

7
57.06

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL

O EFEITO DOS APOIOS ELÁSTICOS
EM BARRAS LONGAS DE SEÇÃO DELGADA ABERTA

Mestrando : Eng. Marcus Thompsen Primo

Orientador : Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

aberto que é
a vez de definir
de dissertação
LTP

Campinas, abril de 1996

9613066



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	P935e
V.	Ex
TIEMBO BC/	28 328
PROC.	667/96
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/08/96
N.º CPD	C.M.00091520-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P935e

Primo, Marcus Thompsen

O efeito dos apoios elásticos em barras longas de seção delgada aberta / Marcus Thompsen Primo.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Leandro Palermo Junior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Estruturas metálicas. 2. Métodos dos elementos finitos. 3. Vigas. 4. Fundação (Engenharia). I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL

O EFEITO DOS APOIOS ELÁSTICOS
EM BARRAS LONGAS DE SEÇÃO DELGADA ABERTA

Mestrando : Eng. Marcus Thompsen Primo

Trabalho apresentado à Coordenadoria
de Pós-Graduação da Faculdade de
Engenharia Civil, como parte dos
requisitos exigidos para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil,
área de concentração Estruturas.

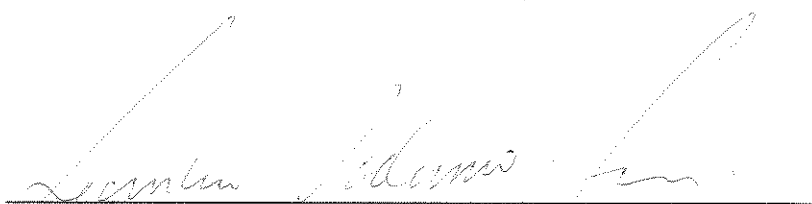
Campinas, abril de 1996

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP

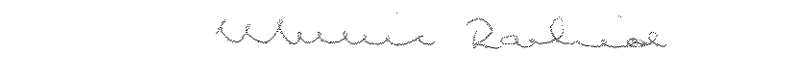
FOLHA DE APROVAÇÃO

Autor : **Marcus Thompsen Primo**

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 07 de março de 1996 pela
banca examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior (FEC - UNICAMP)
Orientador - Presidente



Prof. Dr. Munir Rachid
(EESC - USP)



Prof. Dr. José Luiz Fernandes de A. Serra
(FEC - UNICAMP)

Aos meus pais,
minha esposa Angélica
e minha filha Cristine.

AGRADECIMENTOS

Entre as pessoas que me auxiliaram durante a execução deste trabalho, agradeço em especial:

- Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior.

- Aos professores:

Prof. Dr. Francisco A. Menezes

Prof. Dr. José Luiz Antunes O. Souza

Prof. Dr. José Luiz F. de A. Serra

Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan

Prof. Msc. Mário Conrado Cavichia

- Aos colegas do curso de estruturas com os quais tive a oportunidade de estudar e aprender muito:

Ulises Bobadilla Guadalupe

Armando Diório Filho

Paschoal Perdão Júnior

Aos estagiários e funcionários do setor de computação da Faculdade de Engenharia Civil.

À FAPESP - Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio dado a este trabalho.

SUMÁRIO

Lista de Símbolos	
Resumo	
Abstract	
1. Introdução	01
2. Barras Longas de Seção Delgada	03
3. Fundamentos Básicos	05
3.1. Teoria de Torção Livre	05
3.1.1. Analogia de Prandtl	09
3.1.2. Seções Abertas de Paredes Delgadas	12
3.2. Teoria de Flexo-Torção	15
4. O Efeito da Não Linearidade Geométrica	25
4.1. Energia de Deformação	30
4.2. Energia Potencial das Tensões de Primeira Ordem do Carregamento nos Deslocamentos de Segunda Ordem	32
4.2.1. Energia Potencial da Tensão Normal	34
4.2.2. Energia Potencial das Tensões Cisalhantes	36
4.3. Energia Potencial das Cargas Transversais	36
4.4. Energia Potencial Total	38
5. Vínculos Elásticos	41
5.1. Introdução	41
5.2. Princípios Energéticos	42
6. Aplicação do Método dos Elementos Finitos	50
6.1. Matriz de Rigidez do Elemento	54
6.2. Matrizes Parciais	57
6.2.1. Primeira Matriz	57
6.2.2. Segunda Matriz	59
6.2.3. Terceira Matriz	62

6.2.4. Quarta Matriz	64
6.2.5. Quinta Matriz	66
6.3. Vetor de Cargas	69
6.4. Matriz de Rigidez da Estrutura	70
6.5. Condições de Vinculação	71
7. Determinação de Cargas Críticas	72
7.1. Convergência do Processo de Obtenção do Menor Auto-valor	74
7.2. Quociente de Rayleigh	75
8. Exemplos	78
8.1. Exemplo Numero 1: Fundação Elástica em Pontos Diferentes da Seção Transversal	78
8.2. Exemplo Número 2: Esforços em Barra Sobre Vínculo Elástico Contínuo	94
8.3. Exemplo Número 3: Aplicação para Viga Sobre Vínculo Elástico Contínuo	107
8.4. Exemplo Número 4: Barra com Deformação Inicial	115
8.5. Exemplo Número 5: Instabilidade de Barra com Seção Não Simétrica	124
9. Conclusões	136
10. Bibliografia	138
Anexo A (Listagem do Programa)	
Anexo B (Arquivos de Entrada e Saída de dados)	

LISTA DE SÍMBOLOS

- γ - Ângulo ou deformação de distorção referente a τ .
- ω - Área setorial.
- λ - Autovalor.
- ε - Deformação normal à seção transversal.
- δ - Deslocamento genérico.
- π - Energia potencial total.
- ϕ - Giro da seção transversal em torno de um eixo paralelo a x.
- ρ - Raio.
- τ - Tensão de cisalhamento.
- σ - Tensão normal.
- A - Área.
- B - Bimomento.
- C_ϕ - Constante de deformação do vínculo elástico na direção ϕ .
- C.G. - Centro de gravidade da seção transversal.
- C_1, C_2 - Constantes.
- C_R - Ordenada perpendicular ao esqueleto com origem nele.
- C_V - Constante de deformação do vínculo elástico na direção y.
- C_w - Constante de deformação do vínculo elástico na direção z.
- D - Centro de torção.
- d - Dimensão característica da seção transversal.
- $d\phi$ - Parcela infinitesimal na direção do giro ϕ .
- dA - Parcela de área.
- dx - Parcela infinitesimal na direção do eixo x.
- E - Módulo de elasticidade longitudinal.
- G - Módulo de elasticidade transversal.
- H - Ponto de aplicação do vínculo elástico na seção transversal.
- h_y - Coordenada y do ponto de aplicação do vínculo elástico.
- h_z - Coordenada z do ponto de aplicação do vínculo elástico.

i_D - Raio de giração polar.
 J_ω - Momento setorial de inércia.
 $J_{\omega Y}$ - Momento setorial central de inércia em relação ao eixo Y.
 $J_{\omega Z}$ - Momento setorial central de inércia em relação ao eixo Z.
 J_T - Momento polar de inércia.
 J_Y - Momento de inércia em relação ao eixo Y.
 J_{YZ} - Momento centrífugo de inércia.
 J_Z - Momento de inércia em relação ao eixo Z.
 K_Y, K_Z - Coordenadas do centro do círculo de estabilidade.
 L - Comprimento, vão.
 m - Carga de torção uniformemente distribuída.
 M_Y - Momento fletor em torno do eixo y.
 M_Z - Momento fletor em torno do eixo z.
 N - Esforço normal.
 P - Cargas axiais aplicadas em pontos da seção transversal.
 q - Pressão por unidade de área.
 Q_Y - Cortante na direção do eixo y.
 Q_Z - Cortante na direção do eixo z.
 R - Função aproximadora do elemento finito.
 S - Força de tração.
 S - Linha equidistante dos bordos das paredes da seção. (linha de esqueleto)
 S_ω - Momento setorial estático.
 S_Y - Momento estático de inércia em relação ao eixo Y.
 S_Z - Momento estático de inércia em relação ao eixo Z.
 t - Espessura.
 T - Momento torçor
 T_{FT} - Momento de flexo-torção.
 T_L - Momento de torção livre.
 t_m - Maior valor de espessura da seção.
 u - Deslocamento da membrana na direção normal ao seu plano.
 U - Energia de deformação.
 v - Deslocamento na direção do eixo x.
 V - Energia potencial das cargas externas.

w - Deslocamento na direção do eixo z .

x, y, z - Eixos coordenados.

Y_C - Coordenada y do ponto de aplicação do carregamento transversal.

Y_D - Coordenada y do centro de cisalhamento.

Z_C - Coordenada z do ponto de aplicação do carregamento transversal.

Z_D - Coordenada z do centro de cisalhamento.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho a formulação energética para o estudo de barras de seção delgada aberta com influência de vinculação elástica contínua ou discreta. A utilização do método dos elementos finitos levou à elaboração de um programa computacional que permite o estudo das barras para diversas condições de carregamento, vinculação e forma de aplicação da vinculação elástica.

Tem-se a possibilidade de determinar cargas críticas com seus modos de flambagem, no caso de problemas de 1ª espécie, e deslocamentos e esforços nos problemas de 2ª espécie em teoria de 1ª e 2ª ordem.

Utiliza-se o método da iteração vetorial clássica para determinar, nas barras em estudo, os menores auto-valores (cargas críticas) com seus respectivos auto-vetores (modos de flambagem), inclusive no cálculo de auto-valores seguintes ao primeiro.

Exemplos mostram claramente situações de carregamento e vinculação elástica, e seus efeitos no comportamento da barra.

Abstract

thin walled open beams with open cross sections are studied taking into account the influence of continuous and/or discrete elastic supports. The finite element method was used in the development of a computer code which allows the stability analysis for different loadings and rigid or elastic supports.

Critical loads and corresponding buckling modes, displacements and forces maybe computed in problems with geometric non-linearities.

The classical vectorial iteration method is used to determine the least eigenvalues (critical loads) and corresponding eigenvectors (buckling modes). The other eigenvalues and eigenvectors may also be obtained.

Examples are presented for models with different loading and support conditions, discussing the effects on the beams behaviour.

1. INTRODUÇÃO:

O principal elemento constitutivo da maioria das estruturas é frequentemente o elemento de barra, dando origem ao que se convencionou chamar estruturas reticulares. No caso das estruturas metálicas o tipo mais comum de barras é a de seção aberta e com paredes delgadas, tais como seções I, U, L, T ou Z. A característica predominante nestas seções é que sua espessura é pequena quando comparada com as dimensões da seção transversal. Seções delgadas são vantajosas porque oferecem alto desempenho no que se refere a um menor peso de material empregado para obter-se determinada capacidade portante.

A consideração da estabilidade à torção e flexão com torção é de fundamental importância na análise de barras de seção delgada aberta. Esta análise no entanto, torna-se algo complexo quando as condições de vinculação não são tão simples, ou quando a seção transversal possui apenas um ou nenhum eixo de simetria, ou ainda no caso da barra estar solicitada simultaneamente à torção e flexão. A resolução de problemas deste tipo, em barras de comprimento longo, envolve equações diferenciais escritas em função do ângulo de rotação (ϕ) e deslocamentos (v_D e w_D) do centro de cisalhamento da seção transversal. Para as condições gerais citadas, quando se consegue obter uma solução fechada, as equações são de resolução muito difícil e trabalhosa.

Técnicas numéricas, como o Método dos Elementos Finitos, têm sido utilizados com bons resultados para chegar-se às respostas destas equações diferenciais, englobando adequadamente o problema das barras de seção delgada aberta.

Nesse trabalho, trata-se da análise de barras sobre fundação elástica ou fundação de Winkler [20]. A fundação elástica é simulada com um número infinito de molas com deformação linear, infinitamente espaçadas e independentes, definidas por uma constante de mola ou constante de fundação K . A fundação elástica pode limitar-se a um ponto da barra, caracterizando-se um apoio elástico. Considera-se o fato desta fundação elástica ou apoio elástico estar aplicado em um ponto qualquer

da seção transversal da barra. Nota-se, neste estudo, a influência do valor de constante elástica no modo de flambagem da barra.

Apresenta-se ainda um estudo dos casos de instabilidade de barras, com determinação de cargas críticas e forma de flambagem da barra, seja por instabilidade de torção, flexão ou por flexão com torção. Nos problemas de segunda espécie, determinam-se os valores de deslocamentos de flexão e torção nos planos principais da barra, bem como os esforços de flexão e cisalhamento decorrentes destes deslocamentos.

Admite-se a hipótese de pequenos deslocamentos e o material como sendo elástico linear, homogêneo e isotrópico.

Apresentam-se no capítulo 3 alguns fundamentos da teoria de torção livre e flexo-torção com utilização da analogia de membrana. No capítulo 4, define-se o funcional para uma barra de seção delgada, considerando-se o efeito da não linearidade geométrica. Dedicam-se, no capítulo 5, ênfase ao estudo da vinculação elástica, tanto para vínculos contínuos como discretos nas direções v , w e φ , acrescentando-se ao funcional do capítulo 4 os efeitos da vinculação elástica.

A aplicação do Método dos Elementos Finitos para o tratamento numérico das equações diferenciais é feita no capítulo 6, com a determinação das matrizes de rigidez parciais para cada tipo de influência na barra. O método da Iteração Vetorial é apresentado no capítulo 7 para determinação de autovalores e autovetores, que representam a carga crítica e o modo de flambagem para o tipo de barras em estudo.

Alguns exemplos utilizando-se a teoria apresentada são resolvidos no capítulo 8 e as conclusões finais no capítulo 9.

A listagem completa de um programa de computador desenvolvido em linguagem Pascal, ambiente Turbo Pascal 7.0, em um microcomputador PC 486-DX é apresentada no anexo A.

2. BARRAS LONGAS DE SEÇÃO DELGADA:

Embora as deformações de flexão de barras comprimidas tenham sido investigadas experimentalmente por MUSSCHENBROEK (1729) e teoricamente por EULER (1744) [28] na primeira metade do século dezoito, a possibilidade das barras sofrerem instabilidade por flexão e torção foram reconhecidas relativamente tarde, quando no fim do século dezenove MICHELL (1899) e PRANDTL (1899) [29], simultaneamente e independentemente, resolveram os primeiros problemas de instabilidade lateral de barras com seção retangular (negligenciando o efeito de empenamento). Os efeitos do empenamento em vigas I foram estudadas inicialmente por TIMOSHENKO (1910) [29], cuja continua contribuição nesta área é resumida em seu livro [TIMOSHENKO (1961)][29]. As investigações posteriores de instabilidade por flexão e torção de barras cuja seção transversal tem um eixo de simetria relacionam o comportamento obtido de acordo com a condição de carregamento. A instabilidade por torção de barras não-simétricas, sujeitas a carregamentos passando através do centro de gravidade foi observada pela primeira vez, para barras de seção U, por BACH (1909) [29]. Mas, o conceito que o centro de gravidade não é o único ponto característico da seção transversal, apareceu primeiramente nos trabalhos de EGGENSSCHWYLER (1920) e MAILLART (1920) [29] que definiram centro de cisalhamento. O progressivo uso de elementos de paredes de seção delgada em aeronaves permitiu maior intensidade de pesquisas na estabilidade destes elementos. A instabilidade lateral de vigas I tem sido tratada por WEBER (1926) [29] e os primeiros estudos da deformação por torção de colunas são devidos a WAGNER (1929) e PUGSLEY (1932) [29]. OSTENFELD (1931) [29] verificou que, na flexão, o centro de rotação não coincide com o centro de cisalhamento. Ele obteve soluções corretas para seções com um eixo de simetria. Os

anos seguintes trouxeram o incremento de hipóteses simplificadoras dos estudos anteriores, e a expansão para casos mais gerais.

Vlassov (1962) sistematizou em [6] o problema de flexão e torção para barras de seção delgada aberta. Os estudos de Vlassov permitiram um tratamento geral da instabilidade de barras de seção delgada aberta no mundo todo.

No Brasil, pode-se citar que:

A influência do bimomento na determinação de cargas críticas para instabilidade de flexão e torção foi estudado por Rachid (1976) em [26]. A consideração de problemas de segunda espécie devido a ação de cargas torçoras e bimomentos foram tratados por Mori (1978) em [27], onde é apresentado uma automatização de cálculo considerando efeitos de segunda ordem.

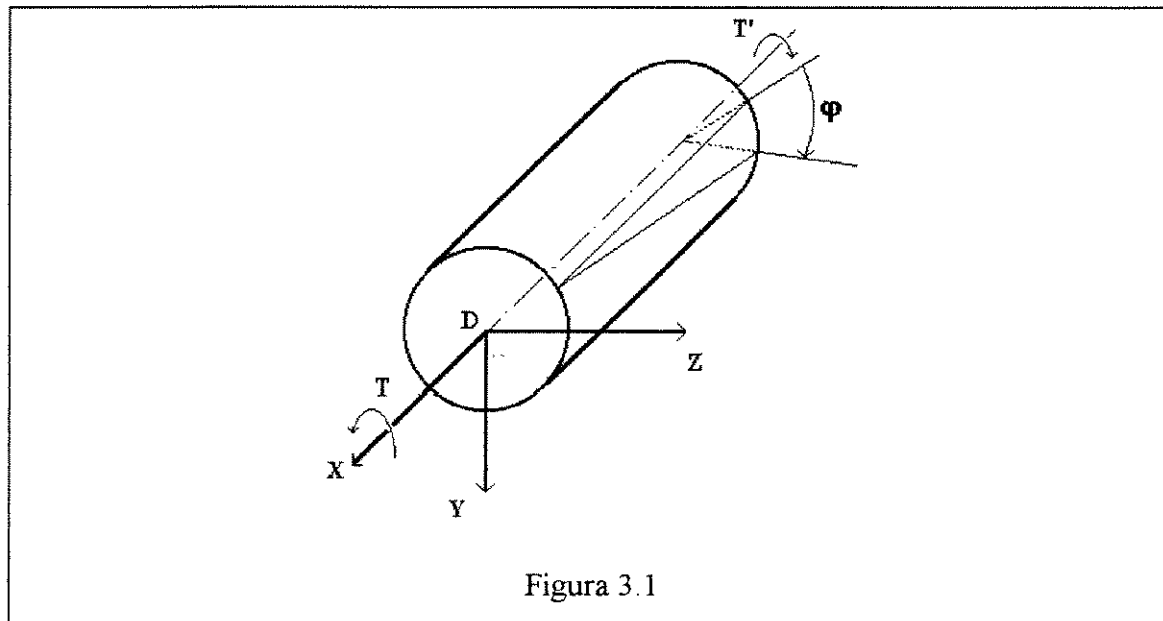
Com a utilização mais intensa de computadores no processamento numérico e a facilidade de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos, Palermo (1985) em [1] automatizou o cálculo de barras com seção delgada aberta para problemas de primeira e segunda espécie, considerando os efeitos de primeira e segunda ordem.

3. FUNDAMENTOS BÁSICOS

3.1. TEORIA DE TORÇÃO LIVRE.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos de torção pura de barras, com maior ênfase aos casos de barras com seção delgada aberta.

Seja a barra reta de seção circular cheia, apresentada na figura 3.1, onde momentos torçores T e T' são aplicados em suas extremidades, considerando a liberdade de deslocamentos fora do plano da seção transversal. Diz-se que a barra está sujeita à *torção livre*. Em outras palavras, a deformação angular $d\phi/dx$, assumida constante por unidade de comprimento, obedece a ação do momento torçor que provoca apenas o surgimento de tensões de cisalhamento nas seções transversais da viga.



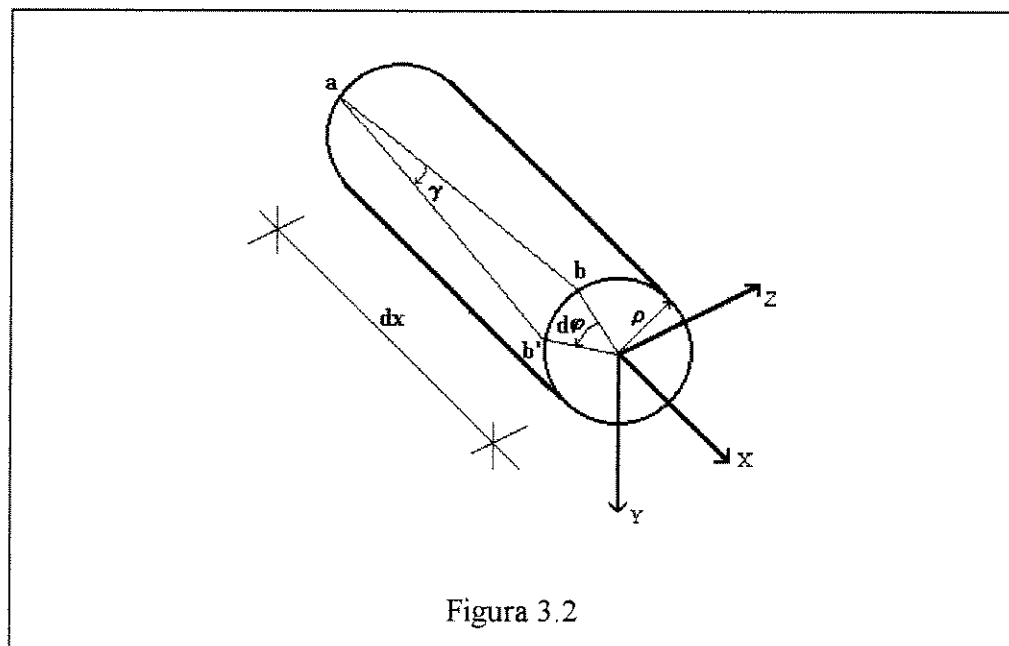
Com relação à figura 3.1 pode-se dizer que o ponto D, pertencendo ao plano da seção transversal, representa o *centro de torção*, assim chamado por não sofrer deslocamentos de translação logo, $\phi(x)$ é uma rotação das seções transversais em

torno de um eixo que passa pelo centro de torção. No caso da seção circular, o centro de torção coincide com o centro de gravidade (CG) da seção.

Sendo a rotação $\phi(x)$ uma função da posição x ao longo do eixo, a rotação unitária, ou por unidade de comprimento, será determinada em função do momento torçor T ao longo da barra.

Será admitido que o material é elástico linear, homogêneo e isotrópico.

A figura 3.2 mostra um elemento de comprimento dx extraído da barra representada na figura 3.1.



De acordo com a figura (3.2) observa-se que, após a ação do momento torçor, o ponto b passa a ocupar a posição b' e terá se transladado de um ângulo $d\phi$. A respeito do ângulo γ pode-se dizer que:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (3.1)$$

ou, com a hipótese de pequenas deformações, a tangente do ângulo se confunde com o próprio ângulo.

$$\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (3.2)$$

O valor bb' corresponde ao comprimento de um arco de raio ρ e ângulo $d\phi$, logo:

$$bb' = \rho d\phi \quad (3.3)$$

Sabendo-se que a distância ab é igual a dx , e substituindo-se o valor de bb' dado por (3.3) em (3.2) chega-se:

$$\gamma = \frac{\rho d\phi}{dx} \quad (3.4)$$

ou

$$\gamma = \rho \phi' \quad (3.5)$$

Sendo o cisalhamento a única tensão atuante e o material elástico linear, tem-se:

$$\tau = G \gamma \quad (3.6)$$

ou, utilizando-se a relação (3.5)

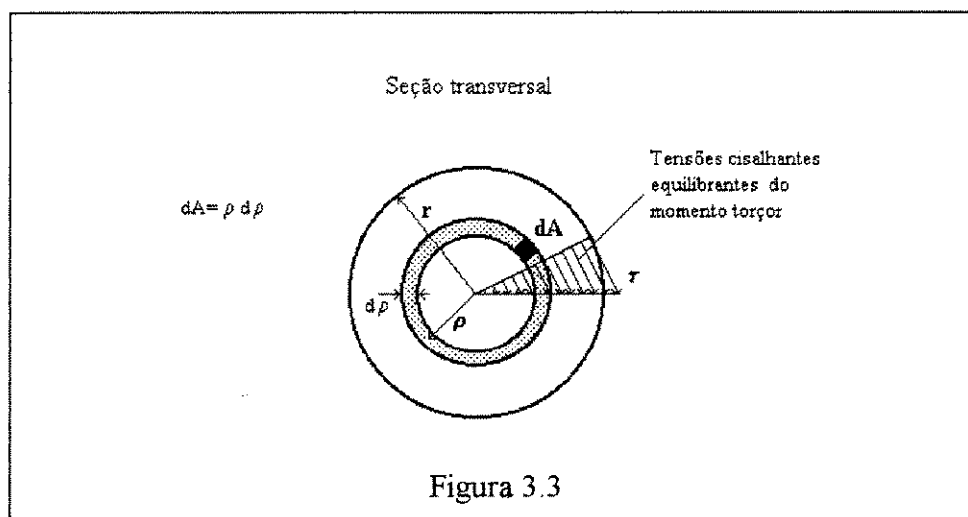
$$\tau = G \rho \phi' \quad (3.7)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal.

Na torção pura a rotação unitária ϕ' é constante, logo, de acordo com (3.7), as tensões cisalhantes τ são diretamente proporcionais ao comprimento do raio.

De acordo com a figura (3.3) pode-se dizer que o momento das tensões cisalhantes em relação ao eixo axial deve ser igual ao momento torçor T . Analisando-se uma parcela de área dA da seção transversal pode-se afirmar que a força cisalhante resultante da atuação de τ em dA é τdA , e a correspondente parcela de momento torçor causado por esta força em relação ao eixo da barra será

$$dT = \rho \tau dA \quad (3.8)$$



Substituindo na equação (3.8) o valor de τ da equação (3.7) e procedendo-se a integração chega-se a seguinte expressão:

$$T = \int_0^r G\phi' \rho^2 dA \quad (3.9)$$

ou

$$T = G\phi' \int_0^r \rho^2 dA \quad (3.10)$$

O momento polar de inércia J_t da seção circular é definido por:

$$J_t = \int \rho^2 dA \quad (3.11)$$

Substituindo a definição de J_t apresentada em (3.11) na equação (3.10), obtém-se:

$$T = G\phi' J_t \quad (3.12)$$

ou

$$\phi' = \frac{T}{GJ_t} \quad (3.13)$$

A equação (3.13) relaciona o momento torçor T e o ângulo de rotação ϕ' através de GJ_t , chamado produto de rigidez à torção da barra. Integrando-se a equação (3.13) ao longo de todo comprimento da barra obtém-se o giro total. Logo, para uma barra de comprimento L o ângulo total de giro será:

$$\phi = \frac{T L}{G J_t} \quad (3.14)$$

A partir da equação (3.7) obtém-se uma expressão para ϕ' , substituindo esta expressão na equação (3.13), chega-se:

$$\frac{\tau}{G\rho} = \frac{T}{GJ_t} \quad (3.15)$$

ou

$$\tau = \frac{T\rho}{J_t} \quad (3.16)$$

A equação (3.16) representa, em uma seção transversal da barra, o valor da tensão de cisalhamento devido à torção livre, a uma distância ρ do C.G. da seção. Verifica-se, desta maneira, que a tensão de cisalhamento devido à torção livre aumenta linearmente do centro para a borda da seção transversal, onde a tensão será máxima.

3.1.1. ANALOGIA DE PRANDTL

A analogia de Prandtl ou analogia de membrana estabelece certas relações entre a superfície elástica de uma membrana uniformemente carregada e a distribuição de tensões de cisalhamento numa barra solicitada à torção. Seja uma membrana homogênea, com o mesmo contorno da seção transversal do elemento sujeito à torção, solicitada por tração uniforme nos bordos e por pressão distribuída na superfície. Pode-se mostrar que a equação diferencial da superfície elástica desta membrana tem a mesma forma da equação que determina a distribuição de tensões ao longo da seção transversal da barra solicitada à torção livre [14]. Se S for a força de tração por unidade de comprimento na linha de contorno da membrana, q a pressão por unidade de área e ϕ o ângulo de torção por unidade de comprimento da barra, as duas equações mencionadas acima serão idênticas se:

$$\frac{q}{S} = 2G\phi \quad (3.17)$$

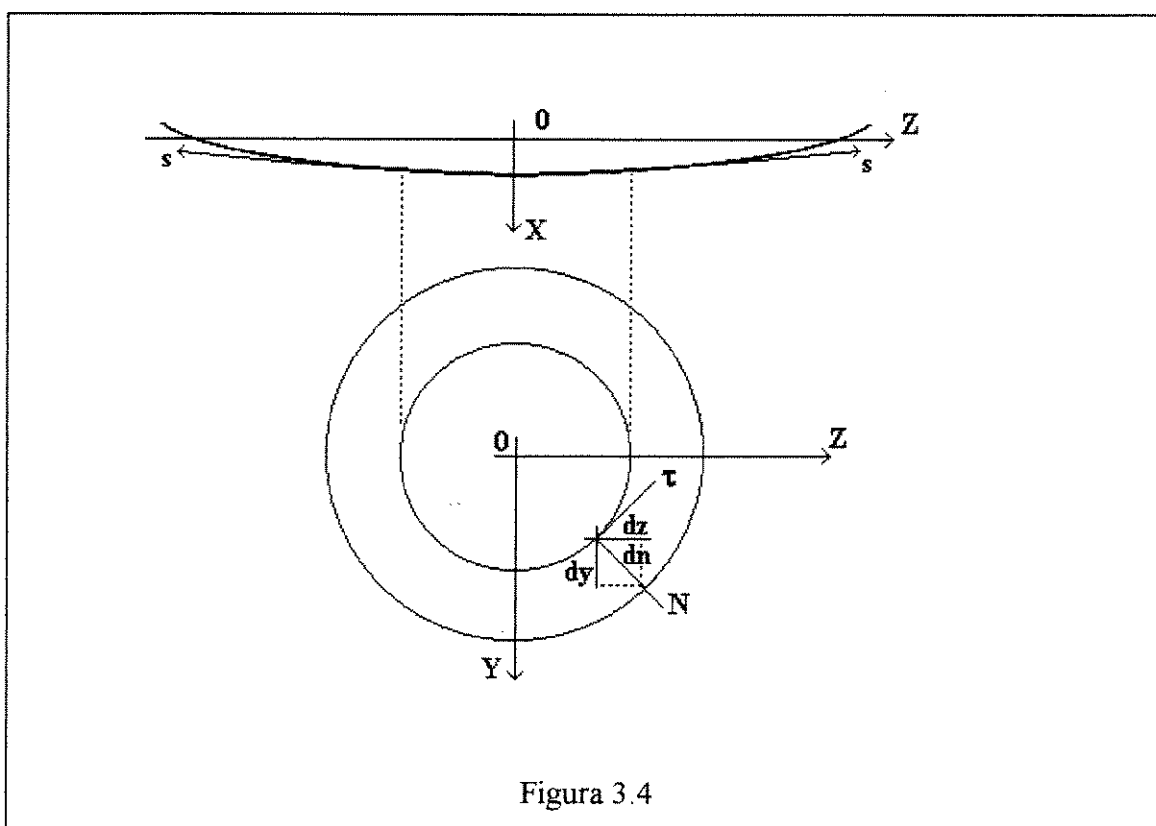
Sendo esta condição satisfeita, tem-se as seguintes relações entre a superfície da membrana e a distribuição das tensões de cisalhamento na torção:

- A tangente à linha de contorno, em qualquer ponto da membrana deformada, fornece a direção da tensão de cisalhamento no ponto correspondente da seção transversal da barra solicitada à torção.

- O deslocamento angular máximo da membrana, em qualquer ponto, é igual ao módulo da tensão de cisalhamento no ponto correspondente da barra solicitada à torção.

- O dobro do volume compreendido entre a superfície da membrana deformada e o plano que passa pelo seu contorno, é igual ao momento de torção da barra.

Estas relações podem ser mostradas de maneira imediata no caso de uma barra circular.



Supondo a membrana circular apresentada na figura (3.4), uniformemente solicitada à tração pelas forças S e solicitada por uma pressão uniforme q . Considerando-se uma parte concêntrica da membrana de raio r , observa-se que a

pressão total nessa parte é $\pi r^2 q$. Esta pressão é equilibrada pelas forças de tração S , distribuídas uniformemente ao longo de uma circunferência de raio r , e tendo como direção a tangente à membrana deformada. Representando por u os deslocamentos da membrana normais ao seu plano, obtém-se:

$$\pi r^2 q = -2 \pi r S \frac{du}{dr} \quad (3.18)$$

logo,

$$-\frac{du}{dr} = \frac{qr}{2S} \quad (3.19)$$

Substituindo na equação (3.15) q/S pelo valor apresentado na equação (3.17), obtém-se:

$$-\frac{du}{dr} = G \phi r \quad (3.20)$$

No segundo membro desta equação encontra-se a expressão conhecida da tensão de cisalhamento devido à torção livre de um eixo circular. Portanto, o deslocamento angular da membrana deformada fornece a grandeza procurada desta tensão de cisalhamento. O deslocamento angular máximo da membrana, em cada ponto, manifesta-se na direção do meridiano. Para uma membrana circular a tensão de cisalhamento, em cada ponto, tem como direção a perpendicular ao raio, pois as tangentes às linhas de contorno fornecem esta direção. Esta conclusão coincide com o resultado da teoria elementar da torção. Para determinar o momento de torção que produz as tensões dadas pela equação (3.20), calcula-se o volume compreendido entre a membrana deformada e o plano que passa pelo contorno AB. A integração da equação (3.20) fornece a superfície elástica da membrana:

$$u = \frac{G\phi}{2} (a^2 - r^2) \quad (3.21)$$

e o volume procurado é

$$V = \int_0^a 2 \pi r u \, dr$$

$$V = G \phi \frac{\pi a^4}{4} \quad (3.22)$$

Comparando esta expressão com a fórmula usual do momento de torção, conclui-se que, na analogia de membrana, o dobro do volume fornece a grandeza do momento de torção.

3.1.2. SEÇÕES ABERTAS DE PAREDES DELGADAS

As expressões aproximadas para a distribuição das tensões de cisalhamento e o giro para uma barra de seção delgada aberta são obtidas, a partir das expressões utilizadas para aplicação da analogia de membrana a uma seção retangular estreita [24].

Neste caso, as hipóteses serão análogas às aquelas de torção de barras com seção cheia, não se considerando o surgimento de tensões axiais na barra devido ao empenamento da seção, visto que, a analogia refere-se à torção livre. (sem empenamento). A parcela de torção com empenamento, característica das barras de seção delgada aberta, trata-se no item 3.2. (Teoria de Flexo-Torção).

As barras de seção delgada aberta resistem à torção como uma seção retangular estreita e as tensões de cisalhamento devem ser determinadas substituindo-se a altura b da seção retangular pelo comprimento da linha de esqueleto da seção delgada aberta.

Aplicando-se a analogia de membrana para estes tipos de seções transversais onde a altura b excede em muito a espessura t , a influência dos lados menores na forma da membrana ocorre somente até uma distância deste lado, na ordem de grandeza t . Desprezando estas regiões de extremidade, pode-se admitir a deformação da membrana como parabólica ao longo dos lados maiores. (figura 3.5).

ou

$$\tau_{\max} = t G \varphi \quad (3.26)$$

O momento de torção correspondente é o dobro do volume compreendido pela membrana. Desprezando o efeito dos lados menores do retângulo sobre a deformação da membrana e calculando o volume como se fôsse um parabolóide de comprimento b , tem-se:

$$T_L = 2 \frac{2}{3} u b t \quad (3.27)$$

Substituindo-se (3.24) em (3.27):

$$T_L = \frac{1}{3} b t^3 G \varphi \quad (3.28)$$

Onde:

$$\varphi = \frac{T_L}{\frac{1}{3} b t^3 G} \quad (3.29)$$

Substituindo-se (3.29) na equação (3.26), obtém-se:

$$\tau_{\max} = \frac{T_L}{\frac{1}{3} b t^2} \quad (3.30)$$

As expressões (3.29) e (3.30) coincidem com as fórmulas para torção livre de barras de seção delgada desenvolvidas em [24], mostrando desta maneira a validade da analogia de membrana para barras com este formato de seção transversal.

3.2. TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

No item 3.1. apresentou-se um resumo da teoria de torção livre, no qual foi assumido a existência de um momento torçor aplicado nas extremidades de uma barra cujas seções transversais estavam livres para empenar. Sob tais condições, o empenamento é o mesmo ao longo do comprimento e ocorre sem que surjam tensões axiais. Este é o caso em que a torção é constante ao longo da barra.

Nos casos em que o momento torçor não é constante, ou ocorra o impedimento ao empenamento em alguma seção transversal, tem-se a situação de torção não-uniforme. Estes casos podem ser visualizados através das figuras 3.6A e 3.6B. Em tais situações o empenamento irá variar ao longo do comprimento e ocorrerão tensões de compressão ou tração nas fibras longitudinais. Consequentemente, a variação do ângulo de giro ϕ das seções transversais não mais será constante mas, variável ao longo do eixo da barra.

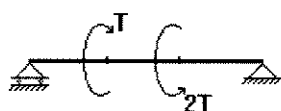


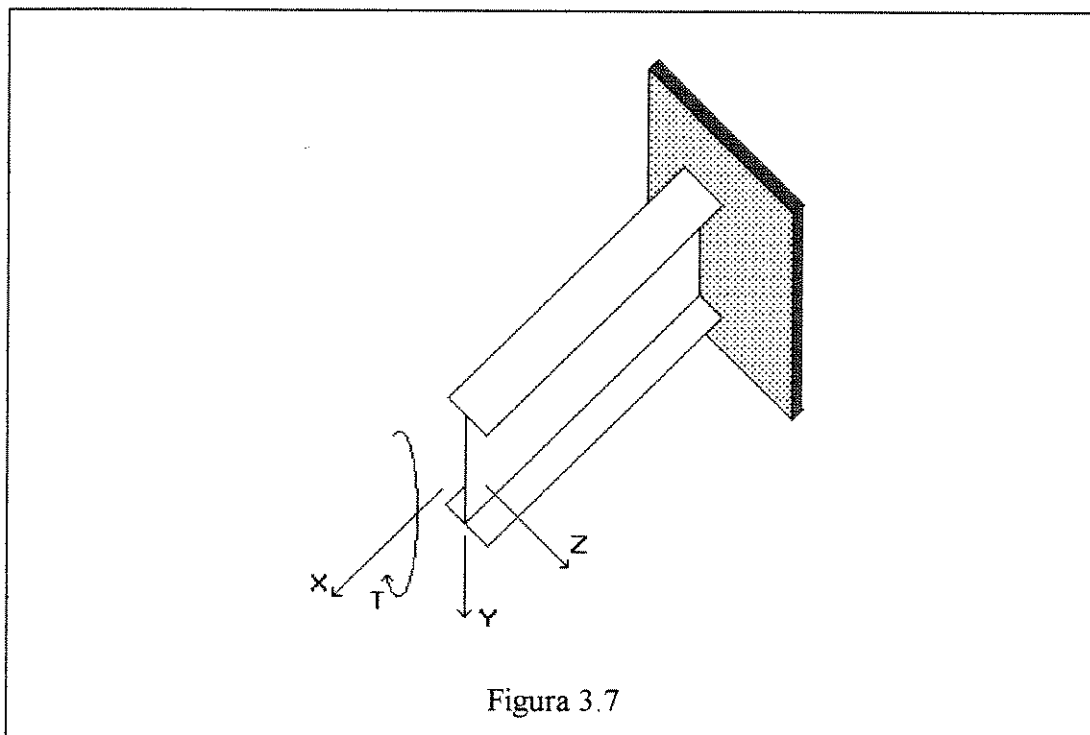
FIG. 3.6A) Variação no módulo do momento torçor ao longo da barra.



FIG. 3.6B) Impedimento de empenamento da seção na região do engaste.

O efeito de flexo-torção ocorre com maior intensidade nas barras de seção delgada aberta, podendo citar, como exemplo, o caso de uma viga I simétrica (Fig. 3.7) rigidamente engastada em uma das extremidades e livre na outra. Aplicando-se um momento torçor T na extremidade livre, onde a seção transversal da barra caracteriza-se por total liberdade para empenar, ocorre um deslocamento longitudinal das mesas. No entanto, na extremidade engastada os deslocamentos estão impedidos, a seção transversal está restringida ao empenamento e o deslocamento longitudinal das mesas é zero. Assim a medida que se analisam as seções mais próximas ao engaste ocorre uma maior rigidez ao empenamento. Esta situação reflete-se em uma

deformação longitudinal não uniforme das mesas da viga e consequentemente, o surgimento de tensões axiais nestas. Nos casos de torção não-uniforme, pode-se dividir o momento torçor T em duas parcelas denominadas T_l e T_{ft} . A parcela T_l é devido aos efeitos de torção livre e T_{ft} devido aos efeitos de flexo-torção.



A partir da seção transversal apresentada na fig. 3.8 serão feitas as seguintes considerações:

X , Y e Z são eixos que passam pelo centro de gravidade da seção (CG).

A linha de esqueleto é representada por uma linha tracejada equidistante dos bordos das paredes da seção.

s é uma ordenada ao longo da linha de esqueleto.

t é a espessura da parede.

D é o centro de torção.

CG é o centro de gravidade.

ϕ é o giro da seção transversal.

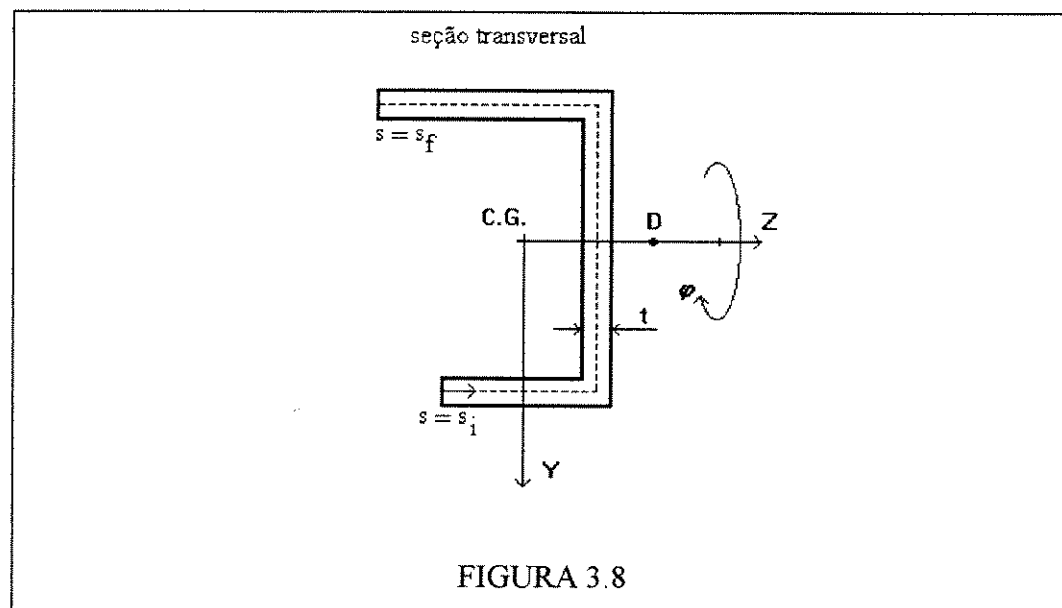


FIGURA 3.8

As seguintes hipóteses serão admitidas para a teoria de flexo-torção:

- Deve-se abandonar a hipótese de as seções permanecerem planas, as seções transversais estão sujeitas ao empenamento.

- A barra é constituída de um número finito de placas delgadas e estreitas, planas ou curvilíneas. Supõe-se que a ligação entre estas placas ao longo das arestas seja rígida e de tal modo que o deslocamento relativo entre placas seja impedido.

Sendo t_m o maior valor de espessura da seção, d uma dimensão característica da seção transversal e ℓ o comprimento da barra, são admitidas as seguintes relações para as dimensões do perfil:

$$\frac{t_m}{d} \leq 0,1 \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{\ell} \leq 0,1 \quad (3.32)$$

- A seção transversal é constante ao longo da barra, mas a espessura pode variar ao longo da linha de esqueleto.

- A seção é rígida em seu plano.

As características geométricas da seção transversal em questão, de acordo com a resistência dos materiais, são:

- Momentos estáticos

$$S_z = \int_{s1}^s y \, dA \quad (3.33)$$

$$S_y = \int_{s1}^s z \, dA \quad (3.34)$$

- Momentos de inércia

$$J_y = \int_A z^2 \, dA \quad (3.35)$$

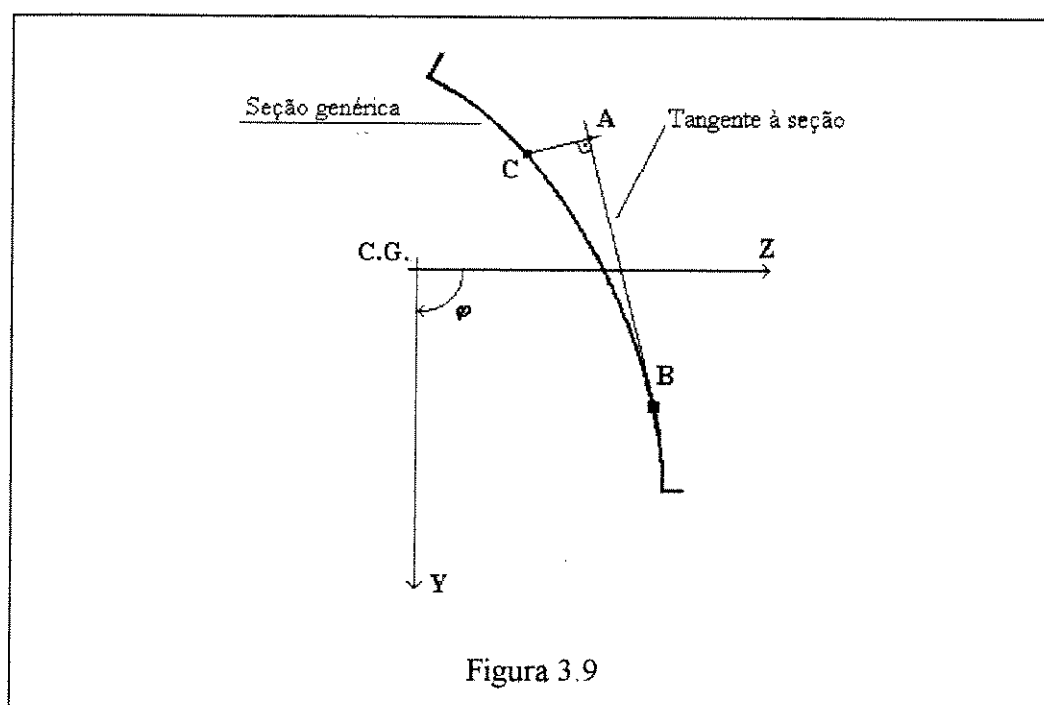
$$J_z = \int_A y^2 \, dA \quad (3.36)$$

- Momento centrífugo

$$J_{yz} = \int_A yz \, dA \quad (3.37)$$

Além destas características geométricas, a teoria de flexo-torção define outras que estão ligadas ao conceito de superfície setorial, desenvolvidas em [6] e apresentadas em [1].

Para este fim, seja a fig. 3.9 onde é mostrada a seção transversal de uma barra de seção delgada:



Arbitrando-se um ponto C na linha de esqueleto, ao qual serão referenciadas as áreas setoriais de pontos da seção, e um ponto genérico B no qual se deseja conhecer o valor da área setorial; pode-se traçar uma reta passando pelo ponto C perpendicular à reta tangente à linha de esqueleto no ponto B , o ponto de encontro destas retas será A . Desta maneira pode-se definir a área setorial em B , com relação ao ponto C , como o produto da medida CA pela medida BA . A área setorial será representada pela letra ω e é o dobro da área do setor. A área setorial pode ser calculada em todos pontos da seção, levando a um diagrama de área setorial em relação ao ponto arbitrado. A partir do diagrama de área setorial, podem-se encontrar as seguintes características geométricas em relação a um ponto escolhido.

- Momento setorial estático.

$$S_{\omega} = \int_{s1}^s \omega \, dA \quad (3.38)$$

- Momento setorial de inércia.

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA \quad (3.39)$$

- Momentos setoriais centrais de inércia.

$$J_{\omega z} = \int_A \omega z \, dA \quad (3.40)$$

$$J_{\omega y} = \int_A \omega y \, dA \quad (3.41)$$

Com referência às expressões de (3.33) a (3.41), tem-se:

- Quando os eixos Z e Y tem origem no centro de gravidade da seção, as expressões (3.33) e (3.34) são nulas para toda a área da seção transversal.

- Se os eixos coordenados Y e Z forem principais de inércia, a expressão (3.37) se anula.

- O momento setorial estático, (3.38), deve ser nulo quando integrado em toda seção transversal, mediante conveniente escolha de origem para a ordenada s .

- Existe um ponto, chamado polo das superfícies setoriais, que satisfaz a condição dos momentos setoriais centrais de inércia (3.40) e (3.41) serem nulos. Para o cálculo das coordenadas do pólo das superfícies setoriais arbitra-se um ponto C em

uma posição da linha de esqueleto com coordenadas y_c e z_c em relação ao centro de gravidade da seção. As características geométricas $J_{\omega y}$ e $J_{\omega z}$ devem ser calculadas com relação ao ponto C arbitrado. A partir dos valores de características geométricas calculados para o ponto arbitrado C , as coordenadas do polo D das superfícies setoriais podem ser obtidas de acordo com as seguintes equações.

$$y = y_c - \frac{1}{J_y} J_{\omega z} \quad (3.42)$$

$$z = z_c - \frac{1}{J_z} J_{\omega y} \quad (3.43)$$

No que se refere às tensões atuantes é que surge a diferença entre a teoria de Vlassov [6] e a teoria de torção livre de Saint-Venant [13] pois, na torção livre devido a hipótese de deslocamento uniforme das seções transversais, as tensões resultantes são apenas tangenciais ou seja, o equilíbrio de um elemento infinitesimal longitudinal é feito somente a partir das tensões de cisalhamento nele atuantes. Na flexo-torção, as tensões de cisalhamento não são suficientes para o equilíbrio deste elemento infinitesimal, o que leva ao aparecimento de tensões normais, mesmo que somente cargas torçoras estejam atuando externamente.

A parcela de torção livre para seções delgadas, de acordo com a analogia de membrana, mostra que a tensão cisalhante é dada pela seguinte expressão:

$$\tau_\ell = 2 \frac{T_\ell}{J_t} C_R \quad (3.44)$$

Onde:

C_R é uma ordenada perpendicular ao esqueleto com origem nele.

J_t é o momento de inércia a torção.

T_ℓ é o momento de torção livre, e tem a seguinte relação com o ângulo de giro φ .

$$T_\ell = G J_t \varphi' \quad (3.45)$$

Onde:

G é o módulo de elasticidade transversal.

Seja a expressão que representa o deslocamento de um ponto na linha de esqueleto da seção transversal, conforme apresentado em [1].

$$u(x, s) = g(x) - w'(x)z(s) - v'(x)y(s) - \varphi'(x)\omega(s) \quad (3.46)$$

Admitindo-se a teoria de pequenas deformações e considerando-se tração como positiva, a tensão normal atuante é dada por:

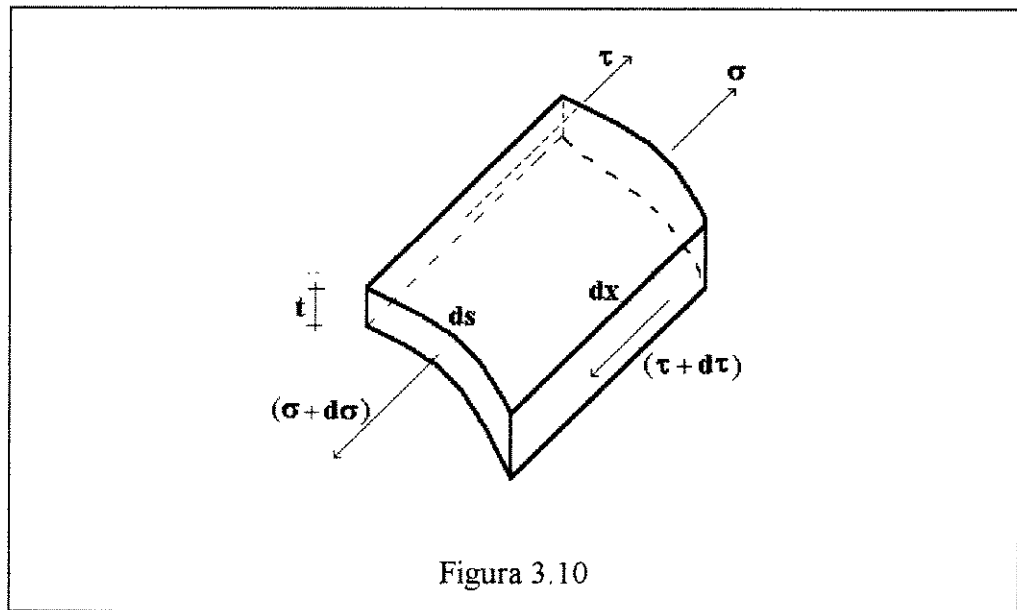
$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.47)$$

onde E representa o módulo de elasticidade longitudinal.

Diferenciando a expressão (3.46) com relação a x e colocando o resultado na expressão (3.47), tem-se:

$$\sigma = E[g''(x) - w''(x)z(s) - v''(x)y(s) - \varphi''(x)\omega(s)] \quad (3.48)$$

A existência de tensões normais, leva à ocorrência de tensões cisalhantes. Procedendo-se o equilíbrio destas tensões normais para o elemento infinitesimal da figura 3.10, obtém-se τ em função de σ .



Admitindo-se que no elemento infinitesimal da figura 3.10 a força volumétrica seja nula, tem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial(\sigma t)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} = 0 \quad (3.49)$$

A expressão da tensão cisalhante atuando na espessura δ é dada por:

$$\tau(x, s) = \frac{1}{t} \left[- \int_{s_l}^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} t \, ds \right] \quad (3.50)$$

Substituindo-se na equação (3.50), σ pela relação (3.48) e fazendo-se as operações necessárias, resulta a seguinte expressão para $\tau(x, s)$:

$$\tau(x, s) = - \frac{E}{t} \left[g''(x) A(s) - w'''(x) S_y(s) - v'''(x) S_z(s) - \varphi'''(x) S_\omega(s) \right] \quad (3.51)$$

onde

$A(s)$ é a área da parte da seção compreendida entre as coordenadas s_l e s_f (figura 3.7)

$S_y(s)$, $S_z(s)$ e $S_\omega(s)$ são os momentos estáticos do ponto s da seção.

De acordo com a resistência dos materiais os esforços solicitantes têm as seguintes definições:

- Força normal (positiva quando de tração)

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad (3.52)$$

- Momentos fletores

$$M_z = \int_A \sigma y \, dA \quad (3.53)$$

$$M_y = - \int_A \sigma z \, dA \quad (3.54)$$

- Forças cortantes

$$Q_z = \int_A (\tau t) \, dz \quad (3.55)$$

$$Q_y = \int_A (\tau t) \, dy \quad (3.56)$$

De maneira análoga a estas definições, Vlassov [6] introduziu:

- Bimomento

$$B = \int_A \sigma \omega \, dA \quad (3.57)$$

- Momento de flexo-torção

$$T_{ft} = \int_A \tau t \, d\omega \quad (3.58)$$

Utilizando nestas definições as expressões de σ e τ dadas por (3.48) e (3.51), respectivamente, obtém-se as seguintes relações:

$$N = E A g'(x) \quad (3.59)$$

$$M_y = - E J_y w_E''(x) \quad (3.60)$$

$$M_z = E J_z v_E''(x) \quad (3.61)$$

$$Q_z = - E J_y w_E'''(x) \quad (3.62)$$

$$Q_y = - E J_z v_E'''(x) \quad (3.63)$$

$$B = - E J_\omega \phi''(x) \quad (3.64)$$

$$T_{ft} = - E J_\omega \phi'''(x) \quad (3.65)$$

Onde g' , w'' , v'' , w''' , v''' são as derivadas em relação a x das funções dos deslocamentos, nas direções dos eixos X , Y , Z , em pontos da seção transversal.

As expressões das tensões normais e tangenciais devido a flexão e a torção podem ser colocadas em função dos esforços solicitantes, na seguinte forma:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (3.66)$$

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_z}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_z} S_z(s) + \frac{T_{ft}}{J_\omega} S_\omega(s) \right] \quad (3.67)$$

À tensão cisalhante dada pela expressão (3.67), deve ser acrescida a distribuição de tensões cisalhantes da torção livre dada pela expressão (3.44). Tem-se desta maneira a distribuição de tensões na espessura.

De acordo com a teoria de Vlassov [6], a torção de uma barra é composta por duas parcelas, a de torção livre T_l , caracterizada pela torção com empenamento livre ou seja sem aparecimento de tensões normais e a de flexo-torção T_{ft} , caracterizada pelo aparecimento de tensões normais nas seções transversais da barra. A expressão (3.68) representa a torção total T_t atuante.

$$T_t = T_l + T_{ft} \quad (3.68)$$

Utilizando as expressões (3.45) e (3.65) em (3.68), obtém-se:

$$T_t = G J_t \varphi'(x) - E J_\omega \varphi'''(x) \quad (3.69)$$

A equação (3.69) é a equação clássica da flexo-torção.

Admitindo-se:

$$K = \sqrt{\frac{E J_\omega}{G J_t}} \quad (3.70)$$

Resolvendo a equação (3.69) chega-se a solução geral, dada por:

$$B = C_1 \sinh\left(\frac{x}{K}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{x}{K}\right) + K^2 m \quad (3.71)$$

Onde:

m é o momento de torção uniformemente distribuído ao longo de x .

C_1 e C_2 são constantes a determinar de acordo com as condições de contorno da barra.

Sabe-se que:

Para extremidade livre (vínculo de garfo)

$$\varphi(x) = 0$$

$\varphi'(x)$ é desconhecido

$$\varphi''(x) = 0 \quad \text{(quando não existe bimomento aplicado)}$$

Para extremidade engastada

$$\varphi(x) = 0$$

$$\varphi'(x) = 0$$

Para extremidade com carga aplicada

$$E J_\omega \varphi''(x) = \sum_i^n P_i \omega_i$$

onde P_i são as cargas aplicadas em pontos de área setorial ω_i .

4. O EFEITO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA:

Seja um elemento de barra de comprimento L e área A , sujeito a uma força de tração F .

De acordo com a lei de Hooke :

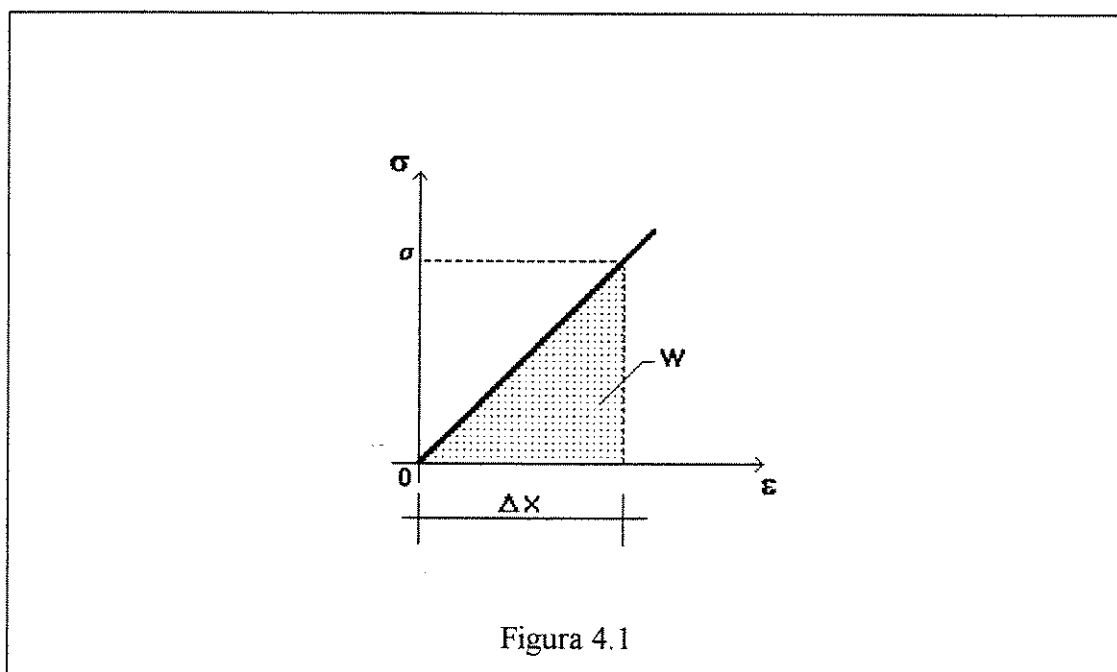
$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.1)$$

onde:

σ é a tensão normal atuante na barra

E é o módulo de elasticidade longitudinal.

ε é a deformação longitudinal.



O produto de uma força atuante em um corpo pelo deslocamento causado por esta mesma força, representa o trabalho realizado. A figura 4.1 representa o gráfico tensão-deformação do material utilizado neste estudo, o qual é elástico linear. A área hachurada indica o trabalho de deformação produzido pela força F .

Logo, o trabalho por unidade de volume é:

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (4.2)$$

Se considerarmos um elemento infinitesimal da barra, tem-se:

$$dW = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \, dx \, dy \, dz \quad (4.3)$$

Generalizando-se para um elemento infinitesimal de volume $dx \, dy \, dz$, sob ação de tensões normais e cisalhantes, a expressão do trabalho será representada por:

$$dW = \frac{1}{2} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) dx \, dy \, dz \quad (4.4)$$

onde:

σ_i é a tensão normal na direção i

ε_i é a deformação normal na direção de σ_i

τ_{ij} é a tensão cisalhante atuando no plano perpendicular a i e na direção de j .

γ_{ij} é a deformação de distorção correspondente a τ_{ij} .

Em uma estrutura, o trabalho total realizado é composto pela soma do trabalho na deformação, executado pelos esforços internos, e o trabalho das forças externas, ou seja:

$$W = W_i + W_e \quad (4.5)$$

A expressão (4.5) pode ser escrita utilizando o conceito de energia potencial, pois, a energia potencial dos esforços internos, ou energia de deformação, acrescida à energia potencial das forças externas, ou apenas energia potencial, resulta na energia potencial total da estrutura, (eq. 4.6).

$$\pi = U + V \quad (4.6)$$

onde:

U representa a energia de deformação

V representa a energia potencial das forças externas.

No que se refere ao estudo da estabilidade de uma estrutura, algumas formas de equilíbrio devem ser analisadas.

Seja a barra apresentada na figura 4.2, indeformável e presa em sua extremidade a uma mola de constante elástica K .

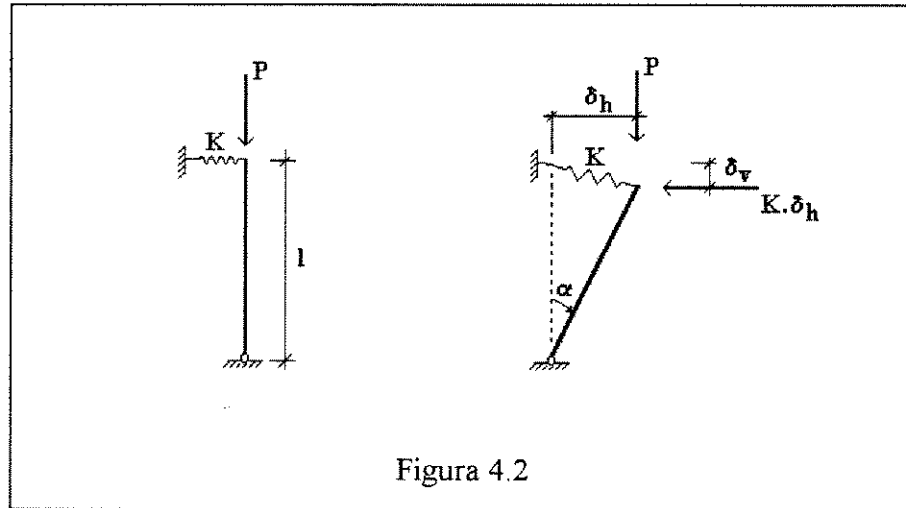


Figura 4.2

Assume-se que os deslocamentos são muito pequenos, podendo-se linearizar o seno do ângulo α com o próprio ângulo. Desta maneira, pode-se dizer que os valores de δ_h e δ_v são dados por:

$$\delta_h = L\alpha \quad (4.7)$$

e

$$\delta_v = \frac{L\alpha^2}{2} \quad (4.8)$$

A energia de deformação da mola vale:

$$U = \frac{1}{2} K L^2 \alpha^2 \quad (4.9)$$

E a energia potencial da carga externa P (adotando como referencial o nível da posição inicial da carga) vale:

$$V = -\frac{P L \alpha^2}{2} \quad (4.10)$$

A energia potencial total (π), do sistema, de acordo com (4.6) será dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} L \alpha^2 (K L - P) \quad (4.11)$$

A energia potencial total é extrema quando:

$$\frac{d\pi}{d\alpha} = 0 \quad (4.12)$$

ou seja,

$$L \alpha (K L - P) = 0 \quad (4.13)$$

Na expressão (4.13) para que a igualdade torne-se verdadeira as seguintes situações podem ocorrer:

$$\alpha = 0 \quad (4.14)$$

ou

$$K L - P = 0 \quad (4.15)$$

Como admitiu-se um pequeno deslocamento na barra, a condição (4.14) está descartada, restando a expressão (4.15). Ou seja:

$$P = K L \quad (4.16)$$

Fazendo-se o estudo da segunda derivada da energia potencial total tem-se o tipo de equilíbrio da barra, logo:

$$\frac{d^2 \pi}{d\alpha^2} = K L^2 - P L \quad (4.17)$$

Para o valor de P apresentado em (4.16) tem-se um valor zero para a segunda derivada (eq.4.17). Portanto pode-se dizer que o equilíbrio é indiferente ou a energia potencial é estacionária.

O valor de P apresentado em (4.16) é chamado de crítico e provoca mudança no tipo de equilíbrio da barra. Para valores de P abaixo do crítico, a segunda derivada é positiva e a energia potencial passa por um mínimo ou seja, é a condição de equilíbrio estável (eq. 4.18).

$$\frac{d^2 \pi}{d\alpha^2} > 0 \quad (4.18)$$

Pode-se concluir que no equilíbrio estável a estrutura assume uma posição de mínima energia potencial, e mesmo sofrendo uma pequena perturbação em sua posição inicial, ela tende a retornar à posição de equilíbrio. No caso de equilíbrio instável, a estrutura quando perturbada não retorna à posição inicial.

Com base nos conceitos de equilíbrio apresentados verificam-se duas situações de carregamento axial atuando na barra que podem alterar o equilíbrio da mesma ou seja, carregamentos centrados e excêntricos.

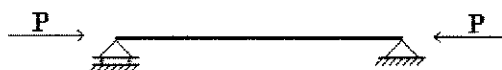


Figura 4.3

Na figura 4.3 tem-se uma carga P aplicada no C.G., e inicialmente a barra possui equilíbrio estável. Gradativamente aumenta-se a carga P até um valor P_{crit} chamado de carga crítica, para o qual a barra quando deslocada de sua posição inicial assume grandes deslocamentos. Esta situação caracteriza um problema de primeira espécie onde, para valores abaixo da carga crítica a estrutura quando deslocada retorna a sua posição inicial. Ao ser atingida a carga crítica, a teoria de primeira ordem, ou o tratamento do equilíbrio na posição indeslocada, deixa de ser válida. É necessário o uso de teorias que consideram o efeito da posição deslocada no equilíbrio.

A análise do equilíbrio na posição deslocada revela um comportamento chamado bifurcação do equilíbrio, onde ocorrem dois caminhos possíveis, 'a' e 'b', para os deslocamentos, como mostra a figura 4.4.

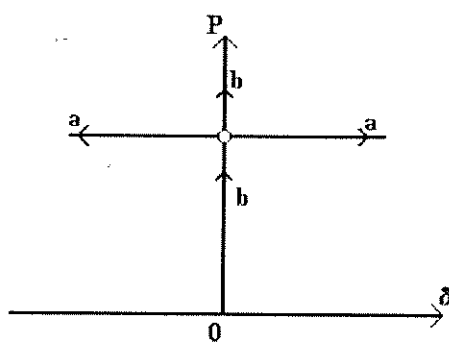


Figura 4.4

No caso da fig. 4.5 tem-se uma carga P sendo aplicada com excentricidade ' e ' em relação ao C.G. Nesta situação, desde o início do carregamento a barra possui um equilíbrio estável na posição deformada e teoricamente este equilíbrio pode manter-se indefinidamente desde que o material siga também indefinidamente a lei de Hooke.

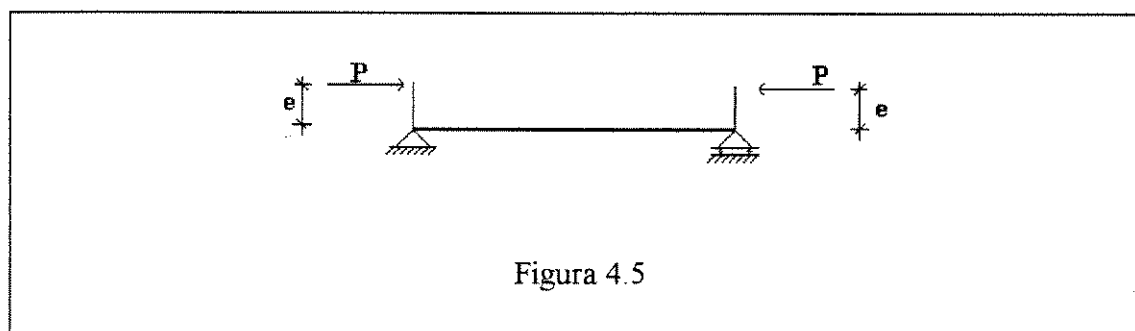


Figura 4.5

Este é um problema de segunda espécie, no qual o carregamento último é definido como aquele que permite grandes variações de deslocamento para variações tão pequenas quanto se queira do carregamento.

4.1. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO:

Nas barras que terão sua estabilidade estudada segundo a teoria de Vlasov [6], as tensões internas consideradas são a tensão normal σ e as tensões cisalhantes τ_ℓ devido à torção livre. A energia de deformação, segundo a expressão (4.4) para estas tensões internas é dada por:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma \varepsilon + \tau_\ell \gamma_\ell) dx dy dz \quad (4.19)$$

Para um material homogêneo isotrópico, em regime elástico linear, as relações constitutivas utilizadas em [1] são:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.20)$$

e

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.21)$$

O uso das relações constitutivas na expressão (4.19) leva à seguinte expressão:

$$dU = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau_\ell^2}{G} \right) dx dy dz \quad (4.22)$$

Substituindo-se, na expressão (4.22), σ e τ_ℓ pelas expressões

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (4.23)$$

e

$$\tau_\ell = 2 \frac{T_\ell}{J_t} C_r \quad (4.24)$$

A expressão da energia de deformação da estrutura tem a seguinte forma:

$$U = \int_L \int_A \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \right)^2 + \frac{1}{G} \left(2 \frac{T_\ell}{J_t} C_r \right)^2 \right] dA dx \quad (4.25)$$

Desprezando a parcela de contribuição da deformação por força normal (N), em (4.25) por ser pequena frente às outras, tem-se:

$$U = \int_L \int_A \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(-\frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \right)^2 + \frac{1}{G} \left(2 \frac{T_\ell}{J_t} C_r \right)^2 \right] dA dx \quad (4.26)$$

Lembrando-se as condições de ortogonalidade apresentadas em [1] e que um diferencial de área pode ser colocado na forma:

$$dA = dc, ds \quad (4.27)$$

A expressão (4.26), quando integrada na seção transversal, torna-se:

$$U = \int_L \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{M_y^2}{J_y} + \frac{M_z^2}{J_z} + \frac{B^2}{J_\omega} \right) + \frac{1}{G} \left(\frac{T_\ell^2}{J_t} \right) \right] dx \quad (4.28)$$

A expressão (4.28) representa a energia de deformação colocada em função dos esforços produzidos na estrutura. Para colocar a energia de deformação em função dos deslocamentos v , w e ϕ , utilizam-se as seguintes relações:

$$M_y = -E J_y w_E''(x) \quad (4.29)$$

$$M_z = E J_z v_E''(x) \quad (4.30)$$

$$B = -E J_\omega \phi''(x) \quad (4.31)$$

$$\tau_\ell = 2 \frac{T_\ell}{J_t} C_r \quad (4.32)$$

De acordo com as hipóteses apresentadas, as barras analisadas são de seção constante e o polo das superfícies setoriais coincide com o centro de cisalhamento. Assim, a expressão da energia de deformação, colocada em função dos deslocamentos v , w e ϕ do centro de cisalhamento (D), é dada por:

$$U = \int_L \frac{1}{2} [EJ_z v_D''^2 + EJ_y w_D''^2 + EJ_\omega \phi_D''^2 + GJ_t \phi_D'^2] dx \quad (4.33)$$

4.2. ENERGIA POTENCIAL DAS TENSÕES DE PRIMEIRA NOS DESLOCAMENTOS DE SEGUNDA ORDEM:

A existência desta parcela fica evidenciada pelo exemplo a seguir.

Seja uma viga com carregamento no plano xy e que assume uma posição deformada com deslocamentos v_D , w_D e ϕ_D de uma seção genérica. Considerando-se as tensões referentes aos deslocamentos w_D e ϕ_D , produzidos pela instabilidade, como pequenas de primeira ordem, seus efeitos recíprocos são de segunda ordem e, portanto, negligenciáveis. Entretanto, as tensões produzidas pelo deslocamento v_D e dependentes do carregamento, terão seu trabalho na rotação de torção da seção não desprezível e portanto, a sua contribuição deverá ser levada em conta.

Com o carregamento sendo feito em dois planos, deve-se somar também o trabalho das tensões devido a w_D nas rotações à expressão final da energia de deformação.

Sendo assim, de acordo com [1] a parcela de energia a ser somada é dada como:

$$V^* = \int_L \int_A \left(\sigma \epsilon^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* \right) dA dx \quad (4.34)$$

Onde:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_y}{J_z} S_z(s) + \frac{Q_z}{J_y} S_y(s) \right] \sin \alpha(s) \quad (4.35)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_z}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_z} S_z(s) \right] \cos \alpha(s) \quad (4.36)$$

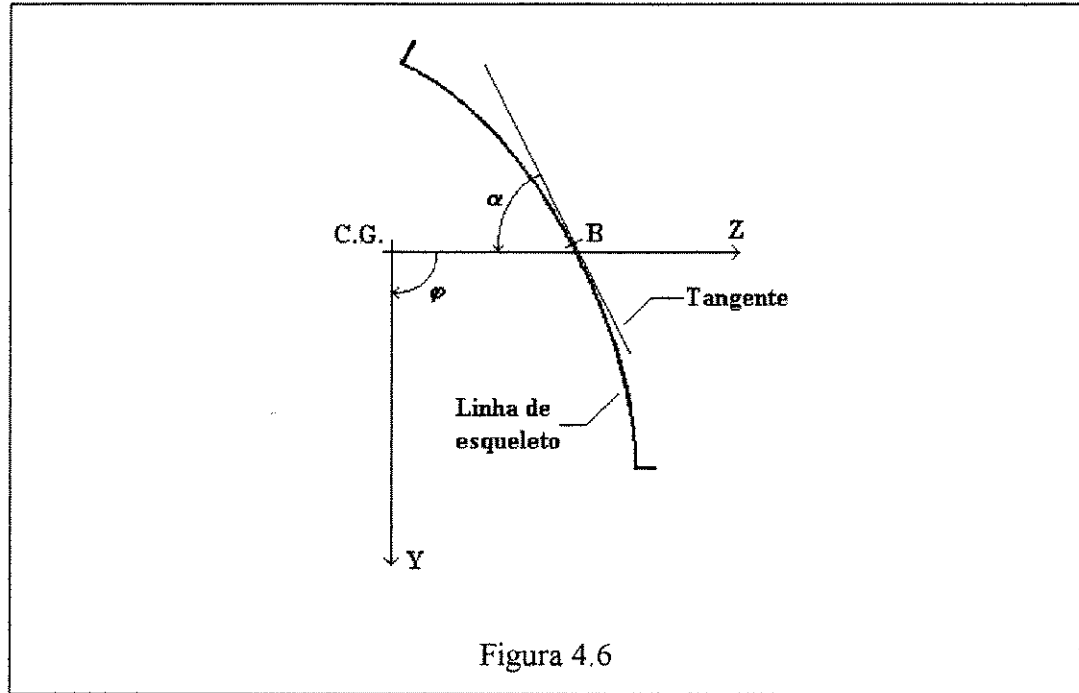
$\alpha(s)$ é o ângulo que a tangente da linha de esqueleto faz com o eixo z. (figura.

4.6). ϵ^* , γ_{xy}^* e γ_{xz}^* , são deformações de segunda ordem, dadas por:

$$\epsilon^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.37)$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.38)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.39)$$



Devido a instabilidade ocorrer com deslocamentos v, w e ϕ , a parcela referente ao deslocamento u , por ser pequena em relação as outras, pode ser retirada das expressões (4.37), (4.38) e (4.39). Resultam as seguintes expressões para ϵ^* , γ_{xy}^* e γ_{xz}^* :

$$\epsilon^* = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.40)$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.41)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.42)$$

4.2.1. ENERGIA POTENCIAL DA TENSÃO NORMAL

Quando o carregamento externo produzir momentos fletores de primeira ordem constantes ou nulos, com tensões cisalhantes de primeira ordem nulas, a energia potencial das tensões de primeira ordem nos deslocamentos de segunda ordem é

reduzida apenas a parcela de tensões normais. Assim, de acordo com [1], a energia potencial das tensões normais de primeira ordem tem a seguinte expressão:

$$V_1^* = \frac{1}{2} \int_L \left\{ N \left[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + 2(y_D w_D' - z_D v_D') \phi_D' \right] + \right. \\ \left. + 2M_z \left[(K_y - Y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D' \right] - 2M_y \left[(K_z - Z_D) \phi_D'^2 + \phi_D' v_D' \right] + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \phi_D'^2 \right\} dx \quad (4.43)$$

Onde:

i_D é o raio de giração polar em relação a um eixo passando pelo centro de flexão e com a definição

$$i_D^2 = y_D^2 + z_D^2 + \frac{J_y + J_z}{A} \quad (4.44)$$

K_y e K_z são as coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos y e z , respectivamente. Suas expressões são:

$$K_y = \frac{1}{2J_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA \quad (4.45)$$

$$K_z = \frac{1}{2J_y} \int_A z(y^2 + z^2) dA \quad (4.46)$$

U_ω - Vlassov [6] definiu esta nova característica, de mesma dimensão que o momento setorial de inércia, com a seguinte expressão:

$$U_\omega = \int_A \omega(y^2 + z^2) dA \quad (4.47)$$

4.2.2. ENERGIA POTENCIAL DAS TENSÕES CISALHANTES

Quando existem cargas transversais e conseqüentemente tensões cisalhantes, deve-se acrescentar esta parcela de energia à expressão (4.43). Para calcular a energia potencial das tensões cisalhantes nas rotações da seção transversal, despreza-se a contribuição da deformabilidade devido à cortante por ser pequena frente àquela do momento fletor relacionado. As expressões para γ_{xy}^* e γ_{xz}^* tornam-se:

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.48)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.49)$$

Assim, de [1], a energia potencial das tensões cisalhantes será representada pela expressão:

$$V_2^* = \int_L \left\{ M_z' \left[(y_C - y_D) \phi_D' \phi_D - \phi_D w_D' \right] - M_y' \left[(z_C - z_D) \phi_D' \phi_D + \phi_D v_D' \right] \right\} dx \quad \dots\dots\dots(4.50)$$

4.3. ENERGIA POTENCIAL DAS CARGAS TRANSVERSAIS

As cargas transversais são constituídas por:

- Forças distribuídas q_y e q_z e forças concentradas P_y e P_z , aplicadas nas direções y e z, respectivamente.
- Momentos M_{Ey} e M_{Ez} cujos planos de ação são perpendiculares aos eixos y e z, respectivamente.
- Momento de torção T e carga de torção distribuída m.
- Bimomento aplicado B_E .

A energia potencial de qualquer um dos carregamentos pode ser escrita, genericamente, como:

$$V_e = -F_a d_d \quad (4.51)$$

onde:

F_a é o carregamento aplicado

d_d é o deslocamento medido na direção e sentido deste carregamento externo.

A energia potencial das cargas transversais pode ser separada nas seguintes parcelas:

- Cargas concentradas P_y e P_z e cargas distribuídas q_y e q_z .

$$V_{e1} = -P_{yi} v_i - P_{zi} w_i - \int_L (q_y v_D + q_z w_D) dx \quad (4.52)$$

onde os deslocamentos são aqueles do centro de flexão.

- Momentos M_{Ey} e M_{Ez}

$$V_{e2} = -M_{Eyi} w'_i - M_{Ezi} v'_i \quad (4.53)$$

- Momento de torção concentrado T_t e carga de torção distribuída m .

$$V_{e3} = T_{ti} \phi_i + \int_L m \phi_D dx \quad (4.54)$$

A ausência do sinal negativo na expressão (4.54) é devida a convenção de cargas de torção e ângulo de rotação ϕ , positivos, ser contrária.

- Bimomento (B_E)

As tensões normais externas que representam o bimomento aplicado são distribuídas segundo a lei:

$$\sigma_e = \frac{B_{Ei}}{J_\omega} \omega \quad (4.55)$$

Sabendo-se que os deslocamentos dos pontos de aplicação destas tensões seguem a lei das superfícies setoriais, tem-se:

$$u_e = \phi'_i \omega \quad (4.56)$$

A energia potencial do bimomento aplicado será dada por:

$$V_{e4} = - \int_A \sigma_e u_e dA \quad (4.57)$$

Substituindo-se na expressão (4.57) σ_e e u_e pelas relações (4.55) e (4.56), respectivamente, e fazendo-se a integração, resulta:

$$V_{e4} = -B_{E_i} \phi'_i \quad (4.58)$$

A energia potencial das cargas externas, que é a soma das expressões (4.52), (4.53), (4.54) e (4.57), pode ser escrita, em sua forma completa, como:

$$\begin{aligned} V_e = & -\sum P_{y_i} v_i - \sum P_{z_i} w_i - \sum M_{E_{y_i}} w'_i - \sum M_{E_{z_i}} v'_i + \\ & + \sum T_i \phi_i + \sum B_{E_i} \phi'_i + \int_L (m \phi_D - q_y v_D - q_z w_D) dx \end{aligned} \quad (4.59)$$

4.4. ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Somando-se a energia de deformação (4.33) com a energia potencial das tensões de primeira ordem nos deslocamentos de segunda ordem, dada pelas parcelas (4.43) e (4.50), com a energia potencial das cargas transversais externas, dada por (4.59), obtém-se uma expressão da energia potencial total que, colocada na forma de um funcional, é do tipo:

$$\begin{aligned} \pi = & \int_L F(v_D, v'_D, v''_D, w_D, w'_D, w''_D, \phi_D, \phi'_D, \phi''_D) dx - \sum P_{y_i} v_i - \sum P_{z_i} w_i + \\ & - \sum M_{E_{y_i}} w'_i - \sum M_{E_{z_i}} v'_i + \sum T_i \phi_i - \sum B_{E_i} \phi'_i \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde:

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \left\{ EJ_z v_D'^2 + EJ_y w_D'^2 + EJ_\omega \phi_D'^2 + GJ_t \phi_D'^2 + N[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + \right. \\ & + 2(y_D w'_D - z_D v'_D) \phi'_D] + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \phi_D'^2 + 2M_z [(K_y - y_D) \phi'^2 - \phi'_D w'_D] + \\ & - 2M_y [(K_z - z_D) \phi_D'^2 + \phi'_D v'_D] + 2M'_z [(y_c - y_D) \phi'_D \phi_D - \phi_D w'_D] + \\ & \left. - 2M'_y [(z_c - z_D) \phi_D \phi'_D + \phi_D v'_D] + 2m \phi_D - 2q_y v_D - 2q_z w_D \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

A energia potencial total será extrema na posição de equilíbrio. Para encontrar o extremo do funcional (π), recorre-se às equações de Euler, ou seja:

$$\frac{\partial F}{\partial v_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''_D} \right) = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''_D} \right) = 0 \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi''_D} \right) = 0 \quad (4.64)$$

A aplicação das equações (4.62), (4.63) e (4.64) para o funcional da energia potencial total conduz às seguintes equações diferenciais nas funções v_D , w_D e ϕ_D :

$$EJ_z v_D^{IV} - \left[N(v'_D - z_D \phi'_D) \right]' + (M_y \phi_D)'' - q_y = 0 \quad (4.65)$$

$$EJ_y w_D^{IV} - \left[N(w'_D + y_D \phi'_D) \right]' + (M_z \phi_D)'' - q_z = 0 \quad (4.66)$$

$$EJ_\omega \phi_D^{IV} - GJ_t \phi_D'' - \left\{ \left[N i_D^2 + 2M_z(K_y - y_D) - 2M_y(K_z - z_D) + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi_D' + \right. \\ \left. + N(y_D w'_D - z_D v'_D) \right\}' + M_z w_D'' + M_y v_D'' + m + \left[M_y''(z_c - z_D) - M_z''(y_c - y_D) \right] \phi_D = 0 \\ \dots\dots\dots(4.67)$$

onde:

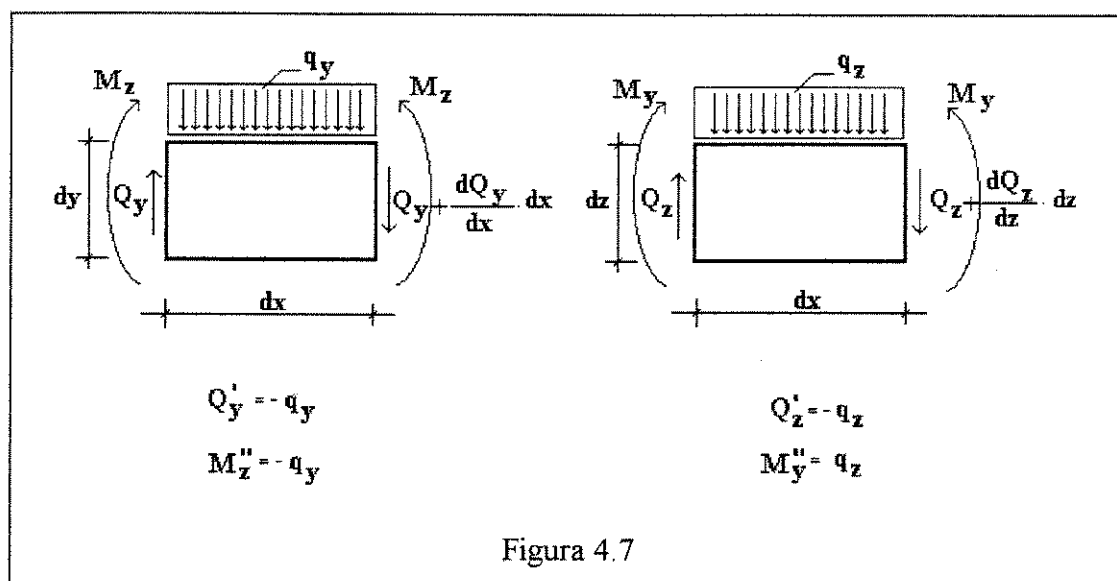
$$M_y'' = q_z \quad (4.68)$$

$$M_z'' = -q_y \quad (4.69)$$

As relações (4.68) e (4.69) são explicadas na figura 4.7 em que utilizaram-se as seguintes relações entre cortantes e momentos [1].

$$Q_z = -M_y'$$

$$Q_y = M_z'$$



As funções encontradas para v_D , w_D e ϕ , soluções das equações diferenciais, são as que tornam extremo este funcional e portanto, aquelas da posição de equilíbrio.

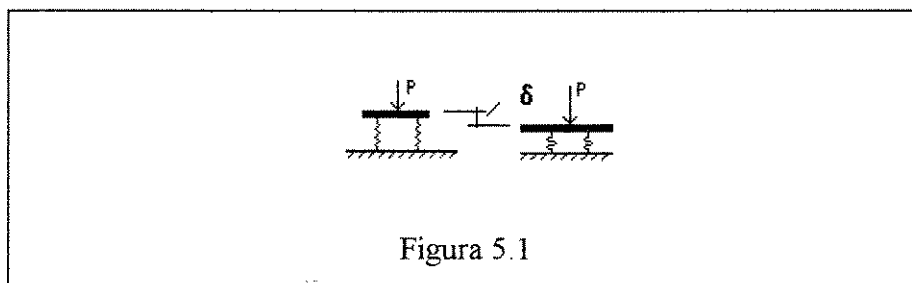
5. Vínculos Elásticos

5.1. Introdução

Geralmente estudam-se casos de estruturas em que as condições de vinculação podem apresentar-se de duas formas:

- Deslocamento livre
- Deslocamento impedido.

Apresenta-se neste capítulo um tipo de vinculação intermediário entre o livre e o impedido, chamado vínculo elástico. Este tipo de vínculo caracteriza-se pelo fato de permitir o deslocamento do ponto da estrutura onde está atuando, porém oferecendo uma certa resistência a este deslocamento.



Este fato pode ser exemplificado através da figura 5.1, onde tem-se uma placa rígida sobre molas. É evidente que, a medida que se aumenta o peso sobre a placa, as molas deformam-se. A relação entre a reação da mola e seu deslocamento, no caso elástica linear, será constante, ou seja:

$$C = \frac{P}{\delta} \quad (5.1)$$

Onde:

C é chamada constante de mola.

P é a força aplicada.

δ é o deslocamento da chapa ou a deformação da mola.

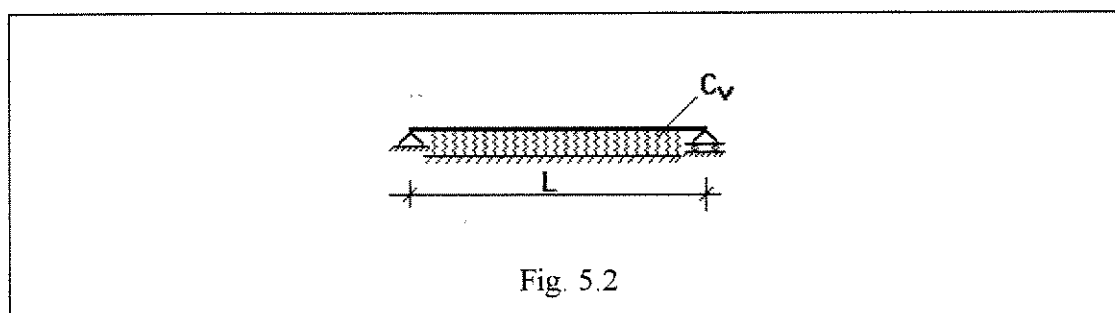
Desta maneira, quando ocorrem vínculos elásticos em determinados pontos de uma estrutura, o equilíbrio destes pontos ocorre em parte devido aos esforços internos e outra parte pela reação dos vínculos elásticos.

Quando não se tem só pontos da estrutura vinculados a um apoio elástico, e sim um trecho desta nesta situação, diz-se que a mesma está em um meio elástico.

5.2. Princípios Energéticos

No estudo energético de uma barra em meio elástico, deve-se acrescentar os efeitos desta vinculação na expressão da energia potencial total. À expressão, que até o presente era do tipo apresentado em (4.60) e (4.61), devem ser acrescentados os valores de energia potencial devido a deformação dos vínculos elásticos.

Seja a barra da figura 5.2 contida em um meio elástico e com seção transversal apresentada na figura 5.3.



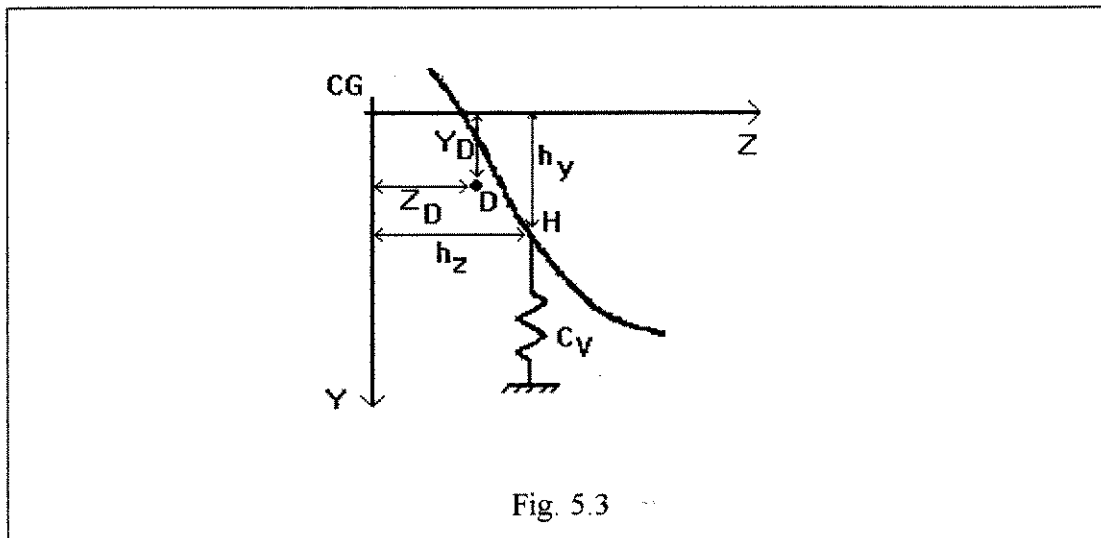


Fig. 5.3

A energia de deformação do vínculo elástico devido a um deslocamento $v(x)$ na direção Y, como mostrado na figura 5.3 é representada por:

$$U = \int_0^L \frac{C_v}{2} v(x)^2 dx \quad (5.2)$$

Onde:

C_v é a constante de deformação do vínculo elástico por unidade de comprimento da barra.

$v(x)$ é o deslocamento (na direção do eixo y) da seção transversal no ponto onde está aplicada a mola, assumindo-se que o vínculo elástico esteja aplicado no centro de cisalhamento.

Seja a energia de deformação da barra da figura 5.2 apresentada a seguir.

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EJ_z v''(x)^2 dx \quad (5.3)$$

A energia total será a soma da energia de deformação da barra (5.3) e a energia de deformação da mola (5.2), ou seja:

$$U_1 = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EJ_z v''(x)^2 + \frac{1}{2} C_v v(x)^2 \right) dx \quad (5.4)$$

De maneira análoga tem-se a energia total de deformação para um vínculo elástico na direção Z.

$$U_2 = \int_0^L \left(\frac{1}{2} E J_y w''(x)^2 + \frac{1}{2} C_w w(x)^2 \right) dx \quad (5.5)$$

Onde:

C_w é a constante de deformação do vínculo elástico por unidade de comprimento da barra.

$w(x)$ é o deslocamento (na direção do eixo z) da seção transversal no ponto onde está o vínculo elástico, assumido no centro de cisalhamento.

Para uma rotação $\varphi(x)$ da seção transversal contida no plano YZ, devido à torção, a energia de deformação será representada por:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} C_\varphi \varphi(x)^2 dx \quad (5.6)$$

onde:

C_φ é a constante de deformação do vínculo elástico por unidade de comprimento da barra, na direção do giro em torno do eixo X.

$\varphi(x)$ é a rotação da seção transversal.

Acrescentando-se em (5.6) a energia de deformação à rotação de uma barra com seção delgada, tem-se:

$$U_3 = \int_0^L \frac{1}{2} \left[E J_\omega \varphi''(x)^2 + G J_t \varphi'(x)^2 + C_\varphi \varphi(x)^2 \right] dx \quad (5.7)$$

Portanto, as expressões (5.4), (5.5) e (5.7) representam a energia de deformação para uma barra com vinculação elástica no centro de cisalhamento.

A hipótese da seção ser indeformável em seu plano permite expressar os deslocamentos de pontos distintos da seção, através dos deslocamentos v_D e w_D do centro de cisalhamento e do ângulo de rotação ϕ da seção transversal.

Seja a seção transversal apresentada na figura 5.4.

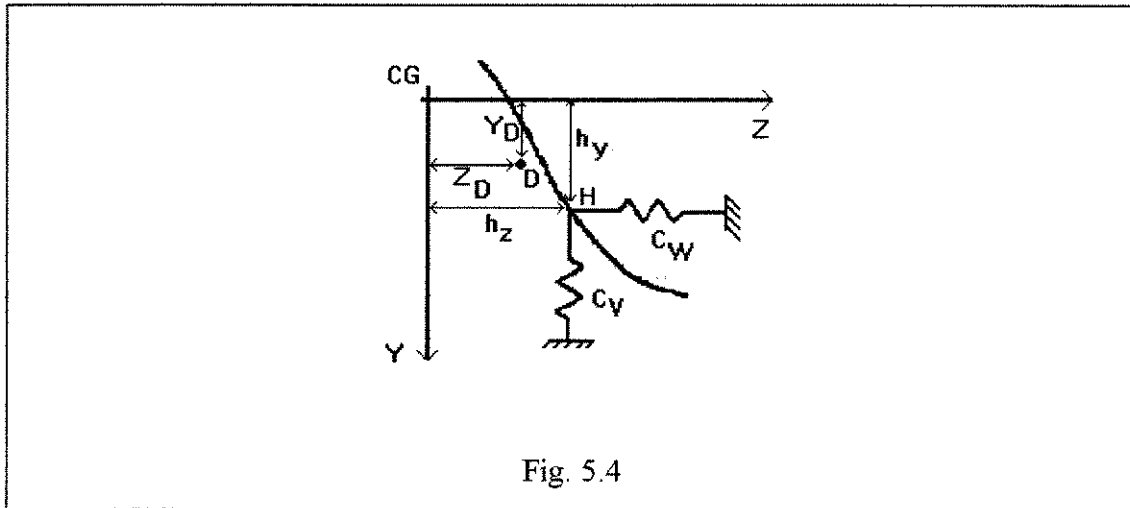


Fig. 5.4

Nota-se nesta figura que H é um ponto da seção transversal no qual atuam as forças de reação dos apoios elásticos, dificultando deslocamentos da seção no plano YZ. As coordenadas do ponto H em relação ao C.G. são representadas por h_z e h_y . Sabendo-se que, v_H e w_H são deslocamentos do ponto H na direção dos eixos 0Y e 0Z respectivamente e ϕ o ângulo de giro da seção, pode-se determinar o deslocamento do ponto H da seção transversal através dos deslocamentos do centro de cisalhamento e das coordenadas do mesmo em relação ao centro de gravidade com as seguintes expressões:

$$v = v_D + (h_z - z_D) \phi_D \quad (5.8)$$

$$w = w_D - (h_y - y_D) \phi_D \quad (5.9)$$

$$\phi = \phi_D \quad (5.10)$$

Utilizando-se as expressões (5.8), (5.9) e (5.10) nas expressões (5.4), (5.5) e (5.7), tem-se:

$$U_1 = \int_0^l \frac{1}{2} E J_z v''(x)^2 + \frac{1}{2} C_v \left[v_D^2 + 2v_D (h_z - z_D) \phi_D + (h_z - z_D)^2 \phi_D^2 \right] dx \quad (5.11)$$

$$U_2 = \int_0^l \frac{1}{2} E J_y w''(x)^2 + \frac{1}{2} C_w \left[w_D^2 - 2w_D(h_y - y_D)\phi_D + (h_y - y_D)^2 \phi_D^2 \right] dx \quad (5.12)$$

$$U_3 = \int_0^l \frac{1}{2} \left[E J_\omega \phi''(x)^2 + G J_t \phi'(x)^2 + C_\phi \phi_D(x)^2 \right] dx \quad (5.13)$$

Utilizando-se as Equações de Euler,

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi''} \right) = 0$$

As expressões desenvolvidas referem-se à meios elásticos atuantes por unidade de comprimento da barra. Porém, há casos de apoios elásticos concentrados em um ponto, e nestes casos eles podem restringir deslocamentos de flexão nas direções v e w (fig. 5.5) e de rotação ϕ no plano YZ (fig. 5.6).

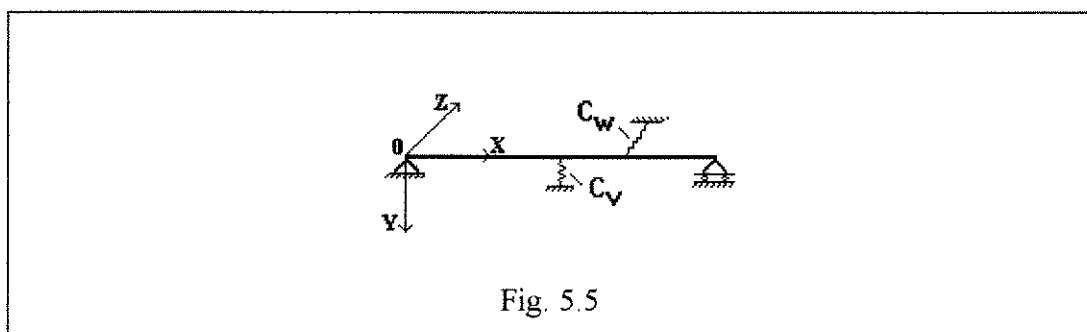


Fig. 5.5

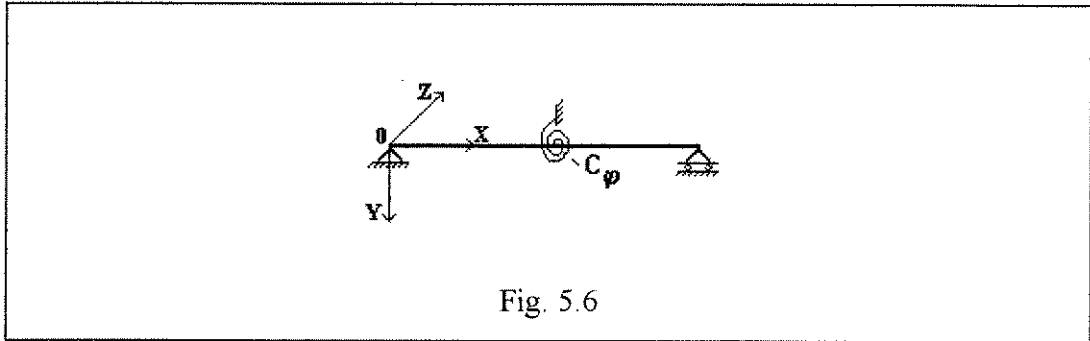


Fig. 5.6

As expressões da energia de deformação do apoio elástico para estes casos são as seguintes:

-Para deslocamentos na direção dos eixos Y e Z, referenciados aos deslocamentos do centro de torção através das equações (5.8) e (5.9), tem-se:

$$U = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} C_v \left(v_{D_i}^2 + 2v_{D_i} (h_z - z_D) \phi_D + (h_z - z_D)^2 \phi_D^2 \right) \right] \quad (5.14)$$

$$U = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} C_w \left(w_{D_i}^2 - 2w_{D_i} (h_y - y_D) \phi_D + (h_y - y_D)^2 \phi_D^2 \right) \right] \quad (5.15)$$

-Para rotação da seção transversal em torno do eixo X, referenciado ao centro de torção através da equação (5.10), tem-se:

$$U = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} C_\phi \phi_{D_i}^2 \right] \quad (5.16)$$

Portanto deve-se acrescentar às expressões (4.60) e (4.61) as parcelas apresentadas em (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) e (5.16). Obtendo-se então a expressão da energia potencial total da barra quando sujeita a apoios elásticos.

$$\begin{aligned}
U = \int_0^L & F(v_D, v_D', v_D'', w_D, w_D', w_D'', \phi_D, \phi_D', \phi_D'') dx + \\
& - \sum P_{yi} v_i - \sum P_{zi} w_i - \sum ME_{yi} w_i' + \\
& - \sum ME_{zi} v_i' + \sum T_i \phi_i - \sum BE_i \phi_i' + \\
& - \sum \left[\frac{1}{2} C_v (v_{D_i}^2 + 2v_{D_i} (h_z - z_D) \phi_D + (h_z - z_D)^2 \phi_D^2) \right] + \\
& - \sum \left[\frac{1}{2} C_w (w_{D_i}^2 - 2w_{D_i} (h_y - y_D) \phi_D + (h_y - y_D)^2 \phi_D^2) \right] + \\
& - \sum \frac{1}{2} C_\phi \phi_i^2
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde:

$$\begin{aligned}
F = \frac{1}{2} & \left\{ EJ_z v_D''^2 + EJ_y w_D''^2 + EJ_\omega \phi_D''^2 + GJ_t \phi_D'^2 + C_v v_D^2 + C_w w_D^2 + C_\phi \phi_D^2 + \right. \\
& + N[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + 2(y_D w_D' - z_D v_D') \phi_D'] + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \phi_D'^2 + \\
& + 2M_z[(K_y - y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D'] - 2M_y[(K_z - z_D) \phi_D'^2 + \phi_D' v_D'] + \\
& + 2M_z'[(y_c - y_D) \phi_D' \phi_D - \phi_D w_D'] - 2M_y'[(z_c - z_D) \phi_D \phi_D' + \phi_D v_D'] + \\
& + 2m \phi_D - 2q_y v_D - 2q_z w_D + C_v [2v_D (h_z - z_D) \phi_D + (h_z - z_D)^2 \phi_D^2] + \\
& \left. + C_w [-2w_D (h_y - y_D) \phi_D + (h_y - y_D)^2 \phi_D^2] \right\}
\end{aligned}$$

Utilizando as equações de Euler (4.62), (4.63) e (4.64) as equações diferenciais completas que representam uma barra imersa em meio elástico, são:

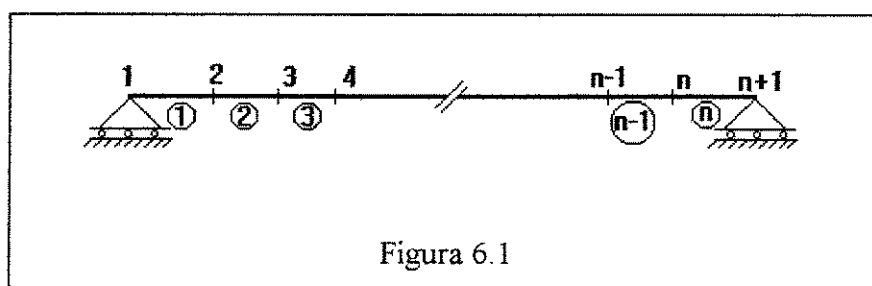
$$EJ_z v_D^{IV} - [N(v_D' - z_D \phi_D')] + (M_y \phi_D)'' + C_v [v_D + (h_z - z_D) \phi_D] - q_y = 0 \tag{5.18}$$

$$EJ_y w_D^{IV} - [N(w_D' + y_D \phi_D')] + (M_z \phi_D)'' + C_w [w_D - (h_y - y_D) \phi_D] - q_z = 0 \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
& EJ_{\omega} \phi_D^{IV} - GJ_t \phi_D'' - \left\{ \left[N i_D^2 + 2M_z(K_y - y_D) - 2M_y(K_z - z_D) + B \frac{U_{\omega}}{J_{\omega}} \right] \phi_D' + \right. \\
& \left. + N(y_D w_D' - z_D v_D') \right\}' + M_z w_D'' + M_y v_D'' + m + \\
& + [M_y''(z_c - z_D) - M_z''(y_c - y_D)] \phi_D + C_{\phi} \phi_D + C_v v_D (h_z - z_D) + \\
& - C_w w_D (h_y - y_D) + [C_v (h_z - z_D)^2 + C_w (h_y - y_D)^2] \phi_D = 0
\end{aligned} \tag{5.20}$$

6. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Para resolução dos problemas de instabilidade de uma barra foi utilizado o método dos elementos finitos. Neste tratamento, a barra, chamada domínio, é dividida em segmentos ao longo de seu comprimento, chamados sub-domínios ou elementos finitos. Cada um dos elementos de barra é identificado por um ponto inicial e um ponto final, chamados nós. Portanto, seja uma barra, cujas extremidades estão simplesmente apoiadas, dividida em (n) elementos finitos e $(n+1)$ nós, como mostra a fig. 6.1.



Para cada nó i do elemento utilizam-se seis parâmetros de análise, que são os deslocamentos v_i , w_i , ϕ_i e suas derivadas primeiras v_i' , w_i' e ϕ_i' . A cada elemento finito atribuem-se funções independentes para v , w e ϕ do tipo polinômio do 3º grau. Os deslocamentos v_D e w_D referem-se ao centro de cisalhamento e ϕ_D à rotação da seção transversal.

Logo, sendo:

$$R(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (6.1)$$

uma função aproximadora, com x variando entre os limites 0 e h_i , onde h_i é o comprimento do elemento.

Pode-se impor condições à $R(x)$ de modo a escrevê-la em função dos parâmetros de nó.

Derivando-se a função $R(x)$ tem-se:

$$R'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \quad (6.2)$$

As funções $R(x)$ e $R'(x)$ representam respectivamente os deslocamentos v_D e w_D , e suas derivadas v_D' e w_D' , bem como a rotação ϕ_D e sua derivada ϕ_D' , visto que se admite a mesma função aproximadora para os deslocamentos e rotação.

Escrevendo-se as expressões (6.1) e (6.2) em função dos deslocamentos v ou w e da rotação ϕ que ocorrem nos extremos do elemento, tem-se:

- No limite $x = 0$ do elemento:

$$R(0)=a_0 \quad (6.3)$$

$$R'(0)=a_1 \quad (6.4)$$

- No limite $x = h_i$ do elemento:

$$R(h_i)=a_0 + a_1 h_i + a_2 h_i^2 + a_3 h_i^3 \quad (6.5)$$

$$R'(h_i)=a_1 + 2a_2 h_i + 3a_3 h_i^2 \quad (6.6)$$

Apresentam-se, na figura 6.2, as direções do deslocamento e sua derivada tratados pela função $R(x)$.

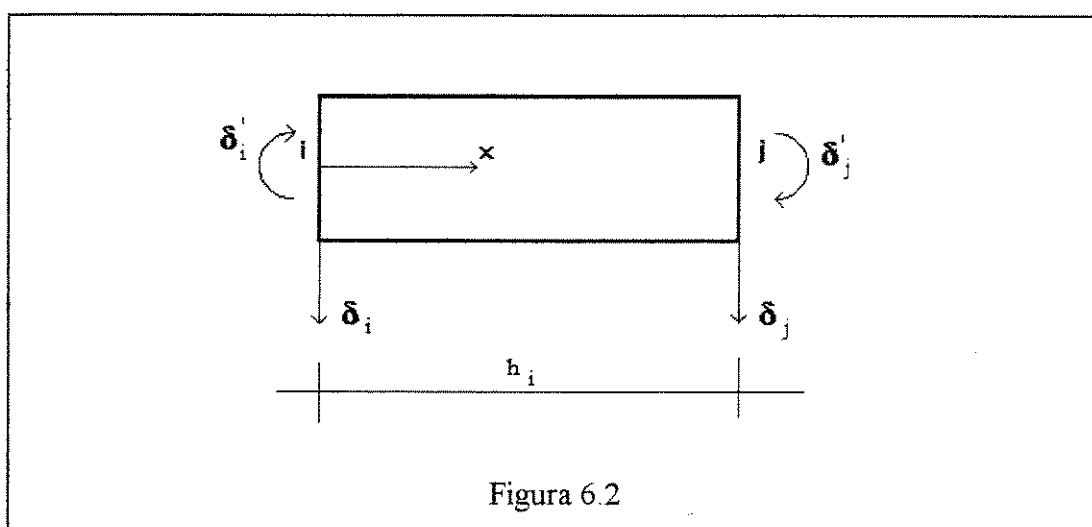


Figura 6.2

Onde δ representa deslocamentos v ou w ou a rotação ϕ e δ' as derivadas de v ou w ou da rotação ϕ .

Desta maneira pode-se dizer que:

$$R(0)=\delta_i \quad (6.7)$$

$$R'(0)=\delta'_i \quad (6.8)$$

$$R(1)=\delta_j \quad (6.9)$$

$$R'(1)=\delta'_j \quad (6.10)$$

Substituindo-se as expressões (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) respectivamente em (6.3), (6.4), (6.5) e (6.6), chega-se aos valores de a_0 , a_1 , a_2 e a_3 conforme apresentado nas expressões (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14).

$$a_0 = \delta_i \quad (6.11)$$

$$a_1 = \delta'_i \quad (6.12)$$

$$a_2 = (-3\delta_i - 2\delta'_i h_i + 3\delta_j - \delta'_j h_i) / h_i^2 \quad (6.13)$$

$$a_3 = (2\delta_i + \delta'_i h_i - 2\delta_j + \delta'_j h_i) / h_i^3 \quad (6.14)$$

Utilizando estas expressões em (6.1) tem-se:

$$R(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{h_i^2} + \frac{2x^3}{h_i^3}\right) \delta_i + \left(x - \frac{2x^2}{h_i} + \frac{x^3}{h_i^2}\right) \delta'_i + \left(\frac{3x^2}{h_i^2} - \frac{2x^3}{h_i^3}\right) \delta_j + \left(\frac{x^3}{h_i^2} - \frac{x^2}{h_i}\right) \delta'_j \quad (6.15)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivadas de (6.15), tem-se:

$$R'(x) = \left(-\frac{6x}{h_i^2} + \frac{6x^2}{h_i^3}\right) \delta_i + \left(1 - \frac{4x}{h_i} + \frac{3x^2}{h_i^2}\right) \delta'_i + \left(\frac{6x}{h_i^2} - \frac{6x^2}{h_i^3}\right) \delta_j + \left(\frac{3x^2}{h_i^2} - \frac{2x}{h_i}\right) \delta'_j \quad (6.16)$$

$$R''(x) = \left(-\frac{6}{h_i^2} + \frac{12x}{h_i^3}\right) \delta_i + \left(-\frac{4}{h_i} + \frac{6x}{h_i^2}\right) \delta'_i + \left(\frac{6}{h_i^2} - \frac{12x}{h_i^3}\right) \delta_j + \left(\frac{6x}{h_i^2} - \frac{2}{h_i}\right) \delta'_j \quad (6.17)$$

Ou na forma matricial, as expressões de v_D , w_D e φ_D são apresentadas a seguir:

$$v_D = \tilde{R} v^n \quad (6.18)$$

$$w_D = \tilde{R} w^n \quad (6.19)$$

$$\varphi_D = \tilde{R} \varphi^n \quad (6.20)$$

onde:

$$\tilde{R}(x) = \left\{ \left(1 - \frac{3x^2}{h_i^2} + \frac{2x^3}{h_i^3}\right), \left(x - \frac{2x^2}{h_i} + \frac{x^3}{h_i^2}\right), \left(\frac{3x^2}{h_i^2} - \frac{2x^3}{h_i^3}\right), \left(\frac{x^3}{h_i^2} - \frac{x^2}{h_i}\right) \right\} \quad (6.21)$$

$$\tilde{R}'(x) = \left\{ \left(-\frac{6x}{h_i^2} + \frac{6x^2}{h_i^3}\right), \left(1 - \frac{4x}{h_i} + \frac{3x^2}{h_i^2}\right), \left(\frac{6x}{h_i^2} - \frac{6x^2}{h_i^3}\right), \left(\frac{3x^2}{h_i^2} - \frac{2x}{h_i}\right) \right\} \quad (6.22)$$

$$\tilde{R}''(x) = \left\{ \left(-\frac{6}{h_i^2} + \frac{12x}{h_i^3} \right), \left(-\frac{4}{h_i} + \frac{6x}{h_i^2} \right), \left(\frac{6}{h_i^2} - \frac{12x}{h_i^3} \right), \left(\frac{6x}{h_i^2} - \frac{2}{h_i} \right) \right\} \quad (6.23)$$

$$v^{n,t} = \{v_i, v'_i, v_j, v'_j\} \quad (6.24)$$

$$w^{n,t} = \{w_i, w'_i, w_j, w'_j\} \quad (6.25)$$

$$\phi^{n,t} = \{\phi_i, \phi'_i, \phi_j, \phi'_j\} \quad (6.26)$$

Deve-se lembrar que a primeira e segunda derivadas de v_D , w_D e ϕ_D serão representadas por:

$$v'_D = \frac{1}{h_i} R' v^n \quad (6.27)$$

$$w'_D = \frac{1}{h_i} R' w^n \quad (6.28)$$

$$\phi'_D = \frac{1}{h_i} R' \phi^n \quad (6.29)$$

$$v''_D = \frac{1}{h_i^2} R'' v^n \quad (6.30)$$

$$w''_D = \frac{1}{h_i^2} R'' w^n \quad (6.31)$$

$$\phi''_D = \frac{1}{h_i^2} R'' \phi^n \quad (6.32)$$

Integrando-se o funcional da estrutura, apresentado em (5.20), ao longo do comprimento h_i do elemento finito, tem-se a energia total de um elemento em função dos parâmetros nodais incógnitos.

$$\pi = F(v_i, v'_i, w_i, w'_i, \phi_i, \phi'_i, v_j, v'_j, w_j, w'_j, \phi_j, \phi'_j) \quad (6.33)$$

Como o objetivo é encontrar o extremo do funcional ou seja, o ponto de mínima energia potencial, deve-se igualar a zero a primeira variação do mesmo, então:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v_i} \delta v_i + \frac{\partial F}{\partial v'_i} \delta v'_i + \frac{\partial F}{\partial w_i} \delta w_i + \frac{\partial F}{\partial w'_i} \delta w'_i + \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial F}{\partial \phi'_i} \delta \phi'_i + \frac{\partial F}{\partial v_j} \delta v_j + \frac{\partial F}{\partial v'_j} \delta v'_j + \frac{\partial F}{\partial w_j} \delta w_j + \frac{\partial F}{\partial w'_j} \delta w'_j + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} \delta \phi_j + \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \delta \phi'_j \quad (6.34)$$

Assim, este processo resulta em um sistema de 12 equações lineares nos parâmetros $v_i, v'_i, w_i, w'_i, \phi_i, \phi'_i, v_j, v'_j, w_j, w'_j, \phi_j, \phi'_j$.

Nas estruturas, a associação dos elementos finitos para descrever uma barra ocorre com relação aos seis deslocamentos possíveis para cada nó. Portanto, o método dos elementos finitos transforma o trabalho de se encontrar a função que satisfaz um extremo de determinado funcional, na procura do extremo de uma função com $6(n+1)$ parâmetros incógnitos nos $(n+1)$ nós da barra e, neste caso, na resolução de um sistema de equações lineares que determine os valores da função incógnita nos pontos desejados.

6.1. Matriz de Rigidez do Elemento:

A matriz de rigidez de um elemento, denominada matriz de rigidez local, de ordem 12×12 , onde a primeira linha representa a primeira variação de F (eq. 6.34) em relação a v_i e assim subsequentemente, será montada conforme esquema apresentado na figura 6.3.

	v_i	v'_i	w_i	w'_i	ϕ_i	ϕ'_i	v_j	v'_j	w_j	w'_j	ϕ_j	ϕ'_j
δv_i												
$\delta v'_i$												
δw_i												
$\delta w'_i$												
$\delta \phi_i$												
$\delta \phi'_i$												
δv_j												
$\delta v'_j$												
δw_j												
$\delta w'_j$												
$\delta \phi_j$												
$\delta \phi'_j$												

Figura 6.3

Devido ao fato das funções aproximadoras serem iguais para v_D , w_D e ϕ_D , o funcional será dividido de forma conveniente, a fim de montar matrizes parciais e mais fáceis de serem manipuladas. O processo computacional permite que, após este tratamento independente das matrizes, seja obtida a matriz de rigidez local mostrada na figura 6.3, através de um conveniente agrupamento das matrizes parciais.

Com base no funcional dado pela equação (6.33) tem-se a seguinte divisão de matrizes parciais:

a) Primeira matriz:

Dependente do quadrado da segunda derivada da função aproximadora.

$$F_1 = \int_{h_1} \frac{1}{2} (EJ_z v_D''^2 + EJ_y w_D''^2 + EJ_\omega \phi_D''^2) dx \quad (6.35)$$

b) Segunda matriz:

Dependente do quadrado da primeira derivada da função aproximadora pois, utiliza-se a mesma função para v , w e ϕ .

$$\begin{aligned} F_2 = \int_{h_1} \frac{1}{2} \{ & GJ_t \phi_D'^2 + N [v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + \\ & + 2(y_D w_D' - z_D v_D') \phi_D'] + 2M_z [(K_y - y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D'] + \\ & - 2M_y [(K_z - z_D) \phi_D'^2 + \phi_D' v_D'] \} dx \end{aligned} \quad (6.36)$$

c) Terceira matriz:

Dependente do produto da função aproximadora pela primeira derivada desta.

$$F_3 = \int_{h_1} M_z' [(y_c - y_D) \phi_D' \phi_D - \phi_D w_D'] - M_y' [(z_c - z_D) \phi_D \phi_D' + \phi_D v_D'] \quad (6.37)$$

d) Quarta matriz:

Representa a influência do bimomento:

$$F_4 = \int_{h_i} B \frac{U_{\omega}}{J\omega} \varphi_D'^2 dx \quad (6.38)$$

e) Quinta matriz:

Dependente do quadrado da função aproximadora.

$$F_5 = \int_{h_i} \frac{1}{2} \left\{ K_v v_D^2 + K_w w_D^2 + K_{\varphi} \varphi_D^2 + K_v \left[2v_D(h_z - z_D) \varphi_D + (h_z - z_D)^2 \varphi_D^2 \right] + \right. \\ \left. + K_w \left[-2w_D(h_y - y_D) \varphi_D + (h_y - y_D)^2 \varphi_D^2 \right] \right\} dx \quad \dots\dots\dots(6.39)$$

Tem-se no funcional (5.21) os esforços de primeira ordem e as expressões destes esforços são aproximadas no elemento finito da seguinte forma:

$$N(\xi) = N_i + (N_j - N_i) \xi \quad (6.40)$$

$$M_y(\xi) = M_{y_i} + \left(M_{y_j} - M_{y_i} - \frac{1}{2} q_{z_i} h_i^2 \right) \xi + \frac{1}{2} q_{z_i} h_i^2 \xi^2 \quad (6.41)$$

$$M_z(\xi) = M_{z_i} + \left(M_{z_j} - M_{z_i} + \frac{1}{2} q_{y_i} h_i^2 \right) \xi - \frac{1}{2} q_{y_i} h_i^2 \xi^2 \quad (6.42)$$

$$B(x) = \frac{(B_j - r^2 m_i) - (B_i - r^2 m_i) \cosh \frac{h}{r}}{\sinh \left(\frac{h}{r} \right)} \sinh \left(\frac{x}{r} \right) + (B_i - r^2 m_i) \cosh \left(\frac{x}{r} \right) + r^2 m_i \quad \dots\dots\dots(6.43)$$

Onde

$$\xi = \frac{x}{h_i}$$

Os índices i e j na força normal, nos momentos fletores e no bimomento referem-se aos nós inicial e final do elemento, e nas cargas uniformemente distribuídas o índice i refere-se ao número do elemento.

6.2. Matrizes Parciais:

6.2.1. Primeira matriz:

Formada a partir do funcional F_1 apresentado em (6.35). As parcelas devido a $v_D''^2$, $w_D''^2$ e $\varphi_D''^2$ formarão matrizes iguais, variando apenas o deslocamento a que se referem, ou seja, os valores gerados por cada parcela serão iguais, porém colocados em posições diferentes da matriz local do elemento.

A matriz M_1 (fig. 6.4) devido a cada parcela de F_1 é montada da seguinte maneira:

Matriz M_1 :

	c_i	c'_i	c_j	c'_j
δc_i	12α	$6\alpha h_i$	-12α	$6\alpha h_i$
$\delta c'_i$		$4\alpha h_i^2$	$-6\alpha h_i$	$2\alpha h_i^2$
δc_j			12α	$-6\alpha h_i$
$\delta c'_j$				$4\alpha h_i^2$

Figura 6.4

A matriz M_1 é simétrica.

a) Parcela $v_D''^2$:

$$F_{1a} = \int_{h_i}^1 \frac{1}{2} (EJ_z v_D''^2) dx \quad (6.44)$$

Substituindo-se v_D'' pela equação (6.27) tem-se:

$$F_{1a} = \int_{h_i} \frac{1}{2} \left(EJ_z \left[\frac{1}{h_i^2} \tilde{R}'' \tilde{v}^n \right]^2 \right) dx$$

ou,

$$\begin{aligned} F_{1a} &= \int_{h_i} \frac{1}{2} \left(EJ_z \left[\frac{1}{h_i^4} \tilde{v}^{n,t} \tilde{R}''^t \tilde{R}'' \tilde{v}^n \right] h_i d\xi \right) \\ F_{1a} &= \tilde{v}^{n,t} \frac{1}{2h_i^3} \left[\int (\tilde{R}''^t EJ_z \tilde{R}'') d\xi \right] \tilde{v}^n \end{aligned} \quad (6.45)$$

Resolvendo-se a integral da equação (6.45) obtém-se a matriz M_1 , fig. 6.4, e a expressão da primeira variação torna-se:

$$\delta F_{1a} = \delta \tilde{v}^{n,t} \frac{1}{h_i^3} M_1 \tilde{v}^n \quad (6.46)$$

Onde, na matriz M_1 tem-se:

$$\alpha = EJ_z$$

$$c = v$$

b) Parcela $w_D^{''2}$:

$$F_{1b} = \int_{h_i} \frac{1}{2} (EJ_y w_D^{''2}) dx \quad (6.47)$$

De modo análogo a F_{1a} a expressão da primeira variação de F_{1b} é:

$$\delta F_{1b} = \delta \tilde{w}^{n,t} \frac{1}{h_i^3} M_1 \tilde{w}^n \quad (6.48)$$

Onde, em M_1 tem-se:

$$\alpha = EJ_y$$

$$c = w$$

c) Parcela $\varphi_D^{''2}$:

$$F_{1c} = \int_{h_i} \frac{1}{2} (EJ_\omega \varphi_D^{''2}) dx \quad (6.49)$$

Como nas parcelas anteriores, tem-se:

$$\delta F_{1c} = \delta \tilde{\varphi}^{n,t} \frac{1}{h_i^3} M_1 \tilde{\varphi}^n \quad (6.50)$$

Onde, em M_1 tem-se:

$$\alpha = EJ_\omega$$

$$c = \varphi$$

6.2.2. Segunda Matriz:

Formada a partir do funcional F_2 apresentado na equação (6.36), de maneira análoga a formação de M_1 , a matriz M_2 (fig. 6.5), para cada parcela de F_2 , forma-se da seguinte maneira:

Matriz M_2 :

	c_i	c'_i	c_j	c'_j
δa_i	$\frac{12\alpha}{5} + \frac{6\beta}{5} + \frac{24\gamma}{35}$	$h_i \left(\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{5} + \frac{\gamma}{7} \right)$	$\frac{-12\alpha}{5} - \frac{6\beta}{5} - \frac{24\gamma}{35}$	$h_i \left(\frac{\alpha}{5} - \frac{2\gamma}{35} \right)$
$\delta a'_i$		$h_i^2 \left(\frac{4\alpha}{15} + \frac{\beta}{15} + \frac{4\gamma}{105} \right)$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{5} - \frac{\beta}{5} - \frac{\gamma}{7} \right)$	$h_i^2 \left(-\frac{\alpha}{15} - \frac{\beta}{30} - \frac{\gamma}{35} \right)$
δa_j			$\frac{12\alpha}{5} + \frac{6\beta}{5} + \frac{24\gamma}{35}$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{5} + \frac{2\gamma}{35} \right)$
$\delta a'_j$				$h_i^2 \left(\frac{4\alpha}{15} + \frac{\beta}{5} + \frac{6\gamma}{35} \right)$

Figura 6.5

A matriz M_2 é simétrica.

a) Parcela $\varphi_D'^2$:

$$F_{2a} = \int_{h_i} \frac{1}{2} \left\{ GJ_t + Ni_D^2 + 2M_z(K_y - y_D) - 2M_y(K_z - z_D) \right\} \varphi_D'^2 dx \quad (6.51)$$

$$\delta F_{2a} = \delta \varphi^{n,t} \frac{1}{h_i} M_2 \varphi^n \quad (6.52)$$

Onde, na matriz M_2 tem-se:

$$a = \varphi$$

$$c = \varphi$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(GJ_t + N_i i_{D_i}^2 \right) + M_{zi} (K_y - y_D)_i - M_{yi} (K_z - z_D)_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(N_j - N_i \right) i_{D_i}^2 + \left(M_{zj} - M_{zi} + \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 \right) (K_y - y_D)_i + \\ - \left(M_{yj} - M_{yi} - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 \right) (K_z - z_D)_i$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 (K_z - z_D)_i - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 (K_y - y_D)_i$$

b) Parcela $v_D'^2$:

$$F_{2b} = \int_{h_i} \frac{1}{2} N v_D'^2 dx \quad (6.53)$$

$$\delta F_{2b} = \delta \tilde{v}^{n,t} \frac{1}{h_i} M_2 \tilde{v}^n \quad (6.54)$$

Onde:

$$a = v$$

$$c = v$$

$$\alpha = \frac{1}{2} N_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} (N_j - N_i)$$

γ é nulo.

c) Parcela $w_D'^2$:

$$F_{2c} = \int_{h_i} \frac{1}{2} N w_D'^2 dx \quad (6.55)$$

$$\delta F_{2c} = \delta \tilde{w}^{n,t} \frac{1}{h_i} M_2 \tilde{w}^n \quad (6.56)$$

Onde:

$$a = w$$

$$c = w$$

$$\alpha = \frac{1}{2} N_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} (N_j - N_i)$$

γ é nulo.

d) Parcela $w_D' \varphi_D'$:

$$F_{2d} = \int_{h_i} (N y_D - M_z) w_D' \varphi_D' dx \quad (6.57)$$

$$\delta F_{2d} = \delta \tilde{w}^{n,t} \frac{1}{h_i} M_z \tilde{\varphi}^n + \delta \tilde{\varphi}^{n,t} \frac{1}{h_i} (M_z)' \tilde{w}^n \quad (6.58)$$

Onde:

$$a = w$$

$$c = \varphi$$

$$\alpha = \frac{1}{2} [N_i y_{Di} - M_{zi}]$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left((N_j - N_i) y_{Di} - M_{zi} + M_{zi} - \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} q_{yi} h_i^2$$

e) Parcela $v_D' \varphi_D'$:

$$F_{2e} = - \int_{h_i} (N z_D + M_y) v_D' \varphi_D' dx \quad (6.59)$$

$$\delta F_{2e} = \delta \tilde{v}^{n,t} \frac{1}{h_i} M_y \tilde{\varphi}^n + \delta \tilde{\varphi}^{n,t} \frac{1}{h_i} (M_y)' \tilde{v}^n \quad (6.60)$$

Onde:

$$a = v$$

$$c = \varphi$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} [N_i z_{Di} + M_{yi}]$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \left((N_j - N_i) z_{Di} + M_{yi} - M_{yi} - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 \right)$$

$$\gamma = -\frac{1}{4}q_z h_i^2$$

6.2.3. Terceira Matriz:

Formada a partir do funcional F_3 apresentado em (6.37), utiliza as derivadas dos momentos fletores apresentados em (6.42) e (6.43). As expressões de M_y' e M_z' são:

$$M_y'(x) = \frac{1}{h_i} \left(M_{y_j} - M_{y_i} - \frac{1}{2} q_{z_i} h_i^2 \right) + q_{z_i} h_i \xi \quad (6.61)$$

$$M_z'(x) = \frac{1}{h_i} \left(M_{z_j} - M_{z_i} + \frac{1}{2} q_{y_i} h_i^2 \right) - q_{y_i} h_i \xi \quad (6.62)$$

A matriz M_3 da figura 6.6 para cada parcela de F_3 forma-se da seguinte maneira:

Matriz M_3 :

	ϕ_i	ϕ_i'	ϕ_j	ϕ_j'
δc_i	$-\frac{\alpha}{2} - \frac{13\beta}{70}$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{10} - \frac{3\beta}{70} \right)$	$-\frac{\alpha}{2} - \frac{22\beta}{70}$	$h_i \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{4\beta}{70} \right)$
$\delta c_i'$	$h_i \left(\frac{\alpha}{10} - \frac{2\beta}{210} \right)$	$h_i^2 \left(-\frac{\beta}{210} \right)$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{10} - \frac{31\beta}{420} \right)$	$h_i^2 \left(\frac{\alpha}{60} + \frac{\beta}{84} \right)$
δc_j	$\frac{\alpha}{2} + \frac{13\beta}{70}$	$h_i \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{3\beta}{70} \right)$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{22\beta}{70}$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{10} - \frac{4\beta}{70} \right)$
$\delta c_j'$	$h_i \left(-\frac{\alpha}{10} - \frac{11\beta}{420} \right)$	$h_i^2 \left(-\frac{\alpha}{60} - \frac{\beta}{210} \right)$	$h_i \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{23\beta}{210} \right)$	$h_i^2 \left(-\frac{\beta}{210} \right)$

Figura 6.6

a) Parcela $\phi_D' \phi_D$:

$$F_{3a} = \int_{h_i} \left[M'_z (y_c - y_D) - M'_y (z_c - z_D) \right] \phi'_D \phi_D dx \quad (6.63)$$

$$\delta F_{3a} = \delta \tilde{\varphi}^{n,t} (M_3 + M_3^t) \tilde{\varphi}^n \quad (6.64)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$\alpha = \frac{1}{h_i} \left[\left(M_{zj} - M_{zi} + \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 \right) (y_c - y_D)_i - \left(M_{yj} - M_{yi} - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 \right) (z_c - z_D)_i \right]$$

$$\beta = h_i \left[-q_{yi} (y_c - y_D)_i - q_{zi} (z_c - z_D)_i \right]$$

b) Parcela w_D , ϕ_D :

$$F_{3b} = - \int_{h_i} M'_z w'_D \phi_D dx \quad (6.65)$$

$$\delta F_{3b} = \delta \tilde{w}^{n,t} M_3 \tilde{\varphi}^n + \delta \tilde{\varphi}^{n,t} (M_3)^t \tilde{w}^n \quad (6.66)$$

Onde:

$$c = w$$

$$\alpha = - \frac{1}{h_i} \left(M_{zj} - M_{zi} + \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 \right)$$

$$\beta = -q_{yi} h_i$$

c) Parcela v_D , ϕ_D :

$$F_{3c} = - \int_{h_i} M'_y v'_D \phi_D dx \quad (6.67)$$

$$\delta F_{3c} = \delta \tilde{v}^{n,t} M_3 \tilde{\varphi}^n + \delta \tilde{\varphi}^{n,t} (M_3)^t \tilde{v}^n \quad (6.68)$$

Onde:

$$c = v$$

$$\alpha = - \frac{1}{h_i} \left(M_{yj} - M_{yi} - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 \right)$$

$$\beta = -q_{zi} h_i$$

A matriz M_3 não é simétrica mas, utiliza-se a sua transposta para montar a matriz do elemento, de acordo com as expressões (6.64), (6.66) e (6.68), o que não alterará a simetria da matriz final.

6.2.4. Quarta matriz:

Formada a partir do funcional F_4 apresentado em (6.38), utiliza o quadrado da primeira derivada da função φ_D . O valor do bimomento foi aproximado como soma de funções hiperbólicas, (eq. 6.43). A matriz M_4 forma-se da seguinte maneira:

$$F_4 = \int_{h_i} B \frac{U_{\omega}}{J_{\omega}} \varphi_D'^2 dx \quad (6.69)$$

$$\delta F_4 = \delta \varphi_{\sim}^{n,t} \frac{1}{h_i} \int_{\sim} \left(R_{\sim}''^t B \frac{U_{\omega}}{J_{\omega}} R_{\sim}' \right) d\xi \quad \varphi_{\sim}^n \quad (6.70)$$

onde:

$$\rho = \frac{h}{r}$$

$$\gamma = r^2 m$$

$$r = \sqrt{\frac{EJ_{\omega}}{GJ_t}}$$

m é a carga torçora

$$\alpha = \frac{1}{\sinh(\rho)} \left[B_j - \gamma - (B_i - \gamma) \cosh(\rho) \right]$$

$$\beta = B_i - \gamma$$

Matriz M_4 :

Os elementos ℓ_{ij} são:

$$\begin{aligned} \ell_{11} = & \alpha \left[\frac{72}{\rho^3} (\cosh(\rho) - 1) - \frac{432}{\rho^4} \sinh(\rho) + \frac{864}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \\ & + \beta \left[\frac{72}{\rho^3} (\sinh(\rho)) - \frac{432}{\rho^4} (\cosh(\rho) + 1) + \frac{864}{\rho^5} (\sinh(\rho)) \right] + \frac{6\gamma}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{12} = h_i \left\{ \alpha \left[\frac{24}{\rho^3} \left(\cosh(\rho) - \frac{5}{2} \right) - \frac{180}{\rho^4} \sinh(\rho) + \frac{432}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[-\frac{6}{\rho^2} + \frac{24}{\rho^3} (\sinh(\rho)) - \frac{180}{\rho^4} (\cosh(\rho)) - \frac{252}{\rho^4} + \frac{432}{\rho^5} (\sinh(\rho)) \right] + \frac{\gamma}{10} \right\} \end{aligned}$$

$$\ell_{13} = -\ell_{11}$$

$$\begin{aligned} \ell_{14} = h_i \left\{ \alpha \left[-\frac{6}{\rho^2} \sinh(\rho) + \frac{24}{\rho^3} \left(\frac{5}{2} \cosh(\rho) - 1 \right) - \frac{252}{\rho^4} \sinh(\rho) + \frac{432}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[-\frac{6}{\rho^2} \cosh(\rho) + \frac{60}{\rho^3} (\sinh(\rho)) - \frac{252}{\rho^4} (\cosh(\rho)) - \frac{180}{\rho^4} + \frac{432}{\rho^5} (\sinh(\rho)) \right] + \frac{\gamma}{10} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{22} = h_i^2 \left\{ \alpha \left[-\frac{1}{\rho} + \frac{8}{\rho^3} (\cosh(\rho)) - \frac{44}{\rho^3} - \frac{72}{\rho^4} (\sinh(\rho)) + \frac{216}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[\frac{8}{\rho^3} (\sinh(\rho) - \rho) - \frac{72}{\rho^4} (\cosh(\rho) + 2) + \frac{216}{\rho^5} (\sinh(\rho)) \right] + \frac{2\gamma}{15} \right\} \end{aligned}$$

$$\ell_{23} = -\ell_{12}$$

$$\begin{aligned} \ell_{24} = h_i^2 \left\{ \alpha \left[-\frac{2}{\rho^2} (\sinh(\rho)) + \left(\frac{22}{\rho^3} + \frac{216}{\rho^5} \right) (\cosh(\rho) - 1) - \frac{180}{\rho^4} \sinh(\rho) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[\frac{22}{\rho^3} (\sinh(\rho)) - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{108}{\rho^4} \right) (\cosh(\rho) + 1) + \frac{216}{\rho^5} (\sinh(\rho)) \right] - \frac{\gamma}{30} \right\} \end{aligned}$$

$$\ell_{33} = \ell_{11}$$

$$\ell_{34} = -\ell_{14}$$

$$\ell_{44} = h_i^2 \left\{ \beta \left[\frac{1}{\rho} \sinh(\rho) - \frac{8}{\rho^2} (\cosh(\rho)) + \frac{44}{\rho^3} (\sinh(\rho)) - \frac{72}{\rho^4} (2 \cosh(\rho) + 1) + \frac{216}{\rho^5} \sinh(\rho) \right] + \right. \\ \left. + \alpha \left[\frac{1}{\rho} \cosh(\rho) - \frac{8}{\rho^2} \left(\sinh(\rho) + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{44}{\rho^3} (\cosh(\rho)) + \frac{216}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) - \frac{144}{\rho^4} (\sinh(\rho)) \right] + \frac{2\gamma}{15} \right\}$$

A matriz M_4 , simétrica, somada a matriz do elemento de acordo com (6.70), não alterará a simetria da matriz final.

6.2.5. Quinta matriz:

Formada a partir do funcional F_5 apresentado em (6.39), considera os efeitos de vinculação elástica. A matriz M_5 apresentada na figura 6.7 é formada da seguinte maneira:

Matriz M_5 :

	c_i	c'_i	c_j	c'_j
δa_i	$\frac{13}{35}\alpha$	$\frac{11}{210}\alpha h_i$	$\frac{9}{70}\alpha$	$-\frac{13}{420}\alpha h_i$
$\delta a'_i$		$\frac{1}{105}\alpha h_i^2$	$\frac{13}{420}\alpha h_i$	$-\frac{1}{140}\alpha h_i^2$
δa_j			$\frac{13}{35}\alpha$	$-\frac{11}{210}\alpha h_i$
$\delta a'_j$				$\frac{1}{105}\alpha h_i^2$

Figura 6.7

a) Parcela v_D^2 :

$$F_{5a} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_v v_D^2 dx \quad (6.71)$$

$$\delta F_{5a} = \delta \tilde{v}^{n,t} h_i M_5 \tilde{v}^n \quad (6.72)$$

Onde:

$$c = v$$

$$a = v$$

$$\alpha = C_v$$

b) Parcela w_D^2 :

$$F_{5b} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_w w_D^2 dx \quad (6.73)$$

$$\delta F_{5b} = \delta \tilde{w}^{n,t} h_i M_5 \tilde{w}^n \quad (6.74)$$

Onde:

$$c = w$$

$$a = w$$

$$\alpha = C_w$$

c) Parcela φ_D^2 :

$$F_{5c} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_\varphi \varphi_D^2 dx \quad (6.75)$$

$$\delta F_{5c} = \delta \tilde{\varphi}^{n,t} h_i M_5 \tilde{\varphi}^n \quad (6.76)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$a = \varphi$$

$$\alpha = C_\varphi$$

d) Parcela $v_D \varphi_D$:

$$F_{5d} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_v [2v_D (h_z - z_D) \varphi_D] dx \quad (6.77)$$

$$\delta F_{5d} = (\delta \tilde{v}^{n,t} h_i M_5 \tilde{\varphi}^n) + (\delta \tilde{\varphi}^{n,t} h_i M_5^t \tilde{v}^n) \quad (6.78)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$a = v$$

$$\alpha = C_v (h_z - z_D)$$

e) Parcela φ_D^2 :

$$F_{se} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_v (h_z - z_D)^2 \varphi_D^2 dx \quad (6.79)$$

$$\delta F_{se} = \delta \varphi^{n,t} h_i M_s \varphi^n \quad (6.80)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$a = \varphi$$

$$\alpha = C_v (h_z - z_D)^2$$

f) Parcela $w_D \varphi_D$:

$$F_{sf} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_w [-2w_D (h_y - y_D) \varphi_D] dx \quad (6.81)$$

$$\delta F_{sf} = (\delta w^{n,t} h_i M_s \varphi^n) + (\delta \varphi^{n,t} h_i M_s w^n) \quad (6.82)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$a = w$$

$$\alpha = -C_w (h_y - y_D)$$

g) Parcela φ_D^2 :

$$F_{sg} = \int_{h_i} \frac{1}{2} C_w (h_y - y_D)^2 \varphi_D^2 dx \quad (6.83)$$

$$\delta F_{sg} = \delta \varphi^{n,t} h_i M_s \varphi^n \quad (6.84)$$

Onde:

$$c = \varphi$$

$$a = \varphi$$

$$\alpha = C_w (h_y - y_D)^2$$

A matriz M_5 , simétrica, somada à matriz de rigidez do elemento conforme as expressões (6.72), (6.74), (6.76), (6.78), (6.80), (6.82) e (6.84) não altera, a simetria da matriz final.

6.3. Vetor de Cargas:

O vetor de cargas ou vetor independente é formado pela energia potencial do carregamento externo, e obedece a seguinte ordem:

$$\tilde{f}_e = \{v_i \quad v'_i \quad w_i \quad w'_i \quad \phi_i \quad \phi'_i \quad v_j \quad v'_j \quad w_j \quad w'_j \quad \phi_j \quad \phi'_j\} \quad (6.85)$$

Portanto, para o elemento finito genérico, apresentado na figura 6.2, o vetor de cargas é dado por:

$$\tilde{f}_e = \left\{ \frac{1}{2} q_{yi} h_i \quad \frac{1}{12} q_{yi} h_i^2 \quad \frac{1}{2} q_{zi} h_i \quad \frac{1}{12} q_{zi} h_i^2 \quad -\frac{1}{2} m h_i \quad -\frac{1}{12} m h_i^2 \right. \\ \left. \frac{1}{2} q_{yj} h_i \quad -\frac{1}{12} q_{yj} h_i^2 \quad \frac{1}{2} q_{zj} h_i \quad -\frac{1}{12} q_{zj} h_i^2 \quad -\frac{1}{2} m h_i \quad \frac{1}{12} m h_i^2 \right\} \quad (6.86)$$

Onde as expressões apresentadas em (6.86) referem-se às contribuições das cargas distribuídas no elemento. O índice i refere-se ao elemento em questão.

Para todas as cargas atuantes no nó do elemento, a contribuição é feita diretamente neste nó.

Seja o nó i , seu vetor de cargas será do tipo:

$$\tilde{f}_e^i = \{P_{yi} \quad M_{Ezi} \quad P_{zi} \quad M_{Eyi} \quad -M_{fi} \quad B_{Ei}\} \quad (6.87)$$

Onde, pela ordem, as linhas do vetor f_e , representam as variações em relação a v_i , w_i , w_i' , ϕ_i e ϕ_i' . O vetor de cargas final obtém-se com a correta superposição de (6.87) em (6.86).

6.4. Matriz de Rigidez da Estrutura:

Depois de montada a matriz de rigidez local de cada elemento e seu correspondente vetor de cargas, cabe agrupá-los de maneira adequada a fim de obter-se a matriz de rigidez e o vetor de cargas da estrutura. Para tanto, verifica-se que a matriz e o vetor de cada elemento tem a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (6.88)$$

Onde:

$\tilde{K}_{ii}$ é uma matriz de efeitos correspondentes ao nó i.

$\tilde{K}_{ij}$ é uma matriz de efeitos correspondentes ao nó j.

$\tilde{K}_{ij}$ é uma matriz de efeitos em i devido ao nó j.

$\tilde{K}_{ji}$ é uma matriz de efeitos em j devido ao nó i.

t_i é o vetor dos parâmetros do nó i

t_j é o vetor dos parâmetros do nó j

f_i é o vetor de cargas devido ao nó i

f_j é o vetor de cargas devido ao nó j

Como a numeração dos nós e elementos, neste tratamento, é sequencial, a matriz e o vetor de cargas de uma estrutura com 3 elementos podem ser apresentados da seguinte maneira.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \tilde{K}_{11}^1 & \tilde{K}_{12}^1 & & \\ \tilde{K}_{21}^1 & \tilde{K}_{22}^1 + \tilde{K}_{22}^2 & \tilde{K}_{23}^2 & \\ & \tilde{K}_{32}^2 & \tilde{K}_{33}^2 + \tilde{K}_{33}^3 & \tilde{K}_{34}^3 \\ & & \tilde{K}_{43}^3 & \tilde{K}_{44}^3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_3 \\ \tilde{t}_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{f}_1^1 \\ \tilde{f}_2^1 + \tilde{f}_2^2 \\ \tilde{f}_3^2 + \tilde{f}_3^3 \\ \tilde{f}_4^3 \end{array} \right\} \quad (6.89)$$

Onde:

$\tilde{K}_{ij}$ é a matriz dos efeitos no nó i devido ao nó j no elemento K.

$\tilde{t}_i$ é o vetor dos parâmetros do nó i.

$\tilde{f}_i$ é o vetor de cargas devido ao nó i do elemento K.

6.5. Condições de Vinculação:

Para nós da estrutura onde ocorrem vínculos rígidos há anulação dos parâmetros v , w e ϕ , o que acarreta eliminação de linhas e colunas correspondentes.

Este fato causa problemas na organização da matriz e na resolução do sistema. Para contornar este problema, utiliza-se o artifício de zerar a linha e coluna da matriz, correspondente ao vínculo rígido, e fazer o elemento da diagonal igual a unidade. Simultaneamente zera-se a linha correspondente do vetor de cargas. Desta maneira não altera-se a numeração das linhas e das colunas da matriz inicial ou a sua ordem.

7. Determinação de Cargas Críticas

Há casos em que, para determinada barra, necessita-se saber o máximo valor da carga para a qual a barra não atinja um equilíbrio instável, na aproximação utilizada. Este valor é chamado de carga crítica da barra, e a obtenção do mesmo conduz a um problema de auto-valor.

Esta situação ocorre nos problemas de primeira espécie, e devido a discretização da barra pelo método dos elementos finitos, reduz o sistema de equações nos parâmetros de nó a um sistema de equações linearmente dependentes com a elástica conhecida apenas em sua forma.

Dentre os vários métodos existentes para o cálculo de auto-valores e auto-vetores adotou-se o método utilizado em [1] chamado iteração vetorial clássica ou método das potências. Neste trabalho utilizou-se a iteração vetorial inversa, que apresenta uma pequena variação em relação ao processo original, mas com resultados bastante confiáveis, além de ser de fácil compreensão e implementação em processos computacionais de cálculo.

No caso, este método ajusta-se adequadamente ao problema proposto, por fornecer principalmente o resultado que interessa ao cálculo estático de engenharia, ou seja, o menor auto-valor e seu respectivo auto-vetor.

Seja o seguinte problema de auto-valor:

$$(\underline{A} - \lambda \underline{B}) \underline{x} = 0 \quad (7.1)$$

Onde:

$\underline{A}$ é a matriz de rigidez da estrutura cujos elementos são formados por valores invariantes com a carga crítica.

$\underline{B}$ é a matriz de rigidez da estrutura cujos elementos são formados por valores alterados com a carga crítica.

$\underline{x}$ é o vetor dos parâmetros incógnitos.

λ é o auto-valor ou carga crítica.

Partindo-se de um vetor inicial arbitrário $\underline{x}^{(0)}$, no caso assumido como um vetor de componentes unitárias, pode-se formar uma sequência infinita de iterações para o vetor $\underline{x}$, através da seguinte expressão:

$$\underline{A} \underline{x}^{K+1} = \underline{B} \underline{x}^K \quad (7.2)$$

Onde:

$$K=0,1,2,3,\dots$$

Cada passo da iteração, de acordo com a expressão (7.2), requer a multiplicação da matriz $\underline{B}$ pelo vetor $\underline{x}^K$, e a solução do sistema de equações para o vetor de incógnitas $\underline{x}^{K+1}$. O vetor $\underline{x}^{K+1}$, solução do sistema de equações torna-se o vetor $\underline{x}^K$ da iteração seguinte. O vetor $\underline{x}^K$ aproxima-se assintoticamente na direção do auto-vetor correspondente ao menor auto-valor.

Aproximações para o auto-valor são obtidas a cada iteração da expressão (7.2), através do quociente entre os correspondentes elementos dos vetores iterados $\underline{x}^K$ e $\underline{x}^{K+1}$, ou seja:

$$\lambda_n \cong \frac{x_{\sim i}^K}{x_{\sim i}^{K+1}} \quad (7.3)$$

Onde:

$$i=1,2,3, \dots, n$$

Caso o problema tenha dois auto-valores sucessivos de mesmo módulo e sinais contrários o cálculo do auto-valor pode ser feito a partir dos valores de $\underline{x}^{K+2}$ e $\underline{x}^K$, da seguinte forma:

$$\lambda_K \cong \sqrt{\frac{\sum_{\sim i} x_{\sim i}^K}{\sum_{\sim i} x_{\sim i}^{K+2}}} \quad (7.4)$$

7.1. Convergência do Processo de Obtenção do Menor Auto-Valor.

Considerando-se um problema que envolve matrizes simétricas $\underline{A}$ e $\underline{B}$ de dimensão $(n \times n)$ pode-se dizer que este problema irá gerar um sistema ortonormal de n auto-vetores $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ correspondentes a n auto-valores reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Onde λ_1 é o menor auto-valor em módulo, com a seguinte ordem:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| \quad (7.5)$$

Desta forma o vetor arbitrário inicial $\underline{x}^{(0)}$, utilizado em (7.2), pode ser escrito através de seguinte expansão em auto-vetores:

$$\underline{x}^{(0)} = C_1 \underline{e}_{\sim 1} + C_2 \underline{e}_{\sim 2} + C_3 \underline{e}_{\sim 3} + \dots + C_n \underline{e}_{\sim n} \quad (7.6)$$

Onde:

$\underline{e}_{\sim i}$ São auto-vetores que formam uma base dos auto-vetores solução da equação (7.1)

C_i São constantes dependentes de $\underline{e}_{\sim i}$ com pelo menos $C_1 \neq 0$.

Visto que $\underline{e}_{\sim i}$ é um auto-vetor correspondente a um auto-valor λ_i , pode-se representar o vetor iterado $\underline{x}^{(1)}$ como:

$$\underline{x}^{(1)} = C_1 \frac{1}{\lambda_1} \underline{e}_{\sim 1} + C_2 \frac{1}{\lambda_2} \underline{e}_{\sim 2} + C_3 \frac{1}{\lambda_3} \underline{e}_{\sim 3} + \dots + C_n \frac{1}{\lambda_n} \underline{e}_{\sim n} \quad (7.7)$$

Logo, generalizando-se:

$$\underline{x}^{(K)} = C_1 \frac{1}{\lambda_1^K} \underline{e}_{\sim 1} + C_2 \frac{1}{\lambda_2^K} \underline{e}_{\sim 2} + C_3 \frac{1}{\lambda_3^K} \underline{e}_{\sim 3} + \dots + C_n \frac{1}{\lambda_n^K} \underline{e}_{\sim n} \quad (7.8)$$

Partindo-se da ordem crescente dos auto-valores apresentada em (7.5), e colocando-se em evidência o inverso de λ_1^K , tem-se:

$$\underline{x}^{(K)} = \frac{1}{\lambda_1^K} \left\{ C_1 \underline{e}_{\sim 1} + C_2 \left(\frac{\lambda_1^K}{\lambda_2^K} \right) \underline{e}_{\sim 2} + C_3 \left(\frac{\lambda_1^K}{\lambda_3^K} \right) \underline{e}_{\sim 3} + \dots + C_n \left(\frac{\lambda_1^K}{\lambda_n^K} \right) \underline{e}_{\sim n} \right\} \quad (7.9)$$

Devido a (7.5) os quocientes, $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^K$ convergem para zero com o incremento de K . Portanto na expressão (7.9), nos termos entre colchetes, o primeiro termo torna-se preponderante, determinando desta maneira o menor auto-valor e seu respectivo auto-vetor.

7.2. Quociente de Rayleigh

No problema proposto para determinação de auto-valores e auto-vetores, o objetivo principal é determinar-se o auto-valor, ou carga crítica, com a melhor precisão possível, pois o auto-vetor fornece apenas a forma de flambagem da barra.

Um modo de melhorar a precisão no cálculo dos auto-valores a partir de um auto-vetor de baixa precisão, é utilizar o quociente de Rayleigh.

Sabe-se que um auto-vetor $\tilde{e}^*$, de baixa precisão, ao ser aplicado na equação (7.1) não produzirá como resultado um vetor nulo mas um vetor diferente de zero. Analogamente, quando a matriz $\tilde{B}$ for a identidade haverá o mesmo problema ou seja:

$$(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) \tilde{x}^* = \tilde{r}^* \quad (7.10)$$

Onde $\tilde{r}^*$ é o vetor diferente de zero.

Rayleigh mostrou que o auto-valor λ que torna mínima a norma pelo maior valor de $\tilde{r}^*$ é dado por:

$$\lambda = \frac{\tilde{x}^{*,t} \tilde{A} \tilde{x}^*}{\tilde{x}^{*,t} \tilde{x}^*} \quad (7.11)$$

Para utilizar a expressão (7.11) na iteração vetorial, Wilkinson [4] recomenda que o auto-valor seja calculado da seguinte forma:

$$\lambda_K = \frac{\tilde{x}^{K,t} \tilde{A} \tilde{x}^{K+1}}{\tilde{x}^{K,t} \tilde{x}^K} \quad (7.12)$$

A convergência dos auto-valores utilizando a expressão (7.12), na expressão (7.10), pode ser mostrada escrevendo-se os vetores $\tilde{x}^K$ e $\tilde{x}^{K+1}$ através da expressão (7.9), ou seja:

$$\tilde{x}^K = \frac{1}{\lambda_1^K} \left[C_1 \tilde{e}_1 + C_2 n_2^k \tilde{e}_2 + \dots + C_n n_n^k \tilde{e}_n \right] \quad (7.13)$$

$$\tilde{x}^{K+1} = \frac{1}{\lambda_1^{K+1}} \left[C_1 \tilde{e}_1 + C_2 n_2^{k+1} \tilde{e}_2 + \dots + C_n n_n^{k+1} \tilde{e}_n \right] \quad (7.14)$$

Onde:

λ_1 é o menor auto-valor.

n_i é uma relação entre λ_1 e os demais auto-valores, ou seja:

$$n_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} < 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Substituindo-se $\tilde{x}^k$ e $\tilde{x}^{K+1}$ dados pelas expressões (7.13) e (7.14) na expressão (7.12), resulta a seguinte expressão, devido à ortogonalidade dos vetores da base.

$$\lambda_k = \lambda_1 \frac{[C_1 + C_2 n_2^{2k} + \dots + C_n n_n^{2k}]}{[C_1 + C_2 n_2^{2k+1} + \dots + C_n n_n^{2k+1}]} \quad (7.15)$$

Nota-se, na expressão (7.15), que, devido as relações n_i serem menores que 1, o auto-valor λ_k tende para λ_1 à medida que o número de iterações k aumenta. Portanto, a expressão (7.12) tem maior taxa de convergência que a expressão (7.3) pois, como mostra a expressão (7.15), a atenuação é relacionada a um expoente elevado a duas vezes o número de iterações. Entretanto, há uma perda maior na precisão dos auto-vetores.

Tendo em vista a expressão (7.12), foi utilizada uma outra expressão para o cálculo de auto-valores com mesmo módulo e sinais opostos. Esta expressão é dada por:

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\tilde{x}^{K,t} \tilde{x}^K}{\tilde{x}^{k+2,t} \tilde{x}^{k+2}}} \quad (7.16)$$

A demonstração da convergência na expressão (7.16) é analoga à feita para a expressão (7.12).

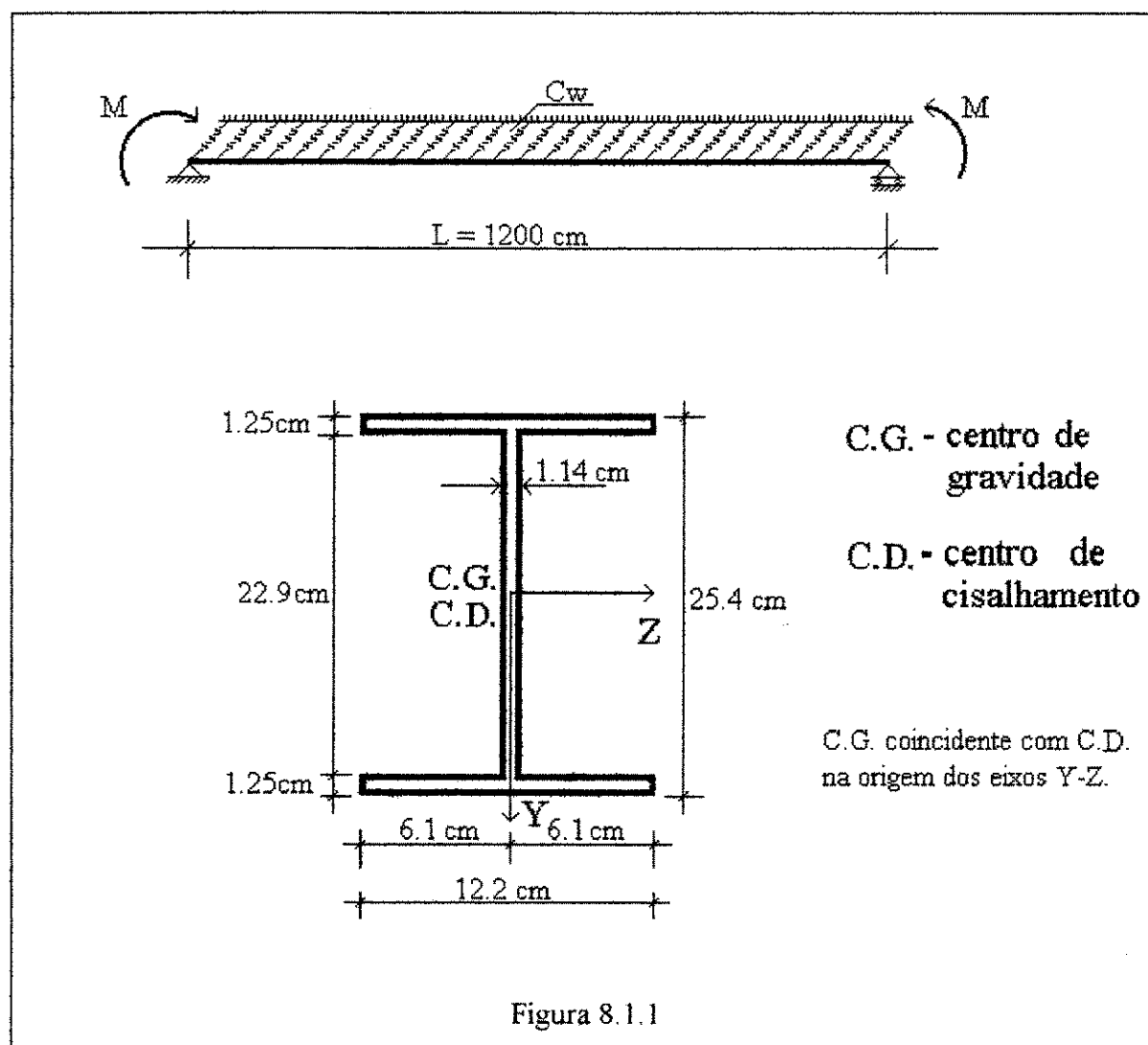
Conforme apresentado em [1], a convergência do processo apresenta melhores resultados com a utilização das expressões (7.12) e (7.16), o que levou a utilização das mesmas neste trabalho.

Para o cálculo de todos os auto-valores e seus respectivos auto-vetores recomenda-se métodos mais eficientes, visto que a iteração vetorial adapta-se melhor apenas para o cálculo de uma parte do conjunto de auto-valores.

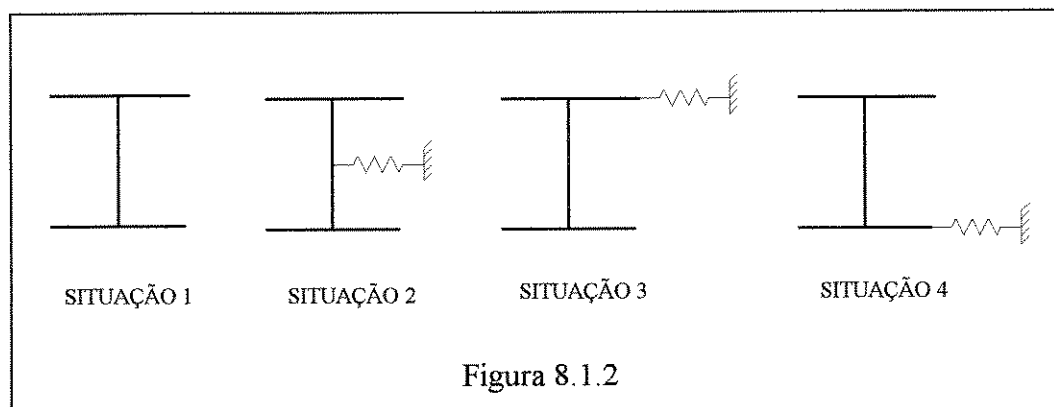
8. Exemplos:

8.1. Exemplo 1: Fundação Elástica em Pontos Diferentes da Seção Transversal.

Em uma barra de seção delgada com vinculação elástica, o ponto de aplicação do vínculo elástico na seção transversal pode ser determinante no valor de carga crítica. Neste exemplo, de acordo com a figura 1, tem-se uma barra de seção I submetida a um momento fletor nas extremidades e a uma vinculação elástica contínua em um plano horizontal, perpendicular ao plano de atuação do momento.



No caso, analisam-se os valores de momento crítico para diversos valores de constante elástica (C_w) com o vínculo elástico no C.G., na mesa superior e na mesa inferior da barra. (figura 8.1.2).



As características geométricas da seção transversal da barra são as seguintes:

$$A=56.9 \text{ cm}^2$$

$$J_y=312 \text{ cm}^4$$

$$E=205000 \text{ Mpa}$$

$$J_z=5610 \text{ cm}^4$$

$$G=80000 \text{ Mpa}$$

$$J_{\omega}=55158 \text{ cm}^6$$

$$i_d^2=104.08 \text{ cm}^2$$

$$J_t=28.43 \text{ cm}^4$$

Neste exemplo tem-se um problema de 1ª espécie nos deslocamentos w e ϕ . A determinação do valor de momento crítico é feito em função da instabilidade lateral da barra.

A seguir faz-se uma análise de cada situação apresentada na figura (8.1.2).

a) Situação 1 - Barra Sem Vínculo Elástico:

Neste caso, com a inexistência de vinculação elástica, as equações diferenciais que regem o problema, oriundas das equações (5.22), (5.23) e (5.24) devidamente simplificadas, são as seguintes:

$$EJ_z V_D^{iv} = 0 \quad (8.1.1)$$

$$EJ_y W_D^{iv} + M_z \varphi_D'' = 0 \quad (8.1.2)$$

$$EJ_{\omega} \varphi_D^{iv} - GJ_t \varphi_D'' + M_z w_D'' = 0 \quad (8.1.3)$$

As equações diferenciais são independentes nos deslocamentos v e acopladas nos deslocamentos w e φ .

As funções adotadas que satisfazem as condições naturais e de vinculação da barra em estudo são as seguintes:

$$V_D = A \operatorname{sen}(\lambda_n x) \quad (8.1.4)$$

$$W_D = B \operatorname{sen}(\lambda_n x) \quad (8.1.5)$$

$$\varphi_D = C \operatorname{sen}(\lambda_n x) \quad (8.1.6)$$

onde:

A, B e C são valores constantes e arbitrários. E,

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{L} \quad (8.1.7)$$

Sendo n o número de semi-ondas que a barra assume após a flambagem.

Substituindo-se as funções (8.1.4), (8.1.5) e (8.1.6) e suas respectivas derivadas nas equações (8.1.1), (8.1.2) e (8.1.3), com a eliminação dos termos em comum, obtém-se o seguinte sistema de equações nos parâmetros A, B e C.

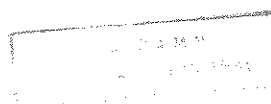
$$\begin{cases} EJ_z \lambda_n^4 \operatorname{sen}(\lambda_n x) A = 0 \\ EJ_y \lambda_n^4 \operatorname{sen}(\lambda_n x) B - M_z \lambda_n^2 \operatorname{sen}(\lambda_n x) C = 0 \\ EJ_{\omega} \lambda_n^4 \operatorname{sen}(\lambda_n x) C + GJ_t \lambda_n^2 \operatorname{sen}(\lambda_n x) C - M_z \lambda_n^2 \operatorname{sen}(\lambda_n x) B = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} EJ_z \lambda_n^4 A = 0 \end{cases} \quad (8.1.8)$$

$$\begin{cases} EJ_y \lambda_n^4 B - M_z \lambda_n^2 C = 0 \end{cases} \quad (8.1.9)$$

$$\begin{cases} -M_z \lambda_n^2 B + [EJ_{\omega} \lambda_n^4 + GJ_t \lambda_n^2] C = 0 \end{cases} \quad (8.1.10)$$



Este sistema de equações na forma de matrizes é o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} EJ_z \lambda_n^4 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y \lambda_n^4 & -M_z \lambda_n^2 \\ 0 & -M_z \lambda_n^2 & EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_t \lambda_n^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.1.11)$$

Tornando-se nulo o determinante do sistema de equações (8.1.11) obtém-se a seguinte expressão para M_z :

$$M_z = \lambda_n \sqrt{EGJ_y J_t} \sqrt{1 + \frac{EJ_\omega}{GJ_t} \lambda_n^2} \quad (8.1.12)$$

Esta expressão representa o momento crítico (M_{cr}) em função das características elásticas e geométricas da barra e do modo de flambagem (n) desejado.

Resultados numéricos:

Para o caso de não existir uma vinculação elástica os valores de momento crítico foram obtidos através da expressão (8.1.12), no caso de solução analítica, e através do programa de computador desenvolvido.

Na tabela 1 apresentam-se os resultados obtidos para sucessivos modos de flambagem (n) e o erro percentual da solução numérica relativo à solução analítica.

TABELA 8.1.1			
n	M_{cr} (KN.cm)		DESVIO (%)
	Solução analítica	Solução programa	
1	3210.940	3210.9669	0.0008
2	6731.822	6732.6250	0.0119
3	10828.317	10835.4557	0.0659
4	15700.305	15734.4134	0.2172
5	21484.805	21602.5984	0.5483

Verifica-se que o erro relativo para o momento crítico de instabilidade, calculado pelo programa computacional desenvolvido, é muito pequeno, mostrando a boa precisão do programa.

b) Situação 2 - Vínculo Elástico no Centro de Cisalhamento.

Nesta situação tem-se uma vinculação elástica aplicada no centro de cisalhamento da seção transversal ao longo de toda barra. Esta vinculação tem valores C_w e direção paralela ao eixo Z. (figura 8.1.2 - situação 2).

As seguintes equações diferenciais deste problema são obtidas das equações (5.22), (5.23) e (5.24) devidamente simplificadas.

$$EJ_z V_D^{iv} = 0 \quad (8.1.13)$$

$$EJ_y W_D^{iv} + M_z \phi_D'' + C_w W_D = 0 \quad (8.1.14)$$

$$EJ_\omega \phi_D^{iv} - GJ_t \phi_D'' + M_z w_D'' = 0 \quad (8.1.15)$$

As funções aproximadoras para os deslocamentos nas direções v , w e ϕ são idênticas às apresentadas em (8.1.4), (8.1.5) e (8.1.6). Substituindo-se estas equações e suas derivadas em (8.1.13), (8.1.14) e (8.1.15) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} EJ_z \lambda_n^4 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y \lambda_n^4 + C_w & -M_z \lambda_n^2 \\ 0 & -M_z \lambda_n^2 & EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_t \lambda_n^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.1.16)$$

Igualando-se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equações (8.1.16) a zero tem-se a seguinte expressão para M_z ou momento crítico (M_{cr}).

$$M_z = \lambda_n \sqrt{EGJ_y J_t} \sqrt{\left(1 + \frac{C_w}{EJ_y} \frac{1}{\lambda_n^4}\right) \left(1 + \frac{EJ_\omega}{GJ_t} \lambda_n^2\right)} \quad (8.1.17)$$

Analisando-se a expressão (8.1.17) verifica-se a influência da constante elástica (C_w). Esta influência é moderada pela rigidez à flexão (Ej_y) em relação ao eixo y, associada aos deslocamentos devido flambagem lateral.

Desta forma, para valores elevados de C_w e dominantes em relação à rigidez Ej_y , há influência no que se refere ao modo de flambagem e valor de carga crítica.

Assim, devido à existência de vinculação elástica, o menor valor de carga crítica pode não ocorrer para o 1º modo de flambagem mas para os modos seguintes. Portanto, torna-se necessário a procura da menor carga crítica através dos subsequentes modos de flambagem a partir do primeiro.

Apresenta-se na tabela 8.1.2 alguns valores de momento crítico para a barra da figura (8.1.1), em função de diferentes valores de constante elástica (C_w) e modos de flambagem ou número de semi-ondas (n), utilizando-se a expressão (8.1.17).

TABELA 8.1.2			
n	M_{cr} (KN.cm)		
	$C_w=1.10^{-3}$ KN/cm ²	$C_w=1.10^{-2}$ KN/cm ²	$C_w=1.10^{-1}$ KN/cm ²
1	6680.2 *	18800.5	58666.8
2	7398.9	11814.6 *	31432.4
3	11048.5	12862.0	24475.3
4	15802.0	16689.7	23811.2 *
5	21541.9	22049.4	26597.1

(*) Menor valor de M_{cr} na coluna correspondente a um valor de vínculo elástico.

Verifica-se que para valores crescentes de C_w o valor de M_{cr} é diretamente proporcional, como se poderia observar facilmente através da expressão (8.1.17). Observa-se também que o modo de flambagem para a menor carga crítica muda de acordo com o valor de C_w . Tem-se para $C_w=1.10^{-3}$ KN/cm² a menor carga crítica associada ao primeiro modo de flambagem, para $C_w=1.10^{-1}$ KN/cm² ao quarto modo de flambagem.

Resultados numéricos:

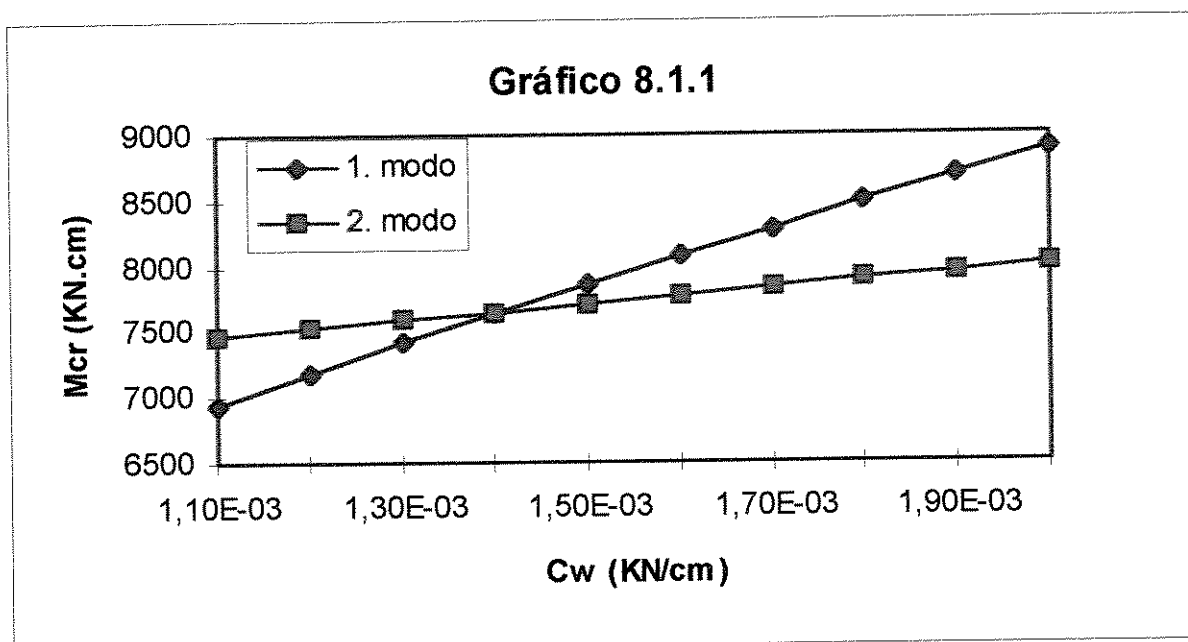
Utilizando-se a expressão (8.1.17) na determinação dos valores de momento crítico, novamente verifica-se a boa precisão do programa em relação à solução analítica.

Com a inclusão de um vínculo elástico no centro de cisalhamento da seção transversal, mostra-se a influência do valor de constante elástica no modo de flambagem da barra.

Na tabela (8.1.3) tem-se os momentos críticos (M_{cr}) para valores de constante elástica (C_w) entre 1.10^{-5} e 2.10^{-3} KN/cm².

TABELA 8.1.3					
E= 205000		Jy= 312		Jw= 55158	
G= 80000		Jz= 5610		Jt= 28,43	
A= 56,9		L= 1200		hy= 0	
Cw (KN / cm ²)	Mcr (KN . cm)				DESVIO p/menor M _{cr} (%)
	Solução analítica		Solução programa		
	1. modo	2. modo	1. modo	2. modo	
1,00E-05	3263,9372	6738,8195	3263,964	6739,6219	-0,00082109
1,00E-04	3706,9689	6801,4775	3707,0032	6802,2864	-0,00092528
1,00E-03	6680,1903	7398,9307	6680,2421	7400,3547	-0,00077543
1,10E-03	6932,2740	7462,3623	6932,3563	7463,155	-0,0011872
1,20E-03	7175,5072	7525,2593	7175,6385	7525,897	-0,00182984
1,30E-03	7410,7614	7587,6349	7410,9681	7588,6349	-0,00278919
1,40E-03	7638,7738	7649,5018	7638,8531	7650,2519	-0,00103812
1,50E-03	7860,1746	7710,8724	7860,3015	7711,7997	-0,01202588
1,60E-03	8075,5078	7771,7584	8075,7088	7772,4923	-0,00944317
1,70E-03	8285,2463	7832,1711	8285,4003	7832,9046	-0,00936522
1,80E-03	8489,8049	7892,1214	8489,9668	7892,8959	-0,00981358
1,90E-03	8689,5493	7951,6197	8689,809	7952,5445	-0,01163033
2,00E-03	8884,8043	8010,6761	8885,0585	8011,4624	-0,00981565

Verifica-se no gráfico (8.1.1) que a partir de um certo valor de C_w o menor valor de M_{cr} não mais ocorre para o primeiro modo de flambagem e sim para o segundo.



Desta maneira pode-se dizer que o acréscimo no valor de constante elástica, para o vínculo no centro de cisalhamento, representa também um acréscimo no valor de carga crítica, porém este acréscimo não é sempre proporcional, visto que para determinados valores de C_w ocorrem mudanças no modo de flambagem da barra, e consequentemente na taxa de acréscimo do momento crítico em função da constante elástica C_w .

O valor de C_w para o qual ocorre mudança no modo de flambagem, pode ser encontrado utilizando-se a expressão (8.1.17), igualando-se os valores de M_z para modos de flambagem sucessivos.

c) Situações 3 e 4 (vínculo elástico nas mesas).

Analogamente à situação 2, as situações 3 e 4 mostradas na figura 8.1.2 indicam uma vinculação elástica ao longo de toda a barra. Porém esta vinculação encontra-se em uma das mesas da seção transversal e não no centro de cisalhamento.

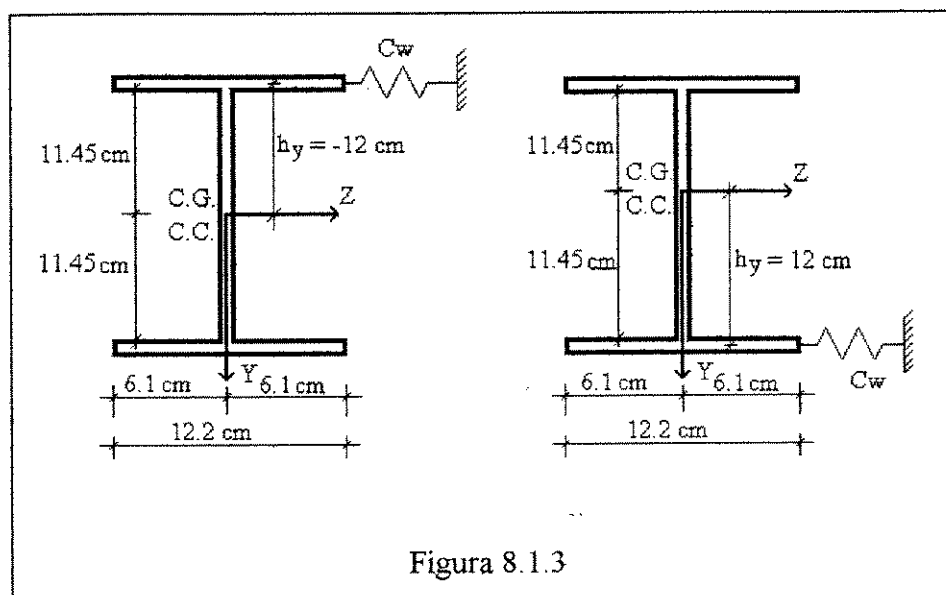


Figura 8.1.3

A posição de aplicação do vínculo elástico é identificada através de uma coordenada h_y relativa ao C.G. da seção transversal, (figura 8.1.3).

A partir das equações (5.22), (5.23) e (5.24) obtém-se as seguintes equações diferenciais que representam estas situações.

$$EJ_z V_D^{iv} = 0 \quad (8.1.18)$$

$$EJ_y W_D^{iv} + M_z \varphi_D'' + C_w [W_D - (h_y - y_D) \varphi_D] = 0 \quad (8.1.19)$$

$$EJ_\omega \varphi_D^{iv} - GJ_t \varphi_D'' + M_z W_D'' - C_w W_D (h_y - y_D) + C_w (h_y - y_D)^2 \varphi_D = 0 \quad \dots(8.1.20)$$

onde y_D é a posição do centro de cisalhamento.

Substituindo-se as funções aproximadoras apresentadas em (8.1.4), (8.1.5) e (8.1.6), e suas derivadas, nas equações (8.1.18), (8.1.19) e (8.1.20) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} EJ_z \lambda_n^4 & 0 & 0 \\ 0 & [EJ_y \lambda_n^4 + C_w] & [-M_z \lambda_n^2 - C_w(h_y - y_D)] \\ 0 & [-M_z \lambda_n^2 - C_w(h_y - y_D)] & [EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_t \lambda_n^2 + C_w(h_y - y_D)^2] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots(8.1.21)$$

Igualando-se a zero o determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equações (8.1.21), tem-se a seguinte expressão para M_z ou momento crítico (M_{cr}).

$$M_z = -\frac{C_w(h_y - y_D)}{\lambda_n^2} \pm \lambda_n \sqrt{EGJ_y J_t} \sqrt{\left(1 + \frac{C_w}{EJ_y \lambda_n^4}\right) \left(1 + \frac{EJ_\omega \lambda_n^2}{GJ_t} + \frac{C_w(h_y - y_D)^2}{\lambda_n^2 GJ_t}\right)} \quad \dots(8.1.22)$$

A expressão (8.1.22) resulta em dois valores possíveis para momento crítico, os valores com sinal positivo indicam momento atuando no mesmo sentido do momento inicialmente adotado, (figura 8.1.1). Valores com sinal negativo indicam momento crítico atuante em sentido contrário ao adotado.

Resultados numéricos:

Para as situações 3 e 4 mostra-se que o posicionamento do vínculo elástico nas mesas da seção transversal altera significativamente os valores de momento crítico, no exemplo em estudo.

Nestas situações é necessário que se especifique claramente qual mesa da seção é comprimida e qual é tracionada. O vínculo elástico na mesa comprimida, leva a valores de M_{cr} mais elevados em comparação com o vínculo no centro de cisalhamento, e na mesa tracionada determina valores menores de M_{cr} que no centro de cisalhamento.

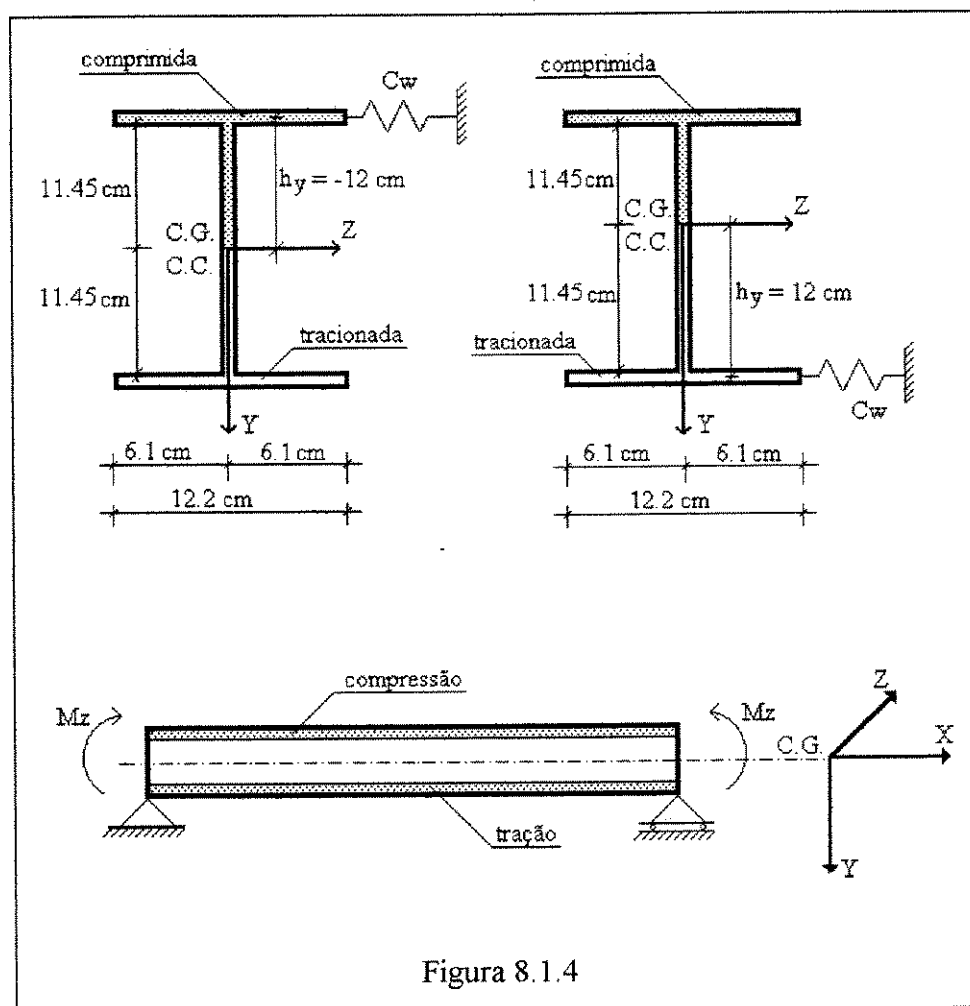
Para a seção transversal em estudo (figura 8.1.4), atribui-se as duas situações seguintes:

- vínculo elástico aplicado na mesa comprimida. ($h_y = -12$ cm).

- vínculo elástico aplicado na mesa tracionada. ($h_y = 12$ cm).

Utiliza-se a expressão (8.1.22) para determinação dos valores de M_{cr} , alterando-se conforme o caso o valor de h_y .

Devido as características geométricas da seção transversal o posicionamento do vínculo na direção do eixo Z não interfere no resultado de M_{cr} como se pode verificar na expressão (8.1.22).

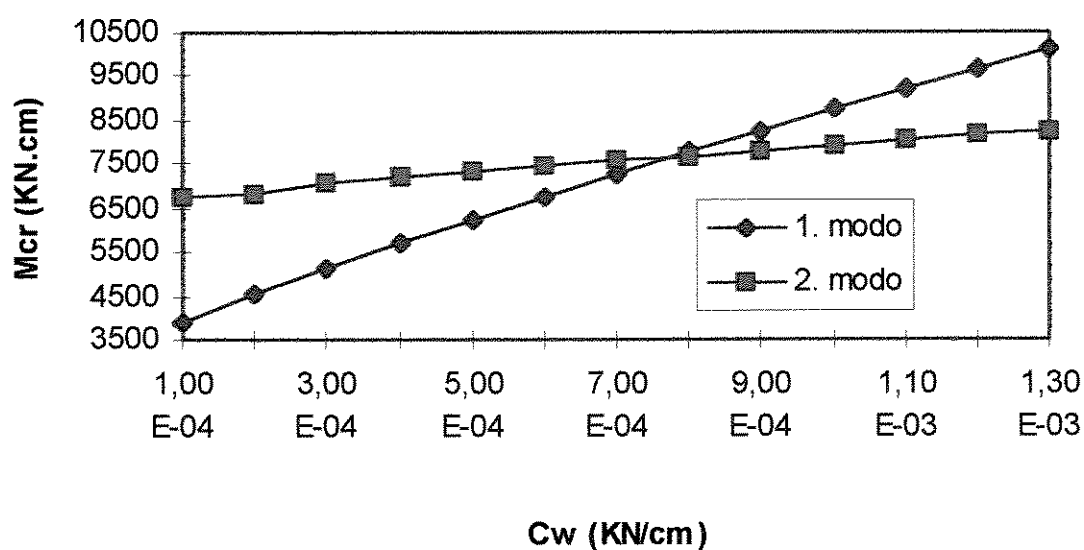


Na tabela (8.1.4) tem-se os valores de momento crítico (M_{cr}) em função dos valores de constante elástica (C_w), para o caso em que $h_y = -12$ cm. E no gráfico (8.1.2) mostram-se as curvas representativas do 1º e 2º modos de flambagem, bem como o ponto de transição entre estes modos.

TABELA 8.1.4

E= 205000						Jy= 312		Jw= 55158	
G= 80000						Jz= 5610		Jt= 28,43	
A= 56,9						L= 1200		hy= -12	
Obs.: Dados em KN e centímetros.									
Cw (KN / cm ²)	Mcr (KN . cm)					DESVIO P/menor M _{cr} (%)			
	Solução analítica		Solução programa						
	1. modo	2. modo	1. modo	2. modo					
1,00E-04	3898,5727	6852,1563	3898,5839	6725,0886	-0,000287285				
2,00E-04	4531,0655	6971,9180	4531,0318	6823,8505	0,000743754				
3,00E-04	5124,8983	7091,1253	5124,903	7078,799	-9,17091E-05				
4,00E-04	5689,8144	7209,7960	5689,7662	7207,5615	0,000847128				
5,00E-04	6232,1308	7327,9470	6232,1157	7327,1946	0,000242293				
6,00E-04	6756,2129	7445,5946	6756,0776	7424,9274	0,002002601				
7,00E-04	7265,2224	7562,7541	7265,1103	7562,5348	0,001542967				
8,00E-04	7761,5336	7679,4402	7761,3929	7678,1422	0,016902274				
9,00E-04	8246,9810	7795,6668	8247,1098	7796,5668	-0,011544875				
1,00E-03	8723,0157	7911,4474	8723,2071	7903,1214	0,105239908				
1,10E-03	9190,8075	8026,7946	9190,6483	8027,6164	-0,010238209				
1,20E-03	9651,3151	8141,7208	9651,4734	8142,7111	-0,012163276				
1,30E-03	10105,3352	8256,2376	10104,639	8256,909	-0,008132033				

Gráfico 8.1.2

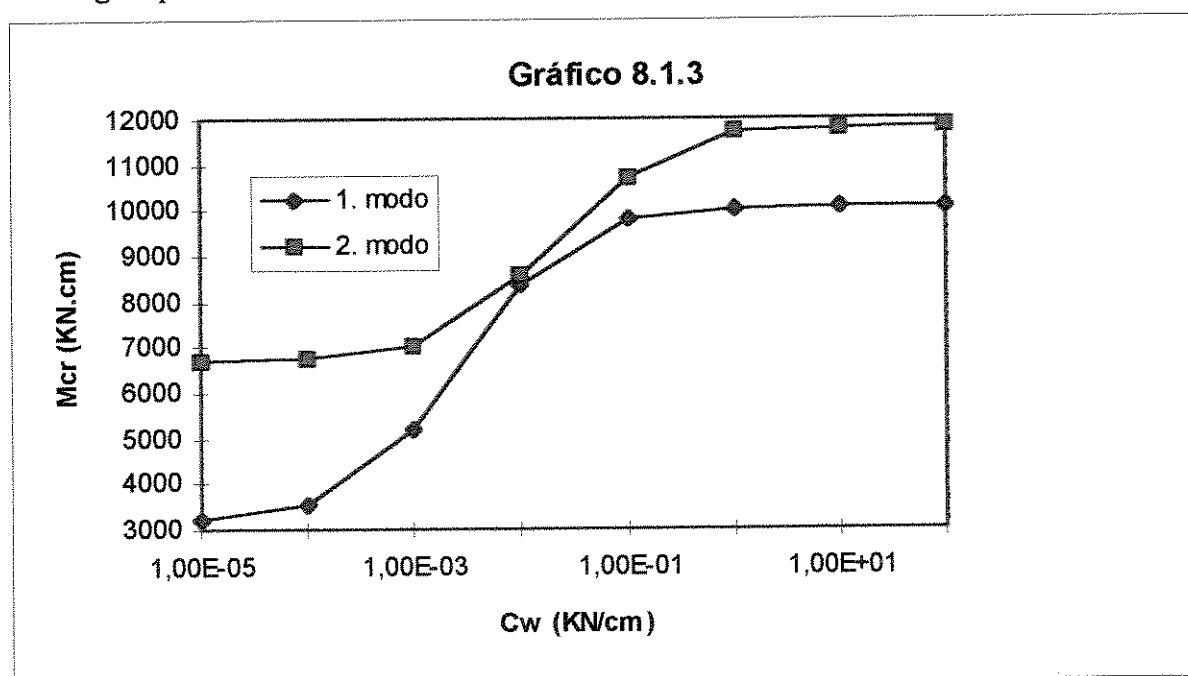


De modo análogo à situação 2, quando o vínculo elástico encontra-se na mesa comprimida, a partir de certo valor para C_w ocorre uma mudança no modo de flambagem da barra determinando valores de M_{cr} para o segundo modo.

Na tabela (8.1.5) tem-se os valores de momento crítico (M_{cr}) em função dos valores de constante elástica (C_w), para $h_y = 12$ cm.

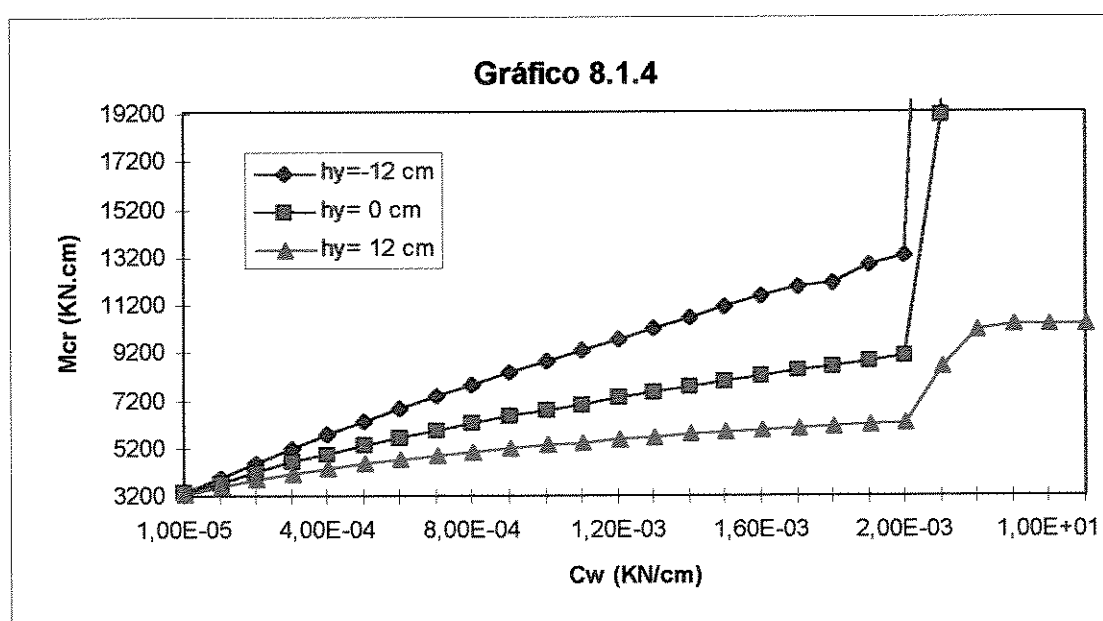
TABELA 8.1.5					
E= 205000		Jy= 312		Jw= 55158	
G= 80000		Jz= 5610		Jt= 28,43	
A= 56,9		L= 1200		hy= 12	
Obs.: Dados em KN e centímetros.					
Cw (KN / cm ²)	Mcr (KN . cm)				DESVIO p/menor M _{cr} (%)
	Solução analítica		Solução programa		
	1. modo	2. modo	1. modo	2. modo	
1,00E-05	3247,886	6735,127	3227,148	6685,221	-0,638516771
1,00E-04	3548,407	6764,315	3548,352	6727,477	-0,001552810
1,00E-03	5221,356	7036,032	5221,401	7036,302	0,000867591
1,00E-02	8360,774	8582,632	8361,115	8584,078	0,004082158
1,00E-01	9816,837	10964,740	9817,039	10695,294	0,002055652
1,00E-00	10036,783	11715,410	10036,917	11715,970	0,001336086
1,00E+01	10060,011	11809,672	10060,112	11810,209	0,001007951
1,00E+02	10062,347	11819,349	10062,445	11819,884	0,000977903

No gráfico (8.1.3) mostra-se as curvas representativas do 1º e 2º modos de flambagem para os dados da tabela 8.1.5.



Com base nas características geométricas e de carregamento deste problema, verifica-se que para o caso de vínculo elástico na mesa tracionada, o acréscimo no valor de C_w , não causa mudança no modo de flambagem da barra. Este fato mostra que a flambagem de cada barra ocorre em princípio na região comprimida da seção. No caso de vinculação elástica na região tracionada, o seu efeito na forma de flambagem não é influente, visto que a região comprimida é que tende a flambar e, no caso, não possui vínculos que impeçam deslocamentos de maneira direta. Esta observação necessita de maiores estudos para sua comprovação ou não.

Com base nas tabelas (8.1.3), (8.1.4) e (8.1.5) tem-se o seguinte gráfico representativo dos valores de M_{cr} em função de C_w .

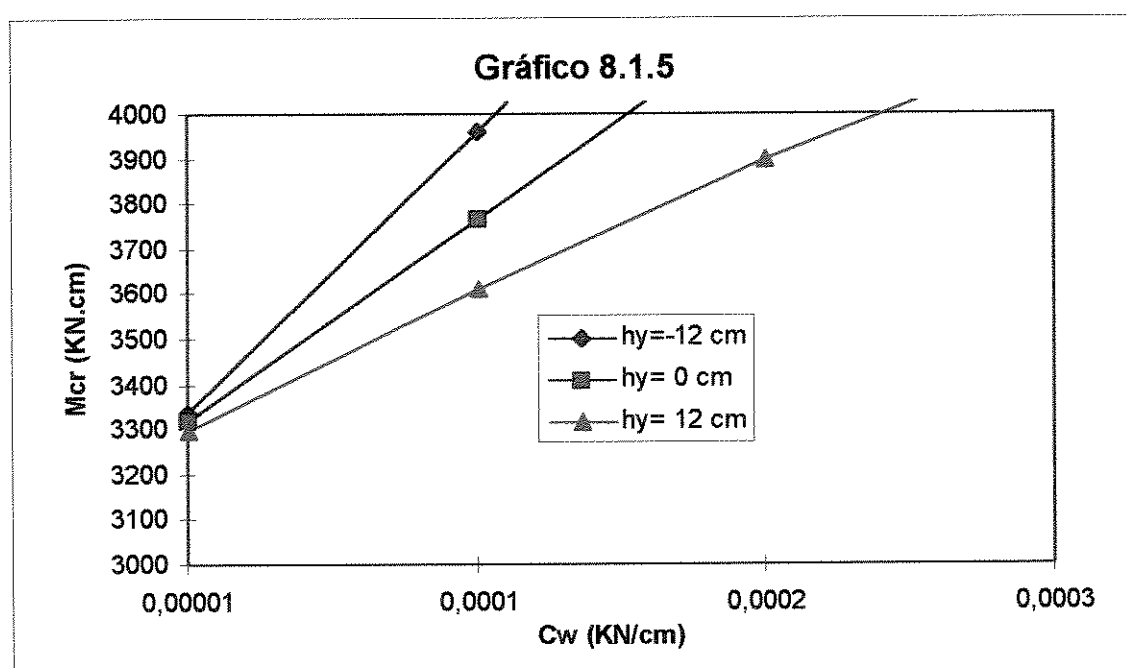


Deve-se levar em conta, no gráfico (8.1.4), o fato de estar representado sempre o menor valor de momento crítico, independente do modo de flambagem.

Percebe-se que a posição do vínculo elástico na seção transversal influi no valor de momento crítico M_{cr} , pois os maiores valores são obtidos quando tem-se o vínculo elástico aplicado na mesa comprimida, e os menores quando aplicado na mesa tracionada.

Apesar do vínculo elástico aplicado na mesa tracionada resultar em valores menores de M_{cr} , esta ainda é uma solução favorável se comparado com a inexistência de vinculação. Este fato pode ser verificado através das tabelas (8.1.1) e (8.1.5), onde mesmo para valores de C_w muito pequenos os correspondentes valores de M_{cr} são maiores para o caso com vinculação.

No gráfico (8.1.5) tem-se uma ampliação das curvas de M_{cr} para os valores iniciais de C_w , mostrando de maneira mais clara a diferença entre os valores de M_{cr} .



Conclusão:

Neste exemplo mostrou-se os cuidados que devem ser tomados quando da existência de vinculação elástica e a influência do seu posicionamento no comportamento de uma barra de seção delgada.

Os resultados obtidos a partir do programa computacional mostram uma precisão alcançada muito boa, associado ao fato de permitir o cálculo de modos de flambagem seguintes ao primeiro com as respectivas cargas críticas.

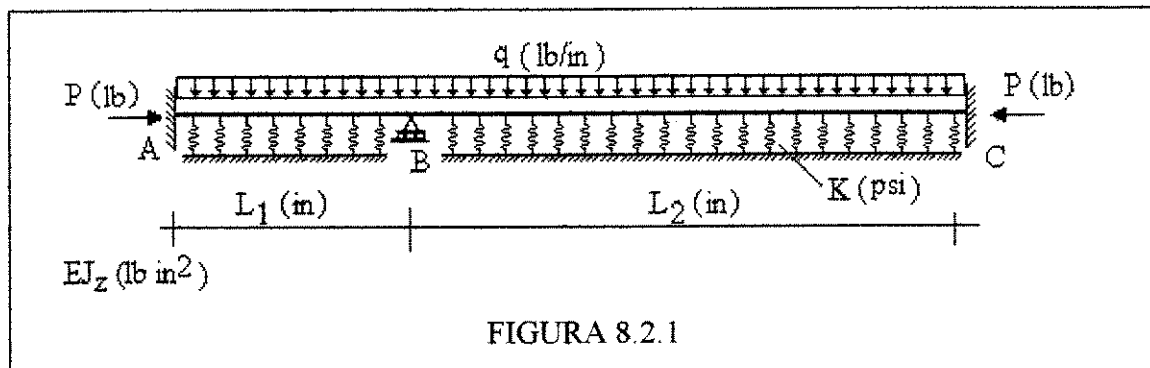
Apesar de os exemplos mostrarem que a colocação de contraventamento na mesa comprimida leva a maior momento fletor resistente, deve-se não esquecer que se o

contraventamento estiver na mesa tracionada obtém-se os menores momentos resistentes. Assim, na utilização prática destas situações de contraventamento recomenda-se cuidados adicionais, pois se a barra sofrer carregamentos de sentidos contrários o momento resistente pode ser menor que o esperado. Nestes casos é preferível posicionar o contraventamento no centro de cisalhamento da seção. Desta maneira garante-se a manutenção do momento fletor resistente independente da inversão de sentido do carregamento.

Neste exemplo analisou-se somente as condições de instabilidade da barra, não levando em conta os limites de resistência do material utilizado.

8.2. Exemplo 2: Esforços em Barra Sobre Vínculo Elástico Contínuo.

Seja a barra apresentada na figura (8.2.1), apoiada em vínculo elástico contínuo de constante K , sujeita a um carregamento transversal de valor q e uma carga concentrada axial P aplicada no centro de gravidade. Deseja-se determinar os valores dos deslocamentos e esforços atuantes.



Para chegar-se a solução fechada do problema, utilizando-se o cálculo variacional, é necessário a definição do funcional da barra para as cargas atuantes. Este funcional é do tipo apresentado em (8.2.1).

$$\pi = \int_L \frac{1}{2} \{ EJ_z v''^2 + Nv'^2 - 2q_y v + Kv^2 \} dx \quad (8.2.1)$$

Devido a descontinuidade na barra em B, divide-se o funcional em duas parcelas correspondentes aos vãos L_1 e L_2 da barra. Desta forma, tendo-se como origem do sistema de coordenadas o apoio em B, os intervalos de validade da coordenada x ao longo do eixo da barra serão:

1º vão

$$-L_1 \leq x \leq 0$$

2º vão

$$0 \leq x \leq L_2$$

Logo o funcional da barra, apresentado em (8.2.1), pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{-L_1}^0 \frac{1}{2} \{ EJ_z v_1''^2 + N v_1'^2 - 2q_y v_1 + K v_1^2 \} dx + \\ & + \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \{ EJ_z v_2''^2 + N v_2'^2 - 2q_y v_2 + K v_2^2 \} dx \\ & + \lambda_1 (v_1(0) - v_2(0)) + \lambda_2 (v_1'(0) - v_2'(0)) \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Aplicando-se as equações de Euler:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v_1'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v_1''} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v_2'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v_2''} = 0 \end{cases} \quad (8.2.3)$$

Obtém-se as equações diferenciais do problema, correspondentes aos vãos L_1 e L_2 :

$$\begin{cases} EJ_z v_1^{iv} + N v_1'' + K v_1 = q_y \\ EJ_z v_2^{iv} + N v_2'' + K v_2 = q_y \end{cases} \quad (8.2.4)$$

O polinômio característico será do tipo:

$$\lambda^4 + \frac{N}{EJ_z} \lambda^2 + \frac{K}{EJ_z} = 0 \quad (8.2.5)$$

Antes de partir-se à determinação das raízes da expressão (8.2.5), há necessidade de uma verificação do valor de Δ , expressão (8.2.6), para os valores possíveis de N , K e EJ_z .

Portanto, seja a expressão:

$$\Delta = \left(\frac{N}{EJ_z} \right)^2 - \frac{4K}{EJ_z} \quad (8.2.6)$$

E os valores de N, tais que:

$$N < 2\sqrt{KEJ_z} \quad (8.2.7)$$

ou

$$N \geq 2\sqrt{KEJ_z} \quad (8.2.8)$$

Para os valores de N apresentados nas expressões (8.2.7) e (8.2.8), o valor de Δ será negativo ou positivo e as raízes da equação (8.2.5) serão do tipo:

$$\lambda = \pm\beta \mp \alpha i \quad (8.2.9)$$

Para valores negativos de Δ , e

$$\begin{cases} \lambda = \pm\gamma i \\ \lambda = \pm\delta i \end{cases} \quad (8.2.10)$$

Para valores positivos de Δ .

No caso de raízes do tipo apresentado em (8.2.9), ou seja, quando N possui valores válidos para a expressão (8.2.7), utiliza-se as seguintes expressões para modificar de modo conveniente o polinômio:

$$r^2 = \frac{N}{2EJ_z} \quad (8.2.11)$$

$$s^4 = \frac{K}{EJ_z} \quad (8.2.12)$$

Desta forma a expressão (8.2.5) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\lambda^4 + 2r^2\lambda^2 + s^4 = 0 \quad (8.2.13)$$

E os valores de α e β que compõem as raízes da equação são dados por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}} \quad (8.2.14)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}} \quad (8.2.15)$$

Tem-se, desta maneira, a solução geral das equações (8.2.4) para cada intervalo de validade de x :

$$v_1(x) = A_1\theta_1 + B_1\theta_2 + C_1\theta_3 + D_1\theta_4 + \frac{q}{K} \quad (8.2.16)$$

$$v_2(x) = A_2\theta_1 + B_2\theta_2 + C_2\theta_3 + D_2\theta_4 + \frac{q}{K} \quad (8.2.17)$$

Onde os valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 são representados por:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \cosh(\beta x) \sin(\alpha x) \\ \theta_2 &= \cosh(\beta x) \cos(\alpha x) \\ \theta_3 &= \sinh(\beta x) \cos(\alpha x) \\ \theta_4 &= \sinh(\beta x) \sin(\alpha x) \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

As derivadas das expressões (8.2.16) e (8.2.17) são dadas por:

$$v_1'(x) = A_1(\beta\theta_4 + \alpha\theta_2) + B_1(\beta\theta_3 - \alpha\theta_1) + C_1(\beta\theta_2 - \alpha\theta_4) + D_1(\beta\theta_1 + \alpha\theta_3) \quad (8.2.19)$$

$$\begin{aligned} v_1''(x) &= A_1[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_1 + 2\alpha\beta\theta_3] + B_1[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_2 - 2\alpha\beta\theta_4] + \\ &+ C_1[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_3 - 2\alpha\beta\theta_1] + D_1[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_4 + 2\alpha\beta\theta_2] \end{aligned} \quad (8.2.20)$$

$$v'''_1(x) = A_1[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_4 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_2] + B_1[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_3 - \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_1] + \\ + C_1[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_2 - \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_4] + D_1[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_1 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_3] \quad \dots(8.2.21)$$

$$v'_2(x) = A_2(\beta\theta_4 + \alpha\theta_2) + B_2(\beta\theta_3 - \alpha\theta_1) + C_2(\beta\theta_2 - \alpha\theta_4) + D_2(\beta\theta_1 + \alpha\theta_3) \quad (8.2.22)$$

$$v''_2(x) = A_2[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_1 + 2\alpha\beta\theta_3] + B_2[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_2 - 2\alpha\beta\theta_4] + \\ + C_2[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_3 - 2\alpha\beta\theta_1] + D_2[(\beta^2 - \alpha^2)\theta_4 + 2\alpha\beta\theta_2] \quad (8.2.23)$$

$$v'''_2(x) = A_2[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_4 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_2] + B_2[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_3 - \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_1] + \\ + C_2[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_2 - \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_4] + D_2[\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\theta_1 + \alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\theta_3] \quad \dots(8.2.24)$$

Na determinação dos valores das constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$ e D_2 utilizam-se as seguintes condições de contorno:

$$v_1(-L1) = 0 \quad (8.2.25)$$

$$v'_1(-L1) = 0 \quad (8.2.26)$$

$$v_1(0) = 0 \quad (8.2.27)$$

$$v_2(L2) = 0 \quad (8.2.28)$$

$$v'_2(L2) = 0 \quad (8.2.29)$$

$$v_2(0) = 0 \quad (8.2.30)$$

$$v'_1(0) = v'_2(0) \quad (8.2.31)$$

$$v''_1(0) = v''_2(0) \quad (8.2.32)$$

As expressões das constantes são apresentadas a seguir:

$$A_1 = A_2 + C_2 \frac{\beta}{\alpha} - C_1 \frac{\beta}{\alpha} \quad (8.2.33)$$

$$A_2 = -\frac{\phi_4}{\phi_1} - C_2 \frac{\phi_2}{\phi_1} - D_2 \frac{\phi_3}{\phi_1} \quad (8.2.34)$$

$$B_1 = -\frac{q}{K} \quad (8.2.35)$$

$$B_2 = -\frac{q}{K} \quad (8.2.36)$$

$$C_1 = \frac{\phi_{15}\phi_{10} - \phi_{12}\phi_{13} - D_1(-\phi_{10}\phi_{14} + \phi_{11}\phi_{13})}{\phi_9\phi_{13}} \quad (8.2.37)$$

$$C_2 = -D_1 \frac{-\phi_3\theta_1(l_2) + \phi_1\theta_4(l_2)}{-\phi_2\theta_1(l_2) + \phi_1\theta_3(l_2)} \quad (8.2.38)$$

$$D_1 = \frac{[\phi_{15}(\phi_6 - \phi_{16}\phi_{10}) + \phi_{13}(-\phi_8 + \phi_{16}\phi_{12})]\phi_9}{\phi_9(-\phi_{14}\phi_6 + \phi_7\phi_{13}) - \phi_5(-\phi_{14}\phi_{10} + \phi_{11}\phi_{13})} \quad (8.2.39)$$

$$D_2 = \frac{B_1(\beta^2 - \alpha^2)}{2\alpha\beta} + D_1 - \frac{B_2(\beta^2 - \alpha^2)}{2\alpha\beta} \quad (8.2.40)$$

Onde:

$$\phi_1 = \beta\theta_4(l_2) + \alpha\theta_2(l_2)$$

$$\phi_2 = \beta\theta_2(l_2) - \alpha\theta_4(l_2)$$

$$\phi_3 = \beta\theta_1(l_2) + \alpha\theta_3(l_2)$$

$$\phi_4 = B_2(\beta\theta_3(l_2) - \alpha\theta_1(l_2))$$

$$\phi_5 = -\frac{\beta}{\alpha}\theta_1(l_1) + \theta_3(l_1)$$

$$\phi_6 = -\frac{\phi_2}{\phi_1}\theta_1(l_1) + \frac{\beta}{\alpha}\theta_1(l_1)$$

$$\phi_7 = -\frac{\phi_3}{\phi_1}\theta_1(l_1) + \theta_4(l_1)$$

$$\phi_8 = \theta_1(l_1) \left[-\frac{\phi_4}{\phi_1} - \frac{\phi_3}{\phi_1 2\alpha\beta} (B_1(\beta^2 - \alpha^2) - B_2(\beta^2 - \alpha^2)) \right] + B_1\theta_2(l_1) + \frac{q}{K}$$

$$\phi_9 = -\frac{\beta}{\alpha}(\beta\theta_4(l_1) + \alpha\theta_2(l_1)) + \beta\theta_2(l_1) - \alpha\theta_4(l_1)$$

$$\phi_{10} = -\frac{\phi_2}{\phi_1}(\beta\theta_4(l_1) + \alpha\theta_2(l_1)) + \frac{\beta}{\alpha}(\beta\theta_4(l_1) + \alpha\theta_2(l_1))$$

$$\phi_{11} = -\frac{\phi_3}{\phi_1}(\beta\theta_4(l_1) + \alpha\theta_2(l_1)) + \beta\theta_1(l_1) + \alpha\theta_3(l_1)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{12} &= (\beta\theta_4(l_1) + \alpha\theta_2(l_1)) \left[-\frac{\phi_4}{\phi_1} - \frac{\phi_3}{\phi_1 2\alpha\beta} (B_1(\beta^2 - \alpha^2) - B_2(\beta^2 - \alpha^2)) \right] + \\
&\quad + B_1(\beta\theta_3(l_1) - \alpha\theta_1(l_1)) \\
\phi_{13} &= -\frac{\phi_2}{\phi_1} \theta_1(l_2) + \theta_3(l_2) \\
\phi_{14} &= -\frac{\phi_3}{\phi_1} \theta_1(l_2) + \theta_4(l_2) \\
\phi_{15} &= \theta_1(l_2) \left[-\frac{\phi_4}{\phi_1} - \frac{\phi_3}{\phi_1 2\alpha\beta} (B_1(\beta^2 - \alpha^2) - B_2(\beta^2 - \alpha^2)) \right] + \\
&\quad + B_2\theta_2(l_2) + \frac{\theta_4(l_2)}{2\alpha\beta} (B_1(\beta^2 - \alpha^2) - B_2(\beta^2 - \alpha^2)) + \frac{q}{K} \\
\phi_{16} &= \frac{\phi_5}{\phi_9}
\end{aligned}$$

Para valores de N representados pela expressão (8.2.8) não há necessidade de modificar-se a expressão (8.2.5), e a solução das equações (8.2.4) será do tipo:

$$V(x) = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x) + C \cos(\delta x) + D \sin(\delta x) \quad (8.2.41)$$

onde γ e δ são dados por:

$$\gamma = \sqrt{\frac{N}{2EJ_z} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{EJ_z}\right)^2 - \frac{4K}{EJ_z}}} \quad (8.2.42)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{N}{2EJ_z} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{EJ_z}\right)^2 - \frac{4K}{EJ_z}}} \quad (8.2.43)$$

Para o problema em questão as equações para os dois trechos da barra e suas respectivas derivadas são as seguintes.

$$V_1(x) = A_1 \cos(\gamma x) + B_1 \sin(\gamma x) + C_1 \cos(\delta x) + D_1 \sin(\delta x) + \frac{q}{K} \quad (8.2.44)$$

$$V_1'(x) = -A_1 \gamma \sin(\gamma x) + B_1 \gamma \cos(\gamma x) - C_1 \delta \sin(\delta x) + D_1 \delta \cos(\delta x) \quad (8.2.45)$$

$$V_1''(x) = -A_1 \gamma^2 \cos(\gamma x) - B_1 \gamma^2 \sin(\gamma x) - C_1 \delta^2 \cos(\delta x) - D_1 \delta^2 \sin(\delta x) \quad (8.2.46)$$

$$V_2(x) = A_2 \cos(\gamma x) + B_2 \sin(\gamma x) + C_2 \cos(\delta x) + D_2 \sin(\delta x) + \frac{q}{K} \quad (8.2.47)$$

$$V_2'(x) = -A_2 \gamma \sin(\gamma x) + B_2 \gamma \cos(\gamma x) - C_2 \delta \sin(\delta x) + D_2 \delta \cos(\delta x) \quad (8.2.48)$$

$$V_2''(x) = -A_2 \gamma^2 \cos(\gamma x) - B_2 \gamma^2 \sin(\gamma x) - C_2 \delta^2 \cos(\delta x) - D_2 \delta^2 \sin(\delta x) \quad (8.2.49)$$

Impondo-se as condições de contorno apresentadas em (8.2.25), (8.2.26), (8.2.27), (8.2.28), (8.2.29), (8.2.30), (8.2.31), e (8.2.32) tem-se os valores das constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$ e D_2 .

$$A_1 = -\frac{q}{K} - C_1 \quad (8.2.50)$$

$$A_2 = -\frac{q}{K} - C_2 \quad (8.2.51)$$

$$B_1 = [B_2 \gamma + D_2 \delta - D_1 \delta] \frac{1}{\gamma} \quad (8.2.52)$$

$$B_2 = -D_2 \frac{\phi_{18}}{\phi_{17}} - \frac{\phi_{19}}{\phi_{17}} \quad (8.2.53)$$

$$C_1 = -\frac{B_2}{\phi_7} \sin(\gamma l_2) - \frac{D_2}{\phi_7} \sin(\delta l_2) - \frac{\phi_8}{\phi_7} \quad (8.2.54)$$

$$C_2 = C_1 \quad (8.2.55)$$

$$D_1 = \frac{\phi_{19} \phi_{11} \phi_{21} - \phi_{13} \phi_{17} \phi_{21} - \phi_{22} \phi_{20} \phi_{17}}{\phi_{17} (\phi_2 \phi_{21} - \phi_6 \phi_{17} \phi_{20})} \quad (8.2.56)$$

$$D_2 = \frac{-D_1 \phi_6 - \phi_{16} + \frac{\phi_{19} \phi_{14}}{\phi_{17}}}{-\frac{\phi_{18} \phi_{14}}{\phi_{17}} + \phi_{15}} \quad (8.2.57)$$

Onde:

$$\phi_1 = -\cos(-\gamma L_1) + \cos(-\delta L_1)$$

$$\phi_2 = -\frac{\delta}{\gamma} \text{sen}(-\gamma L_1) + \text{sen}(-\delta L_1)$$

$$\phi_3 = \frac{q}{K} - \frac{q}{K} \cos(-\gamma L_1)$$

$$\phi_4 = \gamma \text{sen}(-\gamma l_1) - \delta \text{sen}(-\delta l_1)$$

$$\phi_5 = \frac{q}{K} \gamma \text{sen}(-\gamma L_1)$$

$$\phi_6 = -\delta \cos(-\gamma L_1) + \delta \cos(-\delta l_1)$$

$$\phi_7 = -\cos(\gamma l_2) + \cos(\delta l_2)$$

$$\phi_8 = \frac{q}{K} - \frac{q}{K} \cos(\gamma l_2)$$

$$\phi_9 = \gamma \text{sen}(\gamma l_2) - \delta \text{sen}(\delta l_2)$$

$$\phi_{10} = \frac{q}{K} \gamma \text{sen}(\gamma l_2)$$

$$\phi_{11} = -\frac{w_1}{w_7} \text{sen}(\gamma l_2) + \text{sen}(-\gamma l_1)$$

$$\phi_{12} = -\frac{w_1}{w_7} \text{sen}(\delta l_2) + \frac{\delta}{\gamma} \text{sen}(-\gamma l_1)$$

$$\phi_{13} = \phi_3 - \frac{\phi_8 \phi_1}{\phi_7}$$

$$\phi_{14} = -\frac{\phi_4}{\phi_7} \text{sen}(\gamma l_2) + \gamma \cos(-\gamma l_1)$$

$$\phi_{15} = -\frac{\phi_4}{\phi_7} \text{sen}(\delta l_2) + \delta \cos(-\gamma l_1)$$

$$\phi_{16} = \phi_5 - \frac{\phi_8 \phi_4}{\phi_7}$$

$$\phi_{17} = -\frac{\phi_9}{\phi_7} \text{sen}(\gamma l_2) + \gamma \cos(\gamma l_2)$$

$$\phi_{18} = -\frac{\phi_9}{\phi_7} \text{sen}(\delta l_2) + \delta \cos(\delta l_2)$$

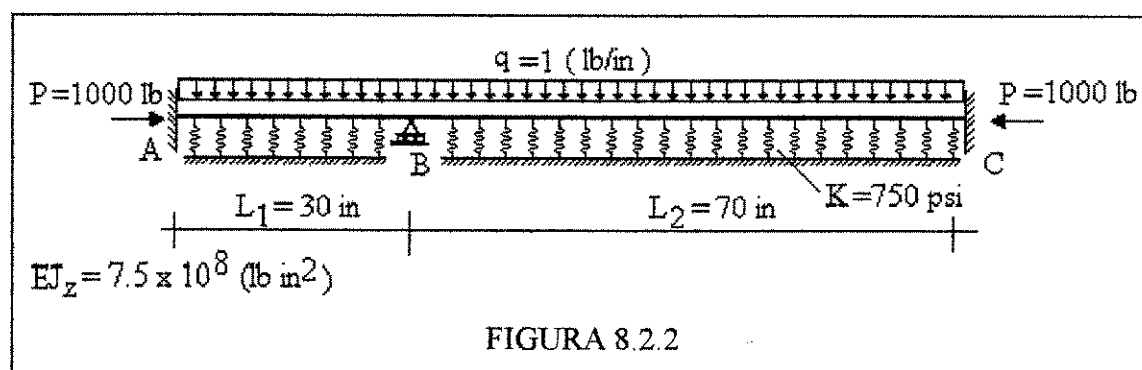
$$\phi_{19} = \phi_{10} - \frac{\phi_8 \phi_9}{\phi_7}$$

$$\phi_{20} = \frac{-\phi_{18} \phi_{11} + \phi_{12} \phi_{17}}{\phi_{17}}$$

$$\phi_{21} = -\phi_{18} \phi_{14} + \phi_{15} \phi_{17}$$

$$\phi_{22} = -\phi_{16} \phi_{17} + \phi_{19} \phi_{14}$$

A resolução deste problema foi feita utilizando-se os dados numéricos apresentados em [19], para tanto a barra foi dividida em 10 elementos de igual comprimento e submetida ao carregamento indicado na figura (8.2.2). A carga (q), distribuída ao longo da barra, é considerada unitária.



As tabelas (8.2.1) e (8.2.2) comparam os resultados obtidos para uma solução fechada das equações diferenciais (8.2.4), com os resultados do cálculo feito pelo programa computacional desenvolvido.

TABELA 8.2.1

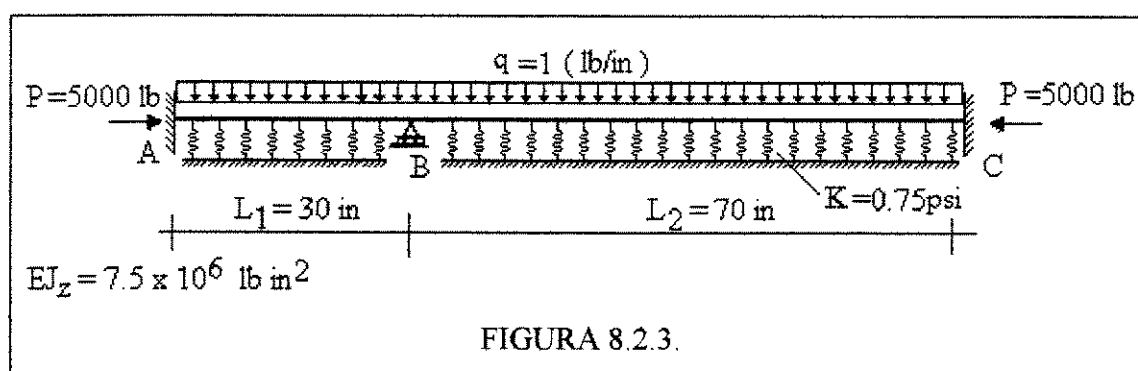
Coord.	Deslocamentos $V(x)$			Rotações $V'(x)$		
X	Eq.difer.	Programa		Eq.difer.	Programa	
(in)	($\times 10^{-5}$ in)	Calculado ($\times 10^{-5}$ in)	Erro (%)	($\times 10^{-6}$ in)	Calculado ($\times 10^{-6}$ in)	Erro (%)
0	0	0	0	0	0	0
10	-0.261206	-0.2612	-0.002	-0.503156	-0.5032	0.0087
20	-0.745254	-0.7453	0.006	-0.22989	-0.2230	0.0049
30	0	0	0	2.17876	2.179	0.011
40	3.48901	3.4890	-0.0003	4.21001	4.210	-0.0002
50	7.45925	7.459	-0.003	3.35758	3.358	0.0125
60	9.66952	9.670	0.005	0.900104	0.9001	-0.0004
70	9.14052	9.141	0.005	-1.91447	-1.914	-0.02455
80	6.13454	6.135	0.0075	-3.84655	-3.847	0.01170
90	2.16023	2.160	-0.0106	-3.63898	-3.639	0.00055
100	0	0	0	0	0	0

TABELA 8.2.2

Coord.	Momentos $V''(x)$			Cortantes $V'''(x)$		
X	Eq.difer.	Programa		Eq.difer.	Programa	
(in)	(lb . in)	Calculado (lb . in)	Erro (%)	(lb)	Calculado (lb)	Erro (%)
0	33.7223	33.7327	0.00119	-4.1350	-4.1351	0.00242
10	25.0637	25.0641	0.00160	5.8720	5.8716	-0.00681
20	-83.8211	-83.8222	0.00131	15.9111	15.9111	0
30	-293.1800	-293.1839	0.00133	25.9515 -31.4819	25.9540 -31.4801	0.00963 -0.00572
40	-27.9786	-27.9790	0.00143	-21.6022	-21.5982	-0.01852
50	139.8703	139.8721	0.00129	-12.0173	-12.0141	-0.02663
60	213.1822	213.1849	0.00127	-2.6727	-2.6718	-0.03367
70	193.5437	193.5462	0.00165	6.6070	6.6052	-0.02724
80	80.5771	80.5782	0.00137	16.0239	16.0203	-0.02247
90	-127.8627	-127.8644	0.00133	25.7138	25.7105	-0.01283
100	-434.5550	-434.5607	0.00131	35.6518	35.6523	0.00140

Verifica-se que os resultados obtidos são de uma precisão muito boa, com erros variando entre valores muito baixos, de (0) a (0.03367) %. No caso obteve-se resultados com melhor precisão para o valor de reação no apoio em B, que os obtidos no exemplo apresentado em [19]. Visto que no mesmo, o valor dado como resposta para a reação é de 59.30486 q. Este valor difere da solução da equação diferencial em (-3.156 %), enquanto que para o programa desenvolvido este erro é de (0.00122 %).

Em acréscimo a este exemplo apresentado formulou-se outro no qual ocorre a condição de N apresentada na expressão (8.2.8). Alguns dados foram alterados e são apresentados na figura (8.2.3).



Para este caso igualmente obteve-se valores muito bons em comparação com a solução da equação diferencial. Estes resultados são apresentados, para os deslocamentos e giros da seção, na tabela (8.2.3).

TABELA 8.2.3						
Coord. X (in)	Deslocamentos $V(x)$			Rotações $V'(x)$		
	Eq.difer. ($\times 10^{-4}$ in)	Programa		Eq.difer. ($\times 10^{-4}$ in)	Programa	
		Calculado ($\times 10^{-4}$ in)	Erro (%)		Calculado ($\times 10^{-4}$ in)	Erro (%)
0	0	0	0	0	0	0
10	-3.607	-3.607	0	-0.653	-0.653	0
20	-9.431	-9.431	0	-0.218	-0.182	0
30	0	0	0	2.603	2.603	0
40	41.020	41.020	0	4.942	4.942	0
50	87.740	87.740	0	3.959	3.959	0
60	113.700	113.700	0	1.039	1.039	0
70	107.100	107.100	0	-2.309	-2.309	0
80	71.260	71.260	0	-4.547	-4.547	0
90	24.760	24.760	0	-4.210	-4.210	0
100	0	0	0	0	0	0

Neste exemplo utilizou-se o sistema de unidades inglesas a fim de estabelecer uma melhor comparação entre o cálculo desenvolvido pelo programa e o trabalho apresentado em [19]

8.3. Exemplo 3: Aplicação para Viga Sobre Vínculo Elástico Contínuo.

A análise de barras associadas a vínculos elásticos, pode representar muitas vezes simplificações de situações teóricas mais complexas. A situação mais comum seria o caso de uma viga de fundação direta sobre o solo. Neste exemplo, mostra-se um outro caso onde utiliza-se o conceito de vinculação elástica contínua, que pode relacionar-se o desenvolvimento teórico.

Seja o caso de uma barra genérica simplesmente apoiada nas extremidades, e suportada em todo seu comprimento por uma vinculação elástica de valor constante C_v .

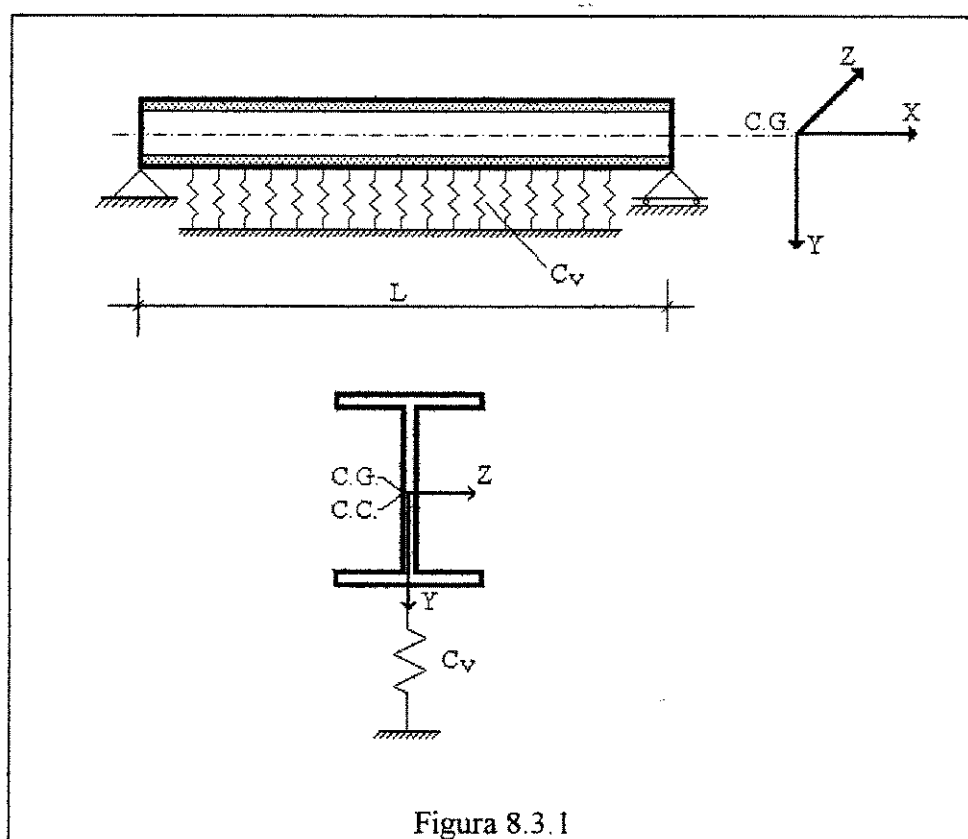


Figura 8.3.1

A fundação elástica apresentada na barra da figura 8.3.1, pode representar uma barra de características elásticas e geométricas próprias, denominada viga de apoio, pretende-se que a mesma tenha comportamento semelhante ao da vinculação elástica teórica.

Considera-se que a viga de apoio, possa ser em concreto armado ou qualquer material cujas características possam representar uma vinculação elástica e que tenha as mesmas condições de contorno da barra apresentada na figura 8.3.1.

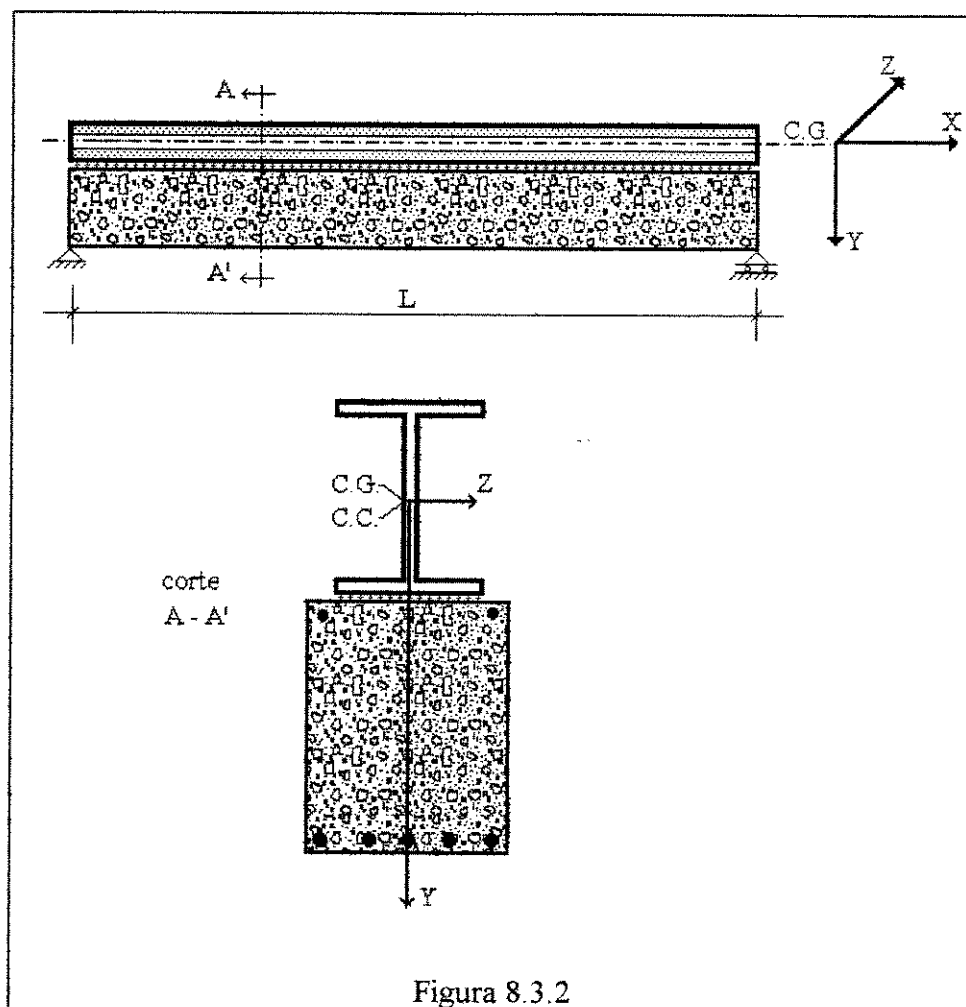
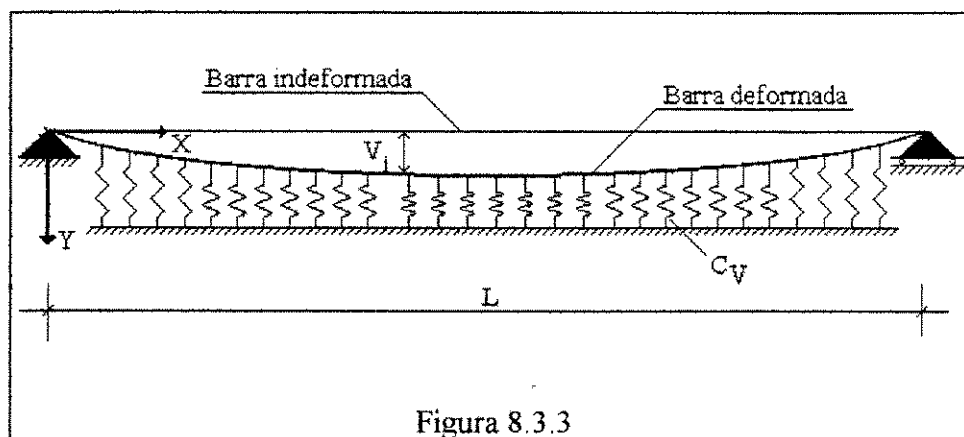


Figura 8.3.2

A definição de vinculação elástica contínua utilizada neste trabalho, diz que os deslocamentos de pontos de aplicação do vínculo elástico na estrutura ficam restringidos somente na direção axial do vínculo, e totalmente livre nas demais direções.

Então, desde que não ocorra transmissão de esforços cisalhantes na *interface* das duas barras, ou desprezando-se o atrito entre as mesmas, pode-se dizer que na figura 8.3.2 tem-se um caso de barra sobre vinculação elástica contínua semelhante à figura 8.3.1.

Analisando-se a barra da figura 8.3.1 pode-se dizer que sua posição deformada para um carregamento linear distribuído é a seguinte:

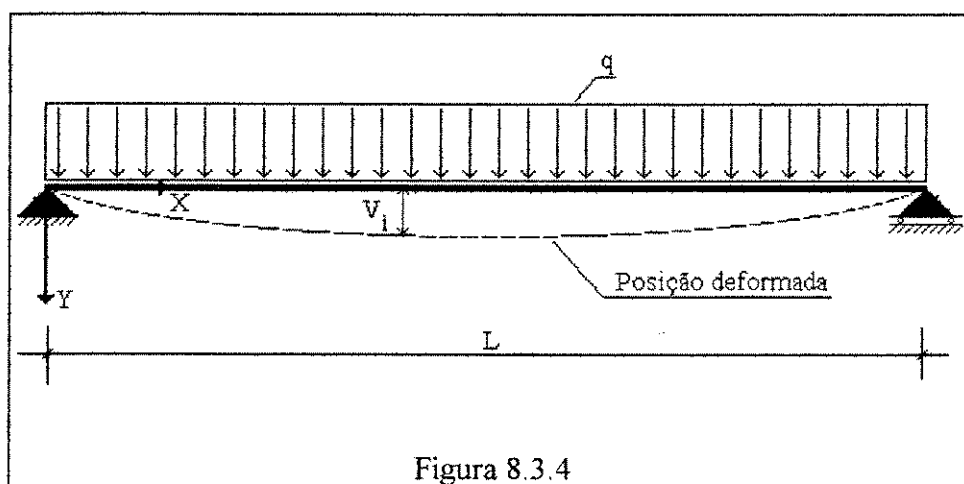


Como o valor de C_V é constante ao longo do comprimento da barra, a força em cada ponto da vinculação elástica será representada por:

$$F_i = C_V v_i \quad (8.3.1)$$

Onde v_i é o deslocamento de cada ponto na direção do eixo Y .

Para que a viga de apoio da figura 8.3.2 assuma a mesma posição deformada da barra da figura 8.3.3, admite-se um carregamento linear distribuído q aplicado à viga.



Sabe-se da resistência dos materiais que o deslocamento de um ponto no centro do vão da viga apresentada na figura 8.3.4 é dado por:

$$V(x) = \frac{q}{24 E J_z} [x^4 - 2 L x^3 + L^3 x] \quad (8.3.2)$$

Modificando-se a expressão 8.3.2 de modo a isolar a carga q , tem-se:

$$q = \left[\frac{24 E J_z}{x^4 - 2 L x^3 + L^3 x} \right] V(x) \quad (8.3.3)$$

Neste ponto é possível fazer uma analogia entre as expressões (8.3.3) e (8.3.1). A posição deformada da barra apresentada na figura 8.3.3, mostra que para cada posição x ao longo do vão a vinculação elástica possui uma deformação correspondente a v_i . A força de reação da vinculação elástica em um ponto i do vão em função desta deformação v_i é dado pela equação (8.3.1). A relação entre F_i e v_i é constante e igual a C_v (constante elástica).

Na viga apresentada na figura 8.3.4, o carregamento aplicado provoca uma deformação na viga, com deslocamentos variáveis v_i ao longo do vão. Analisando-se a posição central do vão ($x=L/2$) verifica-se, através da equação (8.3.3), que existe uma relação entre o carregamento aplicado q e o deslocamento v_i . De modo geral, para qualquer posição x , também ocorre comportamento análogo. Assim, a constante C_v pode ser escrita como:

$$C_v = \left[\frac{24 E J_z}{x^4 - 2 L x^3 + L^3 x} \right] \quad (8.3.4)$$

Como adotou-se neste trabalho a hipótese de valor constante para a vinculação elástica ao longo da barra, as características de inércia é que devem variar em função de x , para o apoio ser elástico linear.

$$J_z = \frac{C_v}{24 E} (x^4 - 2 L x^3 + L^3 x) \quad (8.3.5)$$

Com base na expressão (8.3.5) pode-se dizer que para a situação apresentada na figura 8.3.2, uma viga associada com valores de inércia J_z variando ao longo de x , simula uma vinculação elástica de valor constante C_v .

- Caso de C_v constante e J_z variável:

Na hipótese de simular-se um vínculo elástico contínuo de valor constante através de uma viga com seção retangular, o valor de inércia J_z torna-se necessariamente variável. Admitindo-se não variação da espessura b da seção tem-se a seguinte situação:

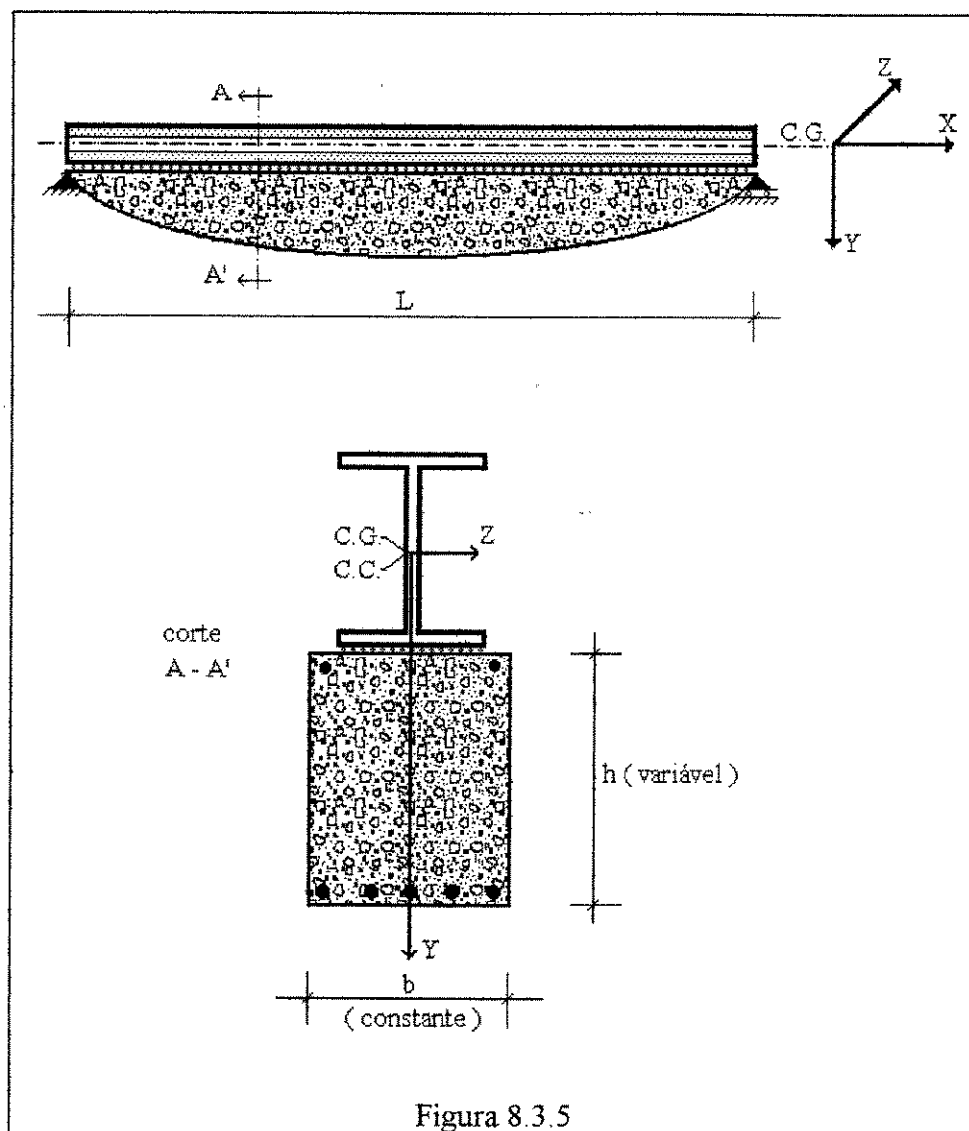


Figura 8.3.5

Sendo a viga utilizada como vinculação elástica, de seção retangular, o valor de inércia J_z é dado por:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \quad (8.3.6)$$

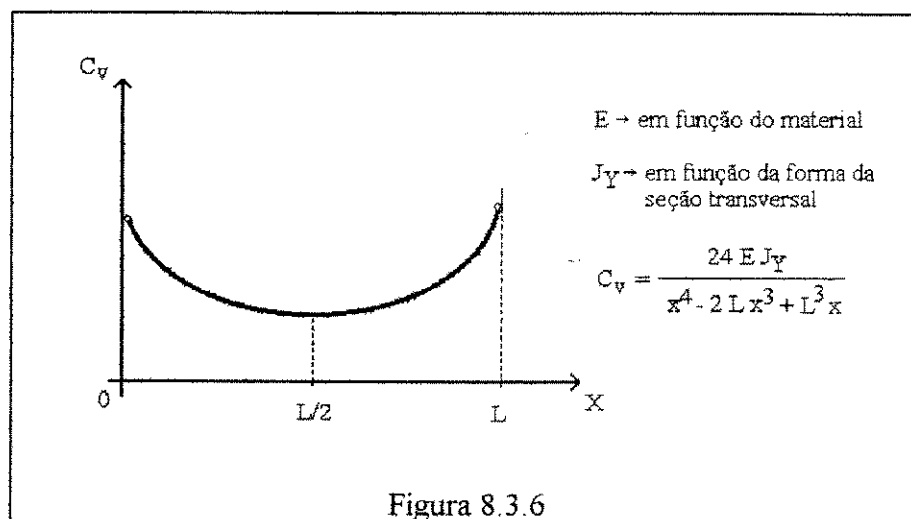
Substituindo-se a expressão (8.3.6) em (8.3.5), tem-se:

$$h = \left[\frac{C_v}{2Eb} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \right]^{1/3} \quad (8.3.7)$$

A expressão (8.3.7) determina os valores da altura h para que a viga de apoio simule uma vinculação elástica com valor constante C_v em cada ponto de coordenada x ao longo do vão.

Caso de C_v variável e J_z constante:

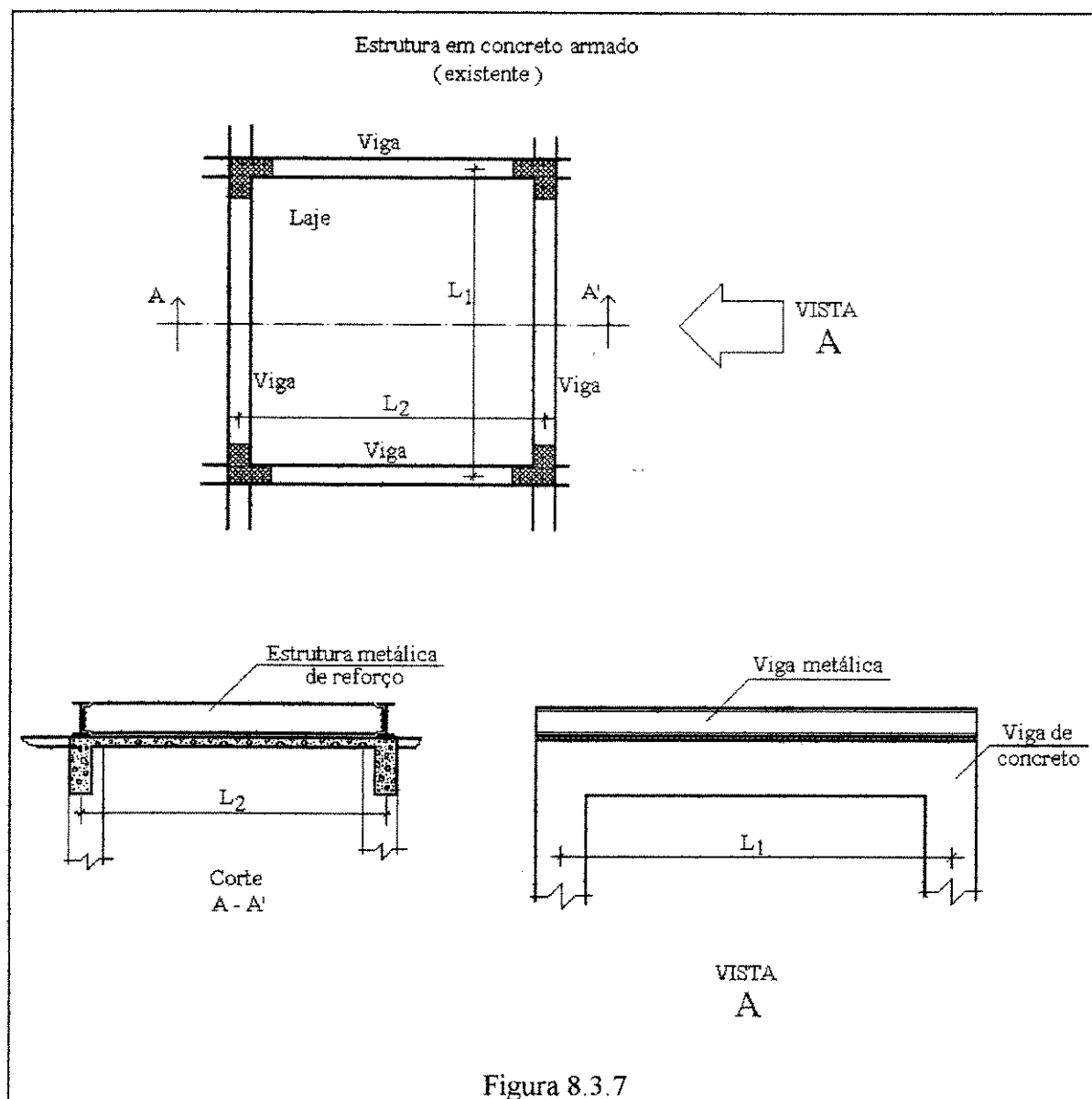
Quando a viga a ser utilizada como vinculação elástica for existente e com características de inércia J_z constantes, retorna-se a expressão (8.3.4). Pode-se observar que para diferentes valores de x tem-se a seguinte curva representativa de C_v .



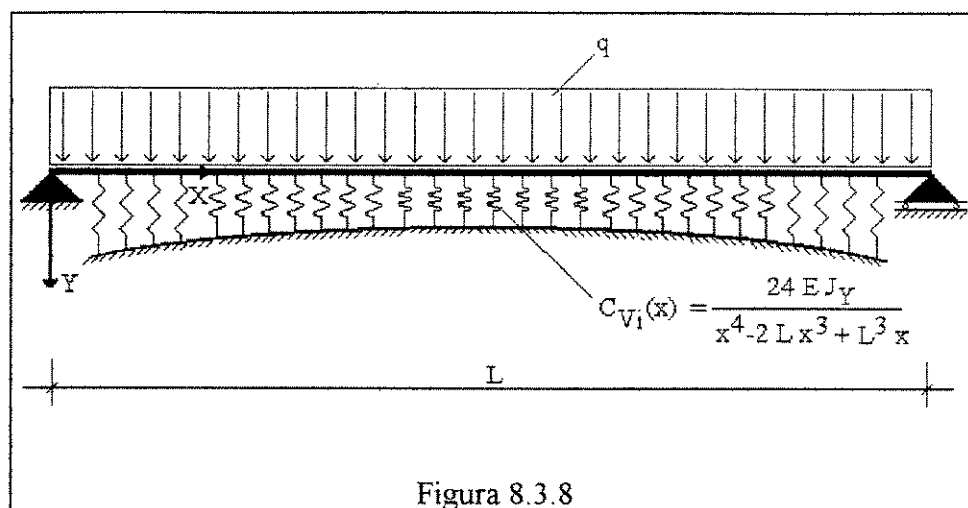
No centro do vão tem-se o valor mínimo de C_v , aumentando em direção aos apoios extremos. Para um pré-dimensionamento a favor da segurança pode-se utilizar o valor de C_v do centro do vão para toda a viga. No caso de um pré-dimensionamento mais rigoroso, utilizando-se as facilidades da divisão em elementos finitos do programa desenvolvido, é possível dividir a viga em quantos trechos quanto desejado, determinando para cada trecho o valor de C_v que melhor se ajuste à curva determinada pela expressão (8.3.4).

Situação real:

Seja uma laje de piso em concreto armado, de determinado prédio, solicitada a um carregamento além do projetado. A necessidade de um reforço estrutural faz com que se projete um novo sistema de laje e vigas de sustentação, para que o carregamento seja transferido aos pilares, sem comprometer a laje e vigas existentes.



As vigas de concreto armado contribuirão na resistência do novo sistema de sustentação, como uma vinculação elástica de valor C_v dado pela expressão (8.3.4). Portanto, o esquema estrutural das vigas do novo sistema de sustentação será:



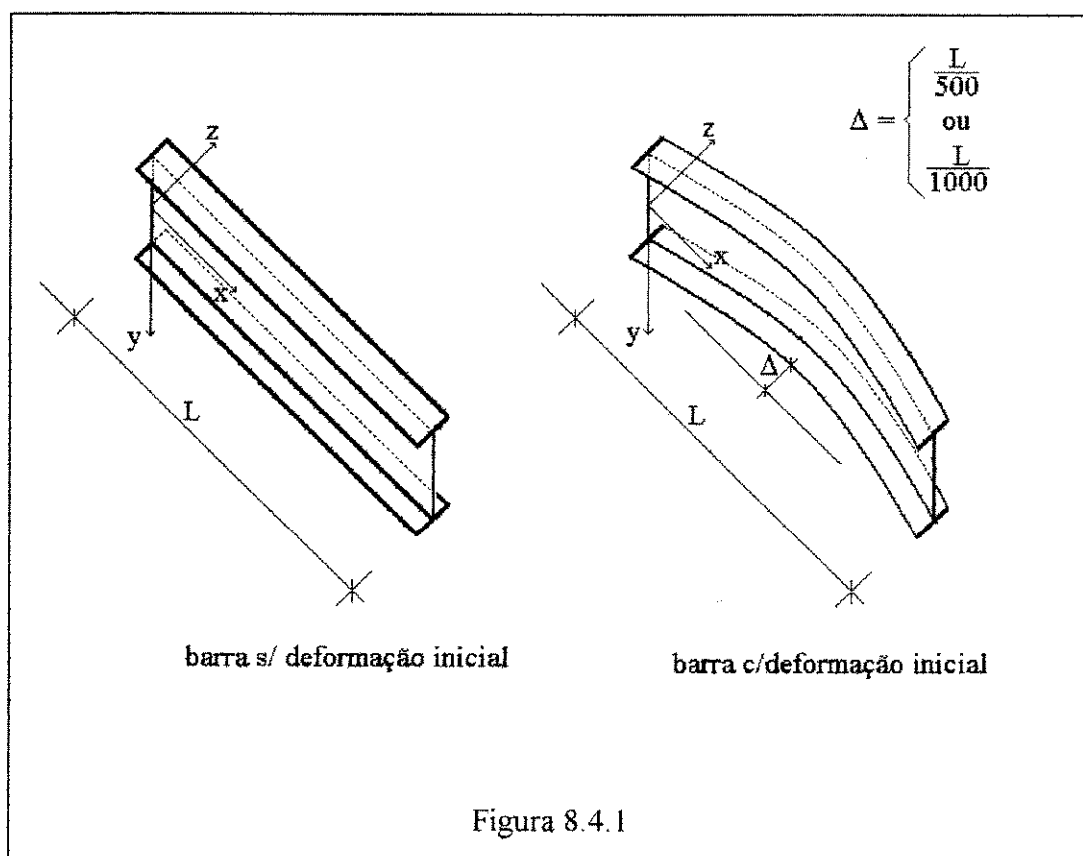
O procedimento desenvolvido neste exemplo adapta-se aos casos de carga distribuída ao longo da barra, e não restringe-se aos materiais aço e concreto como estruturas nova e existente. A combinação entre os materiais utilizados pode ser quaisquer, desde que se utilize nas fórmulas desenvolvidas, as características elásticas e geométricas da barra a ser utilizada como vínculo elástico.

8.4.Exemplo 4: Barra com Deformação Inicial.

Neste exemplo mostram-se os efeitos devido a deformação inicial em uma barra sujeita a um carregamento de flexão simples. Analisam-se os efeitos de segunda ordem determinando esforços e deslocamentos atuantes na barra.

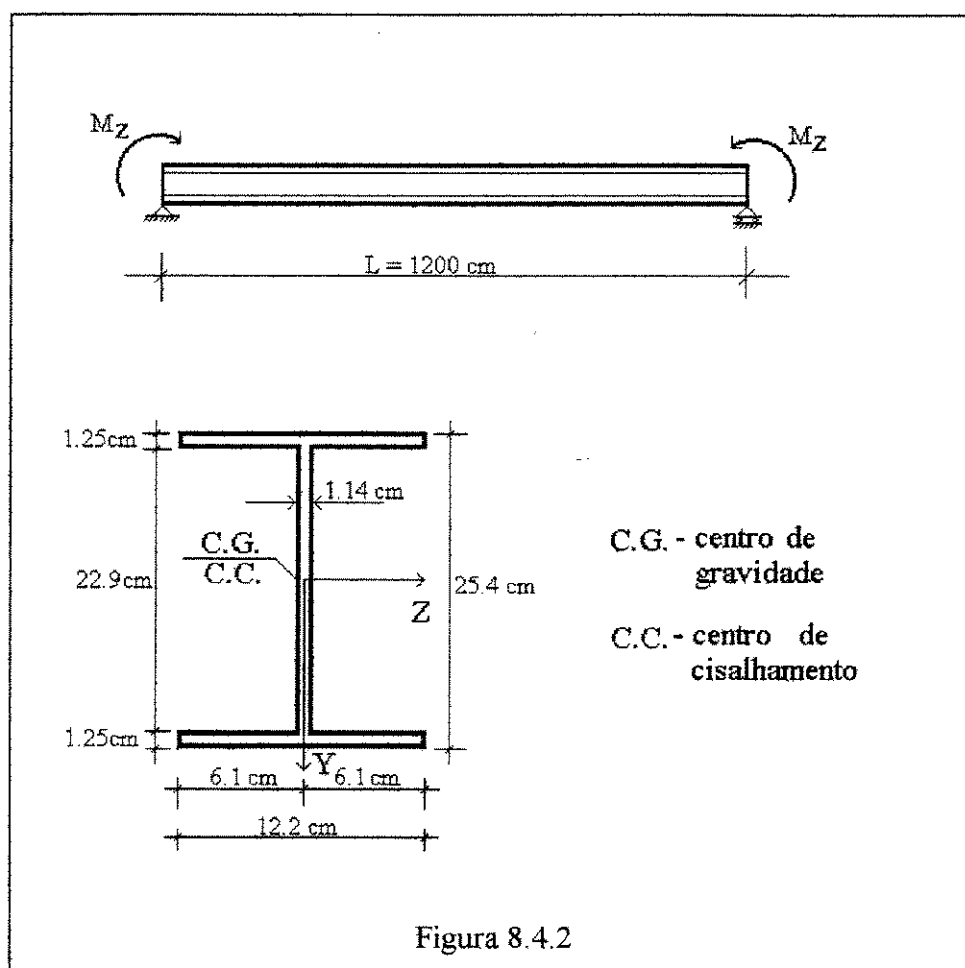
Os valores de deformação inicial estão associados aos valores apresentados na EUROCODE 3/78. Os valores possíveis para flecha no centro do vão, são da ordem de 1/500 e 1/1000 para defeitos de fabricação, portanto estes serão os valores adotados no exemplo.

A barra a ser estudada é a seguinte:



A barra é constituída de um perfil I-10" com vão de 12 metros, e os valores de Δ apresentados referem-se ao centro do vão.

As condições de contorno da barra e as dimensões da seção transversal são as seguintes:



As características geométricas da seção e elásticas do material são as seguintes:

$$E = 205000 \text{ MPa}$$

$$G = 80000 \text{ MPa}$$

$$A = 56.9 \text{ cm}^2$$

$$J_y = 312 \text{ cm}^4$$

$$J_z = 5610 \text{ cm}^4$$

$$J_w = 110317 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 28.43 \text{ cm}^4$$

À partir do valor de carga crítica determinado no exemplo 8.1 para esta mesma barra porém sem deformação inicial, resolve-se o problema para valores de M_z correspondentes a 500, 1000, 1500, 2000, 3000 e 3250 KN.cm tanto para deformação inicial Δ de 1/500 como de 1/1000.

A imperfeição inicial da barra ao longo de x na direção horizontal z , para os valores de Δ pode ser representada pela seguinte expressão:

$$W = \Delta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.1)$$

Derivando-se a expressão (8.4.1) sucessivamente até a quarta derivada, e obtendo-se as expressões dos esforços e carregamento (q_z) associados para uso nas equações diferenciais, tem-se:

$$W' = E J_Y \frac{\pi}{L} \Delta \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.2)$$

$$W'' = -E J_Y \frac{\pi^2}{L^2} \Delta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.3)$$

$$W''' = -E J_Y \frac{\pi^3}{L^3} \Delta \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.4)$$

$$W^{iv} = E J_Y \frac{\pi^4}{L^4} \Delta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.5)$$

A expressão (8.4.1) representa os deslocamentos de pontos da barra ao longo de seu comprimento. A quarta derivada de w em relação a x , expressão (8.4.5), determina um carregamento distribuído q_z , com variação senoidal ao longo da barra.

Substituindo-se os valores de Δ apresentados na figura (8.4.1), na expressão (8.4.5) representativa do carregamento distribuído, tem-se:

$$q_z = \frac{\pi^4}{500 L^3} E J_Y \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.6)$$

Para $\Delta = L / 500$, e:

$$q_z = \frac{\pi^4}{1000 L^3} E J_Y \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (8.4.7)$$

Para $\Delta = L / 1000$.

Na resolução do problema através do programa de computador, a carga q_z será responsável por causar a deformação inicial pretendida, de acordo com os valores de Δ .

Os valores do carregamento q_z de acordo com as expressões (8.4.6) e (8.4.7) para cada posição x da barra são os seguintes:

TABELA 8.4.1		
X (cm)	$q_z (1 \times 10^{-4} \text{ KN/cm})$	
	L / 500	L / 1000
0	0	0
120	2.2283	1.1142
240	4.2385	2.1193
360	5.8338	2.9169
480	6.8580	3.4290
600	7.2109	3.6055
720	6.8580	3.4290
840	5.8338	2.9169
960	4.2385	2.1193
1080	2.2283	1.1142
1200	0	0

A resolução deste problema é feita em duas etapas, na primeira passagem do programa é fornecido o carregamento distribuído q_z ao longo da barra e o carregamento momento de flexão nos apoios de extremidade. Estes valores são introduzidos no vetor de cargas do sistema de equações. Para esta situação de carregamento o programa fornece como resultados os deslocamentos da barra nas direções v , w e ϕ , e os esforços cortante, momento fletor e momento torçor.

A segunda etapa, constitui-se em executar o programa tendo como dados, além dos carregamentos aplicados na 1ª etapa, os valores dos esforços M_Y e M_Z de 1ª ordem obtidos como resultados da 1ª etapa. O cálculo dos esforços considerando efeitos de segunda ordem são feitos aplicando-se os valores dos esforços M_Y e M_Z na matriz geométrica da barra.

Desta maneira obtém-se os esforços atuantes na barra considerando-se os efeitos de segunda ordem. O programa fornece também os deslocamentos ocorridos.

Tratando-se este exemplo de um problema de segunda espécie pretende-se mostrar que um pequeno deslocamento lateral na barra pode ocasionar um acréscimo significativo de esforços e tensões, se comparado com o caso de barra não deformada.

Os valores de M_Z escolhidos pretendem representar a história de esforços e deslocamentos da barra, até um valor próximo a $M_Z = 3260$ KN.cm determinado no exemplo 1. Este valor de M_Z representa um momento crítico de instabilidade lateral, isto significa que para o caso da barra com uma deformação inicial os deslocamentos w devem tender a valores muito grandes.

Nas tabelas (8.4.2) e (8.4.3) tem-se os resultados obtidos com o programa de computador.

Tabela 8.4.2								
Deformação inicial = $L / 500$				Posição : $x = L / 2$				
Esforços 1. ordem		Deslocamentos		Esforços 2. ordem			Variação (%)	
M_z (KN.cm)	M_y (KN.cm)	V (cm)	W (cm)	M_z (KN.cm)	M_y (KN.cm)	B (KN.cm ²)	M_z (%)	M_y (%)
500	113,052	0,7853	2,6660	500,652	115,935	89,114	0,1304	2,5499
1000	113,052	1,5670	2,8830	1001,404	125,475	192,109	0,1404	10,9886
1500	113,052	2,3500	3,3300	1502,418	145,139	331,081	0,1612	28,3826
2000	113,052	3,1350	4,2360	2004,067	184,992	557,403	0,2033	63,6347
3000	113,052	4,7220	17,0700	3023,980	749,385	3299,091	0,7993	562,8672

Tabela 8.4.3								
Deformação inicial = $L / 1000$				Posição : $x = L / 2$				
Esforços 1. ordem		deslocamentos		Esforços 2. ordem			Variação (%)	
Mz (KN.cm)	My (KN.cm)	V (cm)	W (cm)	Mz (KN.cm)	My (KN.cm)	B (KN.cm ²)	Mz (%)	My (%)
500	56,5265	0,7828	1,3330	500,163	57,968	44,555	0,0326	2,5498
1000	56,5265	1,5660	1,4410	1000,351	62,738	96,051	0,0351	10,9881
1500	56,5265	2,3480	1,6650	1500,605	72,569	165,533	0,0403	28,3810
2000	56,5265	3,1310	2,1180	2001,017	92,495	278,685	0,0508	63,6305
3000	56,5265	4,7020	8,5330	3005,994	374,621	1649,161	0,1998	562,7350

Os valores apresentados nas tabelas (8.4.2) e (8.4.3) mostram a grande influência da deformação inicial na direção w , com relação ao aparecimento de momentos M_y .

Enquanto os valores de M_z possuem um acréscimo pequeno, os valores de momento M_y de 2ª ordem aumentam consideravelmente de acordo com M_z inicial. Verifica-se que para valores baixos de M_z , ($M_z=10000$ KN.cm) o acréscimo em M_y foi 10,98 %, porém a medida que aproxima-se do valor de M_{cr} os valores de M_y sofrem uma variação muito grande. Neste caso não tem mais sentido analisar-se a barra da maneira como foi inicialmente pretendido.

Os deslocamentos laterais (direção w) tornam-se, como os momentos, muito grandes, inviabilizando inclusive o uso da teoria de pequenos deslocamentos.

Os resultados apresentados mostram o quanto os esforços de segunda ordem podem ser importantes no dimensionamento de uma barra. É importante a consideração de que no dimensionamento considerando-se apenas os efeitos de primeira ordem, deve-se ter o cuidado de verificar se imperfeições ou deslocamentos iniciais da barra em alguma direção pouco favorável, não irá ocasionar efeitos de segunda ordem, em direções não consideradas inicialmente.

A consideração do efeito de segunda ordem leva a valores de esforços e deslocamentos, que não estando presentes no caso de primeira ordem, podem levar a deslocamentos excessivos da estrutura e esforços não previstos. No caso podem ocorrer tensões atuantes em regiões e valores acima do esperado, determinando zonas de plastificação do material e até mesmo inutilização da estrutura.

Análise de Tensões:

No exemplo número 1 procedeu-se o cálculo de momento crítico para uma barra perfeitamente retilínea. No caso chegou-se a $M_{cr}=3260 \text{ KN.cm}$ e as tensões de compressão e tração atuantes na seção são dadas por:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y \quad (8.4.8)$$

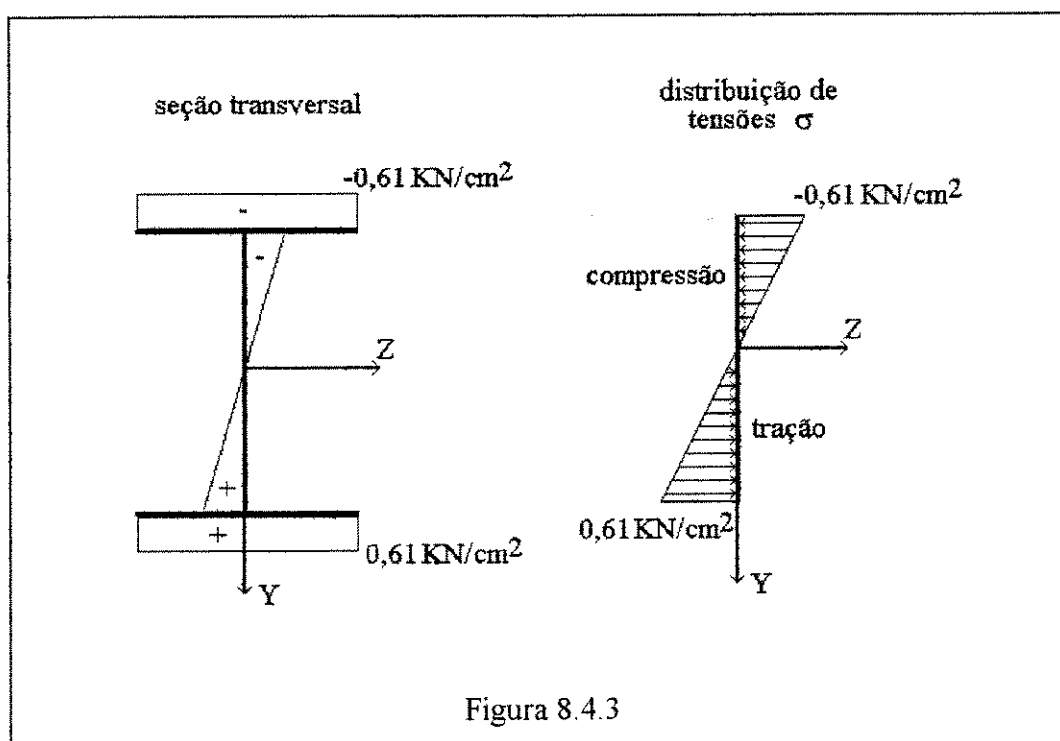
Aplicando-se em (8.4.8) o valor de M_{cr} e as características da seção transversal comuns a este e ao exemplo 1, tem-se o seguinte valor de tensão máxima atuante na seção no centro do vão:

$$\sigma = \frac{326}{5610} 10,47 \quad (8.4.9)$$

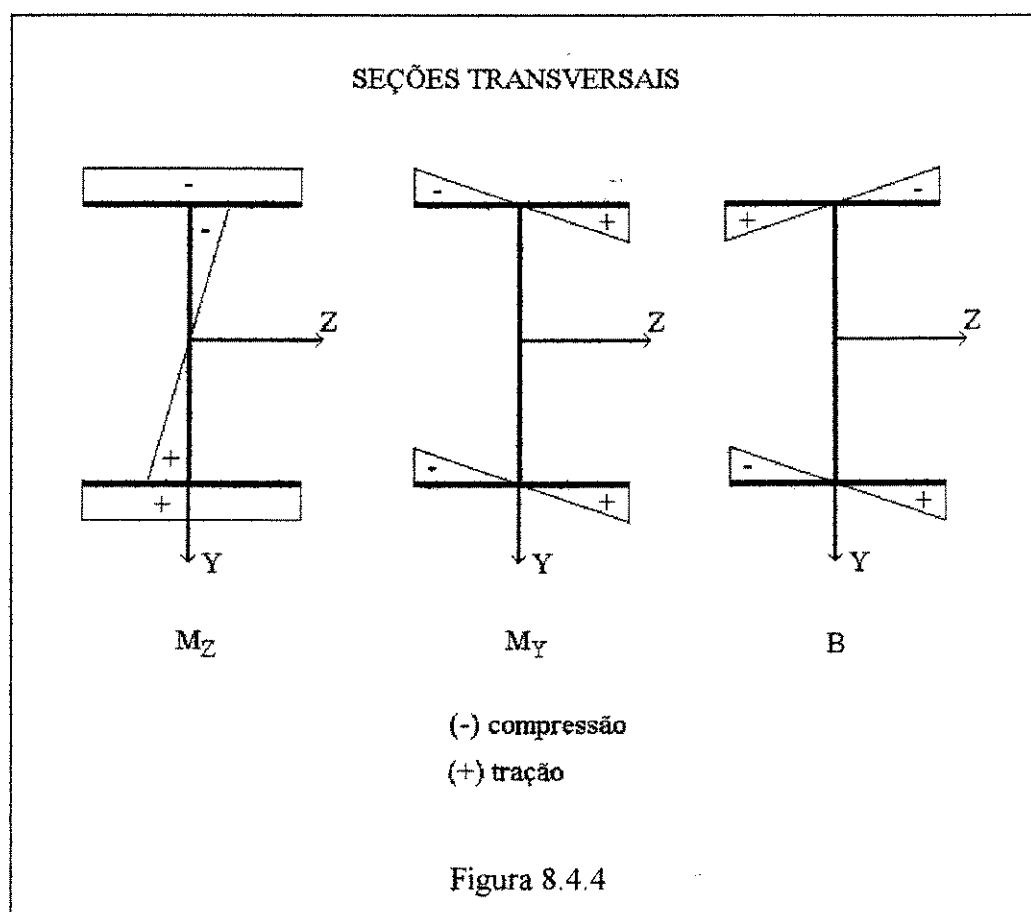
ou

$$\sigma = 6,1 \text{ KN / cm}^2 \quad (8.4.10)$$

A tensão σ atuante tem a seguinte distribuição ao longo da seção transversal:



Quando se considera os efeitos de 2ª ordem os diagramas de momento M_Y e M_Z e bimomento B , provocam tensões de compressão e tração na seção transversal com várias combinações diferentes, os diagramas seguintes representam estas distribuições de tensões para cada esforço solicitante.



Através da figura 8.4.4 observa-se que o ponto da seção de maiores tensões será na extremidade direita da mesa inferior. O valor da tensão atuante pode ser determinado com a seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{M_Z}{J_Z} y + \frac{M_Y}{J_Y} z + \frac{B}{J_w} \omega \quad (8.4.11)$$

Substituindo-se na expressão (8.4.11) os valores de M_Y , M_Z e B encontrados na tabela (8.4.3), tem-se os valores de tensão atuantes para cada M_Z aplicado nas extremidades. A tabela seguinte representa estes valores.

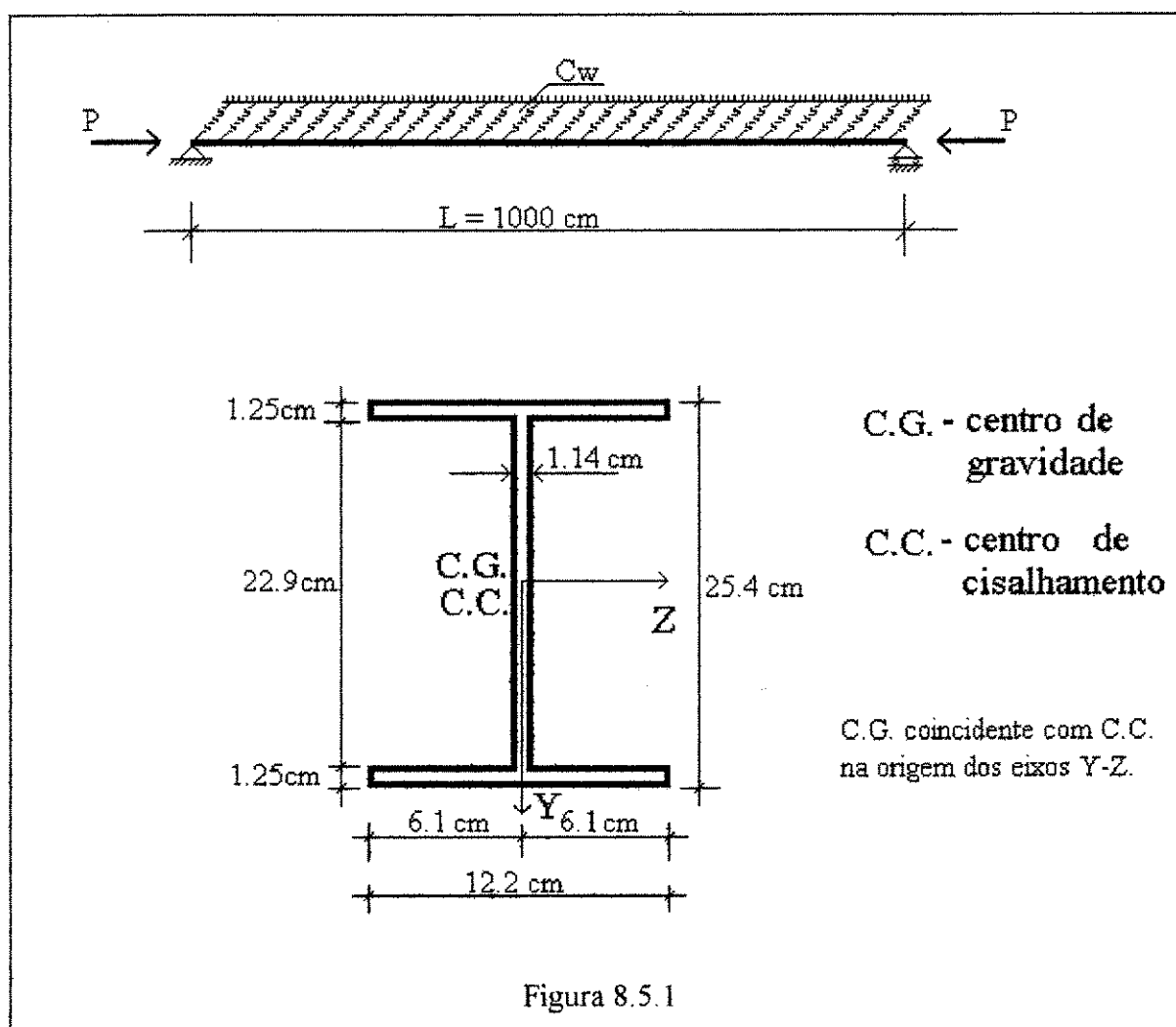
TABELA 8.4.4	
M_Z extremidade (KN.cm)	σ máxima (KN/cm ²)
500	3.25
1000	4.43
1500	5.83
2000	7.68
3000	22.20

Comparando os resultados contidos na tabela (8.4.4) com o valor de tensão apresentado em (8.4.10), verifica-se claramente que para $M_Z=2000$ KN.cm e considerando-se os efeitos de segunda ordem, a tensão atuante ultrapassa o valor determinado em (8.4.10). Portanto, caso a barra estivesse dimensionada próximo ao limite de escoamento do material, para o carregamento de projeto, os efeitos de segunda ordem poderiam determinar plastificação e até ruptura do material, para valores abaixo do carregamento de projeto.

8.5. - Exemplo Número 5: Instabilidade de Barra com Seção Não Simétrica.

No exemplo 8.1 estudaram-se os efeitos da vinculação elástica para uma barra de seção duplamente simétrica sujeita à flexão. No caso de barras submetidas à compressão, será feito inicialmente um estudo para seção duplamente simétrica, e após, o caso de seção transversal não simétrica.

Seja a barra apresentada na figura 8.5.1, sujeita a uma vinculação elástica contínua em um plano horizontal, na direção do eixo z .



As características elásticas do material e geométricas da seção transversal são as mesmas da barra do exemplo 8.1.

Aplicando-se vínculos elásticos contínuos no centro de cisalhamento e depois nas mesas da seção transversal, tem-se os seguintes resultados:

Tabela 8.5.1 - Vínculo elástico no C.C. ($h_y = 0$, $h_z = 0$)									
C_w KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	Deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
1.10^{-5}	1135.079	(*)	(*)	64.139	252.810	568.843	2399.651	(*)	(*)
1.10^{-4}	1135.079	(*)	(*)	73.259	255.090	569.856	2399.651	(*)	(*)
1.10^{-3}	1135.078	(*)	(*)	164.448	277.887	579.985	2399.647	(*)	(*)
1.10^{-2}	1134.877	(*)	(*)	1076.526	505.860	681.312	2399.572	(*)	(*)
1.10^{-1}	1135.085	(*)	(*)	(*)	2785.687	1694.359	2399.209	(*)	(*)

Tabela 8.5.2 - Vínculo elástico fora do C.C. ($h_y = -12$ cm, $h_z = 0$)									
C_w KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	Deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
1.10^{-5}	1135.079	(*)	(*)	64.139	252.810	568.843	2401.056	(*)	(*)
1.10^{-4}	1135.079	(*)	(*)	73.198	255.087	569.856	2413.697	(*)	(*)
1.10^{-3}	1135.088	(*)	(*)	158.483	277.571	579.939	2545.754	(*)	(*)
1.10^{-2}	1135.079	(*)	(*)	628.743	475.441	675.934	(*)	(*)	(*)
1.10^{-1}	1135.094	(*)	(*)	989.391	1143.107	1293.487	(*)	(*)	(*)

Tabela 8.5.3 - Vínculo elástico fora do C.C. ($h_y = 12$ cm, $h_z = 0$)									
C_w KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	Deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
1.10^{-5}	1135.079	(*)	(*)	64.139	252.810	568.843	2401.056	(*)	(*)
1.10^{-4}	1135.079	(*)	(*)	73.198	255.087	569.856	2413.698	(*)	(*)
1.10^{-3}	1135.088	(*)	(*)	158.483	277.571	579.939	2545.761	(*)	(*)
1.10^{-2}	1135.084	(*)	(*)	628.757	475.441	675.801	(*)	(*)	(*)
1.10^{-1}	1135.106	(*)	(*)	989.381	1143.102	1293.469	(*)	(*)	(*)

(*) - O método não convergiu para o auto-valor correspondente a este modo de flambagem, mesmo com o aumento do número de auto-valores a serem calculados pelo programa.

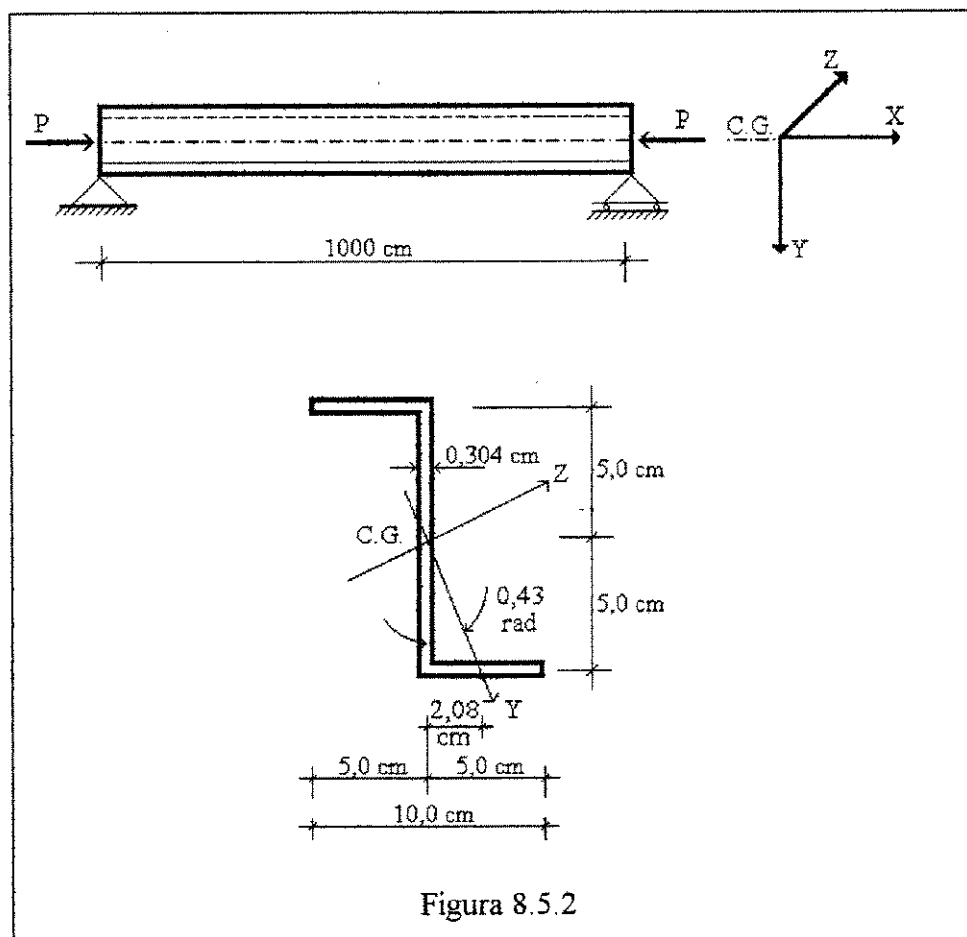
Na tabela (8.5.1) verifica-se que a instabilidade da barra ocorre preferencialmente na direção do deslocamento w para os valores de C_w entre 1.10^{-5} e 1.10^{-2} KN/cm². Nota-se que para $C_w = 1.10^{-2}$ KN/cm² a carga crítica é associada ao segundo modo de flambagem. Quando tem-se o vínculo elástico posicionado no centro de cisalhamento da seção transversal, a sua atuação torna-se favorável ao incremento no valor de carga crítica de compressão. Percebe-se que, à partir de um valor de constante elástica igual a 1.10^{-5} KN/cm², tem-se uma carga crítica de 64,139 KN, 1,6 % maior que a carga crítica de Euler. ($P_{euler}=63,126$ KN). Observa-se também, como no exemplo (8.1), que o aumento no valor de constante elástica, leva a valores de carga crítica associados ao 2º e 3º modos de flambagem.

Nas tabelas (8.5.2) e (8.5.3), onde tratam-se os casos de vínculo elástico nas mesas superior e inferior da seção transversal, percebe-se claramente a igualdade de resultados. Isto deve-se ao fato da seção transversal ser simétrica e estar submetida a uma carga de compressão axial.

Quando o vínculo elástico encontra-se posicionado em uma das mesas da seção transversal, o valor de carga crítica é menor do que no caso de vínculo elástico no centro de cisalhamento. Nota-se que o vínculo elástico situado nas mesas altera a simetria de carregamento e vinculação em relação ao caso de vínculos elásticos situados no centro de cisalhamento. Acredita-se que este fato está relacionado com a região de tensões de compressão abrangida pelo vínculo elástico, ou seja, quanto maior for a região comprimida da seção transversal abrangida pelo vínculo elástico, maior será a sua influência no aumento do valor de carga crítica.

Uma comparação pode ser feita com a barra do exemplo (8.1), onde a mesa superior apresenta maior concentração de tensões de compressão, e portanto, o vínculo elástico naquela posição fornece o maior valor de carga crítica.

Feitas algumas considerações para o caso de seção simétrica, pretende-se resolver o problema de instabilidade para barras com seção não simétrica, como apresentado na figura (8.5.2). Mostra-se também a influência de vínculos elásticos contínuos em diferentes posições da seção transversal.



As características geométricas da seção transversal e elásticas do material, são as seguintes:

$$E = 205000 \text{ Mpa}$$

$$J_Y = 23,10 \text{ cm}^4$$

$$G = 80000 \text{ Mpa}$$

$$J_W = 395,83 \text{ Cm}^6$$

$$A = 5,72 \text{ cm}^2$$

$$J_T = 0,1873 \text{ cm}^4$$

$$J_Z = 88,29 \text{ cm}^4$$

Além dos apoios rígidos apresentados na figura (8.5.2), pretende-se considerar vinculações elásticas contínuas ao longo da barra. Estas condições de vinculação são apresentadas a seguir.

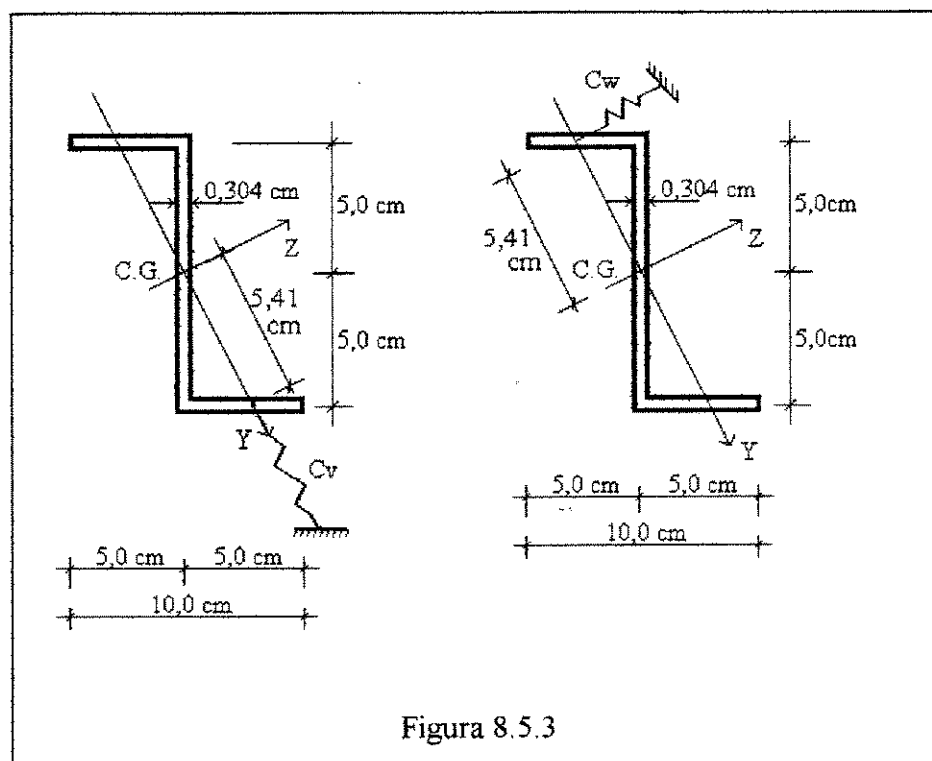


Figura 8.5.3

O funcional deste problema, para o caso de vínculo elástico contínuo nas direções y e z, é o seguinte:

$$\pi = \int_l \frac{1}{2} \left[EJ_z v_D''^2 + EJ_y w_D''^2 + EJ_\omega \phi_D''^2 + GJ_t \phi_D'^2 + C_v v_D^2 + C_w w_D^2 + \right. \\ \left. - N(v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2) + C_w(-2w_D h_y \phi_D + h_y^2 \phi_D^2) \right] dx \quad (8.5.1)$$

A minimização deste funcional, utilizando as equações de Euler, resulta nas seguintes equações diferenciais:

$$EJ_z v_D^{iv} + N v_D'' + C_v v_D = 0 \quad (8.5.2)$$

$$EJ_y w_D^{iv} + N w_D'' + C_w (w_D - h_y \phi_D) = 0 \quad (8.5.3)$$

$$EJ_\omega \phi_D^{iv} - GJ_t \phi_D'' + N i_D^2 \phi_D'' - C_w h_y w_D + C_w h_y^2 \phi_D = 0 \quad (8.5.4)$$

Analisando-se as equações diferenciais verifica-se, através da expressão (8.5.2), a independência dos deslocamentos na direção v e a influência de C_v somente nestes deslocamentos. Por outro lado, obtém-se um acoplamento das equações (8.5.3) e (8.5.4) nas direções w e φ . Evidencia-se, no caso, um problema de instabilidade lateral ou flexo-torção, com influência direta de C_w na instabilidade.

O valor de carga crítica pode ser encontrado a partir da anulação do determinante formado a partir das equações diferenciais (8.5.2), (8.5.3) e (8.5.4). De modo análogo ao mostrado no exemplo 8.1 e utilizando-se as seguintes funções aproximadoras:

$$v = C \operatorname{sen} \lambda_r \quad (8.5.5)$$

$$w = A \operatorname{sen} \lambda_n \quad (8.5.6)$$

$$\varphi = B \operatorname{sen} \lambda_m \quad (8.5.7)$$

Onde:

$$\lambda_r = \frac{r \pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{L}$$

$$\lambda_m = \frac{m \pi}{L}$$

r , n e m representam os modos de flambagem nas direções v , w , e φ respectivamente.

$$\begin{vmatrix} \lambda_r^4 EJ_z - \lambda_r^2 N + C_v & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n^4 EJ_y - \lambda_n^2 N + C_w & -C_w h_y \\ 0 & -C_w h_y & \lambda_m^4 EJ_\omega + \lambda_m^2 GJ_t - \lambda_m^2 N i_D^2 + C_w h_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(8.5.8)$$

Resolvendo-se o determinante (8.5.8), tem-se a seguinte expressão:

$$(\lambda_n^4 EJ_y - \lambda_n^2 N + C_w)(\lambda_m^4 EJ_\omega + \lambda_m^2 GJ_t - \lambda_m^2 N i_D^2 + C_w h_y^2) - C_w^2 h_y^2 = 0 \quad (8.5.9)$$

A partir da expressão (8.5.9), pode-se fazer as seguintes relações:

$$N_y = \frac{EJ_y \lambda_n^4 + C_w}{\lambda_n^2} \quad (8.5.10)$$

e

$$N_\phi = \frac{EJ_\omega \lambda_m^4 + GJ_t \lambda_m^2 + C_w h_y^2}{i_D^2 \lambda_m^2} \quad (8.5.11)$$

Utilizando-se as relações (8.5.10) e (8.5.11) na expressão (8.5.9), chega-se:

$$(N_y \lambda_n^2 - N \lambda_n^2)(N_\phi i_D^2 \lambda_m^2 - N i_D^2 \lambda_m^2) - C_w^2 h_y^2 = 0 \quad (8.5.12)$$

A expressão (8.5.12) pode ser transformada no seguinte tipo:

$$N^2 - N(N_y + N_\phi) + N_y N_\phi - \alpha = 0 \quad (8.5.13)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{C_w^2 h_y^2}{i_D^2 \lambda_n^2 \lambda_m^2}$$

As raízes da equação (8.5.13) são dadas por:

$$N = \frac{(N_y + N_\phi) \pm \sqrt{(N_y + N_\phi)^2 - 4N_y N_\phi + 4\alpha}}{2} \quad (8.5.14)$$

Sendo as raízes reais, a menor raiz ou carga crítica será dada por:

$$P_{crit} = \frac{N_y + N_\phi}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(N_y - N_\phi)^2 + \alpha} \quad (8.5.15)$$

Com base nesta expressão verifica-se que, a imposição de um vínculo elástico contínuo no centro de cisalhamento da seção ($h_y=0$), faz com que o valor de α torne-se nulo e a influência do vínculo elástico não atue mais na parcela N_ϕ . Desta maneira, somente N_y será modificado em função de C_w . Admitindo-se que os valores de N_y sejam menores que N_ϕ , a carga crítica estará associada a constante C_w e, um acréscimo deste implicará no aumento do valor de carga crítica.

Quando o vínculo elástico encontra-se fora do centro de cisalhamento ($h_y \neq 0$), aparece a influência de α no radicando da expressão (8.5.15), desta maneira o valor da raiz aumenta e a carga crítica tenderá a diminuir.

Portanto, pode-se mostrar de maneira qualitativa que, um vínculo elástico posicionado nas mesas superior ou inferior acarretarão em uma carga crítica de compressão menor do que para um vínculo no centro de cisalhamento.

Para que se tenha uma idéia de grandeza dos resultados obtidos, com o programa de computador desenvolvido, para cada situação de vínculo elástico, apresenta-se inicialmente na tabela seguinte os valores de carga crítica para o caso de barra sem vinculação elástica.

Tabela 8.5.4 - Barra sem vínculo elástico			
Modo de Flambagem	P_{crit} (KN)		
	Direção		
	V	W	ϕ
1	17.8637	4.6738	81.0567
2	71.4828	18.6990	93.4012
3	160.9490	42.1066	114.0106

Verifica-se na tabela (8.5.4) que o problema de instabilidade ocorre inicialmente na direção do deslocamento w. (Menor P_{crit}).

A inclusão de um vínculo elástico contínuo na direção do deslocamento w causa variações significativas no valor de carga crítica de compressão. Os valores de P_{crit} para diferentes constantes elásticas (C_w) tanto no C.C. como fora dele são apresentados nas tabelas seguintes.

Tabela 8.5.5 - Vínculo elástico no C.C. ($h_y = 0$, $h_z = 0$)									
C_w KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
$1 \cdot 10^{-8}$	17.8637	71.4823	(***)	4.6748	18.6992	42.1067	81.0567	(***)	114.002
$1 \cdot 10^{-7}$	17.8637	71.4823	(***)	4.6839	18.7015	42.1077	81.0567	(***)	114.002
$1 \cdot 10^{-6}$	17.8637	71.4823	(***)	4.7751	18.7243	42.1178	81.0567	(***)	114.001
$1 \cdot 10^{-5}$	17.8637	71.4823	(***)	5.6870	18.9523	42.2192	81.0565	(***)	114.010
$5 \cdot 10^{-5}$	17.8637	71.4823	(***)	9.7399	19.9655	42.6695	81.0575	(***)	114.005
$1 \cdot 10^{-4}$	17.8637	71.4823	(***)	14.8065	21.2320	43.2325	81.0574	(***)	113.995
$5 \cdot 10^{-4}$	17.8637	71.4823	(***)	55.3346	31.3643	47.7386	81.0411	(***)	113.933
$1 \cdot 10^{-3}$	17.8637	71.4823	(***)	112.247	44.0294	53.3658	81.0570	93.4002	(***)
$5 \cdot 10^{-3}$	17.8637	71.4823	(***)	(*)	145.350	98.3989	81.0587	93.3996	113.861
$1 \cdot 10^{-2}$	17.8637	71.4823	(***)	(*)	(*)	154.733 (**)	81.0572	93.3988	113.978

Observações:

(*) - O método não convergiu para o auto-valor correspondente a este modo de flambagem, mesmo com o aumento do número de auto-valores a serem calculados pelo programa.

(*) - Para o valor de $C_w = 1 \cdot 10^{-2}$ KN/cm² a menor carga crítica corresponde ao 4^o modo de flambagem com $P_{crit} = 138,3459$ KN.

(***) - Dentro da precisão admitida para auto-valores seguintes ao primeiro, não foi possível encontrar auto-valores associados a este modo de flambagem.

Tabela 8.5.6 - Vínculo elástico fora do C.C. ($h_v = -5,41$ cm, $h_z = 0$)									
C_w KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	Deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
$1 \cdot 10^{-8}$	17.8637	71.4828	160.949	4.6748	18.6992	42.1067	81.0580	93.4009	114.002
$1 \cdot 10^{-7}$	17.8637	71.4828	160.949	4.6839	18.7015	42.1077	81.0697	93.4042	114.004
$1 \cdot 10^{-6}$	17.8637	71.4828	160.949	4.7750	18.7243	42.1178	81.2092	93.4392	114.022
$1 \cdot 10^{-5}$	17.8637	71.4828	160.949	5.6670	18.9510	42.2189	82.6002	93.7835	114.142
$1 \cdot 10^{-4}$	17.8637	71.4828	160.949	12.9546	21.1053	43.2065	98.1410	97.3353	115.693
$1 \cdot 10^{-3}$	17.8637	71.4828	160.949	30.0836	34.1230	50.9825	(*)	(*)	133.251
$1 \cdot 10^{-2}$	17.8637	71.4828	160.949	34.6426	46.4874	66.6982	(*)	(*)	(*)
$1 \cdot 10^{-1}$	17.8637	71.4828	160.949	35.1360	48.3328	70.3888	(*)	(*)	(*)
1	17.8637	71.4828	160.949	35.1856	48.5224	70.7825	(*)	(*)	(*)
10	17.8637	71.4828	160.949	35.1906	48.5414	70.8221	(*)	(*)	(*)
100	17.8637	71.4828	160.949	35.1911	48.5433	70.8260	(*)	(*)	(*)

(*) - O método não convergiu para o auto-valor correspondente a este modo de flambagem, mesmo com o aumento do número de auto-valores a serem calculados pelo programa.

Com base nos valores apresentados nas tabelas (8.5.5) e (8.5.6), e nas equações diferenciais, pode-se afirmar:

-Na direção v, os deslocamentos são totalmente independentes das direções w e ϕ , com nenhuma influência dos valores de constante elástica (C_w) nos valores de P_{crit} e respectivos modos de flambagem;

-A carga crítica independe da posição do vínculo elástico na mesa superior ou inferior da seção transversal, visto que o único esforço atuante é de compressão;

-O fato da maior carga crítica ocorrer no centro de cisalhamento e não na mesa comprimida, não contradiz o apresentado no exemplo 8.1. Este fato mostra que a instabilidade de barras está diretamente ligada à compressão. Portanto, um vínculo elástico colocado em uma região da seção transversal com tensões de compressão, será favorável ao incremento da carga crítica em detrimento de regiões menos comprimidas.

Observa-se que, quanto maior for a região de tensões de compressão abrangida pelo vínculo elástico, maiores serão os seus efeitos no valor de carga crítica. No caso

deste problema, o vínculo elástico no C.C. abrange uma região maior de tensões que nas mesas, ocasionando um valor maior de P_{crit} .

Estudos mais detalhados devem ser desenvolvidos para que se possa definir qual a região de abrangência do vínculo elástico e sua relação com as regiões comprimidas da seção transversal.

Percebe-se que a barra em estudo é bem sensível à instabilidade lateral, e valores pequenos de C_w favorecem bastante no impedimento desta instabilidade. Na situação apresentada na tabela 8.5.5, verifica-se claramente que, para valores de C_w em torno de 1.10^{-4} KN/cm² a carga crítica para a direção w, aproxima-se da carga crítica para a direção v. Aumentando-se C_w ainda mais, a carga crítica para a direção w assume valores além da carga crítica para a direção v. Logo, a direção w não será mais a direção principal de flambagem e sim a direção v.

Para a situação apresentada na tabela 8.5.6 para valores de C_w acima de 1.10^{-4} KN/cm² nota-se predominância de flambagem na direção v.

A inclusão de um vínculo elástico contínuo (C_v) na direção do eixo y da seção transversal, figura 8.5.3, determina a variação para os valores de P_{crit} na tabela a seguir.

Tabela 8.5.7 - Vínculo elástico Vertical na direção do C.C. ($h_y = 5,41$ cm, $h_z = 0$)									
C_v KN/cm ²	Carga Crítica (KN)								
	Deslocamento								
	V			W			ϕ		
	modo de flambagem			modo de flambagem			modo de flambagem		
	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o	1 ^o	2 ^o	3 ^o
1.10^{-8}	17.8648	71.4826	160.949	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
1.10^{-7}	17.8739	71.4851	160.950	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
1.10^{-6}	17.9650	71.5079	160.960	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
1.10^{-5}	18.8769	71.7363	161.061	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
1.10^{-4}	27.9961	74.0065	162.076	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
5.10^{-4}	68.5270	84.1354	166.584	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
6.10^{-4}	68.5270	84.1354	166.584	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
7.10^{-4}	88.7904	89.2174	168.841	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
8.10^{-4}	98.9254	91.7836	169.970	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
9.10^{-4}	109.074	94.2598	171.095	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
1.10^{-3}	119.152	96.8036	172.219	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
2.10^{-3}	220.525	122.130	183.456	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
3.10^{-3}	(*)	147.463	194.718	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
4.10^{-3}	(*)	(*)	205.981	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010
5.10^{-3}	(*)	(*)	217.252	4.6738	18.6990	42.1066	81.0567	93.4012	114.010

(*) - O método não convergiu para o auto-valor correspondente a este modo de flambagem, mesmo com o aumento do número de auto-valores a serem calculados pelo programa.

Observa-se novamente na tabela 8.5.7 a independência da vinculação na direção v das demais direções. O valor crítico de instabilidade na direção w ($P_{crit}=4,6738$ KN) e na direção ϕ ($P_{crit} = 81,0567$ KN), independem dos valores de C_v .

Os valores de constante elástica (C_v) utilizados mostram que, na precisão apresentada, para $C_v = 1.10^{-8}$ KN/cm² o valor de P_{crit} praticamente se iguala ao caso sem vínculo elástico, tabela 8.5.4, e para $C_v = 5.10^{-3}$ KN/cm² o P_{crit} atinge valores que não tem mais sentido considerar, pois são muito altos se comparados com o P_{crit} das outras duas direções.

Conclui-se desta maneira, que torna-se muito importante verificar não somente a posição do vínculo elástico na seção transversal e o seu valor, como também o tipo de carregamento e a distribuição de tensões que este carregamento provoca na seção transversal.

9. Conclusões:

Pode-se dizer de maneira geral que a incidência de vinculação elástica em barras de seção delgada aberta exerce grande influência no seu comportamento estrutural.

Verificou-se, com a resolução dos exemplos, que o projetista estrutural deve ter muito cuidado quanto à posição do vínculo elástico pois, para diferentes posições da vinculação na seção transversal, tem-se capacidades de carga também diferentes.

No cálculo de instabilidade de barras, o valor de carga crítica é particularmente influenciado pelo valor da constante elástica, e em determinadas situações a menor carga crítica pode ocorrer com um modo de flambagem associado a mais de uma semi-onda.

Na determinação de cargas críticas de instabilidade para barras de seção delgada, ocorre que os valores de carga crítica, para os casos sem vínculo elástico, crescem proporcionalmente ao aumento do número de semi-ondas. Este fato é verdadeiro porém, quando aplica-se uma vinculação elástica ao C.D. da barra (exemplo 8.1 - tabela 8.1.2), verifica-se a influência do valor de constante elástica no modo de flambagem. Pode-se observar no gráfico 1 deste mesmo exemplo que, a partir de um certo valor de constante elástica o menor valor de carga crítica não mais ocorre para o primeiro modo de flambagem e sim para o segundo.

Além do módulo de constante elástica do vínculo, é importante considerar o seu ponto de aplicação na seção transversal. No caso do exemplo 8.1 o vínculo na mesa comprimida leva a valores de carga crítica maiores que na mesa tracionada.

Com base nestas informações pode-se dizer que, devido a flambagem ou instabilidade ocorrer predominantemente por compressão, a aplicação de um vínculo elástico em regiões comprimidas da seção transversal favorece ao aumento do valor de carga crítica. Por outro lado, é importante lembrar que o posicionamento da vinculação no centro de cisalhamento é a melhor posição quanto existe a possibilidade de inversão do carregamento.

Nos casos de instabilidade torna-se importante considerar, também, a relação entre o tipo de carregamento aplicado e a posição do vínculo elástico. Percebe-se no exemplo 8.5, tabelas 8.5.1, 8.5.2 e 8.5.3, que são obtidos valores maiores de carga

crítica para vinculação no centro de cisalhamento. Neste exemplo, observa-se que quanto maior for a região de tensões de compressão abrangida pelo vínculo elástico, maiores serão os seus efeitos no valor de carga crítica.

Para os problemas de 2ª espécie, exemplos 8.2 e 8.4, o programa mostrou uma precisão muito boa tanto para os deslocamentos quanto para os esforços de 1ª e 2ª ordem atuantes na barra.

O método da iteração vetorial mostrou-se muito robusto e confiável para o cálculo dos menores auto-valores e seus respectivos auto-vetores.

O programa incluído no anexo A e utilizado para os cálculos apresentou uma precisão muito boa dos resultados e capacidade para resolver tanto problemas de 1ª espécie como de 2ª espécie.

Como futuros estudos a serem desenvolvidos, torna-se interessante a análise de um número maior de seções transversais sujeitas à vinculação elástica contínua e discreta.

A determinação do melhor ponto de aplicação da vinculação elástica em diversos tipos de seção transversal em muito auxiliará na otimização da capacidade portante das barras de seção delgada em meio elástico contínuo ou discreto.

Outro tópico a ser desenvolvido é a implementação, em rotinas computacionais, do funcional para coordenadas não ortogonais.

Por outro lado, a extensão deste estudo considerando a não linearidade física do material permitirá uma maior aproximação aos problemas reais.

10. Bibliografia:

- [1] **PALERMO JÚNIOR, L.** - Esforços de flexão e flexo-torção em teoria de segunda ordem - automatização do cálculo - São Carlos, Universidade de São Paulo, 1985.
- [2] **SCHWARZ, HANS R.** - Numerical analysis of symmetric matrices - New Jersey, Prentice-Hall, 1973.
- [3] **JENNINGS, ALAN** - Matrix computation for engineers and scientists - John Wiley & Sons Ltd, 1977.
- [4] **WILKINSON, J. H.** - The algebraic eigenvalue problem - New York, Oxford University Press, 1965.
- [5] **ZIENKIEWICZ, O. C.** - The finite element method in engineering science, Mc Graw Hill, 1971.
- [6] **VLASOV, B. Z.** - Pieces longues en voiles minces. 10^a Ed. Trad. de G. Smirnoff. Paris, Eyrolles, 1962.
- [7] **PALERMO JÚNIOR, L.** - Problemas especiais de instabilidade de vigas, Relatório à FAPESP, (processo 82/0068-4).
- [8] **RACHID, MUNIR & MORI, DAGOBERTO DARIO** - Instabilidade: conceitos e aplicação na flambagem por flexão, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1989.
- [9] **SIMITSES, GEORGE J.** - An introduction to the elastic stability of structures, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.

- [10] **CHEN, W. F. & LUI, E. M.** - Structural stability - theory and implementation, New York, Elsevier.
- [11] **BREBBIA, C. A. & FERRANTE, A. J.** - The finite element techniques, Editora da UFRGS, 1975.
- [12] **SCHIEL, F.** - Introdução à resistência dos materiais, São Carlos, Universidade de São Paulo, 1985.
- [13] **TIMOSHENKO & GERE** - Mechanics of materials, Van Nostrand Reinhold Company, New York, N. Y., E.U.A.
- [14] **C. F. KOLLBRUNNER & K. BASLER** - Torsion in structures, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlim, 1969.
- [15] **TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. M.** - Theory of elastic stability, 2ª Ed., Tokyo, Mcgraw-Hill, Kogakusha, 1961.
- [16] **SAADA, ADEL S.** - Elasticity: theory and applications, Pergamon Press Inc. - 1974.
- [17] **GERE & WEAVER** - Análise de estruturas reticuladas, Editora Guanabara, 1987.
- [18] **NIKLAUS WIRTH** - Programação sistemática em pascal, 5ª edição, 1986.
- [19] **YANKELEVSKY, D. Z. & EISENBERGER, M.** - Analysis of a beam column on elastic foundation, Computers & Structures - v. 23, n. 3, p. 351-356, 1986
- [20] **VOLTERRA, ENRICO & GAINES, J. H.** - Advanced strength of materials, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971.
- [21] **SUSSEKIND, JOSÉ CARLOS** - Curso de análise estrutural, V.3, Editora Globo, Porto Alegre, 1982.

- [22] **MEGSON, THOMAS H. G.** - Linear analysis of thin-walled elastic structures, Halsted Press, New York, N. Y., 1974.
- [23] **TIMOSHENKO, S. P.** - Resistência dos materiais, V.1, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1966.
- [24] **TIMOSHENKO, S. P.** - Resistência dos materiais, V.2, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1966.
- [25] **SPIEGEL, MURRAY R.** - Manual de fórmulas e tabelas matemáticas, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, 1973.
- [26] **RACHID, M.** - Instabilidade de Barras de Seção Delgada, São Carlos, Universidade de São Paulo, 1976.
- [27] **MORI, D.D.** - Flexo-Torção: Teoria de 1ª e 2ª Ordem - Automatização de Cálculo, São Carlos, Universidade de São Paulo, 1978.
- [28] **HONE, C.P.** - Torsional-Flexural Buckling of Axially-Loaded, Thin-Walled, Elastic Struts of Open Cross-Section. In: CHILVER, A.H. - Thin-Walled Structures, John Wiley & Sons, Inc, New York, p. 103 - 135, 1967
- [29] **BARTA, T.A.** - On the Torsional-Flexural Buckling of Thin-Walled Elastic Bars With Monosymmetric Open Cross-Section, In: CHILVER, A.H. - Thin-Walled Structures, John Wiley & Sons, Inc, New York, p. 60 - 86, 1967.

ANEXO A

(Listagem do Programa)

```

PROGRAM instabil (input,output,arquivo);

uses crt,dos,telatool,jantext;

const
  max_1=4;      { numero maximo de materiais      }
  max_2=100;    { numero maximo de nos            }
  max_3=100;    { numero maximo de elementos      }
  max_4=6*max_2; { numero maximo de graus de liberdade }

type
  mat1=^matriz1;
  mat2=^matriz2;
  mat3=^matriz3;
  mat4=^matriz4;
  mat5=^matriz5;
  mat6=^matriz6;
  mat7=^matriz7;
  mat8=^matriz8;
  mat9=^matriz9;
  vet1=^vetor;

  matriz1=array [1..max_1,1..10] of double;
  matriz2=array [1..max_3,1..3] of integer;
  matriz3=array [1..max_2,1..3] of double;
  matriz4=array [1..max_4,1..12] of double;
  matriz5=array [1..max_2,1..6] of integer;
  matriz6=array [1..max_3,1..6] of double;
  matriz7=array [1..max_2,1..8] of double;
  matriz8=array [1..max_2,1..6] of double;
  matriz9=array [1..max_3,1..10] of double;
  matriz=array [1..12,1..12] of double;
  vetor=array [1..max_4] of double;

VAR titulo,arq_in,arq_out:string;
    arquivo:text;
    corr:char;
    elast,trans,l:real;

    nnos,nmat,nelem,nm,i,j,k,flag5,flag1,flag2,
        flag3,bim,auto,ii,lb,orto,coluna,linha:integer;

    mat:mat1;ele:mat2;nos:mat3;
    kg,a,b,mat_auto:mat4;res:mat5;q:mat6;
    pos:mat7;p:mat8;spr:mat9;
    sm:matriz;

    fe,fe1,u1,u2,u3,u4:vet1;
    la1,la2:vetor;

    ind:array [1..12] of integer;

PROCEDURE LEITURA (var titulo:string;var elast,trans:real;
    var flag1,flag2,flag3,bim,auto,orto,nnos,nelem,nm:integer;
    var arquivo:text;arq_in:string);

```

```
var ident:string;
```

```
{PROCEDIMENTOS INTERNOS AO PROCEDIMENTO LEITURA}
```

```
PROCEDURE LE_TITULO (var titulo:string;var arquivo:text);
```

```
var car:char;
```

```
begin
```

```
  read(arquivo,car);
```

```
  while car=' ' do read (arquivo,car);
```

```
  titulo:=car;
```

```
  while not eoln(arquivo) do
```

```
    begin
```

```
      read(arquivo,car);titulo:=titulo+car;
```

```
    end;
```

```
  readln(arquivo);
```

```
end;
```

```
PROCEDURE LE_ELAST (var elast,trans:real);
```

```
var dado:string;
```

```
  car:char;
```

```
begin
```

```
  while not eoln(arquivo) do
```

```
    begin
```

```
      read(arquivo,car);
```

```
      while car=' ' do read(arquivo,car);
```

```
      dado:=upcase (car);
```

```
      while car<>'=' do read(arquivo,car);
```

```
      if dado='E' then read(arquivo,elast);
```

```
      if dado='G' then read(arquivo,trans);
```

```
    end;
```

```
    readln(arquivo);read(arquivo,car);dado:= "";
```

```
    while car=' ' do read(arquivo,car);
```

```
    dado:=upcase(car);
```

```
    repeat
```

```
      read(arquivo,car);dado:=dado+car;
```

```
    until dado='FIM';
```

```
    readln(arquivo);
```

```
end;
```

```
PROCEDURE LE_SISTEMA (var flag1,flag2,flag3,bim,auto,orto:integer);
```

```
var dado:string;
```

```
  car:char;
```

```
begin
```

```
  while not eoln(arquivo) do
```

```
    begin
```

```
      read(arquivo,car);
```

```
      while car=' ' do read(arquivo,car);
```

```
      dado:= "";
```

```
      while car<>'=' do
```

```
        begin
```

```

        dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
    end;
    if dado='FLAG1' then read(arquivo,flag1);
    if dado='FLAG2' then read(arquivo,flag2);
    if dado='FLAG3' then read(arquivo,flag3);
    if dado='AUTO' then read(arquivo,auto);
    if dado='BIM' then read(arquivo,bim);
    if dado='ORTO' then read(arquivo,orto);
end;
readln(arquivo);
read(arquivo,car);dado:="";
while car=' ' do read(arquivo,car);
dado:=upcase(car);
repeat
    read(arquivo,car);dado:=dado+car;
until dado='FIM';
readln(arquivo);
end;

```

```

PROCEDURE LE_MATERIAL (var nm:integer);

```

```

var m,erro:integer;
    dado:string;
    car:char;

```

```

begin
    read(arquivo,m);nm:=0;
    repeat
        while not eoln(arquivo) do
            begin
                read(arquivo,car);dado:="";
                while car=' ' do read(arquivo,car);
                while car<>'=' do
                    begin
                        dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
                    end;
                if dado='JY' then read(arquivo,mat^[m,1]);
                if dado='JZ' then read(arquivo,mat^[m,2]);
                if dado='JW' then read(arquivo,mat^[m,3]);
                if dado='JT' then read(arquivo,mat^[m,4]);
                if dado='UW' then read(arquivo,mat^[m,5]);
            end;
            readln(arquivo);
            while not eoln(arquivo) do
                begin
                    read(arquivo,car);dado:="";
                    while car=' ' do read(arquivo,car);
                    while car<>'=' do
                        begin
                            dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
                        end;
                    if dado='A' then read(arquivo,mat^[m,6]);
                    if dado='KY' then read(arquivo,mat^[m,7]);
                    if dado='KZ' then read(arquivo,mat^[m,8]);
                    if dado='YD' then read(arquivo,mat^[m,9]);
                    if dado='ZD' then read(arquivo,mat^[m,10]);
                end;
            end;
        end;
    end;

```

```

end;
nm:=nm+1;
readln(arquivo);
read(arquivo,car);dado:= "";
while car=' ' do read(arquivo,car);
if car='F' then dado:='FIM'
else
begin
while car<>' ' do begin
dado:=dado+car;read(arquivo,car);
end;
val (dado,m,erro);
end;
until dado='FIM';
readln(arquivo);
end;

PROCEDURE LE_NOS (var nnos:integer);

var dado:string;
no,erro,noinic,nofin,inc:integer;
car:char;

begin
nnos:=0;read(arquivo,no);
repeat
while not eoln(arquivo) do
begin
read(arquivo,car);
while car=' ' do read(arquivo,car);
dado:=upcase (car);
while car<>'=' do read(arquivo,car);
if dado='X' then read(arquivo,nos^[no,1]);
if dado='Y' then read(arquivo,nos^[no,2]);
if dado='Z' then read(arquivo,nos^[no,3]);
if dado='G' then begin
read(arquivo,noinic,nofin,inc);
erro:=noinic+inc;
while erro<nofin do
begin
nos^[erro,1]:=nos^[erro-1,1]+(nos^[nofin,1]-
nos^[noinic,1])*inc/(nofin-noinic);
nos^[erro,2]:=nos^[erro-1,2]+(nos^[nofin,2]-
nos^[noinic,2])*inc/(nofin-noinic);
nos^[erro,3]:=nos^[erro-1,3]+(nos^[nofin,3]-
nos^[noinic,3])*inc/(nofin-noinic);
erro:=erro+inc;
nnos:=nnos+1;
end;
end;
end;
nnos:=nnos+1;
readln(arquivo);
read(arquivo,car);dado:= "";
while car=' ' do read(arquivo,car);
if car='F' then dado:='FIM'

```

```

        else
        begin
            while car<>' ' do begin
                dado:=dado+car;read(arquivo,car);
            end;
            val (dado,no,erro);
        end;
    until dado='FIM';
    readln(arquivo);
end;

```

PROCEDURE LE_ELEMENTO (var nelem:integer);

```

var elem,erro,eleminic,elemfin,inc:integer;
    dado:string;
    car:char;
begin
    nelem:=0;read(arquivo,elem);
    repeat
        while not eoln(arquivo) do
            begin
                read(arquivo,car);dado:="";
                while car=' ' do read(arquivo,car);
                while car<>'=' do
                    begin
                        dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
                    end;
                if dado='MAT' then read(arquivo,ele^[elem,1]);
                if dado='NOINIC' then read(arquivo,ele^[elem,2]);
                if dado='NOFIN' then read(arquivo,ele^[elem,3]);
                if dado='G' then begin
                    read(arquivo,eleminic,elemfin,inc);
                    erro:=eleminic+inc;
                    while erro<elemfin do
                        begin
                            ele^[erro,1]:=ele^[erro-1,1];
                            ele^[erro,2]:=ele^[erro-1,2]+(ele^[elemfin,2]-ele^[eleminic,2])*inc div
                                (elemfin-eleminic);
                            ele^[erro,3]:=ele^[erro-1,3]+(ele^[elemfin,3]-ele^[eleminic,3])*inc div
                                (elemfin-eleminic);
                            erro:=erro+inc;
                            nelem:=nelem+1;
                        end;
                    end;
                end;
                nelem:=nelem+1;
                readln(arquivo);
                read(arquivo,car);dado:="";
                while car=' ' do read(arquivo,car);
                if car='F' then dado:='FIM'
                else
                begin
                    while car<>' ' do begin
                        dado:=dado+car;read(arquivo,car);
                    end;

```

```

        val (dado,elem,erro);
    end;
until dado='FIM';
readln(arquivo);
end;

PROCEDURE LE_CARGAS2;

var elem,erro,eleminic,elemfin,inc:integer;
    dado:string;
    car:char;

begin
    read(arquivo,elem);
    repeat
        while not eoln(arquivo) do
            begin
                read(arquivo,car);dado:="";
                while car=' ' do read(arquivo,car);
                while car<>'=' do
                    begin
                        dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
                    end;
                if dado='QY' then read(arquivo,q^[elem,1]);
                if dado='QZ' then read(arquivo,q^[elem,2]);
                if dado='MT' then read(arquivo,q^[elem,3]);
                if dado='QYV' then read(arquivo,q^[elem,4]);
                if dado='QZV' then read(arquivo,q^[elem,5]);
                if dado='MTV' then read(arquivo,q^[elem,6]);
                if dado='G' then begin
                    read(arquivo,eleminic,elemfin,inc);
                    erro:=eleminic+inc;
                    while erro<elemfin do
                        begin
                            q^[erro,1]:=q^[erro-1,1];
                            q^[erro,2]:=q^[erro-1,2];
                            q^[erro,3]:=q^[erro-1,3];
                            q^[erro,4]:=q^[erro-1,4];
                            q^[erro,5]:=q^[erro-1,5];
                            q^[erro,6]:=q^[erro-1,6];
                            erro:=erro+inc;
                        end;
                    end;
                end;
            readln(arquivo);
            read(arquivo,car);dado:="";
            while car=' ' do read(arquivo,car);
            if car='F' then dado:='FIM'
            else
                begin
                    while car<>' ' do begin
                        dado:=dado+car;read(arquivo,car);
                    end;
                    val (dado,elem,erro);
                end;
            until dado='FIM';

```

```

        readln(arquivo);
end;

PROCEDURE LE_CARGAS3;

var dado:string;
    car:char;
    no,erro,noinic,nofin,inc:integer;

begin
    read(arquivo,no);
    repeat
        while not eoln(arquivo) do
            begin
                read(arquivo,car);dado:= "";
                while car=' ' do read(arquivo,car);
                while car<>'=' do
                    begin
                        dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
                    end;
                if dado='PX' then read(arquivo,p^[no,1]);
                if dado='PY' then read(arquivo,p^[no,2]);
                if dado='PZ' then read(arquivo,p^[no,3]);
                if dado='MY' then read(arquivo,p^[no,4]);
                if dado='MZ' then read(arquivo,p^[no,5]);
                if dado='NV' then read(arquivo,p^[no,6]);
                if dado='G' then begin
                    read(arquivo,noinic,nofin,inc);
                    erro:=noinic+inc;
                    while erro<nofin do
                        begin
                            p^[erro,1]:=p^[erro-1,1];
                            p^[erro,2]:=p^[erro-1,2];
                            p^[erro,3]:=p^[erro-1,3];
                            p^[erro,4]:=p^[erro-1,4];
                            p^[erro,5]:=p^[erro-1,5];
                            p^[erro,6]:=p^[erro-1,6];
                            erro:=erro+inc;
                        end;
                    end;
                end;
            readln(arquivo);
            read(arquivo,car);dado:= "";
            while car=' ' do read(arquivo,car);
            if car='F' then dado:='FIM'
            else
                begin
                    while car<>' ' do begin
                        dado:=dado+car;read(arquivo,car);
                    end;
                    val (dado,no,erro);
                end;
            until dado='FIM';
            readln(arquivo);
        end;
end;

```


PROCEDURE LE_CARGAS1;

var no,erro,noinic,nofin,inc:integer;
dado:string;
car:char;

```
begin
  read(arquivo,no);
  repeat
    while not eoln(arquivo) do
      begin
        read(arquivo,car);dado:="";
        while car=' ' do read(arquivo,car);
        while car<>'=' do
          begin
            dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
          end;
        if dado='YC' then read(arquivo,pos^[no,1]);
        if dado='ZC' then read(arquivo,pos^[no,2]);
        if dado='MY' then read(arquivo,pos^[no,3]);
        if dado='MZ' then read(arquivo,pos^[no,4]);
        if dado='BI' then read(arquivo,pos^[no,5]);
      end;
      readln(arquivo);
      while not eoln(arquivo) do
        begin
          read(arquivo,car);dado:="";
          while car=' ' do read(arquivo,car);
          while car<>'=' do
            begin
              dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
            end;
          if dado='MYV' then read(arquivo,pos^[no,6]);
          if dado='MZV' then read(arquivo,pos^[no,7]);
          if dado='BIV' then read(arquivo,pos^[no,8]);
        end;
        readln(arquivo);
        read(arquivo,car);dado:="";
        while car=' ' do read(arquivo,car);
        if car='F' then dado:='FIM'
        else
          begin
            while car<>' ' do begin
              dado:=dado+car;read(arquivo,car);
            end;
            val (dado,no,erro);
          end;
        until dado='FIM';
        readln(arquivo);
      end;
end;
```

PROCEDURE LE_ELASTICO1;

var elem,erro,eleminic,elemfin,inc:integer;
dado:string;
car:char;

```

begin
  read(arquivo,elem);
  repeat
    while not eoln(arquivo) do
      begin
        read(arquivo,car);dado:="";
        while car=' ' do read(arquivo,car);
        while car<>'=' do
          begin
            dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
          end;
        if dado='HY' then read(arquivo,spr^[elem,1]);
        if dado='HZ' then read(arquivo,spr^[elem,2]);
        if dado='CV' then read(arquivo,spr^[elem,3]);
        if dado='CW' then read(arquivo,spr^[elem,4]);
        if dado='CF' then read(arquivo,spr^[elem,5]);
        { if dado='G' then begin
          read(arquivo,eleminic,elemfin,inc);
          erro:=eleminic+inc;
          while erro<elemfin do ^^
            begin
              spr^[erro,1]:=spr^[erro-1,1];
              spr^[erro,2]:=spr^[erro-1,2]+(spr^[elemfin,2]-spr^[eleminic,2])*inc div
(elemfin-eleminic);
              spr^[erro,3]:=spr^[erro-1,3]+(spr^[elemfin,3]-spr^[eleminic,3])*inc div
(elemfin-eleminic);
              erro:=erro+inc;
              nelem:=nelem+1;
            end;
          end;
        }
      end;
      readln(arquivo);
      read(arquivo,car);dado:="";
      while car=' ' do read(arquivo,car);
      if car='F' then dado:='FIM'
      else
        begin
          while car<>' ' do begin
            dado:=dado+car;read(arquivo,car);
          end;
          val (dado,elem,erro);
        end;
      until dado='FIM';
      readln(arquivo);
    end;
  end;

```

PROCEDURE LE_ELASTICO2;

```

var no,erro,eleminic,elemfin,inc:integer;
    dado:string;
    car:char;
begin
  read(arquivo,no);
  repeat
    while not eoln(arquivo) do
      begin

```

PROCEDURE LE_RESTRICAO;

var dado:string;

car:char;

no,erro,noinic,nofin,inc:integer;

begin

read(arquivo,no);

repeat

while not eoln(arquivo) do

begin

read(arquivo,car);dado:='';

while car=' ' do read(arquivo,car);

while car<>'=' do

begin

dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);

end;

if dado='RV' then read(arquivo,res^[no,1]);

if dado='VL' then read(arquivo,res^[no,2]);

if dado='RW' then read(arquivo,res^[no,3]);

if dado='WL' then read(arquivo,res^[no,4]);

if dado='RO' then read(arquivo,res^[no,5]);

if dado='OL' then read(arquivo,res^[no,6]);

if dado='G' then begin

read(arquivo,noinic,nofin,inc);

erro:=noinic+inc;

while erro<nofin do

begin

res^[erro,1]:=res^[erro-1,1];

res^[erro,2]:=res^[erro-1,2];

res^[erro,3]:=res^[erro-1,3];

res^[erro,4]:=res^[erro-1,4];

res^[erro,5]:=res^[erro-1,5];

res^[erro,6]:=res^[erro-1,6];

erro:=erro+inc;

end;

end;

end;

readln(arquivo);

read(arquivo,car);dado:='';

while car=' ' do read(arquivo,car);

if car='F' then dado:='FIM'

else

begin

while car<>' ' do begin

dado:=dado+car;read(arquivo,car);

end;

val (dado,no,erro);

end;

until dado='FIM';

readln(arquivo);

end;

```

read(arquivo,car);dado:="";
while car=' ' do read(arquivo,car);
while car<>'=' do
begin
dado:=dado+upcase(car);read(arquivo,car);
end;
if dado='HY' then read(arquivo,spr^[no,6]);
if dado='HZ' then read(arquivo,spr^[no,7]);
if dado='CV' then read(arquivo,spr^[no,8]);
if dado='CW' then read(arquivo,spr^[no,9]);
if dado='CF' then read(arquivo,spr^[no,10]);
{ if dado='G' then begin
read(arquivo,eleminic,elemfin,inc);
erro:=eleminic+inc;
while erro<elemfin do
begin
spr^[erro,1]:=spr^[erro-1,1];
spr^[erro,2]:=spr^[erro-1,2]+(spr^[elemfin,2]-spr^[eleminic,2])*inc div
(elemfin-eleminic);
spr^[erro,3]:=spr^[erro-1,3]+(spr^[elemfin,3]-spr^[eleminic,3])*inc div
(elemfin-eleminic);
erro:=erro+inc;
nelem:=nelem+1;
end;
end; }
end;
readln(arquivo);
read(arquivo,car);dado:="";
while car=' ' do read(arquivo,car);
if car='F' then dado:='FIM'
else
begin
while car<>' ' do begin
dado:=dado+car;read(arquivo,car);
end;
val (dado,no,erro);
end;
until dado='FIM';
readln(arquivo);
end;

```

{ ROTINA PRINCIPAL DO PROCEDIMENTO LEITURA }

```

begin
assign (arquivo,arq_in);reset (arquivo);
LE_TITULO (titulo,arquivo);
while not eof (arquivo) do
begin
readln (arquivo,ident);
writeln ('Lendo o bloco <',ident,'> do arquivo de dados');
if ident='ELASTICIDADE' then LE_ELAST (elast,trans);
if ident='SISTEMA' then LE_SISTEMA (flag1,flag2,flag3,bim,auto,orto);
if ident='MATERIAIS' then LE_MATERIAL (nm);
if ident='NOS' then LE_NOS (nnos);
if ident='ELEMENTOS' then LE_ELEMENTO (nelem);

```

```

    if ident='CARGAS2' then LE_CARGAS2;
    if ident='CARGAS1' then LE_CARGAS1;
    if ident='CARGAS3' then LE_CARGAS3;
    if ident='RESTRICOES' then LE_RESTRICAO;
    if ident='ELASTICO1' then LE_ELASTICO1;
    if ident='ELASTICO2' then LE_ELASTICO2;
end;
writeln;writeln ('Leitura do arquivo de entrada de dados concluida !');
close (arquivo);
end;

```

{ PROCEDIMENTOS PARA MONTAGEM DO ARQUIVO
DE RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS }

```

procedure cabecalho_1 (titulo:string;pagina:integer;arq_out:string);

begin
    writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,"72','Pag.',pagina);writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,'MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995');writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,"60','Arquivo: ',arq_out,'.DES');writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,titulo);writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,'***** DESLOCAMENTOS
*****');
    writeln(arquivo,"");
    writeln(arquivo,' NO',"5','V',"11','VL',"11','W',"12','WL',"11','O',"12','OL');
    writeln(arquivo,"");
end;

procedure impr_desl (nnos:integer;titulo:string;arq_out:string);

var pagina,contano,linha:integer;

begin
    assign (arquivo,arq_out+'.des');rewrite (arquivo);
    pagina:=1;contano:=1;linha:=13;
    cabecalho_1 (titulo,pagina,arq_out);
    repeat
        writeln(arquivo,contano:2,' ',fe1^[6*contano-5]:12,' ',fe1^[6*contano-4]:12,' ',
            fe1^[6*contano-3]:12,' ',fe1^[6*contano-2]:12,' ',fe1^[6*contano-1]:12,'
',fe1^[6*contano]:12);
        contano:=contano+1;linha:=linha+1;
        if linha>50 then begin
            writeln(arquivo,chr(12));pagina:=pagina+1;
            cabecalho_1(titulo,pagina,arq_out);
            linha:=13;
        end;
    until contano>nnos;
    writeln(arquivo,chr(12));pagina:=pagina+1;
    close (arquivo);
end;

```

```
{ PROCEDIMENTOS PARA MONTAGEM DO
ARQUIVO DE RESULTADOS DOS AUTOVALORES }
```

```
procedure cabecalho_3 (titulo:string;pagina:integer;arq_out:string);
```

```
begin
```

```
  writeln(arquivo);writeln(arquivo);
```

```
  writeln(arquivo,"72','Pag.',pagina);writeln(arquivo);
```

```
  writeln(arquivo,'MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995');writeln(arquivo);
```

```
  writeln(arquivo,"60','Arquivo: ',arq_out,'.AVA');writeln(arquivo);
```

```
  writeln(arquivo,titulo);writeln(arquivo);
```

```
  writeln(arquivo,'***** AUTOVALORES
*****');
```

```
  writeln(arquivo,"");writeln(arquivo,"");
```

```
  writeln(arquivo,"5','ITER.'",10,'AV.1',10,'APROX.1',10,'AV.2',10,'APROX.2');
```

```
end;
```

```
procedure impr_auto (kk:integer;var la1,la2:vetor;titulo:string;arq_out:string);
```

```
var pagina,conta,linha:integer;
```

```
  erro1,erro2:double;
```

```
begin
```

```
  assign (arquivo,arq_out+'.ava');rewrite (arquivo);
```

```
  pagina:=1;conta:=1;linha:=13;
```

```
  cabecalho_3 (titulo,pagina,arq_out);
```

```
  repeat
```

```
    erro1:=abs((la1[conta]-la1[conta-1])/la1[conta]);
```

```
    erro2:=abs((la2[conta]-la2[conta-1])/la2[conta]);
```

```
    writeln(arquivo,conta:3,' ',la1[conta]:14,' ',erro1:14,' ',
```

```
      la2[conta]:14,' ',erro2:14);
```

```
    conta:=conta+1;linha:=linha+1;
```

```
    if linha>50 then begin
```

```
      writeln(arquivo,chr(12));pagina:=pagina+1;
```

```
      cabecalho_3(titulo,pagina,arq_out);
```

```
      linha:=13;
```

```
    end;
```

```
  until conta>kk;
```

```
  writeln(arquivo,chr(12));pagina:=pagina+1;
```

```
  close (arquivo);
```

```
end;
```

```
{ PROCEDIMENTOS PARA ESCRITA DE DADOS }
```

```
procedure arq_dados (titulo,arq_out:string;elast,trans:real;nnos,nm,nelem:integer;var
arquivo:text);
```

```
var i,pag,lin:integer;
```

```
begin
```

```
  assign (arquivo,arq_out+'.dat');rewrite (arquivo);
```

```
  pag:=1;
```

```
  writeln(arquivo,"68','Pag.',pag);writeln(arquivo);
```

```

writeln(arquivo,":60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
writeln(arquivo,'#### ','titulo,' ####');
writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Caracteristicas elasticas:');
writeln(arquivo,'E = ',elast:7:1,"":29,'G = ',trans:7:1);
lin:=8;
writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Materiais:');lin:=lin+2;
for i:=1 to nmat do
begin
  writeln(arquivo,'Material: ',i);lin:=lin+1;
  writeln(arquivo,' Jy=',mat^[i,1]:9:1,' Jz=',mat^[i,2]:9:1,' Jw=',mat^[i,3]:9:1,
    ' Jt=',mat^[i,4]:9:1,' Uw=',mat^[i,5]:9:1);
  writeln(arquivo,' A=',mat^[i,6]:9:1,' Ky=',mat^[i,7]:9:1,' Kz=',mat^[i,8]:9:1,
    ' Yd=',mat^[i,9]:9:1,' Zd=',mat^[i,10]:9:1);
  lin:=lin+2;
  if lin>50 then
  begin
    writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
    writeln(arquivo);writeln(arquivo,"":68,'Pag. ',pag);
    writeln(arquivo,":60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
    writeln(arquivo,'#### ','titulo,' ####');
  end;
end;

writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Nos:');lin:=lin+2;
  writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO          COORD. X          COORD. Y
COORD. Z');
  lin:=lin+2;
  for i:=1 to nnos do
  begin
    writeln(arquivo,i:3,"":15,nos^[i,1]:7:2,"":15,nos^[i,2]:7:2,"":15,nos^[i,3]:7:2);lin:=lin+1;
    if lin>50 then
    begin
      writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
      writeln(arquivo);writeln(arquivo,"":68,'Pag. ',pag);
      writeln(arquivo,":60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
      writeln(arquivo,'#### ','titulo,' ####');
      writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Nos:');lin:=lin+2;
      writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO          COORD. X          COORD. Y
COORD. Z');
      lin:=lin+2;
    end;
  end;

  writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Elementos:');lin:=lin+2;
  writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO          MATERIAL          NO INICIAL
NO FINAL');

  for i:=1 to nelem do
  begin
    writeln(arquivo,i:3,"":19,ele^[i,1]:2,"":19,ele^[i,2]:3,"":19,ele^[i,3]:3);lin:=lin+1;
    if lin>50 then
    begin
      writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
      writeln(arquivo);writeln(arquivo,"":68,'Pag. ',pag);
      writeln(arquivo,":60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
      writeln(arquivo,'#### ','titulo,' ####');
    end;
  end;
end;

```

```

        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Elementos:');lin:=lin+2;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO MATERIAL NO
INICIAL NO FINAL');
    end;
end;

```

```

        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Cargas distribuidas:');lin:=lin+4;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO Qy Qz
Mt');

```

```

    for i:=1 to nelem do
    begin
        writeln(arquivo,i:3,".:16,q^[i,1]:8:1,".:16,q^[i,2]:8:1,".:16,q^[i,3]:8:1);lin:=lin+1;
        if lin>50 then
        begin
            writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
            writeln(arquivo);writeln(arquivo,".:68,'Pag. ',pag);
            writeln(arquivo,".:60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
            writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
            writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Cargas distribuidas:');lin:=lin+4;
            writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO Qy Qz
Mt');
        end;
    end;
end;

```

```

        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Cargas nodais:');lin:=lin+2;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO Px PY Pz My Mz ');
        lin:=lin+2;
        for i:=1 to nnos do
        begin
            writeln(arquivo,i:3,".:5,p^[i,1]:8:1,".:5,p^[i,2]:8:1,".:5,p^[i,3]:8:1,
            ".:5,p^[i,4]:8:1,".:5,p^[i,5]:8:1 );lin:=lin+1;
            if lin>50 then
            begin
                writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
                writeln(arquivo);writeln(arquivo,".:68,'Pag. ',pag);
                writeln(arquivo,".:60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
                writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
                writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Cargas nodais:');lin:=lin+2;
                writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO Px PY Pz My
Mz ');
                lin:=lin+2;
            end;
        end;
end;

```

```

        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Restricoes:');lin:=lin+2;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO V dV W dW 0
d0');
        lin:=lin+2;
        for i:=1 to nnos do
        begin
            writeln(arquivo,i:3,".:9,res^[i,1]:2,".:9,res^[i,2]:2,".:9,res^[i,3]:2,
            ".:9,res^[i,4]:2,".:9,res^[i,5]:2,".:9,res^[i,6]:2);lin:=lin+1;

```



```

if lin>50 then
begin
    writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
    writeln(arquivo);writeln(arquivo,"68,'Pag. ',pag);
    writeln(arquivo,"60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
    writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
    writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Restricoes:');lin:=lin+2;
    writeln(arquivo);writeln(arquivo,'NO          V          dV          W          dW          0
d0');
    lin:=lin+2;
end;
end;

writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Posicao da carga:');lin:=lin+4;
writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO          Yc          Zc');

for i:=1 to nelem do
begin
    writeln(arquivo,i:3,"16,pos^[i,1]:8:1,"16,pos^[i,2]:8:1);lin:=lin+1;
    if lin>50 then
    begin
        writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=4;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,"68,'Pag. ',pag);
        writeln(arquivo,"60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
        writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Posicao da carga:');lin:=lin+4;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO          Yc          Zc');
    end;
end;

writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Constantes para Fundacao Elastica:');lin:=lin+2;
writeln(arquivo);writeln(arquivo,'ELEMENTO  CV          CW          CF          HY
HZ  ');
for i:=1 to nelem do
begin
    writeln(arquivo,i:3,"5,spr^[i,3]:10,"5,spr^[i,4]:10,"5,
    spr^[i,5]:10,"5,spr^[i,1]:10,"5,spr^[i,2]:10);lin:=lin+1;
    if lin>50 then
    begin
        writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=7;
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,"68,'Pag. ',pag);
        writeln(arquivo,"60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
        writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
        writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Constantes para Fundacao
Elastica:');lin:=lin+2;
        writeln(arquivo,'ELEMENTO  CV          CW          CF          HY
HZ  ');
    end;
end;

writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Constantes para Vinculo Elastico:');lin:=lin+2;
writeln(arquivo);writeln(arquivo,' NO          CV          CW          CF          HY
HZ');
for i:=1 to nnos do
begin
    writeln(arquivo,i:3,"5,spr^[i,8]:10,"5,spr^[i,9]:10,"5,

```

```

        spr^[j,10]:10,"":5,spr^[i,6]:10,"":5,spr^[i,7]:10);lin:=lin+1;
    if lin>50 then
        begin
            writeln(arquivo,chr(12));pag:=pag+1;lin:=7;
            writeln(arquivo);writeln(arquivo,"68,'Pag. ',pag);
            writeln(arquivo,"60,'Arquivo: ',arq_out,'.DAT');
            writeln(arquivo,'#### ',titulo,' ####');
            writeln(arquivo);writeln(arquivo,'# Constantes para Vinculo Elastico:');lin:=lin+2;
            writeln(arquivo,' NO      CV      CW      CF      HY      HZ');
        end;
    end;
    writeln(arquivo,chr(12));
    close (arquivo);
end;

```

{ INICIO DO PROCEDIMENTO PARA FORMACAO DAS MATRIZES
DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS }

```

PROCEDURE mat_local (ii:integer;elast,trans:real;var sm:matriz;flag5,flag1:integer);

```

```

type
    vet=array [1..4,1..4] of double;

```

```

FUNCTION COSH(X:double):double;
    begin
        COSH:=(EXP(X)+EXP(-X))/2;
    end;

```

```

FUNCTION SENH(X:double):double;
    begin
        SENH:=(EXP(X)-EXP(-X))/2;
    end;

```

```

var alfa,beta,gama,l,ro,rr,cv,cw,cf,hy,hz:double;
    jy,jz,jw,jt,ky,kz,yc,yd,zc,zd,id2,
    ni,nj,qy,qz,mzi,mzj,myi,myj,bj,bi,mm:double;
    cont,aux1,aux2,aux3,i,j,k:integer;
    a:vet;
begin

```

```

    for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
            sm[i,j]:=0;

```

```

    l:=sqrt(sqr(nos^[ele^[ii,3],1]-nos^[ele^[ii,2],1])+sqr(nos^[ele^[ii,3],2]-nos^[ele^[ii,2],2]));

```

```

    if flag5=2 then { monta matriz B }
    begin

```

```

        jy:=0;jz:=0;jt:=0;jw:=0;
        ni:=p^[ele^[ii,2],6];
        nj:=p^[ele^[ii,3],6];
        ky:=mat^[ele^[ii,1],7];

```

```

kz:=mat^[ele^[ii,1],8];
yc:=(pos^[ele^[ii,2],1]+pos^[ele^[ii,3],1])/2;
yd:=mat^[ele^[ii,1],9];
zc:=(pos^[ele^[ii,2],2]+pos^[ele^[ii,3],2])/2;
zd:=mat^[ele^[ii,1],10];
id2:=yd*yd+zd*zd+(mat^[ele^[ii,1],1]+mat^[ele^[ii,1],2])/mat^[ele^[ii,1],6];
cv:=0;cw:=0;cf:=0;hy:=0;hz:=0;
qy:=q^[ii,4];
qz:=q^[ii,5];
mzi:=pos^[ele^[ii,2],7];
mzj:=pos^[ele^[ii,3],7];
myi:=pos^[ele^[ii,2],6];
myj:=pos^[ele^[ii,3],6];
bj:=pos^[ele^[ii,3],8];
bi:=pos^[ele^[ii,2],8];
mm:=q^[ii,6];
end;
if flag5=1 then      { monta matriz A }
begin
  jt:=mat^[ele^[ii,1],4];
  jy:=mat^[ele^[ii,1],1];
  jz:=mat^[ele^[ii,1],2];
  jw:=mat^[ele^[ii,1],3];
  ni:=p^[ele^[ii,2],1];
  nj:=p^[ele^[ii,3],1];
  ky:=mat^[ele^[ii,1],7];
  kz:=mat^[ele^[ii,1],8];
  yc:=(pos^[ele^[ii,2],1]+pos^[ele^[ii,3],1])/2;
  yd:=mat^[ele^[ii,1],9];
  zc:=(pos^[ele^[ii,2],2]+pos^[ele^[ii,3],2])/2;
  zd:=mat^[ele^[ii,1],10];
  id2:=yd*yd+zd*zd+(jy+jz)/mat^[ele^[ii,1],6];
  cv:=spr^[ii,3];
  cw:=spr^[ii,4];
  cf:=spr^[ii,5];
  hy:=spr^[ii,1];
  hz:=spr^[ii,2];
  qy:=q^[ii,1];
  qz:=q^[ii,2];      { sao cargas que }
  mzi:=pos^[ele^[ii,2],4];
  mzj:=pos^[ele^[ii,3],4];      { nao variam }
  myi:=pos^[ele^[ii,2],3];
  myj:=pos^[ele^[ii,3],3];
  bj:=pos^[ele^[ii,3],5];      { com a carga critica }
  bi:=pos^[ele^[ii,2],5];
  mm:=q^[ii,3];

  if flag1=1 then      { calculo de autovalores }
  begin
    ni:=p^[ele^[ii,2],1];
    nj:=p^[ele^[ii,3],1];
    ky:=mat^[ele^[ii,1],7];
    kz:=mat^[ele^[ii,1],8];
    yc:=(pos^[ele^[ii,2],1]+pos^[ele^[ii,3],1])/2;
    yd:=mat^[ele^[ii,1],9];
    zc:=(pos^[ele^[ii,2],2]+pos^[ele^[ii,3],2])/2;

```

```

        zd:=mat^[ele^[ii,1],10];
        id2:=yd*yd+zd*zd+(jy+jz)/mat^[ele^[ii,1],6];
        qy:=q^[ii,1];
        qz:=q^[ii,2];      { sao cargas que }
        mzi:=pos^[ele^[ii,2],4];
        mzj:=pos^[ele^[ii,3],4]; { nao variam }
        myi:=pos^[ele^[ii,2],3];
        myj:=pos^[ele^[ii,3],3];
        bj:=pos^[ele^[ii,3],5]; { com a carga critica }
        bi:=pos^[ele^[ii,2],5];
        mm:=q^[ii,3];
    end;

end;

if flag5=1 then
    begin
        { MATRIZ DO PRIMEIRO TIPO }

        cont:=1;
        repeat
            case cont of
                1:begin aux1:=0;aux3:=2;end;
                2:begin aux1:=2;aux3:=1;end;
                3:begin aux1:=4;aux3:=3;end
            end;
            ALFA:=elast*mat^[ele^[ii,1],aux3];
            a[1,1]:=12*alfa;
            a[1,2]:=6*alfa*I;
            a[1,3]:=-12*alfa;
            a[1,4]:=6*alfa*I;
            a[2,2]:=4*alfa*I*I;
            a[2,3]:=-a[1,2];
            a[2,4]:=2*alfa*I*I;
            a[3,3]:=a[1,1];
            a[3,4]:=a[2,3];
            a[4,4]:=a[2,2];

            FOR I:=1 TO 4 DO
                FOR J:=I TO 4 DO
                    A[J,I]:=A[I,J];
                end;
            end;

            for i:= 1 to 4 do
                begin
                    for j:=i to 4 do
                        begin
                            if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux1,j+aux1]:=sm[i+aux1,j+aux1]+a[i,j]/I/I;
                            if (i<=2) and (j>2) then sm[i+aux1,j+4+aux1]:=sm[i+aux1,j+4+aux1]+a[i,j]/I/I;
                            if (i>2) and (j<=2) then sm[i+4+aux1,j+aux1]:=sm[i+4+aux1,j+aux1]+a[i,j]/I/I;
                            if (i>2) and (j>2) then sm[i+4+aux1,j+4+aux1]:=sm[i+4+aux1,j+4+aux1]+a[i,j]/I/I;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
            cont:=cont+1;
        repeat

```

```
until cont>3;
```

```
for k:=1 to 12 do
```

```
begin
```

```
for j:=k to 12 do
```

```
begin
```

```
sm[j,k]:=sm[k,j];
```

```
end;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
{ MATRIZ DO SEGUNDO TIPO }
```

```
cont:=1;
```

```
repeat
```

```
case cont of
```

```
1:begin
```

```
aux1:=4;aux2:=4;aux3:=0;
```

```
alfa:=0.5*(trans*jt+ni*id2)+mzi*(ky-yd)-myi*(kz-zd);
```

```
beta:=0.5*(nj-ni)*id2+(mzj-mzi+0.5*qy*I*I)*(ky-yd)-(myj-myi-0.5*qz*I*I)*(kz-zd);
```

```
gama:=-0.5*qy*I*I*(kz-zd)-0.5*qz*(ky-yd)*I*I;
```

```
end;
```

```
2:begin
```

```
aux1:=0;aux2:=0;aux3:=0;
```

```
alfa:=0.5*ni;
```

```
beta:=0.5*(nj-ni);
```

```
gama:=0;
```

```
end;
```

```
3:begin
```

```
aux1:=2;aux2:=2;aux3:=0;
```

```
alfa:=0.5*ni;
```

```
beta:=0.5*(nj-ni);
```

```
gama:=0;
```

```
end;
```

```
4:begin
```

```
aux1:=2;aux2:=4;aux3:=1;
```

```
alfa:=0.5*(ni*yd-mzi);
```

```
beta:=0.5*((nj-ni)*yd-mzj+mzi-0.5*qy*I*I);
```

```
gama:=0.25*qy*I*I;
```

```
end;
```

```
5:begin
```

```
aux1:=0;aux2:=4;aux3:=1;
```

```
alfa:=-0.5*(ni*zd+myi);
```

```
beta:=-0.5*((nj-ni)*zd+myj-myi-0.5*qz*I*I);
```

```
gama:=-0.25*qz*I*I;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
a[1,1]:=12*alfa/5+6*beta/5+24*gama/35;
```

```
a[1,2]:=I*(alfa/5+beta/5+gama/7);
```

```
a[1,3]:=-12*alfa/5-6*beta/5-24*gama/35;
```

```
a[1,4]:=I*(alfa/5-2*gama/35);
```

```
a[2,2]:=I*I*(4*alfa/15+beta/15+4*gama/105);
```

```
a[2,3]:=I*(-alfa/5-beta/5-gama/7);
```

```

a[2,4]:=l*I*(-alfa/15-beta/30-gama/35);
a[3,3]:=12*alfa/5+6*beta/5+24*gama/35;
a[3,4]:=l*(-alfa/5+2*gama/35);
a[4,4]:=l*I*(4*alfa/15+beta/5+6*gama/35);

```

```

for i:=1 to 4 do
  for j:=i to 4 do
    a[j,i]:=a[i,j];

```

```

for i:= 1 to 4 do
begin
  for j:=1 to 4 do
    begin
      if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux1,j+aux2]:=sm[i+aux1,j+aux2]+a[i,j]/l;
      if (i<=2) and (j>2) then sm[i+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]/l;
      if (i>2) and (j<=2) then sm[i+4+aux1,j+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+aux2]+a[i,j]/l;
      if (i>2) and (j>2) then sm[i+4+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]/l;

      if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux2,j+aux1]:=sm[i+aux2,j+aux1]+aux3*a[j,i]/l;
      if (i<=2) and (j>2) then sm[i+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+aux2,j+4+aux1]+aux3*a[j,i]/l;
      if (i>2) and (j<=2) then sm[i+4+aux2,j+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+aux1]+aux3*a[j,i]/l;
      if (i>2) and (j>2) then
sm[i+4+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+4+aux1]+aux3*a[j,i]/l;
    end;
  end;
  cont:=cont+1;
until cont>5;

for k:=1 to 12 do
begin
  for j:=k to 12 do
    begin
      sm[j,k]:=sm[k,j];
    end;
end;

```

{ MATRIZ DO TERCEIRO TIPO }

```

cont:=1;

```

```

repeat
  case cont of
    1:begin
      aux1:=4;aux2:=4;aux3:=1;
      alfa:=1/l*((mzj-mzi+0.5*qy*I*I)*(yc-yd)-(myj-myi-0.5*qz*I*I)*(zc-zd));
      beta:=l*(-qy*(yc-yd)-qz*(zc-zd));
    end;
    2:begin
      aux1:=2;aux2:=4;aux3:=0;
      alfa:=(mzj-mzi+0.5*qy*I*I)/l;
      beta:=qy*I;
    end;
    3:begin
      aux1:=0;aux2:=4;aux3:=0;

```

```

        alfa:=-(myj-myi-0.5*qz*I*I)/I;
        beta:=-qz*I;
    end;
end;
a[1,1]:=-alfa/2-13*beta/70;
a[1,2]:=I*(-alfa/10-3*beta/70);
a[1,3]:=-alfa/2-22*beta/70;
a[1,4]:=I*(alfa/10+4*beta/70);
a[2,1]:=I*(alfa/10-2*beta/210);
a[2,2]:=I*I*(-beta/210);
a[2,3]:=I*(-alfa/10-31*beta/420);
a[2,4]:=I*I*(alfa/60+beta/84);
a[3,1]:=alfa/2+13*beta/70;
a[3,2]:=I*(alfa/10+3*beta/70);
a[3,3]:=alfa/2+22*beta/70;
a[3,4]:=I*(-alfa/10-4*beta/70);
a[4,1]:=I*(-alfa/10-11*beta/420);
a[4,2]:=I*I*(-alfa/60-beta/210);
a[4,3]:=I*(alfa/10+23*beta/210);
a[4,4]:=I*I*(-beta/210);

for i:= 1 to 4 do
begin
    for j:=1 to 4 do
    begin
        if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux1,j+aux2]:=sm[i+aux1,j+aux2]+a[i,j]+a[j,i]*aux3;
        if (i<=2) and (j>2) then
sm[i+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]+a[j,i]*aux3;
        if (i>2) and (j<=2) then
sm[i+4+aux1,j+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+aux2]+a[i,j]+a[j,i]*aux3;
        if (i>2) and (j>2) then
sm[i+4+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]+a[j,i]*aux3;

        if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux2,j+aux1]:=sm[i+aux2,j+aux1]+a[j,i]*(1-aux3);
        if (i<=2) and (j>2) then sm[i+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+aux2,j+4+aux1]+a[j,i]*(1-
aux3);
        if (i>2) and (j<=2) then sm[i+4+aux2,j+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+aux1]+a[j,i]*(1-
aux3);
        if (i>2) and (j>2) then sm[i+4+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+4+aux1]+a[j,i]*(1-
aux3);

    end;
    end;
    cont:=cont+1;
until cont>3;

for k:=1 to 12 do
begin
    for j:=k to 12 do
    begin
        sm[j,k]:=sm[k,j];
    end;
end;
end;

```

{ MATRIZ DO QUARTO TIPO }

if bim=1 then

begin

cont:=1;

rr:=sqrt(elast*mat^{ele}[ii,1],3)/trans/mat^{ele}[ii,1],4]);

ro:=l/rr;

gama:=rr*rr*mm;

alfa:=1/senh(ro)*(bj-gama-(bi-gama)*cosh(ro));

beta:=bi-gama;

aux1:=4;aux2:=4;

a[1,1]:=(72*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro-432*senh(ro)/ro/ro/ro+
864*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)*alfa+(72*senh(ro)/ro/ro/ro-
432*(cosh(ro)+1)/ro/ro/ro/ro+864*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)*beta+6*gama/5;
a[1,2]:=l*((24*(cosh(ro)-5/2)/ro/ro/ro-180*senh(ro)/ro/ro/ro+
432*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)*alfa+(-6/ro/ro+24*senh(ro)/ro/ro/ro-
180*cosh(ro)/ro/ro/ro-252/ro/ro/ro+432*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)*beta+gama/10);
a[1,3]:=-(72*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro-432*senh(ro)/ro/ro/ro+
864*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)*alfa+(72*senh(ro)/ro/ro/ro-
432*(cosh(ro)+1)/ro/ro/ro/ro+864*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)*beta+6*gama/5);
a[1,4]:=l*(alfa*(-6*senh(ro)/ro/ro+24*(5*cosh(ro)/2-1)/ro/ro/ro-
252*senh(ro)/ro/ro/ro+432*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)+
beta*(-6*cosh(ro)/ro/ro+60*senh(ro)/ro/ro/ro-
252*cosh(ro)/ro/ro/ro-180/ro/ro/ro+432*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)+gama/10);
a[2,2]:=l*(alfa*(-1/ro+8*cosh(ro)/ro/ro-44/ro/ro-
72*senh(ro)/ro/ro/ro+216*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)+
beta*(8*(senh(ro)-ro)/ro/ro-72*(cosh(ro)+2)/ro/ro/ro+
216*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)+2*gama/15);
a[2,3]:=-(l*((24*(cosh(ro)-5/2)/ro/ro/ro-180*senh(ro)/ro/ro/ro+
432*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)*alfa+(-6/ro/ro+24*senh(ro)/ro/ro/ro-
180*cosh(ro)/ro/ro/ro-252/ro/ro/ro+432*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)*beta+gama/10));
a[2,4]:=l*(alfa*(-2*senh(ro)/ro/ro+(22/ro/ro+216/ro/ro/ro)*
(cosh(ro)-1)-108*senh(ro)/ro/ro/ro)+beta*(22*senh(ro)/ro/ro/ro-(2/ro/ro+
108/ro/ro/ro)*(cosh(ro)+1)+216*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)-gama/30);
a[3,3]:=(72*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro-432*senh(ro)/ro/ro/ro+
864*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)*alfa+(72*senh(ro)/ro/ro/ro-
432*(cosh(ro)+1)/ro/ro/ro/ro+864*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)*beta+6*gama/5;
a[3,4]:=-(l*(alfa*(-6*senh(ro)/ro/ro+24*(5*cosh(ro)/2-1)/ro/ro/ro-252*senh(ro)/ro/ro/ro+
432*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro)+beta*(-6*cosh(ro)/ro/ro+
60*senh(ro)/ro/ro/ro-252*cosh(ro)/ro/ro/ro-180/ro/ro/ro+
432*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)+gama/10));
a[4,4]:=l*(beta*(senh(ro)/ro-8*cosh(ro)/ro/ro+44*senh(ro)/ro/ro/ro-
72*(2*cosh(ro)+1)/ro/ro/ro+216*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)+
alfa*(cosh(ro)/ro-8*(senh(ro)+1/ro)/ro/ro+44*cosh(ro)/ro/ro/ro+
216*(cosh(ro)-1)/ro/ro/ro/ro-144*senh(ro)/ro/ro/ro/ro)+2*gama/15);

for i:=1 to 4 do

for j:=i to 4 do

a[j,i]:=a[i,j];


```

for i:= 1 to 4 do
begin
  for j:=1 to 4 do
  begin
    if (i<=2) and (j<=2) then sm[i+aux1,j+aux2]:=sm[i+aux1,j+aux2]+a[i,j]/l;
    if (i<=2) and (j>2) then sm[i+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]/l;
    if (i>2) and (j<=2) then sm[i+4+aux1,j+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+aux2]+a[i,j]/l;
    if (i>2) and (j>2) then sm[i+4+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+4+aux2]+a[i,j]/l;
  end;
end;

```

```

for k:=1 to 12 do
begin
  for j:=k to 12 do
  begin
    sm[j,k]:=sm[k,j];
  end;
end;
end;

```

```

cont:=1;

```

```

repeat
  case cont of
    1:begin
      aux1:=0;aux2:=0;aux3:=0;
      alfa:=cv;
    end;
    2:begin
      aux1:=2;aux2:=2;aux3:=0;
      alfa:=cw;
    end;
    3:begin
      aux1:=4;aux2:=4;aux3:=0;
      alfa:=cf;
    end;
    4:begin
      aux1:=0;aux2:=4;aux3:=1;
      alfa:=cv*(hz-zd);
    end;
    5:begin
      aux1:=2;aux2:=4;aux3:=1;
      alfa:=-cw*(hy-yd);
    end;
    6:begin
      aux1:=4;aux2:=4;aux3:=0;
      alfa:=cv*(hz-zd)*(hz-zd);
    end;
  end;
  cont:=cont+1;
until cont>6;

```

```

7:begin
    aux1:=4;aux2:=4;aux3:=0;
    alfa:=cw*(hy-yd)*(hy-yd);
end;
end;
a[1,1]:=alfa*I*13/35;
a[1,2]:=I*I*alfa*11/210;
a[1,3]:=alfa*I*9/70;
a[1,4]:=-I*I*alfa*13/420;
a[2,2]:=I*I*I*alfa/105;
a[2,3]:=I*I*alfa*13/420;
a[2,4]:=-I*I*I*alfa/140;
a[3,3]:=alfa*I*13/35;
a[3,4]:=-I*I*alfa*11/210;
a[4,4]:=I*I*I*alfa/105;

for i:=1 to 4 do
    for j:=i to 4 do
        a[j,i]:=a[i,j];

for i:= 1 to 4 do
begin
    for j:=i to 4 do
        begin
            if (i<=2) and (j<=2) then begin
                sm[i+aux1,j+aux2]:=sm[i+aux1,j+aux2]+a[i,j];
                sm[i+aux2,j+aux1]:=sm[i+aux2,j+aux1]+a[j,i]*aux3;
            end;
            if (i<=2) and (j>2) then begin
                sm[i+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+aux1,j+4+aux2]+a[i,j];
                sm[i+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+aux2,j+4+aux1]+a[j,i]*aux3;
            end;
            if (i>2) and (j<=2) then begin
                sm[i+4+aux1,j+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+aux2]+a[i,j];
                sm[i+4+aux2,j+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+aux1]+a[j,i]*aux3;
            end;
            if (i>2) and (j>2) then begin
                sm[i+4+aux1,j+4+aux2]:=sm[i+4+aux1,j+4+aux2]+a[i,j];
                sm[i+4+aux2,j+4+aux1]:=sm[i+4+aux2,j+4+aux1]+a[j,i]*aux3;
            end;

        end;
    end;
end;

cont:=cont+1;
until cont>7;

for k:=1 to 12 do
begin
    for j:=k to 12 do
        begin
            sm[j,k]:=sm[k,j];
        end;
    end;
end;

```

```

end;

end;

procedure VETOR_CARGAS (nelem,nnos:integer);

var qy,qz,mm,l:real;
    ii:integer;

begin
  for ii:=1 to nelem do
    begin
      qy:=q^[ii,1];qz:=q^[ii,2];mm:=q^[ii,3];
      l:=sqrt(sqr(nos^[ele^[ii,3],1]-nos^[ele^[ii,2],1])+sqr(nos^[ele^[ii,3],2]-nos^[ele^[ii,2],2]));
      fe^[ele^[ii,2]*6-5]:=fe^[ele^[ii,2]*6-5]+0.5*QY*I;
      fe^[ele^[ii,2]*6-4]:=fe^[ele^[ii,2]*6-4]+QY*I*I/12;
      fe^[ele^[ii,2]*6-3]:=fe^[ele^[ii,2]*6-3]+0.5*QZ*I;
      fe^[ele^[ii,2]*6-2]:=fe^[ele^[ii,2]*6-2]+QZ*I*I/12;
      fe^[ele^[ii,2]*6-1]:=fe^[ele^[ii,2]*6-1]-0.5*mm*I;
      fe^[ele^[ii,2]*6]:=fe^[ele^[ii,2]*6]-mm*I*I/12;

      fe^[ele^[ii,3]*6-5]:=fe^[ele^[ii,3]*6-5]+0.5*QY*I;
      fe^[ele^[ii,3]*6-4]:=fe^[ele^[ii,3]*6-4]-QY*I*I/12;
      fe^[ele^[ii,3]*6-3]:=fe^[ele^[ii,3]*6-3]+0.5*QZ*I;
      fe^[ele^[ii,3]*6-2]:=fe^[ele^[ii,3]*6-2]-QZ*I*I/12;
      fe^[ele^[ii,3]*6-1]:=fe^[ele^[ii,3]*6-1]-0.5*mm*I;
      fe^[ele^[ii,3]*6]:=fe^[ele^[ii,3]*6]+mm*I*I/12;
    end;
    for ii:=1 to nnos do
      begin
        fe^[ii*6-5]:=fe^[ii*6-5]+p^[ii,2];
        fe^[ii*6-4]:=fe^[ii*6-4]+p^[ii,5];
        fe^[ii*6-3]:=fe^[ii*6-3]+p^[ii,3];
        fe^[ii*6-2]:=fe^[ii*6-2]+p^[ii,4];
        { fe^[ii*6-1]:=fe^[ii*6-1]+p^[ii,1]; }
        fe^[ii*6]:=fe^[ii*6]+pos^[ii,5];
      end;
    end;
  end;
end;

```

{ INICIO DO PROCEDIMENTO DE FORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL }

```

procedure RIGIDEZ_GLOBAL(ii:integer;sm:matriz);

```

```

type vet3=array[1..12] of integer;

```

```

var il,ig,jg,jl:integer;
    ind:vet3;

```

```

begin

```

```

ind[1]:=6*ele^[ii,2]-5;ind[2]:=ind[1]+1;ind[3]:=ind[2]+1;
ind[4]:=ind[3]+1;ind[5]:=ind[4]+1;ind[6]:=ind[5]+1;
ind[7]:=6*ele^[ii,3]-5;ind[8]:=ind[7]+1;ind[9]:=ind[8]+1;
ind[10]:=ind[9]+1;ind[11]:=ind[10]+1;ind[12]:=ind[11]+1;
for il:=1 to 12 do
begin
  ig:=ind[il];

  for jl:=il to 12 do
  begin
    jg:=ind[jl];kg^[ig,jg-ig+1]:=kg^[ig,jg-ig+1]+sm[il,jl];
  end;
end;
end;
end;

```

{ IMPOE CONDICÕES DE CONTORNO }

PROCEDURE contorno (lb,nnos:integer);

var i,j,linha,coluna,aux,conta_linha,conta_coluna:integer;

```

begin
  for i:=1 to nnos do
  begin
    for j:=1 to 6 do
    begin
      if res^[i,j]=1 then
      begin
        linha:=i*6-6+j;
        if linha > lb then
        begin
          coluna:=lb;
          aux:=linha-lb+1;
        end
      else
      begin
        coluna:=linha;
        aux:=1;
      end;
      conta_coluna:=coluna;
      for conta_linha:=aux to linha do
      begin
        kg^[conta_linha,conta_coluna]:=0;
        conta_coluna:=conta_coluna-1;
      end;
      for conta_coluna:=1 to lb do kg^[linha,conta_coluna]:=0;
      kg^[linha,1]:=1;
    end;
  end;
end;
end;
end;

```

{ procedimento decomposicao por cholesky

para matriz banda simetrica
com armazenamento retangular }

{ N = Numero de linhas da matriz
UBW = Largura de banda
KG = Matriz a ser decomposta }

Procedure DECOMP_BAND (n,ubw:integer);

var i,j,k,p,q:integer;
sum,temp:double;

```
begin
  for i:=1 to n do
    begin
      p:=n-i+1;
      if ubw<p then p:=ubw;
      for j:=1 to p do
        begin
          q:=ubw-j;
          if i-1<q then q:=i-1;
          sum:=kg^[i,j];
          for k:=1 to q do
            begin
              sum:=sum-kg^[i-k,1+k]*kg^[i-k,j+k];
            end;
          if j<>1 then
            begin
              kg^[i,j]:=sum*temp;
            end
          else
            begin
              if sum<=0 then begin write ('erro ');halt;end;
              temp:=1/sqrt(sum);
              kg^[i,j]:=temp;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
```

{ Procedimento para solucao de uma matriz decomposta
por decomp_band }

{ N = Numero de linhas da matriz
UBW = Largura de banda
KG = Matriz decomposta por decomp_band
FE = Vetor de cargas
FE1 = Vetor contendo a solucao do sistema }

Procedure Solve_band (n,ubw:integer);

```

var i,j,k:integer;
    sum:double;

begin
    for i:=1 to n do
        begin
            j:=i-ubw+1;
            if i+1<=ubw then j:=1;
            sum:=fe^[i];
            for k:=j to i-1 do sum:=sum-kg^[k,i-k+1]*fe1^[k];
            fe1^[i]:=sum*kg^[i,1];
        end;
    for i:=n downto 1 do
        begin
            j:=i+ubw-1;
            if j>n then j:=n;
            sum:=fe1^[i];
            for k:=i+1 to j do sum:=sum-kg^[i,k-i+1]*fe1^[k];
            fe1^[i]:=sum*kg^[i,1];
        end;
    end;
end;

```

{ ROTINA PARA CALCULO DE AUTOVALORES }

```

PROCEDURE auto_vetor (auto,nnos,lb,orto:integer;la1,la2:vetor;arq_out:string);

```

```

var i,j,k,ii,jj,kk,cont:integer;
    sum1,sum2,sum3,sum4,erro1,erro2,max1,max2,max3,yy,zz:double;

begin
    clrscr;
    assign (arquivo,arq_out+'.AVE');rewrite (arquivo);

    for cont:=1 to orto do
        begin
            gotoxy(5,5);
            writeln('***** AUTOVALORES *****');
            k:=1;max1:=1;
            for i:=1 to 6*nnos do
                u1^[i]:=1;

                for i:=1 to 6*nnos do
                    for j:=1 to lb do
                        kg^[i,j]:=B^[i,j];

            contorno (lb,nnos);

```

```

for i:=1 to 6*nnos do
  for j:=1 to lb do
    B^[i,j]:=kg^[i,j];

```

```

for i:=1 to nnos do
  begin
    for j:=1 to 6 do
      begin
        if res^[i,j]=1 then
          begin
            for kk:=1 to 6*nnos do
              begin
                u1^[i*6-6+j]:=0;
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

for i:=1 to 6*nnos do
  begin
    u4^[i]:=0;
    for j:=1 to 6*nnos do
      begin
        if j<i then
          begin
            ii:=j;
            jj:=i-j+1;
          end
        else
          begin
            ii:=i;
            jj:=j-i+1;
          end;
        if jj<=lb then
          u4^[i]:=u4^[i]-b^[ii,jj]*u1^[j];
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

for i:=1 to 6*nnos do fe^[i]:=u4^[i];

```

```

for i:=1 to 6*nnos do
  for j:=1 to lb do
    kg^[i,j]:=a^[i,j];

```

```

solve_band (6*nnos,lb);

```

```

for i:=1 to 6*nnos do u4^[i]:=fe1^[i];

```

```

for i:=1 to 6*nnos do
begin
  u2^[i]:=u4^[i];
end;

if cont>1 then      { inicio ortogonalizacao }
begin

for kk:=1 to cont-1 do
begin

for i:=1 to 6*nnos do
begin
  u4^[i]:=0;
  for j:=1 to 6*nnos do
  begin
    if j<i then
    begin
      ii:=j;
      jj:=i-j+1;
    end
    else
    begin
      ii:=i;
      jj:=j-i+1;
    end;
    if jj<=lb then
      u4^[i]:=u4^[i]-b^[ii,jj]*mat_auto^[j,kk];
    end;
  end;
  yy:=0;zz:=0;
  for i:=1 to 6*nnos do
  begin
    yy:=yy+u2^[i]*u4^[i];
    zz:=zz+mat_auto^[i,kk]*u4^[i];
  end;
  for i:=1 to 6*nnos do
    u2^[i]:=u2^[i]-yy/zz*mat_auto^[i,kk];

  end;
end;

      { fim ortogonalizacao }

for i:=1 to 6*nnos do
begin
  if abs(u2^[i])<1E-8 then u2^[i]:=0;
end;

```



```

max2:=0;
for i:=1 to 6*nnos do
begin
  if abs(u2^[i])>max2 then max2:=abs(u2^[i]);
end;
for i:=1 to 6*nnos do u2^[i]:=u2^[i]/max2;

```

```

sum1:=0;sum2:=0;
for i:=1 to 6*nnos do
begin
  sum1:=sum1+u1^[i]*u2^[i];
  sum2:=sum2+u2^[i]*u2^[i];
end;

```

```

la1[k]:=sum1/sum2;la2[k]:=la1[k];

```

```

for i:=1 to 6*nnos do u3^[i]:=u2^[i];
max3:=max2;

```

```

repeat

```

```

  for i:=1 to 6*nnos do
    begin
      u4^[i]:=0;
      for j:=1 to 6*nnos do
        begin
          if j<i then
            begin
              ii:=j;
              jj:=i-j+1;
            end
          else
            begin
              ii:=i;
              jj:=j-i+1;
            end;
          if jj<=lb then
            u4^[i]:=u4^[i]-b^[ii,jj]*u3^[j];
          end;
        end;
      end;
    end;

```

```

  for i:=1 to 6*nnos do
    begin
      fe^[i]:=u4^[i];
      for j:=1 to lb do
        kg^[i,j]:=a^[i,j];
      end;
    end;

```

```

solve_band (6*nnos,lb);

for i:=1 to 6*nnos do u4^[i]:=fe1^[i];

for i:=1 to 6*nnos do u3^[i]:=u4^[i];

if cont>1 then      { inicio ortogonalizacao }
begin

for kk:=1 to cont-1 do
begin

for i:=1 to 6*nnos do
begin
u4^[i]:=0;
for j:=1 to 6*nnos do
begin
if j<i then
begin
ii:=j;
jj:=i-j+1;
end
else
begin
ii:=i;
jj:=j-i+1;
end;
if jj<=lb then
u4^[i]:=u4^[i]-b^[ii,jj]*mat_auto^[j,kk];
end;
end;
end;
yy:=0;zz:=0;
for i:=1 to 6*nnos do
begin
yy:=yy+u3^[i]*u4^[i];
zz:=zz+mat_auto^[i,kk]*u4^[i];
end;
for i:=1 to 6*nnos do
u3^[i]:=u3^[i]-yy/zz*mat_auto^[i,kk];

end;
end;

{ fim ortogonalizacao }

for i:=1 to 6*nnos do
begin
if abs(u3^[i])<1E-8 then u3^[i]:=0;
end;

```

```

max3:=0;
for i:=1 to 6*nnos do
begin
  if abs(u3^[i])>max3 then max3:=abs(u3^[i]);
end;

sum1:=0;sum2:=0;sum3:=0;sum4:=0;
for i:=1 to 6*nnos do
begin
  sum1:=sum1+u2^[i]*u3^[i];
  sum2:=sum2+u3^[i]*u3^[i];
  sum3:=sum3+u1^[i]*u1^[i];
  sum4:=sum4+u2^[i]*u2^[i];

end;

for i:=1 to 6*nnos do u3^[i]:=u3^[i]/max3;

k:=k+1;
la1[k]:=sum1/sum2;
la2[k]:=sqrt(sqrt(sum3/sum4)/max2*sqrt(sum4/sum2));

erro1:=abs((la1[k]-la1[k-1])/(la1[k]+la1[k-1]));
erro2:=abs((la2[k]-la2[k-1])/(la2[k]+la2[k-1]));
gotoxy(1,8);
write(' Iteracao      La1      Erro1      La2      Erro2');
gotoxy (1,10);
write(":79);
gotoxy (1,10);
write(":3,k:3,:3,la1[k]:13:5,:3,erro1:10:6,:3,la2[k]:13:5,:4,erro2:10:6);

for i:=1 to 6*nnos do
begin
  u1^[i]:=u2^[i];max1:=max2;
  u2^[i]:=u3^[i];max2:=max3;
end;

until (erro1<0.00001) or (erro2<0.00001) or (k>=auto);

writeln(arquivo,' autovetor = ',cont);

writeln(arquivo,' Iteracao      La1      Erro1      La2      Erro2');
writeln(arquivo,:3,k:3,:3,la1[k]:13:5,:3,erro1:10:6,:3,la2[k]:13:5,:4,erro2:10:6);

writeln(arquivo);writeln(arquivo,'      V      VI      W      WI      O      OI');

for i:=1 to nnos do
begin

```

```

        writeln(arquivo,u1^[i*6-5]:11:5,".2,u1^[i*6-4]:11:5,".2,u1^[i*6-3]:11:5,".2,
        u1^[i*6-2]:11:5,".2,u1^[i*6-1]:11:5,".2,u1^[i*6]:11:5);
    end;

    for i:=1 to 6*nnos do
        mat_auto^[i,cont]:=u3^[i];
    end;

    close (arquivo);

    impr_auto (k,la1,la2,titulo,arq_out);

end;

{ PROCEDIMENTOS PARA CALCULO E MONTAGEM
DO ARQUIVO DE RESULTADOS DOS ESFORCOS }

procedure cabecalho_2 (titulo:string;pagina:integer;arq_out:string);
begin
    writeln(arquivo);writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,".72,'Pag.',pagina);writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,'MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995');writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,".60,'Arquivo: ',arq_out,'.ESF');writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,titulo);writeln(arquivo);
    writeln(arquivo,'***** ESFORCOS *****');
    writeln(arquivo,"");writeln(arquivo,"");
    writeln(arquivo,".6,'Qy',"11,'Qz',"11,'My',"11,'Mz',"11,'Mt',"11,'B');
end;

PROCEDURE CALCULA_ESFORCOS (ii,flag5,flag1,nelem:integer;elast,trans:real;
    sm:matriz;titulo,arq_out:string);

var i,j,pagina,linha:integer;
    ind:array [1..12] of integer;
    l:real;

begin
    CLRSCR;
    { flag5:=1;}

    assign (arquivo,arq_out+'.ESF');rewrite (arquivo);
    pagina:=1;linha:=14;
    cabecalho_2 (titulo,pagina,arq_out);

    for ii:=1 to nelem do
        begin
            mat_local (ii,elast,trans,sm,flag5,flag1);
            ind[1]:=6*ele^[ii,2]-5;ind[2]:=ind[1]+1;ind[3]:=ind[2]+1;
            ind[4]:=ind[3]+1;ind[5]:=ind[4]+1;ind[6]:=ind[5]+1;

```

```

        ind[7]:=6*ele^[ii,3]-5;ind[8]:=ind[7]+1;ind[9]:=ind[8]+1;
        ind[10]:=ind[9]+1;ind[11]:=ind[10]+1;ind[12]:=ind[11]+1;
        l:=sqrt(sqr(nos^[ele^[ii,3],1]-nos^[ele^[ii,2],1])+sqr(nos^[ele^[ii,3],2]-nos^[ele^[ii,2],2]));
        u1^[ind[1]]:=0.5*q^[ii,1]*l;
        u1^[ind[2]]:=q^[ii,1]*l/12;
        u1^[ind[3]]:=0.5*q^[ii,2]*l;
        u1^[ind[4]]:=q^[ii,2]*l/12;
        u1^[ind[5]]:=0.5*q^[ii,3]*l;
        u1^[ind[6]]:=-q^[ii,3]*l/12;

        u1^[ind[7]]:=0.5*q^[ii,1]*l;
        u1^[ind[8]]:=-q^[ii,1]*l/12;
        u1^[ind[9]]:=0.5*q^[ii,2]*l;
        u1^[ind[10]]:=-q^[ii,2]*l/12;
        u1^[ind[11]]:=-0.5*q^[ii,3]*l;
        u1^[ind[12]]:=q^[ii,3]*l/12;
        for i:=1 to 12 do
        begin
            u4^[ind[i]]:=0;
            for j:=1 to 12 do
            begin
                u4^[ind[i]]:=u4^[ind[i]]+sm[i,j]*fe1^[ind[j]];
            end;
            u4^[ind[i]]:=u4^[ind[i]]-u1^[ind[i]];
        end;
        writeln(arquivo,' ');
        writeln(arquivo,'ELEMENTO = ',ll);
        writeln(arquivo,'NO INICIAL = ',ele^[ii,2]);
        writeln(arquivo,u4^[ind[1]]:12:5,',':1,u4^[ind[3]]:12:5,',':1,u4^[ind[4]]:12:5,',':1,
            u4^[ind[2]]:12:5,',':1,u4^[ind[5]]:12:5,',':1,u4^[ind[6]]:12:5);
        writeln(arquivo,'NO FINAL = ',ele^[ii,3]);
        writeln(arquivo,u4^[ind[7]]:12:5,',':1,u4^[ind[9]]:12:5,',':1,u4^[ind[10]]:12:5,',':1,
            u4^[ind[8]]:12:5,',':1,u4^[ind[11]]:12:5,',':1,u4^[ind[12]]:12:5);
        linha:=linha+5;
        if linha>=50 then begin
            writeln(arquivo,chr(12));pagina:=pagina+1;
            cabecalho_2(titulo,pagina,arq_out);
            linha:=14;
        end;
    end;
    writeln(arquivo,chr(12));
    close(arquivo);
end;

```

{ PROGRAMA PRINCIPAL }

```

begin
    textcolor(white);
    textbackground(black);
    clrscr;

```

```

window(1,1,79,24);
textcolor(white);
textbackground(blue);
clrscr;
janelad(1,1,79,23);
gotoxy(3,2);
writeln('***** ANALISE DE BARRAS *****');
gotoxy(3,5);
write('Nome do arquivo de entrada =>');
readln(arq_in);
gotoxy(3,7);
write('Nome do arquivo de saida ( sem extensao ) =>');
readln(arq_out);

```

{ ALOCA ESPACO PARA VARIABEIS }

```

new(mat);new(nos);new(ele);new(q);
new(p);new(res);new(pos);new(spr);
new(fe);new(u1);new(u2);new(u3);new(mat_auto);
new(u4);new(kg);new(a);new(fe1);new(b);

```

{ ZERA VARIABEIS }

```

for i:=1 to max_4 do
  begin
    for j:=1 to 12 do
      begin
        kg^[i,j]:=0;a^[i,j]:=0;b^[i,j]:=0;mat_auto^[i,j]:=0;
      end;
    end;
  for i:=1 to max_3 do
    begin
      for j:=1 to 3 do ele^[i,j]:=0;
      for j:=1 to 6 do q^[i,j]:=0;
      for j:=1 to 8 do pos^[i,j]:=0;
      for j:=1 to 10 do spr^[i,j]:=0;
    end;
  for i:=1 to max_2 do
    begin
      for j:=1 to 3 do nos^[i,j]:=0;
      for j:=1 to 6 do p^[i,j]:=0;
      for j:=1 to 6 do res^[i,j]:=0;
    end;
  for i:=1 to max_1 do for j:=1 to 10 do mat^[i,j]:=0;
  for i:=1 to 12 do for j:=1 to 12 do sm[i,j]:=0;
  for i:=1 to max_4 do
    begin
      fe^[i]:=0;
      fe1^[i]:=0;
      u1^[i]:=0;
      u2^[i]:=0;
      u3^[i]:=0;
      u4^[i]:=0;
    end;

```

{ LEITURA DE DADOS }

```

lb:=12;

(titulo,elast,trans,flag1,flag2,flag3,bim,auto,orto,nnos,nelem,nm,arquivo,arq_in);
ARQ_DADOS (titulo,arq_out,elast,trans,nnos,nm,nelem,arquivo);

      { MONTA MATRIZ A }

flag5:=1; {indica matriz A}

for ii:=1 to nelem do
  begin
    mat_local (ii,elast,trans,sm,flag5,flag1);
    RIGIDEZ_GLOBAL(ii,sm);

  end;

{INCIDENCIA DA VINCULACAO ELASTICA NA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL A}

for i:=1 to nnos do
  begin
    kg^[i*6-5,1]:=kg^[i*6-5,1]+spr^[i,8];
    kg^[i*6-5,5]:=kg^[i*6-5,5]+spr^[i,8]*(SPR^[i,7]-MAT^[1,10]);
    kg^[i*6-3,1]:=kg^[i*6-3,1]+spr^[i,9];
    kg^[i*6-3,3]:=kg^[i*6-3,3]-spr^[i,9]*(SPR^[i,6]-MAT^[1,9]);
    kg^[i*6-1,1]:=kg^[i*6-1,1]+spr^[i,10]+
      spr^[i,8]*(SPR^[i,7]-MAT^[1,10])*(SPR^[i,7]-MAT^[1,10])+
      spr^[i,9]*(SPR^[i,6]-MAT^[1,9])*(SPR^[i,6]-MAT^[1,9]);

  end;

for i:=1 to 6*nnos do
  for j:=1 to lb do
    a^[i,j]:=kg^[i,j];

{
  contorno (lb,nnos);
  DECOMP_BAND (6*nnos,lb);

  contorno (lb,nnos);

  DECOMP_BAND (6*nnos,lb);
  for i:=1 to 6*nnos do
    for j:=1 to lb do
      A^[i,j]:=kg^[i,j];

  if flag1=1 then      { CALCULO DE AUTO VALORES }
  {  begin  }

```

```

flag5:=2;    { monta matriz B}

for i:=1 to 6*nnos do
  for j:=1 to lb do
    kg^[i,j]:=0;

  for ii:=1 to nelem do
    begin
      mat_local (ii,elast,trans,sm,flag5,flag1);
      RIGIDEZ_GLOBAL(ii,sm);
    end;

  for i:=1 to 6*nnos do
    for j:=1 to lb do
      B^[i,j]:=kg^[i,j];

if flag1=1 then
  begin
    auto_vetor (auto,nnos,lb,orto,la1,la2,arq_out);
  end
else
  begin
    if flag1=3 then
      for i:=1 to 6*nnos do
        for j:=1 to lb do
          A^[i,j]:=A^[i,j]-B^[i,j];
        vetor_cargas(nelem,nnos);
        for i:=1 to nnos do
          begin
            for j:=1 to 6 do
              begin
                if res^[i,j]=1 then
                  begin
                    fe^[i*6-6+j]:=0;
                  end;
                end;
              end;
            for i:=1 to 6*nnos do
              for j:=1 to lb do
                kg^[i,j]:=a^[i,j];
              contorno (lb,nnos);
              DECOMP_BAND (6*nnos,lb);
              Solve_band (6*nnos,lb);

{ IMPRIME DESLOCAMENTOS }

      clrscr;
      flag5:=1;
      impr_desl (nnos,titulo,arq_out);
      CALCULA_ESFORCOS (ii,flag5,flag1,nelem,elast,trans,sm,titulo,arq_out);
    end;

writeln('pressione C para continuar');
repeat
  corr:=' ';

```



```
        corr:=readkey;
        if (corr<>'C') then corr:=' ';
    until corr<>' ';
    textcolor(white);
    textbackground(black);
    dispose(mat);dispose(nos);dispose(ele);dispose(q);
    dispose(p);dispose(res);dispose(pos);dispose(spr);
    dispose(fe);dispose(u1);dispose(u2);dispose(u3);dispose(mat_auto);
    dispose(u4);dispose(kg);dispose(a);dispose(fe1);dispose(b);

end.
```

ANEXO B
(Arquivos de Entrada e Saída de Dados)

O programa de computador desenvolvido tem sua entrada de dados através de arquivo armazenado em disco. Os resultados fornecidos pelo programa também são armazenados em disco.

Apresenta-se a seguir, a caráter ilustrativo, as listagens dos arquivos de entrada e saída de dados do exemplo 8.4 para o cálculo através do programa de computador desenvolvido.

ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

Exemplo 4:

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - $M_z=50 \text{ T.cm}$ - $L=1200 \text{ cm}$.

SISTEMA

FLAG1=3 FLAG2=0 FLAG3=0 AUTO=190 BIM=0 ORTO=1

FIM

ELASTICIDADE

E=2050 G=800

FIM

NOS

1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=120 Y=0 Z=0
3 X=240 Y=0 Z=0
4 X=360 Y=0 Z=0
5 X=480 Y=0 Z=0
6 X=600 Y=0 Z=0
7 X=720 Y=0 Z=0
8 X=840 Y=0 Z=0
9 X=960 Y=0 Z=0
10 X=1080 Y=0 Z=0
11 X=1200 Y=0 Z=0

FIM

MATERIAIS

1 JY=312 JZ=5610 JW=110317 JT=28.43 UW=0
A=56.9 KY=0 KZ=0 YD=0 ZD=0

FIM

CARGAS2

1 QY=0 QZ=2.2283E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
2 QY=0 QZ=4.2385E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
3 QY=0 QZ=5.8338E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
4 QY=0 QZ=6.8580E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
5 QY=0 QZ=7.2109E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
6 QY=0 QZ=7.2109E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
7 QY=0 QZ=6.8580E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
8 QY=0 QZ=5.8338E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
9 QY=0 QZ=4.2383E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0
10 QY=0 QZ=2.2283E-5 MT=0 QYV=0 QZV=0 MTV=0

FIM

CARGAS3

1 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=50 NV=0
2 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
3 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
4 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
5 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
6 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
7 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0

8 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
9 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
10 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=0 NV=0
11 PX=0 PY=0 PZ=0 MY=0 MZ=-50 NV=0

FIM

CARGAS1

1 YC=0 ZC=0 MY=0 MZ=0 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
2 YC=0 ZC=0 MY=3.63677 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
3 YC=0 ZC=0 MY=6.80792 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
4 YC=0 ZC=0 MY=9.25387 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
5 YC=0 ZC=0 MY=10.78601 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
6 YC=0 ZC=0 MY=11.30520 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
7 YC=0 ZC=0 MY=10.78601 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
8 YC=0 ZC=0 MY=9.25387 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
9 YC=0 ZC=0 MY=6.80792 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
10 YC=0 ZC=0 MY=3.63677 MZ=50 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0
11 YC=0 ZC=0 MY=0 MZ=0 BI=0
MYV=0 MZV=0 BIV=0

FIM

RESTRICOES

1 RV=1 VL=0 RW=1 WL=0 RO=1 OL=0
2 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
3 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
4 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
5 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
6 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
7 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
8 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
9 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
10 RV=0 VL=0 RW=0 WL=0 RO=0 OL=0
11 RV=1 VL=0 RW=1 WL=0 RO=1 OL=0

FIM

ELEMENTOS

1 MAT=1 NOINIC=1 NOFIN=2
2 MAT=1 NOINIC=2 NOFIN=3
3 MAT=1 NOINIC=3 NOFIN=4
4 MAT=1 NOINIC=4 NOFIN=5
5 MAT=1 NOINIC=5 NOFIN=6
6 MAT=1 NOINIC=6 NOFIN=7
7 MAT=1 NOINIC=7 NOFIN=8
8 MAT=1 NOINIC=8 NOFIN=9
9 MAT=1 NOINIC=9 NOFIN=10
10 MAT=1 NOINIC=10 NOFIN=11

FIM

ARQUIVO DE DADOS (GERADO PELO PROGRAMA)

Pag. 1

Arquivo: exe_4a_3.DAT

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

Caracteristicas elasticas:

E = 2050.0 G = 800.0

Materiais:

Nos:

NO	COORD. X	COORD. Y	COORD. Z
1	0.00	0.00	0.00
2	120.00	0.00	0.00
3	240.00	0.00	0.00
4	360.00	0.00	0.00
5	480.00	0.00	0.00
6	600.00	0.00	0.00
7	720.00	0.00	0.00
8	840.00	0.00	0.00
9	960.00	0.00	0.00
10	1080.00	0.00	0.00
11	1200.00	0.00	0.00

Elementos:

ELEMENTO	MATERIAL	NO INICIAL	NO FINAL
1	1	1	2
2	1	2	3
3	1	3	4
4	1	4	5
5	1	5	6
6	1	6	7
7	1	7	8
8	1	8	9
9	1	9	10
10	1	10	11

Cargas distribuidas:

ELEMENTO	Qy	Qz	Mt
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

Cargas nodais:

NO	Px	PY	Pz	My	Mz
1	0.0	0.0	0.0	0.0	50.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	-50.0

Restricoes:

NO	V	dV	W	dW	0	d0
1	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	1	0	1	0	1	0

Posicao da carga:

ELEMENTO	Yc	Zc
1	0.0	0.0
2	0.0	0.0
3	0.0	0.0
4	0.0	0.0
5	0.0	0.0
6	0.0	0.0
7	0.0	0.0
8	0.0	0.0
9	0.0	0.0

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

Posicao da carga:

ELEMENTO	Yc	Zc
10	0.0	0.0

Constantes para Fundacao Elastica:

ELEMENTO	CV	CW	CF	HY	HZ
1	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
2	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
3	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
4	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
5	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
6	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
7	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
8	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
9	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
10	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

Constantes para Vinculo Elastico:

NO	CV	CW	CF	HY	HZ
1	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
2	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
3	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
4	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
5	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
6	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
7	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
8	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
9	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
10	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
11	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

ARQUIVO DE DESLOCAMENTOS

Pag.1

MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995

Arquivo: exe_4a_3.DES

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

***** DESLOCAMENTOS *****

NO	V	VL	W	WL	O	OL
1	0.000E+0000	2.610E-0003	0.000E+0000	7.009E-0003	0.000E+0000	1.507E-0005
2	2.819E-0001	2.089E-0003	8.269E-0001	6.657E-0003	1.781E-0003	1.437E-0005
3	5.012E-0001	1.567E-0003	1.571E+0000	5.643E-0003	3.390E-0003	1.223E-0005
4	6.579E-0001	1.045E-0003	2.159E+0000	4.085E-0003	4.666E-0003	8.867E-0006
5	7.519E-0001	5.224E-0004	2.536E+0000	2.142E-0003	5.484E-0003	4.654E-0006
6	7.833E-0001	-1.469E-0013	2.666E+0000	-3.056E-0009	5.766E-0003	-5.468E-0012
7	7.519E-0001	-5.224E-0004	2.536E+0000	-2.142E-0003	5.484E-0003	-4.654E-0006
8	6.579E-0001	-1.045E-0003	2.159E+0000	-4.085E-0003	4.666E-0003	-8.867E-0006
9	5.012E-0001	-1.567E-0003	1.571E+0000	-5.643E-0003	3.390E-0003	-1.223E-0005
10	2.819E-0001	-2.089E-0003	8.269E-0001	-6.657E-0003	1.781E-0003	-1.437E-0005
11	0.000E+0000	-2.610E-0003	0.000E+0000	-7.009E-0003	0.000E+0000	-1.507E-0005

ARQUIVO DE ESFORÇOS

Pag.1

MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995

Arquivo: exe_4a_3.ESF

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

***** ESFORÇOS *****

Qy	Qz	My	Mz	Mt	B
ELEMENTO = 1					
NO INICIAL = 1					
0.00000	-0.03164	-0.00000	50.00000	-0.36326	0.00000
NO FINAL = 2					
-0.00000	0.02897	-3.72580	-50.00648	0.01017	-2.70419
ELEMENTO = 2					
NO INICIAL = 2					
0.00000	-0.02897	3.72580	50.00648	-0.01017	2.70419
NO FINAL = 3					
-0.00000	0.02388	-6.97743	-50.02308	0.00440	-5.28864
ELEMENTO = 3					
NO INICIAL = 3					
-0.00000	-0.02388	6.97743	50.02308	-0.00440	5.28864
NO FINAL = 4					
0.00000	0.01688	-9.48718	-50.04318	0.00125	-7.25797
ELEMENTO = 4					
NO INICIAL = 4					
0.00000	-0.01688	9.48718	50.04318	-0.00125	7.25797
NO FINAL = 5					
-0.00000	0.00865	-11.06022	-50.05915	0.00009	-8.49173
ELEMENTO = 5					
NO INICIAL = 5					
-0.00000	-0.00865	11.06022	50.05915	-0.00009	8.49173
NO FINAL = 6					
0.00000	-0.00000	-11.59347	-50.06518	0.00000	-8.91140
ELEMENTO = 6					
NO INICIAL = 6					
0.00000	0.00000	11.59347	50.06518	-0.00000	8.91140
NO FINAL = 7					
-0.00000	-0.00865	-11.06021	-50.05915	-0.00009	-8.49173
ELEMENTO = 7					
NO INICIAL = 7					
-0.00000	0.00865	11.06021	50.05915	0.00009	8.49173
NO FINAL = 8					
0.00000	-0.01688	-9.48717	-50.04318	-0.00125	-7.25795
ELEMENTO = 8					
NO INICIAL = 8					
-0.00000	0.01688	9.48717	50.04318	0.00125	7.25795
NO FINAL = 9					
0.00000	-0.02388	-6.97740	-50.02308	-0.00440	-5.28863

MARCUS THOMPSEN PRIMO - 1995

Arquivo: exe_4a_3.ESF

Exemplo - Flexao pura - c/deformacao inicial - Mz=50 T.cm - L=1200 cm.

***** ESFORCOS *****

Qy	Qz	My	Mz	Mt	B
ELEMENTO = 9					
NO INICIAL = 9					
-0.00000	0.02388	6.97740	50.02308	0.00440	5.28863
NO FINAL = 10					
0.00000	-0.02897	-3.72578	-50.00648	-0.01017	-2.70418
ELEMENTO = 10					
NO INICIAL = 10					
-0.00000	0.02897	3.72578	50.00648	0.01017	2.70418
NO FINAL = 11					
0.00000	-0.03164	-0.00000	-50.00000	-0.36326	0.00000