

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Estudo da Teoria de Placas Multicamada e
Estados de Tensão: Implementação e
Resultados Numéricos em um Programa (PZ)
Orientado a Objetos C++

Autor: Renato Frota de Souza Junior

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Estudo da Teoria de Placas Multicamada e
Estados de Tensão: Implementação e
Resultados Numéricos em um Programa (PZ)
Orientado a Objetos C++

Autor: **Renato Frota de Souza Junior**
Orientador: **Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo**

Curso: Engenharia Civil
Área de concentração: Estruturas

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Campinas, Fevereiro de 2004
S. P. - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo da Teoria de Placas Multicamada e
Proposta de uma Teoria Geral Para Material
Ortotrópico: Implementação e Resultados
Numéricos em um Programa (PZ) Orientado a
Objetos C++**

Autor: Renato Frota de Souza Junior

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
instituição DES/FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes
instituição DES/FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello
instituição DEM/GRANTE/UFSC

Campinas, 12 de Fevereiro de 2004

Aos meus pais Renato e Eliete e aos meus irmãos Thiago e Alessandra, meu
cunhado Ado e minha sobrinha Gabriela

Agradecimentos

Aos meus pais Renato e Eliete e aos meus irmãos Thiago e Alessandra, ao meu cunhado Carlos Eduardo e minha sobrinha Gabriela pelo amor e ajuda fundamentais. Agradeço a presença constante e a benção que são em minha vida. Agradeço também a toda minha família (principalmente meu primo Daniel, e a minha tia Eloisa) pelo apoio em todos os momentos.

Ao Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil - UNICAMP pela infraestrutura.

À CAPES pela bolsa de estudos.

Ao meu orientador Prof . Dr. Philippe R. B. Devloo pela paciência e todo seu apoio.

Ao meu amigo Cedric Marcelo A. Ayala Bravo pelo apoio constante e pela amizade e ajuda no desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus amigos e professores pelo carinho e companherismo demonstrado.

À Deus.

Resumo

O estudo do comportamento de placas tem despertado grande interesse e incentivado várias pesquisas nessa área, principalmente após o desenvolvimento dos materiais compostos que puderam ser usados na construção dos elementos de placas.

Vários pesquisadores desenvolveram estudos e formulações diversas para tentar descrever de forma mais aproximada possível o comportamento destas placas submetidas a diferentes tipos de solicitações.

Porém, essas formulações baseiam-se em hipóteses simplificadoras que restringem o seu uso à determinadas condições, muitas vezes longe das condições encontradas na realidade, explicando soluções encontradas um pouco distantes das encontradas na prática.

Deste modo, pretende-se neste trabalho desenvolver um estudo do estado de tensões verificadas no interior de um material de placa (mono ou multicamada) quando este se encontra submetido a determinados tipos de esforços (cortantes, normais e momentos aplicados). Para tal estudo, utilizou-se uma formulação baseada na teoria de elasticidade tridimensional. Verificou-se que o procedimento de cálculo convergiu em poucas iterações, permitindo o cálculo do estado de tensões para qualquer configuração de placa multicamada, satisfazendo tanto as equações de equilíbrio quanto às relações constitutivas, não impondo restrições nem às tensões nem às deformações, pretendendo com isso obter soluções reais ou muito próximas às encontradas na prática. Também utilizou-se o método dos elementos finitos, implementado num ambiente computacional desenvolvido por Devloo e colaboradores, denominado PZ, que utiliza a linguagem computacional C++ e a filosofia de orientação a objetos, cujas classes permitem entre outras aplicações o estudo de placas. O material ortotrópico foi utilizado na formulação das propriedades constitutivas das placas, de modo a determinar o seu comportamento.

Verificou-se que o procedimento de cálculo convergiu com poucas iterações, permitindo o cálculo do estado de tensões para qualquer configuração de placa multicamada, satisfazendo tanto as equações de equilíbrio quanto as relações constitutivas.

Abstract

The study of the mechanical behavior of laminated plates has attracted great interest of engineers and has stimulated several researches in this field, mainly after the development of composite materials that have been extensively used in many areas of the modern technology.

Studies have been carried out in an attempt to obtain numerical approaches that describe more precisely the behavior of plates under different loadings.

However, such approaches have been established on simplified hypothesis restricting its application to particular problems, sometimes far from the conditions found in the reality.

In this work it is intended to develop (a study of state of tension verified inside a plate material, when it is submitted on a determined kind of efforts (shear, normal, or applied moment)). For this study utilized a formulation based on a tridimensional elasticity theory.

It is verified that the procedure of calculation converges with few iterations allowing the tension state calculation for any configuration of multilayered plate, satisfying as the equilibrium equation as the constitutive relations) without any restrictions imposed to the stresses and strains, in order to obtain a formulation which provides results very close to the real conditions found in practical engineering problems.

The finite element method is implemented in the PZ environment developed by Devloo and collaborators, using the C++ language and the object oriented philosophy, whose classes allow the study of laminated plates composed of orthotropic materials.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	4
3	Formulações da Teoria de Placas Monocamadas	8
3.1	Introdução	8
3.2	Modelo de placas de Kirchhoff:	9
3.3	Modelo de placas de Reissner-Mindlin:	10
3.4	Hipóteses cinemáticas adotadas	11
3.4.1	Hipóteses cinemáticas de Kirchhoff	11
3.4.2	Hipóteses cinemáticas de Reissner-Mindlin	12
3.5	Deformações e relações constitutivas	12
3.5.1	De Kirchhoff	12
3.5.2	De Reissner-Mindlin	13
4	Classificação de Teorias	14
4.1	Teoria de Monocamada Equivalente	16
4.1.1	Teoria Clássica de Placas Laminadas	17
4.1.1.1	Parte Cinemática	17
4.1.1.2	Parte Constitutiva	18
4.1.2	Teoria de Placas de Primeira Ordem	20
4.1.2.1	Cinemática linear	20
4.1.2.2	Cinemática não linear	21

4.2	Estudo detalhado da implementação do elemento de placa de Reissner-Mindlin	22
4.2.1	Formulação 1	24
4.2.1.1	Hipóteses cinemáticas	25
4.2.1.2	Deformações	27
4.2.1.3	Esforços solicitantes em elementos da placa da camada " α "	28
4.2.1.4	Aplicação do princípio do PTV	30
4.2.1.5	Matriz de rotação	36
4.2.1.6	Cinemática para camada " α " de posição qualquer, com fibras na direção e_1	37
4.2.1.7	Deformações num ponto P da camada " α ", disposta numa posição qualquer do espaço	39
4.2.1.8	Tensões	39
4.2.1.9	Esforços solicitantes num ponto P da camada " α ", disposta numa posição qualquer, com fibras na direção do eixo e_1	40
4.2.1.10	Aplicação do princípio do PTV	40
4.2.2	Formulação 2	42
4.2.2.1	Cinemática para placa " α " paralela ao plano horizontal e fibras na direção do eixo x	44
4.2.2.2	Cinemática para camada " α " numa posição qualquer e fibras na direção de um eixo e_1	45
4.3	Teorias de Ordem Superior de Placas Laminadas Compostas	47
4.3.1	Teorias de Placa de Terceira Ordem	47
4.4	Teoria de Camadas Múltiplas	48
4.5	Modelos Hierárquicos	50
5	Estudo Proposto	53
5.1	Introdução	53
5.2	Cálculo dos esforços em uma placa	54
5.3	Estado de Tensão Assumido	55
5.4	Formulação de um problema elástico tridimensional	56

5.5	Abordagem para cálculo de estado de tensão	56
5.6	Procedimento computacional	57
5.6.1	Descrição	57
5.6.2	Implementação	58
5.6.3	Procedimento	60
5.7	Formulação do material ortotrópico	61
5.8	Esforços solicitantes em elementos de placa da camada " α "	62
5.9	Formulação do material 3D ortotrópico	64
6	Classes principais do ambiente orientado	68
6.1	Classes	70
6.2	Definição da Geometria	70
6.2.1	Classe TPZGeoMesh	70
6.2.2	Classe TPZGeoNode	70
6.2.3	Classe TPZGeoEl	70
6.3	Espaço de Interpolação	71
6.3.1	Classe TPZCompMesh	71
6.3.2	Classe TPZCompEl	71
6.3.3	Classe TPZInterpolatedElement	72
6.4	Definição da Formulação Variacional	72
6.4.1	Classe TPZMaterial	72
6.4.2	Classe TPZMatOrthotropic	73
6.5	Contribuições deste Projeto	76
6.5.1	Classe TPZMulticamadaOrthotropic	76
6.5.2	Classe TPZPlacaOrthotropic	76
6.5.3	Classe TPZBCTension	78
7	Exemplos Numéricos	80
7.1	Introdução	80
7.2	Descrição do problema numérico	80
7.3	Casos Testes	81
7.3.1	Placa multicamada composta por 3 camadas	82
7.3.2	Teste para placa multicamada composta por 5 camadas	87

8	Conclusões	94
9	Apêndice	95
9.1	Teoria da Elasticidade	95
9.2	Tensão	98
9.3	Equações Constitutivas	100

Capítulo 1

Introdução

Nessa pesquisa estudam-se algumas das principais teorias de placas, suas hipóteses e simplificações. Propõe-se a um estudo do estado de tensões uniformes no domínio de um material de placa, baseado na teoria da elasticidade tridimensional e com o uso das propriedades de materiais ortotrópicos. Apresenta-se o desenvolvimento da formulação proposta com uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Para implementação numérica utiliza-se a teoria de elementos finitos. Como ambiente de programação científica utiliza-se o PZ, desenvolvido no laboratório LabMec do departamento de estruturas - DES - da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo - FEC/UNICAMP. O PZ é um ambiente de programação orientado a objetos em C++ para elementos finitos.

Denomina-se placa um elemento estrutural onde a espessura tem dimensão muito menor do que a largura e o comprimento. O seu comportamento tem sido objeto de vários estudos, pois são constantemente utilizadas em várias áreas da engenharia. Na tentativa de se descrever de modo cada vez mais detalhado o comportamento destes elementos, são propostas por alguns estudiosos algumas teorias de placas, cada uma embasada em determinadas hipóteses simplificadoras visando agilizar o seu cálculo. Pode ser citado, desse modo, Kirchhoff (1850) , autor da **teoria de placas de Kirchhoff** [17] (também conhecida como teoria clássica), cuja hipótese básica adotada consiste em desprezar-se o efeito de forças cisalhantes na deformação assumindo que retas normais à superfície indeformada permanecem normais após a sua deformação. Desse modo, é assumido o estado plano de tensão, à medida em que são consideradas somente tensões coplanares às superfícies externas da

placa. Só é válida a aplicação dessa teoria se estivermos analisando placas finas, ou seja, placas cuja espessura seja da ordem de $\frac{1}{10}$ no máximo da menor dimensão no plano.

Para placas espessas, cuja espessura ultrapasse a medida acima referida, essa teoria não funciona bem e diversas outras teorias têm sido propostas com o intuito de melhor representar matematicamente o comportamento real das placas. Entre essas podem-se citar as teorias de Reissner e Mindlin (1944, 1951) que desenvolveram a **teoria de placas de Reissner-Mindlin** que inclui os efeitos da deformação por cortante desprezadas por Kirchhoff.

Desse modo, se considerarmos retas normais à superfície da placa indeformada, após a deformação elas continuam inextensíveis e retas, apresentando uma rotação tal que não fiquem necessariamente normais à tangente da superfície deformada.

Se de um lado desenvolveram-se teorias para se descrever o comportamento de placas, de outro desenvolveram-se diversos tipos de materiais com características distintas. Nesse sentido, foram desenvolvidos os chamados materiais compostos, que são a junção de dois ou mais materiais distintos de modo a compor um novo material com um desempenho superior ao dos que o compõem. São vários os tipos de composição que podem ser feitas na formação dos compostos, como por exemplo **compostos fibrosos** [16] (ou seja, fibras de um determinado tipo de material são incrustadas num segundo material), **compostos particulados** (macropartículas de um material incrustadas num outro tipo chamado matriz) e **compostos laminados** [16] (os compostos deste tipo são formados por lâminas superpostas podendo ou não apresentarem as mesmas propriedades entre si formando um novo material). Pode-se inclusive utilizar os dois tipos de compostos descritos anteriormente, para formar o laminado, cujo bom funcionamento depende de uma boa ligação entre as fibras e a matriz.

O último tipo citado corresponde ao mais utilizado nas aplicações práticas. Caso as fibras sejam dispostas numa única direção, a lâmina é chamada de **lâmina unidirecional** cujas rigidez e resistência são ótimas quando solicitadas na direção das fibras, mas fracas quando solicitadas na direção perpendicular à elas. Caso as lâminas apresentem as suas fibras dispostas variando as direções de uma camada para outra, dizemos que esta sequência de orientações chama-se **sequência de laminação**, sendo que para os ângulos de 30 e 45 graus o laminado pode ser submetido à carregamentos cisalhantes. Como principais vantagens do laminado, destacam-se altas resistência e ri-

gidez, além de apresentar a possibilidade de se poder selecionar (de modo a atender ao carregamento solicitado) às orientações das fibras. Para atingir tais objetivos usam-se tanto fibras longas como curtas, devido ao seu pequeno custo, tornando os compostos competitivos e superiores aos metais e polímeros. Podem ser unidas também fibras de diferentes materiais, possibilitando ao engenheiro criar vários tipos de materiais.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O estudo de placas e cascas compreende a utilização de métodos numéricos e de hipóteses simplificadoras que objetivam discretizar o comportamento dos elementos citados.

Algumas teorias propostas utilizam a pequena dimensão da espessura para descrever um comportamento matemático onde o deslocamento de um ponto genérico pertencente à placa é dado como função apenas da coordenada transversal z , permitindo que o caso tridimensional seja reduzido a um bidimensional.

Tais hipóteses simplificadoras restringem o uso dessas formulações a determinadas condições (tensões nulas perpendiculares à superfície da placa) tornando suas aplicações bem específicas. O início do estudo sistemático de placas foi proposto por Kirchhoff em 1850 [10] admitindo três componentes para o seu campo de deslocamentos. A sua principal característica é a formulação do problema bidimensionalmente utilizando as simplificações do estado plano de tensões, considerando desta forma que a tensão normal transversal e as deformações transversais cisalhantes são todas nulas. Tal teoria pode ser considerada como a base para o desenvolvimento de diversas outras que viriam a seguir. Assim, nos anos de 1940 a 1950, Reissner e Mindlin [6, 5, 22] apresentaram uma nova formulação no que se convencionou chamar de teoria de placas de Reissner-Mindlin, cuja principal novidade foi a inclusão do efeito da deformação devido a cortante considerando deste modo as deformações cisalhantes transversais desprezadas por Kirchhoff, ainda utilizando um material de comportamento constitutivo elástico-linear e isotrópico. Tal idéia também pode (segundo Reddy [20]) ser encontrada em Basset [1].

Posteriormente, com o desenvolvimento de novos tipos de materiais e novas tecnologias, as placas deixaram de ser simples elementos monocamadas homogêneos dando lugar a novos tipos de materiais e composições como por exemplo os elementos de placas multicamadas formadas por várias lâminas de diferentes tipos de materiais. Com isso, novas teorias deveriam ser propostas visando à descrição correta de seu comportamento. Nesse sentido, pode-se citar o aparecimento de três grandes grupos de teorias [16], a saber: **teorias de monocamadas equivalentes, teoria de camadas múltiplas, teoria contínua tridimensional.**

Nas teorias **de monocamadas equivalentes** [16], os deslocamentos ou tensões são expandidos como uma combinação linear da coordenada z (correspondente à espessura da placa) e de funções indeterminadas quaisquer. As teorias de placas de monocamadas equivalentes admitem que uma placa multicamada possa ser estudada como se esta fosse composta por um único tipo de material sendo seu comportamento, entretanto, mais complexo.

O caso mais simples de teoria **de monocamadas** compreende a teoria denominada **Teoria Clássica de Placa Laminada**, estudada por Timoshenko e Woinowsky-Kreiger em 1961 [27], onde as deformações normal e cisalhante transversal são desprezadas, de modo a obter-se as hipóteses descritas (segundo Paccola [25]) por Kirchhoff em 1850.

Tal teoria foi originalmente desenvolvida para placas homogêneas isotrópicas. No ano de 1945, foi introduzido por Reissner [4] o efeito da deformação devido a cortante, originando a condição de que elementos retilíneos normais ao plano médio da placa continuam, após a deformação, retilíneos, de tal forma que não ficam obrigatoriamente normais à tangente da superfície deformada. Tal idéia também pode (segundo Reddy [20]) ser encontrada em Basset [1] e foi denominada por Reddy de **Teoria de deformação cisalhante de primeira ordem**, sendo a teoria mais simples a considerar a deformação causada por cortante.

Porém, há uma discrepância entre as forças cisalhantes dadas pela teoria **Teoria de deformação de cisalhante primeira ordem** (que admite um estado de deformação constante ao longo da espessura) e as dadas pela teoria elástica tridimensional (cujas deformações variam no mínimo quadraticamente ao longo da espessura), obrigando alguns estudiosos a introduzirem fatores de correção de cisalhamento, os quais dependem das propriedades constituintes da lâmina, do esquema de laminação, da geometria, das condições de contorno, dentre outros.

Numa tentativa posterior de se obter uma melhor discretização do comportamento das placas e cascas foram desenvolvidas teorias nas quais os deslocamentos são expandidos na forma de potências quadráticas ou de ordem superior, agrupadas de acordo com o nome **Teorias de placas de deformação cisalhante de ordem superior**.

De todas as teorias de ordem superior a de Reddy(1984) [13] foi a primeira a obter as equações de equilíbrio de uma maneira consistente , dando equações auto-ajustáveis, onde a forma e o tipo de condições de contorno convergem unicamente. Propôs também, no ano de 1990 [15] , uma modificação na teoria proposta por Lo et al [18] [7] , na qual os deslocamentos no plano da placa são expandidos em forma de potências cúbicas (em relação à coordenada z), enquanto que o deslocamento transversal é expandido segundo potência quadrática de z (denominando-se **Teoria geral de terceira ordem**). Tal modificação consistiu em anular-se a tensão cisalhante transversal nos planos superior e inferior da placa, resultando na teoria de terceira ordem de Reddy, simbolizada por **Teoria especial de terceira ordem**.

As teorias correspondentes ao grupo **das monocamadas** descrito anteriormente não apresentam bons resultados quando a placa é composta por várias camadas, formadas por diferentes tipos de materiais, obrigando nestes casos, a utilização de aproximações com relação tanto à tensão quanto ao deslocamento ao longo da espessura da placa multicamada. Tais teorias são agrupadas pelo nome **Teoria de camadas**, de acordo com Reddy [20].

Neste sentido, podem ser citados, de acordo com Reddy, alguns pesquisadores como Pryor e Barker [24] , cuja teoria apresentava um modelo baseado em elementos finitos cujas funções foram consideradas lineares em cada camada, além de outros pesquisadores.

Srinivas [26] descreveu o campo de deslocamentos como funções suaves (em cada camada) e contínuas para um número arbitrário de camadas, desprezando ainda qualquer fator de correção de cisalhamento.

Outros pesquisadores que cabem ser mencionados neste grupo são Di Sciuva [19] que propôs um campo de deslocamentos que permite a variação linear dos componentes de deslocamentos coplanares, assumindo que a componente de deslocamento transversal tem valor constante. A continuidade das tensões cisalhantes nas interfaces laminares é forçada. Posteriormente, Di Sciuva utiliza esta formulação para desenvolver um elemento de placa multicamada anisotrópico, concluindo que a solução do problema é satisfatória tanto para placas finas quanto para grossas sob ação de carga estática. Outros pesqui-

sadores ainda propuseram outras diversas teorias.

No ano de 2000, Devloo e Menezes [9] apresentaram duas formulações para análise de placas multicamadas, sistematizando a obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez e da contribuição da carga nodal equivalente em cada nó para o vetor de carga do sistema estrutural, podendo agrupar os termos que multiplicam as formas quadráticas dos deslocamentos, na forma de 9 matrizes de contribuição. Essa teoria propõe-se também à modelagem de placas (e cascas) laminadas compostas de camadas ortotrópicas.

Há ainda a utilização de **Modelos Hierárquicos** que utilizam sequências hierárquicas de aproximação construídas de tal modo que a solução aproximada correspondente ao modelo hierárquico converge para a solução exata do modelo tridimensional completo. Neste sentido um importante nome que pode ser citado é Szabo que discute em [11] a construção de modelos hierárquicos para placas homogêneas isotrópicas utilizando a formulação de elementos finitos e implementação computacional de sequências hierárquicas onde a representação tridimensional é exigida. Posteriormente, em [12] são apresentados os princípios que governam a sequência de modelos hierárquicos para compostos laminados. Outras formulações hierárquicas são desenvolvidas e utilizadas em [3].

No caso das teorias denominadas **Teoria contínua**, todas tridimensionais, pode-se citar como pioneiro Vlasov [2], que apresentou uma solução elástica tridimensional para o caso de placas isotrópicas homogêneas simplesmente apoiadas. Posteriormente, com o desenvolvimento de materiais compostos, surgiram outros estudos, procurando descrever de forma mais aproximada o comportamento de tais materiais.

Desse modo, alguns pesquisadores estudaram o comportamento dinâmico de placas retangulares, apresentando soluções analíticas para o caso de flexão e vibração de placas retangulares anisotrópicas multicamadas, ou desenvolveram modelos tridimensionais de elementos finitos.

Capítulo 3

Formulações da Teoria de Placas Monocamadas

3.1 Introdução

Placas são estruturas de superfície planas, com contornos bem definidos e limitada por duas superfícies paralelas planas, cuja espessura é muito menor quando comparada às outras duas dimensões do elemento (largura e comprimento). Também é necessário que desempenhe função estrutural, suportando cargas que podem estar aplicadas perpendicularmente ao seu plano médio ou mesmo aplicadas paralelamente a este plano (ou seja, perpendicular à espessura da placa), caso em que pode utilizar-se o estado plano de tensão na análise de seu comportamento.

Designamos camada um certo domínio (altura, largura, comprimento) cujos pontos pertencentes ao mesmo estão sujeitos às mesmas relações constitutivas pois correspondem ao mesmo tipo de material. A placa pode ser composta por uma única camada (caso em que os termos placa e camada se confundem) ou por várias camadas (placas multicamadas).

De um modo geral podemos classificar as placas como finas ou espessas, sendo que são chamadas de finas as placas cuja relação entre a espessura e a menor dimensão no plano não ultrapasse $\frac{1}{10}$. Neste caso, pode-se utilizar a teoria de placas de Kirchhoff (ou teoria clássica), que despreza os efeitos de tensões cisalhantes e a placa pode ser estudada como um caso de estado plano de tensão. Caso esta relação ultrapasse o valor estabelecido, a placa é classificada

como espessa (embora haja alguns autores que proponham outras classificações intermediárias), e utiliza-se a teoria de placas de Reissner-Mindlin.

Dois termos muito usados no estudo de placas multicamadas correspondem ao plano médio e ao plano de referência. Tais planos são importantes pois são neles que atribuem-se os sistemas de coordenadas necessários ao estudo de tensões em determinado ponto pertencente ao domínio da camada. Deste modo, tem-se que o plano médio refere-se ao plano pertencente à camada analisada que a bisecciona na metade de sua espessura; cada camada possui o seu próprio plano médio. O plano de referência ao contrário, é único e pode-se localizar em qualquer altura em relação ao conjunto de placas multicamadas. No caso especial de um conjunto de placas multicamadas, cada camada pode apresentar características distintas umas em relação às outras (seja por composição de diferentes tipos de materiais, seja por disposição distinta das fibras), por isto, há necessidade de dois tipos de sistemas de eixos para o seu estudo: sistema de referência local, e sistema de referência global. O sistema de referência local encontra-se localizado no plano médio da camada e com ele são descritas as tensões, deformações desta camada somente; como cada camada tem seu próprio sistema de eixos local independentes, os seus resultados precisam ser convertidos para o sistema de eixos global (localizado no plano de referência), para que os resultados de todas as camadas possam ser então estudados juntamente.

Caso a camada seja curva, tem-se uma casca; caso a espessura da placa seja muito menor do que $\frac{1}{10}$ da menor dimensão, tem-se uma chapa.

3.2 Modelo de placas de Kirchhoff:

Na teoria de placas de **Kirchhoff** supomos que o sistema cartesiano de coordenadas esteja disposto de um modo tal que os eixos x e y pertençam ao plano médio da camada. Também são feitas algumas hipóteses simplificadoras para se analisar o comportamento das placas como:

1. Adoção de um regime elástico-linear, material homogêneo e isótropo
2. São consideradas pequenas deformações e pequenos deslocamentos
3. Os componentes de deslocamentos, localizados ao longo da placa, variam linearmente com a espessura.

4. Retas normais ao plano médio da placa (na posição indeformada), permanecem normais e inextensíveis mesmo após a deformação da mesma. Desta forma, pode-se desprezar as deformações causadas por cortante (ou deformações cisalhantes transversais $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), ao mesmo tempo em que se verifica a linearidade da variação das componentes de deslocamento ao longo da espessura (ou seja, os esforços na deformação causada por flexão são considerados também nulos).
5. As tensões de cisalhamento nas faces externas, paralelas ao plano médio da placa também podem ser desprezadas, podendo desta forma obter as igualdades:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

É admitida ainda a hipótese do estado plano de tensões (onde a tensão normal ao plano médio da placa é considerada nula) e a lei constitutiva de regime elástico linear, verificando desta forma, que as hipóteses de **Kirchhoff** implicam que a deformação da placa é dada apenas por flexão (curvamento da placa) e alongamento (no plano da placa).

3.3 Modelo de placas de Reissner-Mindlin:

O modelo de placas de Reissner-Mindlin difere do modelo de placas de Kirchhoff na medida em que são incluídos os efeitos de distorção das retas normais ao plano médio da placa, de modo que as deformações cisalhantes transversais não são nulas, bem como as respectivas distribuições de tensões de cisalhamento.

Na cinemática do modelo de Reissner-Mindlin, uma reta perpendicular ao plano de referência não deformado não continua perpendicular necessariamente após o deslocamento do mesmo. Todavia, o comprimento dos elementos retilíneos ao plano médio da placa antes e após o deslocamento permanece o mesmo, podendo ser admitidas as seguintes hipóteses:

1. $\sigma_z = 0$
2. lei constitutiva de regime elástico linear

3.4 Hipóteses cinemáticas adotadas

3.4.1 Hipóteses cinemáticas de Kirchhoff

Para o caso de placa de Kirchhoff verifica-se que os deslocamentos de um ponto qualquer pertencente à placa pode ser dado por:

$$U(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) + z\alpha(x, y) \\ v_0(x, y) + z\beta(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde u_0 e v_0 são os deslocamentos no plano médio da placa, e α e β são as rotações descritas pelo elemento linear. Deste modo, fica claro que no caso de Kirchhoff, a cinemática que descreve o comportamento de flexão das placas despreza o efeito das cortantes na deformação por flexão (seção plana permanece plana após a deformação).

Da hipótese de que $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, resulta que:

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.3)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.4)$$

Do mesmo modo para γ_{yz} , vem que:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5)$$

Derivando-se o campo de deslocamentos 3.2 em relação à variável z obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha(x, y) \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \beta(x, y) \quad (3.6)$$

Desse modo observa-se que as rotações, segundo Vinson, são dadas por:

$$\alpha = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\beta = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.8)$$

Pode-se então reescrever a cinemática da placa (que descreve o deslocamento de um ponto genérico qualquer) como sendo dada pelo campo vetorial de deslocamentos $U(x, y, z)$ abaixo:

$$U(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

3.4.2 Hipóteses cinemáticas de Reissner-Mindlin

A cinemática proposta pelo modelo de Reissner-Mindlin pode ser verificada através do seguinte modelo dado por:

$$u(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

onde u_0 , v_0 e w_0 correspondem aos deslocamentos nas direções x , y e z respectivamente e θ_x e θ_y são as rotações da reta normal transversal em torno dos eixos y e x respectivamente, dadas por

$$\theta_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial z} \quad \theta_y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial z} \quad (3.11)$$

3.5 Deformações e relações constitutivas

3.5.1 De Kirchhoff

Das hipóteses discutidas anteriormente, verifica-se que as deformações para a teoria de placas de Kirchhoff podem ser dadas por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}$$

3.5.2 De Reissner-Mindlin

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

O campo de deformações obtido na teoria de Reissner-Mindlin é semelhante ao obtido por Kirchhoff, acrescentando-se contudo as deformações cisalhantes transversais. O estado de tensões está descrito abaixo, sendo a componente σ_z nula, devido às hipóteses do estado plano de tensões. Supõe-se também que as fibras do elemento de placa encontram-se nas mesmas direções que os eixos coordenados cartesianos x , y e z .

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_x(\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ \frac{E_y(\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ 0 \\ G_{xz} \gamma_{xz} \\ G_{yz} \gamma_{yz} \\ G_{xy} \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde as constantes E_x, E_y são os módulos de elasticidade longitudinais; os coeficientes de Poisson são dados por ν_x, ν_y , as constantes G_{ij} (para $i, j = x, y, z$) são denominados módulos de elasticidade transversais.

Capítulo 4

Classificação de Teorias

Várias são as teorias propostas que visam a discretizar o comportamento do material de placas. Como isto não constitui uma tarefa fácil, as teorias (via de regra) partem de hipóteses adotadas que visam simplificar o problema, de modo a obter um equacionamento satisfatório. Deste modo pode-se agrupar as diversas teorias de placas segundo a classificação proposta por Reddy [16]. O objetivo deste capítulo é dar uma visão geral de algumas das teorias existentes criadas com o intuito de se descrever o comportamento de um elemento de placa laminada. As teorias descritas no capítulo anterior são utilizadas como base extendendo assim suas hipóteses e conclusões no tratamento de placas multicamadas. Basicamente serão descritos 6 outros grupos (sendo um deles uma implementação) em que serão apresentadas de modo sucinto as suas hipóteses adotadas e as suas características gerais

1. Teoria de Monocamada Equivalente
2. Teoria de Deformação de Primeira Ordem
3. Implementação do Elemento de Placa de Reissner-Mindlin
4. Teoria de Ordens Superiores
5. Teoria de Várias Camadas
6. Modelos Hierárquicos

O intuito é uma abordagem das características gerais de cada grupo, suas qualidades e descrição da cinemática utilizada.

As equações governantes das teorias apresentadas aqui podem ser resolvidas tanto analítica quanto numericamente para deformações e deslocamentos gerais, sendo a tensão obtida ou por meio das equações constitutivas ou por meio das equações de equilíbrio tridimensionais. Para a resolução analítica pode-se citar métodos como o de Navier e o de Lévy, e como método de solução numérica, pode-se citar métodos como o de Rayleigh-Ritz. Tais métodos não serão abordados, apenas citados sucintamente, pois fogem ao escopo deste capítulo.

1. Método de Navier: utilizado para placas retangulares, onde seus quatro lados estão simplesmente apoiados. O deslocamento w_0 é expandido segundo séries de Fourier, onde a escolha destas funções trigonométricas em séries restringe-se à satisfação das condições de contorno do problema. O carregamento também é, de modo semelhante ao deslocamento, expandido em séries trigonométricas.
2. Método de Lévy: utilizado para placas retangulares com dois lados opostos simplesmente apoiados e os outros dois sujeitos à quaisquer condições de contorno independentes um do outro. Utiliza-se uma aplicação do método de Navier com relação à condição de contorno imposta aos dois lados opostos simplesmente apoiados, reduzindo a equação diferencial parcial à uma equação diferencial ordinária em relação à coordenada x , que pode então ser resolvida exata ou aproximadamente. O deslocamento w_0 é reescrito em termos de séries de Fourier assim como o carregamento, determinando-se a equação diferencial de quarta ordem.
3. Método de Rayleigh-Ritz: usado na obtenção de soluções aproximadas para condições de contorno gerais, onde a solução da equação diferencial de quarta ordem pode ser reescrita na forma do somatório $W_n(x) \approx \sum c_j \varphi_j(x)$ onde $\varphi_j(x)$ são as funções de aproximação que devem satisfazer a forma homogênea das condições de contorno geométricas. Os parâmetros c_j são determinados através da satisfação da forma fraca da equação diferencial de quarta ordem.

4.1 Teoria de Monocamada Equivalente

Também chamada de *ESL* (Equivalent Single Layer) é baseada em hipóteses simplificadoras (incluindo tanto a cinemática da deformação, quanto o estado de tensão), de modo a reduzir o equacionamento de um problema tridimensional a partir do qual suas equações foram inicialmente derivadas, a um bidimensional. São teorias que oferecem baixo custo computacional devido à sua simplicidade, oferecem boa aproximação nas descrições das características globais para placas finas ou moderadamente finas (pois as soluções são menos aproximadas, conforme a placa se torna mais espessa, devido às hipóteses iniciais assumidas); como desvantagem pode-se relacionar o fato destas teorias serem incapazes de descrever o estado de tensão e de deformação em regiões de descontinuidades ou em regiões com alta carga aplicada.

Deste modo, nas teorias que compõem este grupo, um laminado composto multicamada é analisado como se este fosse formado por uma única camada tendo um comportamento constitutivo um pouco mais complexo, podendo reduzir a expressão da cinemática como sendo a combinação linear da espessura (onde a variável z está desacoplada das outras duas variáveis, x e y), multiplicada por funções quaisquer, da seguinte forma:

$$\varphi_i(x, y, z) = \sum_{j=0}^N (z)^j \varphi_i^j(x, y) \quad (4.1)$$

onde as funções φ_i componham o campo de deslocamentos ou de tensões, z corresponde à espessura da placa, e φ_i^j são funções de forma bidimensionais. Quando as variáveis associadas a φ_i forem deslocamentos, as funções formadas pelas combinações lineares de φ_i são determinadas através do princípio dos deslocamentos virtuais. Segundo o princípio do trabalho virtual, que estabelece que "se um corpo contínuo está em equilíbrio, o trabalho virtual de todas as forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas para qualquer deslocamento virtual", ou seja, o trabalho virtual é igual à soma da energia virtual associada à deformação (δU) com energia virtual (δK) associada à forças externas. Como estas quantidades dependem das tensões à que está submetido o corpo e das deformações virtuais (que por sua vez dependem das funções de deslocamentos assumidas), pode-se utilizar o princípio do PTV para se determinar estes deslocamentos. Para um elemento de placa qualquer, a integração sobre o domínio (volume) da placa é dada pela integração sobre o plano de referência da placa e integração sobre a espessura

da placa, devido à natureza do campo de deslocamentos adotado:

$$\int_{Vol} (.)dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_0} (.)d\Omega dz \quad (4.2)$$

onde h representa a altura total da placa, e Ω_0 representa o plano médio (indeformado) da placa. De acordo com a cinemática adotada, os esforços solicitantes que atuam na placa podem ser calculados através da equação:

$$R_{ij}^{(m)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z)^m \sigma_{ij} dz \quad (4.3)$$

onde a variável $R_{ij}^{(m)}$ corresponde ao esforço solicitante aplicado à placa, que podem ser escritas em função dos deslocamentos (ε_i). Através das equações constitutivas ($\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, ou seja relações entre tensão e deformação) e das relações deformação-deslocamento ($\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$). Há vários tipos de teorias englobadas pela *ESL*, assumindo o estado plano de tensão e as relações constitutivas do estado plano de tensão são também assumidas; ou seja, neste caso, desprezam-se todas as tensões transversais (ou seja, $\sigma_{33} = 0$), motivo pelo qual são induzidas imprecisões nas soluções, pois apesar de serem pequenas quando comparadas às tensões $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, não podem ser desprezadas, pois as placas de materiais compostos, normalmente são frágeis quando a tensão esta atuando ao longo da espessura (disposição das fibras). Para todas as teorias do grupo ESL baseada no campo de deslocamentos, assume-se que estes são funções contínuas da coordenada z , resultando em uma distribuição contínua das deformações transversais e descontínuas para as deformações coplanares.

4.1.1 Teoria Clássica de Placas Laminadas

4.1.1.1 Parte Cinemática

A mais simples teoria que faz parte do grupo ESL corresponde a teoria denominada Teoria Clássica de Placa Laminada (ou CLPT), que é uma extensão da teoria de placas de Kirchhoff para laminados compostos. São admitidas nesta teoria, as mesmas hipóteses admitidas pela teoria clássica, ou seja

- retas perpendiculares à superfície média (normais transversais) da placa antes da deformação, continuam retas após a deformação, implicando que o deslocamento w não é função da coordenada z .

- as normais transversais não sofrem variação no seu comprimento, implicando que a deformação normal transversal é nula ($\varepsilon_{zz} = 0$).
- as retas normais rotacionam (após a deformação), de modo a continuarem perpendiculares à tangente da superfície média deformada implicando que as deformações transversais cisalhantes são nulas, ou seja, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

Adota-se os eixos xy no plano médio da placa (simbolizado por Ω_0) sendo o domínio total do laminado dado pelo produto vetorial $\Omega_0 \times (\frac{-h}{2}, \frac{h}{2})$. As superfícies mais externas do laminado se encontram nas alturas de coordenadas $z = \frac{-h}{2}$ e $z = \frac{h}{2}$. São também admitidas as seguintes hipóteses para o laminado:

- a união entre as camadas é perfeita
 - o material de cada camada tem um comportamento elástico-linear, apresentando 2 planos de simetria
 - a espessura de cada camada é constante
 - admite-se a teoria de pequenas deformações e pequenos deslocamentos
 - tensões transversais cisalhantes nas superfícies superior e inferior são nulas
- De acordo com as hipóteses de Kirchhoff, um ponto de coordenadas (x, y, z) desloca-se após a deformação, para uma posição que pode ser dada pelas coordenadas $(x + u, y + v, z + w)$, sendo (u, v, w) as componentes do vetor deslocamento

$$U = ue_x + ve_y + we_z \quad (4.4)$$

onde as componentes u, v, w do vetor são multiplicadas pelos versores nas direções x, y, z respectivamente. Os deslocamentos u, v, w , relativos às direções x, y, z respectivamente, podem ser representados por:

$$U(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

4.1.1.2 Parte Constitutiva

As deformações são obtidas da relação deformação-deslocamento (também denominada equação cinemática) linear (no caso do presente texto), dada pela equação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (4.6)$$

onde ε_{ij} é também chamado de tensor infinitesimal e u_i se referem às componentes (u, v, w) , conforme o valor do índice de 1 a 3 e X_i corresponde às componentes dos eixos cartesianos. Sendo a camada constituída por material ortotrópico, as tensões transversais cisalhantes σ_{xz}, σ_{yz} também são nulas, devido ao fato de dependerem (pelas equações constitutivas) das deformações $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ nulas devido às hipóteses adotadas. Assume-se também a tensão $\sigma_z = 0$, e a mesma não é utilizada na formulação do P.T.V., tendo-se então, caso plano de tensão e de deformação.

Deste modo, as relações constitutivas lineares usadas para uma camada (lâmina) ortotrópica, no sistema cartesiano de coordenadas locais, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}^{(\alpha)} \quad (4.7)$$

representadas no sistema local de coordenadas (x_1, x_2, x_3) localizado no plano médio da lâmina com os eixos x_1 e x_2 ocupando as direções paralela e perpendicular às fibras respectivamente, onde α representa a α -ésima camada. Os termos C_{ij} são as constantes elásticas do material e podem ser dados por:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (4.8)$$

sendo E_1 e E_2 os módulos de elasticidade longitudinal, G_{12} o módulo de leasticidade transversal e ν_{ij} os coeficientes de Poisson, todos em relação ao sistema de coordenadas locais (x_1, x_2, x_3) .

Como as camadas são ortotrópicas, e as direções das fibras variam de camada para camada, as equações constitutivas de cada camada devem ser transformadas para o sistema de coordenadas global (do laminado), utilizando as matrizes de rotação, de modo a resultar

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} \quad (4.9)$$

A variação das deformações ao longo da espessura do laminado é linear, apresentando uma inclinação de reta única, em todas as camadas. A variação das tensões, ao contrário das deformações, apresenta descontinuidades quando muda-se de camada (pois as constantes elásticas C_{ij} , da equação constitutiva, mudam de camada para camada); contudo, dentro de uma mesma camada, a variação é linear.

As ações atuantes no laminado podem ser dadas

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{z_{\alpha}}^{z_{\alpha+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{\alpha=1}^N \int_{z_{\alpha}}^{z_{\alpha+1}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} dz \quad (4.10)$$

onde N correspondem às solicitações normais a espessura do laminado, nas direções x, y .

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{z_{\alpha}}^{z_{\alpha+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{\alpha=1}^N \int_{z_{\alpha}}^{z_{\alpha+1}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(\alpha)} z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} dz \quad (4.11)$$

onde M correspondem às solicitações de momento.

4.1.2 Teoria de Placas de Primeira Ordem

4.1.2.1 Cinemática linear

Constitui-se numa extensão da teoria de placas de Reissner-Mindlin, obtida através do relaxamento da terceira hipótese adotada por Kirchhoff, significando que um elemento linear retilíneo transversal perpendicular à superfície média da placa não fica obrigatoriamente perpendicular a esta mesma superfície, após a deformação. Porém, continuam inextensíveis implicando em que

o deslocamento w não depende da coordenada z . A cinemática que descreve o campo de deslocamentos da placa é dada abaixo

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde u_0, v_0, w_0 e $\theta_x, -\theta_y$ são funções a serem determinadas, sendo que estas duas últimas correspondem às rotações da normal transversal em torno dos eixos y e x respectivamente, e são dadas por

$$\theta_x = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \theta_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.13)$$

Para placas muito finas (quando a menor das duas dimensões entre comprimento e largura for da ordem de 50 vezes maior do que a espessura) então as funções 4.13 devem aproximar-se das respectivas curvaturas de flexão, ou seja

$$\theta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4.14)$$

4.1.2.2 Cinemática não linear

Analisando as deformações não-lineares associadas ao campo de deslocamentos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

verifica-se que as deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ são lineares em relação à coordenada z , enquanto que as demais deformações são constantes ao longo da espessura do laminado, resultando em tensões transversais cisalhantes a serem também constantes (devido à equação constitutiva do material ortotrópico). Porém, sabe-se através da teoria de barras homogêneas que as tensões

cisalhantes transversais variam parabolicamente ao longo da espessura da barra. Deste modo, para barras e placas laminadas compostas, as tensões cisalhantes transversais devem variar no mínimo quadraticamente ao longo da espessura da camada. Há deste modo uma discrepância entre o estado de tensões constante admitido pela teoria de placas de primeira e segunda ordens, e o estado de tensões parabólico verificado na prática, obrigando a introdução de um fator de correção k denominado coeficiente de correção de cisalhamento que multiplica as ações cortantes V_y, V_x dadas por

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.16)$$

os esforços solicitantes no laminado são, desta forma, dadas pelas mesmas equações determinadas na teoria anterior, acrescidas dos esforços cortantes (incluindo-se os fatores de correção)

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = k \sum_{\alpha=1}^N \int_{z_{\alpha}}^{z_{\alpha+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.17)$$

onde o fator k é adotado com o valor de $\frac{5}{6}$ e pode variar, dependendo das propriedades da lâmina e do esquema de laminação. Para a teoria de primeira e segunda ordens, as equações constitutivas do laminado são as mesmas adotadas para a teoria clássica de placas laminadas, acrescidas das equações das tensões cisalhantes transversais, desprezadas anteriormente

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

para uma camada na k -ésima posição no sistema de coordenadas do laminado.

4.2 Estudo detalhado da implementação do elemento de placa de Reissner-Mindlin

Na implementação do elemento de placa descrita a seguir utilizou-se a notação introduzida por Devloo e Menezes [9].

Neste estudo de placas proposto por Devloo e Menezes, são propostas duas formulações para modelagem de placas ortotrópicas laminadas, admitindo-se

que as camadas possam ter propriedades elásticas e orientação das fibras distintas, permitindo deste modo a análise de materiais e/ou comportamentos anisotrópicos. As expressões de tensões, deformações e densidade de energia e valores analíticos das parcelas que se superpõem para formar os coeficientes de rigidez foram estudadas de modo a deduzir os coeficientes de contribuição para as matrizes de rigidez e vetores de carga de um elemento finito de placa, com o auxílio do programa Mathematica, agrupando os termos que multiplicam as formas quadráticas dos deslocamentos, suas variações, derivadas parciais dos deslocamentos, derivadas parciais das variações dos deslocamentos, agrupados em 9 matrizes discretizadas adiante.

Para isso, utilizou-se um programa computacional denominado PZ, em desenvolvimento no Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil Arquitetura e Urbanismo da Unicamp (sob coordenação de Devloo), que utiliza a filosofia de programação orientada a objetos e a linguagem C++, permitindo cálculos de elasticidade linear via elementos finitos h-p adaptativos.

As duas formulações baseiam-se em hipóteses cinemáticas distintas

1. *Formulação 1: placa com rotação constante e igual para todas as camadas:* admite-se que os deslocamentos fundamentais numa dada seção transversal são as translações $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ e as rotações $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$, $\theta_z(x, y)$ calculadas numa superfície de referência paralela às camadas da placa laminada. Há uma rotação única para todas as camadas ou seja, há 6 deslocamentos independentes como variáveis fundamentais associadas a cada ponto genérico P.
2. *Formulação 2: com rotações independentes que variam de camada para camada:* admite-se que numa dada seção transversal, as rotações em cada camada são independentes, sendo que neste caso os deslocamentos fundamentais em uma dada seção são compostos por translações e rotações (absolutas e relativas) havendo desta forma, 3 componentes de translação medidas na camada de referência e 3 componentes de rotação em cada camada.

São utilizadas ainda as hipóteses adotadas por Reisner-Mindlin para placas espessas considerando materiais ortotrópicos nas camadas, podendo chegar a uma configuração de anisotropia à medida em que se utiliza esta formulação

para placas laminadas. A partir desta análise, surge a formulação de placas multicamadas.

Os dois casos acima citados, levam em consideração a rotação em torno do eixo vertical. Admite-se que cada camada é formada por um material ortotrópico, sendo que as propriedades elásticas de cada camada e mesmo as orientações de suas fibras, podem ser distintas de uma camada para outra, permitindo a análise de materiais anisotrópicos. As camadas que formam o material multicamada são consideradas espessas, respeitando o comportamento proposto pela teoria de Reissner-Mindlin.

4.2.1 Formulação 1

Placa disposta horizontalmente e fibras orientadas segundo a direção do eixo "x"

Admite-se nesta análise que os deslocamentos fundamentais, admitidos numa dada seção transversal, são determinados pelas translações $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ e as rotações $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$, $\theta_z(x, y)$, onde as duas primeiras rotações (mais a translação $w(x, y)$), são admitidas constantes ao longo da espessura da placa para todas as camadas.

Deste modo são admitidas as seguintes hipóteses:

1. Consideram-se placas espessas, para as quais são válidas as hipóteses adotadas por Reissner-Mindlin, ou seja, considerando um elemento linear perpendicular ao plano da placa, este apresenta uma rotação tal que não fica obrigatoriamente perpendicular à tangente da superfície deformada.
2. deve-se impor ainda a seguinte condição, devido a ortotropia: $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$
3. Foram admitidas propriedades ortotrópicas para os materiais que compõem cada camada.
4. Foram admitidas leis constitutivas de regime elástico linear, e cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.
5. Admite-se as simplificações do estado plano de tensões, na qual a tensão normal ao plano da placa é nula.

O plano médio da camada α (cuja espessura é h) está à distância f de um plano de referência adotado paralelo às camadas. O plano de referência pode ser adotado em qualquer distância em relação à placa, e a excentricidade f tem sinal determinado conforme o plano médio da camada analisada, esteja acima ou abaixo do mesmo. São admitidas, segundo Paccola [25], um sistema de eixos x, y, z no plano médio da camada da placa analisada, onde os eixos x e y são coplanares a este plano e as fibras estão orientadas segundo a direção x . Através do produto vetorial entre estes dois eixos, obtêm-se um terceiro eixo (z), vertical e orientado para cima.

No plano de referência, adota-se um sistema cartesiano $x_r y_r z_r$ com eixos x_r e y_r coplanares e pertencentes a este plano, sendo o eixo z_r vertical orientado para cima, coincidindo com o eixo z .

Na análise proposta pelos autores, é apresentada, em primeiro lugar, as hipóteses cinemáticas que permitem que sejam montadas as equações de deformações, de tensões e de esforços solicitantes para um ponto genérico P . Utiliza o PTV [16] depois, processo que permite que sejam obtidas as matrizes de contribuição associadas às camadas em questão, para serem usadas nos cálculos dos coeficientes de rigidez para os pontos de integração dos elementos da malha dos elementos finitos.

4.2.1.1 Hipóteses cinemáticas

Como dito acima, nas hipóteses cinemáticas de um ponto P localizado numa camada " α ", adota-se um sistema cartesiano xyz no plano médio da camada, designado por SRL (Sistema de Referência Local). O plano médio da camada encontra-se a uma distância f do plano de referência, onde é adotado também um sistema $x_r y_r z_r$ designado por SRG (sistema cartesiano Global). Observa-se na figura 4.1 que o ponto O (origem do sistema SRG) translada para uma posição O' , onde as componentes de translação deste ponto em relação ao SRG (coordenadas globais) são dadas por:

$$\begin{aligned} u &= u(x_r, y_r) \\ v &= v(x_r, y_r) \\ w &= w(x_r, y_r) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Placa Multi-camada com rotação constante

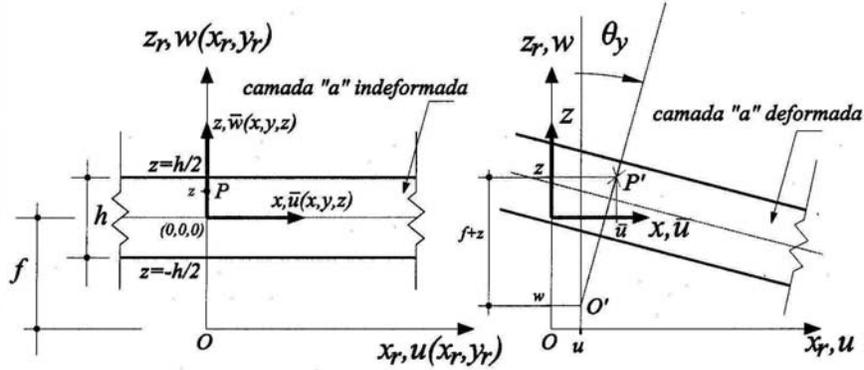


Figura 4.1: Deslocamento do ponto P da camada “a” no plano xz

Um ponto P localizado numa camada “a”, com coordenadas (x, y, z) , dadas em relação ao sistema local, após o deslocamento passa para uma posição P' cujo deslocamento pode ser escrito em função da translação OO' e das rotações da placa dadas no sistema global ($\theta_x = \theta_x(x_r, y_r)$, $\theta_y = \theta_y(x_r, y_r)$, $\theta_z = \theta_z(x_r, y_r)$). Deste modo, as componentes da translação do ponto P em relação ao sistema local são dadas pelas coordenadas locais por:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z) &= u(x_r, y_r) + (f + z)\theta_y \\ \bar{v}(x, y, z) &= v(x_r, y_r) - (f + z)\theta_x \\ \bar{w}(x, y, z) &= w(x_r, y_r)\end{aligned}\quad (4.20)$$

sendo que as componentes $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ correspondem aos deslocamentos referentes ao sistema local SRL. Pode-se, deste modo, determinar um vetor composto pelas 3 componentes de translação mais as 3 componentes de rotação. O conjunto de variáveis de estado da presente formulação é dado pelo vetor:

$$\{u\}^T = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\} \quad (4.21)$$

Para melhor compreensão, ver figura 4.1, que representa a obtenção da componente de deslocamento \bar{u} , na direção do eixo x .

4.2.1.2 Deformações

São admitidas que as direções de ortotropia são as direções dos eixos x e y , admitindo-se ainda estado plano de tensões. Os deslocamentos de translação apresentados no item anterior são utilizados no cálculo das deformações de um ponto genérico P , sendo acrescentado ainda, nesta formulação, uma rotação absoluta da camada que contém este ponto P especificado, simbolizada por θ_z (em torno do eixo perpendicular ao plano da placa). Tal acréscimo se deve ao fato desta rotação permitir o cálculo aproximado do problema de cascas. Deste modo, fez-se corresponder à esta rotação, em torno de z_r , uma deformação fictícia ε_{θ_z} (que associa uma medida de deformação à diferença entre θ_z , e o movimento de corpo rígido correspondente à rotação infinitesimal do plano de referência em torno do eixo z), dada pela equação abaixo, calculada no plano de referência, com abscissa negativa " $-f$ ", em relação ao eixo local z

$$\theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} \right) \quad (4.22)$$

O vetor de deformações pode ser calculado em função dos seus deslocamentos, dados pela equação abaixo, à medida em que substituem-se as equações 4.20 em 4.6 resultando:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\theta_z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial y} \\ \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

A placa está submetida ao estado plano de tensões e, do mesmo modo como foi feito para os deslocamentos, pode-se determinar um campo de tensões, dado pelas equações:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\theta z} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_x(\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ \frac{E_y(\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ 0 \\ G_{xz} \gamma_{xz} \\ G_{yz} \gamma_{yz} \\ G_{xy} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

onde E_x e E_y são os módulos de elasticidade longitudinal nas direções x e y respectivamente, ν_x e ν_y são os coeficientes de Poisson, G_{xy} , G_{xz} e G_{yz} são os módulos de elasticidade transversal.

4.2.1.3 Esforços solicitantes em elementos da placa da camada "a"

Considerando um elemento infinitesimal na camada "a", representado pela figura 4.2, os esforços solicitantes por unidade de comprimento (normais N , cisalhantes V , momentos M) são subdivididos em dois grupos e calculados no plano de referência, sistema global, segundo Devloo e Menezes [9]:

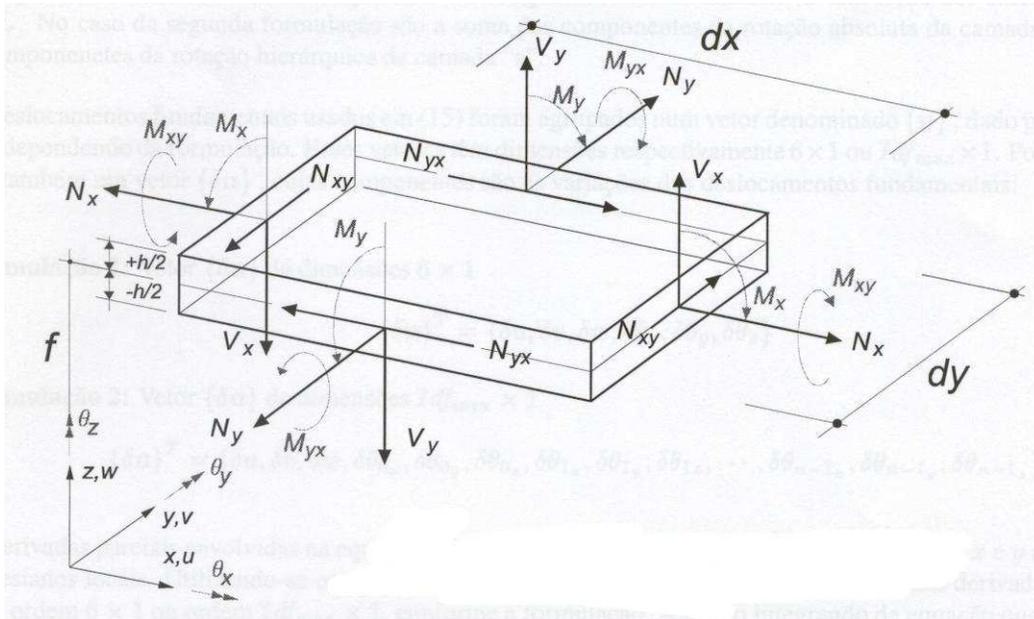


Figura 4.2: Elemento de placa monocamada

1. *esforços de membrana por unidade de comprimento*: Resultam da integração das tensões normais $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ao longo da espessura h da camada, e têm este nome porque são distribuídas uniformemente ao longo da meia altura da camada (superfície média), podendo ser de 2 tipos: *normais* às faces do elemento N_x, N_y segundo as direções x e y; *tangente* às faces do elemento N_{xy} :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (4.25)$$

2. *esforços associados à flexão por unidade de comprimento*:

- **forças de cisalhamento por unidade de comprimento**: são obtidas a partir das tensões de cisalhamento (τ_{xy}, τ_{yz}) que agem ao longo da espessura h sendo também chamadas de força cortante por unidade de comprimento:

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{xz} dz \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{yz} dz \quad (4.26)$$

onde k é um coeficiente adotado para corrigir as diferenças entre a atual distribuição de tensão devido à força cortante e a da teoria da elasticidade; seu valor é igual a $\frac{5}{6}$.

- **momentos** : os momentos de flexão M_x, M_y e o momento torçor M_{xy} correspondem às integrações das tensões normais σ_x, σ_y e das tensões de cisalhamento τ_{xy} que atuam na camada " α ", multiplicadas pela distância do ponto de integração ao plano de referência, onde esta distância corresponde a $(z + f)$. Fisicamente, as grandezas M_x, M_y, M_{xy} são os momentos que surgem ao se transladar as tensões normais até o plano de referência.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\sigma_x dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\sigma_y dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\tau_{xy} dz \quad (4.27)$$

Quando o elemento discretizado for uma casca, há um momento adicional fictício $M_{\theta z} = Sh\varepsilon_{\theta z}$, associado à deformação $\varepsilon_{\theta z}$ (também fictícia), que corresponde à rotação absoluta θ_z da camada " α ".

4.2.1.4 Aplicação do princípio do PTV

Para um corpo em equilíbrio, o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas para qualquer deslocamento imposto (desde que satisfaça a vinculação), ou seja

$$W_{int} = W_{ext} \quad (4.28)$$

O trabalho virtual interno é dado pela integral (no volume da placa) do somatório das parcelas correspondentes à multiplicação da ação (solicitação) pelo deslocamento virtual imposto. Utiliza-se deste modo o campo de deslocamentos 4.21 admitido inicialmente, e o campo de deslocamentos fictícios (virtuais), simbolizado por δ

$$\{\delta u\}^T = \{\delta u, \delta v, \delta w, \delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z\} \quad (4.29)$$

onde o símbolo δ utilizado na equação 4.34 simboliza apenas uma variação fictícia de modo que os deslocamentos δu , δv e δw , também chamados de virtuais são imaginariamente aplicados à estrutura, de modo a não alterar a aplicação das cargas nem a configuração e restrições geométricas do sólido analisado. A sua formulação é a mesma adotada para os deslocamentos u, v, w obtidos da cinemática adotada para a placa 4.20. As deformações a que o sólido está sujeito corresponde às derivadas dos deslocamentos na mesma direção, ou seja

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} (z + f) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} (z + f) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \theta_z(x,y) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \bar{u}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}(x,y,z)}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial \bar{u}(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial \bar{v}(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial \bar{u}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}(x,y,z)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aplicando-se as equações constitutivas para um material isotrópico, num estado plano de tensões, as equações das tensões encontradas e implementadas por Devloo e Menezes são

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_x(\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{(1 - \nu_x \nu_y)} \\
\sigma_y &= \frac{E_y(\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{(1 - \nu_x \nu_y)} \\
\sigma_z &= 0 \\
\tau_{xy} &= G_{xy} \varepsilon_{xy} \\
\tau_{xz} &= G_{xz} \varepsilon_{xz} \\
\tau_{yz} &= G_{yz} \varepsilon_{yz}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

As ações aplicadas na placa correspondem à integral das tensões correspondentes, como mostram as equações 4.25, 4.26, 4.27, e que a expressão dos deslocamentos virtuais é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}u(x, y, z) &= \delta u(x_r, y_r) + (f + z)\delta\theta_y \\
\bar{\delta}v(x, y, z) &= \delta v(x_r, y_r) - (f + z)\delta\theta_x \\
\bar{\delta}w(x, y, z) &= \delta w(x_r, y_r)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Os vetores de deslocamentos e das variações dos deslocamentos são deste modo, compostos por 3 deslocamentos e 3 rotações

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \{u(x, y), v(x, y), w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y), \theta_z(x, y)\} \\
\{\delta u\} &= \{\delta u(x, y), \delta v(x, y), \delta w(x, y), \delta\theta_x(x, y), \delta\theta_y(x, y), \delta\theta_z(x, y)\}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

O trabalho interno pode ser calculado através dos esforços solicitantes e das variações dos deslocamentos essenciais em relação ao plano de referência. Inclui-se nesta parcela o deslocamento vertical w na direção z , e suas variações. Portanto, a parcela referente ao trabalho virtual interno pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
W_{int} &= \int \left[N_x \frac{\partial \delta u(x, y, -f)}{\partial x} + \right. \\
&\quad N_y \frac{\partial \delta v(x, y, -f)}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u(x, y, -f)}{\partial y} + \frac{\partial \delta v(x, y, -f)}{\partial x} \right) + \\
&\quad + V_x \left(\frac{\partial \delta u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \delta w(x, y, z)}{\partial x} \right) + V_y \left(\frac{\partial \delta v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \delta w(x, y, z)}{\partial y} \right) + \\
&\quad + M_x \frac{\partial \delta \theta_y(x_r, y_r)}{\partial x} - M_y \frac{\partial \delta \theta_x(x_r, y_r)}{\partial x} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_y(x_r, y_r)}{\partial y} - \frac{\partial \delta \theta_x(x_r, y_r)}{\partial x} \right) + \\
&\quad \left. + M_{\theta_z} \left(\delta \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial \delta u(x, y, -f)}{\partial y} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Os deslocamentos u, v, w são os indicados na equação 4.1. Utilizam-se as componentes da rotação absoluta da placa em torno dos eixos de referência x_r, y_r, z_r . Os deslocamentos fundamentais usados em 4.4 foram agrupados em

um vetor u dado pela expressão 4.26. Adotou-se também um vetor δu cujas componentes são as variações dos deslocamentos fundamentais, expresso por 4.86 .

No PTV , as variáveis parciais envolvidas estão associadas aos eixos locais, e utilizando-se os operadores lineares $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, pode-se agrupar estas variáveis em quatro novos vetores de ordem [6x1]. Com isto, o integrando da equação 4.34 pode ser agrupado matricialmente a partir dos seguintes vetores:

- Vetor dos deslocamentos $\{u\}$
- Vetor das variações dos deslocamentos $\{\delta u\}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a x : $\frac{\partial\{u\}}{\partial x}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a y : $\frac{\partial\{u\}}{\partial y}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a x : $\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial x}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a y : $\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial y}$

Com esta separação, utilizou-se o programa **Mathematica** pode-se resolver analiticamente o integrando da expressão 4.34 e agrupá-lo em nove matrizes discretizadas acima, denominadas de **Matrizes de Contribuição**.

Derivando a equação do PTV 4.34 duas vezes, em relação às componentes dos vetores acima 4.33 obtêm-se as expressões das matrizes K_{xx} , K_{xy} , etc, que correspondem às matrizes de contribuição de modo que a formulação do PTV pode ser reescrita na forma abaixo

$$\begin{aligned}
 W_{int} = \int_A & \left[\left(\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial x} \right)^T K_{xx} \frac{\partial\{u\}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial y} \right)^T K_{yy} \frac{\partial\{u\}}{\partial y} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial x} \right)^T K_{xy} \frac{\partial\{u\}}{\partial y} + \right. \\
 & + \left(\frac{\partial\{\delta u\}}{\partial y} \right)^T K_{yx} \frac{\partial\{u\}}{\partial x} + \{\delta u\}^T B_{0x} \frac{\partial\{u\}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial x} \right)^T B_{x0} \{u\} + \{\delta u\}^T B_{0y} \frac{\partial\{u\}}{\partial y} + \\
 & \left. + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial y} \right)^T B_{y0} \{u\} + \{\delta u\}^T B_{00} \{u\} \right] dx dy
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

onde as matrizes de contribuição, calculadas com o uso do programa **Mathematica**, de ordem 6x6 são dadas por

$$K_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{hE_x}{\mu} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_x f Ah}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}h(2G_{xy}) & 0 & -\frac{1}{2}fAG_{xy}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xz}hk}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}fAG_{xy}h & 0 & \frac{1}{24}G_{xy}(12fA^2h + h^3) & 0 & 0 \\ \frac{E_x f Ah}{\mu} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_x \left(fA^2h + \frac{h^3}{12} \right)}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$K_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}h(2G_{xy}) & 0 & 0 & 0 & \frac{fAG_{xy}h}{2} & 0 \\ 0 & \frac{E_y h}{\mu} & 0 & -\frac{E_y f Ah}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{yz}hk}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_y f Ah}{\mu} & 0 & \frac{E_y h(12fA^2 + h^2)}{12 - 12\nu_x \nu_y} & 0 & 0 \\ \frac{fAG_{xy}hh}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24}G_{xy}(12fA^2h + h^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x h \nu_y}{\mu} & 0 & -\frac{E_x f Ah \nu_y}{\mu} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}h(2G_{xy}) & 0 & 0 & 0 & \frac{fAG_{xy}h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}fAG_{xy}h & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24}G_{xy}(12fA^2h + h^3) & 0 \\ 0 & \frac{E_x f Ah \nu_y}{\mu} & 0 & -\frac{E_x h(12fA^2 + h^2)\nu_y}{12\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$K_{yx} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}h(2G_{xy}) & 0 & -\frac{1}{2}fAG_{xy}h & 0 & 0 \\ \frac{E_y h v_x}{\mu} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_y f A h v_x}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_y f A h v_x}{\mu} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_y h(12fA^2+h^2)v_y}{12\mu} & 0 \\ 0 & \frac{fAG_{xy}h}{2} & 0 & -\frac{1}{24}G_{xy}(12fA^2h+h^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$B_{0x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xz}hK}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$B_{x0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{xz}hK}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$B_{0y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{yz}hk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$B_{y0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{yz}hk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$B_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_{yz}hK}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{xz}hK}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Placa numa posição qualquer no espaço e fibras orientadas na direção do eixo e_1

Nesta formulação, o elemento de placa é colocado numa posição qualquer do espaço, adotando-se uma superfície de referência paralela ao plano do elemento, cuja distância até o plano médio da camada é f_a .

São definidos, do mesmo modo que para o caso anterior, dois vetores e_1, e_2 , no plano médio da placa, orientados segundo as direções de ortotropia do material, onde e_1 tem a mesma orientação das fibras, enquanto que e_2 lhe é perpendicular. O produto vetorial destes dois vetores define um terceiro vetor e_3 , normal à superfície da placa. São definidos ainda, no plano de referência, os vetores n_1, n_2, n_3 , cujas direções são paralelas às dos vetores determinados no plano médio da camada " α " (citados acima). A figura 4.3 ilustra esta situação.

São definidos desta forma, três sistemas de coordenadas sendo o primeiro determinado por $Ox_r y_r z_r$ definido, com o eixo z_r vertical com sentido para cima denominado *SRG*, instalado no plano de referência. Outro sistema é dado por $On_1 n_2 n_3$ denominado *SRN*, definido na superfície de referência, com o vetor n_3 paralelo e de mesmo sentido que o vetor e_3 . O terceiro sistema de coordenadas é determinado pelo sistema $Oe_1 e_2 e_3$ denominado sistema *SRE*, definido no plano médio da camada " α ".

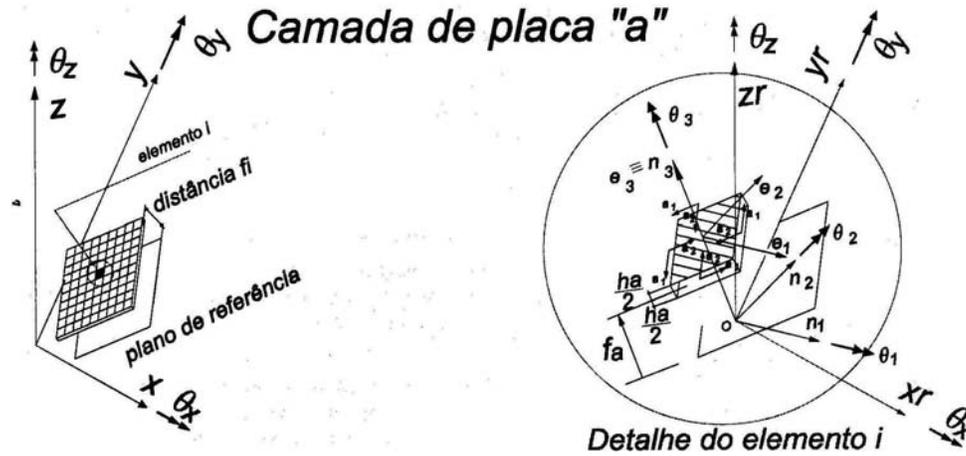


Figura 4.3: Placa com eixos rotacionados em relação aos eixos do sistema global

Pode-se citar ainda a definição de três vetores a_1, a_2, a_3 que são utilizados no elemento finito de placa, onde a_1 é definido em cada ponto de integração do elemento na direção do lado do elemento finito que contém esse ponto. A direção deste vetor a_1 é definida pela "lista de incidência" do elemento. O vetor a_2 tem orientação destrógira em relação a a_1 e lhe é perpendicular. Os dois vetores a_1 e a_2 formam uma superfície paralela à superfície de referência e o produto vetorial entre eles define o vetor a_3 , que tem mesma direção que n_3 . A representação em relação ao sistema SRG dos vetores a_1, a_2, a_3 e n_1, n_2, n_3 é dada por:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (a_{00}, a_{01}, a_{02}) & n_1 &= (n_{00}, n_{01}, n_{02}) \\
 a_2 &= (a_{10}, a_{11}, a_{12}) & n_2 &= (n_{10}, n_{11}, n_{12}) \\
 a_3 &= (a_{20}, a_{21}, a_{22}) & n_3 &= (n_{20}, n_{21}, n_{22})
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

4.2.1.5 Matriz de rotação

Um vetor t qualquer pode ser representado por suas componentes (t_x, t_y, t_z) em relação ao sistema de coordenadas globais ou por componentes (t_{n1}, t_{n2}, t_{n3}) em relação ao sistema de coordenadas SRN . Pode-se definir uma matriz de rotação $[r]$, de ordem 3×3 , que permite escrever as componentes (t_{n1}, t_{n2}, t_{n3}) em função das componentes (t_x, t_y, t_z) . Os coeficientes desta matriz de ro-

tação são os cossenos diretores dos ângulos entre os vetores n_1, n_2, n_3 e os versores unitários que representam o *SRG*.

$$\begin{Bmatrix} t_{n_1} \\ t_{n_2} \\ t_{n_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{00} & n_{01} & n_{02} \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} \\ n_{20} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = [r] \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = [r]^T \begin{Bmatrix} t_{n_1} \\ t_{n_2} \\ t_{n_3} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

Através desta matriz de rotação, os dados referentes à lâmina expressos por exemplo, num sistema de coordenadas locais com os eixos situados de acordo com a disposição das fibras contidas na mesma, podem ser representados num sistema de coordenadas global e vice-versa. Tal transformação é necessária devido a variação na distribuição das fibras verificadas ao longo das várias camadas do laminado.

4.2.1.6 Cinemática para camada " α " de posição qualquer, com fibras na direção e_1

O estudo da cinemática, neste caso de placa numa posição qualquer do espaço, é similar ao caso anterior, sendo porém que o deslocamento do ponto P deve ser expresso nos dois sistemas de coordenadas.

O ponto P genérico da camada " α " passa para uma posição P' num movimento de translação expresso em coordenadas do *SRE*, de um modo semelhante ao estudado para o caso de placa paralela ao plano horizontal. O ponto O , origem do sistema *SRN* translada para uma nova posição O' que pode ser expressa tanto no sistema *SRN* quanto no sistema *SRG*. No sistema *SRN*, a translação é representada por:

$$\begin{aligned} u_n &= u_n(n_1, n_2) \\ v_n &= v_n(n_1, n_2) \\ w_n &= w_n(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

já no sistema global são escritas como:

$$\begin{aligned} u &= u(x_r, y_r, z_r) \\ v &= v(x_r, y_r, z_r) \\ w &= w(x_r, y_r, z_r) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Considera-se como constante a rotação ao longo das camadas do composto laminado, podendo utilizar a figura 4.3 para o entendimento. No sistema *SRN* as rotações são representadas por:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_1(n_1, n_2) \\ \theta_2 &= \theta_2(n_1, n_2) \\ \theta_3 &= \theta_3(n_1, n_2)\end{aligned}\tag{4.50}$$

já no sistema *SRG* a rotação é dada por:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \theta_x(x_r, y_r, z_r) \\ \theta_y &= \theta_y(x_r, y_r, z_r) \\ \theta_z &= \theta_z(x_r, y_r, z_r)\end{aligned}\tag{4.51}$$

Para a formulação das grandezas de deslocamento fundamentais define-se o vetor $\{u\}$ de dimensão $[6 \times 1]$ cujas componentes são as três translações do ponto O e as três componentes de rotação representadas no sistema *SRN* que se relaciona com o vetor $\{u\}$ (definido em 4.33), cujas componentes estão no sistema *SRG*. Utiliza-se a matriz de rotação $[r]$ dada em 4.46:

$$\begin{aligned}\{u_n\}^T &= \{u_n, v_n, w_n, \theta_1, \theta_2, \theta_3\} \\ \{u\} &= \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}\end{aligned}\tag{4.52}$$

Cada um destes vetores é composto por três componentes de translação e três componentes de rotação, obtidas nos respectivos sistemas de referência. Pode-se também obter uma relação entre estes vetores por meio da matriz de rotação $[r]$ sendo dada por:

$$\{u_n\}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [r]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [r]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \{u\}_{6 \times 1}\tag{4.53}$$

$$\{u\}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [r]_{3 \times 3}^T & 0 \\ 0 & [r]_{3 \times 3}^T \end{bmatrix} \{u_n\}_{6 \times 1}\tag{4.54}$$

O movimento de translação do ponto P no sistema *SRE* pode ser escrito a partir da translação OO' e da rotação absoluta do elemento finito

$$\begin{aligned}u_e(e_1, e_2, e_3) &= u_n(n_1, n_2) + (f + e_3)\theta_2 \\ v_e(e_1, e_2, e_3) &= v_n(n_1, n_2) - (f + e_3)\theta_1 \\ w_e(e_1, e_2, e_3) &= w_n(n_1, n_2)\end{aligned}\tag{4.55}$$

4.2.1.7 Deformações num ponto P da camada " α ", disposta numa posição qualquer do espaço

O ponto P da lâmina tem suas deformações calculadas em função da translação do ponto P expressa no SRE , e da rotação absoluta da camada a de referência. As componentes de rotação devem ser expressas no sistema SRN . Pode-se estender esta formulação para a análise de cascas à medida em que for considerada a rotação absoluta θ_3 (a qual corresponde uma deformação fictícia ε_{θ_3} , calculada no plano de referência de abscissa " f " em relação ao eixo local e_3) em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento. Admite-se que esta deformação fictícia associa uma medida de deformação à diferença entre θ_3 e o movimento de corpo rígido correspondente à rotação infinitesimal do plano de referência em torno do eixo z , dada por:

$$\left(\frac{\partial v_n(n_1, n_2)}{\partial n_1} - \frac{\partial u_n(n_1, n_2)}{\partial n_2} \right) = \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_1} - \frac{\partial u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_2} \right) \quad (4.56)$$

As deformações na camada " α ", em um ponto P são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \\ \varepsilon_{\theta_3} &= \theta_3(n_1, n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_1} - \frac{\partial u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_2} \right) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} + \frac{\partial w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} + \frac{\partial w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \right) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} + \frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.2.1.8 Tensões

As direções de ortotropia são dadas neste caso, nas direções dos eixos e_1, e_2, e_3 , os parâmetros elásticos são relacionados a estes eixos (e não mais à x, y como no caso anterior). Deste modo, têm-se os parâmetros $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_{12}, G_{23}$ admitindo ainda que a formulação segue o estado plano de tensões, com a

tensão normal nula na direção do eixo 3.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_1(\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2)}{1 - \nu_1\nu_2} \\ \frac{E_2(\varepsilon_2 + \nu_1\varepsilon_1)}{1 - \nu_1\nu_2} \\ 0 \\ G_{13}\varepsilon_{13} \\ G_{23}\varepsilon_{23} \\ G_{12}\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

4.2.1.9 Esforços solicitantes num ponto P da camada "α", disposta numa posição qualquer, com fibras na direção do eixo e_1

Do mesmo modo que na seção anterior, os esforços são calculados por unidade de comprimento em relação aos eixos de referência *SRE*, sendo semelhantes as equações dadas por 4.25, 4.26, 4.27.

Esforços de membrana por unidade de comprimento : são as integrações das tensões $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 de_3 \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 de_3 \quad N_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} de_3 \quad (4.59)$$

Esforços por unidade de comprimento associado à flexão

$$V_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{13} de_3 \quad V_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{23} de_3 \quad (4.60)$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\sigma_1 de_3 \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\sigma_2 de_3 \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\tau_{12} de_3 \quad (4.61)$$

sendo a constante de cisalhamento $k = \frac{5}{6}$ para todas as camadas, segundo Devloo e Menezes [9].

4.2.1.10 Aplicação do princípio do PTV

Para um corpo em equilíbrio o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas para qualquer deslocamento imposto (desde que satisfaça a vinculação), ou seja:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (4.62)$$

O trabalho interno pode ser calculado através dos esforços solicitantes e das variações dos deslocamentos essenciais em relação ao plano de referência. Os esforços foram calculados com base no sistema SRE de camada "α" sendo transferidos para a superfície de referência, pois deste modo, os deslocamentos correspondentes devem ser os calculados nesta superfície. Portanto, a parcela referente ao trabalho virtual interno, pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
W_{int} = \int & \left[N_1 \frac{\partial \delta e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} + \right. \\
& N_2 \frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} + N_{12} \left(\frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} + \frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} \right) + \\
& + V_1 \left(\frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_3} + \frac{\partial \delta w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_1} \right) + V_2 \left(\frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_3} + \frac{\partial \delta w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_2} \right) + \\
& + M_1 \frac{\partial \delta \theta_2(n_1, n_2)}{\partial n_1} - M_2 \frac{\partial \delta \theta_1(n_1, n_2)}{\partial n_2} + M_{12} \left(\frac{\partial \delta \theta_2(n_1, n_2)}{\partial n_2} - \frac{\partial \delta \theta_1(n_1, n_2)}{\partial n_1} \right) + \\
& \left. + M_{\theta 3} \left(\delta \theta_3(n_1, n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} - \frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} \right) \right) \right] dn_1 dn_2 \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Os deslocamentos e as variações desses deslocamentos estão expressos em função da direção dos eixos $n_1, n_2, e n_3$ assim como as derivadas de deslocamentos e variações. Pode-se (do mesmo modo que no item anterior) agrupar estas grandezas em 6 vetores:

- Vetor dos deslocamentos $\{u_n\}$
- Vetor das variações dos deslocamentos $\{\delta u_n\}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a n_1 : $\frac{\partial \{u_n\}}{\partial n_1}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a n_2 : $\frac{\partial \{u_n\}}{\partial n_2}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a n_1 : $\frac{\partial \{\delta u_n\}}{\partial n_1}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a n_2 : $\frac{\partial \{\delta u_n\}}{\partial n_2}$

Na implementação computacional, os deslocamentos foram escritos em coordenadas globais, enquanto que as derivadas destes deslocamentos foram escritas nas direções a_1 e a_2 associadas ao lado do elemento que contém o nó do elemento finito. Para trocar os sistemas de referências, utilizam-se as matrizes de rotação $[R]$ definidas em 4.46, 4.47. Aplicando esta simplificação,

tem-se a expressão:

$$\begin{aligned}
W_{int} = \int_A & \left[\left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_1} \right) K_{11} \frac{\partial\{u\}}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_2} \right) K_{22} \frac{\partial\{u\}}{\partial a_2} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_1} \right) K_{12} \frac{\partial\{u\}}{\partial a_2} + \right. \\
& + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_2} \right) K_{21} \frac{\partial\{u\}}{\partial a_1} + \{\delta u\}^T B_{01} \frac{\partial}{\partial a_1} + \{\delta u\}^T B_{02} \frac{\partial\{u\}}{\partial a_2} + \\
& \left. + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_1} \right)^T B_{10} \{u\} + \left(\frac{\partial\{\delta u\}^T}{\partial a_2} \right)^T K_{20} \{u\} + \{\delta u\}^T B_{000} \{u\} \right] da_1 da_2
\end{aligned} \tag{4.64}$$

O mesmo processo de implementação computacional da formulação usada para placas paralelas ao plano horizontal foi utilizado, aplicando também nove matrizes de contribuição K_{ij} ($i = 1, 2$ e $j = 1, 2$) e B_{0j} ($j = 1, 2$), B_{j0} ($j = 1, 2$) e B_{000} ., calculadas a partir das nove matrizes de contribuição utilizadas no caso anterior. As matrizes são:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= [r]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \right) [r] \\
K_{22} &= [r]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \right) [r] \\
K_{12} &= [r]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \right) [r] \\
K_{21} &= [r]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \right) [r] \\
B_{01} &= [r]^T \left(B_{0x} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + B_{0y} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \right) [r] \\
B_{10} &= [r]^T \left(B_{x0} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + B_{y0} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \right) [r] \\
B_{02} &= [r]^T \left(B_{0x} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + B_{0y} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \right) [r] \\
B_{20} &= [r]^T \left(B_{x0} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + B_{y0} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \right) [r] \\
B_{000} &= [r]^T (B_{00}) [r]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

4.2.2 Formulação 2

Aqui, admite-se que cada camada da placa multicamada tem uma rotação independente, sendo que a rotação absoluta de cada uma é usada como rotação de referência, e as demais rotações das demais camadas são relativas a esta rotação como ilustra a figura 4.4.

Como em Devloo e Menezes [9] aqui também é usado o conceito de coordenadas hierárquicas na determinação das variáveis de deslocamentos. Considerando a figura acima, com a deformação da placa, a camada de referência tem as 3 rotações absolutas dadas por $\theta_{rx} = \theta_{rx}(x_r, y_r)$ em torno do eixo x_r , $\theta_{ry} = \theta_{ry}(x_r, y_r)$ em torno do eixo y_r , $\theta_{rz} = \theta_{rz}(x_r, y_r)$ em torno do eixo z_r , que servem de "base" para o cálculo das demais rotações hierárquicas

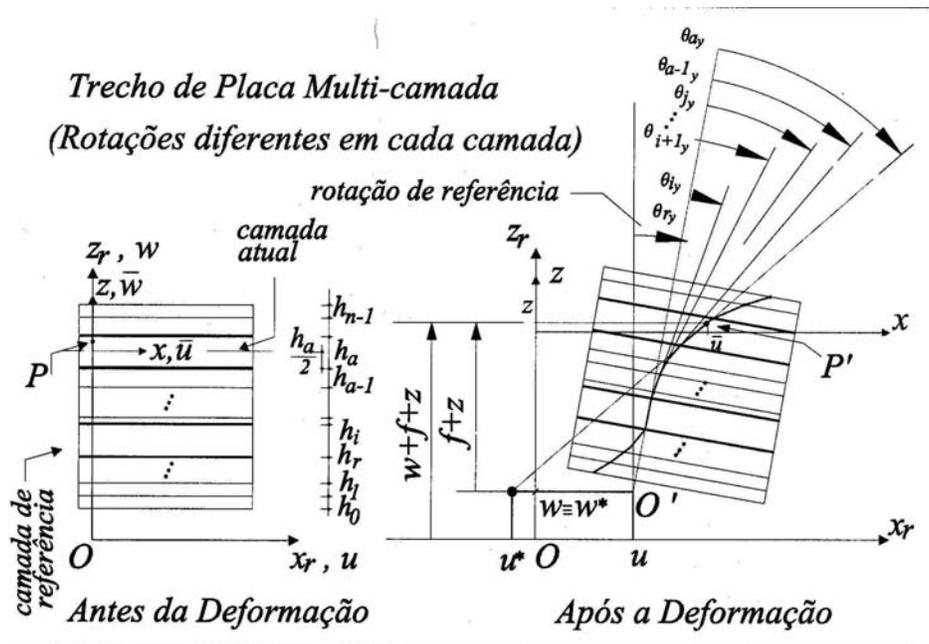


Figura 4.4: Placa multicamada com rotações independentes

das demais camadas, simbolizadas por $\theta_{\alpha x} = \theta_{\alpha x}(x_r, y_r)$, $\theta_{\alpha y} = \theta_{\alpha y}(x_r, y_r)$, $\theta_{\alpha z} = \theta_{\alpha z}(x_r, y_r)$, onde o índice α se refere à posição α da camada. Devido à independência de rotação de cada camada, as componentes da posição de um ponto genérico P (pertencente à uma camada genérica " α "), são determinadas a partir dos itens

1. translação do ponto O (origem do sistema), para a posição final O' , expressas usando o sistema de coordenadas Global
2. componentes de rotação absoluta da camada de referência $\theta_{rx}, \theta_{ry}, \theta_{rz}$
3. das componentes de rotação da camada considerada (no caso, a camada " α ") $\theta_{\alpha x}, \theta_{\alpha y}, \theta_{\alpha z}$
4. componentes de rotação hierárquicas das camadas intermediárias

para um melhor entendimento, ver figura 4.4.

4.2.2.1 Cinemática para placa " α " paralela ao plano horizontal e fibras na direção do eixo x

Desta forma, a cinemática do ponto P , localizado numa camada " α ", é dada por:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(x_r, y_r) + (f + z)\theta_{ry} + h_i\theta_{iy} + h_{i+1}\theta_{i+1y} + \\
 &\quad + \dots + h_{\alpha-1}\theta_{\alpha-1y} + \left(\frac{h_\alpha}{2} + z\right)\theta_{\alpha y} \\
 v(x, y, z) &= v(x_r, y_r) - (f + z)\theta_{rx} - h_i\theta_{ix} - h_{i+1}\theta_{i+1x} - \\
 &\quad - \dots - h_{\alpha-1}\theta_{\alpha-1x} - \left(\frac{h_\alpha}{2} + z\right)\theta_{\alpha x} \\
 w(x, y, z) &= w(x_r, y_r)
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Usando o conceito vetorial, podemos escrever os deslocamentos independentes do ponto P da seguinte forma:

$$\{u\}^T = \{u, v, w, \theta_{0x}, \theta_{0y}, \theta_{0z}, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}, \dots, \theta_{n-1x}, \theta_{n-1y}, \theta_{n-1z}\} \tag{4.67}$$

para uma placa com n camadas. Para associar esta formulação, com a formulação anterior (onde todas as camadas têm a mesma rotação), é necessário associar o deslocamento do ponto genérico P à rotação absoluta do mesmo. Definimos, então, o vetor $\{u^*\}$ de dimensão $[6 \times 1]$, com as componentes de

translação medidas no sistema global e as 3 componentes de rotação absoluta da camada "α" expressas também no sistema global:

$$\{u^*\}^T = \{u^*, v^*, w^*, \theta_{\alpha x}^*, \theta_{\alpha y}^*, \theta_{\alpha z}^*\} \quad (4.68)$$

onde $\theta_{\alpha x}^* = \theta_{rx} + \theta_{\alpha x}$, $\theta_{\alpha y}^* = \theta_{ry} + \theta_{\alpha y}$, $\theta_{\alpha z}^* = \theta_{rz} + \theta_{\alpha z}$ são as rotações absolutas da camada "α". Pode-se determinar uma relação entre os dois vetores $\{u^*\}$ de ordem $[6 \times 1]$, e o vetor $\{u\}$ de ordem $(Idf_{max} \times 1)$ a partir da matriz de incidência cinemática $[T]$:

$$\{u^*\} = [T] \{u\} \quad (4.69)$$

onde Idf_{max} corresponde ao número máximo de camadas.

a ordem da matriz cinemática é de $(Idf_{max} \times 6)$.

4.2.2.2 Cinemática para camada "α" numa posição qualquer e fibras na direção de um eixo e_1

Para a cinemática da camada "α" numa posição qualquer do espaço pode-se usar a figura 4.4, pois o comportamento é similar ao caso anterior. Tanto as componentes da rotação absoluta da camada de referência quanto às da rotação hierárquicas das demais camadas podem ser expressas no sistema SRN (com componentes $\theta_{\alpha 1}(n_1, n_2)$, $\theta_{\alpha 2}(n_1, n_2)$, $\theta_{\alpha 3}(n_1, n_2)$) e também no sistema SRG (com componentes $\theta_{\alpha x}(n_1, n_2)$, $\theta_{\alpha y}(n_1, n_2)$, $\theta_{\alpha z}(n_1, n_2)$).

São definidos dois vetores :

1. $\{u_n\}$ de dimensão $(Idf_{max} \times 1)$, cujas componentes são as translações do ponto O e as 3 rotações de cada camada representadas no sistema SRN
2. $\{u\}$ de dimensão $(Idf_{max} \times 1)$, com as mesmas grandezas contidas no vetor anterior, porém, expressas no sistema SRG.

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u, v, w, \theta_{0x}, \theta_{0y}, \theta_{0z}, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}, \dots, \theta_{n-1x}, \theta_{n-1y}, \theta_{n-1z}\} \\ \{u_n\}^T &= \{u, v, w, \theta_{0x}, \theta_{0y}, \theta_{0z}, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}, \\ &\quad \dots, \theta_{n-1x}, \theta_{n-1y}, \theta_{n-1z}\} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Para relacionarmos estas duas matrizes usamos a matriz de rotação $[r]$ determinada em 4.46, 4.47 porém, agora são usadas como submatrizes, formando macroelementos da diagonal principal de uma matriz $[R]$ da seguinte forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & & & & & \\ & [r] & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & [r] & \\ & & & & & [r] \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

onde as matrizes de rotação simbolizadas por $[r]$ são da ordem $[3 \times 3]$, e os demais termos da matriz $[R]$ são nulos. Utilizando esta matriz da equação 4.71, podemos relacionar os vetores de deslocamentos fundamentais nos dois sistemas SRN e SRG .

$$\{u_n\} = [R] \{u\} \quad (4.72)$$

A cinemática da placa para o caso de rotações independentes para cada camada de uma placa posicionada em qualquer posição do espaço é análoga à da equação 4.55 porém, dada no sistema SRE , devido aos vetores usados para descrever a direção das fibras serem e_1, e_2, e_3 ; são levados em conta ainda, para a descrição da cinemática, neste caso, a translação da origem do sistema (no sistema SRN), da rotação absoluta da camada de referência e das rotações hierárquicas das camadas (desde a de referência, até a camada " α " considerada).

$$\begin{aligned} u_e(e_1, e_2, e_3) &= u_n(n_1, n_2) + (f + e_3)\theta_{rn_2} + h_i\theta_{in_2} + h_{i+1}\theta_{i+1n_2} + \\ &\quad + \dots + h_{\alpha-1}\theta_{\alpha-1n_2} + \left(\frac{h_\alpha}{2} + e_3\right)\theta_{\alpha n_2} \\ v_e(e_1, e_2, e_3) &= v_n(n_1, n_2) - (f + e_3)\theta_{rn_1} - h_i\theta_{in_1} - h_{i+1}\theta_{i+1n_1} - \\ &\quad - \dots - h_{\alpha-1}\theta_{\alpha-1n_1} - \left(\frac{h_\alpha}{2} + e_3\right)\theta_{\alpha n_1} \\ w_e(e_1, e_2, e_3) &= w_n(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Na segunda formulação, admite-se que a rotação em cada camada, de uma dada seção transversal, difere das de outras camadas (o que denominou-se de rotações independentes). Os deslocamentos para uma dada seção são então, as translações $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$, as rotações absolutas $\theta_{xr}(x, y)$, $\theta_{yr}(x, y)$, $\theta_{zr}(x, y)$ (na superfície de referência), rotações relativas $\theta_{x\alpha}(x, y)$, $\theta_{y\alpha}(x, y)$, $\theta_{z\alpha}(x, y)$ (de uma camada k , medidas a partir das rotações de referência).

4.3 Teorias de Ordem Superior de Placas Laminadas Compostas

As teorias citadas no item 4.1, anteriormente, compreendem as mais simples teorias do grupo ESL, podendo descrever adequadamente o comportamento de muitos laminados. Porém, as teorias de ordem superior (onde os polinômios que descrevem o campo de deslocamentos são expandidos até o grau 3 ou superior, em relação à coordenada z) podem descrever a cinemática da placa de modo mais satisfatório, à medida em que o uso dos fatores de correção de cisalhamento podem ser desprezados e as distribuições de tensões interlaminares podem ser determinadas de modo mais apurado. Contudo, tais formulações exigem um maior custo computacional devendo por isto serem usadas somente quando necessário.

Apesar da possibilidade da expansão dos deslocamentos em polinômios de potências quaisquer, não é aconselhável adotar um grau superior à três devido à complexidade algébrica, e ao esforço computacional dispendido na sua resolução. O polinômio de grau três apresenta a vantagem que a deformação e tensão cisalhantes transversais têm variação quadrática (pois a deformação é obtida através da diferenciação dos deslocamentos) dispensando assim, a necessidade do uso de coeficientes de correção de cisalhamento, usados na teoria de primeira e de segunda ordem.

4.3.1 Teorias de Placa de Terceira Ordem

A teoria de placa de terceira ordem é baseada nas mesmas hipóteses que as teorias de placas clássica e de primeira ordem (Reissner-Mindlin), exceto que a hipótese referente à configuração retilínea e perpendicular de um elemento linear normal transversal após a deformação é relaxada através da expansão dos deslocamentos na forma de potências cúbicas (em relação à coordenada z), ou seja

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \left(\varphi_x - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - z^3 c_1 \varphi_x \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \left(\varphi_y - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - z^3 c_1 \varphi_y \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{4.74}$$

onde c_0, c_1 são parâmetros introduzidos que permitem que o campo de deslocamentos acima inclua os casos das teorias clássica de placas laminadas e de

primeira-segunda ordem como casos especiais. Assim, assumindo-se $c_0 = 1$ e $\varphi_x = \varphi_y = 0$, obtém-se a teoria clássica de placas laminadas. Considerando-se $c_0 = c_1 = 0$, obtém-se a teoria de placas de primeira e segunda ordens. Introduce-se também as rotações

$$\theta_x = \varphi_x - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \theta_y = \varphi_y - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4.75)$$

onde (u_0, v_0, w_0) e (θ_x, θ_y) têm os mesmos significados físicos que na teoria de primeira ordem, correspondendo aos deslocamentos e rotações da normal transversal no plano $z = 0$ respectivamente, ou seja

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x, y, 0) \\ v_0 &= v(x, y, 0) \\ w_0 &= w(x, y, 0) \\ \theta_x &= \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) \\ \theta_y &= \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (4.76)$$

introduzindo a equação 4.75 em 4.74 tem-se o campo de deslocamentos

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) - c_1 z^3 \left(\theta_x + c_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) - c_1 z^3 \left(\theta_y + c_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.77)$$

que descreve a cinemática da placa para o caso da teoria de terceira ordem.

4.4 Teoria de Camadas Múltiplas

Quando o objetivo principal da análise é a determinação de características globais do laminado (como as frequências fundamentais de vibração, carga crítica de flambagem, etc) pode-se utilizar frequentemente as teorias ESL (especialmente quando a espessura do laminado for muito pequena); porém, tais teorias não são convenientes em muitos casos como por exemplo, na determinação de modo adequado do campo de tensões tridimensional nas lâminas, principalmente em casos de placas espessas devendo-se utilizar uma outra teoria, que leve em consideração os efeitos da espessura.

Neste grupo de teorias as componentes do campo de deslocamentos são contínuas ao longo de toda a espessura do laminado à medida em que o próprio

campo também é considerado contínuo, porém as suas derivadas com relação à coordenada z podem ser descontínuas para vários pontos ao longo da altura. O campo de deslocamentos desta teoria pode ser subdividido em duas classes

1. Teoria de Camadas Múltiplas Parcial: usa expansões layerwise para componentes de deslocamentos coplanares, não usando porém para as componentes de deslocamentos transversais
2. Teoria de Camadas Múltiplas Completa: usa expansões layerwise para todos os três componentes de deslocamentos

No caso de camadas múltiplas parciais, há a vantagem (quando comparado com as teorias de monocamada equivalente) de se introduzir os efeitos de cisalhamento transversal da camada no campo de deslocamentos adotado. Já a teoria de camadas múltiplas completa é ainda melhor pois além dos efeitos citados para o caso anterior, inclui também os efeitos devido a normais transversais. Deste modo pode-se usar com boa precisão a teoria de camadas múltiplas para placas espessas ou medianamente espessas, pois permitem que os deslocamentos no plano variem de forma camada por camada ao longo da espessura do laminado.

Outra vantagem é que esta teoria pode representar o comportamento de zigue-zague dos deslocamentos coplanares ao longo da espessura do laminado. Tal comportamento é mais pronunciado em casos de placas espessas, onde o módulo de cisalhamento transversal varia abruptamente ao longo da espessura do laminado. Os deslocamentos baseados nas teorias de camadas múltiplas parcial (nas quais a deformação transversal normal é desprezada) produzem uma descrição da cinemática dos compostos laminados melhor quando comparada com as teorias de monocamada equivalente, pela introdução dos efeitos de cisalhamento transversal em camada discreta ao assumir o campo de deslocamentos. Porém estes modelos não são capazes de determinar de forma satisfatória as tensões interlaminares próximas à áreas de descontinuidades pois nestes casos, deve-se incluir a deformação normal transversal, pois as tensões normais transversais são muito significativas (se não dominantes) nestas regiões; outro motivo é que os modelos por camadas que desprezam a deformação normal transversal não satisfazem as condições de contorno de tração livre (traction-free) para tensões de cisalhamento transversais na borda do laminado.

Ao contrário das teorias de camadas parciais, as teorias de layerwise completa usam expansões por camada para todos os três componentes de deslocamento e desta forma inclui tanto o os efeitos de cisalhamento transversal de uma camada quanto os efeitos de normal transversal.

O campo de deslocamentos para uma camada de posição α pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u^\alpha(x, y, z) &= \sum u_j^\alpha(x, y) \phi_j^\alpha(z) \\ v^\alpha(x, y, z) &= \sum v_j^\alpha(x, y) \phi_j^\alpha(z) \\ w^\alpha(x, y, z) &= \sum w_j^\alpha(x, y) \psi_j^\alpha(z) \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde $u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha$ representam os componentes de deslocamento nas direções x, y, z respectivamente de um ponto material inicialmente localizado em (x, y, z) no laminado indeformado e $\phi_j^\alpha(z), \psi_j^\alpha(z)$ são funções contínuas com relação à coordenada z , sendo em geral distintas entre si. Tais funções são escolhidas de modo a serem contínuas, podendo ser por exemplo funções de interpolação de Lagrange unidimensional em relação à coordenada z .

4.5 Modelos Hierárquicos

A formulação proposta por Szabo apresenta uma sequência de modelos hierárquicos para laminados compostos, onde a solução exata correspondente a cada modelo em particular é vista como uma aproximação ao problema de elasticidade do corpo, constituída de uma lâmina ortotrópica. O polinômio deve ser aproximado (aumentando-se o seu grau) até que as equações de equilíbrio do problema de elasticidade sejam satisfeitas. Assume-se que o campo de deslocamentos possa ser escrito sob a forma

$$\begin{aligned} u &= \phi(\beta, y) e^{i\beta x} \\ v &= \psi(\beta, y) e^{i\beta x} \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde $\phi(\beta, y)$ e $\psi(\beta, y)$ são funções complexas da forma

$$\begin{aligned} \phi(\beta, y) &= \phi_a(\beta, y) + i\phi_b(\beta, y) \\ \psi(\beta, y) &= \psi_a(\beta, y) + i\psi_b(\beta, y) \end{aligned} \quad (4.80)$$

A solução exata de cada modelo hierárquico converge para o mesmo limite que a solução exata da elasticidade conforme a espessura da placa tenda

para zero. Isto permite que o estado plano de deformação e de tensão seja utilizado, cujas expressões podem ser obtidas derivando-se as componentes dos deslocamentos

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = i\beta\phi e^{i\beta x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \psi' e^{i\beta x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\phi' + i\beta\psi) e^{i\beta x}\end{aligned}\quad (4.81)$$

Utilizando-se material ortotrópico, as relações tensão-deformação são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= C_{66}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (4.82)$$

Substituindo as equações 4.81 4.82 nas equações de equilíbrio do corpo 4.83

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (4.83)$$

são obtidas as seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}e^{i\beta x} \{-\beta^2 C_{11}\phi + i\beta C_{12}\psi' + (C_{66}\phi')' + i\beta(C_{66}\psi)'\} &= 0 \\ e^{i\beta x} \{i\beta C_{66}\phi' - \beta^2 C_{66}\psi + (C_{22}\psi')' + i\beta(C_{12}\phi)'\} &= 0\end{aligned}\quad (4.84)$$

Aplicando expansão segundo as séries de Taylor nas equações 4.84, obtém

$$\begin{aligned}\phi(\beta, y) &= [\phi_{a0}(y) + i\phi_{b0}(y)] + \beta[\phi_{a1}(y) + i\phi_{b1}(y)] + \beta^2[\phi_{a2}(y) + i\phi_{b2}(y)] + \dots \\ \psi(\beta, y) &= [\psi_{a0}(y) + i\psi_{b0}(y)] + \beta[\psi_{a1}(y) + i\psi_{b1}(y)] + \beta^2[\psi_{a2}(y) + i\psi_{b2}(y)] + \dots\end{aligned}\quad (4.85)$$

Substituindo as equações 4.85 em 4.84 e separando as partes real e imaginária

$$\begin{aligned}(C_{66}\phi'_{a0})' + \beta[(C_{66}\phi'_{a1})' - (C_{66}\psi_{b0})' - C_{12}\psi'_{b0}] + \beta^2[(C_{66}\phi'_{a2})' - (C_{66}\psi_{b1})' \\ - C_{12}\psi'_{b1} - C_{11}\phi_{a0}] + \beta^3[(C_{66}\phi'_{a3})' - (C_{66}\psi_{b2})' - C_{12}\psi'_{b2} - C_{11}\phi_{a1}] + \dots = 0 \\ (C_{66}\phi'_{b0})' + \beta[(C_{66}\phi'_{b1})' + (C_{66}\psi_{a0})' + C_{12}\psi'_{a0}] + \beta^2[(C_{66}\phi'_{b2})' + (C_{66}\psi_{a1})' \\ + C_{12}\psi'_{a1} - C_{11}\phi_{b0}] + \beta^3[(C_{66}\phi'_{b3})' + (C_{66}\psi_{a2})' + C_{12}\psi'_{a2} - C_{11}\phi_{b1}] + \dots = 0\end{aligned}\quad (4.86)$$

correspondentes às partes real e imaginária relativas à primeira equação do conjunto de equações 4.84. De modo análogo pode ser procedido para a segunda equação , encontrando

$$\begin{aligned}
& (C_{22}\psi'_{a0})' + \beta[(C_{22}\psi'_{a1})' - (C_{22}\phi_{b0})' - C_{66}\phi'_{b0}] + \beta^2[(C_{22}\psi'_{a2})' - (C_{22}\phi_{b1})' \\
& - C_{66}\phi'_{b1} - C_{66}\psi_{a0}] + \beta^3[(C_{22}\psi'_{a3})' - (C_{22}\phi_{b2})' - C_{66}\phi'_{b2} - C_{66}\psi_{a1}] + \dots = 0 \\
& (C_{22}\psi'_{b0})' + \beta[(C_{22}\psi'_{b1})' + (C_{22}\phi_{a0})' + C_{66}\phi'_{a0}] + \beta^2[(C_{22}\psi'_{b2})' + (C_{12}\phi_{a1})' \\
& + C_{66}\phi'_{a1} - C_{66}\psi_{b0}] + \beta^3[(C_{22}\psi'_{b3})' + (C_{12}\phi_{a2})' + C_{66}\phi'_{a2} - C_{66}\psi_{b1}] + \dots = 0
\end{aligned} \tag{4.87}$$

O campo de deslocamentos pode então ser reescrito utilizando-se as equações 4.86 e 4.87 através da variação no uso de termos descritos. Para a consideração do primeiro termo somente (que não multiplica a variável β), considera-se esta variável como sendo igual a zero e determina-se os valores das funções ϕ e ψ . Para maior aproximação no resultado, podem ser levados em consideração os outros termos encontrados nas equações que são multiplicados pela variável β . Desta forma, as equações citadas são então derivadas (tantas vezes quantas forem o grau da variável β em questão) e em seguida, considera-se nulo o valor de β , e conseqüentemente, de todos os termos os quais ele multiplica. Importante dizer que as funções $\phi_{a0}(y)$ e $\phi_{b0}(y)$ são antissimétricas e $\psi_{a0}(y)$ e $\psi_{b0}(y)$ são simétricas. O campo de deslocamentos tem então a forma

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_1(x)F_0(y) + u_2(x)y + u_3(x)F_2(y) + \dots \\
v(x, y) &= v_0(x) + v_2(x)F_1(y) + v_3(x)F_3(y) + \dots
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Capítulo 5

Estudo Proposto

5.1 Introdução

O ponto de partida da teoria proposta é a existência de um estado de tensão (único) correspondente a esforços simples de uma placa ($M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}, V_x$ e V_y). Para os esforços ($M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$) procura-se um estado de tensão independente de x e y . Para o estado de tensão correspondente aos esforços V_x e V_y procura-se um estado de tensão linear em x e y respectivamente.

Para determinados esforços simples é possível calcular este estado de tensão analiticamente. Para os esforços V_x e V_y não se sabe a priori se esse estado existe.

Vale ressaltar que, contrário às teorias estudadas até então, este estudo é centrado em analisar a energia de deformação de uma placa multicamada baseado em estados de tensão. A maioria das teorias (Reissner Mindlin, Kirchhoff, Reddy, Szabo, Devloo-Menezes) tomam como ponto de partida as hipóteses cinemáticas: o deslocamento ao longo do eixo vertical é enriquecido para obter uma aproximação de melhor qualidade da deformação da placa.

Uma das principais dificuldades das teorias baseadas puramente em funções de deslocamento é a recuperação do estado de tensão após cálculo da deformação. Sabe-se que as deformações calculadas quando transformadas em estados de tensão são inconsistentes com o fenômeno físico. Para remediar este fato, acoplam-se esses cálculos com técnicas de pós processamento.

As teorias baseadas em estado de tensão deduzem um deslocamento da defor-

mação obtido da tensão calculada. Geralmente os deslocamentos calculados baseados nesses estados de tensão são descontínuos: as aproximações com elementos finitos não garantem a continuidade do estado de tensão (para placas leia-se M_x, M_y , etc) e por isso os deslocamentos integrados das deformações são descontínuos. A teoria de Reissner Mindlin é baseado em cálculo de energia para um estado plano de tensão. Por isso o deslocamento vertical é calculado baseado na integral de ε_z , onde ε_z é função de σ_x e de σ_y . Considerando que σ_x e σ_y são descontínuos, assim também é o ε_z . Conclui-se que a teoria de Reissner Mindlin é, de fato, um método baseado em espaços de funções descontínuas.

O objetivo deste trabalho restringe-se a identificar o estado de tensão correspondente aos esforços simples aplicados a uma placa multicamada. Para calcular este estado de tensão um procedimento específico será desenvolvido e descrito a seguir.

5.2 Cálculo dos esforços em uma placa

Na formulação tridimensional convencional desenvolvida neste trabalho são admitidos 3 deslocamentos, respectivamente nas direções X, Y e Z do sistema de coordenadas retangular adotado. O vetor de deslocamentos é dado por:

$$\{u\}^T = \{u, v, w\} \quad (5.1)$$

sendo que $u(x, y, z)$ é o deslocamento do ponto P na direção do eixo X , $v(x, y, z)$ é o deslocamento de P na direção Y , $w(x, y, z)$ é o deslocamento do ponto na direção Z (vertical). Nenhuma das hipóteses simplificadoras apresentadas nas formulações anteriores é introduzida tornando o método mais simples e elegante porém mais geral.

O objetivo deste texto é descrever um procedimento para calcular um estudo do estado de tensões no domínio de um material de placa ortotrópica, cujas leis constitutivas obedecem ao regime elástico-linear, e a teoria de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, quando este está submetido a um determinado tipo de carregamento (seja normal, de cisalhamento ou momento de flexão) aplicado nas bordas do elemento. Conforme descrito anteriormente as solicitações são obtidas através das formulações 4.25, 4.26, 4.27 implementadas no ambiente computacional PZ na classe TPZMulticamadaOrthotropic

¹ (método `ComputeCenterForces()`), cujo cálculo é fornecido. Integrando-se o tensor de tensões (que satisfaz às condições de equilíbrio $div\sigma = 0$) obtêm-se os esforços acima.

5.3 Estado de Tensão Assumido

O ponto de partida para o cálculo do estado de tensão, é uma fórmula analítica para o estado de tensão. Este estado satisfaz a lei de equilíbrio e é tal que os esforços calculados seguindo o procedimento descrito em seção 4.2.1.3 correspondem a tensão desejada (segundo Timoshenko)

$$\sigma^* = \begin{cases} \sigma_x &= M_x^* \frac{12}{h^3} z + N_x^* \frac{1}{h} + V_x^* x \frac{12}{h^3} z \\ \sigma_y &= M_y^* \frac{12}{h^3} z + N_y^* \frac{1}{h} + V_y^* x \frac{12}{h^3} z \\ \tau_{xz} &= V_x^* \left(-z^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \frac{6}{h^3} \\ \tau_{yz} &= V_y^* \left(-z^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \frac{6}{h^3} \\ \tau_{xy} &= N_{xy}^* \frac{1}{h} \end{cases} \quad (5.2)$$

Estas tensões estão em equilíbrio $div\sigma^* = 0$ e os esforços solicitantes correspondem aos esforços indicados. Para um material elástico com coeficiente de Poisson nulo, estes estados de tensão satisfazem também as equações de compatibilidade e são o estado de tensão final da placa. Porém, para a lei constitutiva com coeficiente de Poisson não nulo, este estado analítico não corresponde ao estado de tensões real verificado. Quando a placa é formada pela união de várias camadas (cada qual composta por um tipo de material que difere das demais, além de outros efeitos, como o de Poisson), as constantes elásticas variam de camada para camada. Deste modo, verifica-se que os deslocamentos calculados baseados no estado de tensão elástico não são compatíveis, havendo uma descontinuidade entre os deslocamentos de cada camada.

Conclui-se que o estado de tensão calculado em (5.2) somente serve de referencial: ele não correspondem ao estado real de tensão na placa multicamada.

¹Por convenção as classes se nomeiam inicialmente com as letras TPZ e as variáveis de classe com f, posteriormente cada palavra inicia-se com letra maiúscula.

5.4 Formulação de um problema elástico tridimensional

Assume-se uma placa multicamada estendendo-se no domínio

$$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$$

Este corpo não tem apoios e é submetido a uma tensão $\sigma^*.n$ nas bordas onde a tensão σ^* é calculada baseada nas equações (5.2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= 0 \quad x \in \Omega \\ \sigma.n &= \sigma^*.n \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

O tensor σ^* satisfaz as equações de equilíbrio e, por isto, o problema é bem posto. O problema é aproximado por elementos finitos tridimensionais onde a malha contém pelo menos um elemento para cada camada. O número de elementos em x e y podem variar como também a ordem de interpolação p praticada. Sabe-se que a aproximação de elementos finitos irá aproximar-se da solução analítica do problema na medida em que a malha é refinada ou o grau de polinômio aumentado.

5.5 Abordagem para cálculo de estado de tensão

O estado de tensão interno de um corpo elástico depende só fracamente da forma de aplicação de condições de contorno, desde que os esforços resultantes sejam iguais. Isto é uma consequência do princípio de Saint-Venant.

Por isto, caso um estado de tensão correspondente a um esforço simples existe, este se manifestará independente da forma de aplicação das condições de contorno. Utilizamos este fato para desenvolver o procedimento de cálculo de estado de tensão.

- Aplica-se as tensões $\sigma^*.n$ calculadas analiticamente conforme (5.2) nos contornos do domínio tridimensional
- Calculam-se os esforços simples para a linha no centro do domínio

- Constrói-se um novo problema elástico onde os esforços aplicados no contorno são aqueles calculados no centro do domínio no passo anterior. Esses esforços são corrigidos com tensores analíticos para ter como resultante os esforços desejados.
- Itera-se entre o segundo e terceiro passo até a convergência (ou seja, não haver mais mudança no estado de tensão).

Cria-se assim um processo iterativo de realimentação da condição de contorno, onde a condição de contorno inicial é trocada pelo tensor de tensões correspondente ao erro cometido e o tensor de tensões na fibra média é recalculado, esperando-se com isso que a diferença inicial diminua. O processo é repetido até o tensor de tensões calculado na fibra média se torne igual ao tensor de tensões real (ou seja, cuja integração do tensor de tensões resulte na força aplicada inicialmente). Um efeito secundário pode ser verificado durante este processo, que é o de se obter um estado de homogeneização do estado de tensões ao longo dos pontos pertencentes ao domínio da placa.

Sabendo-se que a derivada do momento corresponde ao cortante, pode-se utilizar também a sua derivada como um parâmetro na sua correção.

5.6 Procedimento computacional

5.6.1 Descrição

Inicialmente, o carregamento (ou força inicial aplicada nas bordas) é indicado no programa principal, onde se especifica quais os tipos de solicitações desejadas. A partir disto, assumindo como primeira solução nula, e depois resolve-se o sistema obtido pelo MEF (método dos elementos finitos), aplicando-se a condição de contorno inicial já citada. A seguir, é estabelecido um laço para o cálculo das solicitações que agem em todo o elemento multicamada, através de um somatório.

O tensor de tensões da placa é calculado em seguida, assim como a tensão que atua em cada camada e depois, a força atuante na placa. O valor desta força é retornado como valor de saída e utilizada no cálculo das solicitações que atuam em todo o laminado. O momento que atua na camada é calculado através do tensor de tensões. Depois deste momento calculado, é calculado o momento total que atua em todo o elemento multicamada.

A seguir, é calculada a diferença entre o valor da solicitação dada como condição de contorno inicial, e o valor da solicitação determinada através do método de elementos finitos e verificado se o valor desta diferença é igual ao valor da solicitação que atua no laminado, calculada analiticamente

5.6.2 Implementação

O carregamento (ou força inicial aplicada nas bordas) é indicado no programa principal através de especificações (`SetQx`, `SetQy`, etc), determinando assim, o tipo de solicitação desejada a ser calculada. O programa em seguida aciona o método `ComputeSolution` (da classe `TPZMulticamadaOrthotropic`), iniciando-se assim, o processo iterativo.

A primeira solução é nula, resolvendo-se então o sistema (MEF), aplicando-se a condição de contorno inicial (dada pelo tipo de solicitação especificada) implementando as funções descritas em (5.2).

O programa principal inicia-se solicitando o tipo de ação que se deseja calcular, através do método `SetQx()`, `SetQy()`, (onde cada solicitação é implementada como sendo um vetor de três posições) implementado na classe `TPZMulticamadaOrthotropic`, passa o valor especificado como parâmetro para os vetores correspondentes às solicitações, nas posições 0 e 2. Em seguida, é chamado o método `ComputeSolution` da classe `TPZMulticamadaOrthotropic`.

Deste modo assume-se a solução inicial nula, e resolve-se o sistema obtido pelo método dos elementos finitos (MEF), aplicando-se a condição de contorno inicial, citada no início do parágrafo acima. A seguir, é acessado o método `ComputeCenterForce` (da classe `TPZMulticamadaOrthotropic`), com várias atribuições. Inicialmente, este método zera todas as solicitações e as suas derivadas, na posição 1 do vetor de solicitações. A seguir, estabelece-se um laço para o cálculo das solicitações que agem em todo o elemento multicamada, através de um somatório.

Para cada cálculo, chama-se a lista `fPlacaOrth` a qual guarda elementos do tipo `TPZPlacaOrthotropic`, e nesta classe são então acessados os métodos `Force` e `Moment` (de `TPZPlacaOrthotropic`).

O método `Force` (que utiliza os parâmetros normal e direção da força), estabelece um laço através do qual é calculado o tensor de tensões da placa em questão, e também são calculadas a tensão que atua na camada (nomeada de

tension) e em seguida, a força atuante na placa (force); esta força é retornada como valor de saída e utilizada no cálculo das solicitações que atuam em todo o laminado (somando-se as forças que atuam em cada camada), através do método ComputeCenterForces.

Também é acessado o método Moment da classe TPZPlacaOrthotropic, que utiliza como parâmetros as variáveis z , a normal da face e a direção. De modo semelhante ao método Force, é acessado o método Tensor (de TPZPlacaOrthotropic) que devolve o tensor de tensões aplicado na placa e que é utilizado para o cálculo do momento que atua na camada.

Depois de calculado este momento, o programa automaticamente retorna para o método ComputeCenterForce (da classe TPZMulticamadaOrthotropic) e calcula o momento total que atua em todo o elemento multicamada. A seguir, é calculada a diferença entre o valor da solicitação dada como condição de contorno inicial (na posição de índice 0), e o valor da solicitação determinada através do método de elementos finitos (situada na posição de índice 1), e verificado se o valor desta diferença é igual ao valor da solicitação que atua no laminado, calculada analiticamente.

5.6.3 Procedimento

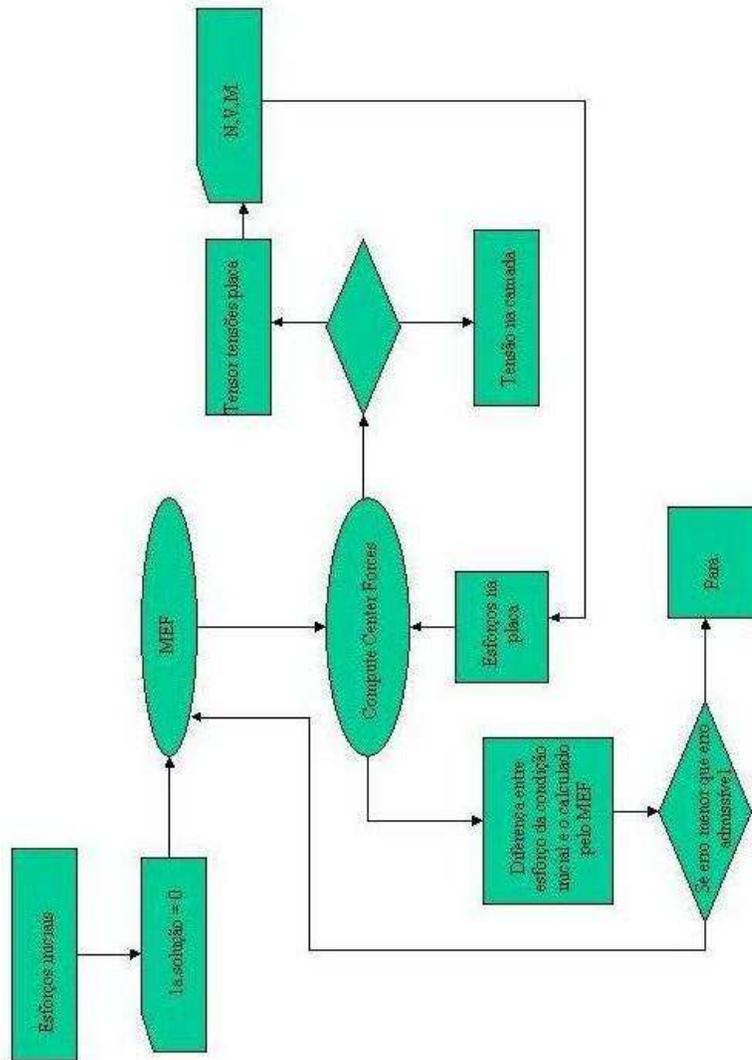


Figura 5.1: fluxograma

5.7 Formulação do material ortotrópico

Dizemos que o material é ortotrópico quando as suas propriedades materiais são as mesmas para três planos de simetria mutuamente perpendiculares entre si, caso em que o número de constantes elásticas (o número de termos independentes pertencentes à matriz C) é reduzido para 9 (levando-se em conta as equações 5.5, 5.9 e a condição de simetria de *Green* para material elástico, ou seja $C_{ijkl} = C_{klij}$).

A implementação das características do material ortotrópico, é implementada na classe `TPZMatOrthotropic`. Nesta classe, é implementado a matriz de coeficientes elásticos, dada por

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

cujos coeficientes elásticos são dados por

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x - E_x \nu_{yz} \nu_{zy}}{\Delta} & \frac{E_x \nu_{yx} + E_x \nu_{zx} \nu_{yz}}{\Delta} & \frac{E_x \nu_{zx} + E_x \nu_{yx} \nu_{zy}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_x \nu_{yx} + E_x \nu_{zx} \nu_{yz}}{\Delta} & \frac{E_y - E_y \nu_{xz} \nu_{zx}}{\Delta} & \frac{E_y \nu_{zy} + E_y \nu_{xy} \nu_{zx}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_x \nu_{zx} + E_x \nu_{yx} \nu_{zy}}{\Delta} & \frac{E_y \nu_{zy} + E_y \nu_{xy} \nu_{zx}}{\Delta} & \frac{E_z - E_z \nu_{xy} \nu_{yx}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

sendo que E_i são os coeficientes de elasticidade longitudinal, G_{ij} são os coeficientes de elasticidade transversal e ν_{ij} são os coeficientes de Poisson e $\Delta = -1 + \nu_{xy} \nu_{yx} + \nu_{xz} \nu_{zx} + \nu_{yz} \nu_{zy} + 2\nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx}$. Tais valores são implementados através das matrizes de rigidez, simbolizadas por `fKXX`, `fKYY`, `fKZZ`, `fKXY`, `fKYX`, `fKXZ`, `fKZX`, `fKZY`, `fKYZ`, calculadas no construtor da classe (método `TPZMatOrthotropic(...)`). A partir da equação constitutiva, e da matriz de coeficientes elásticos do material ortotrópico, pode-se concluir que as tensões podem ser calculadas através das equações

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-E_x[\varepsilon_x(1-\nu_{yz}\nu_{zy})+\varepsilon_y(\nu_{yx}+\nu_{yz}\nu_{zx})+\varepsilon_z(\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy})]}{-1+\nu_{xy}\nu_{yx}+\nu_{xz}\nu_{zx}+\nu_{yz}\nu_{zy}+\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}} \\ \frac{-E_y[\varepsilon_y(1-\nu_{xz}\nu_{zx})+\varepsilon_x(\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy})+\varepsilon_z(\nu_{zy}+\nu_{xy}\nu_{zx})]}{-1+\nu_{xy}\nu_{yx}+\nu_{xz}\nu_{zx}+\nu_{yz}\nu_{zy}+\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}} \\ \frac{-E_z[\varepsilon_z(1-\nu_{xy}\nu_{yx})+\varepsilon_x(\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz})+\varepsilon_y(\nu_{yz}+\nu_{xz}\nu_{yx})]}{-1+\nu_{xy}\nu_{yx}+\nu_{xz}\nu_{zx}+\nu_{yz}\nu_{zy}+\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}} \\ G_{xy}\gamma_{xy} \\ G_{yz}\gamma_{yz} \\ G_{zx}\gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

onde E_x, E_y, E_z são os módulos de Young nas direções x, y, z respectivamente, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} são os módulos de elasticidade transversal paralelos aos planos $x - y, y - z, x - z$. O termo ν_{ij} ($i, j = x, y, z$) são os coeficientes de Poisson caracterizando a taxa de deformação na direção perpendicular ao sentido de aplicação da tensão.

Da equação 9.9 somado à condição de *Green* para material elástico (que estabelece que $E_i\nu_{ji} = E_j\nu_{ij}$), conclui-se que das 12 constantes elásticas determinadas em 9.10, apenas 9 são independentes, de modo que podemos escrever as componentes de deformação como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.8 Esforços solicitantes em elementos de placa da camada " α "

Considerando um elemento infinitesimal na camada " α ", representado pela figura 4.2, os esforços solicitantes por unidade de comprimento (normais N , cisalhantes V , momentos M) são subdivididas em dois grupos e calculados (no plano de referência, no sistema global), conforme adotado por Devloo e Menezes.

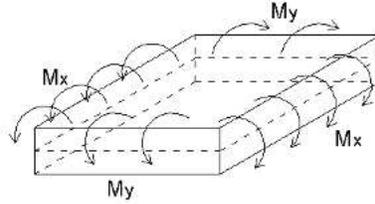


Figura 5.2: esforços sollicitantes

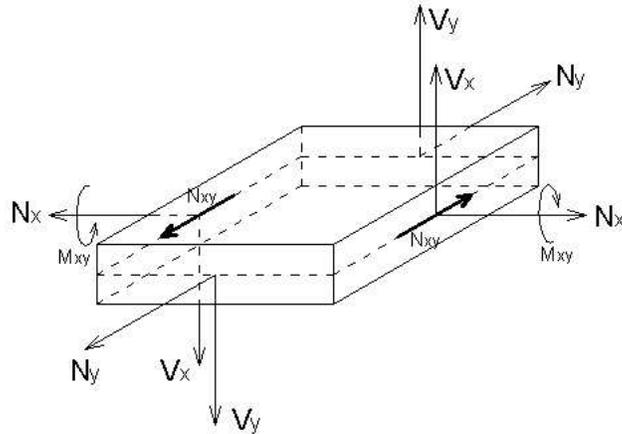


Figura 5.3: esforços sollicitantes

1. *esforços de membrana por unidade de comprimento*: Resultam da integração das tensões normais $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ao longo da espessura h da camada, e tem este nome porque são distribuídas uniformemente ao longo da meia altura da camada (superfície média), sendo de 2 tipos: *normais* às faces do elemento N_x, N_y segundo as direções x e y ; *tangente* às faces do elemento N_{xy} :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (5.7)$$

2. *esforços associados à flexão por unidade de comprimento:*

- **forças de cisalhamento por unidade de comprimento:** são obtidas a partir das tensões de cisalhamento (τ_{xy}, τ_{yz}) que agem ao longo da espessura h sendo também chamadas de força cortante por unidade de comprimento:

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{xz}dz \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{yz}dz \quad (5.8)$$

onde k é um coeficiente adotado para corrigir as diferenças entre a atual distribuição de tensão devido à força cortante e a da teoria da elasticidade.

- **momentos por unidade de comprimento :** os momentos fletores M_x, M_y e o momento torçor M_{xy} correspondem às integrações das tensões normais σ_x, σ_y e das tensões de cisalhamento τ_{xy} que atuam na camada "α", multiplicadas pela distância do ponto de integração ao plano de referência, onde esta distância corresponde à $z + f$. Fisicamente, as grandezas M_x, M_y, M_{xy} como sendo os momentos que surgem ao se transladar as tensões normais até o plano de referência.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\sigma_x dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\sigma_y dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f)\tau_{xy} dz \quad (5.9)$$

5.9 Formulação do material 3D ortotrópico

As matrizes de contribuição são obtidas através do processo do PTV 4.62. Como citado anteriormente, a formulação baseia-se em três deslocamentos

$$\{u[x, y, z], v[x, y, z], w[x, y, z]\} \quad (5.10)$$

através dos quais são obtidas as deformações

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u[x,y,z]}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v[x,y,z]}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w[x,y,z]}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u[x,y,z]}{\partial y} + \frac{\partial v[x,y,z]}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w[x,y,z]}{\partial y} + \frac{\partial v[x,y,z]}{\partial z} \right) \\
\gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial u[x,y,z]}{\partial z} + \frac{\partial w[x,y,z]}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Supondo que a placa analisada está sujeita a deslocamentos fictícios (virtuais), de modo a não desrespeitar nem a sua restrição geométrica nem as suas configuração de carregamento, pode-se simbolizar esta variação fictícia de deslocamento através do uso do símbolo δ de modo que os deslocamentos fictícios são dados por

$$\{\delta u[x, y, z], \delta v[x, y, z], \delta w[x, y, z]\} \tag{5.12}$$

obtendo-se as deformações virtuais dadas por

$$\{\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{xz}\} \tag{5.13}$$

Substituindo-se as equações 5.11 em 5.5 obtêm-se

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= - \left[\frac{E_x v_{zx} \partial w[x,y,z]}{\partial z} + \frac{E_x v_{yx} v_{zy} \partial w[x,y,z]}{\partial z} + \frac{E_x v_{yx} \partial v[x,y,z]}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{E_x v_{yz} v_{zx} \partial v[x,y,z]}{\partial y} + \frac{E_x \partial u[x,y,z]}{\partial x} - \frac{E_x v_{yz} v_{zy} \partial u[x,y,z]}{\partial x} \right] / \Delta \\
\sigma_y &= - \left[\frac{E_y v_{zy} \partial w[x,y,z]}{\partial z} + \frac{E_y v_{xy} v_{zx} \partial w[x,y,z]}{\partial z} + \frac{E_y v_{xy} \partial u[x,y,z]}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{E_y v_{xz} v_{zy} \partial u[x,y,z]}{\partial x} + \frac{E_y \partial v[x,y,z]}{\partial y} - \frac{E_y v_{xz} v_{zx} \partial v[x,y,z]}{\partial y} \right] / \Delta \\
\sigma_z &= - \left[E_z \left(\frac{v_{xz} \partial u[x,y,z]}{\partial x} + \frac{v_{xy} v_{yz} \partial u[x,y,z]}{\partial x} + \frac{v_{yz} \partial v[x,y,z]}{\partial y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{v_{xz} v_{yx} \partial v[x,y,z]}{\partial y} + \frac{\partial w[x,y,z]}{\partial z} - \frac{v_{xy} v_{yx} \partial w[x,y,z]}{\partial z} \right) \right] / \Delta \\
\tau_{xy} &= G_{xy} \left[\frac{\partial u[x,y,z]}{\partial y} + \frac{\partial v[x,y,z]}{\partial x} \right] \\
\tau_{yz} &= G_{yz} \left[\frac{\partial v[x,y,z]}{\partial z} + \frac{\partial w[x,y,z]}{\partial y} \right] \\
\tau_{zx} &= G_{zx} \left[\frac{\partial u[x,y,z]}{\partial z} + \frac{\partial w[x,y,z]}{\partial x} \right]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde o termo Δ é o mesmo da equação 5.4. Reescrevendo 4.62 com os deslocamentos adotados pela formulação

$$w_{int} = \delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \varepsilon_z \sigma_z + 2\delta \varepsilon_{xy} \tau_{xy} + 2\delta \varepsilon_{xz} \tau_{xz} + 2\delta \varepsilon_{yz} \tau_{yz} \tag{5.15}$$

derivando-se 5.15 como simbolizado abaixo

$$\frac{\partial PTV}{\partial \varpi_i \partial \varphi_j}$$

sendo

$$\varpi_i \in \{u_i, v_i, w_i\}$$

onde $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$, $u_3 = u_z$ (os sub-índices indicam que o deslocamento u está sendo derivado em relação às variáveis x , y , z respectivamente). Analogamente procede-se para v_i , w_i . O campo φ é dado por

$$\varphi_i \in \{\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i\}$$

seguindo-se o mesmo raciocínio descrito na frase acima. Combinando-se $\partial \varpi_i \partial \varphi_j$ com i, j variando independentemente de 1 a 3, tem-se as nove matrizes descritas abaixo

$$\begin{aligned}
K_{xx} &= \begin{bmatrix} \frac{-(E_x - E_x v_{yz} v_{zy})}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & G_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \\
K_{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(E_x v_{yx} + E_x v_{yz} v_{zx})}{\Delta} & 0 \\ G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K_{xz} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(E_x v_{zx} + E_x v_{yx} v_{zy})}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ G_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K_{yx} &= \begin{bmatrix} 0 & G_{xy} & 0 \\ \frac{-(E_y v_{xy} + E_y v_{xz} v_{zy})}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K_{zz} &= \begin{bmatrix} G_{zx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(E_z - E_z v_{xy} v_{yx})}{\Delta} \end{bmatrix} \\
K_{zx} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-E_z(v_{xz} + v_{xy} v_{yz})}{\Delta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K_{yz} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(E_y v_{zy} + E_y v_{xy} v_{zx})}{\Delta} \\ 0 & G_{yz} & 0 \end{bmatrix} \\
K_{yy} &= \begin{bmatrix} G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(E_y - E_y v_{xz} v_{zx})}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \\
K_{zy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{yz} \\ 0 & \frac{-E_z(v_{yz} + v_{xz} v_{yx})}{\Delta} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Capítulo 6

Classes principais do ambiente orientado

O programa desenvolvido, foi implementado num ambiente computacional denominado PZ, em desenvolvimento no laboratório de mecânica computacional (LabMec) do departamento de estruturas, na Universidade de Campinas (Unicamp), sob a supervisão do professor-doutor Philippe Remy Bernard Devloo. Utilizou-se a linguagem C++ na montagem do código e a filosofia orientado-objeto na sua estruturação.

Na filosofia Orientada a Objetos, a abordagem do problema analisado utiliza (ao contrário da filosofia procedural, tradicionalmente usada em muitos programas) estruturas abstratas contendo os dados relativos à mesma e os métodos que esta pode implementar, denominadas classes. Cada classe guarda todas as variáveis (atributos) as quais podem ser acessadas e utilizadas pela classe, bem como os métodos (as operações) que podem ser feitos com os mesmos. Como as classes são estruturas abstratas, a simples definição da mesma é insuficiente para a resolução do sistema, sendo necessário a criação dos objetos, que são entidades com mesmas características e comportamentos da classe à que pertence.

Desta forma, o programa principal basicamente compete-se em chamar as classes e uni-las de modo a solucionar o problema.

Na resolução de um problema utilizando-se o ambiente PZ, são seguidos os seguintes passos:

1. definição da malha geométrica de elementos finitos

2. definição dos nós da malha geométrica, utilizando a classe TPZgeoNode
3. definição das conectividades
4. definição dos elementos através da classe TPZGeoEl
5. construção das vizinhanças dos elementos geométricos (com o método BuildConnectivity)
6. criação do material que define a equação diferencial a ser aproximada (no caso, TPZMatOrthotropic)
7. definição dos elementos de contorno (classe TPZGeoElBC)
8. definição do valor da condição de contorno a ser aplicada
9. definição da malha computacional
10. definir ordem de interpolação associada aos elementos computacionais
11. definição do elementos computacionais baseados nos elementos geométricos (método AutoBuild)
12. definição do objeto Analysis (classe TPZAnalysis)
13. escolha do tipo de armazenamento da matriz de rigidez a ser empregada
14. escolha do solver para resolver o sistema do MEF
15. resolução do sistema gerado pelo MEF (método Run, da classe TPZAnalysis)
16. definição do pós-processamento (cálculo de tensões)
17. análise dos resultados

Todas as classes apresentadas abaixo foram utilizadas de modo direto ou indireto na obtenção da solução almejada, e o objetivo de inclui-las aqui é o de dar uma idéia geral de como o ambiente PZ esta estruturado e das finalidades das classes. Deste modo, algumas variáveis e vários métodos utilizados pelas mesmas não serão sequer mencionados visto à complexidade em que o ambiente PZ se encontra e ao desvio do nosso objetivo.

6.1 Classes

A documentação completa do código encontra-se em <http://labmec.fec.unicamp.br/~pz/doxygen>

6.2 Definição da Geometria

6.2.1 Classe TPZGeoMesh

Nesta classe são encontradas listas contendo diferentes tipos de objetos, como nós geométricos, elementos geométricos, e vários outros. Deste modo, pode-se construir perfeitamente a malha geométrica necessária para a aplicação do método dos elementos finitos e conseqüentemente, a solução do problema em questão.

Algumas variáveis da classe **TPZGeoMesh** são `fName[...]` (nome que identifica o modelo); **TPZCompMesh** `*fReference` (ponteiro que aponta para a malha computacional associada); variáveis **TPZAdmChunk** (lista de objetos cujo tipo pode variar dependendo da especificação).

6.2.2 Classe TPZGeoNode

A classe **TPZGeoNode** define nós geométricos. As variáveis utilizadas são `fId` (numero inteiro utilizado para identificar o nó), e `fCoord[3]` (um vetor cujos tres valores são as coordenadas do nó).

6.2.3 Classe TPZGeoEl

Nesta classe é definida a geometria de um elemento , onde um objeto elemento geométrico genérico contém várias informações que permitem que um elemento geométrico específico seja criado. Neste sentido cabe citar as variáveis (conferir) principais como *fId*, que é um número inteiro que associa a classe a um elemento geométrico particular; **fMesh* um ponteiro indicando a malha geométrica a que pertence; *fFather* esta variável indica quem é o elemento pai ou o elemento inicial, a partir do qual dividiu-se de modo a obter o elemento em questão.

Os elementos geométricos contém também detalhes específicos importantes para a sua implementação, como um vetor contendo os objetos associados aos seus nós (dado por **fNodeIndexes[...]**); uma lista dos elementos vizinhos para cada um de seus lados (variável **fNeighbours[...]**); uma lista de ponteiros para seus subelementos (**TPZGeoEl *fSubEl[...]**).

6.3 Espaço de Interpolação

6.3.1 Classe TPZCompMesh

Nesta classe é definida a malha computacional (associada à classe TPZGeoMesh através da variável TPZCompMesh *Reference), contendo assim como a classe TPZGeoMesh, listas de objetos, desta vez, objetos computacionais, como conectividades, elementos, bem como algumas variáveis como **TPZGeoMesh *fReference()** (variável ponteiro que aponta para a malha geométrica); **TPZBlock fSolutionBlock** (guarda a solução em blocos); **TPZFMatrix fSolution** (vetor com a solução obtida através do método de elementos finitos); **TPZBlock fBlock** (divisão em blocos da matriz de rigidez); **TPZAdmChunkVector<...>** (nesta variável pode ser embutidos vários tipos de objeto que irão especificar o tipo de elementos contidos na lista); **int fDimModel** (dimensão do modelo).

6.3.2 Classe TPZCompEl

Nesta classe é definido o comportamento do elemento computacional. Há, associados aos vértices do elemento geométrico, funções lineares usadas como base na obtenção de funções polinomiais reais, que por sua vez servem de base para a obtenção das funções de forma dos elementos hierárquicos. O principal objetivo desta classe é o cálculo da matriz de contribuição do elemento finito. As principais variáveis desta classe são **TPZCompMesh *fMesh** um ponteiro que aponta para a malha que contém uma lista de elementos computacionais, **static int gOrder**, é um inteiro que identifica a ordem de interpolação do elemento.

Os elementos computacionais calculam as funções de forma e as integram sobre o elemento geométrico deformado.

A classe `TPZCompEl` tem como principal subclasse, a classe **`TPZInterpolatedElement`** (discutida abaixo) que a partir desta, por sua vez, derivam classes como **`TPZCompEl1d`** (elemento computacional unidimensional), **`TPZCompElT2d`** (elemento computacional triangular bidimensional), **`TPZCompElQ2d`** (elemento computacional quadrilátero bidimensional), **`TPZCompElPr3d`** (elemento computacional prismático tridimensional), **`TPZCompElPi3d`** (elemento computacional piramidal tridimensional), **`TPZCompElT3d`** (elemento computacional triangular tridimensional), **`TPZCompElC3d`** (elemento computacional cúbico tridimensional), **`TPZCompElPoint`** (elemento computacional pontual). Tais classes são associadas às classes dos elementos geométricos, sendo que para cada classe de um grupo, há uma classe correspondente do outro.

6.3.3 Classe `TPZInterpolatedElement`

A classe `TPZIntel` (cujo nome completo é `TPZInterpolatedElement`) é derivada da classe `TPZCompEl` como citado acima. Todo e qualquer elemento computacional interpolante implementado no ambiente PZ tem esta classe como base. A sua finalidade principal é lidar com malhas hp-adaptativas, gerando subespaços de elementos finitos contínuos.

Além das variáveis da classe `TPZCompEl`, esta classe também apresenta algumas variáveis como **`TPZGoEl *fReference`** (um ponteiro que aponta para o elemento geométrico ao qual o elemento geométrico se refere), **`TPZMaterial *fMaterial`** (ponteiro que aponta para objeto material deste elemento computacional, definindo assim a equação diferencial a ser solucionada).

Há também outros métodos que devem ser implementados exclusivamente por classes derivadas desta, pois os dados manipulados dependem das características de cada elemento.

6.4 Definição da Formulação Variacional

6.4.1 Classe `TPZMaterial`

A classe em questão determina e especifica quais os tipos de comportamento que qualquer material derivado utilizado pode assumir através da definição da equação diferencial intencionada, bem como o cálculo dos coeficientes da

equação diferencial ou forma bilinear. Deste modo, é na classe `TPZMaterial` que são calculadas as contribuições para a matriz de rigidez elementar dos valores das funções de forma, suas derivadas parciais; e o determinante do jacobiano nos pontos de integração. A variável apresentada por esta classe é dada por `int fld` (que é o identificador do material, através do qual permite-se que seus dados sejam acessados). Desta classe derivam várias outras como `TPZElasticityMaterial` (material elástico linear bidimensional); `TPZMatBiot` (equação que modela o fluxo através de um meio poroso); `TPZPlateMaterial` (material utilizado para problemas do tipo "plate"); `TPZMatHyperElastic` (material hiperelástico); `TPZPlaca` (material de placa); `TPZMat` (implementa o problema de Poisson).

6.4.2 Classe `TPZMatOrthotropic`

A classe `TPZMatOrthotropic` foi implementada no ambiente PZ para descrever o comportamento de um material ortotrópico, por isto esta classe é derivada da classe `TPZMaterial`.

As variáveis utilizadas são:

1. `TPZMatrix fKXX, fKYY, fKZZ, fKXY, fKZX, fKYZ, fKZY`: as variáveis ao lado correspondem às matrizes de rigidez do elemento de ordem 3 por 3. Estas matrizes tem os elementos constituintes dados em função das constantes elásticas (módulos de elasticidade longitudinal e transversal, coeficiente de Poisson). Os valores das matrizes de rigidez implementadas neste método estão discretizadas no final desta classe.
2. `TPZMatrix fLocAxs`: corresponde à matriz que incorpora o sistema de eixos locais à placa (camada).
3. `REAL fEppx, fEppy, fEppz, fVxy, fVyx, fVyz, fVzy, fVzx, fVxz`: são as constantes elásticas (módulo de elasticidade longitudinal nas direções dos eixos x, y e z, e os coeficientes de Poisson) utilizadas principalmente no cálculo das matrizes de rigidez do elemento, implementadas no método `TPZMatOrthotropic` (construtor da classe). Também são usadas no método `Solution`, no cálculo dos elementos componentes do tensor de tensões.

4. REAL fNumNom, fGxy, fGzx, fGyz: são os módulos de elasticidade transversal, também utilizadas nos mesmos métodos, e com as mesmas finalidades que as variáveis acima.
5. TPZFMatrix fXf: fonte

Os métodos implementados são:

1. TPZMatOrthotropic (int nummat, TPZFMatrix naxes, REAL eppx, REAL eppy, REAL eppz, REAL vxy, REAL vyz, REAL vzx, REAL gxy, REAL gyz, REAL gzx) : neste método, são calculadas as matrizes de rigidez elementares, através da passagem dos parâmetros eppx, eppy, etc os quais são (neste método ainda) igualados às variáveis elásticas correspondentes. Tais matrizes são calculadas e o seu valor armazenado nas variáveis de classe.
2. virtual ~TPZMatOrthotropic(): destrutor da classe.
3. Void SetMaterial (TPZFMatrix &xkin): neste método, a variável de classe fXf é igualada valor do parâmetro xkin (pois é passado na forma de referência).
4. int Dimension(): retorna o valor 3 quando este método é chamado.
5. int NStateVariables(): retorna o valor 3 quando este método é chamado.
6. virtual void Print (ostream &out): são imprimidas neste método, as constantes elásticas (variáveis da classe), as matrizes de rigidez elementares.
7. char *Name(): retorna o nome da classe TPZMatOrthotropic.
8. virtual void Contribute (TPZVec<REAL> &x, TPZFMatrix &, TPZVec<REAL> &sol, TPZFMatrix &, REAL weight, TPZFMatrix &axes, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi, TPZFMatrix &ek, TPZFMatrix &ef): o objetivo deste método corresponde ao cálculo da formulação variacional de Galerkin (dada através do processo denominado P.T.V.). Inicialmente, a matriz elementar ek, e o vetor de cargas elementar estão zerados, e são usados como parâmetros para que seja "alimentados" pelo próprio método. Assim, quando o elemento computacional deformado chama o método CalcStiff (que devolve o Jacobiano

e a inversa do Jacobiano) este cria uma regra de integração sobre o elemento mestre (que varia segundo a ordem desejada, onde quanto maior a ordem, maior a quantidade de pesos e de pontos). Sobre cada ponto do elemento mestre, é chamado o método `Contribute`. Cada ponto por que o método passa, a matriz de carga e_k é calculada, e somada à obtida pelo(s) anterior(es). Os valores das funções de forma e das suas derivadas são passadas através dos parâmetros ϕ e $d\phi$, para cada ponto (visto mudarem quando estes são mudados).

9. `virtual void ContributeBC(TPZVec<REAL> &x, TPZVec<REAL> &sol, REAL weight, TPZFMatrix &axes, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &ek, TPZFMatrix &ef, TPZBndCond &bc)`: o objetivo principal desta classe é contribuir com a condição de contorno imposta na borda. A malha computacional possui uma lista com todos os tipos de elementos (elementos de volume, elementos de contorno, elementos de condição de contorno); quando o método `Assemble` da classe computacional é acionado, este percorre todos os elementos computacionais, acionando o método `ContributeBC` da classe material (quando encontra o elemento condição de contorno). Com isto, as condições de contorno são aplicadas por meio de integração numérica (peso e ponto) integrando a condição de contorno das funções (as quais dependem da condição adotada, como condição de Neumann, condição mista).
10. `virtual int VariableIndex(char *name)`; a partir do nome escrito no parâmetro `name`, este método associa um número inteiro que será recuperado pelo método `Solution`.
11. `virtual int NSolutionVariables(int var)`; retorna a quantidade de elementos que a ação solicitada para cálculo deve ter (caracterizando-a como um escalar, ou um tensor completo, etc).
12. `virtual int NFluxes(){ return 3;}`: retorna o valor 3.
13. `virtual void Solution(TPZVec<REAL> &Sol, TPZFMatrix &DSol, TPZFMatrix &axes, int var, TPZVec<REAL> &Solout)`: todo ponto contido no elemento mestre é mapeado para um ponto no elemento deformado computacional. O método `Solution` da classe `TPZInterpolatedElement` (acessado por e derivado da classe `TPZCompEl`) recebe os parâmetros q_i (que se refere ao ponto da malha computacional deformada), o

número representado por `var` (representa o tipo de solicitação cujo resultado se pretende pos-processar) e o parâmetro `Sol` (que corresponde ao retorno da solução). A solução referida corresponde à solução do método de elementos finitos (obtida através do P.T.V.) dada pelo somatório $\sum x_i \psi_i(qsi) = Sol$, (onde a variável x_i corresponde aos deslocamentos materiais). O método `Solution` da classe `TPZInterpolatedElement` recupera então a solução calculada nos vetores `u` e `du` (onde `u` representa a recuperação da variável `Sol`, enquanto que `du` representa a recuperação da variável `DSol`). No pós-processamento da solução o elemento computacional chama o método `Solution` do material (desta vez da classe `TPZMatOrthotropic`), cuja finalidade é o cálculo das variáveis pós-processadas como deslocamentos, tensões, etc.

14. `virtual void Flux(TPZVec<REAL> &x, TPZVec<REAL> &Sol, TPZFMMatrix &DSol, TPZFMMatrix &axes, TPZVec<REAL> &flux);`
15. `void Errors(TPZVec<REAL> &x, TPZVec<REAL> &u, TPZFMMatrix &dudx, TPZFMMatrix &axes, TPZVec<REAL> &flux, TPZVec<REAL> &u_exact, TPZFMMatrix &du_exact, TPZVec<REAL> &values);`
16. `void TPZMatOrthotropic::Normalize(TPZFMMatrix &naxes);`

6.5 Contribuições deste Projeto

6.5.1 Classe `TPZMulticamadaOrthotropic`

A classe `TPZMulticamadaOrthotropic` foi implementada com o objetivo específico de descrever o comportamento de uma placa multicamada, onde cada camada que forma esta multicamada é composta por um material ortotrópico (implementada pela classe `TPZMatOrthotropic`) sendo que a sua função básica é o gerenciamento da montagem do conjunto multicamada, bem como a implementação das ações aplicadas sobre o mesmo.

6.5.2 Classe `TPZPlacaOrthotropic`

A classe `TPZPlacaOrthotropic` implementa variáveis e métodos que visam gerenciar uma camada de placa ortotrópica. As variáveis desta classe são:

1. TPZGeoEl *fGeoEl: ponteiro que permite acesso à classe TPZGeoEl, para a caracterização do elemento geométrico.
2. TPZInterpolatedElement *fIntel: análogo à variável acima, esta variável permite acesso aos métodos da classe TPZinterpolatedElement.
3. REAL fH: corresponde à altura total da placa.
4. REAL fZMin, fZMax: corresponde à distância entre o plano de referência e o plano médio da placa.
5. int fTensorVar:

Os métodos implementados são:

1. TPZPlacaOrthotropic(): construtor da classe.
2. TPZPlacaOrthotropic(TPZGeoEl *gel, REAL zmin, REAL zmax): também construtor da classe, porém, os parâmetros citados permitem que sejam transmitidos ao construtor do objeto o elemento geométrico, e a distância z determinada.
3. ~TPZPlacaOrthotropic(){}: destrutor da classe.
4. void Tensor(TPZVec<REAL> &ksi, TPZFMatrix &T): este método devolve o tensor de tensões da placa, sendo que o parâmetro ksi é utilizado como parâmetro no método Solution, chamado pela variável fIntel da classe, utilizado dentro deste método.
5. REAL Moment (REAL zref, TPZVec<REAL> &normal, TPZVec<REAL> &direction): retorna o momento para dados dois vetores n1 e n2. Normal, direction e tensor de tensões multiplicados entre si resultam na tensão aplicada, utilizada no cálculo do momento.
6. REAL Force (TPZVec<REAL> &normal, TPZVec<REAL> &direction): retorna a força aplicada, dados dois vetores n1 e n2.
7. REAL GradMoment (REAL zref, TPZVec<REAL> &graddir, TPZVec<REAL> &normal, TPZVec<REAL> &direction): da o gradiente do momento na direção indicada por graddir.

8. REAL GradForce (TPZVec<REAL> &graddir, TPZVec<REAL> &normal, TPZVec<REAL> &direction): da o gradiente da força na direção indicada por graddir.
9. void GradTensor (TPZVec<REAL> &graddir, TPZVec<REAL> &ksi, TPZFMatrix &gradtensor): da o gradiente do tensor na direção indicada por graddir.
10. void PrintTensors(ostream &out): imprime um valor do tensor, numa posição específica, e a norma do tensor, na tela do video.
11. void PrintTensors(ostream &out, TPZFMatrix &tensorin, TPZFMatrix &tensorout): imprime um valor do tensor, numa posição específica, e a norma do tensor.
12. REAL Height(){return fH;}: retorna a altura da placa.
13. REAL ZMin(){return fZMin;}: retorna a altura z mínima.
14. REAL ZMax(){return fZMax;}: retorna a altura z máxima.
15. void IdentifyCompEl(): identifica o elemento computacional a ser utilizado.
16. void Print(): imprime a altura da placa.
17. TPZInterpolatedElement *ComputEl(){return fIntel;}: retorna a variável fIntel.

6.5.3 Classe TPZBCTension

Com o intuito de implementar o método iterativo da condição de contorno, foi criada a classe TPZBCTension (derivada da classe TPZBndCond). A condição de contorno inicial corresponde às ações aplicadas na placa multicamada, porém, com o intuito de se atingir o objetivo (descrito anteriormente) aplica-se um processo reiterativo, onde as condições de contorno iniciais são alteradas. Tal processo é permitido através da implementação desta classe, visto que a sua classe base TPZBndCond utiliza condições de contorno iniciais e fixas, ao longo de todo o processo.

Contudo, é interessante utilizarmos dos métodos implementados por TPZBnd-Cond, visto que a cada passo da iteração, outras condições de contorno são reaplicadas, correspondendo ao uso repetido desta classe.

As variáveis utilizadas são **TPZMulticamadaOrthotropic *fMultCam** (através da qual consegue-se acessar os métodos da classe TPZMulticamada-Orthotropic); **int fCamada ()**; **REAL fSign ()**.

Alguns métodos podem ser citados como:

1. `~TPZBCTension(){}:` destrutor da classe.
2. `TPZBCTension (TPZMaterial *material, int id, int type, TPZFMatrix &val1, TPZFMatrix &val2, REAL sign, TPZMulticamadaOrthotropic *mult, int camada):` construtor da classe, inicializam as variáveis com os valores dos parâmetros .
3. `virtual int NFluxes(){return Material()->NFluxes();}`: retorna o número de componentes que forma a função de fluxo, através do método NFluxes, da classe TPZMaterial.
4. `int NStateVariables(){return Material()->NStateVariables();}`: retorna o número de variáveis de estado associado ao material.
5. `void Contribute(TPZVec<REAL> &x, TPZFMatrix &jacinv, TPZVec<REAL> &sol, TPZFMatrix &dsol, REAL weight, TPZFMatrix &axes, TPZFMatrix &phi, TPZFMatrix &dphi, TPZFMatrix &ek, TPZFMatrix &ef).`

Capítulo 7

Exemplos Numéricos

7.1 Introdução

São apresentados neste capítulo, exemplos numéricos da formulação multicamada. O estudo consiste na análise do estado tridimensional de tensão, visto que são analisadas as tensões que ocorrem ao longo da fibra média do elemento de placa, em toda a espessura. Inicia-se o estudo com um elemento de placa multicamada formada por 3 camadas isotrópicas, e em seguida, analisam-se os resultados de uma placa multicamada ortotrópica composta por 5 camadas. Estes testes pretendem demonstrar a consistência do esquema numérico, assim como validar a implementação.

7.2 Descrição do problema numérico

Considera-se inicialmente uma placa quadrada de espessura fina, variando no intervalo $[0, 0.5]$. O domínio corresponde a um corpo tridimensional, um hexaedro. Para a obtenção de tal domínio, são utilizados elementos finitos hexaédricos inicialmente superpostos, placa sobre placa, formando um domínio multicamada. Eventualmente, com o objetivo de aumentar a precisão no cálculo, serão utilizados vários elementos finitos hexaédricos formando uma única camada (placa ortotrópica).

São aplicadas condições de contorno nas faces do elemento geométrico hexaedro. As condições de contorno a serem aplicadas são:

1. Esforços Normais nas direções x ou y
2. Esforços Cisalhantes xy
3. Momentos de Flexão

O procedimento de cálculo consiste em se passar inicialmente as dimensões da placa (largura, comprimento e espessura). Os coeficientes elásticos são especificados no método construtor da classe `TPZMulticamadaOrthotropic` (cujos parâmetros são compostos dos valores das dimensões da placa) ortotrópica ou isotropicamente. Pode ser admitido somente um valor para cada tipo de constante elástica quando se trata de um material isotrópico. Cada vez que uma nova placa é criada seus dados são adicionados ao material multicamada, através do método `AddPlacaOrtho (...)`. Cria-se em seguida, a malha geométrica através do método `GenerateMesh` (classe `TPZMulticamadaOrthotropic`) através do qual são ligados também os elementos geométrico e computacional.

Determina-se posteriormente o tipo de solicitação, com os métodos `SetQx`, `SetQy`, `SetNx`, `SetNxy`, `SetNy`, `SetMx`, `SetMy`, `SetMxy`, os quais passam os valores especificados para as posições 0 e 2 das variáveis da classe `TPZMulticamadaOrthotropic`, correspondentes às ações de cortante, e momento. A estrutura de dados interna é então carregada e utilizada para inicializar a solução através do método `ComputeSolution` (classe `TPZMulticamadaOrthotropic`).

Nos testes a serem efetuados, serão desconsiderados esforços aplicados na direção vertical. O problema atual consiste em aplicar-se condições de contorno nas faces laterais monitorando-se as tensões resultantes na fibra média do domínio multicamada.

7.3 Casos Testes

Como primeiro exemplo tem-se uma placa multicamada (3 camadas) composta por um material isotrópico, cujo domínio é dado por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in [0, 2]\}$$

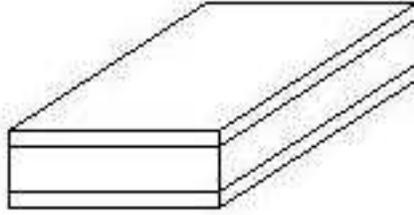


Figura 7.1: placa multicamada

7.3.1 Placa multicamada composta por 3 camadas

Neste caso, são estudadas a evolução das tensões ao longo de toda a fibra média (central) pertencente ao domínio do laminado.

O laminado é formado pela união de três placas, tipo "sanduíche", onde as duas placas externas apresentam pequena espessura e alta rigidez. A camada interna ao contrário, apresenta espessura bem maior do que as externas, e baixa rigidez.

São aplicadas as ações solicitantes correspondentes a $(M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}, V_x$ e $V_y)$ nas bordas do material multicamada, observando-se a evolução das tensões ao longo de toda a sua espessura.

O conjunto multicamada é formado pela união de três placas isotrópicas, sendo que as duas camadas externas são muito finas, com uma espessura de 0.01, e um módulo de elasticidade muito alto (ou seja, são muito rígidas) igual a 100000. O coeficiente de Poisson para as duas placas externas é igual a 0.3. O módulo de elasticidade transversal é igual a 38461.5.

A camada interna apresenta espessura muito maior (igual a 0.2) e um módulo de elasticidade muito menor (sendo portanto menos rígida) e igual a 100. O coeficiente de Poisson é o mesmo adotado para as placas externas. O módulo de elasticidade transversal é igual a 38.4615.

As três fibras apresentam a mesma orientação de fibras.

Os sentidos de aplicação das solicitações pode ser observado através da figura 4.2.

Cada gráfico mostra as tensões significativas correspondentes aos esforços

simples. Para os carregamentos N_x , N_y e N_{xy} as cargas são transmitidas pelas placas rígidas 7.2 , 7.3 e 7.4. O esforço cortante é principalmente carregado pela camada espessa, figuras 7.5 e 7.6.

Os momentos M_x , M_y e M_{xy} são transferidos para as duas camadas rígidas. A distância entre essas duas camadas reduz o tamanho das tensões das mesmas, figuras 7.7, 7.8 e 7.9.

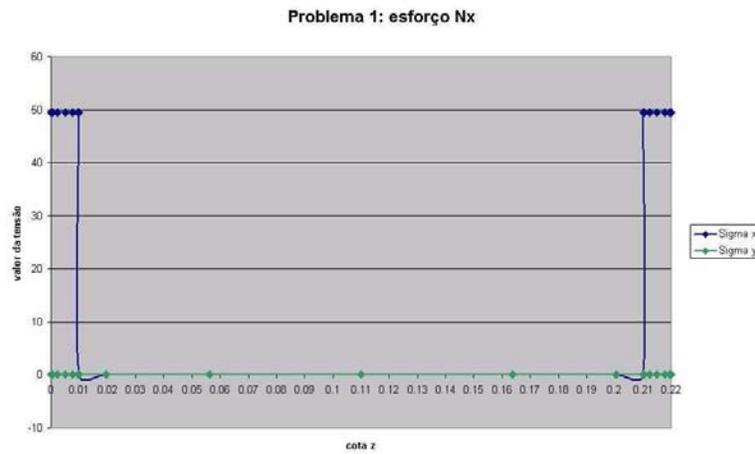


Figura 7.2: solicitação Nx

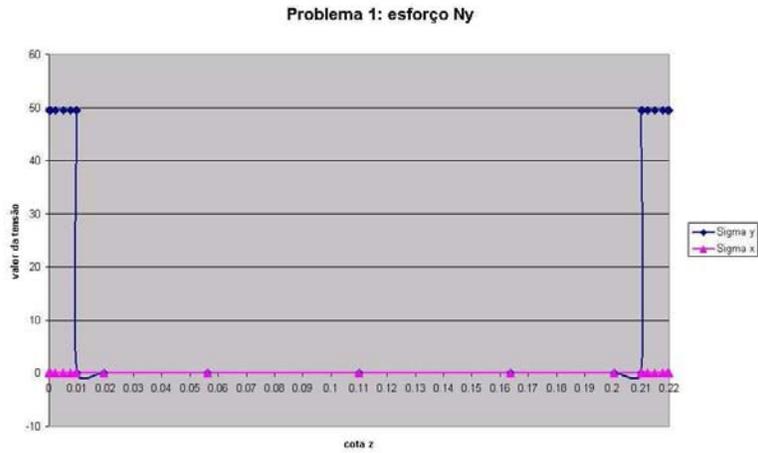


Figure #: solicitação Nxy<1003>100100100

Figura 7.3: solicitação Ny

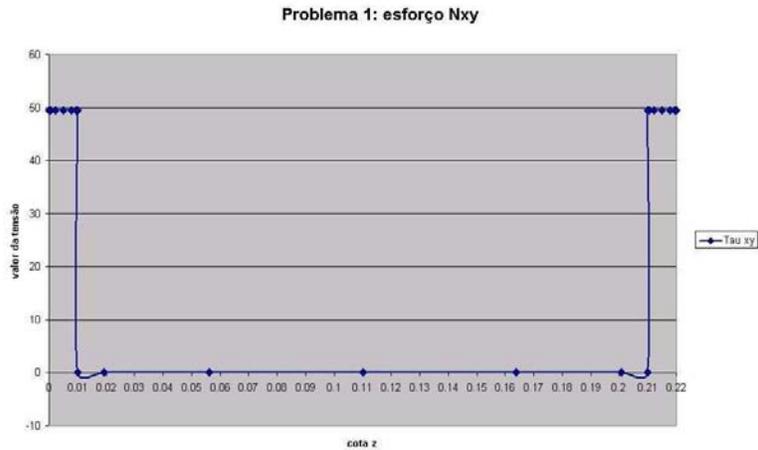
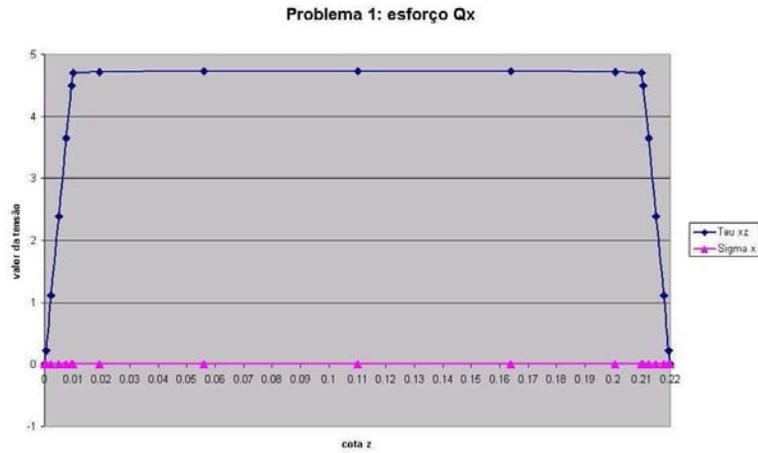


Figura 7.4: solicitação Nxy100100100

Figure #: solicitação Nxy<1003>100100100

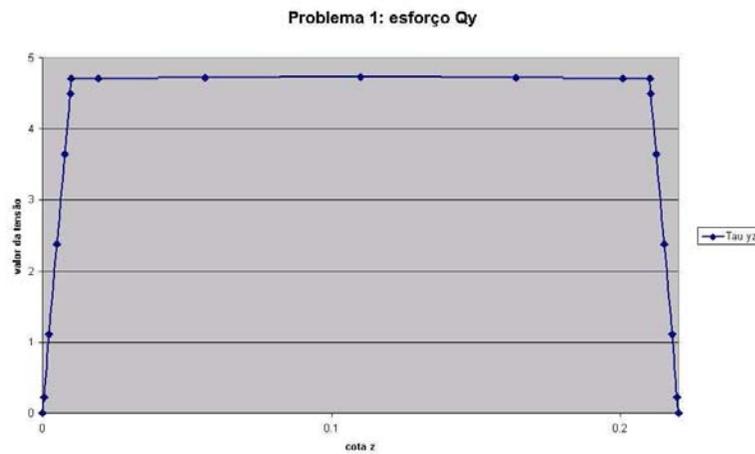
Os gráficos acima mostram que devido ao módulo de elasticidade das camadas externas serem muito maiores (ou seja, são muito mais rígidas), estas absorvem praticamente todo o esforço que lhes são aplicadas. Como no primeiro gráfico, o esforço aplicado foi somente na direção x (N_x), praticamente



100

Figura 7.5: solicitação Q_x

não há tensões σ_y . Análises semelhantes podem ser feitas para os outros 2 gráficos. A pequena oscilação que há nas regiões de abscissas 0.01 a 0.02 e de 0.2 a 0.21 são devido ao processo de representação do programa excell, utilizado para visualização gráfica.



100100

Figura 7.6: solicitação Q_y

Seguindo cálculos para barras prismáticas, observou-se que as tensões desenvolvidas ao longo de uma seção sujeita a uma força cortante segue um

comportamento parabólico (ou próximo disto). Devido a um problema de escala nas tres regiões do gráfico (ou camadas da placa) as tensões parecem se desenvolverem se modo retilíneo, porém, utilizando-se um zoom, percebeu-se que o comportamento obedecido nas três regiões, é parabólico. Nota-se que ao contrário do esforço normal, o esforço cortante é praticamente carregado pela camada menos rígida.

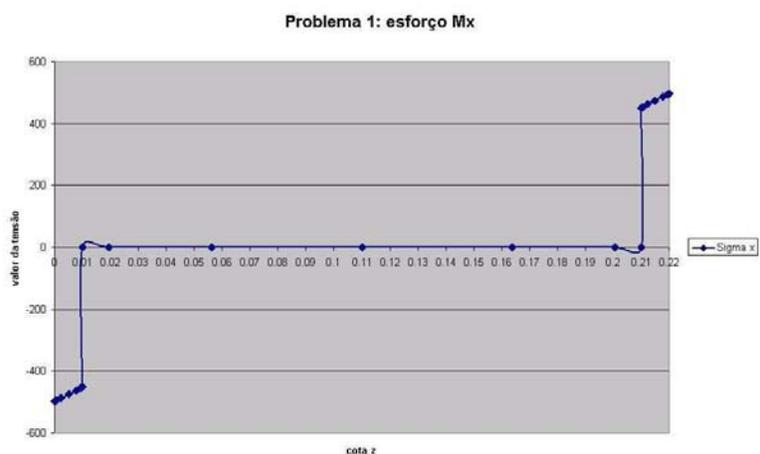


Figura 7.7: solicitação Mx

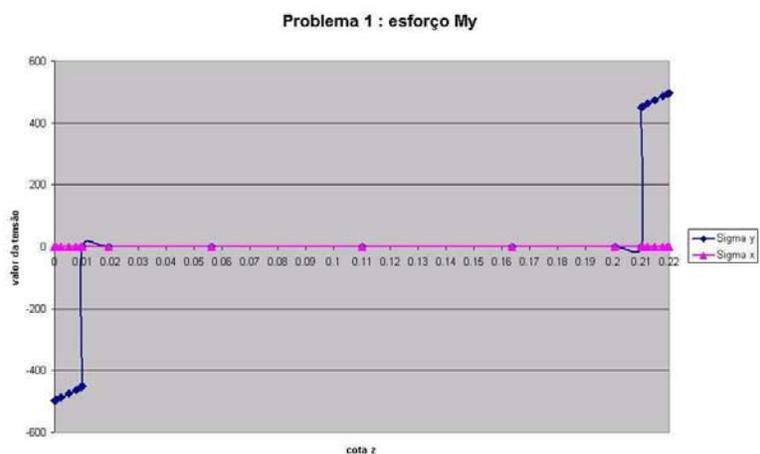


Figura 7.8: solicitação My

O comportamento das tensões quando lhe é aplicado um esforço de momento é retilíneo. Observa-se que o momento é provocado por tensões especificadas nas camadas mais rígidas.

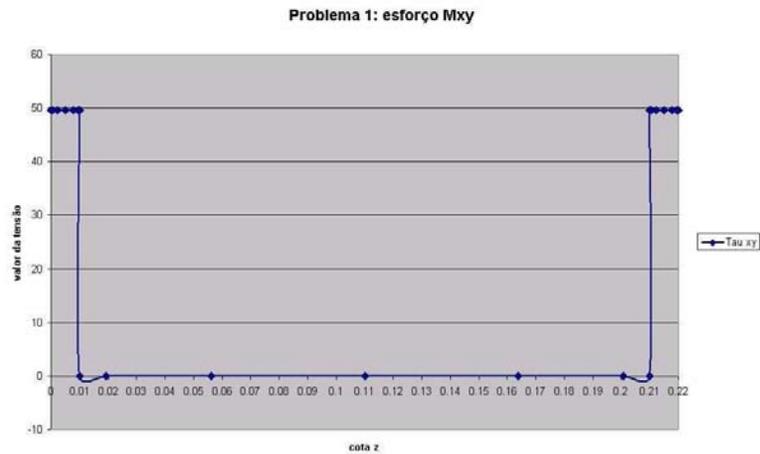


Figura 7.9: solitação Mxy

7.3.2 Teste para placa multicamada composta por 5 camadas

Neste caso, analisou-se a evolução das tensões ao longo da fibra média pertencente ao domínio da placa multicamada, ao aplicarem-se as solitações ($M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y$) nas bordas da placa.

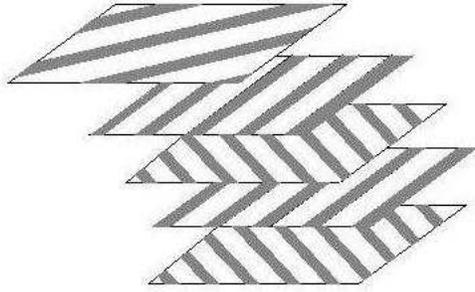


Figura 7.10: placa multicamada

O conjunto multicamada é composto por 5 camadas, onde as constantes elásticas são iguais para todas elas. O módulo de elasticidade longitudinal E_x é igual a 1000, os módulos de elasticidade longitudinais nas direções y e z , correspondentes a E_y e E_z respectivamente são idênticos e iguais a 100. Os coeficientes de Poisson ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} são respectivamente iguais a 0.3, 0.15, 0.3. Os módulos de elasticidade transversais tem os valores $G_{xy} = 25.641$, $G_{yz} = 76.9231$, $G_{zx} = 19.2308$.

Todas as camadas tem a mesma espessura, de valor 0.1.

As direções das fibras entretanto, variam de camada para camada como mostrado abaixo

Para a camada 1 os eixos estão orientados segundo os vetores $(0.707107, 0.0, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 1.0)$;

Para a camada 2 considera-se uma rotação 45 graus, então as direções dos eixos são dadas por $(0.707107, 0.707107, 0.0)$, $(-0.707107, 0.707107, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 1.0)$;

Para a camada 3 as direções dos eixos são dadas por $(0.707107, -0.707107, 0.0)$, $(0.707107, 0.0, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 1.0)$;

Para a camada 4 as direções dos eixos são dadas por $(0.707107, 0.707107, 0.0)$, $(-0.707107, 0.707107, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 1.0)$;

Para a camada 5 as direções dos eixos são dadas por $(0.707107, -0.707107, 0.0)$, $(0.707107, 0.707107, 0.0)$, $(0.0, 0.0, 1.0)$;

Os sentidos de aplicação das solicitações pode ser observado através da figura 4.2.

Os esforços N_x , N_y e N_{xy} resultam em tensões constantes em cada camada. Cada esforço resulta em tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} . Esta distribuição é necessária para compatibilizar as deformações.

Os esforços V_x e V_y mediante o mecanismo de realimentação dos tensores, resultam em um estado plano de deformação. Assim, as tensões correspondentes a V_x são unicamente τ_{xz} e para V_y , τ_{yz} (o gráfico de V_x é provavelmente errado).

Os momentos M_x , M_y e M_{xy} resultam em tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} . Seções planas permanecem planas.

Observa-se que as tensões correspondentes aos esforços cortantes são ortogonais às tensões dos esforços M_x , M_y , M_{xy} , N_x , N_y e N_{xy} .

Os valores das tensões analisadas estão discretizadas nos gráficos abaixo

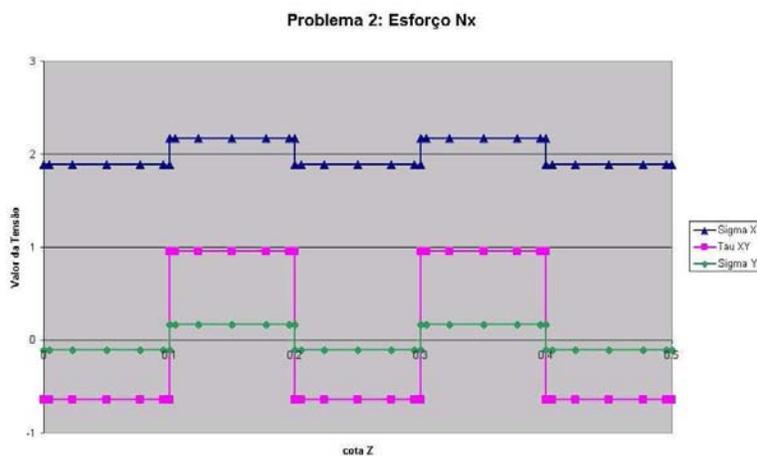


Figura 7.11: solicitação Nx

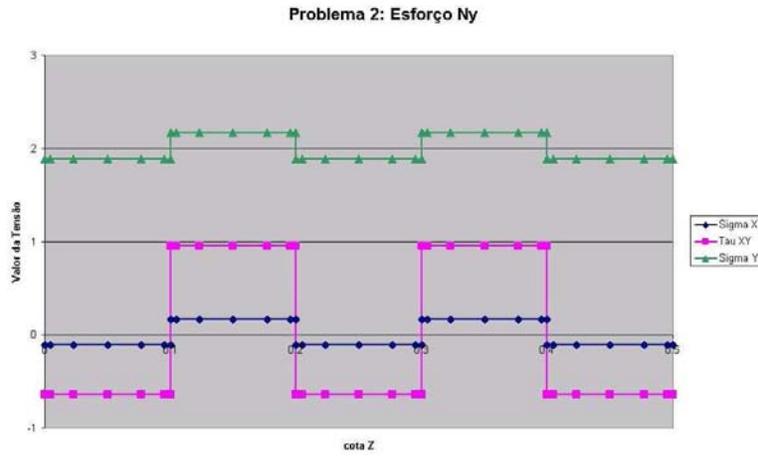


Figura 7.12: solicitação Ny

A solicitação normal, pelo efeito de Poisson provocará tanto tensões σ_x , quanto σ_{xy} . Para assegurar que as deformações em todas as camadas sejam as mesmas e nas mesmas direções, há tensões internas para assegurar a compatibilidade cinemática ($\sigma_{xy}\sigma_y$, no primeiro gráfico); são as tensões internas responsáveis por assegurar esta compatibilidade

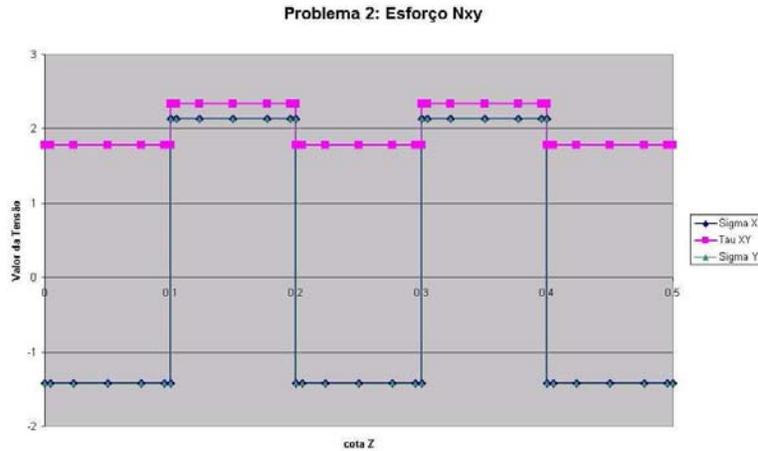


Figura 7.13: solicitação Nxy

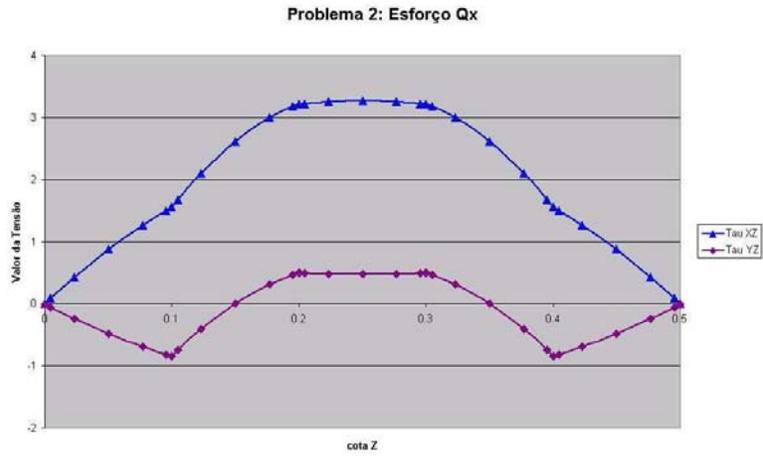


Figura 7.14: solicitação Qx

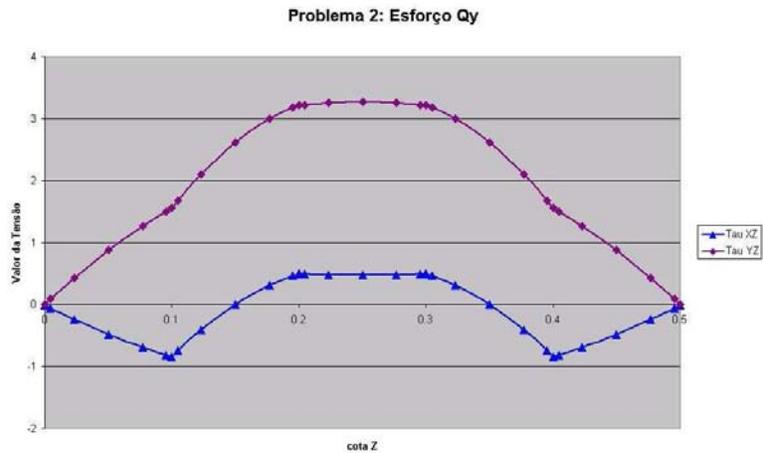


Figura 7.15: solicitação Qy

A evolução do cortante em cada camada é parabólica. Devido à compatibilidade cinemática, o esforço Qx (do primeiro gráfico) acarreta o esforço τ_{yz} , observando-se que a condição $\int \tau_{yz} = 0$ acarreta que o equilíbrio global é satisfeito.

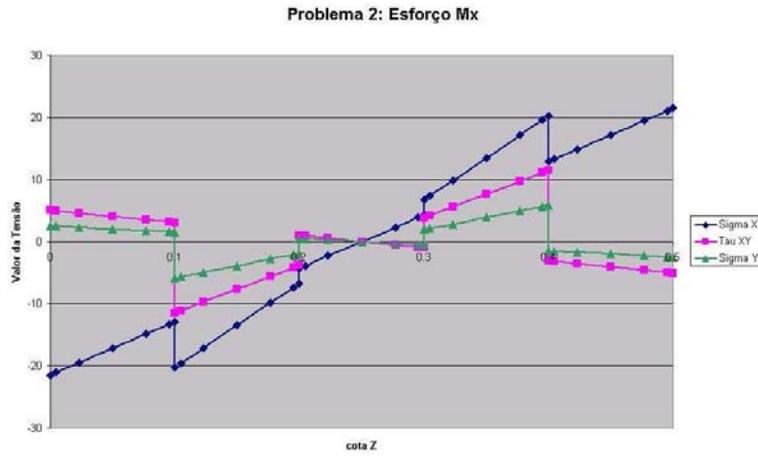


Figura 7.16: solicação Mx

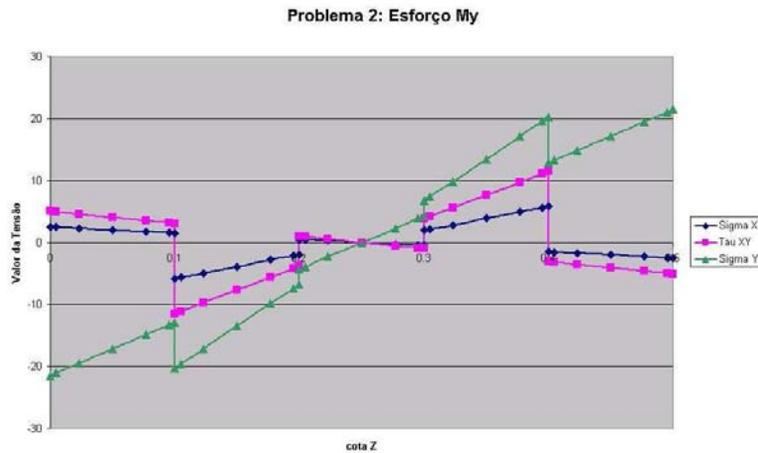


Figura 7.17: solicação My

A absorção de cortante do esforço N em cada camada e a solicação Mx (no primeiro gráfico) acarreta também esforços τ_{xy} e σ_y . O esforço total $N_{xy} = \int \tau_{xy} = 0$, $N_y = \int \sigma_y = 0$.

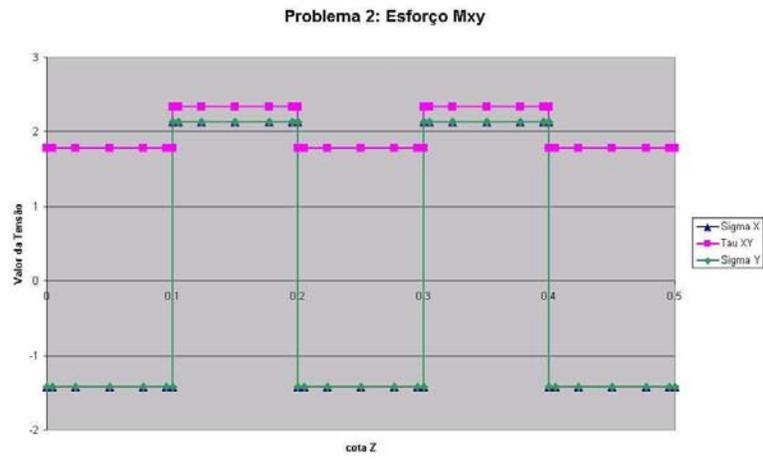


Figura 7.18: solicitação Mxy

Capítulo 8

Conclusões

Foi desenvolvido um procedimento para cálculo de estado de tensão em uma placa formada por múltiplas camadas ortotrópicas.

Para sustentar este desenvolvimento, diversas formulações de placas foram estudadas, algumas adequadas para placas uniformes, outras para placas multicamadas. Observou-se que todas as formulações procuram uma otimização do espaço de aproximação para melhor representar o estado de tensão interno da placa.

No nosso trabalho estudamos o estado de tensão de equilíbrio da placa quando submetida a esforços simples tais como tensão normal, momento e cortante. Espera-se dessa maneira desenvolver um modelo de placa, baseado em conceitos energéticos, similar aos primeiros modelos de viga desenvolvidos.

A metodologia de realimentação de condições de contorno conseguiu calcular o estado de tensão para qualquer configuração de placa multicamada. Os estados resultantes são soluções exatas satisfazendo as equações de equilíbrio e relações constitutivas.

É possível imaginar a aplicação desta mesma técnica para cálculo de estado de tensão em placas não homogêneas, porém, com estruturas repetidas.

O procedimento de cálculo convergiu em poucas iterações e poderá ser utilizado no desenvolvimento de novos modelos de placas.

Capítulo 9

Apêndice

9.1 Teoria da Elasticidade

Para o estudo apresentado aqui, consideramos segundo Reddy [16] e Simões [21] que o corpo obedece ao regime de elasticidade linear. Pode-se distinguir dois tipos de movimentação apresentados pelo corpo, **movimento de corpo rígido** (quando não há deformação, apenas deslocamento e/ou rotação, não alterando o estado de tensão do sólido), **deformação** (que ocorre quando há alteração na distância relativa entre dois pontos pertencentes ao sólido). Considera-se um sólido contínuo e homogêneo, que obedece ao regime elástico linear com pequenos deslocamentos de seus pontos materiais, de tal modo a poder utilizar o conceito de deslocamentos infinitesimais.

Supondo dois pontos pertencentes ao sólido, representados pelas letras P e Q (este último situado nas vizinhanças do primeiro), ligados pelo vetor dx , representando a situação indeformada do sólido. Após uma mudança na configuração, o corpo passa para uma situação deformada, onde os pontos iniciais deslocam-se para outras posições, simbolizadas por X e Y , respectivamente, segundo o vetor de deslocamentos:

$$u = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Desta forma, utilizando-se o conceito de deformação infinitesimal, a posição final X pode ser escrita na forma abaixo, onde $u(P)$ significa o deslocamento

do ponto

$$X = P + u(P) \quad (9.2)$$

considerando-se um ponto Q , cuja posição inicial é dada por $P+dx$, apresenta uma posição final dada por $X + dX = Y$, que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$x + dx = X + dX + u(Q) \quad (9.3)$$

Subtraindo-se as duas expressões, obtemos o valor do vetor dx :

$$dx = dX + u(Q) - u(P) \quad (9.4)$$

Demonstra-se que a derivada direcional de $u(p)$ (onde u é a função que dá os deslocamentos de todos os pontos do corpo estudado) nos dá a deformação material do corpo, como mostra a equação abaixo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\vec{p} + \alpha \vec{dx}) - F(\vec{p})}{\alpha} = D[u, \vec{dx}] \quad (9.5)$$

de modo que pode-se obter a igualdade:

$$dx = \nabla u \cdot dX \quad (9.6)$$

onde ∇u representa um tensor de segunda ordem, dado pelo gradiente da função de deslocamentos u .

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Utilizando-se a série de Taylor, podemos rescrever a equação 4.67, desprezando-se os termos de ordem superior a 1, (pois estamos considerando a teoria de pequenos deslocamentos), devido ao fato destes representarem derivadas de ordem superior, como abaixo:

$$dx = dX + (\nabla u) dX + O(dX) \quad (9.8)$$

onde o termo $O(dX)$ representa o resíduo da aproximação (simbolizando todos os termos de ordem superior a 1 e que pode ser desprezado, conforme

citado acima). O comprimento dos vetores dx e dX podem ser representados por ds e dS respectivamente sendo dado pelo produto interno dos dois primeiros vetores:

$$\|ds\|^2 - \|dS\|^2 = (dX \cdot (\nabla u^T \nabla u - I) dX) \quad (9.9)$$

onde o termo $\nabla u^T \nabla u$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$C = \nabla u^T \nabla u = (I + \nabla u(p))^T \cdot (I + \nabla u(p)) = I + \nabla u(p)^T + \nabla u(p) + \nabla u(p)^T \nabla u(p) \quad (9.10)$$

que após desprezar o último termo toma a forma:

$$\|ds\|^2 - \|dS\|^2 \approx I + \nabla u(p)^T + \nabla u(p) = I + 2E \quad (9.11)$$

introduzindo o tensor E acima, denominado **tensor de deformação infinitesimal** cujas componentes são obtidas através das componentes do **gradiente do vetor de deslocamentos**

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.12)$$

onde os índices i e j podem variar de 1 a 3, sendo que as componentes u_i representam os deslocamentos $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ conforme os valores do índice variam de 1 a 3, cabendo salientar também que os termos x_1 , x_2 , x_3 representam os eixos x , y , z pois as equações utilizadas são descritas usando como referência os eixos cartesianos.

$$[E] = \frac{1}{2} (\nabla u(p)^T + \nabla u(p)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

onde os termos E_{ii} representam as deformações provocadas ao longo da fibra (encurtamento ou alongamento) na direção e_i (devido a aplicação das tensões normais σ_{ii}). Os termos E_{ij} representam as deformações cisalhantes, dadas por γ_{xy} , γ_{zx} , γ_{yz} , γ_{yx} , γ_{xz} , γ_{zy} proporcionais à metade da mudança angular da fibra alinhada com as direções i , j provocada pela aplicação das tensões cisalhantes τ_{ij} .

9.2 Tensão

Para um ponto qualquer, pode-se determinar um plano que passa por ele e uma força por unidade de área aplicada (cuja resultante é a integral das forças por unidade de área, chamadas de tensão). Deste modo, havendo tensões, pode-se calcular a força resultante através da integral das tensões, como , e para tal, imagine um corpo seccionado em duas partes. Tomando-se um ponto P pertencente ao plano α que divide o corpo, pode-se determinar uma força (aplicada ao corpo) por unidade de área, atuando num determinado ponto deste plano. Somando-se todas as forças puntuais, determina-se a resultante da força que age sobre o plano α , dada pela integral de todas estas forças. A força por unidade de área é denominada **tensão**. Pode-se distinguir três tipos de forças que agem sobre um sólido, a saber:

1. Força de contato entre corpos
2. Forças aplicadas na superfície
3. Forças internas ao corpo

Verifica-se deste modo, que a tensão se comporta como um tensor, com as seguintes propriedades

1. Há um tensor de tensões σ , tal que $d_n(P) = \sigma.n$, onde σ é denominado **tensor de tensões de Cauchy**
2. O tensor de tensões é simétrico
3. O tensor de tensões satisfaz a lei de equilíbrio : $div \sigma + b = 0$

havendo tensões, pode-se calcular a força resultante (para qualquer ponto pertencente ao plano seccionador) através da integral das tensões, como:

$$\int_{\partial P} \sigma_n(x) dw \quad (9.14)$$

onde esta integral é calculada considerando-se todas as tensões que agem sobre o contorno do sólido considerado, de modo que o seu valor dá o valor da força total que atua sobre o contorno do sólido. Analisando um a tensão que atua sobre um plano inclinado (que forma, juntamente com os planos

coordenados, um tetraedro infinitesimal), pode-se verificar que a força total que atua sobre o contorno do corpo é dada por:

$$\int_{\partial P} d_n(x)dw = \begin{pmatrix} -d_{xx}A_x - d_{yx}A_y - d_{zx}A_z + d_{nx}A \\ -d_{xy}A_x - d_{yy}A_y - d_{zy}A_z + d_{nz}A \\ -d_{xz}A_x - d_{yz}A_y - d_{zz}A_z + d_{nz}A \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

daí conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} d_{nx} \\ d_{ny} \\ d_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{xx}n_x + d_{yx}n_y + d_{zx}n_z \\ d_{xy}n_x + d_{yy}n_y + d_{zy}n_z \\ d_{xz}n_x + d_{yz}n_y + d_{zz}n_z \end{pmatrix} \quad d_n = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{yx} & d_{zx} \\ d_{xy} & d_{yy} & d_{zy} \\ d_{xz} & d_{yz} & d_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

A força de volume total aplicada sobre o sólido, num dado ponto P é dada por:

$$\int_P b(x)d\Omega \quad (9.17)$$

de modo que a força total que age sobre o ponto em estudo P compreende à soma das forças superfície com as de volume, que é assumida como constante caso a área em que atua a tensão tenda a zero. Para que o corpo esteja em equilíbrio é necessário que esta resultante (assim como o momento que atua no ponto) sejam nulos, ou seja:

$$f(P) = \int_{\partial P} d_n(x)dw + \int_P b(x)d\Omega \quad (9.18)$$

$$m(P) = \int_{\partial P} r \times d_n(x)dw + \int_P r \times b(x)d\Omega \quad (9.19)$$

Para cada área de corte contendo o ponto P em questão, atua uma tensão δ_n , que pode ser decomposta em tres componentes paralelos aos eixos coordenados, de modo que, se tomarmos u elemento cúbico infinitesimal sobre o ponto P e decomposmos todas as forças que atuam nos 6 lados deste cubo, tem-se um total de 18 componentes, atuando no cubo. Porém, calculando o momento das forças em torno do ponto central do cubo, pode-se chegar à conclusão de que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, ou seja, o tensor de tensões é simétrico, de modo que o total de componentes independentes cai para 6 (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}).

9.3 Equações Constitutivas

As equações cinemáticas, mecânicas e termodinâmicas, (as relações estudadas até agora), são aplicadas para qualquer sólido contínuo, independentemente de sua constituição física. As equações constitutivas, ao contrário, caracterizam o material individualmente, dependendo do modo como reage a aplicação de cargas. Os coeficientes materiais que determinam as equações são considerados constantes ao longo de toda a deformação. Para se resolver problemas de equilíbrio de corpos elásticos, são necessárias estabelecer outras relações entre as tensões e deformações, pois as estabelecidas acima não são suficientes para tal, deste modo, precisa-se estabelecer um modelo elástico para o corpo. Considerou-se desta forma, que o corpo obedeça às pequenas deformações e também ao regime elástico linear, implica que as equações constitutivas (ou seja, as equações que relacionam o tensor de tensões com o respectivo tensor de deformações) são estabelecidas utilizando-se as *Leis de Hooke*, obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (9.20)$$

O uso desta equação é importante pois é através dela que pode-se estudar o equilíbrio do corpo, uma vez que somente as equações de força e momento resultantes não são suficientes para o estudo do equilíbrio de corpos elásticos, cabendo dizer que a relação entre a tensão σ e a deformação ε é linear e C corresponde à um tensor de quarta ordem, podendo reescrever a equação acima como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (9.21)$$

sendo que C representa o tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas do material em estudo. Tal equação possui 81 coeficientes. Como os tensores de segunda ordem (de tensão e de deformação) são simétricos, pode verificar que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (9.22)$$

de modo que assim, as constantes podem ser simplificadas de 81 para 36

coeficientes elásticas independentes. Deste modo, pode-se obter a relação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

ou, em notação indicial:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (9.24)$$

onde C_{ij} representa o tensor de coeficientes elásticos, simplificado com as hipóteses acima e os índices indicados em σ e ε correspondem a:

$$\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z, \sigma_4 = \sigma_{yz}, \sigma_5 = \sigma_{xz}, \sigma_6 = \sigma_{xy} \quad (9.25)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{yz}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{xz}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{xy} \quad (9.26)$$

sendo que podemos, então escrever:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\varepsilon_{yz} + C_{15}\varepsilon_{zx} + C_{16}\varepsilon_{xy} \\ &\quad \vdots \\ \sigma_x &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\varepsilon_{yz} + C_{65}\varepsilon_{zx} + C_{66}\varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (9.27)$$

sendo que o tensor C_{ij} também é simétrico ($C_{ij} = C_{ji}$), de modo que assim, o total de coeficientes elásticos no tensor se reduz para 21 elementos independentes. Quando, segundo Reddy [16], os coeficientes elásticos C_{ijkl} em um ponto permanecem inalterados para cada par de sistema coordenado, (como imagens espelhadas de um plano), então este plano é chamado de **plano de simetria material** do ponto. Como o tensor de quarta ordem C corresponde às constantes elásticas do material, as relações constitutivas (**tensão-deformação**) variam de material para material, ao contrário das outras relações (**equações de equilíbrio, relações deformação-deslocamento, equações de compatibilidade**) que são as mesmas não importando se o material é isotrópico ou anisotrópico, desde que respeitem a teoria de pequenas deformações.

Sendo um tensor de quarta ordem, a equação é válida:

$$C_{ijkl} = T_{im}T_{jn}T_{kp}T_{lq}C_{mnpq} \quad (9.28)$$

onde T_{ij} corresponde a **matriz de transformação** (que converte as coordenadas de um sistema dado, em coordenadas de um outro sistema), de acordo com a quantidade de planos de simetria que apresenta o material, o tensor C varia a quantidade de coeficientes (termos) que apresenta, portanto varia a quantidade de constantes elásticas conforme o tipo de material estudado.

Materiais Monoclínicos

São denominados assim, os materiais que apresentam o mesmo valor de coeficientes elásticos (no mesmo ponto) para cada par de sistema coordenado, ou seja, quando há um plano de simetria. Supondo que o plano de simetria de um certo material seja $x_3 = z = 0$, então a matriz de rotação (converte o velho sistema de coordenadas no novo), pode ser dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

de modo que aplicando esta matriz de rotação na equação 5.9, obtem-se:

$$[c] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

num total de 13 constantes elásticas.

Materiais Isotrópicos

Quando o material apresenta infinitos planos de simetria material, ou seja, as constantes elásticas independem da direção em que se está analisando, pode-se reduzir o número de constantes elásticas independentes para 2, e o material é denominado **isotrópico**. Pode-se demonstrar que a equação 5.9 pode ser escrita sob a forma:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) + \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (9.31)$$

onde λ , μ , e α são as constantes escalares do material, denominadas **coeficientes de Lamé**, e δ corresponde ao delta de **Kronecker**, que podem ser escritas em função das constantes elásticas (módulo de elasticidade longitudinal E , módulo de elasticidade transversal G , e coeficiente de Poisson ν) da seguinte forma:

$$\mu \equiv G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (9.32)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (9.33)$$

Segundo Mauad, desde que o tensor C satisfaça a equação 9.24, o valor de α pode ser considerado como sendo nulo, de tal modo que a equação acima assume a forma:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (9.34)$$

Juntando-se as equações 9.21 e 5.5, obtêm-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \varepsilon_{kl} \quad (9.35)$$

ou,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (9.36)$$

onde $e = tr E = \Sigma_i e_{ii}$; invertendo-se a expressão acima, fica:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{ij} - \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} T_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (9.37)$$

os coeficientes do tensor C são dados, segundo Reddy, por:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \lambda + 2\mu \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \lambda \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \mu \end{aligned} \quad (9.38)$$

de modo que o tensor C fica sendo representado por:

$$[C] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1 - \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

onde ν corresponde ao coeficiente de Poisson, e E corresponde ao módulo de elasticidade do material, e de acordo com as leis de Hooke, e à superposição dos efeitos, pode-se escrever as componentes do tensor de deformação como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}
 \end{aligned} \tag{9.40}$$

onde, o termo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ representa o módulo de elasticidade transversal do material, as componentes de tensão em função das deformações podem ser dadas, segundo Mauad, por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E[\varepsilon_x + \nu(-\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)]}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \\
 \sigma_y &= \frac{E[\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x - \varepsilon_y + \varepsilon_z)]}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \\
 \sigma_z &= \frac{E[\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_z)]}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \\
 \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\
 \tau_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \\
 \tau_{zx} &= 2G\varepsilon_{zx}
 \end{aligned} \tag{9.41}$$

Referências Bibliográficas

- [1] BASSET A.B. On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. *Philosophical Transactions of Royal Society of London, Série A: Mathematical and Physical Sciences*, 1890.
- [2] VLASOV B.F. On one case of bending of rectangular thick plates. *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 1957.
- [3] SZABO B.A. ; ACTIS R.L.; SCHWAB C. Hierarquic models for laminated plates and shells. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 1999.
- [4] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 1945.
- [5] REISSNER E. The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the Asme*, 1945.
- [6] REISSNER E. On bending of elastic plates. *quarterly of applied mathematics*, 1947.
- [7] LO K.H.; CHRISTENSEN R.M.; WU E.M. A high-order theory of plate deformation. part2: laminated plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the Asme*, 1977.
- [8] MAUAD F. Integração de métodos numéricos no autocad. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2003.

- [9] DEVLOO P.R.B.; MENEZES F.A. Análise comparativa entre duas formulações para placas multicamadas. In *jubileo*.
- [10] KIRCHHOFF G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Crelles J.*, 1850.
- [11] SZABO B.A.; SAHRMANN G.J. Hierarchic plate and shell models based on p-extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988.
- [12] SZABO B.A.; ACTIS R.L.; BABUSKA I. Hierarchic models for laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992.
- [13] REDDY J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME.*, 1984.
- [14] REDDY J.N. A small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic plates. *Journal of applied Mechanics, Transactions of the ASME.*, 1987.
- [15] REDDY J.N. A general nonlinear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1990.
- [16] REDDY J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and analysis*. Number 782. Boca Raton, 1997.
- [17] VINSON J.R. *Structural Mechanics: The behavior of plates and shells*. Number 173. New York, 1974.
- [18] E.M. LO K.H.; CHRISTENSEN R.M.; WU. A high-order theory of plate deformation. part1: homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the Asme*, 1977.
- [19] DI SCIUVA M. An improved shear deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the Asme*, 1987.
- [20] REDDY J.N.; BOSE P. Analysis of composite plates using various plate theories. part 1: formulation and analytical solutions, 1998.

- [21] SIMÕES R. Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- [22] MINDLIN R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the Asme*, 1951.
- [23] SZABO B.A.; ACTIS R.L. Hierarquic models for laminated plates. *Adaptive, Multilevel and Hierarchical Computational Strategies*, 1992.
- [24] PRYOR C.W.; BARKER R.M. A finite element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates. *AAIA Journal*, 1971.
- [25] PACCOLA R.R. Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- [26] SRINIVAS S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of sound and vibration*, 1973.
- [27] TIMOSHENKO S.P.;WOINOWSKY-KRIEGER S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959. 580 páginas.

[1, 18, 7, 8, 25, 9, 24, 16, 13, 14, 15, 20, 4, 21, 12, 3, 23, 27, 17, 2, ?, ?, 27]