UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

UMA RESOLUÇÃO DE PLACAS COM A TEORIA DE MINDLIN ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Luiz Carlos Facundo Sanches

Campinas
1998

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

UMA RESOLUÇÃO DE PLACAS COM A TEORIA DE MINDLIN ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Luiz Carlos Facundo Sanches

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, Área de Concentração em Estruturas

Atesto que esta é a versão definitiva da dissert[illegible]

31/08/98

Prof. Dr. [illegible]

Matrícula: 146838

Campinas, SP

1998

1692269

UNIDADE BC
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
S55r
V. Ex.
TOMBO BC/ 35688
PROC. 395/98
C [ ] D [x]
PREÇO R$ 11,00
DATA 04/11/98
N.º CPD

CM-00118178-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa55r

Sanches, Luiz Carlos Facundo
Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do método dos elementos de contorno. / Luiz Carlos Facundo Sanches.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Leandro Palermo Júnior
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Placas (Engenharia). 2. Métodos de elementos de contorno. I. Palermo Júnior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

UMA RESOLUÇÃO DE PLACAS COM A TEORIA DE MINDLIN ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Luiz Carlos Facundo Sanches

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior, Presidente
FEC - UNICAMP

Prof. Dr. João Batista de Paiva
EESC - USP

Prof. Dr. Renato Soliani
FEC - UNICAMP

Campinas, 25 de Agosto de 1998.

Aos meus pais Pascoal e Ivonice e

a minha maior inspiração, Gleiciana.

Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo *Leandro Palermo Júnior*, um agradecimento especial, pelo grande incentivo e apoio durante a confecção deste trabalho.

À **FAPESP** - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela confiança depositada e pelo auxílio oferecido na realização deste trabalho.

Aos meus pais *Pascoal Sanches Fiorentino* e *Ivonice Facundo Sanches* pela dedicação e amor durante todos estes anos.

À *Gleiciana Polizel*, pela paciência, dedicação e apoio durante a confecção deste trabalho.

Aos professores *Wilson Sérgio Venturini* e *João Batista de Paiva*, ambos da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, pelo grande auxílio no tratamento do Método dos Elementos de Contorno e nas formulações da teoria de placas finas.

Aos professores *Renato Soliani*, *Mário Conrado Cavicchia* e *Pérsio Leister de Barros*, pela irrestrita colaboração nos tratamentos matemáticos da teoria de placas moderadamente espessas.

Aos meus amigos da FEC, pelo convívio durante o período de Mestrado.

À Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

Sumário

Lista de Símbolos i

Lista de Figuras vii

Lista de Tabelas ix

Resumo xi

Abstract xii

Capítulo 1
Introdução **1**

1.1 - Generalidades 1

1.2 - Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas 4

1.3 - Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas Através do Método dos Elementos de Contorno 7

Capítulo 2
Equações da Elasticidade Linear **11**

2.1 - Introdução 11

2.2 - Relação Deformação-Deslocamento 12

2.3 - Equação Constitutiva 13

2.4 - Equações de Equilíbrio 14

2.5 - Relações Tensão-Deformação e Deslocamento em Placas 16

2.6 - Equações de Equilíbrio em Placas 19

Capítulo 3
Flexão de Placas Finas **21**

3.1 - Introdução 21

3.2 - Hipóteses Básicas 22

3.3 - Equações Constitutivas 23

3.4 - Condições de Contorno 31

3.5 - Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas 33

3.6 - Solução Fundamental 39

Capítulo 4

Flexão de Placas Moderadamente Espessas **43**

4.1 - Introdução 43

4.2 - Hipóteses Básicas 44

4.3 - Equações Constitutivas 45

4.4 - Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas 50

4.5 - Solução Fundamental através da Teoria de Mindlin 57

4.6 - Esforços e Deslocamentos Fundamentais Generalizados 66

4.7 - Solução Fundamental através da Teoria de Reissner 70

4.8 - Condições de Contorno 76

Capítulo 5

Equações Integrais em Placas **77**

5.1 - Introdução 77

5.2 - Equações Integrais para Placas Finas 78

5.2.1 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio 78

5.2.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Contorno 85

5.2.3 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Curvaturas em Pontos do Domínio 86

5.2.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio 88

5.3 - Equações Integrais para Placas Moderadamente Espessas através da Teoria de Mindlin 90

5.3.1 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio 90

5.3.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio 95

5.3.3 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Esforços em Pontos do Domínio 98

5.3.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio 102

5.4 - Equações Integrais para Placas Moderadamente Espessas através da Teoria de Reissner 105

5.4.1 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio 105

5.4.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio 106

5.4.3 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Esforços em Pontos do Domínio 106

5.4.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio 112

Capítulo 6
Aplicação do Método dos Elementos de Contorno **115**

6.1 - Introdução 115

6.2 - Discretização do Contorno 116

6.2.1 - Elemento Linear Contínuo 120
6.2.2 - Elemento Linear Descontínuo 121
6.2.3 - Elemento Linear Misto 122

6.3 - Transformação das Equações Integrais de Placas Finas 123

6.3.1 - Montagem do Sistema de Equações 126

6.4 - Transformação das Equações Integrais de Placas Moderadamente Espessa 128

6.4.1 - Montagem do Sistema de Equações 130
6.4.2 - Deslocamentos em Pontos do Domínio 132
6.4.3 - Esforços em Pontos do Domínio 133

Capítulo 7
Exemplos Numéricos **135**

7.1 - Introdução 135

7.2 - Considerações Gerais 136

7.3 - Exemplo 01: Placa Retangular em Balanço 141

7.4 - Exemplo 02: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada 145

7.5 - Exemplo 03: Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada 154

7.6 - Exemplo 04: Placa quadrada engastada em duas bordas opostas, apoiada nas outras duas e uniformemente carregada 156

7.7 - Exemplo 05: Placa quadrada engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e uniformemente carregada 157

7.8 - Exemplo 06: Placa quadrada fina 159

Capítulo 8
Programas para Análise de Placas **162**

8.1 - Introdução 162

8.2 - Estruturas dos Programas de Placa 163

8.3 - Subrotina INPUT 164

8.4 - Subrotina MATRIZ 165

8.5 - Subrotinas INTGP e INTGG 166

8.6 - Subrotina PG 166

8.7 - Subrotinas BESSELK0, CALCK0, BESSELK1 e CALCK1 169

8.7.1 - Algoritmo da subrotina BESSELK0 170
8.7.2 - Algoritmo da subrotina CALCK0 170
8.7.3 - Algoritmo da subrotina BESSELK1 172
8.7.4 - Algoritmo da subrotina CALCK1 172

8.8 - Subrotinas DECOMP e SOLVE 174

8.9 - Subrotina POINR 175

Capítulo 9
Conclusões **176**

Referências Bibliográficas **180**

Lista de Símbolos

A seguir são listados os principais símbolos utilizados no desenvolvimento deste trabalho:

∇^2	: operador *Laplaciano*, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
α	: ângulo entre vetor **n** normal ao contorno e os eixos coordenados
β	: ângulo entre o raio vetor **r** e o vetor **n** normal ao contorno da placa
β_c	: angulosidade do canto da placa
Γ	: coordenada que percorre o contorno da placa
Γ_1 , Γ_2	: coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração
Γ_∞	: contorno infinito
Γ_ε , Γ^*	: regiões do contorno
Γ_j	: elemento de contorno
Ω	: coordenada de domínio
Ω_g	: área do carregamento distribuído
Ω_ε	: região do domínio
Ω_∞	: domínio infinito
$\Delta\,(x - \xi)$	: função delta de *Dirac* no argumento $(\mathbf{x} - \xi)$
ε_{ij} , γ_{ij}	: deformações normais e cisalhantes
η	: variável que percorre os elementos de contorno

η_d : variável de domínio

η_c : valor da variável η nos cantos

ρ : parâmetro constante na teoria de *Mindlin*

κ : parâmetro constante na teoria de *Mindlin*

ν : coeficiente de *Poisson*

λ : parâmetro constante na teoria de *Reissner*

ξ : ponto onde se aplica a equação integral

δ_{ij} : delta de *Kronecher*

σ_{ij} , τ_{ij} : tensões internas normais e cisalhantes

$\underset{\sim}{\Phi}^t$: matriz das funções aproximadoras nas variáveis do elemento

Ψ_i : funções Ψ para a teoria de *Mindlin*

Ψ_r : função Ψ em relação à **r**

Ψ_θ : função Ψ em relação à θ

Ψ_n : função Ψ normal ao contorno

Ψ_s : função Ψ tangencial ao contorno

Ψ_n^* : valor da solução fundamental de Ψ_n

Ψ_s^* : valor da solução fundamental de Ψ_s

A_i : constantes de integração

$\underset{\sim}{A}$: matriz das variáveis incógnitas

A(z) : função dependente das funções modificadas de *Bessel*

B(z) : função dependente das funções modificadas de *Bessel*

B_1 : constante de integração

$\underset{\sim}{B}$	: matriz das variáveis conhecidas
C_i	: constantes de integração
C_{ijkl}	: tensor das componentes elásticas do material
$C(\xi)$	: função que fornece o deslocamento do ponto onde se aplica a equação integral
D	: módulo de rigidez à flexão da placa
E	: módulo de elasticidade transversal
F_i	: componente da força de volume
$\underset{\sim}{F}$	: vetor dos coeficientes das forças distribuídas no domínio
g	: carregamento uniformemente distribuído
G	: módulo de elasticidade longitudinal
G'	: módulo de elasticidade longitudinal na formulação de *Mindlin*
$\underset{\sim}{G}$	: matriz dos coeficientes das forças
h	: espessura da placa
$\underset{\sim}{H}$	: matriz dos coeficientes dos deslocamentos
I_0, I_1	: funções de *Bessel* modificadas
K_0, K_1	: funções de *Bessel* modificadas
ℓ	: comprimento do elemento de contorno
$\bar{\phi}$	: ângulo entre os vetores de transformação
ϕ_s	: rotação tangente ao contorno
M_{ij}	: momento interno por unidade de comprimento
M_n	: momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção normal ao contorno

M_s : momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção tangencial ao contorno

M_{ns} : momento volvente externo por unidade de comprimento

M_n^* : valor da solução fundamental de $\mathbf{M_n}$

M_{ns}^* : valor da solução fundamental de M_{ns}

n : vetor unitário normal ao contorno da placa

n_i : cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_i

N_c : número total de cantos no contorno da placa

N_e : número de elementos de contorno

N_n : número total de nós de contorno

p_i, p_i' : vetores de transformação

q_i, q_i' : vetores de transformação

Q_{ij} : cortantes internas por unidade de comprimento

Q_n : cortante externa por unidade de comprimento na direção normal ao contorno

Q_s : cortante externa por unidade de comprimento na direção tangencial ao contorno

Q_n^* : valor da solução fundamental de $\mathbf{Q_n}$

r : distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental

$r\ \theta\ x_3$: sistema de coordenadas cilíndricas

$\bar{r}$: variável obtida da transformação de **r** e ρ

R : raio de curvatura do contorno da placa no ponto **P**

R_c : reação de canto

R_c^* : valor da solução fundamentalde $\mathbf{R_c}$

s : vetor unitário tangente ao contorno da placa

t_i : componentes das forças de superfície

$\underset{\sim}{t}$: vetor das forças internas ao elemento

$\underset{\sim k}{T^j}$: vetor das forças no nó do elemento

$\underset{\sim}{T}$: vetor das forças em todos os nós

T_{ij}^* : valor da solução fundamental dos esforços generalizados no contorno

$T_{i\beta k}^*$: valor da solução fundamental dos esforços generalizados no domínio

T : matriz de transformação de coordenadas

u_i : deslocamento generalizado na direção do eixo **i**

u_r : deslocamento na direção de **r**

u_θ : deslocamento na direção de θ

$\underset{\sim}{u}$: vetor dos deslocamentos internos ao elemento

$\underset{\sim k}{U^j}$: vetor de deslocamentos no nó do elemento

$\underset{\sim}{U}$: vetor dos deslocamentos em todos os nós

U_{ij}^* : valor da solução fundamental dos deslocamentos generalizados no contorno

$U_{i\beta k}^*$: valor da solução fundamental dos deslocamentos generalizados no domínio

v : deslocamento na direção do eixo $\mathbf{x_2}$

v_θ : deslocamento na direção do ângulo θ

V_n : cortante equivalente por unidade de comprimento

V_n^* : valor da solução fundamental de $\mathbf{V_n}$

V_i^*	: valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento
w, u_3	: deslocamento na direção do eixo $\mathbf{x_3}$
w_c	: deslocamento do canto da placa
w^*	: valor da solução fundamental de **w**
w_c^*	: deslocamento fundamental do canto **i** da placa
W^*	: valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento
$\partial w/\partial n$	: rotação normal ao contorno
$\partial w/\partial s$	: rotação tangencial ao contorno
$\partial w/\partial x_1$	: rotação contida na direção do eixo $\mathbf{x_1}$
$\partial w/\partial x_2$	: rotação contida na direção do eixo $\mathbf{x_2}$
$\partial w^*/\partial n$	: valor de $\partial \mathbf{w}/\partial \mathbf{n}$ na solução fundamental
x_1, x_2, x_3	: sistema de coordenadas cartesianas
$\underset{\sim}{x}$	: vetor das coordenadas internas ao elemento
$\underset{\sim k}{X^j}$	: vetor de coordenadas do nó do elemento
$\underset{\sim}{X}$	: vetor das variáveis incógnitas
z	: parâmetro característico da teoria de *Reissner*
Z_{ij}^*	: valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Estado de deformação em um sólido 12

Figura 2.2 - Forças de superfície e de volume 14

Figura 2.3 - Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal 15

Figura 2.4 - Sistemas de coordenadas 16

Figura 2.5 - Elemento infinitesimal 19

Figura 3.1 - Elemento de placa, definição do sistema de coordenadas 21

Figura 3.2 - Componentes de tensão de um elemento de placa em flexão 25

Figura 3.3 - Esforços em um elemento de placa em flexão 26

Figura 3.4 - Sistemas de coordenadas $\mathbf{x_1}$ $\mathbf{x_2}$ e **ns** 29

Figura 3.5 - Momentos volventes no contorno 32

Figura 3.6 - Sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas 33

Figura 3.7 - Relação das coordenadas **ns** de um ponto **P** do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e cilíndricas 37

Figura 3.8 - Função delta de *Dirac* 40

Figura 4.1 - Equilíbrio de momentos fletores e forças cortantes em um elemento de placa 53

Figura 4.2 - Vetores de transformação de coordenadas 53

Figura 4.3 - Forças verticais atuantes em uma circunferência de raio **r** 58

Figura 4.4 - Esboço do gráfico das funções de *Bessel* $\mathbf{I_0}$, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$ 64

Figura 5.1 - Placa finita contida em uma placa infinita 78

Figura 5.2 - Canto **i** do contorno da placa 82

Figura 5.3 - Contorno circular acrescido a um canto da placa 85

Figura 5.4 - Integração sobre a sub-região carregada 88

Figura 6.1 - Discretização do contorno da placa 116

Figura 6.2 - Descrição geométrica do elemento linear 117

Figura 6.3 - Elemento linear contínuo 121

Figura 6.4 - Elemento linear descontínuo 122

Figura 6.5 - Elementos lineares mistos 122

Figura 6.6 - Definição de nó duplo 123

Figura 6.7 - Posição do nó externo ao contorno 125

Figura 7.1 - Placa retangular em balanço 141

Figura 7.2 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada 146

Figura 7.3 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada 155

Figura 7.4 - Placa quadrada engastada em duas bordas opostas, apoiada nas outras duas e uniformemente carregada 156

Figura 7.5 - Placa quadrada engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e uniformemente carregada 158

Figura 7.6 - Placa fina quadrada 160

Figura 8.1 - Estrutura do Programa de Placas finas 163

Figura 8.2 - Estrutura dos Programas de Placa de Espessura Moderada 163

Lista de Tabelas

Tabela 7.1 - Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento linearmente distribuído no lado oposto da borda engastada 142

Tabela 7.2 - Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 143

Tabela 7.3 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/100**. 144

Tabela 7.4 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/20** 144

Tabela 7.5 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/10** 145

Tabela 7.6 - Deslocamentos sobre a linha de centro de uma placa apoiada no contorno e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 150

Tabela 7.7 - Deslocamentos máximos e momentos fletores para a placa apoiada contorno e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 151

Tabela 7.8 - Deslocamentos máximos na placa quadrada apoiada, para as condições de contorno *hard* e *soft* e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 153

Tabela 7.9 - Momentos fletores máximos na placa quadrada apoiada, para as condições de contorno *hard* e *soft* e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 154

Tabela 7.10 - Deslocamentos e esforços para a placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada 155

Tabela 7.11 - Deslocamentos e esforços para a placa quadrada engastada em dois lados opostos, apoiada nos outros dois e uniformemente carregada 157

Tabela 7.12 - Deslocamentos em uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 158

Tabela7.13 - Momentos fletores na direção x_1 de uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 159

Tabela 7.14 - Momentos fletores na direção x_2 de uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio 159

Tabela 7.15 - Deslocamentos em uma placa fina quadrada 160

Tabela 7.16 - Momento fletor máximo em uma placa fina quadrada 161

Tabela 7.17 - Momento torçor em uma placa fina quadrada 161

Tabela 8.1 - Pontos de *Gauss* referentes a pesos e coordenadas 167

Resumo

SANCHES, L. C. F. **Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do método dos elementos de contorno.** Campinas: UNICAMP, FEC, 1998. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, 1998. 186p.

O presente trabalho dedica-se ao estudo da formulação do *Método dos Elementos de Contorno* para o problema de flexão de placas homogêneas e isotrópicas através da teoria de *Mindlin*. A análise é feita em regime elástico linear mediante a hipótese de pequenas deformações e com equilíbrio na posição indeslocada. É apresentado o desenvolvimento da teoria de *Mindlin* que inclui o efeito da deformação por cortante no equilíbrio mas, necessita do atendimento das três condições físicas na borda da placa. São resolvidos problemas envolvendo placas finas e moderadamente espessas e os resultados comparados com os disponíveis na literatura. Apresentam-se soluções fundamentais para as teorias de *Reissner* e *Mindlin*, necessárias na aplicação do *Método dos Elementos de Contorno*. Adicionalmente, são propostas duas soluções fundamentais que tendem às soluções de *Danson* e *Benzine-Stern* de placas finas quando a espessura reduz-se a zero. O tratamento numérico foi feito através da formulação direta do *Método dos Elementos de Contorno*, utilizando-se elementos isoparamétricos lineares e gerando-se as equações integrais em pontos de colocação fora do domínio da placa.

Palavras chave: Elementos de contorno, Placas, Placas Moderadamente Espessas, *Mindlin*, *Reissner*

Abstract

SANCHES, L. C. F. **A resolution of plates with Mindlin's theory using the Boundary Element Method**. Campinas: UNICAMP, FEC, 1998. Dissertation (Master) - Universidade Estadual de Campinas, 1998. 186p.

This study analyzes the bending of moderately thick plates using the *Boundary Element Method*. The *Mindlin's* theory was applied to an isotropic and homogeneous constitutive material. The equilibrium was made at the initial position with the small strain hypothesis. *Mindlin's* theory takes into account the shear effect in the equilibrium position and three conditions should be attending. Several examples were solved for thin and thick plates with the purpose to show the accuracy of the presented formulation. Some fundamental solutions were analyzed including the well know solution to solve *Reisssner's* plate with *BEM*. In addition, two fundamental solutions were proposed and they approaches to the *Danson* and *Bezine-Stern* solutions for thin plates when the thickness approaches to zero. The direct *Boundary Element Method* was used with isoparametric linear elements and the integral equations were computed with the collocation points placed out of the domain.

Key words: Boundary Elements, Plates, Moderately Thick Plates, *Mindlin*, *Reissner*

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Generalidades

As placas são elementos estruturais planos extremamente utilizados nos mais variados ramos da engenharia, tais como civil, mecânica, aeronáutica, naval, entre outros. No âmbito da engenharia civil, o desenvolvimento de novas tecnologias e o aprimoramento dos aspectos construtivos está intimamente relacionado com a concepção e construção de grandes obras-de-arte tipo pontes, edifícios, barragens, silos, reservatórios e inúmeras outras aplicações que utilizam diretamente os elementos estruturais de placa.

Devido ao uso freqüente dos elementos de placa nas estruturas usuais, despertou-se em engenheiros e pesquisadores um grande interesse de verificar e estudar o comportamento desta superfície estrutural, tanto do ponto de vista teórico como do prático.

O estudo de placas segundo a teoria da elasticidade tem suas origens a quase dois séculos, porém a maioria dos problemas relacionados aos casos reais foram resolvidos durante os últimos 70 anos. Os nomes de *Neuber*, *Navier*, *Poisson*, *Kirchhoff*, *Timoshenko*, *Galerkin*, *Vlassov*, *Kalmanok*, *Girkmann*, *Saint-Germain*, dentre outros grandes pesquisadores de todo o mundo, estão intimamente vinculados

aos resultados fundamentais da teoria clássica de placas, tendo contribuído significativamente para a extensão e ampliação desta teoria.

A teoria de placas pode ser considerada como um dos mais importantes tópicos da teoria da elasticidade sob o ponto de vista das aplicações em engenharia. Contudo é necessário ressaltar que, a partir de um caso tridimensional, esta teoria representa uma aproximação bidimensional para o problema. Apesar das hipóteses simplificadoras adotadas, as soluções analíticas das equações diferenciais que governam o problema de flexão de placas são conhecidas apenas em alguns casos particulares clássicos.

A necessidade de resolver casos mais gerais fez com que surgissem algumas técnicas numéricas para analisar, de forma aproximada, equações diferenciais de difícil solução. Destacam-se, durante as últimas décadas, o *Método das Diferenças Finitas* (**MDF**), o *Método dos Elementos Finitos* (**MEF**) e, mais recentemente, o *Método dos Elementos de Contorno* (**MEC**). Mesmo assim, a adoção de hipóteses simplificadoras e também as aproximações inerentes ao método numérico trouxeram imprecisões no tratamento bidimensional do problema. Desta forma, as hipóteses adotadas devem estar próximas à teoria exata para que os resultados obtidos sejam mais coerentes e aproximem-se do caso real.

No presente trabalho, tendo como base a teoria de *Mindlin*, o *Método dos Elementos de Contorno* é aplicado como ferramenta de resolução numérica para analisar esforços e deslocamentos em placas isotrópicas e homogêneas. O estudo é feito em regime elástico linear mediante a hipótese de pequenas deformações e com o equilíbrio na posição indeslocada. Atenção especial é dirigida para as similaridades entre as teorias de *Kirchhoff*, *Reissner* e *Mindlin*, sendo as duas últimas teorias mais consistentes e, permitindo não apenas a análise de placas finas, mas também as moderadamente espessas. Através de um sistema de equações de sexta ordem, as formulações de *Reissner* e *Mindlin* possibilitam o atendimento das três condições físicas necessárias para o problema de placas, incluindo a consideração de condições de contorno relativas à rotação no plano vertical tangente ao contorno. Estas formulações, mais compreensivas e próximas à teoria exata, podem ser aplicadas na

análise dos problemas de placa de pequena espessura e também moderadamente espessas.

O trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica sobre as teorias de placa e também sobre o *Método dos Elementos de Contorno* aplicado a estas teorias. No capítulo 2, apresentam-se relações básicas da teoria tridimensional da elasticidade em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas, com o objetivo de ilustrar a teoria bidimensional de placa de uma maneira mais geral.

No capítulo 3, é apresentado um resumo da teoria de placas finas de *Kirchhoff*, onde são obtidas as expressões de esforços em função do deslocamento em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Neste capítulo é obtida uma solução fundamental de placas finas ou seja, a função deslocamento para uma placa infinita submetida a um carregamento transversal definido pela função delta de *Dirac*.

No capítulo 4, é apresentada uma formulação com base na teoria de *Mindlin*, onde são obtidas expressões de esforços em função de deslocamentos generalizados em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Neste contexto, são obtidas as soluções fundamentais para placas de espessura moderada, a partir da solução das equações diferenciais em termos de deslocamentos generalizados. Também são apresentadas, com base na teoria de *Reissner*, outras soluções fundamentais para as placas moderadamente espessas.

No capítulo 5, são apresentadas as equações integrais de placa. Para esta formulação, são desenvolvidas equações integrais de placas finas e moderadamente espessas. Cabe observar que, o desenvolvimento das equações integrais das placas de espessura moderada mostra o bom relacionamento entre as teorias de *Reissner* e *Mindlin*.

No capítulo 6, é apresentada a formulação direta do *Método dos Elementos de Contorno*. As equações integrais de placa são transformadas em equações algébricas lineares mediante a escolha de funções aproximadoras para os deslocamentos e esforços em subdomínios do contorno que são denominados elementos de contorno. Escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno, obtém-se um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos definidos no contorno. Com a fixação das

condições de contorno e a resolução final do sistema de equações resultante, valores de contorno são obtidos. A partir dos valores encontrados no contorno, são determinados os deslocamentos e esforços em qualquer ponto do domínio.

Fazendo-se uso desta forma de análise, são apresentados no capítulo 7, os resultados de alguns exemplos numéricos obtidos através do **MEC**, seguindo-se as formulações de *Kirchhoff*, *Mindlin* e *Reissner* para placas finas e de espessura moderada.

No capítulo 8, são apresentadas as estruturas dos programas para análise de placa, definindo-se de maneira geral todas as subrotinas necessárias para o cálculo dos esforços e deslocamentos neste elemento estrutural.

O capítulo 9 faz algumas conclusões sobre o estudo realizado no presente trabalho e cita alguns passos complementares que podem ser desenvolvidos em estudos futuros.

1.2 - Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas

A adoção de hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, fez surgir diferentes teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural.

Acredita-se que a primeira equação descrevendo a flexão de placas foi proposta por *Navier* **[1]** em 1823, com a rigidez à flexão definida em termos de uma constante elástica, necessitando-se de três condições de contorno naturais. Em 1850, **KIRCHHOFF [2]** estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez a flexão foi definida em termos do módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson*. Adicionalmente, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostas por **POISSON [3]** não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação

diferencial obtida e mostrou que poderiam ser reduzidas a duas condições de contorno naturais. Esta teoria não leva em conta o efeito da deformação por cortante, assumindo-se que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. As hipóteses apresentadas por *Kirchhoff* resultaram em uma equação diferencial de quarta ordem, sendo o deslocamento uma função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação pode ser considerada como uma eficiente representação do comportamento de placas finas para pequenos deslocamentos, apresentando boa precisão de resultados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias.

Entretanto, a teoria desenvolvida por *Kirchhoff* não obtém bons resultados quando são analisadas placas de maior espessura, especialmente no caso de carga concentrada com módulo elevado. Neste caso, a teoria de placas moderadamente espessas deve ser aplicada, tornando o problema de flexão de placas mais análogo e próximo à teoria tridimensional da elasticidade. Pode-se citar a teoria formulada em 1944 por **REISSNER [4]**, que assume uma distribuição de tensões internas e leva em consideração o efeito da deformação por cortante. Com isso, é obtido um sistema de equações diferenciais de sexta ordem e, a partir deste sistema, satisfaz-se as três condições de contorno necessárias para o problema. Em 1951, **MINDLIN [5]** também formulou uma teoria semelhante para analisar placas moderadamente espessas onde, assumindo constantes as distorções que ocorrem na espessura, as tensões foram obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem e também satisfaz as três condições de contorno requeridas. As formulações apresentadas por *Reissner* e *Mindlin* podem ser consideradas como expressivas contribuições para o aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

Em 1960, **SALERNO ε GOLDBERG [6]** apresentaram uma equação diferencial de quarta ordem semelhante à da teoria clássica e uma equação diferencial de segunda ordem com o intuito de reduzir o sistema de equações diferenciais de sexta ordem proposto por *Reissner*. Os resultados apresentados são próximos à teoria clássica.

Em 1975, **PANE [7]** discutiu as diversas teorias para análise estática de placas. Mais tarde, **BARRET ε ELLIS [8]** mostraram que o problema de flexão de placas submetida a um carregamento transversal relaciona-se com o problema tridimensional da elasticidade. Também foram analisadas as teorias de *Kirchhoff*, *Reissner* e *Mindlin*, mostrando como estas teorias se relacionam com a teoria exata de placas obtida do modelo tridimensional proposto por **CHENG [9]**.

Para mostrar que seus resultados são consistentes com os resultados clássicos, **REISSNER [10]** em 1987, apresentou uma teoria abordando a flexão de placas moderadamente espessas, cujo sistema de equações diferenciais é de décima ordem.

Em 1988, **LADEVÈZE ε PECASTAINGS [11]** propuseram uma versão melhorada da teoria de *Reissner* para o caso de placas homogêneas e isotrópicas com condições de contorno variadas. A divergência da teoria de *Reissner* está no fator de deformabilidade por cisalhamento e nas condições de contorno.

Em 1991, **REISSNER [12]** estudou o conceito de *apoio soft*, como uma condição para a transição suave de sua teoria de sexta ordem para a teoria clássica de quarta ordem.

No atual estágio de desenvolvimento, a análise das equações diferenciais de flexão de placas pela teoria elástica dos corpos tridimensionais, ou tendo como base os trabalhos de **CHENG [9]** e **GREGORY ε WAN [13]**, mostra a grande influência da espessura nos deslocamentos de flexão e demonstra a boa estabilidade da conexão entre as teorias de flexão de placas finas (*Kirchhoff*) com as de flexão de placas moderadamente espessas por deslocamentos impostos (*Mindlin*) ou por tensões impostas (*Reissner*). Isto comprova a existência de condições de empregar as teorias de placas moderadamente espessas em problemas envolvendo placas de pequena espessura.

1.3 - Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas Através do Método dos Elementos de Contorno

O desenvolvimento de equações integrais no final do século XIX, onde foram realizados uma grande quantidade de trabalhos teóricos para problemas da elasticidade estática e dinâmica, pode ser considerado como um dos passos mais importantes para o posterior desenvolvimento das técnicas de contorno.

Em 1903, **FREDHOLM [14]** foi quem apresentou a primeira teoria clássica das equações integrais com núcleos definidos e integráveis para um problema linear elástico. Para solução das equações, ele enunciou as condições de existência e unicidade conhecidas como teoremas de *Fredholm*. Nas décadas de 50 e 60, os trabalhos de uma série de autores Russos como **MIKHLIN [15]**, **MUSKHELISHVILI [16]**, **KUPRADZE [17]** e **SMIRNOV [18]**, ofereceram um entendimento mais rigoroso do uso das equações integrais em problemas físicos. Eles resolveram equações integrais singulares e descontínuas para problemas de elasticidade plana utilizando o chamado *Método Indireto*. A forma mais simples de utilização deste método, consiste no uso de soluções singulares unitárias que satisfazem as equações diferenciais do problema no domínio com densidades e incógnitas especificadas. Estas densidades não tem significado físico mas, com sua obtenção a partir da prescrição de condições de contorno num número de pontos, deslocamentos e tensões podem ser facilmente encontrados. As bases das formulações indiretas foram estabelecidas por **KUPRADZE [17]** adotando a solução fundamental de *Kelvin* **[1]** para resolver problemas de elastostática.

No início de 1963, **JASWON [19]** e **SYMM [20]** apresentaram uma técnica numérica para solução da equação integral de contorno de *Fredholm*, que consiste em discretizar o contorno em uma série de pequenos elementos e assumir uma fonte constante de densidade dentro de cada elemento. Eles empregaram a técnica de colocação para obter o sistema de equações e computar os coeficientes de influência usando a regra de *Simpson* como técnica numérica, com exceção dos coeficientes singulares que foram computados analiticamente ou por soma dos termos de diagonais. Adicionalmente, propuseram uma formulação mais geral através da

aplicação da terceira identidade de *Green* com potenciais e suas derivadas desconhecidas no contorno **[19, 21]**. As formulações diretas do **MEC** para problemas elásticos foram apresentadas em 1967 por **RIZZO [22]** para a solução de um problema bidimensional. O estudo foi estendido por **CRUSE [23]** para o caso tridimensional. A representação integral básica conhecida como identidade *Somigliana* **[1]** foi escrita discretizando o contorno através de elementos constantes. As formulações diretas, que são mais confiáveis que as técnicas indiretas, tem por base a adoção das variáveis físicas do problema como incógnitas no sistema de equações.

O grande avanço nas técnicas de contorno tem sua origem no trabalho de **LACHAT [24]**, em 1975, que tratava de problemas bi e tridimensionais da elasticidade. No ano de 1978, **BREBBIA [25]** consegue fazer uma maior generalização do método, onde apresenta uma formulação a partir da *Técnica dos Resíduos Ponderados*, começando desta forma a ser intensamente estudado em diversos centros de pesquisa. Destacam-se as formulações no campo da elasticidade linear utilizando soluções fundamentais próprias para a consideração de superfície livre, muito versáteis na solução de problemas que envolvem a análise de tensões próximas a uma borda livre **[26, 27]**. Uma grande variedade de formulações não lineares, de grande interesse para a solução de problemas da engenharia, também foram desenvolvidas.

O desenvolvimento de formulações para a análise de placas através do *Método dos Elementos de Contorno* se dá neste contexto, onde a maioria dos trabalhos desenvolvidos são baseados nas hipóteses da teoria clássica de *Kirchhoff*. O trabalho que pode ser considerado como referência inicial é devido a **JASWON et alii [28]** de 1967, sugerindo a decomposição de uma equação bi-harmônica em duas harmônicas que resolvidas e combinadas, permitem a obtenção da solução final. No ano de 1978, através da teoria de *Kirchhoff*, **BEZINE** ε **GAMBY [29]** propuseram uma formulação direta do **MEC**, considerando como variáveis de contorno as variáveis físicas do problema real. Os trabalhos desenvolvidos por **DANSON [30]**, **BEZINE [31]** e **STERN [32]** também trataram o problema de flexão de placas através das formulações diretas do **MEC** considerando a teoria clássica de *Kirchhoff*.

Com base nas hipóteses de *Kirchhoff*, **PAIVA [33]**, buscou diversas alternativas para o equacionamento do problema de flexão de placas, ora considerando as equações com pontos de colocação no contorno, ora fora dele. Também realizou uma extensão do método para analisar estruturas formadas por placas, vigas e pilares.

O problema de flexão de placas moderadamente espessas, através da teoria de *Reissner*, foi idealizado por **WEEËN [34, 35]** em 1982. Para cada ponto de contorno, foi estabelecido um sistema de três equações integrais em termos de um deslocamento e duas rotações e em contrapartida um esforço cortante e dois momentos fletores. Nesta formulação, o contorno foi aproximado por elementos isoparamétricos quadráticos. Os trabalhos de **LONG [36]**, **KARAM [37]** e **RIBEIRO [38]** também tratam do problema de flexão de placas moderadamente espessas através da teoria de *Reissner*. Da mesma forma, em 1989, **RIBEIRO** ε **VENTURINI [39]** a partir do trabalho original de *Weeën*, propuseram um sistema de equações lineares tomando os pontos de colocação fora do domínio da placa, no sentido de evitar a ocorrência de singularidades. O trabalho de **WESTPHAL** ε **DE BARCELLOS [40]** trata o problema de flexão de placas moderadamente espessas através das teorias de *Reissner* e *Mindlin*. Em 1987, **DE BARCELLOS** ε **SILVA [41]** trataram o mesmo problema utilizando funções de *Green* modificadas e tendo como base a teoria de *Mindlin*.

Em 1992, **VILMANN** ε **DASGUPTA [42]** desenvolveram uma solução fundamental para a flexão de placas de espessura moderada, baseando-se na teoria de *Mindlin*. As condições de contorno fixadas, utilizadas para obter as soluções, não foram completamente detalhadas em **[42]**.

No ano de 1994, **EL-ZAFRANY et alii [43]** desenvolveram soluções fundamentais modificadas para placas finas e moderadamente espessas com formas arbitrárias. Eles utilizaram funções no núcleo das integrais de contorno que separaram o efeito da deformação por cortante, no sentido de estender sua aplicação às placas finas.

Considerando-se os trabalhos citados, a validade, eficiência e versatilidade do *Método dos Elementos de Contorno* nos problemas de flexão de placas é assegurada pela implementação das várias formulações integrais aplicáveis aos casos de carregamento estático e/ou dinâmico, com espessura constante ou variável. Pode-se afirmar que este método mostra vantagens distintas sobre as técnicas de domínio, tais como o *Método das Diferenças Finitas* e o *Método dos Elementos Finitos*, para uma grande classe de problemas de análise estrutural. O método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos são conhecidos como técnicas de domínio pois as discretizações são feitas em todo o domínio, obtendo-se um número grande de equações algébricas. Dependendo do problema, quando discretiza-se um domínio muito extenso, por exemplo, há a necessidade de armazenar uma grande quantidade de dados, aumentando enormemente o esforço computacional. Uma alternativa para reduzir o tipo e o número destas equações é dada pelas técnicas de contorno, onde a transformação das equações é feita para valores de contorno somente, trazendo na maioria dos casos uma enorme redução na dimensão do problema.

Para utilização do método, primeiramente é necessário a resolução das equações diferenciais do problema de flexão de placas, no sentido de obter soluções fundamentais. Estas soluções são usadas como funções ponderadoras na resolução das equações integrais de contorno. Desta maneira, utiliza-se a formulação direta do método dos elementos de contorno. Em linhas gerais, a superfície que envolve o domínio é discretizada em elementos e funções polinomiais são necessárias para interpolar entre os pontos nodais as variáveis associadas aos nós. Como as incógnitas do sistema são relacionadas somente ao contorno, o interior do domínio não precisa ser discretizado. Após o cálculo das integrais no contorno por processos numéricos e analíticos, são obtidos sistemas de equações com matrizes não simétricas mas, com ordem bem menor que as obtidas com as técnicas de domínio. Após a resolução do sistema de equações, são obtidos resultados no contorno como também em pontos prescritos do domínio.

Capítulo 2

Equações da Elasticidade Linear

2.1 - Introdução

No presente capítulo são apresentadas formulações básicas da teoria da elasticidade linear expressas em função das relações deformação-deslocamento, equação constitutiva e equações de equilíbrio. Nesta teoria, de acordo com o caso tridimensional, existem seis componentes de tensão escritas em função de seis componentes de deformação através da lei de *Hooke*. Assim, para abordar a teoria bidimensional de placas de maneira generalizada, as equações de equilíbrio da placa são expressas em função das seis componentes de tensão. Em contrapartida, as relações tensão-deformação e as expressões para as seis componentes de deformação são escritas em termos de três componentes de deslocamento, reduzindo o número de incógnitas para três nas equações de equilíbrio da placa. Tais relações são escritas em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas, visando a posterior obtenção das equações diferenciais que governam o problema de flexão de placas.

Neste trabalho, os índices latinos {**ijk...**} variam de **1** até **3** e os índices gregos $\{\alpha\beta\gamma...\}$ variam de **1** até **2**.

2.2 - Relação Deformação-Deslocamento

Um sólido contínuo e homogêneo sofre deformação quando a posição relativa entre dois pontos do mesmo é alterada. Este sólido é considerado rígido quando a distância entre qualquer par de pontos do seu interior permanece constante durante o movimento. Desta forma, em um sólido, o movimento de corpo rígido é caracterizado apenas pela translação e rotação.

Na figura 2.1, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, as coordenadas do ponto **P** de um sólido inicialmente na posição indeformada são denotadas por ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$). As coordenadas deste mesmo ponto depois da deformação são denotadas por ($\mathbf{x_1}$+$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{x_2}$+$\mathbf{u_2}$, $\mathbf{x_3}$+$\mathbf{u_3}$), sendo $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$ as componentes do vetor deslocamento.

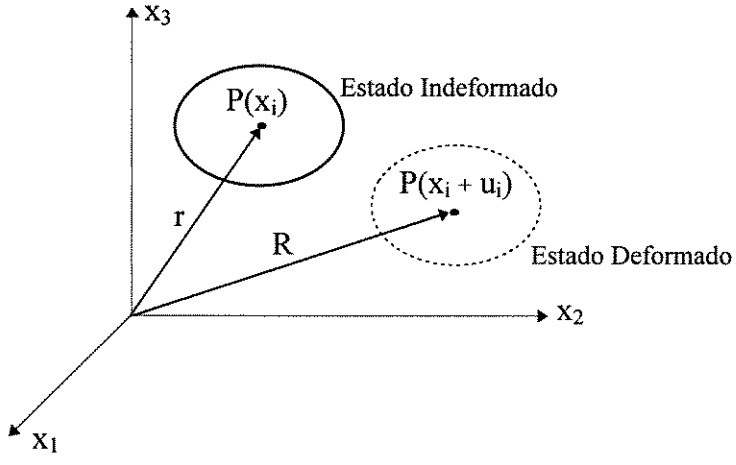

Figura 2.1 - Estado de deformação em um sólido.

Através de uma descrição Lagrangeana, onde todas as quantidades são expressas em termos das coordenadas $\mathbf{x_i}$ da posição inicial, o tensor Lagrangeano de deformações é definido por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right) \tag{2.1}$$

Os termos quadráticos de deslocamento na equação (2.1) são infinitesimais, não tendo contribuição significativa nos problemas aqui analisados. Estes termos podem ser considerados desprezíveis pois as deformações que ocorrem nas estruturas convencionais são muito pequenas. Assim, o tensor de deformações pode ser expresso por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.2}$$

2.3 - Equação constitutiva

Em uma região elástica linear de um sólido contínuo e homogêneo, a equação constitutiva relaciona o tensor de tensões (σ_{ij}) com o tensor de deformações (ε_{ij}) através da lei de *Hooke*. Em qualquer ponto do sólido, as componentes de tensão são relacionadas com as componentes de deformação da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.3}$$

sendo o tensor de quarta ordem $\boldsymbol{C_{ijkl}}$, formado por componentes que contém as constantes elásticas do material.

O tensor $\boldsymbol{C_{ijkl}}$ é composto por 81 constantes elásticas. Entretanto, se forem consideradas as simetrias dos tensores de segunda ordem envolvidos, a existência de uma função de densidade de energia e as propriedades de isotropia, estas constantes podem ser resumidas a apenas duas (**E**, ν). Desta forma, a equação (2.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \tag{2.4}$$

sendo,

δ_{ij}: delta de *Kronecker*,

E: módulo de elasticidade longitudinal,

ν: coeficiente de *Poisson*,

G: módulo de elasticidade transversal, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

A equação (2.4) pode ser escrita em termos de deformações, ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{2.5}$$

2.4 - Equações de Equilíbrio

Considerando-se a figura 2.2, seja um sólido contínuo e homogêneo de volume **V** e área de superfície **A**, onde atuam forças volumétricas $\mathbf{F_i}$ e forças de superfície $\mathbf{t_i}$.

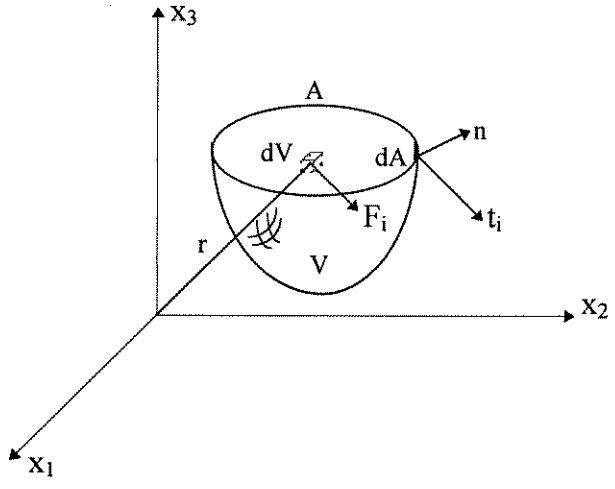

Figura 2.2 - Forças de superfície e de volume.

O equilíbrio estático de um elemento infinitesimal de volume **dV** no interior do sólido é dado por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{2.6}$$

As forças de superfície agindo em um elemento infinitesimal de área **dA**, na superfície do sólido e em uma direção n_j, normal a superfície, são dadas por:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.7}$$

sendo n_j os cosenos diretores dos ângulos formados pelo vetor normal e os eixos coordenados x_i.

Considerando-se as componentes de tensão em um ponto, as forças de superfície são obtidas através do equilíbrio estático de um tetraedro infinitesimal formado por planos que passam por este ponto (figura 2.3).

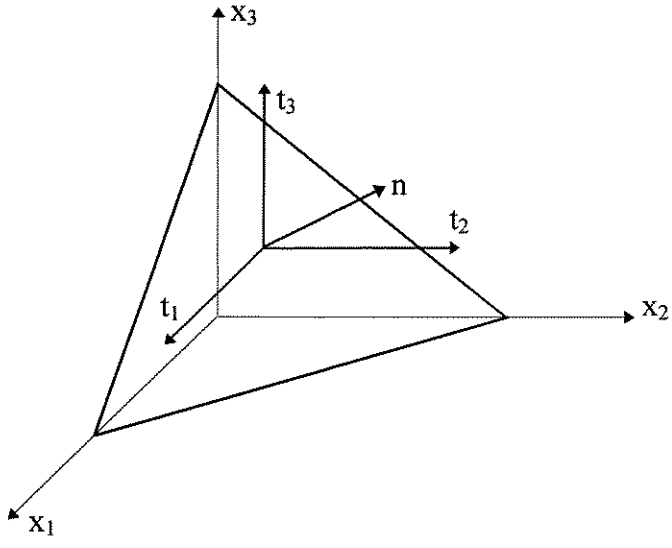

Figura 2.3 - Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal.

2.5 - Relações Tensão-Deformação e Deslocamento em Placas

Através da figura 2.4, um sistema de coordenadas cartesianas ($\mathbf{x_1}$ $\mathbf{x_2}$ $\mathbf{x_3}$) relaciona-se com um sistema de coordenadas cilíndricas ($\mathbf{r}$ θ $\mathbf{x_3}$), de forma a escrever de maneira generalizada as relações básicas da teoria de flexão de placas em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

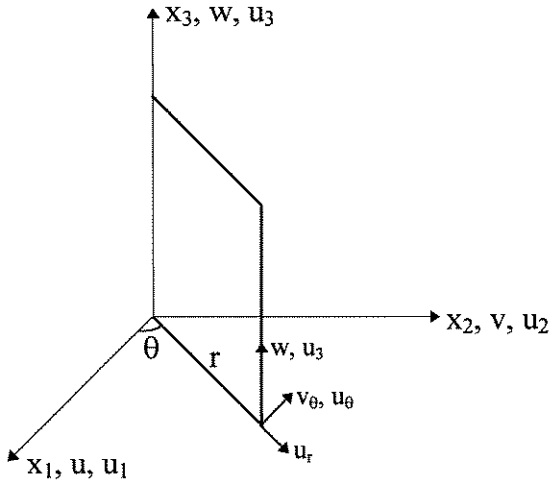

Figura 2.4 - Sistemas de coordenadas.

De acordo com a equação (2.2), para uma placa sujeita a carregamentos normais em sua superfície, os deslocamentos resultantes em sua superfície média são dados por **u**, **v** e **w** ($\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$). Assim, através de um sistema de coordenadas cartesianas, as componentes de deformação em função dos deslocamentos podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.8a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \dfrac{\partial w}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.8b}$$

Com relação a um sistema de coordenadas cilíndricas, a partir de um carregamento aplicado, os deslocamentos resultantes na superfície média da placa são dados por $\mathbf{u_r}$ $\mathbf{v_\theta}$ e $\mathbf{w}$ ($\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_\theta}$, $\mathbf{u_3}$). As componentes de deformação em função dos deslocamentos são escritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.8c}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x_3} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{2.8d}$$

Através da lei de *Hooke*, equação (2.3), as componentes de deformação em função das tensões em um sistema de coordenadas cartesianas são expressas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2.9a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} \tag{2.9b}$$

Da mesma forma, as componentes de deformação em função das tensões em coordenadas cilíndricas são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2.9c}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{pmatrix} \tag{2.9d}$$

As equações (2.9a) e (2.9b), inicialmente expressas em função das componentes de deformação, podem ser invertidas para expressar as componentes de tensão em função das deformações em coordenadas cartesianas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2.10a}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.10b}$$

Seguindo-se as mesmas definições, de acordo com as equações (2.9c) e (2.9d), as componentes de tensão em termos das deformações em coordenadas cilíndricas são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2.10c}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} \tag{2.10d}$$

2.6 - Equações de Equilíbrio em Placas

O equilíbrio estático de um elemento infinitesimal, finito, onde atuam em cada ponto um conjunto de tensões internas, é mostrado na figura 2.5.

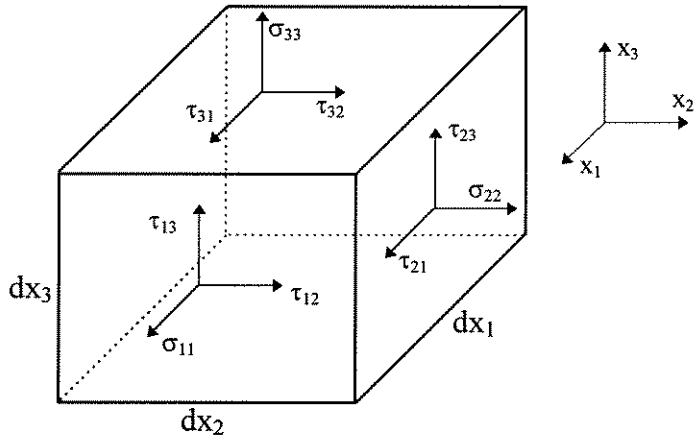

Figura 2.5 - Elemento infinitesimal.

Considerando-se as definições básicas do item 2.4, este equilíbrio estático está sujeito a um sistema de forças volumétricas $\mathbf{F}_i$ e também a um sistema de forças de superfície $\mathbf{t}_i$. Desta forma, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se escrever explicitamente as equações de equilíbrio deste elemento infinitesimal:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \tag{2.11a}$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \tag{2.11b}$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \tag{2.11c}$$

De maneira análoga, para um sistema de coordenadas cilíndricas, o equilíbrio estático é dado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3r}}{\partial x_3} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + F_r = 0 \tag{2.12a}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3\theta}}{\partial x_3} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + F_\theta = 0 \tag{2.12b}$$

$$\frac{\partial \tau_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta 3}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{1}{r}\tau_{r3} + F_3 = 0 \tag{2.12c}$$

As componentes das forças de superfície $\mathbf{t_i}$, expressas em função das componentes de tensão em um ponto da superfície do elemento são dadas por:

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \tag{2.13a}$$

$$t_2 = \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \tag{2.13b}$$

$$t_3 = \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \tag{2.13c}$$

sendo $\boldsymbol{n_j}$ o vetor normal à superfície do elemento.

Capítulo 3

Flexão de Placas Finas

3.1 - Introdução

Segundo **SAADA [44]**, é comum descrever uma placa como um corpo limitado por duas superfícies paralelas planas cuja distância, chamada espessura, é pequena se comparada com as demais dimensões. O plano paralelo às faces inferior e superior, bisseccionando a espessura **h**, é chamado de plano médio da placa.

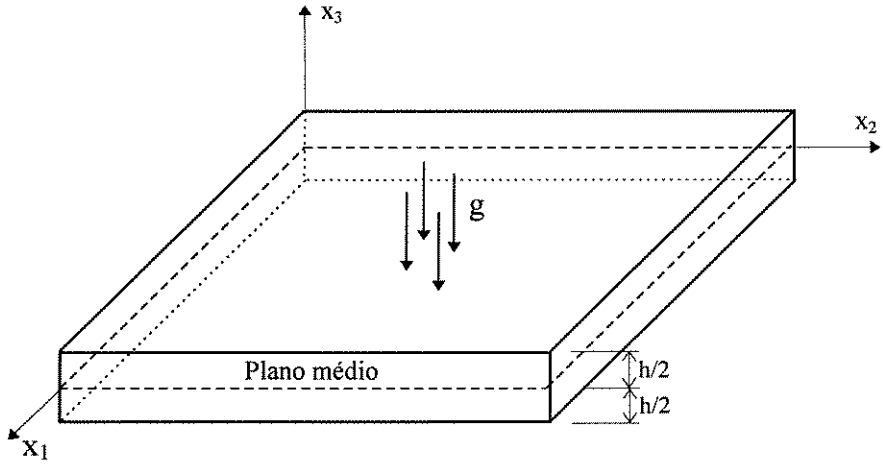

Figura 3.1 - Elemento de placa, definição do sistema de coordenadas.

No presente estudo, para o elemento de placa mostrado na figura 3.1, adota-se um sistema de coordenadas cartesianas de referência (x_1, x_2, x_3). Os eixos coordenados x_1 e x_2 estão contidos no plano médio. O eixo x_3 está posicionado ortogonalmente ao plano médio e tem sua origem contida neste mesmo plano.

É importante observar que o carregamento aplicado em uma placa deve ser sempre considerado normal ao plano médio, podendo ou não estar combinado com outro carregamento paralelo a este plano. Na eventualidade de um carregamento paralelo ao plano médio, seu efeito poderá ser analisado pela teoria dos estados planos de tensões.

Neste capítulo é apresentada a teoria de *Kirchhoff* para placas finas com pequenos deslocamentos. Descrevem-se nos próximos itens as hipóteses básicas desta teoria e um resumo dos principais conceitos teóricos envolvidos.

3.2 - Hipóteses Básicas

A análise do comportamento da placa é feita em regime elástico linear para um material homogêneo e isotrópico. O equilíbrio é feito na posição indeslocada, utilizando-se a hipótese de pequenas deformações. Sendo assim, se a deformação da placa é pequena em comparação com sua espessura, quando a mesma está sujeita a um carregamento $g(x_1, x_2)$, as seguintes hipóteses podem ser adotadas:

i) Os deslocamentos normais ao plano da placa são pequenos e as deformações na direção da espessura pequenas o suficiente, podendo ser desprezadas;

ii) As tensões normais atuando nos planos paralelos ao plano médio são pequenas, quando comparadas com as outras componentes de tensão, e podem ser desprezadas;

iii) As componentes de deslocamento contidas no plano da placa, variam linearmente com a espessura;

iv) Retas normais ao plano médio na posição indeformada permanecem normais após a deformação. Isto significa desprezar as deformações por cortante que causam distorção;

v) Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas paralelas ao plano médio da placa.

A partir destas hipóteses, das equações (2.8a) e (2.8b) da elasticidade, as condições de deformação formuladas por *Kirchhoff* são:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \tag{3.1a}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \tag{3.1b}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \tag{3.1c}$$

3.3 - Equações Constitutivas

De acordo com o item 3.2, o estudo da flexão de placas finas tem como aspecto principal a não consideração do efeito das cortantes nas deformações por flexão. Desta forma, a negligência da influência das cortantes ocorre com a hipótese de que seções planas permanecem planas após a deformação. Esta afirmação é entendida como sendo uma generalização das hipóteses de flexão de vigas longas.

Em função das hipóteses apresentadas nesta teoria, assumida como uma teoria de deformações impostas, pode-se deduzir das equações (3.1) que o deslocamento **w** depende somente de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ e que os deslocamentos **u** e **v** são lineares em $\mathbf{x_3}$. Desta forma, considerando-se as condições de simetria sobre o eixo $\mathbf{x_3}$, faz-se a integração das equações (3.1) em função dos deslocamentos **u**, **v** e **w**, obtendo-se:

$$u = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{3.2a}$$

$$v = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{3.2b}$$

$$w = w(x_1, x_2) \tag{3.2c}$$

Neste momento, deve-se notar que foi adotado o deslocamento nulo no plano médio ou seja, assumiu-se a não existência do estado plano de tensões. Assim, a partir das relações de deformação-deslocamento (2.8a), (2.8b) e derivando-se as equações (3.2), encontra-se:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{3.3a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{3.3b}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.3c}$$

Nas equações a seguir, as tensões σ_{33}, σ_{31} e σ_{32} são assumidas iguais a zero. Então, conhecidas as deformações em um ponto da placa, as relações de tensões para um corpo elástico isotrópico são dadas pelas equações (2.10a) e (2.10b), da seguinte forma:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right) \tag{3.4a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right) \tag{3.4b}$$

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} \tag{3.4c}$$

Substituindo-se nas componentes de tensão, dadas pelas equações (3.4), as componentes de deformação dadas pelas equações (3.3), obtém-se as componentes de tensão em função das curvaturas:

$$\sigma_{11} = -\frac{E x_3}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.5a}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E x_3}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \tag{3.5b}$$

$$\tau_{12} = -2 G x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.5c}$$

Para a determinação das equações governantes da flexão de placas, considere o elemento de placa mostrado na figura 3.2 onde estão indicadas as tensões atuantes em uma fatia paralela ao plano médio:

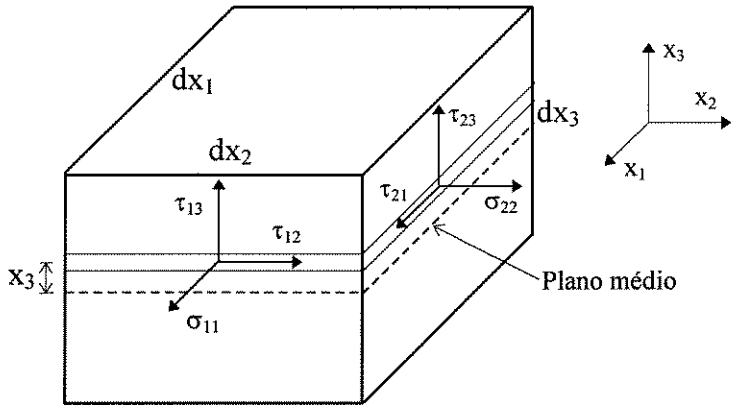

Figura 3.2 - Componentes de tensão em um elemento de placa em flexão.

Utilizando-se a regra da mão direita, os esforços momento fletor e força cortante por unidade de comprimento são obtidos a partir das resultantes das componentes de tensão mostradas na figura 3.2, da seguinte forma:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 \tag{3.6a}$$

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \tag{3.6b}$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} x_3 dx_3 \tag{3.6c}$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} x_3 dx_3 \tag{3.6d}$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13} dx_3 \tag{3.7a}$$

$$Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{23} dx_3 \tag{3.7b}$$

Definidos estes esforços, considera-se agora o equilíbrio estático de todas as forças cortantes e momentos fletores agindo sobre o elemento de placa mostrado na figura 3.3:

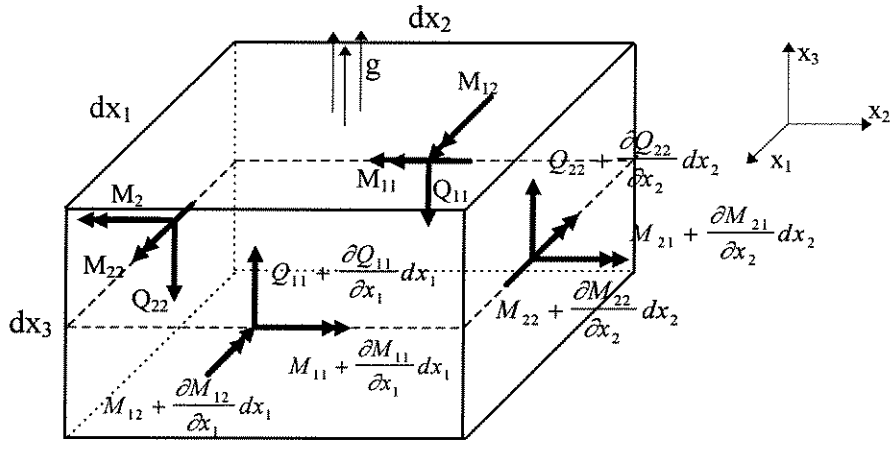

Figura 3.3 - Esforços em um elemento de placa em flexão.

Fazendo-se o equilíbrio estático dos esforços atuantes no elemento de placa da figura 3.3, as equações de equilíbrio escritas em termos de momentos fletores e forças cortantes são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + g = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_{11} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_{22} = 0 \tag{3.10}$$

Considerando-se a simetria do tensor dos momentos ($\mathbf{M_{12}} = \mathbf{M_{21}}$), derivando-se as forças cortantes nas equações de equilíbrio (3.9) e (3.10) e substituindo-se as mesmas em (3.8), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} = -g \tag{3.11}$$

Encontrada uma equação diferencial em função de momentos fletores, torna-se necessário relacionar estes momentos com as curvaturas. Para este fim, substituem-se nas equações (3.6a) a (3.6d) os valores das componentes de tensão apresentados pelas equações (3.5). Lembrando-se que ($\mathbf{M_{12}} = \mathbf{M_{21}}$), os momentos fletores por unidade de largura são:

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.12a}$$

$$M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \tag{3.12b}$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.12c}$$

sendo **D** a rigidez à flexão da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.13}$$

A equação (3.11) pode ser reescrita introduzindo os valores dos momentos fletores em função das curvaturas, apresentados pelas equações (3.12), obtendo-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D} \tag{3.14}$$

A equação (3.14), expressa em função dos deslocamentos **w**, é a equação diferencial de equilíbrio de uma placa fina sujeita a uma carga distribuída **g**. Esta equação é normalmente escrita em sua forma implícita:

$$D.\nabla^2(\nabla^2 w) = g \tag{3.15}$$

sendo ∇^2 um operador diferencial, definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{3.16}$$

As expressões das forças cortantes em função das curvaturas são obtidas substituindo-se nas equações de equilíbrio da placa, (3.9) e (3.10), as derivadas das equações (3.12), ou seja:

$$Q_{11} = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.17a}$$

$$Q_{22} = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.17b}$$

As componentes de momentos fletores e forças cortantes, inicialmente referidas às direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, podem ser escritas em relação a um sistema de coordenadas normais e tangenciais **ns**. Assim, para expressar genericamente as condições de contorno e vinculação é importante a definição dos momentos fletores e forças cortantes em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa.

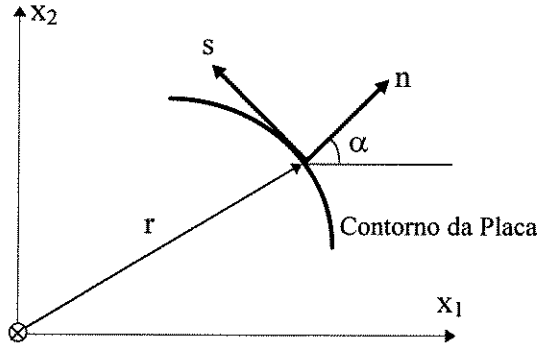

Figura 3.4 - Sistemas de coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$ e **ns**.

O sistema de coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$ pode ser relacionado com o sistema de coordenadas **ns** a partir de uma matriz de transformação de coordenadas, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [T]\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \tag{3.18a}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T]^T\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{3.18b}$$

sendo, **[T]** a matriz de transformação de coordenadas e $\mathbf{[T]^t}$ sua transposta, ou seja:

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{Bmatrix} \tag{3.19a}$$

$$[T]^T = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \tag{3.19b}$$

As componentes de momento fletor e força cortante nas novas coordenadas **ns** podem ser obtidas através de transformações tensoriais para momentos e cortantes, da seguinte forma:

$$\left[M_{ns}\right] = [T]^T \left[M_{x_1x_2}\right][T] \tag{3.20a}$$

$$\left\{Q_{ns}\right\} = [T]^T \left\{Q_{x_1x_2}\right\} \tag{3.20b}$$

As componentes de momento fletor (3.20a) e de força cortante (3.20b) podem ser escritas explicitamente, da seguinte forma:

$$M_n = M_{11}\cos^2\alpha + M_{22}\operatorname{sen}^2\alpha + 2M_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{3.21a}$$

$$M_s = M_{11}\operatorname{sen}^2\alpha + M_{22}\cos^2\alpha - 2M_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{3.21b}$$

$$M_{ns} = \left(M_{22} - M_{11}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + M_{12}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) \tag{3.21c}$$

$$Q_n = Q_{11}\cos\alpha + Q_{22}\operatorname{sen}\alpha \tag{3.22a}$$

$$Q_s = Q_{22}\cos\alpha - Q_{11}\operatorname{sen}\alpha \tag{3.22b}$$

Analogamente, pode-se obter as tensões normais e tangenciais no sistema **ns** a partir das equações de tensões conhecidas no sistema $\mathbf{x_1x_2}$:

$$\left[\sigma_{ns}\right] = [T]^T \left[\sigma_{x_1x_2}\right][T] \tag{3.23}$$

As componentes das tensões normais e tangenciais apresentadas pela equação (3.23) também podem ser representadas na forma explícita, ou seja:

$$\sigma_n = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\,\mathrm{sen}^2\alpha + 2\tau_{12}\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha \tag{3.24a}$$

$$\sigma_{ns} = \left(\sigma_{22} - \sigma_{11}\right)\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + \tau_{12}\left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right) \tag{3.24b}$$

3.4 - Condições de Contorno

A equação diferencial de placas finas, que descreve situações de pequenos deslocamentos, não pode ser solucionada sem uma conveniente prescrição das condições de contorno do problema em consideração.

No caso de vinculações clássicas, para um sistema genérico de coordenadas como o da figura 3.4, as condições de contorno são dadas por:

i) Engaste

$$w = 0 \tag{3.25a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{3.25b}$$

ii) Apoio Simples

$$w = 0 \tag{3.26a}$$

$$M_n = 0 \tag{3.26b}$$

iii) Borda livre

$$M_n = 0 \tag{3.27a}$$

$$M_{ns} = 0 \tag{3.27b}$$

$$Q_n = 0 \tag{3.27c}$$

De acordo com as condições de contorno, **KIRCHHOFF [02]** observou que apenas duas condições são suficientes para a completa determinação de **w**, satisfazendo a equação (3.14). Assim, através do método variacional, *Kirchhoff* mostrou que as condições de contorno para a borda livre são:

$$M_n = 0 \tag{3.28}$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \tag{3.29}$$

As condições de contorno relativas à força cortante $\mathbf{Q_n}$ e ao momento volvente $\mathbf{M_{ns}}$, segundo *Kirchhoff*, podem ser agrupadas em uma única. Esta suposição deu origem a um esforço denominado de força cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{3.30}$$

A partir das equações (3.28) e (3.30), a condição de borda livre torna-se compatível com a ordem da equação diferencial, que só pode ter quatro valores independentes no contorno.

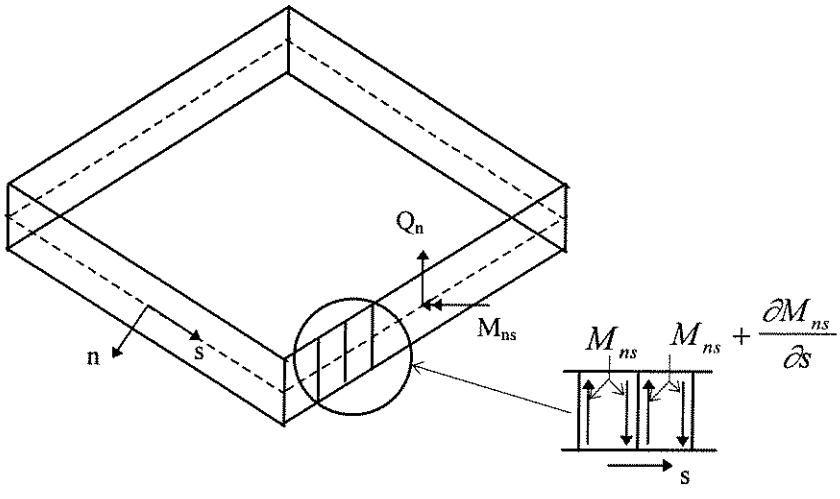

Figura 3.5 - Momentos volventes no contorno.

A figura 3.5 mostra a borda de uma placa com os momentos volventes colocados em forma de binários num elemento infinitesimal. Nota-se que no equilíbrio da interface entre dois elementos infinitesimais consecutivos resulta a equação (3.30).

3.5 - Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas

Para facilitar o estudo da flexão de placas finas torna-se necessário escrever sua equação diferencial em função de coordenadas cilíndricas.

Considere-se a figura 3.6, onde são mostrados os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas:

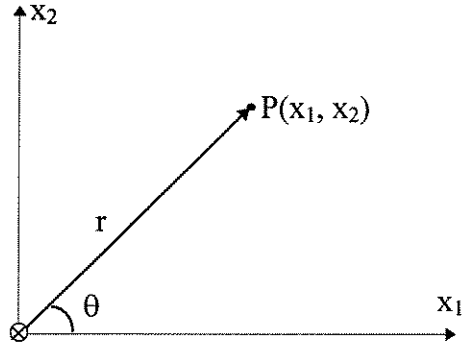

Figura 3.6 - Sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

As relações existentes entre os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas referidas ao ponto **P** da figura 3.6, são as seguintes:

$$x_1 = r \cos\theta \tag{3.31}$$

$$x_2 = r \operatorname{sen}\theta \tag{3.32}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{3.33}$$

$$\theta = arctg \frac{x_2}{x_1} \tag{3.34}$$

A partir das equações (3.31) a (3.34) podem-se obter as derivadas parciais de **r** e θ com relação aos eixos coordenados $\mathbf{x_1x_2}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta \tag{3.35a}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \operatorname{sen}\theta \tag{3.35b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{x_2}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \tag{3.36a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{3.36b}$$

Sendo os deslocamentos transversais **w** da placa dados em função de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{3.37}$$

Substituindo-se as equações (3.35a) e (3.36a) em (3.37), obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \cos\theta\,\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{3.38}$$

De acordo com a equação (3.38) pode-se definir o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_1}$, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.39}$$

Fazendo-se a aplicação do operador diferencial da equação (3.39) na equação (3.38), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) +$$

$$-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{3.40}$$

De forma análoga à determinação das equações (3.38) e (3.40) pode-se obter, em relação ao eixo $\mathbf{x_2}$, as seguintes equações:

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \cos^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) +$$

$$+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{3.42}$$

Derivando-se a equação (3.38) em relação à $\mathbf{x_2}$,obtém-se a derivada mista em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) +$$

$$+\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{3.43}$$

Somando-se as equações (3.40) e (3.42), obtém-se o operador diferencial de *Laplace* em coordenadas cilíndricas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)w \tag{3.44}$$

Portanto, a equação diferencial de placas finas (3.14) em coordenadas cilíndricas é dada pela seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{g}{D} \tag{3.45}$$

A partir das definições dos deslocamentos **w** em coordenadas cilíndricas, os momentos fletores das equações (3.12) podem ser expressos neste sistema de coordenadas utilizando-se as relações encontradas nas equações (3.40), (3.42) e (3.43), resultando-se em:

$$M_{11}=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\cos^2\theta+\nu\,\mathrm{sen}^2\theta\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\left(\mathrm{sen}^2\theta+\nu\cos^2\theta\right)+\right.$$
$$\left.-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \tag{3.46a}$$

$$M_{22}=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\cos^2\theta+\nu\,\mathrm{sen}^2\theta\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\left(\mathrm{sen}^2\theta+\nu\cos^2\theta\right)+\right.$$
$$\left.+2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \tag{3.46b}$$

$$M_{12}=-D(1-\nu)\left[\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \tag{3.46c}$$

De forma análoga, as equações (3.17) que representam as forças cortantes também podem ser escritas em coordenadas cilíndricas e suas expressões finais são dadas por:

$$Q_{11} = -D\left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\nabla w - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla w\right] \tag{3.47a}$$

$$Q_{22} = -D\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r}\nabla w + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla w\right] \tag{3.47b}$$

Conhecidas as expressões em coordenadas cilíndricas dos momentos fletores e forças cortantes, pode-se deduzir neste mesmo sistema de coordenadas as expressões para momentos e forças cortantes normais e tangenciais em um ponto genérico **P** (figura 3.7).

Analisando-se a figura 3.7, β é o ângulo formado pelos versores $\vec{r}$ $\vec{n}$, que somado a θ, formam o ângulo α.

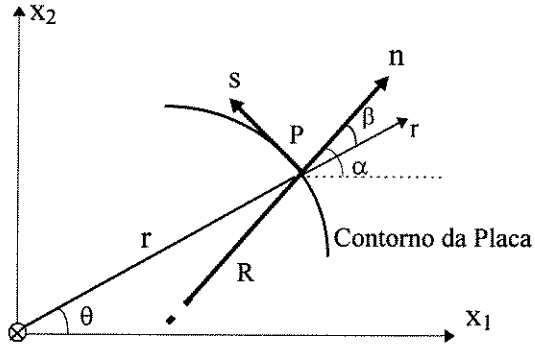

Figura 3.7 - Relação das coordenadas **ns** de um ponto **P** do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Substituindo-se nas equações (3.21) o valor de α=θ + β e os valores das equações (3.46), obtém-se os momentos fletores normais e tangenciais em coordenadas cilíndricas:

$$M_n = -D\left[\left(\cos^2\beta + \nu\operatorname{sen}^2\beta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\operatorname{sen}^2\beta + \nu\cos^2\beta\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \right.$$

$$\left. +2(1-\nu)\operatorname{sen}\beta\cos\beta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] \tag{3.48a}$$

$$M_s = -D\left[\left(\cos^2\beta + \nu\,\text{sen}^2\beta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\text{sen}^2\beta + \nu\cos^2\beta\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \right.$$

$$\left. -2(1-\nu)\,\text{sen}\,\beta\,\cos\beta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] \tag{3.48b}$$

$$M_{ns} = -D(1-\nu)\left[\text{sen}\,\beta\,\cos\beta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \right.$$

$$\left. +\left(\cos^2\beta - \text{sen}^2\beta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \tag{3.48c}$$

Pode-se obter também a força cortante normal ao contorno em coordenadas cilíndricas, substituindo-se a equação (3.47) e o valor de α na equação (3.22a), ou seja:

$$Q_n = -D\left(\frac{\partial}{\partial r}\nabla w\cos\beta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla w\,\text{sen}\,\beta\right) \tag{3.49}$$

Derivando-se a equação (3.48c), que é função de **r**, θ e β, em relação à coordenada **s**, obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} \tag{3.50}$$

As equações das derivadas de **r**, θ e β, em relação à coordenada **s**, são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} = -\,\text{sen}\,\beta \tag{3.51a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\cos\beta}{r} \tag{3.51b}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha + \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \tag{3.51c}$$

sendo, **R** o raio de curvatura do contorno no ponto **P** (figura 3.7).

Substituindo-se na equação (3.50) os resultados encontrados nas equações (3.51), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r}\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta}\cos\beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r}\right)\frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \tag{3.52}$$

Somando-se as expressões de $\mathbf{Q_n}$ e $\frac{\partial \mathbf{M}_{ns}}{\partial \mathbf{s}}$ obtidas das equações (3.49) e (3.52), respectivamente, pode-se escrever a expressão para a força cortante equivalente em coordenadas cilíndricas:

$$V_n = \left(-D\frac{\partial}{\partial r}\nabla w + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta}\right)\cos\beta - \left(D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla w + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\beta +$$

$$+\left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r}\right)\frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \tag{3.53}$$

3.6 - Solução Fundamental

Entende-se solução fundamental como sendo a resposta a um ponto genérico de um domínio (em geral infinito), denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto desse domínio. Para o caso específico de placas finas, o deslocamento **w** em um ponto qualquer ξ, denominado ponto de deslocamento, é devido a uma carga unitária aplicada em outro ponto **x**, denominado ponto de carregamento.

Considere a seguinte equação(ver equação 3.15):

$$D.\nabla^2\left(\nabla^2 w^*\right) = \Delta\left(\xi, x\right) \tag{3.54}$$

A chamada solução fundamental é definida em **BREBBIA ε DOMINGUES [45]** como uma solução singular da equação de *Laplace* com não homogeneidade discreta dada pela função delta de *Dirac*, **Δ(ξ,x)**, apresentada por **CRUSE [46]**.

A função delta de *Dirac* é definida da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\xi, x\right) dx = 1 \tag{3.55a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Delta\left(\xi, x\right) dx = f\left(\xi\right) \tag{3.55b}$$

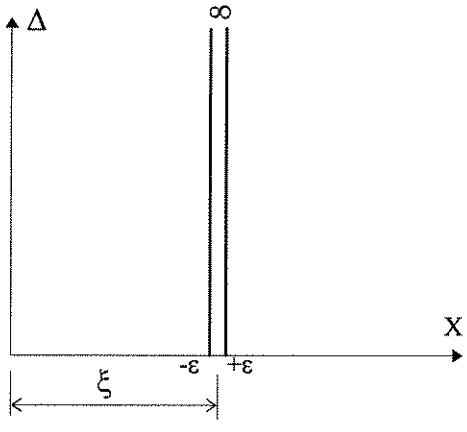

Figura 3.8 - Função delta de *Dirac*.

A figura 3.8 mostra a função delta de *Dirac*, **Δ (ξ, x)**, que é uma função generalizada e pode ser definida como o limite da função normal **[47]**. No limite, a função delta de *Dirac* é nula em todos os pontos do domínio exceto em um ponto onde ela vale infinito, ou seja:

$$\Delta\left(\xi, x\right) = 0 \qquad \text{se } x \neq \xi \tag{3.56a}$$

$$\Delta(\xi, x) = \infty \qquad \text{se } x = \xi \tag{3.56b}$$

Considerando-se um sistema de coordenadas cilíndricas e também a simetria existente, a equação (3.54) pode ser escrita na seguinte forma (ver equação 3.45):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right) = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \tag{3.57}$$

Redefinindo-se a equação (3.57) de uma forma mais conveniente, obtém-se:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw^*}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \tag{3.58}$$

A solução fundamental de placas finas, $\mathbf{w}^*$, é obtida com a resolução da equação diferencial de placas finas (3.58) para todos os pontos do domínio fundamental, exceto no ponto de carregamento.

Impondo-se para a equação (3.58) as condições essenciais em relação à **r**, dadas em **PAIVA [33]**, pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{para } r = 0 \tag{3.59a}$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \tag{3.59b}$$

Utilizando-se as hipóteses apresentadas no trabalho de **DANSON [30]**, as condições essenciais (3.59) e integrando-se sucessivamente a equação (3.58) em relação à **r**, chega-se a:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2}\right) \tag{3.60}$$

A equação (3.60) é a solução fundamental de placas finas, ou seja, o valor do deslocamento **w** numa placa infinita, devido a uma carga concentrada unitária aplicada num ponto distante **r** deste deslocamento.

A partir da equação (3.60) são obtidos os deslocamentos e esforços em um ponto genérico do domínio fundamental. Especificamente, as componentes de momento fletor, a derivada do deslocamento transversal e a força cortante equivalente, são encontradas através da equação (3.60), ou seja:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos\beta \tag{3.61}$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln r + (1-\nu)\cos^2\beta + \nu\right] \tag{3.62}$$

$$M_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{8\pi}\operatorname{sen} 2\beta \tag{3.63}$$

$$V_n^* = \frac{\cos\beta}{4\pi r}\left[2(1-\nu)\operatorname{sen}^2\beta - 3 + \nu\right] + \frac{(1-\nu)}{4\pi R}\cos 2\beta \tag{3.64}$$

Uma dedução mais detalhada das equações (3.60) a (3.64) pode ser encontrada no trabalho de **PAIVA [33]**.

Capítulo 4

Flexão de Placas Moderadamente Espessas

4.1 - Introdução

De acordo com o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores, pode-se observar que a formulação clássica de **KIRCHHOFF [2]** para placas planas finas apresenta algumas hipóteses simplificadoras. Basicamente, o uso das hipóteses simplificadoras levou a redução das três condições de contorno naturais do problema para somente duas, devido a natureza de quarta ordem da equação diferencial. Da mesma forma, observou-se também a ausência do efeito da deformação por cortante na formulação do problema.

As teorias formuladas por **REISSNER [4]** e **MINDLIN [5]** para a flexão de placas moderadamente espessas, consideram as três condições de contorno necessárias, devido a natureza de sexta ordem da equação diferencial. Estas teorias, deduzidas das equações tridimensionais da elasticidade, incluem também o efeito da deformação por cortante na formulação do problema.

Neste capítulo, considerando-se as definições básicas dos capítulos anteriores, é apresentada uma formulação para pequenos deslocamentos de placas planas moderadamente espessas, bem como soluções fundamentais para o referido problema, tendo como base a teoria de *Mindlin*.

De forma análoga, com base na teoria de *Reissner* para flexão de placas moderadamente espessas, são apresentadas as soluções fundamentais propostas por **WEEËN [34, 35]**.

4.2 - Hipóteses Básicas

As hipóteses a serem consideradas para esta formulação, com base na teoria de *Mindlin*, são semelhantes às aquelas apresentadas no capítulo 3.

Entretanto, para a presente formulação, as retas normais ao plano médio da placa na posição indeformada não mais permanecem normais após a deformação. Isto significa incluir as deformações por cortante que causam distorção na peça. Desta forma, a formulação de *Mindlin* assume que a deformação por cortante é constante na espessura.

Considerando-se estas hipóteses, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{4.1a}$$

$$\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3} = 0 \tag{4.1b}$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \tag{4.2}$$

Assim, a partir das equações (4.1), as deformações cisalhantes na direção da espessura são assumidas iguais a valores constantes, ou seja:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G'}\tau_{13} = \kappa_1 \tag{4.3a}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G'}\tau_{23} = \kappa_2 \tag{4.3b}$$

Ao assumir que as deformações cisalhantes são constantes na espessura, é necessário corrigir o módulo de elasticidade transversal **G** para considerar apropriadamente o efeito das tensões de cisalhamento. Para esta correção, **MINDLIN [5]** definiu um parâmetro κ, que foi obtido por considerações de propagação de onda. Para um material com coeficiente de *Poisson* igual a 0.176, este parâmetro apresenta resultados iguais para as teorias de *Mindlin* e *Reissner*. Para materiais com coeficiente de *Poisson* de zero até 0.5 o parâmetro κ muda quase que linearmente, de 0.76 para 0.91, respectivamente. Assim, a correção do módulo de elasticidade transversal, a partir do parâmetro κ, pode assumir o seguinte valor:

$$G' = \kappa^2 G = \frac{\pi^2}{12} G \tag{4.4}$$

4.3 - Equações Constitutivas

Para a formulação desenvolvida neste capítulo, assume-se novamente que **w** depende somente de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ e que **u** e **v** são lineares em $\mathbf{x_3}$. Entretanto, funções desconhecidas dependentes das forças de compressão ou tração contidas no plano da placa, vão aparecer nas expressões dos deslocamentos **u** e **v**.

Assumindo-se a inexistência do estado plano de tensões na placa estudada, estas funções em **u** e **v** são nulas na superfície média. Sendo assim, das equações (4.2), (4.3) e das equações (2.8b) da elasticidade, as deformações na direção da espessura são dadas por:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = \kappa_1 \tag{4.5a}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = \kappa_2 \tag{4.5b}$$

A partir das equações (4.2) e (4.5), pode-se escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} = \kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{4.6b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \tag{4.6c}$$

Fazendo-se a integração das equações (4.6), obtém-se:

$$u = x_3\left(\kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) \tag{4.7a}$$

$$v = x_3\left(\kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \tag{4.7b}$$

$$w = w\left(x_1, x_2\right) \tag{4.7c}$$

Para facilidade, a partir das equações (4.7), considere as seguintes funções:

$$\Psi_1 = \kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{4.8a}$$

$$\Psi_2 = \kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{4.8b}$$

Embora o desenvolvimento apresentado por *Mindlin* não seja exatamente este, procura-se mostrar a relação entre as funções Ψ_i usadas por *Mindlin* e as derivadas da função **w** usada na teoria de placas finas. Cabe observar também que *Mindlin* justificou em seu trabalho o uso das funções Ψ_i como análogas às apresentadas por *Timoshenko* em sua teoria de vigas **[48, 49]**. As funções Ψ_i serão utilizadas nas expressões dos momentos fletores, momentos torçores e esforços cortantes, como

será visto a seguir, já incluindo o efeito da deformação por cortante na formulação do problema.

Assim, considerando-se as equações (4.7) e (4.8) e utilizando-se as equações da elasticidade (2.8a) e (2.8b), obtém-se:

$$\varepsilon_{11} = x_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \tag{4.9a}$$

$$\varepsilon_{22} = x_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \tag{4.9b}$$

$$\gamma_{12} = x_3 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \tag{4.9c}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \tag{4.9d}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \tag{4.9e}$$

Através das relações tensão-deformação apresentadas em (2.10a), (2.10b) e das equações (4.9), pode-se escrever:

$$\sigma_{11} = \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \tag{4.10a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \tag{4.10b}$$

$$\tau_{12} = \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \tag{4.10c}$$

$$\tau_{13} = G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \tag{4.10d}$$

$$\tau_{23} = G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right) \tag{4.10e}$$

Analogamente às definições do capítulo 3, substituindo-se as equações (4.10) nas equações de momentos fletores definidas em (3.6), obtém-se:

$$M_{11} = D\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{4.11a}$$

$$M_{22} = D\left(\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{4.11b}$$

$$M_{12} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right) \tag{4.11c}$$

Através das equações (3.9) e (3.10) de equilíbrio da placa e das derivadas das equações (4.11), obtém-se:

$$Q_{11} = D\left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2}\right)\right] \tag{4.12a}$$

$$Q_{22} = D\left[\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2}\right)\right] \tag{4.12b}$$

Fazendo-se as derivadas das equações (4.12) e utilizando-se a equação de equilíbrio das forças cortantes (3.8), obtém-se a equação diferencial de placas moderadamente espessas com relação às funções Ψ_i:

$$\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^3} = -\frac{g}{D} \tag{4.13}$$

Na forma implícita a equação (4.13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right) = -\frac{g}{D} \tag{4.14}$$

A partir das equações (3.7), das equações (4.3) e da equação (2.8b), pode-se escrever:

$$Q_{11} = G'h\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1\right) \tag{4.15a}$$

$$Q_{22} = G'h\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2\right) \tag{4.15b}$$

Introduzindo-se as derivadas das equações (4.15) na equação de equilíbrio para cortantes (3.8), obtém-se a equação diferencial de placas moderadamente espessas em relação ao deslocamento e as funções Ψ_i:

$$\left(\nabla^2 w + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right) = -\frac{g}{G'h} \tag{4.16}$$

De forma generalizada, a partir da teoria formulada por *Mindlin*, é mais usual escrever as equações governantes como três expressões em termos do deslocamento **w** e das funções Ψ_1 e Ψ_2, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2\right) + \frac{24(1+\nu)}{\pi^2 Eh} g = 0 \tag{4.17a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 + \frac{2h^2}{\pi^2(1-\nu)}\left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2}\right)\right] = 0 \tag{4.17b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 + \frac{2h^2}{\pi^2(1-\nu)}\left[\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2}\right)\right] = 0 \tag{4.17c}$$

4.4 - Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas

De acordo com o item 4.3 e as definições de coordenadas cilíndricas apresentadas no capítulo 2, assume-se que **w** depende somente de **r** e θ e que $\mathbf{u_r}$ e $\mathbf{v_\theta}$ são lineares em $\mathbf{x_3}$. Da mesma forma, funções desconhecidas vão aparecer nas expressões de $\mathbf{u_r}$ e $\mathbf{v_\theta}$ que são assumidas nulas pela inexistência do estado plano de tensões na placa estudada.

Considerando-se as equações (4.3) e as equações (2.8d) da elasticidade em termos de coordenadas cilíndricas, pode-se escrever:

$$\gamma_{r3} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \kappa_r \tag{4.18a}$$

$$\gamma_{\theta 3} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = \kappa_\theta \tag{4.18b}$$

Considerando-se as equações (4.2) e (4.18), pode-se escrever:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_3} = \kappa_r - \frac{\partial w}{\partial r} \tag{4.19a}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} = \kappa_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{4.19b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \tag{4.19c}$$

Fazendo-se a integração das equações (4.19), obtém-se:

$$u_r = x_3 \left(\kappa_r - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \tag{4.20a}$$

$$v_\theta = x_3 \left(\kappa_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \tag{4.20b}$$

$$w = w(r, \theta) \tag{4.20c}$$

A partir das equações (4.20), consideram-se as seguintes funções:

$$\Psi_r = \kappa_r - \frac{\partial w}{\partial r} \tag{4.21a}$$

$$\Psi_\theta = \kappa_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{4.21b}$$

Das equações (4.20), (4.21) e fazendo-se uma analogia às equações da elasticidade (2.8c) e (2.8d), obtém-se:

$$\varepsilon_{rr} = x_3 \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} \tag{4.22a}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{x_3}{r}\left(\Psi_r + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{4.22b}$$

$$\gamma_{r\theta} = x_3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial r} - \frac{\Psi_\theta}{r}\right) \tag{4.22c}$$

$$\gamma_{r3} = \frac{\partial w}{\partial r} + \Psi_r \tag{4.22d}$$

$$\gamma_{\theta 3} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \Psi_\theta \tag{4.22e}$$

Através das relações tensão-deformação apresentadas em (2.10c), (2.10d) e das equações (4.22), pode-se escrever:

$$\sigma_{rr} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial r} + \nu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \Psi_r\right)\right) \tag{4.23a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \Psi_r\right) + \nu\frac{\partial \Psi_r}{\partial r}\right) \tag{4.23b}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2}\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta} - \Psi_\theta\right) + \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}\right) \tag{4.23c}$$

$$\tau_{r3} = G'\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \Psi_r\right) \tag{4.23d}$$

$$\tau_{\theta 3} = G'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \Psi_\theta\right) \tag{4.23e}$$

Substituindo-se as equações (4.23) nas equações de momentos fletores definidas em (3.6), obtém-se:

$$M_{rr} = D\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial r} + \nu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} + \Psi_r\right)\right) \tag{4.24a}$$

$$M_{\theta\theta} = D\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} + \Psi_r\right) + \nu\frac{\partial\Psi_r}{\partial r}\right) \tag{4.24b}$$

$$M_{r\theta} = D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta} - \Psi_\theta\right) + \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}\right) \tag{4.24c}$$

A partir das equações (3.7), das equações (4.18) e das equações de deformação-deslocamento (2.8d), pode-se escrever:

$$Q_r = G'h\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \Psi_r\right) \tag{4.25a}$$

$$Q_\theta = G'h\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \Psi_\theta\right) \tag{4.25b}$$

Os esforços momento fletor e força cortante definidos em (4.24) e (4.25) são necessários para a obtenção das equações de equilíbrio da placa de espessura moderada em coordenadas cilíndricas. Portanto, para a determinação das equações de equilíbrio da placa, considere-se um elemento placa equilibrado pelos esforços de momento fletor $\mathbf{M_{rr}}$, $\mathbf{M_{\theta\theta}}$, $\mathbf{M_{r\theta}}$ e pelos esforços de força cortante $\mathbf{Q_r}$ e $\mathbf{Q_\theta}$ conforme mostrado na figura 3.2.

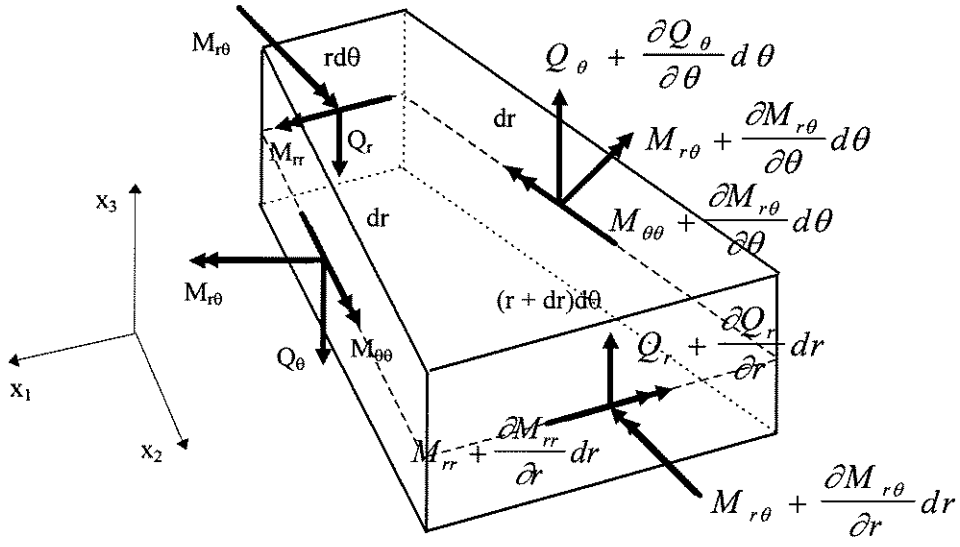

Figura 4.1 - Equilíbrio de momentos fletores e forças cortantes em um elemento de placa.

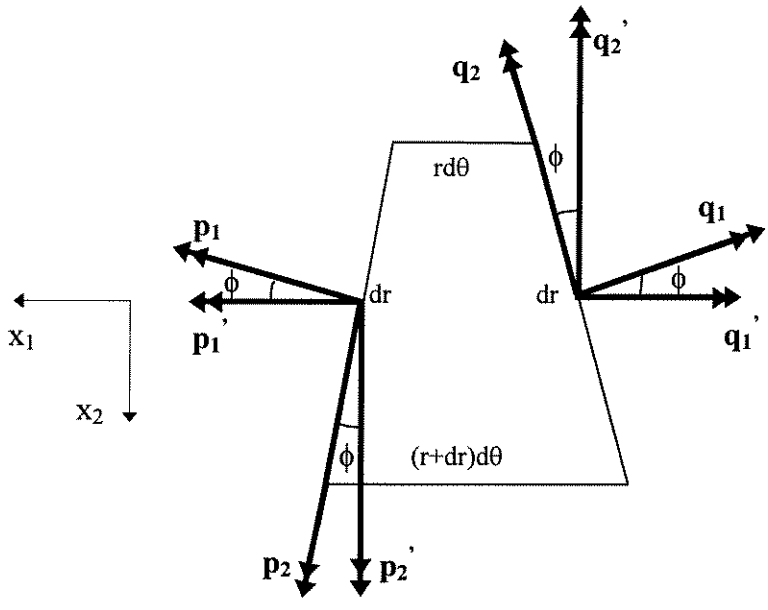

Figura 4.2 - Vetores de transformação de coordenadas.

A figura 4.2 mostra as transformações de coordenadas do lado esquerdo e direito das bordas inclinadas do elemento de placa, de forma a rearranjar nas direções horizontais e verticais as componentes de momento fletor apresentadas na figura 4.1.

Considerando-se a geometria dos pequenos deslocamentos, onde o **sen**ϕ pode ser aproximado pelo ângulo ϕ, a transformação de coordenadas para o lado esquerdo da borda inclinada é dada por:

$$p_1' = p_1 + p_2\phi \tag{4.26a}$$

$$p_2' = p_2 - p_1\phi \tag{4.26b}$$

Da mesma forma, a transformação de coordenadas para o dado direito da borda inclinada é dada por:

$$q_1' = q_1 - q_2\phi \tag{4.27a}$$

$$q_2' = q_2 + q_1\phi \tag{4.27b}$$

Em função da transformação de coordenadas, a equação de equilíbrio de momentos e cortantes em relação a **r** é dada por:

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left(M_{rr} - M_{\theta\theta}\right) - Q_r = 0 \tag{4.28}$$

A equação de equilíbrio em relação a θ para momentos fletores e forças cortantes é dada por:

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0 \tag{4.29}$$

Fazendo-se o equilíbrio das forças cortantes, obtém-se:

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} + g = 0 \tag{4.30}$$

As derivadas das equações (4.24) em relação a **r** e a θ são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} = D\left\{\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial r^2} + \nu\left[-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} + \Psi_r\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial\Psi_r}{\partial r}\right)\right]\right\} \tag{4.31a}$$

$$\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta} = D\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}\right) + \nu\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial r\partial\theta}\right] \tag{4.31b}$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\Psi_\theta - \frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial r^2}\right] \tag{4.31c}$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\theta^2} - \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial r\partial\theta}\right] \tag{4.31d}$$

Substituindo-se as equações (4.24) e (4.31) nas equações de equilíbrio (4.28) e (4.29), obtém-se:

$$Q_r = D\left\{\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} + \Psi_r\right) - \frac{\nu}{2r}\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial\theta\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\nu)}{2r^2}\left(\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\theta^2} - \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right)\right\} \tag{4.32a}$$

$$Q_\theta = D\left\{\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta} - \Psi_\theta\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial r^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}\right) + \frac{\nu}{r}\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial r\partial\theta}\right\} \tag{4.32b}$$

Substituindo-se as derivadas das equações (4.32) na equação de equilíbrio (4.30) e rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\Psi_r}{r}\right)=-\frac{g}{D} \tag{4.33}$$

sendo a equação (4.33), a equação diferencial da placa moderadamente espessa em coordenadas cilíndricas e em função das funções Ψ_r e Ψ_θ.

De acordo com a formulação de *Mindlin*, é mais usual escrever as equações governantes como três expressões em termos do deslocamento **w** e das funções Ψ_r e Ψ_θ. Portanto, a partir da equação (4.33), considerando-se a simetria radial do problema e escrevendo-se de uma maneira mais conveniente, obtém-se uma equação diferencial da placa moderadamente espessa em relação à **r**:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Psi_r}{dr}+\frac{\Psi_r}{r}\right)\right]=-\frac{g}{D} \tag{4.34}$$

sendo o diferencial total, pois a função Ψ_r depende apenas de **r**.

Considerando-se novamente a simetria radial do problema, as outras duas equações diferenciais em termos do deslocamento e rotações são obtidas igualando-se as equações (4.25) com as equações (4.32), ou seja:

$$\frac{dw}{dr}+\Psi_r+\frac{D}{G'h}\left(\frac{d^2\Psi_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_r}{dr}-\frac{\Psi_r}{r^2}\right)=0 \tag{4.35}$$

$$\frac{d^2\Psi_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_\theta}{dr}-\frac{\Psi_\theta}{r^2}-\frac{2G'h}{D(1-\nu)}\Psi_\theta=0 \tag{4.36}$$

sendo o diferencial também total, pois o deslocamento **w** e as funções Ψ_i dependem apenas de **r**.

4.5 - Solução Fundamental através da Teoria de Mindlin

De acordo com formulação apresentada até o presente momento, seguindo-se as hipóteses de *Mindlin*, pode-se observar que as soluções fundamentais da placa moderadamente espessa estão relacionadas ao deslocamento **w** e as funções Ψ_r e Ψ_θ.

Para o caso de Ψ_r, a solução fundamental Ψ_r^* é obtida considerando-se as definições da função delta de *Dirac*. Portanto, a partir da equação diferencial da placa (4.34), pode-se escrever:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Psi_r^*}{dr}+\frac{\Psi_r^*}{r}\right)\right]=-\frac{\Delta(\xi,x)}{D} \tag{4.37}$$

sendo, $\mathbf{r=\{[x_1(x)-x_1(\xi)]^2+[x_2(x)-x_2(\xi)]^2\}^{1/2}}$ a distância entre o ponto singular ξ e o ponto fonte **x**, $\Delta(\xi, \mathbf{x})$ é a chamada função delta de *Dirac* apresentada no trabalho de **CRUSE [46].**

A partir de integrações sucessivas da equação (4.37), pode-se escrever:

$$\frac{d\Psi_r^*}{dr}+\frac{\Psi_r^*}{r}=A_1\ln r+A_2 \tag{4.38}$$

A equação diferencial (4.38) tem por solução geral a seguinte expressão:

$$\Psi_r^*=A_1\left(\frac{r}{2}\ln r-\frac{r}{4}\right)+A_2\frac{r}{2}+A_3\frac{1}{r} \tag{4.39}$$

sendo, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{A_3}$ as constantes obtidas da integração.

Pela condição de simetria do problema, a constante de integração $\mathbf{A_3}$ é obtida fazendo-se o limite da função Ψ_r^* ser nula quando a distância **r** tender a zero, ou seja:

$$\lim_{r \to 0} \Psi_r^* = 0 \tag{4.40}$$

Através da condição (4.40) chega-se a:

$$A_3 = 0 \tag{4.41}$$

A partir da equação (4.41), a equação (4.39) pode ser novamente definida, sendo dada por:

$$\Psi_r^* = A_1\left(\frac{r}{2}\ln r - \frac{r}{4}\right) + A_2\frac{r}{2} \tag{4.42}$$

A constante de integração $\mathbf{A_1}$ é obtida a partir da condição de equilíbrio das forças verticais atuantes em uma circunferência de raio **r**, cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária (figura 4.3).

Pela figura 4.3, a cortante necessária para equilibrar a carga unitária em um ponto qualquer da circunferência é dada por:

$$Q_r = -\frac{1}{2\pi r} \tag{4.43}$$

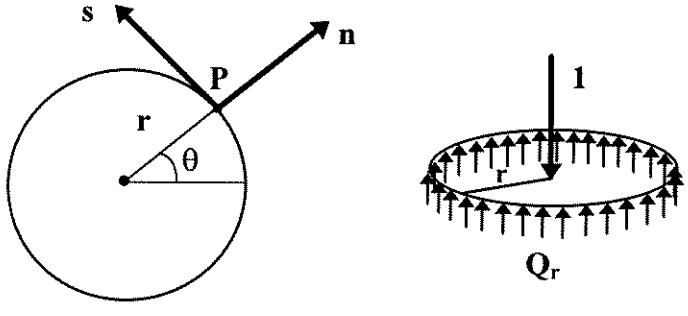

Figura 4.3 - Forças verticais atuantes em uma circunferência de raio **r**.

A cortante $\mathbf{Q_r}$ é obtida através da integração sobre o contorno da circunferência, ou seja:

$$\int_0^{2\pi} Q_r r d\theta = 2\pi r Q_r = -1 \tag{4.44}$$

De acordo com a equação (4.32a), considerando-se a simetria radial do problema, pode-se escrever:

$$Q_r = D\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Psi_r^*}{dr} + \frac{\Psi_r^*}{r}\right)\right] \tag{4.45}$$

Considerando-se a equação (4.45) e substituindo-se o valor de $\mathbf{Q_r}$ pela relação dada em (4.44), chega-se a:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Psi_r^*}{dr} + \frac{\Psi_r^*}{r}\right) = -\frac{1}{2\pi r D} \tag{4.46}$$

Substituindo-se na equação (4.46), o valor da solução fundamental Ψ_r^* dado em (4.42), obtém-se:

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi D} \tag{4.47}$$

A partir da equação (4.47) pode-se escrever:

$$\Psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r\left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + A_2 \frac{r}{2} \tag{4.48}$$

Escrevendo-se a equação (4.48) de uma forma mais conveniente, obtém-se:

$$\Psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \tag{4.49}$$

A partir da solução generalizada para a solução fundamental Ψ_r^*, equação (4.49), pode-se obter soluções diferenciadas para o deslocamento fundamental $\mathbf{w}^*$ da placa moderadamente espessa. Assim, relacionando-se a equação (4.43) com a equação (4.25a) chega-se a:

$$\left(\frac{dw^*}{dr} + \Psi_r^* \right) = -\frac{1}{2\pi G' h r} \tag{4.50}$$

Substituindo-se na equação (4.50) a solução fundamental Ψ_r^*, equação (4.49), e integrando-se $\mathbf{w}^*$ em relação a $\mathbf{r}$, obtém-se uma solução generalizada para o deslocamento fundamental da placa moderadamente espessa:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{(A_2 + 2)}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r + B_1 \tag{4.51}$$

sendo $\mathbf{B_1}$ uma constante obtida da integração.

Como a placa analisada neste trabalho é considerada infinita, o valor de $\mathbf{B_1}$ pode ser entendido como um deslocamento de corpo rígido na solução fundamental. Logo, este deslocamento de corpo rígido poderia ser desprezado, assim:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{(A_2 + 2)}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \tag{4.52}$$

Fazendo-se uma análise das equações (4.49) e (4.52), a constante de integração $\mathbf{A_2}$ poderia ser definida a partir de condições de contorno sobre uma placa qualquer.

No caso da placa estudada neste trabalho, não foram incluídas condições adicionais para esta constante no sentido de considerar apropriadamente o seu efeito. Partindo deste princípio e considerando-se $\mathbf{A_2=-2}$ na equação (4.52), pode-se escrever:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \tag{4.53}$$

Impondo-se o mesmo valor para a constante $\mathbf{A_2}$ na equação (4.49), pode-se escrever:

$$\Psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \tag{4.54}$$

É importante observar que o primeiro termo da equação (4.53) corresponde ao deslocamento fundamental de placas finas através das hipóteses de **BEZINE [31]** e **STERN [32]**, o segundo termo corresponde à inclusão da deformação por cortante na formulação do problema. Na equação (4.54), o valor da solução fundamental Ψ_r^* corresponde a derivada do deslocamento fundamental de placas finas apresentadas pelos mesmos autores.

De maneira análoga, considerando-se $\mathbf{A_2 = -1}$ na equação (4.52), pode-se escrever:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \tag{4.55}$$

Considerando-se o mesmo valor para a constante $\mathbf{A_2}$ na equação (4.49), pode-se escrever:

$$\Psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \ln r \tag{4.56}$$

O primeiro termo da equação (4.55) corresponde ao deslocamento fundamental de placas finas através das hipóteses de **DANSON [30]**. O segundo termo novamente corresponde à inclusão da deformação por cortante na formulação do problema. A equação (4.56) corresponde a derivada do deslocamento fundamental para a solução de placas finas, desenvolvida pelo mesmo autor.

Em última análise, para o caso da função Ψ_θ, a solução fundamental Ψ_θ^* é obtida a partir da equação (4.36) que, escrita de uma maneira mais conveniente é dada por:

$$\frac{d^2\Psi_\theta^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_\theta^*}{dr} - \frac{\Psi_\theta^*}{r^2} - \rho^2\Psi_\theta^* = 0 \tag{4.57}$$

sendo ρ dado por:

$$\rho = \sqrt{\frac{2G'h}{D(1-\nu)}} \tag{4.58}$$

Para a resolução da equação (4.57) é necessário expressá-la em termos de uma equação diferencial conhecida. Neste sentido, considere-se a seguinte transformação:

$$\bar{r} = r\rho \tag{4.59}$$

A derivada de Ψ_θ^* em relação a **r**, é dada por:

$$\frac{\partial\Psi_\theta^*}{\partial r} = \frac{\partial\Psi_\theta^*}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{r}}{\partial r} = \frac{\partial\Psi_\theta^*}{\partial\bar{r}}\rho \tag{4.60}$$

A partir da equação (4.60), obtém-se a segunda derivada de Ψ_θ^* em relação a **r**, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \Psi_\theta^*}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\partial \Psi_\theta^*}{\partial \bar{r}}\rho\right)\frac{\partial \bar{r}}{dr} = \rho^2 \frac{\partial^2 \Psi_\theta^*}{\partial \bar{r}^2} \tag{4.61}$$

Substituindo-se as equações (4.59), (4.60) e (4.61) na equação diferencial (4.59), obtém-se:

$$\frac{d^2 \Psi_\theta^*}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{d\Psi_\theta^*}{d\bar{r}} - \left(\frac{1}{\bar{r}^2} + 1\right)\Psi_\theta^* = 0 \tag{4.62}$$

A equação diferencial (4.62) tem como solução geral as funções de *Bessel* apresentadas em **ABRAMOWITZ ε STEGUN [50]**. Desta forma, considerando-se a equação (4.59), pode-se escrever:

$$\Psi_\theta^* = C_1 I_1(\rho r) + C_2 K_1(\rho r) \tag{4.63}$$

sendo, $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{K_1}$ as conhecidas funções de *Bessel* e $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ constantes a serem determinadas.

Fazendo-se o limite da função Ψ_θ^* ser nulo quando **r** tender ao infinito, pois no infinito a placa é plana, obtém-se:

$$\lim_{r \to \infty} \Psi_\theta^* = 0 \tag{4.64}$$

Aplicando-se o limite no lado direito da equação (4.63), quando **r** tende para o infinito, pode-se escrever:

$$\lim_{r \to \infty} \left[C_1 I_1(\rho r) + C_2 K_1(\rho r)\right] = 0 \tag{4.65}$$

Para a resolução da equação diferencial (4.57) são apresentadas na figura 4.4 as formas de convergência das funções de *Bessel*, necessárias na análise das funções $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{K_1}$ e das equações (4.64) e (4.65).

Analisando-se a figura 4.4, as equações (4.64) e (4.65) pode-se observar que a função $\mathbf{I_1}$ vai para o infinito quando **r** tende para o infinito. Sendo assim, a solução da equação (4.63) deve ser independente de $\mathbf{I_1}$, logo:

$$C_1 = 0 \tag{4.66}$$

A função de *Bessel* $\mathbf{K_1}$ tende a zero quando **r** tende para o infinito. Desta forma, considerando-se a simetria radial do problema, pode-se escrever:

$$C_2 = 0 \tag{4.67}$$

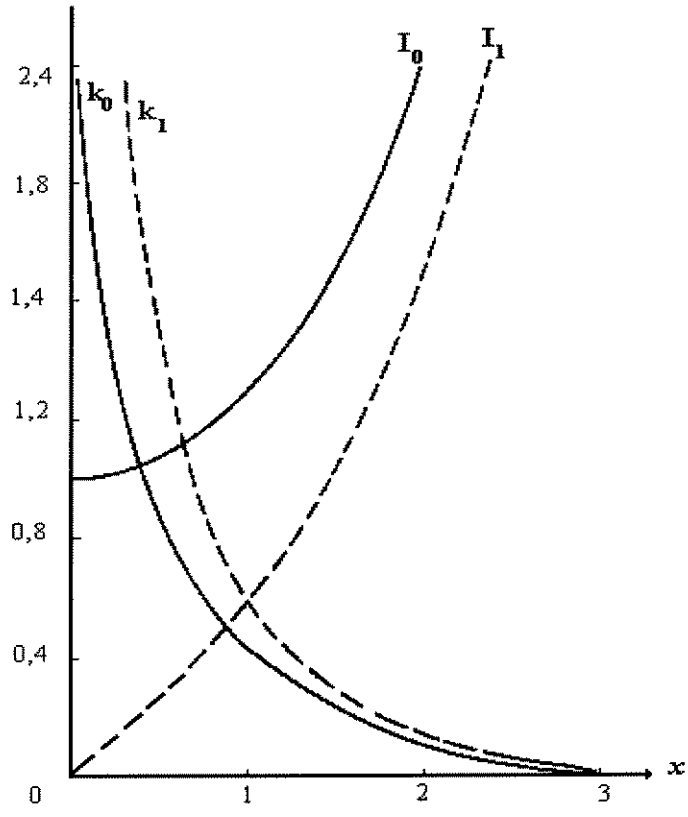

Figura 4.4 - Esboço do gráfico das funções de *Bessel* $\mathbf{I_0}$, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$.

Seguindo-se este desenvolvimento, pode-se concluir que a solução fundamental Ψ_θ^* tem valor nulo, ou seja:

$$\Psi_\theta^* = 0 \tag{4.68}$$

Apesar da equação diferencial ser homogênea esta conclusão poderia ser imediata mas, preferiu-se apresentar a solução completa com objetivo puramente didático.

Assim, encontradas as soluções fundamentais, os esforços fundamentais, momento fletor e força cortante, são determinados a partir das soluções em termos do deslocamento fundamental $\mathbf{w}^*$, equação (4.54), da solução fundamental Ψ_r^*, equação (4.49) e da solução fundamental Ψ_θ^*, equação (4.68). Considerando-se a simetria radial do problema, estes esforços são obtidos a partir das equações (4.24) e (4.25), chegando-se a:

$$M_{rr}^* = -\frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2}\right] \tag{4.69a}$$

$$M_{\theta\theta}^* = -\frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2}\right] \tag{4.69b}$$

$$M_{r\theta}^* = 0 \tag{4.69c}$$

$$Q_{rr}^* = -\frac{1}{2\pi r} \tag{4.70a}$$

$$Q_{\theta\theta}^* = 0 \tag{4.70b}$$

Cabe lembrar que as soluções fundamentais, apresentadas pelas equações (4.49) e (4.54), são formulações generalizadas que podem ser devidamente alteradas. Como exemplo, a adoção de valores arbitrários para a constante $\mathbf{A_2}$, levou-se a formulações conhecidas como as de *Stern-Bezine* e *Danson*.

Portanto, as equações (4.69a) e (4.69b), dependentes das soluções fundamentais, também são formulações generalizadas e podem assumir valores arbitrários conhecidos na bibliografia de placas, de acordo com o problema analisado.

4.6 - Esforços e Deslocamentos Fundamentais Generalizados

Inicialmente, deseja-se rescrever as componentes fundamentais de momentos fletores, equações (4.69), e de esforços cortantes, equações (4.70), relacionando-se as coordenadas cartesianas $\mathbf{x_1x_2}$ com as coordenadas cilíndricas $\mathbf{r\theta}$. Considerando-se as equações (3.20), pode-se escrever:

$$M_{11}^{*} = M_{rr}^{*}\cos^2\alpha + M_{\theta\theta}^{*}\,\mathrm{sen}^2\alpha + 2M_{r\theta}^{*}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \tag{4.71a}$$

$$M_{22}^{*} = M_{rr}^{*}\,\mathrm{sen}^2\alpha + M_{\theta\theta}^{*}\cos^2\alpha - 2M_{r\theta}^{*}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \tag{4.71b}$$

$$M_{12}^{*} = \left(M_{\theta\theta}^{*} - M_{rr}^{*}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + M_{r\theta}^{*}\left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right) \tag{4.71c}$$

$$Q_{11}^{*} = Q_{rr}^{*}\cos\alpha - Q_{\theta\theta}^{*}\,\mathrm{sen}\,\alpha \tag{4.72a}$$

$$Q_{22}^{*} = Q_{rr}^{*}\,\mathrm{sen}\,\alpha + Q_{\theta\theta}^{*}\cos\alpha \tag{4.72b}$$

De acordo com a figura 3.7, pode-se escrever que:

$$\cos\alpha = \frac{\partial r}{\partial x_1} \tag{4.73a}$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{4.73b}$$

Considerando-se a simetria radial do problema, as equações (4.73) e substituindo-se os valores dos momentos fletores fundamentais dados pela equação (4.69), os valores das forças cortantes fundamentais dados pela equação (4.70), nas equações (4.71) e (4.72), respectivamente, obtém-se:

$$M_{11}^{*} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right\} \qquad (4.74a)$$

$$M_{22}^{*} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right\} \qquad (4.74b)$$

$$M_{12}^{*} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} \qquad (4.74c)$$

$$Q_{11}^{*} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_1} \qquad (4.75a)$$

$$Q_{22}^{*} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_2} \qquad (4.75b)$$

As componentes em relação à **r** das soluções fundamentais, equação (4.49), e em relação à θ, equação (4.68), também podem ser reescritas relacionando-se as coordenadas cartesianas $\mathbf{x_1x_2}$ com as coordenadas cilíndricas **rθ**. Assim, considerando-se uma transformação de coordenadas como em (3.18), obtém-se:

$$\Psi_1^* = \Psi_r^* \cos\alpha - \Psi_\theta^* \operatorname{sen}\alpha \tag{4.76a}$$

$$\Psi_2^* = \Psi_r^* \operatorname{sen}\alpha + \Psi_\theta^* \cos\alpha \tag{4.76b}$$

Considerando-se novamente a simetria radial do problema, as equações (4.73) e substituindo-se a solução fundamental Ψ_r^*, equação (4.49), a solução fundamental Ψ_θ^*, equação (4.68), nas equações (4.76), obtém-se:

$$\Psi_1^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_1} \tag{4.77a}$$

$$\Psi_2^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{4.77b}$$

Encontradas as soluções fundamentais em termos de esforços e deslocamentos no sistema de coordenadas cartesianas $\mathbf{x_1 x_2}$, pode-se agora defini-las através de esforços fundamentais generalizados $\mathbf{T_{ij}}^*$ e deslocamentos fundamentais generalizados $\mathbf{U_{ij}}^*$, de acordo com as formulações de **WEEËN [34, 35]**.

Considerando-se as definições de *Weeën*, os esforços fundamentais generalizados para o problema de flexão de placas, em função dos vetores **n** normais ao contorno, podem ser escritos da seguinte forma:

$$T_{31}^* = M_{11}^* n_1 + M_{12}^* n_2 \tag{4.78a}$$

$$T_{32}^* = M_{12}^* n_1 + M_{22}^* n_2 \tag{4.78b}$$

$$T_{33}^* = Q_{11}^* n_1 + Q_{22}^* n_2 \tag{4.78c}$$

sendo, $\mathbf{T_{ij}}^*$ os esforços fundamentais na direção **j** devido a um carregamento aplicado na direção **i**.

Aplicando-se as equações (4.74) e (4.75) nas equações (4.78), os esforços fundamentais de superfície são definidos da seguinte forma:

$$T_{31}^{*} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right\} n_1 + \left[\frac{(1-\nu)}{4\pi}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] n_2 \qquad (4.79a)$$

$$T_{32}^{*} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +\left[(1+\nu)\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right\} n_2 + \left[\frac{(1-\nu)}{4\pi}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] n_1 \qquad (4.79b)$$

$$T_{33}^{*} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n} \qquad (4.79c)$$

Finalmente, com a finalidade de apresentar uma forma mais geral às formulações, as notações $\mathbf{U}^{*}_{31}$, $\mathbf{U}^{*}_{32}$ e $\mathbf{U}^{*}_{33}$ são usadas para definir a solução fundamental Ψ_1^{*}, equação (4.77a), a solução fundamental Ψ_2^{*}, equação (4.77b), e o deslocamento fundamental $\mathbf{w}^{*}$, equação (4.54), respectivamente. A partir destas considerações, pode-se escrever:

$$U_{31}^{*} = -\frac{1}{4\pi D} r\left(\ln r - \frac{(A_2+1)}{2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_1} \qquad (4.80a)$$

$$U_{32}^{*} = -\frac{1}{4\pi D} r\left(\ln r - \frac{(A_2+1)}{2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_2} \qquad (4.80b)$$

$$U_{33}^{*} = \frac{1}{8\pi D} r^2\left(\ln r - \frac{(A_2+2)}{2}\right) - \frac{1}{2\pi G' h}\ln r \qquad (4.80c)$$

sendo, $\mathbf{U_{ij}}^*$ o deslocamento fundamental generalizado na direção **j** devido a um carregamento aplicado na direção **i**.

As equações (4.79) e (4.80) representam uma solução fundamental generalizada para a teoria de *Mindlin*, em termos de esforços e deslocamentos, devido a uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$ de uma placa infinita.

4.7 - Solução Fundamental através da Teoria de Reissner

Com o intuito de obter a solução do problema de placas moderadamente espessas através da teoria de **REISSNER [4]**, são apresentadas neste item as formulações relativas a esta teoria, de forma a mostrar as soluções fundamentais necessárias neste problema.

Seguindo-se as formulações apresentadas por **WEEËN [34, 35]**, as equações de equilíbrio para um elemento de placa infinitesimal sob um carregamento transversalmente distribuído **g**, podem ser escritas por (ver equações 3.8 a 3.10):

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + g = 0 \tag{4.81a}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha = 0 \tag{4.81b}$$

Nesta formulação, as relações esforço-deslocamentos generalizados são escritas da seguinte forma:

$$M_{\alpha\beta} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right] + \frac{\nu}{(1-\nu)}\frac{g}{\lambda^2}\delta_{\alpha\beta} \tag{4.82a}$$

$$Q_\alpha = D\frac{(1-\nu)}{2}\lambda^2\left[u_\alpha + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha}\right] \tag{4.82b}$$

sendo, **D** a rigidez à flexão da placa, λ uma quantidade característica do modelo de *Reissner*, com valor igual a $\sqrt{10}\,/\,h$, $\mathbf{u}_\alpha$ são as rotações nos eixos coordenados $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{u}_3$ o deslocamento na direção do eixo $\mathbf{x}_3$ **[34, 35]**.

Substituindo-se adequadamente as equações (4.82) nas equações (4.81), pode-se escrever as equações de equilíbrio da placa em função dos deslocamentos generalizados, da seguinte forma:

$$\Delta^*_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_j(x) = -F_i(x) + \text{(termos em g)} \tag{4.83}$$

sendo, Δ^*_{ij} as componentes do operador de *Navier*, escritas da seguinte forma:

$$\Delta^*_{\alpha\beta} = D\frac{(1-\nu)}{2}\left[\left(\nabla - \lambda^2\right)\delta_{\alpha\beta}\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right] \tag{4.84a}$$

$$\Delta^*_{\alpha 3} = -\Delta^*_{3\alpha} = -D\frac{(1-\nu)}{2}\lambda^2\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.84b}$$

$$\Delta^*_{33} = D\frac{(1-\nu)}{2}\lambda^2\nabla \tag{4.84c}$$

e $\nabla = \partial^2/(\partial \mathbf{x}_\alpha \partial \mathbf{x}_\alpha)$ é o operador de *Laplace*.

Admitindo-se para a equação (4.83) um carregamento unitário representado pela função delta de *Dirac*, $\Delta(\xi, \mathbf{x})$, pode-se escrever:

$$\Delta^*_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)U^*_{kj}(\xi,x) = -\Delta(\xi,x)\delta_{ik} \tag{4.85}$$

sendo, $\mathbf{U}^*_{\mathbf{kj}}$ a solução fundamental em função dos deslocamentos para a teoria de *Reissner*, $\delta_{\mathbf{ik}}$ o delta de *Kronecker*, ξ é o ponto singular e **x** o ponto fonte. A equação (4.85) é usada para representar uma placa infinita sob a ação de um carregamento unitário ξ na direção **k**.

Segundo **HÖRMANDER [51]** a solução fundamental em deslocamentos $\mathbf{U}^*_{\mathbf{kj}}$, equação (4.85), é representada da seguinte forma:

$$U^*_{kj}(\xi,x) = {}^{co}\Delta^*_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e(\xi,x) \tag{4.86}$$

sendo, ${}^{co}\Delta^*$ a matriz de cofatores e $\boldsymbol{e}(\xi, \mathbf{x})$ uma função escalar.

Substituindo-se a equação (4.86) na equação (4.85), obtém-se:

$$\left[\det\Delta^*\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e(\xi,x) = -\Delta(\xi,x)\right] \tag{4.87}$$

sendo, **det** Δ^* o determinante da matriz Δ^*.

Considerando-se o fato da simetria radial, a equação (4.87) se reduz a:

$$D^3\left(\frac{(1-\nu)}{2}\right)^2\lambda^2\nabla^2(\nabla-\lambda^2)e(r) = -\frac{\Delta(r)}{2\pi r} \tag{4.88}$$

sendo, **r** a distância entre o ponto singular ξ e o ponto fonte **x** e ∇**=(1/r)d/dr(rd/dr)** o operador de *Laplace* em coordenadas cilíndricas.

Uma solução particular para a equação (4.88) é dada por:

$$e(r)=\frac{1}{2\pi D^3\lambda^6}\left(\frac{(1-\nu)}{2}\right)^{-2}\left[K_0(z)+\ln z+\frac{1}{4}z^2(\ln z-1)\right] \tag{4.89}$$

Computando-se o resultado da função escalar ***e***, equação (4.89), na equação (4.86), as soluções fundamentais em deslocamentos $\mathbf{U}^*_{\mathbf{kj}}$ (**k,j**=1,2,3) podem ser escritas da seguinte forma:

$$U^*_{11}=\frac{1}{2\pi D}\left\{\left[B(z)-A(z)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\left[\ln z-\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\} \tag{4.90a}$$

$$U^*_{12}=-U^*_{21}=-\frac{1}{2\pi D}\left[\frac{2}{1-\nu}A(z)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{4.90b}$$

$$U^*_{22}=\frac{1}{2\pi D}\left\{\left[B(z)-A(z)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\left[\ln z-\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\} \tag{4.90c}$$

$$U^*_{13}=-U^*_{31}=\frac{1}{4\pi D}r\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_1} \tag{4.90d}$$

$$U^*_{23}=-U^*_{32}=\frac{1}{4\pi D}r\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{4.90e}$$

$$U^*_{33}=-\frac{1}{2\pi D}\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{2}{1-\nu}\ln z-\frac{1}{4}z^2(\ln z-1)\right] \tag{4.90f}$$

Os correspondentes esforços fundamentais de superfície são escritos da seguinte forma:

$$T_{11}^{*} = -\frac{1}{4\pi r}\left\{\left[4A(z)+2zK_1(z)+1-\nu\right]\left(\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1\right)+\left[4A(z)+1+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1 + \right.$$

$$\left. -\left[16A(z)+4zK_1(z)+2+2\nu\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91a}$$

$$T_{12}^{*} = -\frac{1}{4\pi r}\left\{\left[4A(z)+2zK_1(z)+1-\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+\left[4A(z)+1+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2 + \right.$$

$$\left. -\left[16A(z)+4zK_1(z)+2+2\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91b}$$

$$T_{21}^{*} = -\frac{1}{4\pi r}\left\{\left[4A(z)+2zK_1(z)+1-\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2+\left[4A(z)+1+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1 + \right.$$

$$\left. -\left[16A(z)+4zK_1(z)+2+2\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91c}$$

$$T_{22}^{*} = -\frac{1}{4\pi r}\left\{\left[4A(z)+2zK_1(z)+1-\nu\right]\left(\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right)+\left[4A(z)+1+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2 + \right.$$

$$\left. -\left[16A(z)+4zK_1(z)+2+2\nu\right]\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91d}$$

$$T_{13}^{*} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\left[B(z)n_1 - A(z)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{4.91e}$$

$$T_{23}^{*} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\left[B(z)n_2 - A(z)\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{4.91f}$$

$$T_{31}^{*} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left\{\left[2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\ln z-1\right]n_1+2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91g}$$

$$T_{32}^{*} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left\{\left[2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\ln z-1\right]n_2+2\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{4.91h}$$

$$T_{33}^{*} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n} \tag{4.91i}$$

sendo:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \tag{4.92a}$$

$$z = \lambda r \tag{4.92b}$$

$$r = \left\{\left[x_1(x) - x_1(\xi)\right]^2 + \left[x_2(x) - x_2(\xi)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.92c}$$

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] \tag{4.92d}$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] \tag{4.92e}$$

onde, $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$ são as funções modificadas de *Bessel* apresentadas em **ABRAMOWITZ ε STEGUN [50]**.

Fazendo-se uma reflexão a este capítulo, é interessante observar que, quando as soluções fundamentais das placas de espessura moderada são obtidas, os termos que contém o carregamento distribuído **g**, equações (4.34) e (4.83), são considerados nulos. Sabe-se que o efeito do carregamento distribuído **g** é o aspecto que leva as equações diferenciais de equilíbrio serem diferentes nas duas teorias. Assim, quando as soluções fundamentais são encontradas, o efeito do carregamento distribuído **g** não é levado em conta. Este fato leva a equações de equilíbrio iguais para as duas teorias, proporcionando que as soluções fundamentais desenvolvidas para a teoria de *Reissner*, apresentadas por **WEEËN [34, 35]**, possam ser usadas nas formulações de *Mindlin*, desenvolvidas neste trabalho.

Portanto, as soluções fundamentais generalizadas em função de deslocamentos e esforços, equações (4.79) e (4.80), desenvolvidas pela teoria de *Mindlin* e referentes a uma força unitária aplicada em um ponto de uma placa infinita, podem ser utilizadas conjuntamente com as soluções fundamentais apresentadas por *Weeën* na resolução dos problemas de placa.

4.8 - Condições de Contorno

Para ser solucionada, a equação diferencial de placas de espessura moderada, necessita de uma adequada prescrição de suas condições de contorno. Novamente, para o caso de vinculações clássicas e um sistema genérico de coordenadas como o da figura 3.4, as condições de contorno para este problema são dadas por:

i) Engaste

$$w = 0 \qquad (u_3 = 0) \tag{4.93a}$$

$$\Psi_n = 0 \qquad (u_n = 0) \tag{4.93b}$$

$$\Psi_s = 0 \qquad (u_s = 0) \tag{4.93c}$$

ii) Apoio Simples

$$M_n = 0 \tag{4.94a}$$

$$\begin{aligned} w &= 0 \qquad (u_3 = 0) \\ \Psi_s &= 0 \qquad (u_s = 0) \qquad \text{Condição } \textit{hard} \end{aligned} \tag{4.94b}$$

$$\begin{aligned} w &= 0 \qquad (u_3 = 0) \\ M_{ns} &= 0 \qquad \text{Condição } \textit{soft} \end{aligned} \tag{4.94c}$$

iii) Borda livre

$$M_n = 0 \tag{4.95a}$$

$$M_{ns} = 0 \tag{4.95b}$$

$$Q_n = 0 \tag{4.95c}$$

De acordo com **BATHE et alii [52],** a condição de contorno *hard* é devida a consideração de rotação nula no plano vertical tangente ao contorno restringida. A condição de contorno *soft* é devida a consideração de momento torçor nulo no plano vertical tangente ao contorno.

Capítulo 5

Equações Integrais em Placas

5.1 - Introdução

Este capítulo trata das equações integrais de contorno para a flexão de placas finas e moderadamente espessas. As formulações desenvolvidas, compostas por equações integrais que envolvem soluções fundamentais, são necessárias na aplicação do *Método dos Elementos de Contorno*.

As equações diferenciais de placas finas, escritas em função de deslocamentos, são necessárias para a obtenção das soluções fundamentais de placas finas. A partir dessas soluções fundamentais e usando-se o teorema de *Betti* são encontradas as equações integrais de placas finas aplicadas a pontos do contorno e do domínio da placa.

De forma semelhante, de acordo com as teorias de *Reissner* e *Mindlin*, as equações diferenciais das placas moderadamente espessas são necessárias para a obtenção das soluções fundamentais indispensáveis para as formulações citadas. Assim, a partir do teorema de *Betti* e considerando-se as soluções fundamentais da teoria de *Mindlin*, são desenvolvidas equações integrais generalizadas para as placas moderadamente espessas aplicadas a pontos do domínio. Seguindo-se as mesmas definições, são apresentadas equações integrais generalizadas considerando-se a teoria formulada por *Reissner*.

5.2 - Equações Integrais para Placas Finas

5.2.1 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

Para a determinação da equação integral para pontos do domínio da placa, seja uma placa isotrópica de domínio finito Ω e contorno Γ contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞. Conforme a figura 5.1, a placa finita está submetida a um carregamento **g** distribuído em uma área Ω_g.

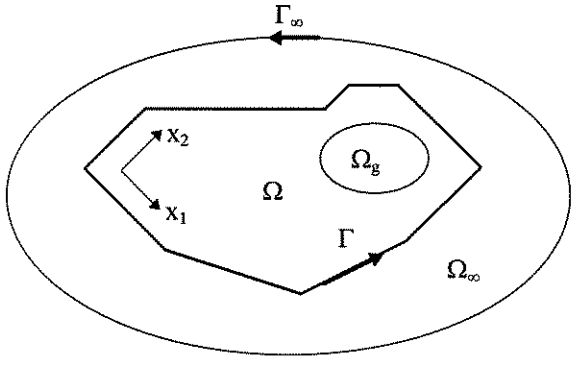

Figura 5.1 - Placa finita contida em uma placa infinita.

O teorema de *Betti* é obtido considerando-se que a placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos **g** e $\mathbf{g}^*$, associados a superfícies elásticas **w** e $\mathbf{w}^*$, respectivamente. São identificados dois estados de tensão σ e σ^*, com seus respectivos estados de deformação ε e ε^*, que podem relacionar-se da seguinte forma:

$$\int_V \left(\sigma_{11}^*\varepsilon_{11} + \tau_{12}^*\varepsilon_{12} + \tau_{13}^*\varepsilon_{13} + \tau_{21}^*\varepsilon_{21} + \sigma_{22}^*\varepsilon_{22} + \tau_{23}^*\varepsilon_{23} + \tau_{31}^*\varepsilon_{31} + \tau_{32}^*\varepsilon_{32} + \sigma_{33}^*\varepsilon_{33}\right)dV =$$

$$\int_V \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11}^* + \tau_{12}\varepsilon_{12}^* + \tau_{13}\varepsilon_{13}^* + \tau_{21}\varepsilon_{21}^* + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^* + \tau_{23}\varepsilon_{23}^* + \tau_{31}\varepsilon_{31}^* + \tau_{32}\varepsilon_{32}^* + \sigma_{33}\varepsilon_{33}^*\right)dV$$

(5.1)

Chamando-se de **I** o segundo membro da equação (5.1) e desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, obtém-se:

$$I = \int_V \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \gamma_{12}^* \right) dV \tag{5.2}$$

Substituindo-se na equação (5.2) as relações de deformação-deslocamento (3.3), constitutivas (3.5) e integrando-se ao longo da espessura da placa, obtém-se:

$$I = \int_\Omega \left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega \tag{5.3}$$

A partir das relações dos momentos fletores (3.12), a equação (5.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \int_\Omega \left[- M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} - M_{22} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} - 2 M_{12} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega \tag{5.4}$$

A obtenção das equações necessárias à formulação do método é feita a partir da transformação da integral sobre o domínio Ω, equação (5.4), em uma integral sobre o contorno Γ. Desta forma, integrando-se por partes o primeiro termo da equação (5.4), obtém-se:

$$\int_\Omega M_{11} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} d\Omega = - \int_\Gamma M_{11} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} n_1 d\Gamma + \int_\Omega \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial w^*}{\partial x_1} d\Omega \tag{5.5}$$

sendo, $\mathbf{n_1}$ o coseno diretor do vetor normal ao contorno na direção $\mathbf{x_1}$.

De acordo com a figura (3.4), os cosenos diretores de um ponto **P** do contorno, são dados por:

$$n_1 = \cos\alpha \tag{5.6a}$$

$$n_2 = \operatorname{sen}\alpha \tag{5.6b}$$

Integrando-se novamente a segunda parcela da equação (5.5) e considerando-se as definições apresentadas nas equações (5.6), pode-se escrever:

$$\int_\Omega M_{11}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2}d\Omega = \int_\Gamma\left(-M_{11}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}w^*\cos\alpha\right)d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2}w^* d\Omega \tag{5.7}$$

De forma análoga, integrando-se o segundo termo da equação (5.4), obtém-se:

$$\int_\Omega M_{22}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2}d\Omega = \int_\Gamma\left(-M_{22}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}w^*\operatorname{sen}\alpha\right)d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2}w^* d\Omega \tag{5.8}$$

O terceiro termo da equação (5.4) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_\Omega 2M_{12}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega = -\int_\Omega M_{12}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega - \int_\Omega M_{12}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega \tag{5.9}$$

Integrando-se por partes cada termo do membro direito da equação (5.9), uma vez em relação a $\mathbf{x_1}$ e a outra vez em relação a $\mathbf{x_2}$, obtém-se:

$$\int_\Omega 2M_{12}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2}d\Omega = \int_\Gamma\left(-M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\cos\alpha - M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}w^*\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}w^*\operatorname{sen}\alpha\right)d\Gamma - \int_\Omega 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}w^* d\Omega \tag{5.10}$$

Substituindo-se na equação (5.4) os três termos encontrados nas equações (5.7), (5.8) e (5.10), obtém-se:

$$I = -\int_{\Gamma}\left(M_{11}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\cos\alpha + M_{22}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\operatorname{sen}\alpha + M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\cos\alpha + M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\operatorname{sen}\alpha \right)d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma}\left[\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\right)\operatorname{sen}\alpha\right]w^* d\Gamma +$$

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2}\right)w^* d\Omega \qquad (5.11)$$

De acordo com as equações de equilíbrio de momentos fletores (3.9) e (3.10), a equação diferencial de placas (3.11) e a equação de cortantes normais ao contorno (3.22a), a equação (5.11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = -\int_{\Gamma}\left(M_{11}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\cos\alpha + M_{22}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\operatorname{sen}\alpha + M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_2}\cos\alpha + M_{12}\frac{\partial w^*}{\partial x_1}\operatorname{sen}\alpha \right)d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \qquad (5.12)$$

A partir das relações entre os sistemas de coordenadas, equação (3.18a), pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\operatorname{sen}\alpha \qquad (5.13a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_2} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha \qquad (5.13a)$$

Substituindo-se na equação (5.12) as equações (5.13), obtém-se:

$$I = -\int\left\{\frac{\partial w^*}{\partial n}\left(M_{11}\cos^2\alpha + 2M_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + M_{22}\operatorname{sen}^2\alpha\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w^*}{\partial s}\left[\left(M_{22} - M_{11}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + M_{12}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)\right]\right\}d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \qquad (5.14)$$

Substituindo-se na equação (5.14) as equações (3.21), pode-se escrever:

$$I = -\int_{\Gamma}\left(M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \tag{5.15}$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno da equação (5.15), obtém-se:

$$\int_{\Gamma}\left(M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \tag{5.16}$$

sendo, Γ_1 e Γ_2 as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração.

No caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela da equação (5.16) se anula. Caso contrário, ela dará origem a reações nas angulosidades (cantos) da placa. Desta maneira, a equação (5.16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma}\left(M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \tag{5.17}$$

sendo, $\mathbf{N_c}$ o número total de cantos do contorno da placa e $\mathbf{w_{ci}}^*$ o deslocamento fundamental do canto **i** da placa.

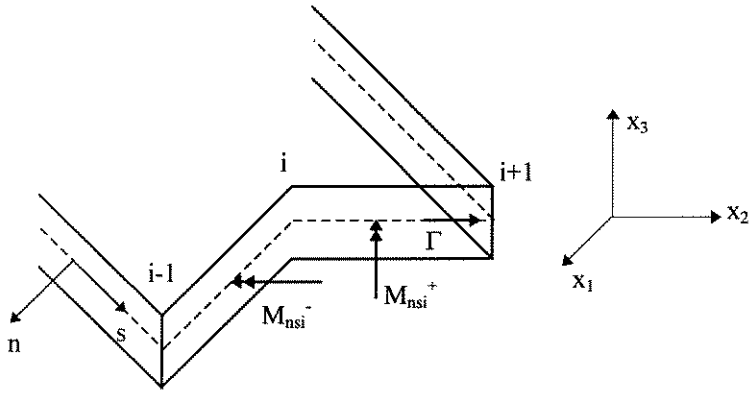

Figura 5.2 - Canto **i** do contorno da placa.

Uma interpretação apropriada das reações de canto da placa, $\mathbf{R_{ci}}$, pode ser escrita a partir dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$R_{ci} = M^{+}_{nsi} - M^{-}_{nsi} \tag{5.18}$$

sendo, $\mathbf{M^{+}_{ns}}$ e $\mathbf{M^{-}_{ns}}$ os momentos volventes posterior e anterior ao canto **i** da placa, respectivamente.

Substituindo-se na equação (5.15) o valor encontrado pela equação (5.17), obtém-se:

$$I = \int_{\Gamma}\left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^{*} + Q_n w^{*} - M_n \frac{\partial w^{*}}{\partial n}\right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w^{*}_{ci} + \int_{\Omega} g w^{*} d\Omega \tag{5.19}$$

Considerando-se que o carregamento **g** está distribuído em Ω_g e utilizando-se a equação (3.32) na equação (5.19), pode-se escrever:

$$I = \int_{\Gamma}\left(V_n w^{*} - M_n \frac{\partial w^{*}}{\partial n}\right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w^{*}_{ci} + \int_{\Omega_g} g w^{*} d\Omega_g \tag{5.20}$$

O termo do primeiro membro da equação (5.1) pode ser desenvolvido de modo análogo, chegando-se a:

$$\int_{v}\left(\sigma^{*}_{11}\varepsilon_{11} + \sigma^{*}_{22}\varepsilon_{22} + \tau^{*}_{12}\gamma_{12}\right) dV = \int_{\Gamma}\left(V^{*}_{n} w - M^{*}_{n} \frac{\partial w}{\partial n}\right) d\Gamma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci} + \int_{\Omega} g^{*} w \, d\Omega \tag{5.21}$$

Portanto, a partir das equações (5.20) e (5.21), a equação final do teorema de *Betti* aplicado ao estudo de placas é dada por:

$$\int_{\Gamma}\left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}\right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w \, d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma}\left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}\right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \qquad (5.22)$$

Supondo-se que o carregamento $\mathbf{g}^*$ em (5.22) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando as propriedades da função delta de *Dirac*, pode-se escrever:

$$w(\xi) + \int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,x) w(x) - M_n^*(\xi,x)\frac{\partial w}{\partial n}(x)\right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c) w_{ci}(x_c) =$$

$$\int_{\Gamma}\left[V_n(x) w^*(\xi,x) - M_n(x)\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi,x)\right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) w_{ci}^*(\xi,x_c) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x) w^*(\xi,x) d\Omega_g(x) \qquad (5.23)$$

sendo x_c a coordenada dos cantos da placa.

A equação (5.23) é a equação integral de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes ($\mathbf{V_n}$), momentos de flexão na direção normal ($\mathbf{M_n}$), reações de canto ($\mathbf{R_c}$), deslocamentos ($\mathbf{w}$) e rotações em relação à normal ($\partial\mathbf{w}/\partial\mathbf{n}$) conhecidos no contorno.

5.2.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Contorno

Para transformar a equação (5.23), escrita em termos de valores de domínio da placa, numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região Ω_ε de modo que o novo domínio seja dado por Ω e Ω_ε com um contorno $\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma^*$, como mostra a figura 5.3.

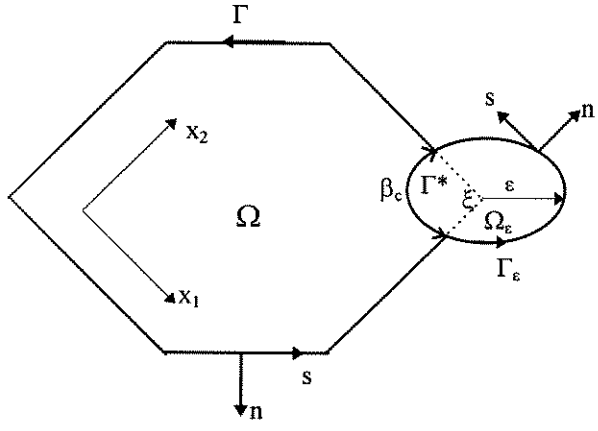

Figura 5.3 - Contorno circular acrescido a um canto de placa.

Com o artifício da figura 5.3, após as integrações em Γ_ε e com as integrais sobre os contornos Γ - Γ^*entendidas no sentido do valor principal, quando ε tende a zero, a partir de **PAIVA [33]** obtém-se:

$$C(\xi)w(\xi) + \int_\Gamma \left[V_n^*(\xi,x)w(x) - M_n^*(\xi,x)\frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c)w_{ci}(x_c) =$$

$$\int_\Gamma \left[V_n(x)w^*(\xi,x) - M_n(x)\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi,x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)w_{ci}^*(\xi,x_c) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x)w^*(\xi,x)d\Omega_g(x) \qquad (5.24)$$

A equação (5.24) representa a equação integral de placas finas para pontos do contorno da placa. A quantidade **C(ξ)** representa as descontinuidades dos cantos da placa, sendo dada por:

$$C(\xi) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{5.25}$$

onde, β_c é a angulosidade do canto da placa (figura 5.3).

Quando o ponto do contorno não apresenta angulosidades, a equação (5.25) pode ser reduzida a:

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \tag{5.26}$$

5.2.3 - Equações Integrais em Coordenadas Normais e Tangenciais para Curvaturas em Pontos do Domínio

Os momentos fletores em pontos do domínio das placas finas podem ser obtidos a partir das curvaturas internas ou seja, como segunda derivada da função de deslocamentos **w**. A equação integral em coordenadas normais e tangenciais para deslocamentos em pontos do domínio da placa, equação (5.23), pode ser escrita como segunda derivada da função de deslocamentos **w**, representando as curvaturas internas, da seguinte forma:

$$w_{,ij}(\xi) + \int_{\Gamma}\left[V^*_{n,ij}(\xi,x)w(x) - M^*_{n,ij}(\xi,x)\frac{\partial w}{\partial n}(x)\right]d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{ci,ij}(\xi,x_c)w_{ci}(x_c) =$$

$$\int_{\Gamma}\left[V_n(x)w^*_{,ij}(\xi,x) - M_n(x)\frac{\partial w^*}{\partial n}_{,ij}(\xi,x)\right]d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)w^*_{ci,ij}(\xi,x_c) +$$

$$+\int_{\Omega_g} g(x)w^*_{,ij}(\xi,x)d\Omega_g(x) \tag{5.27}$$

A segunda derivada dos esforços e deslocamentos fundamentais apresentados pela equação (5.27) são definidos da seguinte forma:

$$V^*_{n,ij}(\xi,x)=\frac{1}{4\pi r^3}\left\{\left[\left(6\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{ij}\right)8\frac{\partial r}{\partial n}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2-8\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)+\right.\right.$$

$$-16\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}s_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}s_i\right)+4\frac{\partial r}{\partial s}\left(s_jn_i+s_in_j\right)+$$

$$\left.+2\frac{\partial r}{\partial n}\left(2s_is_j-4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\delta_{ij}\right)+2\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}s_i\right)\right](1-\nu)+$$

$$\left.+4\frac{\partial r}{\partial n}\left(\delta_{ij}-4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)+4\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)\right\} \tag{5.28}$$

$$M^*_{n,ij}(\xi,x)=-\frac{1}{4\pi r^2}\left\{\left[(1+\nu)-2\left(\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right)\right]\left(\delta_{ij}-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)+\right.$$

$$-4\frac{\partial r}{\partial n}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)-4\nu\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}s_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}s_i\right)+$$

$$\left.+4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right)+2n_in_j+2\nu s_is_j\right\} \tag{5.29}$$

$$w^*{}_{,ij}(\xi,x)=\frac{1}{4\pi D}\left[ln\,r\delta_{ij}+\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}{}_{,ij}(\xi,x)=\frac{1}{4\pi Dr}\left[\left(\delta_{ij}-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right] \tag{5.31}$$

$$R^*_{ci,ij}(\xi,x)=M_{ns,ij}(\xi,x_f)-M_{ns,ij}(\xi,x_i) \tag{5.32}$$

$$M^*_{ns,ij}(\xi,x)=\frac{(1-\nu)}{4\pi r^2}\left\{2\left(\delta_{ij}-4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial s}+2\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}s_i+\frac{\partial r}{\partial x_i}s_j\right)\frac{\partial r}{\partial n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)\frac{\partial r}{\partial s}\right]-n_is_j-s_in_j\right\} \tag{5.33}$$

Deve-se observar que a reação de canto na equação (5.27) foi aproximada pela diferença dos momentos volventes anterior e posterior do canto da placa, conforme (5.18).

5.2.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio

A equação integral de domínio para as placas finas devidas ao carregamento distribuído **g** na área Ω_g, apresentada na equação (5.24), necessita ser transformada em uma integral sobre o contorno de Ω_g. Desta forma, considerando-se a integral de domínio na equação (5.24), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} g(x) w^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \tag{5.34}$$

Quando as forças distribuídas **g** tem expressões analíticas integráveis no domínio, a expressão (5.34) pode ser transformada em uma integral sobre o contorno de Ω_g. Para esta transformação, utiliza-se o esquema de integração mostrado na figura 5.4:

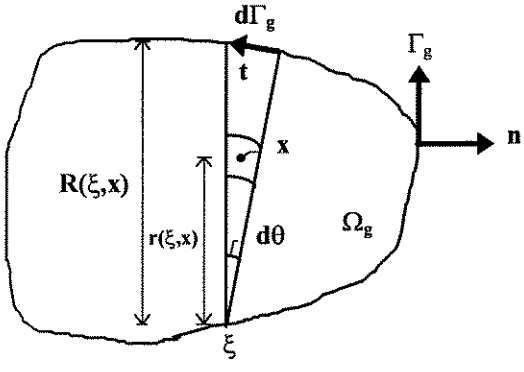

Figura 5.4 - Integração sobre a sub-região carregada.

Considerando-se o esquema da figura 5.4, a expressão (5.34) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g} g(x)w^*(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\theta}\left[\int_0^{R} g(x)w^*(\xi,x)r(\xi,x)dr(x)\right]d\theta \tag{5.35}$$

As integrações sobre o ângulo θ podem ser feitas através de uma mudança de variáveis, da seguinte forma:

$$d\theta = \frac{1}{R(\xi,t)} r_{,\gamma}\, n_\gamma d\Gamma_g(t) \tag{5.36}$$

Aplicando-se na equação (5.35) a mudança de variáveis apresentada na equação (5.36), as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno Γ_g, ou seja:

$$\int_{\Omega_g} g(x)w^*(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\int_0^{R(\xi,t)} g(x)w^*(\xi,x)r(\xi,x)dr(x)\right]\frac{r_{,\gamma}\, n_\gamma}{R(\xi,t)} d\Gamma_g(t) \tag{5.37}$$

Considerando-se a força distribuída **g** constante e a solução fundamental obtida através da teoria de *Kirchhoff*, equação (3.60), obtém-se para a equação (5.37) o seguinte resultado:

$$\int_{\Omega_g} g(x)w^*(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\frac{gR^3}{32\pi D}\left(\ln r - \frac{3}{4}\right)\right]R_{,\gamma}\, n_\gamma d\Gamma_g \tag{5.38}$$

Para o cálculo das curvaturas na placa, a integral de domínio é dada pela equação (5.27), sendo definida da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g} g(x)w^*{}_{,ij}(\xi,x)d\Omega_g(x) \tag{5.39}$$

A transformação da equação integral de domínio (5.39) em uma integral de contorno, para o caso em que o carregamento distribuído **g** é constante, é dada por:

$$\int_{\Omega_g} g(x) w^*_{,ij}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \frac{gR}{8\pi D}\left[\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\delta_{ij} + R_{,i} R_{,j}\right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_g \tag{5.40}$$

5.3 - Equações Integrais para Placas Moderadamente Espessas Através da Teoria de Mindlin

5.3.1 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio

De acordo com a equação (5.1), pode-se escrever o teorema de *Betti* para a formulação de placas moderadamente espessas através da teoria de **MINDLIN [5]**. Desta forma, em função das hipóteses desta teoria, inclui-se na formulação as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, obtendo-se:

$$\int_V \left(\sigma^*_{11}\varepsilon_{11} + \sigma^*_{22}\varepsilon_{22} + \tau^*_{12}\gamma_{12} + \tau^*_{13}\gamma_{13} + \tau^*_{23}\gamma_{23}\right) dV =$$

$$\int_V \left(\sigma_{11}\varepsilon^*_{11} + \sigma_{22}\varepsilon^*_{22} + \tau_{12}\gamma^*_{12} + \tau_{13}\gamma^*_{13} + \tau_{23}\gamma^*_{23}\right) dV \tag{5.41}$$

Chamando-se de **I** a integral do segundo membro da equação (5.41) e substituindo-se as relações de deformações-deslocamentos (4.9) e as equações constitutivas (4.10), pode-se escrever:

$$I = \int_V \left\{ \frac{x_3^2 E}{(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\Psi_2^*}{\partial x_2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi_2^*}{\partial x_1}\right)\right] + G'\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1\right)\left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^*\right) +$$

$$\left. + G'\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2\right)\left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^*\right)\right\} dV \tag{5.42}$$

Fazendo-se a integração da equação (5.42) ao longo da espessura **h** da placa, obtém-se:

$$I = \int_{\Omega} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_1} \right) \right] + G'h \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^* \right) +$$

$$\left. + G'h \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^* \right) \right\} d\Omega \tag{5.43}$$

A partir das equações de momentos (4.11) e cortantes (4.15), a equação (5.43) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \int_{\Omega} \left[M_{11} \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_1} + M_{22} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_2} + M_{12} \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_1} \right) + Q_{11} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^* \right) + \right.$$

$$\left. + Q_{22} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^* \right) \right] d\Omega \tag{5.44}$$

Aplicando-se a regra da cadeia em todos os termos da equação (5.44), pode-se escrever:

$$I = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_{11} \Psi_1^* \right) - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \Psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_{22} \Psi_2^* \right) - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \Psi_2^* + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_{12} \Psi_2^* \right) + \right.$$

$$- \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \Psi_2^* + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_{12} \Psi_1^* \right) - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \Psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(Q_{11} w^* \right) - \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} w^* + Q_{11} \Psi_1^* +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Q_{22} w^* \right) - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} w^* + Q_{22} \Psi_2^* \right] d\Omega \tag{5.45}$$

Agrupando-se convenientemente todos os termos da equação (5.45), chega-se a seguinte equação:

$$I = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(M_{11}\Psi_1^* + M_{12}\Psi_2^* + Q_{11}w^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(M_{22}\Psi_2^* + M_{12}\Psi_1^* + Q_{22}w^* \right) + \right.$$

$$-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{11} \right)\Psi_1^* - \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{22} \right)\Psi_2^* +$$

$$\left. -\left(\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} \right) w^* \right] d\Omega \qquad (5.46)$$

Considerando-se as equações de equilíbrio (3.8) a (3.10) e transformando-se através de integrações por partes os dois primeiros termos da integral de domínio Ω da equação (5.46) em integrais de contorno Γ, obtém-se:

$$I = \int_{\Gamma} \left[\left(M_{11}\Psi_1^* + M_{12}\Psi_2^* + Q_{11}w^* \right) n_1 + \left(M_{22}\Psi_2^* + M_{12}\Psi_1^* + Q_{22}w^* \right) n_2 \right] d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} g\, w^*\, d\Omega \qquad (5.47)$$

A equação (5.47) pode ser escrita de maneira generalizada, de forma a representar convenientemente a teoria de *Mindlin* ou seja, considerando-se as três condições físicas necessárias para a resolução do problema de placas. Assim, rearranjando-se os termos desta equação no sentido de encontrar equações semelhantes às aquelas apresentadas nos trabalhos de **WEEËN [34, 35]**, pode-se escrever:

$$I = \int_{\Gamma} \left[\left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2 \right)\Psi_1^* + \left(M_{12}n_1 + M_{22}n_2 \right)\Psi_2^* + \left(Q_{11}n_1 + Q_{22}n_2 \right) w^* \right] d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} g\, w^*\, d\Omega \qquad (5.48)$$

A equação (5.48) representa o desenvolvimento do segundo membro do teorema de *Betti* definido pela equação (5.41). O primeiro membro desta equação pode ser escrito de forma semelhante, ou seja:

$$\int_V \left(\sigma_{11}^{*}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}^{*}\varepsilon_{22} + \tau_{12}^{*}\gamma_{12} + \tau_{13}^{*}\gamma_{13} + \tau_{23}^{*}\gamma_{23}\right)dV =$$

$$\int_\Gamma \left[\left(M_{11}^{*}n_1 + M_{12}^{*}n_2\right)\Psi_1 + \left(M_{12}^{*}n_1 + M_{22}^{*}n_2\right)\Psi_2 + \left(Q_{11}^{*}n_1 + Q_{22}^{*}n_2\right)w\right]d\Gamma +$$

$$+ \int_\Omega g^{*} w \, d\Omega \tag{5.49}$$

Seguindo-se este desenvolvimento, o teorema de *Betti* aplicado às placas moderadamente espessas usando a teoria de *Mindlin*, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \left[\left(M_{11}^{*}n_1 + M_{12}^{*}n_2\right)\Psi_1 + \left(M_{12}^{*}n_1 + M_{22}^{*}n_2\right)\Psi_2 + \left(Q_{11}^{*}n_1 + Q_{22}^{*}n_2\right)w\right]d\Gamma +$$

$$+ \int_\Omega g^{*} w d\Omega = \int_\Gamma \left[\left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2\right)\Psi_1^{*} + \left(M_{12}n_1 + M_{22}n_2\right)\Psi_2^{*} + \left(Q_{11}n_1 + Q_{22}n_2\right)w^{*}\right]d\Gamma +$$

$$+ \int_\Omega g w^{*} d\Omega \tag{5.50}$$

De acordo com as definições apresentadas no Capítulo 2, as equações (2.13) e fazendo-se as integrações necessárias nas tensões não nulas, os esforços de superfície na placa podem ser escritos da seguinte forma:

$$t_1 = M_{11}n_1 + M_{12}n_2 \tag{5.51a}$$

$$t_2 = M_{12}n_1 + M_{22}n_2 \tag{5.51b}$$

$$t_3 = Q_{11}n_1 + Q_{22}n_2 \tag{5.51c}$$

De acordo com as definições apresentadas no item 4.6, as notações $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$ são usadas para definir a função Ψ_1, a função Ψ_2 e o deslocamento $\mathbf{w}$, respectivamente. Desta forma, considerando-se estas definições e as equações (5.51), a equação (5.50) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \left(T_{31}^{*} u_1 + T_{32}^{*} u_2 + T_{33}^{*} u_3\right) d\Gamma + \int_{\Omega} g^{*} u_3 \, d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} \left(U_{31}^{*} t_1 + U_{32}^{*} t_2 + U_{33}^{*} t_3\right) d\Gamma + \int_{\Omega} g \, U_{33}^{*} \, d\Omega \qquad (5.52)$$

Supondo-se que o carregamento $\mathbf{g}^{*}$ em (5.52) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora as soluções fundamentais e aplicando as propriedades da função delta de *Dirac* nesta equação, pode-se escrever:

$$u_3(\xi) + \int_{\Gamma} \left(T_{31}^{*}(\xi, x) u_1(x) + T_{32}^{*}(\xi, x) u_2(x) + T_{33}^{*}(\xi, x) u_3(x)\right) d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} \left(U_{31}^{*}(\xi, x) t_1(x) + U_{32}^{*}(\xi, x) t_2(x) + U_{33}^{*}(\xi, x) t_3(x)\right) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^{*}(\xi, x) \, d\Omega_g(x) \qquad (5.53)$$

A equação (5.53) representa uma equação integral de contorno para pontos do domínio da placa. Esta equação, em coordenadas cartesianas, considera o caso em que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$. A partir da equação (5.53) pode-se finalmente escrever uma equação integral generalizada para a teoria de *Mindlin*, levando-se em conta os casos em que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção $\mathbf{x_3}$ e dois momentos unitários aplicados nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

Seguindo-se estas definições a equação (5.53) pode ser escrita de maneira generalizada, da seguinte forma:

$$u_j(\xi) + \int_\Gamma T^*_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_\Gamma U^*_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x) U^*_{i3}(\xi, x) d\Omega_g(x) \qquad (5.54)$$

sendo, $\mathbf{U}^*_{ij}(\xi,\mathbf{x})$ a rotação fundamental (j=1,2) ou o deslocamento fundamental (j=3) e $\mathbf{T}^*_{ij}(\xi,\mathbf{x})$ os correspondentes esforços de superfície no ponto singular ξ de uma placa infinita quando um momento unitário (i=1,2) ou uma força unitária (i=3) é aplicada no ponto fonte **x**.

5.3.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

A equação integral (5.52), que representa o teorema de *Betti* aplicado às placas moderadamente espessas, pode ser escrita em um sistema genérico de coordenadas **ns**. Seja a equação (5.52):

$$\int_\Gamma \left(T^*_{31} u_1 + T^*_{32} u_2 + T^*_{33} u_3\right) d\Gamma + \int_\Omega g^* u_3 d\Omega =$$

$$\int_\Gamma \left(U^*_{31} t_1 + U^*_{32} t_2 + U^*_{33} t_3\right) d\Gamma + \int_\Omega g U^*_{33} d\Omega$$

Na equação (5.52), os deslocamentos do problema real e os associados à solução fundamental, também podem ser referenciados a um sistema genérico de coordenadas **ns**. Assim, a partir das equações (3.18), de transformação de coordenadas, e sabendo-se que $\mathbf{n_1}$=**cos**α e $\mathbf{n_2}$=**sen**α, pode-se escrever:

$$u_1 = u_n n_1 - u_s n_2 \tag{5.55a}$$

$$u_2 = u_n n_2 + u_s n_1 \tag{5.55b}$$

$$U^*_{31} = U^*_{3n} n_1 - U^*_{3s} n_2 \tag{5.55c}$$

$$U^*_{32} = U^*_{3n} n_2 + U^*_{3s} n_1 \tag{5.55d}$$

Substituindo-se na equação (5.52) as equações (5.55) e rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\int_\Gamma \left[\left(T^*_{31} n_1 + T^*_{32} n_2 \right) u_n + \left(T^*_{32} n_1 - T^*_{31} n_2 \right) u_s + T^*_{33} u_3 \right] d\Gamma + \int_\Omega g^* u_3 d\Omega =$$

$$\int_\Gamma \left[\left(t_1 n_1 + t_2 n_2 \right) U^*_{3n} + \left(t_2 n_1 - t_1 n_2 \right) U^*_{3s} + t_3 U^*_{33} \right] d\Gamma + \int_\Omega g U^*_{33} d\Omega \tag{5.56}$$

Considerando-se a figura 3.4, pode-se observar que:

$$n_1 = s_2 \tag{5.57a}$$

$$n_2 = -s_1 \tag{5.57b}$$

Fazendo-se a substituição das equações (5.57) na equação (5.56), obtém-se:

$$\int_\Gamma \left[\left(T^*_{31} n_1 + T^*_{32} n_2 \right) u_n + \left(T^*_{31} s_1 + T^*_{32} s_2 \right) u_s + T^*_{33} u_3 \right] d\Gamma + \int_\Omega g^* u_3 d\Omega =$$

$$\int_\Gamma \left[\left(t_1 n_1 + t_2 n_2 \right) U^*_{3n} + \left(t_1 s_1 + t_2 s_2 \right) U^*_{3s} + t_3 U^*_{33} \right] d\Gamma + \int_\Omega g U^*_{33} d\Omega \tag{5.58}$$

Os esforços do problema real e os associados à solução fundamental, em coordenadas normais e tangenciais ao contorno, escritos em função dos esforços $\mathbf{t_i}$ e $\mathbf{T^*_{ij}}$, podem ser determinados analogamente à equação (2.7), da seguinte forma:

$$M_n = t_\alpha n_\alpha \tag{5.59a}$$

$$M_{ns} = t_\alpha s_\alpha \tag{5.59b}$$

$$Q_n = t_3 \tag{5.59c}$$

$$M^*_{in} = T^*_{i\alpha} n_\alpha \tag{5.59d}$$

$$M^*_{ins} = T^*_{i\alpha} s_\alpha \tag{5.59e}$$

$$Q^*_n = T^*_{33} \tag{5.59f}$$

Considerando-se que **g** está distribuída em Ω_g, as equações (5.59), o teorema de *Betti* aplicado às placas de espessura moderada em coordenadas normais e tangenciais ao contorno pode ser escrito a partir da equação (5.58), da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \left(M^*_{3n} u_n + M^*_{3ns} u_s + Q^*_n u_3 \right) d\Gamma + \int_\Omega g^* u_3 d\Omega =$$

$$\int_\Gamma \left(M_n U^*_{3n} + M_{ns} U^*_{3s} + Q_n U^*_{33} \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} g U^*_{33} d\Omega_g \tag{5.60}$$

Supondo-se novamente que o carregamento $\mathbf{g}^*$ na equação (5.60) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora as soluções fundamentais e aplicando as propriedades da função delta de *Dirac* nesta equação, pode-se escrever:

$$u_3(\xi) + \int_\Gamma \left(M^*_{3n}(\xi,x) u_n(x) + M^*_{3ns}(\xi,x) u_s(x) + Q^*_n(\xi,x) u_3(x) \right) d\Gamma(x) =$$

$$\int_\Gamma \left(M_n(x) U^*_{3n}(\xi,x) + M_{ns}(x) U^*_{3s}(\xi,x) + Q_n(x) U^*_{33}(\xi,x) \right) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x) U^*_{33}(\xi,x) d\Omega_g(x) \tag{5.61}$$

A equação (5.61) representa uma equação integral de contorno para pontos do domínio da placa. Esta equação, em coordenadas normais e tangenciais, considera o caso em que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$.

Novamente pode-se escrever uma equação integral generalizada para a teoria de *Mindlin*, em coordenadas normais e tangenciais e levando-se em conta os casos em que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção $\mathbf{x_3}$ e dois momentos unitários aplicados nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, ou seja:

$$u_i(\xi) + \int_\Gamma \left(M^*_{in}(\xi,x)u_n(x) + M^*_{ins}(\xi,x)u_s(x) + Q^*_n(\xi,x)u_3(x) \right) d\Gamma(x) =$$

$$\int_\Gamma \left(M_n(x)U^*_{in}(\xi,x) + M_{ns}(x)U^*_{is}(\xi,x) + Q_n(x)U^*_{33}(\xi,x) \right) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x)U^*_{i3}(\xi,x)\, d\Omega_g(x) \qquad (5.62)$$

A equação (5.62), escrita de forma generalizada, descreve uma equação integral para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas normais e tangenciais, através da teoria de *Mindlin*.

5.3.3 - Equações Integrais em Coordenadas Cartesianas para Esforços em Pontos do Domínio

Para determinar as equações integrais de momento fletor, momento torçor e força cortante em pontos do domínio da placa moderadamente espessa a partir da teoria de *Mindlin*, considera-se a equação integral de deslocamentos (5.54) e as relações dos esforços em função dos deslocamentos, equações (4.11) e (4.15).

É necessário derivar a equação (5.54) para obter as derivadas dos deslocamentos $\mathbf{w}$ (u_3) e das funções Ψ_1 e Ψ_2 (u_1 e u_2) nas equações (4.11) e (4.15). Deve-se notar que todas as derivadas obtidas em relação às coordenadas do ponto de deslocamento devem ser multiplicadas por (-1) para que sejam válidas em relação às

coordenadas do ponto fonte. Assim, as equações integrais para os momentos fletores, momentos torçores e forças cortantes são dadas por:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T^{*}_{\alpha\beta k}(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U^{*}_{\alpha\beta k}(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z^{*}_{\alpha\beta}(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x) \tag{5.63}$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T^{*}_{3\beta k}(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U^{*}_{3\beta k}(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z^{*}_{3\beta}(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x) \tag{5.64}$$

As soluções fundamentais em termos de esforços e deslocamentos apresentadas pelas equações integrais (5.63) e (5.64) são definidas da seguinte forma:

$$U^{*}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^{*}_{\alpha\gamma,\beta} + U^{*}_{\beta\gamma,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U^{*}_{\phi\gamma,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.65a}$$

$$U^{*}_{\alpha\beta 3} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^{*}_{\alpha 3,\beta} + U^{*}_{\beta 3,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U^{*}_{\phi 3,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.65b}$$

$$U^{*}_{3\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[U^{*}_{\beta\gamma} + U^{*}_{3\gamma,\beta}\right] \tag{5.65c}$$

$$U^{*}_{3\beta 3} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[U^{*}_{\beta 3} + U^{*}_{33,\beta}\right] \tag{5.65d}$$

$$T^{*}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[T^{*}_{\alpha\gamma,\beta} + T^{*}_{\beta\gamma,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T^{*}_{\phi\gamma,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.65e}$$

$$T^{*}_{\alpha\beta 3} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[T^{*}_{\alpha 3,\beta} + T^{*}_{\beta 3,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T^{*}_{\phi 3,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.65f}$$

$$T^*_{3\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[T^*_{\beta\gamma} + T^*_{3\gamma,\beta}\right] \tag{5.65g}$$

$$T^*_{3\beta 3} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[T^*_{\beta 3} + T^*_{33,\beta}\right] \tag{5.65h}$$

$$Z^*_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3,\beta} + U^*_{\beta 3,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}U^*_{\gamma 3,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.65i}$$

$$Z^*_{3\alpha} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3} + U^*_{33,\alpha}\right] \tag{5.65j}$$

As equações (5.65) descrevem as soluções fundamentais generalizadas das equações (5.63) e (5.64), considerando-se os casos em que estas soluções são encontradas a partir da consideração de uma força e dois momentos unitários aplicados. Todavia, o presente trabalho apresenta apenas o caso em que a solução fundamental é obtida com a consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$, necessitando-se de soluções fundamentais complementares. Neste sentido, as soluções fundamentais apresentadas por **WEEËN [34, 35]** para momentos unitários aplicados às placas de *Reissner* serão utilizadas, conforme justificou-se a aplicação destas soluções na formulação da teoria *Mindlin* (item 4.7).

Assim, considerando-se as derivadas dos deslocamentos fundamentais $\mathbf{U}^*$, equações (4.80) e equações (4.90), as soluções fundamentais para o caso em que as mesmas são obtidas com a consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$, são definidas da seguinte forma:

$$U^*_{311} = \frac{\lambda^2}{16\pi}\left[8B + 2(1-\nu)(ln\,r - ln\,z) - (1-\nu)A_2 - 8A\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right] \tag{5.66a}$$

$$U^*_{312} = U^*_{321} = -\frac{\lambda^2}{16\pi}\left[8A\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{5.66b}$$

$$U^*_{322} = \frac{\lambda^2}{16\pi}\left[8B + 2(1-\nu)(lnr - lnz) - (1-\nu)A_2 - 8A\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right] \tag{5.66c}$$

$$U^*_{313} = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi}\left[\left(2\,lnz - 2\,lnr + A_2\right)r\frac{\partial r}{\partial x_1}\right] + \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_1} \tag{5.66d}$$

$$U^*_{323} = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi}\left[\left(2\,lnz - 2\,lnr + A_2\right)r\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] + \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{5.66e}$$

A partir das derivadas dos esforços fundamentais $\mathbf{T}^*$, equações (4.79) e equações (4.91), as soluções fundamentais em termos de esforços das equações (5.65) são definidas da seguinte forma:

$$T^*_{311} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{\left(2A + zK_1\right)\left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_1}n_1\right) - \left(8A + 2zK_1\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{5.67a}$$

$$T^*_{312} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{\left(2A + zK_1\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1 - \left(8A + 2zK_1\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n} + 2A\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right\} \tag{5.67b}$$

$$T^*_{321} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{\left(2A + zK_1\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2 - \left(8A + 2zK_1\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n} + 2A\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1\right\} \tag{5.67c}$$

$$T^*_{322} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{\left(2A + zK_1\right)\left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2}n_2\right) - \left(8A + 2zK_1\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial n} + 2A\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2\right\} \tag{5.67d}$$

$$T^*_{313} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2}\left[\left(z^2B + 1\right)n_1 - \left(z^2A + 2\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.67e}$$

$$T^*_{323} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2}\left[\left(z^2B + 1\right)n_2 - \left(z^2A + 2\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.67f}$$

A aplicação da solução fundamental devido à momentos unitários não foi apresentada pois, é a mesma que será vista na solução de placas pela teoria de *Reissner*, em item posterior a este.

Contudo, as soluções fundamentais que consideram apropriadamente as influências das cargas distribuídas no domínio da placa, equações (5.65i) e (5.65j), serão desenvolvidas a seguir.

5.3.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio

Sabe-se que as integrais de domínio para as placas moderadamente espessas, apresentadas pela equação (5.54), podem ser transformadas em integrais sobre o contorno de Ω_g, quando as forças distribuídas **g** tem expressões analíticas integráveis no domínio.

Considerando-se as integrais de domínio apresentadas pela equação (5.54), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) \tag{5.68}$$

Para a transformação da expressão (5.68), utiliza-se novamente o esquema de integração mostrado na figura 5.4. Assim a partir deste esquema, a expressão (5.68) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\theta} \left[\int_{0}^{R} g(x) U_{i3}^{*}(\xi, x) r(\xi, x) dr(x) \right] d\theta \tag{5.69}$$

Aplicando-se na equação (5.69) a mudança de variável apresentada pela equação (5.36), as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno Γ_g, ou seja:

$$\int_{\Omega_g} g(x)U_{i3}^{*}(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\int_0^{R(\xi,t)} g(x)U_{i3}^{*}(\xi,x)r(\xi,x)dr(x)\right]\frac{r_{,\gamma}\,n_\gamma}{R(\xi,t)}d\Gamma_g(t) \qquad (5.70)$$

Considerando-se mais uma vez o caso em que a força distribuída **g** é constante e, utilizando-se a solução fundamental referente a uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$, obtida através da teoria de *Mindlin* pela equação (3.86c), obtém-se para a equação (5.70) o seguinte resultado:

$$\int_{\Omega_g} g(x)U_{33}^{*}(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\frac{gR^3}{32\pi D}\left(\ln r - \frac{(2A_2+5)}{4}\right) - \frac{gR}{2\pi G' h}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\right]R_{,\gamma}\,n_\gamma d\Gamma_g \qquad (5.71)$$

De forma semelhante, utilizando-se as soluções fundamentais da teoria de *Reissner* referentes a uma força unitária na direção $\mathbf{x_3}$ e momentos unitários nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ obtidas pelas equações (3.89d), (3.89e) e (3.89f), obtém-se para a equação (5.70), respectivamente, os seguintes resultados:

$$\int_{\Omega_g} g(x)U_{\alpha 3}^{*}(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\frac{gR^2}{12\pi D}\left(\ln z - \frac{5}{6}\right)\right]R_{,\alpha}\,R_{,\gamma}\,n_\gamma d\Gamma_g \qquad (5.72a)$$

$$\int_{\Omega_g} g(x)U_{33}^{*}(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g}\left[\frac{gR^3}{32\pi D}\left(\ln z - \frac{5}{4}\right) - \frac{gR}{2\pi D\lambda^2(1-\nu)}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right)\right]R_{,\gamma}\,n_\gamma d\Gamma_g \qquad (5.72b)$$

A integral de domínio relacionada com a solução fundamental devido a um momento unitário aplicado nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ (**WEEËN [34, 35]**), conforme equação (5.72a), pode ser novamente transformada em uma integral de contorno, de acordo com o seguinte desenvolvimento:

$$\int_{\Omega_g} g(x)U_{\alpha 3}^{*}(\xi,x)d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} g(x)W^{*}(\xi,x)n_\alpha d\Gamma_g(x) \qquad (5.73)$$

sendo:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_\alpha} = U^*_{\alpha 3} \tag{5.74}$$

$$W^* = \frac{r^2}{8\pi D}(ln\, z - 1) \tag{5.75}$$

Cabe observar que este procedimento foi apresentado pois, difere da formulação de **WEEËN [34, 35]**, embora a solução fundamental utilizada seja a mesma.

Para a obtenção dos esforços internos, as influências das cargas distribuídas no domínio da placa, equações (5.65i) e (5.65j), também podem ser transformadas a partir do procedimento utilizado nas equações (5.73) e (5.74). Seguindo-se as definições apresentadas por estas equações, as soluções fundamentais nas equações (5.65i) e (5.65j) podem ser redefinidas da seguinte forma:

$$Z^*_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3}n_\beta + U^*_{\beta 3}n_\alpha + \frac{2\nu}{(1-\nu)}U^*_{\gamma 3}n_\gamma\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.76a}$$

$$Z^*_{3\alpha} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3} + U^*_{33}n_\alpha\right] \tag{5.76b}$$

Após a conveniente substituição dos deslocamentos fundamentais $\mathbf{U}^*$, equações (4.80), nas equações (5.76), pode-se definir as influências das cargas distribuídas no domínio da placa, ou seja:

$$Z^*_{11} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left[(2\,ln\,z-1)r\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1 + \frac{\nu}{(1-\nu)}(2\,ln\,z-1)r\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.77a}$$

$$Z^*_{12} = Z^*_{21} = -\frac{(1-\nu)}{16\pi}\left[(2\,ln\,z-1)r\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2 + (2\,ln\,z-1)r\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1\right] \tag{5.77b}$$

$$Z_{22}^{*} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left[(2\,ln z - 1)r\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2 + \frac{\nu}{(1-\nu)}(2\,ln z - 1)r\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.77c}$$

$$Z_{31}^{*} = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi}\left\{r^2\left[ln z + ln r - \frac{A_2}{2} - 2\right] - \frac{4D'}{G'h}ln r\right\}n_1 \tag{5.77d}$$

$$Z_{32}^{*} = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi}\left\{r^2\left[ln z + ln r - \frac{A_2}{2} - 2\right] - \frac{4D}{G'h}ln r\right\}n_2 \tag{5.77e}$$

5.4 - Equações Integrais para Placas Moderadamente Espessas Através da Teoria de Reissner

5.4.1 - Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio

Uma equação integral para as formulações de placas planas moderadamente espessas a partir da teoria de **REISSNER [4]**, pode ser encontrada considerando-se o teorema de *Betti* e a técnica dos resíduos ponderados. De acordo com este procedimento padrão e considerando-se as formulações apresentadas nos trabalhos de **WEEËN [34, 35]**, pode-se escrever:

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{*}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^{*}(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega_g}\left[U_{i3}^{*}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U_{i\alpha,\alpha}^{*}(\xi,x)\right]g(x)d\Omega_g(x) \tag{5.78}$$

Novamente utiliza-se $\mathbf{U}^{*}_{ij}(\xi,\mathbf{x})$ como sendo a rotação fundamental ou o deslocamento fundamental e $\mathbf{T}^{*}_{ij}(\xi,\mathbf{x})$ os correspondentes esforços de superfície no ponto singular ξ de uma placa infinita quando um momento ou uma força unitária é aplicada no ponto fonte **x**.

A equação integral (5.78), escrita de forma generalizada, descreve uma equação integral para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas cartesianas, através da teoria de *Reissner*.

5.4.2 - Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

De acordo com as hipóteses da teoria de *Reissner*, uma equação integral de domínio de forma generalizada, em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa, pode ser obtida aplicando-se as transformações de coordenadas apresentadas no item 3.3, sendo definida da seguinte forma:

$$u_i(\xi) + \int_\Gamma \left(M^*_{in}(\xi,x)u_n(x) + M^*_{ins}(\xi,x)u_s(x) + Q^*_n(\xi,x)u_3(x) \right) d\Gamma(x) =$$

$$\int_\Gamma \left(M_n(x)U^*_{in}(\xi,x) + M_{ns}(x)U^*_{is}(\xi,x) + Q_n(x)U^*_{33}(\xi,x) \right) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} \left[U^*_{i3}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U^*_{i\alpha,\alpha}(\xi,x) \right] g(x) d\Omega_g(x) \qquad (5.79)$$

A equação (5.79), escrita de forma generalizada, descreve uma equação integral para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas normais e tangenciais, através da teoria de *Reissner*.

5.4.3 - Equações Integrais em Coordenadas Cartesianas para Esforços em Pontos do Domínio

As representações integrais de momento fletor, momento torçor e força cortante em pontos do domínio da placa moderadamente espessa, também é obtida em função das derivadas dos deslocamentos **u**. O desenvolvimento é feito a partir da equação integral de deslocamentos (5.78) e das relações de esforço em função dos deslocamentos, equações (4.82). É necessário derivar a equação (5.78) para obter as derivadas dos deslocamentos **u** na equação (4.82). Deve-se notar outra vez que todas

as derivadas obtidas em relação às coordenadas do ponto de deslocamento devem ser multiplicadas por (-1) para que sejam válidas em relação às coordenadas do ponto fonte. Assim, as equações integrais para os momentos fletores, momentos torçores e esforços cortantes são dadas por:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T^{*}_{\alpha\beta k}(\xi,x)u_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U^{*}_{\alpha\beta k}(\xi,x)t_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z^{*}_{\alpha\beta}(\xi,x)g(x)d\Omega_g(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g\delta_{\alpha\beta} \tag{5.80}$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T^{*}_{3\beta k}(\xi,x)u_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U^{*}_{3\beta k}(\xi,x)t_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z^{*}_{3\beta}(\xi,x)g(x)d\Omega_g(x) \tag{5.81}$$

As soluções fundamentais em termos de esforços e deslocamentos apresentadas pelas equações integrais (5.80) e (5.81) são bastante semelhantes às aquelas definidas no item 5.3. Neste item, seguindo-se as formulações da teoria de *Reissner*, as soluções fundamentais mencionadas são apresentadas em sua totalidade, de forma a considerar os casos em que uma força e dois momentos unitários são aplicados, assim:

$$U^{*}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^{*}_{\alpha\gamma,\beta} + U^{*}_{\beta\gamma,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}U^{*}_{\phi\gamma,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.82a}$$

$$U^{*}_{\alpha\beta 3} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^{*}_{\alpha 3,\beta} + U^{*}_{\beta 3,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}U^{*}_{\phi 3,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.82b}$$

$$U^{*}_{3\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[U^{*}_{\beta\gamma} + U^{*}_{3\gamma,\beta}\right] \tag{5.82c}$$

$$U^{*}_{3\beta 3} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[U^{*}_{\beta 3} + U^{*}_{33,\beta}\right] \tag{5.82d}$$

$$T^*_{\alpha\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[T^*_{\alpha\gamma,\beta} + T^*_{\beta\gamma,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}T^*_{\phi\gamma,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.82e}$$

$$T^*_{\alpha\beta 3} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[T^*_{\alpha 3,\beta} + T^*_{\beta 3,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}T^*_{\phi 3,\phi}\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{5.82f}$$

$$T^*_{3\beta\gamma} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[T^*_{\beta\gamma} + T^*_{3\gamma,\beta}\right] \tag{5.82g}$$

$$T^*_{3\beta 3} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left[T^*_{\beta 3} + T^*_{33,\beta}\right] \tag{5.82h}$$

$$Z^*_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3,\beta} + U^*_{\beta 3,\alpha} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\left(U^*_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + U^*_{\beta\gamma,\gamma\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta}\left(U^*_{\gamma 3,\gamma} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U^*_{\gamma\phi,\phi\gamma}\right)\right] \tag{5.82i}$$

$$Z^*_{3\alpha} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[U^*_{\alpha 3} + U^*_{33,\alpha} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\left(U^*_{\alpha\gamma,\gamma} + U^*_{3\gamma,\gamma\alpha}\right)\right] \tag{5.82j}$$

Pode-se observar que a principal diferença entre as equações apresentadas no item 5.3 e agora neste item, ocorre na adoção das soluções fundamentais e também nos termos envolvendo as influências dos carregamentos de domínio na placa.

Portanto, a partir das derivadas dos deslocamentos fundamentais $\mathbf{U}^*$, equações (4.90), as soluções fundamentais em termos de deslocamentos das equações (5.82) são definidas da seguinte forma:

$$U^*_{111} = \frac{1}{4\pi r}\left[2\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1} - \left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^3 + \left(4A+1+\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\right] \tag{5.83a}$$

$$U^*_{112} = -\frac{1}{4\pi r}\left[\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_2} - \left(4A+1+\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{5.83b}$$

$$U^*_{113} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left\{\left[2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}ln\,z-1\right]+2\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right\} \tag{5.83c}$$

$$U^*_{121} = U^*_{211} = \frac{1}{4\pi r}\left[\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{5.83d}$$

$$U^*_{122} = U^*_{212} = \frac{1}{4\pi r}\left[\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_1}\right] \tag{5.83e}$$

$$U^*_{123} = U^*_{213} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left[2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{5.83f}$$

$$U^*_{221} = -\frac{1}{4\pi r}\left[\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_1}-(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\right] \tag{5.83g}$$

$$U^*_{222} = \frac{1}{4\pi r}\left[2\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_{21}}\right)^3+(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\right] \tag{5.83h}$$

$$U^*_{223} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left\{\left[2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}ln\,z-1\right]+2\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right\} \tag{5.83i}$$

$$U^*_{311} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\left[B-A\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right] \tag{5.83j}$$

$$U^*_{312} = U^*_{321} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\left[A\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right] \tag{5.83k}$$

$$U^*_{322} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\left[B-A\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right] \tag{5.83ℓ}$$

$$U^*_{313} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_1} \tag{5.83m}$$

$$U^*_{323} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{5.83n}$$

Considerando-se as derivadas dos esforços fundamentais $\mathbf{T}^*$, equações (4.91) , as soluções fundamentais em termos de esforços das equações (5.82) são definidas da seguinte forma:

$$T^*_{111} = \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\Big\{2(4A+2zK_1+1-\nu)n_1 - (16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)2\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right) +$$

$$+(4A+1+3\nu)n_1 - (16A+4zK_1+2+2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 n_1\right)$$

$$+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^3 \frac{\partial r}{\partial n}\Big\} \tag{5.84a}$$

$$T^*_{112} = \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\Big\{(4A+1+3\nu)n_2 - (16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1 +$$

$$-(16A+4zK_1+2+2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 n_2\right) +$$

$$+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\Big\} \tag{5.84b}$$

$$T^*_{113} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)2\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1 - (8A+2zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2A\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{5.84c}$$

$$T^*_{121}=T^*_{211}=\frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\left\{(4A+2zK_1+1-\nu)n_2-(16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}+\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right)+\right.$$

$$\left.-(16A+4zK_1+2+2\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84d)$$

$$T^*_{122}=T^*_{212}=\frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\left\{(4A+2zK_1+1-\nu)n_1-(16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}+\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right)+\right.$$

$$\left.-(16A+4zK_1+2+2\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84e)$$

$$T^*_{123}=T^*_{213}=\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right)-(8A+2zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84f)$$

$$T^*_{221}=\frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\left\{(4A+1+3\nu)n_1-(16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2+\right.$$

$$-(16A+4zK_1+2+2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}+\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 n_1\right)+$$

$$\left.+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84g)$$

$$T^*_{222}=\frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2}\left\{2(4A+2zK_1+1-\nu)n_2-(16A+6zK_1+z^2K_0+2-2\nu)2\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 n_2+\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right)+\right.$$

$$+(4A+1+3\nu)n_2-(16A+4zK_1+2+2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}+\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 n_2\right)$$

$$\left.+(96A+32zK_1+4z^2K_0+8-8\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^3\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84h)$$

$$T^*_{223}=\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)2\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2-(8A+2zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial n}+2A\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \quad (5.84i)$$

$$T^*_{311} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1\right)-(8A+2zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\} \tag{5.84j}$$

$$T^*_{312} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1-(8A+2zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}+2A\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right\} \tag{5.84k}$$

$$T^*_{321} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2-(8A+2zK_1)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}+2A\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1\right\} \tag{5.84ℓ}$$

$$T^*_{322} = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r}\left\{(2A+zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2\right)-(8A+2zK_1)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial r}{\partial n}+2A\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2\right\} \tag{5.84m}$$

$$T^*_{313} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2}\left[(z^2B+1)n_1-(z^2A+2)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.84n}$$

$$T^*_{323} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2}\left[(z^2B+1)n_2-(z^2A+2)\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{5.84o}$$

5.4.4 - Equações Integrais para Carregamentos de Domínio

A partir das integrais de domínio apresentadas pela equação (5.78), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g}\left[U^*_{i3}(\xi,x)-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U^*_{i\alpha,\alpha}(\xi,x)\right]g(x)d\Omega_g(x) \tag{5.85}$$

Considerando-se a formulação apresentada nos trabalhos de **WEEËN [34, 35]** a integral de domínio da expressão (5.78) também pode ser transformada em uma integral sobre o contorno de Ω_g. Utilizando-se o teorema da divergência, a expressão (5.85) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g}\left[U^*_{i3}(\xi,x)-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U^*_{i\alpha,\alpha}(\xi,x)\right]g(x)d\Omega_g(x)=$$

$$g\int_{\Gamma_g}\left[V^*_{i,\alpha}(\xi,x)-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U^*_{i\alpha}(\xi,x)\right]n_\alpha d\Gamma_g(x) \tag{5.86}$$

sendo:

$$V^*_{\alpha,\beta}=\frac{r^2}{128\pi D}\left[\delta_{\alpha\beta}(4\ln z-5)+(4\ln z-3)r_{,\alpha}r_{,\beta}\right] \tag{5.87a}$$

$$V^*_{3,\beta}=-\frac{rr_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2}\left[32(2\ln z-1)-z^2(1-\nu)(4\ln z-5)\right] \tag{5.87b}$$

Aplicando-se as soluções fundamentais das equações (3.96) e (5.87), obtém-se o resultado da integral de domínio da equação (5.86).

Em última análise, as influências das cargas distribuídas no domínio da placa, apresentadas pelas equações (5.82i) e (5.82j), podem ser substituídas por uma formulação alternativa a partir das equações integrais sobre o contorno da região carregada, equações (5.86) e (5.87), ficando definidas da seguinte forma:

$$Z^*_{\alpha\beta}=\frac{D(1-\nu)}{2}\left[V^*_{\alpha,\gamma\beta}+V^*_{\beta,\gamma\alpha}-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\left(U^*_{\alpha\gamma,\beta}+U^*_{\beta\gamma,\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\nu}{(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta}\left(V^*_{\phi,\gamma\phi}-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U^*_{\phi\gamma,\gamma}\right)\right]n_\gamma \tag{5.88a}$$

$$Z^*_{3\alpha}=\frac{D(1-\nu)}{2}\left[V^*_{\alpha,\gamma}+V^*_{3,\gamma\alpha}-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\left(U^*_{\alpha\gamma}+U^*_{3\gamma,\alpha}\right)\right]n_\gamma \tag{5.88b}$$

Após a substituição das derivadas dos deslocamentos fundamentais $\mathbf{U}^*$, equações (4.90), e das derivadas das equações (5.87) nas influências das integrais de domínio (5.88), pode-se escrever:

$$Z_{11}^{*} = -\frac{r}{64\pi}\left\{(4\,ln\,z-3)\left[2(1-\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}n_1+(1+3\nu)\frac{\partial r}{\partial n}\right]+\right.$$

$$\left.+4\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}-\frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r}\left\{\left[2\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left.-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^3+(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\right]n_1+$$

$$\left.+\left[(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_2}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]n_2\right\} \qquad (5.89a)$$

$$Z_{12}^{*}=Z_{21}^{*}=-\frac{r}{64\pi}\left\{(4\,lnz-3)\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial r}{\partial x_1}n_2\right)+4(1-\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]\right\}+$$

$$-\frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r}\left\{\left[\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]n_1\right.$$

$$\left.+\left[\left(4A+2zK_1+1+\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right]n_2\right\} \qquad (5.89b)$$

$$Z_{22}^{*} = -\frac{r}{64\pi}\left\{(4\,ln\,z-3)\left[2(1-\nu)\frac{\partial r}{\partial x_2}n_2+(1+3\nu)\frac{\partial r}{\partial n}\right]+\right.$$

$$\left.+4\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2+\nu\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}-\frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r}\left\{\left[2\left(4A+2zK_1+1-\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_2}+\right.\right.$$

$$\left.-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^3+(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]n_2+$$

$$\left.+\left[(4A+1+\nu)\frac{\partial r}{\partial x_1}-\left(16A+4zK_1+2-2\nu\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right]n_1\right\} \qquad (5.89c)$$

$$Z_{31}^{*}=\frac{1}{8\pi}\left\{(2\,lnz-1)n_1+2\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}-\frac{\nu}{2\pi(1-\nu)}\left\{\left[B-A\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right]n_1+\left[A\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]n_2\right\} \qquad (5.89d)$$

$$Z_{31}^{*}=\frac{1}{8\pi}\left\{(2\,lnz-1)n_2+2\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}-\frac{\nu}{2\pi(1-\nu)}\left\{\left[B-A\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right]n_2-\left[A\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]n_1\right\} \qquad (5.89e)$$

Capítulo 6

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno

6.1 - Introdução

Este capítulo trata da aplicação do *Método dos Elementos de Contorno* nas equações integrais de placas finas e moderadamente espessas. O *Método dos Elementos de Contorno* pode ser formulado a partir da aplicação da terceira identidade de *Green*, de teoremas como o da reciprocidade de *Betti*, ou também a partir da *Técnica dos Resíduos Ponderados*. Pode-se dizer que, a *Técnica dos Resíduos Ponderados*, por ser uma técnica generalizada, facilita o relacionamento deste método com outros métodos para a composição de métodos mistos **[47]**.

Obtidas as equações integrais (capítulo 5), é feita a discretização do contorno da placa em elementos. Estas equações integrais são transformadas através de equações algébricas em um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em nós definidos no contorno. O sistema de equações lineares é obtido escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno. Com a imposição das condições de contorno do problema e a resolução final do sistema de equações resultante, valores do contorno e domínio da placa podem ser obtidos.

Para o caso de placas finas, seguindo-se a teoria clássica formulada por *Kirchhoff*, em cada ponto de colocação ou seja, em cada nó associado ao elemento de contorno, são necessárias duas equações correspondentes a deslocamentos e esforços no contorno. No caso das placas de espessura moderada, seguindo-se as teorias formuladas por *Reissner* e *Mindlin*, em cada ponto de colocação são necessárias três equações correspondentes a deslocamentos e esforços generalizados no contorno.

6.2 - Discretização do Contorno

Os elementos de contorno são sub-regiões do contorno de um domínio bi ou tridimensional que podem ser representados parametricamente. Na figura 6.1, um domínio Ω com contorno Γ, foi aproximado por um número finito de segmentos ou elementos de contorno Γ_j escolhidos de modo a representar o contorno real da placa.

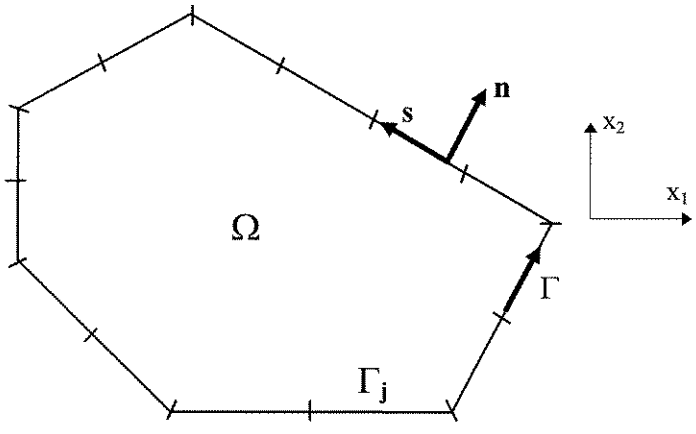

Figura 6.1 - Discretização do contorno da placa.

Neste estudo, para a aproximação da geometria do contorno da placa, o elemento utilizado é linear, ficando o mesmo definido pelas coordenadas cartesianas dos seus pontos nodais (figura 6.2). É freqüente a adoção das variáveis pertencentes ao nó para a referência daquelas pertencentes à parte interna do elemento. Desta forma, as coordenadas de um ponto interno podem ser escritas a partir das coordenadas dos nós com a seguinte relação:

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\Phi}^{t} \underset{\sim}{X}_{k}^{j} \tag{6.1}$$

onde em **X** o índice inferior **k** refere-se às direções (**1** ou **2**) e o índice superior **j** refere-se ao número do nó.

Explicitamente, a equação (6.1) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

sendo ξ uma coordenada admensional que varia entre $-1 \leq \xi \leq 1$ como mostra a figura 6.2.

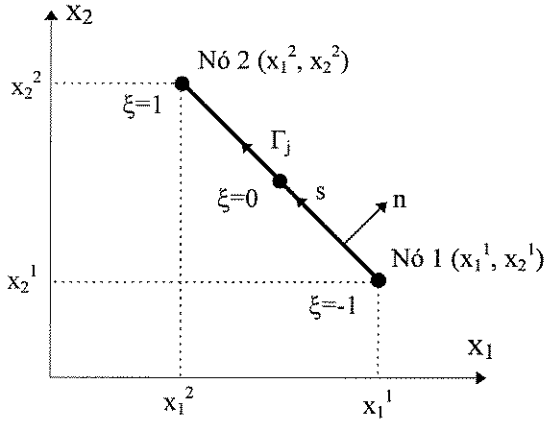

Figura 6.2 - Descrição geométrica do elemento linear.

Em cada elemento Γ_j, os deslocamentos e esforços podem ser aproximados por funções polinomiais que estão associadas ao número de nós ou pontos nodais. As funções polinomiais normalmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em elementos com um, dois e três pontos nodais.

No presente trabalho, as variáveis são aproximadas por funções lineares de maneira análoga à geometria, portanto as variáveis de deslocamentos e esforços sobre cada elemento podem ser expressas através de funções aproximadoras e valores nodais, da seguinte maneira:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\Phi}^{t} \underset{\sim}{U}_{k}^{j} \tag{6.3}$$

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\Phi}^{t} \underset{\sim}{T}_{k}^{j} \tag{6.4}$$

De acordo com a teoria clássica de *Kirchhoff*, para o caso de placas finas, os deslocamentos e esforços escritos explicitamente são dados a partir das equações (6.3) e (6.4), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \tag{6.5}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

sendo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} \tag{6.7a}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \dfrac{\partial w^1}{\partial n} \\ \dfrac{\partial w^2}{\partial n} \end{Bmatrix} \tag{6.7b}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n \\ M_n \end{Bmatrix} \tag{6.7c}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n^1 \\ V_n^2 \\ M_n^1 \\ M_n^2 \end{Bmatrix} \tag{6.7d}$$

Seguindo-se as teorias de *Reissner* e *Mindlin*, para o caso de placas moderadamente espessas, os deslocamentos e esforços escritos explicitamente são dados a partir das equações (6.3) e (6.4), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_3^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \\ T_3^1 \\ T_3^2 \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

sendo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \Psi_n \\ \Psi_s \end{Bmatrix} \tag{6.10a}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_3^1 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \Psi_n^1 \\ \Psi_n^2 \\ \Psi_s^1 \\ \Psi_s^2 \end{Bmatrix} \tag{6.10b}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} \tag{6.10c}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \\ T_3^1 \\ T_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_n^1 \\ Q_n^2 \\ M_n^1 \\ M_n^2 \\ M_{ns}^1 \\ M_{ns}^2 \end{Bmatrix} \tag{6.10d}$$

Como utilizou-se uma função linear para aproximar a geometria e as variáveis dos nós, o elemento adotado pode ser chamado de isoparamétrico linear. As funções aproximadoras estão diretamente relacionadas com a posição dos pontos nodais no elemento. Este posicionamento determina que os elementos sejam contínuos, descontínuos ou mistos.

6.2.1 - Elemento Linear Contínuo

Um elemento linear é contínuo quando os pontos nodais são comuns entre os elementos adjacentes, assumindo nos mesmos valores únicos. Como os valores nodais estão situados nos nós geométricos do elemento, a aproximação das variáveis pode ser feita por funções idênticas a da geometria. Este elemento é geralmente utilizado em contornos sem angulosidades e sem variação de vinculação.

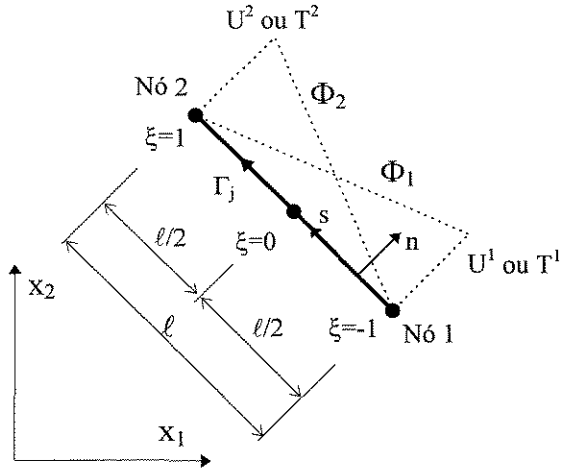

Figura 6.3 - Elemento linear contínuo.

A figura 6.3 mostra um elemento linear contínuo, onde as funções aproximadoras são dadas por:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{6.11a}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{6.11b}$$

Todavia, a presença de angulosidades e mudanças de vinculação no contorno das placas são comuns, tornando-se necessário a definição de outros tipos de elementos que permitam expressar tais descontinuidades. Para estes casos podem ser utilizados os elementos descontínuos e/ou mistos.

6.2.2 - Elemento Linear Descontínuo

No elemento linear descontínuo (figura 6.4), os seus pontos nodais são definidos nos extremos do elemento coincidindo com os nós geométricos do elemento. Entretanto, os pontos de colocação são deslocados para o interior do elemento. Este fato permite a descontinuidade das variáveis entre elementos adjacentes. Neste trabalho, as funções aproximadoras também são dadas pelas equações (6.11) porém, assumiu-se que as variáveis associadas sempre pertencessem ao extremo do elemento.

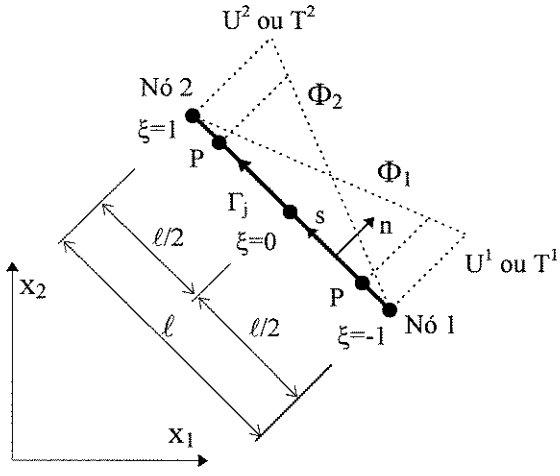

Figura 6.4 - Elemento linear descontínuo.

6.2.3 - Elemento Linear Misto

O elemento linear misto é utilizado quando há a necessidade de introduzir descontinuidades em apenas um extremo do elemento. Nos elementos lineares mistos da figura 6.5, apenas um dos pontos de colocação é deslocado para o interior do elemento. Esta particularidade permite a conexão de elementos contínuos e descontínuos.

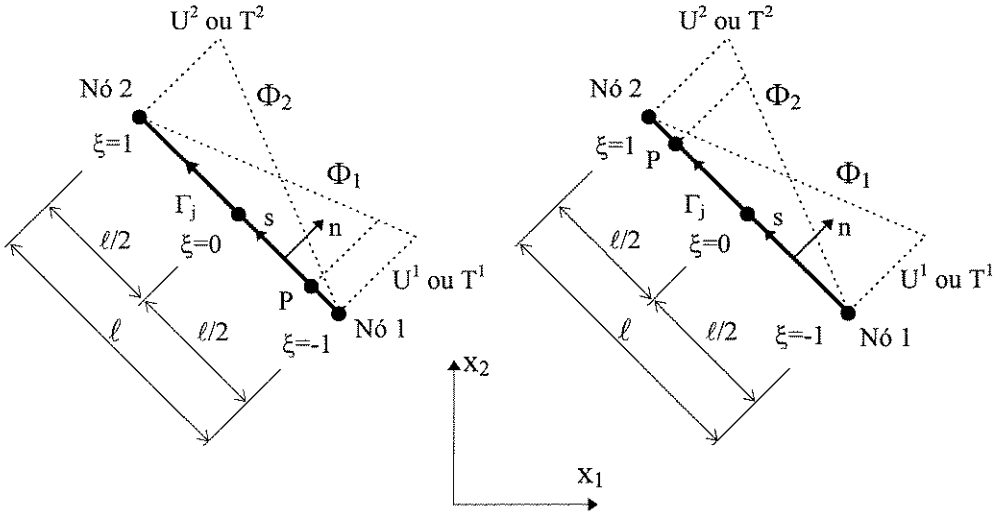

Figura 6.5 - Elementos lineares mistos.

Para representar descontinuidades de deslocamentos e esforços, quando são usados elementos mistos ou descontínuos, adota-se dois nós com as mesmas coordenadas. A figura 6.6 mostra um canto de placa com a adoção de dois nós de coordenadas idênticas, denominado nó duplo. Neste caso os elementos concorrentes ao canto são mistos ou descontínuos, de acordo com as condições de vinculação e/ou carregamento de cada um dos extremos.

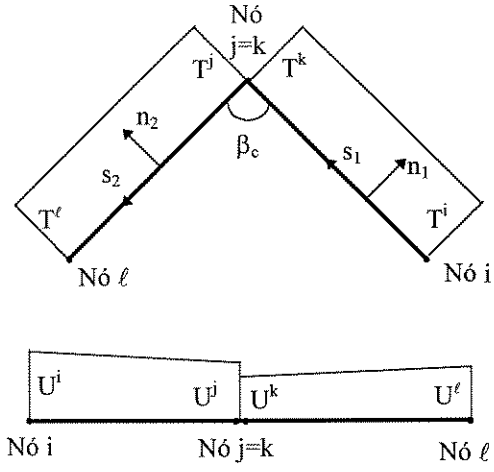

Figura 6.6 - Definição de nó duplo.

6.3 - Transformação das Equações Integrais de Placas Finas

Considerando-se a teoria clássica de *Kirchhoff*, seja a equação integral de placas finas para pontos do contorno (5.24):

$$C(\xi)w(\xi)+\int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,x)w(x)-M_n^*(\xi,x)\frac{\partial w}{\partial n}(x)\right]d\Gamma(x)+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}^*(\xi,x_c)w_{ci}(x_c)=$$

$$\int_{\Gamma}\left[V_n(x)w^*(\xi,x)-M_n(x)\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi,x)\right]d\Gamma(x)+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}(x_c)w_{ci}^*(\xi,x_c)+$$

$$+\int_{\Omega_g}g(x)w^*(\xi,x)d\Omega_g(x)$$

De acordo com a equação de flexão de placas finas (5.24), as variáveis relacionadas a este problema são **w**, ∂**w**/∂**n**, $\mathbf{V_n}$ e $\mathbf{M_n}$ e, quando existem cantos, $\mathbf{R_c}$ em cada um dos cantos. Independentemente das reações de canto $\mathbf{R_c}$, sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais de cada problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Este fato pode ser mostrado nas condições de contorno de placas finas apresentadas desde a equação (3.25) até a equação (3.30), no capítulo 3. Desta forma, das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas e, portanto, são necessárias duas equações integrais. Para resolver este problema, pode-se obter uma segunda equação derivando-se a equação (5.24) em relação a normal **[47]**. Utiliza-se também uma formulação alternativa **[33]** que consiste em aplicar a equação integral (5.24) em pontos com soluções fundamentais distintas, obtendo-se equações diferentes que relacionam as incógnitas.

Discretizando-se o contorno da placa em $\mathbf{N_e}$ elementos de contorno e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (6.3) e (6.4), a equação integral de placas finas para pontos no contorno, equação (5.24), pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(\xi)w(\xi)+\sum_{i=1}^{N_e}\int_{\Gamma}V_n^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^t(\eta)d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{w}^j_i-\sum_{i=1}^{N_e}\int_{\Gamma}M_n^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^t(\eta)d\Gamma(\eta)\frac{\partial w^j}{\partial \underset{\sim}{n}_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}(\eta_c)w_i(\eta_c)=\sum_{i=1}^{N_e}\int_{\Gamma}w^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^t(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{V}^j_n-\sum_{i=1}^{N_e}\frac{\partial w^*}{\partial n}\underset{\sim}{\Phi}^t(\eta)d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{M}^j_n+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}(\eta_c)w_i^*(\eta_c)+\int_{\Omega_g}g(\eta_d)w^*(\xi,\eta_d)d\Omega_g(\eta_d) \qquad (6.12)$$

sendo:

η : uma variável que percorre o contorno,

η_d : uma variável do domínio,

η_c : o valor da variável η nos cantos,

ξ : o ponto onde se aplica a equação integral.

As integrais de contorno mostradas na equação (6.12) são feitas numericamente para todos os elementos, exceto para os elementos que contém o ponto de aplicação da equação integral onde elas podem ser feitas analiticamente.

Analisando-se a equação (6.12), após realizada a integração, nota-se que se obtém uma relação linear entre valores nodais das variáveis incógnitas e conhecidas **w**, ∂**w**/∂**n**, $\mathbf{V_n}$ e $\mathbf{M_n}$ com as reações de cantos $\mathbf{R_c}$. Portanto, de uma placa com **N** nós resultam duas vezes o número de nós em incógnitas (**2N**) além de uma reação de canto $\mathbf{R_c}$ para cada canto. Através da formulação alternativa **[33]**, aplica-se a equação integral (6.12) para os pontos de contorno em cada um dos nós obtendo-se **N** equações. Para pontos externos ao domínio, onde tem-se um ponto externo para cada nó de contorno, obtém-se mais **N** equações. Cada ponto externo fica posicionado na direção normal ao contorno em cada nó associado. A distância usada normalmente é a média dos comprimentos dos elementos de contorno relacionados ao nó considerado **[53]**. A figura 6.7 mostra o posicionamento do nó externo **j'** associado ao nó **j** a uma distância ℓ_3 que é a média dos comprimentos dos elementos associados a este nó (ℓ_1, ℓ_2).

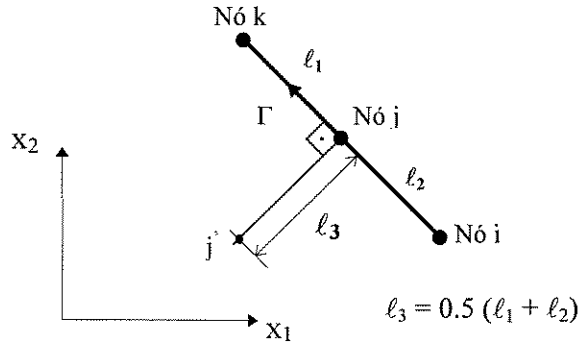

Figura 6.7 - Posição do nó externo ao contorno.

Desta forma, encontram-se **2N** equações para as variáveis incógnitas, variáveis conhecidas e reações de canto. Caso não hajam cantos na placa, não existem reações $\mathbf{R_c}$ incógnitas e o problema pode ser resolvido de forma simples. Quando há reações de canto, pode-se tratar o problema aproximando-se por diferenças finitas ou

escrevendo-se uma equação integral para cada $\mathbf{R_c}$, das **2N** escritas. De acordo com o que foi apresentado por **PALERMO JÚNIOR [54]**, resolveu-se os problemas de placa fina sem incluir as reações de canto incógnitas e os resultados obtidos não foram afetados significativamente.

6.3.1 - Montagem do Sistema de Equações

Após a realização das operações numéricas das integrais de contorno na equação (6.12) sobre cada elemento genérico Γ_j , soma-se estas influências para todos os $\mathbf{N_e}$ elementos nos $\mathbf{N_n}$ nós de contorno. Desta forma, a equação (6.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{C}\, w + \underset{\sim}{\hat{H}}\, \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\, \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F} \tag{6.13}$$

onde, para placas finas, sabe-se que:

$\underset{\sim}{U}^N = \left\{ w^1, \dfrac{\partial w^1}{\partial n}, \ldots, w^{Nn}, \dfrac{\partial w^{Nn}}{\partial n} \right\}, w_{c1}, \ldots, w_{cNc}$: são os deslocamentos e rotações normais ao contorno, onde incluem-se os deslocamentos de canto,

$\underset{\sim}{T}^N = \left\{ V_n^1, M_n^1, \ldots, V_n^{Nn}, M_n^{Nn} \right\}, R_{c1}, \ldots R_{cNc}$: são as cortantes e momentos normais ao contorno da placa, onde incluem-se as reações de canto,

$\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$: são as matrizes globais de influência, que dependem apenas da geometria do problema,

$\underset{\sim}{C}$ w : é o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual se aplicou a equação integral,

$\underset{\sim}{F}$: é o valor resultante da integração da região Ω_g.

Considerando-se a equação (5.34) o valor de **F** é dado por:

$$F(\xi) = \int_{\Omega_g} g(\eta_d) w^*(\xi, \eta_d) d\Omega_g(\eta_d) \tag{6.14}$$

Na matriz $\underset{\sim}{\hat{H}}$ não simétrica, obtida das integrações indicadas nas equações (6.12), é necessário acrescentar o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual foi aplicada a equação integral. Portanto, impondo-se as condições de contorno a todos os $\mathbf{N_n}$ nós do contorno da placa, a equação (6.13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F} \tag{6.15}$$

Impondo-se as **2N** variáveis conhecidas em (6.15) e após conveniente troca de membros das colunas da matrizes **H** e **G**, obtém-se o seguinte sistema de **2N** equações:

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \tag{6.16}$$

sendo, $\underset{\sim}{X}$ o vetor com as **2N** variáveis incógnitas, $\underset{\sim}{B}$ o vetor que contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno e também o valor do carregamento de domínio, $\underset{\sim}{A}$ é a matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas que foi obtida com a troca das colunas das matrizes **H** e **G**.

6.4 - Transformação das Equações Integrais de Placas Moderadamente Espessas

Considerando-se as equações integrais de placas de espessura moderada, são necessárias as transformações das equações integrais, equações (5.54) ou (5.78), em equações algébricas para o uso direto do *Método dos Elementos de Contorno*. As equações integrais citadas, em coordenadas cartesianas, são referentes às formulações obtidas através das teorias de *Mindlin* e *Reissner*.

Sejam as equações de placas de espessura moderada em coordenadas cartesianas:

$$u_j(\xi) + \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x)U_{i3}^*(\xi,x)d\Omega_g(x)$$

$$u_j(\xi) + \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(\xi,x) \right] g(x)d\Omega_g(x)$$

As equações (5.54) e (5.78) podem ser transformadas em integrais que relacionam deslocamentos e forças no contorno, de maneira análoga ao desenvolvimento feito para as placas finas (item 5.2.2). Assim, obtém-se equações integrais análogas às encontradas por **WEEËN [34, 35]** que podem ser notadas da forma:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x)U_{i3}^*(\xi,x)d\Omega_g(x) \qquad (6.17)$$

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_{\Gamma}T_{ij}^{*}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma}U_{ij}^{*}(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x)$$

$$+\int_{\Omega_g}\left[U_{i3}(\xi,x)-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U_{i\alpha,\alpha}(\xi,x)\right]g(x)d\Omega_g(x) \qquad (6.18)$$

A matriz $\mathbf{C_{ij}(\xi)}$ depende apenas da geometria do problema (ver item 5.2.2). Contudo, devido ao posicionamento do ponto de colocação onde se aplica a equação integral ser externo ao domínio da placa, esta matriz torna-se nula.

Desta forma, de acordo com as equações de flexão de placas de espessura moderada (5.54) ou (6.17) e (5.78) ou (6.18), as variáveis relacionadas a este problema em um sistema de coordenadas cartesianas são ($\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$) e ($\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$). Conforme o item 4.8, sabe-se que a partir de condições de contorno de cada problema, sempre são conhecidas três das seis variáveis mencionadas. Desta forma, das seis variáveis iniciais resultam três incógnitas e, portanto, são necessárias três equações integrais com diferentes soluções fundamentais de forma a compatibilizar incógnitas e variáveis conhecidas. Para resolver este problema, utilizou-se o procedimento utilizado nos trabalhos de **WEEËN [34, 35]**, aplicando-se para a obtenção das soluções fundamentais necessárias, três condições de carregamentos unitários referentes a uma força na direção do eixo $\mathbf{x_3}$ e dois momentos nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$. Na resolução das equações integrais, utilizou-se uma formulação análoga à apresentada em **PAIVA [33]**. Esta formulação consiste em aplicar as equações integrais mencionadas em pontos fora do domínio da placa, obtendo-se equações diferentes que relacionam as incógnitas.

Através deste procedimento, quando discretiza-se o contorno da placa em $\mathbf{N_e}$ elementos e substitui-se as variáveis mencionadas por suas aproximações, equações (6.3) e (6.4), as equações (5.54) ou (6.17) e (5.78) ou (6.18) podem ser escritas da seguinte forma:

$$u_j(\xi)+\sum_{j=1}^{N_e}\int_{\Gamma}T_{ij}^{*}(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^{j}(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{U}_i^{j}=\sum_{j=1}^{N_e}\int_{\Gamma}U_{ij}^{*}(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^{j}(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{T}_i^{j}$$

$$+\int_{\Omega_g}g(\eta_d)U_{i3}^{*}(\xi,\eta_d)d\Omega_g(\eta_d) \qquad (6.19)$$

$$u_j(\xi)+\sum_{j=1}^{N_e}\int_{\Gamma}T_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{U}_i^j=\sum_{j=1}^{N_e}\int_{\Gamma}U_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{T}_i^j$$

$$+\int_{\Omega_g}\left[U_{i3}(\xi,\eta_d)-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U_{i\alpha,\alpha}(\xi,\eta_d)\right]g(\eta_d)d\Omega_g(\eta_d) \qquad (6.20)$$

sendo novamente:

η : uma variável que percorre o contorno,

η_d : uma variável do domínio,

ξ : o ponto onde se aplica a equação integral.

As integrais de contorno mostradas nas equações (6.19) e (6.20) são feitas numericamente para todos os elementos de contorno, utilizando-se quadratura de *Gauss*. Através da formulação alternativa apresentada por **PAIVA [33]**, aplica-se as equações integrais (6.19) ou (6.20) para pontos externos ao domínio, obtendo-se **3N** equações. Cada ponto externo é posicionado na direção normal ao contorno em cada nó associado.

No trabalho de **PAIVA ε VENTURINI [53]**, a distância padrão utilizada para o posicionamento do nó externo ao contorno, foi a média dos comprimentos dos elementos de contorno relacionados ao nó considerado (figura 6.7). Para este trabalho, foi utilizado **1/4** da média dos comprimentos dos elementos adjacentes ao nó, com base no estudo de placas com a utilização de elementos quadráticos.

6.4.1 - Montagem do Sistema de Equações

Realizadas as operações numéricas nas equações integrais de contorno, equações (6.19) ou (6.20), sobre cada elemento genérico Γ_j , soma-se estas influências para todos os $\mathbf{N_e}$ elementos nos $\mathbf{N_n}$ nós de contorno. Através deste procedimento, as equações (6.19) e (6.20) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F} \tag{6.21}$$

onde, para placas de espessura moderada, tem-se:

$\underset{\sim i}{U^j} = \left\{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \ldots\ldots\ldots\ldots u_1^{Nn}, u_2^{Nn}, u_3^{Nn}\right\}$: são os deslocamentos generalizados, em coordenadas cartesianas,

$\underset{\sim i}{T^j} = \left\{t_1^1, t_2^1, t_3^1, \ldots\ldots\ldots\ldots t_1^{Nn}, t_2^{Nn}, t_3^{Nn}\right\}$: são as cortantes e momentos, em coordenadas cartesianas,

$\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$: são as matrizes de influência, que dependem apenas da geometria do problema,

$\underset{\sim}{F}$: é o valor resultante do carregamento do domínio Ω_g .

Fazendo-se a imposição das **3N** variáveis conhecidas na equação (6.21) e após conveniente troca de membros das colunas da matrizes **H** e **G**, obtém-se o seguinte sistema de **3N** equações:

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \tag{6.22}$$

Na equação (6.22), o vetor $\underset{\sim}{X}$ acumula todas as **3N** variáveis incógnitas do contorno. O vetor $\underset{\sim}{B}$ contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno e também o valor do carregamento de domínio $\underset{\sim}{F}$. A matriz $\underset{\sim}{A}$ é a matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas, obtida com a troca das colunas das matrizes **H** e **G**.

6.4.2 - Deslocamentos em Pontos do Domínio

A determinação dos deslocamentos em pontos do domínio da placa é feita diretamente, a partir dos valores encontrados no contorno. Assim, rearranjando-se as equações (5.54) e (5.78) pode-se escrever:

$$u_j(\xi) = -\int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(x)U_{i3}^*(\xi,x)d\Omega_g(x) \tag{6.23}$$

$$u_j(\xi) = -\int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)t_j(x)d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(\xi,x) \right] g(x)d\Omega_g(x) \tag{6.24}$$

Discretizando-se as equações (6.23) e (6.24) de maneira análoga à aquela utilizada na discretização das equações (6.17) e (6.18) e substituindo-se as variáveis do problema por suas aproximações, pode-se escrever:

$$u_j(\xi) = -\sum_{j=1}^{N_e} \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{U}_i^j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{T}_i^j +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(\eta_d)U_{i3}^*(\xi,\eta_d)d\Omega_g(\eta_d) \tag{6.25}$$

$$u_j(\xi) = -\sum_{j=1}^{N_e} \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{U}_i^j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,\eta)\underset{\sim}{\Phi}^j(\eta)d\Gamma(\eta)\underset{\sim}{T}_i^j +$$

$$+ \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}(\xi,\eta_d) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(\xi,\eta_d) \right] g(\eta_d)d\Omega_g(\eta_d) \tag{6.26}$$

Escrevendo-se a equação (6.25) ou (6.26) para os pontos do domínio da placa onde necessitam ser determinados os deslocamentos, obtém-se:

$$\underset{\sim}{U}' = -\underset{\sim}{H}'\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{G}'\,\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F}' \tag{6.27}$$

onde, $\underset{\sim}{U}'$ é o vetor dos deslocamentos nos pontos do domínio. Os coeficientes das matrizes $\underset{\sim}{H}'$ e $\underset{\sim}{G}'$. são obtidas de maneira semelhantes às aquelas obtidas para os pontos de contorno. O vetor $\underset{\sim}{F}'$ contém as influências dos carregamentos de domínio.

6.4.3 - Esforços em Pontos do Domínio

A determinação dos momentos fletores e esforços cortantes em pontos do domínio da placa tem por base as equações integrais (5.63) e (5.64) ou (5.80) e (5.81). Analogamente aos itens anteriores, faz-se a discretização destas equações e substitui-se as variáveis do problema por suas aproximações que, na ausência das integrais de domínio, são dadas por:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = -\sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma} T^*_{\alpha\beta k}(\xi,\eta)\,\underset{\sim}{\Phi}^k(\eta)\,d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{U}^k + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma} U^*_{\alpha\beta k}(\xi,\eta)\,\underset{\sim}{\Phi}^k(\eta)\,d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{T}^k \tag{6.28}$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma} T^*_{3\beta k}(\xi,\eta)\,\underset{\sim}{\Phi}^k(\eta)\,d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{U}^k + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma} U^*_{3\beta k}(\xi,\eta)\,\underset{\sim}{\Phi}^k(\eta)\,d\Gamma(\eta)\,\underset{\sim}{T}^k \tag{6.29}$$

Realizada a discretização, as equações (6.28) e (6.29) podem ser escritas para os pontos do domínio da placa onde necessitam ser determinados os esforços, obtendo-se com a inclusão das integrais de domínio as seguintes formas matriciais finais:

$$\underset{\sim}{M} = -\underset{\sim}{H}^*\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{G}^*\,\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F}^* \tag{6.30}$$

$$\underset{\sim}{Q} = -\underset{\sim}{H}^{**}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{G}^{**}\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F}^{**} \tag{6.31}$$

onde, $\underset{\sim}{M}$ é o vetor dos momentos fletores nos pontos do domínio e $\underset{\sim}{Q}$ o vetor dos esforços cortantes nestes pontos. Os coeficientes das matrizes $\underset{\sim}{H}^{*}, \underset{\sim}{H}^{**}$ e $\underset{\sim}{G}^{*}$. $\underset{\sim}{G}^{**}$. são obtidos com os pontos de colocação localizados no local onde deseja-se obter as respostas dos esforços. Os vetores $\underset{\sim}{F}^{*}$ e $\underset{\sim}{F}^{**}$ contém as influências dos carregamentos de domínio.

Para a determinação das influências dos carregamentos de domínio, devem ser consideradas as integrais de domínio apresentadas pelas equações (5.54) ou (6.17) e (5.78) ou (6.18). Cabendo lembrar que estas equações integrais são modificadas de acordo com cada formulação adotada.

Capítulo 7

Exemplos Numéricos

7.1 - Introdução

Neste capítulo, são realizados exemplos numéricos para análise de problemas de placa de espessura moderada e alguns problemas de placa fina, de acordo com as formulações das teorias de *Mindlin* e *Reissner*. Para a resolução dos exemplos, através do *Método dos Elementos de Contorno*, foram utilizados programas desenvolvidos no presente trabalho onde os mesmos são diferenciados de acordo com cada formulação adotada, conforme será visto no próximo item. Os resultados alcançados para placas finas são comparados através de soluções analíticas por **TIMOSHENKO ε KRIEGER [55]**, ou por soluções numéricas através do *Método dos Elementos de Contorno* obtidas nos trabalhos de **PAIVA [33]** e **RIBEIRO [38]**. Para as placas de espessura moderada com relações diferenciadas de espessura/vão, os resultados são comparados com as soluções numéricas obtidas por **RIBEIRO [38]**, através do *Método dos Elementos de Contorno*.

Na escolha das condições de contorno ou vinculação da placa, conforme item 4.8, pode-se prescrever nas bordas simplesmente apoiadas, ora a condição de rotação tangencial nula no plano vertical tangente ao contorno (condição *hard*), ora o momento torçor nulo neste mesmo plano (condição soft). As condições de contorno *hard* e *soft* foram prescritas de acordo com as considerações de **BATHE [52] et alii**.

Nos exemplos analisados, as variáveis são aproximadas por elementos lineares contínuos ou descontínuos. Os elementos descontínuos são utilizados quando os esforços, deslocamentos ou os vetores tangentes ao contorno sofrem variação brusca. Os pontos de colocação foram posicionados na vizinhança da placa, fora do domínio, em uma direção normal ao contorno. Utilizou-se a distância de **1/4** da média do comprimento dos elementos adjacentes ao nó considerado. O valor adotado para esta distância, foi o que ofereceu melhores resultados nos exemplos numéricos analisados. Na resolução das equações integrais, para o cálculo das integrações numéricas, foi utilizada a quadratura de *Gauss* com **48** pontos referentes a pesos e coordenadas.

7.2 - Considerações Gerais

Os exemplos apresentados neste capítulo são analisados generalizadamente, de acordo com as diferentes formulações de placa moderadamente espessa escritas em função das teorias de *Mindlin* e *Reissner*, obtendo-se resultados diferenciados para cada formulação adotada. Foram montados programas onde considera-se casos em que as equações integrais são resolvidas utilizando-se soluções fundamentais conhecidas e também soluções fundamentais desenvolvidas neste trabalho. Desta forma, são considerados os seguintes casos para a montagem dos programas:

a) Reissner Linear

Neste caso, são utilizadas na resolução da equação integral discretizada (6.20) as soluções fundamentais (4.90) e (4.91), referentes a uma força e dois momentos unitários aplicados que, de forma resumida, são dadas por:

$$U^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi D}\left\{\frac{2}{1-\nu}\left[A(z) - B(z) r_{,\alpha}\, r_{,\beta}\right] - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} r_{,\alpha}\, r_{,\beta}\right\}$$

$$U^*_{\alpha 3} = -U^*_{3\alpha} = \frac{1}{4\pi D}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right) r r_{,\alpha}$$

$$U_{33}^{*} = -\frac{1}{2\pi D\lambda^2}\left[\frac{2}{1-\nu}\ln z - \frac{1}{4}z^2(\ln z - 1)\right]$$

$$T_{i\alpha}^{*} = D\frac{1-\nu}{2}\left(U_{i\alpha,\beta}^{*} + U_{i\beta,\alpha}^{*} + \frac{2\nu}{1-\nu}U_{i\gamma,\gamma}^{*}\delta_{\alpha\beta}\right)n_\beta$$

$$T_{i3}^{*} = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(U_{i\alpha}^{*} + U_{i3,\alpha}^{*}\right)n_\alpha$$

sendo para a teoria de *Reissner* $z = \lambda r$, onde $\lambda = \sqrt{10}/h$.

Na resolução da integral de domínio da equação (6.20), utiliza-se a transformação apresentada pela equação integral de contorno (5.86), juntamente com as soluções fundamentais (4.90) e (5.87). Assim:

$$\int_{\Omega_g}\left[U_{i3}^{*}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U_{i\alpha,\alpha}^{*}(\xi,x)\right]g(x)d\Omega_g(x) =$$

$$g\int_{\Gamma_g}\left[V_{i,\alpha}^{*}(\xi,x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}U_{i\alpha}^{*}(\xi,x)\right]n_\alpha d\Gamma_g(x)$$

sendo

$$V_{\alpha,\beta}^{*} = \frac{r^2}{128\pi D}\left[\delta_{\alpha\beta}(4\ln z - 5) + (4\ln z - 3)r_{,\alpha}r_{,\beta}\right]$$

$$V_{3,\beta}^{*} = -\frac{rr_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2}\left[32(2\ln z - 1) - z^2(1-\nu)(4\ln z - 5)\right]$$

Com relação aos esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas nas equações (5.80) e (5.81) as soluções fundamentais (5.83) e (5.84). Na resolução da integral de domínio para os esforços e deslocamentos internos das equações (5.80) e (5.81), utiliza-se o procedimento apresentado em (5.88) aplicando as soluções fundamentais (5.89).

b) Mindlin/Weeën 1

Para este caso, são utilizadas para a resolução da equação integral discretizada (6.19) as soluções fundamentais (4.90) e (4.91), referentes a uma força e dois momentos unitários aplicados apresentadas no **caso a** onde, para a teoria de *Mindlin* $z = \lambda r$ e $\lambda = \pi / h$. Para a resolução da integral de domínio da equação (6.19), utilizam-se os resultados da transformação apresentada pelas equações integrais de contorno (5.72). Assim:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^2}{12\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{6} \right) \right] R_{,\alpha} R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_g$$

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{32\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{4} \right) - \frac{gR}{2\pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left(\ln z - \frac{1}{2} \right) \right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_g$$

Com relação aos esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas para as equações (5.63) e (5.64) as soluções fundamentais (5.83) e (5.84). Na resolução da integral de domínio para os esforços e deslocamentos internos das equações (5.63) e (5.64), utiliza-se o procedimento apresentado em (5.76) com aplicação das soluções fundamentais (4.90).

c) Mindlin/Weeën 2

Utiliza-se neste caso, a equação integral discretizada (6.19) com as soluções fundamentais (4.90) e (4.91), referentes a uma força e dois momentos unitários aplicados apresentadas no **caso a** onde, para a teoria de *Mindlin* $z = \lambda r$ e $\lambda = \pi / h$. Na resolução da integral de domínio da equação (6.19), utiliza-se a transformação apresentada pelas equações integrais de contorno (5.72b) e (5.73). Assim:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} g(x) \left[\frac{r^2}{8\pi D} (\ln z - 1) \right] (\xi, x) n_\alpha d\Gamma_g(x)$$

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^*(\xi,x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{32\pi D}\left(\ln z - \frac{5}{4}\right) - \frac{gR}{2\pi D\lambda^2(1-\nu)}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right)\right] R_{,\gamma}\, n_\gamma d\Gamma_g$$

Com relação aos esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas novamente para as equações (5.63) e (5.64) as soluções fundamentais (5.83) e (5.84). Na resolução da integral de domínio para os esforços e deslocamentos internos das equações (5.63) e (5.64), utiliza-se novamente o procedimento apresentado em (5.76) com aplicação das soluções fundamentais (4.90).

d) Danson/Weeën 2

Especificamente para este caso, são utilizadas na equação integral discretizada (6.19) as soluções fundamentais (4.79) e (4.80), referentes a uma força unitária aplicada na direção do eixo $\mathbf{x_3}$. São utilizadas também as soluções fundamentais (4.90a) a (4.90e) e (4.91a) a (4.91f), referentes a momentos unitários aplicados nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$. De forma resumida, estas equações são dadas por:

$$U_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2\pi D}\left\{\frac{2}{1-\nu}\left[A(z) - B(z) r_{,\alpha}\, r_{,\beta}\right] - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} r_{,\alpha}\, r_{,\beta}\right\}$$

$$U_{\alpha 3}^* = \frac{1}{4\pi D}\left(\ln z - \frac{1}{2}\right) r r_{,\alpha}$$

$$U_{3\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi D}\left(\ln r - \frac{(A_2+1)}{2}\right) r r_{,\alpha}$$

$$U_{33}^* = -\frac{1}{2\pi D\lambda^2}\left[\frac{2}{1-\nu}\ln z - \frac{1}{4} z^2\left(\ln z - \frac{(A_2+2)}{2}\right)\right]$$

$$T_{i\alpha}^* = D\frac{1-\nu}{2}\left(U_{i\alpha,\beta}^* + U_{i\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{i\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}\right) n_\beta$$

$$T_{i3}^* = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(U_{i\alpha}^* + U_{i3,\alpha}^*\right) n_\alpha$$

sendo para a teoria de *Mindlin* $z = \lambda \boldsymbol{r}$, onde $\lambda = \pi / \boldsymbol{h}$.

Na resolução da integral de domínio da equação (6.19), utiliza-se resultados da transformação apresentada pelas equações integrais de contorno (5.71) e (5.73). Assim:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{32\pi D}\left(\ln r - \frac{(2A_2+5)}{4}\right) - \frac{gR}{2\pi G' h}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\right] R_{,\gamma}\, n_\gamma d\Gamma_g$$

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^{*}(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} g(x)\left[\frac{r^2}{8\pi D}(\ln z - 1)\right](\xi, x) n_\alpha d\Gamma_g(x)$$

Com relação aos esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas para as equações (5.63) e (5.64) as soluções fundamentais (5.66) e (5.67), juntamente com as adequadas soluções fundamentais (5.83) e(5.84). Na resolução da integral de domínio para os esforços e deslocamentos internos das equações (5.63) e (5.64), utiliza-se o procedimento apresentado em (5.76) que tem como resultado a aplicação das soluções fundamentais (5.77). Para considerar as hipóteses apresentadas por **DANSON [30]**, utiliza-se o valor $\mathbf{A_2 = -1}$ nas equações (4.79), (4.80), (5.66), (5.71) e (5.77).

d) Bezine/Stern/Weeën 2

Este caso é igual ao **caso c**, todavia para considerar as hipóteses apresentadas por **BEZINE [31]** e **STERN [32]**, utiliza-se o valor $\mathbf{A_2 = -2}$ nas equações (4.79), (4.80), (5.66), (5.71) e (5.77).

e) Reissner Quadrático

Neste caso, são referenciados os resultados de exemplos numéricos de placas de espessura moderada e relações espessura/vão apresentados no trabalho de **RIBEIRO [38]**. Este trabalho utiliza elementos quadráticos na resolução dos problemas de placa pelo *Método dos Elementos de Contorno*.

7.3 - Exemplo 01 : Placa Retangular em Balanço

Uma placa retangular em balanço, com relação entre lados igual a 1/4, foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído **g** sobre o seu domínio. Esta placa também foi submetida a um carregamento linearmente uniforme $\mathbf{t_3}$ sobre uma de suas bordas. Como mostra a Figura 7.1, as condições de contorno são de uma borda engastada e as outras bordas livres, as dimensões são de 1,6 m na direção $\mathbf{x_1}$ e 0,4 m na direção $\mathbf{x_2}$. O coeficiente de *Poisson* foi considerado nulo e para o cálculo dos esforços e deslocamentos no contorno, foi adotado o valor de **0.02** kN.m^3/m para rigidez à flexão da placa **D**. O contorno foi dividido em 40 elementos lineares e, foram usados nos cantos da placa, elementos descontínuos, perfazendo um total de 44 nós. Também foram colocados três pontos no domínio da placa, no sentido de determinar resultados de deslocamentos e esforços no interior da mesma. No cálculo dos pontos de domínio, foram alteradas as relações de espessura/vão na proporção de **h/ℓ=1/100**, **h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**, para considerar apropriadamente este efeito.

O principal propósito deste exemplo foi a comparação dos resultados com os de uma viga em balanço, que constitui uma aproximação do problema. Deve-se ressaltar que os resultados provenientes da teoria de vigas não consideram o efeito da deformação por cortante.

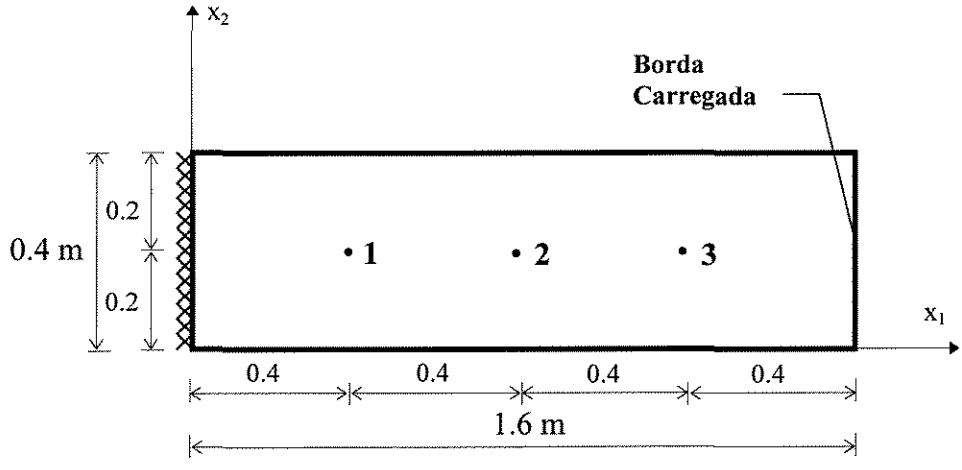

Figura 7.1 - Placa Retangular em Balanço.

Nas Tabelas 7.1 e 7.2 são apresentados os resultados em esforços e deslocamentos nas seções extremas da placa (pontos no contorno), de acordo com os diferentes casos mostrados no item 7.2. Nas Tabelas 7.3 a 7.5, são apresentados os resultados de esforços e deslocamentos no domínio da placa para as relações de espessura/vão **h/ℓ=1/100, h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**, considerando-se os casos cujos resultados foram mais significativos.

A Tabela 7.1 apresenta os resultados de contorno obtidos para um carregamento linearmente distribuído aplicado sobre a borda livre, oposta ao engastamento. Para o cálculo dos valores representativos de esforços e deslocamentos em cada seção, obtidos para as diferentes formulações de placa, foi efetuada a média dos valores nos pontos situados sobre a seção. Este procedimento é realizado de maneira análoga aos utilizados nos trabalhos de **PAIVA [33]** e **RIBEIRO [38]**.

Tabela 7.1 - Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento linearmente distribuído no lado oposto da borda engastada.

(kN/m)	**Reissner Linear**	**Mindlin Weeën 1**	**Mindlin Weeën 2**	**Danson Weeën 2**	**Bezine/Stern Weeën 2**	**Viga**
Cortante (x_1=0)	0,4009	0,4009	0,4009	0,4132	0,4051	0,4
Momento Fletor (x_1=0)	0,6413	0,6413	0,6413	0,6525	0,6459	0,64
Deslocamento (x_1=1,6)	69,004	69,004	69,004	68,899	68,975	68,267

Considerando-se que o problema de viga não considera o efeito da deformação por cortante, os resultados obtidos para o carregamento uniforme e concentrado sobre a borda livre foram bastante próximos a este problema clássico.

Primeiramente, por se tratar de um carregamento linear e, pela semelhança entre as formulações desenvolvidas, os casos **Reissner Linear**, **Mindlin/Weeën 1** e **Mindlin/Weeën 2** apresentaram resultados idênticos e também bastante próximos a teoria de vigas, com discrepâncias inferiores a 0.2%. Em uma segunda análise, os casos **Danson/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2** também apresentaram resultados

bastante significativos em relação ao problema de viga, também com discrepâncias inferiores a 0.2%.

A Tabela 7.2 apresenta resultados nos pontos de contorno obtidos para um carregamento distribuído uniformemente sobre o domínio da placa. Considerando-se que o carregamento distribuído é uniforme, as equações integrais de domínio para as diferentes formulações podem ser convertidas em integrais sobre o contorno do carregamento.

Tabela 7.2 - Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

(kN/m)	**Reissner Linear**	**Mindlin Weeën 1**	**Mindlin Weeën 2**	**Danson Weeën 2**	**Bezine/Stern Weeën 2**	**Viga**
Cortante (x_1=0)	0,6399	0,8224	0,6509	0,6441	0,6423	0,640
Momento Fletor (x_1=0)	0,5119	0,6587	0,5207	0,5170	0,5153	0,512
Deslocamento (x_1=1,6)	41,200	47,840	43,421	41,457	41,460	40,960

Os resultados obtidos para o carregamento distribuído na placa em balanço também foram bastante próximos ao problema clássico de viga. De acordo com a Tabela 7.2, os casos **Reissner Linear**, **Danson/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2** foram os que apresentaram os resultados mais significativos, obtendo valores finais com discrepâncias inferiores a 1%. No caso **Mindlin/Weeën 2** não foi encontrado bom resultado para o deslocamento da placa, apenas encontrou-se resultados significativos para os esforços externos de força cortante e momento fletor. Já para o caso **Mindlin/Weeën 1** não foram encontrados bons resultados. Isto pode ter ocorrido devido ao fato de se ter utilizado para corrigir o módulo de elasticidade transversal o fator $\pi/\mathbf{h}$, ao contrário do primeiro caso (Reissner Linear) que utiliza o fator $\sqrt{\mathbf{10}}\,/\,\boldsymbol{h}$.

As Tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 apresentam os resultados de esforços e deslocamentos em pontos internos (Figura 7.1) em **kN/m**, obtidos considerando-se um carregamento distribuído uniformemente sobre o domínio da placa. Nessas tabelas são

consideradas, respectivamente, as relações de espessura/vão **h/ℓ=1/100**, **h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**. São apresentados apenas os casos cujos resultados foram mais significativos.

Tabela 7.3 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/100**.

Ponto	Casos	w	M_{11}	M_{22}
1	***Reissner Linear***	4,2663	-0,3317	-0,3796
	Danson/Weeën 2	4,0607	-0,3309	-0,2416
	Bezine/Stern/Weeën 2	4,0853	-0,3335	-0,2751
	Viga	4,3200	-0,2880	-
2	***Reissner Linear***	15,2020	-0,1179	-0,1511
	Danson/Weeën 2	14,9920	-0,0877	0,6427
	Bezine/Stern/Weeën 2	15,0668	-0,0977	0,5310
	Viga	14,5100	-0,1280	-
3	***Reissner Linear***	28,6575	-0,0048	0,0499
	Danson/Weeën 2	27,9224	0,0019	0,7616
	Bezine/Stern/Weeën 2	28,2141	0,0061	0,6981
	Viga	27,3600	-0,0320	-

Tabela 7.4 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/20**.

Ponto	Casos	w	M_{11}	M_{22}
1	***Reissner Linear***	4,3763	-0,2908	0,0006
	Danson/Weeën 2	4,3496	-0,2919	0,0050
	Bezine/Stern/Weeën 2	4,3609	-0,2916	0,0028
	Viga	4,3200	-0,2880	-
2	***Reissner Linear***	14,6784	-0,1292	0,0007
	Danson/Weeën 2	14,6575	-0,1302	0,0056
	Bezine/Stern/Weeën 2	14,6691	-0,1301	0,0031
	Viga	14,5100	-0,1280	-
3	***Reissner Linear***	27,6681	-0,0319	-0,0001
	Danson/Weeën 2	27,6814	-0,0320	0,0040
	Bezine/Stern/Weeën 2	27,6863	-0,0324	0,0022
	Viga	27,3600	-0,0320	-

Tabela 7.5 - Deslocamentos e esforços no domínio de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com **h/ℓ=1/10**.

Ponto	Casos	w	M_{11}	M_{22}
1	***Reissner Linear***	4,3964	-0,2887	0,0001
	Danson/Weeën 2	4,3897	-0,2893	-0,0044
	Bezine/Stern/Weeën 2	4,3876	-0,2886	-0,0020
	Viga	4,3200	-0,2880	-
2	***Reissner Linear***	14,6473	-0,1304	0,0002
	Danson/Weeën 2	14,6571	-0,1302	-0,0042
	Bezine/Stern/Weeën 2	14,6383	-0,1286	-0,0016
	Viga	14,5100	-0,1280	-
3	***Reissner Linear***	27,5810	-0,0364	-0,0001
	Danson/Weeën 2	27,6102	-0,0348	-0,0021
	Bezine/Stern/Weeën 2	27,5511	-0,0322	-0,0007
	Viga	27,3600	-0,0320	-

Os resultados de deslocamentos e momentos fletores em pontos do domínio da placa, devido a um carregamento uniformemente distribuído, se aproximaram problema clássico de viga a medida que a relação espessura/vão foi aumentando. Isto se deve ao fato de que a influência da deformação por cortante piorou os resultados de baixa espessura. A partir da Tabela 7.5, os casos considerados **Reissner Linear**, **Danson/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2** foram os que apresentaram os resultados mais significativos, obtendo resultados com discrepâncias inferiores a 0.3%.

7.4 - Exemplo 02 : Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Neste exemplo, de acordo com a Figura 7.2, analisa-se uma placa quadrada de lado ℓ, simplesmente apoiada no contorno e com carregamento uniformemente distribuído **g** no domínio. O coeficiente de *Poisson* é igual a **0.3**, e a placa foi resolvida para algumas relações de espessura/vão considerando-se a condição de rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida (condição *hard*). O contorno foi discretizado em 40 elementos lineares e, novamente foram usados nos cantos da placa, elementos descontínuos, perfazendo um total de 44 nós.

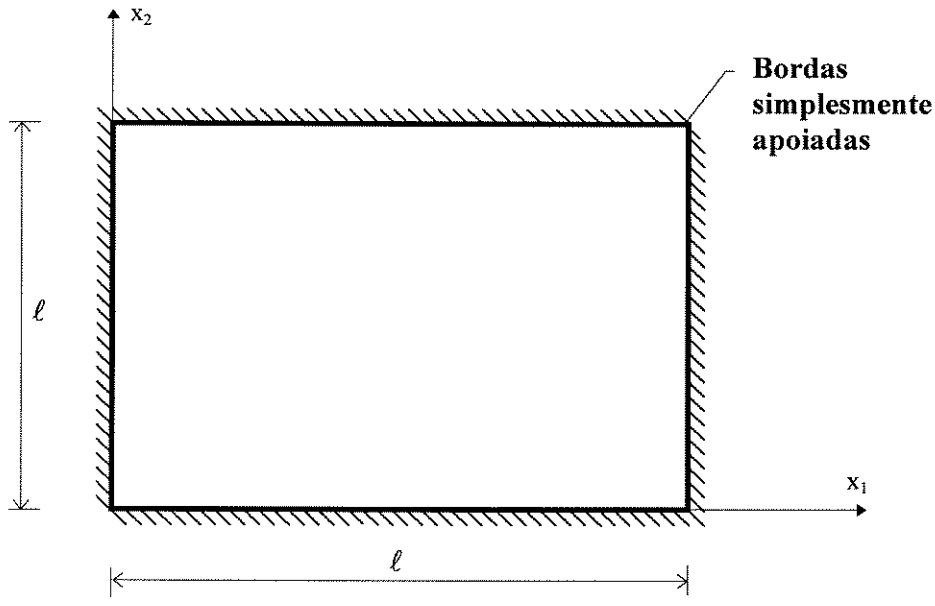

Figura 7.2 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Nos Gráficos 7.1 a 7.5, são apresentados os valores do deslocamento transversal **w** sobre a linha de centro da placa. Para este caso, foram consideradas as relações de **(h/ℓ)** iguais a **(1/100)**, **(1/10)**, **(1/5)**, **(1/4)** e **(3/10)**.

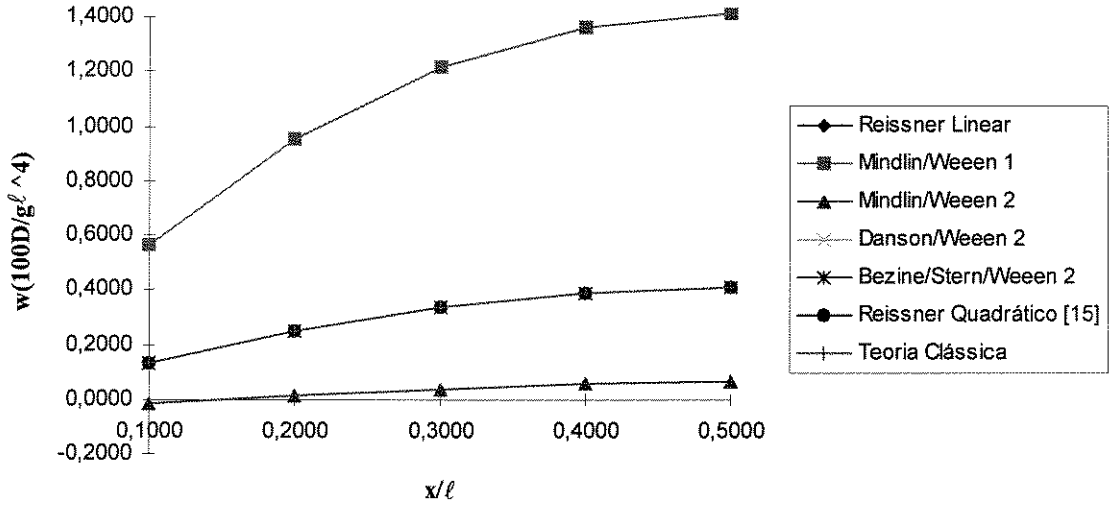

Gráfico 7.1 - Deslocamento transversal **w** ao longo da linha de centro com relação **h/ℓ=1/100**.

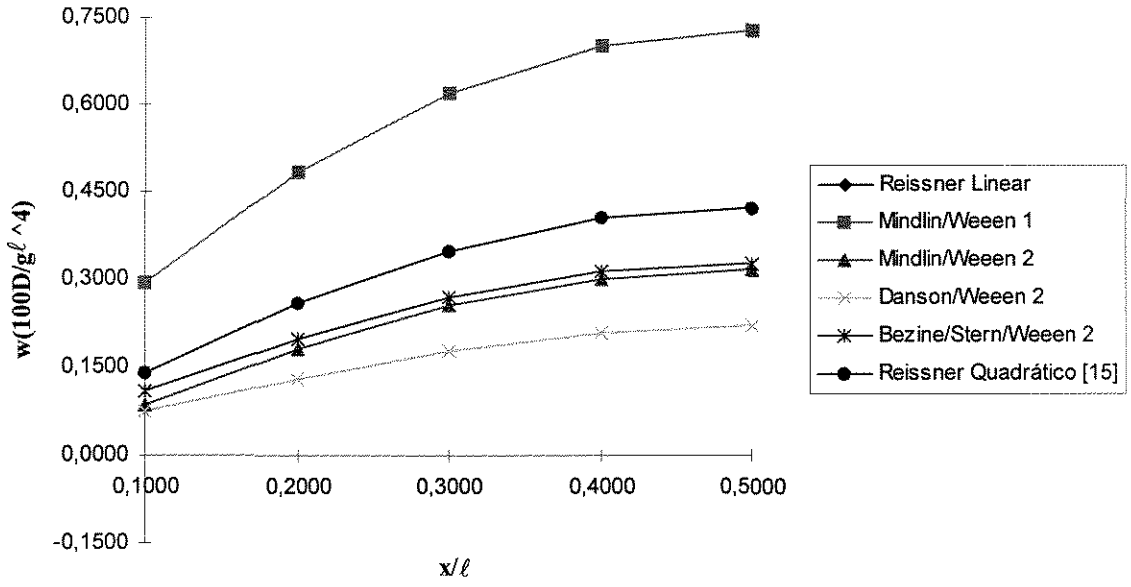

Gráfico 7.2 - Deslocamento transversal **w** ao longo da linha de centro com relação **h/ℓ=1/10**.

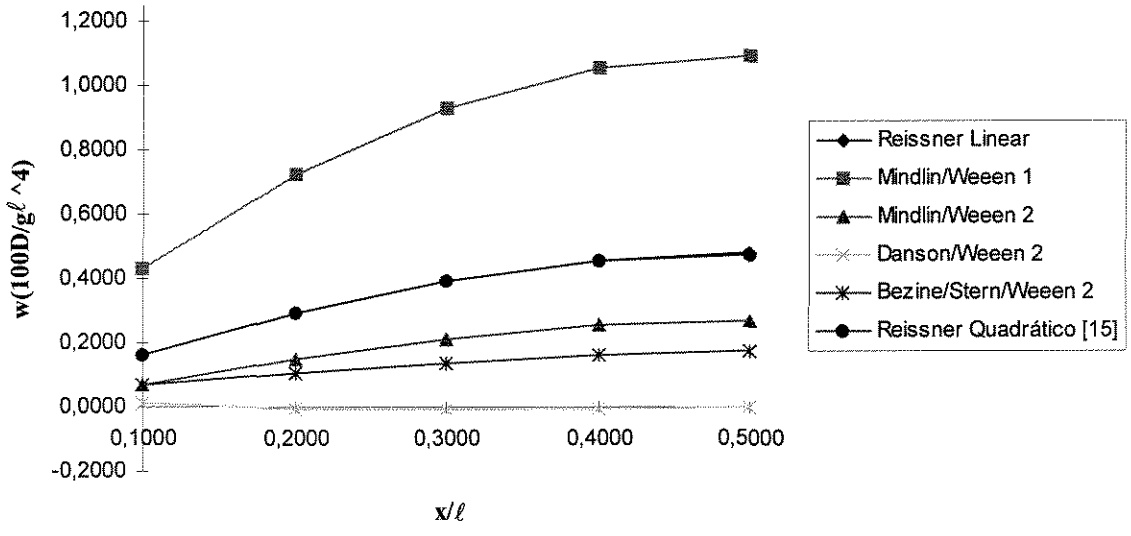

Gráfico 7.3 - Deslocamento transversal **w** ao longo da linha de centro com relação **h/ℓ=1/5**.

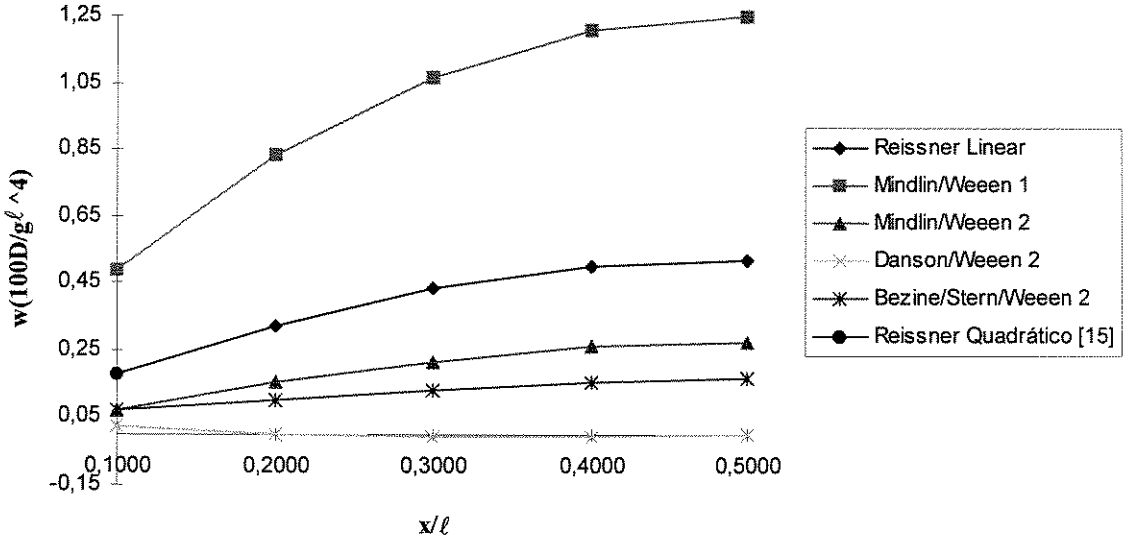

Gráfico 7.4 - Deslocamento transversal **w** ao longo da linha de centro com relação **h/ℓ=1/4**.

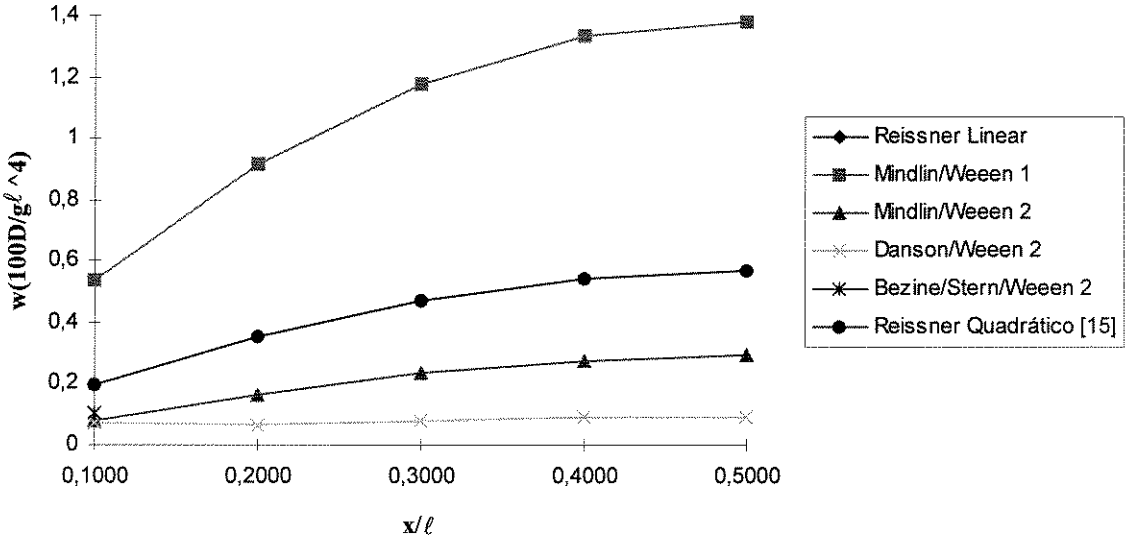

Gráfico 7.5 - Deslocamento transversal **w** ao longo da linha de centro com relação **h/ℓ=3/10**.

Os valores dos deslocamentos transversais **w**, considerando a influência da espessura no problema de placa, podem ser evidenciados nos Gráficos 7.1 a 7.5 e também na Tabela 7.6.

Considerando-se a relação **h/ℓ=1/100**, Gráfico 7.1, os resultados para os casos **Reissner Linear**, **Danson/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2**, comparados com os valores de referência, **Reissner Quadrático [38]** e Teoria Clássica, podem ser considerados bastante satisfatórios pois, apresentam comportamentos bastante semelhantes. Entretanto, não obteve-se bons resultados para os casos **Mindlin/Weeën 1** e **Mindlin/Weeën 2.**

Para a relação **h/ℓ=1/10**, Gráfico 7.2, observa-se uma discrepância de resultados. No caso **Reissner Linear**, obteve-se resultados bastante próximos ao valor de referência **Reissner Quadrático [38].** Para os casos **Mindlin/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2** obteve-se valores próximos para os deslocamentos mas, se comparados com o valor de referência, são aproximadamente 30% menores. O caso **Danson/Weeën 2** é aproximadamente 90% menor que o valor de referência. Para o caso **Mindlin/Weeën 1** não se obteve bons resultados.

Na relação **h/ℓ=1/5**, Gráfico 7.3, o caso **Reissner Linear**, apresenta resultados bastante próximos ao valor de referência **Reissner Quadrático [38].** O caso **Mindlin/Weeën 2** apresenta resultados 75% inferiores ao valor de referência. Observa-se nesta relação, uma sensível mudança de comportamento para o caso **Bezine/Stern/Weeën 2**, que apresenta resultados de aproximadamente 170% inferiores ao valor de referência. Os casos **Mindlin/Weeën 1** e **Danson/Weeën 2**, apresentaram resultados insatisfatórios se comparados com o valor de referência.

Considerando-se a relação **h/ℓ=1/4**, Gráfico 7.4, pode-se observar que os resultados apresentaram comportamentos semelhantes à relação anterior.

No caso da relação **h/ℓ=3/5**, Gráfico 7.5, novamente os resultados para o caso **Reissner Linear**, são bastante próximos ao valor de referência. Mais uma vez, os casos **Mindlin/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2** apresentaram comportamentos semelhantes para os deslocamentos, proporcionais à aqueles obtidos nas relações anteriores. Todavia, se comparados com o valor de referência, apresentam resultados consideravelmente inferiores. Os casos **Mindlin/Weeën 1** e **Danson/Weeën 2**,

novamente apresentaram resultados insatisfatórios se comparados com o valor de referência.

Finalmente, relacionando-se os dados obtidos de forma apropriada, a Tabela 7.6 apresenta os resultados dos deslocamentos **w** sobre a linha de centro da placa, onde fica evidenciada a influência da espessura nos resultados obtidos.

Tabela 7.6 - Deslocamentos sobre a linha de centro de uma placa apoiada no contorno e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

		w ($100D/g\ell^4$)				
h/ℓ	**Casos**	**0,1ℓ**	**0,2ℓ**	**0,3ℓ**	**0,4ℓ**	**0,5ℓ**
1/100	***Reissner Linear***	0,1316	0,2463	0,3337	0,3879	0,4063
	Mindlin/Weeën 1	0,5612	0,9491	1,2166	1,3664	1,4139
	Mindlin/Weeën 2	-0,0131	0,0095	0,0362	0,0582	0,0667
	Danson/Weeën 2	0,1327	0,2482	0,3360	0,3905	0,4090
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1320	0,2470	0,3345	0,3889	0,4073
	Reissner Quadrático [38]	0,1316	0,2464	0,3338	0,3881	0,4064
1/10	***Reissner Linear***	0,1385	0,2581	0,3487	0,4048	0,4237
	Mindlin/Weeën 1	0,2948	0,4844	0,6215	0,7026	0,7292
	Mindlin/Weeën 2	0,0845	0,1797	0,2541	0,3014	0,3177
	Danson/Weeën 2	0,0750	0,1299	0,1773	0,2093	0,2206
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1089	0,1978	0,2679	0,3126	0,3279
	Reissner Quadrático [38]	0,1386	0,2583	0,3490	0,4052	0,4241
1/5	***Reissner Linear***	0,1597	0,2944	0,3950	0,4568	0,4776
	Mindlin/Weeën 1	0,4306	0,7266	0,9339	1,0548	1,0943
	Mindlin/Weeën 2	0,0687	0,1498	0,2150	0,2572	0,2717
	Danson/Weeën 2	0,0134	-0,0066	-0,0085	-0,0044	-0,0021
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,067	0,1033	0,1388	0,1639	0,1729
	Reissner Quadrático [38]	0,1598	0,2946	0,3953	0,4571	0,4779
1/4	***Reissner Linear***	0,1756	0,3216	0,4297	0,4958	0,5179
	Mindlin/Weeën 1	0,4891	0,8307	1,0680	1,2061	1,2513
	Mindlin/Weeën 2	0,0700	0,1510	0,2162	0,2583	0,2728
	Danson/Weeën 2	0,0232	-0,0017	-0,0064	-0,0045	-0,0031
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,0716	0,1012	0,1325	0,1549	0,1629
	Reissner Quadrático [38]	0,1756	0,3218	0,4299	0,4960	0,5182
3/10	***Reissner Linear***	0,1950	0,3549	0,4721	0,5434	0,5672
	Mindlin/Weeën 1	0,5373	0,9170	1,1794	1,3318	1,3817
	Mindlin/Weeën 2	0,0785	0,1646	0,2331	0,2771	0,2923
	Danson/Weeën 2	0,0693	0,0678	0,0788	0,0890	0,0929
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1025	0,1458	0,1863	0,2135	0,2230
	Reissner Quadrático [38]	0,1950	0,355	0,4723	0,5436	0,5674
Teoria Clássica		**0,132**	**0,246**	**0,334**	**0,388**	**0,406**

A Tabela 7.7 apresenta os resultados dos momentos fletores e deslocamentos máximos **w** no meio do vão, bem como o momento torçor no canto da placa. Todos os resultados novamente são obtidos para a condição de contorno *hard*. Pode-se observar novamente a influência da espessura nos resultados ou seja, obtém-se resultados significativos apenas nos casos em que a relação espessura/vão é pequena.

Tabela 7.7 - Deslocamentos máximos e momentos fletores para a placa apoiada contorno e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

h/ℓ	Casos	w ($100D/g\ell^4$)	M_{11} ($10/g\ell^4$)	M_{12} ($10/g\ell^4$)
1/100	*Reissner Linear*	0,4063	0,4787	0,3371
	Mindlin/Weeën 1	1,4139	0,4880	12,0533
	Mindlin/Weeën 2	0,0667	1,4770	34,8620
	Danson/Weeën 2	0,4090	0,4802	0,2630
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,4073	0,4793	0,3127
	Reissner Quadrático [38]	0,4064	0,4789	0,3893
1/10	*Reissner Linear*	0,4240	0,4800	0,3258
	Mindlin/Weeën 1	0,7292	0,6651	0,2883
	Mindlin/Weeën 2	0,3177	0,9322	0,9535
	Danson/Weeën 2	0,2206	0,1065	6,1105
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,3279	0,3050	2,6696
	Reissner Quadrático [38]	0,4241	0,4804	0,3125
1/5	*Reissner Linear*	0,4785	0,4846	0,3007
	Mindlin/Weeën 1	1,0943	0,5648	0,1340
	Mindlin/Weeën 2	0,2717	1,2116	1,9026
	Danson/Weeën 2	-0,0021	-0,4784	4,5336
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1729	-0,1121	2,7041
	Reissner Quadrático [38]	0,4779	0,4849	0,2910
1/4	*Reissner Linear*	0,5194	0,4881	0,2819
	Mindlin/Weeën 1	1,2513	0,5217	0,1026
	Mindlin/Weeën 2	0,2728	1,3134	2,1624
	Danson/Weeën 2	-0,0031	-0,7018	3,6943
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1629	-0,2920	2,3774
	Reissner Quadrático [38]	0,5182	0,4884	0,2753
3/10	*Reissner Linear*	0,5693	0,4923	0,2590
	Mindlin/Weeën 1	1,3817	0,4855	0,0805
	Mindlin/Weeën 2	0,2923	1,3835	2,1871
	Danson/Weeën 2	0,0929	-0,8523	3,2046
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,2230	-0,4213	2,1895
	Reissner Quadrático [38]	0,5674	0,4925	0,2558
Teoria Clássica		**0,406**	**0,479**	**0,325**

Analisando-se os resultados encontrados para os momentos fletores na Tabela 7.7, pode-se observar uma convergência de valores nos casos em que a relação espessura/vão é pequena. A medida que a relação espessura/vão aumenta, há uma mudança significativa nos resultados obtidos para os casos **Mindlin/Weeën 1**, **Mindlin/Weeën 2**, **Danson/Weeën 2** e **Bezine/Stern/Weeën 2**. Esta tendência também foi verificada quando obteve-se os deslocamentos.

Os Gráficos 7.6 e 7.7 apresentam as variações da força cortante $\mathbf{Q_n}$ na borda da placa para as condições de contorno *hard* e *soft*. Foi considerado o caso **Reissner Linear** como o de referência. A maioria dos resultados obtidos são discrepantes devido a adoção das diferentes soluções fundamentais para o problema em questão ou seja, o valor final da força cortante bem como de momentos fletores é influenciado diretamente quando adota-se o caso em que se considera uma força unitária aplicada.

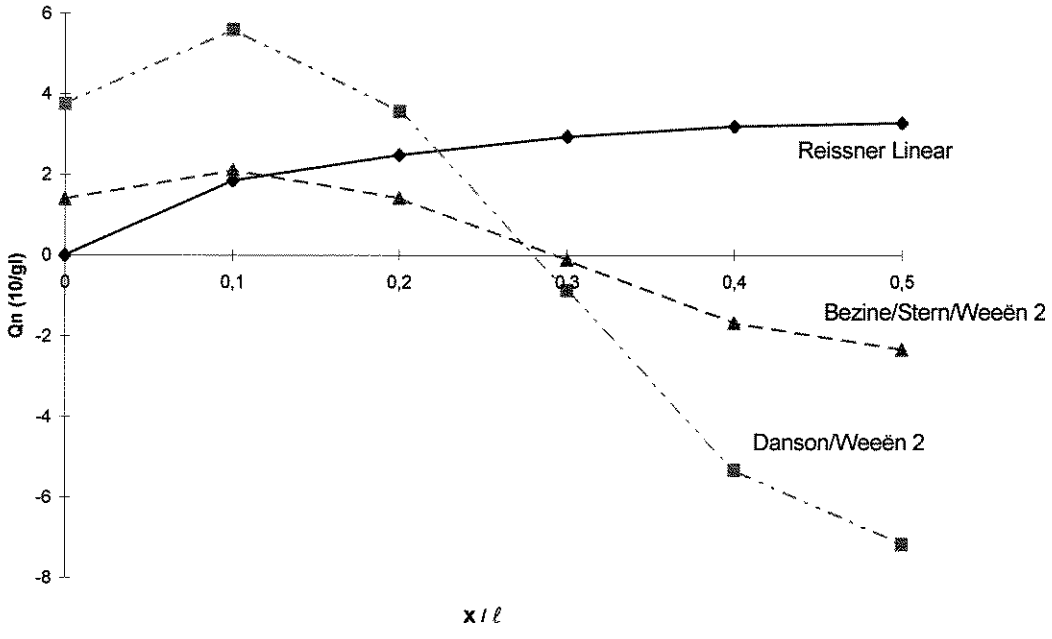

Gráfico 7.6 - Força cortante ao longo da borda da placa para a condição de contorno *hard*.

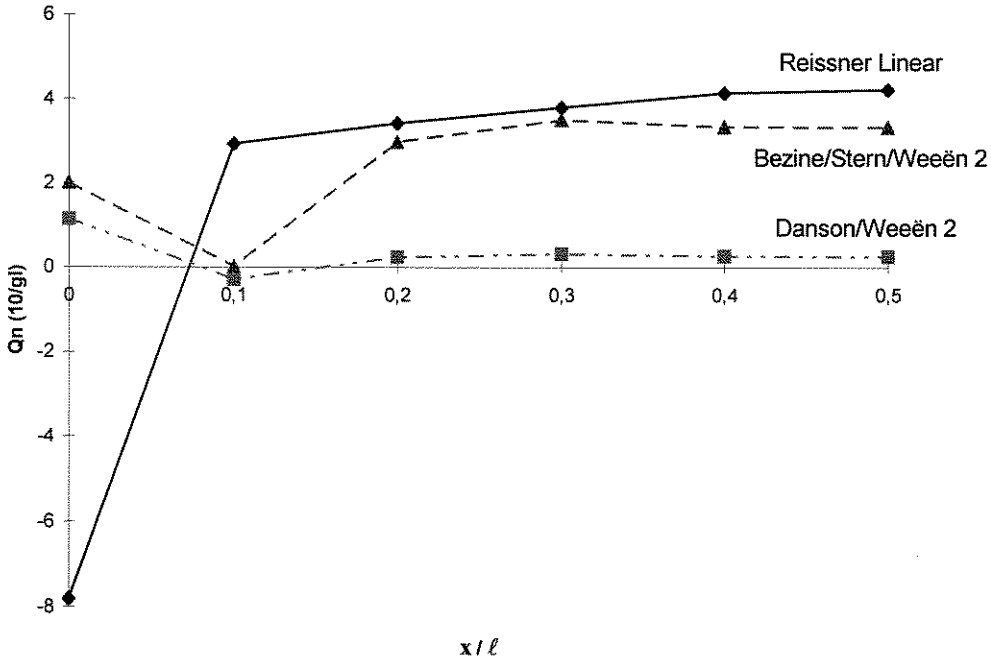

Gráfico 7.7 - Força cortante ao longo da borda da placa para a condição de contorno *soft*.

As Tabelas 7.8 e 7.9 apresentam os resultados de deslocamentos e momentos fletores no meio do vão da placa apoiada para as relações de espessura/vão de **(1/100)** e **(1/10)** e, considerando-se as condições de contorno *hard* e *soft*, de acordo com **BATHE [52] et alii**.

Tabela 7.8 - Deslocamentos máximos na placa quadrada apoiada, para as condições de contorno *hard* e *soft* e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

w ($100D/g\ell^4$)				
h/ℓ	**1/100**		**1/10**	
Casos	***hard***	***soft***	***hard***	***soft***
Reissner Linear	0,4063	0,4152	0,4237	0,4596
Mindlin/Weeën 1	1,4139	209,67	0,7292	-0,3834
Mindlin/Weeën 2	0,0667	70,451	0,3177	0,7406
Danson/Weeën 2	0,4090	0,7471	0,2206	0,1621
Bezine/Stern/Weeën 2	0,4073	0,5904	0,3279	0,3012
Reissner Quadrático [38]	0,4064	-	0,4241	0,4579
Teoria Clássica	**0, 406**			

Tabela 7.9 - Momentos fletores máximos na placa quadrada apoiada, para as condições de contorno *hard* e *soft* e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

$M_{máx}$ $(10/g\ell^2)$				
h/ℓ	**1/100**		**1/10**	
Casos	***hard***	***soft***	***hard***	***soft***
Reissner Linear	0,4787	0,4865	0,4800	0,5120
Mindlin/Weeën 1	0,1477	-19,266	0,9322	0,0667
Mindlin/Weeën 2	0,4880	6,5220	0,6651	1,0443
Danson/Weeën 2	0,4802	0,7929	0,1065	0,1060
Bezine/Stern/Weeën 2	0,4793	0,6484	0,3050	0,3020
Reissner Quadrático [38]	0,4789	-	0,4804	0,5105
Teoria Clássica	**0, 479**			

Considerando-se os resultados apresentados pelas Tabelas 7.8 e 7.9, procurou-se observar principalmente a influência das relações espessura/vão nos casos envolvidos. Novamente o efeito da espessura influenciou diretamente nos resultados obtidos, apresentando discrepâncias quando comparados com os valores da teoria clássica. Observou-se que tanto no centro da placa como próximo as bordas, principalmente quando se considera uma espessura pequena, os resultados aumentaram para a condição de contorno *soft*. Estas discrepâncias podem ser devidas à presença do momento torçor nas bordas, que torna a placa mais rígida.

7.5 - Exemplo 03 : Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

Conforme a Figura 7.3, a placa analisada neste exemplo é quadrada, engastada no seu contorno e com carregamento uniformemente distribuído **g**. Esta placa foi resolvida apenas para as relações de espessura/vão iguais a **h/ℓ=1/100**, **h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**. Os resultados são comparados apenas com os máximos valores teóricos de deslocamentos e esforços, que ocorrem no centro da placa e no meio do lado (Pontos **1** e **2**). O contorno foi discretizado em 40 elementos lineares e, novamente foram usados nos cantos da placa, elementos descontínuos, perfazendo um total de 44 nós. O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a **0.3**.

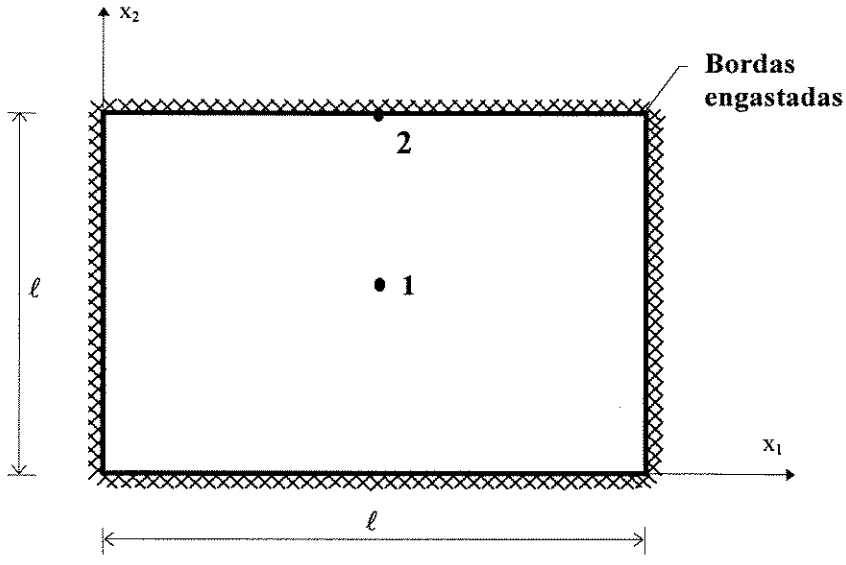

Figura 7.3 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

Na Tabela 7.10, são apresentados os resultados de esforços e deslocamentos máximos nos pontos **1** e **2** do domínio da placa quadrada engastada no contorno para as relações de espessura/vão **h/ℓ=1/100, h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**.

Tabela 7.10 - Deslocamentos e esforços para a placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

h/ℓ	Casos	w (100D/gℓ⁴) Ponto 1	$M_{máx}$ (1/gℓ²) Ponto 1	$M_{máx}$ (1/gℓ²) Ponto 2
1/100	*Reissner Linear*	0,1268	0,0229	-0,0518
	Mindlin/Weeën 1	2,4090	0,2493	0,6716
	Mindlin/Weeën 2	-0,6337	-0,0180	-0,2921
	Danson/Weeën 2	0,1259	0,0227	-0,0554
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1264	0,0228	-0,0531
1/20	*Reissner Linear*	0,0604	0,0231	-0,0512
	Mindlin/Weeën 1	0,5192	0,1304	0,0300
	Mindlin/Weeën 2	-0,0923	0,0218	-0,0768
	Danson/Weeën 2	0,0996	0,0237	-0,0403
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,0739	0,0232	-0,0473
1/10	*Reissner Linear*	0,1505	0,0236	-0,0494
	Mindlin/Weeën 1	1,0986	0,1260	0,0308
	Mindlin/Weeën 2	-0,1650	0,0236	-0,0746
	Danson/Weeën 2	0,3609	0,0239	-0,0249
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,2472	0,0235	-0,0299
	Teoria Clássica	**0.1260**	**0,0231**	**-0,0513**

Os resultados obtidos para este exemplo novamente foram bons para os casos em que se considera a espessura pequena. Quando a espessura começa a aumentar os resultados obtidos para as diferentes formulações começam a se tornar discrepantes em relação à teoria clássica.

7.6 - Exemplo 04 : Placa quadrada engastada em duas bordas opostas, apoiada nas outras duas e uniformemente carregada.

A partir da Figura 7.4, novamente a placa é discretizada em 40 elementos iguais e os resultados também são obtidos a partir dos máximos valores teóricos do deslocamento e esforços, que ocorrem no centro da placa e no meio do lado (pontos **1** e **2**). O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a **0.3** e, esta placa foi mais uma vez resolvida para as relações de espessura/vão iguais a **h/ℓ=1/100**, **h/ℓ=1/20** e **h/ℓ=1/10**. Os resultados encontrados de deslocamentos e esforços estão representados na Tabela 7.11.

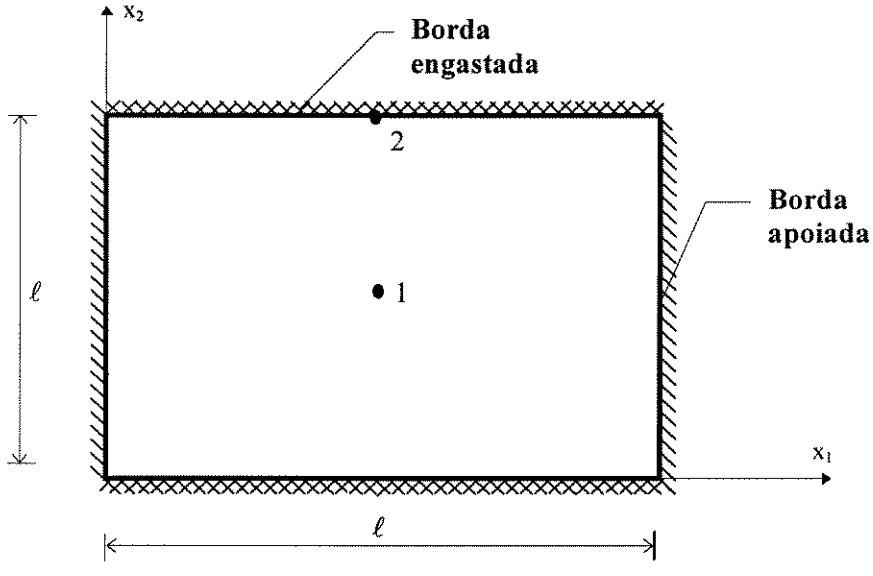

Figura 7.4 - Placa quadrada engastada em duas bordas opostas, apoiada nas outras duas e uniformemente carregada.

Tabela 7.11 - Deslocamentos e esforços para a placa quadrada engastada em dois lados opostos, apoiada nos outros dois e uniformemente carregada.

h/ℓ	Casos	w $(100D/g\ell^4)$ Ponto 1	M_{11} $(1/g\ell^2)$ Ponto 1	M_{22} $(1/g\ell^2)$ Ponto 1	$M_{máx}$ $(1/g\ell^2)$ Ponto 2
1/100	*Reissner Linear*	0,1922	0,0244	0,0333	-0,0702
	Mindlin/Weeën 1	3,7950	0,4293	0,3007	1,0698
	Mindlin/Weeën 2	-1,0090	-0,0759	-0,0215	-0,4489
	Danson/Weeën 2	0,1926	0,0242	0,0333	-0,0720
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,1921	0,0243	0,0333	-0,0705
1/20	*Reissner Linear*	0,0905	0,0249	0,0333	-0,0696
	Mindlin/Weeën 1	0,4591	0,1264	0,1113	-0,0699
	Mindlin/Weeën 2	0,0329	0,0254	0,0415	-0,1175
	Danson/Weeën 2	0,1206	0,0243	0,0287	-0,0430
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,0993	0,0245	0,0318	-0,0614
1/10	*Reissner Linear*	0,2201	0,0261	0,0336	-0,0618
	Mindlin/Weeën 1	1,0060	0,1224	0,1130	-0,0555
	Mindlin/Weeën 2	-0,0429	0,0281	0,0408	-0,1069
	Danson/Weeën 2	0,3593	0,0236	0,0225	-0,0160
	Bezine/Stern/Weeën 2	0,2811	0,0243	0,0282	-0,0434
Teoria Clássica		**0,192**	**0,0244**	**0,0332**	**-0,0697**

Mais uma vez, os resultados obtidos para este exemplo foram bons para os casos em que se considera a espessura pequena. A medida que a espessura começa a aumentar os resultados obtidos para as diferentes formulações começam novamente a se tornar discrepantes em relação à teoria clássica.

7.7 - Exemplo 05 : Placa quadrada engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e uniformemente carregada.

Neste exemplo, analisa-se uma placa quadrada de lado ℓ, engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e com carregamento uniformemente distribuído no domínio, conforme mostrado na Figura 7.5. A placa foi resolvida para a relação $\mathbf{h/\ell=1/10}$ e coeficiente de Poisson ν**=0.2**. O contorno foi discretizado em 40 elementos lineares e, mais uma vez foram usados nos cantos da placa os elementos descontínuos, perfazendo um total de 44 nós. Foram também considerados também

13 nós internos à placa. Os resultados obtidos para os deslocamentos e momentos fletores nos pontos internos são comparados com os deslocamentos e momentos calculados nos trabalhos de **PAIVA [33]** e **RIBEIRO[38]**, através do *Método dos Elementos de Contorno*, onde considerou-se posicionamentos iguais entre estes pontos.

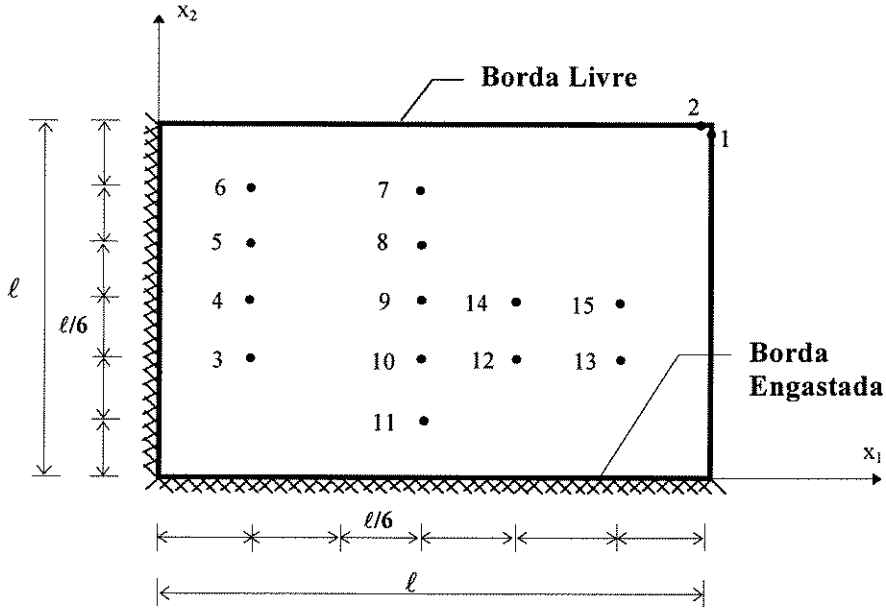

Figura 7.5 - Placa quadrada engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e uniformemente carregada.

A Tabela 7.12 apresenta os resultados de deslocamento transversal **w** para os pontos considerados e nas diferentes formulações apresentadas.

Tabela 7.12 - Deslocamentos em uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

	w ($10D/g\ell^4$)				
Pontos	**1 ou 2**	**7**	**8**	**14**	**15**
Reissner Linear	0,4359	0,1372	0,1817	0,1372	0,1817
Mindlin/Weeën 1	0,2364	0,3042	0,4028	0,3042	0,4028
Mindlin/Weeën 2	0,5616	0,0970	0,1312	0,0970	0,1312
Danson/Weeën 2	0,4316	0,1557	0,2082	0,1557	0,2082
Bezine/Stern/Weeën 2	0,4235	0,1429	0,1896	0,1429	0,1896
PAIVA [33]	0,4580	0,1310	0,1710	-	-
Reissner Quadrático [38]	0,4350	0,1290	0,1670	-	-

As Tabelas 7.13 e 7.14 apresentam os resultados dos momentos fletores nas direções x_1 e x_2, conforme Figura 7.5, para os pontos internos considerados e nas diferentes formulações apresentadas.

Tabela7.13 - Momentos fletores na direção x_1 de uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

M_{11} $(1/g\ell^2)$			
Pontos	**4**	**5**	**6**
Reissner Linear	0,0632	0,0908	0,1147
Mindlin/Weeën 1	0,0081	0,0464	0,0178
Mindlin/Weeën 2	0,0628	0,0852	0,1035
Danson/Weeën 2	0,0626	0,0951	0,1205
Bezine/Stern/Weeën 2	0,0625	0,0919	0,1157
PAIVA [33]	0,0652	0,0941	0,1185
Reissner Quadrático [38]	0,0631	0,0906	0,1147

Tabela 7.14 - Momentos fletores na direção x_2 de uma placa engastada em duas bordas adjacentes, livre nas outras duas e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

M_{22} $(1/g\ell^2)$				
Pontos	**10**	**11**	**12**	**13**
Reissner Linear	0,0211	0,0632	0,0292	0,0364
Mindlin/Weeën 1	0,0416	0,0811	0,0425	0,0711
Mindlin/Weeën 2	0,0159	0,0628	0,0281	0,0474
Danson/Weeën 2	0,0259	0,0626	0,0345	0,0388
Bezine/Stern/Weeën 2	0,0227	0,0624	0,0308	0,0366
PAIVA [33]	0,0229	0,0652	0,0318	0,0418
Reissner Quadrático [38]	0,0210	0,0631	0,0291	0,0364

7.8 - Exemplo 06 : Placa Fina Quadrada.

As formulações desenvolvidas no presente trabalho são testadas neste exemplo para resolver um problema de placa fina, no qual a teoria de *Kirchhoff* pode ser aplicada. Este mesmo exemplo pode ser encontrado no trabalho de **KARAM [37]**.

Desta forma, de acordo com a Figura 7.6 considera-se um quarto de uma placa quadrada de comprimento de lado igual a **4m**, com espessura igual a **0.02** e submetida a um carregamento uniformemente distribuído $\mathbf{g = -0.64\ tf/m^2}$ sobre o seu domínio. As condições de contorno e vinculação desta placa são definidas da seguinte forma:

Para $\mathbf{x_2 = 0}$: $\Psi_2\ (u_2) = M_{12} = Q_2 = 0$

Para $\mathbf{x_1 = 2}$: $\Psi_2\ (u_2) = w\ (u_3) = M_{11} = 0$

Para $\mathbf{x_2 = 2}$: $\Psi_1\ (u_1) = w\ (u_3) = M_{22} = 0$

Para $\mathbf{x_1 = 0}$: $\Psi_1\ (u_1) = M_{12} = Q_1 = 0$

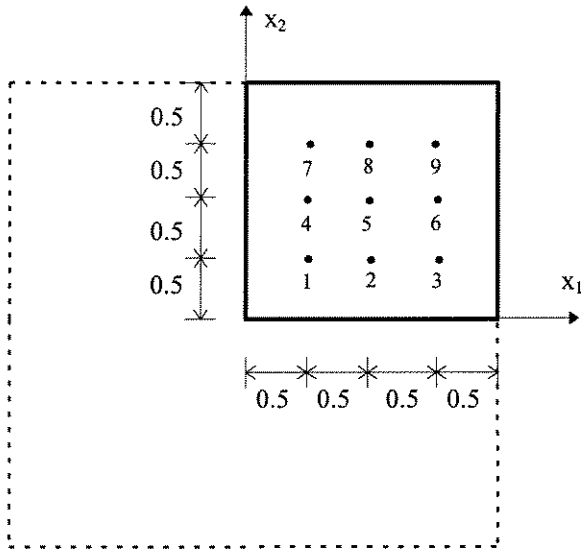

Figura 7.6 - Placa fina quadrada.

O contorno da placa foi dividido em 16 elementos lineares e, foram usados nos cantos da placa, elementos descontínuos, perfazendo um total de 20 nós. O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a **0.3** e para o módulo de elasticidade longitudinal **E** foi adotado o valor de $\mathbf{2 \times 10^6}$ tf/m^2.

Os resultados obtidos com as formulações desenvolvidas no presente trabalho são comparadas com as apresentadas no trabalho de **KARAM [37]** e com um programa de placas finas desenvolvido no trabalho de **PALERMO JÚNIOR [54]**. Estes resultados estão dispostos nas Tabelas 7.15, 7.16 e 7.17.

Tabela 7.15 - Deslocamentos em uma placa fina quadrada.

10^2 **w** (m)									
Casos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Reissner	-0,4031	-0,3103	-0,1700	-0,3103	-0,2414	-0,1327	-0,1700	-0,1327	-0,0731
Danson	-0,3944	-0,3111	-0,1731	-0,3111	-0,2455	-0,1368	-0,1731	-0,1368	-0,0770
Bezine	-0,3954	-0,3114	-0,1732	-0,3114	-0,2455	-0,1368	-0,1732	-0,1368	-0,0769
Karam	-0,6140	-0,4787	-0,2648	-0,4787	-0,3736	-0,2072	-0,2648	-0,2072	-0,1115
Palermo	-0,3926	-0,3058	-0,1692	-0,3058	-0,2391	-0,1327	-0,1692	-0,1327	-0,0742

Tabela 7.16 - Momento fletor máximo em uma placa fina quadrada.

$M_{máx}$ (tf.m/m)									
Pontos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Reissner	-0,4702	-0,3691	-0,2317	-0,3833	-0,3056	-0,1866	-0,2116	-0,1764	-0,1095
Danson	-0,4640	-0,4038	-0,2530	-0,3880	-0,3181	-0,2004	-0,2268	-0,1752	-0,1202
Bezine	-0,4649	-0,4025	-0,2528	-0,3844	-0,3177	-0,1998	-0,2264	-0,1754	-0,1191
Karam	-0,4419	-0,3764	-0,2417	-0,3528	-0,3026	-0,1985	-0,2033	-0,1774	-0,1212
Palermo	-0,4447	-0,3794	-0,2442	-0,3597	-0,3058	-0,2002	-0,2058	-0,1797	-0,1247

Tabela 7.17 - Momento torçor em uma placa fina quadrada.

M_{12} (tf.m/m)									
Pontos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Reissner	0,0796	0,0809	0,0904	0,0809	0,1457	0,1909	0,0904	0,1909	0,2609
Danson	0,0315	0,0643	0,0869	0,0643	0,1332	0,1885	0,0869	0,1885	0,2697
Bezine	0,0341	0,0651	0,0871	0,0651	0,1338	0,1889	0,0871	0,1889	0,2693
Karam	0,0360	0,0717	0,0947	0,0717	0,1366	0,1857	0,0947	0,1857	0,2579
Palermo	0,0440	0,0715	0,0931	0,0715	0,1369	0,1850	0,0931	0,1850	0,2622

Os resultados obtidos neste exemplo foram bastante semelhantes, onde encontrou-se valores muito próximos ao caso de placas finas. Apenas deve-se ressaltar que, a partir dos resultados encontrados, o trabalho de **KARAM [37]** não obteve bons resultados para os deslocamentos no centro do vão da placa fina quadrada.

Capítulo 8

Programas para Análise de Placas

8.1 - Introdução

Visando analisar numericamente as formulações apresentadas neste trabalho, foram desenvolvidos programas computacionais em linguagem *Fortran* com o objetivo de resolver, através do *Método dos Elementos de Contorno*, problemas de placas moderadamente espessas e, quando possível de placas finas.

Sabe-se que a teoria clássica de *Kirchhoff* é normalmente utilizada para resolver problemas de placas finas. Porém, as teorias formuladas por *Reissner* e *Mindlin*, mais consistentes e próximas à teoria exata, permitem não apenas a análise de placas de pequena espessura mas também as moderadamente espessas. Na resolução dos referidos problemas, foram desenvolvidos alguns programas computacionais adotando-se, de acordo com as teorias apresentadas, diferentes soluções fundamentais que objetivam a utilização da formulação direta do *Método dos Elementos de Contorno*.

Durante o desenvolvimento dos programas, não sentiu-se a necessidade de realizar uma otimização de memória pois, o tempo gasto em processamento e também em resolução de exemplos pode ser considerado pequeno. Cabe observar que teve-se por base o programa desenvolvido por **PALERMO JÚNIOR [54]** onde há geração automática de elementos nas partes retas. Esta geração usa o nó inicial e final de cada parte reta e o número de elementos contidos entre os nós.

8.2 - Estruturas dos Programas de Placa

A estrutura geral do programa de placas finas compõe-se de oito subrotinas que interagem com o programa principal, de acordo com a figura 8.1.

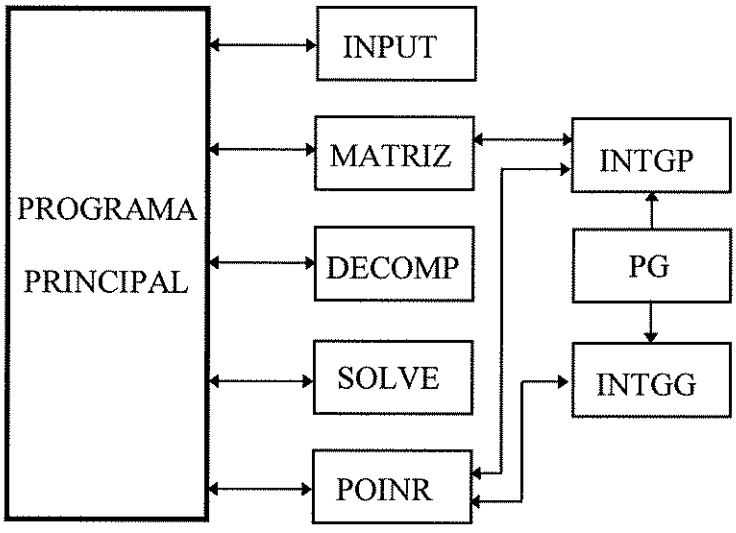

Figura 8.1 - Estrutura do programa de placas finas.

A estrutura geral dos programas de placa de espessura moderada compõe-se de doze subrotinas que interagem com o programa principal, conforme a figura 8.2.

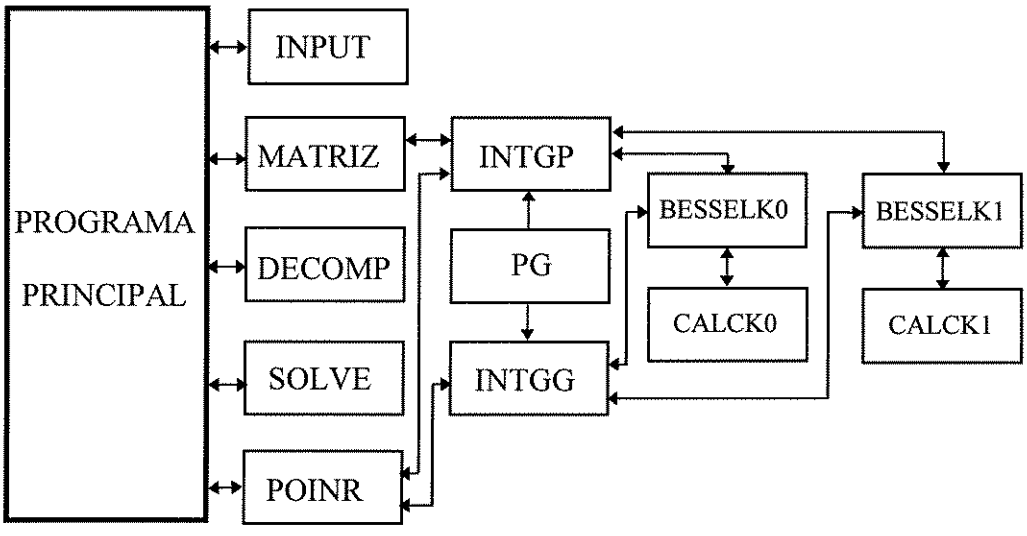

Figura 8.2 - Estrutura dos programas de placa de espessura moderada.

Considerando-se as figuras 8.1 e 8.2, as estruturas dos referidos programas de placa são bastante semelhantes e podem ser manipuladas com relativa facilidade. Assim, com a intenção de esclarecer de forma geral o desenvolvimento feito, descrevem-se nos próximos itens os aspectos principais de todas as subrotinas necessárias para o cálculo dos esforços e deslocamentos neste elemento estrutural.

8.3 - Subrotina INPUT

A subrotina **INPUT** faz a leitura dos parâmetros necessários para a execução dos programas. Esta leitura é feita via arquivo, que pode ser montado a partir de um editor de texto. Após a leitura e execução dos programas, para posterior conferência, é gerado um arquivo com os dados de entrada e também com os resultados obtidos.

A seguir são detalhadas as informações necessárias para a leitura dos dados da estrutura:

a) Número total de nós da estrutura, número de nós internos, número de nós duplos e número de elementos de contorno.

b) Número de nós com carregamento não nulo, módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal e coeficiente de *Poisson*.

c) Nó, coordenadas ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$) do nó, restrições ao deslocamento em ($\mathbf{x_3}$) e restrições às rotações em ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$).

d) Valor de carga ou deslocamento, diferente de zero, aplicado ao nó da discretização.

e) Número de partes retas da estrutura, valor da carga distribuída e valor da espessura.

f) Número de elementos da parte reta, nó inicial da parte reta e nó final da parte reta.

g) Nó interno, coordenadas ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$) do nó interno e restrições ao deslocamento em ($\mathbf{x_3}$).

Nesta subrotina, são calculados os cosenos diretores do vetor normal ao contorno para posicionamento dos nós externos ao domínio. Também são calculados os cosenos diretores do elemento de contorno e seu respectivo comprimento. No caso de placas finas, o posicionamento dos nós externos é feito normalmente a partir da média do comprimento dos elementos adjacentes ao nó. Entretanto, para as placas moderadamente espessas, o posicionamento dos nós externos está a **1/4** do comprimento dos elementos adjacentes ao nó.

8.4 - Subrotina MATRIZ

A subrotina **MATRIZ** faz a montagem das matrizes globais **H** e **G** da estrutura. Esta subrotina fica conectada diretamente ao programa principal e utiliza algumas subrotinas para fazer a montagem das submatrizes parciais de cada elemento de contorno, conforme os esquemas apresentados pelas figuras 8.1 e 8.2.

Para computar as influências dos $\mathbf{N_e}$ (número de elementos) através dos $\mathbf{N_n}$ (número de nós de contorno), a subrotina **MATRIZ**, para cada elemento considerado, faz o desvio para a subrotina **INTGP**, de forma a obter a submatriz de contribuição deste elemento, que é incluída na matriz global da estrutura. A existência de carregamentos distribuídos leva a montagem de um vetor independente, que é incluído adequadamente nas matrizes globais **H** e **G**. No caso das placas de espessura moderada, para computar os coeficientes de contribuição das submatrizes, a subrotina **INTGP** necessita do cálculo das funções de Bessel $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$, que são realizados pelas subrotinas **BESSELK0** e **BESSELK1**.

Nas operações numéricas das equações integrais, são utilizados os valores dos pontos de *Gauss* dispostos na subrotina **PG**. A quantidade de pontos adotada, pode ser maior ou menor, conforme a necessidade de precisão dos resultados.

Para obter o sistema de equações finais, após a montagem das matrizes globais **H** e **G** da estrutura, é realizada a troca das colunas das matrizes **H** e **G**, de forma a colocar de um lado apenas valores conhecidos de deslocamentos e esforços e, do outro lado os valores incógnitos procurados.

8.5 - Subrotinas INTGP e INTGG

A subrotina **INTGP** realiza as integrações numéricas no elemento de contorno, para nós situados a uma distância **d** fora do domínio, onde as integrações são sempre feitas numericamente. Novamente, para o caso de placas finas, sabe-se que a distância utilizada normalmente é a média do comprimento dos elementos adjacentes ao nó considerado. Para os problemas estudados neste trabalho, os nós externos ao domínio da placa estão situados a uma distância igual a **1/4** do comprimento dos elementos adjacentes ao nó considerado.

Nesta subrotina estão alocadas as soluções fundamentas do problema, em termos dos deslocamentos e esforços (itens 4.5 e 4.7). Estas soluções fundamentais, modificadas de acordo com cada formulação adotada, são usadas para formar as submatrizes de cada elemento considerado.

A subrotina **INTGG**, de processamento bastante semelhante a subrotina **INTGP**, realiza as integrações numéricas nos pontos do domínio da placa. Nesta subrotina, estão alocadas as derivadas das soluções fundamentais do problema, para o cálculo dos pontos do domínio da placa (itens 5.3 e 5.4). Desta forma, esta subrotina realiza separadamente o cálculo dos momentos fletores e esforços cortantes nos pontos internos.

8.6 - Subrotina PG

A subrotina **PG** contém os valores constantes dos pontos de *Gauss*, referentes a pesos e coordenadas. Os pontos de *Gauss* são necessários para a realização das integrações numéricas nos elementos de contorno. A quadratura gaussiana consiste em se aproximar o valor de uma dada integral, em um intervalo normalizado de **-1** a **1**, pela integral de um polinômio interpolador da função neste trecho. A integral deste polinômio interpolador é calculada fazendo-se a somatória do valor da função polinomial em determinadas coordenadas, multiplicadas por fatores de ponderação, conhecidos como pesos, ou seja:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) * w_i \tag{8.1}$$

Se forem observadas as equações integrais envolvidas no problema de flexão de placas, as integrações são realizadas sobre o contorno Γ e as aproximações da geometria e dos valores de contorno são expressas em função da coordenada admensional ξ, necessitando-se de uma mudança de variável de Γ para ξ. Assim, considerando-se a figura 6.3, pode-se escrever:

$$\Gamma = \frac{\ell}{2}\xi \tag{8.2}$$

Para o elemento isoparamétrico linear utilizado no presente trabalho, o jacobiano da transformação assume um valor constante igual a metade do comprimento do elemento, ou seja:

$$d\Gamma = \frac{\ell}{2}d\xi \tag{8.3}$$

A seguir são referenciados alguns conjuntos de pontos de *Gauss* referentes a pesos e coordenadas:

Tabela 8.1 - Pontos de *Gauss* referentes a pesos e coordenadas

Número de pontos de Gauss	**X** (*coordenada*) (*Valores + e -*)	**W** (*ponderadores*)
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691
12	0.981560634246719	0.047175336386512
	0.904117256370475	0.106939325995318
	0.769902674194305	0.160078328543346
	0.587317954286617	0.203167426723066
	0.367831498998180	0.233492536538355
	0.125233408511469	0.249147045813403

Número de pontos de Gauss	**X** (*coordenada*) (*Valores + e -*)	**W** (*ponderadores*)
	0.97472855971309498198	0.02853138862893366318 1
	0.93827455200273275852 4	0.04427743881741980616 9
	0.88641552700440103421 3	0.05929858491543678074 6
	0.82000198597390292195 4	0.07334648141108030573 4
24	0.74012419157855436424 4	0.08619016153195327591 7
	0.64809365193697556925 2	0.09761865210411388827 0
	0.54542147138883953565 8	0.10744427011596563478 3
	0.43379350762604513848 7	0.11550566805372560135 3
	0.31504267969616337438 7	0.12167047292780339120 4
	0.19111886747361630915 9	0.12583745634682829612 1
	0.06405689286260562608 5	0.12793819534675215697 4
	0.99877100725242611860 1	0.00315334605230583863 3
	0.99353017226635075754 8	0.00732755390127626210 2
	0.98412458372282685774 5	0.01147723457923453949 0
	0.97059159254624725046 1	0.01557931572294384872 8
	0.95298770316043086072 3	0.01961616045735552781 4
	0.93138669070655433311 4	0.02357076083932437914 1
	0.90587913671556967282 2	0.02742650970835694820 0
	0.87657202027424788590 6	0.03116722783279808890 2
	0.84358826162439353071 1	0.03477722256477043889 3
	0.80706620402944262708 3	0.03824135106583070631 7
	0.76715903251574033925 4	0.04154508294346474921 4
48	0.72403413092381465467 4	0.04467456085669428041 9
	0.67787237963266390521 2	0.04761665849249047482 6
	0.62886739677651362399 5	0.05035903555385447495 8
	0.57722472608397270381 8	0.05289018948519366709 6
	0.52316097472223303367 8	0.05519950369998416286 8
	0.46690290475095840454 5	0.05727729210040321570 5
	0.40868648199071672991 6	0.05911483969839563574 6
	0.34875588629216073816 0	0.06070443916589388005 3
	0.28736248735545557673 6	0.06203942315989266390 4
	0.22476379039468906122 5	0.06311419228625402565 7
	0.16122235606889171805 6	0.06392423858464818662 4
	0.09700469920946269893 0	0.06446616443595008220 7
	0.03238017096286936203 3	0.06473769681268392250 3

aproximações polinomiais simples para algumas funções bastante convenientes, tais como $\mathbf{I_0}$, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$.

Neste sentido, para o cálculo e determinação das funções modificadas de *Bessel* $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$, as subrotinas mencionadas são resolvidas a partir da expansão de coeficientes polinomiais simples que podem ser encontrados em **ABRAMOWITZ ε STEGUN [50]**.

Os algoritmos das subrotinas apresentadas a seguir fazem o cálculo, através de expansões polinomiais simples, das funções de *Bessel* modificadas de ordem inteira $\mathbf{K_0(x)}$ e $\mathbf{K_1(x)}$, sendo **x** um argumento real.

8.7.1 - Algoritmo da Subrotina BESSELK0

SUBROTINA **BESSELK0** (**x**, BESK0)	Início
Z = **x**	Argumento da função de *Bessel*
CHAMAR **CALCK0** (Z, Resultado)	Desvio para a subrotina CALCK0
BESK0 = Resultado	Resultado da função de *Bessel* K_0
RETORNAR	Retorna ao algoritmo solicitante
FIM	Fim da subrotina

8.7.2 - Algoritmo da Subrotina CALCK0

SUBROTINA **CALCK0** (Argumento, Resultado)	Início
One = 1.0D0	Valores constantes
Zero = 0.0D0	
Xsmall = 1.11D-16	
Xinf = 1.79D+308	
Xmax = 705.342D0	
P(1) = 5.859922141282610000D-04	
P(2) = 1.316605256498957185OD-01	
P(3) = 1.199946372491071410 9D+01	
P(4) = 4.685090120193483218 8D+02	
P(5) = 5.916905985227051231 2D+03	
P(6) = 2.470815272039955267 9D+03	
Q(1) = -2.499441897283230364 6D+02	
Q(2) = 2.131271430384912038 0D+04	
F(1) = -1.641445283729906410 0D+00	

```
F(2) = -2.9601657892958843866D+02
F(3) = -1.7733784684952985886D+04
F(4) = -4.0320340761145482298D+05
G(1) = -2.5064972445877992730D+02
G(2) = 2.9865713163054025489D+04
G(3) = -1.6128136304458193998D+06
PP(1) = 1.1394980557384778174D+02
PP(2) = 3.6832589957340267940D+03
PP(3) = 3.1075408980684392399D+04
PP(4) = 1.0577068948034021957D+05
PP(5) = 1.7398867902565686251D+05
PP(6) = 1.5097646353289914539D+05
PP(7) = 7.1557062783764037541D+04
PP(8) = 1.8321525870183537725D+04
PP(9) = 2.3444738764199315021D+03
PP(10) = 1.1600249425076035558D+02
QQ(1) = 2.0013443064949242491D+02
QQ(2) = 4.4329628889746408858D+03
QQ(3) = 3.1474655750295278825D+04
QQ(4) = 9.7418829762268075784D+04
QQ(5) = 1.5144644673520157801D+05
QQ(6) = 1.2689839587977598727D+05
QQ(7) = 5.8824616785857027752D+04
QQ(8) = 1.4847228371802360957D+04
QQ(9) = 1.8821890840982713696D+03
QQ(10) = 9.2556599177304839811D+01
X = Argumento                                   Início do cálculo da função de Bessel K0
SE ( X > Zero ) ENTÃO FAÇA
SE ( X ≤ One ) ENTÃO FAÇA
        Temp = Log(X)
SE ( X < Xsmall ) ENTÃO FAÇA
        Resultado = P(6)/Q(2) - Temp
SENÃO FAÇA
        XX = X * X
        Sump = ((((P(1)*XX + P(2))*XX + P(3))*XX + P(4))*XX + P(5))*XX + P(6)
        Sumq = (XX + Q(1))*XX + Q(2)
        Sumf = ((F(1)*XX + F(2))*XX + F(3))*XX + F(4)
        Sumg = ((XX + G(1))*XX + G(2))*XX + G(3)
        Resultado = Sump/Sumq - XX*Sumf*Temp/Sumg - Temp
FIM DO SE
SENÃO FAÇA
SE ( X > Xmax ) ENTÃO FAÇA
        Resultado = Zero
SENÃO FAÇA
```

```
        XX = One / X
        Sump = PP(1)
PARA  I de 2 até 10, passo 1, FAÇA
        Sump = Sump*XX + PP(I)
FIM DO PARA
Sumq = XX
PARA  I de 1 até 9, passo 1, FAÇA
        Sumq = (Sumq + QQ(I))*XX
FIM DO PARA
Sumq = Sumq + QQ(10)
Resultado = Sump / Sumq / Sqrt (X)
Resultado = Resultado * Exp (-X)
SENÃO FAÇA
        Resultado = Xinf
FIM DO SE
RETORNAR                                  Retorna ao algoritmo solicitante
FIM                                       Fim da subrotina
```

8.7.3 - Algoritmo da Subrotina BESSELK1

```
SUBROTINA BESSELK1 (x, BESK1)             Início
        Z = x                             Argumento da função de Bessel
CHAMAR CALCK1 (Z, Resultado)              Desvio para a subrotina CALCK1
        BESK1 = Resultado                 Resultado da função de Bessel K1
RETORNAR                                  Retorna ao algoritmo solicitante
FIM                                       Fim da subrotina
```

8.7.4 - Algoritmo da Subrotina CALCK1

```
SUBROTINA CALCK1 ( Argumento, Resultado)  Início
One = 1.0D0                               Valores constantes
Zero = 0.0D0
Xleast = 2.23D-308
Xsmall = 1.11D-16
Xinf = 1.79D+308
Xmax = 705.343D+0
P(1) = 4.8127070456878442310D-1
P(2) = 9.9991373567429309922D+1
P(3) = 7.1885382604084798576D+3
```

```
P(4) = 1.7733324035147015630D+5
P(5) = 7.1938920065420586101D+5
Q(1) = -2.8143915754538725829D+2
Q(2) = 3.7264298672067697862D+4
Q(3) = -2.2149374878243304548D+6
F(1) = -2.2795590826955002390D-1
F(2) = -5.3103913335180275253D+1
F(3) = -4.5051623763436087023D+3
F(4) = -1.4758069205414222471D+5
F(5) = -1.3531161492785421328D+6
G(1) = -3.0507151578787595807D+2
G(2) = 4.3117653211351080007D+4
G(3) = -2.7062322985570842656D+6
PP(1) = 6.4257745859173138767D-2
PP(2) = 7.5584584631176030810D+0
PP(3) = 1.3182609918569941308D+2
PP(4) = 8.1094256146537402173D+2
PP(5) = 2.3123742209168871550D+3
PP(6) = 3.4540675585544584407D+3
PP(7) = 2.8590657697910288226D+3
PP(8) = 1.3319486433183221990D+3
PP(9) = 3.4122953486801312910D+2
PP(10) = 4.4137176114230414036D+1
PP(11) = 2.2196792496874548962D+0
QQ(1) = 3.6001069306861518855D+1
QQ(2) = 3.3031020088765390854D+2
QQ(3) = 1.2082692316002348638D+3
QQ(4) = 2.1181000487171943810D+3
QQ(5) = 1.9448440788918006154D+3
QQ(6) = 9.6929165726802648634D+2
QQ(7) = 2.5951223655579051357D+2
QQ(8) = 3.4552228452758912848D+1
QQ(9) = 1.7710478032601086579D+0
X = Argumento                                   Início do cálculo da função de Bessel K1
SE ( X < Xleast ) ENTÃO FAÇA
        Resultado = Xinf
SENÃO FAÇA
SE ( X ≤ One ) ENTÃO FAÇA
SE ( X < Xsmall ) ENTÃO FAÇA
        Resultado = One / X
SENÃO FAÇA
        XX = X * X
        Sump = ((((P(1)*XX + P(2))*XX + P(3))*XX + P(4))*XX + P(5))*XX + Q(3)
        Sumq = ((XX + Q(1))*XX + Q(2))*XX + Q(3)
        Sumf = (((F(1)*XX + F(2))*XX + F(3))*XX + F(4))*XX + F(5)
        Sumg = ((XX + G(1))*XX + G(2))*XX + G(3)
```

```
        Resultado = (XX * LOG(X) * Sumf/Sumg + Sump/Sumq) / X
FIM DO SE
SENÃO FAÇA
SE ( X > Xmax ) ENTÃO FAÇA
        Resultado = Zero
SENÃO FAÇA
        XX = One / X
        Sump = PP(1)
PARA I de 2 até 11, passo 1, FAÇA
        Sump = Sump * XX + PP(I)
FIM DO PARA
Sumq = XX
PARA I de 1 até 8, passo 1, FAÇA
        Sumq = (Sumq + QQ(I)) * XX
FIM DO PARA
Sumq = Sumq + QQ(9)
Resultado = Sump / Sumq / Sqrt(X)
Resultado = Resultado * Exp (-X)
FIM DO SE
RETORNAR                                Retorna ao algoritmo solicitante
FIM                                     Fim da subrotina
```

8.8 - Subrotinas DECOMP e SOLVE

Estas subrotinas fazem a resolução do sistema de equações para matrizes não simétricas, iguais as obtidas com a aplicação do *Método dos Elementos de Contorno* para resolver problemas de placa. Assim, após a montagem do sistema de equações a partir da subrotina **MATRIZ** e do programa principal, faz-se a decomposição e resolução deste sistema. O método de resolução é chamado de **LU** devido a maneira que se faz a decomposição da matriz. Este método foi utilizado no presente trabalho pois apresentou boa estabilidade para os exemplos analisados no trabalho de **PALERMO JÚNIOR [54]**.

8.9 - Subrotina POINR

A subrotina **POINR,** de processamento posterior à solução do sistema de equações, tem a função de calcular os deslocamentos e esforços no domínio da placa. Esta subrotina tem procedimento semelhante à subrotina **MATRIZ**, conforme mostrado nas figuras 8.1 e 8.2.

Para este caso, já foram calculados os esforços e/ou deslocamentos no contorno, necessitando-se apenas realizar as integrações nos elementos de contorno a partir dos pontos no domínio da placa.

No cálculo dos deslocamentos no domínio da placa, para cada elemento considerado, novamente utilizou-se a subrotina **INTGP**, de forma a obter a submatriz de contribuição deste elemento. De forma semelhante, no cálculo dos esforços no domínio da placa, utilizou-se a subrotina **INTGG**, para obter a submatriz de contribuição do elemento a partir das derivadas das soluções fundamentais vistas nos itens 5.3 e 5.4. Também são necessários o cálculo das funções de Bessel $\mathbf{K_0}$ e $\mathbf{K_1}$, que são realizados pelas subrotinas **BESSELK0** e **BESSELK1**. Mais uma vez, a existência de carregamentos distribuídos no domínio da placa leva a montagem de um vetor independente, incluído adequadamente nas matrizes globais **H** e **G**.

Finalmente, realizadas as integrações numéricas necessárias e computadas nas matrizes globais as contribuições das submatrizes dos elementos, os deslocamentos e esforços no domínio da placa são encontrados multiplicando-se os correspondentes coeficientes de nó pelos respectivos deslocamentos e/ou forças encontradas no contorno.

Capítulo 9

Conclusões

No presente trabalho foram apresentadas as formulações de placa através da teoria clássica de *Kirchhoff* e da teoria de *Mindlin*. Destaque especial foi dado às formulações das placas de espessura moderada, onde procurou-se estudar com mais ênfase a teoria formulada por *Mindlin*. Cabe notar que a teoria de placas moderadamente espessas é mais consistente e próxima do modelo real pois considera o efeito da deformação por cortante. As formulações associadas a esta teoria conduzem a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem que devem ter três condições fixadas na borda para a completa resolução do problema enquanto que, as formulações da teoria clássica conduzem a uma equação diferencial de quarta ordem satisfazendo apenas duas condições fixadas na borda. Também foram apresentadas as formulações das placa de espessura moderada através da teoria de *Reissner*, com o objetivo de aplicar as soluções fundamentais desta teoria. As semelhanças apresentadas nas equações integrais destas placas referentes as teorias de *Reissner* e *Mindlin* levaram a um bom relacionamento entre estas duas teorias, proporcionando com isso a aplicação de soluções fundamentais variadas na resolução destas equações. Como pode ser visto, as equações integrais divergiram-se apenas no efeito do carregamento de domínio.

Assim, para aplicação do *Método dos Elementos de Contorno* na resolução das equações integrais das placas de espessura moderada, foi necessário a obtenção das soluções fundamentais do problema. Neste sentido, utilizou-se a aplicação de uma

força e dois momentos unitários em um domínio infinito como sendo os carregamentos necessários ao cálculo das mesmas. Nas formulações de *Reissner*, foram utilizadas as soluções apresentadas no trabalho original de *F. Vander Weeën* que propôs soluções aos três carregamentos. Nas formulações de *Mindlin*, este trabalho propôs soluções fundamentais derivadas da condição onde aplica-se uma força unitária em um domínio infinito e utilizou-se as soluções de *Weeën* para àquelas referentes a momentos unitários aplicados.

Nos exemplos propostos, foram feitas análises com a aplicação da solução completa de *Weeën* e às soluções fundamentais alternativas. Aparentemente a solução proposta por *Weeën* demonstrou-se mais estável porém, de acordo com os exemplo apresentados, sua estabilidade é sensível a variações de espessura. As soluções fundamentais propostas também apresentaram bons resultados mas, ressente-se ainda das soluções associadas devido a binários unitários para uma avaliação da estabilidade das mesmas. Assim, sugere-se que estas soluções fundamentais necessitam ser melhor estudadas.

Alguns resultados obtidos nos exemplos apresentados mostraram a importância da escolha das condições de contorno na resolução dos problemas de placa. No caso das bordas simplesmente apoiadas, pode-se utilizar a condição *hard* que restringe a rotação no plano vertical tangente ao contorno ou, a condição *soft*, que considera o momento torçor nulo neste plano. Observou-se que neste caso a consideração da condição *soft* nas formulações referentes a teoria de *Reissner* causou um efeito que pode ser entendido como uma reação de canto nas placas clássicas, contudo nas soluções associadas a teoria de *Mindlin* isto não foi visto.

No uso direto do *Método dos Elementos de Contorno*, a técnica de colocação dos pontos singulares fora do domínio da placa bem como a utilização de elementos isoparamétricos lineares apresentaram bons resultados e facilitaram bastante a programação. O posicionamento desses pontos mais próximos ao contorno da placa melhorou os resultados obtidos. Nesta linha de raciocínio, a utilização de um maior número de elementos de contorno e também uma maior quantidade de pontos de *Gauss*, foi no sentido de obter uma melhor precisão de resultados nos exemplos analisados e possibilitar a comparação dos valores apresentados nos trabalhos de

PAIVA [33] e **RIBEIRO [38]**. Entretanto, exemplos resolvidos com um menor número de elementos e também de pontos não apresentaram resposta ruim. A utilização de uma maior ou menor quantidade de elementos e/ou de pontos não alterou a velocidade de processamento dos programas. Desta forma, conclui-se que os resultados obtidos com a utilização das diferentes soluções fundamentais propostas para os problemas de placa, podem ser considerados satisfatórios e também uma alternativa para a resolução deste tipo de problema.

Como procurou-se neste trabalho desenvolver uma solução alternativa para o problema das placas de espessura moderada, pode-se dizer que foram cumpridos os objetivos principais a que se propôs realizar inicialmente. Por outro lado, não se esperava mais do que uma solução fundamental à carga unitária e o que observou-se é que esta questão não está fechada. A escolha de valores particulares à constante livre, apresentada pelas soluções fundamentais propostas neste trabalho, teve por base a conectividade com soluções fundamentais conhecidas para placas finas e não um estudo de estabilidade numérica ou adequação de respostas a valores clássicos conhecidos. Deve-se notar que a solução proposta é um caso geral que inclui a solução fundamental apresentada por *Weeën*. Assim, o elevado número de resultados obtidos com as diferentes soluções fundamentais adotadas, dificultou uma análise completa do comportamento de cada uma separadamente. Mesmo assim, estes resultados encorajam a obtenção das soluções fundamentais completas referentes a teoria de *Mindlin*.

O desenvolvimento de estudos complementares podem seguir nesta linha de pesquisa ou seja, estudos no sentido da obtenção das soluções fundamentais completas para a teoria de *Mindlin* considerando-se em um trabalho futuro os casos em que são aplicados binários unitários no domínio de uma placa infinita. Com estas soluções, pode-se realizar a montagem de um outro programa que considere apenas a teoria citada. Pelo fato da teoria de *Mindlin* ser uma teoria de deformações impostas, semelhante a teoria clássica de *Kirchhoff*, pode-se também realizar estudos no sentido de obter uma conexão entre estas teorias e propor por exemplo uma alternativa para as formulações de placas finas de *Danson*, *Bezine* e *Stern*. Isto pode ser feito partindo das placas espessas e obtendo-se uma solução conectada e

comportada às placas finas ou com base na solução de placas finas chegar-se a soluções conectadas de placas espessas.

Uma necessidade imediata seria realizar estudos para a aplicação numérica das formulações da teoria de *Mindlin* em um sistema de coordenadas normais e tangenciais. Isto foi iniciado neste trabalho no sentido de facilitar a imposição das condições de contorno nos problemas analisados, facilidade esta não encontrada nas formulações atuais.

Referências Bibliográficas

[1] LOVE, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. New York: Dover, 1944.

[2] KIRCHHOFF, G.R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. **J. Math.**, Crelle, v.40, p.51-58, 1850.

[3] POISSON, S.D. Memoire sur l' equilibre et le mouvement des corps solides. **J. Math. Physics**, v.12, n.8, 1829.

[4] REISSNER, E. On the theory of bending of elastic plates. **J. Math. Physics**, v.23, p.184, 1944.

[5] MINDLIN, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. **J. Appl. Mech.**, v.18, p.31-38, 1951.

[6] SALERNO, V.L., GOLDBERG, M.A. Effect of shear deformations on the bending of retangular plates. **J. Appl. Mech.**, p.54-58, 1960.

[7] PANE, V. Theories of elastic plates. **International Publishing**, Noordhoff, 1975.

[8] BARRET, K.E., ELLIS, S. An exact theory of elastic plates. **Int. J. Solids Struct.**, v.24, n.9, p.859-880, 1988.

[9] CHENG, S. Elasticity theory of plates and a refined theory. **Trans. J. Appl. Mech.**, v.46, p.644-650, 1979.

[10] REISSNER, E. On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates. **Int. J. Solids Struct.**, v.23, n.6, p.711-717, 1987.

[11] LADEVÈZE, P., PECASTAINGS, F. The optimal version of Reissner's theory. **J. Appl. Mech.**, v.55, n.2, p.413-418, 1988.

[12] REISSNER, E. On the asymptotic expansions for the sixth-order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, v.85, n.1, p.75-88, 1991.

[13] GREGORY, R.D., WAN, F.Y.M. On plate theories and Saint-Venant's principle. **Int. J. Solids Struct.**, v.21, p.1005-1024, 1985.

[14] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. **Acta Math.**, v.27, p.365-390, 1903.

[15] MIKHLIN, S.G. **Integral equations.** NY: Pergamon Press, 1957.

[16] MUSKHELISHVILI, N.I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.** Groningen: P. Nordhoff, 1953.

[17] KUPRADZE, O.D. **Potencial methods in the theory of elasticity.** NY: Daniel Davey, 1965.

[18] SMIRNOV, V.J. **Integral equations and partial differential equations.** In: Course in Higher Mathematics. London: Addison-Wesley, v.4, 1964.

[19] JASWON, M.A. Integral equation methods in potencial theory. **I. Proc. Roy. Soc. Ser. A.**, v.275, p.23-32, 1963.

[20] SYMM, G.T. Integral equation methods in potencial theory. **II. Proc. Roy. Soc. Ser. A.**, v.275, p.33-46, 1963.

[21] JASWON, M.A., PONTER, A.R. An integral equation solution of the torsion problem. **Proc. Roy. Soc. Ser. A.**, v.273, p.237-246, 1963.

[22] RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quart. Appl. Math.**, v.25, p.41-52, 1968.

[23] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **Int. J. of Solids Struc.**, v.5, p.1259-1274, 1969.

[24] LACHAT, J.C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics.** Southampton: US, 1975. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1975.

[25] BREBBIA, C.A. **The boundary element method for engineers.** London: Pentech Press, 1978.

[26] NAKAGUMA, R.K. **Three dimensional elastostatics using the boundary element method.** Southampton: US, 1979. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1979.

[27] TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A. Boundary element solution of half-plane problems. **Int. J. Solids Struct.**, v.17, p.1149-1158, 1981.

[28] JASWON, M.A., MAITI, M., SYMM, G.J. Numerical biharmonic analisys and some applications. **Int. J. Solids Struct.**, v.3, p.309-332, 1967.

[29] BEZINE, G.P., GAMBY, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: Brebbia, C.A., ed., **Recent advances in boundary element methods.** London: Pentech Press, p.327-342, 1978.

[30] DANSON, D.J. **Analysis of plate bending problems by direct boundary element method.** Southampton: US, 1979. Dissertation (M.Sc.) University of Southampton, 1979.

[31] BEZINE, G.P. Boundary integral formulations for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Res. Comm.**, v.5, n.4, p.197-206, 1978.

[32] STERN, M.A. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **Int. J. Solids Struct.**, v.15, p.769-782, 1979.

[33] PAIVA, J.B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas.** São Carlos: EESC, USP, 1987. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987. 195p.

[34] WEEËN, F.V. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. **Int. Journal. Num. Meth. Eng.**, v.18, n.1, p.1-10, 1982.

[35] WEEËN, F.V. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENT METHODS IN ENGINEERING, 1982, Southampton. **Proceedings...** Southampton: Springer Verlag, p.487-499, 1982.

[36] LONG, S.Y., BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. Boundary element bending analysis of moderately thick plates. **Comp. Mech. Publications**, v.5, n.8, p.64-74, June, 1988.

[37] KARAM, V.J., TELLES, J.C.F. On boundary elements for Reissner's plate theory. **Eng. Analysis**, v.5, n.1, p.21-27, 1988.

[38] RIBEIRO, G.O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner.** São Carlos: EESC, USP, 1992. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992. 266p.

[39] RIBEIRO, G.O., VENTURINI, W.S. Aplicação do método dos elementos de contorno no cálculo de placas através da teoria de Reissner. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 10, 1989, Porto. **Anais...** Porto: MECON-89, 1989.

[40] WESTPHAL JR., T., DE BARCELLOS, C.S. Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate models. In: Tanaka, M., Brebbia, C.A., Honma, T., eds., **Boundary Elements XII**, 1989.

[41] DE BARCELLOS, C.S., SILVA, L.H.M. A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: Brebbia, C.A., Venturini, W.S., eds., **Boundary Element Tecniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer**, Southampton, 1987.

[42] VILMANN, O., DASGUPTA, G. Fundamental solutions of Mindlin plates with variable thickness for stochastic boundary elements. **Eng. Analysis with Boundary Elements**, v.9, p.47-59, 1992.

[43] EL-ZAFRANY, A., FADHIL, S., DEBBIH, M. An efficient approach for boundary element bending analysis of thin and thick plates. **Computers & Structures**, v.56, n.4, p.565-576, 1995.

[44] SAADA, A.S. **Elasticity: theory and applications.** New York: Pergamon Press Inc., 1974.

[45] BREBBIA, C.A., DOMINGUES, J. **Boundary elements: An introcdutory course.** Avon: McGraw-Hill Book Company, Great Britain, 1989.

[46] CRUSE, T.A. **Mathematical foundations of the boundary - Integral equation method in solid mechanics.** United Technologies: Special Scientific Report, East Hartford, U.S.A., 1977.

[47] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. **Boundary element techniques.** Berlin: Springer Verlag, Germany, 1984.

[48] TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the diferential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **Philosophical Magazine.** series 6, v. 41, pp. 744-746, 1921.

[49] TIMOSHENKO, S. **Vibrations problems in engineering**. D. Van Nostrand Company Inc., second edition, New Iork, p. 337, 1937.

[50] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. **Handbook of mathematical functions.** New York: Dover Publications, 1965.

[51] HÖRMANDER, H., **Linear partial differential operators.** Berlin: Springer Verlag, 1963.

[52] BATHE, K.J., LEE, N.S., BUCALEM, M.L., On the use of hierarquical models in engineering analysis. **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, v.82, p.5-26, 1990.

[53] PAIVA, J.B., VENTURINI, W.S. Escolha do ponto singular na análise de placas pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS, 9, 1988, Argentina. **Anais...** Argentina: MECON-88, 1988.

[54] PALERMO JÚNIOR, L. **Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno.** São Carlos: EESC, USP, 1989. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989. 148p.

[55] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KREIGER, S. **Theory of Plates and Shells.** New York: McGraw-Hill, 1959.