

C₁

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO

**O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO APLICADO
A PROBLEMAS DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO**

ENG.º CIVIL TIAGO LUÍS DUARTE FORTI
ORIENTADOR: PROF. DR. PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO
CO-ORIENTADORA: PROFª DRA. SÔNIA MARIA GOMES

CAMPINAS
2005

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
CÉSAR LATTES
DESENVOLVIMENTO DE COLEÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO

**O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO APLICADO
A PROBLEMAS DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO**

ENG.º CIVIL TIAGO LUÍS DUARTE FORTI

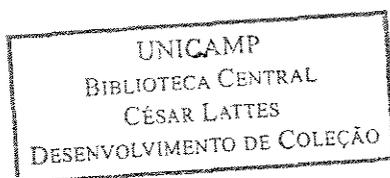
Texto apresentado à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na área de concentração de Estruturas.

Atesto que essa é a versão definitiva da
dissertação/tese

Prof. Dr.

Matrícula

Philippe Deslos
24539 - 91 1



CAMPINAS
2005

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F776m Forti, Tiago Luís Duarte
O método de Galerkin descontínuo aplicado a
problemas de convecção-difusão / Tiago Luís Duarte
Forti.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Philippe Remy Bernard Devloo; Sônia
Maria Gomes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
Urbanismo.

1. Galerkin, Métodos de. 2. Método de elementos
finitos. 3. Convecção. 4. Difusão. I. Devloo, Philippe
Remy Bernard. II. Gomes, Sônia Maria. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. IV. Título.

Título em Inglês: The discontinuous Galerkin method applied to convection-diffusion
problems

Palavras-chave em Inglês: Discontinuous Galerkin; Finite element method;
Convection; Diffusion

Área de concentração: Estruturas.

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Philippe Remy Bernard Devloo, Francisco Antônio Menezes e
Eduardo Gomes Dutra do Carmo.

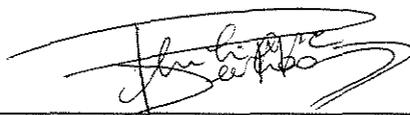
Data da defesa: 22/08/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

**O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO APLICADO A PROBLEMAS DE
CONVECÇÃO-DIFUSÃO**

TIAGO LUÍS DUARTE FORTI

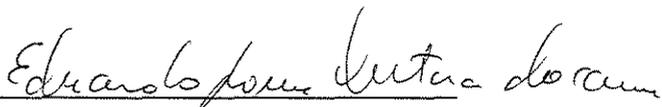
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por



Prof Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Presidente e orientador
FEC-UNICAMP

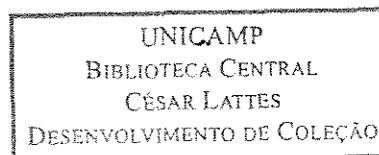


Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes
FEC-UNICAMP



Prof. Dr. Eduardo Gomes Dutra do Carmo
COPPE-UFRJ

Campinas, 22 de agosto de 2005



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
CÉSAR LATTES
DESENVOLVIMENTO DE COLEÇÃO

Ao meu pequeno Luís Filipe.

AGRADECIMENTOS

A minha querida esposa Nadia a quem agradeço o amor, compreensão, carinho e apoio.

A meus pais, irmãos e avós.

Aos professores Philippe Devloo e Sônia Gomes pela atenção, dedicação, orientação e amizade no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do LabMeC.

A todos os professores e funcionários da Unicamp que contribuíram de forma direta e indireta no desenvolvimento deste trabalho.

À Fapesp/Embraer e à V&M do Brasil pelas bolsas de estudo concedidas.

Ao Cenapad pelo apoio operacional.

Resumo

Este trabalho dedica-se ao estudo do método de Galerkin descontínuo aplicado a problemas de convecção-difusão. O método de Galerkin descontínuo (MGD) é um variante do método de elementos finitos tradicional (MEF) em que as funções do espaço de interpolação são descontínuas entre elementos. A motivação para o estudo do MGD vem da mecânica dos fluidos. Muitos problemas de mecânica dos fluidos apresentam solução com fortes gradientes ou descontinuidades. São os problemas de choque e de camada limite. Nessas regiões de forte gradiente ou descontinuidades, o MEF apresenta oscilações na solução numérica. Essas oscilações tornam o método pouco estável, podendo-se obter soluções não-físicas como pressão negativa. O método de Galerkin descontínuo permite evitar ou reduzir essas oscilações. Várias formulações são disponíveis na literatura e algumas delas são tratadas neste trabalho, em especial a formulação de Baumann e Oden. Propõe-se a combinação dos métodos de elementos finitos e Galerkin descontínuo em uma mesma simulação, obtendo-se as vantagens de cada um deles.

Abstract

The present work is dedicated to study the discontinuous Galerkin method (DGM) applied to convection-diffusion problems. The DGM is a variant of the so-known finite element method (FEM). In DGM the interpolation space is formed by discontinuous functions between elements, called a broken-space. The motivation of this work comes from fluid mechanics. Many problems in fluid mechanics have discontinuous solutions or high-gradient solutions. They are shock problems or boundary layer problems. On regions of high-gradient or around discontinuities the FEM presents oscillations in the numeric solution. It makes the FEM unstable and it is possible to obtain non-physical solutions like negative pressures. DGM allows to avoid or reduce these oscillations. Some formulations available in the literature are tested in this work, specially that proposed by Baumann and Oden. In this work, we propose a formulation which combines FEM and DGM in the same simulation obtaining the advantages of both methods.

Lista de Figuras

5.1	Funções de base uni-dimensionais	17
5.2	Funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$	17
5.3	Exemplo de função de base de elementos finitos	18
5.4	Repetição da figura 5.1: Funções de base uni-dimensionais	19
7.1	Ilustração de u^- e u^+	39
9.1	<i>Connects</i> dos elementos quadrilátero e triângulo	57
9.2	Elementos quadriláteros vizinhos	57
9.3	Função de aresta de ordem polinomial 2 de dois elementos vizinhos	58
9.4	Função de aresta de ordem polinomial 2 de dois elementos	58
9.5	Elementos contínuo, descontínuos e interfaces	59
10.1	Solução analítica do problema	66
10.2	Número de equações para elementos finitos e Galerkin descontínuo	68
10.3	Comparação entre elementos finitos e Galerkin descontínuo de Baumann	69
10.4	Comparação entre elementos finitos e GEM	70
10.5	Comparação entre GEM e Galerkin descontínuo de Baumann	71
10.6	Comparação entre Galerkin descontínuo de Baumann com e sem penalidade	73
10.7	Comparação entre GEM com e sem penalidade	74
10.8	Comparação entre GEM com e sem penalidade	75
10.9	Comparação entre elementos finitos e GEM com forte penalidade	76
10.10	Enunciado do problema	77
10.11	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	78
10.12	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	78
10.13	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	79
10.14	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	79
10.15	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	80
10.16	Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante	80

LISTA DE FIGURAS

10.17	Enunciado do problema	81
10.18	Evolução da solução para 64 elementos e $p = 2, 3, 4$ e 5	82
10.19	Evolução da solução para 64 elementos e $p = 2, 3, 4$ e 5	83
10.20	Solução de elementos finitos com SUPG (a) e sem (b)	84
10.21	Solução de Galerkin descontínuo de Baumann.	84
10.22	Solução de Galerkin descontínuo de Baumann com penalidade	85
10.23	Soluções analíticas para a) $A = 1$, b) $A = 0.1$, c) $A = 0.01$ e d) $A = 0.001$	86
10.24	Malha para camada limite	87
10.25	Malha com elementos contínuos e descontínuos	88
10.26	Solução camada limite - Elementos finitos contínuo	89
10.27	Solução camada limite - Galerkin descontínuo de Baumann	90
10.28	Solução camada limite - Elementos finitos contínuo e descontínuo	91
10.29	Taxa de convergência h	92
10.30	Taxa de convergência h	93
10.31	Taxa de convergência h	94
10.32	Resumo da taxa de convergência	95
11.1	Base descontínua unidimensional - ordem 2	100
11.2	Base descontínua bidimensional bilinear	100

Sumário

1	Introdução	1
2	Objetivos	3
3	Revisão Bibliográfica	5
3.1	Motivação	5
3.2	Conceitos Gerais	7
3.3	Métodos de Elementos Finitos e de Galerkin Descontínuo	9
3.4	Ferramentas de Programação	10
4	Metodologia	13
5	Método de Elementos Finitos	15
5.1	Formulação Variacional	15
5.2	Aproximação de Galerkin	16
5.3	Funções de Base	17
5.4	Particionamento do Domínio	17
5.5	Construção do Problema Algébrico	18
6	Formulação Variacional do Problema Elíptico	21
6.1	Formulação Variacional Clássica	22
6.2	Formulação Híbrida	22
6.3	Formulações de Galerkin Descontínuo	30
6.3.1	Formulação de Oden, Baumann e Babuska - Assimétrica	32
6.3.2	Formulação Variacional Simétrica - GEM	33
6.3.3	Formulação Variacional com Termo de Penalização	34
6.3.4	Comparação dos Métodos	35
7	Formulação do Problema Hiperbólico Linear	37

8	Formulação de Convecção-Difusão	41
8.1	Difusão Artificial SUPG	42
9	Método de Galerkin Descontínuo	47
9.1	Aproximação de Galerkin	48
9.1.1	Problema Elíptico	49
9.1.2	Problema Hiperbólico	52
9.1.3	Termo de Penalização	53
9.1.4	Problema de Convecção-Difusão	54
9.2	Implementação Computacional	55
9.2.1	Ambiente PZ	55
9.2.2	Geometria e Espaços de Interpolação	55
9.2.2.1	TPZConnect	56
9.2.3	Formulação Variacional	59
9.2.3.1	TPZMatPoisson3d	60
9.2.4	Algébrico	62
9.2.5	Pós-processamento	63
10	Resolução de Problemas	65
10.1	Problema Elíptico	65
10.1.1	Descrição do Problema	65
10.1.2	Análise dos Autovalores da Matriz de Rigidez	66
10.1.3	Resultados	67
10.2	Problema de Convecção-Difusão	76
10.3	Problema de Convecção-Difusão - Camada Limite	85
10.3.1	Descrição do Problema	85
10.3.2	Resultados	87
10.3.2.1	Refinamento ao Longo da Camada Limite	87
10.3.2.2	Combinação de Elementos Finitos e Galerkin Descontínuo	87
11	Conclusões e Considerações Finais	97
	Referências Bibliográficas	101

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho dedica-se ao estudo do método de Galerkin descontínuo aplicado a problemas de convecção-difusão. São adotadas formulações variacionais disponíveis na literatura e implementadas no ambiente de programação de elementos finitos PZ. Testes são utilizados para comparação de resultados e taxas de convergência com o disponível em literatura.

O ponto de partida é o método de elementos finitos. O método de elementos finitos tem tido sucesso porque é abrangente e pode ser aplicado em diversos domínios da engenharia e da matemática. Sua sistemática de solução, a partir de uma formulação variacional, é muito parecida, ou idêntica, para muitos tipos de problemas. Isso permite sua aplicação em inúmeras áreas: mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, eletro-magnetismo, térmica etc.

Uma aplicação do método de elementos finitos é a simulação de fenômenos de mecânica dos fluidos. Tais problemas têm sido tratados há bastante tempo por elementos finitos. Entretanto, em problemas com camada limite, o método tem apresentado soluções com qualidade insatisfatória. Em regiões de camada limite, as soluções de elementos finitos apresentam oscilações, não captando corretamente o fenômeno físico.

O método de Galerkin descontínuo é uma variação do método de elementos finitos em que a continuidade da solução entre partições do domínio não é imposta através do espaço de interpolação, mas de forma fraca, através de termos integrais - sobre o contorno dos elementos - na formulação variacional. O método é uma área ativa de pesquisa, podendo-se citar [2, 7, 9, 13] entre outros.

Alguns pesquisadores têm estudado a aplicação do método de Galerkin descontínuo em problemas de mecânica dos fluidos, com o intuito de suprir as deficiências do método de elementos finitos em camadas limites. O objetivo deste trabalho é estudar essa aplicação do método de Galerkin descontínuo, monitorando a qualidade das soluções encontradas e as taxas de convergência do método. Serão adotados problemas de convecção-difusão linear como problema modelo para o estudo.

A convecção será tratada com um esquema do tipo *UpWind* e a difusão será modelada com diferentes formulações descontínuas, que serão comparadas.

O presente trabalho é desenvolvido no LabMeC - Laboratório de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP. O LabMeC desenvolve um ambiente de programação de elementos finitos denominado PZ. Seguindo a filosofia de orientação a objetos, o PZ tem se mostrado robusto e abstrato o suficiente para suportar diversas pesquisas. Sua maior qualidade é a abstração de conceitos como formulação variacional, particionamento geométrico do domínio, espaços de interpolação e resolução de problemas algébricos em pacotes bem distintos. Essa separação permitiu a integração de espaços de interpolação descontínuos e da formulação variacional de Galerkin descontínuo. Desse modo, todas as funcionalidades geométricas e algébricas do ambiente PZ são disponíveis também para os trabalhos de Galerkin descontínuo.

Já foram desenvolvidos no LabMeC trabalhos de Galerkin descontínuo em mecânica dos fluidos [4, 18], sempre com enfoque na convecção. Este é o primeiro trabalho de Galerkin descontínuo desenvolvido no LabMeC com enfoque no termo de difusão. O objetivo deste trabalho, portanto, enquadra-se no projeto de desenvolvimento do ambiente PZ aplicado a problemas de mecânica dos fluidos, contribuindo com a implementação e avaliação das técnicas de Galerkin descontínuo aplicadas a problemas elípticos. Com enfoque no termo elíptico, este trabalho propõe a análise da técnica de Galerkin descontínuo em problemas de convecção-difusão com convecção dominante.

Capítulo 2

Objetivos

A proposta deste trabalho é avaliar a qualidade da formulação do método de Galerkin descontínuo para problemas de convecção-difusão, em que a convecção é dominante. O LabMeC já tem experiência em problemas de convecção pura, em especial aquela descrita pelas equações de Euler.

Nesse contexto, este trabalho é o primeiro realizado no laboratório que leva em conta o termo de difusão dos problemas de mecânica dos fluidos.

O método de Galerkin descontínuo é robusto na aplicação em problemas convectivos puros. Propõe-se o estudo desse método no tratamento de fenômenos que incluem a difusão juntamente com a convecção.

A motivação para o estudo de Galerkin descontínuo vem do fato de que o método de elementos finitos apresenta deficiências em modelagens com camada limite, apresentando oscilações nessas regiões. Uma vez que o método de Galerkin descontínuo é robusto em problemas convectivos puros, propõe-se o seu estudo com a inclusão do fenômeno de difusão à convecção.

Devem ser atingidos os objetivos:

- comparação de diversas formulações para operadores elípticos;
- adequação do código para simulações contínuas-descontínuas;
- avaliação da qualidade da aproximação em camadas limites;
- avaliação numérica da taxa de convergência.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica abrange o estudo de formulações variacionais, dos métodos de elementos finitos e de Galerkin descontínuo, da linguagem de programação C++, da filosofia de programação orientada a objetos e do ambiente de programação de elementos finitos PZ.

3.1 Motivação

A motivação para o estudo das equações de convecção-difusão se baseia na ampla aplicação dessas equações, desde a problemas de mecânica dos fluidos até a problemas de dinâmica de populações.

Segundo Clovis Maliska [12], “o escoamento de fluidos com ou sem transferência de calor está envolvido praticamente em todos os processos de produção de energia, nos fenômenos ambientais, nos equipamentos térmicos, na engenharia aeronáutica e aeroespacial, na engenharia de reatores, na bioengenharia etc”.

Roberto Heiderich [8] aplicou as equações de convecção-difusão ao estudo da dinâmica de populações. “Hoje, a Dinâmica de Populações é largamente empregada na Biomatemática, representando um formalização matemática e, por consequência, uma síntese de diversas teorias biológicas desde fenômenos de ocorrências em nível molecular, observáveis em processos físico-químicos, passando pelo nível celular em fisiologia e chegando a processos epidemiológicos e sociobiológicos em organismo superiores, aqui incluído-se evidentemente as sociedades humanas”, descreve Heiderich [8].

Em escoamento de fluidos compressíveis, em que a velocidade do escoamento exceda a velocidade do som, fenômenos conhecidos como choques podem ocorrer. Em regiões de choques, a variação das propriedades do fluido varia bruscamente, quando se costuma dizer que ocorre uma “descontinuidade” da solução.

Zienkiewicz e Taylor [20] explicam que, em fluidos reais, a viscosidade do fluido está

sempre presente. Em escoamentos de alta velocidade, os efeitos viscosos são confinados em uma pequena região, próxima aos obstáculos. Essa região é chamada de camada limite.

A motivação desse trabalho é estudar uma técnica de resolução de escoamentos em que possam ocorrer choques (descontinuidades) e esteja presente a camada limite por efeitos viscosos. As equações que descrevem esse fenômeno são as equações de Navier-Stokes. As equações de Navier-Stokes são bastante complexas e não lineares. Neste trabalho é estudada uma simplificação escalar e linear das equações de convecção-difusão:

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) + \operatorname{div}(\beta u) = S.$$

Os trabalhos de Jorge Calle [4] e Erick Santos [18] tratam da descontinuidade da solução com o método de Galerkin descontínuo, resolvendo o escoamento de Euler. Em seus trabalhos, são mostradas as qualidades do método de Galerkin descontínuo em problemas com descontinuidades. Neste trabalho propõe-se o estudo do termo elíptico em camadas limites como complementação aos estudos de Jorge Calle [4] e Erick Santos [18].

Os métodos tradicionais de solução numérica de equações diferenciais são os métodos de diferenças finitas (MDF), volumes finitos (MVF) e elementos finitos (MEF). Segundo Clovis Maliska [12], “historicamente, o MDF foi sempre empregado na área de mecânica dos fluidos, enquanto o MEF o foi para a área estrutural na solução de problemas de elasticidade. Esses problemas, do ponto de vista físico, são completamente diferentes, pois os escoamentos são altamente não-lineares, por envolverem as equações de Navier-Stokes, enquanto os de elasticidade não possuem os termos advectivos e assemelham-se a problemas puramente difusivos de transferência de calor“. Maliska [12] continua que “até o início da década de 1970, tinha-se portanto, o MDF com grande experiência na área de fluidos, mas sem habilidades para tratar geometria complexas, e o MEF hábil no tratamento da geometria, mas sem ferramentas para tratar os termos advectivos. As primeiras tentativas do método de Galerkin sem estabilização para problemas com advecção forte não tiveram sucesso” porque o método de Galerkin produz instabilidades em problemas de advecção dominante.

“Esses e outros problemas similares (...) motivaram pesquisas para o aprimoramento do método dos volumes finitos (MVF), no qual as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação no volume elementar. A observação do caráter físico de cada termo da equação diferencial permitiu que métodos mais robustos fossem desenvolvidos. A possibilidade de associar a interpretação física à matemática influiu de modo considerável para que praticamente todos os analistas envolvidos com o MDF passassem a usar o MVF.” Maliska [12] explica que muitas vezes os métodos de MDF e MVF são confundidos por serem semelhantes para algumas situações. Entretanto ele ressalta que o “MDF é simplesmente

a substituição do operador diferencial pelo seu correspondente numérico, enquanto o MVF realiza um balanço de conservação da propriedade para cada volume elementar para obter a correspondente equação aproximada”.

Um outro método de solução numérica de equações diferenciais mais recentemente desenvolvido é chamado de método de Galerkin descontínuo. O Galerkin descontínuo é uma variante do MEF em que as funções aproximantes são descontínuas entre elementos e os graus de liberdade de cada elemento são independentes do elemento vizinho. O acoplamento entre os graus de liberdade de elementos vizinhos é feito através de fluxos sobre a interface entre os elementos, tal como no MVF. Desse modo, espera-se do método de Galerkin descontínuo as vantagens do MEF e do MVF. Do MEF espera-se obter a grande precisão das interpolações de alta ordem e do MVF espera-se ganhar suas características de estabilidade.

Neste trabalho são comparadas soluções via MEF e via método de Galerkin descontínuo para problemas de convecção-difusão, em que a convecção é dominante, com camadas limites. O trabalho trata bastante das formulações elípticas (difusão), por estar interessado no comportamento do método de Galerkin descontínuo em camadas limites. A formulação base do trabalho é a formulação proposta por Baumann [2] em sua tese de doutorado para o operador elíptico.

3.2 Conceitos Gerais

A abordagem de problemas de convecção enquadra-se na teoria das leis de conservação [10]. Tais problemas resultam em um equacionamento diferencial hiperbólico. Para problemas de interesse nas aplicações, a formulação não apresenta solução analítica, devendo portanto buscarem-se aproximações da solução.

Segundo Jorge Calle [4], existem vários enfoques para resolver numericamente equações diferenciais parciais. Para leis de conservação são muito utilizados os métodos de diferenças finitas e o método de resíduo ponderado [14].

O método de diferenças finitas baseia-se na substituição dos operadores diferenciais por operadores em diferenças. Calle [4] explica que esse método aplica-se em domínios de geometria simples atingindo até segunda ordem de aproximação quando a solução é suave. O método de diferenças finitas tem sido analisado e aplicado às leis de conservação durante décadas, com muito esforço na obtenção de esquemas com maior ordem de aproximação no cálculo dos fluxos numéricos.

Um enfoque mais abrangente é o do método do resíduo ponderado. O princípio fundamental é o de aproximar a solução da equação diferencial por uma função pertencente a um espaço aproximante de dimensão finita. O método utiliza o conceito de projeção ortogonal do

resíduo da equação diferencial sobre um espaço expandido por funções teste adequadas. Isso significa que o método de resíduo ponderado fica caracterizado pela escolha de dois espaços de funções, o espaço de funções aproximantes (função tentativa) e o espaço de funções teste (ou funções peso), explica Calle [4]. Denomina-se método de Galerkin quando o espaço de funções aproximantes e de funções peso são iguais. A aplicação direta do método de Galerkin em problemas de fluidos tem mostrado ser altamente instável.

De acordo com Calle [4], o nome de método de elementos finitos está associado ao método de Galerkin com funções aproximantes contínuas e polinomiais por partes. O grande sucesso do método de elementos finitos deve-se às propriedades de convergência para problema elípticos, de continuidade e diferenciabilidade e à definição simples das funções polinomiais por partes.

Oden [14] introduz o método de elementos finitos como uma técnica geral para construção de soluções aproximadas para problemas de valor de contorno. “A generalidade e a riqueza dos conceitos são razões para o seu notório sucesso em uma vasta gama de problemas em, virtualmente, todas as áreas da engenharia.”

O método de elementos finitos foi originalmente desenvolvido para análise estrutural de aviões, na década de 1950. Seus fundamentos teóricos foram estabelecidos nas décadas de 1960 e 1970. Posteriormente, foi aplicado, também com sucesso, em problemas não estruturais, como em aproximação de escoamento de fluidos, conta Calle [4].

O método de resíduo ponderado combinado com espaços de funções descontínuas gera esquemas numéricos muito eficientes para resolução de problemas de fluidos. No caso em que as funções aproximantes (função tentativa) e peso (função teste) são constantes sobre os elementos da discretização, o método é conhecido como método de volumes finitos ou volumes de controle.

O método de Galerkin descontínuo, foco deste trabalho, pode ser considerado como uma generalização do método de volumes finitos em que as funções aproximantes e peso são funções polinomiais sobre os elementos, sem restrições de continuidade sobre a fronteira entre elementos.

Para aproximação de problemas elípticos, como a difusão, é de uso corrente o método de elementos finitos. Entretanto, para os problemas hiperbólicos, como a convecção, o método de Galerkin apresenta deficiências que motivam o uso do método de Galerkin descontínuo. Assim, para problemas de convecção-difusão, faz-se necessária a busca de métodos que sejam consistentes com as duas formulações (hiperbólicas e elípticas). Para tal, adota-se o método de Galerkin descontínuo para toda a formulação.

Baumann [2], em sua tese de doutorado, propõe uma formulação variacional de Galerkin descontínuo para o problema elíptico, a partir de uma formulação variacional híbrida.

Segundo Baumann [2], o desenvolvimento de métodos de elementos finitos descontínuos para problemas elípticos data dos anos 1960 com os trabalhos sobre métodos híbridos de Pian e seus colaboradores. A análise matemática dos métodos híbridos foi feita por Babuska, Oden e Lee nos anos 1970. O princípio dos métodos híbridos é a imposição de certas restrições de espaço, em especial a continuidade das funções aproximantes e suas derivadas, através de multiplicadores de Lagrange. Em 1971, Nietsche introduziu o conceito de substituição dos multiplicadores de Lagrange no contorno por fluxos normais e adicionou termos de estabilização para obter taxas ótimas de convergência. Raviart e Thomas [16], em 1977, demonstraram que a solução híbrida é obtida com o multiplicador de Lagrange igual ao fluxo normal entre elementos.

Em 1979, Delves e Hall desenvolveram o chamado *Global Element Method - GEM*. O GEM consiste essencialmente na formulação híbrida clássica para o problema de Poisson, em que o multiplicador de Lagrange é substituído pela média do fluxo através da fronteira entre elementos. Baumann [2] argumenta que a maior desvantagem do GEM é que a matriz associada é indefinida e não pode ser utilizada em problemas variáveis no tempo.

Arnold, em 1982 [1], utilizou a formulação do GEM adicionando um termo de penalidade na fronteira entre elementos. Baumann [2] avalia que as desvantagens desse método incluem a dependência da estabilidade do método em relação ao parâmetro de penalização, a perda da propriedade de conservação elemento a elemento e o mau condicionamento das matrizes.

Baumann [2] e Oden, Babuska e Baumann [13] apresentam uma variante do GEM que é livre das deficiências do GEM e pode ser utilizado em problemas variáveis no tempo. A desvantagem da formulação de Baumann é a não simetria de suas matrizes. Entretanto isso não é de fato um defeito, visto que para problemas de convecção-difusão, que são as aplicações de interesse, as matrizes já não são simétricas por causa da convecção. A formulação é conservativa globalmente e elemento a elemento.

As formulações do GEM, de Baumann e termos de penalização serão tratadas neste trabalho. Para os termos de penalização serão utilizados os trabalhos de Harriman [7] e Houston [9] e seus colaboradores. O método de Baumann funciona apenas para ordem de interpolação polinomial maior ou igual a dois.

3.3 Métodos de Elementos Finitos e de Galerkin Descontínuo

O estudo do método de Elementos Finitos foi baseado na coleção de livros *Finite Elements* [14] volumes I, II e IV.

No volume I, o leitor é iniciado nos conceitos básicos do método de elementos finitos, conceitos esses matemáticos e computacionais. São apresentadas a aproximação de Galerkin e a definição e escolha dos espaços de funções admissíveis. O método de elementos finitos é apresentado como variante da aproximação de Galerkin com funções polinomiais por partes. São tratados problemas uni e bi-dimensionais, com a motivação física da equação diferencial adotada e sua formulação variacional.

No volume II, são apresentados com mais profundidade os conceitos computacionais do método e, no volume IV, os aspectos matemáticos. São apresentados os métodos mistos e híbridos de elementos finitos. Os métodos híbridos foram muito importantes para o entendimento das formulações elípticas de Galerkin descontínuo.

3.4 Ferramentas de Programação

A implementação computacional segue a filosofia de orientação a objetos. Essa filosofia de programação difere da programação procedural, comum em outros tipos de linguagens científicas tais como Pascal, C ou Fortran, por seu comportamento não ser ditado pela seqüência do código e sim pelo comportamento dos objetos componentes do programa.

As principais vantagens da programação orientada a objetos estão relacionadas ao gerenciamento do código e à sua reutilização.

A programação orientada a objetos apresenta as seguintes características:

- encapsulamento;
- herança / derivação;
- polimorfismo.

O encapsulamento consiste em cada objeto apresentar uma série de dados e funções, cujo acesso é controlado, sendo somente permitido o acesso aos dados e funções públicas. Desse modo, acesso e modificação dos dados do objeto podem ser controlados sendo permitido apenas em determinadas funções, tornando o código mais seguro.

Com relação à herança e derivação, essa filosofia de programação permite que sejam criadas classes derivadas de outras já existentes, tendo as classes derivadas a herança de todas as características da classe-mãe, podendo ser implementados apenas os métodos específicos e aqueles cujo comportamento na classe derivada é diferente do comportamento previsto na classe mãe. Assim, o trabalho de implementação é reduzido.

Polimorfismo é um mecanismo em que um método com um dado nome pode ser reimplementado com outros argumentos, ou reimplementado em uma classe derivada pelos mecanismos de virtualidade.

O ambiente PZ, utilizado neste trabalho, é um conjunto de classes para resolução de problemas pelo método dos elementos finitos. O ambiente PZ conta com grande tempo de desenvolvimento e possui uma vasta gama de funcionalidades, tais como:

- Adaptatividade hp;
- Simulações uni, bi e tri-dimensionais;
- Métodos de resolução de sistemas lineares diretos e iterativos;
- Esquemas de multigrid;
- Elementos contínuos (MEF) e descontínuos (Galerkin descontínuo) [6];
- Grande flexibilidade para implementação de novas formulações variacionais.

O ambiente PZ [5] é escrito em linguagem de programação C++ [11] e segue a filosofia de orientação a objetos [17].

Capítulo 4

Metodologia

A metodologia do trabalho consiste em quatro etapas sequenciais:

- estudo teórico;
- implementação computacional;
- testes;
- e avaliação de resultados.

Estudo Teórico

Como estudo teórico para embasamento do trabalho, estudaram-se o método de elementos finitos e seu variante, o método de Galerkin descontínuo e seus conceitos. Abordaram-se, no estudo, formulações variacionais para elementos finitos e Galerkin descontínuo para a equação elíptica (difusão) e para a equação hiperbólica linear (convecção linear).

Para implementação computacional, fez-se necessário o aprendizado da linguagem de programação C++ e da filosofia de orientação a objetos, bem como do ambiente de programação PZ.

Implementação Computacional

Foi implementada a formulação variacional de Galerkin descontínuo. O ambiente PZ já dispunha dos espaços de interpolação descontínuos e dos elementos computacionais descontínuos e de interface. Além da implementação da formulação variacional, este trabalho contribuiu com a adequação do ambiente PZ para combinar elementos finitos contínuo e descontínuo em uma mesma simulação. A implementação computacional é apresentada na seção 9.2.

Testes

No Capítulo 10 são apresentados testes de validação e avaliação do método de Galerkin descontínuo.

Capítulo 5

Método de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica de resolução aproximada de problemas de valor de contorno [14, 19]. O método envolve o particionamento do domínio em um número finito de elementos (os elementos finitos) e, usando conceitos variacionais, envolve a construção de uma aproximação da solução sobre esses elementos. Uma análise de elementos finitos é, em geral, constituída dos seguintes passos:

- construção de uma formulação variacional para o problema;
- definição da geometria;
- escolha do espaço de aproximação;
- aplicação do método de Galerkin para o espaço de funções adotado;
- resolução do sistema algébrico;
- análise dos resultados.

5.1 Formulação Variacional

O princípio de uma análise de elementos finitos é a construção de uma formulação variacional. Para melhor entendimento, adota-se um problema modelo enunciado pela equação diferencial

$$u''(x) = F(x), x \in (0, 3) \tag{5.1}$$

$$u(0) = u(3) = 0$$

Multiplicando-se os dois termos da equação por uma função teste $v(x)$, integrando-os sobre o domínio $\Omega = (0, 3)$ e fazendo uma integração por partes, obtém-se a formulação variacional do problema: encontrar $u(x)$ tal que

$$\int_{\Omega} u'(x) v'(x) dx = \int_{\Omega} F(x) v(x) dx \quad \forall v(x) \quad (5.2)$$

com $u(x)$ e $v(x)$ elementos do espaço de funções admissíveis

$$H_0^1(\Omega) = \{v \mid v e v' \in L^2(\Omega), v(0) = v(3) = 0\}.$$

5.2 Aproximação de Galerkin

Na aproximação de Galerkin, consideram-se soluções aproximadas $u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ em sub-espacos $V \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensão finita N . As funções teste $v(x)$ são formadas pela combinação linear das funções de base $v(x) = \varphi_i(x)$. Substituindo na equação 5.2, tem-se

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_j \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{\Omega} F(x) \varphi_i(x) dx. \quad (5.3)$$

O sistema de equações 5.3 pode ser escrito em formato matricial como:

$$[K] \cdot \{\alpha\} = \{F\} \quad (5.4)$$

sendo $K = [K_{ij}]$ chamada matriz de rigidez, em que $K_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx$;

$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N]^T$ é a solução do problema algébrico;

e $F = [F_1, F_2, F_3, \dots, F_N]^T$ é chamado vetor de carga em que $F_i = \int_{\Omega} F(x) \varphi_i(x) dx$.

A solução do sistema linear (5.4) α construirá a aproximação da solução do problema variacional (5.2) como sendo

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x).$$

As funções $\varphi_i(x)$ devem ser escolhidas de modo a produzir espaços de interpolação com funções linearmente independentes. Ao conjunto dessas funções dá-se o nome de funções de base.

5.3 Funções de Base

As funções de base são construídas de forma a produzir espaços de interpolação, com funções linearmente independentes. A figura abaixo mostra um exemplo de funções de base em H_0^1 para o domínio $\Omega = (0, 3)$.

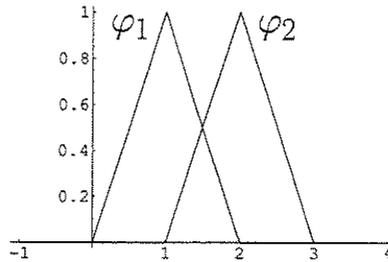


Figura 5.1: Funções de base uni-dimensionais

As funções de base são associadas a nós do domínio. Na figura acima são nós $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Os nós $x = 0$ e $x = 3$ não têm funções associadas, porque o espaço de funções adotado é o espaço $H_0^1(\Omega) = \{v \mid v \in C^1(\Omega), v(0) = v(3) = 0\}$ e as funções devem valer zero nesses pontos.

As duas funções associadas aos nós $x = 1$ e $x = 2$ são mostradas a seguir. Essas funções são definidas como tendo valores diferentes de zero em um trecho do domínio (onde aparece o “chapéu”) e valor zero no resto do domínio.

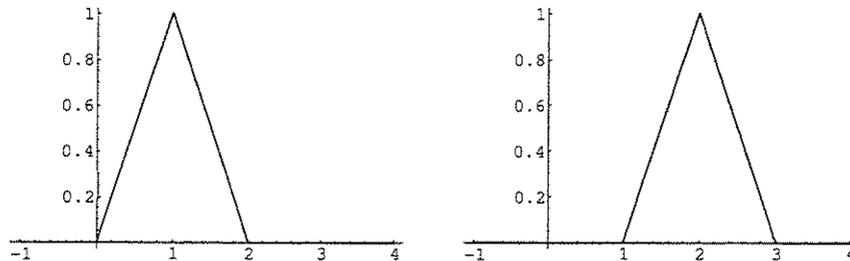


Figura 5.2: Funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$

5.4 Particionamento do Domínio

No método de elementos finitos, o domínio é dividido em elementos Ω_e (os elementos finitos). A função de base chapéu da figura 5.2 é construída pela soma de duas funções sobre elementos, como mostrado na figura a seguir:

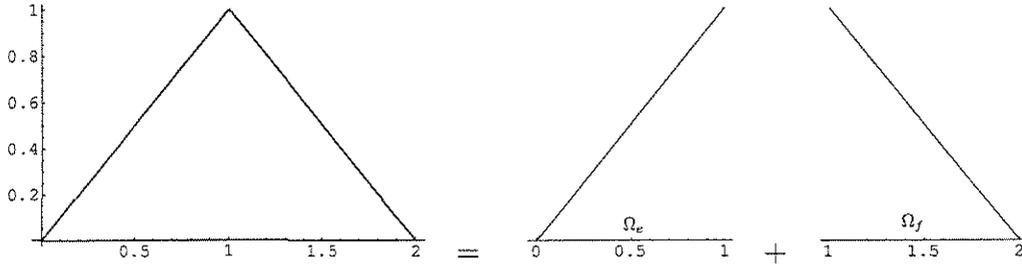


Figura 5.3: Exemplo de função de base de elementos finitos

Por terem valores nulos no domínio, exceto nos elementos ao qual está associada, a integral de cada função sobre o domínio é interpretada como a integral das funções sobre os elementos e assim

$$\int_{\Omega} u'(x) v'(x) dx = \sum_{i=1}^{NEl} \int_{\Omega_e} u'(x) v'(x) dx$$

com NEl o número de elementos do domínio.

E a aproximação de Galerkin (eq: 5.3) torna-se

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{e=1}^{NEl} \int_{\Omega_e} \alpha_j \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{e=1}^{NEl} \int_{\Omega_e} F(x) \varphi_i(x) dx. \quad (5.5)$$

5.5 Construção do Problema Algébrico

A aproximação de Galerkin 5.5 pode ser escrita em formato matricial, como mostrado na seção 5.2.

A matriz de rigidez será composta a partir de matrizes de rigidez local de elementos.

Sejam K_{ij}^e e F_i^e

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \alpha_j \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx$$

$$F_i^e = \int_{\Omega_e} F(x) \varphi_i(x) dx$$

a matriz de rigidez e o vetor de carga locais de um elemento e . A integração de φ_i e φ_j se dá sobre o elemento. Tome-se a figura 5.1:

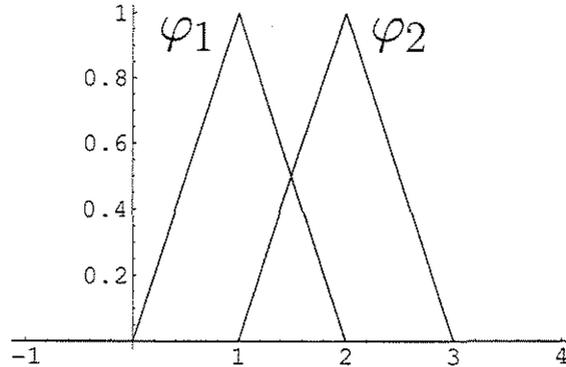


Figura 5.4: Repetição da figura 5.1: Funções de base uni-dimensionais

O domínio é dividido em três elementos: $\Omega_1 = (0, 1)$, $\Omega_2 = (1, 2)$ e $\Omega_3 = (2, 3)$. O elemento 1 possui uma única função, a qual compõe, em conjunto com o elemento 2, a função de base φ_1 . O elemento 2, por sua vez, possui funções pertencentes às funções de base φ_1 e φ_2 . E o elemento 3, tal como o elemento 1, só possui uma função, associada a φ_2 . Essa indexação entre a função do elemento e a função de base associada é muito importante para a composição da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema. As matrizes de rigidez locais dos elementos são dadas por:

$$K^1 = \begin{pmatrix} K_{1,1}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{pmatrix}$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{2,2}^3 \end{pmatrix}$$

e $K = K^1 + K^2 + K^3$:

$$K = \begin{pmatrix} K_{1,1}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 + K_{2,2}^3 \end{pmatrix}.$$

Da mesma maneira, constrói-se o vetor de carga do sistema como:

$$F = \begin{pmatrix} F_1^1 + F_1^2 \\ F_1^2 + F_1^3 \end{pmatrix}.$$

E o sistema, dado por $[K] \cdot \{\alpha\} = \{F\}$, é escrito como:

$$\begin{pmatrix} K_{1,1}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 + K_{2,2}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 + F_1^2 \\ F_1^2 + F_1^3 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema linear conduz à aproximação da solução

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \varphi_i(x).$$

Capítulo 6

Formulação Variacional do Problema Elíptico

O problema elíptico, tratado neste trabalho, pode ser enunciado como abaixo.

Encontrar u que seja solução do problema linear e de segunda ordem,

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = S \text{ em } \Omega \tag{6.1}$$

$$u = f \text{ em } \Gamma_D$$

$$(A\nabla u) \cdot n = g \text{ em } \Gamma_N$$

em que:

Ω é o domínio com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz;

Γ_D a parte do contorno com condições Dirichlet;

Γ_N a parte do contorno com condições Neumann;

$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \text{ e } \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega;$$

A é a matriz de difusão;

n é a normal externa a $\partial\Omega$;

S , f e g são funções conhecidas.

Uma formulação variacional para o problema 6.1 pode ser obtida de diferentes formas, como apresentado a seguir.

6.1 Formulação Variacional Clássica

Considera-se o espaço funcional:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

e o sub-espaço de funções teste

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad (6.2)$$

Para construir o problema variacional clássico, em primeiro lugar multiplica-se a equação diferencial (6.1) por uma função teste $v \in V$ e integra-se sobre o domínio Ω . Assim:

$$\int_{\Omega} -v \nabla \cdot A \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega.$$

Fazendo-se a integração por partes do lado esquerdo da equação, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (v A \nabla u) \, d\Omega = \int_{\Omega} S v \, d\Omega. \quad (6.3)$$

Utilizando-se o teorema da divergência de Gauss, a segunda integral $\int_{\Omega} \nabla \cdot (v A \nabla u) \, d\Omega$ pode ser escrita como integral sobre o contorno

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v A \nabla u) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (v A \nabla u) \cdot n \, ds.$$

Desse modo, a equação 6.3 pode ser escrita na forma

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (v A \nabla u) \cdot n \, ds = \int_{\Omega} S v \, d\Omega.$$

Lembrando-se que $v = 0$ em Γ_D e $(A \nabla u) \cdot n = g$ em Γ_N , a formulação clássica para o problema elíptico em questão pode, então, ser enunciada (ver detalhes em [14]) como: encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u = f$ em Γ_D e

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} S v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g v \, ds \quad \forall v \in V. \quad (6.4)$$

6.2 Formulação Híbrida

Antes da dedução da formulação híbrida, é interessante definir alguns espaços de interpolação sobre os quais serão definidas as funções teste e tentativa.

Seja $P_h = \Omega_e$ uma partição de Ω de forma que $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{nel} \bar{\Omega}_e$, em que $\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$ para $e \neq f$ e nel é o número de elementos da partição P_h . Em outras palavras, os elementos são definidos com fronteiras abertas, sem intersecções entre elementos. Se dois elementos tiverem fronteira comum, define-se $n_f = n_e$ se $e > f$, em que n_e é a normal externa da fronteira $\partial\Omega_e$.

- Espaços de Aproximação

Sejam os seguintes espaços:

$$H^1(P_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega_e} \in H^1(\Omega_e) \forall \Omega_e \in P_h\} \quad (6.5)$$

e

$$W(\Gamma_{P_h}) = \prod_{e=1}^{nel} H^{-1/2}(\partial\Omega_e) \quad (6.6)$$

em que $H^{-1/2}(\partial\Omega_e)$ representa o espaço dual de $H^{1/2}(\partial\Omega_e)$, o qual é formado pelos traços das funções de $H^1(\Omega_e)$. Adota-se a notação $\Gamma_{P_h} = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_{int}$, em que Γ_D e Γ_N são as fronteiras de tipo Dirichlet e Neumann e Γ_{int} é a união de todas as fronteiras entre dois elementos internos ao domínio.

- Problema 1: Minimização:

Define-se o funcional

$$J_H(v) = \sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds \quad (6.7)$$

definido em $H^1(P_h)$.

O problema de minimização é enunciado como: encontrar $u \in H^1(P_h)$ tal que

$$J_H(u) \leq J_H(v) \forall v \in H^1(P_h).$$

- Problema 2: Ponto de Sela:

A continuidade entre elementos e a aplicação das condições de contorno Dirichlet serão feitas por multiplicadores de Lagrange.

Seja

$$L_H(v, q) = J_H(v) - \int_{\Gamma_{int}} q [v] \, ds - \int_{\Gamma_D} q (v - f) \, ds$$

definido para funções

$$(v, q) \in H(P_h) \times W(\Gamma_{P_h})$$

em que se define

$$[\vartheta] = \vartheta |_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_{ef}} - \vartheta |_{\partial\Omega_f \cap \Gamma_{ef}}, \quad e > f$$

em que Γ_{ef} se refere à lateral comun aos elementos Ω_e e Ω_f .

Considera-se o problema de ponto de sela: determinar $(u, p) \in H(P_h) \times W(\Gamma_{P_h})$ tal que

$$L_H(u, q) \leq L_H(u, p) \leq L_H(v, p) \quad (6.8)$$

$$\forall v \in H^1(P_h) \text{ e } \forall q \in W(\Gamma_{P_h}).$$

Se (u, p) é ponto de sela de $L_H(v, q)$, então u é solução do problema 1 de minimização.

Para resolver o problema de ponto de sela, façamos a primeira variação de $L_H(u, p)$ em relação a u e p , respectivamente. A primeira variação de $L_H(u, p)$ em relação a u é dada por:

$$\langle \delta_u L_H(u, p), (v, q) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{L_H(u + \alpha v, p) - L_H(u, p)}{\alpha} \right].$$

$$\frac{L_H(u + \alpha v, p) - L_H(u, p)}{\alpha} =$$

$$= \frac{\left(J_H(u + \alpha v) - \int_{\Gamma_{int}} p[u + \alpha v] ds - \int_{\Gamma_D} p(u + \alpha v - f) ds \right) - \left(J_H(u) - \int_{\Gamma_{int}} p[u] ds - \int_{\Gamma_D} p(u - f) ds \right)}{\alpha} =$$

$$= \frac{J_H(u + \alpha v) - \int_{\Gamma_{int}} p[\alpha v] ds - \int_{\Gamma_D} p(\alpha v) ds - J_H(u)}{\alpha} =$$

$$= \frac{J_H(u + \alpha v) - J_H(u)}{\alpha} - \int_{\Gamma_{int}} p[v] ds - \int_{\Gamma_D} p(v) ds.$$

Resta, agora, realizar a operação $\frac{J_H(u + \alpha v) - J_H(u)}{\alpha}$.

$$\frac{J_H(u + \alpha v) - J_H(u)}{\alpha} =$$

$$= \frac{\sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \nabla(u + \alpha v) \cdot A \nabla(u + \alpha v) d\Omega - \int_{\Omega_e} S(u + \alpha v) d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g(u + \alpha v) ds}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \nabla u \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S u \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g u \, ds}{\alpha} = \\
& = \frac{\sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\alpha \nabla u \cdot A \nabla v + \alpha \nabla v \cdot A \nabla u + \alpha^2 \nabla v \cdot A \nabla v) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S(\alpha v) \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g(\alpha v) \, ds}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Como a matriz A é simétrica, $\nabla u \cdot A \nabla v = \nabla v \cdot A \nabla u$. E assim:

$$\begin{aligned}
& \frac{J_H(u + \alpha v) - J_H(u)}{\alpha} = \\
& = \frac{\sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (2\alpha \nabla v \cdot A \nabla u + \alpha^2 \nabla v \cdot A \nabla v) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S(\alpha v) \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g(\alpha v) \, ds}{\alpha} = \\
& = \sum_{e=1}^{nel} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (2 \nabla v \cdot A \nabla u + \alpha \nabla v \cdot A \nabla v) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds.
\end{aligned}$$

Aplicando-se o limite quando $\alpha \rightarrow 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J_H(u + \alpha v) - J_H(u)}{\alpha} = \sum_{e=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds.$$

Finalmente, a primeira variação de $L_H(u, p)$ em relação a u é dada por

$$\langle \delta_v L_H(u, p), (v, q) \rangle = \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds - \int_{\Gamma_{int}} p[v] \, ds - \int_{\Gamma_D} p v \, ds = 0.$$

A primeira variação de $L_H(u, p)$ em relação a p é dada por

$$\langle \delta_q L_H(u, p), (v, q) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{L_H(u, p + \alpha q) - L_H(u, p)}{\alpha} \right]$$

$$\langle \delta_q L_H(u, p), (v, q) \rangle =$$

$$= \frac{\left(J_H(u) - \int_{\Gamma_{int}} (p + \alpha q)[u] \, ds - \int_{\Gamma_D} (p + \alpha q)(u - f) \, ds \right) - \left(J_H(u) - \int_{\Gamma_{int}} p[u] \, ds - \int_{\Gamma_D} p(u - f) \, ds \right)}{\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(-\int_{\Gamma_{int}} (p + \alpha q) [u] ds - \int_{\Gamma_D} (p + \alpha q) (u - f) ds\right) - \left(-\int_{\Gamma_{int}} p [u] ds - \int_{\Gamma_D} p (u - f) ds\right)}{\alpha} \\
&= \frac{\left(-\int_{\Gamma_{int}} \alpha q [u] ds - \int_{\Gamma_D} \alpha q (u - f) ds\right)}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\langle \delta_q L_H(u, p), (v, q) \rangle = -\int_{\Gamma_{int}} q [u] ds - \int_{\Gamma_D} q (u - f) ds = 0$$

Sendo assim, podemos reescrever o problema do ponto de sela como o seguinte problema híbrido: achar $(u, p) \in H^1(P_h) \times W(\Gamma_{P_h})$ tal que

$$A_H(u, v) - B_H(v, p) = 0 \quad \forall v \in H^1(P_h) \quad (6.9)$$

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} q f ds \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h}) \quad (6.10)$$

em que

$$A_H(u, v) = \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u d\Omega - \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v ds$$

e

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q u ds.$$

Somando-se as duas equações acima, tem-se:

$$A_H(u, v) - B_H(v, p) + B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} q f ds$$

ou

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u d\Omega - \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v ds - \int_{\Gamma_{int}} p [v] ds - \int_{\Gamma_D} p v ds \\
&\quad + \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q (u - f) ds = 0.
\end{aligned}$$

Reagrupando-se os termos, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u d\Omega - \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v ds \quad (6.11)$$

$$+ \int_{\Gamma_{int}} (q[u] - p[v]) ds + \int_{\Gamma_D} (qu - pv) ds = \int_{\Gamma_D} qf ds$$

$$\forall (v, q) \in H^1(P_h) \times W(\Gamma_{P_h}).$$

Equivalência entre a Formulação Híbrida e a Formulação Elíptica

Os resultados dos próximos lemas serão utilizados nas deduções dos parágrafos seguintes.

Lema 1: Seja L um funcional contínuo definido em $H^1(P_h)$. $L(v) = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ se e somente se existe um único elemento $p \in W(\Gamma_{P_h})$, tal que $p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e$ em $\partial\Omega_e$ para algum $\mathbf{w} \in H(\text{div}; \Omega)$ e para o qual vale a representação

$$L(v) = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\partial\Omega_e} v \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e ds \quad \forall v \in H^1(P_h).$$

Define-se $H(\text{div}; \Omega)$ como:

$$H(\text{div}; \Omega) = \{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d) \subset (L^2(\Omega))^d; \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \}.$$

A prova do Lema 1 encontra-se no artigo [16].

O Lema 1 mostra que a solução do problema híbrido (u, p) é dada, de fato, por uma solução $(u, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e)$. Nos parágrafos seguintes, procurar-se-á um valor adequado de \mathbf{w} em função de u , de modo que o problema híbrido em (u, p) possa ser resolvido como um problema apenas em u , isso é, com $p = p(u) = \mathbf{w}(u) \cdot \mathbf{n}_e$.

Lema 2: $B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} qf ds \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h})$ se e somente se $u \in H^1(\Omega)$ e $u = f$ em Γ_D .

O Lema 2 significa a imposição da continuidade da solução na fronteira Dirichlet e nas fronteiras internas.

Demonstração do Lema 2:

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} qf ds \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h}).$$

Como q é qualquer $q \in W(\Gamma_{P_h})$, adota-se

$$q = \begin{cases} \beta(x) & , x \in \Gamma_D \\ 0 & , x \in \Gamma_{int} \end{cases}$$

com $\beta(x) \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

Portanto

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q u ds = \int_{\Gamma_D} q f ds$$

fica sendo

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} q u ds = \int_{\Gamma_D} q f ds \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h}).$$

Logo, $u = f$ em Γ_D .

Seja agora

$$q = \begin{cases} 0 & , x \in \Gamma_D \\ \beta_r(x) & , x \in \Gamma_{int} \end{cases}$$

com $\beta_r(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$.

Então,

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q u ds = \int_{\Gamma_D} q f ds$$

torna-se

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds = 0 \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h})$$

e portanto $[u] = 0$ em Γ_{int} .

Em outro sentido, se $u \in H^1(\Omega)$ tem-se que $[u] = 0$ (funções contínuas). Se $[u] = 0$ e $u = f$ em Γ_D

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q u ds = \int_{\Gamma_D} q f ds$$

torna-se

$$\int_{\Gamma_D} q u ds = \int_{\Gamma_D} q f ds \quad \forall q \in W(\Gamma_{P_h}), \text{ c.q.d.}$$

a) Solução da Formulação Elíptica é solução da Formulação Híbrida

Seja u uma solução do problema elíptico na forma variacional clássica 6.4 e $u \in H^1(\Omega)$, tem-se que $[u] = 0$ nas laterais comuns entre elementos. Além disso, como $u = f$ em Γ_D

tem-se que

$$B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} q u \, ds = \int_{\Gamma_D} q f \, ds,$$

de onde se conclui que a segunda equação do problema híbrido 6.10 é satisfeita.

Por outro lado, considere o funcional linear contínuo

$$v \rightarrow L(v) = A_H(u, v) = \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds, \quad v \in H^1(P_h). \quad (6.12)$$

Por ser u solução do problema variacional clássico, conclui-se que $L(v)$ se anula para toda função $v \in V$ e, em particular, para toda função em $v \in H_0^1(P_h)$. Segue do Lema 1 que existe um único $p \in W(\Gamma_{P_h})$ tal que

$$L(v) = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\partial\Omega_e} v p \, ds = \int_{\Gamma_{int}} [v] p \, ds + \int_{\partial\Omega} v p \, ds = 0 \quad \forall v \in H^1(P_h),$$

em que $p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$, com $\mathbf{w} \in H(\text{div}, \Omega)$. Mas como $L(v) = 0$ para toda função em $H^1(\Omega)$ que se anula em Γ_D , isto significa que $\int_{\Gamma_N} v p \, ds = 0, \forall v \in V$. Portanto $\int_{\Gamma_N} v p \, ds = 0, \forall v \in H^1(P_h)$. Sendo assim, não deve haver a contribuição da fronteira de Neumann na definição de $L(v)$. Isto é

$$L(v) = \int_{\Gamma_{int}} [v] p \, ds + \int_{\Gamma_D} v p \, ds = B_H(v, p) \quad \forall v \in H^1(P_h). \quad (6.13)$$

Combinando as equações (6.12) e (6.13), conclui-se que o par (u, p) é solução da equação (6.9) da formulação híbrida.

Podemos obter uma expressão mais precisa para p . Lembrando que $S = -\nabla \cdot (A \nabla u)$ e usando a fórmula de Green obtemos

$$\int_{\Omega_e} S v \, d\Omega = - \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (A \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega_e} A \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} v A \nabla u \cdot \mathbf{n}_e \, ds.$$

Substituindo este resultado em (6.12) e usando o fato de que $(A \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ em Γ_N segue que

$$L(v) = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\partial\Omega_e} v A \nabla u \cdot \mathbf{n}_e \, ds - \int_{\Gamma_N} v (A \nabla u) \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall v \in H^1(P_h).$$

Como o Lema 1 garante que $p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_r$, para algum $\mathbf{w} \in H(\text{div}; \Omega)$ e, igualando a fórmula acima com a equação (6.13), conclui-se que

$$\int_{\Gamma_{int}} [v] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Gamma_D} v \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Gamma_{int}} [v] A \nabla u \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Gamma_N} v A \nabla u \cdot \mathbf{n} ds \quad \forall v \in H^1(P_h).$$

Comparando os dois lados da equação, segue que $\mathbf{w} = (A \nabla u)$. Consequentemente $p = A \nabla u \cdot \mathbf{n}_e = A \partial u / \partial n_e$, com $p \in H^{-1/2}(\partial \Omega_e)$.

b) Solução da Formulação Híbrida é solução da Formulação Elíptica

Seja (u, p) solução do problema híbrido. Pela equação 6.10, juntamente com o resultado do Lema 2, segue que $u \in H^1(\Omega)$ e $u = f$ em Γ_D . Por outro lado, considerando $v \in V$, segue que $B_H(v, p) = 0$. Dessa forma, da equação 6.9 segue que

$$A_H(u, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

o que significa que u é solução da forma variacional clássica.

Sendo assim, observa-se que na formulação híbrida (6.9-6.10), que corresponde ao problema de ponto de sela 6.8, p é chamado de multiplicador de Lagrange associado às restrições $[u] = 0$ e $u = f$ em Γ_D .

6.3 Formulações de Galerkin Descontínuo

Somando-se as duas equações no problema híbrido (6.9-6.10) tem-se:

$$A_H(u, v) - B_H(v, p) + B_H(u, q) = \int_{\Gamma_D} q f ds$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u d\Omega - \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v ds - \int_{\Gamma_{int}} p [v] ds - \int_{\Gamma_D} p v ds \\ + \int_{\Gamma_{int}} q [u] ds + \int_{\Gamma_D} q (u - f) ds = 0. \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds \\ + \int_{\Gamma_{int}} (q[u] - p[v]) \, ds + \int_{\Gamma_D} (q u - p v) \, ds = \int_{\Gamma_D} q f \, ds \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\forall (v, q) \in H^1(P_h) \times W(\Gamma_{P_h}).$$

Pelas considerações da seção anterior 6.2, espera-se que a solução (u, p) seja tal que $p = (A \nabla u) \cdot n$. Mas como no espaço de funções admissíveis $H^1(P_h)$ as funções são definidas por partes, sem hipóteses a priori de regularidade, faz sentido reformular o problema interpretando p como a média dos valores à esquerda e à direita da fronteira, ou seja:

$$p = \frac{((A \nabla u_e) \cdot n_e + (A \nabla u_f) \cdot n_f)}{2} = \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle, e > f.$$

Com esse enfoque, a nova formulação do problema seria: determinar $u \in H^1(P_h)$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v \, ds + \int_{\Gamma_{int}} (q[u] - \langle (A \nabla u) \cdot \vec{n} \rangle [v]) \, ds \\ + \int_{\Gamma_D} (q u - (A \nabla u) \cdot \vec{n} v) \, ds = \int_{\Gamma_D} q f \, ds \end{aligned}$$

$$\forall (v, q) \in H^1(P_h) \times W(\Gamma_{P_h}).$$

Como a formulação é válida para qualquer v e q , poder-se-ia adotar, por exemplo, q função de v : $q = (A \nabla v) \cdot n$ e nas fronteiras internas $q = \langle (A \nabla v) \cdot n \rangle$ dando ao problema a forma: determinar $u \in H(P_h)$ tal que

$$B_H(u, v) = F_H(v)$$

para qualquer $v \in H^1(P_h)$, em que

$$\begin{aligned} B_H(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A \nabla u) \, dx \right) + \int_{\Gamma_D} (u (A \nabla v) \cdot n - v (A \nabla u) \cdot n) \, ds + \\ \int_{\Gamma_{int}} (\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle [v]) \, ds \end{aligned}$$

e

$$F_H(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx \right) + \int_{\Gamma_D} f (A \nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds.$$

Diversos métodos podem ser formulados variando a escolha dessa função $q(v)$. Duas formulações são apresentadas a seguir: as formulações assimétrica (6.3.1) e simétrica (6.3.2). E em seguida é introduzido o conceito de penalização da descontinuidade (6.3.3).

6.3.1 Formulação de Oden, Baumann e Babuska - Assimétrica

A formulação variacional, base para o desenvolvimento da formulação do método de Galerkin descontínuo, proposta por Baumann em sua tese de doutorado [2], pode ser interpretada como uma formulação híbrida em que o multiplicador de Lagrange é eliminado em termos da função tentativa: $p = (A \nabla u) \cdot n$.

O problema variacional é enunciado como: encontrar $u \in H(P_h)$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot A \nabla u d\Omega - \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right) - \int_{\Gamma_N} g v ds \\ + \int_{\Gamma_{int}} (q[u] - p[v]) ds + \int_{\Gamma_D} (q u - p v) ds = \int_{\Gamma_D} q f ds \end{aligned}$$

$$\forall (v, q) \in H_0^1(P_h) \times W(\Gamma_{P_h})$$

com

$$p = (A \nabla u_e) \cdot n_e \text{ em } \Gamma_D$$

$$p = \frac{((A \nabla u_e) \cdot n_e + (A \nabla u_f) \cdot n_f)}{2} = \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle, e > f \text{ em } \Gamma_{int}.$$

Como a formulação é válida para qualquer v e q , pode-se adotar q função de v :

$$q = (A \nabla v) \cdot n$$

e nas fronteiras internas

$$q = \langle (A \nabla v) \cdot n \rangle.$$

Assim, o problema toma a forma assimétrica: determinar $u \in H^1(P_h)$ tal que:

$$B_H(u, v) = F_H(v) \quad (6.15)$$

para qualquer $v \in H^1(P_h)$, em que

$$B_H(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A \nabla u) dx \right) + \int_{\Gamma_D} (u (A \nabla v) \cdot n - v (A \nabla u) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds$$

e

$$L_H(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx \right) + \int_{\Gamma_D} f (A \nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds.$$

6.3.2 Formulação Variacional Simétrica - GEM

A mesma formulação variacional apresentada em 6.3.1 é utilizada no GEM - “*Global Element Method*” ou Método de Elemento Global - (citado em [2]) com uma única diferença, a escolha da função q . Enquanto na formulação assimétrica de Baumann $q = \langle (A \nabla v) \cdot n \rangle$, no GEM q assume o mesmo valor com sinal contrário, isso é:

$$q = -(A \nabla v) \cdot n$$

e nas fronteiras internas

$$q = -\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle.$$

Dessa forma, a formulação variacional torna-se simétrica: encontrar $u \in H^1(P_h)$ tal que

$$B_H(u, v) = F_H(v) \quad (6.16)$$

para qualquer $v \in H^1(P_h)$, em que

$$B_H(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A \nabla u) dx \right) + \int_{\Gamma_D} (-u (A \nabla v) \cdot n - v (A \nabla u) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_{int}} (-\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds$$

e

$$L_H(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx \right) + \int_{\Gamma_D} -f (A \nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds.$$

6.3.3 Formulação Variacional com Termo de Penalização

As mesmas formulações, simétrica e assimétrica, mostradas acima podem incluir termos de penalização. Esses termos são descritos em [2, 7, 9] e transformam a formulação variacional em:

$$B(u, v) = B_H(u, v) + B_S(u, v)$$

e

$$L(v) = L_H(v) + L_S(v)$$

em que $B_H(u, v)$ e $L_H(v)$ são os mesmos das formulações de Baumann ou do GEM e $B_S(u, v)$ e $L_S(v)$ são definidos como:

$$B_S(u, v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma u v) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\sigma [u] [v]) ds$$

$$L_S(v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma f v) ds,$$

em que σ é chamado de parâmetro de penalização da descontinuidade.

Para Baumann [2], $\sigma = Kh^{-1}$ em que K é um parâmetro dependente do problema e deve ser escolhido cuidadosamente e h é o tamanho do elemento. Entretanto não é apresentada uma fórmula para calcular K .

Em [9] é apresentada uma fórmula para o cálculo de σ ,

$$\sigma = kh^{-1}$$

com $k = C \bar{a} p^2$, em que \bar{a} é a norma em L^2 da matriz de difusão A da equação 6.1, p é a ordem de interpolação do elemento e C é uma constante positiva.

Como a penalização é calculada em integrais sobre o contorno (interface entre dois elementos vizinhos), o parâmetro de penalização toma a forma

$$\sigma = C \langle \bar{a} p^2 \rangle h^{-1}$$

com $\langle \rangle$ sendo a média entre os elementos à esquerda e à direita da fronteira e h podendo ser interpretado como a medida da interface (fronteira) entre os elementos.

Harriman et al [7] demonstram que o valor de C deve ser cuidadosamente escolhido para garantir estabilidade ao método. Para a formulação de Baumann, qualquer $C > 0$ garante a estabilidade do método. Para o GEM, entretanto, é necessário que $C > 0$ seja um valor suficientemente grande.

6.3.4 Comparação dos Métodos

Segundo Baumann [2], a formulação simétrica (GEM) possui uma grande desvantagem que é a de impedir a sua utilização em problemas dependentes do tempo, o que era seu objetivo principal. Essa inabilidade do GEM motivou a busca de uma formulação capaz de resolver tais problemas, a formulação assimétrica.

A desvantagem da formulação de Baumann está na assimetria de suas matrizes, mas que de fato não é relevante porque os problemas de convecção já não são simétricos.

Além da simetria da forma bilinear, outra vantagem da formulação do GEM é que suas taxas de convergências são ótimas para qualquer ordem de interpolação p , enquanto a formulação assimétrica perde uma ordem para interpolações de ordens p pares.

A utilização de termos de penalidade melhora a estabilidade do método. A formulação de Baumann sem penalidade produz matrizes positivas semidefinidas. E o GEM produz matrizes com autovalores negativos. A utilização de termos de penalidade torna as matrizes de Baumann positivas definidas. Utilizando-se penalidades com o GEM, podem-se produzir matrizes positivas definidas, se a penalidade for suficientemente grande. Os termos de penalidade destroem a propriedade de conservação do método.

Capítulo 7

Formulação do Problema Hiperbólico Linear

O problema hiperbólico tratado neste trabalho pode ser enunciado como abaixo.

Encontrar u que seja solução do problema linear,

$$\operatorname{div}(\beta u) = S \text{ em } \Omega \tag{7.1}$$

$$u = f \text{ em } \Gamma_-$$

em que:

Ω é o domínio com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz;

β é o vetor de direção da velocidade de convecção;

$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega \mid (\beta \cdot n)(x) < 0\}$, $\Gamma_+ = \partial\Omega - \Gamma_-$;

n é a normal externa a $\partial\Omega$;

S , e f são funções conhecidas.

Uma formulação variacional para o problema 7.1 pode ser obtida como apresentado a seguir.

Considera-se o espaço funcional:

$$H^1(P_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega_e} \in H^1(\Omega_e) \forall \Omega_e \in P_h\}.$$

Para construir o problema variacional, em primeiro lugar multiplica-se a equação diferencial (6.1) por uma função teste $v \in H^1(P_h)$ e integra-se sobre o domínio Ω . Assim:

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\beta u) d\Omega = \int_{\Omega_e} S v d\Omega.$$

Fazendo-se a integração por partes do lado esquerdo da equação, obtém-se

$$\int_{\Omega} -(\nabla v \cdot \beta) u d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\beta uv) d\Omega = \int_{\Omega} S v d\Omega.$$

Utilizando-se o teorema da divergência de Gauss, a segunda integral pode ser escrita como integral sobre o contorno

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\beta uv) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\beta uv) \cdot n ds.$$

E a formulação variacional toma a forma

$$\int_{\Omega} -(\nabla v \cdot \beta) u d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\beta uv) \cdot n ds = \int_{\Omega} S v d\Omega,$$

ou, ainda, a forma sobre os elementos (nel) do domínio

$$\sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla v \cdot \beta) u d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} (\beta uv) \cdot n ds \right\} = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} S v d\Omega \right\}. \quad (7.2)$$

De acordo com Erick Santos [18], a aplicação de leis de conservação em problemas com solução caracterizada por uma descontinuidade separando dois estados suaves é conhecida como problema de Riemann. As funções de fluxo na descontinuidade que aproximam ou resolvem os problemas de Riemann são chamadas de fluxo numérico.

O termo sobre o contorno $\partial\Omega$ da equação 7.2 será substituído por um fluxo numérico $F_N \approx \int_{\partial\Omega} (\beta uv) \cdot n ds$ do tipo *UpWind* (ver [10]). O fluxo numérico será definido como

$$F_N^e = \int_{\Gamma_+^e} v u^- (\beta \cdot n_e) ds + \int_{\Gamma_-^e} v f(\beta \cdot n_e) ds$$

em que $\Gamma_-^e = \partial\Omega_e \cap \Gamma_-$ e $\Gamma_+^e = \partial\Omega_e - \Gamma_-^e$
e

$$u^- = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} u(x - \alpha(\beta \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}), x \in \Gamma^e.$$

A figura abaixo esquematiza o significado de u^- :

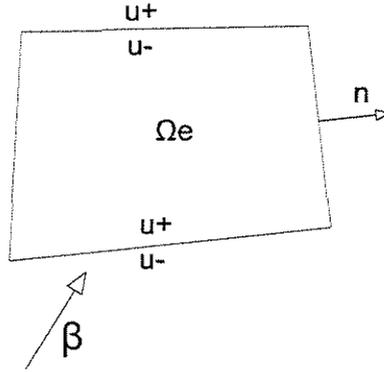


Figura 7.1: Ilustração de u^- e u^+ .

E o problema variacional é enunciado como: encontrar $u \in H^1(P_H)$ tal que

$$B_C(u, v) = L_C(v) \quad (7.3)$$

para $\forall v \in H^1(P_h)$, em que

$$B_C(u, v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla v \cdot \beta) u \, d\Omega + \int_{\Gamma_+^e} v u^- (\beta \cdot n_e) \, ds \right\}$$

e

$$L_C(v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega - \int_{\Gamma_-^e} v f (\beta \cdot n_e) \, ds \right\}.$$

Capítulo 8

Formulação de Convecção-Difusão

O problema de convecção-difusão é enunciado como: encontrar u que seja solução do problema linear,

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) + \text{div}(\beta u) = S \text{ em } \Omega \quad (8.1)$$

$$u = f \text{ em } \Gamma_D$$

$$(A\nabla u) \cdot n = g \text{ em } \Gamma_N$$

em que:

Ω é o domínio com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz;

A é a matriz difusão;

β é o vetor de direção da velocidade de convecção;

n é a normal externa a $\partial\Omega$;

S , f e g são funções conhecidas;

Γ_D é a parte do contorno com condições Dirichlet;

Γ_N é a parte do contorno com condições Neumann;

$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ e $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$.

A partir das formulações variacionais elípticas e hiperbólica linear, pode-se construir a formulação de convecção-difusão. A formulação é dada como: encontrar $u \in H^1(P_H)$ tal que

$$B_{DG}(u, v) = L_{DG}(v) \quad (8.2)$$

para $\forall v \in H^1(P_h)$ e

$$B_{DG}(u, v) = B_C(u, v) + B_H(u, v) + B_S(u, v)$$

$$L_{DG}(v) = L_C(v) + L_H(v) + L_S(v).$$

B_* e L_* são as formas bilineares e lineares definidas nos capítulos anteriores em que:

- B_C é a forma bilinear da formulação de convecção;
- B_H é da formulação de difusão;
- B_S é, quando existir, a penalidade da descontinuidade do problema de difusão (seção 6.3.3);
- e L_* suas respectivas forma lineares.

Neste trabalho foram tratadas duas formulações descontínuas para a difusão, descritas nas seções 6.3.1 e 6.3.2, além da definição de penalização da descontinuidade, descrita na seção 6.3.3, que pode ser utilizada nas duas formulações de difusão.

8.1 Difusão Artificial SUPG

Segundo Erick Santos [18], “o método de Galerkin é sabidamente instável espacialmente quando aplicado a leis de conservação”. Erick Santos [18] e Jorge Calle [4] utilizaram difusão artificial sobre o método de Galerkin descontínuo de forma a prevenir ou diminuir as oscilações decorrentes de descontinuidades da solução capturadas no interior dos elementos. A difusão artificial tratada neste trabalho será a SUPG - *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* [4, 18, 3], posteriormente chamada de SD - *Streamline Diffusion*.

A equação diferencial tratada neste trabalho é dada por:

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) + \text{div}(\beta u) = S \text{ em } \Omega \quad (8.3)$$

$$u = f \text{ em } \Gamma_D$$

$$(A\nabla u) \cdot n = g \text{ em } \Gamma_N$$

e a formulação variacional de Galerkin descontínuo é enunciada como (equação 8.2): encontrar $u \in H^1(P_H)$ tal que

$$B_{DG}(u, v) = L_{DG}(v) \forall v \in H^1(P_h),$$

em que

$$B_{DG}(u, v) = B_C(u, v) + B_H(u, v) + B_S(u, v)$$

$$L_{DG}(v) = L_C(v) + L_H(v) + L_S(v).$$

B_* e L_* são as formas bilineares e lineares definidas no capítulo 8.

Sendo u solução da equação diferencial 8.3, pode-se definir um resíduo R tal que

$$R = S - [-\nabla \cdot (A\nabla u) + \text{div}(\beta u)] = 0.$$

Multiplicando-se esse resíduo por uma função teste ψ e integrando-se no domínio do problema, obtém-se:

$$R\psi = \int_{\Omega} (S + \nabla \cdot (A\nabla u) - \text{div}(\beta u)) \psi \, d\Omega = 0.$$

Na difusão artificial de SUPG a função ψ é definida como

$$\begin{cases} \psi = C \nabla v \cdot \bar{\beta} \text{ em } P_H, \text{ com } \bar{\beta} = \frac{\beta}{\|\beta\|} \\ \psi = 0 \text{ em } \Gamma_{int} \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N \end{cases}$$

Isso é, ψ tem suporte local nos elementos, valendo zero nas interfaces. A constante C é definida como

$$C = \frac{\delta h}{2},$$

em que δh é o tamanho do elemento.

Desse modo, o resíduo é dado por:

$$R\psi = \int_{\Omega} S\psi + \nabla \cdot (A\nabla u)\psi - \text{div}(\beta u)\psi \, d\Omega = 0$$

ou, ainda,

$$R\psi = \sum_{e=1}^{nel} C \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \bar{\beta} + \nabla \cdot (A\nabla u) \nabla v \cdot \bar{\beta} - \text{div}(\beta u) \nabla v \cdot \bar{\beta} \, d\Omega_e = 0.$$

Admitindo-se que o problema de convecção-difusão tem a convecção dominante, o termo elíptico pode ser considerado desprezível se comparado ao termo de convecção. Essa hipótese é bastante razoável, visto que as descontinuidades aparecem apenas em problemas com pequena difusão. Problemas com alta difusão não requerem termo de difusão artificial. Dessa forma:

$$R\psi = \sum_{e=1}^{nel} C \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \bar{\beta} - \text{div}(\beta u) \nabla v \cdot \bar{\beta} \, d\Omega_e = 0.$$

Como

$$\text{div}(\beta u) = \text{div}(\beta) u + \nabla u \cdot \beta$$

e para os problemas tratados neste trabalho

$$\text{div}(\beta) = 0$$

o resíduo toma a forma

$$R\psi = \sum_{e=1}^{nel} C \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \bar{\beta} - (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \bar{\beta}) \, d\Omega_e = 0$$

ou

$$R\psi = \sum_{e=1}^{nel} \frac{C}{\|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta - (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) \, d\Omega_e = 0.$$

Como o resíduo $R\psi = 0$, pode se reescrever a equação como

$$\sum_{e=1}^{nel} \frac{C}{\|\beta\|} \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) \, d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nel} \frac{C}{\|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta \, d\Omega_e$$

ou ainda

$$\sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h}{2\|\beta\|} \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h}{2\|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta d\Omega_e. \quad (8.4)$$

Adicionando-se a equação 8.4 à formulação variacional original do problema (equação 8.2), obtém-se a formulação do método de Galerkin descontínuo para convecção-difusão com convecção dominante e termo de difusão artificial SUPG. A formulação é enunciada como: encontrar $u \in H^1(P_H)$ tal que

$$B_{DG}(u, v) + B_{SUPG}(u, v) = L_{DG}(v) + L_{SUPG}(v) \quad \forall v \in H^1(P_h)$$

em que

$$B_{DG}(u, v) = B_C(u, v) + B_H(u, v) + B_S(u, v)$$

$$L_{DG}(v) = L_C(v) + L_H(v) + L_S(v)$$

com B_* e L_* as formas bilineares e lineares definidas nos capítulos 6 e 7 e

$$B_{SUPG}(u, v) = \sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h_e}{2\|\beta\|} \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) d\Omega_e$$

$$L_{SUPG}(v) = \sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h_e}{2\|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta d\Omega_e.$$

Capítulo 9

Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin descontínuo segue os mesmos princípios do método de elementos finitos:

- construção de uma formulação variacional;
- definição de um espaço de aproximação e da geometria do problema;
- construção da aproximação de Galerkin;
- resolução do problema algébrico;
- avaliação dos resultados.

Suas diferenças se dão na construção da formulação variacional e na definição do espaço de aproximação.

No método de elementos finitos, a formulação variacional assume a continuidade das funções admissíveis entre elementos. Em Galerkin descontínuo, a formulação variacional não assume a continuidade das funções de base e a impõe através de termos integrais sobre o contorno. Nas formulações elípticas estudadas, esses termos são os termos integrais sobre o multiplicador de Lagrange p , mais tarde substituído por $p = \langle A\nabla u \cdot n \rangle$. Na interface entre elementos, o termo integral é dado por

$$\int_{\Gamma_{\text{int}}} (\langle (A\nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A\nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds$$

na formulação de Baumann (seção 6.3.1).

O espaço de funções admissíveis de Galerkin descontínuo tem regularidade menor que C^0 , visto que as funções não são contínuas entre elementos. Entretanto, a imposição da continuidade por termos integrais na formulação variacional, pode ser feita sobre a continuidade

das funções, bem como da primeira derivada, da segunda e assim sucessivamente. Portanto, de um lado o método de Galerkin descontínuo utiliza funções inferiores a C^0 , e de outro ele permite a modelagem de problemas que, se modelados com elementos finitos, exigiriam regularidades de funções do tipo C^1 ou maiores ainda.

Para os problemas tratados neste trabalho, não seriam necessárias funções de maior regularidade que C^0 . A motivação para o uso de Galerkin descontínuo é permitir que, de fato, apareçam descontinuidades na solução ao longo do domínio, fenômeno observado em problemas de convecção, sem que a solução oscile em torno dessas descontinuidades como ocorre com o método de elementos finitos clássico.

Existem, porém, problemas que na sua formulação variacional clássica de elementos finitos requerem funções de maior regularidade. Em duas e, principalmente, três dimensões, tais regularidades são difíceis de serem implementadas. Com o método de Galerkin descontínuo, esses problemas podem ser modelados com razoável simplicidade. Essa característica do método de Galerkin descontínuo torna-o atraente também para a solução de problemas que exigem grande regularidade de funções. Problemas de 4a ordem como placas, casca e vigas são exemplo de problemas que exigem grande regularidade de funções. Além da facilidade de tratamento de tais problemas, o método de Galerkin descontínuo tem um atrativo adicional para problemas de elasticidade: a conservação elemento a elemento. A propriedade de conservação do elemento garante que todos os elementos estão em equilíbrio, mesmo os próximos a singularidades, fato não observado no método de elementos finitos contínuo.

9.1 Aproximação de Galerkin

A aproximação de Galerkin no método de Galerkin descontínuo é feita da mesma forma que para o método de Galerkin contínuo (seção 5.2), diferenciando-se apenas no espaço de funções aproximantes. Enquanto no método de Galerkin contínuo as funções aproximantes são definidas em sub-espacos $V \subset H_0^1(\Omega)$ (ver seção 6.1, equação 6.2), no método de Galerkin descontínuo utilizam-se sub-espacos $V \subset H^1(P_h)$ (ver seção 6.2, equação 6.5).

Desse modo, consideram-se soluções aproximadas $u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ em sub-espacos $V \subset H^1(P_h)$ de dimensão finita N . As funções teste $v(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$ são formadas pela combinação linear das funções de base $\varphi_i(x)$. Substituindo-se as funções aproximantes na formulação variacional será obtido um sistema de equações que pode ser escrito em formato matricial como

$$[K] \cdot \{\alpha\} = \{F\}, \quad (9.1)$$

sendo $K = [K_{ij}]$ a matriz de rigidez;

$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N]^T$ a solução do problema algébrico;

e $F = [F_1, F_2, F_3, \dots, F_N]^T$ o vetor de carga.

A solução α do sistema linear construirá a aproximação da solução do problema variacional como sendo

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x).$$

A construção do sistema de equações 9.1 depende da formulação variacional do problema para construção dos termos K_{ij} e F_i da matriz de rigidez e do vetor de carga. Neste trabalho são tratados os problemas elípticos, hiperbólicos e de convecção-difusão lineares. Para melhor entendimento, a construção da aproximação pelo método de Galerkin descontínuo será abordada em separado para cada problema.

9.1.1 Problema Elíptico

A primeira formulação elíptica apresentada é aquela desenvolvida por Baumann em seu trabalho de doutorado [2]. A formulação variacional da equação diferencial (equação 6.1) é dada por (seção 6.3.1): determinar $u \in H^1(P_h)$ tal que

$$B_H(u, v) = F_H(v) \forall v \in H^1(P_h),$$

em que

$$B_H(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A \nabla u) dx \right) + \int_{\Gamma_D} (u (A \nabla v) \cdot n - v (A \nabla u) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds$$

e

$$L_H(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx \right) + \int_{\Gamma_D} f (A \nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds.$$

Substituindo-se as funções u e v pelas funções aproximantes $\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ e $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$, respectivamente, com $\varphi_k \in V \subset H^1(P_h)$ tem-se:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \cdot (A \nabla \varphi_j) dx \right) + \int_{\Gamma_D} (\varphi_j (A \nabla \varphi_i) \cdot n - \varphi_i (A \nabla \varphi_j) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\langle (A \nabla \varphi_i) \cdot n \rangle [\varphi_j] - \langle (A \nabla \varphi_j) \cdot n \rangle [\varphi_i]) ds$$

e

$$F_i = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \varphi_i S dx \right) + \int_{\Gamma_D} f (A \nabla \varphi_i) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} \varphi_i g ds.$$

Observando-se os termos K_{ij} e F_i , nota-se que existem integrais sobre os elementos (Ω_e) e integrais sobre o contorno desses elementos (Γ_{int} , Γ_D e Γ_N). Separando-se os termos de integral sobre o elemento e seu contorno, podem-se reescrever os termos como:

$$K_{ij} = K_{ij}(\Omega_e) + K_{ij}(\Gamma_D) + K_{ij}(\Gamma_{int})$$

e

$$F_i = F_i(\Omega_e) + F_i(\Gamma_D) + F_i(\Gamma_N)$$

em que

$$K_{ij}(\Omega_e) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \cdot (A \nabla \varphi_j) dx \right)$$

$$K_{ij}(\Gamma_D) = \int_{\Gamma_D} (\varphi_j (A \nabla \varphi_i) \cdot n - \varphi_i (A \nabla \varphi_j) \cdot n) ds$$

$$K_{ij}(\Gamma_{int}) = \int_{\Gamma_{int}} (\langle (A \nabla \varphi_i) \cdot n \rangle [\varphi_j] - \langle (A \nabla \varphi_j) \cdot n \rangle [\varphi_i]) ds$$

$$F_i(\Omega_e) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \varphi_i S dx \right)$$

$$F_i(\Gamma_D) = \int_{\Gamma_D} f(A\nabla\varphi_i) \cdot n ds$$

$$F_i(\Gamma_N) = \int_{\Gamma_N} \varphi_i g ds.$$

As integrais sobre Γ_{int} , Γ_D e Γ_N são integrais sobre as interfaces entre elementos. A interface separa dois elementos vizinhos $\Omega_{esquerdo}$ e $\Omega_{direito}$. O vetor normal à interface tem seu sentido definido do elemento $\Omega_{esquerdo}$ para o elemento $\Omega_{direito}$ e o salto das funções $[-]$ é definido como

$$[v] = v|_{\Omega_{esquerdo}} - v|_{\Omega_{direito}}.$$

As funções φ_i têm suporte no interior do elemento. A elas estão associados os graus de liberdade α_i . As integrais de contorno são definidas sobre o traço das funções φ_i na fronteira dos elementos. O termo $K_{ij}(\Gamma_{int})$ contém termos de média $\langle - \rangle$ e salto $[-]$ que podem ser expandidos. Substituindo-se a notação das funções à esquerda da interface por φ_i^e e as funções à direita da interface por φ_i^d , o termo $K_{ij}(\Gamma_{int})$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} K_{ij}(\Gamma_{int}) &= \int_{\Gamma_{int}} \frac{1}{2} \{ (A\nabla\varphi_i^e) \cdot n \varphi_j^e - (A\nabla\varphi_j^e) \cdot n \varphi_i^e \} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_{int}} \frac{1}{2} \{ + (A\nabla\varphi_i^d) \cdot n \varphi_j^e + (A\nabla\varphi_j^e) \cdot n \varphi_i^d \} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_{int}} \frac{1}{2} \{ - (A\nabla\varphi_i^e) \cdot n \varphi_j^d - (A\nabla\varphi_j^d) \cdot n \varphi_i^e \} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_{int}} \frac{1}{2} \{ - (A\nabla\varphi_i^d) \cdot n \varphi_j^d + (A\nabla\varphi_j^d) \cdot n \varphi_i^d \} ds. \end{aligned}$$

A aproximação de Galerkin para a formulação elíptica simétrica (seção 6.3.2) segue os mesmos passos apresentados para a formulação de Baumann, havendo uma diferença de sinais no termo $K_{ij}(\Gamma_{int})$.

9.1.2 Problema Hiperbólico

A formulação fraca do problema de convecção linear (equação 7.3), definido no Capítulo 7, é dada por:

encontrar $u \in H^1(P_H)$ tal que

$$B_C(u, v) = L_C(v) \forall v \in H^1(P_h),$$

em que

$$B_C(u, v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla v \cdot \beta) u \, d\Omega + \int_{\Gamma_+^e} v u^- (\beta \cdot n_e) \, ds \right\}$$

e

$$L_C(v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} S v \, d\Omega - \int_{\Gamma_-^e} v f(\beta \cdot n_e) \, ds \right\}.$$

Substituindo-se as funções u e v pelas funções aproximantes $\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ e $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$, respectivamente, com $\varphi_k \in V \subset H^1(P_h)$ tem-se:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla \varphi_i \cdot \beta) \varphi_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_+^e} \varphi_i \varphi_j^- (\beta \cdot n_e) \, ds \right\}$$

e

$$F_i = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} S \varphi_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_-^e} \varphi_i f(\beta \cdot n_e) \, ds \right\}.$$

Observando-se os termos K_{ij} e F_i , nota-se que existem integrais sobre os elementos (Ω_e) e integrais sobre o contorno desses elementos (Γ_+^e e Γ_-^e). Separando-se os termos de integral sobre os elementos e seus contornos, podem-se reescrever os termos como:

$$K_{ij} = K_{ij}(\Omega_e) + K_{ij}(\Gamma_+^e)$$

e

$$F_i = F_i(\Omega_e) + F_i(\Gamma_-^e)$$

em que

$$K_{ij}(\Omega_e) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla \varphi_i \cdot \beta) \varphi_j d\Omega \right\}$$

$$K_{ij}(\Gamma_+^e) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Gamma_+^e} \varphi_i \varphi_j^- (\beta \cdot n_e) ds \right\}$$

$$F_i(\Omega_e) = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} S \varphi_i d\Omega$$

$$F_i(\Gamma_-^e) = \sum_{e=1}^{nel} \left(- \int_{\Gamma_-^e} \varphi_i f (\beta \cdot n_e) ds \right).$$

As integrais sobre Γ_+^e e Γ_-^e são integrais sobre o contorno dos elementos. O contorno de um elemento pode ser representado por um conjunto de interfaces. Uma interface separa dois elementos vizinhos $\Omega_{esquerdo}$ e $\Omega_{direito}$. A integral sobre Γ_+^e pode ser calculada como a integral sobre as interfaces do elemento do tipo Γ_+^e . Toda interface é contorno do tipo Γ_-^e para um dos vizinhos e Γ_+^e para o outro (ver figura 7.1). A integral da interface é feita sobre as funções do elemento pelo qual ela é Γ_+^e . Desse modo, a integral sobre todas as interfaces do domínio será equivalente à integral de todos os elementos sobre seus contornos Γ_+^e .

9.1.3 Termo de Penalização

O termo de penalização, definido em 6.3.3, é dado por:

$$B_S(u, v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma u v) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\sigma [u] [v]) ds$$

$$L_S(v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma f v) ds.$$

Substituindo-se as funções u e v pelas funções aproximantes $\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ e $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$, respectivamente, com $\varphi_k \in V \subset H^1(P_h)$ tem-se:

$$K_{ij} = K_{ij}(\Gamma_D) + K_{ij}(\Gamma_{int})$$

e

$$F_i = F_i(\Gamma_D)$$

com

$$K_{ij}(\Gamma_D) = \int_{\Gamma_D} (\sigma \varphi_j \varphi_i) ds$$

$$K_{ij}(\Gamma_{int}) = \int_{\Gamma_{int}} (\sigma [\varphi_j] [\varphi_i]) ds$$

$$F_i(\Gamma_D) = \int_{\Gamma_D} (\sigma f \varphi_i) ds$$

As funções φ_i têm suporte no interior do elemento. A elas estão associados os graus de liberdade α_i . As integrais de contorno são definidas sobre o traço das funções φ_i na fronteira dos elementos. O termo $K_{ij}(\Gamma_{int})$ contém termos de salto $[-]$ que podem ser expandidos. Substituindo-se a notação das funções à esquerda da interface por φ_i^e e as funções à direita da interface por φ_i^d , o termo $K_{ij}(\Gamma_{int})$ pode ser reescrito como

$$K_{ij}(\Gamma_{int}) = \int_{\Gamma_{int}} \sigma \{ \varphi_i^e \varphi_j^e - \varphi_i^e \varphi_j^d - \varphi_i^d \varphi_j^e + \varphi_i^d \varphi_j^d \} ds$$

9.1.4 Problema de Convecção-Difusão

A formulação variacional do problema de convecção-difusão (equação 8.1) é definida em 8.

Substituindo-se, na equação 8.1, as funções u e v pelas funções aproximantes $\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x)$ e $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$, respectivamente, com $\varphi_k \in V \subset H^1(P_h)$ tem-se o problema algébrico $[K] \cdot \{\alpha\} = \{F\}$ em que

$$K_{ij} = [K_{ij}(\Omega_e) + K_{ij}(\Gamma_D) + K_{ij}(\Gamma_{int})]^{elptico} + [K_{ij}(\Omega_e) + K_{ij}(\Gamma_+^e)]^{hiperblico} + [K_{ij}(\Gamma_D) + K_{ij}(\Gamma_{int})]^{penalizao}$$

$$F_i = [F_i(\Omega_e) + F_i(\Gamma_D) + F_i(\Gamma_N)]^{elptico} + [F_i(\Omega_e) + F_i(\Gamma_-^e)]^{hiperblico} + [F_i(\Gamma_D)]^{penalizao}$$

9.2 Implementação Computacional

9.2.1 Ambiente PZ

O ambiente PZ é um conjunto de classes em linguagem C++ que permitem a simulação do método de elementos finitos. O ambiente PZ é constituído de módulos bastante separados, os quais combinados provêm as funcionalidades necessárias a um código de elementos finitos. Na execução deste trabalho alguns módulos foram mais importantes e podem ser destacados:

- geometria e espaços de interpolação
- material
- algébrico
- pós-processamento

9.2.2 Geometria e Espaços de Interpolação

O ambiente PZ possui uma distinção muito forte entre geometria e interpolação. Para a definição da topologia da malha existem elementos geométricos (*TPZGeoEL*) associados a malhas geométricas (*TPZGeoMesh*). Os elementos geométricos compõem a vizinhança de cada elemento e o mapeamento do elemento mestre (ou de referência) para o elemento deformado na malha, bem como o cálculo das restrições de funções de forma entre elementos de malhas não conformes (com *hangingnodes*), para simulações do método de elementos finitos clássico.

O espaço de interpolação é implementado pelos elementos computacionais, derivados da classe base *TPZCompEl*. O método de elementos finitos clássico é implementado pela classe *TPZInterpolatedElement* derivada de *TPZCompEl*. O método de Galerkin descontínuo é implementado pelas classes *TPZCompElDisc* e *TPZInterfaceElement*, ambas derivadas de *TPZCompEl*. A classe *TPZCompElDisc* é responsável pela interpolação no interior dos elementos descontínuos e *TPZInterfaceElement* é responsável pelos cálculos na interface entre elementos.

Uma estratégia adotada neste trabalho é a de combinar elementos descontínuos e elementos contínuos em uma mesma simulação. A abordagem é relativamente simples. Em uma região do domínio, descreve-se o problema com elementos finitos e, em outra região, com Galerkin descontínuo. Na fronteira entre essas duas regiões são utilizados elementos de interface entre elementos contínuos e descontínuos.

Foi necessária uma modificação na classe *TPZInterfaceElement* para acomodar essa nova funcionalidade. O elemento descontínuo define as funções de base sobre o elemento real.

Já o elemento contínuo, no PZ, define as funções em elemento mestre, ou de referência. Para o cálculo da contribuição de interface, solicita-se ao elemento contínuo o valor de suas funções e derivadas restritas à interface, a partir de um ponto de integração em coordenadas paramétricas. As coordenadas paramétricas são mapeadas para coordenadas reais e esse novo ponto é fornecido ao elemento descontínuo para o cálculo de suas funções e derivadas restritas à interface. De mão das funções e derivadas de seus vizinhos, a interface calcula a contribuição de seus termos para a matriz de rigidez e vetor de carga.

São necessários elementos de interface entre elementos descontínuos e entre um elemento contínuo e outro descontínuo. Entretanto, poder-se-iam utilizar elementos de interface entre elementos contínuos. Isso, de fato, em nada modificaria o problema. As contribuições da interface à sua esquerda e à sua direita ocorreriam sobre os mesmos graus de liberdade, anulando-se.

9.2.2.1 TPZConnect

Uma classe muito importante na construção dos espaços de interpolação é a classe TPZConnect. O *connect* associa os graus de liberdade e as funções de forma do problema aos elementos computacionais. Conforme descrito anteriormente, existem três classes básicas para a construção dos espaços de interpolação:

- TPZInterpolatedElement para a construção de espaços de interpolação contínuos
- TPZCompElDisc e TPZInterfaceElement para a construção de espaços de interpolação descontínuos

Neste trabalho foram utilizadas malhas bidimensionais com elementos quadriláteros e triângulos. O elemento quadrilátero contínuo possui nove *connects* e o triângulo seis *connects*. A figura 9.1 mostra a posição e a ordem dos *connects*. Existem *connects* associados a nós, arestas e faces. Em elementos tridimensionais, não tratados neste trabalho, existe ainda *connect* associado a volume.

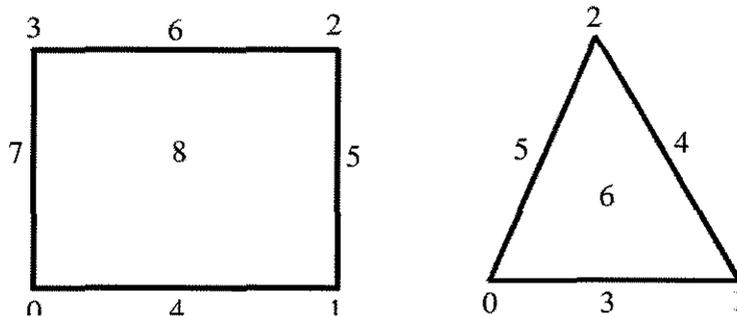


Figura 9.1: *Connects* dos elementos quadrilátero e triângulo

O *connect* é de grande importância quando dois elementos vizinhos têm ordem de interpolação diferentes. Por exemplo, sejam dois elementos quadriláteros vizinhos (A e B) de ordem de interpolação polinomial igual a um e dois respectivamente (figura 9.2).

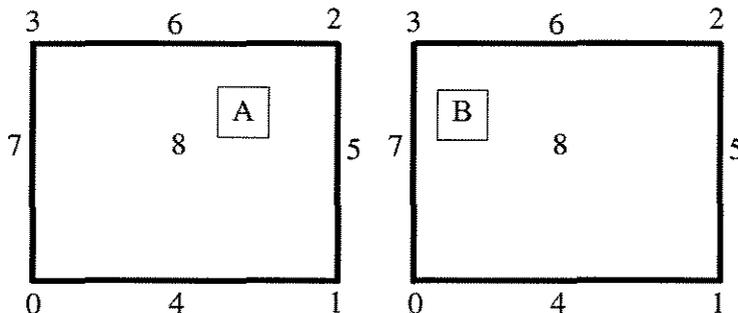


Figura 9.2: Elementos quadriláteros vizinhos

O elemento A possui quatro funções de forma associadas aos quatro nós (*connects* 0, 1, 2 e 3). São as funções chamadas “chapéu”. O elemento B possui as mesmas quatro funções de forma associadas aos nós e mais cinco funções quadráticas sendo quatro associadas às arestas (*connects* 4, 5, 6 e 7) e uma associada à face (*connect* 8). Para que o espaço de interpolação seja contínuo entre os elementos a função quadrática associada ao *connect* 7 do elemento B é desconsiderada.

Seja um segundo exemplo em que os mesmos elementos A e B da figura 9.2 têm ordem polinomial de interpolação igual a dois e três respectivamente. Para que o espaço de interpolação seja contínuo, os *connects* 5 do elemento A e 7 do elemento B devem ter a mesma ordem de interpolação e suas funções de forma devem ser contínuas entre elas. Assim, a função de ordem três associada ao *connect* 7 do elemento B é desconsiderada. A figura 9.3 mostra as funções de forma de ordem dois associadas aos *connects* vizinhos. É preciso definir

uma orientação para a construção das funções, de modo a evitar o apresentado na figura 9.4. O PZ define a orientação como sendo do nó de menor Id para o maior Id. Como o Id do nó é uma variável global os elementos vizinhos seguem a mesma orientação.

De fato, *connects* vizinhos são compartilhados entre os elementos no PZ. Os *connects* 5 do elemento *A* e 7 do elemento *B* são na verdade o mesmo objeto *connect*. Além desse *connect*, os elementos *A* e *B* compatilham os *connects* 1 e 2 do elemento *A* com os *connects* 0 e 3 do elemento *B*.

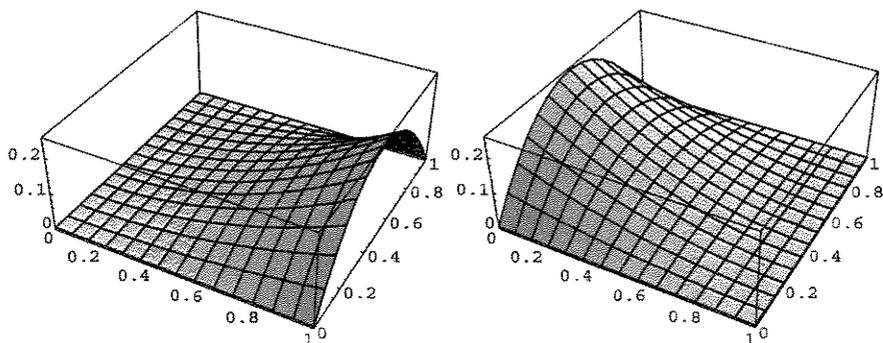


Figura 9.3: Função de aresta de ordem polinomial 2 de dois elementos vizinhos

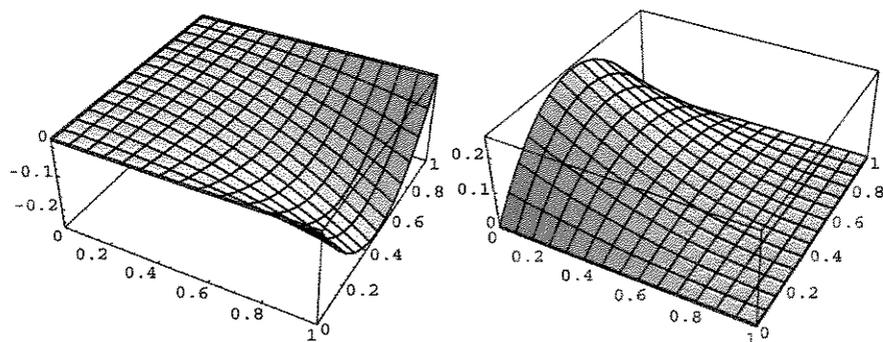


Figura 9.4: Função de aresta de ordem polinomial 2 de dois elementos vizinhos com erro na orientação

Como visto, o elemento quadrilátero contínuo possui 9 *connects* de modo a garantir a continuidade das funções de forma entre elementos vizinhos. O elemento descontínuo, por sua vez, não requer continuidade de suas funções entre vizinhos. Por isso, é necessário apenas um *connect* para definir suas funções de forma, as quais coincidem com as funções de base.

A figura 9.5 mostra um elemento descontínuo *A* com dois vizinhos: um descontínuo *B* e um contínuo *C*. Entre um descontínuo e outro elemento é criado um elemento tipo interface (*TPZInterfaceElement*).

A interface não possui seus próprios *connects*. Elas apenas identifica os *connects* de seus vizinhos e os utiliza em seus cálculos. Nota-se que o *connect* do elemento descontínuo não é compartilhado com nenhum outro elemento.

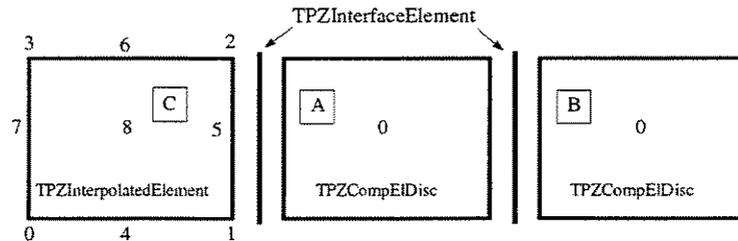


Figura 9.5: Elementos contínuo, descontínuos e interfaces

9.2.3 Formulação Variacional

As classes de material implementam formulações variacionais. Sua função é calcular o valor da matriz de rigidez e do vetor de carga de um elemento em um dado ponto de integração. A interface é definida pelas classes *TPZMaterial* e *TPZDiscontinuousGalerkin*.

A classe *TPZMaterial* define as interfaces para a construção de problemas do método elementos finitos contínuo. São de especial importância os métodos:

- *Contribute*: calcula a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento em um ponto de integração.
- *ContributeBC*: calcula a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento tipo condição de contorno em um ponto de integração. O PZ trabalha com condições de contorno tipo Dirichlet, Neumann e mista. A condição de contorno Dirichlet é imposta como uma penalidade na matriz de rigidez e no vetor de carga.

A classe *TPZDiscontinuousGalerkin* é derivada da classe *TPZMaterial*. A função da classe *TPZDiscontinuousGalerkin* é definir as interfaces adicionais necessárias para o método de Galerkin descontínuo. São de especial importância o método *Contribute* já definido na classe *TPZMaterial* e os métodos:

- *ContributeInterface*: calcula a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento de interface em um ponto de integração.

- `ContributeBCInterface`: calcula a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento de interface de contorno em um ponto de integração.

As simulações de Galerkin descontínuo não utilizam o método `ContributeBC`. As condições de contorno são aplicadas pelo método `ContributeBCInterface`.

Nas formulações utilizadas, um mesmo material pôde implementar elementos finitos e Galerkin descontínuo. Isso porque o método `Contribute`, que realiza a integração sobre o elemento, é o mesmo para ambos os métodos. Sempre que isso for válido, pode-se utilizar a mesma classe para implementar elementos finitos e Galerkin descontínuo.

9.2.3.1 TPZMatPoisson3d

As formulações de elementos finitos contínuo e de Galerkin descontínuo descritas neste trabalho são implementadas pelo material `TPZMatPoisson3d`. Para Galerkin descontínuo de Baumann, a formulação com termo de penalização da interface e SUPG é dada por

$$B_{DG}(u, v) = L_{DG}(v)$$

$$B_H(u, v) + B_C(u, v) + B_S(u, v) + B_{SUPG}(u, v) = L_H(v) + L_C(v) + L_S(v) + L_{SUPG}(v)$$

em que

$$B_H(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A \nabla u) dx \right) + \int_{\Gamma_D} (-u (A \nabla v) \cdot n - v (A \nabla u) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_{int}} (-\langle (A \nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A \nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds$$

$$B_C(u, v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega_e} -(\nabla v \cdot \beta) u d\Omega + \int_{\Gamma_{\pm}^e} v u^{-} (\beta \cdot n_e) ds \right\}$$

$$B_S(u, v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma u v) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\sigma [u] [v]) ds$$

$$B_{SUPG}(u, v) = \sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h_e}{2 \|\beta\|} \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) d\Omega_e$$

$$L_H(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx \right) + \int_{\Gamma_D} -f(A\nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds$$

$$L_C(v) = \sum_{e=1}^{nel} \left\{ - \int_{\Gamma_e^-} v f(\beta \cdot n_e) ds \right\}$$

$$L_S(v) = \int_{\Gamma_D} (\sigma f v) ds$$

$$L_{SUPG}(v) = \sum_{e=1}^{nel} \frac{\delta h_e}{2 \|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta d\Omega_e$$

Esses termos podem ser reagrupados como

$$B_I(u, v) + B_{II}(u, v) + B_{III}(u, v) = L_I(v) + L_{II}(v)$$

em que

$$B_I(u, v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} \nabla v \cdot (A\nabla u) dx + \int_{\Omega_e} -(\nabla v \cdot \beta) u d\Omega + \frac{\delta h_e}{2 \|\beta\|} \int_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \beta) (\nabla v \cdot \beta) d\Omega_e \right)$$

$$B_{II}(u, v) = \int_{\Gamma_{int}} (-\langle (A\nabla v) \cdot n \rangle [u] - \langle (A\nabla u) \cdot n \rangle [v]) ds + \int_{\Gamma_+^e} v u^-(\beta \cdot n_e) ds + \int_{\Gamma_{int}} (\sigma [u] [v]) ds$$

$$B_{III}(u, v) = \int_{\Gamma_D} (-u (A\nabla v) \cdot n - v (A\nabla u) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_D} (\sigma u v) ds$$

$$L_I(v) = \sum_{e=1}^{Nelem} \left(\int_{\Omega_e} v S dx + \frac{\delta h_e}{2 \|\beta\|} \int_{\Omega_e} S \nabla v \cdot \beta d\Omega_e \right)$$

$$L_{II}(v) = \int_{\Gamma_D} -f(A\nabla v) \cdot n ds + \int_{\Gamma_N} v g ds - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_e^-} v f(\beta \cdot n_e) ds + \int_{\Gamma_D} (\sigma f v) ds$$

Os principais métodos das classes de material são *Contribute*, *ContributeBC*, *ContributeInterface* e *ContributeBCInterface*.

O método *Contribute* implementa o valor da integral sobre o elemento para um dado ponto de integração. Isso significa que o método *Contribute* implementa $B_I(u, v)$ e $L_I(v)$.

O método *ContributeBC* não é utilizado em Galerkin descontínuo. A função desse método é aplicar as condições de contorno para elementos finitos contínuo.

ContributeInterface implementa a integração sobre elementos de interface, o que equivale ao termo $B_{II}(u, v)$.

Finalmente, o método *ContributeBCInterface* implementa as condições de contorno de Galerkin descontínuo dadas pelos termos $B_{III}(u, v)$ e $L_{II}(v)$.

Em simulações de elementos finitos contínuo são utilizados o método *Contribute* apresentado e o método *ContributeBC*, esse último para aplicação das condições de contorno.

9.2.4 Algébrico

O ambiente PZ possui um módulo algébrico. Nesse módulo são implementadas matrizes e métodos de resolução de sistemas lineares. São disponíveis diversos modos de armazenamento de matrizes:

- matriz cheia
- matriz em banda
- matriz simétrica em banda
- matriz simétrica sky-line
- matriz esparsa

Os métodos diretos de resolução de sistemas lineares disponíveis são:

- decomposição de Cholesky
- decomposição LU
- decomposição LDL^T
- método frontal

E os métodos iterativos implementados são:

- Jacobi

- SOR e SSOR
- métodos de Krilov: gradiente conjugado, GMRes, gradiente bi-conjugado etc.

9.2.5 Pós-processamento

Após a resolução do sistema de equações é preciso fazer o pós-processamento da solução e sua visualização gráfica. O PZ possui um módulo de exportação da solução e de variáveis pós-processadas (como gradiente, por exemplo) para visualização no programa OpenDX. Os resultados gráficos apresentados neste trabalho foram obtidos através desse programa.

Capítulo 10

Resolução de Problemas

10.1 Problema Elíptico

10.1.1 Descrição do Problema

O problema elíptico teste é dado pela solução analítica

$$u(x, y) = 4(1 - x^2)(1 - y^2)e^{0.75(x+y)}$$

para a equação diferencial

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = S \text{ em } \Omega = (-1, 1)^2$$

em que

$$A = 1$$

$$S = e^{0.75(x+y)} (8(1 - y^2) + 12x(1 - y^2) - 4.5(1 - x^2)(1 - y^2) + 8(1 - x^2) + 12y(1 - x^2))$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma_D = \partial\Omega$$

$$\Gamma_N = \emptyset.$$

São comparados os métodos de elementos finitos clássico e de Galerkin descontínuo. O

método de Galerkin descontínuo é implementado segundo as formulações de GEM (6.3.2) e Baumann (6.3.1), com e sem penalidades. A figura 10.1 mostra a solução analítica do problema.

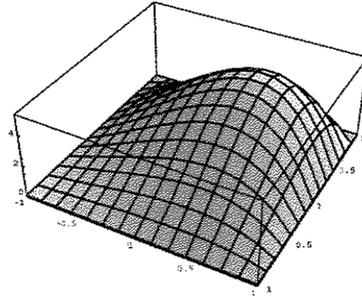


Figura 10.1: Solução analítica do problema

10.1.2 Análise dos Autovalores da Matriz de Rigidez

Bloco diagonal A resolução do sistema linear $K \alpha = F$ pode ser via métodos iterativos. A taxa de convergência de métodos iterativos é fortemente influenciada pelo condicionamento da matriz K . Para melhorar o condicionamento de uma matriz, utilizam-se pré-condicionadores, tal como o pré-condicionador bloco diagonal.

O pré-condicionador bloco diagonal consiste em extrair da matriz K os termos da diagonal. Esses termos são as posições k_{ij} da matriz K que correspondem às funções φ_i e φ_j associadas a cada elemento. A matriz de bloco diagonal pode ser representada como

$$\begin{pmatrix} [Bloco1]^{-1} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [Bloco2]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [Bloco3]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [Bloco4]^{-1} \end{pmatrix}$$

em que cada $Bloco_i$ é a sub-matriz das funções associadas ao elemento i .

Um estudo, utilizando-se o software *Mathematica*, mostrou que os blocos i da formulação simétrica do GEM são singulares, o que impossibilita a sua inversão para calcular $[Bloco_i]^{-1}$. Desse modo, a solução do sistema de equações lineares do método de GEM, via método iterativo, fica prejudicado no uso de pré-condicionadores. Uma estratégia adotada foi a de compor os blocos i com as funções associadas ao elemento e seus vizinhos (4 no caso de elemento quadrilateral). Nessa abordagem, os blocos deixaram de ser singulares. Entretanto a convergência do método iterativo de GMRES não foi acelerada com o uso desse pré-condicionador para o problema testado.

Além disso, notou-se que a matriz de rigidez global do método de GEM possui autovalores negativos, isso é, a matriz não é positiva definida. A utilização de termos de penalização (6.3.3) pode tornar os autovalores dos blocos diagonais e da matriz global positivos. Isso pode ocorrer se o termo de penalização for suficientemente grande.

A formulação de Baumann produz bloco diagonal positivo semidefinido para ordens de interpolação quadrática ou maior. E a matriz global é também positiva semidefinida. Isso foi observado no estudo no *Mathematica* e apresentado por Prudhomme et al [15]. Observou-se, no *Mathematica*, que os autovalores das matrizes são complexos com parte real positiva. A verificação da positividade definida foi feita analisando-se a parte simétrica das matrizes. Se M é a matriz não simétrica de Baumann, sua parte simétrica é dada por $M_{simetrica} = \frac{1}{2}(M + M^T)$. Os autovalores de $M_{simetrica}$ são positivos, com exceção de um deles que é zero. Logo a matriz M não pode ser dita positiva definida, mas positiva semidefinida.

10.1.3 Resultados

Nessa seção são apresentados os gráficos de convergência dos métodos. Os gráficos de convergência são apresentados em função do número de elementos da malha para diferentes ordens de interpolação. Em todos os casos, os elementos têm o mesmo tamanho e a mesma ordem de interpolação (refinamento uniforme).

Vale lembrar que, para mesma ordem de interpolação e mesmo número de elementos, o método de Galerkin descontínuo requer mais graus de liberdade que o método clássico de elementos finitos. Isso se deve ao fato de que, em Galerkin descontínuo, as funções de base têm suporte local ao elemento. Ou seja, os graus de liberdade de um elemento não são compartilhados com seus vizinhos como ocorre em elementos finitos.

As figuras 10.3, 10.4 e 10.5 apresentam um comparativo dos erros em norma L2 e seminorma de H1 para os métodos de elementos finitos, Galerkin descontínuo de Baumann e GEM sem a utilização de termos de penalidade. Percebe-se que as formulações de Baumann e GEM são equivalentes se comparadas em seminorma de H1. Nota-se ainda a superioridade do método de elementos finitos clássico na resolução desse problema (solução suave). Essa superioridade acentua-se mais se comparado o custo computacional (número de graus de liberdade) de cada método. O método de elementos finitos requer menos graus de liberdade que os métodos de Galerkin descontínuo. A tabela a seguir mostra o número de equações para algumas das simulações que originaram os gráficos de convergência:

p = 2	Número de equações	
	Elementos finitos	Galerkin descontínuo
nel		
4	25	36
16	81	144
64	289	576
256	1089	2304
p = 5		
nel		
4	121	144
16	441	576
64	1681	2304

Figura 10.2: Número de equações para elementos finitos e Galerkin descontínuo

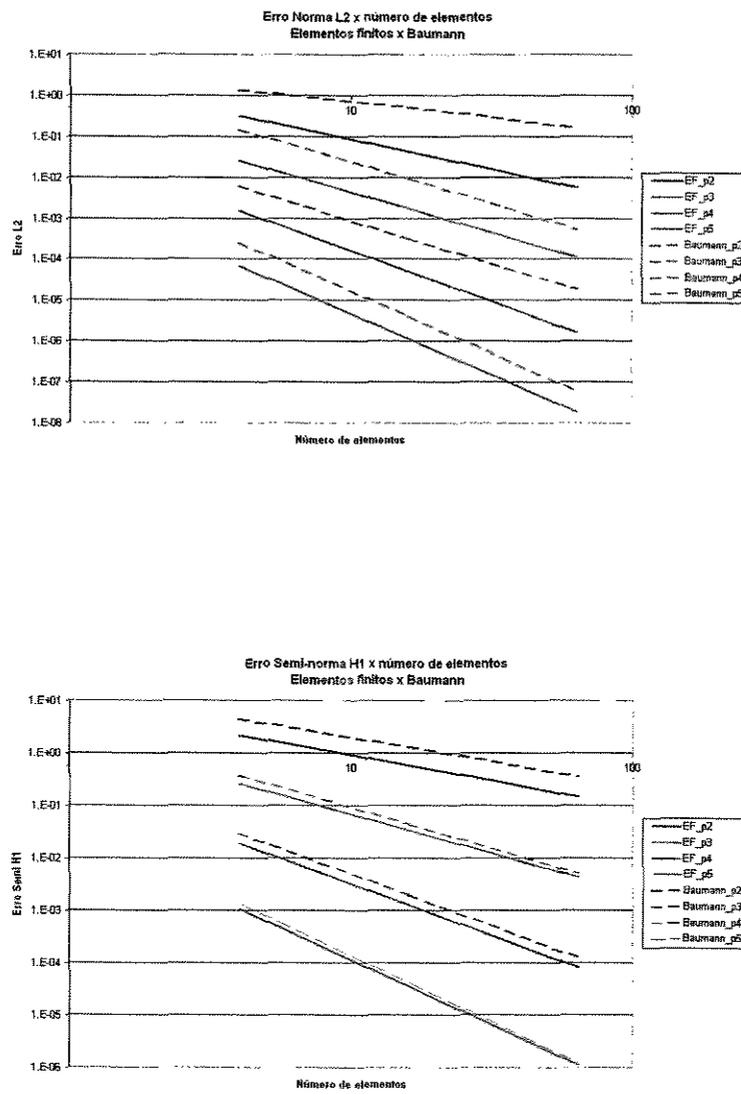


Figura 10.3: Comparação entre elementos finitos e Galerkin descontínuo de Baumann

Erro em norma L2 e seminorma de H1

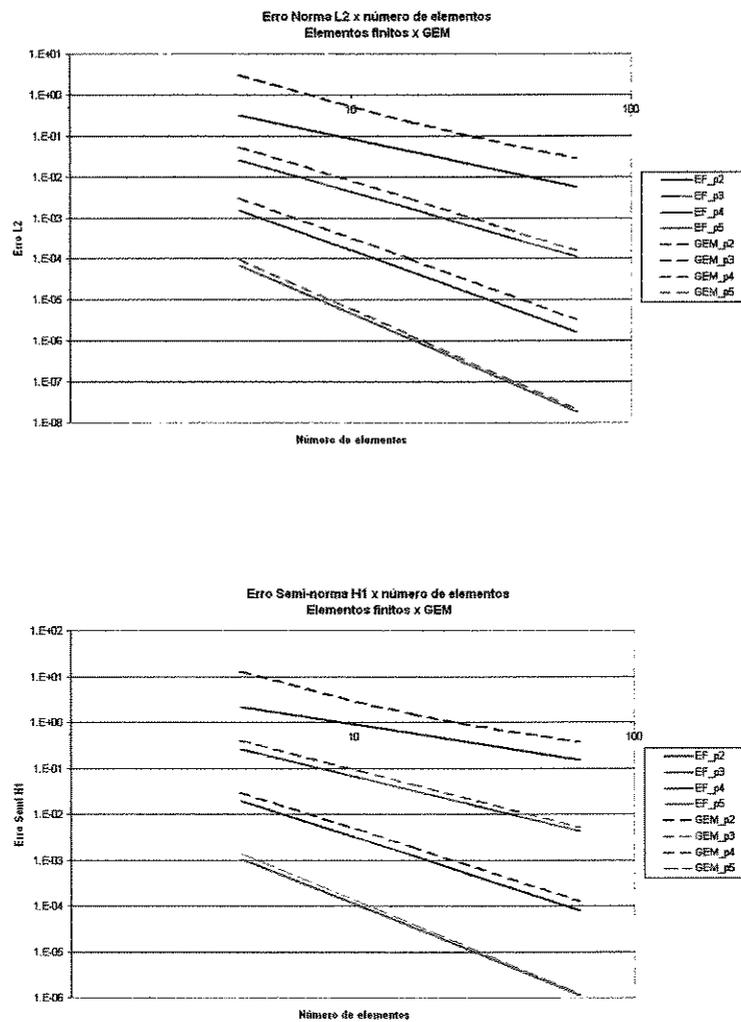


Figura 10.4: Comparação entre elementos finitos e GEM

Erro em norma L2 e seminorma de H1

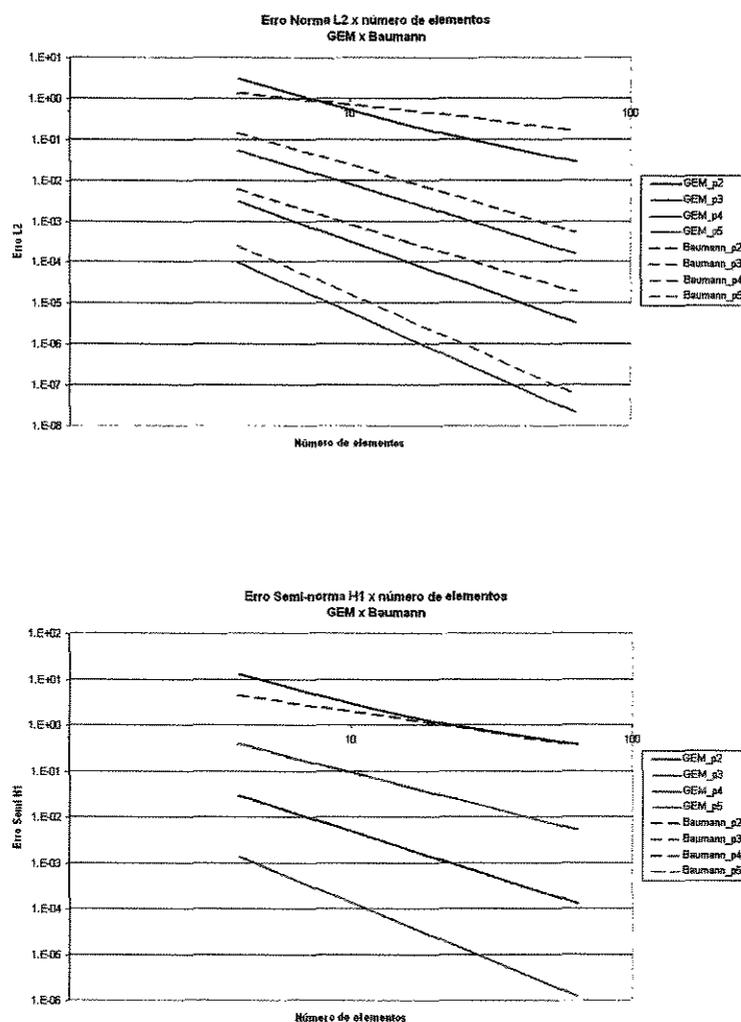


Figura 10.5: Comparação entre GEM e Galerkin descontínuo de Baumann

Erro em norma $L2$ e seminorma de $H1$

Baumann [2] diz que a taxa de convergência dos métodos deve ser:

- para elementos finitos: em norma $L2$ deve ser $p + 1$; e em seminorma de $H1$ deve ser p .
- para Galerkin descontínuo de Baumann: em norma $L2$ deve ser p quando p for par e $p + 1$ quando for ímpar; e p em seminorma de $H1$.
- para GEM: em norma $L2$ deve ser $p + 1$; e em seminorma de $H1$ deve ser p .

Isso é o mesmo que dizer que elementos finitos e GEM possuem convergência ótima em

norma $L2$ e seminorma de $H1$, enquanto a formulação de Baumann tem uma deficiência para p pares, quando a convergência em norma $L2$ é sub-ótima.

Observando os gráficos de convergência (figuras 10.3, 10.4 e 10.5) constata-se o respeito a essas taxas analíticas.

As figuras 10.6, 10.7 e 10.8 comparam as versões dos métodos de Galerkin descontínuo de Baumann e GEM com e sem termo de penalidade. Observa-se que a aplicação do termo de penalidade com $C = 1$ (ver seção 6.3.3) diminui o erro da solução. Já o GEM necessita de uma penalidade maior ($C = 10$) para melhorar a solução. O termo de penalidade com $C = 1$ piora a solução do GEM.

Na figura 10.9, observa-se que a aplicação de uma forte penalidade ($C = 10$) conduz a resultados equivalentes aos do método de elementos finitos clássico.

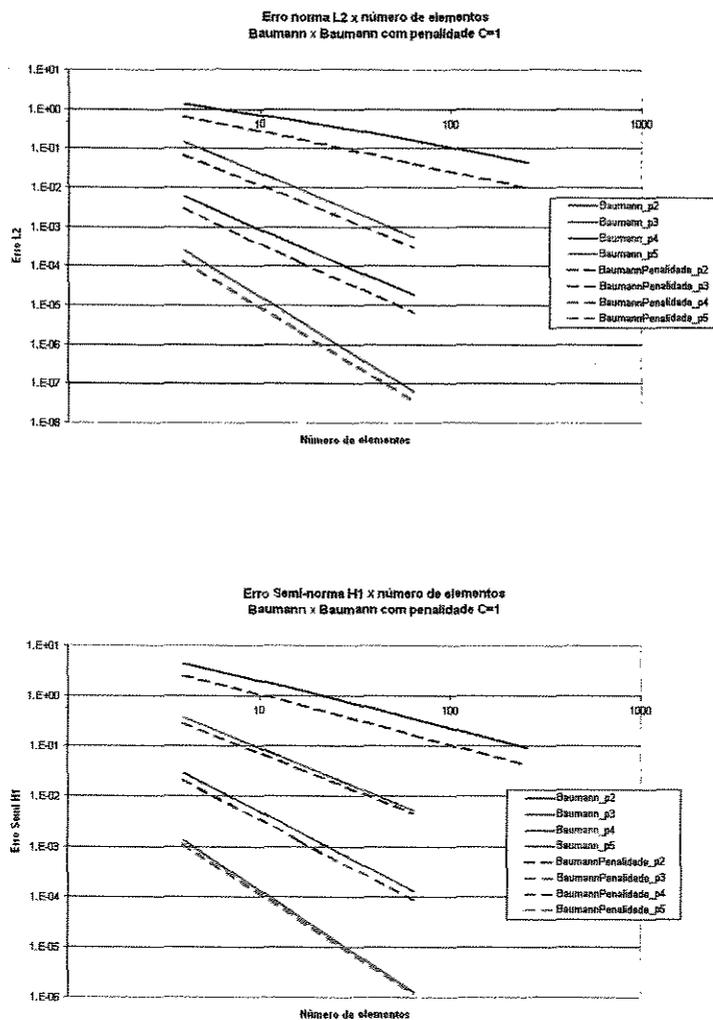


Figura 10.6: Comparação entre Galerkin descontínuo de Baumann com e sem penalidade

Erro em norma L2 e seminorma de H1

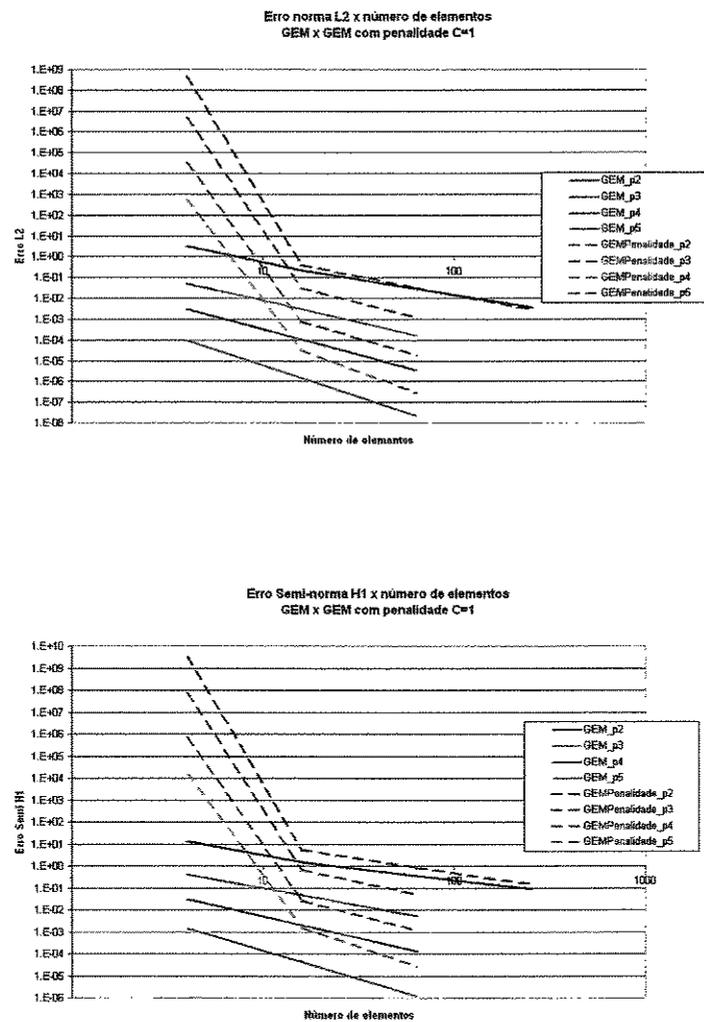


Figura 10.7: Comparação entre GEM com e sem penalidade
Penalidade com $C = 1$. Erro em norma L2 e seminorma de H1

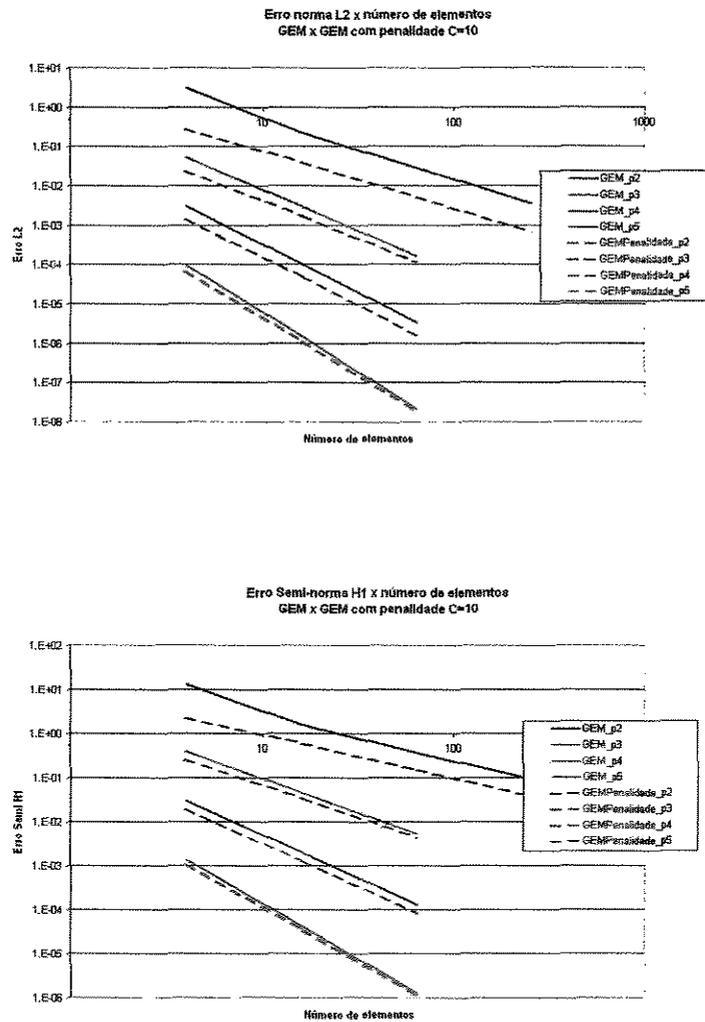


Figura 10.8: Comparação entre GEM com e sem penalidade Penalidade com $C = 10$. Erro em norma L2 e seminorma de H1

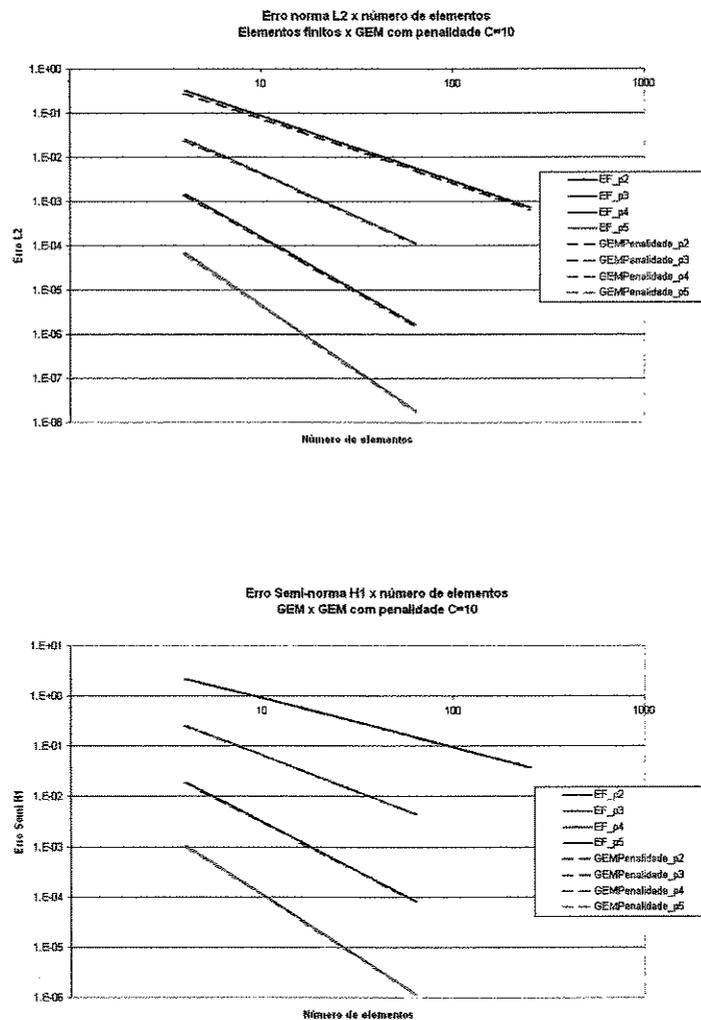


Figura 10.9: Comparação entre elementos finitos e GEM com forte penalidade

Penalidade com $C = 10$. Erro em norma L2 e seminorma de H1

10.2 Problema de Convecção-Difusão

Este problema de convecção-difusão escalar, com a convecção dominante, apresenta uma descontinuidade ao longo do domínio imposta pelas condições de fronteira Dirichlet. O objetivo neste teste é avaliar o comportamento do método de Galerkin descontínuo com respeito às oscilações. Foram realizados testes com a formulação descontínua de Baumann sem penalidade e a formulação contínua de elementos finitos. Para ambos os casos observou-se a qualidade da solução acrescentando-se o termo de difusão artificial de SUPG.

Os parâmetros do problema (figura 10.10) são dados para a equação diferencial

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) + \text{div}(\beta u) = S \text{ em } \Omega = (-1, 1)^2$$

em que $A = 1.0e-6$, $\beta = \{1, 1\}^T$ e $S = 0$. As condições de contorno são Dirichlet valendo zero ou 1.0 conforme a fronteira. A condição de contorno é descontínua em alguns pontos (variando de zero a 1.0 bruscamente), da qual aparecerá a descontinuidade da solução.

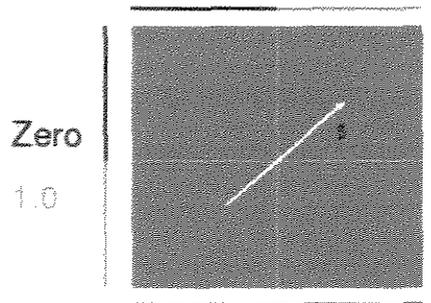


Figura 10.10: Enunciado do problema

Tentou-se utilizar o termo de penalização na formulação de Baumann. O termo de penalização foi definido (seção 6.3.3) como $\sigma = kh^{-1}$ com $k = CAp^2$. Utilizando-se $C = 1$, nenhuma diferença pôde ser notada com relação à formulação de Baumann sem penalização. Isso porque com o valor de $A = 1.e - 6$, o termo K é muito pequeno com relação ao termo convectivo. Utilizando-se $C = 1.e + 6$, a solução de Baumann com penalização assemelha-se muito à solução de elementos finitos.

Um valor intermediário deveria ser adotado, avaliando-se a estabilidade da solução, que se deteriora à medida que o método converge para o método de elementos finitos. Dada essa ineficiência do método com penalidade, esse será doravante abandonado neste trabalho para a resolução de problemas de convecção dominante.

As figuras 10.11, 10.12, 10.13 e 10.14 mostram a solução de Galerkin descontínuo de Baumann e elementos finitos sem e com SUPG para ordem de interpolação constante $p = 2$ e refinamento uniforme da malha. As malhas possuem 4, 16, 64 e 256 elementos quadriláteros. As figuras 10.15 e 10.16 mostram o mesmo problema resolvido com malha de triângulos.

Observa-se que o método de elementos finitos apresenta bastante oscilação. Essa oscilação é bem remediada com a utilização da difusão artificial.

O método de Galerkin descontínuo mostra-se bastante estável e a utilização de difusão artificial colabora com a estabilidade. A solução de Galerkin descontínuo com SUPG parece ser melhor que a de Galerkin descontínuo sem difusão artificial. Nota-se ainda que, no método

de Galerkin descontínuo, as oscilações em um elemento não se propagam para os elementos vizinhos (ou se propagam em grandeza bem menor), o que é uma vantagem do método com relação a elementos finitos contínuo.

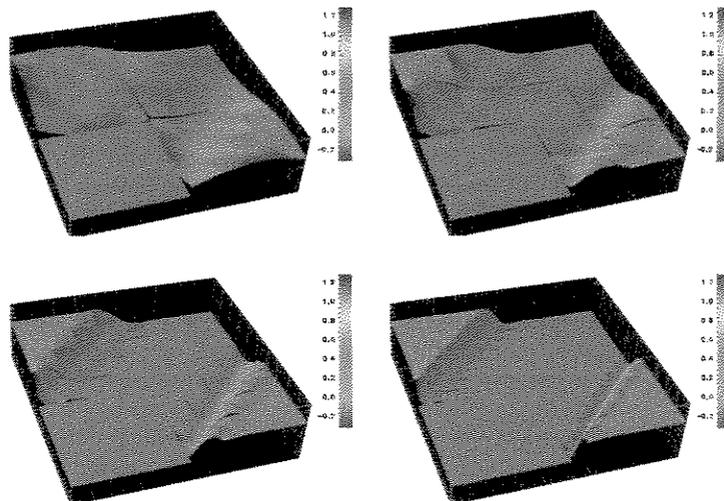


Figura 10.11: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de Galerkin descontínuo de Baumann sem SUPG

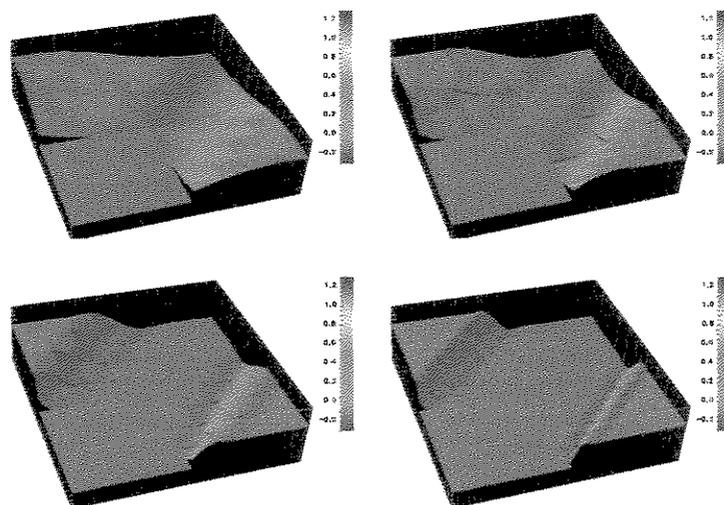


Figura 10.12: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de Galerkin descontínuo de Baumann com SUPG

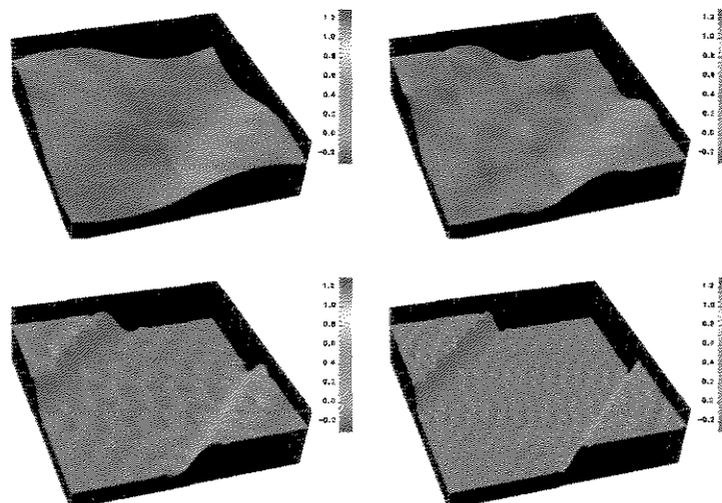


Figura 10.13: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de elementos finitos contínuo sem SUPG

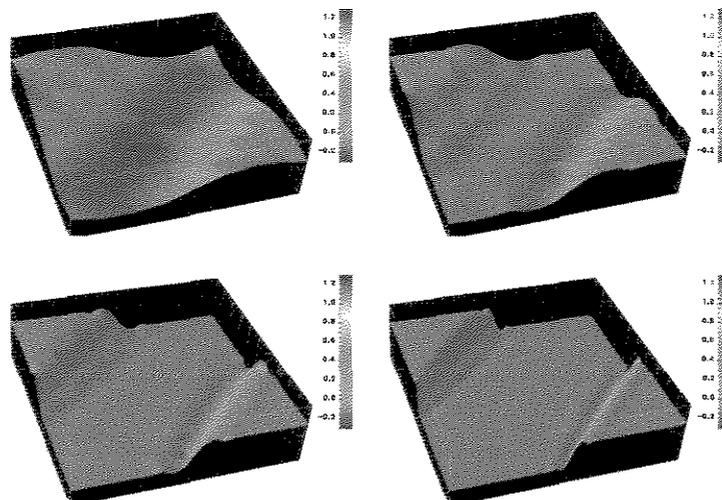


Figura 10.14: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de elementos finitos contínuo com SUPG

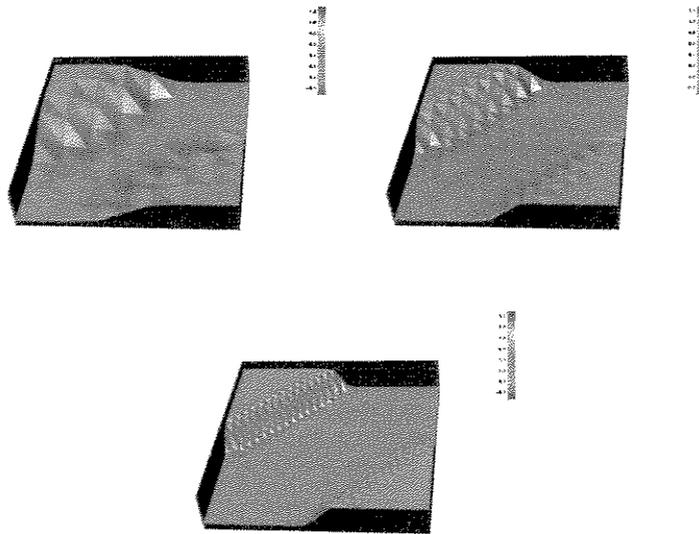


Figura 10.15: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de elementos finitos contínuo com SUPG. Malha de triângulos

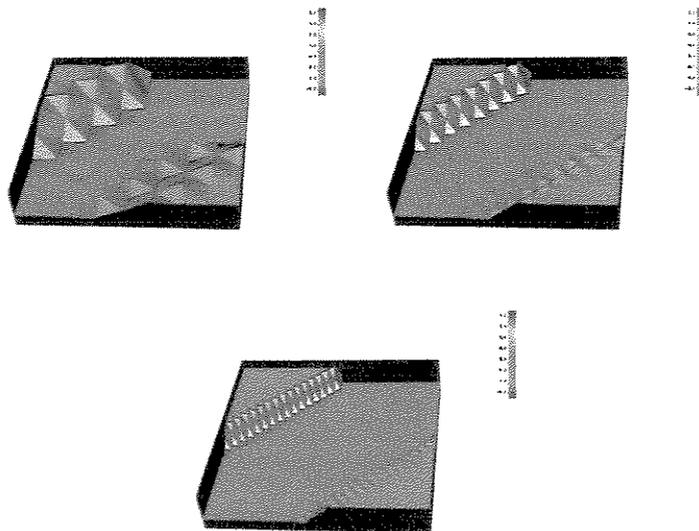


Figura 10.16: Evolução da solução para refinamento uniforme e $p = 2$ constante

Método de Galerkin descontínuo de Baumann com SUPG. Malha de triângulos

Alterando-se alguns parâmetros do problema, pode-se obter um problema de camada limite na fronteira do domínio. Alteram-se as posições das condições Dirichlet zero e 1.0 (figura 10.17). A solução toma a forma das figuras 10.18 e 10.19, com camada limite ao longo dos eixos $x = 1$ e $y = 1$. Nessas figuras pode-se observar uma deterioração da solução quando se utiliza difusão artificial. Isso se deve ao fato de que o termo de SUPG acrescenta uma difusão na direção da convecção. Na direção perpendicular à da convecção, a solução oscila. As oscilações não se propagam para os elementos vizinhos.

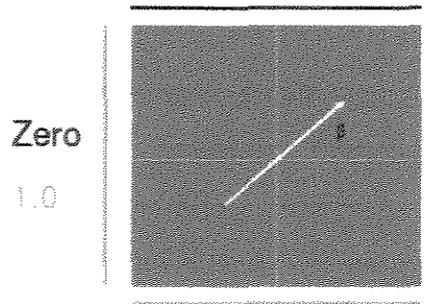


Figura 10.17: Enunciado do problema

CAPÍTULO 10. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

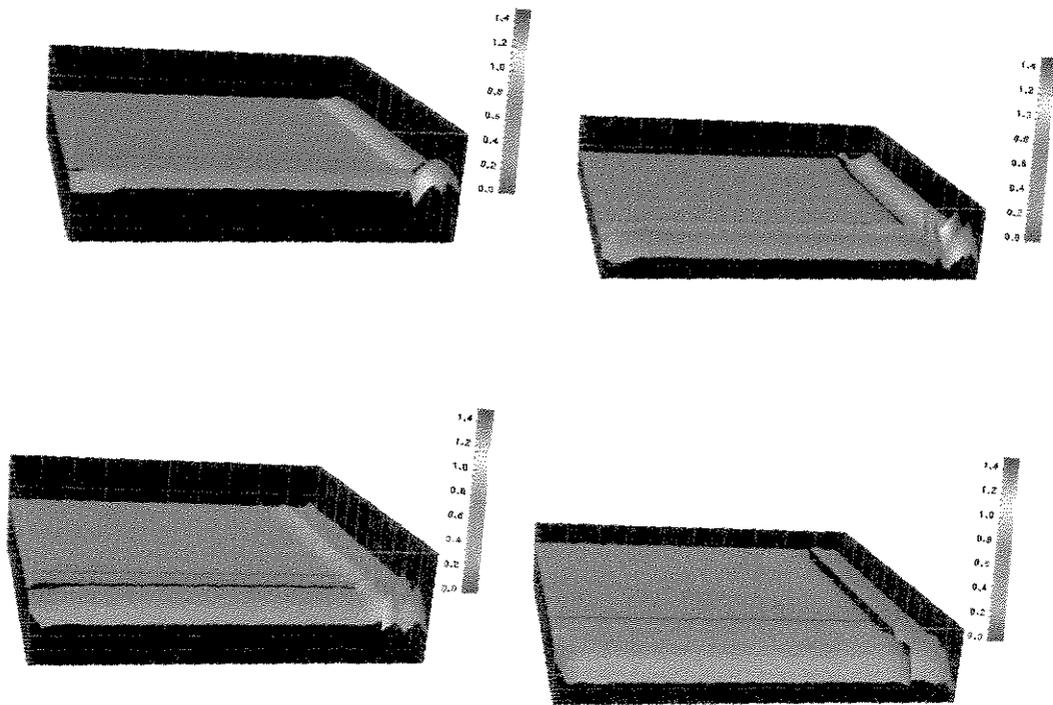


Figura 10.18: Evolução da solução para 64 elementos e $p = 2, 3, 4$ e 5
Método de Galerkin descontínuo de Baumann sem SUPG

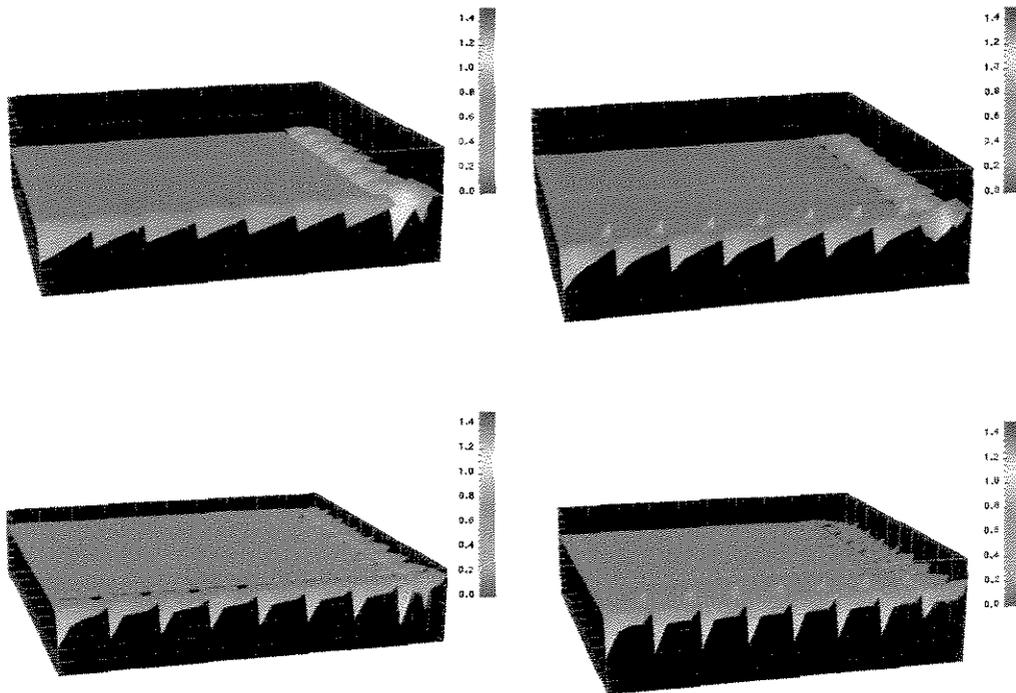


Figura 10.19: Evolução da solução para 64 elementos e $p = 2, 3, 4$ e 5

Método de Galerkin descontínuo de Baumann com SUPG

Uma terceira versão proposta para esse teste é o de alinhar as interfaces entre elementos com a descontinuidade, no interior do domínio. As figuras 10.20 e 10.21 mostram os resultados para elementos finitos e Galerkin descontínuo de Baumann.

Comparando-se a solução de Galerkin descontínuo com a solução de elementos finitos fica clara a superioridade do método de Galerkin descontínuo quando as interfaces são coincidentes com a descontinuidade. A solução apresentada na figura 10.21 é obtida com 4 ou 256 elementos, idênticas.

A descontinuidade tende a desaparecer quando são utilizados os termos de penalidade na interface. Foram utilizados termos de penalidade com $C = 100, 1\,000, 10\,000$ e $1\,000\,000$. Quanto maior o valor da penalidade mais contínua é a solução - e também mais próxima da solução de elementos finitos. A continuidade da solução vem acompanhada das oscilações numéricas. Os resultados são mostrados na figura 10.22.

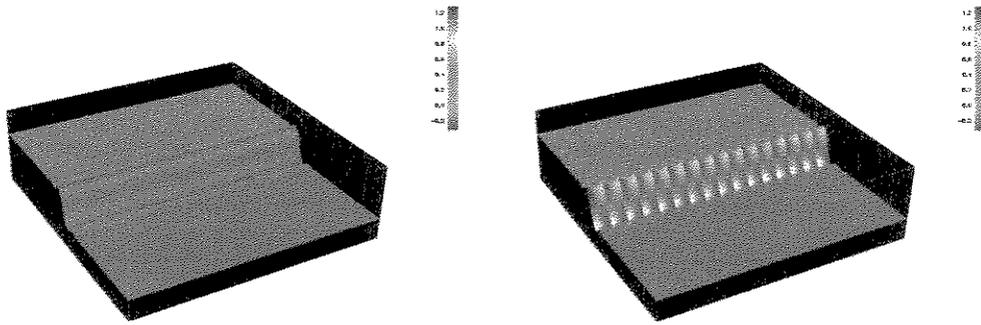


Figura 10.20: Solução de elementos finitos com SUPG (a) e sem (b)

256 elementos e $p = 2$

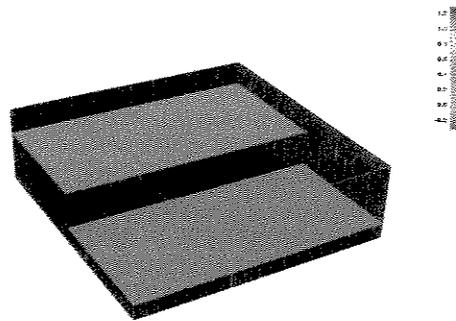


Figura 10.21: Solução de Galerkin descontínuo de Baumann.

4, 16, 64 ou 256 elementos e $p = 2$

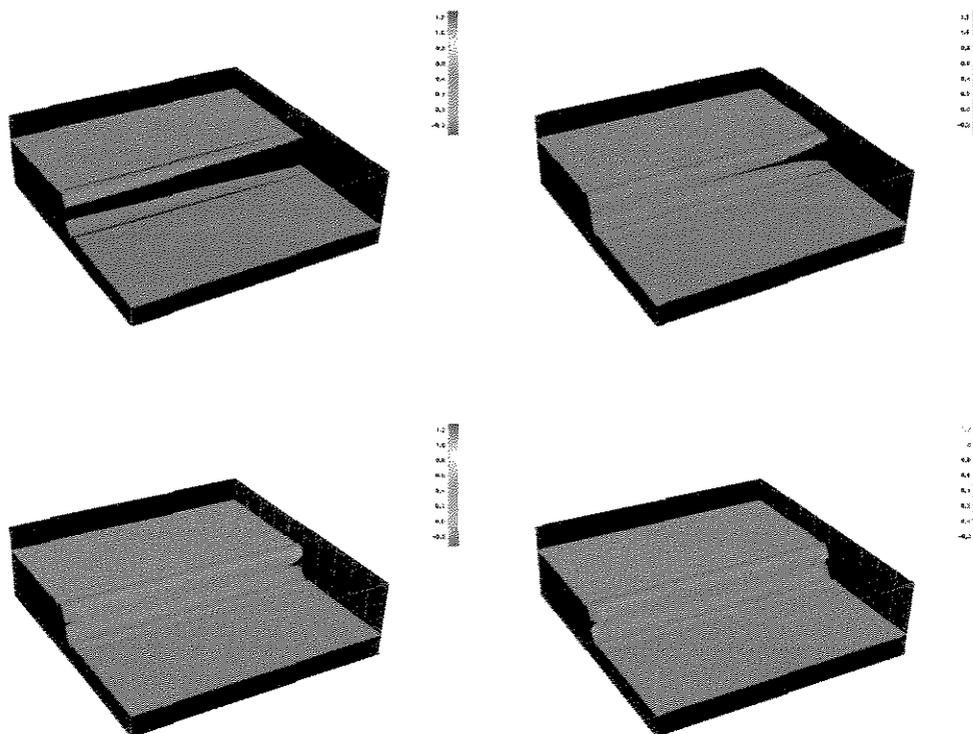


Figura 10.22: Solução de Galerkin descontínuo de Baumann com penalidade 256 elementos e $p = 2$ - Penalidade com $C = 100, 1\ 000, 10\ 000$ e $1\ 000\ 000$

10.3 Problema de Convecção-Difusão - Camada Limite

10.3.1 Descrição do Problema

Este problema de camada limite foi extraído do artigo de Paul Houston et al [9].

A solução analítica é dada por

$$u(x, y) = x + y(1 - x) + (e^{-1/A} - e^{-(1-x)(1-y)/A}) (1 - e^{-1/A})^{-1}$$

para a equação diferencial

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) + \operatorname{div}(\beta u) = S \text{ em } \Omega = (0, 1)^2$$

em que

$$S = 2 + \frac{(1-x)^2 - (1-x) - (1-y) + (1-y)^2}{A(1 - e^{-1/A}) e^{(1-x)(1-y)/A}} - x - y$$

$$\beta = \{1, 1\}^T$$

$$u|_{\Gamma_D} = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 1 \\ 0 & \text{para } y = 1 \\ -(-1 + e^{y/A} + y - e^{1/A}y) (-1 + e^{1/A})^{-1} & \text{para } x = 0 \\ -(-1 + e^{x/A} + x - e^{1/A}x) (-1 + e^{1/A})^{-1} & \text{para } y = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_N = \emptyset$$

e A varia para cada caso testado. Quanto menor o valor de A , mais forte é a camada limite. A figura 10.23 apresenta a solução analítica para alguns valores de A .

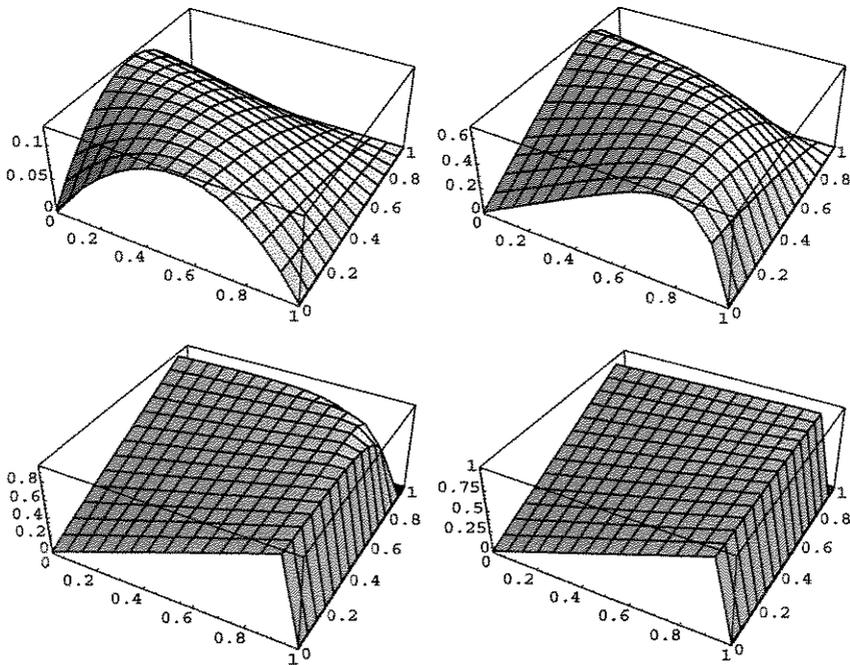


Figura 10.23: Soluções analíticas para a) $A = 1$, b) $A = 0.1$, c) $A = 0.01$ e d) $A = 0.001$

10.3.2 Resultados

Neste problema, foram comparadas as formulações de Baumann sem penalidade e a formulação contínua de elementos finitos. No problema simulado utilizou-se $A = 0.01$ (ver figura 10.23 c).

Propõe-se utilizar elementos contínuos e descontínuos na mesma simulação. Na região da camada limite utiliza-se Galerkin descontínuo, buscando-se a estabilidade da solução. E na região do domínio em que a solução é suave utiliza-se elementos finitos contínuo.

10.3.2.1 Refinamento ao Longo da Camada Limite

O refinamento uniforme da malha não é ótimo para problemas de camada limite. As regiões de forte gradiente necessitam de mais elementos para convergir à solução do problema. É usual a utilização de malhas mais refinadas nas regiões de forte gradiente da solução. Isso permite um melhor aproveitamento dos recursos computacionais. Desse modo, utilizou-se malha da figura a seguir. A partir dessa malha procedeu-se o refinamento uniforme para construir as demais malhas utilizadas.

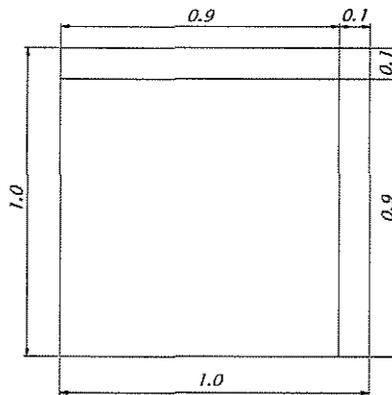


Figura 10.24: Malha para camada limite

10.3.2.2 Combinação de Elementos Finitos e Galerkin Descontínuo

Uma estratégia para otimizar os recursos na simulação é utilizar elementos finitos em regiões de solução suave e Galerkin descontínuo em regiões de fortes gradientes. A utilização de elementos finitos nas regiões de solução suave produz um problema com menos graus de liberdade do que utilizando apenas Galerkin descontínuo. E a utilização de Galerkin descontínuo nas regiões de solução com fortes gradientes produz um método mais estável com respeito a oscilações. Essa abordagem é utilizada (figura 10.25) no problema de camada

limite apresentado e os resultados com e sem SUPG são mostrados nas figuras 10.26, 10.27 e 10.28.

As simulações de Galerkin descontínuo não utilizaram termos de penalidade.

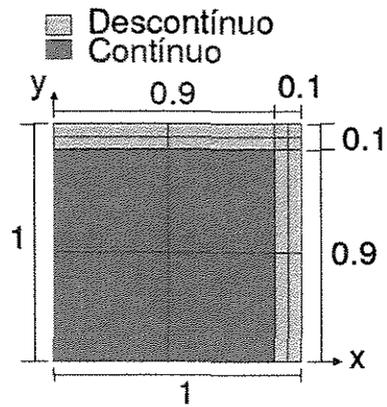


Figura 10.25: Malha com elementos contínuos e descontínuos

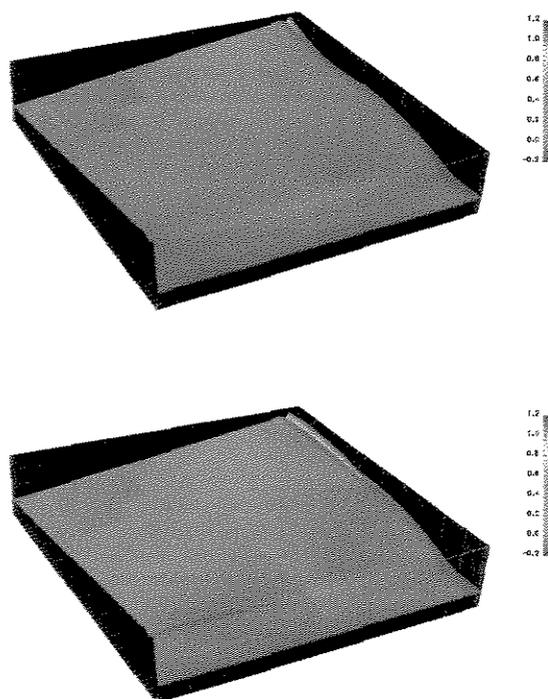


Figura 10.26: Solução camada limite - Elementos finitos contínuo

a) Com SUPG b) Sem SUPG

$p = 2$, 16 elementos - 81 equações

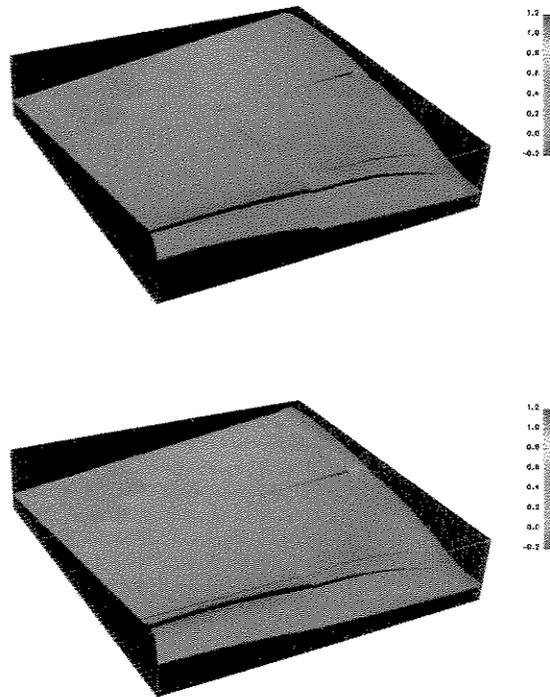


Figura 10.27: Solução camada limite - Galerkin descontínuo de Baumann

a) Com SUPG b) Sem SUPG

$p = 2$, 16 elementos - 144 equações

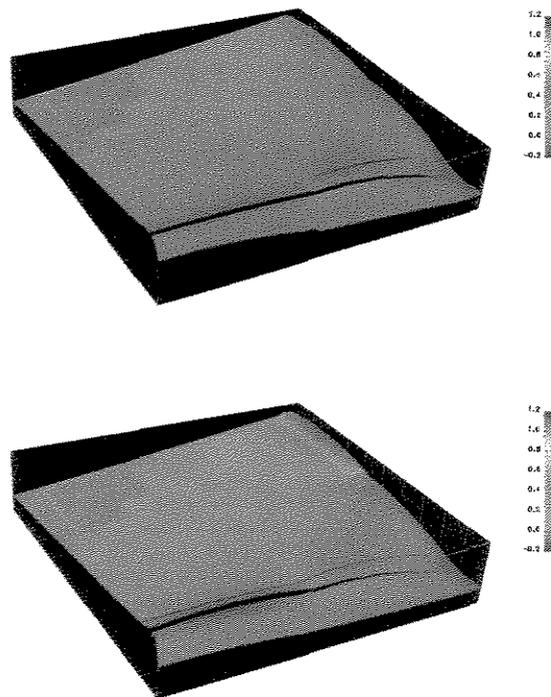


Figura 10.28: Solução camada limite - Elementos finitos contínuo e descontínuo

a) Com SUPG b) Sem SUPG

$p = 2$, 16 elementos - 133 equações

A taxa de convergência obtida variou em função da utilização do termo de difusão artificial SUPG. Com SUPG, as taxas de convergência ficaram em torno de 1.0 para os três casos testados (elementos finitos, baumann e contínuo-descontínuo). Essa taxa de convergência é muito baixa se comparada com as taxas obtidas sem SUPG. Por outro lado, o termo SUPG mantém a solução mais estável. As figuras a seguir trazem as curvas de convergência h para norma $L2$ e seminorma de $H1$.

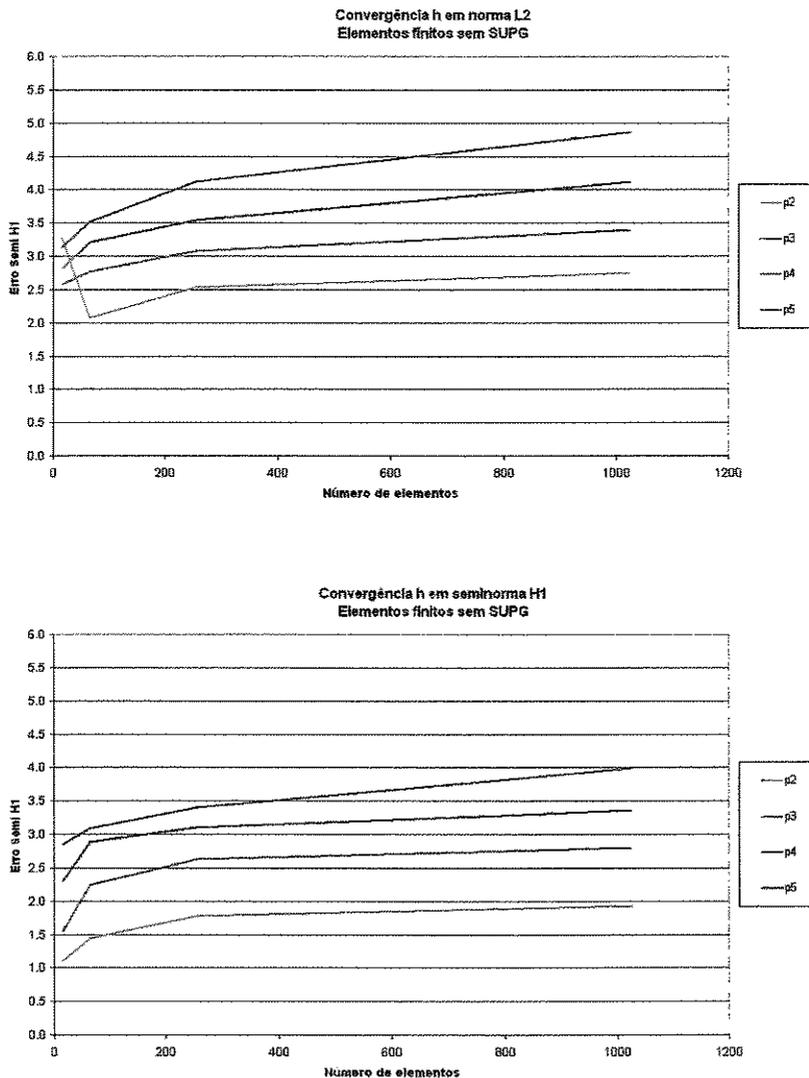


Figura 10.29: Taxa de convergência h

Elementos finitos sem SUPG

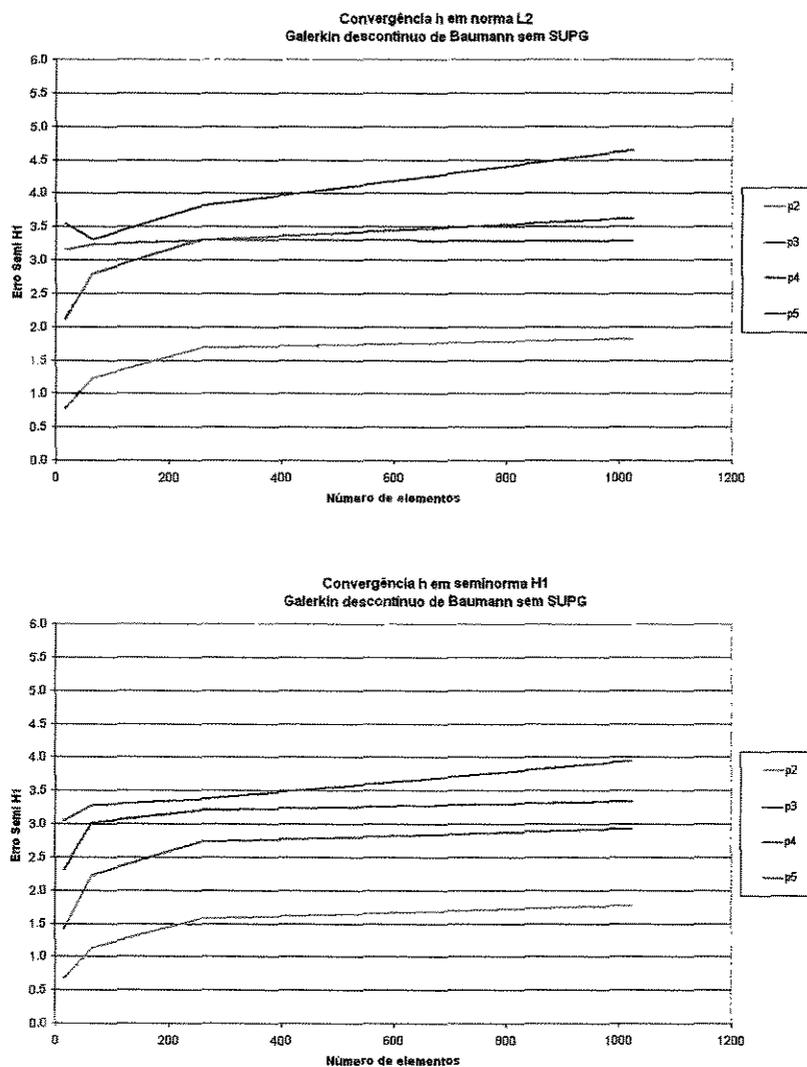


Figura 10.30: Taxa de convergência h
Galerkin descontínuo de Baumann sem SUPG

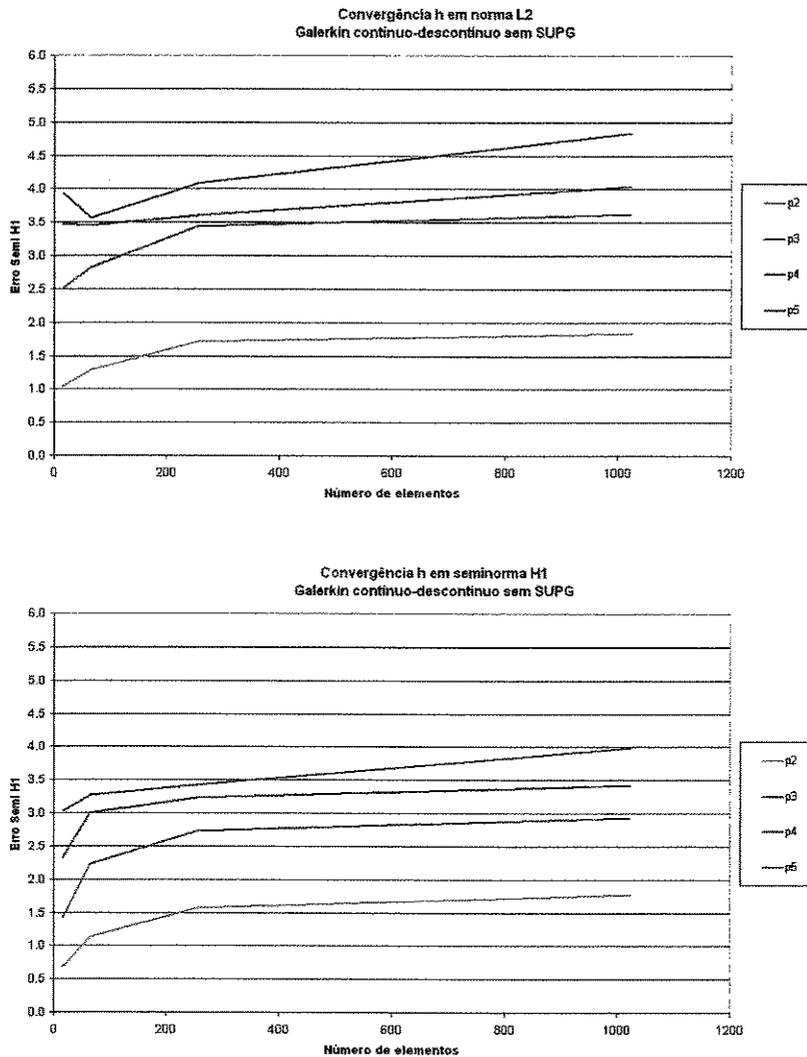


Figura 10.31: Taxa de convergência h

Galerkin contínuo-descontínuo sem SUPG

A tabela 10.32 faz um resumo das taxas de convergência obtidas. Os resultados indicam que a taxa de convergência vai em direção das taxas analíticas dadas em [2]. O método de elementos finitos deve convergir a uma taxa $p + 1$ para norma $L2$ e p para seminorma de $H1$. Já a formulação descontínua de Baumann deve convergir a uma taxa p para p par (sub-ótima) e $p + 1$ para p ímpar (ótima) em norma $L2$. Em seminorma de $H1$ deve convergir a uma taxa p , como elementos finitos. Nota-se que a combinação de elementos contínuos e descontínuos é ótima em seminorma de $H1$ e sub-ótima para p par em norma $L2$, tal como

Galerkin descontínuo. Entretanto, os valores são melhores que esse último.

p	EF		DG Baumann		Cont-Desc	
	L2	Semi H1	L2	Semi H1	L2	Semi H1
2	2.8	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8
3	3.4	2.8	3.3	2.9	3.6	2.9
4	4.1	3.4	3.6	3.4	4.0	3.4
5	4.9	4.0	4.7	3.9	4.8	4.0

Figura 10.32: Resumo da taxa de convergência

Observa-se a maior estabilidade do método de Galerkin descontínuo. Isso em detrimento da continuidade da solução em alguns pontos.

A utilização de elementos contínuos combinados com elementos descontínuos mostrou-se consistente. A solução é tão estável quanto Galerkin descontínuo na região da camada limite. Na região suave do domínio (em que estão os elementos contínuos), a solução é melhor que a de Galerkin descontínuo. A utilização de elementos contínuos e descontínuos combinados diminui o número de equações do problema (133 equações) em relação à formulação de Galerkin descontínuo (144 equações). Refinando-se os elementos (refinamento h) o ganho no número de equações torna-se mais expressivo (ver tabela 10.1).

Número de elementos	Galerkin descontínuo	Descontínuo e contínuo
16	144	133
64	576	513
256	2304	2017
1024	9216	8001
4096	36864	31873
16384	147456	127233

Tabela 10.1: Número de equações para problema de camada limite

$p = 2$ e refinamento uniforme da malha

Capítulo 11

Conclusões e Considerações Finais

O método de Galerkin descontínuo mostrou-se bastante adequado para problemas de convecção-difusão. Nos problemas de camada limite testados, o método dispensa o uso de termos de difusão artificial (SUPG), necessários para elementos finitos contínuo.

Com elementos finitos, as oscilações estão presentes em uma grande região do domínio, isso é, as oscilações se propagam além da região de forte gradiente. Já com Galerkin descontínuo, as oscilações são restritas à região de forte gradiente, não se propagando pelo resto do domínio. Além disso, alinhando-se as interfaces entre elementos com a descontinuidade, nenhuma oscilação é apresentada.

Uma desvantagem do método de Galerkin descontínuo é o número de graus de liberdade do problema, muito maior que o de elementos finitos. Foi adotada a estratégia de combinar os métodos de Galerkin descontínuo e elementos finitos para somar a vantagem de cada um deles. Dessa forma, utiliza-se Galerkin descontínuo nas regiões de forte gradiente ou soluções descontínuas buscando-se a estabilidade da solução. E nas regiões de solução suave opta-se por utilizar elementos finitos, de modo a ter menos graus de liberdade. Essa abordagem mostrou-se adequada e a combinação dos métodos mostrou-se consistente.

A utilização de termos de penalidade mostrou-se boa para soluções suaves, mas não trouxe vantagens na camada limite. Pelos resultados obtidos, conclui-se ser melhor utilizar elementos finitos combinado com Galerkin descontínuo do que utilizar termos de penalidade. Isso porque a utilização de termos de penalidade melhora a solução suave até se tornar equivalente à solução de elementos finitos. Porém com mais graus de liberdade. Outra desvantagem dos termos de penalidade é a dependência do seu valor ao problema resolvido.

A comparação dos métodos de Galerkin descontínuo de Baumann e GEM - *Global Element Method* - mostrou que, embora o GEM apresente taxas ótimas de convergência, sua característica de não positividade da matriz de rigidez dificulta sua resolução. Neste trabalho optou-se pela formulação de Baumann como preferida.

Anexo A

Espaços de Aproximação Descontínuos

As bases descontínuas diferem-se das contínuas em sua construção por não exigirem continuidade entre elementos e também por não serem definidas na fronteira entre eles, mas à direita e à esquerda dessa fronteira. Esse fato implica que uma simulação descontínua necessita de mais funções (e conseqüentemente mais graus de liberdade) que uma simulação contínua para obter o mesmo espaço de aproximação.

Construção de Bases Hierárquicas Descontínuas

As funções de base descontínuas podem ser construídas como:

$$(x - x_0)^k (y - y_0)^l (z - z_0)^m \quad k, l, m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

em que (x_0, y_0, z_0) é um ponto no interior do elemento deformado, isto é, em coordenadas reais do problema. E, para limitar os valores das funções, pode-se normalizá-las como:

$$\frac{(x - x_0)^k}{C_x^k} \frac{(y - y_0)^l}{C_y^l} \frac{(z - z_0)^m}{C_z^m} \quad k, l, m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

em que

$$-1 \leq \frac{(x - x_0)}{C_x} \leq +1 \quad \forall x \in \Omega_e.$$

Por simplicidade, pode-se escolher ainda $C = \text{Max} C_x, C_y, C_z$ e assim as funções podem ser definidas como:

$$\frac{(x - x_0)^k (y - y_0)^l (z - z_0)^m}{C^{k+l+m}} \quad k, l, m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Um polinômio de grau n em uma variável definida sobre o elemento Ω_e toma a forma

$$\beta_0 1 + \beta_1 \frac{(x - x_0)}{C_x} + \beta_2 \frac{(x - x_0)^2}{C_x^2} + \dots + \beta_n \frac{(x - x_0)^n}{C_x^n}$$

ou ainda em três variáveis

$$\sum_{\substack{k,l,m \geq 0 \\ k+l+m \leq n}} \beta_{klm} \frac{(x - x_0)^k (y - y_0)^l (z - z_0)^m}{C^{k+l+m}}$$

As figuras a seguir ilustram as funções descontínuas uni e bidimensionais.

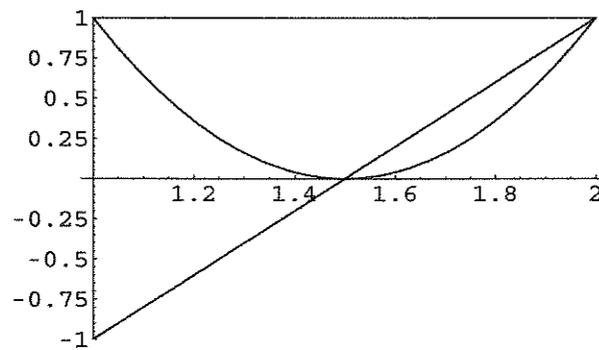


Figura 11.1: Base descontínua unidimensional - ordem 2

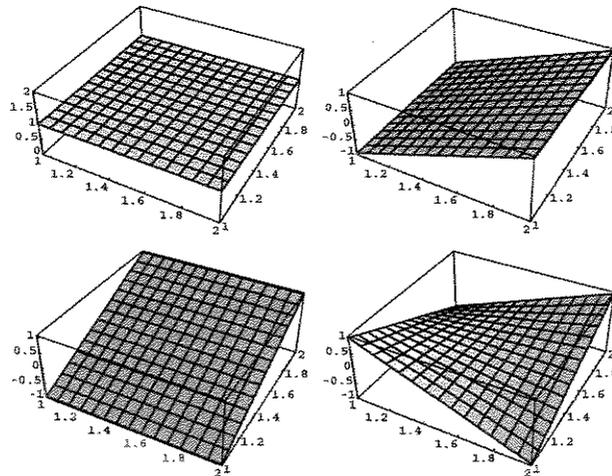


Figura 11.2: Base descontínua bidimensional bilinear

Referências Bibliográficas

- [1] Douglas N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19:742–760, Aug. 1982.
- [2] Carlos Erik Baumann and J. Tinsley Oden. *An HP-Adaptive Discontinuous Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics*. PhD thesis, University of Texas at Austin, 1997.
- [3] Jorge L. D. Calle, Philippe R. B. Devloo, and Sônia M. Gomes. Stabilized discontinuous galerkin method for hyperbolic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004.
- [4] Jorge Lizardo Díaz Calle, Philippe Devloo, and Sônia Gomes. *O Método de Galerkin Descontínuo com Difusividade Implícita e H-Adaptabilidade Baseada em Técnicas Wavelet*. PhD thesis, IMECC - Unicamp, 2002.
- [5] P. R. B. Devloo. PZ : An object oriented environment for scientific programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150:133–153, 1997.
- [6] P. R. B. Devloo, Cedric M. A. A. Bravo, Edimar C. Rylo, and Tiago Forti. Inclusão de elementos descontínuos no ambiente pz. In *Cilamce 2003 Proceedings*, 2003.
- [7] Kathryn Harriman, Paul Houston, Bill Senior, and Endre Süli. hp-version discontinuous galerkin methods with interior penalty for partial differential equations with nonnegative characteristic form. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, 2002.
- [8] Roberto Henrique Heiderich. Dispersão estacionária de populações: Modelagem e instrumentação numérica. Master's thesis, IMECC - Unicamp, 2004.
- [9] Paul Houston, Christoph Schwab, and Endre Süli. Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002.
- [10] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, 1990.

- [11] Stanley B. Lippman and Josée Lajoie. *C++ Primer*. Addison-Wesley, 1998.
- [12] Clovis R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 2a. edition, 2004.
- [13] J. Tinsley Oden, Ivo Babuska, and Carlos Erik Baumann. A discontinuous hp finite element method for diffusion problems. *Journal of Computational Physics*, 1998.
- [14] John Tinsley Oden, F. Carey, Graham, and E. B. Becker. *Finite Elements - An Introduction*, volume Vol. 1. Prentice Hall Inc., New Jersey - USA, 1981.
- [15] S. Prudhomme, F. Pascal, J. T. Oden, and A. Romkes. Review of a priori error estimation for discontinuous galerkin methods. Technical report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2000.
- [16] P. A. Raviart and J. M. Thomas. Primal hybrid finite element method for 2nd order elliptic equations. *Math. Comp.*, pages 391–413, 1977.
- [17] James Rumbaugh. *Object-oriented modeling and design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [18] Erick Slis Raggio Santos, Philippe Devloo, and Sônia Gomes. Desenvolvimento de método implícito para simulador numérico tri-dimensional de escoamentos compressíveis. Master's thesis, FEC - Unicamp, 2004.
- [19] B. Szabó and I. Babuska. *Finite Element Analysis*. A Wiley-interscience publication, 1991.
- [20] Zienkiewicz and Taylor. *The Finite Element Method*, volume 3 - Fluid Dynamics. Butterworth Heinemann, 5a. edição edition, 2000.

