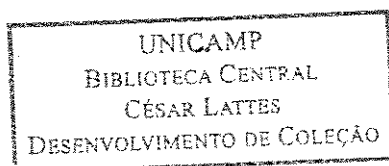


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Estudo de vibração forçada de placas laminadas pelo método dos elementos finitos usando a integração direta de Newmark.

Autor: Estêvão Xavier Volpini

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Estudo de vibração forçada em placas laminadas pelo método dos elementos finitos usando a integração direta de Newmark.

Autor: Estêvão Xavier Volpini

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

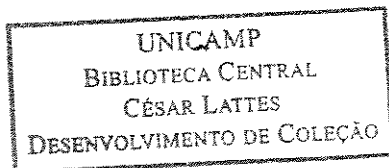
Dissertação de Mestrado apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas.

Campinas, SP - Brasil.
Fevereiro de 2006.

Atesto que essa é a versão definitiva da dissertação/tese.

Prof. Dr. *Aloisio Ernesto Assan*

Matrícula 03596-3 - 30/06/2006



UNIDADE BC
Nº CHAMADA TIUNICAMP
V888e
V EX
TOMBO BC/ 71238
PROC. 16.145-07
C D X
PREÇO 11,00
DATA 23/01/07
BIB-ID 397100

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

V888e Volpini, Estêvão Xavier
Estudo de vibração forçada em placas laminadas pelo método dos elementos finitos usando a integração direta de Newmark / Estêvão Xavier Volpini.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Aloisio Ernesto Assan
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Dinâmica. 2. Placas (Engenharia). 3. Placas (Engenharia) - Vibração. 4. Integração numérica. 5. Método dos elementos finitos. I. Assan, Aloisio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: Study of forced vibration on laminated plates using finite element method with Newmark direct-integration method

Palavras-chave em Inglês: Dynamic analysis, Laminated plates, Forced transverse vibration, Direct-integration method, Newmark, Finite element

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Leandro Palermo Junior, Renato Pavanello

Data da defesa: 24/02/2006

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

Estudo de vibração forçada de placas laminadas pelo método dos elementos finitos usando a integração direta de Newmark.

Autor: Estêvão Xavier Volpini
Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Dissertação de Mestrado apresentada à banca examinadora constituída por:

Aloisio E. Assan

Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan
FEC-UNICAMP

Leandro Palermo Junior

Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
FEC-UNICAMP

Renato Pavanello

Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM-UNICAMP

Campinas, SP - Brasil.
Fevereiro de 2006.

Dedicatória

“...a todos os que estudam, ensinam ou
admiram a prodigiosa ciência das grandezas,
das formas, dos números, das medidas, das
funções, dos movimentos e das forças...”

Malba Tahan
(O homem que calculava.)

Agradecimentos

Sou particularmente grato ao Professor Assan, que muito me encorajou a seguir com este projeto.

Meu pai, minha mãe, meu irmão, minha família, meus amigos e a Deus, imprescindíveis.

Sem vocês, nada seria possível.

“Satisfaça sua paixão pela ciência,” diz ela, “mas faça com que sua ciência seja humana de tal modo que possa ter uma relação direta com a ação e a sociedade. Eu proíbo o pensamento abstruso e as pesquisas profundas; irei puni-lo severamente pela melancolia que eles introduzem, pela incerteza sem fim que o envolvem e pela fria recepção que seus falsos descobrimentos encontrarão quando comunicados. Seja um filósofo, mas, no meio de toda sua filosofia, não deixe de ser um homem.”

David Hume.
(Investigação Sobre o
Entendimento Humano)

Sumário

Lista de Figuras.....	9
Resumo.....	13
Abstract.....	14
Introdução.....	15
Capítulo 1 - Revisão Bibliográfica	
1.1.Revisão bibliográfica das publicações sobre o tema.....	18
Capítulo 2 - Dinâmica	
2.1-Breve descrição da teoria de análise dinâmica.....	25
2.2-Integração direta para a solução da equação de equilíbrio na análise dinâmica.....	26
2.2.3-Método de integração de Newmark.....	32
2.2.4-Algoritmo do método de Newmark.....	35
Capítulo 3 - Placas Laminadas e o Elemento Finito de Kosmatka	
3.1-Placas Laminadas e o Elemento Finito de Kosmatka.....	36
3.2-O elemento finito de Kosmatka.....	42
Capítulo 4 - Resultados Numéricos	
4.1-Resultados Numéricos.....	45
4.2-Primeiro exemplo.....	46
4.3-Segundo exemplo.....	52
4.4-Terceiro exemplo.....	55
4.5-Quarto exemplo.....	63
4.6-Quinto exemplo.....	70
Capítulo 5 – Conclusão e Propostas para a continuidade do trabalho	
5.1-Conclusão.....	76
5.2- Propostas para continuidade do trabalho.....	77
Referências bibliográficas.....	78
Anexo	81

Lista de figuras

Figura 1-Experimento de Ernst Chladni.....	16
Figura 2.1-Sistema massa mola com um grau de liberdade.....	26
Figura 2.2-Gráfico do deslocamento e aceleração em função do tempo.....	27
Figura 2.3-Sistema massa mola com dois graus de liberdade.....	28
Figura 3.1.1- Placa laminada e o sistema de coordenadas adotado.....	36
Figura 3.1.2-Esforços resultantes.....	40
Figura 3.1.3-Esforços resultantes.....	40
Figura 3.2.1-Elemento finito triangular sua forma original com 13 nós e forma final com 6 nós.....	43
Figura 4.1.1-Discretização das malhas de elementos finitos utilizadas para os exemplos numéricos.....	45
Figura 4.2.1 -Placa monocamada. Espessura de 5 cm. Material isotrópico utilizando malha com 64 elementos com extremidades apoiadas.....	47
Figura 4.2.2 - Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessuras de 5,0; 2,5; 1,0; e 0,5 cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5 microssegundos.....	49
Figura 4.2.3-Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessura 5cm e 2,5cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5microssegundos.....	50

Figura 4.2.4 - Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessura 1cm e 0,5cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5 microssegundos.....	51
Figura 4.3.5 - Deslocamento do centro da placa quadrada. Material ortotrópico. Condição extremidades engastadas. 3 lâminas com orientação de 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos. Espessuras de 5 e 2,5cm. Utilizando as três malhas propostas.....	53
Figura 4.3.6 - Deslocamento do centro da placa quadrada. Material ortotrópico. Condição extremidades engastadas. 3 lâminas com orientação de 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos. Espessura de 1 e 0,5cm. Utilizando as três malhas propostas.....	54
Figura 4.4.7-Deslocamento do centro de placa quadrada.Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura de 5cm. Monocamada laminados orientados com 3 lâminas 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos.....	56
Figura 4.4.8 - Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico.Malha para placa inteira. Condição de apoio duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0° . Intervalo de integração de 10 microssegundos.....	57
Figura 4.4.9 - Deslocamento centro da placa. Malhas para a placa inteira. Material ortotrópico. Condição de duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 2,5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.....	58
Figura 4.4.10-Deslocamento centro da placa quadrada.Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura de 5cm e 2,5cm. 3 lâminas orientadas com 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.....	59

Figura 4.4.11-Deslocamento centro da placa.Malha para placa inteira. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 1 cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalos de integração de 10 microssegundos.....60

Figura 4.4.12 - Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico. Malhas placa inteira. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 0,5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.....61

Figura 4.4.13-Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico. Malha placa inteira com 64 elementos. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 1cm e 0,5cm . 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.....62

Figura 4.5.14 - Deslocamento do centro da placa. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Material ortotrópico. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0 e monocamada. Espessura de 5cm.....64

Figura 4.5.15-Deslocamento do centro da placa. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0.Espessura de 2,5cm.....65

Figura 4.5.16-Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura 5cm e 2,5cm.....66

Figura 4.5.17-Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura de 1cm.....67

Figura 4.5.18-Deslocamento do centro da placa quadrada.Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres . Intervalo de integração de 15 micro segundos . 4 lâminas orientadas 0/90/90/0 . Espessura 0,5cm.....	68
Figura 4.5.19 - Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura de 1,0cm de 0,5cm.....	69
Figura 4.6.20 - Comparação dos deslocamentos no centro da placa laminada orientada 0/90/90/0 simplesmente apoiada com espessura de 5cm. Intervalos de integração de 5 microssegundos e resultado de Kant [10].....	71
Figura 4.6.21-Placa quadrada simplesmente apoiada material ortotrópico. Espessura 5cm. Intervalo de integração de 10microssegundos. Orientação dos laminados conforme legenda.....	72
Figura 4.6.22 - Placa laminada simplesmente apoiada. Espessura 5cm. Intervalo de integração de 10 microssegundos. Orientação dos laminados conforme legenda.....	73
Figura 4.6.23 - Placa laminada simplesmente apoiada.Espessura 0,5cm. Orientação das lâminas conforme legenda. Intervalo de integração de 10 micro segundos.....	74
Figura 4.6.24-Placa laminada simplesmente apoiada.Espessura 0,5cm. Orientação das lâminas conforme a legenda. Intervalo de integração de 10 microssegundos.....	75
Figura Anexo -Deslocamentos obtidos da resolução do sistema proposto por Bathe e Wilson [12].....	84

Resumo

Volpini, X. E. (2006). Estudo de vibração forçada de placas laminadas pelo método dos elementos finitos usando a integração direta de Newmark. Campinas, 2006. Dissertação de Mestrado-Faculdade de Engenharia Civil. Universidade Estadual de Campinas (2006).

Este estudo tem por objetivo implementar, em programa já existente para a análise de placas laminadas de compósitos, a análise dinâmica de placas laminadas sob ação de carregamento forçado com integração direta pelo algoritmo de Newmark. O programa inicial de elementos finitos, que realiza a análise estática, foi desenvolvido por Tápia (1998), usando o elemento finito de Kosmatka (1994), formulado com a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem de Reissner-Mindlin. Cassiano (2002) implementou nesse programa o cálculo das frequências naturais. Neste trabalho foi introduzida a análise dinâmica forçada, através da integração direta no tempo, empregando o método de Newmark.

Exemplos comparativos com variações das espessuras das placas, do número de lâminas, das orientações das fibras e das vinculações das bordas, mostram o excelente comportamento do elemento finito aqui empregado.

Palavras chave: análise dinâmica, placas laminadas, vibração forçada, método de integração direta, Newmark, elementos finitos.

Abstract

Volpini, X. E. (2006). Study of forced vibration on laminated plates using finite element method with Newmark direct-integration method. Campinas, 2006. Dissertação de Mestrado-Faculdade de Engenharia Civil. Universidade Estadual de Campinas (2006).

The aim of this study is the dynamic analysis of laminated composite plates under forced transverse vibration with time direct-integration method. The original program, with the static analysis, was developed by Tapia (1998) using the element proposed by Kosmatka (1994), formulated with first-order shear deformation theory of Reissner-Mindlin. Later Cassiano (2002) introduced into this finite element code the evaluation of the natural frequencies. In this thesis the dynamic analysis by means of a direct time integration method, which was formulated by Newmark, was performed.

Comparative examples with several plates thicknesses, number of laminates, orientation of the fibers and boundary constraints, show the excellent performance of the finite element used herein.

Key words: dynamic analysis, laminated plates, forced transverse vibration, direct-integration method, Newmark, finite element.

Introdução

O uso de placas laminadas nas diversas engenharias é crescente devido à sua particularidade de alta resistência e baixo peso, tendo se tornado um importante elemento estrutural.

As placas laminadas são formadas pela combinação de lâminas de materiais compósitos fibrosos ou particulados. Cada lâmina desses materiais possui suas características e propriedades específicas formadas pela combinação de dois ou mais materiais com a finalidade de se obter características requisitadas, como por exemplo, rigidez, resistência, redução de peso, resistência à corrosão, melhoria das propriedades térmicas, resistência à fadiga, vida útil e resistência à abrasão. Informações sobre determinação da composição dos materiais compósitos, das suas propriedades, classificação e produção, podem ser encontradas em [21], [22] e [23].

Para a análise de placas laminadas a teoria considera as propriedades elásticas específicas de cada lâmina e a orientação de suas fibras para formar uma matriz única para o laminado.

Em seu uso, freqüentemente nota-se a existência de cargas que produzem vibrações, sendo um exemplo típico em engenharia aeronáutica o citado por Ribeiro e Petyt [1] que mostram que as placas utilizadas próximas das turbinas das aeronaves são submetidas a um alto nível de pressão acústica, onde são observadas grandes amplitudes sob tais vibrações.

Na engenharia civil ocorrem casos em que é importante a análise dinâmica: lajes de pontes e passarelas sujeitas à ação do vento, de pessoas e de veículos; recintos onde há grande concentração de pessoas sobre lajes, movimentando-se harmonicamente, como em shows e bailes.

Em edificios industriais o maquinário de produção produz muitas vezes alta vibração que pode prejudicar o funcionamento de outros componentes na vizinhança; para tais casos é necessária freqüentemente a análise de vibração de placas sob base elástica. O mesmo estudo pode ser necessário para pistas de decolagem em aeroportos.

No estudo de vibração de placas, Ernst Chladni (1756–1827) é considerado um dos pioneiros, pelo desenvolvimento da técnica experimental de visualização dos padrões de vibração publicado no ano de 1787. Seu experimento consiste em vibrar placas, como mostra a Figura 1, com um arco de violino, espalhando areia sobre a superfície das placas. O movimento faz os grãos de areia se reunirem nas regiões onde o movimento é mínimo, chamadas de linhas modais, revelando os padrões de vibração.

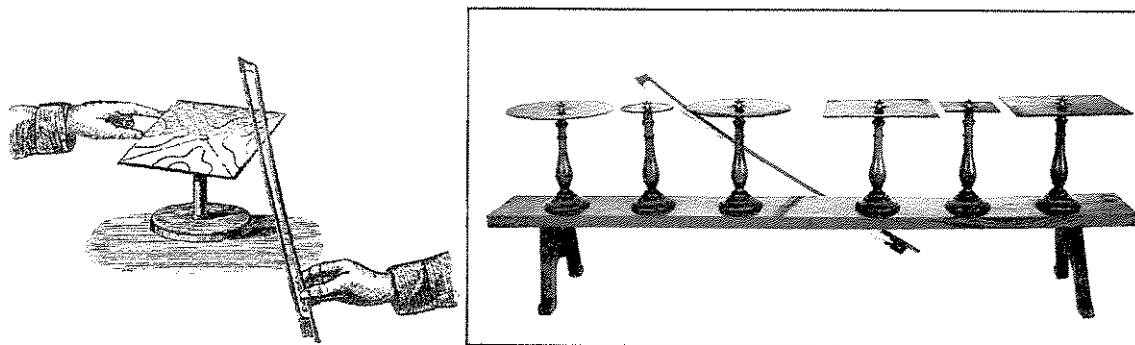


Figura 1-Experimento de Ernst Chladni

Figuras extraídas de <http://www.phys.uniroma1.it/DOCS/MUSEO/acu9.htm>

A solução analítica da equação diferencial do comportamento dinâmico das placas fornece os modos de vibração e as frequências naturais, calculados a partir dos autovetores e autovalores e quando formulada com as mesmas condições de contorno do experimento o comprovam.

Uma maneira de estudar a vibração em placas é através da solução da equação diferencial do movimento. Esse tipo de solução é bastante comum até a década de 1950.

Nos dias atuais, utiliza-se comumente a análise numérica através dos métodos dos elementos finitos ou dos elementos de contorno.

Este trabalho propõe-se à análise de placas laminadas sob a ação de carga dinâmica forçada transiente, usando a integração direta no tempo, dando sequência aos trabalhos de desenvolvidos por Tápia [2] e Cassiano [3].

Tápia [2] desenvolveu um programa de computador, em linguagem FORTRAN, implementando o elemento finito proposto por Kosmatka [4], visando à análise estática, obtendo deslocamentos e esforços.

Mais tarde, Cassiano [3] deu continuidade a esse trabalho introduzindo o cálculo das vibrações livres.

Assan [5,6] implementou a análise de vibração livre sob base elástica de Winkler, comprovando a capacidade do elemento finito de Kosmatka [4] neste tipo de estudo.

A análise dinâmica, aqui desenvolvida, será no domínio do tempo, com a integração numérica de Newmark. Serão apresentados diversos exemplos numéricos de placas laminadas sob diferentes condições de contorno, malhas de elementos finitos, esquemas de orientação das fibras de laminação, obtendo-se deslocamentos, acelerações e esforços que serão comparados com resultados já publicados na literatura especializada.

Capítulo 1

Revisão bibliográfica das publicações sobre o tema

Através do equacionamento chamado clássico, o estudo de vibração de placas é modelado visando satisfazer as equações diferenciais do movimento e suas vinte e uma possíveis combinações diferentes das condições de contorno das bordas para as placas quadradas.

No desenvolvimento da formulação, diversos autores se destacaram: Sophie Germain, Lagrange, Poisson e Kirchoff são alguns dos pesquisadores aos quais são atribuídas a autoria da teoria clássica de placas e suas publicações são datadas do início do século XIX.

Entre os anos de 1940 e 1950, os autores Reissner e Mindlin apresentaram formulações de placas que são conhecidas hoje como teoria de placas de Reissner Mindlin, considerando em suas formulações as deformações por forças cisalhantes e a consideração da influência da relação espessura e dimensão lateral. Resumidamente, mais informações podem ser encontradas nos trabalhos de Paccola[15] e Souza[16] e nas publicações por eles apresentadas.

Utilizando o equacionamento clássico, Soni e Rao [8], em 1974, fizeram um estudo de vibração em placas retangulares ortotrópicas. Conseguiram uma solução exata para a determinação das frequências naturais, estudando o efeito das forças atuantes paralelamente ao plano das placas retangulares ortotrópicas, nas suas vibrações transversais.

A forma dos modos e as frequências foram calculadas, por aqueles autores, para uma placa quadrada com forças no plano, duas extremidades paralelas simplesmente apoiadas e as outras duas com diferentes combinações: engastada, livre e simplesmente apoiada.

Uma mudança na frequência natural da placa pode ser obtida pela alteração da rigidez, massa ou pela introdução de forças no plano da placa. A frequência natural tem aumento, diminuição ou permanece inalterada dependendo da magnitude e natureza das forças aplicadas no plano.

Tais problemas são de interesse prático dos engenheiros que trabalham com tensões devidas à variação térmica, como, por exemplo, painéis de foguetes expostos a situações extremas. O projetista pode mudar as frequências das placas pela mudança da força normal.

Soni e Rao [8] determinaram os modos de vibração e as frequências através da solução exata da equação diferencial que governa a placa. Esta solução é conhecida como explícita. Por este método as soluções são possíveis para sistemas lineares com coeficientes constantes, com pequenas amplitudes de vibração em estruturas com propriedades de massa e inércia uniformemente distribuídas.

Outra maneira de proceder a análise da vibração em placas é a integração passo a passo, ou seja, uma sucessão de processos aritméticos que equacionam em pequenos intervalos de tempo o equilíbrio das forças de inércia, de amortecimento e as forças elásticas do sistema. O processo é considerado simples, exigindo pouco esforço computacional com bons resultados.

O método de Newmark[7] foi adotado nesta dissertação. Em seu trabalho ele descreve o procedimento geral para solução de problemas estruturais dinâmicos, sendo aplicável a qualquer estrutura de qualquer grau de complexidade, com qualquer relação entre força e deslocamento. O autor analisa o comportamento elástico linear até vários níveis de análise inelástica, até a ruptura.

Qualquer tipo de carregamento dinâmico como impacto, choque, vibração, movimentos provocados por terremotos, ou o efeito de uma arma nuclear, pode ser considerado, bem como vários tipos de amortecimento.

As estruturas que podem ser analisadas pelo método abrangem as que se constituem de um grupo ou uma de série de massas concentradas ou um elemento contínuo, ambos passíveis de deslocamento. Qualquer número finito de graus de liberdade pode ser considerado, mas é essencial que as forças que determinam o padrão de deflexão da estrutura sejam determinadas e que a massa dos nós seja especificada, sendo desnecessário para estruturas que têm comportamento elástico, podendo ser constituídas: de membros

conectados onde as junções são os nós da estrutura; de um corpo sólido ou de uma reunião de placas e outros elementos, dos quais os nós podem ser definidos de acordo com a conveniência do local de aplicação das forças e massas.

Vários trabalhos de vibração forçada em placas utilizam o método de Newmark por meio do método dos elementos finitos. Dentre eles apresentamos alguns a seguir:

Reddy [9], em 1982, usou as equações de placas laminadas heterogêneas, uma generalização da teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas homogêneas, isotrópicas. Placas laminadas anisotrópicas formadas por laminações ortotrópicas, de espessura homogênea, incluem os efeitos de deformação da cortante e rotação da inércia.

Entretanto, a teoria não considera a delaminação: as lâminas são consideradas como perfeitamente coesas. Com um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, são determinados os campos de deslocamentos, as equações de movimento na presença de cargas transversais e as equações constitutivas. Considerando as condições de contorno e os valores iniciais, uma forma exata para a variação espacial da solução da equação é encontrada para dois diferentes esquemas de laminação associados com as condições de contorno, com placa retangular sujeita a uma carga distribuída transversal senoidal.

A integração do sistema dinâmico das equações é feita empregando o método de integração numérica de Newmark. O método apresentou precisão, estabilidade e estabilidade incondicional para problemas lineares. Embora a solução espacial seja exata, um erro é introduzido via integração numérica no tempo.

Os resultados numéricos da integração no tempo foram obtidos com os valores de alfa e beta de 0,5 e 0,25, respectivamente (correspondendo ao método da aceleração média). O efeito do intervalo de tempo foi investigado usando tanto a teoria clássica de placas como também a teoria de placas que consideram a deformação por cisalhamento.

O autor analisou, para uma placa quadrada de duas lâminas com orientação ortogonal das fibras, o resultado da deflexão transversal do centro da placa e tensão normal sob o carregamento instantâneo para vários valores de intervalo de tempo. Observa-se que os intervalos de tempo entre 1 e 5 microssegundos não apresentam influência na precisão da solução e a teoria de deformação por cisalhamento é menos sensível ao intervalo de tempo considerado, mas sua resposta é significativa, podendo ser visto na amplitude e no

período observado na deflexão do centro da placa, comparado com a teoria clássica onde a deflexão é 30% menor .

Os resultados mostraram o aumento da deflexão e a diminuição do período com o aumento do valor da espessura usando-se a teoria com deformação cisalhante. Constatou-se a existência do efeito das disposições dos ângulos das fibras da laminação na amplitude e período da deflexão.

No mesmo ano, Reddy e Mook [13] apresentaram uma formulação que considerava a deformação por cisalhamento, realizaram estudos para a análise transiente de carga uniformemente distribuída, estudaram-se casos lineares e geometricamente não lineares para placas isotrópicas e placa de material compósito anisotrópico. Foi utilizado o método dos elementos finitos para a análise. Nos elementos de placa, quadrados isoparamétricos com nove nós, as malha de elementos finitos utilizadas foram 2x2 e 4x4, havendo simetria biaxial dos problemas, sendo discretizada um quarto da placa e diferentes intervalos de integração também foram estudados.

Resultados da teoria clássica de placas que não levam em consideração o efeito da deformação por cisalhamento foram comparados para observar a influência do efeito da deformação por cisalhamento, resultando menor amplitude e menores períodos. O efeito do aumento da relação dos valores de ortotropia dos materiais estudados para o caso de não linearidade apresentou diminuição no período e na deflexão do centro da placa. As variações dos valores das orientações das lâminas para ângulos variando da forma $\theta/-\theta$ apresentam diminuição da amplitude e aumento do período com o aumento dos valores de θ até o valor de 45° , onde isto se inverte.

Kant, Varaiya e Arora [10], em 1989, trabalharam com a teoria de placas de ordem superior para investigar a resposta transiente de placas isotrópicas e anisotrópicas. O elemento finito utilizado foi um quadrilateral isoparamétrico com nove nós.

Utilizaram o esquema de integração implícita no tempo usando matriz diagonal e consistente de massa para o cálculo computacional da resposta transiente. Ambas as simetrias dos eixos foram estudadas. Somente um quarto da placa foi considerado, adotando as condições iniciais nulas para deslocamentos, velocidades e acelerações. Para os laminados simétricos, os deslocamentos no plano e seus termos de ordem elevada não foram incluídos.

Foram analisadas placas laminadas com diferentes números de lâminas, orientações das fibras, condições de contorno e de carregamento.

Através da aplicação da teoria de ordem elevada em um elemento finito para a análise dinâmica transiente de placas compósitas, os autores perceberam claramente a importância desta teoria para placas anisotrópicas.

Em comparação com a teoria de Reissner-Mindlin não houve evidente melhoria para placas isotrópicas. Porém, na análise de placas não homogêneas, anisotrópicas, compósitas ou em sistemas de laminação, o modelo matemático apresentado é superior à teoria de Mindlin.

Eles observaram que o uso de matrizes de massa consistente ou diagonal apresentam o mesmo resultado e que, para intervalos de tempos grandes, o esquema de integração de Newmark é mais preciso que o esquema Wilson- θ .

Latheswary, Valsarajan e Rao[17], no ano de 2004, fizeram um estudo com um elemento de quatro nós com sete graus de liberdade por nó, formulado com a teoria de placas com deformação por cisalhamento de ordem superior, considerando a matriz de amortecimento e fazendo análise transiente pelo método da superposição modal, com a malha de elementos finitos sendo 16x16 para a placa inteira. Investigaram a influência de vários parâmetros como a relação do amortecimento, anisotropia do material, orientação das fibras dos materiais, número de camadas e diferentes condições de contorno sob uma carga não dimensional uniformemente distribuída.

A conclusão para os parâmetros relacionados são resumidamente expostas a seguir:

(i) efeito do amortecimento:

- amplitude diminui com o aumento da porcentagem de amortecimento;
- com percentual de amortecimento pequeno (1%), a amplitude diminui exponencialmente;
- com o aumento do percentual de amortecimento, a amplitude diminui exponencialmente;
- o efeito do amortecimento não acontece instantaneamente nos primeiros períodos de tempo.

(ii) efeito da largura da placa e da espessura:

-a amplitude diminui com o aumento da relação da largura com a espessura da placa;

-a diminuição da amplitude com o aumento da relação da largura com a espessura da placa é muito pequena em placas finas, implicando que o efeito da cortante transversal é insignificante.

(iii) efeito da anisotropia do material:

-um aumento da relação entre os módulos de elasticidade nas direções longitudinal (E_1) e na direção transversal (E_2): E_1/E_2 mantendo E_2 constante diminui a amplitude devido ao aumento da rigidez.

(iv) efeito da orientação das fibras:

-placas laminadas orientadas em $(\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha)$ e similarmente em $(\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha)$ com α entre 0° e 45° apresentam diminuição no deslocamento central com o aumento de α , devido à mudança da rigidez da placa;

-observou-se que o maior deslocamento ocorre em diferentes tempos para as diferentes orientações das fibras;

-os deslocamentos são menores para as orientações anti-simétricas do que para as simétricas;

(v) efeito do número de camadas:

-a amplitude diminui com o aumento do número de camadas;

-o comportamento de placas com duas camadas é significativamente diferente de placas multicamadas;

-a diferença das amplitudes de placa com quatro camadas e seis camadas de mesma espessura é muito pequena; a diminuição pode ser negligenciada para placa com mais de seis camadas de mesma espessura;

-conclui-se que o número de camadas não tem efeito significativo nas amplitudes.

(vi) efeito dos comprimentos dos lados:

-mantendo um comprimento constante e variando o outro, observou-se que o deslocamento aumenta com o aumento da relação entre os lados, porque a placa muda gradualmente seu comportamento, tendendo a assemelhar-se ao de uma viga.

Nayak, Shenoi e Moy [18], no mesmo ano de 2004, implementaram um elemento finito formulado a partir da teoria de ordem superior de Reddy. A análise transiente foi realizada com o esquema de integração direta de Newmark. Foram analisados os subintervalos de tempo de integração e as influências dos seguintes parâmetros: propriedades dos materiais, condições de contorno, esquemas de orientação das fibras e a geometria da placa.

Analysaram os subintervalos de tempo para cargas uniformemente distribuídas, cargas senoidais, cargas triangulares e cargas de explosões para malhas de placas com discretizações: 2x2, 3x3, 4x4 elementos de quatro e nove nós com sete graus de liberdade.

Capítulo 2

Dinâmica

2.1-Breve descrição da teoria de análise dinâmica.

A análise dinâmica relaciona os movimentos dos corpos, ou sistemas, e as forças atuantes que os causam. Uma particularidade da dinâmica é a vibração, um tipo de comportamento dinâmico no qual o sistema oscila em relação a uma determinada posição de equilíbrio. Este fenômeno ocorre em estruturas ou corpos que possuem massa e elasticidade, pois são passivos de movimentos relativos entre cada ponto dos elementos que os constituem.

Na vibração ocorre a variação da energia do sistema, sendo uma função dos diferentes tipos de forças que provocam o movimento oscilatório, das forças elásticas, forças de amortecimento, forças de inércia e do número de variáveis necessárias para descrever o movimento.

O equacionamento consiste em escrever o equilíbrio das forças, podendo ser feito através da segunda lei de Newton ou por formulação energética, resultando em equações diferenciais que representam a função da variação do sistema.

Para o estudo do fenômeno de vibração podemos partir do entendimento de um sistema simples para os mais complexos e a adoção do sistema massa mola no equacionamento de sistema é a similarmente usada para várias estruturas com vários graus de liberdade.

Este trabalho, que tem por objetivo a solução do problema de vibração em placas pelo método da integração direta no tempo, não aborda as soluções pelos métodos analíticos.

2.2-Integração direta para a solução da equação de equilíbrio na análise dinâmica.

O método de integração direta usa um procedimento numérico passo a passo. As principais características do procedimento são:

- o tempo é discretizado em pequenos intervalos;
- os deslocamentos, as velocidades e as acelerações são calculados em cada intervalo de tempo e usados para a próxima iteração.

Considere o sistema da Figura 2.1 em que o deslocamento e a aceleração variam no tempo conforme o gráfico da Figura 2.2:

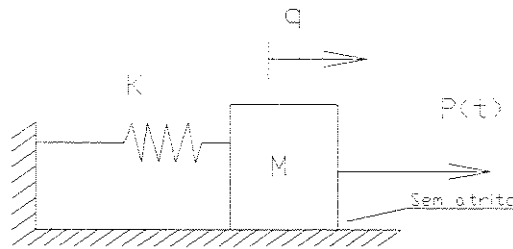


Figura 2.1 -Sistema massa mola com um grau de liberdade

A variação da posição, da velocidade e da aceleração de uma massa M em um sistema com um grau de liberdade sujeito a vibração forçada, representada por um sistema massa mola, onde a rigidez é representada pela constante K da mola, a massa do bloco por M , confinada a se mover na direção q sob um carregamento $P(t)$ em função do tempo t , pode ser equacionada na forma:

$$M\ddot{q} + Kq = P(t) \quad (2.1)$$

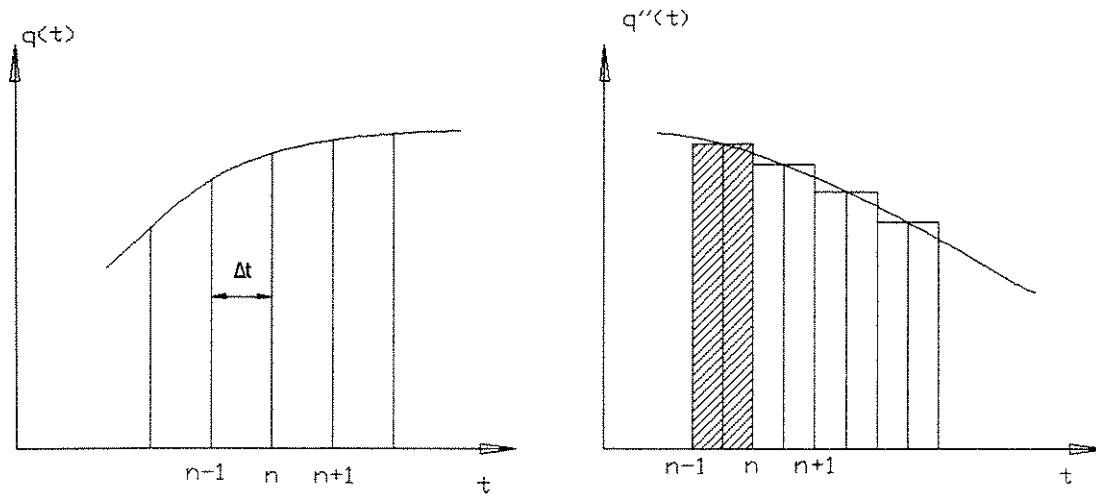


Figura 2.2- Gráfico do deslocamento e aceleração em função do tempo, do sistema massa mola da figura 2.1

Considere que t é dividido em intervalos chamados de Δt e que n é o índice dos intervalos.

Este é o método da velocidade constante exposto por Biggs[14].

Temos, das condições iniciais, conhecimento dos deslocamentos em (n) e em $(n-1)$ e a aceleração no tempo n pode ser obtida pela equação do movimento.

O próximo procedimento é calcular no tempo $(n+1)$ o deslocamento q^{n+1} , pela condição da velocidade constante $\dot{q}_{med}$, escrevemos que:

$$q^{n+1} = q^n + \dot{q}_{med} \Delta t \quad (2.2)$$

A velocidade média entre (n) e $(n+1)$ resulta em:

$$\dot{q}_{med} = \frac{q^n - q^{(n-1)}}{\Delta t} + \ddot{q}^{(n)} \Delta t \quad (2.3)$$

Com a substituição da velocidade média no deslocamento de $(n+1)$ obtemos:

$$q^{(n+1)} = 2q^{(n)} - q^{(n-1)} + \ddot{q}^{(n)}(\Delta t)^2 \quad (2.4)$$

Com esta equação obtêm-se os n deslocamentos do movimento.

Esta solução passo a passo considera a aceleração $\ddot{q}^{(n)}$ média em todo o período.

Desta maneira, a solução aproxima a curva da aceleração pela soma das várias áreas retangulares formadas do produto do subintervalo de tempo pelo valor da aceleração em n . Este produto representa a velocidade no subintervalo que é a parcela atuante no próximo subintervalo usada para o calculo do deslocamento. Devido à curva ser aproximada por retângulos para este método, é necessária a escolha de subintervalo pequeno de tempo para uma boa aproximação do resultado.

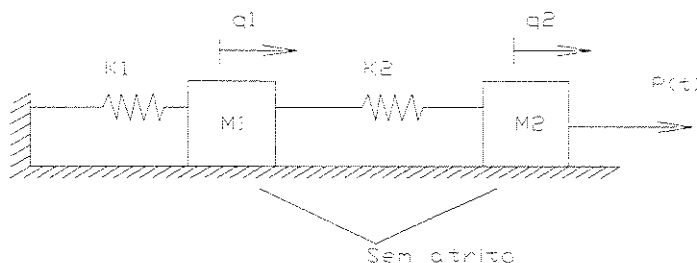


Figura 2.3-Sistema massa mola com dois graus de liberdade.

Temos para sistemas com dois graus de liberdade de acordo com a ilustração da Figura 2.4, uma equação de equilíbrio, resultando:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) &= P(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podendo ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P(t) \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

generalizando para n graus de liberdade e usando a representação matricial :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P(t)\} \quad (2.7)$$

Aplicando o princípio variacional de Hamilton para os corpos contínuos, a equação geral do movimento, que é utilizada nos método dos elementos finitos, é descrita na forma:

$$\delta \int_1^2 (T - U) dt + \int_1^2 \delta W dt = 0 \quad \text{com} \quad \delta W = \int_{V_0} P_i \delta u_i dV \quad (2.8)$$

onde:

T- energia cinética do corpo contínuo;

U- energia potencial do corpo contínuo;

A aproximação de Rayleigh-Ritz, do método dos elementos finitos, pode ser escrita para cada componente de deslocamento como:

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x, y, z) q_j(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Cada componente u_i do campo de deslocamentos é descrita pela função $f_{ij}(x, y, z)$ multiplicada pela variação da amplitude em função do tempo, $q_j(t)$, chamada de deslocamentos generalizado.

A função $f_{ij}(x, y, z)$ descreve o deslocamento particular de cada componente do campo, tornando-se necessário satisfazer as condições de compatibilidade internas e as condições essenciais de contorno.

$$f_j(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{1j}(x, y, z) \\ f_{2j}(x, y, z) \\ f_{3j}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Podendo ser escrita na forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n f_j(x, y, z) q_j(t) \quad (2.11)$$

onde n é o número de funções que devem ser usadas para conseguir a aproximação com o grau de precisão desejado e $q_j(t)$ são as n amplitudes $q(t)$ necessárias.

A forma matricial da aproximação

$$u(x, y, z, t) = N(x, y, z)q(t) \quad (2.12)$$

Onde $q(t) = [q_1 \dots q_n]^T$ é o vetor das coordenadas generalizadas, e a matriz N de dimensão $3 \times n$ é a matriz de interpolação dos deslocamentos.

$$N(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{11}(x, y, z) \dots f_{1n}(x, y, z) \\ f_{21}(x, y, z) \dots f_{2n}(x, y, z) \\ f_{31}(x, y, z) \dots f_{3n}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As componentes do tensor de deformação

$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$ são calculadas por:

$$\varepsilon(x, t) = DN(x, y, z)q(t) = B(x, y, z)q(t) \quad (2.14)$$

A matriz de interpolação de deformação $B(x, y, z)$ de dimensão $6 \times n$ é calculada através do operador diferencial D^T :

$$B(x, y, z) = DN(x, y, z) \quad (2.15)$$

Calculando as n necessárias aproximações com

$$u(x, y, z, t) = N(x, y, z)q(t) \quad (2.12)$$

Substituindo na energia cinética $T(u) = \frac{1}{2} \int \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV$ (2.16) resultando:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \dot{q}^T N^T N \dot{q} dV = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (2.17)$$

onde:

ρ -densidade da massa deformada;

V_0 -volume do corpo não deformado;

V -volume do corpo deformado;

$dV = V_0 - V$ -variação do volume do corpo;

Com a matriz de massa do sistema discreto

$$M = \int \rho N^T N dV \quad (2.18)$$

sendo necessariamente simétrica e positiva de dimensão $n \times n$.

A energia de deformação ou energia potencial interna

$$U_{int} = \int w(\varepsilon_{ij}) dV \quad (2.19)$$

onde:

w-é a densidade de energia de deformação;

Através da substituição da expressão de discretização da deformação

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int \varepsilon^T H \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int q^T B^T H B q dV = \frac{1}{2} q^T K q \quad (2.20)$$

onde H é a matriz de Hooke dos coeficientes elásticos e K é matriz de rigidez do sistema discretizado:

$$K = \int B^T H B dV \quad (2.21)$$

Da mesma forma que a matriz de massa, a matriz de rigidez também é necessariamente simétrica com dimensões n x n. O movimento de corpo rígido é possível somente para a matriz semi-positiva definida obtendo solução de u para:

$$Bu = 0 \text{ ou } Ku = 0$$

Estes modos de deslocamentos diferentes de zero não produzem energia de deformação.

A energia potencial externa é dada por:

$$U_{ext} = - \int_0 \bar{X}(t) u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{t}_i(t) u_i dS \quad (2.22)$$

Para o cálculo, $\bar{X}$ é a força aplicada no corpo (força de volume); S é a área total do corpo: $S = S_u + S_\sigma$, S_u corresponde a área onde um deslocamento é imposto e S_σ corresponde a área onde uma força sobre área é imposta e $\bar{t}_i$ é a força sobre área imposta em S_σ ;

$$\text{Substituindo } u(x, y, z, t) = N(x, y, z)q(t) \quad (2.23)$$

Resulta em

$$U_{ext} = - \int_{S_\sigma} (N_q)^T \bar{t} dS - \int (Nq)^T \bar{X} dV \quad (2.24)$$

$$\text{Da mesma forma } U_{ext} = -q^T g \quad (2.25)$$

$$\text{com o vetor de carga externo } g = \int_{S_\sigma} N^T \bar{t} dS + \int N^T \bar{X} dV . \quad (2.26)$$

Agrupando os termos, temos a equação discreta do princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \left(\frac{1}{2} q^T K q - q^T g \right) \right\} dt = 0 \quad (2.27)$$

Aplicando a generalização das coordenadas q , chegamos na equação de movimento discreto:

$$M\ddot{q} + Kq = g(t) \quad (2.28)$$

Para a resolução através integração direta.

Considere o vetor das variações dos deslocamentos e das velocidades $u_{n+1}^T = [\dot{q}_{n+1}^T \quad q_{n+1}^T]$ e o subintervalo de integração $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ podemos escrever o método de integração direta da seguinte forma:

$$u_{n+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_{n+1-j} - \Delta t \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{u}_{n+1-j} \quad (2.29)$$

Onde α e β são parâmetros associados ao esquema de integração.

2.2.3-Método de integração de Newmark [19]

Os deslocamentos, velocidades e acelerações do movimento são determinados em $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ a partir dos já conhecidos em t_n . Através da expansão da série de Taylor dos deslocamentos e velocidades:

$$f(t_n + \Delta t) = f(t_n) + \Delta t f'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R_s \quad (2.30)$$

sendo R_s a parte da aproximação à curva que a função possui quando descreve o movimento, pela integração de

$$R_s = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f^{(s+1)}(\psi) [t_n + \Delta t - \tau]^s d\psi \quad (2.31)$$

Com a série expandida de Taylor em t_{n+1} temos as velocidades e os deslocamentos:

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\psi) d\psi \quad (2.32)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \psi) \ddot{q}(\psi) d\psi \quad (2.33)$$

A aproximação é a integração numérica da curva da aceleração, sendo possível expressar no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$

$$\ddot{q}_n = \ddot{q}(\psi) + q^{(3)}(\psi) + q^{(4)}(\psi) \frac{(t_n - \psi)^2}{2} + \dots \quad (2.34)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}(\psi) + q^{(3)}(\psi)(t_{n+1} - \psi) + q^{(4)}(\psi) \frac{(t_{n+1} - \psi)^2}{2} + \dots \quad (2.35)$$

Multiplicando $\ddot{q}_n$ e $\ddot{q}_{n+1}$ por $(1-\alpha)$ e α :

$$\ddot{q}(\psi) = (1-\psi)\ddot{q}_n + \alpha\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\psi)[\psi - \Delta t\alpha - t_n] + O(\Delta t^2 q^{(4)}) \quad (2.36)$$

Da mesma forma multiplicamos $\ddot{q}_n$ e $\ddot{q}_{n+1}$ por $(1-2\beta)$ e 2β :

$$\ddot{q}(\psi) = (1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\psi)[\tau - 2\Delta t\beta - t_n] + O(\Delta t^2 q^{(4)}) \quad (2.37)$$

Substituindo em ambas equações $\ddot{q}(\psi)$ com os termos das integrais da série expandida, obtemos as integrais

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\psi) d\psi = (1-\alpha)\Delta t \ddot{q}_n + \alpha\Delta t \ddot{q}_{n+1} + r_n \quad (2.38)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \psi) \ddot{q}(\psi) d\psi = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1} + r'_n \quad (2.39)$$

onde r_n e r'_n são as medidas do erro

$$r_n = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \Delta t^2 q^{(3)}(\tilde{\psi}) + O(\Delta t^3 q^{(4)}) \quad (2.40)$$

$$r'_n = \left(\beta - \frac{1}{6}\right) \Delta t^3 q^{(3)}(\tilde{\psi}) + O(\Delta t^4 q^{(4)}) \quad (2.41)$$

estimado entre $t_n < \tilde{\psi} < t_{n+1}$.

Os valores das constantes α e β são os parâmetros das integrais.

Adotando os valores de $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$ os resultados são a interpolação linear da aceleração $\ddot{q}(\psi) = \ddot{q}_n + (\psi - t_n) \frac{\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n}{\Delta t}$ (2.42) no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Da mesma

forma considerando $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ têm-se os valores da aceleração média:

$$\ddot{q}(\tau) = \frac{\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}}{\Delta t} \quad (2.43)$$

Com as fórmulas das integrais substituídas em $\ddot{q}_{n+1}$ e q_{n+1} obtemos:

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 + \alpha)\Delta t \ddot{q}_{n+1} + \alpha \Delta t \ddot{q}_n \quad (2.44)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \quad (2.45)$$

No sistema de equações diferenciais na forma matricial, que representa a equação de equilíbrio dinâmico:

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = P(t) \quad (2.46)$$

onde $[C]$ é a matriz de amortecimento do sistema;

Substituímos $\dot{q}_{n+1}$ e q_{n+1} em (2.46) obtendo:

$$[M + \alpha \Delta t C + \beta \Delta t^2 K] \ddot{q}_{n+1} = P_{n+1} - C[\dot{q}_n + (1 - \alpha)\Delta t \ddot{q}_n] - K[q_n + \Delta t \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{q}_n] \quad (2.47)$$

Bathe e Wilson [12] apresentam o algoritmo do método de Newmark[6] na forma matricial abaixo:

2.2.4-Algoritmo do método de Newmark [12]

A - Cálculos iniciais :

1. Formulação da matriz de rigidez K , matriz de massa M e matriz de amortecimento C .
2. Inicialização dos vetores $\{q\}_0, \{\dot{q}\}_0, \{\ddot{q}\}_0$; (atribuição de valores as posições dos vetores);
3. Escolha do tamanho do intervalo de tempo Δt , parâmetros α e β e o cálculo das constantes de integração

$$\alpha \geq 0,50$$

$$\beta \geq 0,25(0,5 + \alpha)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

$$a_4 = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \quad ; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) \quad ; \quad a_6 = \Delta t(1 - \alpha) \quad ; \quad a_7 = \alpha \Delta t$$

4. Formulação da matriz de rigidez efetiva $\hat{K}$: $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$
5. Triangularização $\hat{K}$: $\hat{K} = LDL^T$

B - Para cada passo :

1. Cálculo do carregamento efetivo no tempo $n+1$:

$$\{\hat{P}_{n+1}\} = \{P_{n+1}\} + M(a_0\{q_n\} + a_2\{\dot{q}_n\} + a_3\{\ddot{q}_n\}) + C(a_1\{q_n\} + a_4\{\dot{q}_n\} + a_5\{\ddot{q}_n\})$$

2. Solução do sistema no tempo $n+1$ para os deslocamentos:

$$LDL^T \{q\}_{n+1} = \{\hat{P}_{n+1}\}$$

3. Cálculo das acelerações e velocidades no tempo $n+1$:

$$\{\ddot{q}_{n+1}\} = a_0(\{q_{n+1}\} - \{q_n\}) - a_2\{\dot{q}_n\} - a_3\{\ddot{q}_n\}$$

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \{\dot{q}_n\} + a_6\{\ddot{q}_n\} + a_7\{\ddot{q}_{n+1}\}$$

Capítulo 3

3.1-Placas Laminadas e o Elemento Finito de Kosmatka

As placas laminadas são compostas pelo conjunto de camadas de lâminas de materiais diferentes ou de diferentes disposições das orientações das propriedades mecânicas do material.

A formulação apresentada da teoria de placa laminada a seguir é baseada em Kosmatka[4].

Uma placa laminada de material composto, de espessura total h , formada por n camadas ortotrópicas perfeitamente coesas, os laminados ortotrópicos possuem a orientação principal dos seus eixos inclinados em relação ao sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) da placa que possui o plano x - y coincidindo com a superfície média $(h/2)$ e o eixo z perpendicular ao plano x - y . De acordo com a Figura 3.1.1:

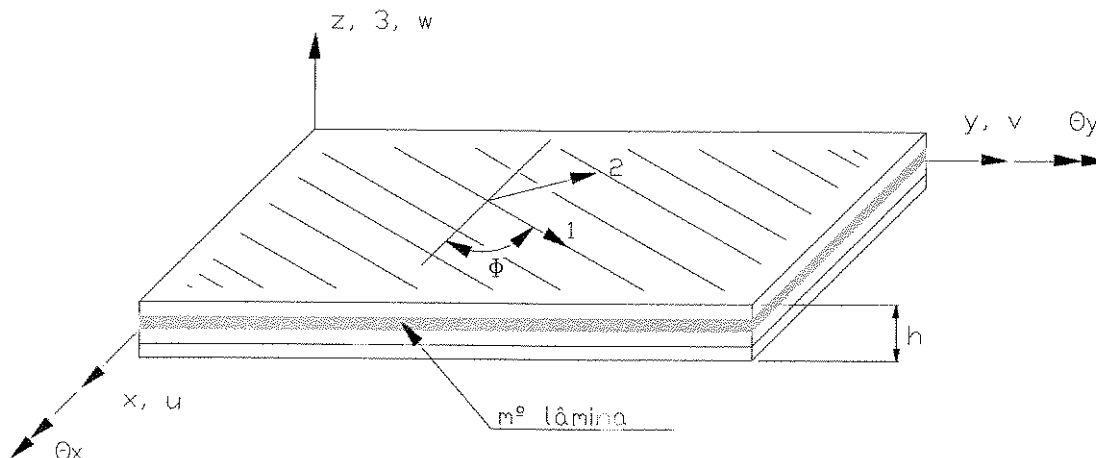


Figura 3.1.1-Placa laminada e o sistema de coordenadas adotado.

As componentes dos deslocamentos são dadas pela teoria de primeira ordem de Reissner-Mindlin. Teoria que inclui o efeito da deformação por cortante considera que após a deformação a seção transversal não permanece normal ao plano médio da placa.

O campo dos deslocamentos é dado da forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\theta_x(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo:

u, v, w componentes dos deslocamentos nas direções x, y, z ;

u_0, v_0 deslocamentos no plano médio;

w_0 deslocamento transversal do plano médio;

θ_x, θ_y rotações das normais à superfície média em torno dos eixos x e y

respectivamente;

t tempo;

As deformações deste campo:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (3.2)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

considerando a deformação ($\varepsilon_{zz} = 0$),

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

As tensões em qualquer lâmina numerada por m é definida pela deformação dada pelo tensor acima associada às relações constitutivas de uma lâmina ortotrópica sob o estado plano de tensão ($\sigma_{zz} = 0$) da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(m)} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(m)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(m)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

os valores de $\overline{Q}_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são os coeficientes de rigidez da lâmina ortotrópica.

Os coeficientes de rigidez das lâminas orientadas pelo ângulo ϕ formado entre a direção do módulo de elasticidade transversal e o eixo x da placa são:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \phi + Q_{22} \sin^4 \phi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{12} &= Q_{12} (\cos^4 \phi + \sin^4 \phi) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{22} \cos^4 \phi + Q_{11} \sin^4 \phi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} \cos^2 \phi - Q_{22} \sin^2 \phi - (Q_{12} + 2Q_{66})(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) \cos \phi \sin \phi \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} \sin^2 \phi - Q_{22} \cos^2 \phi + (Q_{12} + 2Q_{66})(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) \cos \phi \sin \phi \\ \overline{Q}_{66} &= Q_{66} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^2 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \phi + Q_{55} \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \phi + Q_{44} \sin^2 \phi \\ \overline{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \quad (3.8)$$

As lâminas com fibras orientadas em uma direção, formadas por material transversalmente isotrópico, têm os valores dos coeficientes de rigidez definidos através das constantes:

E_L módulo de elasticidade da fibra na direção longitudinal,

E_T módulo de elasticidade da fibra na direção transversal,

G_{LT} módulo de cisalhamento associado à direção longitudinal,

G_{TT} módulo de cisalhamento associado à direção transversal,

ν_{LT} coeficiente de Poisson na direção longitudinal,

ν_{TT} coeficiente de Poisson na direção transversal,

através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{TL}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \\ Q_{44} &= \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})} = G_{TT}, \\ Q_{55} &= Q_{66} = G_{LT}, \\ \nu_{TL} &= \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

As forças normais, as forças de cisalhamento e os momentos são obtidos através da integração sobre cada lâmina n

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^n \int_{z_m}^{z_{m+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} dz \tag{3.10}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^n \int_{z_m}^{z_{m+1}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} dz \tag{3.11}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(m)} dz \quad (3.12)$$

onde h_m é a distância do plano médio da placa à extremidade superior da camada m correspondente da integração.

Os esforços resultantes são representados nas Figuras 3.1.2 e 3.1.3.

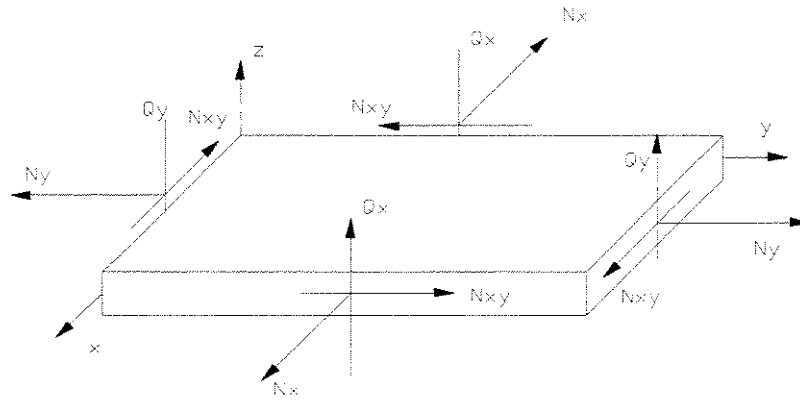


Figura 3.1.2-Esforços resultantes.

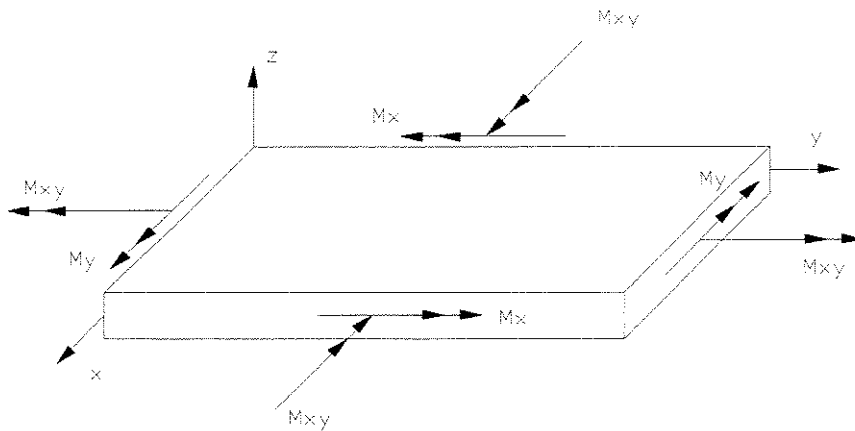


Figura 3.1.3-Esforços resultantes.

Podemos obter os esforços acima através da substituição de $\{\epsilon^0\}$, $\{k\}$ e $\{\gamma\}$ nas equações de $\{N\}$, $\{M\}$ e $\{Q\}$ e integrando para a espessura da placa inteira:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\{Q\} = [G]\{\gamma\} \quad (3.14)$$

onde :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}; [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix};$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{44} & G_{45} \\ G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

que são obtidos da integração:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^n \int_{z_m}^{z_{m+1}} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.16) \quad \text{e}$$

$$G_{ij} = k_{ij} \sum_{m=1}^n \int_{z_m}^{z_{m+1}} \bar{Q}_{ij} dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (3.17)$$

k_{ij} é o coeficiente de correção das forças de cisalhamento.

Os valores de $[A]$, $[B]$, $[D]$ e $[G]$ são dependentes da rigidez do material, da espessura da lâmina e do esquema de orientação dos laminados. Os laminados são caracterizados de acordo com sua disposição.

Da orientação das camadas laminadas existem muitas possibilidades da variação dos ângulos da direção principal da propriedade do material. Usualmente toma-se para a orientação dos ângulos ϕ valores entre zero e noventa graus positivo ou negativo. Quando as n camadas alternam o valor do ângulo aleatoriamente, esta combinação atribui valores

específicos a $\bar{Q}_{ij}$. Desta combinação especificamente, quando os ângulos são de zero e noventa graus, $\bar{Q}_{ij}$ possui valores que são zero, resultando que alguns valores de A_{ij} e D_{ij} sejam zero. Esta combinação específica forma a chamada combinação em que as direções principais do material se combinam em “cruz”(possuem noventa graus entre si). Designada na literatura especializada de “cross-ply” e “ply” para a combinação entre as direções principais do material que não são de noventa graus.

Considera-se neste trabalho que as camadas possuam a mesma espessura. Do esquema de orientação dos laminados pode-se criar a condição de simetria, não simetria ou de anti-simetria do laminado.

Simetria possui espelhamento das orientações e das espessuras das camadas acima e abaixo do plano médio da placas.

Não simetria não possui nenhum espelhamento.

Anti-simetria possui espelhamento das espessuras; suas orientações são de mesmo valor, mas com sinais opostos.

Cada tipo de disposição oferece um comportamento diferente. A importância destes tipos de orientações é que eles fornecem forças e momentos resultantes diferentes na seção conferindo ao laminado as requisitadas propriedades. Os binários de esforços gerados atribuem resistências distribuídas de acordo com a sua disposição.

Da aplicação do princípio de Hamilton em que a energia deformação, a energia cinética e o trabalho das forças externas podem ser obtidos através de $\{\varepsilon\}$ e $\{\gamma\}$ com o uso das relações desenvolvidas de $\{N\}$, $\{M\}$ e $\{Q\}$, reescritas com as variáveis do movimento e com as condições de contornos de uma placa, obtêm-se as equações diferenciais do movimento.

3.2-O elemento finito de Kosmatka [4]

O elemento finito utilizado neste trabalho foi formulado por Kosmatka [4] partir de um elemento triangular de 13 nós e 5 graus de liberdade por nó (3 translações u, v, w e 2 rotações θ_x, θ_y); ele é livre do efeito de travamento de cisalhamento conseguido através do aumento da ordem dos polinômio de interpolação.

A formulação do elemento base usa para a interpolação uma estratégia isoparamétrica com polinômios quadráticos de interpolação para a geometria e para os deslocamentos transversais no plano e nas rotações; polinômio cúbico de interpolação são usados os deslocamentos transversais.

Através de condensação estática diminui-se o número de nós do elemento como mostra a figura 3.2.1.

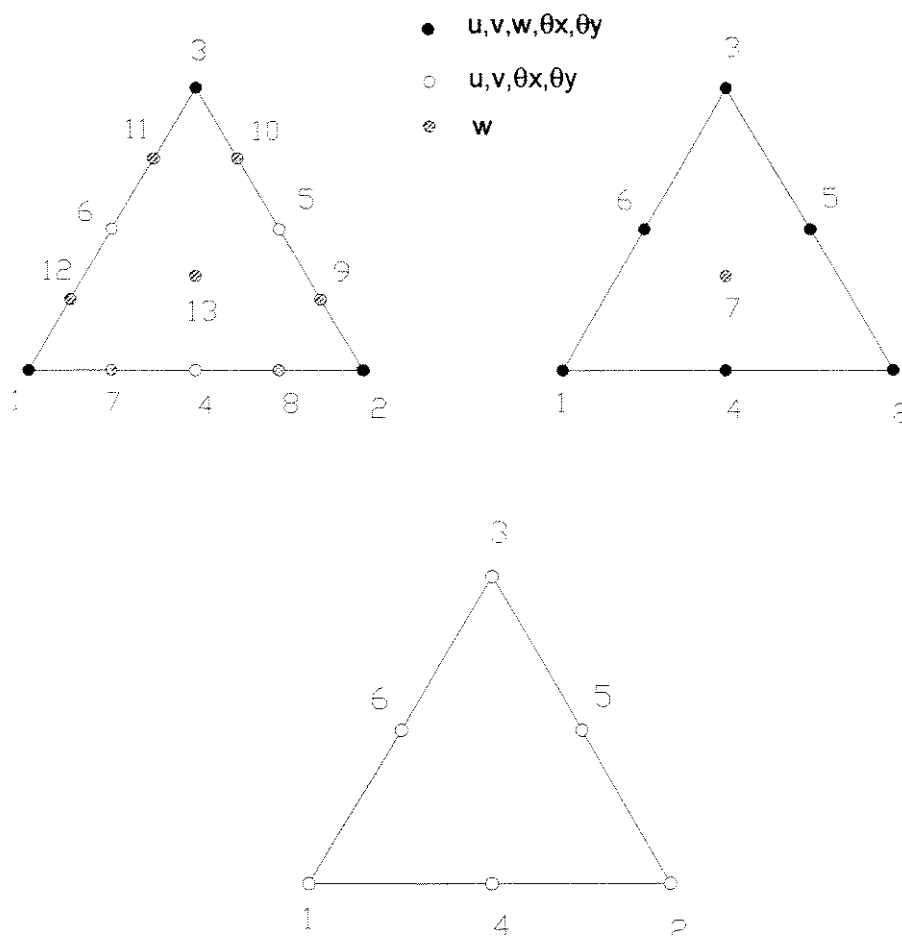


Figura 3.2.1-Elemento finito triangular sua forma original com 13 nós e forma final com 6 nós.

Os deslocamentos transversais dos nós 7, 8, 9, 10, 11 e 12 foram transferidos para os nós dos pontos médios das laterais do elemento nós: 4, 5, 6 .

$$w_7, w_8 \rightarrow w_4$$

$$w_9, w_{10} \rightarrow w_5$$

$$w_{11}, w_{12} \rightarrow w_6$$

Através de condensação estática é possível eliminar o deslocamento transversal do nó central número 13.

O cisalhamento transversal linear nas laterais do elemento permite a implementação da equação de restrição ao cisalhamento transversal em cada lado do elemento. Estas equações não acrescentam modos de energia, não influenciando a rigidez ou produzindo travamento por cisalhamento.

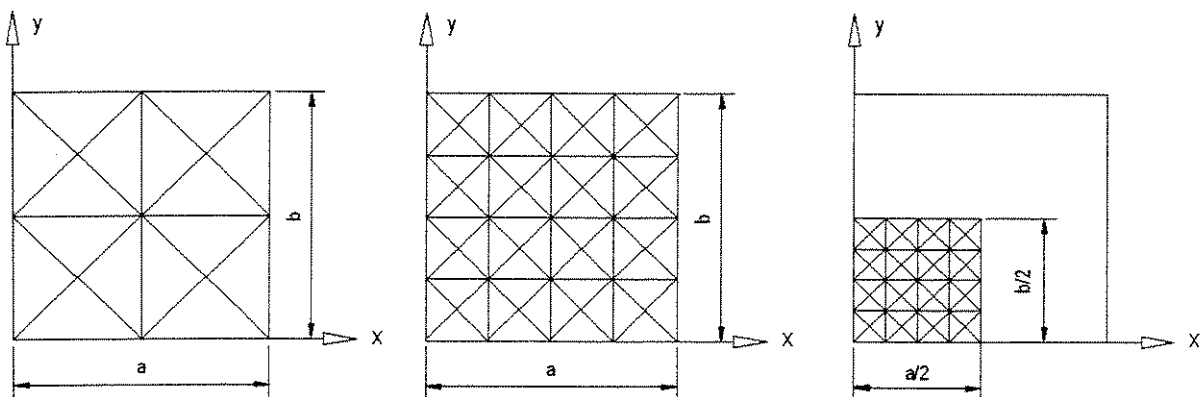
Kosmatka[4] não empregou seu elemento na análise dinâmica forçada de placas laminadas de material composto.

Informações mais completas e detalhes sobre a obtenção das matrizes de rigidez e de massa podem ser encontradas nos trabalhos de Kosmatka [4], Tápia [2] e Cassiano[3].

Capítulo 4

4.1-Resultados Numéricos.

Para o estudo proposto neste trabalho usou-se carregamento uniformemente distribuído constante de curta duração, variando-se a espessura da placa, as malhas de elementos finitos, o número de camadas e as orientações das camadas laminadas.



h =espessura da placa

Figura 4.1.1-Discretização das malhas de elementos finitos utilizadas para os exemplos numéricos

As constantes α e β do método da integração de Newmark foram adotadas como 0,5 e 0,25 correspondendo ao método da aceleração média considerado incondicionalmente estável. As condições iniciais de deslocamento, velocidade e aceleração adotadas foram zero para todos os casos analisados.

Em todos os casos é monitorado o deslocamento transversal do ponto central da placa.

Foram utilizadas as seguintes discretizações: 16 elementos e 64 elementos para placa inteira e 64 elementos para $\frac{1}{4}$ de placa conforme figura 4.1.1.

A análise do erro e da convergência do método de integração não foi discutida neste trabalho. Autores como Hughes[24] e Gerardin[19] apresentam bases para este tipo de análise.

4.2-Primeiro exemplo: placa quadrada monocamada isotrópica simplesmente apoiada nos quatro extremidades. Integração com intervalos de tempo de 5, 10, 15 e 40 microssegundos, com malha de 64 elementos. O deslocamento do nó central foi desenhado na figura 4.2.1

Na figura 4.2.1 os deslocamentos obtidos da publicação de Reddy e Mook[13], realizados com malha discretizada em 2x2 elementos quadrados com nove nós formulados com a mesma teoria de placa, mostram a validade dos deslocamentos encontrados.

Na tabela 1 os resultados dos deslocamentos do nó central para as três malhas de elementos finitos, escolhidas para o estudo, são comparados considerando quatro valores diferentes de espessura de placa, e quatro diferentes intervalos de tempo de integração. Os deslocamentos dos nós centrais para placas de espessura menor foram maiores, conforme esperado de acordo com influência da dimensão no resultado. As diferenças dos resultados dos deslocamentos dos nós centrais para os diferentes intervalos de integração foi pequena, mostrando a precisão do método mesmo com intervalos de tempos maiores. Entre as diferentes malhas os deslocamentos não apresentaram grandes diferenças, mostrando a estabilidade do elemento para as três malhas escolhidas.

As figuras 4.2.(2, 3 e 4) mostram o deslocamento do nó central da placa para o intervalo de integração de 5 microssegundos variando a espessura nos valores de 5,0; 2,5; 1,0; e 0,5cm o comportamento do elemento permanece estável com a variação da espessura.

Dados do material:

$$E=2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu=0,25$$

$$\rho=8 \times 10^{-6} \text{ Nseg}^2 / \text{cm}^4$$

$$a=b=25\text{cm}; h=5\text{cm}; 2,5\text{cm}; 1,0\text{cm}; 0,5\text{cm};$$

$$q_0=10 \text{ N/cm}^2.$$

$$\text{Intervalos de tempo } \Delta t = 5, 10, 15 \text{ e } 40 \text{ microssegundos.}$$

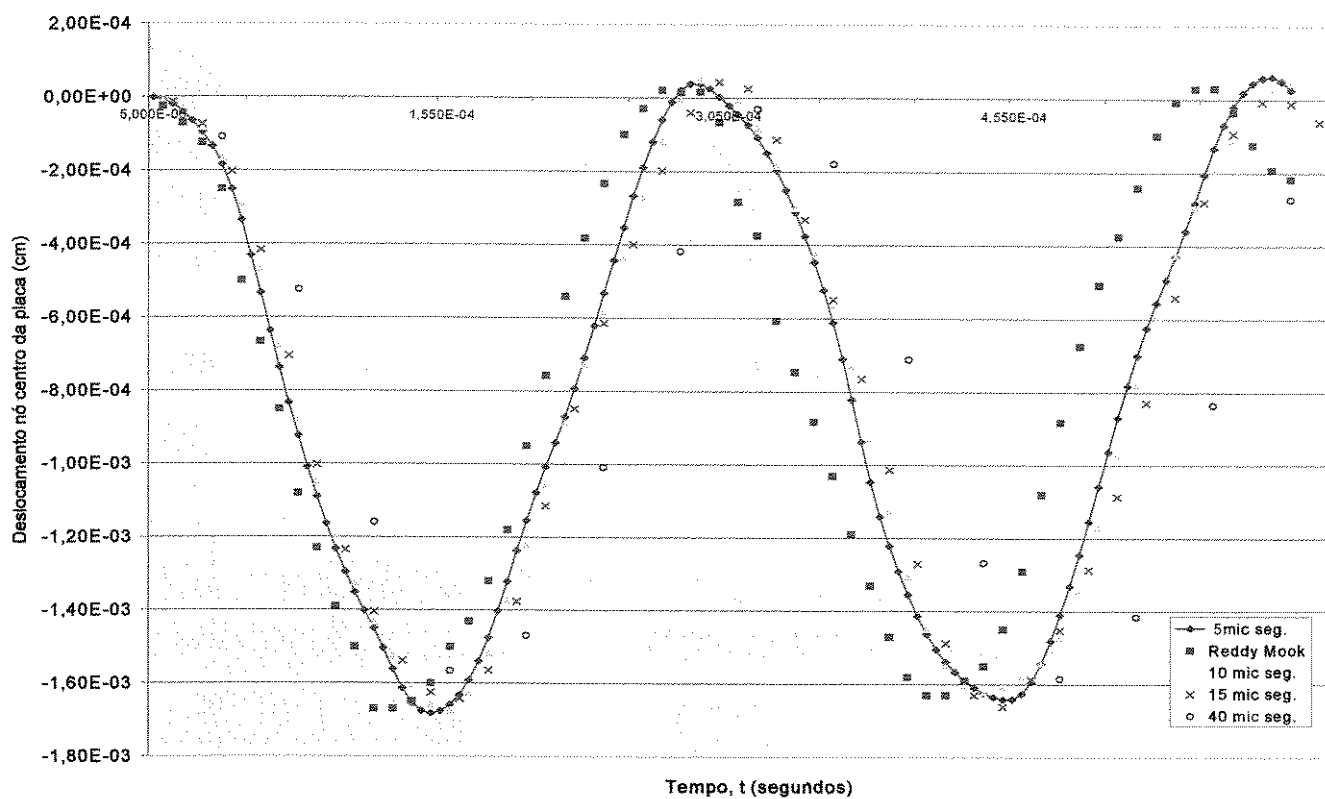


Figura 4.2.1 -Placa monocamada. Espessura de 5 cm. Material isotrópico utilizando malha com 64 elementos com extremidades apoiadas.

Tabela 1 - Deslocamento máximo* do nó central das malhas de elementos finitos para placa quadrada a=b=25cm monocamada isotrópica de espessura h e o tempo de ocorrência.**

h=5cm			
	Placa inteira 16 elementos	Placa inteira 64 elementos	¼ de placa 64 elementos
$\Delta t = 5$	Deslocamento= $-1,697743 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,70 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,682352 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,50 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,687732 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,50 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 10$	Deslocamento= $-1,685822 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,50 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,673424 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,667085 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,60 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 15$	Deslocamento= $-1,664255 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,641507 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,65 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,63902 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,65 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 40$	Deslocamento= $-1,571431 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,70 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,565936 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,565232 \times 10^{-3}$ Tempo= $1,60 \times 10^{-4}$
h=2,5cm			
	Placa inteira 16 elementos	Placa inteira 64 elementos	¼ de placa 64 elementos
$\Delta t = 5$	Deslocamento= $-1,150958 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,166053 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,164684 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,60 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 10$	Deslocamento= $-1,154057 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,162722 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,70 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,167023 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,70 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 15$	Deslocamento= $-1,158372 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,165755 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,70 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,165277 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,70 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 40$	Deslocamento= $-1,14172 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,80 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,129677 \times 10^{-2}$ Tempo= $2,80 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,128806 \times 10^{-2}$ Tempo= $3,20 \times 10^{-4}$
h=1,0cm			
	Placa inteira 16 elementos	Placa inteira 64 elementos	¼ de placa 64 elementos
$\Delta t = 5$	Deslocamento= $-1,74605 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,80 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,713987 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,60 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,71139 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,50 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 10$	Deslocamento= $-1,745232 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,80 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,712247 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,70 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,714006 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,30 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 15$	Deslocamento= $-1,741495 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,90 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,713139 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,30 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,716434 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,45 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 40$	Deslocamento= $-1,720097 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,80 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,729017 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,40 \times 10^{-4}$	Deslocamento= $-1,729209 \times 10^{-1}$ Tempo= $6,40 \times 10^{-4}$
h=0,5cm			
	Placa inteira 16 elementos	Placa inteira 64 elementos	¼ de placa 64 elementos
$\Delta t = 5$	Deslocamento= $-1,39534$ Tempo= $1,325 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,361326$ Tempo= $1,30 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,362916$ Tempo= $1,30 \times 10^{-3}$
$\Delta t = 10$	Deslocamento= $-1,395018$ Tempo= $1,33 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,362122$ Tempo= $1,29 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,363103$ Tempo= $1,33 \times 10^{-3}$
$\Delta t = 15$	Deslocamento= $-1,39458$ Tempo= $1,335 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,36243$ Tempo= $1,90 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,362415$ Tempo= $1,32 \times 10^{-3}$
$\Delta t = 40$	Deslocamento= $-1,389523$ Tempo= $1,36 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,360235$ Tempo= $1,32 \times 10^{-3}$	Deslocamento= $-1,363481$ Tempo= $1,28 \times 10^{-3}$

* Deslocamento máximo em cm

** Tempo de ocorrência em segundos.

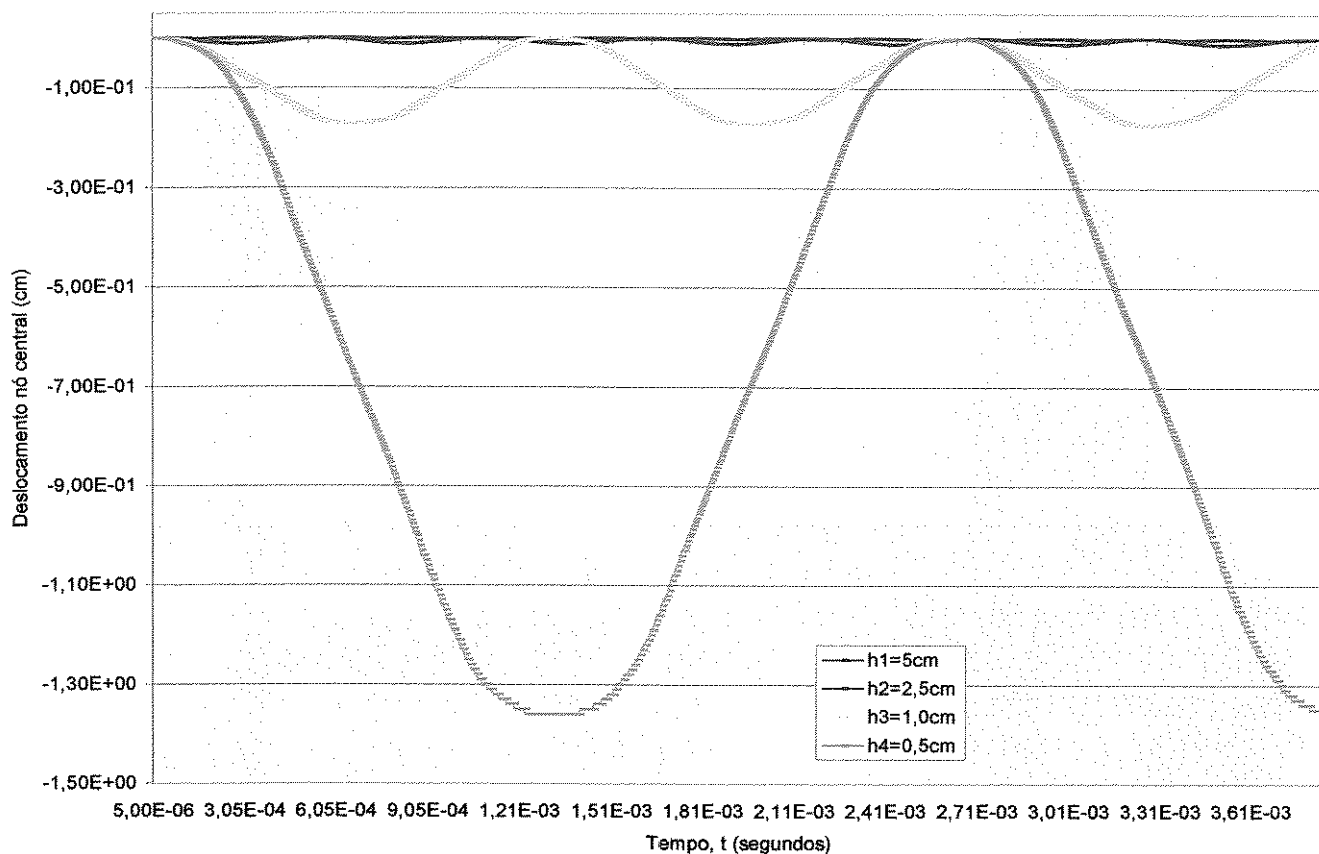


Figura 4.2.2 - Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessuras de 5,0; 2,5; 1,0; e 0,5 cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5 microssegundos.

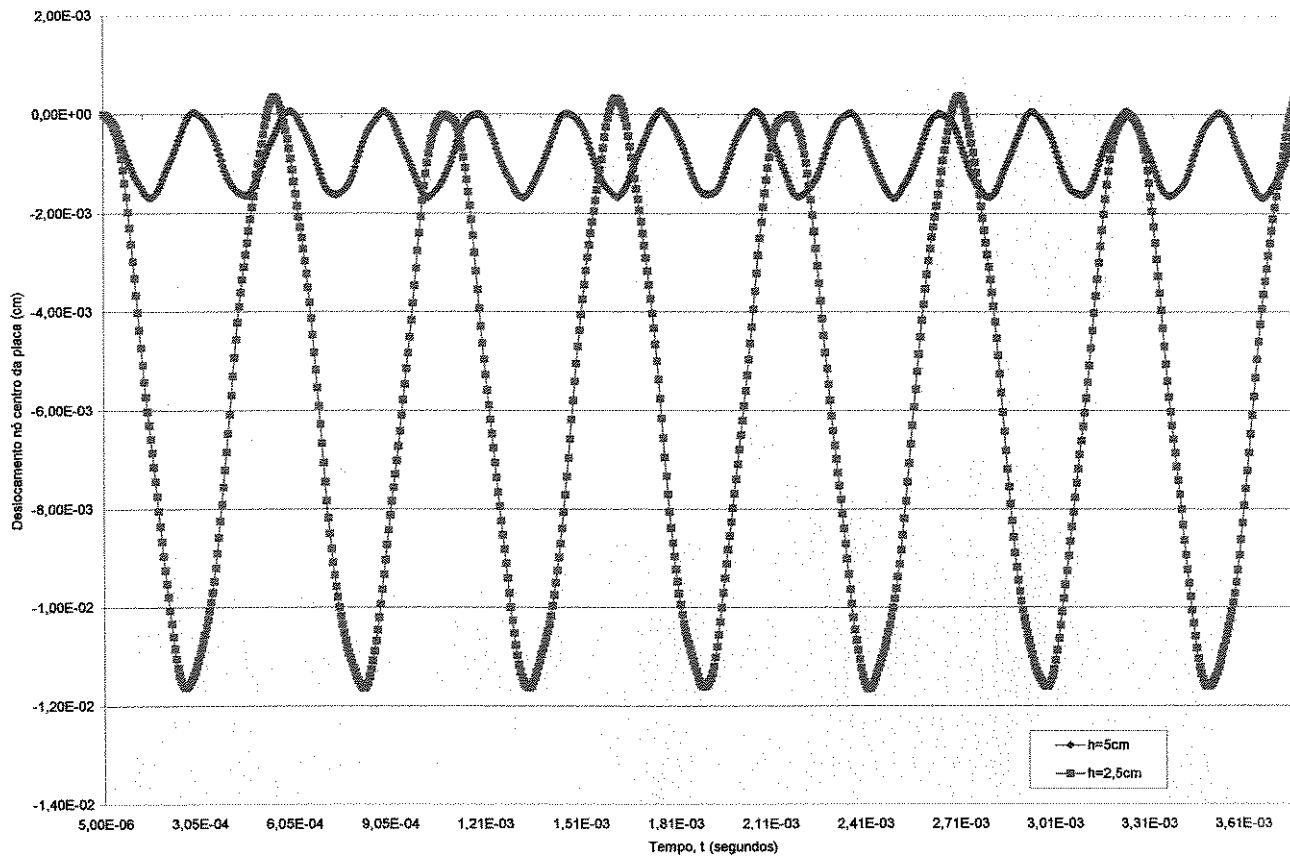


Figura 4.2.3-Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessura 5cm e 2,5cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5 microssegundos.

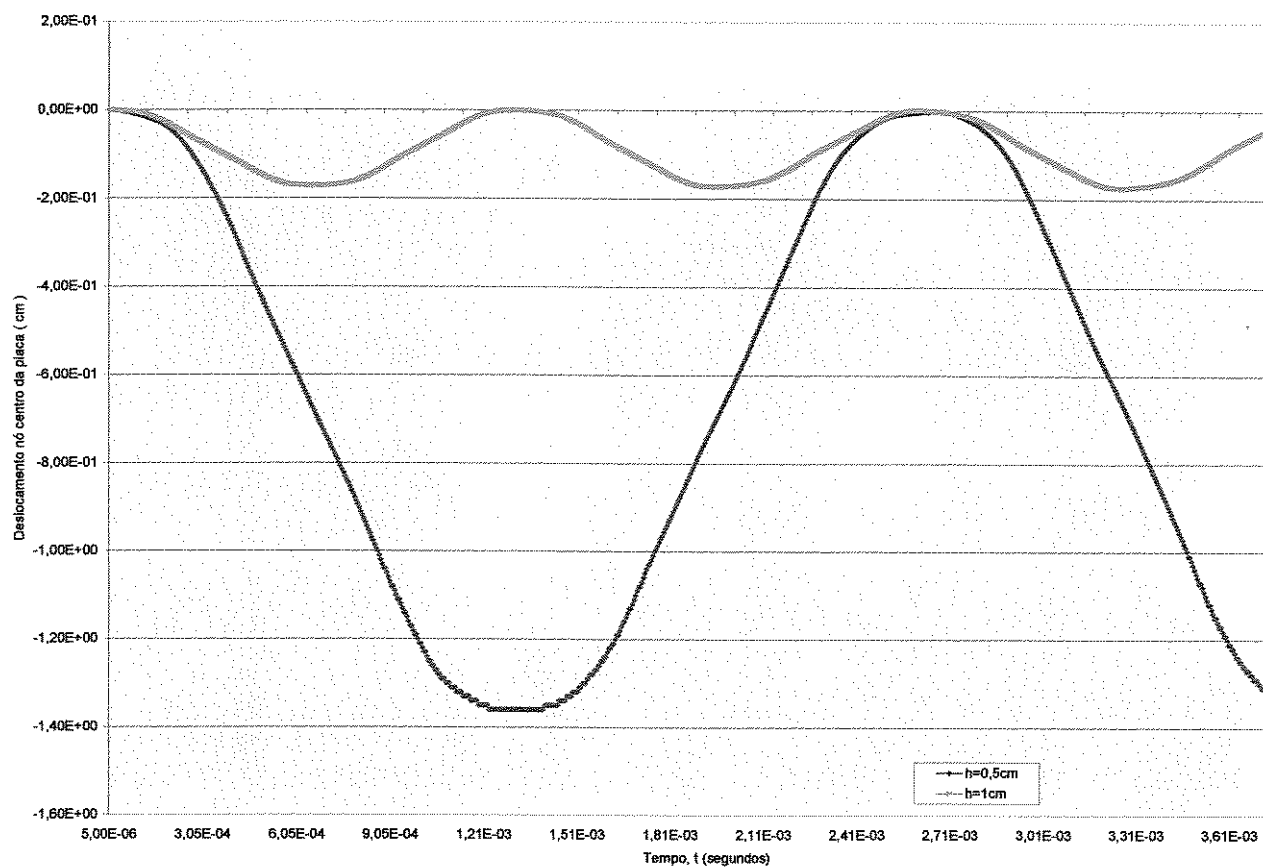


Figura 4.2.4 - Deslocamento central da placa monocamada isotrópica. Espessura 1cm e 0,5cm. Malha de 64 elementos. Condição simplesmente apoiada. Intervalo de integração de 5 microssegundos.

4.3-Segundo exemplo: placa laminada engastada nas quatro extremidades de material ortotrópico. Comportamento do elemento quando formado com laminados. Utilizadas três lâminas e as direções das fibras foram orientadas de 0/90/0 graus. Os três tipos de malhas foram comparados. Foram comparadas com Kant[10] os deslocamentos do nó central para a placa de espessura de 5cm. Kant[10] utiliza a teoria de placas de Reissner Mindlin de ordem superior, um elemento quadrado de nove nós com uma malha de elemento finito de 2x2 para um quarto da placa.

Os resultados mostram que as malhas escolhidas, mesmo sob a condição de engastamento nas quatro extremidades, tiveram comportamentos similares entre si. A maior diferença entre os deslocamentos das placas com mesma espessura foi o da espessura de 0,5cm conforme figura 4.3.6, resultado de maior discrepância é observado para malha com menor número de elementos finitos .

Dados do material:

$$E_1 = 25E_2$$

$$E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,5E_2$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \text{ N seg}^2/\text{cm}^4$$

$$a = b = 25 \text{ cm},$$

$$h = 5 \text{ cm}; 2,5 \text{ cm}; 1,0 \text{ cm}; 0,5 \text{ cm};$$

$$q_0 = 10 \text{ N/cm}^2$$

$$\text{Intervalos de tempo } \Delta t = 5 \text{ microssegundos.}$$

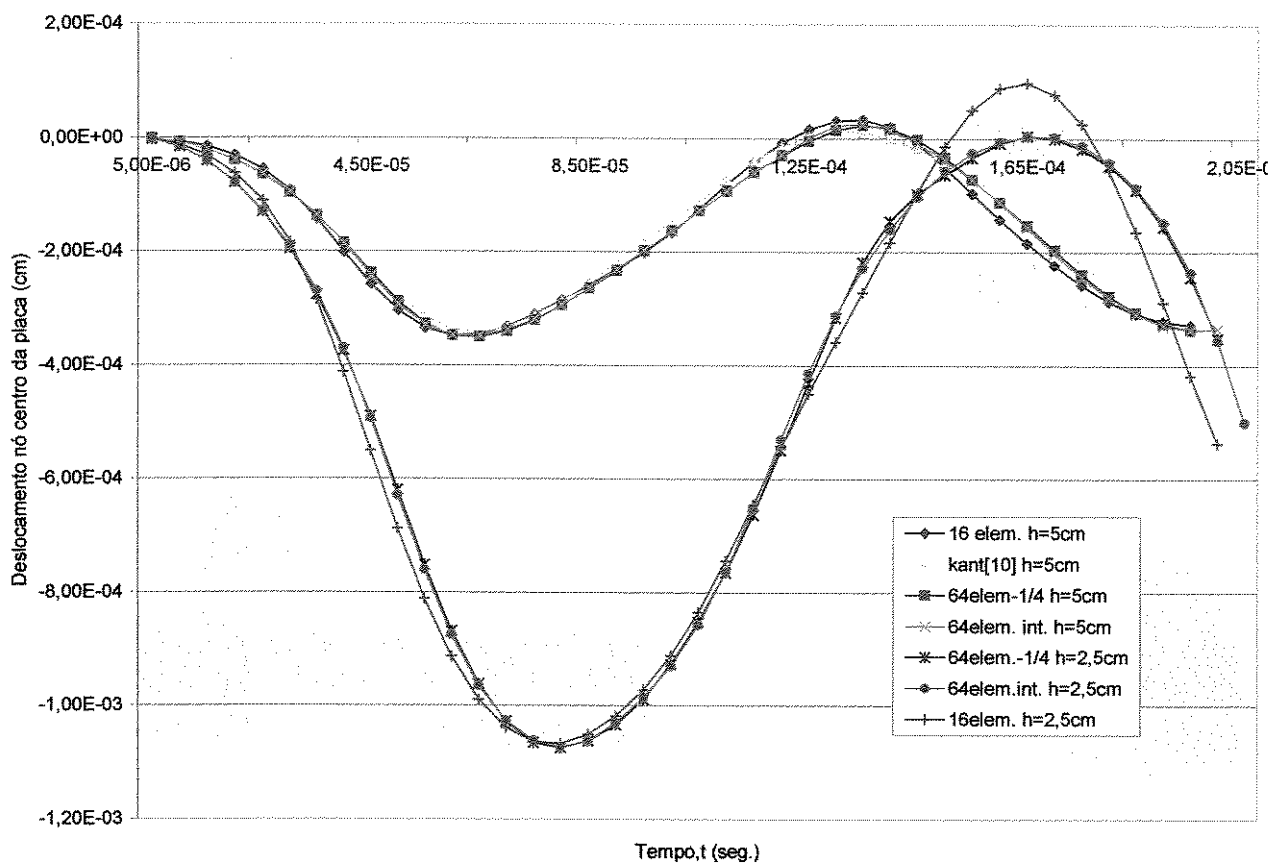


Figura 4.3.5 - Deslocamento do centro da placa quadrada. Material ortotrópico. Condição extremidades engastadas. 3 lâminas com orientação de 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos. Espessuras de 5 e 2,5cm. Utilizando as três malhas propostas.

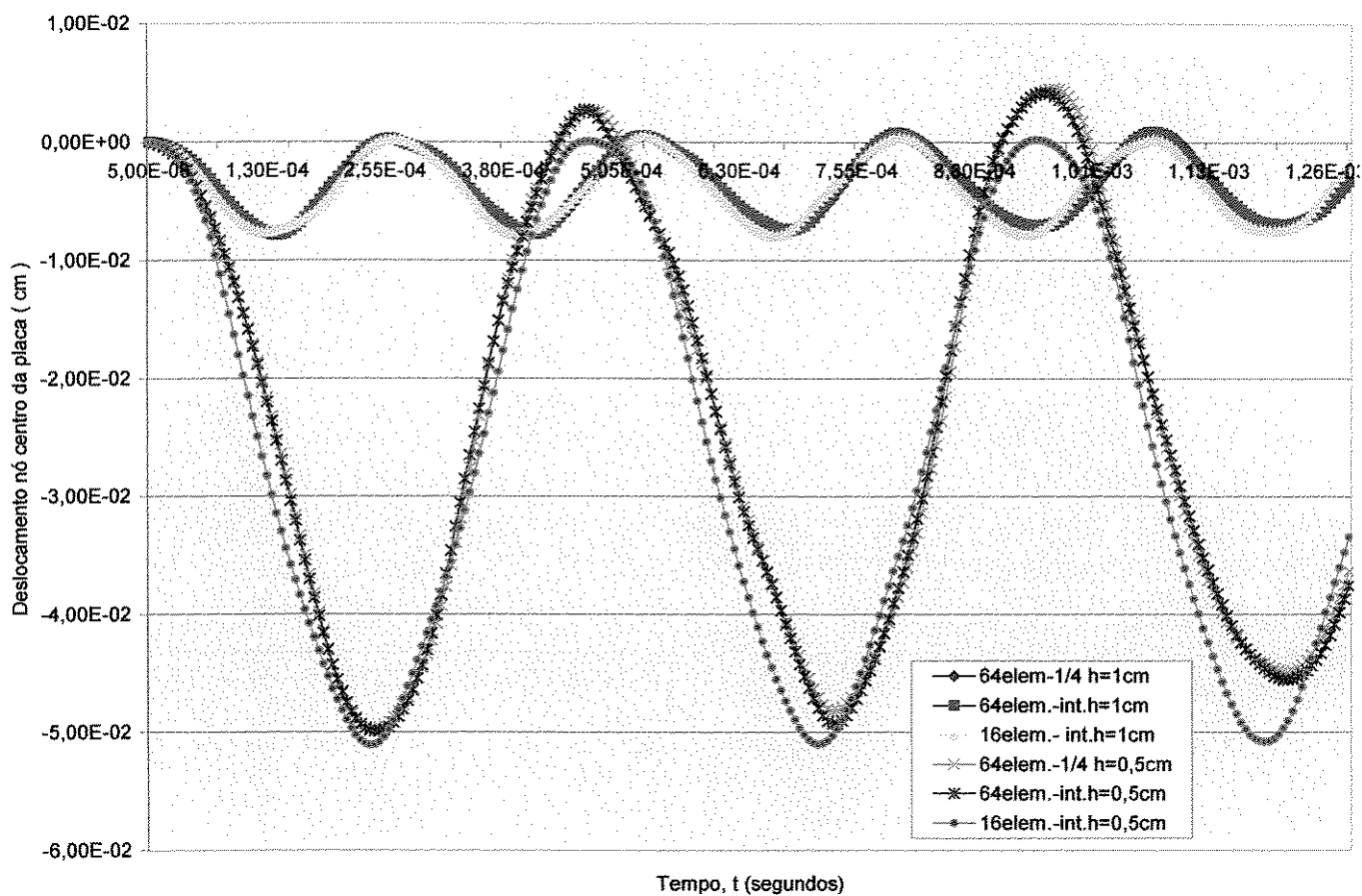


Figura 4.3.6 - Deslocamento do centro da placa quadrada. Material ortotrópico. Condição extremidades engastadas. 3 lâminas com orientação de 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos. Espessura de 1 e 0,5cm. Utilizando as três malhas propostas.

4.4-Terceiro exemplo: placa laminada com três camadas, com condições de contorno: engastada em duas extremidades perpendiculares e apoiadas em duas extremidades perpendiculares.

As lâminas receberam a orientação de 0/90/0 graus. Foi realizado o estudo da vibração apenas com as malhas discretizadas para a placa inteira.

Para as espessuras de 5,0; 2,5; 1,0 e 0,5cm os deslocamentos se mantiveram estáveis, para intervalos de integração de 5 microssegundos e 10 microssegundos o método permaneceu estável.

O comportamento dos deslocamentos em função da variação da espessura se manteve proporcional como no exemplo anterior, mesmo sob diferente condição de contorno.

Na figura 4.4.7 foram incluídos os deslocamentos de placas monocamadas de mesmo material, condições de contorno e malhas apenas como parâmetro do efeito dos laminados e comportamento das malhas.

Dados do material:

$$E_1 = 25.E_2$$

$$E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,5.E_2$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{seg}^2 / \text{cm}^4$$

$$a = b = 25 \text{ cm},$$

$$h = 5 \text{ cm}, 2,5 \text{ cm}, 1,0 \text{ cm}, 0,5 \text{ cm}.$$

$$q_0 = 10 \text{ N/cm}^2$$

Intervalos de tempo $\Delta t = 5, 10$ microssegundos.

Malha de elementos finitos com 64 elementos e 16 elementos placa inteira.

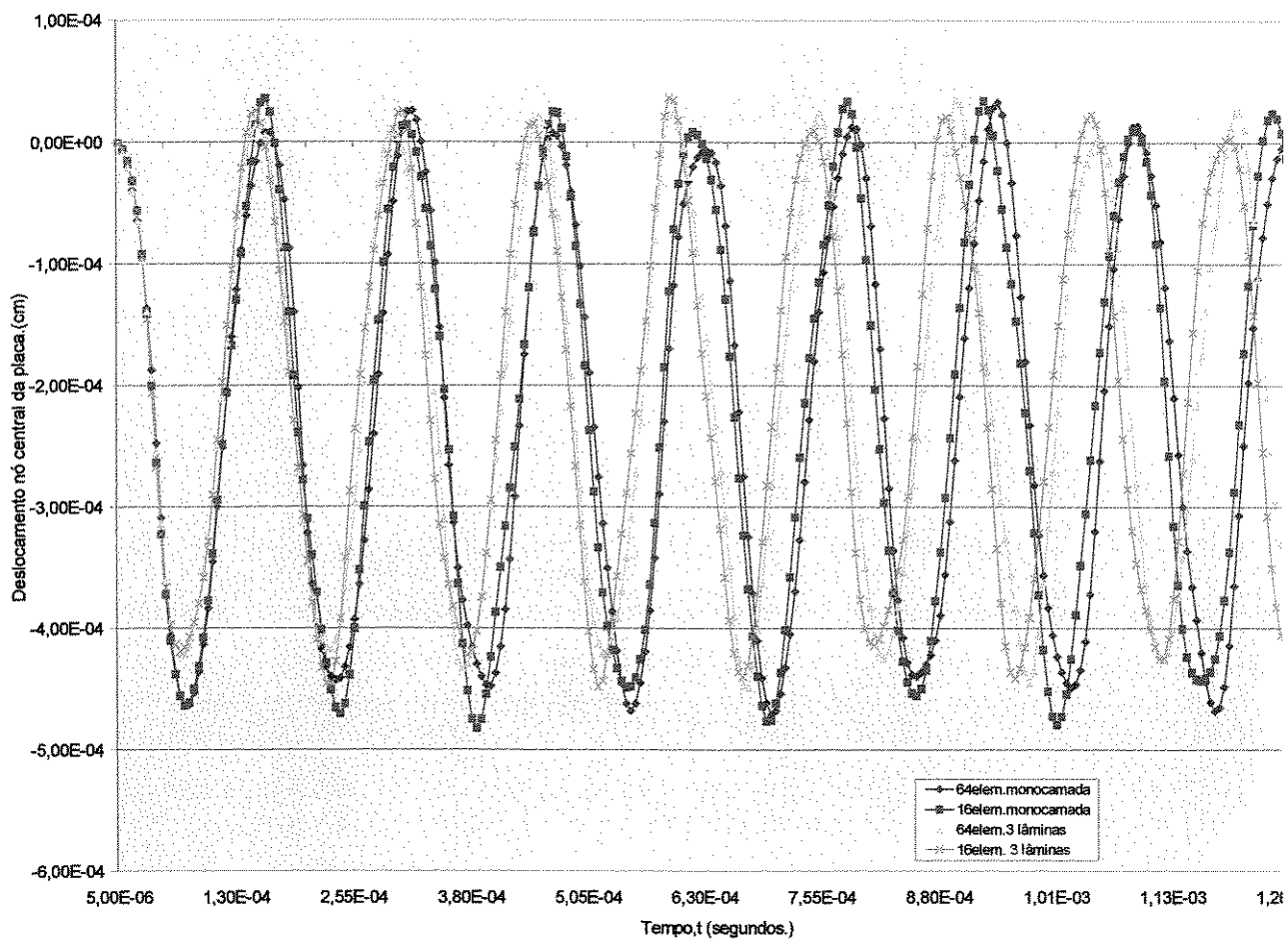


Figura 4.4.7-Deslocamento do centro de placa quadrada. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura de 5cm. Monocamada laminados orientados com 3 lâminas 0/90/0. Intervalo de integração de 5 microssegundos.

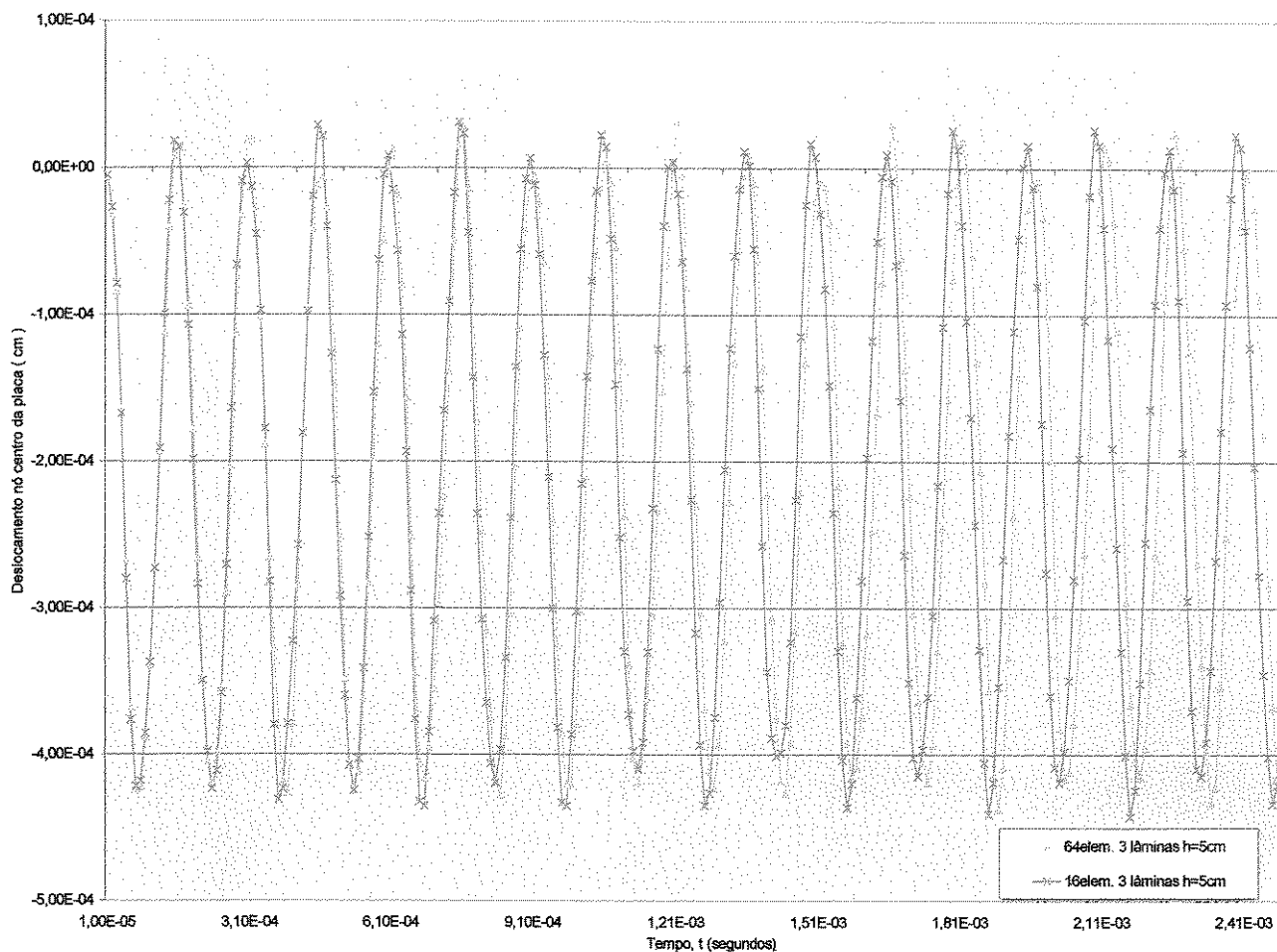


Figura 4.4.8 - Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico. Malha para placa inteira. Condição de apoio duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0°. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

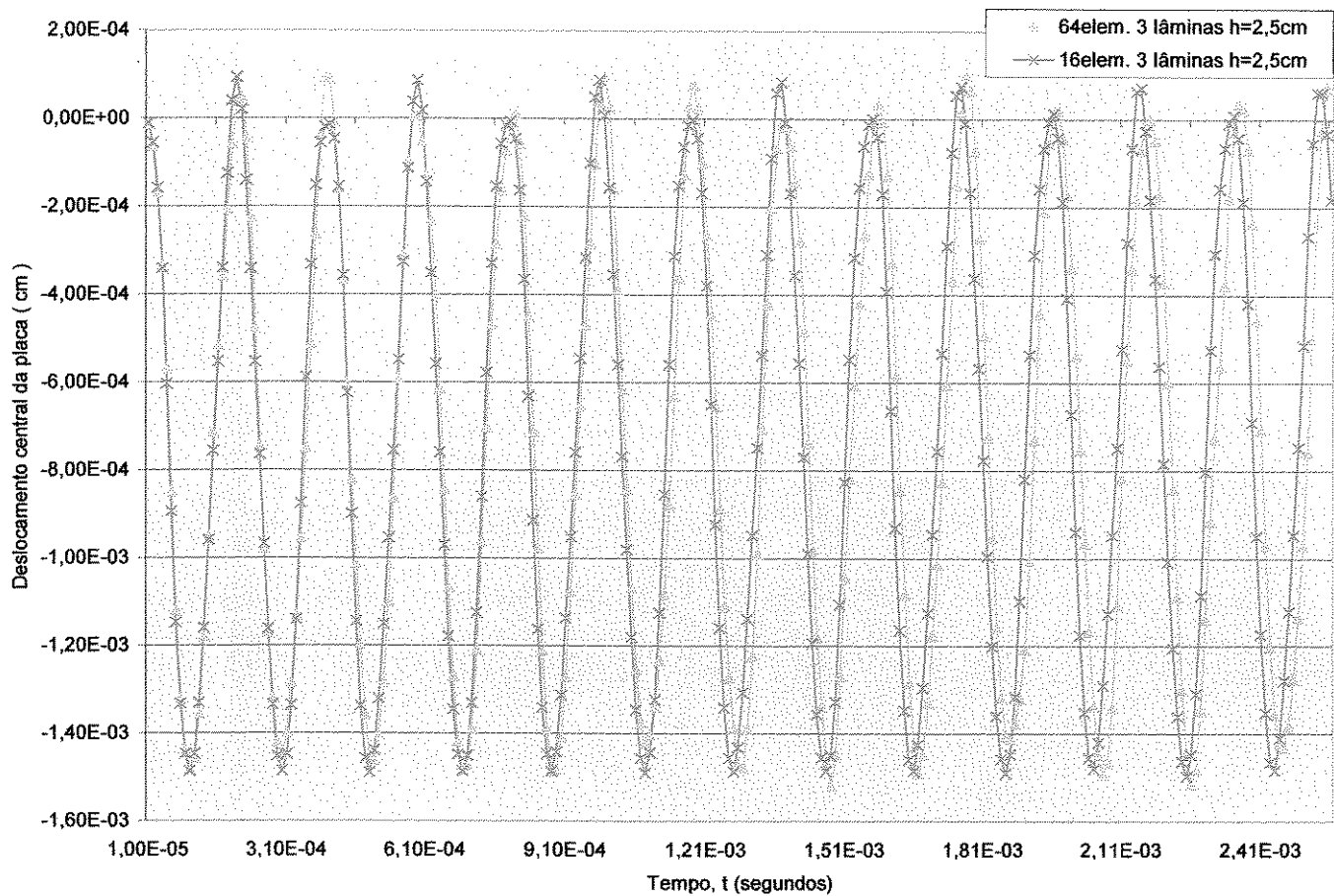


Figura 4.4.9 - Deslocamento centro da placa. Malhas para a placa inteira. Material ortotrópico. Condição de duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 2,5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

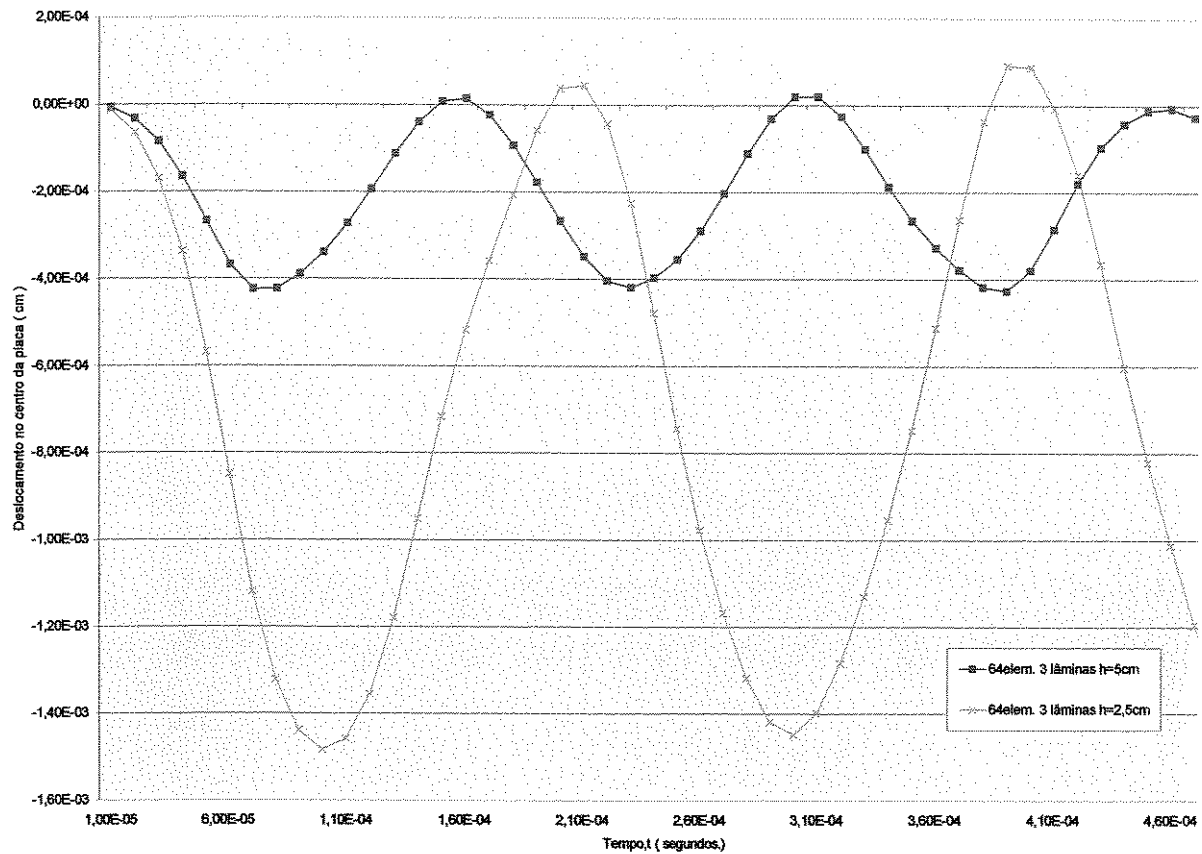


Figura 4.4.10-Deslocamento centro da placa quadrada.Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura de 5cm e 2,5cm, 3 lâminas orientadas com 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

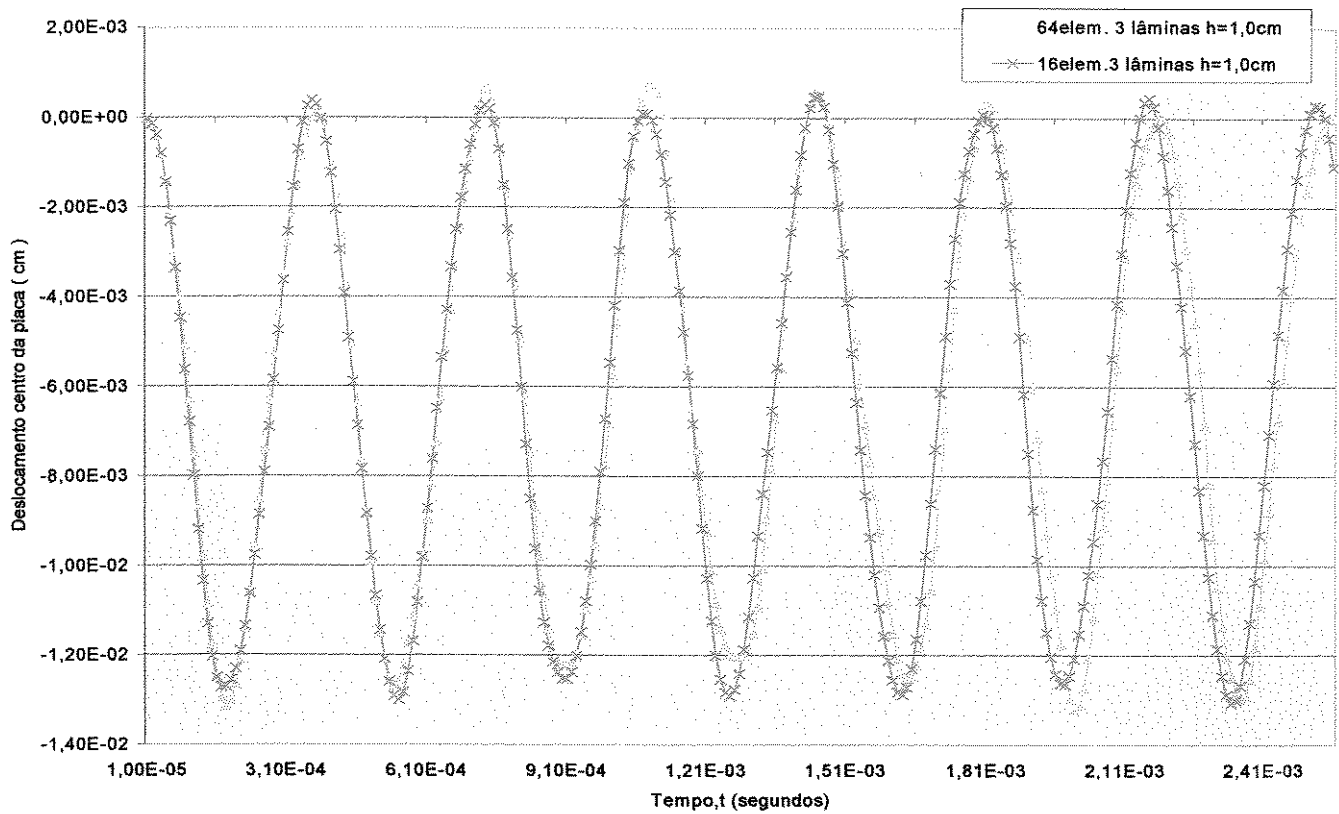


Figura 4.4.11-Deslocamento centro da placa.Malha para placa inteira. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 1 cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalos de integração de 10 microssegundos.

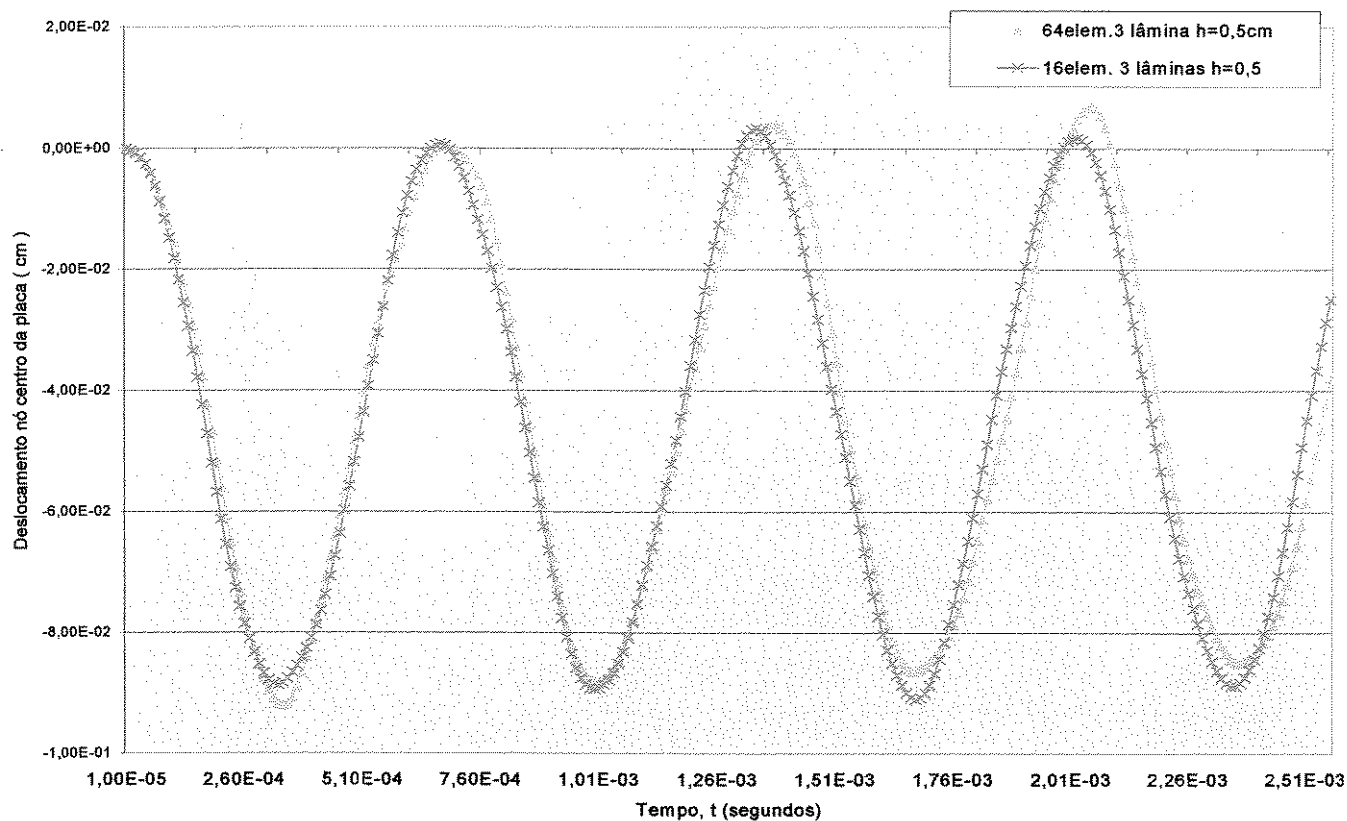


Figura 4.4.12 - Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico. Malhas placa inteira. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 0,5cm. 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

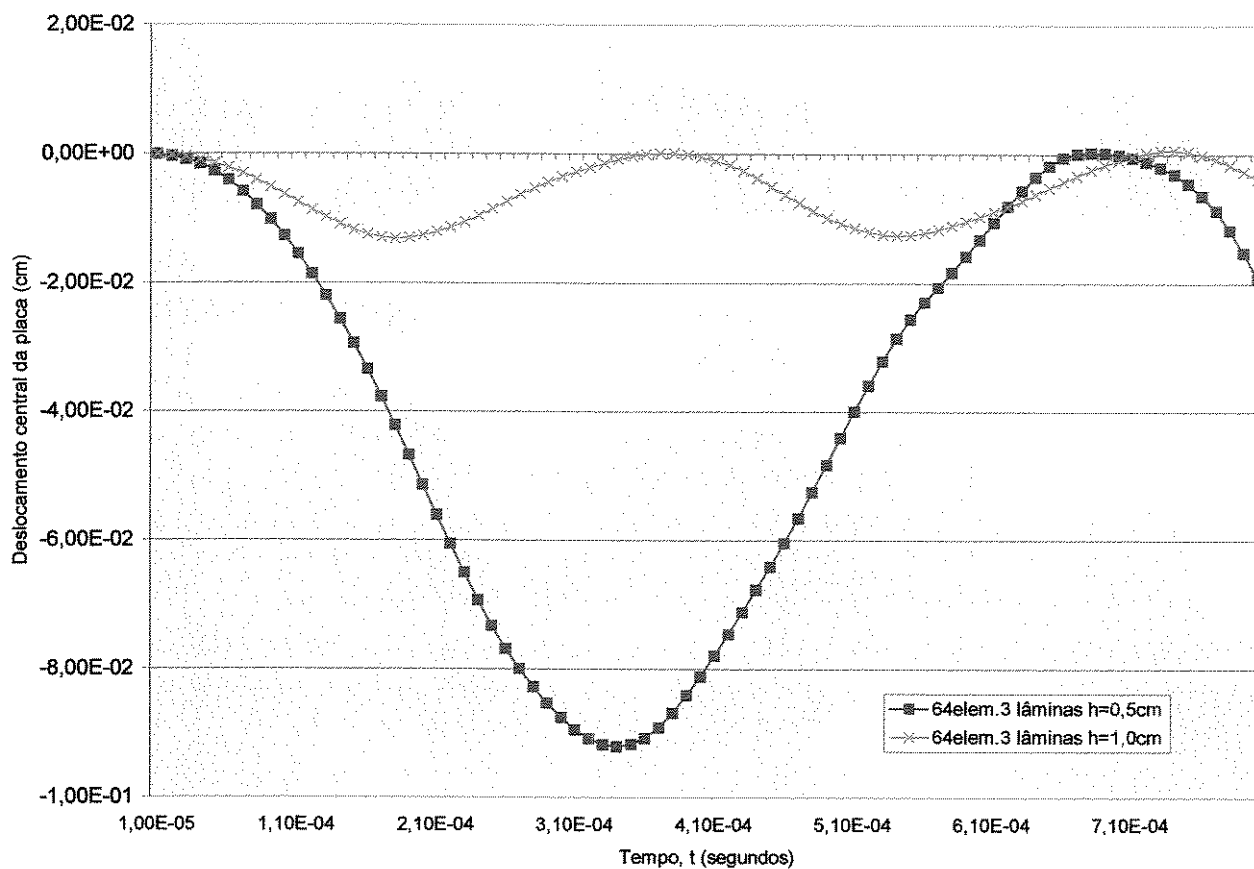


Figura 4.4.13-Deslocamento centro da placa inteira. Material ortotrópico. Malha placa inteira com 64 elementos. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas apoiadas. Espessura 1cm e 0,5cm . 3 laminados orientados em 0/90/0. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

4.5-Quarto exemplo: placa laminada engastada em duas extremidades perpendiculares e livre em duas extremidades perpendiculares.

Para a condição de contorno proposta foi usada a malha para a placa inteira discretizada com 64 elementos.

Intervalo de integração de 15 microssegundos.

Os deslocamentos obtidos para a placa laminada apresentaram períodos em padrões que se repetiram mostrando estabilidade, porém não uniformes.

No figura 4.5.14 foram incluídos os deslocamentos de uma placa monocamada de mesma geometria, material e malha apenas para observação do comportamento dos períodos para este tipo de condição de contorno.

Dados do material:

$$E_1 = 25E_2$$

$$E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,5E_2$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \text{ Nseg}^2/\text{cm}^4$$

$$a = b = 25 \text{ cm},$$

$$h = 5 \text{ cm}; 2,5 \text{ cm}; 1,0 \text{ cm}; 0,5 \text{ cm} .$$

$$q_0 = 10 \text{ N/cm}^2$$

Intervalos de tempo $\Delta t = 15$ microssegundos.

Malha de elementos finitos com 64 elementos.

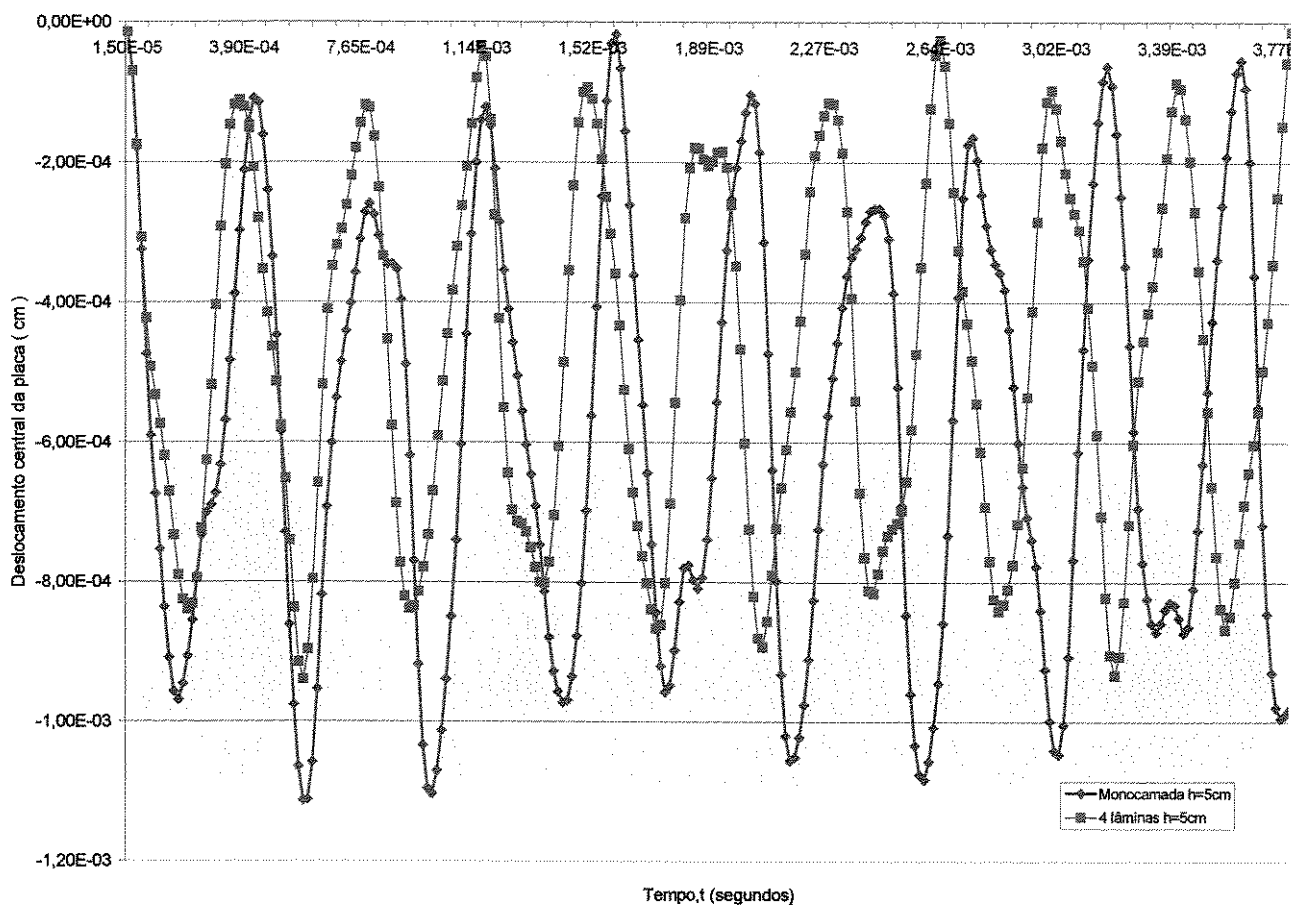


Figura 4.5.14 - Deslocamento do centro da placa. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Material ortotrópico. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0 e monocamada. Espessura de 5cm.

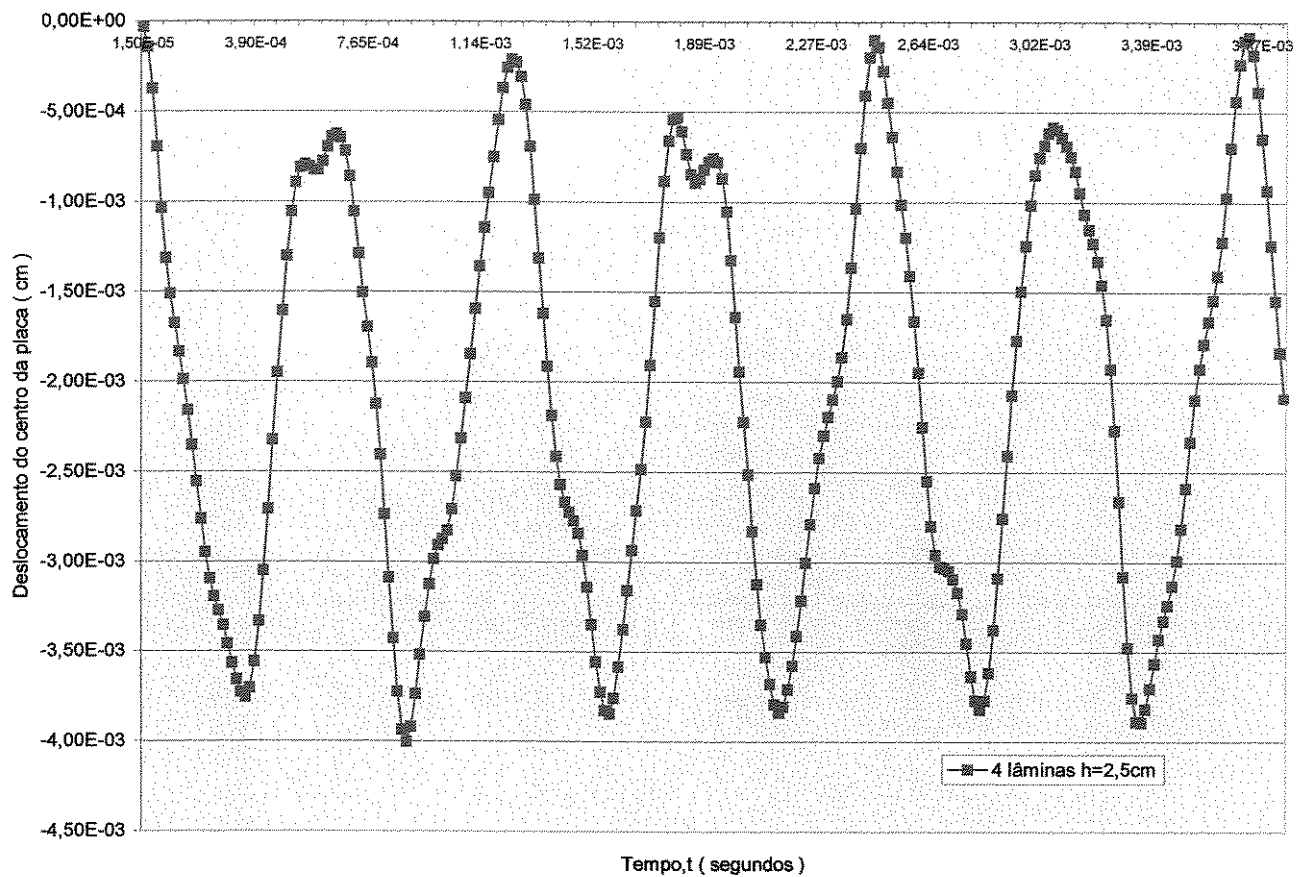


Figura 4.5.15-Deslocamento do centro da placa. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura de 2,5cm.

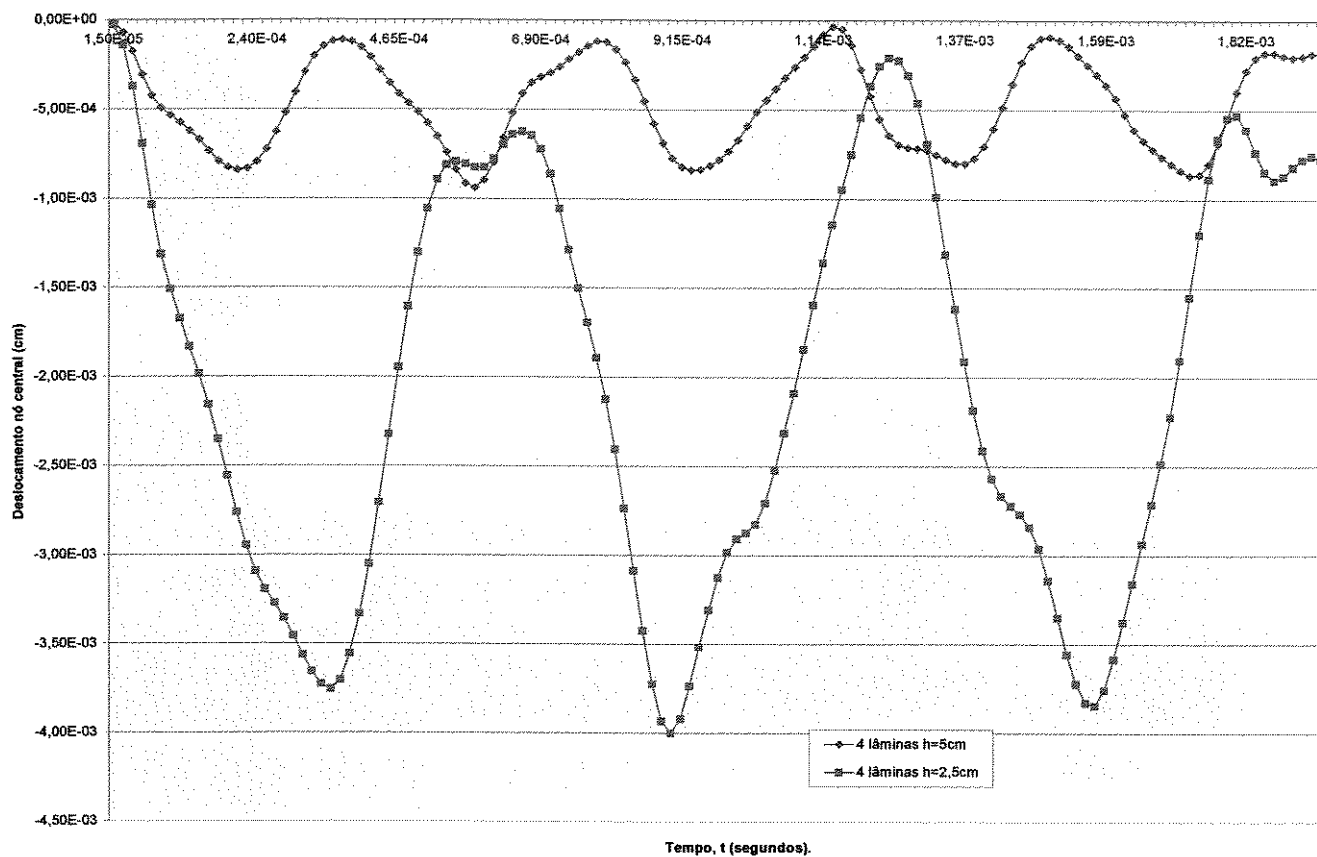


Figura 4.5.16-Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura 5cm e 2,5cm.

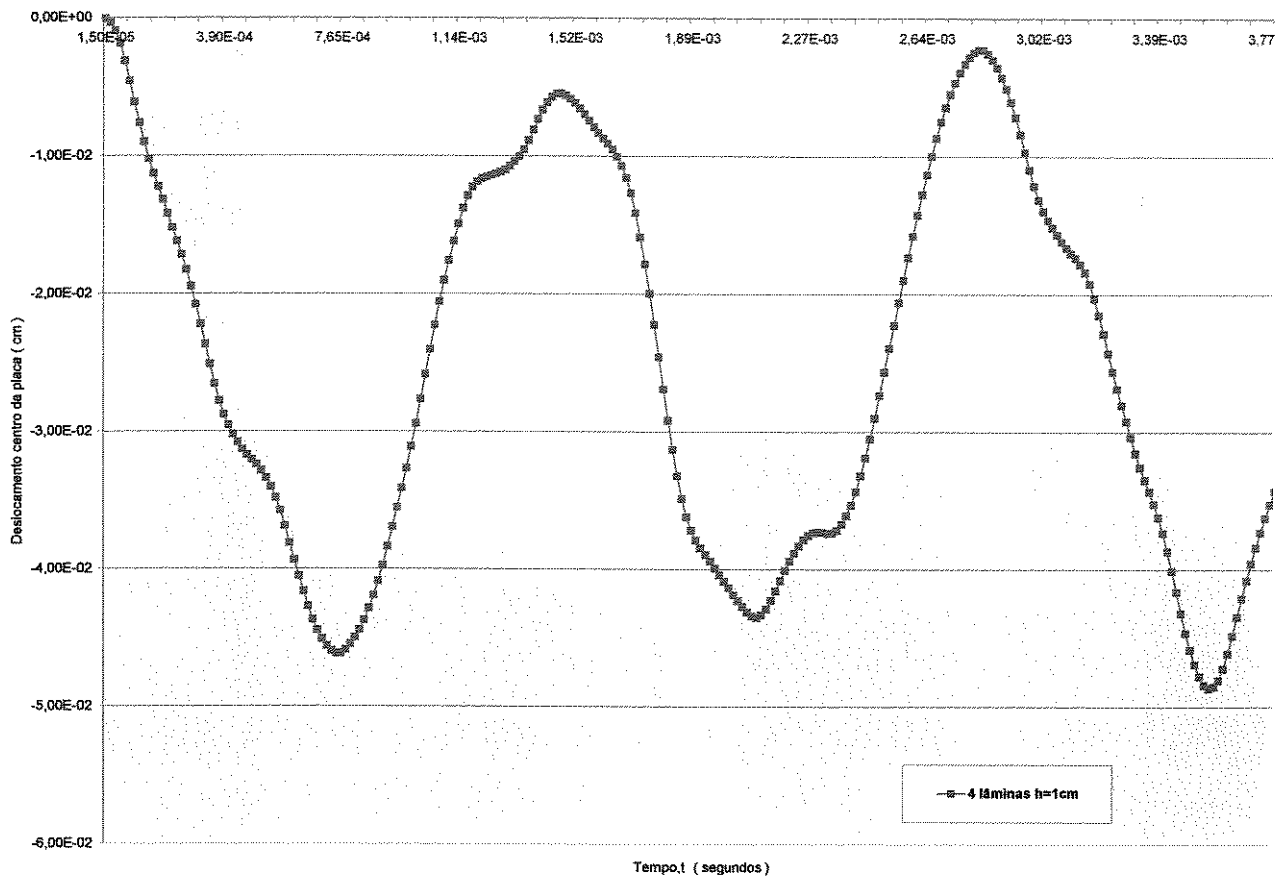


Figura 4.5.17-Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura de 1cm.

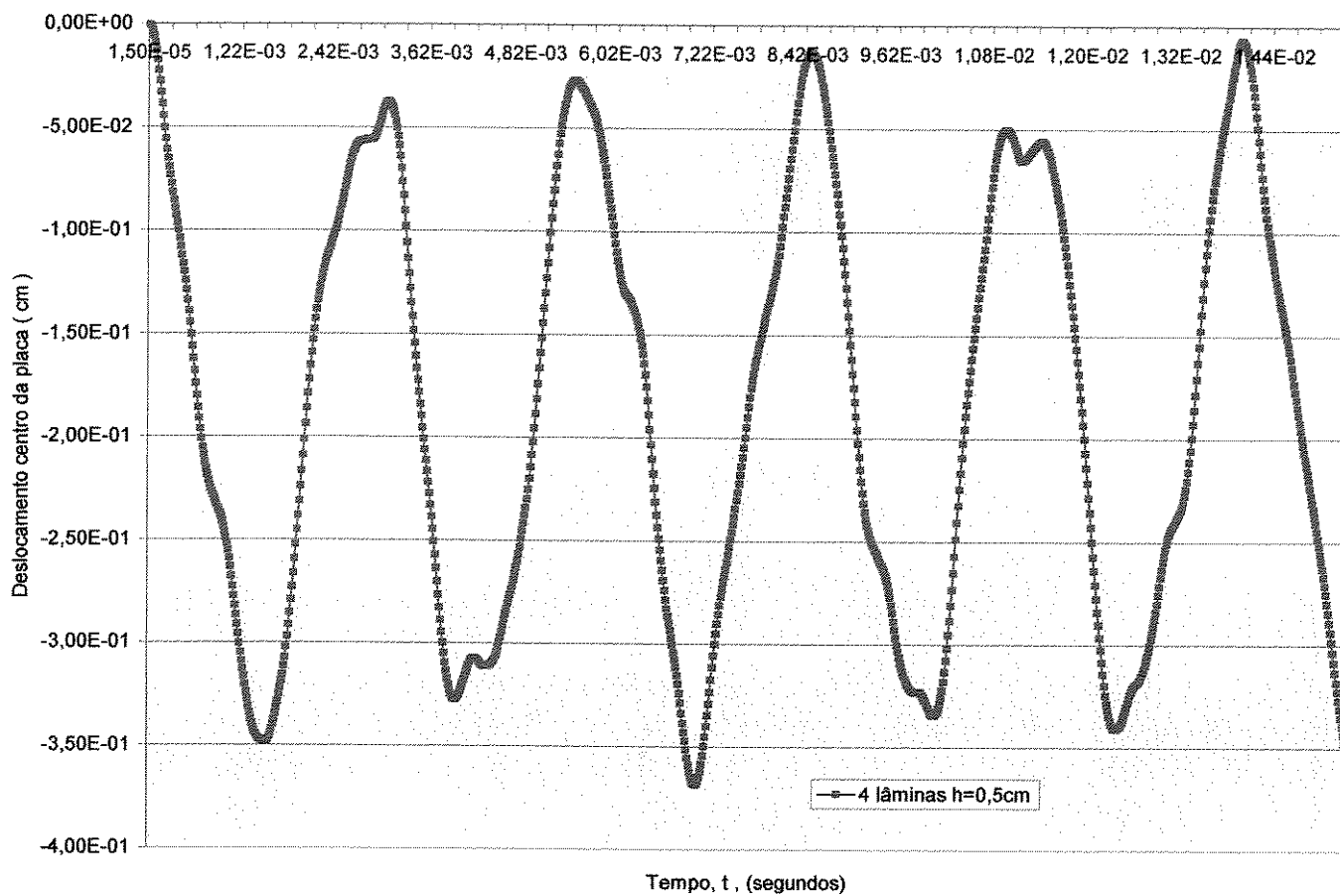


Figura 4.5.18-Deslocamento do centro da placa quadrada. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres . Intervalo de integração de 15 micro segundos . 4 lâminas orientadas 0/90/90/0 . Espessura 0,5cm.

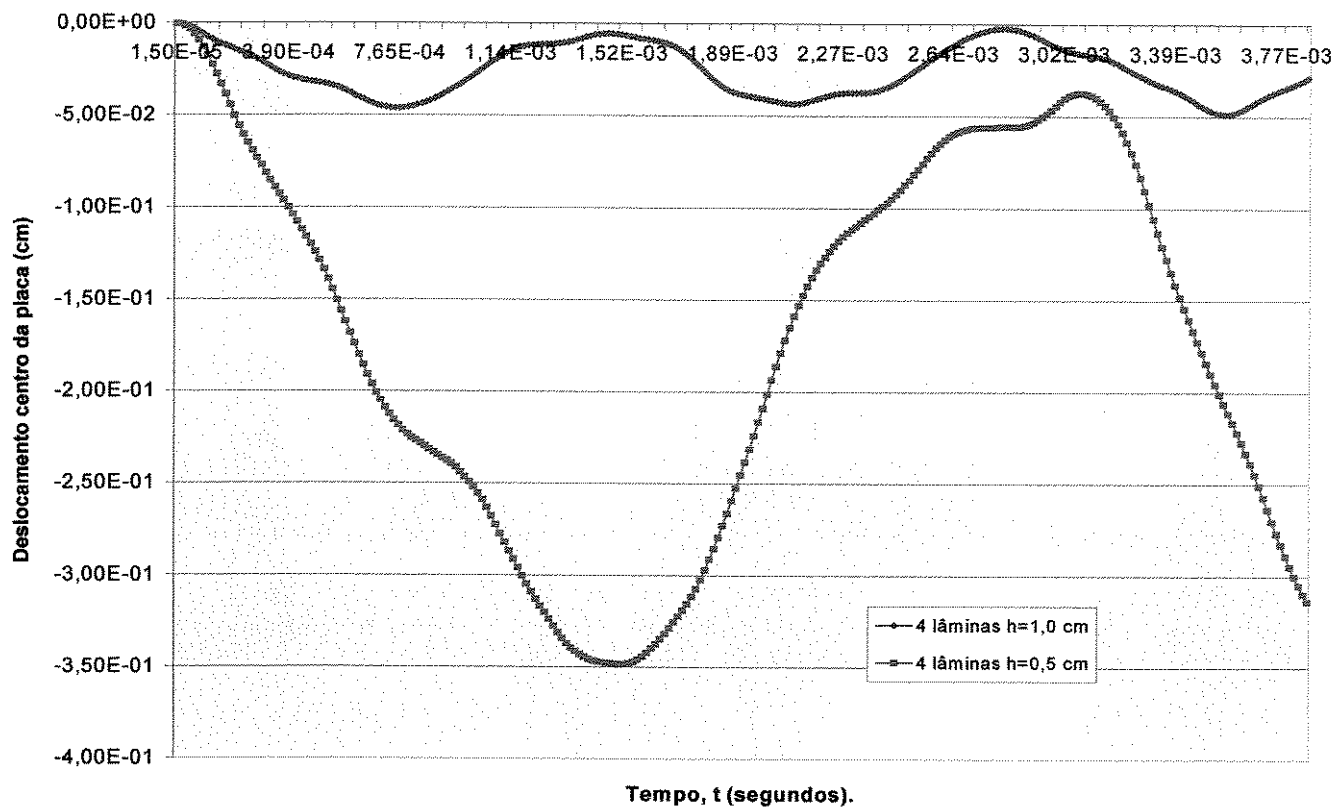


Figura 4.5.19 - Deslocamento do centro da placa. Material ortotrópico. Condição duas extremidades perpendiculares engastadas e duas livres. Intervalo de integração de 15 microssegundos. 4 lâminas orientadas 0/90/90/0. Espessura de 1,0cm de 0,5cm.

4.6-Quinto exemplo: placa laminada com extremidades apoiadas. Foram analisadas placas com quatro camadas e três camadas. Utilizando-se a malha de elementos finitos para placa inteira com 64 elementos.

Para a placa com quatro camadas orientadas 0/90/90/0 graus foi obtido bom resultado comparado com Kant[10] .

Para placas com quatro camadas de espessura de 5cm, com disposição simétrica e orientações de $\theta / 0 / 0 / \theta$ e $0 / \theta / \theta / 0$ com valores de $\theta = 90, 45$ e 30 graus, nos casos onde ocorreu o esquema cross ply comparado com o ply, houve as diferenças nos deslocamentos devido aos coeficientes de rigidez. Esquemas ply apresentam menores deslocamentos para a disposição $\theta / 0 / 0 / \theta$ e para valores de $\theta = 45$ graus.

Nas placas com três camadas de espessura de 0,5cm dispostas de forma simétricas e orientadas da forma $0 / \theta / 0$ e $\theta / 0 / \theta$ com valores de $\theta = 90, 45$ e 30 graus para os esquemas cross ply, houve maiores deslocamentos e, para esquemas ply, menores deslocamentos ocorreram para a orientação da forma $\theta / 0 / \theta$ e para $\theta = 45$ graus.

Dados do material:

$$E_1 = 25E_2$$

$$E_2 = 2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,5E_2$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \text{ Nseg}^2/\text{cm}^4$$

$$a = b = 25 \text{ cm},$$

$$h = 5 \text{ cm}; 2,5 \text{ cm}; 1,0 \text{ cm}; 0,5 \text{ cm}.$$

$$q_0 = 10 \text{ N/cm}^2$$

Intervalos de tempo $\Delta t = 5$ e 10 microssegundos.

Malha de elementos finitos com 64 elementos.

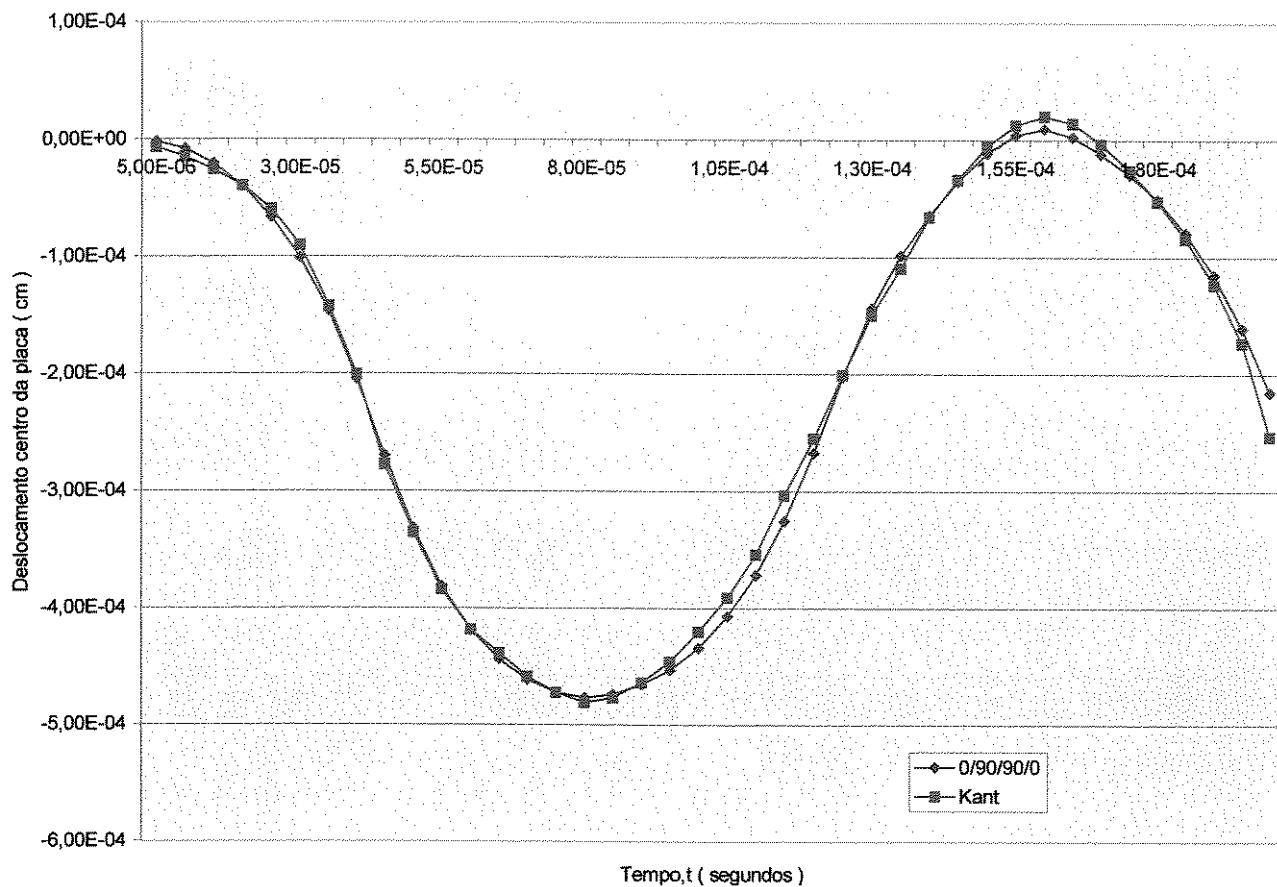


Figura 4.6.20 - Comparação dos deslocamentos no centro da placa laminada orientada 0/90/90/0 simplesmente apoiada com espessura de 5cm. Intervalos de integração de 5 microssegundos e resultado de Kant [10].

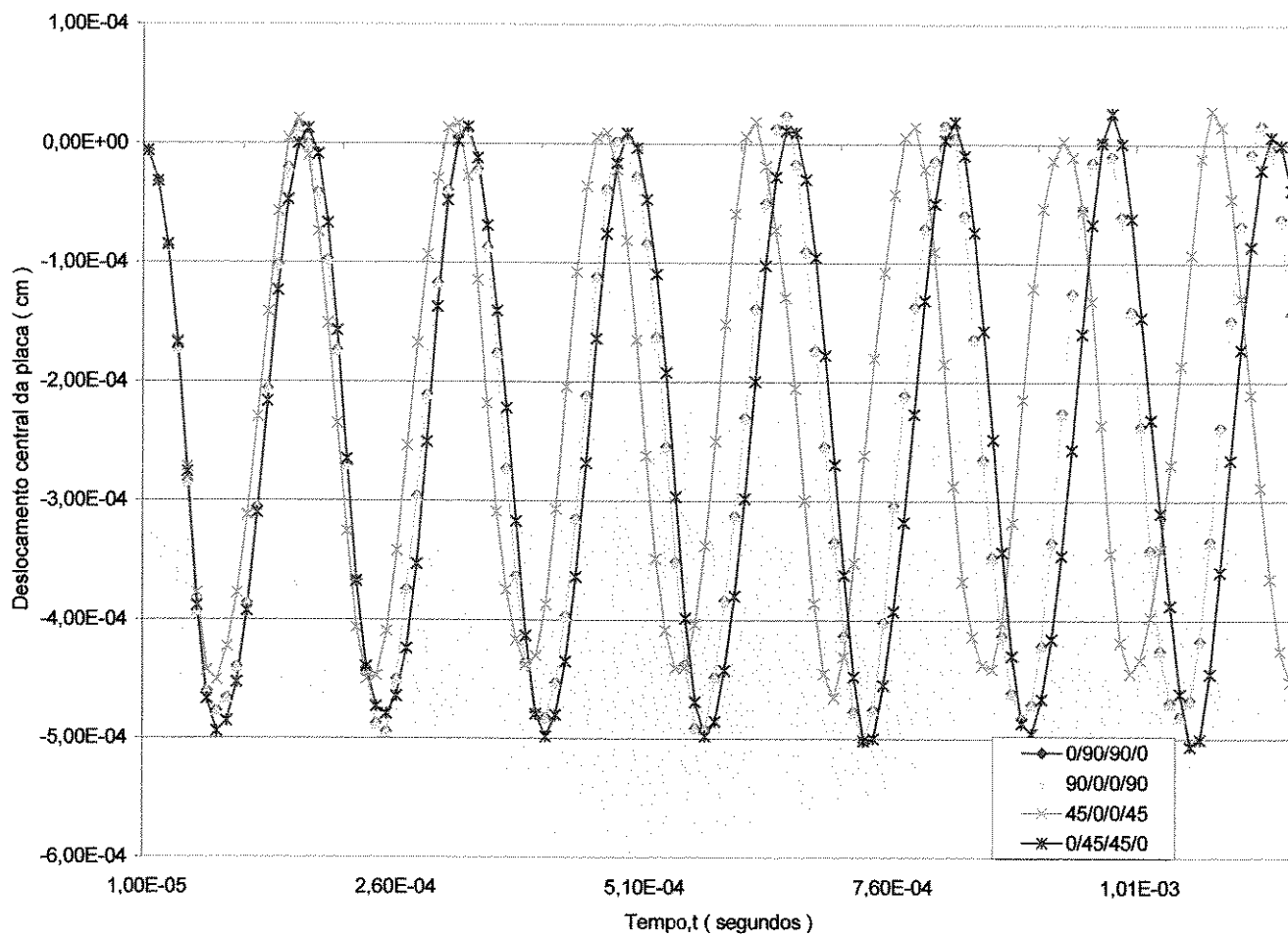


Figura 4.6.21-Placa quadrada simplesmente apoiada material ortotrópico. Espessura 5cm. Intervalo de integração de 10microssegundos. Orientação dos laminados conforme legenda.

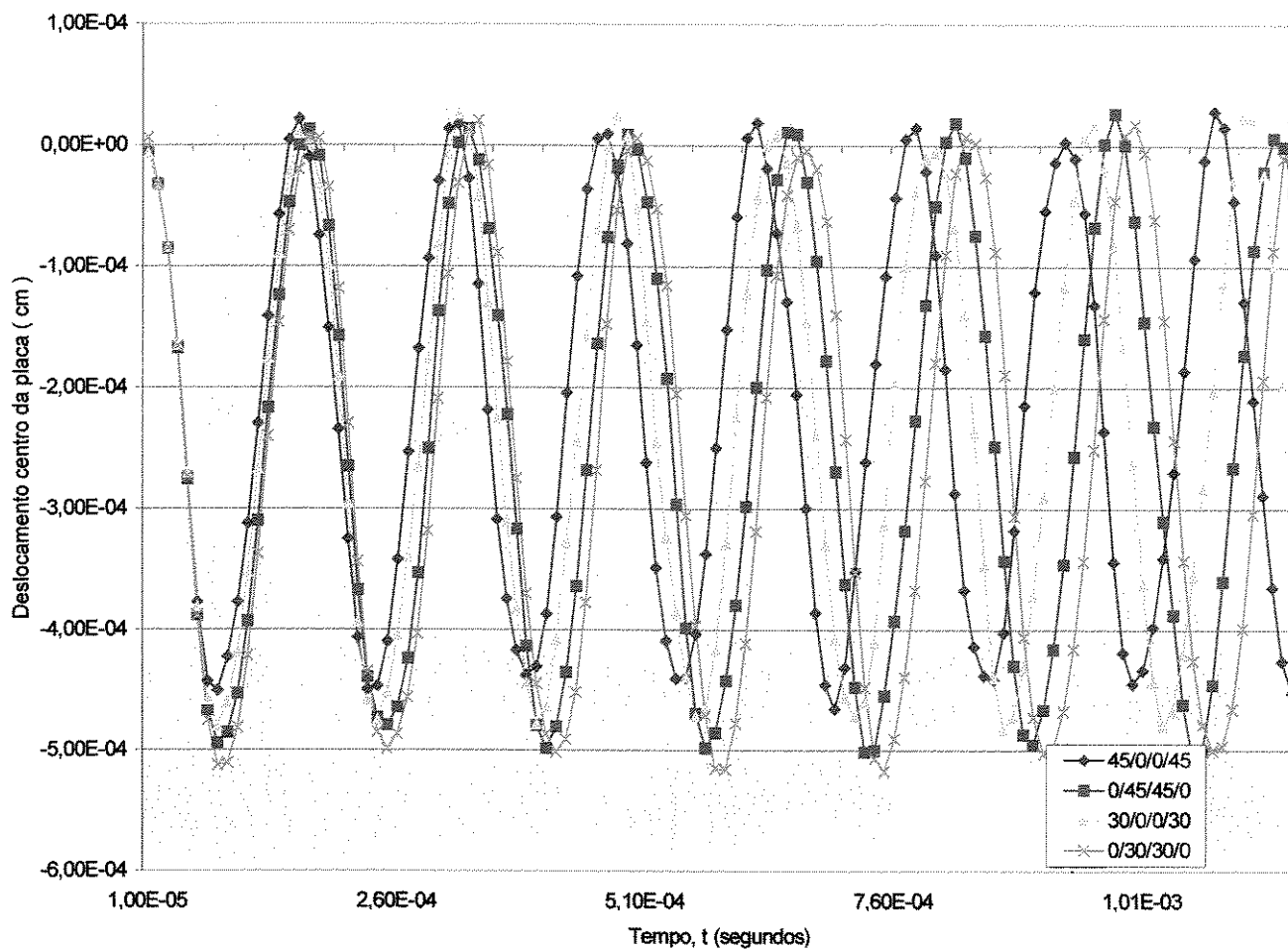


Figura 4.6.22 - Placa laminada simplesmente apoiada. Espessura 5cm. Intervalo de integração de 10 microssegundos. Orientação dos laminados conforme legenda.

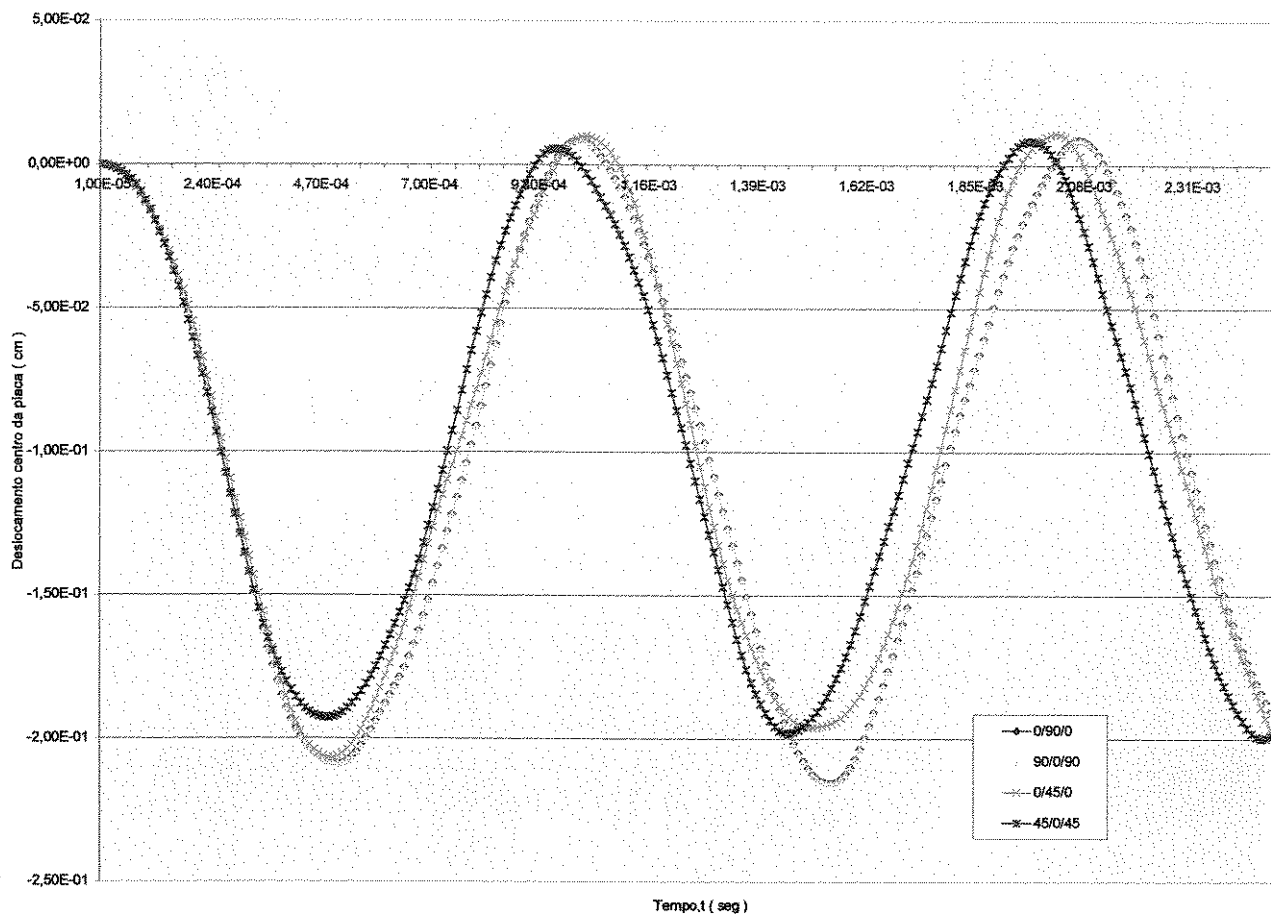


Figura 4.6.23 - Placa laminada simplesmente apoiada. Espessura 0,5cm. Orientação das lâminas conforme legenda. Intervalo de integração de 10 micro segundos.

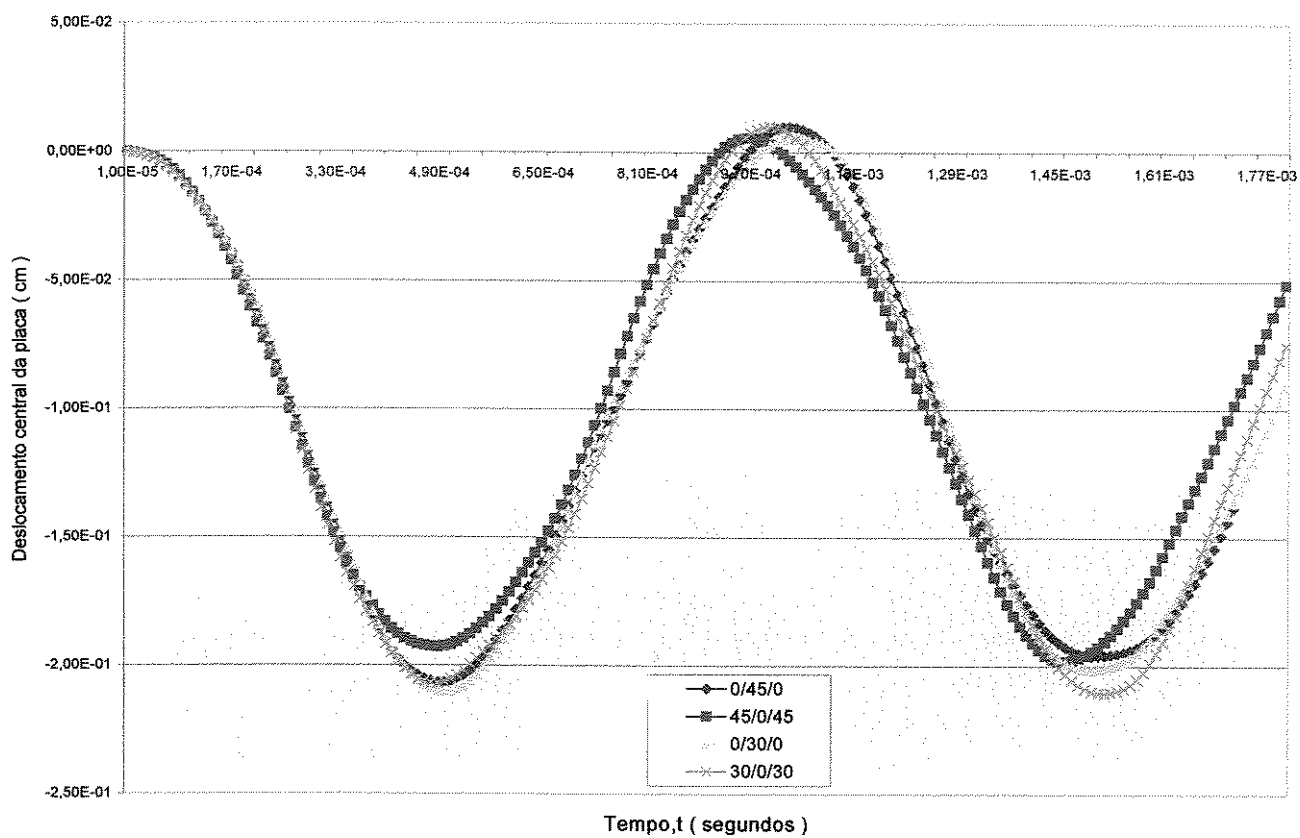


Figura 4.6.24-Placa laminada simplesmente apoiada. Espessura 0,5cm. Orientação das lâminas conforme a legenda. Intervalo de integração de 10 microssegundos.

Capítulo 5

Conclusão e Propostas para a continuidade do trabalho

5.1-Conclusão

O estudo com o objetivo de avaliar a capacidade do elemento finito proposto por Kosmatka [4] sob a solicitação dinâmica e forçada de carregamento distribuído utilizou-se do algoritmo desenvolvido por Bathe e Wilson [12], uma vez que este elemento até hoje não foi empregado na análise dinâmica forçada.

Na literatura são encontrados inúmeros trabalhos com a obtenção das frequências naturais para placas laminadas de material compósito, mas no caso da dinâmica forçada há muito pouco material disponível, e, ainda assim, referindo-se a placas quadradas totalmente apoiadas.

Este trabalho tem como um de seus objetivos apresentar resultados para placas com outras vinculações, servindo como referência para outros autores utilizarem como comparação em seus trabalhos.

Para integração direta os subintervalos de tempo formam os pontos em que as equações do movimento são resolvidas, a estabilidade e a precisão do método dependem da escolha dos valores dos subintervalos e das constantes α e β . Para o método de Newmark, um método implícito (isto é a equação do movimento é resolvida considerando o equilíbrio no subintervalo $n+1$), não são necessários subintervalos pequenos para boa precisão. Na utilização com o método dos elementos finitos a escolha dos intervalos foi baseada na revisão bibliográfica sobre o tema que confirmam a estabilidade do método. Foram utilizados subintervalos de 5, 10, 15 e 40 microssegundos para os exemplos propostos. Na comparação com a literatura e com os exemplos analisados, foi mantida a estabilidade e a precisão do método.

Materiais isotrópicos e ortotrópicos, obtidos da revisão bibliográfica, foram utilizados para os exemplos das placas em condições de monocamada e laminada tendo sido obtidos tiveram boas respostas em comparação com as publicações.

As placas de espessuras 5; 2,5; 1; e 0,5cm mantiveram as variações das formas das amplitudes dos deslocamentos similares entre si nas diversas condições de contorno e para as diferentes malhas de elementos finitos utilizadas.

Utilizaram-se malhas com 64 elementos finitos para placa inteira e um quarto de placa para casos onde existe simetria nos deslocamentos; e também malha com 16 elementos para placa inteira. Todas as malhas foram satisfatórias em comparação com a literatura e nos exemplos. Houve pouca diferença nos resultados dos deslocamentos entre si.

Efeito da orientação da laminação na amplitude foi realizado para casos de laminados simétricos com disposição ply e cross ply e para diferentes espessuras. Constatou-se o efeito das orientações dos laminados nos diversos resultados.

O elemento finito apresentou resultados satisfatórios para a solicitação proposta.

O algoritmo implementado do integrador de Newmark[7] é o apresentado por Bathe e Wilson [12], de acordo com o anexo I os resultados apresentados validam o integrador utilizado.

5.2-Propostas para continuidade do trabalho:

- Implementar cargas em movimento;
- Utilizar elemento para placas circulares e placas esconsas;
- Analisar casos de laminados não simétricos;
- Formular a análise para outros tipos de cargas como senoidais, função rampa etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]-Ribeiro, P. , Petyt, M.-*Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method*. Composite Structures, vol 46, p. 197-208, 1999
- [2]-Tápia, L. G. S. - *Análise de placas Laminadas de Materiais Compósitos pelo Método dos Elementos Finitos* . Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil. 1998.
- [3]-Cassiano, J.-*Análise dinâmica de placas laminadas de materiais compósitos pelo Método dos Elementos Finitos*.Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil. 2002.
- [4]-Kosmatka, J. B. – *An accurate shear-deformable six-node triangular plate element for laminated composite structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering , vol. 37, p. 431 – 455, 1994.
- [5]-Assan, A. E. – *Free Vibration Analysis of Mindlin Plates Resting on Winkler Foundation*. Iberian Latin American Congress on Computational Methods –XXV CILAMCE, de 09 – 12/11/2004, Recife, PE.
- [6]-Assan, A. E. – *Free Vibration of Laminated Composite Plates Resting on Winkler Foundation*. The Seventh International Conference on Computational Structures Technology, de 07 - 09/09/2004, Lisboa, Portugal.
- [7]-Newmark, N. M. – *A method of computation for structural dynamics*. J.Engng Mech. Div., vol 85, p . 67-94 . Julho/1959 .
- [8]-Soni, S. R. e Rao C. L. A – *Vibrations of orthotropic rectangular plates under inplane forces*. Computer & Structures , vol 4, p . 1105-1115 . 1974 .

- [9]-Reddy J. N. - *On the solutions to forced motions of rectangular composite plates* . Journal of Applied Mechanics, vol 49, p . 403-408 . 1982 .
- [10]-Kant, T. , Varaiya J. H. e Arora, C. P. – *Finite Element transient analysis of composite and sandwich plates based on refined theory and implicit time integration schemes* . Computers Structures , vol . 36 , nº 3, p . 401-420 , 1990 .
- [11]-Katsikadelis, J. T. – *A boundary element solution to the vibration problem of plates* . Journal of Sound and Vibration ,vol 141 . p . 313-322 . 1990 .
- [12]-Bathe, K. e Wilson, E. L. – *Numerical Methods in Finite Element Analysis* . Prentice-Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey – Parte III – Capítulo 8 – p.322-326. 1976.
- [13]-Reddy, J. N. e Mook, D. J.-*Transient analysis of layered composite plates using a shear deformation theory* – Computational Methods and Experimental Measurements - Proceedings of International Conference. Washington D. C, July 1982- Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1982, A Computational Mechanics Centre Publication.
- [14]-Biggs, J. M.-Introduction to Structural Dynamics-Mc Graw-Hill, Inc-1964
- [15]- Paccola, R.R.-Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sob base elástica, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil 2001.
- [16]-Souza, R. F.-Estudo da Teoria de Placas Multicamada e Proposta de uma Teoria Geral Para Material Ortotrópicos: Implementação e Resultados Numéricos em Programa (PZ) Orientado a Objetos C++, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil. 2004.
- [17]-Latheswary, S. , Valsarajan , K.V. , Sadasiva Rao, Y.V.K. - Dynamic response of moderately thick composite plates. Journal of Sound and Vibration, vol 170. p. 417-426. 2004

- [18]-Nayak, A. K., Shenoi, R. A. , Moy, S.S.J.-Transient response of composite sandwich plates. Composite Structures, vol 64, p. 249-267- 2004
- [19]-M.Gerardin e D. Rixen-Mechanical Vibration, Theory and Application to Structural Dynamics-Second Edition-John Willey & Sons-1997.
- [20]-Reddy, J. N.-Mechanics of Laminated Composite Plates-Theory and Analysis-CRC Press-1997.
- [21]-Bhagwan D. A., Lawrence J. B.-Analysis and Perfomance of Fiber Composites- John Wiley & Sond, Inc-1990
- [22]-Gürdal, Z., Haftka R. T., Hajela, P.-Design and Optimization of Laminated Composite Materials-John Wiley & Sond, Inc-1999
- [23]-Hollaway, L.-Polymer Composites for Civil and Structural Engineering-Blachie Academic & Professional, Chapman & Hall, 1993
- [24]-Hughes, T. J. R.- The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis-Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs,1987

ANEXO

Bathe e Wilson [12] apresentam os deslocamentos obtidos da resolução do sistema:

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t}$$

onde:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

As condições iniciais utilizadas são:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \dot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ddot{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Adotando $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,25$ e intervalo $\Delta t = 0,28$

As constantes de integração são:

$$a_0 = 51,0, \quad a_1 = 7,14, \quad a_2 = 14,3, \quad a_3 = 1,00$$

$$a_4 = 1,00, \quad a_5 = 0,00, \quad a_6 = 0,14, \quad a_7 = 0,14;$$

Os resultados dos deslocamentos em Bathe e Wilson [12] foram:

Incremento de tempo $\Delta t = 0,28$	Deslocamento U_t
0,28	0,00673
0,56	0,05040
1,12	0,18900
1,40	0,48500
1,68	0,96100
1,96	1,58000
2,24	2,2300
2,52	2,7600
2,80	3,0000
3,08	2,8500
3,36	2,2800
3,64	1,4000
3,92	0,3640

O sistema resolvido pelo algoritmo utilizado para o presente trabalho obteve as seguintes constantes de integração :

$$a_0 = 51.0204$$

$$a_1 = 7.1429$$

$$a_2 = 14.2857$$

$$a_3 = 1.0000$$

$$a_4 = 1.0000$$

$$a_5 = 0.0000$$

$$a_6 = 0.1400$$

$$a_7 = 0.1400$$

Os resultados dos deslocamentos obtidos foram:

$$\text{INCREMENTO} = 0.2800000\text{E}+00 \quad U = 0.6733497\text{E}-02$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.5600000\text{E}+00 \quad U = 0.5044805\text{E}-01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.8400000\text{E}+00 \quad U = 0.1893804\text{E}+00$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.1120000\text{E}+01 \quad U = 0.4845567\text{E}+00$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.1400000\text{E}+01 \quad U = 0.9613136\text{E}+00$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.1680000\text{E}+01 \quad U = 0.1580529\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.1960000\text{E}+01 \quad U = 0.2232811\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.2240000\text{E}+01 \quad U = 0.2760701\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.2520000\text{E}+01 \quad U = 0.3003509\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.2800000\text{E}+01 \quad U = 0.2850493\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.3080000\text{E}+01 \quad U = 0.2284025\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.3360000\text{E}+01 \quad U = 0.1396784\text{E}+01$$

$$\text{INCREMENTO} = 0.3640000\text{E}+01 \quad U = 0.3752039\text{E}+00$$

Bathe e Wilson [12] usam para comparação os resultados dos deslocamentos para a solução por superposição modal:

Incremento de tempo $\Delta t = 0,28$	Deslocamento U_i
0,28	0,006
0,56	0,045
1,12	0,170
1,40	0,520
1,68	1,050
1,96	1,720
2,24	2,338
2,52	2,861
2,80	3,052
3,08	2,801
3,36	2,130
3,64	1,157
3,92	0,379

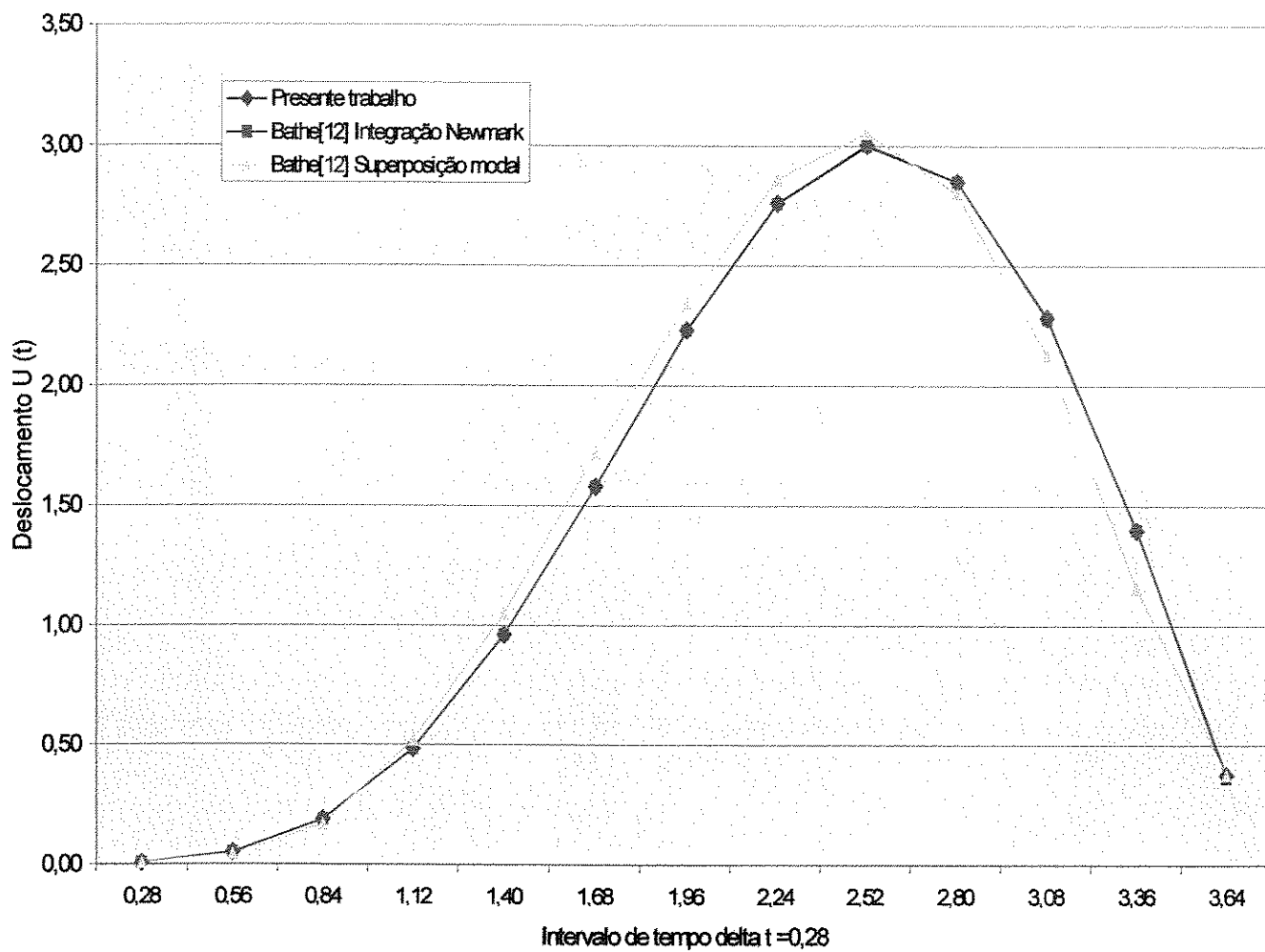


Figura Anexo -Deslocamentos obtidos da resolução do sistema proposto por Bathe e Wilson [12]