

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CASCA CILÍNDRICA  
CIRCULAR DE CONCRETO ARMADO UTILIZANDO  
UM MÉTODO QUASE-NEWTON

AUTOR: ENG. WILBER VILLEGAS SUSAYA

207817002

Campinas, janeiro de 2001

S.P.-Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CASCA CILÍNDRICA  
CIRCULAR DE CONCRETO ARMADO UTILIZANDO  
UM MÉTODO QUASE-NEWTON

Autor: Eng. Wilber Villegas Susaya.

Orientador: Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan.

Dissertação de Mestrado apresentada a comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas

Campinas, janeiro de 2001  
S.P. - Brasil

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese.
05/3
Prof. Dr. <i>Aloísio E. Assan</i>
Matrícula: 3596-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V714a	<p>Villegas Susaya, Wilber Análise não linear de casca cilíndrica circular de concreto armado utilizando um método Quase-Newton / Wilber Villegas Susaya.--Campinas, SP: [s.n.], 2001.</p> <p>Orientador: Aloísio Ernesto Assan Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.</p> <p>1. Cascas de concreto. 2. Concreto armado. 3. Método dos elementos finitos. 4. Newton-Raphson, Método. 5. Programação não-linear. I. Assan, Aloísio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.</p>
-------	---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CASCA CILÍNDRICA  
CIRCULAR DE CONCRETO ARMADO UTILIZANDO  
UM MÉTODO QUASE-NEWTON

Autor: Eng. Wilber Villegas Susaya.

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



**Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan**  
Orientador / Universidade Estadual de Campinas.



**Prof. Dr. João Frederico da C. Azevedo Meyer**  
Universidade Estadual de Campinas.



**Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes.**  
Universidade Estadual de Campinas.

Campinas, 11 de janeiro de 2001

S.P.-Brasil

Dedico este trabalho com todo carinho à minha esposa Ruth e a meu querido sogro José Sinhoretti Lira.

## AGRADECIMENTOS.

Agradeço Primeiramente a Deus, pela iluminação, proteção durante o transcurso da minha vida, pela força e confiança para lograr este objetivo. Ao meu pai, Rosalio Villegas Ancco, que em paz descanse, a minha mãe, Demetria Susaya Vda. de Villegas, por todo apoio, carinho, educação conselhos durante a minha infância, e adolescência pelo sacrificio feito por eles para conseguir a formatura.

A minha esposa Ruth pela compressão durante o transcurso do mestrado, e meus filhos Wilber e José.

A meus irmãos Jorge, Juniors, Angelica, Giovanna e Karen.

Com especialidade ao Prof. Aloisio Ernesto Assan, pela responsabilidade e dedicação e competência demonstrada durante todo o processo de orientação. Como amigo pelo apoio nos momentos difíceis, pelo respeito, pela generosidade e compressão.

Ao Prof. Francisco Menezes, pela importante colaboração durante o exame de qualificação, Ao Prof. Isaiás Vizotto.

Ao corpo docente do Departamento de Estrutura da FEC-UNICAMP.

Aos colegas Carlos Pereira, pelo apoio moral durante o transcurso do mestrado.

Ao Colegas Rojas Ochoa, Jesus; Bustamante Canales, Jorge, pela grande amizade e apoio durante todos estes anos.

Agradesco a FAPESP ( Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo) pelo apoio e concessão da bolsa e do computador.

3.2.2.1- EQUAÇÕES CINEMÁTICAS .....	26
3.2.2.2- EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	27
3.2.2.3- RELAÇÕES TENSÕES-DEFORMAÇÕES .....	28
3.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS NODAIS .....	30
3.3 MODELAGEM DO CONCRETO E AÇO .....	34
3.3.1 MODELAGEM DO CONCRETO .....	34
3.3.1.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O CONCRETO .....	34
3.3.1.2 O MODELO DE DARWIN E PECKNOLD .....	36
3.3.1.3 CRITÉRIO DE RUPTURA PARA O CONCRETO .....	42
3.3.1.4 AMOLECIMENTO GRADUAL DO CONCRETO	
COMPRIMIDO (STRAIN SOFTENING) .....	45
3.3.1.5 DESCARGA NA COMPRESSÃO .....	47
3.3.1.6 A FISSURAÇÃO DO CONCRETO .....	48
3.3.1.7 DESCARGA NA TRAÇÃO .....	51
3.3.2 MODELAGEM DA ARMADURA .....	52
<b>CAPÍTULO . 4 METODOLOGIA PARA A SOLUÇÃO NÃO-LINEAR .....</b>	<b>55</b>
4.1 ALGORÍTMOS PARA A SOLUÇÃO NÃO-LINEAR .....	55
4.2 SOLUÇÃO NÃO-LINEAR VIA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO .....	58
4.2.1 MÉTODO INCREMENTAL ITERATIVO .....	58
4.2.2 TOLERÂNCIA DA CONVERGÊNCIA .....	61
4.2.3 MÉTODO NEWTON RAPHSON .....	62
4.3 SOLUÇÃO NÃO-LINEAR VIA EQUAÇÃO DE ENERGIA .....	66
4.3.1 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA MINIMIZAÇÃO .....	67
4.3.2 PONTOS DE MÍNIMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO .....	67
4.3.3 DEFINIÇÕES PRINCIPAIS .....	69
4.3.3.1 VETOR GRADIENTE DE $f(\{u\}^*): R^N \rightarrow R^1$ NUM	
PONTO $\{u\}^*$ .....	69
3.3.2 A MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO $f(\{u\})$ NUM	
PONTO $\{u\}^*$ .....	69

4.4 BUSCA UNIDIMENSIONAL .....	70
4.5 TIPOS DE MÉTODOS CLÁSSICOS DE DESCIDA .....	72
4.5.1 MÉTODO DO GRADIENTE .....	72
4.5.2 MÉTODO NEWTON-RAPHSON .....	73
4.5.3 MÉTODO QUASE-NEWTON .....	74
4.5.3.1 ESTRATÉGIAS DO MÉTODO QUASE-NEWTON .....	75
4.5.3.2 ALGORITMO 3 MÉTODO DFP (Davidon, Fletcher e Powell) .....	79
4.5.3.3 ALGORITMO 4 MÉTODO BFGS ( Broyden, Fletcher,Goldfarb, Shanno) .....	79
<b>CAPÍTULO . 5 RESULTADOS .....</b>	<b>81</b>
5.1 EXEMPLOS E APLICAÇÃO .....	81
5.2 EXEMPLOS NUMERICOS .....	81
5.2.1 PRIMEIRO EXEMPLO .....	81
5.2.2 SEGUNDO EXEMPLO .....	85
5.2.3 TERCEIRO EXEMPLO .....	88
<b>CAPÍTULO 6 -CONSIDERAÇÕES FINAIS E .....</b>	<b>93</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>95</b>

## LISTA DE FIGURAS

	Página
1.1 Pista de corrida, de Madri Espanha, ( 1.1 a ) vista de lado, ( 1.1 b ) vista frontal.....	11
1.2 Hangar para aviões, Aeroporto de Orly, Paris França.....	12
1.3 Vestíbulo de concreto, Auditório Nacional da Suíça . Zurich.....	13
1.4 Oficina de correio, Rhode Island, Estados Unidos da América.....	14
1.5 Hangar para aviões, Aeroporto Municipal de Chicago, Estados Unidos da América....	15
3.1 Exemplo de representação de elementos finitos de chapa , placa e casca, respectivamente.....	19
3.2.1 Elemento finito de casca dividido em camadas .....	25
3.2.2 Convenção para os esforços internos da casca .....	29
3.3.1 Sistema de eixos ortogonais .....	38
3.3.2 Diagrama tensão-deformação uniaxial equivalente .....	41
3.3.3 Superfície de ruptura proposta por Kupfer e Gerstle .....	43
3.3.4 Modelo adotado para o concreto comprimido .....	46
3.3.5 Descarregamento e recarregamento no concreto comprimido .....	47
3.3.6 Modelos para consideração do enrijecimento à tração .....	50
3.3.7 Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado .....	52
3.3.8 Curva tensão-deformação para o aço .....	53
3.3.9 Esquematisação de uma camada de armadura .....	54
4.1 Exemplo de mola não-linear .....	63
4.2 Representação gráfica do método Newton Raphson .....	65
4.3 Representação gráfica da equação Quase-Newton uma variável .....	77

5.1 Cilindro de concreto sob pressão radial .....	82
5.2 Comparação gráfica entre os métodos Newton-Raphson ( Assan ) e BFGS ( Villegas ) do ponto central da parte lateral do cilindro.....	84
5.3 Cobertura cilíndrica circular de concreto armado .....	85
5.4 Comparação gráfica entre os métodos Newton-Raphson ( Assan ) e BFGS ( Villegas ) dos pontos extremos da casca cilíndrica exemplo 2 .....	87
5.5 Casca cilíndrica circular de concreto armado Takayama .....	88
5.6 Comparação gráfica dos resultados obtidos por Takayama, Newton-Raphson ( Assan ) e BFGS ( Villegas ) .....	90

## LISTA DE TABELAS

	Pagina
Tabela - 5.1: Deslocamentos vertical do ponto central da parte lateral do cilindro exemplo 1 .....	84
Tabela - 5.2: Deslocamentos verticais dos pontos extremos da casca cilíndrica exemplo 2 .....	87
Tabela - 5.3: Deslocamentos verticais dos pontos A,B,C da casca cilíndrica exemplo 3 .....	89

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$  - Área onde atua  $p$ .

$A_s$  - Área da armadura.

$\alpha_i$  - Constantes da função de forma.

$B$  - Matriz que reúne as derivadas das funções de forma.

$b$  - Forças volumétricas.

$C$  - Módulo de tensões elásticas

$c$  - Coseno diretor

$D$  - Matriz de coeficientes elásticos.

$d_i$  - Direção de descida na iteração  $i$ .

$EPS$  - Convergência para Quase-Newton.

$E$  - Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

$E_{co}$  - Módulo de Young inicial do concreto.

$e$  - Espaçamento entre barras da armadura.

$F$  - Matriz.

$f(u)$  - Função quadrática.

$f_c, f_t$  - Tensão de ruptura do concreto a compressão e tração (uniaxial).

$G$  - Módulo de elasticidade transversal.

$g_i$  - Produto entre vetor gradiente da função e a direção de descida.

$H$  - matriz Hessiana.

$h_s$  - Espessura da camada de armadura.

$I$  - Momento de inércia.

$J$  - Matriz numérica (20x20).

$K$  - Matriz de rigidez da estrutura.

$k$  - Matriz de rigidez do elemento.

$M_x, M_y, M_{xy}$  - momentos internos resultantes.

$N_x, N_y, N_{xy}$  - Esforços internos resultantes.

$NRMAX$  - Número máximo de iterações.

$P_1, P_2$  - Constantes.

$p$  - O vetor de forças de superfície.

$R$  - Vetor de ações globais da estrutura.

$R_0$  - Raio de curvatura.

$r$  - Ações aplicadas nos pontos nodais

$S, y$  - Vetores.

$s$  - Seno diretor

$U$  - Vetor de deslocamentos globais.

$u, v, w$  - Componentes do campo de deslocamentos.

$V$  - Volume do elemento.

$W_e$  - Trabalho das forças externas.

$W_i$  - Trabalho das forças internas.

$X, x; Y, y; Z, z$  - Sistemas de eixos.

$\beta, n, \alpha, m$  - Constantes.

$\beta_u$  - Coeficiente de Lin.

$\chi$  - Deformação curva ( curvatura ).

$\varepsilon$  - Deformação.

$\varepsilon_u$  - Deformação última do concreto à compressão.

$\phi$  - Funções aproximadoras.

$\gamma$  - Deformação Transversal.

$\lambda_i$  - Tamanho do passo na iteração  $i$ .

$\nu$  - O vetor das componentes dos deslocamentos.

$\theta$  - Ângulo entre as direções principais 1 e 2

$\nu$  - Coeficiente de Poisson.

$\sigma$  - Tensor de tensão de Cauchy.

$\tau$  - Tensor de tensão de Kirchhoff.

$\nabla f$  - Primeira derivada.

$\nabla^2 f$  - Segunda derivada.

$\Omega$  - Região no  $R^n$

$\int$  - Integração.

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

**ASCE** – American Society for Civil Engineering.

**BFGS** – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

**EUA**- Estados Unidos da Norte America.

**EI** - Produto de Rigidez.

**MEF** - Método dos elementos finitos.

**NR** – Newton Raphson.

## RESUMO

Villegas Susaya, Wilber. Análise não-linear de casca cilíndrica circular de concreto armado utilizando um método Quase-Newton. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

O presente trabalho foi desenvolvido de um ponto de vista computacional, utilizando métodos matemáticos para a solução de equações não-lineares, aplicando o método dos elementos finitos a estruturas de concreto armado. O método dos elementos finitos, aplicado à análise de estruturas, em forma geral, conduz a um sistema de equações que no caso não-linear exige algoritmos matemáticos mais refinados e/ou métodos iterativos que realizem uma linearização a cada passo do incremento de carga.

O elemento finito adotado é cilíndrico circular com quatro nós e 5 graus de liberdade por nó tendo funções de forma baseadas em deformações pré-estabelecidas.

Para representar o concreto como, se verá no capítulo 3 desta pesquisa, foi adotado o modelo de Darwin e Pecknold [26], que considera o concreto com comportamento ortotrópico. O aço é tratado da maneira usual com a Teoria da Plasticidade.

A solução do problema não-linear que vem sendo utilizada pelo orientador é do tipo incremental-iterativa com o Método de Newton-Raphson e reformulando a matriz de rigidez a cada iteração.

Nesta Dissertação foi implementado ao programa de computador desenvolvido pelo orientador um método Quase-Newton conhecido por BFGS.

Os resultados obtidos analisando três cascas mostraram que não houve praticamente alterações nos resultados. Para os casos aqui tratados a utilização do método Newton-Raphson continua sendo a melhor opção, uma vez que o trabalho computacional é menor.

## ABSTRACT

Villegas Susaya, Wilber. Nonlinear analysis of reinforced concrete circular cylindrical shell using a Quasi-Newton method. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade estadual de Campinas, 2000.

This work was developed from a computational point of view, using mathematical methods for the solution of linear equations, applying the finite element method to reinforced concrete cylindrical shell structures. The finite element method, applied in the analysis of structures, in a general way, leads to a system of nonlinear equations that demands more refined mathematical algorithms and/or incremental-iterative methods that transform the nonlinear system in a linear one during every load step.

The finite element used herein is circular cylindrical with four nodes and five nodal degrees of freedom, based on strain functions rather than the usual formulation based on independent displacement. The concrete was simulated using Darwin and Pecknold's model, considering orthotropic behavior. The reinforcement was treated in the usual way, considering the theory of plasticity.

The solution of the nonlinear problem that was used by the adviser of this Dissertation is an incremental-iterative one coupled with the Newton-Raphson method, reformulation the stiffness matrix at every iteration.

In this work a Quasi-Method with the BFGS search technique was implemented, with modifications in routines that treat the nonlinear solution.

The results obtained in the analysis of three circular cylindrical shell structures, did not show considerable differences with those found with the Newton-Raphson approach. For the cases analyzed herein, the Newton-Raphson method is still the best option since the computational effort is smaller.

## 1.- INTRODUÇÃO.

Na vida real observamos diversos exemplos de estruturas em casca. Engenheiros têm projetado este tipo de estruturas para construções de cúpulas, reservatórios, aviões, navios, dutos, estruturas aeroespaciais, reatores nucleares, submarinos, silos e várias construções de coberturas, além de muitas outras aplicações.

Devido às qualidades estruturais, as cascas sobressaem-se das estruturas de folhas planas porque têm uma boa eficiência estrutural e a capacidade de carga é muito grande devido às suas formas geométricas e o consumo mínimo do material.

As coberturas em cascas finas de concreto armado surgiram na década de 1920 como solução para cobrir grandes áreas sem necessidade de pilares internos.

A complexidade envolvida nas análises destas estruturas restringiram a utilização das mesmas até o aparecimento de ferramentas analíticas avançadas, métodos numéricos adequados e computadores de grande velocidade e capacidade de processamento.

Com o desenvolvimento dos métodos numéricos de análise, como a técnica dos elementos finitos, e com o desenvolvimento de técnicas experimentais precisas, o cálculo de cascas ficou mais fácil. Com a técnica dos elementos finitos aplicada às cascas é possível processar desde as análises elásticas lineares até as não-lineares, como é o caso da presente pesquisa.

### 1.1 BREVE DESCRIÇÃO SOBRE CASCAS CILÍNDRICAS PARA COBERTURAS.

Neste item apresentam-se resumidamente exemplos significativos de cascas cilíndricas de concreto armado e uma visão de estruturas para coberturas. As informações

contidas neste item podem ser encontradas em varias fontes como, por exemplo, as referências [28,29].

A casca de forma cilíndrica circular ou outra curva de qualquer tipo é uma superfície obtida pela translação de uma reta percorrendo uma curva com a forma da casca. A seguir, são citados alguns desses tipos de estruturas:

- O arquiteto Candela projetou e executou a cobertura para um mercado na cidade do México, formada por vários elementos de cascas cilíndricas.
- A pista de corrida, de Madrid, Espanha (1935), é uma estrutura formada por cascas cilíndricas multiplas em balanço ( Figura 1.1 a, 1.1 b ), projeto de Eduardo Torroja.

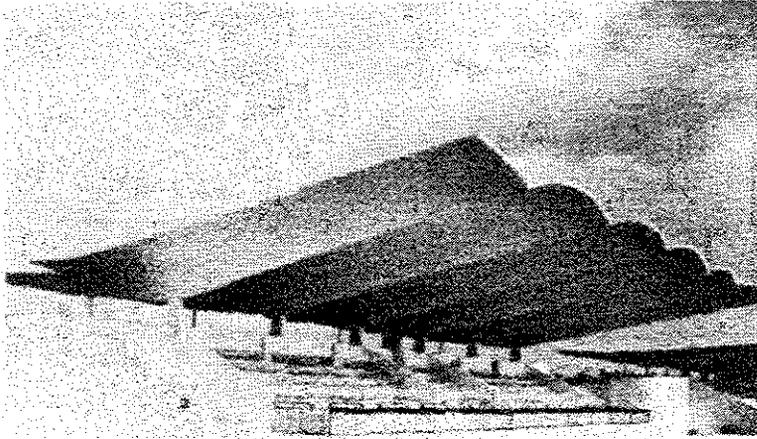


Figura (1.1 a) vista de lado.

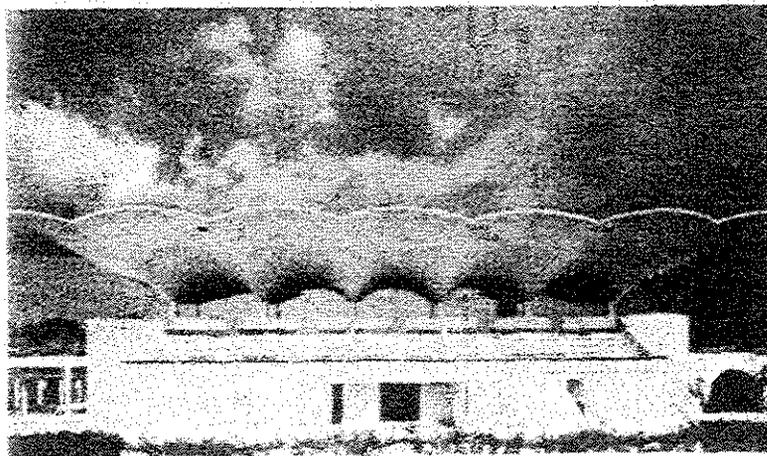


Figura (1.1 b) vista frontal.

- Hangar para aviões, Aeroporto de Orly, Paris (1916), de Eugène Freyssinet, que colaborou muito no desenvolvimento do concreto, projetou esta casca cilíndrica que é um exemplo do início da tecnologia do concreto. Com uma largura de 100m., consiste em uma série de formas em U colocadas adjacientemente umas às outras para formar uma superfície ondulada, importante para sua rigidez ( figura 1.2 ).

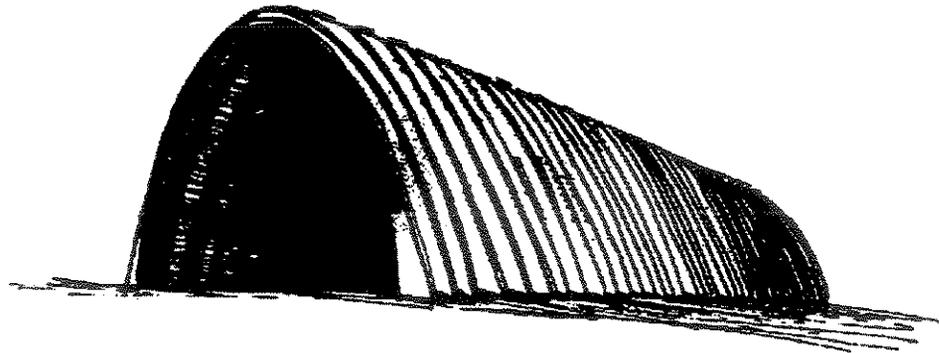


Figura 1.2

- Uma grande cobertura composta de vários elementos de cascas cilíndricas foi projetada para o Laboratório Nacional de Engenharia de Idaho, EUA. As cascas cilíndricas têm um vão de 97,3m na linha de apoio localizada aproximadamente a 8,5m acima do piso, sendo que a altura no centro é de cerca de 23,0m. Os arcos de enrijecimento têm uma altura de 1,7m na coroa, aumentando até 2,3 m nos apoios. Os arcos são espaçados de 7,9 m fazendo com que a construção tenha aproximadamente 72,0 m de comprimento. A espessura da casca é de 15 cm, exceto nas seções cheias perto dos elementos enrijecedores, onde a espessura aumenta para 20 cm. Na época em que a estrutura foi construída (1957-1958) o vão da cobertura estava entre os maiores dos EUA.

- Vestíbulo de concreto, exposição Nacional da Suíça, Zurich (1939). Este vestíbulo foi construído pelo arquiteto Hans Leuzinger e pelo engenheiro Robert Maillart. Esta estrutura demonstra a eficiência das cascas finas. É uma casca cilíndrica de seção parabólica. Esta casca, em meio arco, é segura por uma laje na base como se observa na figura 1.3. Sua altura é 15,3 m, e a coroa é de 11,7 m com espessura de 6cm.

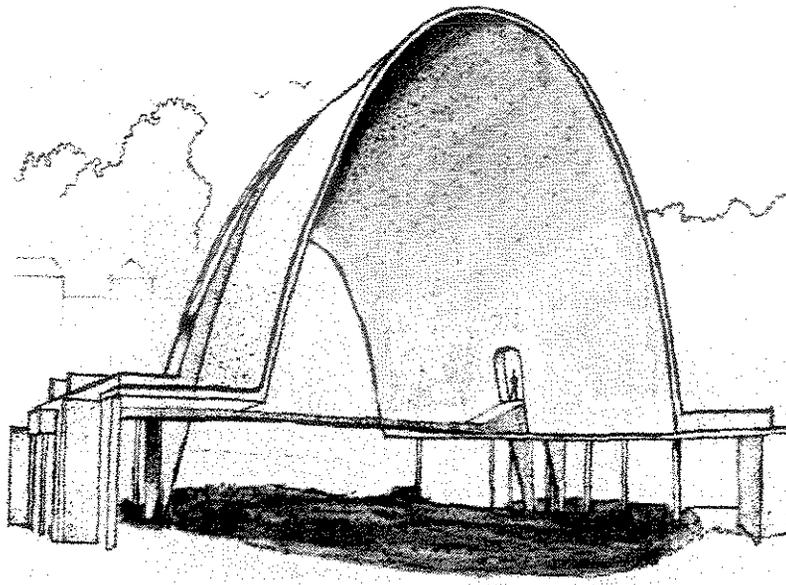


Figura 1.3

- Escritórios de Correio, Rhode Island (1960), EUA. Ela foi projetada por C. A. Maguire & Associados. A cobertura consiste de uma combinação de várias cascas cilíndricas que cobrem o prédio completo. As cascas se apoiam em pontos ao redor do perímetro em colunas expostas no exterior da estrutura e colunas adicionais no interior. Os bordos livres da casca sobressaem como uma viga em balanço nos perímetros das paredes, revelando a espessura da casca, como mostra a figura 1.4.



Figura 1.4

- Christiansen projetou um hangar para a Força-Aérea dos EUA no Estado de Washington. Esta estrutura tem 115m de largura e 325m de comprimento. Grandes aeronaves podem entrar de ambos os lados dos quatro compartimentos e estacionar de frente para outras. O vão de cada compartimento é de 65,5 m com altura máxima de 20,0 m. As cascas cilíndricas de concreto armado de 7,6 cm de espessura são enrijecidas por oito arcos conectados por pinos. Este é o maior hangar de concreto armado do mundo.
- Ammann e Whitney, engenheiros, projetaram um hangar para aviões das Aerolinhas Americanas no Aeroporto Municipal de Chicago EUA. Ele consiste de dois cilindros curtos unidos ao longo do comprimento. O comprimento é único de 8,8 m com largura de 78,3 m. A espessura do concreto é variável, sendo de 7,5 cm na coroa e de 15 cm na base, como mostra na figura 1.5.

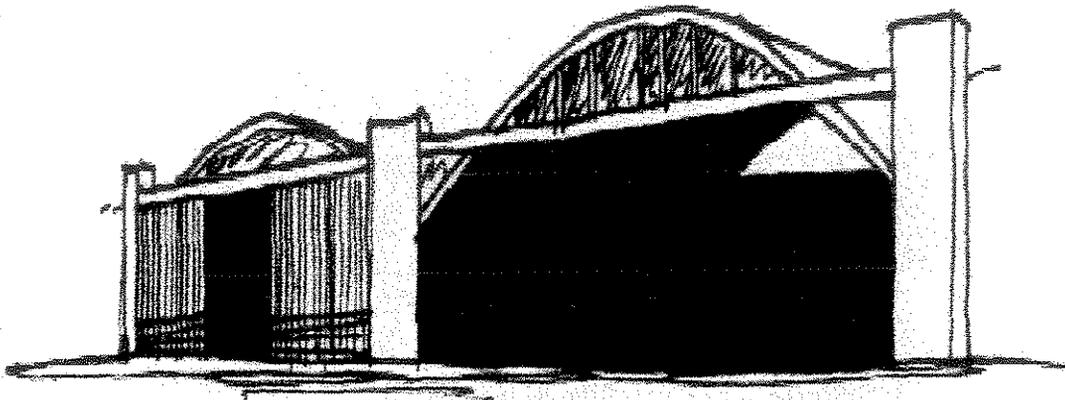


Figura 1.5

- Outra cobertura importante citada na literatura, que é formada por cascas cilíndricas, foi projetada por Yamasaki (arquiteto) e Tedesco (engenheiro), e foi construída em 1954 para o aeroporto de St. Louis EUA.

Muitas cascas cilíndricas de concreto armado têm sido construídas no mundo. A tecnologia atual permite a possibilidade de construir estruturas de grandes coberturas de concreto armado, como se mostrou nos exemplos. Atualmente, com a ajuda de softwares avançados e concretos de alta resistência, é possível projetar cascas mais arrojadas com garantia de segurança.

## **2.- OBJETIVOS**

### **2.1 OBJETIVO GERAL.**

O objetivo deste trabalho é apresentar mais uma ferramenta na solução de problemas não-lineares, aplicado a estruturas de concreto armado, neste caso cascas cilíndricas, considerando a não-linearidade dos materiais.

A técnica comum usada para estes casos é o método de Newton Raphson, que usa uma função linear ( equação de equilíbrio). Este, algoritmo foi utilizado pelo orientador Dr. Prof. Ernesto Aloísio Assan, no programa principal (SHELL), que serviu de base para este trabalho.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.**

Modificação do algoritmo Newton Raphson para o método Quase-Newton, que considera uma função quadrática ( equação da energia potencial total ).

Comparações dos resultados obtidos pelos dois métodos.

Espera-se obter resultados mais reais do comportamento da estrutura, e, desta forma, melhorar os resultados.

## CAP. 3 RIVISÃO BIBLIOGRAFICA.

### 3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE ANALISE LINEAR POR ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é considerado como um método geral de análise estrutural, cuja finalidade é determinar a distribuição de tensões e deformações num meio contínuo. Os casos podem variar desde problemas de tensão e deformação planas, sólidos de revolução e flexão de lâminas, até a análise mais geral de sólidos tridimensionais. Em todos os casos uma estrutura pode ser idealizada como um sistema de pontos, que são chamados de nós, inter-conectados por elementos discretos. Os deslocamentos destes nós são as incógnitas principais do problema. O objetivo da análise é: dado o carregamento nodal, a geometria da estrutura ( localização de pontos), e as propriedades dos materiais; encontrar os deslocamentos nodais e as tensões internas nos elementos estruturais.

#### 3.1.1 DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO FINITO.

O método dos elementos finitos tem sido utilizado extensivamente utilizado sob o enfoque do processo dos deslocamentos, com o qual, a partir da minimização da energia potencial total da estrutura, chega-se à solução do problema em termos de deslocamentos nodais.

Com os deslocamentos nodais calcula-se as deformações e as tensões em pontos do elemento finito.

O princípio da mínima energia potencial é expresso, matematicamente, por:

$$\int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} dV = \int_V \delta \tilde{v} b dV + \int_A \delta \tilde{v} p dA \quad (3.1.1)$$

Sendo:

$\underline{\sigma}$  o vetor das tensões:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$\underline{\varepsilon}$  o vetor das deformações:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

$\underline{b}$  o vetor de forças volumétricas:  $b_x, b_y, b_z$

$\underline{p}$  o vetor de forças de superfície:  $p_x, p_y, p_z$

$\underline{v}$  o vetor das componentes de deslocamento:  $u, v, w$

$V$  o volume do elemento

$A$  superfície onde atua  $\underline{p}$ .

Esta equação também representa a igualdade do trabalho virtual das forças internas  $W_i$  com o trabalho das forças externas  $W_e$ .

As componentes de deslocamento são associadas funções, em geral, polinômios que tem como coeficientes os deslocamentos nodais, incógnitas do problema.

Derivando adequadamente essas funções obtêm-se as deformações e, conhecendo as relações constitutivas do material, tem-se as tensões. Substituindo essas grandezas na equação (3.1.1) deriva-se um sistema linear de equações que fornecerá os deslocamentos para o problema em análise.

Os passos seguintes descrevem a obtenção da matriz de rigidez de um elemento finito genérico.

- 1) Expressar as componentes dos deslocamentos  $[v]$  em termos dos deslocamento nodais  $\{u\}$  por meio de funções aproximadoras  $\{\phi\}$ .

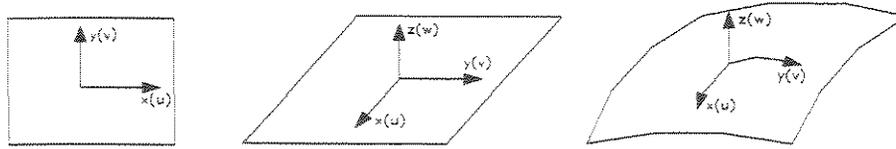


Figura 2.1: exemplo de representação de elementos finitos de chapa, placa e casca respectivamente.

$$\{v\} = [\phi] \{u\} \quad (3.1.2)$$

- 2) Tomando derivadas da equação (3.1.2) estabelece-se a relação entre deformação  $\{\mathcal{E}\}$  e deslocamentos nodais  $\{u\}$ .

$$\{\mathcal{E}\} = [B] \{u\} \quad (3.1.3)$$

As relações entre as tensões  $\{\sigma\}$  e as deformações  $\{\mathcal{E}\}$  tem a forma:

$$\{\sigma\} = [D] \{\mathcal{E}\} \quad (3.1.4)$$

onde  $[D]$  é a matriz de coeficientes elásticos do material.

- 4) Substituindo a equação (3.1.3) em (3.1.4) obtém-se a relação tensão-deslocamentos nodais:

$$\{\sigma\} = [D][B] \{u\} \quad (3.1.5)$$

5) Impondo arbitrariamente deslocamentos  $\{u\}$  nos pontos nodais, tem-se o trabalho virtual das ações  $W_e$  e o trabalho virtual interno  $W_i$  que são iguais.

6) Trabalho virtual externo:

$$W_e = \{u\}^T \{r\} \quad (3.1.6)$$

onde  $\{r\}$  são ações aplicadas nos pontos nodais.

7) Trabalho virtual interno:

$$W_i = \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.1.7)$$

da equação (3.1.3)

$$\{\varepsilon\}^T = \{u\}^T [B]^T \quad (3.1.8)$$

Substituindo na equação (3.1.7) resulta:

$$W_i = \{u\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV \quad (3.1.9)$$

substituindo (3.1.5) em (3.1.9)

$$W_i = \{u\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} \quad (3.1.10)$$

8) igualando  $W_e = W_i$  ou (3.1.6) = (3.1.10), tem-se:

$$\{u\}^T \{s\} = \{u\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} \quad (3.1.11)$$

reduzindo

$$\{r\} = \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} \quad (3.1.12)$$

ou

$$\{r\} = [k] \{u\} \quad (3.1.13)$$

onde:

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.1.14)$$

é a matriz de rigidez do elemento.

Geralmente, exceto para casos especiais, a integração indicada pela equação (3.1.14) é efetuada com processos numéricos. Uma vez calculada a matriz de rigidez do elemento, e efetuada a transformação das coordenadas locais para as coordenadas globais, obtém-se a matriz de rigidez da estrutura  $[K]$  formada pela soma sistemática das matrizes de rigidez dos elementos.

O vetor  $\{R\}$  representa as cargas conhecidas em todos os nós da estrutura. O vetor  $\{U\}$  contém os deslocamentos incógnitos dos pontos nodais da estrutura que são calculados ao resolver a equação (3.1.15).

$$\{R\} = [K] \{U\} \quad (3.1.15)$$

Com os deslocamentos dos nós conhecidos, as tensões em cada ponto são calculadas usando a equação (3.1.5) :

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{U\}.$$

### 3.1.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR.

Existem muitas estruturas que apresentam problemas de importância onde se observe comportamento não-linear, devido tanto ao material quanto a geometria. A não-linearidade geométrica é associada a sistemas e elementos estruturais especiais em que o efeito dos deslocamentos sobre as forças internas são considerados na análise. Exemplos destes casos especiais são colunas longas, arcos flexíveis e algumas estruturas de cascas finas.

A não-linearidade do material, que ocorre em estruturas de concreto armado, por exemplo, complicam o procedimento analítico para determinar o estado de tensões e deformações, devido aos seguintes fatos:

- 1) A resposta não-linear de carga-deformação do concreto e a dificuldade em formular a adequada relação de acordo com a combinação de tensões.
- 2) Fissuramento progressivo do concreto sob incremento de carga e a complexidade na formulação do comportamento da ruptura, para vários estados de tensão.
- 3) Consideração da armadura de aço e a interação entre os materiais constituintes concreto e aço que formam o sistema composto e,
- 4) o efeito do tempo, tal como a deformação lenta e retração do concreto.

Nesta pesquisa se considera somente a não-linearidade física dos materiais, o fissuramento progressivo do concreto e a resposta não-linear entre as relações tensão deformação, e não se levará em conta o efeito do tempo com a influência da deformação lenta e retração do concreto.

### 3.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO UTILIZADO.

As cascas cilíndricas circulares de concreto armado têm sido utilizadas extensivamente como elementos estruturais destinados a cobrir grandes vãos como foi comentado no capítulo 1.

No regime pós-elástico elas apresentam um formidável problema de análise de tensão se o comportamento do material é idealizado realisticamente. O requisito básico para a análise é uma conveniente relação, principalmente na forma incremental, entre a tensão resultante e as medidas de deformação que adequadamente refletem o escoamento da armadura, a abertura das fissuras e a ruptura do concreto por carregamento progressivo. Naturalmente, com a finalidade de obter tal relação, podem ser feitas simplificações. Assim, comparações de cálculos com experimentos são essenciais para estabelecer a eficiência do modelo matemático.

Duas diferentes aproximações básicas têm sido usadas para obter relações constitutivas idealizadas para a aplicação do método dos elementos finitos. Na "modificação do produto de rigidez  $EI$ " e a adoção de um critério aproximado do ponto de vista macroscópico.

A segunda aproximação é baseada em uma idealização das relações tensão-deformação para o concreto e aço, juntamente com alguma suposição com respeito à compatibilidade das deformações entre os dois materiais constituintes.

Para deformação por flexão, a propriedade do material e a variação da espessura devem ser consideradas. Isto pode realizar-se de uma maneira discretizada por meio de uma aproximação na qual a altura da casca é dividida em camadas, sendo que cada camada pode ter propriedades diferentes. Whang [30] usou este conceito para desenvolver um elemento finito retangular de casca no regime elasto-plástico considerando o endurecimento do

material. Esta idealização é apropriada para metais, porém não considera as propriedades ortotrópicas do concreto armado.

Neste caso tem-se um procedimento por elementos finitos por camadas para determinar os dados da deflexão-carga até a ruptura do concreto armado. A armadura é assumida como elasto-plástica, o concreto tem uma tensão limite para o esmagamento em compressão biaxial em concordância com o critério de esmagamento proposto por Kupfer, Hilsdorf, e Rush [31]. Os graus de liberdade no plano são importantes para cascas porque a variação da propriedade do material através da espessura, com o carregamento progressivo, produz um acoplamento nas relações constitutivas entre tensões da superfície média e curvaturas, e assim entre os deslocamentos no plano e normal a ele. Uma “modificação do  $EI$ ” aproximada não produz tal acoplamento, portanto não pode refletir a influência das condições de contorno no plano.

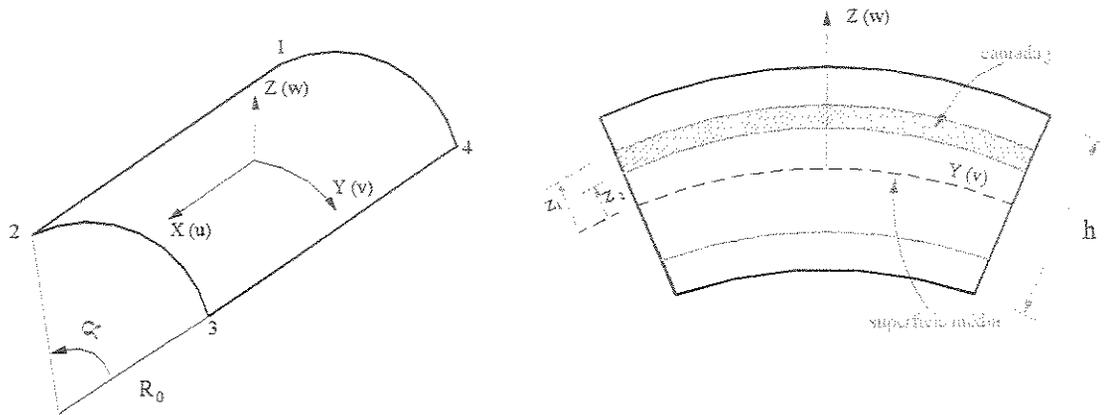
Hand et al [35] utilizaram também o procedimento de dividir a espessura da casca em camadas. Neste trabalho adota-se este modelo.

### 3.2.1 ELEMENTO FINITO DE CASCA FINA.

O elemento finito utilizado para discretizar a casca é o elemento bidimensional desenvolvido por Ashwell e Sabir [32] e modificado independentemente por Assan [33] e Charchafchi [34].

Este elemento tem cinco graus de liberdade por nó:  $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_0}$  sendo

$u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes dos deslocamentos nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, fixando o sistema de eixos no baricentro do elemento, conforme a figura 3.2.1 a.



a) Deslocamentos

b) Elemento finito com camada genérica

Figura 3.2.1- Elemento finito de casca dividido em camadas.

As funções aproximadoras dos deslocamentos são:

$$u = a_1 + R_0 \cos \frac{y}{R_0} a_2 - R_0 \operatorname{sen} \frac{y}{R_0} a_3 + xa_7 + \frac{xy}{R_0} a_8 + \frac{3y}{4} a_{11} - \frac{R_0 y}{2} a_{17} + \left( R_0^2 y - \frac{y^3}{6} \right) a_{19} - \frac{R_0 y}{2} a_{20}$$

$$v = x \operatorname{sen} \frac{y}{R_0} a_2 + x \cos \frac{y}{R_0} a_3 + a_4 + \operatorname{sen} \frac{y}{R_0} a_5 + \cos \frac{y}{R_0} a_6 + \frac{x^2}{6R_0} a_8 + \frac{x}{4} a_{11} + R_0 ya_{16} + R_0 xya_{17} + \frac{y^2}{2} a_{10} + \left( \frac{xy^2}{2} - R_0^2 x \right) a_{19} + \frac{R_0 x}{2} a_{20}$$

$$w = -x \cos \frac{y}{R_0} a_2 + x \operatorname{sen} \frac{y}{R_0} a_3 - \cos \frac{y}{R_0} a_5 + \operatorname{sen} \frac{y}{R_0} a_6 + R_0 a_9 + R_0 xa_{10}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{x^2}{2} a_{12} - \frac{x^3}{6} a_{13} - \frac{x^2 y}{2 R_0} a_{14} - \frac{x^3 y}{6 R_0} a_{15} - R_0^2 a_{16} - R_0^2 x a_{17} \\
& - R_0 y a_{18} - R_0 x y a_{19} .
\end{aligned}$$

Para melhor representar a fissuração ao longo da espessura da casca, sem apelar para o uso de elementos tridimensionais, adotou-se o procedimento proposto por Hand et alii [35], que consiste em dividir cada elemento finito em camadas, supondo que cada uma delas encontra-se em um estado plano de tensões, podendo as propriedades físicas do concreto variar de camada para camada.

O elemento finito dividido em camadas pode ser visualizado na figura 3.2.1 b.

### 3.2.2 TENSÕES E DEFORMAÇÕES NAS CASCAS FINAS.

#### 3.2.2.1 - EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

Os deslocamentos de um ponto genérico de casca são dados por:

$$\begin{aligned}
u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
v &= v_0 - z \left[ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_0} \right] \\
w &= w_0
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

sendo que o índice “o” (zero) corresponde ao plano de referencia (plano médio) da casca.

### 3.2.2.2- EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Para a consideração de pequenos deslocamentos, as relações deformações-deslocamentos de são:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_0} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{R_0 \partial y} \\
 \chi_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3}{2 R_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2 R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Com (3.2.1) e (3.2.2) pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} + z \chi_x \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_{0y} + z \chi_y \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{0xy} + z \chi_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Fazendo:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z \{\chi\} \tag{3.2.4}$$

Essa igualdade pode ser transformada, ainda, em:

$$\{\varepsilon\} = [Z] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \quad (3.2.5)$$

com:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

### 3.2.2.3- RELAÇÕES TENSÕES-DEFORMAÇÕES.

Sejam  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  as tensões que definem o estado plano de tensões em cada ponto de cada camada de um elemento finito.

Os esforços internos resultantes, cuja convenção é mostrada na Figura 3.2, são dados por:

$$N_x = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz \quad ; \quad N_y = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_y dz \quad ; \quad N_{xy} = \int_{z_1}^{z_2} \tau_{xy} dz$$

$$M_x = \int_{z_1}^{z_2} z \sigma_x dz \quad ; \quad M_y = \int_{z_1}^{z_2} z \sigma_y dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{z_1}^{z_2} z \tau_{xy} dz \quad (3.2.6)$$

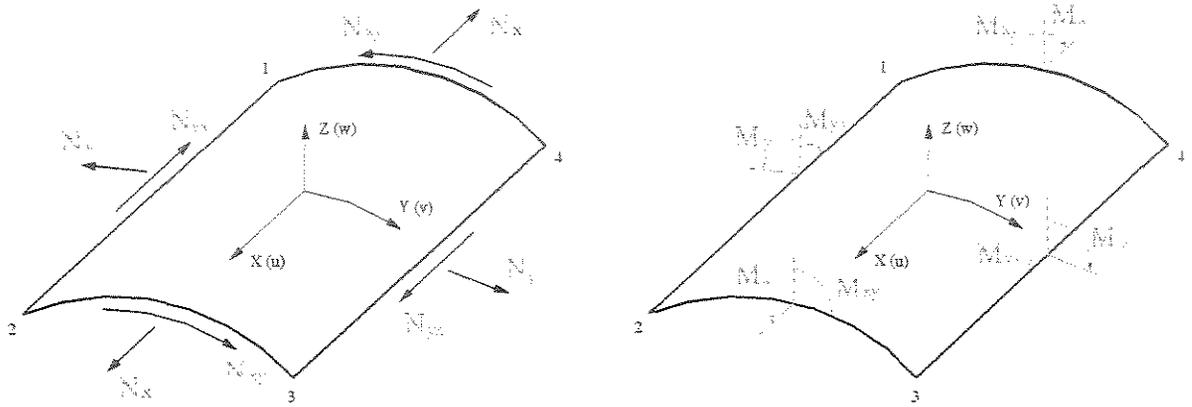


Fig. 3.2.2 - Convenção para os esforços internos da casca.

Chamando de:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

As igualdades (3.2.6) e as três relações acima em forma matricial ficam:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} [Z]^T \{\sigma\} dz \quad (3.2.7)$$

A relação entre as tensões e deformações pode ser escrita de forma geral como:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.1.4) = (3.2.8)$$

sendo:

$[D]$  a matriz de coeficientes elásticos que, no caso de material ortotrópico, vale:

$$[D] = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu)G \end{bmatrix}$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

Substituindo em (3.2.8)  $\{\varepsilon\}$  dado pela igualdade (3.2.4) tem-se:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon_0\} + z\{\chi\}). \quad (3.2.9)$$

Tendo em vista a igualdade (3.2.5) a equação acima fica:

$$\{\sigma\} = [D] \left[ [Z] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \right]. \quad (3.2.10)$$

A equação (3.2.7) pode, então, ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} [Z]^T [D] \left[ [Z] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \right] dz. \quad (3.2.11)$$

### 3.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS NODAIS.

Seja  $\{u_i\}$  o vetor que contém os cinco graus de liberdade por nó  $i$  e  $\{v\}$  o vetor formado pelos deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

O conjunto dos graus de liberdade dos quatro nós do elemento finito é:

$$\{U\}^T = \{\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_3\} \quad \{u_4\}\} \quad (3.2.12)$$

O vetor  $\{U\}$  pode ser escrito como:

$$\{U\} = [J]\{a\} \quad (3.2.13)$$

sendo  $[J]$  uma matriz numérica (20x20) e  $\{a\}$  o vetor que contém as 20 constantes independentes das funções deslocamentos  $u, v, w$ .

Da mesma forma pode-se escrever que:

$$\{v\} = [\phi]\{a\}, \quad (3.2.14)$$

sendo  $[\phi]$  as funções de forma.

Com (3.2.14) o vetor  $\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix}$  pode ser representado em função dos deslocamentos nodais por:

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} = [C]\{v\} = [C][\phi]\{a\}. \quad (3.2.15)$$

Transportando (3.2.14) e (3.2.15) para (3.2.5), o vetor de deformações no ponto  $i$  fica:

$$\{\varepsilon\} = [Z][C][\phi]\{a\} = [Z][F]\{a\}, \text{ com } [F] = [C][\phi] \quad (3.2.16)$$

E, com relação às tensões, usando (3.2.10):

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D}(\tilde{Z}\tilde{C}\tilde{\phi}\tilde{a}) = \tilde{D}(\tilde{Z}\tilde{F}\tilde{a}). \quad (3.2.17)$$

Da equação (3.2.13) tem-se que

$$\tilde{a} = \tilde{J}^{-1}\tilde{U} \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \tilde{Z}\tilde{F}\tilde{J}^{-1}\tilde{U} \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \tilde{Z}\tilde{B} \quad (3.2.18)$$

sendo:  $\tilde{B} = \tilde{F}\tilde{J}^{-1}$ .

Substituindo as relações (3.2.17) e (3.2.18) na equação do trabalho virtual interno como segue:

$$\begin{aligned} \int_V \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} dV &= \delta \tilde{U}^T \int_V \left[ \tilde{B}^T \tilde{Z}^T \tilde{D} \tilde{Z} \tilde{B} \right] \{U\} dV \\ &= \delta \tilde{U}^T \int_A \left[ \tilde{B}^T \int_{z_1}^{z_2} \tilde{Z}^T \tilde{D} \tilde{Z} dz \tilde{B} \right] dA \tilde{U} , \end{aligned}$$

Essa igualdade ainda pode ser representada por:

$$\int_V \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} dV = \delta U^T \left\{ \int_A \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} dA \right\} \tilde{U} , \quad (3.2.19)$$

sendo  $\tilde{D} = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{Z}^T \tilde{D} \tilde{Z} dz$ .

O trabalho virtual das cargas externas pode ser escrito como:

$$\int_A \delta \tilde{v}^T p dA , \quad \tilde{v} = \tilde{\phi}\tilde{J}^{-1}\tilde{U} .$$

Substituindo  $\delta \tilde{v}$  pela equação (3.2.14) e lembrando que  $\tilde{a} = \tilde{J}^{-1}\tilde{U}$ , tem-se que:

$$\int_A \delta \tilde{v}^T p dA = \int_A \tilde{p}^T \tilde{\phi} \delta \tilde{a} dA = \int_A \tilde{p}^T \tilde{\phi} \tilde{J}^{-1} \delta \tilde{U} dA$$

Operando sobre essa última integral tem-se que o trabalho virtual realizado pelas cargas externas vale:

$$\delta \tilde{U}^T (\tilde{J}^{-1}) \int_A \tilde{\phi} \tilde{p} dA \quad (3.2.20)$$

Igualando os trabalhos virtuais dados pelas equações (3.2.19) e (3.2.20) tem-se:

$$\left\{ \int_A \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} dA \right\} \tilde{U} = (\tilde{J}^{-1})^T \int_A \tilde{\phi}^T \tilde{p} dA \quad (3.2.21)$$

A integral do lado esquerdo corresponde à matriz de rigidez linear do elemento finito de uma camada de concreto (índice c). A igualdade pode ser representada, então, por:

$$(\tilde{k}_c) \tilde{U} = \tilde{r} \quad (3.2.22)$$

$$\tilde{k}_c = \int_A \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} dA$$

### **3.3 MODELAGEM DO CONCRETO E AÇO.**

Desde o trabalho pioneiro de Ngo e Scordelis [1], em 1967, e ou trabalho publicado por Riva e Cohn [56], inúmeros outros procuraram descrever a modelagem mais adequada para o concreto armado tentando captar seu complexo comportamento diante, por exemplo, da fissuração progressiva e dos fatores dependentes do tempo como a retração, deformação lenta e a degradação progressiva da aderência entre a armadura e o concreto.

Descrições dos principais trabalhos divulgados são encontrados em Argyris et alii [2], Chen [3], no State of Report da ASCE [4], em Meyer e Bathe [5] e na tese de doutoramento de Proença [6], onde se tem um programa atual das pesquisas que estavam sendo realizadas, inclusive no Brasil.

Não se fará neste trabalho uma resenha dos modelos matemáticos desenvolvidos até hoje porque, além de longa, a lista seria certamente incompleta e os autores acima citados conseguiram, com competência, cumprir esse objetivo.

Nos itens seguintes apresentar-se-ão as relações constitutivas e o critério de ruptura adotados para o concreto armado, e que compõem o modelo matemático utilizado neste trabalho.

#### **3.3.1 MODELAGEM DO CONCRETO.**

##### **3.3.1.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O CONCRETO.**

Para representar o concreto, nesta pesquisa, foi adotado um modelo elástico não-linear.

Chen [3] descreve três diferentes tipos de relações tensões-deformações para esses modelos.

- a) Tipo Cauchy: onde o estado de tensões em um determinado instante é função apenas do estado de deformações .

b) Tipo hiperelástico (Green): baseia-se na hipótese da existência das funções  $W$  e  $\Omega$  denominadas respectivamente densidade de energia de deformação e densidade de energia complementar de deformação.

Essas funções dependem das componentes dos tensores de tensões e deformações em cada instante.

Para um material inicialmente isotrópico e elástico,  $W$  e  $\Omega$  são expressos em termos dos três invariantes de deformações e tensões, respectivamente.

Assumindo, por exemplo, para  $\Omega$ , funções polinomiais em termos dos três invariantes de tensões, modelos diversos para as relações constitutivas podem ser obtidos, como o desenvolvido por Evans e Pister [41].

c) Tipo incremental ou hipoeelástico: esse tipo de formulação é usado frequentemente para descrever o comportamento mecânico de uma classe de materiais em que o estado de tensões depende do estado de deformações em cada instante, assim como do caminho percorrido pelas tensões para atingir aquele estado.

O modelo elástico não-linear considera o concreto como sendo um material isotrópico ou ortótropo com os parâmetros elásticos variáveis, o modelo ortotrópico geralmente assume o concreto como hipoeelástico.

Esses modelos sofreram severas críticas, principalmente de Bazant [38], afirmando que a invariância tensorial é violada em alguns deles, e que a rotação dos eixos de ortotropia implica que certas imperfeições do material (microfissuras e escorregamento da armadura) são causadas unicamente pelo estado atual de tensões e não pelo estado de deformações anterior que, para o concreto, não é verdade.

Apesar dessas inconsistências conceituais, esses modelos conseguem representar o funcionamento macroscópico do concreto e têm sido utilizados com frequência no estudo de estruturas com comportamento bidimensional como cascas e placas, apresentando resultados que, comparados com os experimentais, podem ser considerados excelentes.

Esses modelos são atraentes devidos à sua simplicidade e facilidade de implantação em programas de computador.

Como já se salientou, inúmeros trabalhos foram desenvolvidos por: Bashur e Darwin [36], Mueller [52], Rajagopal [54], Van Greunen, Canet et alii [13] e Rule e Rowlands [17] utilizando esses modelos.

O modelo incremental hipoelástico permite também a adoção de carregamento não proporcionais e cíclicos.

### 3.3.1.2 O MODELO DE DARWIN E PECKNOLD.

Darwin e Pecknold [26] ao proporem seu modelo para o concreto pretenderam suplantar as desvantagens que o precursor modelo ortotrópico de Lin et alii [47] apresentava.

Além disso, queriam que seu modelo pudesse ser utilizado em situações gerais de carregamento em que o estado de tensões pudesse ser aproximado por um estado plano de tensões, e também ser facilmente incorporado a programas de computador utilizando o método dos elementos finitos e, ainda, ser completamente determinado com os parâmetros convencionais  $f_c$  e  $f_{ct}$ , respectivamente tensão de ruptura do concreto à compressão (uniaxial) e tensão de ruptura do concreto à tração,  $\varepsilon_u$  deformação última do concreto à compressão e  $E_{co}$  módulo de Young inicial do concreto.

Para um estado plano de tensões onde 1 e 2 são as direções das tensões principais, a relação constitutiva incremental nessas direções para um material com comportamento ortotrópico vale:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_1 \nu_2)G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3.1)$$

sendo  $E_1$  e  $E_2$  os módulos de Young,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  os coeficientes de Poisson para as direções 1 e 2 respectivamente e  $G$  o módulo de elasticidade transversal.

Por considerações energéticas obtém-se que:

$$\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1 \quad (3.3.2)$$

Para simplificar o uso das equações (3.3.1) e assegurar que nenhuma das direções principais seja favorecida, essas relações podem ser modificadas fazendo:

$$\nu^2 = \nu_1 \nu_2 \quad (3.3.3)$$

sendo  $\nu$  o “coeficiente de Poisson equivalente”.

Com as equações (3.3.2) e (3.3.3) a equação (3.3.1) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ & E_2 & 0 \\ \text{simétrica} & & (1-\nu^2)G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3.4)$$

A rotação para o sistema de eixos ortogonais  $x, y$  como mostra na figura 3.3.1 transforma as equações (3.3.4) em:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 c^2 + E_2 s^2 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & -\frac{1}{2}(E_1 - E_2)sc \\ & E_1 s^2 + E_2 c^2 & \frac{1}{2}(E_1 - E_2)c \\ \text{simétrica} & & G' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.5)$$

onde  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre as direções  $x$  e 1, de acordo com a figura 3.3.1.

$$G' = \frac{1}{4} (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2})$$

é o módulo de deformação transversal que não depende do sistema de eixos adotado.

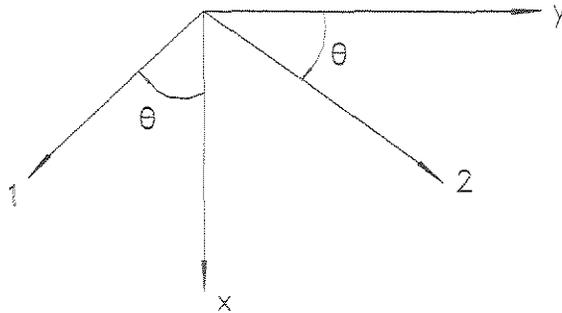


Figura 3.3.1.- Sistema de eixos ortogonais

Os valores de  $E_1$ ,  $E_2$  e  $\nu$  são determinados para cada incremento de carga em função dos estados de tensão e deformação em cada ponto de Gauss do elemento finito, admitindo que o material se comporta elasticamente durante o incremento, de acordo com o procedimento descrito mais adiante.

A matriz constitutiva incremental determinada em relação aos eixos 1 e 2 é então referida, através de uma rotação, ao sistema de referência x, y e utilizada para calcular a matriz de rigidez do elemento finito.

A orientação dos eixos 1 e 2 e as propriedades do material são corrigidas para cada iteração do processo de solução.

As equações (3.3.4) podem ser rearranjadas, assumindo a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2)G' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{1n} \\ d\varepsilon_{2n} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3.6)$$

sendo as deformações incrementais  $d\varepsilon_{1u}$  e  $d\varepsilon_{2u}$  representadas por:

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{1}{1-\nu^2} d\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}} d\varepsilon_2 \quad (3.3.7)$$

$$d\varepsilon_{2u} = \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_2}} d\varepsilon_1 + \frac{1}{1-\nu^2} d\varepsilon_2 \quad (3.3.8)$$

Essas deformações foram chamadas por Darwin e Pecknold [26] de deformações uniaxiais equivalentes.

Elas permitem, através da remoção do coeficiente de Poisson das relações tensão-deformação bidimensional, que uma família de curvas para o concreto comprimido possa ser obtida experimentalmente, como se fosse um estado de tensão unidimensional.

Essas curvas incluem o efeito do confinamento da microfissuração, e os valores de  $E_1$  e  $E_2$  podem ser obtidos através delas.

Isto pode ser verificado considerando, para um concreto sob estado biaxial de compressão com  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  referidas às direções principais, que as relações incrementais tensão-deformação para as direções 1 e 2 valem:

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\sigma_2}{E_2} - \nu_1 \frac{d\sigma_1}{E_1} \quad \text{e} \quad d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_1} - \nu_2 \frac{d\sigma_2}{E_2} \quad (3.3.9)$$

sendo  $E_1$  e  $E_2$  os módulos tangentes à curvas tensão-deformação .

Substituindo as igualdades (3.3.9) em (3.3.7) e (3.3.8), e levando em consideração a (3.3.2), as deformações uniaxiais equivalentes ficam:

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{d\sigma_1}{E_1} = \frac{d\varepsilon_1}{1 - \nu_2 \beta n} \quad (3.3.10)$$

$$d\varepsilon_{2u} = \frac{d\sigma_2}{E_2} = \frac{d\varepsilon_2}{1 - \nu_1 \alpha m} \quad (3.3.11)$$

sendo  $\beta = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}$ ,  $n = \frac{E_1}{E_2}$ ,  $\alpha = \frac{d\sigma_1}{d\sigma_2}$  e  $m = \frac{E_2}{E_1}$

Percebe-se dessa maneira que as tangentes  $E_1$  e  $E_2$  às curvas tensão-deformação não contêm o efeito do coeficiente de Poisson, removido pela introdução de  $\varepsilon_{1u}$  e  $\varepsilon_{2u}$ .

O confinamento da microfissuração influencia os valores  $d\varepsilon_1$  e  $d\varepsilon_2$  obtidos experimentalmente e, portanto, também é considerada em  $E_{1u}$  e  $E_{2u}$ , como mostram as equações (3.3.10) e (3.3.11).

A deformação uniaxial equivalente total em qualquer ponto é obtida somando todos os incrementos determinados até aquele instante:

$$\varepsilon_{iu} = \sum d\varepsilon_{iu} = \sum \frac{d\sigma_i}{E_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.12)$$

Darwin e Pecknold [40] propuseram o uso de uma curva uniaxial equivalente tensão-deformação para o estado plano de tensões, como mostra a figura 3.3.2.

O trecho que representa a compressão é descrito pela equação de Saenz [57]:

$$\sigma_i = \frac{E_{co} \varepsilon_{iu}}{1 - \left[ \frac{E_{co}}{E'_c} - 2 \right] \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left[ \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right]^2} \quad (3.3.13)$$

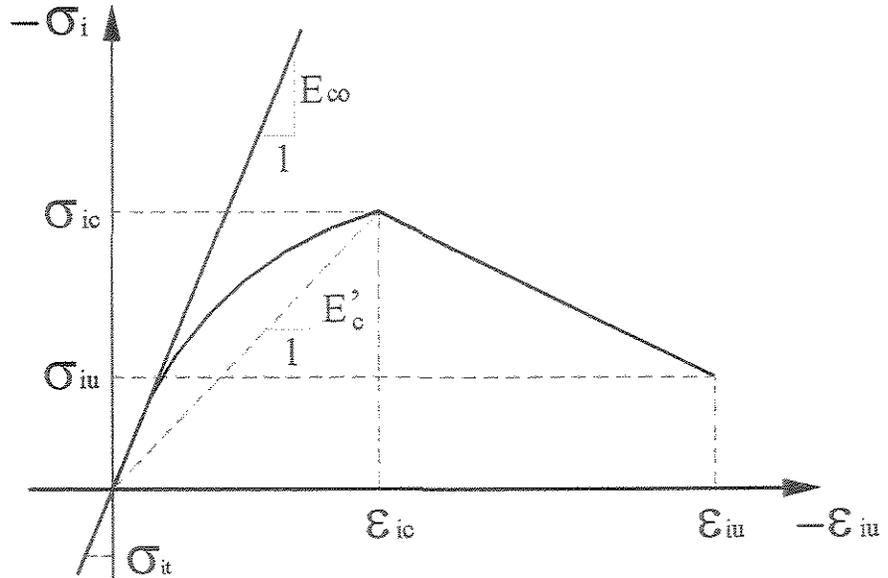


Figura 3.3.2.- Diagrama tensão-deformação uniaxial equivalente [26].

Sendo 
$$E'_c = \frac{\sigma_{ic}}{\epsilon_{ic}}$$

Na tração a relação é linear:

$$\sigma_i = E_{co} \epsilon_{iu} \quad \text{para } \sigma_i \leq \sigma_{it} \quad (3.3.14)$$

As tensões  $\sigma_{ic}$ ,  $\sigma_{it}$  e a deformação  $\epsilon_{ic}$  podem ser determinadas experimentalmente.

O módulo de Young  $E_i$  da parte comprimida é obtido derivando a equação (3.3.13) em relação a  $\epsilon_{iu}$ :

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_{iu}} = - \frac{E_{co}(1-q^2)}{\left[1 + \left[\frac{E_{co}}{E'_c} - 2\right]q + q^2\right]^2} \quad (3.3.15)$$

$$\text{onde } q = \frac{\varepsilon_{tu}}{\varepsilon_{ic}}$$

Neste trabalho foram adotados para o “coeficiente de Poisson equivalente” valores entre 0,15 e 0,20 que mostraram-se adequados para estados biaxiais de tração e compressão ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) [26].

No caso de tensões de tração e compressão combinadas, estes valores também são adequados, já que Kupfer alii [31] encontraram valores de  $\nu$  entre 0,18 e 0,20.

Neste caso, para tensões acima de 80% de  $f_c$ , os valores de  $\nu$  determinados por Kupfer [31] são maiores, porém, como a sua influência é relativamente pequena, os valores assumidos podem ser considerados razoáveis.

### 3.3.1.3 CRITÉRIO DE RUPTURA PARA O CONCRETO.

O critério de ruptura considerado neste trabalho é o proposto por Kupfer e Gerstle [27] com modificações.

A superfície de ruptura é dividida em quatro regiões que dependem da relação entre as tensões principais ( $\alpha = \sigma_1 / \sigma_2$ ).

As tensões de tração são sempre positivas e as de compressão negativas e, algébricamente,  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

As quatro regiões, mostradas na figura 3.3.3, e as equações que permitem obter os valores de  $\sigma_{ic}$  e  $\varepsilon_{ic}$  para cada uma das regiões, são apresentadas a seguir:

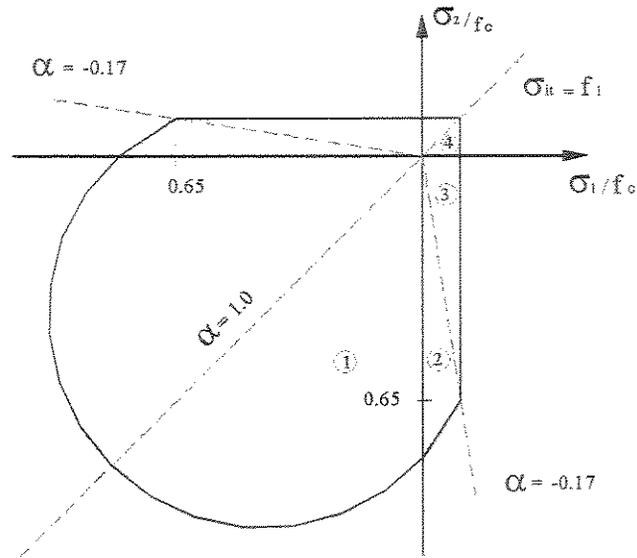


Fig. 3.3.3- Superfície de ruptura proposta por Kupfer e Gerstle [27]

**Região (1):**  $\sigma_1 =$  compressão e  $\sigma_2 =$  compressão  $-0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sigma_{2c} = \frac{1+3,65\alpha}{(1+\alpha)^2} f_c \quad (3.3.16)$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad (3.3.17)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c (3P_2 - 2) \quad (3.3.18)$$

$$\varepsilon_{1c} = \varepsilon_c (-1,6P_1^3 + 2,25P_1^2 + 0,35P_1) \quad (3.3.19)$$

sendo  $P_1 = \sigma_{1c}/f_c$  e  $P_2 = \sigma_{2c}/f_c$  e  $\varepsilon_c$  a deformação correspondente a  $f_c$  no ensaio unidimensional.

As equações (3.3.16) e (3.3.17) foram propostas Kupfer e Gerstle [27] e as equações (3.3.18) e (3.3.19) foram apresentadas por Darwin Pecknold [26].

Nessa região assume-se que o concreto escoe quando as tensões ultrapassam o valor da resistência última à compressão e sofre o esmagamento quando as deformações alcançam a deformação última.

**Região (2)**  $\sigma_1 =$  tração,  $\sigma_2 =$  compressão  $-0,17 \leq \alpha \leq 0$

$$\sigma_{2c} = \frac{1+3,28\alpha}{(1+\alpha)^2} f_c \quad (3.3.20)$$

$$\sigma_{1t} = \alpha \sigma_{2c} \quad (3.3.21)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 4,42 - 8,38 P_2 + 7,54 P_2^2 - 2,58 P_2^3 \right] \quad (3.3.22)$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{\sigma_{1t}}{E_{co}} \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{\sigma_{2c}}{f_c} \quad (3.3.23)$$

As equações (3.3.20) e (3.3.21) foram propostas por Darwin e Pecknold [26] enquanto que as equações (3.3.22) e (3.3.23) foram sugeridas por Rajagopal [54].

Supõe-se que a ruptura do concreto, nessa região, ocorra por escoamento e posteriormente por esmagamento na direção comprimida.

**Região (3):**  $\sigma_1 =$  tração,  $\sigma_2 =$  compressão  $\infty < \alpha < -0,17$

$$\sigma_{2c} = 0,65 f_c$$

$$\sigma_{1t} = f_{ct}$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 4,42 - 8,38 P_2 + 7,54 P_2^2 - 2,58 P_2^3 \right]$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{\sigma_{1t}}{E_{co}} \quad P_2 \leq 0,65$$

A ruptura se dá na direção da tensão de tração por fissuração do concreto.

**Região (4):**  $\sigma_1 = \text{tração}, \quad \sigma_2 = \text{tração} \quad 1 < \alpha < \infty$

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = f_{ct} \quad \varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = f_{ct} / E_{\infty}$$

Os dados necessários para se definir completamente o modelo são:  $f_c$  = resistência última do concreto à compressão,  $f_{ct}$  = resistência última do concreto à tração,  $\varepsilon_c$  = deformação correspondente à tensão  $f_c$  determinada em ensaio unidimensional,  $E_{co}$  = módulo de Young inicial do concreto,  $\varepsilon_u$  = deformação última do concreto à compressão e  $\nu$  coeficiente de Poisson.

Esses valores podem ser obtidos experimentalmente ou adotados conforme os sugeridos pelas normas ou códigos.

### 3.3.1.4 AMOLECIMENTO GRADUAL DO CONCRETO COMPRIMIDO (STRAIN SOFTENING).

Quando a deformação  $\varepsilon_u$  ultrapassa o valor da deformação  $\varepsilon_{ic}$ , a tensão no concreto nos incrementos subseqüentes diminui com o aumento da deformação, causando o escoamento gradual do material.

Neste trabalho admitiu-se que essa diminuição da tensão seja representada por uma reta, como se mostra na figura 3.3.4, decrescendo a tensão até um valor igual ao que corresponde a uma deformação aproximadamente igual a  $4\varepsilon_{ic}$ . A partir desse ponto considerou-se que o material sofre esmagamento.

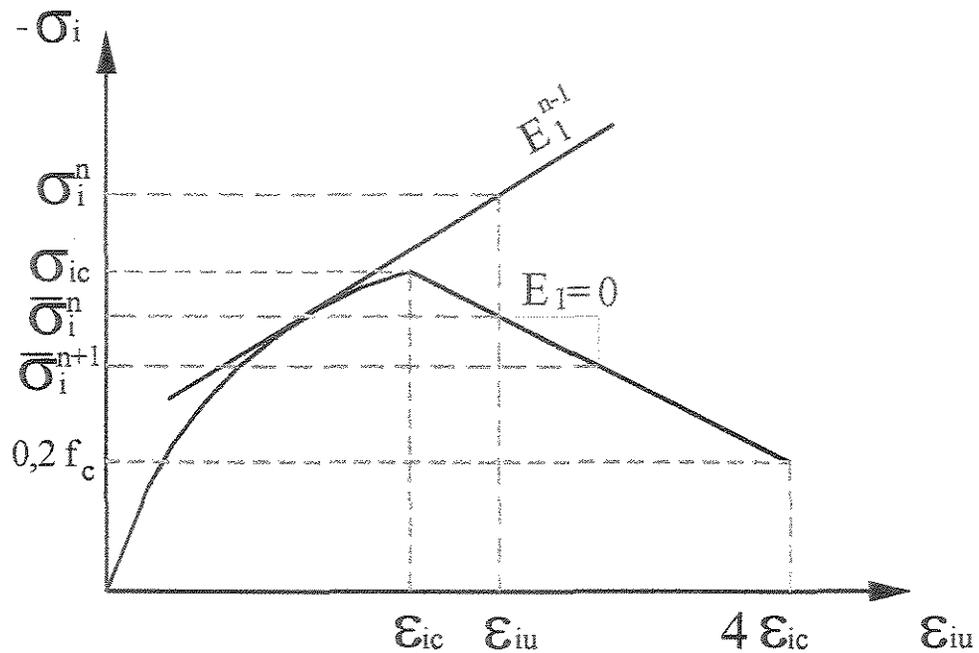


Figura 3.3.4.- Modelo adotado para o concreto comprimido.

Essa reta se aproxima com razoável precisão da envoltória de curvas obtidas experimentalmente por Karsan e Jirsa [42] para o concreto submetido a cargas uniaxiais cíclicas de compressão, como mostram Darwin e Pecknold [26].

Buyukozturk e Tseng [39] realizaram uma série de ensaios considerando cargas biaxiais cíclicas de compressão sem, com tudo, apresentarem curva envoltórica para o ramo descendente da curva tensão-deformação para o concreto.

Admitiu-se então, que para uma iteração  $n$ , uma deformação principal  $\epsilon_{iu}$  ultrapassando o valor de  $\epsilon_{ic}$  a tensão principal  $\sigma_i^n$  cai para  $\bar{\sigma}_i^n$  e o módulo de Young correspondente  $E_i^n$  assume valor nulo para a próxima iteração, conforme figura 3.3.4.

### 3.3.1.5 DESCARGA NA COMPRESSÃO.

A possibilidade de ocorrência de pequenas descargas devidas à redistribuição das tensões durante o processo iterativo, fez com que se considerasse, neste trabalho, essa alternativa.

Supõe-se que tanto a descarga quanto a recarga ocorrem segundo uma reta paralela à do módulo de Young inicial, como mostra a figura 3.3.5. Não se considerou carregamento cíclico.

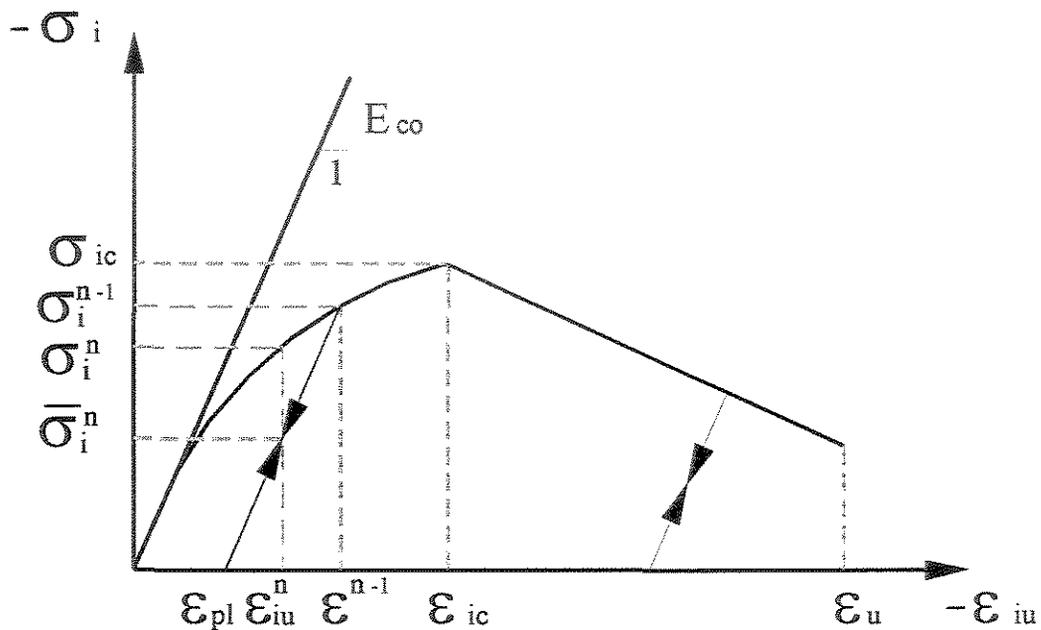


Figura 3.3.5 - Descarregamento e recarregamento no concreto comprimido.

O procedimento para levar em consideração a descarga e posterior recarga consiste no seguinte:

a) obtida a deformação  $\epsilon_{iu}^n$  correspondente à iteração  $n$ , e verificando que

$$|\epsilon_{iu}^n| < |\epsilon_{iu}^{n-1}|, \text{ tem-se, então, caracterizada a descarga.}$$

b) calcula-se o valor de  $\epsilon_{pl} =$  deformação residual dada por:

$$\epsilon_{pl} = \epsilon_{iu}^{n-1} - \frac{\sigma_i^{n-1}}{E_{co}}$$

c) com  $\varepsilon_{pl}$  obtém-se a tensão  $\bar{\sigma}_i^n$  com:

$$\bar{\sigma}_i^n = \frac{\varepsilon_{iu}^n - \varepsilon_{pl}}{E_{co}}$$

### 3.3.1.6 A FISSURAÇÃO DO CONCRETO.

A fissuração do concreto é a principal causa de não-linearidade nas cascas de concreto armado. Quando em um ponto uma tensão principal excede a resistência última do concreto à tração, admite-se que se forma uma fissura com direção perpendicular à direção dessa tensão principal.

Considera-se também que o concreto perde a capacidade de transmitir esforços na direção perpendicular à fissura devendo impor, nas relações constitutivas (3.3.4),  $E_1 = 0$ .

A presença da armadura e o engrenamento dos agregados permite considerar que haja transferência de tensões de cisalhamento através da fissura.

Esse efeito é levado em conta reduzindo o módulo de elasticidade transversal  $G$ , multiplicando-o por um coeficiente  $\beta_u$  ( $0 < \beta_u < 1$ ), introduzido por Lin [46], que constatou que a solução, embora não seja muito alterada pela variação de  $\beta_u$ , pode apresentar instabilidade se  $\beta_u$  for nulo.

Admitiu-se neste trabalho que a formação de uma segunda fissura no mesmo ponto se dá com direção perpendicular à primeira e  $E_2 = 0$ , ficando a relação constitutiva (3.3.4) com a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_u G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Há duas maneiras básicas de se modelar a fissuração: uma é com o chamado modelo discreto introduzido por Ngo Scordelis [1] e a outra com o modelo distribuído ou difuso proposto por Rashid [55]. Ambos encontram-se descritos com profundidade na referência[6].

Resumidamente, pode-se dizer que a principal desvantagem do primeiro modelo é a obrigatoriedade de ter que se redefinir a rede de elementos finitos, o que tem dificultado sua adoção.

O segundo modelo, que tem sido extensivamente usado, supõe que as fissuras distribuem-se em todo o elemento ou na região de influência de um ponto de integração numérica.

Comprovadamente esse modelo é muito mais conveniente, em vez que a topologia da estrutura discretizada fica inalterada.

Geralmente supõe-se que haja aderência entre o concreto e aço ao se adotar esse modelo de fissuração.

Como observada anteriormente, o concreto fissurado pode, entre fissuras, transmitir, ainda, tensões de tração que vão diminuindo gradativamente com o aumento da abertura das fissuras.

Esse comportamento do concreto armado fissurado é conhecido como enrijecimento à tração e pode ser simulado basicamente de duas maneiras.

A primeira admite que a diminuição das tensões de tração se dá segundo o tramo descendente da curva tensão-deformação para o concreto, como mostra a figura (3.3.6 a.)

Esse procedimento foi proposto por Scalon [58] e modificado por Lin [46] e admite uma redução gradual da tensão no concreto figura (3.3.6 b.)

A segunda maneira consiste em ignorar o concreto após a ruptura e utilizar uma rigidez maior para o aço, como mostra a figura (3.3.6c), alterando o diagrama tensão-deformação do aço.

Um método alternativo foi proposto por Mang e Floegl [49] baseado na resistência ao deslizamento das barras. Leva em consideração da fissura ao longo da altura da peça e a fissuração secundária entre as fissuras iniciais.

Este modelo requer, porém, que o espaçamento entre fissuras seja previamente especificado.

O modelo mais frequentemente utilizado é uma derivação do proposto por Lin [46], substituindo a curva descendente por uma reta.

Figueiras [11] apresentou um diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado onde o enrijecimento à tração é representado por uma reta que depende de duas constantes:  $\gamma$  e  $\epsilon_m$ , conforme Figura (3.3.6d) e que também foi incorporado a este trabalho.

A constante  $\gamma$  depende da porcentagem de armadura na seção pode assumir valores iguais a 0,5, 0,6 ou 0,7. Figueiras admitindo que a variação 0,5-0,7 é muito estreita propôs a utilização do valor 0,6. Para  $\epsilon_m$  o valor proposto foi 0,002.

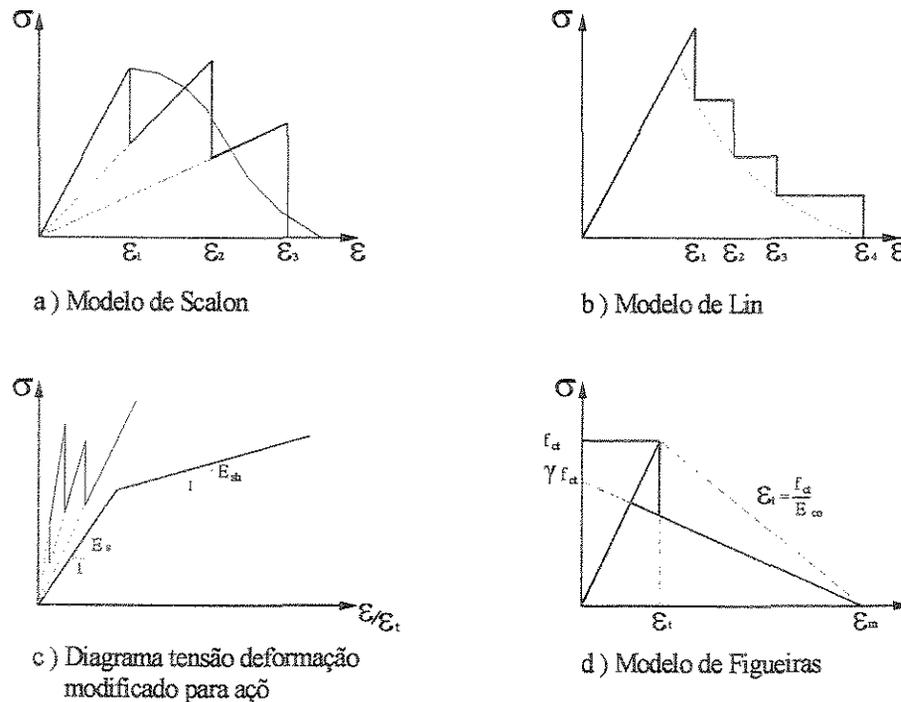


Figura 3.3.6 - Modelos para consideração do enrijecimento à tração.

Outros autores preferem vincular a deformação  $\varepsilon_m$  à deformação  $\varepsilon_t = f_{ct}/E_{co}$  através de um coeficiente  $\beta$  de forma que  $\varepsilon_m = \beta\varepsilon_t$ .

Lin [46] propôs para  $\beta$  o valor 6, Gilbert e Warner [43] adotaram 10, Abdel Rahman [10] admitiu um valor variável entre 10 e 25 e Milford [51] assumiu  $\beta$  igual a 20.

Neste trabalho o valor adotado para  $\beta$  foi 20, que para os concretos usuais fornece  $\varepsilon_m$  aproximadamente igual a 0,002.

### 3.3.1.7 DESCARGA NA TRAÇÃO.

Analogamente à compressão, também na tração podem ocorrer eventuais descargas devidas à redistribuição de tensões.

Durante a fase elástica é óbvio que a descarga se dá segundo a mesma reta ascendente do diagrama tensão-deformação.

Após a ocorrência da fissuração admite-se que a descarga ocorre sem a geração de deformação residual, com um módulo de elasticidade fictício obtido em função dos níveis de tensão e deformação no instante da descarga, como pode-se observar na figura 3.3.7.

O módulo de elasticidade fictício  $E_i^n$  é dado por :

$$E_i^n = \gamma f_{ct} \left( 1 - \frac{\varepsilon_i^{n-1}}{\beta \varepsilon_t} \right) \varepsilon_i^{n-1}$$

A tensão  $\sigma_i^n$  correspondente à descarga vale:  $\sigma_i^n = E_i^n \varepsilon_i^n$

Considerou-se que houve o fechamento de uma fissura quando a deformação total perpendicular à fissura se anulou.

A partir desse instante supôs-se que o concreto adquiriu as propriedades iniciais naquele ponto, comportando-se como concreto comprimido.

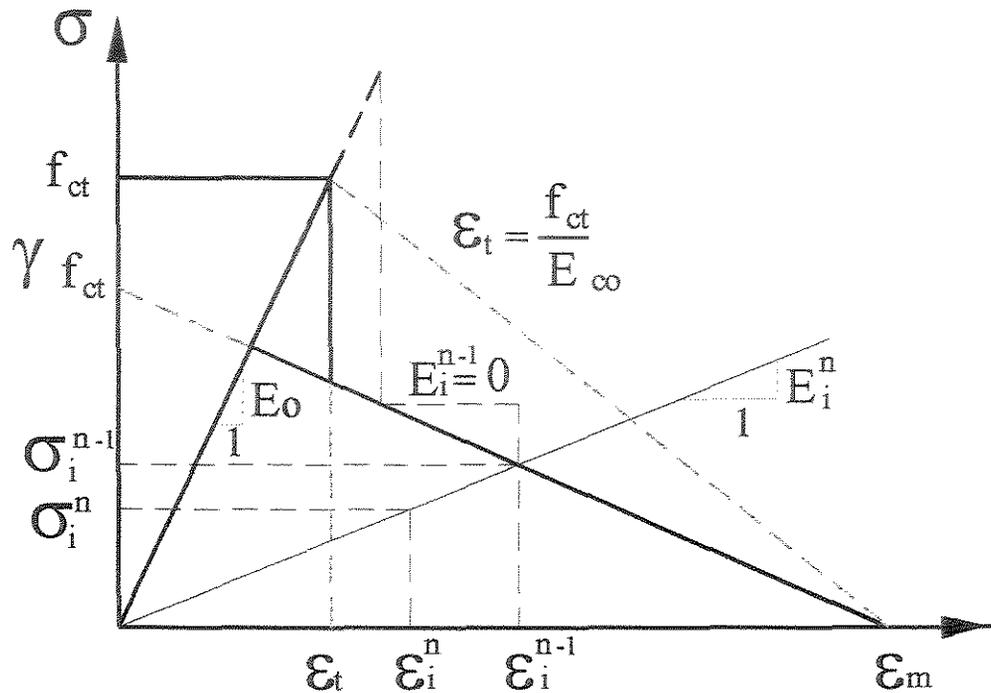


Figura 3.3.7 - Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado.

### 3.3.2 MODELAGEM DA ARMADURA.

Para o aço adotou-se como modelo matemático a formulação clássica da teoria da plasticidade (flow rule), com o critério de ruptura de Von Mises, admitindo diagrama bilinear para a representação da curva tensão- deformação, considerando endurecimento isotrópico, como mostra a figura 3.3.8.

Essa curva é definida pelos seguintes parâmetros:  $f_y$  = tensão de escoamento;  $E_s$  = módulo de Young ou de elasticidade inicial,  $E_{sh}$  = módulo de elasticidade referente ao endurecimento e  $\epsilon_{su}$  = deformação última.

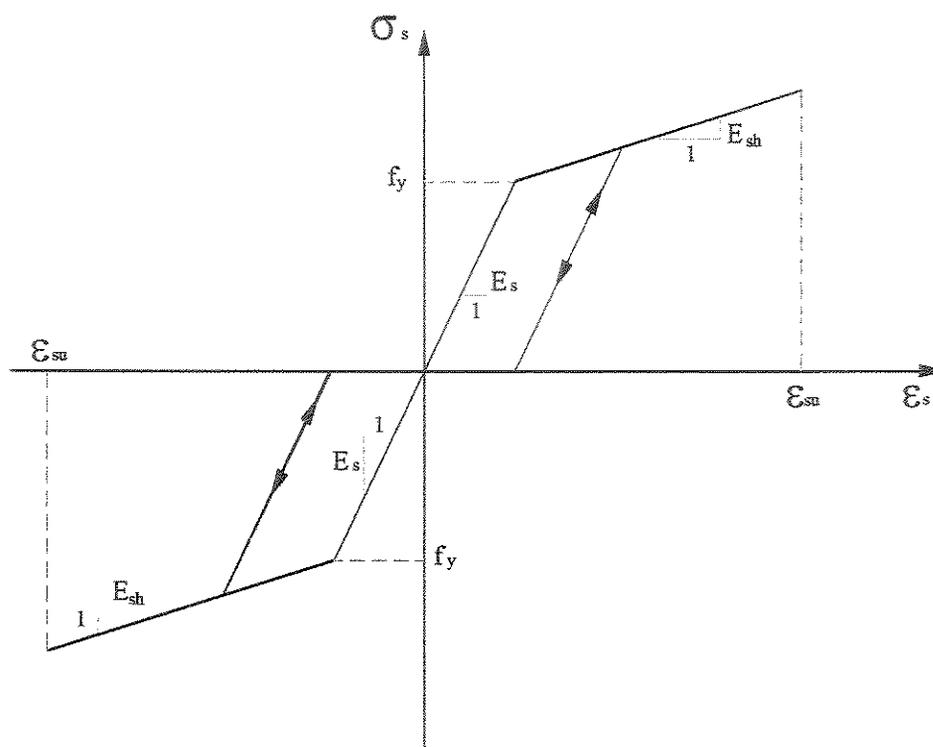


Figura 3.3.8 - Curva tensão - Deformação para o aço.

As barras da armadura foram consideradas como camadas de aço de espessura equivalente, sendo que cada camada apresenta rigidez apenas na direção das suas barras.

Supôs-se perfeita aderência entre aço e concreto.

A espessura  $h_s$  de uma camada de armadura em uma das direções  $x$  ou  $y$  é obtida dividindo a área da seção transversal de uma barra dessa armadura pelo espaçamento entre suas barras, conforme esquematizado na Figura 3.3.9.

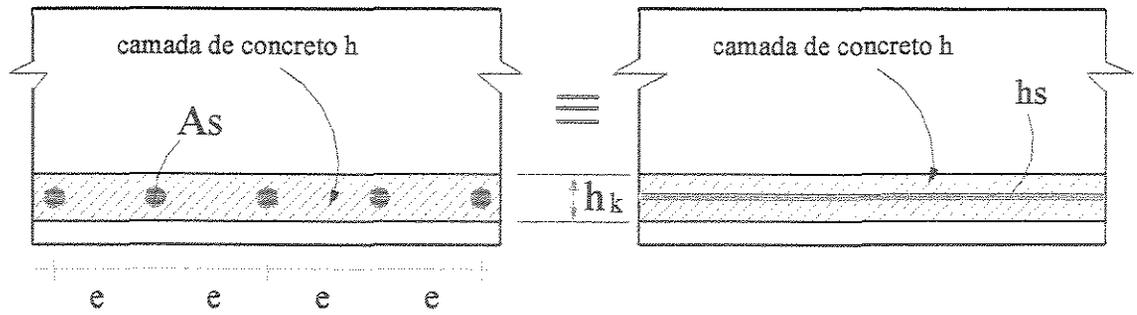


Figura 3.3.9 - Esquemática de uma camada de armadura.

Assim:

$$h_s = \frac{A_s}{e}$$

A armadura deve ser fornecida como uma porcentagem da camada de concreto de espessura  $h_k$  que a contém, considerando:

$$p_x = \frac{h_s}{h_k} (\%)$$

sendo  $x$  a direção das barras da armadura.

As relações constitutivas no regime elástico ficam sendo dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x E_s & 0 & 0 \\ 0 & p_y E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Os conceitos fundamentais da teoria de plasticidade com a derivação da matriz de rigidez elasto-plástica são abordados em profundidade em textos excelentes, por exemplo [50] da bibliografia e não serão aqui repetidos.

A programação de computador relativa à armadura foi toda efetuada tendo por modelo o desenvolvimento do capítulo 7 daquela referência.

## **CAP. 4 METODOLOGIA PARA A SOLUÇÃO NÃO-LINEAR**

### **4.1 ALGORITMOS PARA A SOLUÇÃO NÃO-LINEAR.**

Após a publicação do trabalho de Ngo e Scordelis [1] em 1967, o Método dos Elementos Finitos (MEF) ficou estabelecido como uma das ferramentas mais eficientes para o estudo de estruturas de concreto armado.

As cascas, e em particular as cascas cilíndricas, passaram a ser analisadas com maior eficiência e os comportamentos com relação à fissuração e à estabilidade, por exemplo, puderam ser melhor verificados.

As propriedades do concreto têm sido representadas por modelos cada vez mais sofisticados e precisos que permitem, hoje, uma análise mais apurada do comportamento das estruturas em serviço.

Todavia, para se obter uma solução mais acurada do problema, não basta dispor de um elemento finito adequado e de um modelo matemático sofisticado para representar o comportamento físico dos materiais, é preciso também contar com um algoritmo eficiente para a solução do problema não-linear.

A solução desse problema envolve quase que, invariavelmente, um processo incremental-iterativo, em que um número de ciclos iterativos são realizados para cada incremento de carga aplicada, até que as cargas residuais sejam suficientemente pequenas.

São várias as técnicas que se utilizam para resolver o problema não-linear. Na literatura há textos excelentes que as descrevem; desses pode-se citar: Bathe e Cilento [7], Bergan e Holand [8], Gomes [9], Rahman [10] e Crisfield e Shi [22]. Estes apresentam extensa lista de referências sobre o assunto.

A técnica (algoritmo) mais comumente utilizada para a solução do problema não-linear é o método de Newton- Raphson e suas variações: com a reformulação da matriz de rigidez a cada início de incremento ou com a matriz de rigidez inicial mantida invariável. Esses modelos têm sido usados por Figueiras [11], Chan [12], Van Greunen [13], Barbosa et alii [14], Póvoas e Martins [15], Harmon e Zhangyuan [16], Rule e Rowlands [17], Arnesen [18], Ramm e Kompfner [19], da Silva [20] e Assan [21].

Outros métodos também utilizados são o Método dos Gradientes Conjugados e os Quase-Newton. Dentre estes, destaca-se o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Esses métodos também são descritos em detalhes nas referências já citadas.

Crisfield e Shi [22] comentam que o Método dos Gradientes Conjugados, embora não envolva a formulação direta da matriz de rigidez tangente, pode apresentar convergência lenta se não utilizar algum pré-condicionador.

Matthies e Strang [23] relatam que o Método BFGS converge com incrementos de cargas maiores do que o Newton modificado. Além disso, observam que a descarga (de tensões) pode ocorrer sem danificar as propriedades do algoritmo.

Na análise de treliças simples, com os métodos: Newton com e sem busca unidimensional (line-search), Gradientes Conjugados, Newton Conjugado e BGFS, esses autores verificaram que o número de iterações para cada método decresceu na ordem em que eles estão aqui apresentados. De acordo com eles, o Método BFGS apresentou o melhor desempenho, razão pela qual eles adotaram-no na continuidade do trabalho.

Gomes [9] assinala que o Método dos Gradientes Conjugados parece adequado para a solução de grandes problemas com matrizes esparsas. Em máquinas com pequena

capacidade de memória o método foi abandonado em favor de esquemas de soluções mais eficientes. O autor considera que o Método BFGS é dos mais eficientes para a solução de problemas não-lineares.

Meyer e Bathe [5] também indicam que o Método BFGS mostra geralmente as características de melhor convergência quando comparado com os Métodos de Newton. Pode-se citar, ainda, Arcaro [24] que utilizou o Método BFGS na análise de coberturas formadas por cabos protendidos.

Na solução de problemas não-lineares pelo método dos elementos finitos aparecem dois problemas. Primeiramente, a eleição correta do modelo para a equação constitutiva não-linear e segundo a escolha de um algoritmo eficiente, que neste caso tem-se duas formas para a solução matemática de um problema não linear.

O Método dos Elementos Finitos, aplicado à análise de estruturas via equação de equilíbrio global ou deslocamentos, conduz a sistemas de equações que, no caso não-linear, exigem algoritmos iterativos que realizem uma linearização a cada passo de carga.

Por outro lado, o Método da Energia formula o problema de análise estrutural usando a teoria de minimização. Neste caso, os algoritmos de programação matemática proporcionam uma solução mais consistente.

## 4.2 SOLUÇÃO NÃO-LINEAR VIA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

A formulação via modelo de deslocamento de um problema não-linear, por elementos finitos, demanda a satisfação simultânea da equação de equilíbrio global:

$$[K]\{u\} = \{R\} \quad (4.1)$$

ou, de outra forma, com as forças residuais  $\{r\}$  :

$$\{r\} = \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} d\Omega - \{R\} = 0 \quad (4.2)$$

Em que  $[K]$  é a matriz de rigidez,  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos e  $\{R\}$  o vetor de carregamento incluindo forças de corpo e superfície. O termo  $\{\sigma\}$  representa as tensões que satisfazem as relações constitutivas não-lineares apropriadas,  $[B]$  a matriz que relaciona as deformações com as componentes de deslocamento [43] e  $\Omega$  é o domínio de integração.

### 4.2.1 MÉTODO INCREMENTAL ITERATIVO.

A solução de um problema não-linear envolve um processo incremental/iterativo, em que um número de ciclos de iterações são executados, para cada incremento da aplicação de carga, até que as forças residuais  $\{r\}$  desapareçam. Assim o algoritmo de solução não-linear requer uma determinação sucessiva de busca de direções,  $\{d\}_{i-1}$  de maneira que, no fim da iteração  $i$ , o deslocamento

$$\{u\}_i = \{u\}_{i-1} + \{d\}_{i-1} \quad (4.3)$$

resulta em um campo de tensões  $\{ \sigma \}_i$  que satisfaz a equação (4.2).

Primeiramente, descreve-se um método incremental iterativo genérico.

Para um carregamento incremental  $n^{th}$  os deslocamentos  $\{ u \}_0^n$  e as tensões  $\{ \sigma \}_0^n$  são conhecidas, assim como o desequilíbrio de forças nodais  $\{ r \}^{n-1}$ , resultantes do carregamento incremental anterior. Os passos seguintes para o algoritmo são, como segue:

a) Cálculo do incremento de força nodal:

$$\{ r \}_0^n = \{ r \}^{n-1} + \{ \Delta r \}^n \quad (4.4a)$$

onde  $\{ \Delta r \}^n$  é o vetor de incrementos de carga,  $\{ r \}^{n-1}$  é o resíduo do incremento de carga anterior.

b) Para o início da iteração  $(i-1)$ , primeiramente calcula-se a matriz de rigidez global  $[K]_{i-1}$  de acordo com o algoritmo iterativo adotado.

c) Avaliação dos deslocamentos incrementais,  $\{ d \}_{i-1}$  como:

$$\{ d \}_{i-1} = [K]_{i-1}^{-1} \{ r \}_{i-1} \quad (4.4b)$$

e atualização dos deslocamentos de acordo com a equação (4.3).

d) Avaliação da tensão incremental:

$$\{ \Delta \sigma \}_{i-1} = [D] \bullet \{ \Delta \varepsilon \} = [B] \bullet [D] \bullet \{ d \}_{i-1} \quad (4.4c)$$

e) Avaliação da tensão total:

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta\sigma\}_{i-1} \quad (4.4d)$$

f) Avaliação da força interna nodal equivalente como

$$\{r\}_i = \int_{\Omega} [B]^T \cdot \{\sigma\}_i d\Omega \quad (4.4e)$$

g) Avaliação da força externa de equilíbrio:

$$\{r\}_i = \{r\}_0^n - \{R\}_i \quad (4.4f)$$

h) Verificação da convergência:

1) Se a convergência é alcançada, passa-se ao próximo incremento de carga

(passo a)

2) Se a convergência não é alcançada, efetuar:  $\{r\}_{i-1} = \{r\}_i$  e

$\{u\}_{i-1} = \{u\}_i$  e começar do passo b.

No algoritmo anterior dois pontos adicionais devem ser destacados: primeiramente deve estabelecer-se um critério de convergência para a comprovação da convergência no passo h). Segundo, uma escolha de diferentes métodos é possível para determinar qual matriz,  $[K]_{i-1}$  deve-se usar no passo b) do processo iterativo.

#### 4.2.2 TOLERÂNCIA DA CONVERGÊNCIA.

Se uma estratégia incremental de solução baseada no método iterativo é adotada, uma consideração cuidadosa para o critério de convergência deve ser introduzida. Ao fim de cada iteração, a solução obtida será verificada para ver se converge dentro da tolerância prefixada, ou se o processo de iteração diverge. Se a tolerância da convergência é demasiado pequena, o esforço computacional é muito alto e o gasto para obter a exatidão em termos de engenharia é inútil. Três grandezas podem ser avaliadas ao fim de cada iteração pelo critério de convergência: os deslocamentos, as forças externas de equilíbrio e o incremento de energia interna.

O critério de convergência do deslocamento pode expressar-se como:

$$\frac{\|\{\Delta u\}_i\|}{\|\{\Delta u\}_{i-1}\|} < \tau_D \quad (4.5 a)$$

onde  $\{\Delta u\}_i$  é o vetor das componentes dos deslocamentos iterativos,  $\tau_D$  é uma tolerância prefixada de deslocamento,  $\{\Delta u\}_{i-1}$  é o vetor das componentes dos deslocamentos associados com a solução linear da equação de equilíbrio e  $\|\ \|$  representa a norma euclidiana. Um critério de deslocamento geralmente funcionaria bem, mas não é adequado para uso com estruturas rígidas onde grandes incrementos de carga estão associados com pequenos incrementos de deslocamentos. Portanto uma tolerância muito estreita é necessária.

Um critério de convergência de força pode expressar-se como:

$$\|\{r\}_i\| < \tau_F \|\{R\}_0\| \quad (4.5 b)$$

onde  $\{r\}_i$  é o vetor de forças residuais na iteração  $i$ ,  $\{R\}_0$  são as cargas aplicadas no nível atual e  $\tau_F$  a tolerância prefixada de força. O critério de força é bastante conveniente para se usar em termos computacionais porque ambas as quantidades  $\{r\}_i$  e  $\{R\}_0$  são facilmente avaliáveis no fim de cada iteração e não requerem uma memória extra.

#### 4.2.3 MÉTODO NEWTON-RAPHSON.

No método Newton - Raphson (NR) os deslocamentos são atualizados entre sucessivas iterações de acordo com (4.3) com a busca de direção  $\{d\}_{i-1}$  que produz os resíduos

$$\{r\}_i = \{r\}(\{u\}_{i-1} + \{d\}_{i-1}) = \{0\} \quad (4.6)$$

Exprimindo (4.6) em forma truncada da série de Taylor, tem-se a busca direcional

$$\{d\}_{i-1} = \left[ \frac{\{\partial r\}}{\{\partial u\}} \right]_{i-1} \bullet \{r\}_{i-1} = [K_{i-1}^T]^{-1} \bullet \{r\}_{i-1} \quad (4.7)$$

onde a matriz Jacobiana coincide com a matriz de rigidez tangencial  $[K_{i-1}^T]$  associada com o estado de deslocamento  $\{u\}_{i-1}$ .

Assim, o cálculo computadorizado da busca de direção demanda uma avaliação de rigidez seguida por uma completa equação de redução e a substituição posterior para cada iteração de cada incremento de carga.

Para exemplificar a utilização do método Newton-Raphson apresenta-se o exemplo seguinte.

Seja uma mola não-linear figura (4.1) e imagine-se que a matriz de rigidez da mola  $K$  é composta de um termo  $K_0$  e um termo  $K_N$  que depende da deformação.

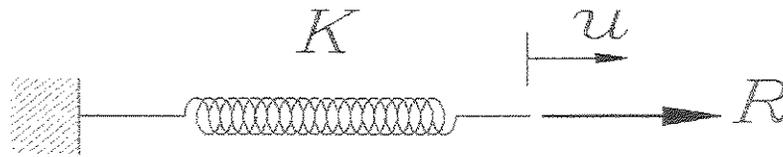


Figura 4.1

$$(K_0 + K_N) u = R = f \quad (4.8)$$

Onde:

$$K_0 = cte .$$

$$K_N = \phi(u)$$

Considere para o início da iteração  $K_N = 0$ . Para uma força  $R_A$  podemos conhecer o valor de  $u_1$ , sendo A um ponto da curva  $R$  vs  $u$ , ainda no regime elástico.

$$u_1 = \frac{R_A}{K_0}$$

$$R_A = (K_0 + K_{NA}) u_1 \quad (4.8.1)$$

onde:  $K_{NA} = \phi(u_1)$

Agora o carregamento é incrementado do valor de  $R_B$ ; então  $u_2$  é o valor do deslocamento procurado.

Usando a série truncada de Taylor:

$$R = \phi(u_2) = (K_0 + K_N) u_2$$

$$\phi(u_1 + d_1) = \phi(u_1) + \left( \frac{df}{du} \right)_1 d_1 \quad (4.8.2)$$

onde:

$$\frac{df}{du} = \frac{d}{du}(K_0 u + K_N u) = K_0 + \frac{d}{du}(K_N u) = K_t \quad (4.8.3)$$

$K_t$  = Rigidez tangente.

Observa-se que para  $d_1$ , tem-se  $\phi(u_1 + d_1) = R_B$

Assim, com  $\phi(u_1) = R_A$  e  $K_t$  avaliado para A, equação (4.8.2) resulta:

$$R_B = R_A + (K_t)_A d_1 \quad \text{ou}$$

$$(K_t)_A d_1 = R_B - R_A \quad (4.8.4)$$

onde  $R_B - R_A$  pode ser interpretado como uma carga de desequilíbrio isto é, a diferença entre o carregamento aplicado  $R_B$  e a força  $R_A = (K_0 + K_{NA}) u_1$  na parte elástica quando e estirada a mola uma distancia  $u_1$ . O processo de solução é mostrado na figura 4.2.

Em seguida avalia-se  $d_1$  e atualiza-se o deslocamento estimado por :

$$u_2 = u_1 + d_1$$

Para a nova iteração obtém-se a nova rigidez tangente  $(K_t)_1$  da equação (4.8.3) com  $u = u_2$ , obtendo o carregamento de desequilíbrio  $R_B - r_1$ , donde  $r_1$  provém da equação (4.8.1) com  $u = u_2$ . O novo deslocamento atualizado é

$$u_3 = u_2 + d_2$$

onde  $d_2$  é obtido resolvendo  $(K_t)_1 d_2 = R_B - r_1$  e assim sucessivamente

$$u_i = u_{i-1} + d_{i-1} .$$

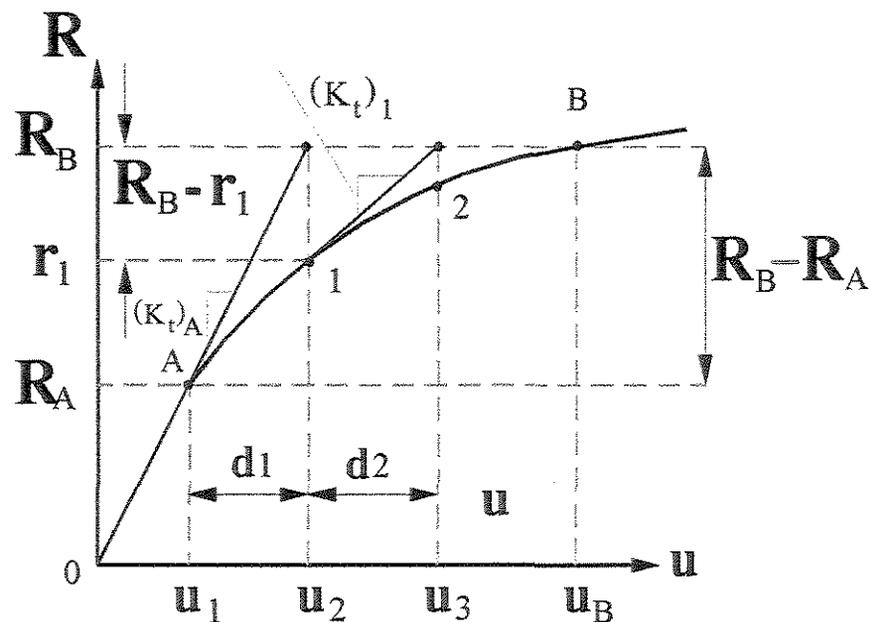


Figura 4.2

Existem vários algoritmos como Newton Conjugado, Newton Modificado, Gradiente Conjugado que não serão tratados neste trabalho.

### 4.3 SOLUÇÃO NÃO-LINEAR VIA EQUAÇÃO DE ENERGIA.

Mediante o estudo e emprego de algoritmos de otimização, nesta pesquisa, pretende-se dar-se uma pequena contribuição à análise de problemas estruturais, formulados via Método da Energia.

Um teorema fundamental, neste caso, afirma que à situação deformada, em equilíbrio, corresponde um mínimo na energia total. Justamente a utilização desse teorema permite obter os valores incógnitos de deslocamentos e suas derivadas em cada ponto da estrutura.

Por outro lado, a minimização da função energia pode ser interpretada como um problema de otimização ou programação matemática por o qual têm-se algoritmos matemáticos já desenvolvidos, que permitem, particularmente no caso de problemas não-lineares, encontrar resultados consistentes.

No presente trabalho serão estudados funções quadráticas do tipo

$$f(u) = \frac{1}{2} u^T K u + S^T u + c .$$

Onde a finalidade é encontrar os pontos de máximo ou mínimo locais. Os algoritmos de otimização a estudados são do tipo Newton e Quase Newton [44], este último dividido em dois métodos DFP e BFGS, porém o algoritmo usado no programa principal será do tipo Quase-Newton usando o método BFGS ( Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

Tais algoritmos empregam um outro procedimento numérico que é a busca unidimensional adotada para a determinação do passo na direção de descida.

#### 4.3.1 CONDIÇÕES DE OPTIMALIDADE PARA MINIMIZAÇÃO.

- $f(\{u\}) : R^N \rightarrow R^1$ ,
- $\{u\}^*$  é ponto crítico,  $\nabla f(\{u\}^*) = \{0\}$ ,
- A hessiana  $\left[ \nabla^2 f(\{u\}^*) \right]_{N \times N}$  é positiva definida.

Então :  $\{u\}^*$  é ponto de mínimo local.

#### 4.3.2 PONTOS DE MÍNIMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO.

A estratégia geral que pode ser adotada para encontrar os pontos de mínimo de uma função é a seguinte: de início, toma-se um ponto qualquer e, logo a seguir, numa dada direção e sentido, de maneira que o valor da função decresça, encontra-se o valor mínimo da função nesta direção e sentido, obtendo, assim, um novo ponto de partida. Continua-se desta maneira até encontrar o valor mínimo da função.

Consideremos uma função não-linear dada por:

$$f(\{u\}) : R^n \rightarrow R \quad (4.15)$$

e seja um ponto  $u$  que pertence a uma reta que passa pelo ponto  $u_0$  tendo uma direção dada pelo vetor  $\{d\}$ , ou seja:

$$\{u\} = \{u_0\} + \lambda \{d\} \quad (4.16)$$

sendo  $\lambda > 0$ , um valor amplificador do vetor  $\{d\}$ , de tal forma que :

$$f(\{u_0\} + \lambda \{d\}) < f(\{u_0\})$$

então:

$\{u_0\} + \lambda\{d\}$  é chamado solução perturbada de  $\{u\}$  na direção  $\{d\}$ .

Espera-se que a solução perturbada seja melhor, isto é, tenha um valor menor para a função  $f$  (função objetivo). Quando isto acontecer,  $\{d\}$  é chamada direção de descida.

Então:

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \lambda_i \{d\}_i$$

este procedimento deve ser repetido até que  $\|\{u\}_{i+1} - \{u\}_i\| < tol$  ou que o número de iterações alcance seu limite máximo. O valor  $tol$  é uma tolerância pré-estabelecida, sendo geralmente um valor muito pequeno, por exemplo  $tol = 10^{-6}$ .

Quando for verificado o primeiro critério de parada, significa que o procedimento convergiu e encontrou-se a solução ótima  $\{u\}^*$ , ou seja, o ponto que minimiza a função objetivo. Caso contrário, se o processo iterativo terminar ao atingir o número máximo de iterações, significa que o método não convergiu para o determinado problema em estudo

### 4.3.3 DEFINIÇÕES PRINCIPAIS

#### 4.3.3.1 VETOR GRADIENTE DE $f(\{u\}^*): R^N \rightarrow R^1$ NUM PONTO $\{u\}^*$ .

O vetor gradiente de  $f(\{u\}^*)$ , é dado por:

$$\nabla f(\{u\}^*)_{N \times 1} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\{u\}^*)}{du_1} \\ \frac{\partial f(\{u\}^*)}{du_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\{u\}^*)}{du_N} \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

#### 4.3.3.2 A MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO $f(\{u\})$ NUM PONTO $\{u\}^*$

A matriz hessiana de  $f(\{u\}^*)$ , é dada por:

$$\nabla^2 f(\{u\}^*)_{N \times N} = [H(\{u\}^*)]_{N \times N} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_1 \partial u_N} \\ \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_2^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_2 \partial u_N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_1 \partial u_N} & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_2 \partial u_N} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(\{u\}^*)}{\partial u_N^2} \end{array} \right] \quad (4.18)$$

Em análise não-linear de estruturas, os pontos  $u$  representam os deslocamentos nodais da estrutura, a função  $f(u)$  representa a função energia potencial total, o vetor  $\{r(u)\}$  representa o vetor resíduo, isto é, um vetor em que cada componente representa o desequilíbrio entre forças num dado nó e numa dada direção e a matriz  $[K(u)]$  representa a matriz de rigidez.

$$f(u) = \frac{1}{2} \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} + \{b\}^T \cdot \{u\} \quad (4.19)$$

é força residual  $\{r\}$  dada por:

$$\{r\} = [K] \cdot \{u\} + \{b\} \quad (4.20)$$

#### 4.4 BUSCA UNIDIMENSIONAL.

Como foi mencionado anteriormente, em quase todos os métodos computacionais existe algo comum. Partindo de um ponto inicial arbitrário, determina-se uma direção de descida, andando nesta direção até encontrar um ponto de mínimo relativo da função. Este ponto de mínimo relativo é tomado como um ponto inicial e o procedimento é repetido até encontrar o ponto mínimo local da função.

O procedimento para determinar um ponto de mínimo numa direção dada é chamado busca unidimensional. Este procedimento é facilmente aplicado em funções quadráticas, equação (4.19).

A finalidade da busca unidimensional é determinar o tamanho exato do passo na direção de descida  $\{d\}$ ; uma vez determinada a direção de descida através de um algoritmo dado, é necessário que a nova solução procurada nessa direção esteja próxima da solução verdadeira.

Assim, tendo a função quadrática:

$$f(u) = \frac{1}{2} \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} + \{b\}^T \cdot \{u\}$$

onde:

$[K]$  = Matriz de rigidez

$\{b\}$  = Vetor de cargas.

o gradiente da função é dado por:

$$\nabla f(u) = [K]\{u\} + \{b\} \quad (4.21)$$

Como a função é quadrática, é possível determinar o tamanho exato do valor  $(\lambda)$ , constante amplificadora da direção de descida, fazendo:

$$g'(\lambda) = 0;$$

ou seja:

$$g'(\lambda) = \nabla f^T(\{u\}^0 + \lambda\{d\}^0)\{d\}^0 = 0 \quad (4.22)$$

considerando inicialmente:

$$\{u\} = \{u\}^0 + \lambda\{d\}^0$$

substituindo os valores da equação ( 4.21 ) em ( 4.22 ) obtém-se:

$$\left( [K] \left( \{u\}^0 + \lambda \{d\}^0 \right) + \{b\} \right)^T \{d\}^0 = 0 \quad (4.23)$$

resultando para  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{-\{b\}^T \{d\}_0 - \{u\}_0^T [K] \{d\}_0}{\{d\}_0^T [K] \{d\}_0} \quad (4.24)$$

sendo  $\{d\}_0$  a direção de descida avaliada usando o algoritmo Quase Newton.

#### 4.5 TIPOS DE MÉTODO CLÁSSICOS DE DESCIDA.

Têm-se vários métodos de descida como Gradiente Conjugado, Newton Raphson, e Quase Newton, que serão vistos nesta pesquisa. O tipo de estratégia usada para o cálculo da direção de descida determinará a eficiência do método em buscar o ponto mínimo da função.

##### 4.5.1 MÉTODO DO GRADIENTE.

Como indica o nome, neste caso é utilizado em cada iteração o gradiente da função, como indica o algoritmo mostrado em seguida.

###### Algoritmo 1.

Se  $\{u\}_i \in R^n$  é tal que  $\nabla f(\{u\}_i) \neq 0$ , os passos para determinar  $\{u\}_{i+1}$  são:

Passo1: Calcular  $\{d\}_i = -\nabla f(\{u\}_i)$ .

Passo2: (Busca unidimensional) calcular  $\lambda_i$ .

Passo3: Fazer  $\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \lambda_i \{d\}_i$ .

#### 4.5.2 MÉTODO NEWTON RAPHSON.

**Proposição:**

Se  $f$  é uma função quadrática com matriz hessiana  $H$  definida positiva, dado  $\{u\}_0 \in R^n$  dado por:

$$\{d\} = -[H]^{-1}([H]\{u\}_0 + \{b\}) \quad (4.25)$$

sendo:

$$[H]^{-1} = \nabla^2 f(\{u\}) \quad (4.26)$$

verifica-se que

$$\{u\}^* \equiv \{u\}_0 + \{d\}$$

é o minimizador global de  $f$  em  $R^n$ .

**Prova:** Seja:  $f(x) = \frac{1}{2}\{u\}^T[H]\{u\} + \{b\}^T\{u\} + c$ . Temos, que:

$\nabla f(\{u\}^*) = [H](\{u\}_0 + \{d\}) + \{b\}$ . Logo, usando a relação (4.25), obtemos que:

$$\nabla f(\{u\}) = [H](\{u\}_0 - [H]^{-1}([H]\{u\}_0 + \{b\})) + \{b\}$$

Por tanto,

$$\nabla f(\{u\}) = [H]\{u\}_0 - [H]\{u\}_0 - \{b\} + \{b\} = 0, \text{ o que prova a proposição.}$$

A direção  $d$  é a solução do sistema linear

$$[H]\{d\} = -([H]\{u\}_0 + \{b\}) = -\nabla f(\{u\}_0).$$

Portanto, minimizar uma função quadrática com hessiana definida positiva é um problema equivalente a resolver um sistema linear com matriz simétrica e definida positiva.

#### Algoritmo2 (Método Newton Raphson)

Se  $\{u\}_i$  é tal que  $\nabla f(\{u\}_i) \neq 0$ , os passos para determinar  $u_{i+1}$  são:

Passo1: Determinar  $\{d\}_i$ , tal que

$$\nabla^2 f(\{u\}_i)\{d\}_i = -\nabla f(\{u\}_i)$$

Passo2: Fazer  $\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \lambda_i \{d\}_i$ , onde  $\lambda_i$  é determinado mediante a busca unidimensional.

#### 4.5.3 MÉTODO QUASE-NEWTON.

Como foi dito anteriormente, a análise não-linear de estruturas apresenta dois sérios problemas: o primeiro consiste na formulação matemática que representa de modo aceitável o comportamento real da estrutura e o segundo problema é o procedimento computacional do modelo matemático encontrado. Portanto o processo computacional é uma técnica que permite a solução de problemas usando primeiramente uma série de algoritmos para, em seguida, logo fazer o diagrama de fluxo e sua respectiva codificação; desta forma ter-se-á uma visualização eficaz e um procedimento adequado.

Na aplicações às estruturas, geralmente se encontram dificuldades pela complexidade da estrutura, que envolve um número significativo de variáveis, tendo-se que empregar processos que envolvem iterações e aproximações sucessivas.

O princípio da mínima energia potencial total é o conceito operacional mais usado para a análise não-linear de estruturas. Uma vez tendo a energia potencial total como função dos deslocamentos nodais da estrutura, o problema de encontrar a configuração de equilíbrio é um caso de programação não-linear, ou seja, a configuração de equilíbrio é dada, ou representada, pelos pontos de mínimo local da função energia potencial total e as configurações instáveis são representadas pelos pontos de máximo local da função.

Porém, existem casos de análise estrutural onde não existe uma função energia potencial total, mas de certa forma pode-se definir uma função de modo que seus pontos de mínimo local representem configurações de equilíbrio da estrutura. Assim, a compreensão dos conceitos fundamentais utilizados em programação não-linear são muito importantes para a análise de estruturas, seja o caso de análise linear ou não-linear, elástica ou inelástica.

#### **4. 5.3.1 ESTRATÉGIAS DO MÉTODO QUASE NEWTON.**

A estratégia fundamental do método consiste em usar uma aproximação para a inversa da hessiana ao invés da verdadeira inversa que é requerida no método de Newton.

O método Quase Newton assume que a utilização da matriz hessiana não é recomendável, porque seu cálculo requer um esforço computacional excessivo.

No método Quase-Newton uma aproximação para a inversa da matriz hessiana é construída pela atualização de uma primeira aproximação.

Esta aproximação para a inversa da matriz hessiana é por construção de uma matriz definida positiva e uma atualização conhecida como atualização DFP e BFGS.

**Procedimento:**

No método Gradiente escolhemos:

$$\{d\}_i = -[I]\nabla f(\{u\}_i),$$

e, no método de Newton,

$$\{d\}_i = -(\nabla^2 f(\{u\}_i))^{-1}\nabla f(\{u\}_i)$$

se sabe:

$$[H]_i = \nabla^2 f(\{u\}_i)^{-1}$$

então:

$$\{d\}_i = -[H]_i\nabla f(\{u\}_i),$$

onde  $[H]_i \in R^{n \times n}$  é uma matriz simétrica de números reais definida positiva.

$$[H]_0 \text{ Deve ser fornecida pelo usuário ou } [H]_0 = [I]$$

Obtendo  $[H]_{i+1}$

$$[H]_{i+1} = [H]_i + [\Delta H]_i \quad \text{onde:}$$

$[\Delta H]_i$  deve ser tal que  $[H]_{i+1}$  tenha algumas propriedades pré-determinadas, por exemplo simétrica.

$[H]_{i+1}$  positiva-definida, etc.

que é função de:

$$[\Delta H]_i = f([H]_i, \{u\}_{i-1}, \{u\}_i, \{g\}_i, \{g\}_{i-1})$$

definir os vetores:

$$\{S\}_i = \{u\}_{i+1} - \{u\}_i$$

$$\{y\}_i = \{g\}_{i+1} - \{g\}_i$$

Equação Quase-Newton.

$$[H]_{i+1} \{y\}_i = \{S\}_i$$

Para uma variável fig. (4.4).

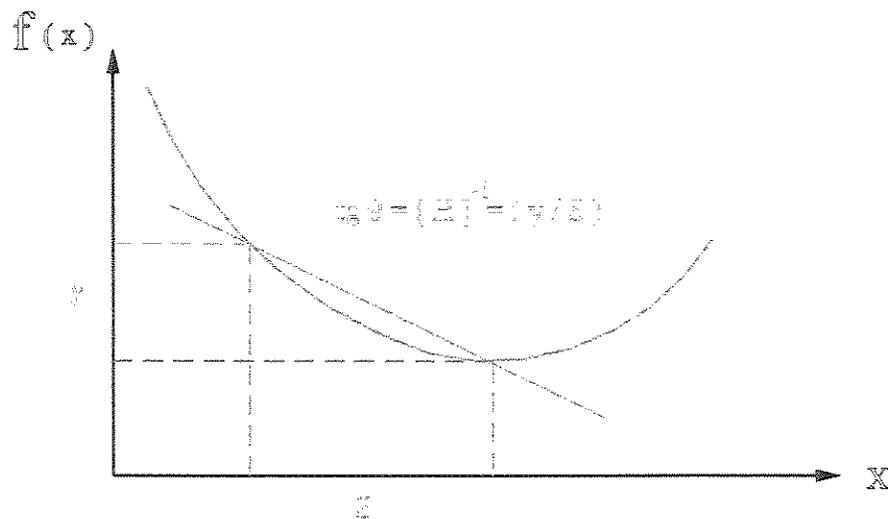


Figura (4.3) representação gráfica da equação Quase-Newton (uma variável)

$$tg \theta = [H]^{-1} = (y / S)$$

portanto:

para varias variáveis:

$$[H]_{i+1} \{y\}_i = \{S\}_i$$

$$\{[H]_i + [\Delta H]_i\} \{y\}_i = \{S\}_i$$

$$[\Delta H]_i \{y\}_i = \{S\}_i - [H]_i \{y\}_i$$

Obtém-se:

$$[\Delta H]_i = \frac{\{S\}_i - [H]_i \{y\}_i}{\{y\}_i} \quad (4.26)$$

Esse  $[\Delta H]_i$  deve ser somado ao  $[H]$  da iteração anterior.

No método DFP (Davidson, Fletcher, Powell) o  $[\Delta H]_i$  é dado por:

$$\blacksquare [H]_{i+1}^{DFP} = [H]_i + \frac{\{S\}_i \{S\}_i^T}{\{S\}_i^T \{y\}_i} - \frac{[H]_i \{y\}_i \{y\}_i^T [H]_i}{\{y\}_i^T [H]_i \{y\}_i} \quad (4.27)$$

enquanto que no método BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno)

$$\blacksquare [H]^{BFGS} = [H]_{i+1}^{DFP} + \{t\}_i \{t\}_i^T \left( \{y\}_i^T [H]_i \{y\}_i \right) \quad (4.28)$$

sendo:

$$\{t\} = \frac{\{S\}_i}{\{S\}_i^T \{y\}_i} - \frac{[H]^{BFGS} \{y\}_i}{\{y\}_i^T [H]^{BFGS} \{y\}_i} \quad (4.29)$$

#### 4.5.3.2 ALGORITMO 3 MÉTODO DFP (Davidon, Fletcher e Powell).

**Passo 1:** Calcular  $\{d\}_i = -[H]_i \nabla f(\{u\}_i)$ .

**Passo 2:** Determinar  $\lambda_i$  através de uma busca linear e definir  $\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \lambda_i \{d\}_i$ .

**Passo 3:** Calcular:

$$[H]_{i+1}^{DFP} = [H]_i + \frac{\{S\}_i \{S\}_i^T}{\{S\}_i^T \{y\}_i} - \frac{[H]_i \{y\}_i \{y\}_i^T [H]_i}{\{y\}_i^T [H]_i \{y\}_i}$$

#### 4.5.3.3 ALGORITMO 4 MÉTODO BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno).

Dados de entrada:

$$[H]_0 = [I]$$

$f(\{u\}) \rightarrow$  Função a ser minimizada.

$\{g(\{u\})\} \rightarrow \nabla f(\{u\})$  Gradiente.

$\{u\}_0 \rightarrow$  Estimativa do ponto inicial.

$EPS \rightarrow$  Convergência para Quase-Newton.

$NRMAX \rightarrow$  Número máximo de iterações.

**Passo 1:** Calcular:  $\{d\}_i = -[H]_i \nabla f(\{u\}_i)$

Para  $i = 0 \Rightarrow [H] = [I]$

**Passo 2:** Determinar:  $\lambda_i$  através de uma busca linear e definir:

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \lambda_i \{d\}_i$$

**Passo 3:** Calcular:

$$[H]^{BFGS} = [H]_{+1}^{DFP} + \{t\}_i \{t\}_i^T (\{y\}^T [H] \{y\}_i)$$

**Voltar Ao passo 1:** Calcular a nova direção

Continuar Passo 2.

Convergência:

Perguntar :

$$\|\{u\}_{i+1} - \{u\}^*\| \leq EPS$$

sendo:

$$\{u\}^* = \{u\}_i$$

$EPS$  = convergência adotada.

Se a condição for satisfeita:

a)  $\{u\}^*$  = solução procurada.

Caso contrario:

b) Continuar com o passo 3

## **CAP. 5 RESULTADOS.**

### **5.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES.**

Os algoritmos, como a modelagem do comportamento do material, estudados nos capítulos anteriores, foram introduzidos num programa principal realizado pelo orientador, resolvendo os exemplos usando o algoritmo Newton Raphson e obtendo resultados que, comparados graficamente com os resultados obtidos pelo método Quase-Newton, permitem verificar a eficiência de cada método. Os exemplos que serão mostrados têm seus respectivos dados de entrada e saída de resultados apresentados no anexo.

### **5.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS.**

#### **5.2.1 PRIMEIRO EXEMPLO.**

Este exemplo consiste de um cilindro de concreto sem armadura, submetido a pressão radial externa como mostra figura (5.1).

Este cilindro representa os três modelos idênticos testados experimentalmente por Runge e Haynes [59] e analisado por Chen et al [61] e Rule e Rowlands [17] através do método dos elementos finitos.

Deve-se observar que os três cilindros testados em laboratório não tinham seção perfeitamente circular devido a imperfeições geométricas introduzidas por defeitos nas formas onde foram moldados. Porém, nos resultados aqui mostrados, o cilindro foi suposto como perfeitamente circular.

## Resultados

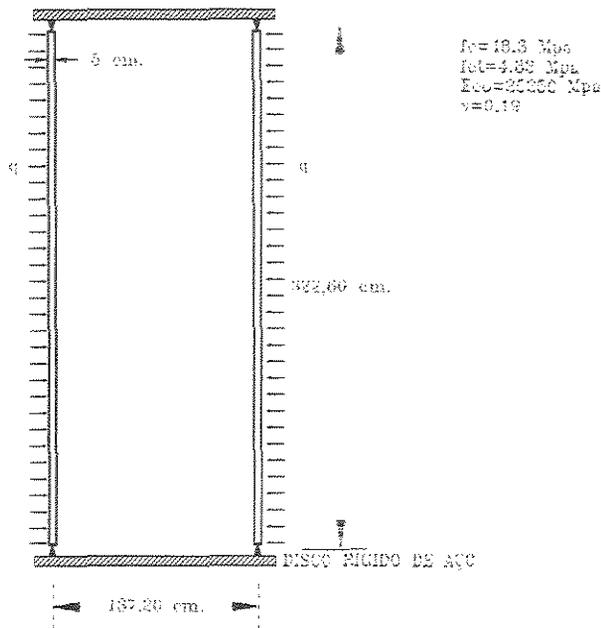


Figura 5.1 Cilindro de concreto sob pressão radial.

Para análise do cilindro, Rule e Rowlands [17] utilizaram para o concreto um modelo ortotrópico derivado do proposto por Darwin Pecknold [26], com algumas simplificações.

O elemento finito utilizado encontra-se em Zienkiewicz [60], é plano e tem como funções aproximadoras para os deslocamentos no seu plano funções lineares e polinômio cúbico para os deslocamentos transversais.

O elemento finito ainda é dividido em camadas.

Chen et al. [61] utilizaram o modelo desenvolvido por Chen e Chen [62], que se baseia na teoria da plasticidade.

O programa de elementos finitos que eles utilizaram é uma versão atualizada do NONSAP [63], chamado NFAP.

O cilindro foi dividido em 30 elementos finitos iguais e considerou-se a espessura dividida em 8 camadas iguais.

Experimentalmente verificou-se que o valor médio da pressão ( para os três cilindros ) que causo implosão dos modelos foi 3,79 Mpa com um desvio padrão de 0,17 Mpa.

Analicamente Rule e Rowlands [17] obtiveram 4.14 Mpa e Chen et ali [61] 4,36Mpa, e Villegas 4,64Mpa.

A figura 5.2 representa a curva pressão-deslocamento radial da meia altura do cilindro.De acordo ao resultado obtido mediante os métodos Newton Raphson e BFGS.

Os dados são mostrados a continuação como um exemplo de saída do programa:

ARQUIVO DE SAIDA

CASCAS CILINDRICAS DE CONCRETO ARMADO  
ANALISE COM NAO-LINEARIDADE FISICA

NUMERO DE ELEMENTOS= 30  
 NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO X= 10  
 NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO Y= 3  
 NUMERO DE NOS COM CONDS. DE CONTORNO= 44  
 NUMERO DE CAMADAS DE CONCRETO= 8  
 NUMERO DE CAMADAS DE ACO= 0  
 NUMERO DE PTOS. GAUSS= 9

DADOS RELATIVOS AOS MATERIAIS

COEFICIENTE DE POISSON EQUIVALENTE= .19  
 RESISTENCIA DO CONCRETO A COMPRESSAO= -48.00  
 RESISTENCIA DO CONCRETO A TRACAO= 4.30  
 DEFORMACAO DO CONCRETO CORRESPONDENTE A FLC=-.00300  
 MODULO DE ELAST. INICIAL DO CONCRETO= 25250.00  
 PESO ESP. DO CONCRETO= .00

ESPESSURA= .5000000E+01  
 RAO= .6610000E+02  
 COMPRIMENTO= .1613000E+03

CONTINUA.

.  
 .  
 .

O resultado de deslocamento da altura média do cilindro são mostrados na seguinte tabela, obtidos mediante os dois métodos: Newton Raphson e Quase-Newton.

Tabela -5.1

Deslocamento vertical do ponto central da parte lateral do cilindro exemplo 1.

INCREMENTO	CARGA	BFGS Villegas	N. RAPHSON Assan
		Nó (1)	Nó (1)
1	0,86	0,023326	0,023353
2	1,72	0,048156	0,048235
3	2,064	0,059208	0,059409
4	2,236	0,06506	0,065375
5	2,408	0,071156	0,071578
6	2,58	0,077479	0,078055
7	2,752	0,084126	0,084851
8	2,924	0,091097	0,092023
9	3,096	0,098066	0,099641
10	3,268	0,105707	0,1078
11	3,44	0,112435	0,116623
12	3,612	0,121089	0,126285
13	3,784	0,128216	0,137039
14	3,956	0,139174	0,149282
15	4,128	0,159898	0,163693
16	4,3	0,166848	0,181623
17	4,472	0,17686	0,206332
18	4,644	0,18789	

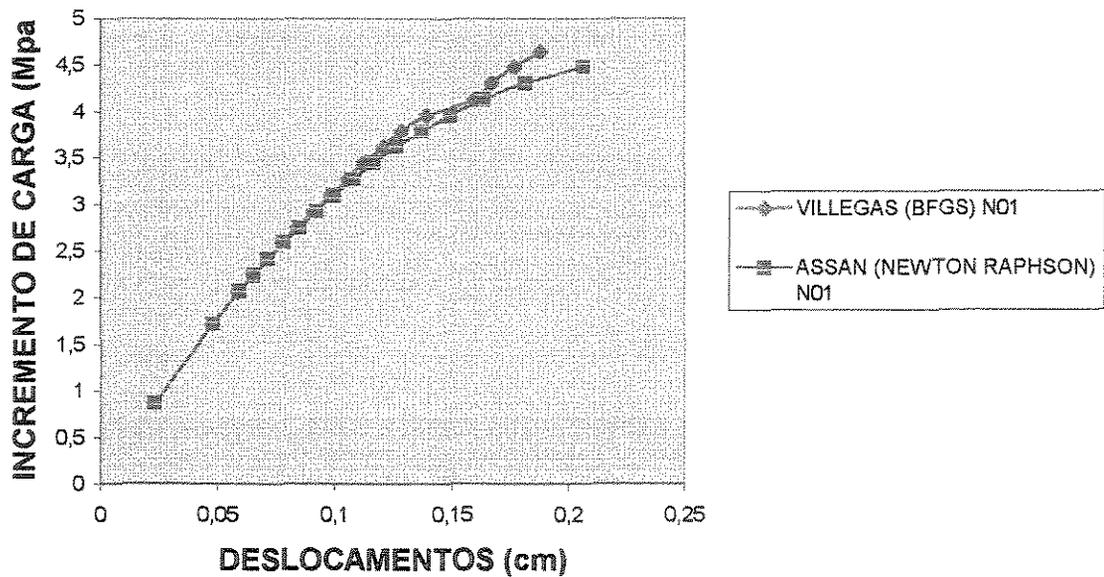


Figura 5.2 Comparação gráfica entre os métodos Newton-Raphson (Assan) e BFGS (Villegas) do ponto central da parte lateral do cilindro exemplo 1.

### 5.2.2 SEGUNDO EXEMPLO.

A casca cilíndrica circular de concreto armado deste exemplo é apoiada nas extremidades curvas em diafragmas rígidos no seu plano e tem uma armadura distribuída na sua superfície média com espessura equivalente a 0,6% da espessura da casca.

Os dados utilizados são mostrados na figura 5.3

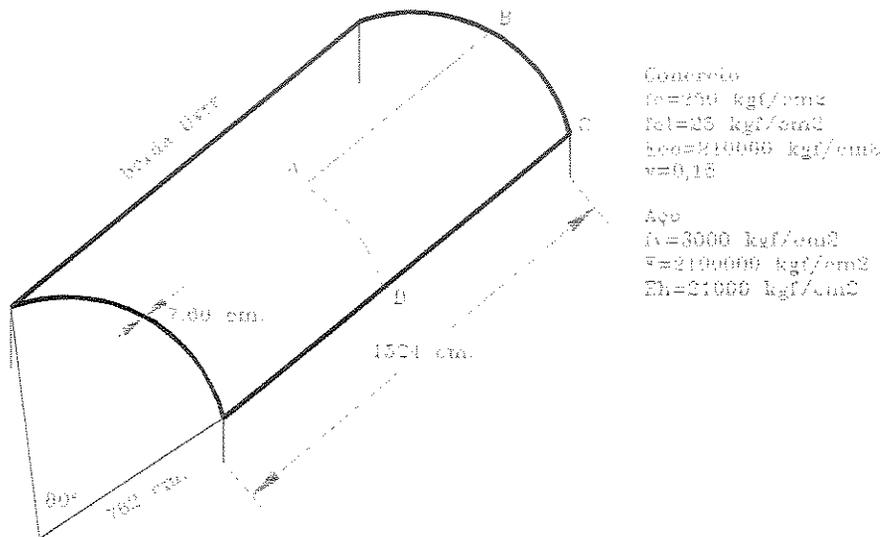


Figura. 5.3 Cobertura cilíndrica circular de concreto armado.

Um quarto da casca foi dividido em 48 elementos, sendo 6 na direção longitudinal e 8 na transversal, a espessura foi dividido em 8 camadas.

A figura 5.4 mostra no gráfico: carga distribuída sobre a casca versus deslocamento vertical do ponto A .

Este exemplo também foi analisado por Buyukoztruk [64] mas os resultados que ele obteve diferem muito dos mostrados na figura 5.4

## Resultados

A análises mediante realizada com os métodos Newton Raphson e Quase-Newton fornecem os valores mostrados na tabela 2 e no gráfico carga –deformação, figura 5.4.

Os arquivo de saída dos resultados tem a aparência mostrada parcialmente abaixo:

### ARQUIVO DE SAIDA

CASCAS CILINDRICAS DE CONCRETO ARMADO

ANALISE COM NAO-LINEARIDADE FISICA

NUMERO DE ELEMENTOS= 48  
NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO X= 6  
NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO Y= 8  
NUMERO DE NOS COM CONDS. DE CONTORNO= 23  
NUMERO DE CAMADAS DE CONCRETO= 6  
NUMERO DE CAMADAS DE ACO= 2  
NUMERO DE PTOS. GAUSS= 9

DADOS RELATIVOS AOS MATERIAIS

COEFICIENTE DE POISSON EQUIVALENTE= .15  
RESISTENCIA DO CONCRETO A COMPRESSAO= -250.00  
RESISTENCIA DO CONCRETO A TRACAO=25.00  
DEFORMACAO DO CONCRETO CORRESPONDENTE A FLC=-.00238  
MODULO DE ELAST. INICIAL DO CONCRETO= 210000.00  
PESO ESP. DO CONCRETO= .00

ESPESSURA= .7600000E+01  
RAIO= .7620000E+03  
COMPRIMENTO= .7620000E+03

.

.

.

.

.

CONTINUA

Tabela 5.2 Deslocamento vertical dos pontos extremos da casca cilíndrica exemplo 2.

INCR	CARGA	BFGS Villegas				NEWTON RAPHSON Assan			
		Nó 7	Nó 63	Nó 42	Nó 21	Nó 7	Nó 63	Nó 42	Nó 21
1	0,0025	0,490588	-0,07509	0,043619	0,328649	0,491342	-0,07522	0,043601	0,329026
2	0,00375	0,737151	-0,11283	0,065478	0,493477	0,737813	-0,11303	0,065454	0,494174
3	0,00475	0,934665	-0,14315	0,082966	0,625841	0,893533	-0,14337	0,082958	0,626549
4	0,00525	1,034143	-0,15841	0,091724	0,692171	1,034214	-0,15858	0,091719	0,692832
5	0,00575	1,133187	-0,17376	0,1005	0,758755	1,133165	-0,17381	0,100486	0,759188
6	0,00625	1,232818	-0,18906	0,10927	0,825183	1,2322	-0,18904	0,109257	0,825572
7	0,00675	1,332221	-0,20443	0,118018	0,891934	1,331302	-0,20431	0,118032	0,892014
8	0,00725	1,432316	-0,2198	0,126788	0,9586	1,430476	-0,21959	0,126813	0,9585
9	0,00775	1,550031	-0,23625	0,135216	1,031121	1,51042	-0,23433	0,136239	1,021023
10	0,00825	1,597836	-0,2506	0,146557	1,084148	1,619965	-0,24987	0,144887	1,089925
11	0,00875	1,696663	-0,269	0,157203	1,157081	1,735368	-0,26734	0,153822	1,165548
12	0,00925	1,816848	-0,28681	0,166863	1,235554	1,836798	-0,28423	0,163336	1,23692
13	0,00975	1,944778	-0,30521	0,17632	1,316689	1,975914	-0,30191	0,173045	1,319744
14	0,01025	1,944779	-0,30521	0,17632	1,316689	2,120398	-0,32263	0,184923	1,413423
15	0,01075					2,100388	-0,33105	0,198183	1,436784

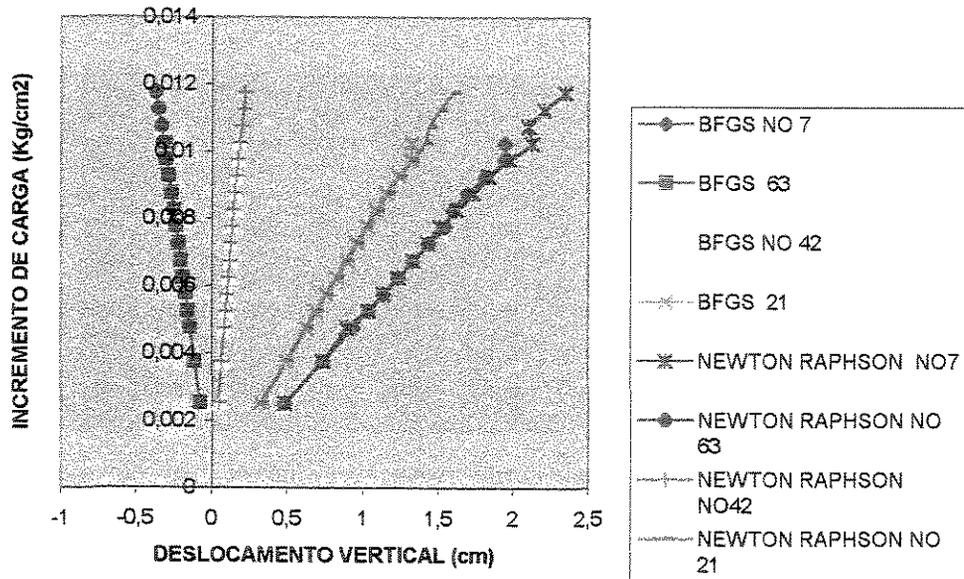


Figura 5.4 Comparação gráfica entre os métodos Newton-Raphson (Assan) e BFGS (Villegas) dos pontos extremos da casca cilíndrica exemplo 2

### 5.2.3 TERCEIRO EXEMPLO.

Este exemplo trata de uma casca cilíndrica circular de concreto armado vinculada em todo o contorno por articulações que impedem as translações no plano horizontal, analisada experimentalmente e analiticamente por Takayama et al [65].

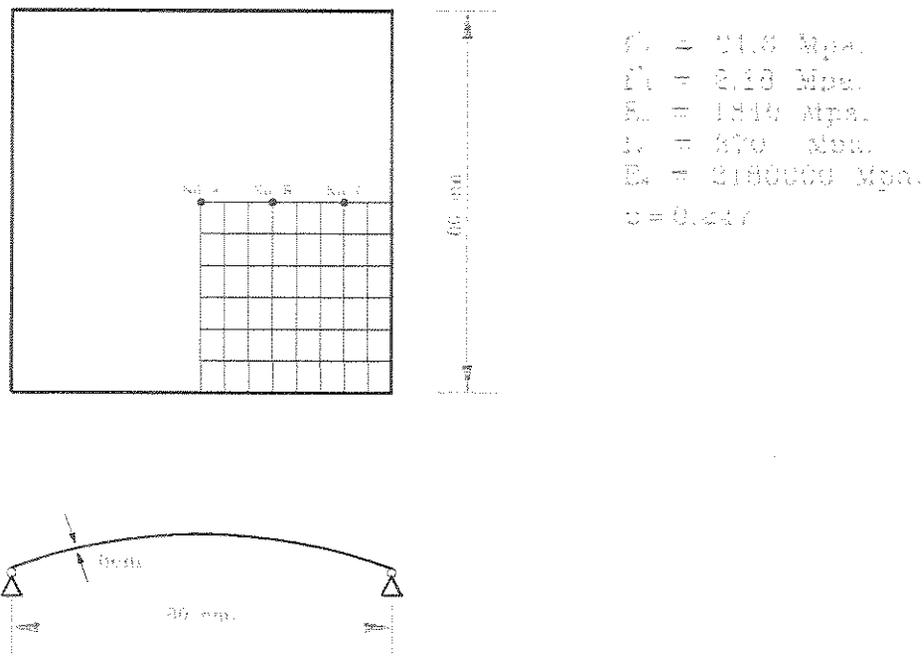


Figura 5.5 casca cilíndrica circular de concreto armado (Takayama)

Os autores estavam investigando a capacidade portante de cascas cilíndricas de concreto armado com imperfeições iniciais. Os experimentos foram realizados considerando dois tipos de espécimes: uma casca perfeitamente cilíndrica circular e a outra casca foi dada uma imperfeição geométrica inicial. Neste trabalho usa-se como comparação a primeira casca.

Estes autores, na análise numérica, adotaram um modelo similar ao sugerido por Cedolin e Dei Poli [66], também descrito por Hinton e Owen [67].

A relação constitutiva do concreto seguiu a lei de Hooke até que a tensão efetiva equivalente alcançou a resistência a compressão uniaxial do concreto. Depois deste ponto o material escoou e considerando-se a regra do fluxo (flow rule) associada.

A função do escoamento do concreto adotada é:

$$\bar{\sigma} = \left\{ b \left[ (\sigma'_x{}^2 + \sigma'_y{}^2 - \sigma'_x \sigma'_y) + 3(\tau'_{xy}{}^2 + \tau'_{xz}{}^2 + \tau'_{yz}{}^2) \right] + a(\sigma'_x + \sigma'_y) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

onde  $a$  e  $b$  são iguais a  $0,355\bar{\sigma}$  e  $1,355$ , respectivamente. Estas constantes foram determinadas baseadas nos estudos de Kupfer and Gerstle [27] e Kupfer et al. [31].

Na tensão, Takayama et al. [65] usam a mesma hipótese usada neste estudo para modelar o comportamento do concreto.

Neste trabalho a casca foi dividido em 48 elementos finitos, porém com o mesmo numero de camadas de concreto e aço adotados por Takayama et al. [65]. A figura [5.6] mostra os deslocamentos verticais dos nós A,B e C mostrados na figura [5.5].

Os resultados dos deslocamentos verticais destes pontos são mostrados na seguinte tabela (3), obtidos mediante os métodos Newton Raphson e BFGS.

**Tabela -5.3.**

**Deslocamentos verticais dos pontos A,B,C exemplo 3.**

INC	CARG	BFGS Villegas			N.RAPHSON Assan			TAKAYAMA			EXPERIMENTAL		
		Nó 63	Nó 42	Nó 21	Nó 63	Nó 42	Nó 21	Nó 63	Nó 42	Nó 21	Nó 63	Nó 42	Nó 21
1	0,2083	0,0168	0,0117	0,0024	0,0170	0,0118	0,0020	0,016	-0,008	0	0,016	0,016	0,006
2	0,4166	0,0344	0,0239	0,0049	0,0349	0,0242	0,0041	0,028	0,016	0	0,035	0,035	0,008
3	0,6249	0,0531	0,0369	0,0075	0,0537	0,0372	0,0062	0,044	0,023	-0,005	0,047	0,047	0,010
4	0,8333	0,0730	0,0507	0,0101	0,0713	0,0491	0,0082	0,065	0,031	-0,008	0,065	0,051	0,010
5	1,0416	0,095	0,0656	0,0128	0,0892	0,0612	0,0101	0,08	0,039	-0,013	0,085	0,059	0,010
6	1,2499	0,1184	0,0817	0,0156	0,1075	0,0733	0,0119	0,096	0,047	-0,026	0,103	0,067	0,016
7	1,4583	0,1458	0,1001	0,0187	0,1267	0,0855	0,0134	0,129	0,054	-0,030	0,135	0,082	0,016
8	1,6666	0,1739	0,1198	0,0217	0,1465	0,0978	0,0147	0,155	0,062	-0,038	0,163	0,089	0,016
9	1,7708	0,1881	0,1312	0,0220	0,1572	0,1039	0,0148	0,173	0,066	-0,046	0,184	0,096	0,018
10	1,8749	0,1999	0,1373	0,0222	0,1699	0,1107	0,0139	0,197	0,071	-0,052	0,202	0,103	0,020
11	1,9791				0,1839	0,1175	0,0122	0,217	0,078	-0,062	0,225	0,111	0,020
12	2,0833				0,1972	0,1245	0,0109	0,274	0,091	-0,068	0,248	0,147	0,020

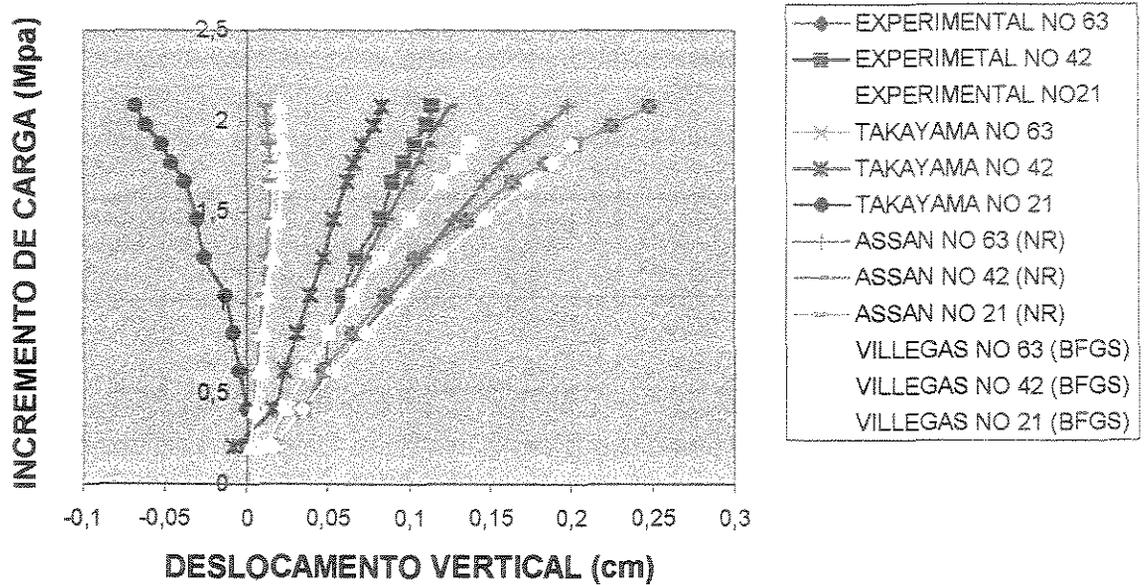


Figura 5.6 Comparação gráfica entre os resultados obtidos experimentalmente, Takayama, Assan (Newton Raphson) e Villegas (BFGS).

**Observações:**

Nos arquivos de saída para cada método pode-se observar o comportamento da estrutura mediante cada incremento de carga, ocasionando fenômenos como escoamento do material conforme a carga e a formação de fissuras.

Para primeiro exemplo observa-se que o material começa escoar no incremento 17 na primeira iteração como é mostrado em seguida:

**Arquivo de saída Segundo Newton Raphson:**

```

*****
* INCREMENTO= 17 *
*****
CARGA INCREMENTAL= -.17200      CARGA TOTAL=-4.47200
    
```

Resultados

\*\* INCREMENTO= 17 ITERACAO= 1 \*\*

NO= 1 V= .0000000E+00 W= -.2382521E+00 DESL. VERT.= -.2063323E+00  
NO= 4 V= .0000000E+00 W= -.2382724E+00 DESL. VERT.= -.2382724E+00  
NO= 41 V= .0000000E+00 W= .0000000E+00 DESL. VERT.= .0000000E+00  
NO= 44 V= .0000000E+00 W= .0000000E+00 DESL. VERT.= .0000000E+00

ELEMENTO= 8 CAMADA= 7 PT. GAUSS=3 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6083878E+02 SIG2= -.3390427E+02 ANGULO= -.6172662E-02

ELEMENTO= 8 CAMADA= 7 PT. GAUSS=6 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6083182E+02 SIG2= -.3389687E+02 ANGULO= .2531265E-02

ELEMENTO= 8 CAMADA= 7 PT. GAUSS=9 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6082477E+02 SIG2= -.3388926E+02 ANGULO= -.6277476E-02

ELEMENTO= 8 CAMADA= 8 PT. GAUSS=2 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6095576E+02 SIG2= -.3295941E+02 ANGULO= .2644616E-01

ELEMENTO= 8 CAMADA= 8 PT. GAUSS=3 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6075086E+02 SIG2= -.3548974E+02 ANGULO= -.7036259E-02

ELEMENTO= 8 CAMADA= 8 PT. GAUSS=5 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6095047E+02 SIG2= -.3296520E+02 ANGULO= .3854744E-01

.  
.  
.

CONTINUA

**Arquivo de saída segundo BFGS:**

\*\*\*\*\*  
\* INCREMENTO= 17 \*  
\*\*\*\*\*

CARGA INCREMENTAL= -.17200 CARGA TOTAL=-4.47200

NAO HA CARGAS CONCENTRADAS NOS NOS

\*\* INCREMENTO= 17 ITERACAO= 1 \*\*

NO= 1 V= .0000000E+00 W= -.2024611E+00 DESL. VERT.= -.1753365E+00  
NO= 4 V= .0000000E+00 W= -.1792819E+00 DESL. VERT.= -.1792819E+00

## Resultados

NO= 41 V= .0000000E+00 W= .0000000E+00 DESL. VERT.= .0000000E+00  
NO= 44 V= .0000000E+00 W= .0000000E+00 DESL. VERT.= .0000000E+00

ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=1 PRIMEIRA FISSURA  
SIG1= .1285560E+02 SIG2= -.3840071E+01 ANGULO= .8840319E+02

ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=3 FECHAMENTO DA UNICA FISSURA  
SIG1F= .4908238E+01 SIG2F= -.1303598E+01 ANGULO= -.7727851E+02  
ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=3 PRIMEIRA FISSURA  
SIG1= .4908238E+01 SIG2= -.1303598E+01 ANGULO= -.7727851E+02

ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=7 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.6013124E+02 SIG2= -.2206900E+02 ANGULO= -.5262627E+00

ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=8 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.5954327E+02 SIG2= -.2159636E+02 ANGULO= -.2789170E+00

ELEMENTO= 1 CAMADA= 1 PT. GAUSS=9 ESCOAMENTO DO CONCRETO - DIRECAO 1  
SIG1= -.5875990E+02 SIG2= -.2137822E+02 ANGULO= .2427048E+01

.  
.  
.  
.  
.

CONTINUA.

## CAP. 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.

Este trabalho mostra a aplicação do Método dos Elementos Finitos em conjunto com um Método de Otimização, este último como ferramenta consistente para a análise do comportamento não-linear das estruturas.

Este tipo de algoritmo proporciona uma alternativa para obter soluções mais depuradas, como é o caso dos métodos Newton Raphson e Quase-Newton, vistos nesta pesquisa, e que podem ser particularmente estendidos para outros problemas de engenharia.

O método da energia aplicado á modelagem clássica de estruturas, é fundamentado no principio da mínima energia potencial total do sistema, sendo que o mínimo da energia potencial total corresponde à situação de equilíbrio.

Cada método mencionado neste trabalho utiliza o método exato de busca unidimensional, porém os métodos diferem entre si principalmente na forma como é tomada a direção de descida na busca do ponto mínimo global. Cada método avalia o tamanho do passo na direção de descida, através da busca unidimensional exata.

Nem sempre os métodos de otimização levam à obtenção do mínimo da função, a menos que a função objetivo tenha características como e caso de funções estritamente convexas. A modelagem do concreto e aço adotados nesta pesquisa procura captar o complexo comportamento do material diante de fenômenos como escoamento e fissuração do concreto ao aplicar um carregamento incremental. O fenômeno de fissuração é a principal causa da não-linearidade, não se podendo descartar também a importância de modelar a armadura.

Os resultados obtidos mediante os métodos Newton-Raphson e Quase-Newton diferem muito pouco. Apesar de o método Quase-Newton mostra uma alternativa muito interessante, pois fornece uma regra de atualização da matriz de rigidez absolutamente essencial para a redução dos erros induzidos no procedimento incremental, o método Newton Raphson, é mais simples de ser implementado em programas de computador, e requer menos esforço(tempo) computacional, sendo mais indicado para aplicações práticas da engenharia civil.

O trabalho pode ser melhorado considerando, por exemplo, a perda da aderência entre a armadura e o concreto que também concorre para agravar a não-linearidade física.

A adoção de elemento finito de comportamento superior ao utilizado no trabalho também é uma sugestão para melhorar a resposta que se obtém para estruturas em casca.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.

- 1- Ngo, D. and Scordelis, A. C. **Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.** Journal ACI, 64 (3): 152 - 163, Mar., 1967.
- 2- Argyris, J. H., Faust, G.; Szimat, J.; Warnke, E. P. and William, K. J. **Recent Developments in the Finite Element Analysis of Prestressed Concrete Reactor Vessels,** Nuclear Engineering and Design, 28: 42 - 75, 1974.
- 3- Chen, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete** , Mc Graw-Hill, Inc., 1982.
- 4- State of the Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced concrete. ASCE Task Committee on Concrete and Masonry Structures, 1981.
- 5- Meyer, C. and Bathe, K. J. **Nonlinear Analysis of R/C Structures in Practice.** J. Struct. Div., ASCE, 108 (ST7). 1605 - 1622, July, 1982.
- 6- Proença, S. B. - **Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições.** São Carlos, EESC - USP, Tese de Doutorado, 1988.
- 7- Bathe, K. J. and Cilento, A.P. **Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations,** Comp. Meths. Appl. Mechs. And Engrg., 22: 59 - 85, 1980.
- 8- Bergman, P. G. and Holand, I. **Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures,** Comp. Maths. Appl. Mechs. And Engrg. 17/18: 443 - 467, 1979.
- 9- Gomes, C.M.B.R. **Matrix Update Methods in Nonlinear Analysis of Two Dimensional and Thin Shell Problems,** Swansea, Wales, UK, University College of Swansea, Ph.D. Thesis, 1982.
- 10- Rahman, H. H. A. **Computational Models for the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems.** Swansea, U. K., University College, Ph. D. Thesis, 1982.
- 11- Figueiras, J. A. **Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells,** Swansea, Wales, University College of Swansea, Department of Civil Engineering, Ph. D. Thesis, 1983.

- 12- Chan, E. C. **Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete shells with Edge Beams.** UC-SESM Report n°83 - 8, University of California, Berkeley, Dec.,1982.
- 13- Van Greunen, J. **Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Slabs and Panels,** UC - SESM Report n°79 - 3, University of California, Berkeley, Oct., 1979.
- 14- Barbosa, J.A.T., Dinis, L.M.S. e Couto Marques, J.M.M. **Análise Elasto-Plástica de Cascas de Pequena Curvatura com Não-Linearidade Geométrica,** X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Porto, Portugal, 1989.
- 15- Póvoas, R.H.C.F. and Martins, R.A.F. **Finite Element Analysis of Two Dimensional Reinforced Concrete,** Revista Portuguesa de Eng. De Estruturas, 9(25):33 - 47, Agosto, 1987.
- 16- Harmon, T. G. and Zhangyuan, N. **Shear Strenght of Reinforced Concrete Plates and Shells Determined by Finite Element Analysis Using Layered Elements,** J. Struct. Engrg., ASCE, 115(5):1141 - 1157, May, 1989.
- 17- Rule, W. K. and Rowlands, R. E. **A Simple Orthotropic Elasticity- Based Constitutive Models of Reinforced concrete.** Experimental Mechanics, Society for Experimental Stress Analysis, 29 (4): 448 -454, Dec., 1989.
- 18- Arnesen, A. **Analysis of Reinforced Concrete Shells Considering Material and Geometric Nonlinearities,** Trondheim, Norway, The University of Trondheim, Ph.D. Thesis, 1979.
- 19- Ramm, E. and Kompfner, T. A. **Reinforced Concrete Shell Analysis Using and Inelastic Large Deformation Finite Element Formulation.** International Conference on Computer - Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Part I, Split, Yugoslavia, Pineridge Press, pp. 581-597, Sept., 1984.
- 20- Silva, R.M. **Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem Numérica e Avaliação dos Métodos Aproximados,** São Carlos, EESC-USP, Tese de Doutorado, 1996.
- 21- Assan, A. E. **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Piping,** 8 Brazilian Symposium on Piping and Pressure Vessels, Gramado, R.S., 1: 252-261,1994.
- 22- Crisfield, M.A. and Shi, J. A. **Review of Solution Procedures and Path-Following Techniques in Relation to the Nonlinear Finite Element Analysis of Structures,** In: Nonlinear Computational Mecahanics State of the Art, Eds. P. Wriggers & W. Wagner, Springer-Verlag, pp. 47 - 68, 1991.
- 23- Matties, H. and Strang, G. **The Solution of Nonlinear Finite Element Equation,** Int. J. Num. Meths. Engng., 14: 1613-1626, 1979.

- 24- Arcaro, F. V. **Contribuição ao Projeto de Coberturas Espaciais**, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica- UNICAMP, Tese de Doutorado, janeiro, 1996.
- 25- Assan, A. E. - **Coberturas Onduladas Múltiplas com Enrijecedores Longitudinais e Transversais**. X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia. Porto, Portugal, 1989.
- 26- Darwin, D. and Pecknold, D. A. **Inelastic Model for Cyclic Biaxial Loading of Reinforced Concrete**. Civil Engineering Studies, SRS n° 409, University of Illinois, Urbana, Ill. P. 169, July, 1974.
- 27- Kupfer, H. and Gerstle, K. H. **Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses**. J. Engng. Mech. Div., ASCE, 99 (EM4): 853-865, Aug., 1973.
- 28- Isler, H. **New Shapes for Shells Twenty Years Later**, in Heinz Isler as Structural Artist, The Art Museum, Princeton University, New Jersey, 1980.
- 29- Melaragno, M. **An Introduction to Shell Structures**. The Art and Science of Vaulting., 1991.
- 30- Whang, B., **Elastic-Plastic Orthotropic Plates and Shells**, Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tenn., Nov., 1969.
- 31- Kupfer, H.; Hilsdorf, H. K. and Rush, H. **Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses**. ACI Journal, 66 (8): 656 - 666, Aug., 1969.
- 32- Ashwell, D. G. & Sabir, A. B. **A New Cylindrical Shell Finite Element Based on Simple Independent Strain Functions**. Int. J. Mech. Sci., 14: 171 - 183, 1972.
- 33- Assan, A. E. **Reservatórios com Parede Ondulada. Um Enfoque pelo Método dos Elementos Finitos**. São Carlos, EESC-USP, 1984. Tese de Doutorado.
- 34- Charchafchi, T. A. **Finite Element Analysis of Thin Shell Structures**. Cardiff, University College, Wales, 1980. PhD Thesis.
- 35- Hand, Jr., F. R., Schnobrich, W. C. and Pecknold, D. A. W. **A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells**. Civil Engineering Studies, SRS n° 389, Technical Report, University of Illinois, Urbana, Ill., Aug., 1972.
- 36- Bashur, F. K. and Darwin, D. **Nonlinear Model for Reinforced Concrete Slabs**. J. Struct. Div., ASCE, 104 (ST1): 157-170, Jan., 1978.
- 37- Canet, J.M.; Bernat, A. R. M. y Hernández, J. J. R. **Análisis no Lineal de Placas y Láminas de Hormigón Armado, con Vigas de Borde Pretensadas, por el Método de los Elementos Finitos**. Hormigón y Acero, Madrid, 156: 45-61, 1985.

- 38- Bazant, Z.P. **Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials**?. J. Struct. Engng. Mech., ASCE, 1109 (3): 849-865, Jun., 1983.
- 39- Buyukozturk, O. and Tseng, T. M. **Concrete in Biaxial Cyclic Compression**. J. Struct. Engng., ASCE, 110, (3): 461-476, Mar., 1984.
- 40- Darwin, D. and Pecknold, D. A. **Analysis of RC Shear Panels Under Cyclic Loading**. J. Struct. Div., ASCE, 102, (ST2): 355-369, Feb., 1976.
- 41- Evans, R. J. and Pister, K. S. **Constitutive Equations for a Class of Nonlinear Elastic Solids**. Int. J. of Solids and Structures, 2 (3): 427-445, 1966.
- 42- Karsan, I. D. and Jirsa, J. D. **Behavior of Concrete Under Compressive Loadings**. J. Struct. Div., ASCE, 95 (ST12): Dec., 1969.
- 43- Gilbert, R. I. and Warner, R. F. **Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs**. J. Struct. Div., ASCE, 104, (ST12): 1885-1900, Dec., 1978.
- 44- Irons, B.M., Elsawaf, A.F., **The Conjugate Newton Method for Solving Finite Element Equations**, In: Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, M.I.T. Press, 665 -672 (1977).
- 45- Kabir, A. F. **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells for Time Dependent Effects**. UC - SESM Report n° 76 - 7, University of California, Berkeley, dec., 1976.
- 46- Lin, C. S. **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells**. Berkeley, University of California, Ph. D. Thesis, April, 1973.
- 47- Lin, T. C. Y.; Nilson, A. H. and Slate, F. O. **Biaxial Stress- Strain Relations for Concrete**. J. Struct. Div., ASCE, 98, (ST5): 1025 - 1034, May, 1972.
- 48- Maher, A. and Darwin, D. **Microscopic Finite Element Model of Concrete**. St. Louis, Mo., First International Conference on Mathematical Modelling, 11: 1705 - 1714, 1977.
- 49- Mang, H. A. and Floegl, h. **Tension Stiffening Concept for Reinforced Concrete Surface structures**. IABSE Colloquium on Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, Delft., Final Report, pp. 351 - 369, June, 1981.
- 50- Owen, D. R. J. and Hinton, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. Pineridge Press Ltd., Swansea, U. K., 1980.
- 51- Milford, R. V. and Schnobrich, W. C. **Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Cooling Towers**. Civil Engineering Studies, SRS n° 514, Technical Report, University of Illinois, Urbana, Ill., May, 1984.

- 52- Mueller, G. **Numerical Problems in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete**. UC - SESM Report n° 77 - 5, University of California, Berkeley, Sept., 1977.
- 53- Pica, A., Hinton, E., **The Quasi-Newton Method in Large Deflection Analysis of Plates**, in Numerical Meth. For Non-Linear Problems ed: C. Taylor, E Hinton, D.R.J. Owen, Pineridge Press.
- 54- Rajagonal, K. R. **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams, Beam - Columns and Slabs by Finite Element**. Ames, Iowa, Iowa State University, Ph. D. Thesis, 1976.
- 55- Rashid, Y. R. **Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels**. Nucl. Eng. Design, 7 (4): 334 - 344, April, 1968.
- 56- Riva, P. and Cohn, M. Z. **Engineering Approach to Nonlinear Analysis of Concrete Structures**. J. Struct Engng., 116, (8): 2162 - 2186, Aug., 1990.
- 57- Saenz, L. P. - Discussion of **Equation for the Stress - Strain Curve of Concrete**. By Desayi, P. and Krishnana, S., JACI, 61 (9): 1229 - 1235, Sept. 1964.
- 58- Scalon, A and Murray, D. W. **Time-Dependent Reinforced Concrete Slab Deflections**. J. Struct. Div., ASCE, 100, (ST9): 1911 - 1924, Sept., 1974.
- 59- Runge, K.H., Haynes, H.H., **Experimental Implosion Study of Concrete Structure**, in Proceedings of the Eighth Congress of the Federations de la Precontrainte, London, England, 1978.
- 60- Zienkiewicz, O. C. **The Element Method in Engineering Science**. Mc Graw-Hill Book Co., Ltd., London, England, 1971.
- 61- Chen, W.F., Susuki, H., Chang, T.Y., **Nonlinear Analysis of Concrete Cylinder structures under Hydrostatic Loading**, Computers and Structures, 12, 559-570, 1980.
- 62- Chen, A. C. T., Chen, W.F., **Constitutive Relations for Concrete**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 101, N° EM4, 465-481, 1975.
- 63- Chang, T.Y., Chen, W.F., **Extended NONSAP program for OTEC Structural Systems** ERDA Report N° COO-2682-7, 1976.
- 64- Buyukozturk, O., **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures**, Computers and Structures, 7, 149-156, 1977.
- 65- Takayama, M., Nakamura, H., Hara, T. Kato, S., **Comparison Between Experiments and Analysis for Ultimate Strength of Reinforced Concrete Cylindrical Shell with Geometric Initial Imperfections Subjected to Uniformly Vertical Loads**, in Proceedings of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures, Taegue, Korea, 237-249, 1990.

Referencias Bibliográfica

- 66- Cedolin, L. Dei Poli, S., **Finite Element Studies of Shear Critical r/c Beams**, Journal of the Engineering Mechanical Division, ASCE, 103, N° EM3, 395-410, 1977.
- 67- Hinton, E., Owen, D.R.F., **Finite Element Software for Plates and Shells**, Pineridge Press, 1984.