e os perfis mostrados ao final do dimensionamento serão os próprios perfis encontrados no dimensionamento de cada barra. Caso sejam definidos grupos, o programa determina e adota automaticamente o maior perfil dimensionado nas barras que formam este grupo. Desta forma, os perfis pertencentes a um grupo serão formados pelo mesmo perfil. Após o agrupamento dos perfis da estrutura ser realizado, a estrutura é considerada dimensionada. É importante citar que o usuário deve definir a simetria da estrutura caso ela exista. Desta forma, barras simétricas apresentarão o mesmo perfil após o dimensionamento.

Com os novos perfis obtidos no dimensionamento, nova análise estrutural é realizada e novos esforços de cálculos são determinados. Com estes novos esforços, a estrutura é dimensionada novamente. Isto é feito até que os perfis obtidos no dimensionamento anterior sejam iguais aos perfis obtidos no dimensionamento atual. Quando isto acontecer, diz-se que o processo de dimensionamento convergiu para uma lista de perfis. Esta repetição da análise estrutural e posteriormente dimensionamento não é feita normalmente na prática quando um estrutura é dimensionada manualmente. Entretanto, ao se mudar os perfis em uma estrutura, o comportamento estrutural desta se modifica pois novas propriedades geométricas são utilizadas na análise. Desta forma, os esforços que agem nas barras também se modificarão. Assim, pode acontecer de um perfil dimensionado na análise anterior não conseguir suportar os esforços solicitantes obtidos na análise subsequente. Por este motivo, há a necessidade de fazer uma nova verificação nos perfis dimensionados. É importante ressaltar que os efeitos de não linearidade geométrica e física do material contribuem para que os perfis se modifiquem durante o dimensionamento. Todo o procedimento descrito anteriormente é feito considerando os valores de "K" iguais aos estabelecidos no item H-6 do anexo H da norma "NBR 8800". Após a estrutura ter sido dimensionada, a segurança desta para o carregamentos a qual está sujeita é verificada através de análise de instabilidade. Este procedimento é realizado para verificar se após o dimensionamento, a estrutura está segura ao problema de instabilidade estrutural.

6.9 Exemplos Numéricos

6.9.1 Exemplo Numérico 1 – Treliza Metálica

O primeiro teste de dimensionamento foi realizado na estrutura treliçada mostrada na figura 6.7. Todas as barras da estrutura são compostas de perfis dupla cantoneira de abas iguais. As ligações entre as barras da estrutura são feitas utilizando chapas de ligação e soldas. Neste exemplo, as ações mostradas na tabela 6.4 foram adotadas no dimensionamento. O principal objetivo deste exemplo foi verificar se os efeitos de não linearidade geométrica e física do material podiam modificar os perfis obtidos no dimensionamento em regime elasto-linear. É importante ressaltar que o dimensionamento em regime elasto-linear é utilizado pela maioria dos projetistas que dimensionam estruturas metálicas. Além do mais, a maioria dos programas de dimensionamento que estão disponíveis no mercado fazem o dimensionamento não considerando os efeitos mencionados anteriormente.

Tabela 6.4 – Combinação das ações aplicadas na estrutura treliçada.

Combinação das Ações para a Estrutura treliçada							
Combinação	P_1 (kN)	P_2 (kN)	P_3 (kN)	P_4 (kN)	P_5 (kN)	P_6 (kN)	P_7 (kN)
Comb. I	-10,60	-10,60	-10,60	-10,60	-10,60	-10,60	-10,60
Comb. II	10,60	10,60	10,60	10,60	10,60	10,60	10,60

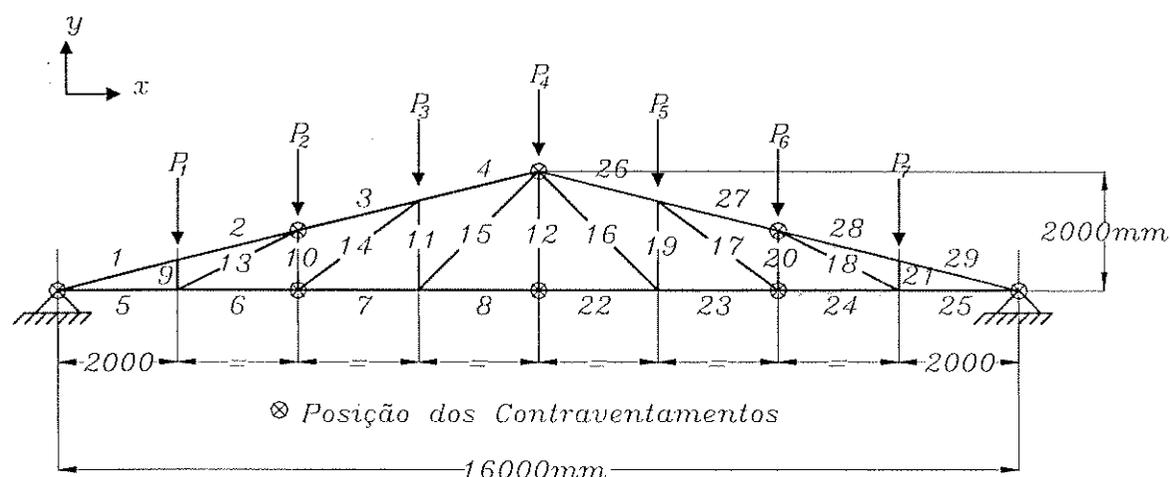


Figura 6.7 – Treliza metálica composta por perfis dupla cantoneira de abas iguais.

Os resultados obtidos para os quatro tipos de dimensionamento disponíveis no programa são apresentados nas tabelas do dimensionamento emitidas pelo programa. Estas tabelas são apresentadas no final deste exemplo.

Neste exemplo, verificou-se que quando o dimensionamento da estrutura foi feito considerando apenas o efeito de não linearidade física do material, os perfis na estrutura não sofreram modificação em relação ao dimensionamento elasto-linear. Por outro lado, quando o dimensionamento foi feito considerando o efeito de não linearidade geométrica, as barras 10 (e 20, estrutura simétrica) da estrutura se modificaram em relação ao dimensionamento elasto-linear. No dimensionamento elasto-linear, um perfil dupla cantoneira de 2.24x2.24x0.32 era capaz de suportar os esforços solicitantes. Devido ao efeito de não linearidade geométrica, os esforços na estrutura se modificaram, e a barra teve que ser alterada (2.5x2.5x0.32) para poder suportar os novos esforços. O mesmo pode ser dito quando o dimensionamento foi feito considerando os efeitos de não linearidade física e geométrica do material atuando em conjunto. As modificações nos perfis neste tipo de dimensionamento foram maiores que no caso anterior. Além da barra 10 da estrutura, as barras 1 (29), 2 (28) e 8 (22) sofreram modificações que foram produzidas devido aos efeitos considerados, acarretando na necessidade de perfis com novas propriedades geométricas para poder suportar os esforços que atuam na estrutura.

Baseado nestas observações, constata-se que os efeitos de não linearidade física do material e geométrica podem alterar os perfis que compõem uma estrutura. É importante ressaltar que a comparação está sendo feita tendo como referência os perfis obtidos no dimensionamento elasto-linear. Para verificar o nível de segurança que a estrutura apresenta após o dimensionamento, as cargas críticas de instabilidade elástica e inelástica da estrutura para os dois tipos de combinações das ações e para os quatro tipos de dimensionamentos foram determinadas e são apresentadas na tabela 6.5. A terceira e quarta linha da tabela indicam o tipo de análise de instabilidade que foi realizado: elástica e inelástica, receptivamente. Estas análises foram realizadas para todos os tipos de dimensionamento que estão disponíveis no programa. Estes tipos de dimensionamento são indicados na terceira, quarta, quinta e sexta colunas. Como a estrutura está sujeita a dois tipos de carregamentos, cada dimensionamento apresentará duas cargas críticas, uma para cada carregamento. Passando para a análise dos resultados obtidos, observa-se que os parâmetros de instabilidade elásticos encontrados são sempre maiores que 1,0. Isto indica que a estrutura

está segura quanto ao problema de instabilidade elástica para os carregamentos a qual foi dimensionada. Para o caso de instabilidade inelástica, em alguns casos a estrutura atingiu a instabilidade e em outros, a análise de instabilidade foi interrompida porque alguma das barras da estrutura se plastificou completamente, indicando a formação de uma rótula plástica na estrutura. Estes casos são indicados na tabela por um asterisco. É importante ressaltar que em todos os casos de plastificação da seção transversal da barra, a carga de plastificação (assim definida) foi maior que 1,0. Era esperado que isto acontecesse pois a barra é dimensionada pelas equações de iteração da norma, a qual estabelece que a ação de cálculo dividida pela resistência de cálculo não seja maior que 1,0. O fato da barra se plastificar com um valor maior do que 1,0 (isto indica que o carregamento deve ser majorado de um valor maior do que a estrutura está sujeita) indica que a barra está com folga de resistência. Constata-se também que a carga de instabilidade inelástica é inferior a carga de instabilidade elástica. O efeito de não linearidade física do material reduz a capacidade portante da estrutura, diminuindo assim o valor da carga crítica. Este fato já foi explicado nos exemplos analisados no capítulo 5 deste trabalho. Os parâmetros de instabilidade obtidos em cada tipo de dimensionamento não devem ser comparados entre si, pois a composição da estrutura é diferente para cada tipo de dimensionamento.

Tabela 6.5 – Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada

Parâmetros de Instabilidade obtidos após o dimensionamento da estrutura					
Tipo de Análise	Combinação	Tipos de Dimensionamento			
		1ª Ordem E - Cte	1ª Ordem E - var	2ª Ordem E - Cte	2ª Ordem E - var
Instabilidade Elástica (W_{cr})	Comb. I	3,505	3,505	3,438	4,121
	Comb. II	4,294	4,294	4,294	4,302
Instabilidade Inelástica (W_{cr})	Comb. I	1,936	1,936	1,866	2,258
	Comb. II	*3,021	*3,021	*3,101	*3,346

* A análise de instabilidade se encerra por plastificação de alguma barra.

Os exemplos que serão analisados a seguir foram desenvolvidos de tal forma que as estruturas pudessem ser executadas, admitindo que estas fossem casos reais de projetos a serem desenvolvidos. Para tanto, definiu-se uma tipologia a ser adotada para cada estrutura e arbitrou-se um local em que estas seriam construídas. Desta forma, as ações puderam ser definidas e calculadas através de um procedimento de cálculo.

TABELA DO DIMENSIONAMENTO AUTOMATIZADO - ANÁLISE EM PRIMEIRA-ORDEM ELASTO-LINEAR

Bar.	Grup.	Nd(-)	Nd(+)	compr.	Perfil Utilizado	Ag	An	Ae	Rd(+)	Kx	Lx	Ky	Ly	KxLx/rx	KyLy/ry	Rox	Roy	Rd(-)
1	1	151,19	-151,19	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
2	2	150,96	-150,96	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
3	3	131,13	-131,13	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
4	4	109,08	-109,08	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
5	5	30,33	-30,33	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
6	6	10,99	-10,99	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
7	7	10,34	-10,34	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
8	8	31,29	-31,29	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
9	9	9,80	-9,80	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
10	10	15,90	-15,90	100,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	84,75	0,27	0,58	15,99
11	11	20,94	-20,94	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
12	12	0,05	-0,05	200,00	3.8 x 3.8 x .32	4,64	4,64	4,64	104,40	1,0	200,00	1,0	200,00	169,49	109,89	0,16	0,37	19,44
13	13	21,60	-21,60	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
14	14	26,59	-26,59	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
15	15	29,58	-29,58	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
16	15	29,58	-29,58	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
17	14	26,59	-26,59	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
18	13	21,60	-21,60	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
19	11	20,94	-20,94	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
20	10	15,90	-15,90	100,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	84,75	0,27	0,58	15,99
21	9	9,80	-9,80	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
22	8	31,29	-31,29	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
23	7	10,34	-10,34	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
24	6	10,99	-10,99	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
25	5	30,33	-30,33	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
26	4	109,08	-109,08	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
27	3	131,13	-131,13	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
28	2	150,96	-150,96	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
29	1	151,19	-151,19	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30

TABELA DO DIMENSIONAMENTO AUTOMATIZADO -ANÁLISE EM PRIMEIRA ORDEM - E - VARIÁVEL																		
Bar.	Grup.	Nd(-)	Nd(+)	compr.	Perfil Utilizado	Ag	An	Ae	Rd(+)	Kx	Lx	Ky	Ly	KxLx/rx	KyLy/ry	Rox	Roy	Rd(-)
1	1	151,25	-151,25	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
2	2	151,04	-151,04	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
3	3	131,14	-131,14	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
4	4	109,08	-109,08	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
5	5	30,38	-30,38	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
6	6	10,99	-10,99	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
7	7	10,35	-10,35	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
8	8	31,33	-31,33	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
9	9	9,86	-9,86	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
10	10	15,89	-15,89	100,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	84,75	0,27	0,58	15,99
11	11	20,97	-20,97	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
12	12	0,06	-0,06	200,00	3.8 x 3.8 x .32	4,64	4,64	4,64	104,40	1,0	200,00	1,0	200,00	169,49	109,89	0,16	0,37	19,44
13	13	21,66	-21,66	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
14	14	26,60	-26,60	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
15	15	29,62	-29,62	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
16	15	29,62	-29,62	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
17	14	26,60	-26,60	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
18	13	21,66	-21,66	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
19	11	20,97	-20,97	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
20	10	15,89	-15,89	100,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	84,75	0,27	0,58	15,99
21	9	9,86	-9,86	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
22	8	31,33	-31,33	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
23	7	10,35	-10,35	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
24	6	10,99	-10,99	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
25	5	30,38	-30,38	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
26	4	109,08	-109,08	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
27	3	131,14	-131,14	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
28	2	151,04	-151,04	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
29	1	151,25	-151,25	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30

TABELA DO DIMENSIONAMENTO AUTOMATIZADO - ANÁLISE EM SEGUNDA-ORDEM - E - CONSTANTE																		
Bar.	Grup.	Nd(-)	Nd(+)	compr.	Perfil Utilizado	Ag	An	Ae	Rd(+)	Kx	Lx	Ky	Ly	KxLx/rx	KyLy/ry	Rox	Roy	Rd(-)
1	1	148,20	-154,48	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	87,35	122,35	0,56	0,37	156,30
2	2	147,74	-154,50	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	87,35	122,35	0,56	0,37	156,30
3	3	129,25	-133,12	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
4	4	107,90	-110,34	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
5	5	31,99	-28,85	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,21	0,15	30,07
6	6	11,12	-10,86	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
7	7	9,81	-10,93	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
8	8	30,40	-32,27	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
9	9	8,96	-10,74	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
10	10	15,39	-16,46	100,00	2.5 x 2.5 x .32	2,96	2,96	2,96	66,60	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	80,65	0,34	0,64	22,82
11	11	20,56	-21,34	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
12	12	0,01	-0,09	200,00	3.8 x 3.8 x .32	4,64	4,64	4,64	104,40	1,0	200,00	1,0	200,00	169,49	109,89	0,16	0,37	19,44
13	13	23,32	-20,05	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
14	14	27,51	-25,73	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
15	15	30,16	-29,04	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
16	15	30,16	-29,04	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
17	14	27,51	-25,73	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
18	13	23,32	-20,05	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
19	11	20,56	-21,34	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
20	10	15,39	-16,46	100,00	2.5 x 2.5 x .32	2,96	2,96	2,96	66,60	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	80,65	0,34	0,64	22,82
21	9	8,96	-10,74	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
22	8	30,40	-32,27	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,28	0,18	32,89
23	7	9,81	-10,93	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
24	6	11,12	-10,86	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
25	5	31,99	-28,85	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,21	0,15	30,07
26	4	107,90	-110,34	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
27	3	129,25	-133,12	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
28	2	147,74	-154,50	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	87,35	122,35	0,56	0,37	156,30
29	1	148,20	-154,48	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	87,35	122,35	0,56	0,37	156,30

TABELA DO DIMENSIONAMENTO AUTOMATIZADO - ANÁLISE EM SEGUNDA-ORDEM - E - VARIÁVEL

Bar.	Grup.	Nd(-)	Nd(+)	compr.	Perfil Utilizado	Ag	An	Ae	Rd(+)	Kx	Lx	Ky	Ly	KxLx/rx	KyLy/ry	Rox	Roy	Rd(-)
1	1	146,74	-156,39	206,16	7.6 x 7.6 x .8	22,96	22,96	22,96	516,60	1,0	206,16	1,0	412,31	88,10	120,21	0,56	0,38	198,07
2	2	146,20	-156,59	206,16	7.6 x 7.6 x .8	22,96	22,96	22,96	516,60	1,0	206,16	1,0	412,31	88,10	120,21	0,56	0,38	198,07
3	3	128,19	-134,32	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
4	4	107,18	-111,20	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
5	5	32,49	-27,87	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,21	0,15	30,07
6	6	10,78	-10,40	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
7	7	9,94	-11,62	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
8	8	30,37	-33,23	200,00	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	200,00	1,0	400,00	149,25	187,79	0,36	0,23	46,71
9	9	8,66	-11,26	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
10	10	15,12	-16,72	100,00	2.5 x 2.5 x .32	2,96	2,96	2,96	66,60	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	80,65	0,34	0,64	22,82
11	11	20,40	-21,62	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
12	12	0,03	-0,12	200,00	3.8 x 3.8 x .32	4,64	4,64	4,64	104,40	1,0	200,00	1,0	200,00	169,49	109,89	0,16	0,37	19,44
13	13	24,30	-19,48	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
14	14	27,96	-25,30	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
15	15	30,55	-28,78	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
16	15	30,55	-28,78	282,84	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	282,84	1,0	282,84	179,01	118,84	0,15	0,33	35,79
17	14	27,96	-25,30	250,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	250,00	1,0	250,00	179,86	120,19	0,14	0,33	28,49
18	13	24,30	-19,48	223,61	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	223,61	1,0	223,61	192,76	120,87	0,24	0,45	29,74
19	11	20,40	-21,62	150,00	3.2 x 3.2 x .32	3,86	3,86	3,86	86,85	1,0	150,00	1,0	150,00	153,06	95,54	0,26	0,51	22,99
20	10	15,12	-16,72	100,00	2.5 x 2.5 x .32	2,96	2,96	2,96	66,60	1,0	100,00	1,0	100,00	151,52	80,65	0,34	0,64	22,82
21	9	8,66	-11,26	50,00	2.24 x 2.24 x .32	2,64	2,64	2,64	59,40	1,0	50,00	1,0	50,00	75,76	42,37	0,64	0,83	37,78
22	8	30,37	-33,23	200,00	5.1 x 5.1 x .48	9,16	9,16	9,16	206,10	1,0	200,00	1,0	400,00	149,25	187,79	0,36	0,23	46,71
23	7	9,94	-11,62	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
24	6	10,78	-10,40	200,00	4.4 x 4.4 x .32	5,42	5,42	5,42	121,95	1,0	200,00	1,0	400,00	143,88	192,31	0,22	0,14	14,79
25	5	32,49	-27,87	200,00	4.4 x 4.4 x .48	8,00	8,00	8,00	180,00	1,0	200,00	1,0	400,00	147,06	190,48	0,21	0,15	30,07
26	4	107,18	-111,20	206,16	7.6 x 7.6 x .48	14,06	14,06	14,06	316,35	1,0	206,16	1,0	412,31	106,82	141,20	0,57	0,38	118,78
27	3	128,19	-134,32	206,16	7.6 x 7.6 x .64	18,58	18,58	18,58	418,05	1,0	206,16	1,0	412,31	107,93	139,77	0,56	0,37	156,30
28	2	146,20	-156,59	206,16	7.6 x 7.6 x .8	22,96	22,96	22,96	516,60	1,0	206,16	1,0	412,31	88,10	120,21	0,56	0,38	198,07
29	1	146,74	-156,39	206,16	7.6 x 7.6 x .8	22,96	22,96	22,96	516,60	1,0	206,16	1,0	412,31	88,10	120,21	0,56	0,38	198,07

6.9.2 Exemplo Numérico 2 – Galpão com telhado em estrutura metálica treliçada em duas águas

Neste exemplo, desejava-se construir uma estrutura em uma área de (50mx16,50m) para uso industrial. Para tanto, decidiu-se que esta área seria coberta por um galpão formado por pórticos compostos por pilares de concreto e telhado treliçado metálico. Para cobrir toda a área, os pórticos foram distanciados de 5 em 5 metros. Desta forma, houve a necessidade de um total de 11 pórticos para compor a estrutura. O esquema estático do pórtico transversal da estrutura pode ser visualizado na figura 6.8.

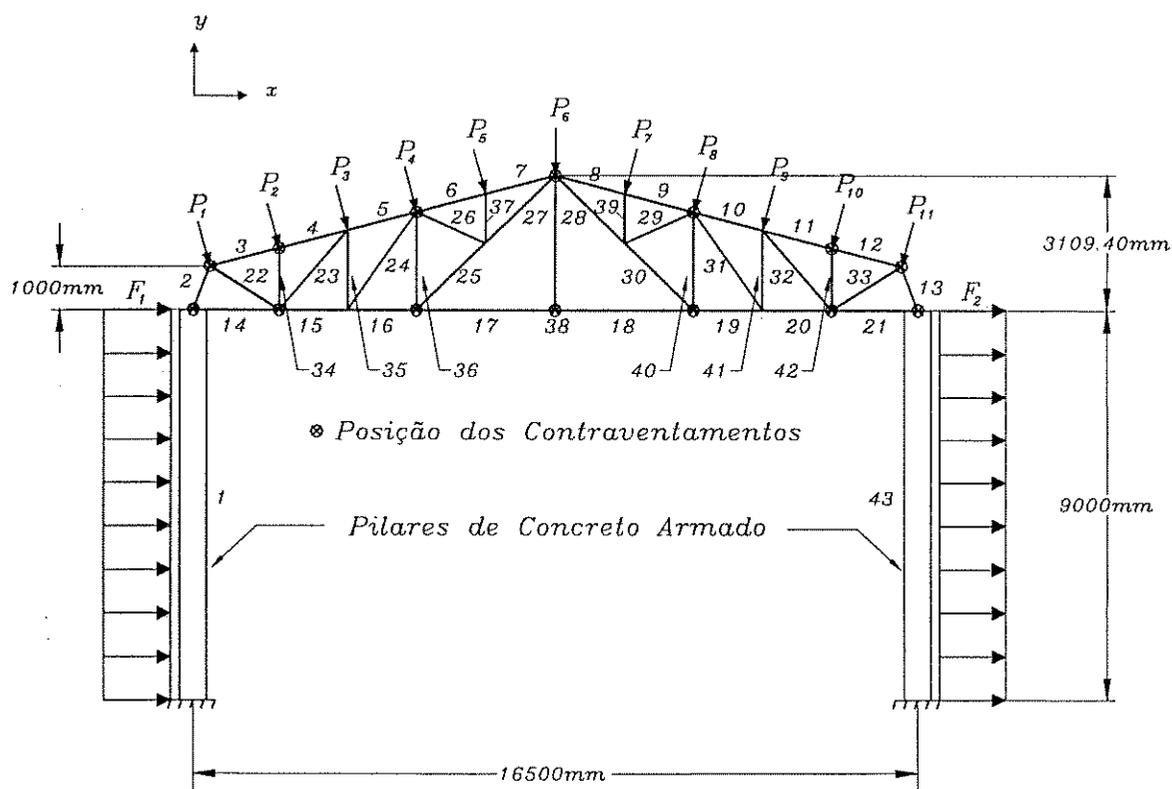


Figura 6.8 – Pórtico transversal constituído de pilares em concreto armado e trave treliçada de aço.

Definiu-se que as barras das treliças do telhado seriam compostas por perfis dupla cantoneira de abas iguais. As ligações entre as barras da estrutura são feitas utilizando chapas de ligação e solda. Para determinação das ações, admitiu-se que as telhas do telhado são onduladas e fabricadas de fibrocimento com 6mm de espessura. O peso das telhas foi estimado ser igual a $183,35\text{N/m}^2$. As terças são feitas de chapa dobrada e o peso destas foram determinados através da seguinte relação: $6,0 \times L(\text{m}) (\text{N/m}^2)$. O peso das treliças foi avaliado

Tabela 6.6 - Ações e combinações das ações para a estrutura em duas águas

Combinação das Ações para Estrutura em Duas Águas							
Ação	Permanente	Sobrecarga	Vento 0	Vent. 90	Combinação I	Combinação II	Combinação III
Direção X	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	1,3Perm.+1,5Sobr.	1,0xPerm.+1,4xVento 0	1,0xPerm.+1,4xVento 90
F1	0,000	0,000	-0,097	0,000	0,000	-0,136	0,000
P1	0,000	0,000	-1,887	-2,359	0,000	-2,642	-3,303
P2	0,000	0,000	-3,774	-4,717	0,000	-5,284	-6,604
P3	0,000	0,000	-3,774	-4,717	0,000	-5,284	-6,604
P4	0,000	0,000	-3,774	-4,717	0,000	-5,284	-6,604
P5	0,000	0,000	-3,774	-4,717	0,000	-5,284	-6,604
P6	0,000	0,000	0,000	-0,944	0,000	0,000	-1,322
P7	0,000	0,000	3,774	2,830	0,000	5,284	3,962
P8	0,000	0,000	3,774	2,830	0,000	5,284	3,962
P9	0,000	0,000	3,774	2,830	0,000	5,284	3,962
P10	0,000	0,000	3,774	2,830	0,000	5,284	3,962
P11	0,000	0,000	1,887	1,416	0,000	2,642	1,982
F2	0,000	0,000	0,097	0,065	0,000	0,136	0,091
Ação	Permanente	Sobrecarga	Vento 0	Vent. 90	Combinação I	Combinação II	Combinação III
Direção Y	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	1,3Perm.+1,5Sobr.	1,0xPerm.+1,4xVento 0	1,0xPerm.+1,4xVento 90
F1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
P1	-2,096	-0,985	7,043	8,804	-4,202	7,764	10,230
P2	-2,093	-1,969	14,086	17,607	-5,674	17,627	22,557
P3	-2,093	-1,969	14,086	17,607	-5,674	17,627	22,557
P4	-2,093	-1,969	14,086	17,607	-5,674	17,627	22,557
P5	-2,093	-1,969	14,086	17,607	-5,674	17,627	22,557
P6	-2,593	-1,969	14,086	14,086	-6,324	17,127	17,127
P7	-2,093	-1,969	14,086	10,565	-5,674	17,627	12,698
P8	-2,093	-1,969	14,086	10,565	-5,674	17,627	12,698
P9	-2,093	-1,969	14,086	10,565	-5,674	17,627	12,698
P10	-2,093	-1,969	14,086	10,565	-5,674	17,627	12,698
P11	-2,093	-0,985	7,043	5,282	-4,198	7,767	5,302
F2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

através da seguinte relação: $50 + 1,60(L_{(m)} - 15)$ (N/m^2). Considerou-se um peso de $100N/m$ para rufos e cumeeiras. Admitiu-se a existência de uma sobrecarga de $250N/m^2$ na estrutura de caracter permanente devido à instalação de equipamentos na cobertura. As ações permanentes devido ao peso das telhas de fibrocimento, peso próprio da treliça e peso das terças foram calculados através da área de influência para cada nó da estrutura no qual a terça descarrega as ações. A ação permanente oriunda do peso do rufo e cumeeiras é calculado através do comprimento de influência para cada nó. Estas ações foram avaliadas e são apresentadas na tabela 6.6. As ações variáveis devido a sobrecarga foi determinada também através da área de influência para os nós que recebem as terças. Elas também podem ser visualizadas na tabela 6.6. Para o cálculo do vento, admitiu-se que o galpão terá alto índice de ocupação e está situado na região de Campinas em terreno plano e aberto com obstruções inferiores a $3,0m$. O valor velocidade básica do vento obtido no mapa das isopletas para região de Campinas foi de $45m/s$. Os seguintes fatores de correção da velocidade básica do vento foram avaliados e utilizados: $S_1 = 1,0$ (topografia plana), S_2 (pilar) = $0,92$, S_2 (cobertura) = $0,94$, $S_3 = 1,0$ (galpão industrial com alto fator de ocupação). Através do uso destes fatores de correção da velocidade básica do vento, determinou-se as velocidades característica do vento para o pilar e cobertura: $V_{k(Pilar)} = 41,40m/s$ e $V_{k(Cobertura)} = 42,30m/s$. Com a velocidade característica do vento no pilar e cobertura, foi possível determinar a pressão dinâmica do vento nos pilares e cobertura: $q_{k(Pilar)} = 1071,23N/m^2$ e $q_{k(Cobertura)} = 1118,31N/m^2$. Os coeficientes de pressão e forma externos e interna foram avaliados através das condições geométricas da estrutura e desta forma as forças na edificação provocadas pela ação do vento foram determinadas. Esta forças podem ser obtidas na quarta e quinta coluna da tabela 6.6.

A estrutura foi dimensionada para os três tipos de combinações das ações e para os quatro tipos de dimensionamentos disponíveis no programa. As combinações das ações podem ser visualizadas na tabela 6.6. Neste exemplo, a estrutura foi assumida ser composta por quatro grupos: um grupo para o banzo superior, um para o inferior, um para as diagonais e outro para os montantes. Os resultados obtidos nos dimensionamentos são apresentados na tabela 6.7. Observou-se que para nos quatro tipos de dimensionamento, os perfis metálicos

não sofreram modificação em relação ao dimensionamento elasto-linear. Este fato pode ser explicado pelo fato dos efeitos de não linearidade física do material e geométrica não provocarem mudanças significativas nos esforços das barras.

Tabela 6.7 – Perfis obtidos no dimensionamento da treliçada em duas águas.

Perfis Obtidos nos Quatro Tipos de Dimensionamento					
Definições		Perfil Dimensionado			
Grupos		1° Ordem-E - Cte	1° Ordem - E - var	2° Ordem - E - Cte	2° Ordem - E - var
1	Banzo Superior	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48
2	Banzo Inferior	7,60x7,60x0,64	7,60x7,60x0,64	7,60x7,60x0,64	7,60x7,60x0,64
3	Diagonais	7,60x7,60x0,48	7,60x7,60x0,48	7,60x7,60x0,48	7,60x7,60x0,48
4	Montantes	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48	5,10x5,10x0,48

A segurança da estrutura para as três combinações das ações para cada tipo de dimensionamento realizado foi avaliada. Para tanto, os parâmetros de instabilidade para cada carregamento foram determinados e são apresentados na tabela 6.8. Os parâmetros de instabilidade encontrados para todas as análises são maiores que 1,0, indicando que a estrutura após o dimensionamento, apresenta segurança aos carregamentos a qual está sujeita. Para o caso de análise de instabilidade inelástica, verifica-se que em todos os casos de carregamento e dimensionamentos analisados, a estrutura teve alguma barra plastificada antes que a instabilidade fosse alcançada. As cargas de plastificação obtidas foram todas maiores que 1,0, indicando que a primeira rótula plástica se formará para um carregamento maior para o qual a estrutura foi dimensionada.

Tabela 6.8 – Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada.

Parâmetros de Instabilidade obtidos após o dimensionamento da estrutura					
Tipo de Análise	Combinação	Tipos de Dimensionamento			
		1° Ordem E - Cte	1° Ordem E - var	2° Ordem E - Cte	2° Ordem E - var
Instabilidade Elástica (W_{cr})	Comb. I	8,16	8,16	8,16	8,16
	Comb. II	8,75	8,75	8,75	8,75
	Comb. III	3,97	3,97	3,97	3,97
Instabilidade Inelástica (W_{cr})	Comb. I	*4,35	*4,35	*4,35	*4,35
	Comb. II	*1,27	*1,27	*1,27	*1,27
	Comb. III	*1,17	*1,17	*1,17	*1,17

* A análise de instabilidade se encerra por plastificação de alguma barra.

6.9.3 Exemplo Numérico 3 – Galpão com telhado em estrutura metálica treliçada em arco

Neste exemplo, desejava-se construir uma estrutura em uma área de (50x10) metros para uso industrial. Para tanto, decidiu-se que esta área seria coberta por um galpão formado por pórticos compostos por pilares de concreto e telhado treliçado metálico em arco. Para cobrir toda a área, os pórticos foram distanciados de 5 em 5 metros. Desta forma, houve a necessidade de um total de 11 pórticos para compor a estrutura. O esquema estático do pórtico transversal da estrutura pode ser visualizado na figura 6.9.

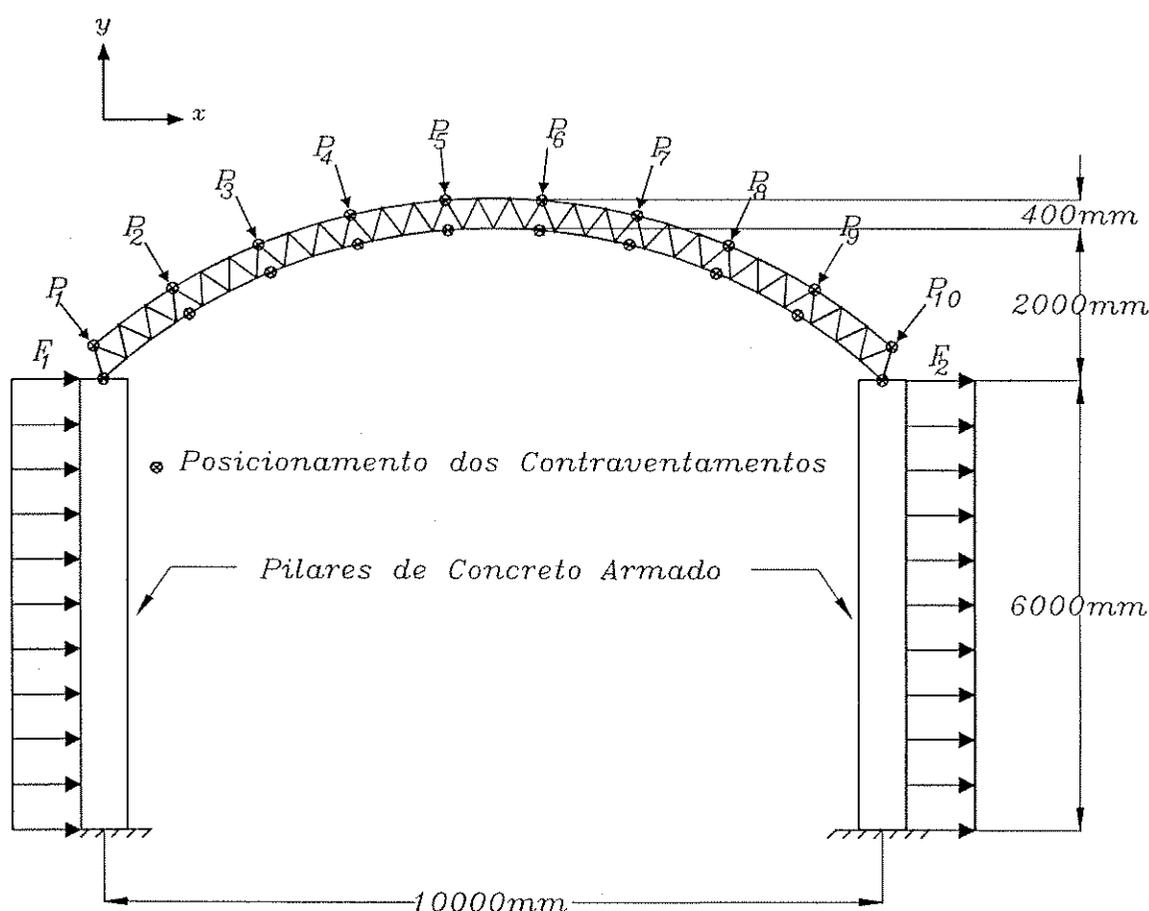


Figura 6.9 – Pórtico transversal constituído de pilares em concreto armado e arco treliçado de aço.

Para as barras do arcos do telhado foram adotados perfis dupla cantoneira de abas iguais. As ligações entre as barras da estrutura são feitas de chapas de ligação e solda. Para determinação das ações, admitiu-se que as telhas do telhado são onduladas e fabricadas de aço galvanizado com 0,64mm de espessura. O peso das telhas com acessórios foi avaliado igual a 75N/m^2 . As

Tabela 6.9 - Ações e combinações das ações para a estrutura em arco

Combinação das Ações para Estrutura em Arco							
Ação	Permanente	Sobrecarga	Vento 0	Vent. 90	Combinação I	Combinação II	Combinação III
Direção X	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	1,3Perm.+1,4Sobr.	1,0xPerm.+1,4xVento 0	1,0xPerm.+1,4xVento 90
F1	0,000	0,000	-8,57	0,000	0,000	-11,998	0,000
P1	0,000	0,000	-3,012	-4,518	0,000	-4,217	-6,325
P2	0,000	0,000	-6,025	-9,036	0,000	-8,435	-12,650
P3	0,000	0,000	-3,472	-2,425	0,000	-4,861	-3,395
P4	0,000	0,000	-3,472	-2,425	0,000	-4,861	-3,395
P5	0,000	0,000	-1,558	-1,752	0,000	-2,181	-2,453
P6	0,000	0,000	1,558	1,752	0,000	2,181	2,453
P7	0,000	0,000	3,472	3,471	0,000	4,861	4,859
P8	0,000	0,000	3,472	3,471	0,000	4,861	4,859
P9	0,000	0,000	6,605	2,260	0,000	9,247	3,164
P10	0,000	0,000	3,012	0,753	0,000	4,217	1,054
F2	0,000	0,000	8,570	5,357	0,000	11,998	7,500
Ação	Permanente	Sobrecarga	Vento 0	Vent. 90	Combinação I	Combinação II	Combinação III
Direção Y	(kN)	(kN)	(kN)	(kN)	1,3Perm.+1,4Sobr.	1,0xPerm.+1,4xVento 0	1,0xPerm.+1,4xVento 90
F1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
P1	-1,555	-0,815	4,300	6,452	-3,163	4,465	7,478
P2	-1,010	-1,630	8,603	12,905	-3,595	11,034	17,057
P3	-1,010	-1,630	9,912	8,674	-3,595	12,867	11,134
P4	-1,010	-1,630	9,912	8,674	-3,595	12,867	11,134
P5	-1,010	-1,630	10,386	11,685	-3,595	13,530	15,349
P6	-1,010	-1,630	10,386	11,685	-3,595	13,530	15,349
P7	-1,010	-1,630	9,912	9,912	-3,595	12,867	12,867
P8	-1,010	-1,630	9,912	9,912	-3,595	12,867	12,867
P9	-1,010	-1,630	8,603	3,226	-3,595	11,034	3,506
P10	-1,555	-0,815	4,300	1,076	-3,163	4,465	-0,049
F2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

terças são feitas de chapa dobrada e o peso destas foram determinados através da seguinte relação: $6,0 \times L(m)$ (N/m^2). O peso dos arcos foi avaliado através da seguinte relação: $50 + 1,60(L(m) - 15)$ (N/m^2). Admitiu-se a existência de uma sobrecarga de $250 N/m^2$ na estrutura de carácter variável devido à instalação de equipamentos na cobertura. As ações permanentes devido ao peso das telhas de alumínio, peso próprio do arco e peso das terças foram calculados através da área de influência para cada nó da estrutura no qual a terça descarrega as ações. Estas ações podem ser visualizadas na tabela 6.9. As ações variáveis devido a sobrecarga foi determinada também através da área de influência para cada nó. Elas também podem ser visualizadas na tabela 6.9. Para o cálculo do vento, admitiu-se que o galpão terá alto índice de ocupação e está situado na região de Campinas em terreno plano e aberto, com obstruções inferiores a 3,0m. O valor velocidade básica do vento obtida no mapa das isopletas para região de Campinas foi de 45m/s. Os seguintes fatores de correção da velocidade básica do vento foram avaliados e utilizados: $S_1 = 1,0$ (topografia plana), S_2 (pilar) = 0,92, S_2 (cobertura) = 0,92, $S_3 = 1,0$ (galpão industrial com alto fator de ocupação). Através do uso destes fatores de correção, determinou-se as velocidades característica do vento para o pilar e cobertura: $V_k = 41,40 m/s$. Com a velocidade característica do vento no pilar e cobertura, foi possível determinar a pressão dinâmica do vento nos pilares e cobertura: $q_{k(Pilar)} = 1071,23 N/m^2$. Os coeficientes de pressão e forma externos e interna foram avaliados através das condições de geometria da estrutura e desta forma as forças na edificação provocadas pela ação do vento foram determinadas. Esta forças podem ser obtidas na tabela 6.9.

A estrutura foi dimensionada para os três tipos combinações das ações e para cada tipo de dimensionamento disponível no programa desenvolvido. As combinações das ações são apresentadas na sexta, sétima e oitava coluna da tabela 6.9. Neste exemplo, a estrutura foi assumida ser composta por três grupos: um grupo para o banzo superior, um para o inferior e outro para as diagonais. Os resultados obtidos nos dimensionamentos são apresentados na tabela 6.10.

Da mesma forma que no exemplo 6.9.1, observa-se que houve modificações nos perfis para os quatro tipos de dimensionamento realizados. Para o caso do dimensionamento em primeira ordem com módulo de elasticidade variável, tanto o banzo inferior, superior e as diagonais sofreram modificações nas dimensões dos

perfis em relação ao dimensionamento elasto-linear. Estas modificações são decorrentes da introdução na análise estrutural do efeito de não linearidade física do material. No caso do dimensionamento em segunda ordem com módulo de elasticidade constante, o banzo inferior e as diagonais se alteraram em relação ao dimensionamento elasto-linear (decorrentes da introdução dos efeitos de não linearidade geométrica). Por fim, ao se fazer o dimensionamento levando em consideração tanto o efeito de não linearidade física do material quanto geométrica, os banzo inferior, superior e diagonais sofreram alterações quando comparados com os perfis obtidos no dimensionamento elasto-linear. Como no primeiro exemplo, percebe-se que os efeitos de não linearidade física e geométrica podem provocar mudanças no dimensionamento quando estes são levados em consideração.

Tabela 6.10 – Perfis obtidos no dimensionamento da estrutura em arco.

Definições		Perfil Dimensionado			
		1ª Ordem E - Cte	1ª Ordem E - var	2ª Ordem E - Cte	2ª Ordem E - var
1	Banzo Inferior	3,80x3,80x0,64	2,24x2,24x0,48	4,40x4,40x0,48	2,24x2,24x0,48
2	Diagonais	2,24x2,24x0,64	2,24x2,24x0,32	2,24x2,24x0,32	2,24x2,24x0,32
3	Banzo Superior	3,20x3,20x0,64	2,24x2,24x0,48	3,20x3,20x0,64	2,24x2,24x0,48

Da mesma forma que exemplos anteriores, avaliou-se as cargas críticas da estrutura para os três tipos de combinações das ações e para os quatro tipos de dimensionamento realizados. Os valores das cargas críticas são apresentados na tabela 6.11. Como nos exemplos anteriores, todos os parâmetros de instabilidade encontrados são maiores que 1,0, indicando que a estrutura após o dimensionamento apresenta segurança para os carregamentos a que está sujeita. Os casos com asteriscos indicam que houve a plastificação de alguma barra da estrutura antes que fosse alcançada a carga de instabilidade da estrutura.

Tabela 6.11 – Parâmetros de instabilidade para a estrutura dimensionada.

Parâmetros de Instabilidade obtidos após o dimensionamento da estrutura					
Tipo de Análise	Combinação	Tipos de Dimensionamento			
		1º Ordem E - Cte	1º Ordem E - var	2º Ordem E - Cte	2º Ordem E - var
Instabilidade Elástica (W_{cr})	Comb. I	17,86	9,19	19,34	9,19
	Comb. II	51,48	23,70	25,69	23,70
	Comb. III	15,59	7,00	15,92	7,00
Instabilidade Inelástica (W_{cr})	Comb. I	*6,89	*3,71	*6,86	*3,71
	Comb. II	*2,50	*1,36	*2,48	*1,36
	Comb. III	*2,07	*1,14	*1,99	*1,14

* A análise de instabilidade se encerra por plastificação de alguma barra.

Capítulo 7

Considerações Finais

Inicialmente, é oportuno mencionar que a introdução do efeito da não linearidade física do material juntamente com o efeito de não linearidade geométrica possibilitou a análise das estruturas metálicas planas de forma mais completa. Ao se considerar estes efeitos nas análises estruturais, verificou-se que estes efeitos podem modificar os deslocamentos e esforços nas barras da estrutura quando comparados com a análise no regime elasto-linear. Ficou demonstrado também através das análises feitas que a carga crítica inelástica de uma estrutura é sempre inferior a carga crítica elástica. Como a carga crítica inelástica é inferior a carga crítica elástica, os parâmetros de flambagem "K" (funções da carga crítica) são diferentes nos regimes elástico e inelástico. Estas diferenças podem acarretar modificações significativas na determinação da resistência à compressão de uma barra e como consequência modificar a resistência global da estrutura.

O processo matricial desenvolvido neste trabalho, que utiliza as funções de rigidez (estabilidade), demonstrou ser eficiente, econômico (sem a necessidade de subdividir as barras) e preciso nos resultados obtidos. Como sugestão para complementar o programa desenvolvido, será de muita utilidade a introdução de

ligações semi-rígidas pois as barras nem sempre se apresentam na estrutura vinculadas rigidamente. A introdução deste efeito poderá representar de forma mais real o comportamento das barras de uma estrutura metálica. Outro tipo de aprimoramento que pode ser introduzido no programa, é a consideração de formação de rótulas plásticas na estrutura. Este procedimento pode avaliar a segurança das estruturas através do estudo de colapso progressivo.

Através da utilização da ferramentas de análise estrutural desenvolvidas neste trabalho, foi possível o desenvolvimento de um programa de dimensionamento automatizado nos quais os efeitos de não linearidade física e geométrica pudessem ser incorporados. Para o dimensionamento das barras à compressão, foi adotado para o parâmetro de flambagem "K" o valor unitário, conforme recomendação da norma "NBR 8800". Apesar do dimensionamento considerar os parâmetros de flambagem conservadoramente iguais a 1,0, o programa efetua a verificação da instabilidade global da estrutura nos regimes elástico e inelástico das barras. Através dos três exemplos numéricos do dimensionamento automatizado, foi possível reconhecer que podem haver modificações nos perfis encontrados e conseqüentemente variações significativas nos parâmetros de instabilidade. Isto demonstra a variação do grau de segurança das estruturas. Apesar dos resultados ainda não serem conclusivos, pelo fato de não ser possível testar os exemplos com programas com capacidade similar ao desenvolvido, estes exemplos demonstram a importância de se continuar pesquisando este tema. Como sugestão, pode-se desenvolver ainda um outro tipo de dimensionamento automatizado, complementar ao já desenvolvido, no qual os parâmetros de flambagem "K" reais são determinados através da análise de instabilidade da estrutura. Este programa utilizará a formulação do dimensionamento já desenvolvido. O processo a ser utilizado neste dimensionamento é muito desgastante e de difícil convergência, devendo o processo ser aperfeiçoado para se obter bons resultados.

Referências Bibliográficas

- 1) WILSON, E. L., HALIBULLAH, A. **SAP90 - A Series of Computer Programs for The Static and Dinamic Finite Element Analysis of Structures, Users Manual.** California: Computers and Structures, 1988.
- 2) WILSON, E. L., HALIBULLAH, A. **SAPSTL - A steel Stress Check Postprocessor for SAP90.** California: Computers and Structures, 1988.
- 3) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, Chicago. **AISC - Allowable Stress Design Specification for Structural Steel Building.** Chicago, 1989.
- 4) Cypecad-3D, **O software do Calculista Moderno.** São Paulo: Multiplus Computação Gráfica, 1997, 143p.
- 5) TIMOSHENKO, STEPHEN **History of strenght of materials.** New York: McGraw-Hill, 1953. 452p.
- 6) JOHNSTON, BRUCE G. Column Buckling Theory: Historic highlights. **Journal of Structural Engineering.** New York, v.109, n.9, p. 2086-2096, Sep. 1983.
- 7) THÜRLIMANN, B. Column Buckling - Historical and Actual Notes. **Journal of Constructional Steel Research.** Oxford, v.17, p. 95-111, 1990.
- 8) VAN DEN BROEK, J. A. Euler's Classic Paper "On The Strength of Columns". **Journal of Physics.** v.15, p.309, 1947.
- 9) CHEN, W. F., LUI, E. M. **Structural Stability: Theory and Implementation.** London: Elsevier Science Publishing Co., 1987. 489p.

- 10) SHANLEY, F. R. **Inelastic Column Theory. Journal of The Aeronautical Sciences.** New York, v.14, n.5, p.261-267, May 1947.
- 11) JOHNSTON, B. G. Buckling Behavior Above The Tangent Modulus Load. **Journal of the Engineering Mechanics Division.** New York, v.87, n.EM6, p.79-99, Dec. 1961.
- 12) MARTIN, H. C. On The Derivation of Stiffness Matrices for The analysis of Large Deflection and Stability Problems. **Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics.** Wright-Paterson AFB, Oct. 1965.
- 13) ARGYRIS, J. H. **Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis.** Oxford: Pergamon Press, 1964.
- 14) PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1968. 463p.
- 15) JAMES, B. W. Principal Effects of Axial Load on Moment-Distribution Analysis in Rigid Structures. Technical Note 534, **National Advisory Committee to Aeronautics** (now NASA), 1935.
- 16) LIVESLEY, R. K. , CHANDLER, D. B. **Stability Functions for Structural Framework.** Manchester: Manchester University Press, 1956.
- 17) HORNE, M. R., MERCHANT, W. **The Stability of Frames.** Oxford: Pergamon Press, 1965. 179p.
- 18) ALLEN, H. G. **Background to Buckling.** London: McGraw-Hill, 1980. 582p.
- 19) CHEN, W. F., AL-MASHARY, F. Elastic Second-Order Analysis for Frame Design. **Journal of Constructional Steel Research.** Oxford, v.15, p. 303-322, 1993.
- 20) GERE, J. M., WEAVER, W. JR. **Análise de Estruturas Reticuladas.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

- 21) OJALVO, M., LU, L. W. Analysis of Frames Loaded into The Plastic Range. **Journal of The Engineering Mechanics Division.** New York, v.87, n.EM4, p.35-48, Aug. 1961.
- 22) CHU, KUANG-HAN, PABARCIUS, ALGIS Elastic and Inelastic Buckling of Portal Frames. **Journal of The Engineering Mechanics Division.** New York, v.90, n.EM5, p.221-249, Oct. 1964.
- 23) MOSES, F. Inelastic Frame Buckling. **Journal of The Structural Division.** New York, v.90, n.ST6, p.105-121, Dec. 1964.
- 24) LU, LE-WU Inelastic Buckling of Steel Frames. **Journal of The Structural Division.** New York, v.91, n.ST6, p.185-214, Dec. 1965.
- 25) GALAMBOS, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures.** New York: John Wiley, 1988. 786p.
- 26) KORN, A., GALAMBOS, T. V. Behavior of Elastic-Plastic Frames. **Journal of The Structural Division.** New York, v.94, n.ST5, p.1119-1142, May 1968.
- 27) MAJID, K. I., ANDERSON, D. The Computer Analysis of Large Multi-Storey Framed Structures. **The Structural Engineer.** London, V.46, n.11, p.357-365, Nov. 1968.
- 28) ALVAREZ, RONALD J., BIRNSTIEL, CHARLES Inelastic Analysis of Multistory Multibay Frames. **Journal of The Structural Division.** New York, v.95, n.ST11, p.2477-2503, Nov. 1969.
- 29) VOGEL, U. Calibrating Frames. **Stahlbau.** Berlin, v.10, p.295-301, 1985.
- 30) SIMITSES, G. J., MOHAMED, S. E. Stability and Collapse of Semirigidly Connected Portal Frames. **Journal of Aerospace Engineering.** New York, v.3, n.1, p.46-63, Jan. 1990.

- 31) CHEN, W. F., AL-MASHARY, F. Simplified Second-Order Inelastic Analysis for Steel Frames. **The Structural Engineer**. London, v.69, n.23/3, p.395-399, Dec. 1991.
- 32) KING, W. S., WHITE, D. W., CHEN, W. F. Second-Order Inelastic Analysis Methods for Steel-Frame Design. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.118, n.2, p.408-428, Feb. 1992.
- 33) JOHNSTON, B. G. **Guide to Design Criteria for Metal Compression Members**. Column Research Council New York: John Wiley & Sons, 1973.
- 34) MCGUIRE, W., ZIEMIAN, D. R., DEIERLEIN, G. GREGORY Inelastic Limit States Design. Part I: Planar Frames Studies. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.118, n.9, p.2532-2549, Sep. 1992.
- 35) LIEW, J. Y. RICHARD, WHITE, D. W., CHEN, F. W. Second-Order Refined Plastic-Hinge Analysis For Frame Design. Part I. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.119, n.9, p.3196-3216, Nov. 1993.
- 36) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, Chicago. **AISC - Load and Resistent Factor Design Specification for Structural Steel Buildings**. Chicago, 1986.
- 37) LIEW, J. Y. RICHARD, WHITE, D. W., CHEN, F. W. Second-Order Refined Plastic-Hinge Analysis For Frame Design. Part II. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.119, n.11, p.3196-3216, Nov. 1993.
- 38) WHITE, D. W. Plastic-Hinge Methods for Advanced Analysis of Steel Frames. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford, v.24, p.121-152, 1993.
- 39) CHAN, S. L., YAU, C.Y. Inelastic and Stability Analysis of Flexibly Connected Steel Frames by Spring-in-series Model. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.120, n.10, p.2803-2819, Oct. 1994.

- 40) CHEN, W. F., CHAN, S. L. Second-Order Inelastic Analysis of Steel Frames using element with mid-span and End Springs. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.121, n.3, p.530-541, Mar. 1995.
- 41) CHEN, W. F., KIM, S. E. Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.122, n.11, p.1259-1265, Nov. 1996.
- 42) CHEN, W. F., KIM, S. E. Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.122, n.11, p.1266-1274, Nov. 1996.
- 43) CHAN, S. L., CHUI, P. PUI-TAK A Generalized Design-Based Elastoplastic Analysis of Steel Frames by Section Assemblage Concept. **Engineering Structures**. London, v. 19, n.8, p.628-636, Aug. 1997.
- 44) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, RIO DE JANEIRO. **NBR-8800; Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios: Método dos Estados Limites**. Rio de Janeiro, 1988, 129p.
- 45) BIRNSTIEL, C., IFFLAND, JEROME S. B. Factors Influencing Frame Stability. **Journal of The Structural Division**. New York, v.106, n.ST2, p.491-504, Feb. 1980.
- 46) **ANSYSuser 's MANUAL Volume I - Procedure, Volume II - Commands, Volume III - Elements e Volume IV - Theory**. Ansys Revision 5.2 SAS IP, August, 1995.
- 47) ASSAN, ALOÍSIO ERNESTO **Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos**. Campinas: Editora UNICAMP, 1996. 201p.
- 48) YAGUI, T. Critical Loading of Tall Core-Supported Structures. **Computer & Structures**. Oxford, v.26, n.2, p.223-235, 1990.
- 49) SERRA, J. L. F. A. **Contribuição ao Estudo de Núcleos Resistentes de Concreto Armado**. São Carlos: EESC-USP, 1994. Tese de Doutorado -

Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1994.
128p.

- 50) REQUENA, JOÃO A. V. **Carregamento Crítico de Instabilidade Geral de Pilares de Seção Composta Variável de Edifícios Industriais Metálicos.** São Carlos: EESC-USP, 1995. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1995. 157p.
- 51) COWPER, G. R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. **Journal of Applied Mechanics.** New York, v. 10 , n.12 , p.335-339, June 1966
- 52) RUBISTEIN, M. F. **Matrix Computer Analysis of Structures.** New Jersey: Prentice-Hall, 1966. 402p.
- 53) JENNINGS, A. **Matrix Computation for Engineers and Scientists.** A. Wiley, 1977. (Reimpressão 1978)
- 54) GOLUB, G. H., VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations.** Baltimor: John Hop Kings, 1990. 642p.
- 55) VLASSOV, B. Z. **Pièces Longues En Voiles Mincees.** Paris: Eyrolles, 1962. 655p.
- 56) HALLDORSSON, OTTAR P., WANG, F. CHU-KIA Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods. **Journal of The Structural Division.** New York, v.94, n.ST7, p.1745-1760, July 1968.
- 57) FRASER, D. J., BRIDGE, R. Q. Buckling of Stepped Crane Columns. **Journal of Constructional Steel Research.** Oxford, v.16, p. 23-38, 1990.
- 58) SHANLEY, F. R. The Column Paradox. **Journal of The Aeronautical Sciences.** New York, v.13, n.12, p.678, Dez. 1946.
- 59) BJORHOVDE, R., BROZZETTI, J., ALPSTEN, G. A., TALL, L. Residual Stresses in Thick Welded Plates. **Welding Journal** New York, v.51, 1972.

- 60) SALMON, C. G., JOHNSON, J. E. **Steel Structures: Design and Behavior**. New York: HarperCollins, 1996. 1024p.
- 61) SMITH JR., C. V. On Inelastic Column Buckling. **Engineering Journal**. v.13, n.3 (Third Quarter), p.86-88, 1976.
- 62) CHEN, W. F., TOMA, S. **Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software and Applications**. New York: CRC Press, 1994. 384p.
- 63) HARICHANDRAN, RONALD S. Stiffness Reduction Factor for LRFD of Columns. **Engineering Journal**. v.28, n.3 (Third Quarter), p.129-130, 1991.
- 64) **EUROPEAN RECOMMENDATIONS FOR STEEL CONSTRUCTION**, Brussels, CECM ECCS, 1978.
- 65) BALLIO, G., MAZZOLANI, F. M. **Theory and Design of Steel Structures**. London: Chapman and Hall, 1983. 632p.
- 66) REQUENA, JOÃO A. V. Determinação do Comprimento Efetivo de Flambagem de Pilares de Edifícios Industriais com Variação Brusca de Seção Transversal. In: XVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 18, 1997, São Carlos. **Anais ... São Carlos: Associação Sul-americana de Engenharia Estrutural**, 1997. v.2, p.655-664.
- 67) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, RIO DE JANEIRO. **NBR-6120; Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações**. Rio de Janeiro, 1980, 6p.
- 68) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, RIO DE JANEIRO. **NBR-6123; Forças devidas ao Vento em Edificações**. Rio de Janeiro, 1987, 124p.
- 69) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, RIO DE JANEIRO. **NBR-8681; Ações e Segurança nas Estruturas**. Rio de Janeiro, 1988, 129p.