

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO**

**ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PARA
ESTRUTURAS SUPERFICIAIS UTILIZANDO A TRANSFORMADA
IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT)**

Ulises Bobadilla Guadalupe

Campinas, Fevereiro de 2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO

ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PARA
ESTRUTURAS SUPERFICIAIS UTILIZANDO A TRANSFORMADA
IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT)

Ulises Bobadilla Guadalupe

ORIENTADOR: Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Pérsio Leister de Almeida Barros

Tese de Doutorado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas.

Campinas, Fevereiro de 2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

B63a Bobadilla Guadalupe, Ulises
Análise dinâmica da interação solo-estrutura para estruturas superficiais utilizando a transformada implícita de Fourier (ImFT) / Ulises Bobadilla Guadalupe.--Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientadores: Aloísio Ernesto Assan, Pêrsio Leister de Almeida Barros

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Interação solo-estrutura. 2. Resposta em frequência (Dinâmica). 3. Fourier, Transformadas de. 4. Dinâmica estrutural. I. Assan, Aloísio Ernesto. II. Barros, Pêrsio Leister de Almeida. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. IV. Título.

Título em Inglês: Dynamic analysis of soil-structure interaction for surface structures using the implicit Fourier transform (ImFT)

Palavras-chave em Inglês: Dynamic soil-structure interaction (SSI), Frequency domain, Implicit Fourier transform (ImFT)

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Doutor em Engenharia Civil

Banca examinadora: Walnório Graça Ferreira, Antonio Maria Claret de Gouveia, Renato Pavanello, Mario Conrado Cavichia

Data da defesa: 28/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

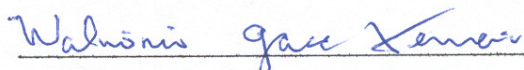
ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PARA
ESTRUTURAS SUPERFICIAIS UTILIZANDO A TRANSFORMADA IMPLÍCITA
DE FOURIER (ImFT)

Ulises Bobadilla Guadalupe

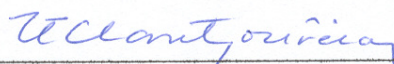
Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan
Presidente e Orientador
FEC/UNICAMP



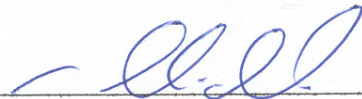
Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
CT/UFES



Prof. Dr. Antonio Maria Claret de Gouveia
EM/UFOP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia
FEC/UNICAMP

Campinas, 28 de fevereiro de 2008

A minha Família

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, fonte de espiritualidade e de infinita sabedoria.

Agradeço a minha família; pais e irmãos, pelo carinho incondicional, o suporte moral, o apoio material e a coragem mostrada em muitos momentos difíceis da nossa vida.

De forma especial agradeço ao professor Aloísio Ernesto Assan, meu orientador, quem sempre me acolheu com muito carinho, pela amizade, transmissão lúcida do conhecimento, paciência infinita e a confiança em minha pessoa me encorajando a enfrentar este trabalho.

Ao professor Pêrsio L. de Almeida Barros, meu co-orientador, pelos ensinamentos.

Ao professor Mario Conrado Cavichia pelo incentivo e apoio para fazer o programa de estagio docente (PED), experiência fundamental no meu futuro na docência universitária.

Aos professores Antonio Maria Claret de Gouveia, Walnório Graça Ferreira, Renato Pavanello e Mario Conrado Cavichia, membros da banca examinadora de doutorado, pelas valiosas contribuições para a versão final da tese.

Aos professores do Departamento de Estruturas da FEC/UNICAMP, sempre atenciosos comigo no apoio e nas minhas dúvidas.

A UNICAMP, pela concessão da bolsa de instrutor graduado e o apoio financeiro.

A todos os colegas da pós-graduação pelo apoio, amizade e companheirismo em todos os momentos desta caminhada.

Aos funcionários do departamento de estruturas e da pós-graduação, em especial à Paula e à Margarita.

Ao pessoal do CESET/UNICAMP em Limeira, SP; Diretora, professores, funcionários e alunos que me fizeram sentir em casa durante o meu estagio docente (PED A) nessa importante instituição.

RESUMO

Bobadilla Guadalupe, Ulises. **Análise dinâmica da interação solo-estrutura para estruturas superficiais utilizando a Transformada Implícita de Fourier (ImFT)**. 2008. 98 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. Brasil.

As características que determinam o comportamento de uma estrutura sob carregamento dinâmico são as massas dos vários elementos, a rigidez dos seus membros e a dissipação de energia. Para avaliar corretamente a resposta dinâmica de uma estrutura levando em conta os efeitos da interação, é necessário incorporar as propriedades dinâmicas do solo dentro da formulação matemática do modelo físico adotado. Referido à superestrutura, os efeitos da interação alteram a resposta estrutural final, devido à inter-relação dinâmica entre o movimento do solo e o movimento da base de fundação. Conseqüentemente, se primeiro se avalia o movimento da base de fundação [produto da interação solo-estrutura (SSI)], a resposta estrutural final poderá ser resolvida depois via análise modal da superestrutura. Esta conceituação é utilizada no presente trabalho. Aqui, todo o processo de análise é feito no domínio da frequência. A resposta estrutural é avaliada através da chamada Transformada Implícita de Fourier (ImFT), implementando-se para isto um algoritmo computacional que avalia a resposta dinâmica utilizando a ImFT eficientemente. A ImFT é uma avaliação racional das matrizes envolvendo as transformadas discretas de Fourier (DFT), para num mesmo processo matricial achar a resposta dinâmica estrutural diretamente no domínio do tempo. Correntemente, para a análise no domínio da frequência tem-se utilizado a FFT (Fast Fourier Transform); embora a FFT seja computacionalmente eficiente, apresenta-se aqui a ImFT, um outro processo computacional alternativo à FFT e bastante eficiente para certos tipos de carregamento tais como uma excitação sísmica, que é o carregamento utilizado nesta pesquisa.

Palavras – chave: Interação dinâmica solo-estrutura, domínio da frequência, transformada implícita de Fourier (ImFT).

ABSTRACT

Bobadilla Guadalupe, Ulises. **Dynamic analysis of soil-structure interaction for surface structures using the Implicit Fourier Transform (ImFT)**. 2008. 98 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. Brasil.

The characteristics that determine the behavior of a structure under dynamic loading are the masses of various elements, the rigidity of its members and the dissipation of energy. To properly evaluate the dynamic response of a structure taking into account the effects of the interaction, it is necessary to incorporate the dynamic properties of the soil within the mathematical formulation of the physical model adopted. Referred to the superstructure, the effects of interaction modify the final structural response due to the dynamic inter-relationship between the soil motion and the base of foundation motions. Consequently, if that first assesses the base of foundation motions [product of the soil-structure interaction effects (SSI)], the final structural response can be assessed later by modal analysis of the superstructure. This concept is used in this work. Here, the whole process of analysis is done in frequency domain. The structural response is evaluated by the so-called Implicit Fourier Transform (ImFT), implementing to this a computational algorithm that assesses the structural dynamic response using the ImFT efficiently. The ImFT is a rational assessment of matrices involving the Discrete Fourier Transform (DFT) for a same matrix process find structural dynamics response directly on time domain. Commonly, for the analysis in the frequency domain has been used the FFT (Fast Fourier Transform), although the FFT is efficiently, presents itself here the ImFT, another alternative computational algorithm and quite competent to certain types of loading such as a seismic excitation which is the loading used in this study.

Key words: Dynamic Soil-Structure Interaction (SSI), Frequency Domain, Implicit Fourier Transform (ImFT).

**ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PARA
ESTRUTURAS SUPERFICIAIS UTILIZANDO A TRANSFORMADA IMPLÍCITA
DE FOURIER (ImFT)**

SUMÁRIO

Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xii
Lista de Símbolos	xv
I- Introdução	1
I.1- Introdução e Objetivos	1
I.2- Breve histórico da análise dinâmica no domínio da frequência	5
I.3- Organização do trabalho	7
II- O fenômeno do amortecimento no processo vibratório	9
II.1- Considerações gerais	9
II.2- Energia dissipada através do amortecimento	10
II.3- Amortecimento viscoso	13
II.4- Amortecimento estrutural ou histerético	17
II.4.1- Energia dissipada no amortecimento estrutural	17
II.4.2- Fator de perda η	20
II.4.3- Modelo de amortecimento histerético não – causal	22
II.4.4- Modelo de amortecimento histerético - causal	26
II.5- Amortecimento geométrico ou por radiação	29
II.6- O módulo elástico e o princípio da correspondência	31
III- Interação solo – estrutura no domínio da frequência utilizando a análise modal e a transformada implícita de Fourier (ImFT)	33

III.1- Introdução	33
III.2- Modelo utilizado	34
III.3- Equações de movimento no domínio do tempo	35
III.4- Equações de movimento no domínio da frequência	36
III.5- Aplicação da análise modal nas equações no domínio da frequência	39
III.5.1- Modos de vibração e condições de ortogonalidade	39
III.5.2- Aplicação da análise modal nas equações de movimento no domínio da frequência	41
III.6- Implementação da transformada implícita de Fourier (ImFT)	45
III.6.1- A transformada implícita de Fourier (ImFT): Formulação básica	45
III.6.2- Algumas propriedades da transformada implícita de Fourier (ImFT)	51
III.6.3- Implementação da transformada implícita de Fourier (ImFT) no problema proposto	56
III.7- O modelo de interação solo-estrutura: Conceituação adicional	59
III.8- Matriz de Impedância Mecânica	62
III.8.1- Matriz de Impedância do Solo $\left[Z_{ff}^g \right]$	63
III.8.2- Algumas hipóteses para a Matriz de Impedância do Solo	64
IV- Exemplos Apresentados	67
IV.1- Introdução	67
IV.2- Primeiro exemplo	67
IV.2.1- Resultados	70
IV.3- Segundo exemplo	76
IV.4- Terceiro exemplo	80
IV.5- Quarto exemplo	83
IV.6- Quinto exemplo	87
IV.7.- Considerações relativas aos exemplos avaliados	90
V.- Considerações Finais e Bibliografia	93

V.1.- Considerações finais	93
V.2.- Recomendações para trabalhos futuros	93
V.3.- Bibliografia	94
V.3.1.- Referências Bibliográficas	94
V.3.2.- Bibliografia complementar	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frequências discretas	50
Tabela 2 - Coeficientes de impedância constantes para Richart et al. (1970)	66
Tabela 3 - Massas e rigidezes da estrutura	68
Tabela 4 - Características e parâmetros da fundação e do solo	69
Tabela 5 - Frequências naturais e períodos de vibração	70

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de interação solo–estrutura	34
Figura 2 – Modelo do problema analisado	68
Figura 3a – Interação solo-estrutura. Deslocamento do quarto andar. 1º exemplo	71
Figura 3b – Estrutura com base fixa. Deslocamento do quarto andar. 1º exemplo	71
Figura 4a – Interação solo-estrutura. Deslocamento do terceiro andar. 1º exemplo	72
Figura 4b – Estrutura com base fixa. Deslocamento do terceiro andar. 1º exemplo	72
Figura 5a – Interação solo-estrutura. Deslocamento do segundo andar. 1º exemplo	73
Figura 5b – Estrutura com base fixa. Deslocamento do segundo andar. 1º exemplo	73
Figura 6a – Interação solo-estrutura. Deslocamento do primeiro andar. 1º exemplo	74
Figura 6b – Estrutura com base fixa. Deslocamento do primeiro andar. 1º exemplo	74
Figura 7a – Deslocamento transversal da base de fundação (m). 1º exemplo	75
Figura 7b – Rotação da base de fundação (radianos). 1º exemplo	75
Figura 8 – Gráfico de acelerações do sismo do El Centro	76
Figura 9 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar. Segundo exemplo	77
Figura 10 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar. Segundo exemplo	77
Figura 11 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar. Segundo exemplo	78
Figura 12 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar. Segundo exemplo	78
Figura 13 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento transversal da base. Segundo exemplo	79
Figura 14 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Rotação da base (radianos). Segundo exemplo	79
Figura 15 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento	

do quarto andar. Terceiro exemplo	80
Figura 16 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do terceiro andar. Terceiro exemplo	81
Figura 17 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do segundo andar. Terceiro exemplo	81
Figura 18 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do primeiro andar. Terceiro exemplo	82
Figura 19 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento transversal da base. Terceiro exemplo	82
Figura 20 – Interação solo-estrutura com El Centro. Rotação da base (radianos). Terceiro exemplo	83
Figura 21 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar. Quarto exemplo	84
Figura 22 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar. Quarto exemplo	84
Figura 23 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar. Quarto exemplo	85
Figura 24 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar. Quarto exemplo	85
Figura 25 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento transversal da base. Quarto exemplo	86
Figura 26 – Interação solo-estrutura com El Centro. Rotação da base (radianos). Quarto exemplo	86
Figura 27 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar. Quinto exemplo	87
Figura 28 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar. Quinto exemplo	88
Figura 29 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar. Quarto exemplo	88

Figura 30 – Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar. Quinto exemplo	89
Figura 31 – Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento transversal da base. Quinto exemplo	89
Figura 32 – Interação solo-estrutura com El Centro. Rotação da base (radianos). Quinto exemplo	90

LISTA DE SÍMBOLOS

a_0	Frequencia adimensional
$\{a_j\}$	Modo de vibração não normalizado
a_{ij}	Componente do modo de vibração não normalizado $\{a_j\}$
b_0, b_1	Constantes de proporcionalidade ou fatores de amortecimento de Rayleigh
B_1, B_2	Constantes determinadas pelas condições iniciais de vibração
B'_1, B'_2	Constantes determinadas pelas condições iniciais de vibração
c	Coeficiente de amortecimento viscoso
c_{cr}	Coeficiente de amortecimento crítico
c_{eq}	Coeficiente de amortecimento equivalente
c_1	Parâmetro função de propriedades físicas e geométricas do sistema
c_{11}	Coeficiente de impedância do solo, referido ao amortecimento do solo, associado à translação horizontal da fundação
c_{12}	Coeficiente de impedância do solo associado ao acoplamento entre translação horizontal e rotação da fundação = c_{21}
c_{22}	Coeficiente de impedância do solo, referido ao amortecimento do solo, associado à rotação da fundação
c_x	Coeficiente de amortecimento do solo associado à translação da fundação, Richart et al. (1970)
c_θ	Coeficiente de amortecimento do solo associado à rotação da fundação, Richart et al. (1970)

$\text{conjg} (\)$	Complexo conjugado do valor dentro do parêntese
C_1, C_2	Constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais de vibração
$c(\omega)$	Coefficiente de amortecimento dependente da frequência
$[C]$	Matriz de amortecimento viscoso da estrutura
$\text{diag}[\cdot]$	Matriz diagonal
D	Constante arbitrária
DFT	Transformada discreta de Fourier
E	Módulo de elasticidade longitudinal real
E^0	Módulo de elasticidade longitudinal complexo
E^*	Matriz NxN simétrica com elemento genérico dado por $E_{nj}^* = e^{-(i 2\pi/N)nj}$
E	Matriz NxN simétrica com elemento genérico dado por $E_{nj} = e^{(i 2\pi/N)nj}$
$f(t)$	Força excitadora
f_e	Força de amortecimento estrutural
$f_d, f_d(t)$	Força de amortecimento viscoso
$F(\omega)$	Transformada de Fourier da força excitadora $f(t)$
F_0	Amplitude da força excitadora
F_d	Força de amortecimento geral
$F_d(\omega)$	Transformada de Fourier da força de amortecimento viscoso $f_d(t)$
FT	Transformada de Fourier
FFT	Transformada rápida de Fourier
G	Módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento)
$[G_j(\omega_k)]$	Matriz função de transferência na interação solo-estrutura para cada coordenada modal j

h_j	Altura, relativa à base da estrutura, do nível j
Hz	Hertz (frequência em <i>ciclos / s</i>)
$H(\omega_n)$	Função discreta de resposta em frequência
$H_j(\omega)$	Matriz de transferência da estrutura (ou matriz complexa de resposta em frequência), correspondente ao modo j
$[H_j(\omega_k)]$	Matriz diagonal para cada coordenada modal j , cujos elementos são a função de resposta em frequência para as frequências discretas do espectro de frequências
$[H(\omega)]$	Matriz diagonal com os correspondentes valores $H_j(\omega)$
I	Matriz identidade
I_0	Momento de inércia da fundação
I_t	Soma dos momentos de inércia de massa da estrutura e da fundação
I_T	Momento de inércia de massa total da estrutura e fundação relativo ao eixo central da fundação $= I_t + \sum_{j=1}^N m_j h_j^2$
IDFT	Transformada inversa discreta de Fourier
IFT	Transformada inversa de Fourier
ImFT	Transformada Implícita de Fourier
k	Rigidez, rigidez da mola, parâmetro com unidades de rigidez
k_x	Coeficiente independente da frequência correspondente a uma força estática necessária para produzir um deslocamento de translação horizontal unitário na fundação (Richart et al. (1970))
k_θ	Coeficiente independente da frequência correspondente ao momento estático que surge para uma rotação unitária da fundação (Richart et al. (1970))

k_1	Rigidez, parâmetro função de propriedades físicas e geométricas do sistema
k_{11}	Coeficiente de impedância do solo, referido à rigidez do solo, associado à translação horizontal da fundação
k_{12}	Coeficiente de impedância do solo associados ao acoplamento entre translação horizontal e rotação da fundação = k_{21}
k_{22}	Coeficiente de impedância do solo, referido ao amortecimento do solo, associado à rotação da fundação
K_2, K_3	Constantes independentes da frequência de excitação
$K_1(\omega)$	Parte real da rigidez dinâmica do modelo histerético causal
$K_{VV}(\omega)$	Função de impedância relativa à translação da fundação
$K_{MM}(\omega)$	Função de impedância relativa ao giro da fundação
$K_{VM}(\omega)$	Funções de impedância que exprimem o acoplamento entre translação e rotação da fundação = $K_{MV}(\omega)$
$\Re(\omega)$	Rigidez dinâmica para o modelo histerético causal
$[K]$	Matriz de rigidez da estrutura
m	Massa acoplada à mola, massa concentrada
m_j	Massa do nível j
m_0	Massa da base de fundação
m_T	Massa total do sistema (super - estrutura e fundação) = $\sum_{j=0}^N m_j$
$M(t)$	Momento de tombamento na interface fundação - solo
$M(\omega)$	Transformada de Fourier de $M(t)$
$[M]$	Matriz de massa da estrutura,

N	Número de graus de liberdade, número de valores discretos de uma função, número de termos da resposta
N_t	Número de intervalos discretos de uma função
$p(t)$	Carregamento no tempo
$p(t_j)$	Valor discreto do carregamento no tempo t_j
$P(\omega)$	Transformada de Fourier de $p(t)$
$P(\omega_n)$	Transformada discreta de Fourier correspondente à frequência ω_n
$R_{X0}(\omega)$	Função de transferência que relaciona a translação do solo com a translação da fundação
$R_{\Theta}(\omega)$	Função de transferência que relaciona a translação do solo com a rotação da fundação
s_1, s_2	Soluções de uma equação diferencial de segunda ordem
s	segundos
S	Coeficiente de rigidez dinâmico para sistemas viscoelásticos
S	Número de termos da resposta menor que N
$[S_j(\omega)]$	Fator de modificação do movimento do solo
$[S_j(\omega_k)]$	Matriz diagonal para cada coordenada modal j , com os correspondentes valores modais discretos $S_j(\omega_k)$
t_n	Intervalos discretos no tempo $= n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$)
T_p	Período do carregamento
V	Matriz transformada implícita de Fourier, triplo produto matricial $E H E^*$
V	Energia potencial máxima armazenada na mola durante um ciclo de vibração
V_s	Velocidade de propagação da onda cortante (ou onda cisalhante)

$V(t)$	Força cortante horizontal na interface fundação - solo
$V(\omega)$	Transformada de Fourier de $V(t)$
W_d	Perda de energia, energia dissipada por ciclo de vibração
$x, x(t)$	Deslocamento permanente, solução de equação diferencial de movimento
$\dot{x}$	Velocidade permanente, velocidade geral
$\ddot{x}$	Aceleração permanente, aceleração geral
$x_j, x_j(t)$	Translação horizontal, relativa à fundação, em cada nível da estrutura
$x(t_j)$	Resposta dinâmica no tempo discreto t_j
$x(0)$	Deslocamento inicial
$\dot{x}(0)$	Velocidade inicial
$x_j^a(t)$	Deslocamento horizontal total de cada nível = $x_0(t) + x_j(t) + h_j \theta(t)$
$x_0(t)$	Translação horizontal da fundação
$\{x^a(t)\}$	Vetor coluna de deslocamentos estruturais totais = $\{x_j^a(t)\}$
$\{x(t)\}$	Vetor coluna de deslocamentos transversais da estrutura relativas à fundação = $\{x_j(t)\}$
X	Amplitude do deslocamento permanente
$ X $	Amplitude na ressonância
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de $x(t)$
$\{X(\omega)\}$	Transformada de Fourier de $x = \{x_j\}$ (deslocamentos relativos da estrutura)
$X_0(\omega)$	Transformada de Fourier de X_0 (translação horizontal da base)
$X_g(\omega)$	Transformada de Fourier de $X_g(t)$ (movimento do solo)

$\ddot{\mathbf{X}}_g(\omega)$	Transformada de Fourier de $\ddot{\mathbf{X}}_g(t)$ (aceleração do solo)
$\left\{ \ddot{\mathbf{X}}_g(t_n) \right\}$	Vetor coluna de valores discretos da aceleração do solo no tempo
$\left\{ \ddot{\mathbf{X}}_g(\omega_k) \right\}$	Vetor coluna de valores discretos da aceleração do solo na frequência
$\{y(t)\}$	Deslocamentos da estrutura em coordenadas modais
$\{y_j(t_n)\}$	Vetor coluna de valores discretos de deslocamentos modais no tempo para cada componente modal y_j
$Y_j(\omega)$	Deslocamento correspondente ao modo j no domínio da frequência
$\{Y(\omega)\}$	Vetor coluna de deslocamentos modais da estrutura $= \{Y_j(\omega)\}$
$\{Y_j(\omega_k)\}$	Vetor coluna de valores discretos no domínio da frequência para cada deslocamento modal Y_j
$[Z_{ff}^g]$	Matriz de impedância do solo (ou matriz de rigidez dinâmica do solo)
$[Z(\omega)]$	Matriz de rigidez dinâmica do sistema solo-estrutura, também conhecida como matriz de impedância mecânica
α	Constante com unidades de força / deslocamento
ε	Número arbitrário real positivo com unidades em <i>rad/s</i>
γ	Fator de amortecimento estrutural
ϕ_{ij}	Modos de vibração ortonormais da matriz $[\Phi]$
φ	Ângulo de fase
η	Fator de perda
η_0	fator de perda constante independente da frequência de excitação, fator de amortecimento histerético

η_n	Fator de perda na ressonância
$\eta(\omega)$	Fator de perda dependente da frequência
ν	Módulo, coeficiente de Poisson
ρ	Densidade de massa, massa específica
ω	Frequência da excitação
ω_n	Frequências discretas do espectro de frequências
$\bar{\omega}$	Frequência natural do sistema
$\bar{\omega}_d$	Frequência natural amortecida
$\bar{\omega}_j$	Frequência natural da estrutura correspondente ao modo j
ω_k	Intervalos discretos na frequência = $k\Delta\omega$ ($k = 0,1,2,\dots,N_t - 1$)
$\theta(t)$	Rotação da base de fundação
ξ	Fator, taxa de amortecimento viscoso
ξ_j	Porcentagem de amortecimento crítico correspondente ao modo j
$[\Phi]$	Matriz contendo os modos de vibração ortonormais ϕ_{ij} da estrutura = $[\Phi_j]$
$\Theta(\omega)$	Transformada de Fourier de θ (rotação da base)
Δt	Intervalo de tempo em que o período total T_p do carregamento é dividido = $\frac{T_p}{N}$
$\Delta\omega$	Intervalo discreto na frequência = $\frac{2\pi}{T_p}$

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

ANÁLISE DINÂMICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PARA ESTRUTURAS SUPERFICIAIS UTILIZANDO A TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT)

I.1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

As estruturas, em geral, interagem com o solo circundante. Este processo é conhecido como a interação solo-estrutura.

A interação dinâmica das estruturas com o solo depende do tipo de estrutura e das características do solo de fundação.

Esta inter-relação dinâmica entre a resposta de uma estrutura e as características do meio de fundação é comumente conhecida como os “efeitos da interação”.

O fenômeno de interação é afetado principalmente pelo mecanismo de troca de energia entre o solo e a estrutura.

As características que determinam o comportamento de uma estrutura sob carregamento dinâmico são as massas dos vários elementos, a rigidez dos seus membros e a dissipação de energia. Para avaliar corretamente a resposta dinâmica de uma estrutura levando em conta os efeitos da interação, é necessário incorporar as propriedades dinâmicas do solo dentro da formulação matemática do modelo físico adotado.

A interação solo-estrutura apresenta, geralmente, os seguintes efeitos básicos [Wu & Smith (1995) e Safak (2006)]: (a) diminuição dos efeitos da ressonância das frequências dominantes do sistema comparativamente às frequências da estrutura com base fixa; (b) dissipação parcial da energia de vibração da estrutura através da radiação das ondas no solo; (c) modificação do movimento do solo de fundação produto do movimento do solo livre; (d) filtragem das altas frequências da excitação.

O solo pode ser considerado um meio semi-infinito, um domínio ilimitado, seja elástico ou viscoelástico. Por isso, os modelos de interação solo-estrutura deverão

caracterizar apropriadamente o meio ilimitado da fundação, diferenciando seu estudo através da dinâmica de solos, da dinâmica estrutural.

Os parâmetros dinâmicos do solo, entendido como um semi-espaço ilimitado, deverão representar a energia propagando-se para o infinito, isto é, a radiação de energia das ondas propagando-se nas camadas do solo.

Neste tipo de problema a excitação dinâmica e a resposta estrutural estão acopladas através da geometria da base de fundação e das propriedades dinâmicas do solo. A modelagem do amortecimento é mais complexa, visto que as forças de interação são dependentes da frequência, fazendo o tratamento destes sistemas serem mais apropriados no domínio da frequência. Os tipos de amortecimento predominantes são o amortecimento estrutural ou histerético (material do solo), e o chamado amortecimento geométrico ou por radiação das ondas no solo.

Para analisar uma estrutura sob carregamento dinâmico, é necessário definir um modelo matemático para representar o problema físico e uma função matemática para representar o tipo de excitação. Em geral uma estrutura real tem uma complexa distribuição de massas e rigidezes, assim, a estrutura tem um infinito número de graus de liberdade, e não resulta prático, nem computacionalmente econômico, tentar uma solução extremamente apurada. Pelo emprego de hipóteses simplificadoras relativas às massas e rigidezes, é possível substituir uma estrutura complexa por um modelo matemático tendo um número finito de graus de liberdade que seria equivalente à representação dinâmica da estrutura original.

O método de superposição modal tem sido amplamente utilizado na análise de sistemas lineares e atualmente amplia-se a sua utilização em sistemas não-lineares. Proporciona uma compreensão física de como os modos de vibração contribuem para o comportamento dinâmico do sistema.

Freqüentemente esta técnica pode proporcionar um menor trabalho computacional comparativamente com os métodos diretos, visto que, na maioria de análises, somente poucos modos podem contribuir de maneira importante para a resposta dinâmica das estruturas.

O objetivo deste trabalho é a análise da interação solo-estrutura (SSI, Soil - Structure Interaction) de uma estrutura superficial submetida a uma excitação dinâmica,

utilizando a transformada implícita de Fourier (ImFT). O tipo de excitação dinâmica a considerar será um tipo de excitação interna no solo: a excitação sísmica.

Os efeitos da interação são avaliados através do chamado *fator de modificação do movimento do solo*, $[S_j(\omega)]$ (eq. (84)), como mostrado no capítulo III e em Wu & Smith (1995). Este fator é obtido para cada modo de vibração da estrutura e depois é utilizado na determinação da resposta estrutural considerando a estrutura com base fixa.

Referido à superestrutura, os efeitos da interação alteram a resposta estrutural final devido à inter-relação dinâmica entre o movimento translacional do solo e o movimento da base de fundação que incluem as suas componentes de translação e rotação. Conseqüentemente, se primeiro se avalia o movimento da fundação (produto da interação solo-estrutura), a resposta estrutural final poderá ser definida depois via análise modal da superestrutura.

Este esquema de trabalho, utilizado por Wu & Smith (1995) e anteriormente utilizado por Meek & Veletsos (1972), Nair (1974), Gupta & Trifunac (1991), entre outros, é utilizado também no presente trabalho.

Todo o processo de análise é feito no domínio da frequência. A resposta estrutural é avaliada através da chamada Transformada Implícita de Fourier (ImFT), implementando-se para isto um algoritmo computacional que avalia a resposta dinâmica utilizando a ImFT eficientemente.

A ImFT é uma avaliação racional das matrizes envolvendo as transformadas discretas de Fourier (DFT), para num mesmo processo matricial achar diretamente a resposta dinâmica estrutural no domínio do tempo. Deve ser indicado que este processo (ImFT) foi implementado por dois grandes pesquisadores brasileiros: Os professores Fernando Venâncio Filho e Antonio M. Claret de Gouveia no seu artigo: “*Matrix formulation of the Dynamic Analysis of SDOF in the Frequency Domain*”. Computers & Structures, Vol. 42, 853-855 (1992).

Correntemente, para a análise no domínio da frequência, utiliza-se a FFT (Fast Fourier Transform). Embora a FFT seja computacionalmente eficiente, apresenta-se aqui um outro processo computacional alternativo à FFT e bastante eficiente para certos tipos de carregamento tais como a excitação sísmica.

O número de termos a utilizar para a resposta dinâmica na FFT deve ser potência de 2; portanto, se não for atingida precisão suficiente com um número definido de termos, somente duas vezes este número de termos deverão ser usados. A ImFT possui duas características importantes (entre outras): o número de termos da resposta é arbitrariamente escolhido e a DFT é implicitamente executada no mesmo procedimento que leva à resposta no domínio do tempo.

Até agora não foi apresentado nenhum trabalho utilizando e/ou implementando um algoritmo computacional utilizando a ImFT no tratamento de um problema de interação solo-estrutura. Esta implementação faz parte da contribuição da presente tese.

Neste trabalho, a implementação da ImFT para a análise dinâmica da interação solo-estrutura no domínio da frequência para estruturas superficiais desenvolvida no item III.6, mostra de forma elegante e compacta a utilização deste algoritmo computacional aplicado no sistema estrutural mostrado no item III.2.

Avalia-se o problema de interação solo-estrutura no domínio da frequência utilizando-se a análise modal e logo se implementa computacionalmente a ImFT para obter a resposta no domínio do tempo. Como parte da presente pesquisa desenvolveu-se um programa computacional em linguagem Fortran para avaliar estruturas superficiais sob a interação dinâmica solo-estrutura utilizando a ImFT.

Também serão utilizadas algumas funções de impedância mecânica do solo propostas na literatura e que servirão para comparar e validar a implementação apresentada.

Os últimos eventos sísmicos no ano de 2007 tanto no Peru (Pisco, Richter 7.9) quanto no Chile (Antofagasta, Richter 7.7), têm tido reflexos no Brasil. O Brasil já tem um pequeno histórico de eventos sísmicos menores no seu próprio território, sendo válido um estudo que faça referência ao carregamento sísmico.

O último sismo em Brasil (Itacarambi (MG)), em 09/12/2007 (Richter 4.9), produziu uma morte, vários feridos e muitas residências tiveram danos graves como queda de paredes, telhados, trincas e a estrutura com danos importantes.

Deve-se indicar que já está vigorando no Brasil, a partir de 30/11/2006, a Norma Sísmica ABNT NBR 15421 “Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos - Procedimento”, norma que fixa os requisitos exigíveis para verificação da segurança das estruturas usuais da construção civil relativamente às ações de sismos no seu território.

I.2 BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A análise dinâmica é feita tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Também é assim no caso de interação solo-estrutura.

A análise dinâmica no domínio da frequência recebeu um grande impulso depois do surgimento do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), desenvolvido por COOLEY & TUKEY (1965). Esse algoritmo facilitou o estudo de sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade e reduziu substancialmente o esforço computacional na avaliação da DFT (Discrete Fourier Transform), tornando a análise na frequência competitiva com os métodos no domínio do tempo.

PARMELEE (1967) indica a importância na interação das características dinâmicas do solo e resolve o problema de interação solo-estrutura através de um modelo dinâmico que avalia a estrutura e o meio de fundação integralmente (conhecido como método direto de análise da interação). Mostra também a importância da velocidade de propagação da onda transversal na interação solo-estrutura.

VAIS & CHOPRA (1974) resolvem o problema de interação solo-estrutura através de um processo de sub-estruturação no domínio da frequência. Tanto a estrutura quanto o solo de fundação são modelados através do método de elementos finitos (MEF). A resposta estrutural à excitação sísmica é obtida com ajuda da FFT. Mostra-se a dificuldade do método de elementos finitos para analisar convenientemente o amortecimento por radiação das ondas propagando-se nas camadas interiores do solo de fundação. Também utilizam o fato de que a resposta à excitação sísmica é afetada basicamente pelos primeiros modos de vibração da estrutura [TAJIMI (1967)].

KAUSEL & CHANG - LIANG (1975), na discussão do artigo de VAIS & CHOPRA (1974), destacam a diferença entre avaliar fundações superficiais e fundações enterradas.

GUTIERREZ & CHOPRA (1978) generalizam o método de sub-estruturação (inicialmente utilizado em fundações superficiais) apresentado por VAIS & CHOPRA (1974), para incluir as fundações enterradas. O solo é modelado tanto através de elementos finitos quanto através da modelagem como semi-espaço elástico infinito.

WOLF (1985) no seu texto reúne e apresenta organizadamente tanto o método direto quanto o método de sub - estruturação da análise dinâmica da interação solo-estrutura no domínio da frequência. Também conceitua o fenômeno de propagação de ondas no solo com o propósito de avaliar os coeficientes de rigidez dinâmica da matriz de impedância do solo.

GUPTA & TRIFUNAC (1991) apresentam um método de superposição do espectro de respostas no domínio da frequência para avaliar a interação solo-estrutura via transformada de Fourier. Os efeitos da interação no solo depois são avaliados numa estrutura com base fixa.

VENÂNCIO-FILHO & CLARET (1992) desenvolveram uma formulação matricial compacta de resolução das equações de movimento com o uso das transformadas discretas de Fourier. Esta formulação recebeu o nome de “Transformada Implícita de Fourier” (ImFT).

WU & SMITH (1995) apresentam uma metodologia eficiente utilizando a análise modal implementada no domínio da frequência para obter a resposta estrutural de um sistema incluindo a interação solo-estrutura sob uma excitação sísmica.

Soluções para as funções de impedância do solo, resultado da avaliação de um problema de valor misto em elastodinâmica foram implementadas nas duas últimas décadas eficientemente com a utilização do método dos elementos de contorno (MEC), tais como:

a).- MESQUITA NETO (1989) pesquisou funções de impedância para fundações rígidas superficiais assentadas sobre um semi-espaco viscoelástico utilizando o MEC.

b).- BARROS (1997) avalia as funções de impedância para diversos tipos de fundações rígidas com grande profundidade e clareza conceitual através do MEC e expressa que a maior eficiência do MEC em relação a outros métodos (por exemplo, o MEF), está no fato de que a condição de meio ilimitado do solo já está naturalmente considerada nas soluções fundamentais utilizadas no MEC.

FERREIRA (1998) utiliza a ImFT para avaliar as equações de movimento na análise dinâmica não-linear no domínio da frequência de sistemas estruturais com amortecimento não-clássico (não-proporcional, histerético e dependente da frequência).

MANSUR et al. (2000) utilizam a ImFT na avaliação de problemas dinâmicos não-lineares utilizando análise modal e processos iterativos no tempo. O processo também é

utilizado para resolver problemas que apresentam tipos de amortecimento chamados não-clássicos (não-proporcional, histeréticos e dependentes da frequência).

WU et al. (2001) utilizam a formulação de WU & SMITH (1995) para analisar estruturas irregulares com a inclusão da interação solo-estrutura e os efeitos de torção devidos à assimetria das estruturas.

SOARES & MANSUR (2003) apresentam uma versão da ImFT para sua aplicação em modelos dinâmicos não-lineares através da análise modal e o MEF. Para a análise não-linear utilizam o conceito de pseudoforças e um algoritmo computacional híbrido chamado de algoritmo unificado nos domínios do tempo e frequência (UFTD algorithm) que - segundo os seus autores- apresenta grande eficiência computacional através de uma versão modificada da ImFT.

BOBADILLA & ASSAN (2004) mostram a distorção ou aliasing presente nos valores discretos no domínio da frequência produzida pela utilização de um intervalo de discretização não suficientemente bem avaliado no domínio do tempo.

SALAJEGHEH et al. (2005) continuam as aplicações da transformada Wavelets, neste caso, na avaliação de estruturas sob excitação sísmica.

HALL (2006) avalia os problemas existentes no uso do amortecimento proporcional de Rayleigh na resposta de estruturas a excitações dinâmicas tais como os sismos.

SAFAK (2006) propõe um método para incorporar as funções de impedância que são dependentes da frequência de excitação dentro de uma análise padrão no domínio do tempo. Este método baseia-se na aproximação das funções de impedância por relações de polinômios complexos.

I.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo I traz uma introdução aos conceitos de dinâmica de estruturas e, especificamente, introduz idéias relativas aos conceitos de interação solo-estrutura no domínio da frequência. Apresenta também um breve histórico da pesquisa em análise dinâmica de estruturas tanto no âmbito internacional quanto no âmbito nacional.

Define-se aqui também o objetivo da tese que é a análise dinâmica da interação solo-estrutura no domínio da frequência utilizando a chamada Transformada Implícita de Fourier (ImFT), aplicado a uma estrutura superficial sob carregamento sísmico.

O capítulo II faz um estudo dos conceitos de dissipação de energia no processo vibratório. O fenômeno comumente chamado de amortecimento incluído na interação dinâmica solo-estrutura, envolve conceitos fundamentais de dissipação de energia que são básicos na resposta dinâmica final das estruturas.

Incluem-se aqui os chamados amortecimentos viscoso-proporcional, amortecimento histerético ou estrutural e o chamado amortecimento por radiação ou geométrico no solo.

O capítulo III, capítulo central da tese, apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de estrutura utilizado na tese e a correspondente aplicação do algoritmo de interação solo-estrutura no domínio da frequência utilizando a chamada transformada Implícita de Fourier (ImFT). Faz-se um estudo da ImFT e apresentam-se as suas características mais relevantes.

O capítulo IV apresenta os exemplos numéricos de modelagem da conceituação da interação solo-estrutura (SSI) no domínio da frequência.

Finalmente o capítulo V apresenta as considerações finais da tese, recomendações para trabalhos futuros e a bibliografia consultada.

CAPÍTULO II

O FENÔMENO DO AMORTECIMENTO NO PROCESSO VIBRATÓRIO

II.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os sistemas estruturais dinâmicos dissipam energia através dos seus chamados mecanismos de amortecimento.

O amortecimento é a capacidade que apresenta um sistema mecânico para reduzir a intensidade de um processo vibratório. A capacidade de amortecimento pode ser devida a interações com outros sistemas externos, ou devida a processos de interação internos do próprio sistema. Os efeitos do amortecimento num processo vibratório executam-se pela transformação (dissipação) da energia mecânica do movimento vibratório em outros tipos de energia, mais freqüentemente calor, que pode ser liberada pelo sistema.

Existem vários mecanismos de dissipação de energia vibratória que podem estar presentes em um sistema mecânico, alguns dos quais serão apresentados brevemente aqui e modelados matematicamente.

Nas equações de movimento e desde que coeficientes constantes nas derivadas no tempo do termo do deslocamento resultam em equações diferenciais lineares (que são de fácil resolução e análise), tais sistemas são generalizados em textos sobre vibração. Porém, um coeficiente de amortecimento constante descreve o chamado mecanismo viscoso de dissipação de energia que é difícil de materializar em aplicações reais.

Entre os mecanismos de dissipação de energia observados estão os do tipo histerético e os próprios dos materiais estruturais, tais como os correspondentes às condições de fricção externa entre os elementos estruturais (amortecimento por fricção de Coulomb ou amortecimento seco, etc.).

O amortecimento influi, direta ou indiretamente, nos seguintes parâmetros dos sistemas mecânicos, entre outros, (Rivin (1999)):

1. *Resistência à fadiga.* O aumento do amortecimento conduz à redução das amplitudes de tensão e deformação quando o regime do carregamento está perto da ressonância.

2. *Durabilidade*. Altas velocidades de vibração (perto da ressonância) podem acelerar significativamente o processo de envelhecimento das estruturas. Grandes amortecimentos no sistema suavizam estes efeitos.
3. *Eficiência (em relação às perdas por atrito)*. Dependendo dos parâmetros de vibração (amplitude, frequência, etc.), a vibração pode incrementar ou reduzir o atrito. No primeiro caso, o incremento do amortecimento pode melhorar a eficiência.
4. *Precisão* na manufatura dos elementos de máquinas. Apesar das bordas das superfícies manufaturadas serem diretamente afetadas pelas vibrações, a precisão nas dimensões destas pode ser diretamente influenciada pelas vibrações em baixa frequência. A avaliação do amortecimento melhora esta precisão.
5. A *estabilidade dinâmica* nos processos vibratórios de sistemas mecânicos pode ser melhorada introduzindo (ou adicionando) amortecimento dentro do sistema.
6. A *produção*, especialmente de peças com pouca rigidez, pode ser dificultada pela instabilidade dinâmica do elemento ou pelas vibrações perto da ressonância durante o processamento; o aumento do amortecimento pode melhorar este processo.

II.2 ENERGIA DISSIPADA ATRAVÉS DO AMORTECIMENTO

O amortecimento está presente em todos os sistemas vibratórios. Seu efeito é remover energia do sistema. A perda de energia é retirada do sistema por meio de algum mecanismo de radiação ou pela dissipação dentro do próprio sistema. Esta perda de energia resulta em um decaimento da amplitude da vibração livre.

A quantificação da dissipação de energia é geralmente determinada sob condições de oscilações cíclicas. Assim, a perda de energia por ciclo de vibração devida a uma força de amortecimento F_d é avaliada através da equação geral (Thomson & Dahleh(1998)):

$$W_d = \oint F_d \, dx \quad (1)$$

Em geral, W_d depende de muitos fatores como: temperatura, frequência, amplitude.

Considere-se o caso mais simples de dissipação de energia, aquele relativo a um sistema massa - mola com amortecimento viscoso vibrando a uma frequência ω . A força de amortecimento viscoso será:

$$f_d = c \dot{x} \quad (2)$$

onde C é o coeficiente de amortecimento viscoso.

O deslocamento e a velocidade permanentes são:

$$\begin{aligned} x &= X \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{x} &= \omega X \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

onde X é a amplitude do deslocamento, ω é a frequência da excitação e φ é o ângulo de fase. A energia dissipada por ciclo de vibração será:

$$W_d = \int_0^{2\pi/\omega} c \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} dt \quad (4a)$$

Ou:

$$W_d = \oint c \dot{x} dx = \oint c \dot{x}^2 dt = c \omega^2 X^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \pi c \omega X^2 \quad (4b)$$

É importante avaliar a energia dissipada em vibração forçada para a ressonância; ou seja, quando $\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} = 1 \right)$, onde: $\bar{\omega} = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do sistema.

Neste caso, a eq. (4b) fica:

$$W_d = 2\xi \pi k X^2 \quad (5)$$

onde $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$ é o fator de amortecimento viscoso;

$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km}$ é o amortecimento crítico;

m é a massa acoplada à mola;

k é a rigidez da mola.

A influência mais importante do amortecimento na resposta é limitar a amplitude na ressonância. A presença do amortecimento esclarece o fato de que a resposta de um processo vibratório na ressonância não cresce sem limite.

No caso de amortecimento viscoso, a amplitude na ressonância é:

$$|X| = \frac{F_0}{c \omega} = \frac{F_0}{2 \xi k} \quad (6)$$

onde F_0 é a amplitude da força excitadora.

Para outros tipos de amortecimento, a expressão para a amplitude na ressonância não é muito simples. Porém, é possível aproximá-la substituindo-se C na eq. (6) por um amortecimento equivalente C_{eq} . Este amortecimento avalia-se igualando a energia dissipada no amortecimento viscoso com a energia dissipada no amortecimento não - viscoso (assumindo-se para este último um movimento harmônico).

Então, da eq. (4b), tem-se:

$$\pi C_{eq} \omega X^2 = W_d \quad (7)$$

onde W_d deve ser avaliada para o tipo específico de força de amortecimento a considerar.

II.3 AMORTECIMENTO VISCOSO

Como indicado previamente, materializar um mecanismo de amortecimento viscoso não é corrente em aplicações reais; no entanto sua análise é proveitosa para o estudo inicial do fenômeno vibratório e para definir características específicas correspondentes a este tipo de mecanismo de amortecimento.

A força correspondente a um amortecimento viscoso é a estabelecida na eq. (2).

Se um amortecedor viscoso é situado em paralelo com uma mola, a equação diferencial de movimento deste clássico sistema mecânico com um grau de liberdade (SDOF), sem excitação externa, pode ser escrita como:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (8)$$

Observe-se que a força de amortecimento $c\dot{x}$ também é oposta ao movimento da massa, assim, tem o mesmo sinal que a força recuperadora kx .

A solução geral da eq. homogênea (8) para raízes diferentes da equação característica é:

$$x = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

Onde B_1 e B_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais de vibração $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, deslocamento e velocidade iniciais respectivamente.

Cada uma das componentes de x na eq. (9) são soluções independentes. Assim pode-se considerar uma solução típica da forma: $x = e^{st}$, daqui $\dot{x} = s e^{st}$ e $\ddot{x} = s^2 e^{st}$; deste modo, a eq. (8) fica: $ms^2 e^{st} + c s e^{st} + k e^{st} = 0$; como $e^{st} \neq 0$ tem-se: $ms^2 + cs + k = 0$, conhecida como a *equação característica* do sistema.

A solução dessa equação característica é:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (10a)$$

Esta solução tem duas formas básicas: a primeira é quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$; neste caso, ambos os valores S_1 e S_2 são números reais e, conseqüentemente, liberada a massa, esta volta exponencialmente até a posição de equilíbrio sem executar qualquer oscilação. Este caso é conhecido como vibração *sobreamortecida*.

Se, porém: $\frac{k}{m} > \left(\frac{c}{2m}\right)^2$, a quantidade dentro da raiz quadrada é negativa e S_1 e

S_2 são definidos como:

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (10b)$$

Substituindo-se os valores de S_1 e S_2 na eq. (9) e, levando em conta também a fórmula de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$, a solução da equação diferencial de movimento pode ser escrita na forma:

$$x = e^{-ct/2m} \left(B_1' \cos(\bar{\omega}_d t) + B_2' \sin(\bar{\omega}_d t) \right) \quad (11)$$

onde B_1' e B_2' são constantes determinadas pelas condições iniciais e

$$\bar{\omega}_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

Este processo oscilatório é chamado de vibração *subamortecida*.

O termo $e^{-ct/2m}$ é uma função no tempo decaindo exponencialmente.

O limite entre o movimento oscilatório e não oscilatório é quando: $\frac{k}{m} = \left(\frac{c}{2m}\right)^2$, quando o amortecimento no sistema é igual ao amortecimento crítico: $c = c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\bar{\omega}$, portanto:

$$\frac{c}{c_{cr}} = \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (12)$$

Onde ξ é a taxa de amortecimento viscoso. Deste modo:

$$\bar{\omega}_d = \bar{\omega} \sqrt{1 - \xi^2} \quad (13)$$

que é chamada de *freqüência natural amortecida*, sendo $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a freqüência natural do sistema.

Sabe-se que para valores de $\xi < 0.2$, que é o caso do maior número de aplicações práticas, o efeito do amortecimento na freqüência natural do sistema é desprezível. Acima deste valor a freqüência natural amortecida reduz-se paulatinamente.

Pode-se expressar S_1 e S_2 em termos de ξ .

Deste modo a eq. (10a) fica:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\bar{\omega} \quad (14)$$

Então, os três casos de amortecimento discutidos aqui dependem se ξ é maior, menor ou igual que a unidade.

Além disso, a equação diferencial de movimento [eq. (8)], pode ser expressa em termos de ξ e $\bar{\omega}$ como:

$$\ddot{x} + 2\xi\bar{\omega}\dot{x} + \bar{\omega}^2 x = 0 \quad (15)$$

Esta forma da equação para sistemas simples (SDOF) é útil para a identificação da frequência natural e do amortecimento do sistema.

Correntemente encontra-se também esta equação na análise modal de sistemas com muitos graus de liberdade (MDOF).

Substituindo-se a eq. (14) na eq. (9), tem-se a solução geral para o caso de subamortecimento ($\xi < 1$):

$$x = e^{-\xi\bar{\omega}t} (B_1 e^{i\bar{\omega}_d t} + B_2 e^{-i\bar{\omega}_d t}) \quad (16)$$

Esta equação pode também ser escrita em qualquer uma das duas formas seguintes:

$$x = e^{-\xi\bar{\omega}t} (C_1 \sin \bar{\omega}_d t + C_2 \cos \bar{\omega}_d t) \quad (17)$$

$$x = X e^{-\xi\bar{\omega}t} \sin(\bar{\omega}_d t + \varphi) \quad (18)$$

Onde as constantes arbitrárias C_1 e C_2 , ou X e φ , são determinadas a partir das condições iniciais de vibração.

Com as condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, a eq. (17) torna-se:

$$x = e^{-\xi \bar{\omega} t} \left(\frac{\dot{x}(0) + \xi \bar{\omega} x(0)}{\bar{\omega}_d} \text{sen} \bar{\omega}_d t + x(0) \cos \bar{\omega}_d t \right) \quad (19)$$

II. 4.- AMORTECIMENTO ESTRUTURAL OU HISTERÉTICO

II.4.1 ENERGIA DISSIPADA NO AMORTECIMENTO ESTRUTURAL

Quando os materiais são submetidos a uma tensão cíclica, a energia dissipa-se internamente nos próprios materiais. Experimentos feitos por pesquisadores (Thomson & Dahleh(1998)), demonstram que, para a maioria de metais estruturais, tais como o aço e o alumínio, a energia dissipada em um ciclo de vibração é independente da frequência de excitação sobre uma ampla faixa de frequências e é proporcional ao quadrado da amplitude de vibração.

Este tipo de amortecimento interno é conhecido como amortecimento sólido ou estrutural. Desta forma, a energia dissipada através do amortecimento estrutural pode ser escrita como:

$$W_d = \alpha X^2 \quad (20)$$

Onde α é uma constante com unidades de força / deslocamento.

Com a utilização do conceito de amortecimento viscoso equivalente, a eq. (7) fica:

$$\pi c_{eq} \omega X^2 = \alpha X^2. \text{ Assim:}$$

$$c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega} \quad (21)$$

Substituindo C por c_{eq} , a equação diferencial de movimento [eq. (8)], para um sistema com amortecimento estrutural e excitação harmônica, pode ser escrito como:

$$m\ddot{x} + \left(\frac{\alpha}{\pi\omega}\right)\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (22)$$

É importante estabelecer que esta equação é válida para movimento harmônico, pois somente neste caso a magnitude do deslocamento é igual à magnitude da velocidade dividida por ω ($x = X e^{i\omega t}$, $\dot{x} = i\omega x$).

Também, a solução complementar ou homogênea da eq. (22) não é definida visto que a presença de ω torna o problema indefinido.

A eq. (22) só é válida para a resposta permanente em um meio viscoelástico.

Então, assumindo oscilações harmônicas num meio viscoelástico:
 $x = X e^{i\omega t}$, $\dot{x} = i\omega x$.

Assim, a equação (22) pode ser reescrita como:

$$m\ddot{x} + \left(k + i\frac{\alpha}{\pi}\right)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (23)$$

Fazendo $\gamma = \frac{\alpha}{\pi k}$, a equação anterior fornece:

$$m\ddot{x} + k(1 + i\gamma)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (24)$$

A quantidade $k(1 + i\gamma)$ é conhecida como *rigidez complexa* ou *amortecimento complexo*, e γ é o chamado *fator de amortecimento estrutural*.

Com a solução $x = X e^{i\omega t}$, a amplitude permanente X na eq. (24) fica:

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i \gamma k} \quad (25)$$

Logo, a amplitude na ressonância é:

$$|X| = \frac{F_0}{\gamma k} \quad (26)$$

Comparando esta equação com a resposta em ressonância de um sistema com amortecimento viscoso dado na eq. (6), pode-se concluir que, para as mesmas amplitudes na ressonância, o fator de amortecimento estrutural é igual a duas vezes o fator de amortecimento viscoso. Assim:

$$\gamma = 2\xi \quad (27)$$

Com ajuda das eqs. (24) e (27), deduz-se uma força de amortecimento estrutural como:

$$f_e = i 2 \xi k x(t) = i \gamma k x(t) \quad (28)$$

Deste modo, para um sistema elástico define-se uma força de amortecimento estrutural como proporcional à força elástica, mas em fase com a velocidade.

A simplicidade do modelo de amortecimento viscoso permitiu que o amortecimento histerético fosse substituído pelo amortecimento viscoso equivalente. Porém, é necessário ter cuidados com esta substituição. Isto porque as curvas de respostas para os dois tipos de amortecimento têm formas diferentes e, assim, as respostas só podem ser equivalentes para uma determinada frequência; correntemente utiliza-se a frequência de ressonância.

II.4.2 FATOR DE PERDA η (LOSS-FATOR)

A eq.(4b) mostra a energia dissipada em um ciclo de vibração. Esta energia não é afetada pela mudança do sinal de ω . Assim, considerada como uma função de ω , a perda de energia por ciclo é uma função real, não - negativa e par.

Assim sendo, a eq.(4b) também pode ser mostrada da seguinte forma:

$$W_d = \pi c |\omega| X^2 \quad (29)$$

A eq. (5) pode ser rearranjada da seguinte forma: $W_d = (2\xi)(2\pi) \left(\frac{k X^2}{2} \right)$.

Nesta equação, a última quantidade em parêntese é a energia potencial máxima V armazenada na mola durante um ciclo de vibração, ou seja:

$$V = \frac{1}{2} k X^2 \quad (30)$$

Com este valor de V tem-se para $W_d = (2\xi)(2\pi) V$, ou:

$$\frac{W_d}{(2\pi) V} = (2\xi) \quad (31a)$$

Pela eq. (27) tem-se que $\gamma = 2\xi$, ou seja:

$$\frac{W_d}{(2\pi) V} = (2\xi) = \gamma \quad (31b)$$

Ou:

$$\gamma = \frac{W_d}{2\pi V} \quad (31c)$$

Uma medida conveniente do amortecimento é obtida comparando a perda de energia num ciclo W_d com a energia potencial máxima V armazenada no sistema durante este ciclo de vibração.

O fator de perda η é definido como:

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi V} \quad (32)$$

Comparando as equações (31c) e (32), pode ser dito que o fator de amortecimento estrutural γ é equivalente ao fator de perda η .

Substituindo-se (29) e (30) em (32) tem-se:

$$\eta = \frac{c|\omega|}{k} \quad (33)$$

que também é uma função de ω real, não – negativa e par.

Em muitas aplicações o amortecimento é pequeno e somente é importante na ressonância ou perto dela. Nesses casos o fator de perda η também pode ser utilizado para quantificar os efeitos do amortecimento na ressonância ($\omega = \bar{\omega}$), assim:

$$\eta_n = \frac{c\bar{\omega}}{k} = \frac{c}{m\bar{\omega}} = \frac{c}{\sqrt{km}} \quad (34)$$

onde η_n é o fator de perda na ressonância.

Para um sistema massa – mola ideal, o parâmetro de amortecimento C é constante e o fator de perda é dado por (33).

Para a medição de um mecanismo de amortecimento com variada dependência da frequência, utiliza-se a eq. (33) para definir um coeficiente de amortecimento C , dependente da frequência, como:

$$c(\omega) = \frac{k\eta(\omega)}{|\omega|} \quad (35)$$

que também é uma função de ω real, não – negativa e par.

II.4.3 MODELO DE AMORTECIMENTO HISTERÉTICO NÃO-CAUSAL

Para um amortecedor viscoso ideal (inicialmente utilizado por Strutt, J.W. Lord Rayleigh [1937]), com coeficiente de amortecimento C , a representação no domínio do tempo da relação entre força e movimento é dada pela equação diferencial:

$$f_d = c \frac{dx}{dt} \quad (36)$$

Esta equação pode ser transformada para o domínio da frequência, obtendo-se:

$$F_d(\omega) = i\omega cX(\omega) \quad (37)$$

onde $F_d(\omega)$ é a transformada de Fourier da força de amortecimento $f_d(t)$ e $X(\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$.

Desde que o fator de perda η para mecanismos de amortecimento reais é quase sempre medido sob oscilações cíclicas ou quase cíclicas, é apropriado generalizar a eq. (37) inserindo a relação (35) válida para amortecimentos com parâmetros dependentes da frequência, assim:

$$F_d(\omega) = i\omega c(\omega)X(\omega) = \frac{i\omega k}{|\omega|} \eta(\omega)X(\omega) = ik\eta(\omega)\text{sgn}(\omega)X(\omega) \quad (38)$$

a função sinal $\text{sgn}(\omega)$ toma o valor $(+1)$ para valores positivos de ω e (-1) para valores negativos de ω , (e é nula para $\omega = 0$).

A eq. (38) define o comportamento para um modelo analítico muito útil: o *modelo de amortecimento linear dependente da frequência*. É importante observar que esta definição é feita no *domínio da frequência*.

O modelo de amortecimento linear mais correntemente utilizado em dinâmica de estruturas é o modelo de Kelvin (Inaudi & Kelly [1995]): uma mola linear em paralelo com um amortecedor ideal viscoso. O sistema estrutural modelado com os elementos de Kelvin fornece, no domínio do tempo, a seguinte equação diferencial de segunda ordem, relacionando a força excitadora $f(t)$ e o correspondente deslocamento $x(t)$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (39)$$

A representação correspondente desta equação no domínio da frequência é:

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k)X(\omega) = F(\omega) \quad (40)$$

Substituindo o amortecedor ideal (com constante C) por um amortecedor com parâmetro $c(\omega)$ dependente da frequência [eq. (35)], a correspondente representação no domínio da frequência fica:

$$(-m\omega^2 + i\omega c(\omega) + k)X(\omega) = F(\omega) \quad (41)$$

Ou, com ajuda da eq. (35):

$$\left(-m\omega^2 + k[1 + i\eta(\omega)\text{sgn}(\omega)]\right)X(\omega) = F(\omega) \quad (42)$$

Estas relações no domínio da frequência são de utilização imediata para obter respostas harmônicas permanentes ou inclusive espectros de respostas randômicos estacionários.

Um modelo de amortecimento extensamente utilizado por pesquisadores é aquele para o qual é assumido que o fator de perda η é uma constante independente da frequência de excitação (η_0). Neste caso a eq. (35) fica:

$$c(\omega) = \frac{k\eta_0}{|\omega|} = \frac{k\eta_0}{\omega} \text{sgn}(\omega) \quad (43)$$

Assim, a equação no domínio da frequência (41) será:

$$\left(-m\omega^2 + k[1 + i\eta_0 \text{sgn}(\omega)]\right)X(\omega) = F(\omega) \quad (44)$$

Esta equação utiliza o chamado *modelo de amortecimento histerético - linear*.

Existem certas limitações para que os modelos de amortecedores dependentes da frequência possam representar mecanismos de amortecimento fisicamente realizáveis. Por exemplo, como já estabelecido, $c(\omega)$ da eq. (35) deverá ser uma função de ω real, não – negativa e par, como indicado por Crandall (1961).

Alem disto existe um importantíssimo, mas sutil requerimento físico: a *causalidade*; $c(\omega)$ deverá ser uma função de ω tal que a relação correspondente no domínio do tempo para o valor de $X(\omega)$ na eq. (38), ou seja, o valor $x(t)$ seja *causal*.

Causal significando que $x(t)$ para qualquer instante t deverá depender somente da história prévia da excitação $f_d(\tau)$ para $\tau < t$, mas deverá ser independente do futuro comportamento de $f_d(\tau)$ para $\tau > t$.

O tipo de amortecimento linear com dissipação independente da frequência, utilizado na eq. (44) é conhecido também como *amortecimento histerético ideal* (Crandall (1961)), ou ainda *amortecimento histerético constante* (Bishop (1955)).

Inicialmente foi introduzido por Theodorsen & Garrick em 1940 com o nome de *modelo de fricção estrutural - linear*.

Bishop (1955) enfatizou que representações tais como a eq. (44) são válidas somente para vibrações harmônicas permanentes.

Vários intentos foram feitos para aplicar tais equações a movimentos transientes. Funções de resposta ao impulso para sistemas com amortecimento histerético foram obtidas independentemente por Crandall (1961) e Caughey (1962). Estes pesquisadores descobriram que o *amortecedor histerético – ideal* viola o requerimento de *causalidade* (existe uma resposta antes da excitação; a excitação antecipasse ao histórico de deformações para vibrações transientes).

Este resultado viola o principio de que, para sistemas físicos, o efeito não pode preceder à causa.

A rigidez dinâmica (ou rigidez complexa) para o elemento que utiliza um modelo de amortecimento constante é dada por [eq. (44)]:

$$k[1 + i\eta_0 \text{sgn}(\omega)] \quad (45)$$

onde k é um parâmetro com unidades de rigidez e η_0 é o fator de perda independente da frequência de excitação.

A parte imaginária desta equação representa a dissipação de energia do modelo enquanto a parte real representa o armazenamento de energia no modelo.

A eq. (45) tem uma parte real constante e a função sinal como parte imaginária. Precisamente este tipo de combinação entre parte real e parte imaginária faz com que o amortecedor histerético constante seja fisicamente irrealizável.

Para o modelo ser causal, a parte real da eq. (45) deve ser a transformada de Hilbert da parte imaginária (Bracewell (1986)). Esta operação garante que a resultante função de resposta no domínio do tempo seja causal.

Esta conclusão pode ser vista em Makris (1997).

Assim, este modelo não-causal caracteriza-se por ter coeficientes de dissipação de energia (parte imaginária), e de armazenamento (parte real), independentes da frequência de excitação.

II.4.4 MODELO DE AMORTECIMENTO HISTERÉTICO - CAUSAL

A rigidez dinâmica dos modelos histeréticos causais propostos na literatura (Makris (1997)), tem a mesma parte imaginária que o modelo de amortecimento histerético ideal, mas a parte real é a adequada para fazer deste modelo um modelo causal.

Como indicado no item anterior, as partes real e imaginária do modelo histerético causal devem estar relacionadas através da transformada de Hilbert (Bracewell (1986)). Esta relação na rigidez dinâmica é a condição necessária e suficiente para garantirmos causalidade da resultante função de resposta no domínio do tempo.

Então, uma vez estabelecida a parte imaginária do modelo [eq. (45)], a correspondente parte real deverá ser a transformada de Hilbert desta parte imaginária.

Portanto, a rigidez dinâmica para o modelo histerético causal será:

$$\Re(\omega) = K_1(\omega) + iK_2 \operatorname{sgn}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \quad (46)$$

onde $K_1(\omega)$ é a parte real da rigidez dinâmica do modelo histerético causal e K_2 é uma constante independente da frequência de excitação.

ω é a frequência de excitação variável e ε é um número arbitrário real positivo com unidades em *rad/s* que está presente na equação para fazer o argumento da função sinal adimensional.

A parte imaginária da eq. (46) é a mesma parte imaginária do modelo histerético linear dado por (45), de modo que a energia dissipada pelo modelo causal é independente da frequência de excitação.

A parte real $K_1(\omega)$ é dada pela transformada de Hilbert da parte imaginária da eq. (46):

$$K_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_2 \operatorname{sgn}(\varphi)}{\left(\frac{\omega}{\varepsilon} - \varphi\right)} d\varphi \quad (47)$$

Utilizando-se a teoria de funções generalizadas, a integral de convolução da eq. (47) pode ser avaliada através da transformada de Fourier. Levando em conta estes conceitos, obtém-se a seguinte relação para $K_1(\omega)$:

$$K_1(\omega) = \frac{2}{\pi} K_2 \left(\ln \left| \frac{\omega}{\varepsilon} \right| + D \right) \quad (48)$$

Onde D é uma constante arbitrária introduzida no processo de avaliação de $K_1(\omega)$.

Introduzindo $K_3 = (2/\pi)K_2D$, a eq. (48) fica:

$$K_1(\omega) = K_3 + \frac{2}{\pi} K_2 \ln \left| \frac{\omega}{\varepsilon} \right| \quad (49)$$

Sendo K_2 e K_3 constantes independentes da frequência.

Substituindo-se (49) em (46), obtém-se a rigidez dinâmica para o modelo histerético causal:

$$\Re(\omega) = K_3 \left[1 + \frac{2}{\pi} \eta_0 \ln \left| \frac{\omega}{\varepsilon} \right| + i \eta_0 \operatorname{sgn} \left(\frac{\omega}{\varepsilon} \right) \right] \quad (50)$$

Onde $\eta_0 = \frac{K_2}{K_3}$ é um número real positivo chamado *fator de amortecimento histerético*.

A eq. (50) mostra que embora o parâmetro de dissipação (parte imaginária) do elemento histerético causal seja independente da frequência de excitação, o parâmetro de armazenamento (parte real) é dependente da frequência de excitação aproximando-se do infinito negativo quando a frequência tende para o valor zero.

Entretanto, a constante arbitrária (ε) não depende do problema físico e pode considerar-se tão pequena quanto desejada, de modo que a parte real da eq. (50) meça um valor de rigidez realístico para qualquer frequência finita. Conseqüentemente, este tipo de modelo histerético causal (Makris (1997)) é fisicamente realizável para qualquer frequência finita, mas não está definida para $\omega = 0$.

A rigidez dinâmica do elemento histerético causal é nada mais do que a familiar rigidez complexa não – causal (eq. (45)), $K_3 [1 + i \eta_0 \operatorname{sgn}(\omega)]$ (Inaudi & Kelly (1995)),

com o termo $\frac{2}{\pi} \eta_0 \ln \left| \frac{\omega}{\varepsilon} \right|$ acrescentada à sua parte real de modo a satisfazer a causalidade.

Assim, as partes real e imaginária do modelo histerético causal (eq. (50)), estão relacionadas pela transformada de Hilbert.

Esta condição implica que a resultante função de resposta no tempo deverá ser nula para valores negativos do tempo.

II.5.- AMORTECIMENTO GEOMÉTRICO OU POR RADIAÇÃO

Os mecanismos de dissipação de energia no solo têm sido pesquisados modernamente em face do interesse na interação dinâmica solo - estrutura como solicitação de projeto em obras importantes.

Na análise dinâmica de sistemas solo - estrutura a dissipação de energia ocorre predominantemente pelo amortecimento estrutural (ou histerético) e pelo amortecimento geométrico ou por radiação.

Quando uma base ou fundação se movimenta em sentido oposto ao solo circundante, ondas de tensão originam-se na superfície de contato e propagam-se para fora deste.

Essas ondas tiram um pouco da energia transmitida pela fundação ao solo, fenômeno esse que faz lembrar a absorção de energia pelos amortecedores viscosos, daí o nome de amortecimento por radiação.

O amortecimento geométrico ou por radiação é um conceito fundamental nos modernos métodos de análise dinâmica de interação solo – estrutura.

Seja uma fundação vibrando verticalmente na superfície de um semi - espaço viscoelástico.

Da fundação, fonte de vibração propagam-se no semi - espaço ondas de corpo (longitudinais e transversais) e ondas de superfície (Rayleigh e Love).

Esses dois tipos de ondas, à medida que se afastam da fonte, propagam-se em um volume cada vez maior de material.

Desse modo, a densidade de energia e, conseqüentemente, a amplitude da vibração, decrescem em cada onda, constituindo-se no chamado amortecimento geométrico ou por radiação (Claret (1991)).

Para a modelagem do amortecimento geométrico, observa-se que o sistema cuja resposta se deseja determinar consiste de duas partes distintas com diferentes propriedades: a estrutura generalizada, consistindo da superestrutura, fundação e possivelmente uma região vizinha do solo, e o solo modelado como um domínio semi - infinito.

A estrutura generalizada é, em geral, discretizada em elementos finitos.

Para analisar o solo, é necessário adotar uma superfície de contorno, cujas propriedades sintetizem aquelas do subdomínio de solo em seu exterior.

Especificamente, uma condição de radiação deve ser adotada, assegurando que apenas ondas que se propagam da fonte para o exterior existam no domínio (Claret (1991)).

As condições de radiação conduzem a coeficientes de rigidez dinâmicos que, no caso de sistemas viscoelásticos unidimensionais, têm a forma:

$$S = k_1 + i a_0 c_1 \quad (51)$$

Onde a_0 é um termo denominado frequência adimensional; k_1 e c_1 são calculados em função de propriedades físicas e geométricas do sistema.

Multiplicando S pelo deslocamento X da massa na direção considerada, o termo $(k_1 X)$ representa uma força elástica, enquanto $(i a_0 c_1 X)$ é uma força de amortecimento desfasada de $\pi/2$ radianos do deslocamento.

Conseqüentemente o amortecimento geométrico no sistema é quantificado pelo termo $(a_0 c_1)$.

A magnitude deste amortecimento depende principalmente da frequência de excitação, da geometria do sistema solo – fundação, do tipo de vibração e das características de tensão – deformação do solo.

Os efeitos deste amortecimento poderão ser adicionados àqueles efeitos causados pelo amortecimento histerético no solo.

Sua existência foi inicialmente revelada por Reissner (1944) na solução do problema de um semi – espaço elástico excitado dinamicamente por um disco circular carregado uniformemente em vibração vertical.

Nos casos bidimensional e tridimensional, a eq. (51) permanece válida, porém, k_1 , c_1 , e S transformam-se em matrizes com o mesmo significado físico antes enunciado.

II.6.- O MÓDULO ELÁSTICO E O PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA

A consideração do amortecimento hysterético na análise dinâmica de sistemas solo-estrutura pode ser feita utilizando-se o princípio da correspondência para sistemas viscoelásticos que estabelece que, quando o problema é tratado no domínio da frequência, constantes complexas devem ser utilizadas substituindo-se as constantes elásticas reais correspondentes.

Assim, sendo γ o fator de amortecimento estrutural o módulo elástico complexo correspondente ao modelo de amortecimento hysterético com dissipação de energia independente da frequência é:

$$E^0 = E (1 + i \gamma) = E (1 + i 2 \xi) \quad (52)$$

CAPÍTULO III

INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA UTILIZANDO A ANÁLISE MODAL E A TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER (IFT)

III.1 INTRODUÇÃO

Apresenta - se neste capítulo uma metodologia eficiente que utiliza a análise modal implementada no domínio da frequência para obter a resposta dinâmica incluindo-se a interação solo – estrutura.

Os efeitos da interação são representados utilizando o denominado *fator de modificação do movimento do solo* $[S_j(\omega)]$, eq. (84) e Wu & Smith (1995). Este fator é obtido para cada modo de vibração da estrutura e posteriormente é utilizado na determinação da correspondente resposta estrutural.

Aplicando-se este algoritmo, as vantagens do método de superposição modal são plenamente exploradas e o problema de interação é resolvido efetivamente dentro do processo de análise no domínio da frequência para uma estrutura com base fixa. Adicionalmente, este método produz boa aproximação para a resposta estrutural e com menos esforço computacional que os métodos diretos devido à consideração de somente poucos modos de vibração da estrutura.

A dissipação de energia no solo é equacionada utilizando-se o modelo de amortecimento histerético para o amortecimento material, e os conceitos decorrentes da perda de energia devida à propagação das ondas no meio semi – infinito de fundação, para a perda de energia por radiação.

Posteriormente, a resposta estrutural é obtida utilizando uma formulação matricial compacta das transformadas discretas de Fourier, equacionadas através da chamada *transformada implícita de Fourier* (ImFT), como estabelecido por Venâncio & Claret [1992] e desenvolvida no item III.6.

III.2 MODELO UTILIZADO

Considere-se um sistema com muitos graus de liberdade (MDOF), assentado através de uma base rígida sobre um semi - espaço elástico homogêneo e isotrópico (Wu & Smith (1995)).

Este sistema é representado na Fig. 1. A massa da estrutura assume-se concentrada ao nível de cada piso e define-se uma rigidez axial infinita para as colunas.

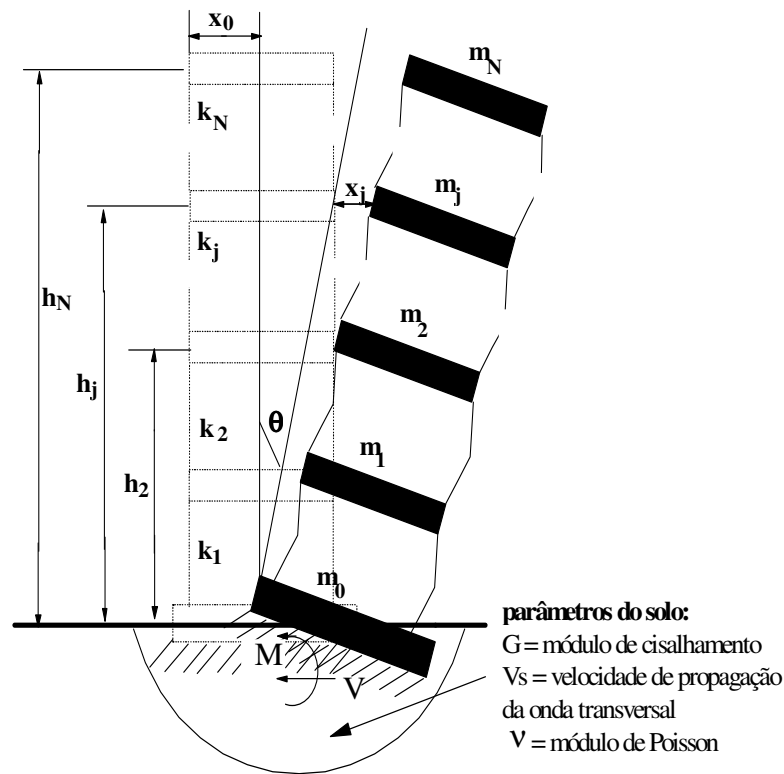


Figura 1.- Modelo de Interação Solo - Estrutura

Define-se para a estrutura um modelo de amortecimento viscoso – proporcional conhecido como amortecimento proporcional de Rayleigh (ver eq. (56)). Assim, para estrutura com base fixa decorrente, adotam-se modos normais clássicos.

Assume-se completa adesão entre a base da estrutura e o solo de fundação.

A representação da **Fig. 1** conduz a um sistema de $(N + 2)$ graus de liberdade: uma translação horizontal para cada nível x_j relativa à fundação ($j = 1 \sim N$), a translação horizontal da fundação x_0 e a rotação do sistema θ .

III.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Assumindo pequenos deslocamentos, as equações de movimento para o modelo de interação solo - estrutura da **Fig. 1**, no domínio do tempo, podem ser expressas como:

$$[M]\left\{\ddot{x}^a(t)\right\} + [C]\left\{\dot{x}(t)\right\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (53)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{x}_j^a(t) + m_0 \ddot{x}_0(t) + V(t) = 0 \quad (54)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j h_j \ddot{x}_j^a(t) + I_t \ddot{\theta}(t) + M(t) = 0 \quad (55)$$

A eq.(53) define o equilíbrio dinâmico das forças horizontais atuando nas massas estruturais. As eqs. (54) e (55) exprimem o equilíbrio do sistema completo (estrutura e base de fundação), para translação e rotação da base, respectivamente.

Nas equações (53), (54) e (55), tem-se: $\{x^a(t)\} = \{x_j^a(t)\}$, que é o vetor coluna de deslocamentos estruturais totais, sendo:

$x_j^a(t) = x_0(t) + x_j(t) + h_j \theta(t)$ o deslocamento horizontal total de cada nível;

$x_0(t)$ a translação horizontal da fundação;

$\{x(t)\} = \{x_j(t)\}$, ($j = 1 \sim N$) o vetor coluna de deslocamentos transversais da estrutura relativas à fundação;

$\theta(t)$ a rotação da base de fundação;

$[M]$ é a matriz de massa da estrutura,

$[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso da estrutura,

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura,

I_t é a soma dos momentos de inércia de massa centroidais da estrutura e da fundação,

$V(t)$ e $M(t)$ são a força cortante horizontal e o momento de tombamento na interface fundação - solo, respectivamente,

m_0 é a massa da base de fundação,

m_j e h_j são a massa e altura (relativa à base da estrutura) do nível j , respectivamente.

O solo é caracterizado dinamicamente pela densidade de massa ρ , a velocidade de propagação da onda cortante V_s e o coeficiente de Poisson ν .

A eq. (53) assume que a estrutura possui amortecimento viscoso - proporcional (ou amortecimento de Rayleigh). Assim, a matriz de amortecimento da estrutura $[C]$ tem o seguinte equacionamento:

$$[C] = b_0[M] + b_1[K] \quad (56)$$

Onde as constantes de proporcionalidade (ou fatores de amortecimento de Rayleigh) b_0 e b_1 têm unidades de s^{-1} e s (segundos), respectivamente.

III.4 EQUACIONAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

As equações. (53), (54) e (55) expressas no domínio da frequência, apresentam as seguintes formas:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X(\omega)\} + \quad (57)$$

$$-\omega^2[M]\{1\}X_0(\omega) - \omega^2[M]\{h\}\Theta(\omega) = \{0\}$$

$$-\omega^2\{1^T\}[M]\{X(\omega)\} + [K_{VV}(\omega) - \omega^2m_T]X_0(\omega) + \quad (58)$$

$$+ [K_{VM}(\omega) - \omega^2d_T]\Theta(\omega) = K_{VV}(\omega)X_g(\omega)$$

$$-\omega^2\{h^T\}[M]\{X(\omega)\} + [K_{MV}(\omega) - \omega^2d_T]X_0(\omega) + \quad (59)$$

$$+ [K_{MM}(\omega) - \omega^2I_T]\Theta(\omega) = K_{MV}(\omega)X_g(\omega)$$

Onde: $\{X(\omega)\}$ é a transformada de Fourier de $X = \{x_j\}$ (deslocamentos relativos da estrutura); $X_0(\omega)$ é a transformada de Fourier de X_0 (translação horizontal da base);

$\Theta(\omega)$ é a transformada de Fourier de θ (rotação da base);

$X_g(\omega)$ é a transformada de Fourier de X_g (movimento do solo);

$\{1\}$ é o vetor coluna cujos elementos são a unidade e $\{1^T\}$ é o vetor unitário transposto;

$\{h\} = \{h_j\}$ é o vetor coluna das alturas de cada nível relativo à fundação; $\{h^T\}$ é o vetor transposto correspondente;

$m_T = \sum_{j=0}^N m_j$ é a massa total do sistema (super - estrutura e fundação);

$d_T = \sum_{j=1}^N m_j h_j$;

$I_T = I_t + \sum_{j=1}^N m_j h_j^2$ é o momento de inércia de massa total da estrutura e fundação

relativo ao eixo central da fundação;

Uma vez que a rigidez e o amortecimento do solo de fundação são dependentes da frequência de excitação, é mais apropriado relacionar a força cortante e o momento de tombamento da interface fundação – solo (resultante da translação e rotação da base de fundação), no domínio da frequência.

Assim, as funções de impedância na interface são expressas através da relação:

$$\begin{Bmatrix} V(\omega) \\ M(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{VV}(\omega) & K_{VM}(\omega) \\ K_{MV}(\omega) & K_{MM}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0(\omega) - X_g(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Onde: $K_{VV}(\omega)$ é a função de impedância relativa à translação da fundação;

$K_{MM}(\omega)$ é a função de impedância relativa ao giro da fundação;

$K_{VM}(\omega) = K_{MV}(\omega)$ são as funções de impedância que exprimem o acoplamento entre translação e rotação da fundação. A igualdade é decorrente dos teoremas da reciprocidade (que basicamente estabelecem que para sistemas lineares o trabalho executado por duas forças é independente da ordem do carregamento).

Estas funções de impedância podem ser obtidas, rigorosamente, através da solução de um problema de valor de contorno misto em elastodinâmica e, geralmente, são funções das propriedades do solo, dimensões da base de fundação e frequência de excitação.

As equações algébricas lineares acopladas (57), (58) e (59) podem ser utilizadas para avaliar diretamente as respostas complexas em frequência $\{X(\omega)\}$, $X_0(\omega)$ e $\Theta(\omega)$.

Determinada $\{X(\omega)\}$, a resposta permanente $\{x(t)\}$ da estrutura poderá ser obtida utilizando a transformada inversa de Fourier de $\{X(\omega)\}$.

A análise de Fourier acima referida tem sido implementada pela aplicação da transformada rápida de Fourier (FFT), (ver Liu & Fagel (1971), por exemplo). No entanto, a resolução das $(N + 2)$ equações acopladas para cada frequência particular requer um trabalho computacional intenso, e pode até mesmo fazer o método direto inviável para modelos de grande porte.

Desenvolver-se-á aqui uma metodologia eficiente utilizando a análise modal para desacoplar as equações necessárias para computar as respostas complexas em frequência, como em Wu e Smith (1995).

A resposta no domínio da frequência será avaliada utilizando uma formulação decorrente da transformada implícita de Fourier (ImFT) deduzida neste trabalho para sistemas estruturais incluindo a interação dinâmica solo – estrutura (item III.6).

Implementou-se para isso um algoritmo computacional que avalia a resposta estrutural através da ImFT.

Adicionalmente, serão utilizados para esta análise os coeficientes de impedância do solo dependentes da frequência propostos por Veletsos & Wei (1971).

Os resultados desta análise serão comparados com a análise utilizando os coeficientes constantes propostos por Richart et al (1970) e também com os resultados da análise dinâmica considerando a estrutura com base fixa no primeiro exemplo numérico.

III.5 APLICAÇÃO DA ANÁLISE MODAL NAS EQUAÇÕES DINÂMICAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

III.5.1 MODOS DE VIBRAÇÃO E CONDIÇÕES DE ORTOGONALIDADE

Levando em conta que se adotou para a correspondente estrutura com base fixa modos de vibração clássicos (ver eq.(56)); estes modos satisfazem as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\Phi^T [M] \Phi = I \quad (61)$$

$$\Phi^T [K] \Phi = \text{diag} [\bar{\omega}_j^2] \quad (62)$$

$$\Phi^T [C] \Phi = \text{diag} [2 \xi_j \bar{\omega}_j] \quad (63)$$

onde: $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de dimensão $N \times N$;

$\bar{\omega}_j$ é a freqüência natural da estrutura correspondente ao modo j ;

ξ_j é a porcentagem de amortecimento crítico correspondente ao modo j ;

$\text{diag}[\cdot]$ define uma matriz diagonal e $[\Phi] = [\Phi_j]$ é a matriz contendo os modos de vibração ortonormais ϕ_{ij} da estrutura.

Os modos de vibração ortonormais ϕ_{ij} da matriz $[\Phi]$ obedecem à seguinte normalização em relação à matriz $[\mathbf{M}]$:

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\{a_j\}^T [\mathbf{M}] \{a_j\}}} \quad (64)$$

Onde a_{ij} é uma componente do modo de vibração não - normalizado $\{a_j\}$

Este tipo de normalização (eq. (64)) é conveniente para sua utilização em programas computacionais em análise dinâmica estrutural. Estes modos de vibração normalizados e a condição de ortogonalidade relativa à matriz de massas $[\mathbf{M}]$ são utilizados para deduzir as equações (61), (62) e (63).

A equação (64) avaliada para um sistema com uma matriz de massas diagonal (modelo físico idealizado com massas concentradas), toma a seguinte forma:

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n m_k a_{kj}^2}} \quad (65)$$

onde m é a massa concentrada e ϕ_{ij} é a componente normalizada i do vetor modal j .

A matriz de modos de vibração normalizada $[\Phi]$ é chamada de matriz *ortonormal*, (contém os modos de vibração ϕ_{ij} *ortonormais* em relação à matriz $[M]$), e é da forma:

$$[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_N] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \dots & \phi_{3N} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \dots & \phi_{4N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Os modos de vibração da matriz $[\Phi]$ são o resultado de um problema de autovalores associado à estrutura e expresso da seguinte forma matricial:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi] \text{diag} [\bar{\omega}_j^2] \quad (67)$$

III.5.2 APLICAÇÃO DA ANÁLISE MODAL NAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A resposta da estrutura no domínio da frequência pode ser expressa em termos dos modos de vibração como:

$$\{X(\omega)\} = [\Phi]\{Y(\omega)\} \quad (68)$$

onde $\{Y(\omega)\} = \{Y_j(\omega)\}$, é o vetor coluna dos deslocamentos modais da estrutura e $Y_j(\omega)$ é o deslocamento correspondente ao modo j no domínio da frequência.

Introduzindo a transformação da eq. (68) e aplicando-se as condições de ortogonalidade, a eq.(57), quando pré - multiplicada por Φ^T fica:

$$\text{diag}[-\omega^2 + i 2 \omega \xi_j \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_j^2] \{Y(\omega)\} = \omega^2 [\Gamma X_0(\omega) + \Psi \Theta(\omega)] \quad (69)$$

onde Γ e Ψ são definidas como:

$$\Gamma = \{\Gamma_j\} = \Phi^T [M] \{1\} \quad (70)$$

$$\Psi = \{\Psi_j\} = \Phi^T [M] \{h\} \quad (71)$$

Da eq. (69) deduz-se a matriz de transferência da estrutura (ou matriz complexa de resposta em frequência), correspondente ao modo j , como:

$$H_j(\omega) = - \frac{1}{-\omega^2 + \bar{\omega}_j^2 + i 2 \omega \xi_j \bar{\omega}_j} \quad (72)$$

Assim, os deslocamentos modais podem ser avaliados utilizando a eq. (69):

$$Y_j(\omega) = -\omega^2 H_j(\omega) [X_0(\omega) \Gamma_j + \Theta(\omega) \Psi_j] \quad (73)$$

Ou, em forma matricial:

$$\{Y(\omega)\} = -\omega^2 [H(\omega)] (X_0(\omega) \{\Gamma\} + \Theta(\omega) \{\Psi\}) \quad (74)$$

onde $[H(\omega)]$ é uma matriz diagonal com os correspondentes valores $H_j(\omega)$ para $j=1 \sim N$. Utilizando as eqs. (68), (70), (71) e (74), as eqs.(58) e (59) podem ser reescritas como:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} T_{VV}(\omega) & T_{VM}(\omega) \\ T_{MV}(\omega) & T_{MM}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{VV}(\omega) \ddot{X}_g(\omega) \\ K_{MV}(\omega) \ddot{X}_g(\omega) \end{Bmatrix} \quad (75)$$

onde:

$$T_{VV}(\omega) = \omega^4 \{\Gamma^T\} [H(\omega)] \{\Gamma\} - \omega^2 m_T + K_{VV}(\omega) \quad (76)$$

$$T_{VM}(\omega) = T_{MV}(\omega) = \omega^4 \{\Gamma^T\} [H(\omega)] \{\Psi\} - \omega^2 d_T + K_{VM}(\omega) \quad (77)$$

$$T_{MM}(\omega) = \omega^4 \{\Psi^T\} [H(\omega)] \{\Psi\} - \omega^2 I_T + K_{MM}(\omega) \quad (78)$$

e $\ddot{X}_g(\omega) = -\omega^2 X_g(\omega)$ é a transformada de Fourier da aceleração do solo.

$X_0(\omega)$ e $\Theta(\omega)$ podem ser avaliadas da eq.(75), fornecendo:

$$\begin{Bmatrix} X_0(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} = -\frac{\ddot{X}_g(\omega)}{\omega^2} \begin{Bmatrix} R_{X_0}(\omega) \\ R_{\Theta}(\omega) \end{Bmatrix} = X_g(\omega) \begin{Bmatrix} R_{X_0}(\omega) \\ R_{\Theta}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (79)$$

onde:

$$R_{X_0}(\omega) = \frac{K_{VV}(\omega)T_{MM}(\omega) - K_{MV}(\omega)T_{VM}(\omega)}{T_{VV}(\omega)T_{MM}(\omega) - T_{VM}(\omega)T_{MV}(\omega)} \quad (80)$$

$$R_{\Theta}(\omega) = \frac{K_{MV}(\omega)T_{VV}(\omega) - K_{VV}(\omega)T_{MV}(\omega)}{T_{VV}(\omega)T_{MM}(\omega) - T_{VM}(\omega)T_{MV}(\omega)} \quad (81)$$

$R_{X_0}(\omega)$ e $R_{\Theta}(\omega)$ representam as funções de transferência relacionando a translação do solo (free-field ground translation), com a translação e rotação da fundação, respectivamente.

Substituindo-se a eq. (79) na eq. (74), obtêm-se os deslocamentos modais $\{Y(\omega)\}$ no domínio de frequência:

$$\{Y(\omega)\} = \ddot{X}_g(\omega)[H(\omega)](R_{X_0}(\omega)\{\Gamma\} + R_{\Theta}(\omega)\{\Psi\}) \quad (82)$$

Ou, para cada componente modal:

$$Y_j(\omega) = H_j(\omega)\Gamma_j S_j(\omega)\ddot{X}_g(\omega) \quad (83)$$

onde

$$S_j(\omega) = \left[R_{X_0}(\omega) + \frac{\Psi_j}{\Gamma_j} R_{\Theta}(\omega) \right] \quad (84)$$

Para o correspondente sistema com base fixa, a resposta da estrutura é:

$$Y_j(\omega) = H_j(\omega)\Gamma_j \ddot{X}_g(\omega) \quad (85)$$

Desde que as equações (83) e (85) são equivalentes, à exceção do termo $S_j(\omega)$, pode-se concluir que este fator representa a presença do efeito da interação solo - estrutura (SSI effects) no sistema.

Este fator pode ser definido como o fator modal de interação solo - estrutura (modal SSI factor).

A eq. (83) pode ser expressa em forma matricial como:

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)] [S(\omega)] \{\Gamma\} \ddot{X}_g(\omega) \quad (86)$$

onde $[S(\omega)]$ é uma matriz diagonal com os correspondentes valores $S_j(\omega)$ para $j = 1 \sim N$.

Os valores $\{Y(\omega)\} = \{Y_j(\omega)\}$ são utilizados na eq. (68) para avaliar a resposta no domínio da frequência $\{X(\omega)\} = [\Phi] \{Y(\omega)\}$, cuja transformada inversa de Fourier fornece finalmente a resposta estrutural procurada.

III.6. IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER

III.6.1 A TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT)

FORMULAÇÃO BÁSICA:

Seja um sistema com um grau de liberdade, com massa m , rigidez k e amortecimento viscoso c sob a ação de um carregamento no tempo $p(t)$.

A equação de equilíbrio dinâmico correspondente a este sistema é:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) \quad (87)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier (FT) à eq. (87), tem-se:

$$[-\omega^2 m + i\omega c + k]X(\omega) = P(\omega) \quad (88)$$

Onde $X(\omega)$ e $P(\omega)$ são as (FT) de $x(t)$ e $p(t)$, respectivamente, e definidas como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (89)$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \quad (90)$$

Em que $x(t)$ e $X(\omega)$ formam o par de transformadas de Fourier dos deslocamentos; $p(t)$ e $P(\omega)$ formam o par de transformadas de Fourier do carregamento especificado.

A resposta dinâmica no domínio da frequência vem da eq. (88):

$$X(\omega) = \frac{P(\omega)}{[-\omega^2 m + i\omega c + k]} \quad (91)$$

A eq. (91) também pode tomar a forma:

$$X(\omega) = H(\omega) P(\omega) \quad (92)$$

Onde

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (93)$$

$H(\omega)$ é conhecida como a *função complexa de resposta em frequência*.

A resposta no domínio do tempo é imediatamente obtida da transformada inversa discreta de Fourier de $X(\omega)$, ou:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (94)$$

Quando $p(t)$ é conhecido em N valores discretos de t , igualmente espaçados, ou seja, quando são conhecidos os $p(t_j)$, para $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $P(\omega)$ poderá ser avaliado, numericamente, através da expressão:

$$P(\omega_n) = \sum_{j=0}^{N-1} p(t_j) e^{-\left(i \frac{2\pi}{N}\right) n j} \quad (95)$$

fornecendo $P(\omega_n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, com ω_n igualmente espaçado no espectro de frequências.

A eq. (95) é a *transformada discreta de Fourier (DFT)* de $p(t)$. Para cada $P(\omega_n)$ encontra-se $X(\omega_n) = H(\omega_n) P(\omega_n)$ onde $H(\omega_n)$ é dado por:

$$H(\omega_n) = \frac{1}{-\omega_n^2 m + i\omega_n c + k} \quad (96)$$

A resposta dinâmica no tempo poderá, então, ser avaliada pela expressão:

$$x(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) P(\omega_n) e^{i \frac{2\pi}{N} n j} \quad (97)$$

A eq. (97) é a *transformada inversa discreta de Fourier (IDFT)* de $X(\omega_n)$

Assim, sejam os valores discretos:

$$p = \{p(t_0), p(t_1), p(t_2), \dots, p(t_j), \dots, p(t_{N-1})\} \quad (98)$$

e

$$x = \{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_j), \dots, x(t_{N-1})\} \quad (99)$$

os vetores de carregamento e da resposta, respectivamente, nos tempos discretos t_j :

$$t_j = j \Delta t; \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (100)$$

onde $\Delta t = \frac{T_p}{N}$ é o intervalo de tempo em que o período total T_p do carregamento é

dividido e N é o número de termos da resposta. E seja:

$$P = \{P(\omega_0), P(\omega_1), P(\omega_2), \dots, P(\omega_n), \dots, P(\omega_{N-1})\} \quad (101)$$

o vetor de transformadas discretas de Fourier do carregamento nas frequências discretas:

$$\omega_n = n \Delta \omega; \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (102)$$

onde $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_p}$ é o intervalo discreto na frequência.

Com as definições das eqs. (98) e (101), a eq. (95) pode ser disposta na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad (103)$$

onde $\mathbf{E}^*$ é uma matriz $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ simétrica com elemento genérico dado por:

$$E_{nj}^* = e^{-(i 2\pi/N)nj}, \quad n = j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (104)$$

ou, explicitamente:

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 & \dots & e^0 \\ & e^{-(i 2\pi/N)} & e^{-2(i 2\pi/N)} & \dots & e^{-j(i 2\pi/N)} & \dots & e^{-(N-1)(i 2\pi/N)} \\ & & e^{-4(i 2\pi/N)} & \dots & e^{-2j(i 2\pi/N)} & \dots & e^{-2(N-1)(i 2\pi/N)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & e^{-nj(i 2\pi/N)} & e^{-n(N-1)(i 2\pi/N)} & \vdots \\ & & & & & & e^{-(N-1)^2(i 2\pi/N)} \end{bmatrix} \quad (105)$$

Da mesma forma a resposta dada pela eq. (97) é escrita matricialmente como:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (106)$$

$\mathbf{E}$ é uma matriz $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ simétrica cujo elemento genérico é dado por:

$$E_{nj} = e^{(i 2\pi/N)nj} \quad n = j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (107)$$

$\mathbf{H}$ é dado pela eq. (96) e é uma matriz diagonal cujos elementos são a função complexa de resposta em frequência para as frequências discretas do espectro de frequências. A forma matricial de $\mathbf{H}$ é:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(\omega_0) & & & 0 \\ & H(\omega_1) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & H(\omega_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (108)$$

Tanto $\mathbf{E}$ quanto $\mathbf{H}$ são calculados de acordo com as frequências discretas mostradas na **Tabela 1**:

Tabela 1.- Frequências Discretas

n	n ou (N-n)	ω_n
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
...	...	...
N/2	N/2	$(N/2)\Delta\omega$
...	...	...
N-2	2	$-2\Delta\omega$
N-1	1	$-\Delta\omega$

Substituindo-se agora $\mathbf{P}$ da Eq.(103) na Eq. (106), tem-se:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad (109)$$

Este resultado constitui a formulação matricial da resposta de um sistema com um grau de liberdade no domínio da frequência para condições iniciais nulas.

A eq. (109) sintetiza, numa única equação matricial, a transformada de Fourier (FT) do carregamento (eq. (95)), o produto dessa (FT) pela função complexa de resposta em frequência e a transformada inversa de Fourier (IFT) desse produto (eq. (97)), para a obtenção da resposta no domínio do tempo.

Por essa razão, o resultado da eq.(109) foi denominado *Transformada Implícita de Fourier (ImFT)*.

III.6.2 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT)

Levando em conta que as frequências discretas ω_n do espectro de frequências são definido como mostrado na **Tabela 1**, podem ser obtidas as seguintes propriedades para as matrizes da eq. (109):

$$1^a) \quad \mathbf{E}_{n(N-k)} = \text{conjg}(\mathbf{E}_{nk}) \quad (110)$$

$$2^a) \quad \mathbf{E}_{nj} = \text{conjg}(\mathbf{E}_{jn}^*) \quad (111)$$

$$3^a) \quad \mathbf{H}_{(N-n)} = \text{conjg}(\mathbf{H}_n) \quad (112)$$

aqui $\text{conjg}(\quad)$ significa o complexo conjugado do valor dentro do parêntese.

Devido a estas propriedades, um termo genérico do triplo produto matricial da eq. (109), vem dado por:

$$\begin{aligned}
\{EHE^*\}_{mn} = & \left\{ \frac{1}{k} + E_{m1} H_1 E_{1n}^* + E_{m2} H_2 E_{2n}^* + \dots + \right. \\
& + E_{m(N/2)} H_{N/2} E_{(N/2)n}^* + \dots + \\
& \left. + \bar{E}_{m2} \bar{H}_2 \bar{E}_{2n}^* + \bar{E}_{m1} \bar{H}_1 \bar{E}_{1n}^* \right\}
\end{aligned} \quad (113)$$

onde a barra superior representa o complexo conjugado.

Este termo possui uma parte real $\left(\frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ termos de pares complexos conjugados e um termo central, que não possui complexo conjugado, quando N é par. A parcela imaginária deste termo central é proveniente da parte imaginária do termo $\left(E_{m(N/2)} H_{N/2} E_{(N/2)n}^*\right)$. Como a resposta deve ser real, este termo pode ser desprezado

sem afetar a precisão da resposta como demonstrado por Claret (1991).

Também, quando se adota um número de termos N par, **múltiplo de 4**, surge mais uma propriedade (4^a propriedade) na geração de E , que é:

$$4^a) \quad E_{j\left(\frac{N}{2}-k\right)} = (-1)^j \text{conjg}(E_{jk}) \quad (114)$$

Considerando as propriedades acima e levando-se em conta que um comportamento dinâmico consistente pode ser descrito com um número de termos menor que o total, então se pode calcular somente S ($< N$) termos da resposta; concluindo-se assim que se pode gerar somente S linhas e $N/4$ colunas da matriz E , reduzindo-se substancialmente o esforço computacional.

Outra simplificação a ser implementada na matriz E é a que deriva da seguinte propriedade:

$$5^a) \quad e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)nj} = e^{i \bmod(nj, N)\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad (115)$$

sendo $\bmod(nj, N)$ o resto da divisão do produto nj por N .

Com o uso desta propriedade, uma matriz E de ordem $(N \times S)$ será armazenada em um único vetor com N elementos.

Fazendo $w = e^{i(2\pi/N)}$ e tomando como exemplo $N = 8$, tem-se como matriz E :

$$E = [w^{nj}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ 1 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ 1 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} \quad (116)$$

Aplicando-se (115) tem-se para E :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w & w^6 & w^3 \\ 1 & w^6 & w^4 & w^2 & 1 & w^6 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix} \quad (117)$$

Deste modo, somente os elementos da 2ª linha de E precisam ser armazenados. Os outros serão definidos em função desses, segundo a sua posição na matriz E .

Para a matriz E^* define-se uma propriedade similar dada por:

$$6^a) \quad e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_j} = e^{i[N-\text{mod}(n_j, N)]\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad (118)$$

De maneira compacta a eq. (109) pode ser apresentada sob a forma:

$$x = \frac{1}{N} v p \quad (119)$$

onde:

$$v = E H E^* \quad (120)$$

Visto que E é de ordem $(S \times N)$, H de ordem $(N \times N)$, E^* de ordem $(N \times S)$ e p e x de ordem $(S \times 1)$, então V será de ordem $(S \times S)$.

Pela Eq. (119) o vetor de cargas p é transformado diretamente na resposta no domínio do tempo e todas as operações intermediárias são realizadas na matriz V . Devido a esta característica esta matriz V é chamada de **matriz transformada implícita de Fourier**; sendo a Eq. (119) chamada de **Transformada Implícita de Fourier (ImFT)**.

A matriz V apresenta também a seguinte propriedade:

$$5^a) \quad V_{n+1, j+1} = V_{nj} \quad (121)$$

Através desta propriedade, conhecendo-se somente a **1ª** linha e a **1ª** coluna de V , todos os outros elementos ficam determinados como mostra o exemplo abaixo correspondente a uma matriz V de ordem 6×6 . Isto também significa que a matriz V tem seus elementos iguais ao longo das diagonais.

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} & V_{16} \\ V_{21} & V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} \\ V_{31} & V_{21} & V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{41} & V_{31} & V_{21} & V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{51} & V_{41} & V_{31} & V_{21} & V_{11} & V_{12} \\ V_{61} & V_{51} & V_{41} & V_{31} & V_{21} & V_{11} \end{bmatrix} \quad (122)$$

Deste modo somente **(2S-1)** elementos de V precisam ser gerados.

III.6.3. IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER (ImFT) NO PROBLEMA PROPOSTO

Utilizando a formulação da Transformada Implícita de Fourier (ImFT), eq. (109), no modelo físico definido em III.2; a solução discreta para cada deslocamento modal, aplicando-se a transformada inversa discreta de Fourier na equação (83), pode ser escrita como:

$$\{y_j(t_n)\} = \frac{1}{N_t} E \{Y_j(\omega_k)\} = \frac{1}{N_t} E [H_j(\omega_k)] [S_j(\omega_k)] \Gamma_j \left\{ \ddot{X}_g(\omega_k) \right\} \quad (123)$$

onde $\{y_j(t_n)\}$ é o vetor coluna de valores discretos de deslocamentos modais no tempo para cada componente modal y_j ;

$t_n = n\Delta t$ ($n=0,1,2,\dots,N_t-1$) são os intervalos discretos no tempo;

$\{Y_j(\omega_k)\}$ é o vetor coluna de valores discretos no domínio da frequência para cada deslocamento modal Y_j ;

$\omega_k = k\Delta\omega$ ($k=0,1,2,\dots,N_t-1$) são os intervalos discretos na frequência;

N_t é o número de intervalos discretos (tanto no tempo quanto na frequência);

Γ_j é o valor correspondente ao modo j de $\{\Gamma_j\}$

E é uma matriz $[N_t \times N_t]$ com elemento genérico dado por:

$$E_{nk} = e^{\left(i \frac{2\pi}{N_t}\right)nk} \quad (124)$$

$[H_j(\omega_k)]$ é uma matriz diagonal para cada coordenada modal j , cujos elementos são a função de resposta em frequência para as frequências discretas do espectro de frequências mostrada na eq. (72), e dado por:

$$H_j(\omega_k) = -\frac{1}{-\omega_k^2 + \bar{\omega}_j^2 + i2\omega_k \xi_j \bar{\omega}_j} \quad (125)$$

A matriz $[S_j(\omega_k)]$ mostrada na eq. (84) é uma matriz diagonal para cada coordenada modal j , com os correspondentes valores modais discretos $S_j(\omega_k)$.

Levando em conta que:

$$\left\{ \ddot{X}_g(\omega_k) \right\} = E^* \left\{ \ddot{X}_g(t_n) \right\} \quad (126)$$

onde E^* da eq. (104) é uma matriz $[N_t \times N_t]$ com elemento genérico dado por:

$$E_{nk}^* = e^{-\left(i \frac{2\pi}{N_t}\right)nk} \quad (127)$$

a eq. (123) pode ser reescrita como:

$$\{y_j(t_n)\} = \frac{1}{N_t} E [H_j(\omega_k)] [S_j(\omega_k)] \Gamma_j E^* \left\{ \ddot{X}_g(t_n) \right\} \quad (128)$$

Fazendo:

$$[G_j(\omega_k)] = [H_j(\omega_k)] \Gamma_j [S_j(\omega_k)] \quad (129)$$

A eq. (128) fornece:

$$\{y_j(t_n)\} = \frac{1}{N_t} E [G_j(\omega_k)] E^* \left\{ \ddot{X}_g(t_n) \right\} \quad (130)$$

onde $[G_j(\omega_k)]$ também é uma matriz diagonal para cada coordenada modal j .

Este fator $[G_j(\omega_k)]$ pode ser definido como a função de transferência na interação solo-estrutura para cada coordenada modal j .

Finalmente, a resposta estrutural é dada através da expressão:

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{y(t)\} \quad (131)$$

onde $\{y(t)\}$ são os deslocamentos da estrutura em coordenadas modais.

Utilizando o mesmo processo anterior, obtém-se a resposta modal para o correspondente sistema com base fixa.

Assim, aplicando a transformada implícita de Fourier (ImFT) na Eq. (85) obtém-se:

$$\{y_j(t_n)\} = \frac{1}{N_t} E \{Y_j(\omega_k)\} = \frac{1}{N_t} E [H_j(\omega_k)] \Gamma_j E^* \left\{ \ddot{X}_g(t_n) \right\} \quad (132)$$

Pelas eqs. (130) ou (132), o vetor de carregamento dinâmico é transformado diretamente na resposta no domínio do tempo, ou seja, a DFT (transformada de Fourier discreta) é implicitamente executada no mesmo procedimento que leva à resposta no tempo. Todas as operações matriciais intermediárias são executadas simultaneamente no mesmo processo. Devido a esta característica, este procedimento é chamado de formulação matricial implícita de Fourier, e a matriz envolvida (equivalente à v da eq. (120)), é conhecida como matriz transformada implícita de Fourier (Implicit Fourier Transform Matrix, ou ImFT matrix).

Assim, a equação (130) (ou (132)), é a transformada implícita de Fourier (ImFT) do carregamento dinâmico especificado.

III.7 O MODELO DE INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA: CONCEITUAÇÃO ADICIONAL

Como mostrado anteriormente, a equação de equilíbrio dinâmico no domínio da frequência para sistemas elástico-lineares e condições iniciais nulas é:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X(\omega)\} + \{F_d(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (133)$$

onde $\{F_d(\omega)\}$ é o vetor que modela a força de amortecimento no sistema.

Se o amortecimento do sistema é histerético, a equação de equilíbrio dinâmico fica:

$$(-\omega^2[M] + [K](1 + i2\xi))\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (134)$$

Para amortecimento viscoso, o vetor força de amortecimento é $[C]\left\{\dot{x}\right\}$, resultando no domínio da frequência em um vetor de forças de amortecimento viscoso transformada, dado pela expressão:

$$\{F_d(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [C]\left\{\dot{x}\right\} e^{-i\omega t} dt \quad (135)$$

que resulta em:

$$\{F_d(\omega)\} = i\omega[C]\{X(\omega)\} \quad (136)$$

Assim, a equação de equilíbrio dinâmico (133) no domínio da frequência considerando amortecimento viscoso é:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (137)$$

Considere-se agora um sistema com vários graus de liberdade dotado de amortecimento histerético para a estrutura e amortecimento geométrico para o solo (para levar em conta a perda de energia por radiação devida à propagação das ondas no semi-espaço infinito).

Utilizando as equações (133), (134), (137), o princípio de correspondência e as condições de radiação para o solo, deduz-se a equação de movimento para um sistema solo-estrutura no domínio da frequência (Venâncio - Filho (1994)):

$$\{-\omega^2[M] + i(\omega[C] + 2\xi[K]) + [K]\}\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (138)$$

Nesta equação tem-se:

$[M]$ é a matriz de massas do sistema solo-estrutura;

$[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso do sistema solo-estrutura;

$2\xi[K]$ é a matriz de amortecimento histerético do sistema solo-estrutura;

$[K]$ é a matriz de rigidez do sistema solo-estrutura;

$\{X(\omega)\}$ e $\{P(\omega)\}$, são os vetores das transformadas de Fourier dos deslocamentos e carregamentos nodais, respectivamente.

A forma discreta da eq. (138) é:

$$\{-\omega_m^2[M] + i(\omega_m[C] + 2\xi[K]) + [K]\}\{X(\omega_m)\} = \{P(\omega_m)\} \quad (139)$$

onde $\omega_m = m \Delta\omega$, e $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Aqui m é um contador e varia de 0 até $(N-1)$; $\Delta\omega$ é o intervalo no domínio da frequência, T é o período da função excitadora e N é o número de valores em que foi discretizada a função excitadora.

A eq.(138) pode ser escrita como:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)] \{P(\omega)\} \quad (140)$$

onde:

$$[H(\omega)] = \left\{ -\omega^2 [M] + i(\omega [C] + 2\xi [K]) + [K] \right\}^{-1} \quad (141)$$

$[H(\omega)]$ é conhecida como a matriz complexa de resposta em frequência (ou função de transferência).

Nesta expressão, $[C]$ e $[K]$ podem também ser dependentes da frequência de excitação ω .

A eq. (140) exprime a resposta do sistema no domínio da frequência para um carregamento arbitrário $p(t)$.

A resposta no tempo, ou seja, o deslocamento correspondente ao grau de liberdade j no tempo t_n pode ser obtido utilizando a transformada discreta inversa de Fourier (Venâncio - Filho (1994)):

$$x_j(t_n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi(mn/N)} \left[\sum_{s=1}^S H_{js}(\omega_m) \left(\sum_{n=0}^{N-1} p_s(t_n) e^{-i2\pi(mn/N)} \right) \right] \right\} \quad (142)$$

Onde $x_j(t_n)$ é o deslocamento do grau de liberdade j para o tempo t_n ;

$t_n = n\Delta t$; n é um contador e varia de zero até $(N-1)$;

$\Delta t = T/N$;

$H_{js}(\omega_m)$ é a função complexa de resposta em frequência para a frequência ω_m .

Representa a contribuição na resposta correspondente ao grau de liberdade j produto de um carregamento harmônico unitário aplicado no grau de liberdade s ;

$p_s(t_n)$ é o carregamento $p(s)$ correspondente ao tempo t_n

A forma matricial de $H_{js}(\omega_m)$ é:

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \quad (143)$$

Em que $[H(\omega)]$ é uma matriz $[N \times N]$ obtida para cada frequência ω_m requerida na análise da resposta.

III.8 MATRIZ DE IMPEDÂNCIA MECÂNICA ($[Z(\omega)]$)

A eq. (138) pode ser reescrita como:

$$[Z(\omega)]\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (144)$$

Onde: $[Z(\omega)]$ é a *matriz de rigidez dinâmica* do sistema solo-estrutura, também conhecida como *matriz de impedância mecânica* expressa por:

$$[Z(\omega)] = [H^{-1}(\omega)] = \{-\omega^2[M] + i(\omega[C] + 2\xi[K]) + [K]\} \quad (145)$$

A forma discreta desta matriz é:

$$[Z(\omega_m)] = \{-\omega_m^2[M] + i(\omega_m[C] + 2\xi[K]) + [K]\} \quad (146)$$

III.8.1 MATRIZ DE IMPEDÂNCIA DO SOLO ($[Z_{ff}^g]$)

Considerem-se os graus de liberdade de translação e rotação da base de uma estrutura com fundação rígida. A matriz de impedância do solo (ou matriz de rigidez dinâmica do solo) $[Z_{ff}^g]$ exprime a relação existente entre a força horizontal $V(t)$ e o momento de tombamento $M(t)$ (supostos variáveis no tempo segundo uma lei harmônica) e os correspondentes deslocamentos da base:

$$\begin{Bmatrix} V(t) \\ M(t) \end{Bmatrix} = [Z_{ff}^g] \begin{Bmatrix} x_0(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} \quad (147)$$

Para o solo, considerado como um semi-espaco elástico infinito, a matriz $[Z_{ff}^g]$ depende da frequência de excitação ω e corresponde, para o caso em estudo, a uma matriz $[2 \times 2]$ contendo os termos relativos à translação horizontal x_0 e à rotação θ e os respectivos termos de acoplamento, expressa na forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{ff}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx}^g & Z_{x\theta}^g \\ Z_{\theta x}^g & Z_{\theta\theta}^g \end{bmatrix} \quad (148)$$

III.8.2 ALGUMAS HIPÓTESES PARA A MATRIZ DE IMPEDÂNCIA DO SOLO

Os coeficientes de impedância do solo dependem da frequência da excitação ω , do raio r (no caso correspondente a uma fundação circular rígida), do módulo de elasticidade transversal G e da massa específica ρ ; podendo ser expressos em função da frequência adimensional a_0 e do coeficiente de Poisson ν . Valores para os coeficientes de impedância (k e c) têm sido sugeridos por diversos autores levando em conta diferentes hipóteses adotadas para a solução do problema do comportamento dinâmico de fundações sobre um meio elástico ou viscoelástico.

Por exemplo, Veletsos & Wei (1971) adotam, para fundações circulares rígidas assentadas sobre um semi-espaco elástico homogêneo, funções de impedância dependentes da frequência com o seguinte equacionamento:

$$\begin{bmatrix} Z_{ff}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{11} + ia_0 c_{11})k_x & (k_{21} + ia_0 c_{21})k_x r \\ (k_{21} + ia_0 c_{21})k_x r & (k_{22} + ia_0 c_{22})k_\theta \end{bmatrix} \quad (149)$$

onde:
$$a_0 = \frac{\omega r}{V_s}, \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (150)$$

r é o raio da fundação, ν é o coeficiente de Poisson, V_s é a velocidade de propagação da onda cisalhante no semi-espaco elástico e G é o módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento) do solo que do ponto de vista dinâmico varia com a profundidade e com os níveis de deformações transversais experimentados pelo terreno.

O coeficiente k_x correspondente à força estática necessária para produzir um deslocamento de translação horizontal unitário ($x_{0st} = 1$) é obtido (Richart et al. (1970)), como:

$$k_x = \frac{V}{x_{0st}} = \frac{8Gr}{(2 - \nu)} \quad (151)$$

O coeficiente k_θ correspondente ao momento estático que surge para uma rotação unitária da fundação ($\theta_{st}=1$) é obtido (Richart et al. (1970)), como:

$$k_\theta = \frac{M}{\theta_{st}} = \frac{8Gr^3}{3(1 - \nu)} \quad (152)$$

Os coeficientes do solo k_{11} e c_{11} , (referidos à rigidez e amortecimento do solo, respectivamente), estão associados à translação horizontal da fundação; enquanto k_{22} e c_{22} estão associados à rotação da fundação. Os coeficientes k_{21} e c_{21} estão associados ao acoplamento entre translação horizontal e rotação da fundação.

Estes coeficientes, k_{11} , c_{11} , k_{22} , c_{22} , k_{21} e c_{21} , são fornecidos em forma de gráficos e tabelas em Veletsos & Wei (1971).

Richart et al. (1970) sugerem algumas simplificações conduzindo a coeficientes de impedância constantes. Para eles a eq. (149) assume a forma:

$$[Z_{ff}^g] = \begin{bmatrix} (k_x + i\omega c_x) & 0 \\ 0 & (k_\theta + i\omega c_\theta) \end{bmatrix} \quad (153)$$

Richart et al. (1970) desprezam os termos de acoplamento segundo eles devido à reduzida influência sobre as características dinâmicas do sistema.

Os coeficientes sugeridos por Richart et al. (1970) são mostrados na **Tabela 2**:

Tabela 2.- Coeficientes de impedância constantes para Richart et al. (1970)

Direção do movimento	Coeficiente de rigidez	Coef. de amortecimento
Translação horizontal	$k_x = \frac{32(1-\nu)Gr}{(7-8\nu)}$	$c_x = \frac{0,576 k_x r}{v_s}$
Tombamento	$k_\theta = \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)}$	$c_\theta = \frac{0,3 k_\theta r}{v_s(1-B_\theta)}$

Onde: $B_\theta = \frac{3(1-\nu)I_0}{8 \rho r^5}$ e I_0 é o momento de inércia da fundação.

Nas expressões (149) e (153) é interessante associar as forças representadas pelas componentes reais como sendo devidas a um conjunto de molas e as forças representadas pela parte imaginária como sendo devidas a um conjunto de amortecedores. Assim, as molas simulam o efeito combinado da ação restritiva do solo e das forças de inércia e os amortecedores representam o efeito de dissipação de energia por radiação a partir da base da fundação para o semi-espaço infinito (amortecimento geométrico).

CAPÍTULO IV

EXEMPLOS APRESENTADOS

IV.1 INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo cinco exemplos numéricos.

A motivação da apresentação desses exemplos é didática; de aplicação da conceituação do fenômeno de interação solo-estrutura a uma estrutura superficial com base de fundação rígida.

Assim, não se pretende nesses exemplos uma aplicação para um problema específico de interação solo-estrutura, ou diferentes tipos de aplicações e/ou aplicações massivas incluindo a interação solo-estrutura.

Portanto, todos os exemplos baseiam-se no modelo de estrutura de quatro andares da **Figura 2** mostrado no primeiro exemplo e cujas características físicas, geométricas e dinâmicas apresentam-se nas **Tabelas 3 e 4**.

Em todos os exemplos utilizaram-se as equações indicadas no primeiro exemplo para avaliar a interação solo-estrutura.

O primeiro exemplo apresenta um carregamento senoidal no quarto andar.

Nos outros exemplos utiliza-se o sismo do El Centro mostrado na **Figura 8**.

Pretende-se mostrar com isto que o processo de interação solo-estrutura aqui definido pode ser utilizado tanto para um carregamento externo quanto para um carregamento interno no solo (neste caso um carregamento sísmico).

IV.2 PRIMEIRO EXEMPLO

Para avaliar a interação solo-estrutura considerou-se o sistema da **Figura 2**.

A figura representa uma estrutura de 4 andares assentada em um solo elástico, homogêneo, através de uma fundação circular rígida. A estrutura está submetida a uma excitação dinâmica no último nível (quarto andar) e a variação do carregamento está indicada na própria figura.

O sistema apresenta seis (6) graus de liberdade: quatro (4) deslocamentos dos andares e os deslocamentos horizontal e angular da base de fundação (entendida como a interface solo-estrutura).

A **Tabela 3** mostra as características da estrutura e a **Tabela 4** indica os parâmetros e características da fundação e do semi-espço elástico.

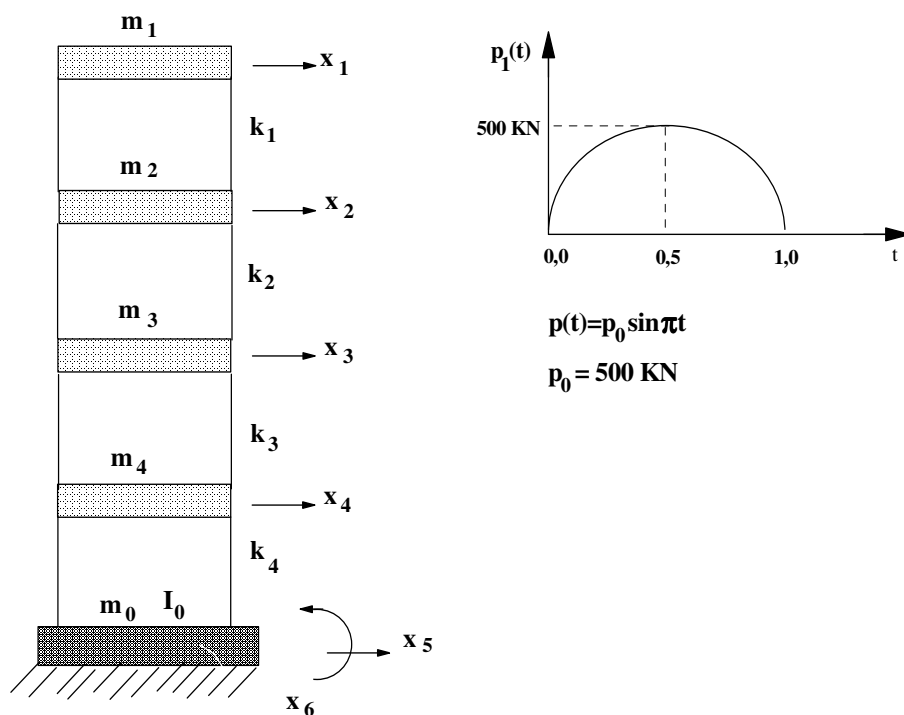


Figura 2.- Modelo do Problema analisado

Tabela 3.- Massas e rigidezes da estrutura

Nível da estrutura (i)	Massas m_i (kg)	Rigidezes k_i dos pilares (N/m)
1	$2,7 \times 10^6$	$52,5 \times 10^6$
2	$3,6 \times 10^6$	$105,0 \times 10^6$
3	$4,5 \times 10^6$	$210,0 \times 10^6$
4	$5,4 \times 10^6$	$315,0 \times 10^6$

Neste primeiro exemplo adotou-se um fator de amortecimento estrutural (ou histerético) de 16% para todos os elementos da estrutura.

Tabela 4.- Características e parâmetros da fundação e do solo

Sub-sistema	Parâmetro ou característica	Símbolo	Valor	Unidade
Base de fundação	raio de fundação	r	20,0	m
	massa	m_0	$54,0 \times 10^6$	kg
	momento de inércia de massa	I_0	$3,72 \times 10^9$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
Solo	densidade de massa	ρ	$1,7 \times 10^3$	kg/m^3
	coeficiente de Poisson	ν	1/3	
	módulo de elasticidade transversal	G	$1,5 \times 10^6$	N/m^2 =Pa
	velocidade da onda transversal	V_s	29,71	m/s

Faz-se uma comparação entre a resposta do sistema considerando a interação solo-estrutura e a resposta para a estrutura com base fixa.

A interação solo-estrutura foi analisada através da aplicação da eq. (138), ou seu equivalente discreto eq. (139).

A resposta no tempo foi avaliada através da eq. (142).

Consideraram-se, na análise da interação solo-estrutura, os coeficientes de impedância do solo dependentes da frequência propostos por Veletsos & Wei (1971), válidos para fundações circulares rígidas assentadas em um solo elástico homogêneo (ver eq. (149)).

IV.2.1 RESULTADOS

Apresentam-se na **Tabela 5** as frequências (e correspondentes períodos), para os quatro (4) primeiros modos de vibração tanto para a estrutura com base fixa quanto para o sistema incluindo a interação solo-estrutura.

A consideração da interação solo-estrutura torna o sistema mais flexível, levando a uma redução das frequências naturais de vibração comparativamente com as frequências para a estrutura com base fixa.

Tabela 5.- Frequências naturais e períodos de vibração

BASE FIXA		INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	
f_i (Hz)	T_i (s)	f_i (Hz)	T_i (s)
0.40	2.48	0.22	4.50
0.85	1.17	0.45	2.21
1.27	0.79	0.57	1.74
1.82	0.55	0.88	1.14

As figuras (3) até (6) definem a resposta da estrutura em deslocamentos absolutos para os quatro (04) níveis.

Estas figuras mostram os gráficos de deslocamentos transversais para o caso de interação solo-estrutura e também para a estrutura com base fixa.

Observa-se a influência da consideração da interação solo-estrutura para os deslocamentos nos andares comparativamente com a estrutura com base fixa. As diferenças entre as respostas destas duas análises apresentam-se mais acentuadas quanto mais baixo o nível do andar considerado. Observa-se também a influência na resposta da consideração do amortecimento geométrico no solo.

Nas figuras (3) até (6) o eixo horizontal representa o tempo em segundos (s) e o eixo vertical representa os deslocamentos em metros (m).

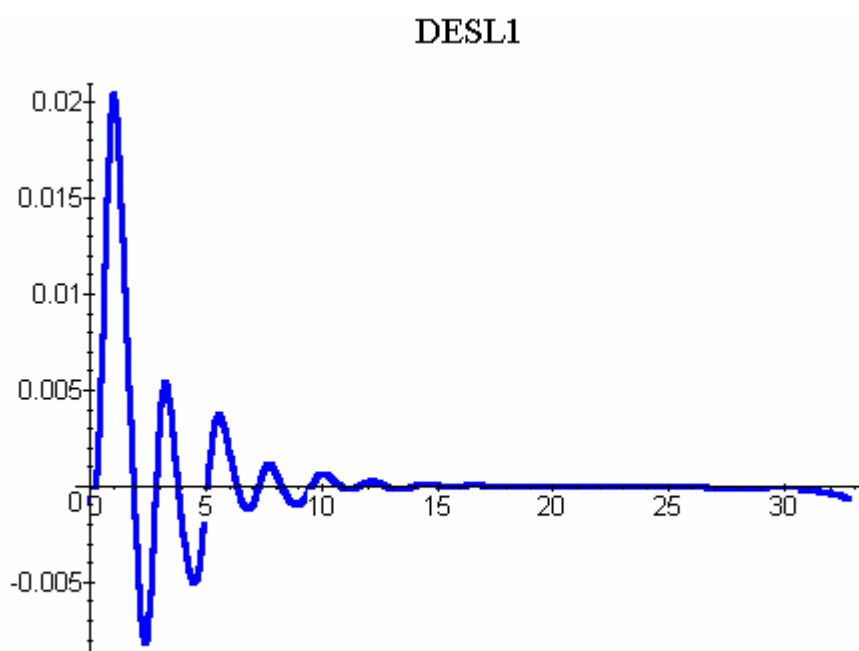


Figura 3a.- Interação solo-estrutura. Deslocamento do quarto andar.

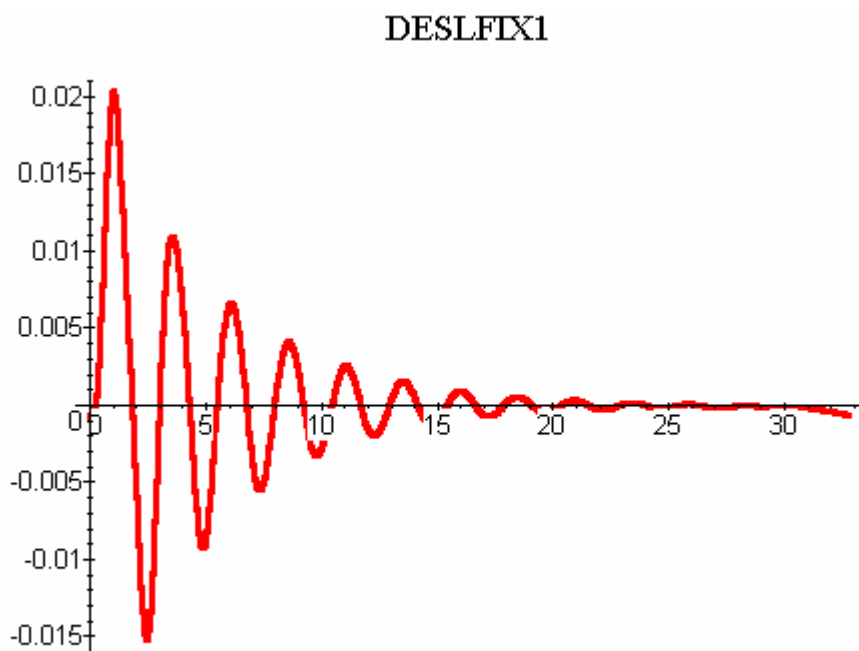


Figura 3b.- Estrutura com base fixa. Deslocamento do quarto andar.

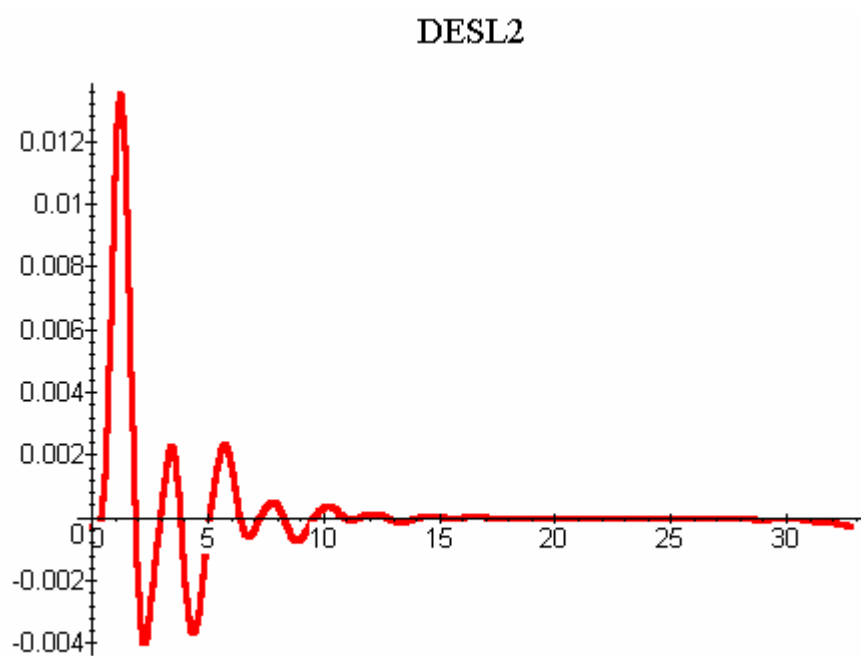


Figura 4a.- Interação solo-estrutura. Deslocamento do terceiro andar.

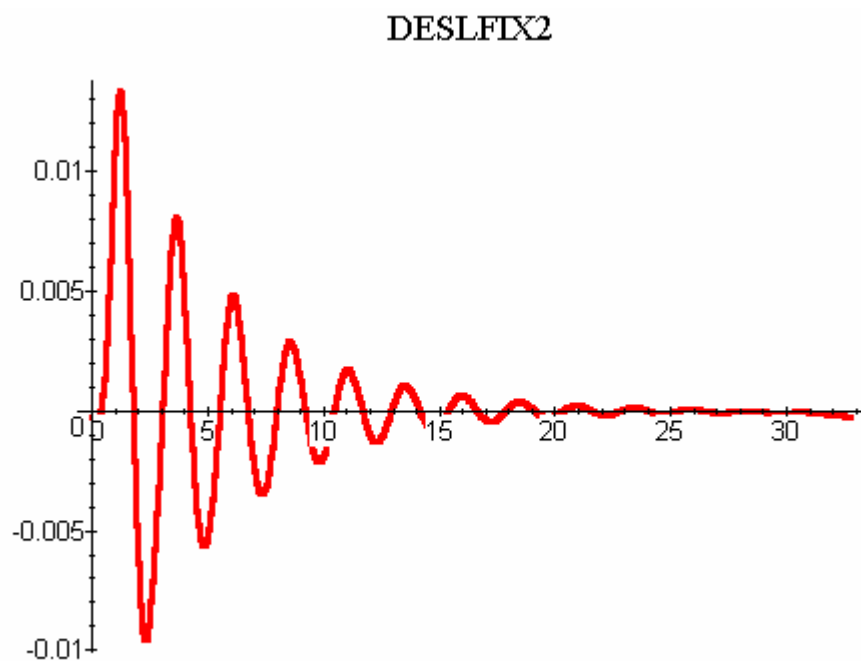


Figura 4b.- Estrutura com base fixa. Deslocamento do terceiro andar.

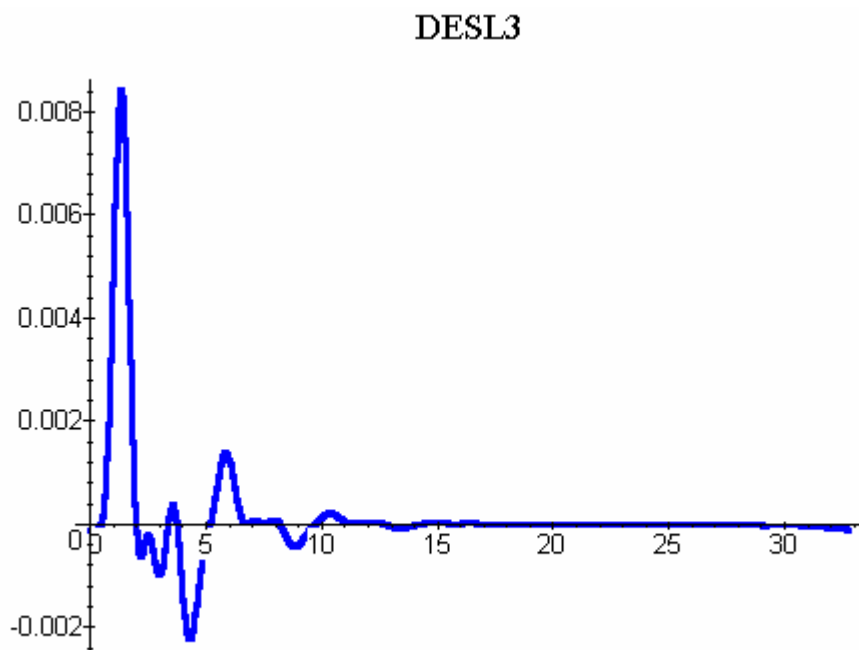


Figura 5a.- Interação solo-estrutura. Deslocamento do segundo andar.

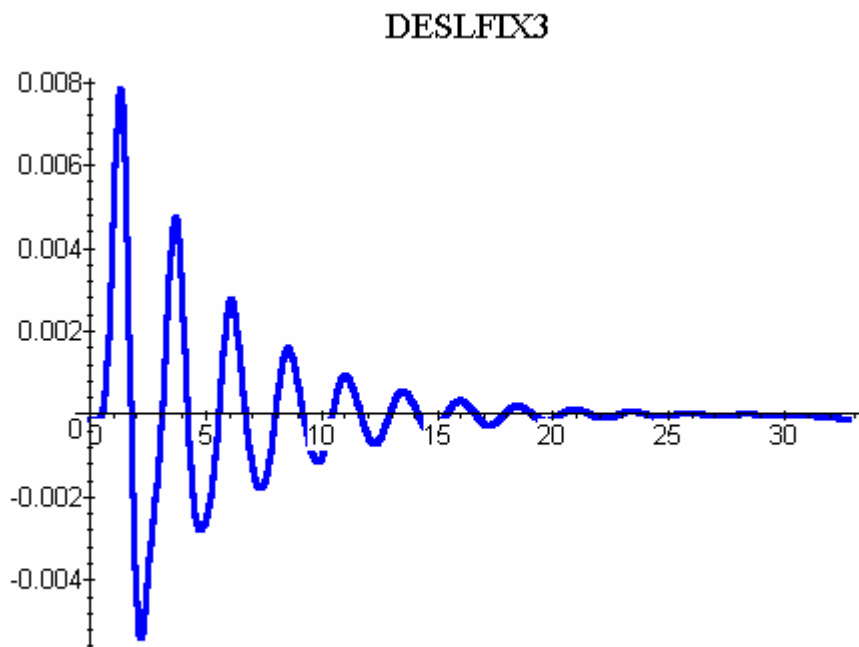


Figura 5b.- Estrutura com base fixa. Deslocamento do segundo andar.

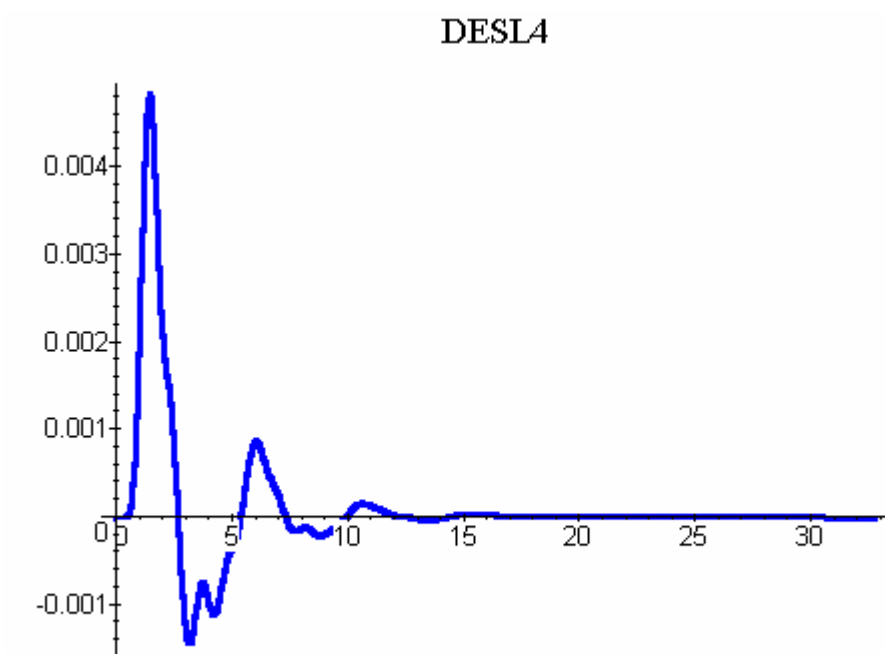


Figura 6a.- Interação solo-estrutura. Deslocamento do primeiro andar.

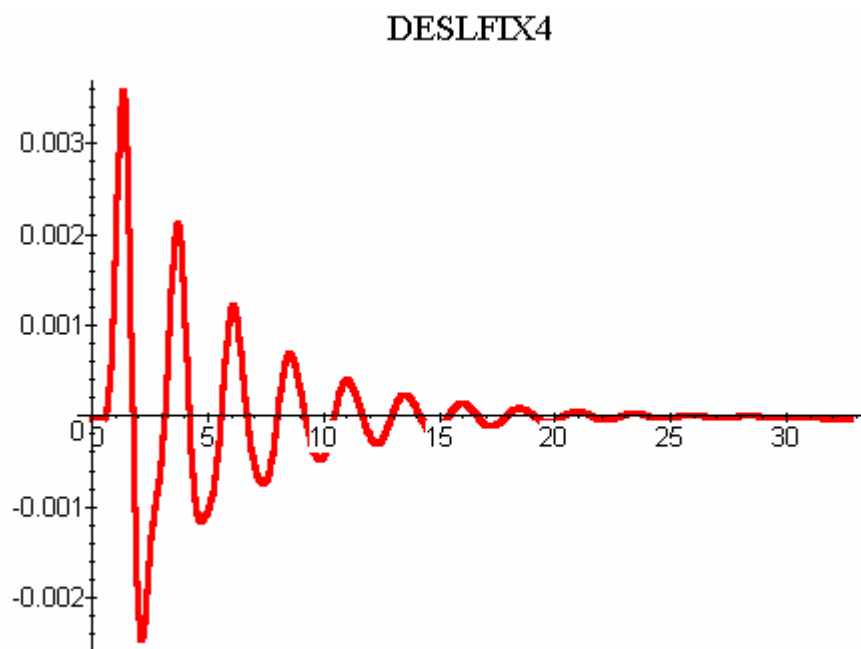


Figura 6b.- Estrutura com base fixa. Deslocamento do primeiro andar.

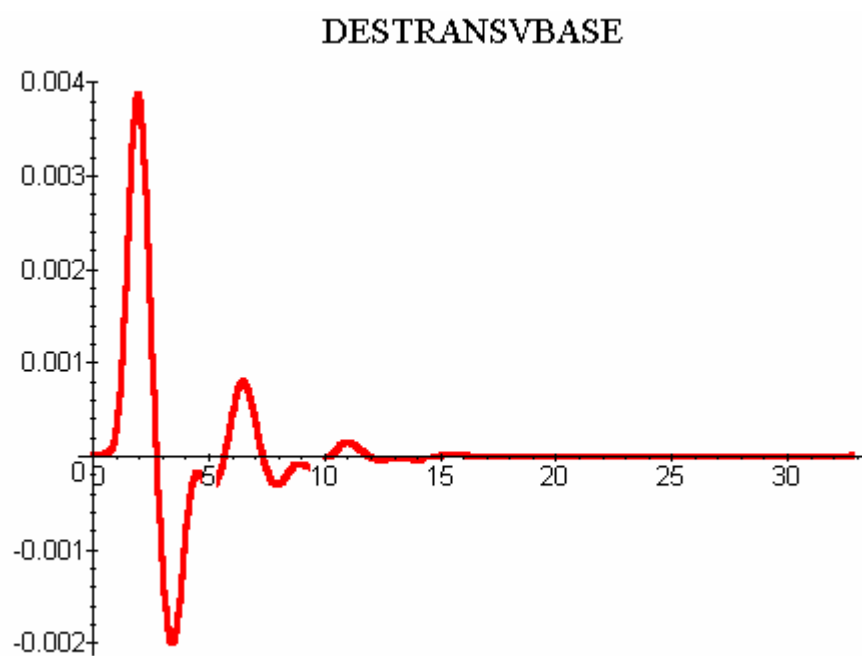


Figura 7a.- Deslocamento transversal da base de fundação (m).

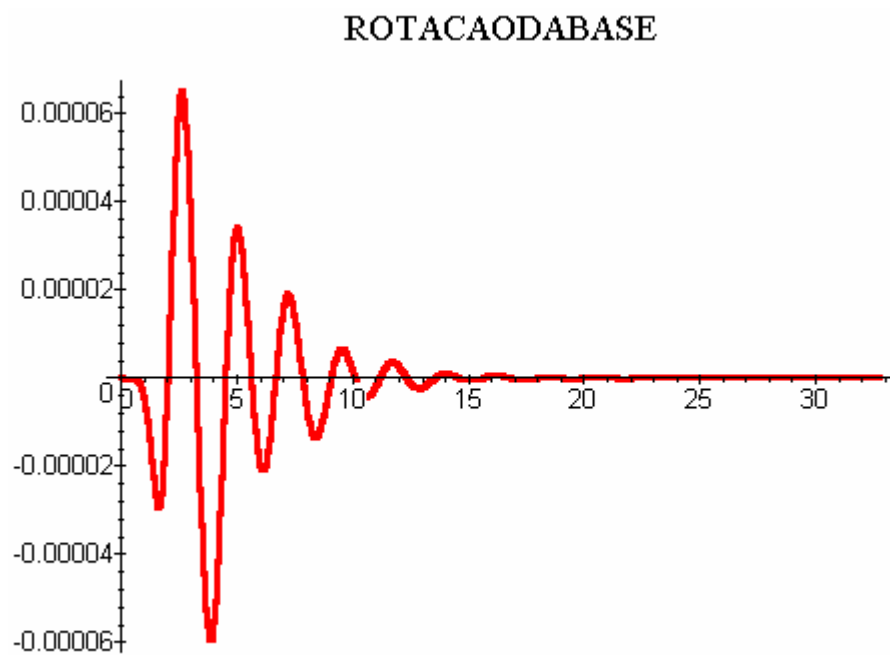


Figura 7b.- Rotação da base de fundação (radianos).

A figura (7a) apresenta o gráfico correspondente a translação horizontal (m) da base e a Figura (7b) é o gráfico da rotação da base de fundação (em radianos) na interação solo-estrutura.

IV.3 SEGUNDO EXEMPLO

Avalia-se a interação solo-estrutura do modelo da **Figura 2** sob o carregamento sísmico do El Centro (Vale Imperial, USA), de 18 de maio de 1940, componente Norte-Sul.

A **Figura 8** mostra o gráfico de valores discretos de acelerações do sismo do El Centro. O eixo horizontal mostra os pontos em que o sismo do El Centro foi discretizado e o eixo vertical mostra o parâmetro: aceleração do sismo / aceleração da gravidade.

Define-se um fator de amortecimento hysterético de 16% para todos os elementos da estrutura.

Utilizam-se neste exemplo as funções de impedância para o solo dependentes da frequência do Veletsos&Wei (1971), eq. (149).

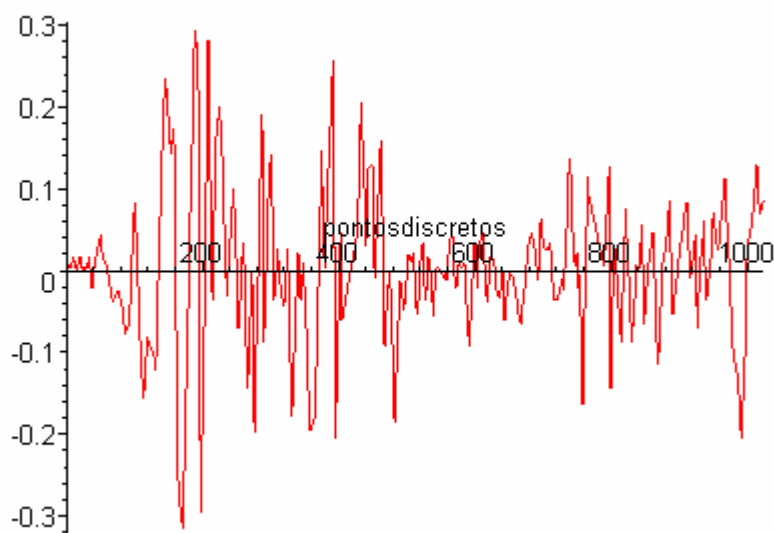


Figura 8.- Gráfico de acelerações do sismo do El Centro

Nas figuras (9) até (13), o eixo horizontal representa o tempo em segundos (s) e o eixo vertical representa os deslocamentos em metros (m).

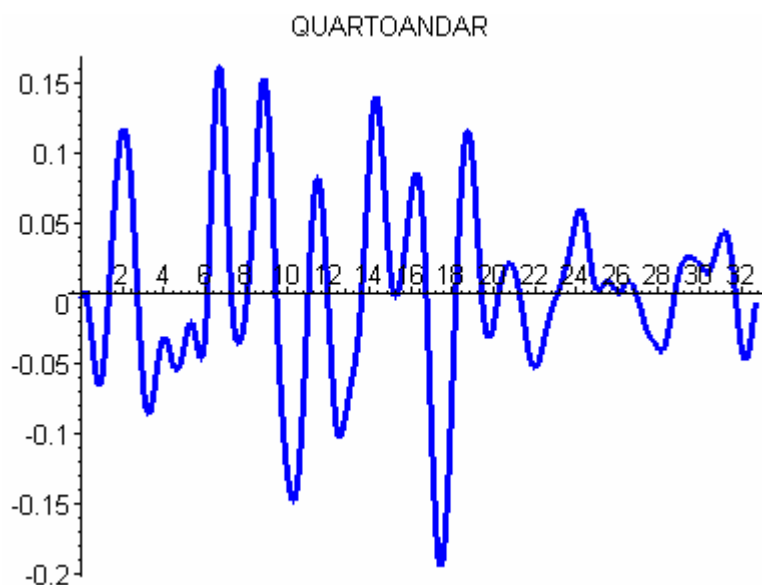


Figura 9.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar.

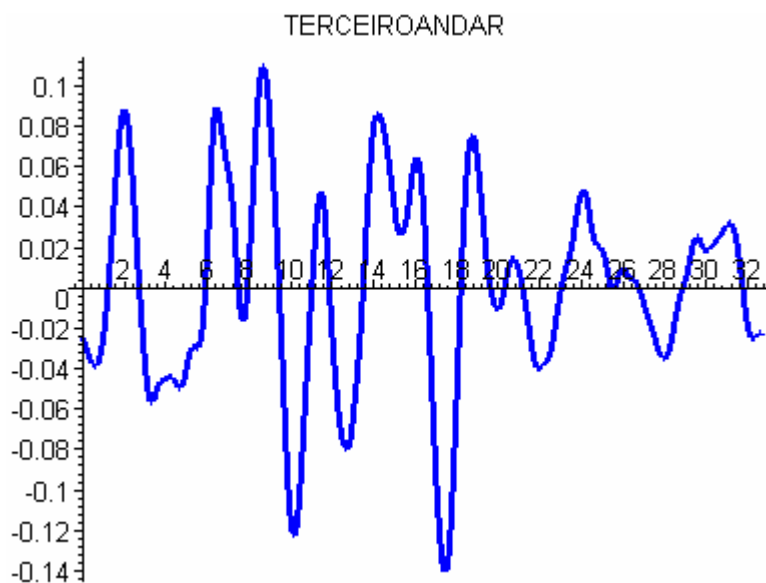


Figura 10.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar.

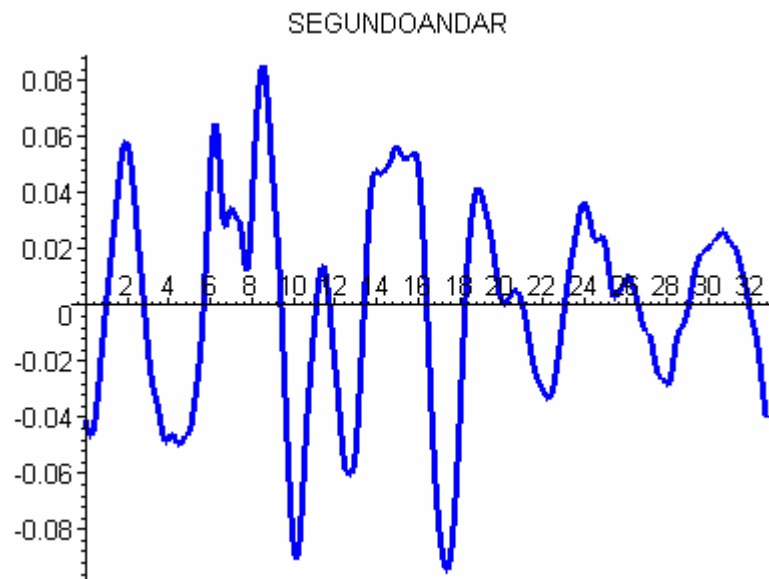


Figura 11.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar.

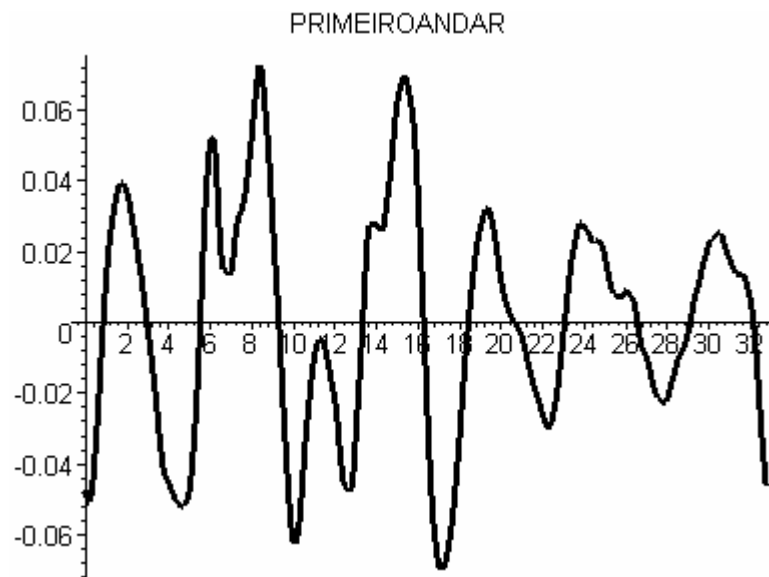


Figura 12.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar.

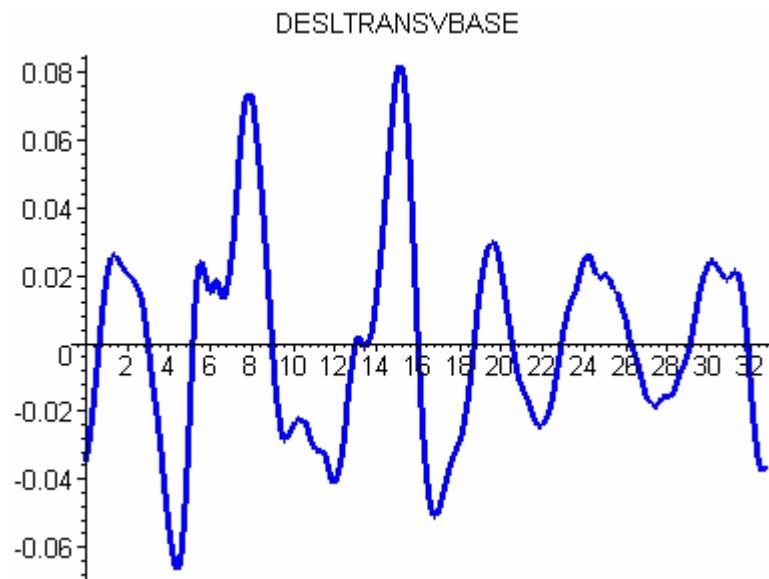


Figura 13.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento transversal da base.

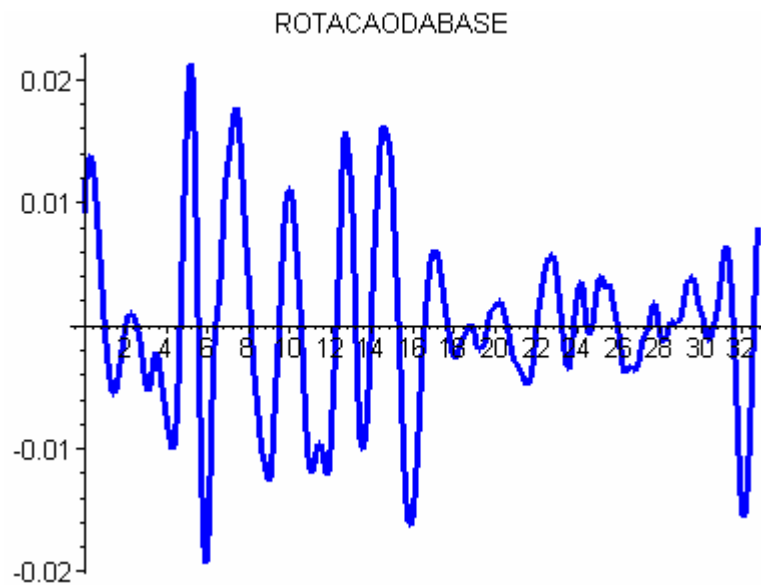


Figura 14.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Rotação da base (radianos).

Os gráficos acima mostram uma típica resposta de uma estrutura sob carregamento sísmico na interação solo-estrutura. Estes resultados apresentam comportamentos similares com as respostas de outras estruturas sob carregamento sísmico analisadas por pesquisadores e existentes na literatura especializada, como em Wu & Smith (1995), Hall (2006) entre outros.

Os níveis inferiores da estrutura se mostram altamente sensíveis ao fenômeno de interação solo-estrutura

O fato de as respostas não serem nulas no tempo zero pode obedecer ao fato da não consideração dos conceitos de amortecimento histerético causal na estrutura.

IV.4 TERCEIRO EXEMPLO

Avalia-se a interação solo-estrutura do modelo da **Figura 2** sob o carregamento sísmico do El Centro de 18 de maio de 1940, componente Norte-Sul.

O fator de amortecimento histerético é de 16% nos elementos da estrutura.

Aqui são utilizadas as funções de impedância de Richart et al. (1970) independentes da frequência de excitação (eq. (153)). Nas figuras (15) até (13) o eixo horizontal representa o tempo em segundos (s) e o eixo vertical representa os deslocamentos em metros (m).

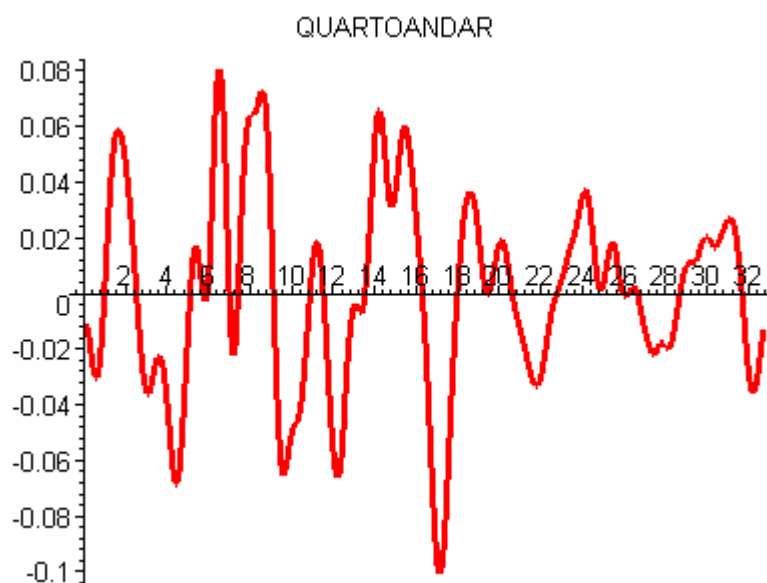


Figura 15.- Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do quarto andar.

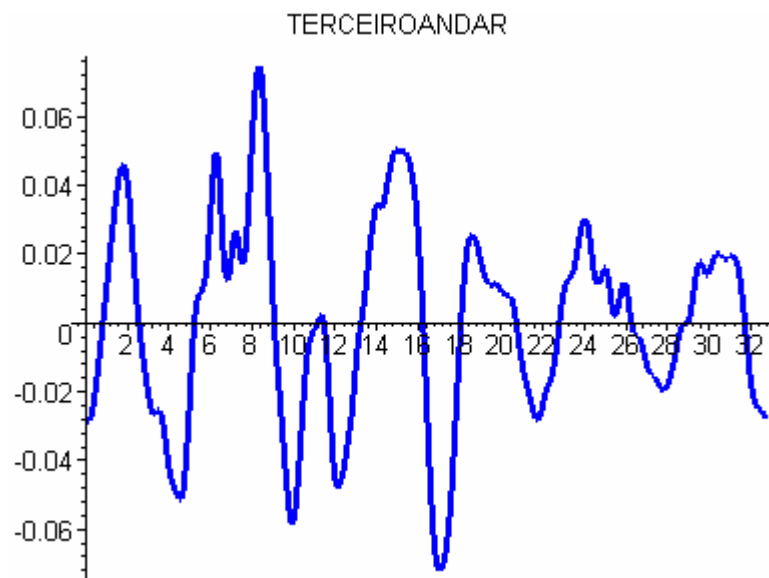


Figura 16.- Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do terceiro andar.

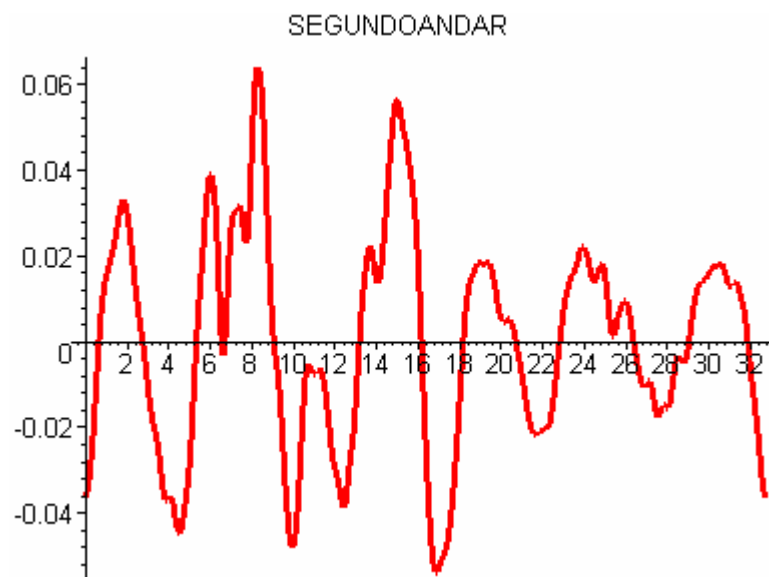


Figura 17.- Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do segundo andar.

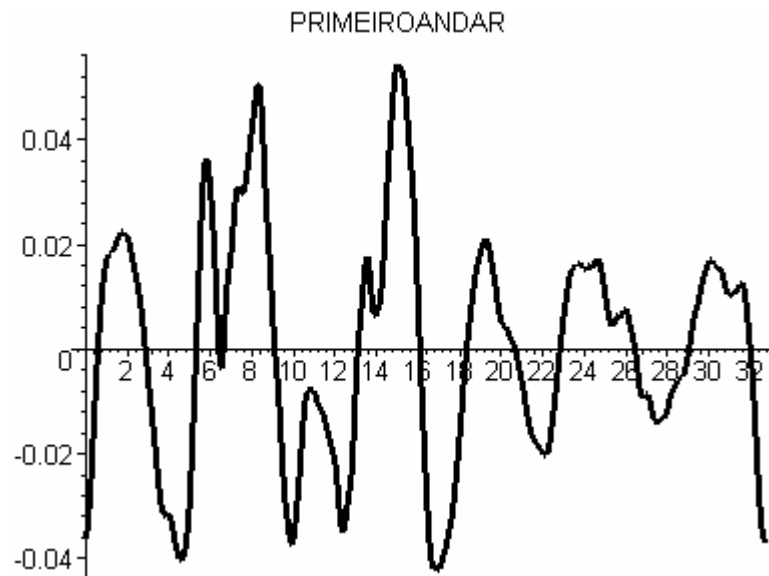


Figura 18.- Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento do primeiro andar.

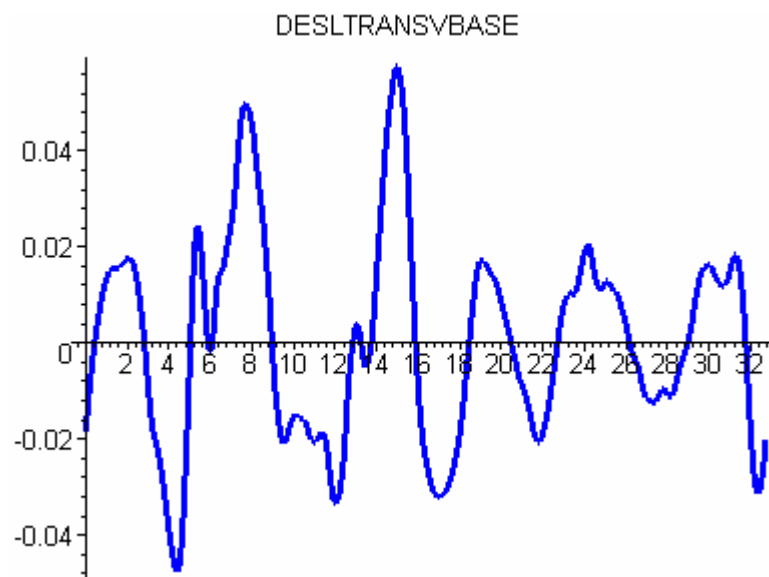


Figura 19.-Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento transversal da base.

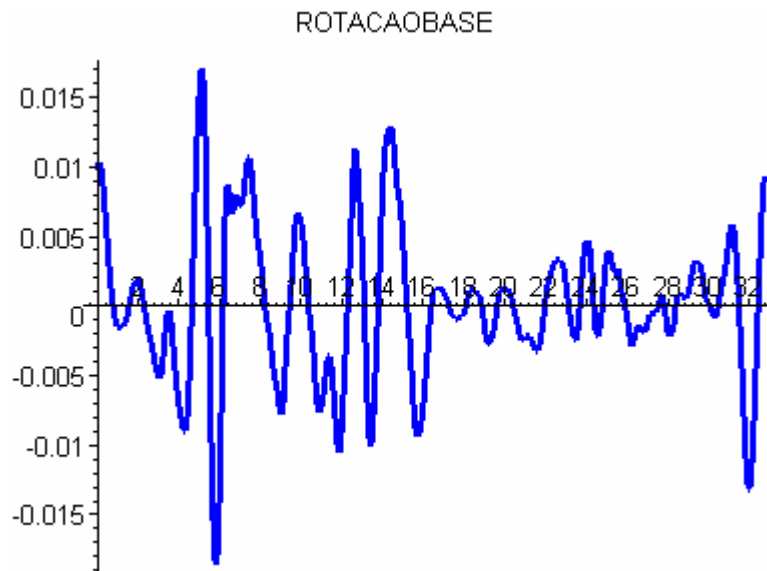


Figura 20.- Interação solo-estrutura com El Centro. Rotação da base (radianos).

Observa-se das figuras que o fato de serem as funções de impedância independentes da frequência, faz com que a vibração na estrutura seja bastante influenciada pela interação solo-estrutura. Também leva a deslocamentos menores nos níveis da estrutura.

IV.5 QUARTO EXEMPLO

Avalia-se o modelo da **Figura 2** na interação solo-estrutura com carregamento sísmico do El Centro.

Neste caso, utiliza-se o denominado amortecimento proporcional de Rayleigh (eq. (56)) em todos os elementos da estrutura.

Utilizam-se, na fundação, as funções de impedância do Veletsos & Wei (1971) dependentes da frequência de excitação (eq. 149).

Nas figuras (21) até (25), o eixo horizontal representa o tempo em segundos (s) e o eixo vertical representa os deslocamentos em metros (m).

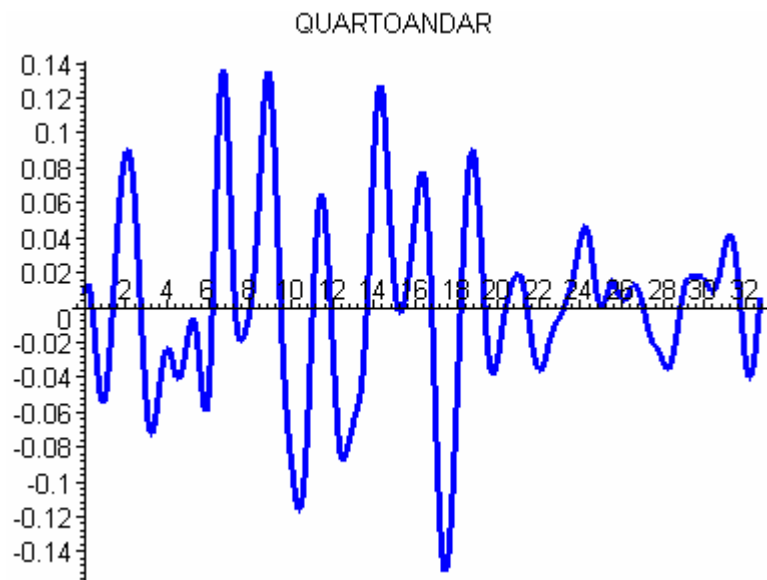


Figura 21.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar.

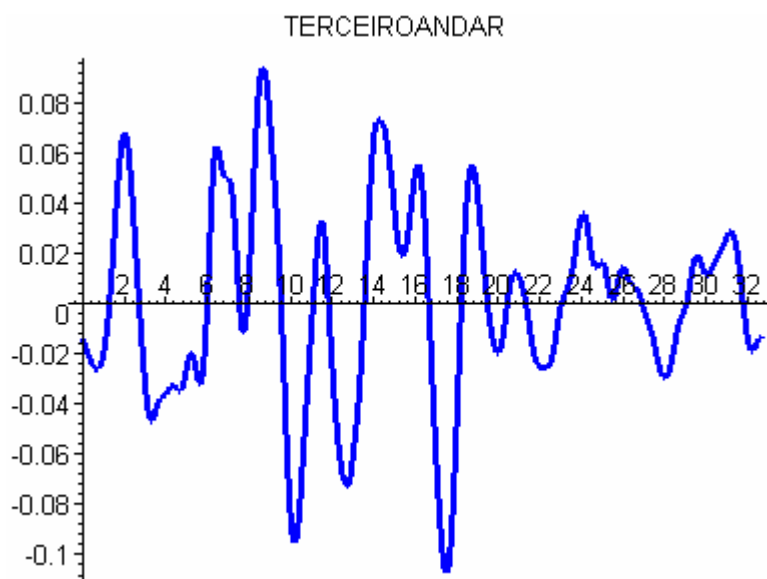


Figura 22.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar.

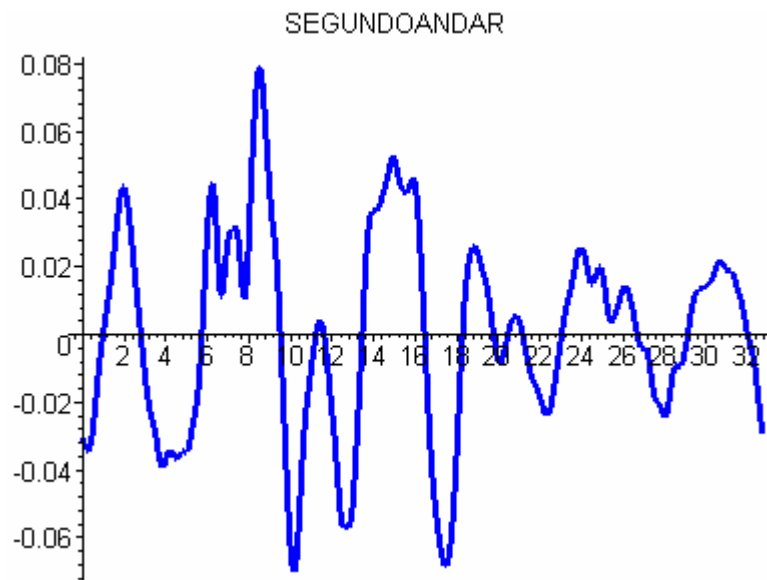


Figura 23.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar.

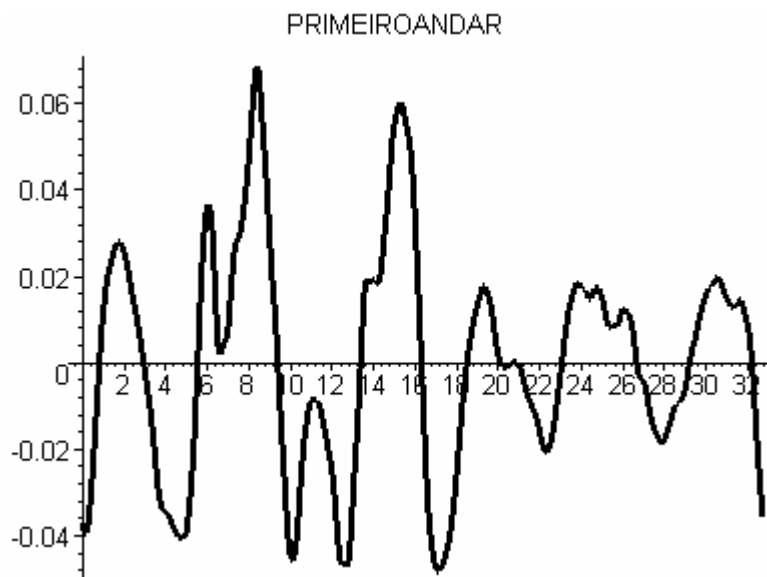


Figura 24.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar.

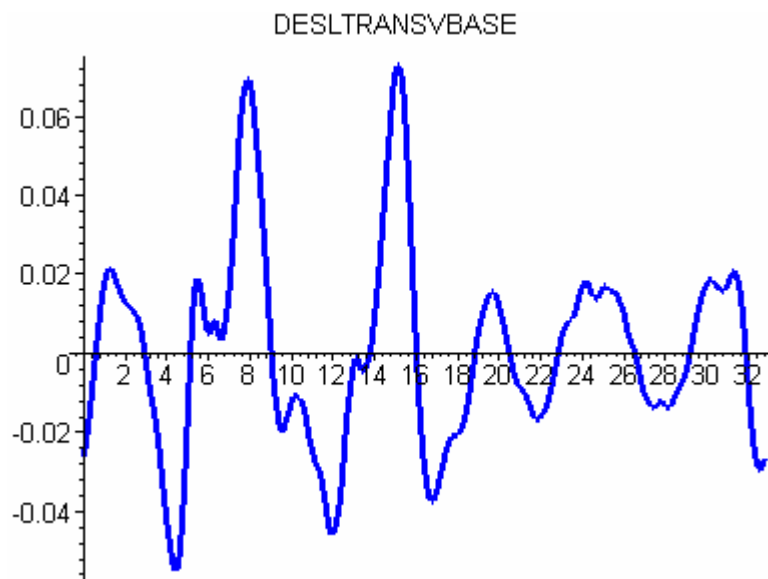


Figura 25.-Interação solo-estrutura com El Centro. Deslocamento transversal da base.

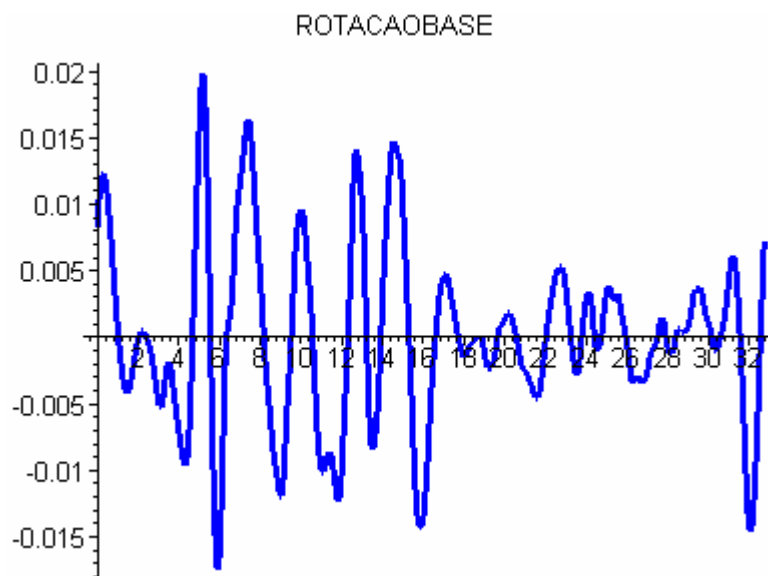


Figura 26.- Interação solo-estrutura com El Centro. Rotação da base (radianos).

Nas figuras deste exemplo, e para este modelo de estrutura, observa-se a influencia do amortecimento proporcional de Rayleigh que tende a diminuir os deslocamentos máximos comparativamente com os deslocamentos para amortecimento histerético (segundo exemplo).

IV.6 QUINTO EXEMPLO

Avalia-se o modelo da **Figura 2** na interação solo-estrutura com o carregamento sísmico do El Centro e com amortecimento proporcional de Rayleigh (eq. (56)) para a estrutura.

Utilizam-se as funções de impedância do Richart et al. (1970) independentes da frequência de excitação (eq.(153)).

Nas figuras (27) até (31) o eixo horizontal representa o tempo em segundos (s) e o eixo vertical representa os deslocamentos em metros (m).

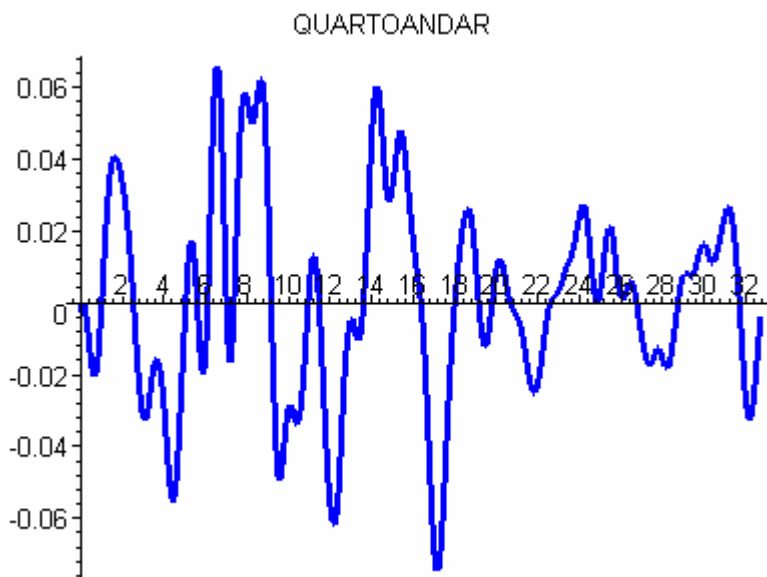


Figura 27.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do quarto andar.

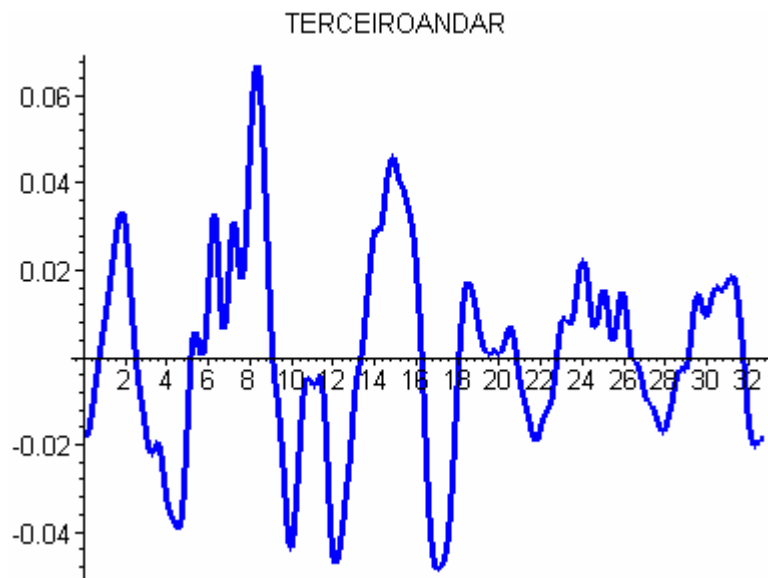


Figura 28.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do terceiro andar.

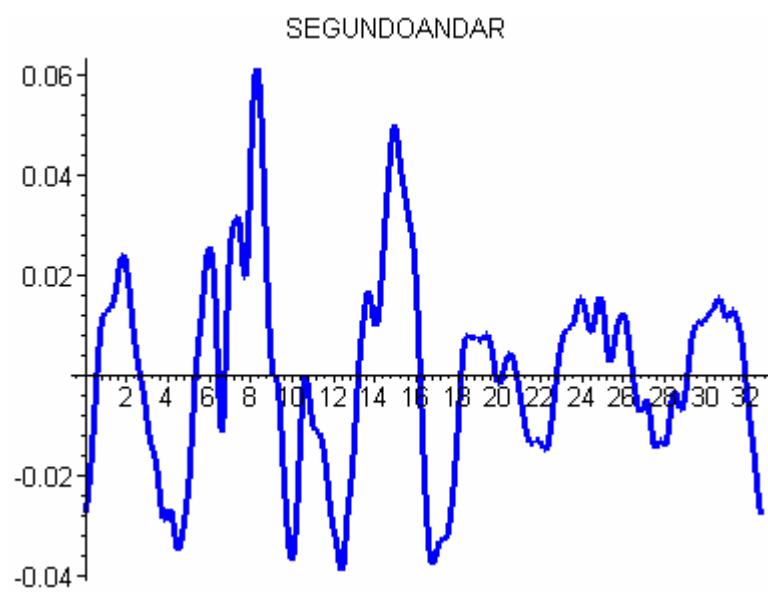


Figura 29.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do segundo andar.

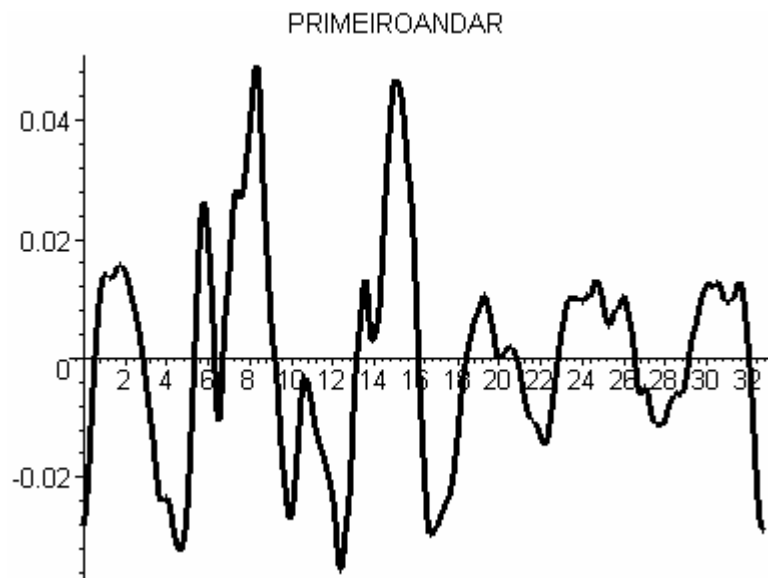


Figura 30.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento do primeiro andar.

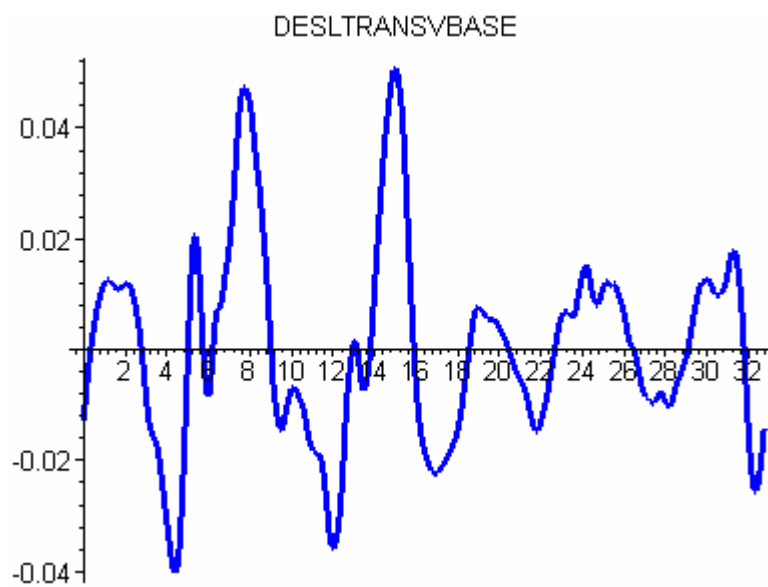


Figura 31.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Deslocamento transversal da base.

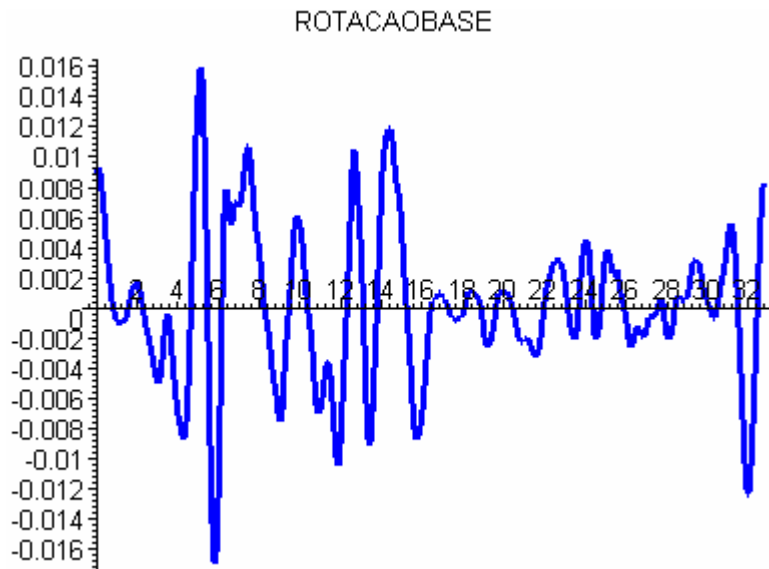


Figura 32.- Interação solo-estrutura sob El Centro. Rotação da base (radianos).

Neste exemplo com amortecimento proporcional de Rayleigh e funções de impedância independentes da frequência (eq.(153)), e, para a estrutura modelada, pode-se dizer que os deslocamentos máximos ficaram muitos menores que aqueles com amortecimento proporcional de Rayleigh e funções de impedância dependentes da frequência de excitação (quarto exemplo).

Podemos inferir que talvez o modelo com funções de impedância independentes da frequência de excitação não avalia corretamente a estrutura analisada.

IV.7 CONSIDERAÇÕES RELATIVAS AOS EXEMPLOS AVALIADOS

Na análise dinâmica em geral, e mais ainda, na análise dinâmica da interação solo-estrutura sob carregamentos que poderiam ser considerados eventos aleatórios (caso de sismos), é muito arriscado precisar conclusões definitivas; cada estrutura tem uma avaliação específica e os resultados para um tipo de estrutura poderiam ser discordantes dos resultados para outros tipos de estrutura.

É muito diferente avaliar uma estrutura superficial (caso do presente trabalho) ou uma estrutura enterrada ou semienterrada. As funções de impedância podem ser completamente diferentes para estes três tipos de estruturas, como pesquisados em Barros (1997) ou Mesquita (1989), para citar alguns exemplos.

Nos problemas de interação solo-estrutura, as respostas dependem do tipo de estrutura e também do tipo de base de fundação; não poderiam ser definidas conclusões para todo o universo de estruturas.

Têm-se soluções para estruturas regulares, irregulares, soluções bidimensionais, tridimensionais, etc. Também soluções para bases de fundação circulares, retangulares, superficiais, profundas (estacas), etc.

Também se têm soluções para solos com diferente estratigrafia, etc.

O presente trabalho tenta fornecer uma solução inicial básica, simples, para um problema de interação solo-estrutura num tipo de estrutura superficial.

A estrutura no primeiro exemplo, com carregamento senoidal no último nível, tem resposta periódica correspondente a esses tipos de carregamentos dinâmicos.

Os outros quatro exemplos mostram respostas para carregamentos aleatórios e, nesses casos, carregamentos sísmicos.

O fato de, nos exemplos, as respostas não serem nulas no tempo zero pode obedecer ao fato da não consideração, no presente trabalho, dos conceitos de amortecimento histerético causal na estrutura.

Para a estrutura superficial da **Figura 2**, utilizada nestes exemplos, mostra-se que os níveis inferiores da estrutura são altamente influenciados pelo fenômeno de interação solo-estrutura.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS E BIBLIOGRAFIA

V.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se neste trabalho um equacionamento para a análise dinâmica de sistemas estruturais considerando a interação solo-estrutura.

Esta formulação, correspondente à proposta de tese, avalia eficientemente a resposta dinâmica de uma estrutura utilizando a análise modal implementada no domínio da frequência através da ImFT e é desenvolvida no capítulo III.

Neste equacionamento, os efeitos da interação (SSI effects) são quantificados através do fator modal de interação solo-estrutura $S_j(\omega)$ estabelecido no domínio da frequência (eq. (84)). O problema da interação deriva na resolução de uma estrutura com base fixa submetida a uma excitação modificada. Assim, o método de superposição modal pode ser aplicado diretamente utilizando os modos normais de vibração da superestrutura.

Nesta formulação, as vantagens da análise modal são utilizadas intensivamente e o problema de interação solo-estrutura pode ser resolvido dentro da formulação da análise dinâmica de estruturas com base fixa no domínio da frequência.

V.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Poderíamos dizer que se tem um universo amplo para trabalhos futuros na área de interação dinâmica solo-estrutura com o uso da Transformada Implícita de Fourier (ImFT).

Por ser um trabalho inicial em Interação Solo-Estrutura (SSI) com a ImFT, não pôde ser implementado o princípio de causalidade, sendo que seria muito importante a implementação futura desse princípio físico fundamental.

No futuro, pode ser trabalhado a Interação Solo-Estrutura (SSI) através da ImFT para outros tipos de estruturas como estruturas enterradas (usinas nucleares, etc), onde as funções de impedância apresentam diferentes tipos de coeficientes relativos aos deslocamentos dessas estruturas.

Podem ser utilizados diferentes tipos de funções de impedância existentes na literatura especializada como, por exemplo, as funções de impedância para bases de

fundação retangulares em semi-espacos viscoelásticos pesquisadas por Wong & Luco (1978).

Podem ser estudadas extensivamente as respostas em SSI para diferentes sismos obtidas através da ImFT e compará-las com as respostas obtidas utilizando as diferentes normas sísmicas existentes nos países latino-americanos.

Podem ser estudadas formulações da SSI através da ImFT incluindo-se condições iniciais.

Também poderão ser estudadas soluções para problemas de interação solo-estrutura através da ImFT para carregamentos transientes.

V.3 BIBLIOGRAFIA

V.3.1 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1.- BOBADILLA, G., U.; ASSAN, E., A. **The Fourier Transform and the Aliasing Phenomenon**. Anais do Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia. LNEC, Lisboa-Portugal; 2004.
- 2.- CLARET, A.M. **Solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares com amortecimento não-proporcional e dependente da frequência**. 1991. Tese de Doutorado - Programa de Engenharia Civil (PEC), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.Brasil.
- 3.- COOLEY, J. W.; TUKEY. **An algorithm for machine calculation of complex Fourier series**, Mathematical Computations. 1965, v. 19, p. 297-301.
- 4.- CRANDALL, S. H. **Dynamic Response of Systems with Structural Damping**, Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Air Force Office of Scientific Research. 1961, AFOSR 1561.
- 5.- FERREIRA, W.G. **Análise dinâmica não-linear no domínio da frequência de sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional**. 1998. 93 f. Tese de Doutorado - Programa de Engenharia Civil (PEC), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.
- 6.- GUPTA, V. K.; TRIFUNAC, M., D. **Seismic response of multistoried buildings including the effects of soil-structure interaction**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 1991, v.10, N° 8, p. 414-422.

- 7.- GUTIERREZ, J. A.; CHOPRA, A. K. **A substructure method for earthquake analysis of structures including structure-soil interaction**, Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1978, v. 6, p. 51-69.
- 8.- HALL, J. F. **Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2006, v. 35, p. 525-545.
- 9.- INAUDI, J. A.; KELLY, J. M. **Linear hysteretic damping and the Hilbert Transform**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1995, v. 121, No. 5, p. 626-632.
- 10.- KAUSEL, E.; CHANG-LIANG, V. Discussion to: **Earthquake finite element analysis of structure-foundation systems**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1975, v. 101, p. 909-911.
- 11.- LIU, S.C.; FAGEL, L.W. **Earthquake interaction by fast Fourier transform**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1971, v. 97, p. 1223-1237.
- 12.- MANSUR, W. J. et al. **Time-segmented frequency-domain analysis for non-linear multi-degree-of-freedom structural systems**, Journal of Sound and Vibration. 2000, 237(3), p. 457-475.
- 13.- PARMELEE, R. A. **Building-foundation interaction effects**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1967, v. 93, p. 131-152.
- 14.- RICHART, F.E.; WOODS, R.D.; HALL, J.R. **Vibrations of soil and foundations**, New Jersey, Prentice-Hall, 1970, 414 p.
- 15.- SAFAK, E. **Time-domain representation of frequency-dependent foundation impedance functions**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2006, v. 26, p. 65-70.
- 16.- SALAJEGHEH, E.; HEIDARI, A.; SARYAZDI, S. **Optimum design of structures against earthquake by discrete Wavelet transform**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005, v. 62, p. 2178-2192.
- 17.- SOARES, Jr. D; MANSUR, W. J. **An efficient time/frequency domain algorithm for modal analysis of non-linear models discretized by the FEM**, Computer Methods in applied Mechanics and Engineering. 2003, 192, p. 3731-3745.
- 18.- TAJIMI. H. Discussion of **Building-Foundation Interaction Effects**, by Richard A. Parmelee, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. Dec. 1967, v. 93, No. EM6, Proc. Paper 5620, p. 294-298.

- 19.- THOMSOM, W. T., DAHLEH, M. D., **Theory of Vibration with Applications**. 5 ed. New Jersey, Prentice Hall, 1998. 524 p.
- 20.- VAIS, A. K.; CHOPRA, A. K. **Earthquake finite element analysis of structure-foundation systems**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1974, v. 100, p. 1101-1116.
- 21.- VELETOS, A.S., WEI, Y.T. **Lateral and rocking vibration of footings**, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division., ASCE. 1971, v. 97, N^o SM9.
- 22.- VENANCIO-FILHO, F. **“Análise dinâmica no domínio da frequência: Sistemas lineares e não-lineares”**. Conferência de concurso para professor titular PEC-ESTRUTURAS/COPPE/UFRJ. 1994, 45 p.
- 23.- VENANCIO-FILHO, F.; CLARET, A. M. **Matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF in the frequency domain**, Computers & Structures. 1992, v. 42, p. 853-855.
- 24.- VIEIRA R., M. **Formulação matricial da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência**. 1998, 90 f. Dissertação mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais.
- 25.- WOLF, J. P. **Dynamic soil-structure interaction**, 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1985. 466 p.
- 26.- WU, W. H.; SMITH, H. A. **Efficient modal analysis for structures with soil-structure interaction**, Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1995, v. 24, p. 283-299.
- 27.- WU, W. -H.; WANG, J. -F.; LIN, C. -C. **Systematic assessment of irregular building-soil interaction using efficient modal analysis**, Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2001, v. 30, p. 573-594.

V.3.2 BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- 1.- ALMEIDA, M.C.F., FERREIRA, W.G., VENÂNCIO-FILHO, F. **Análise de interação solo-estrutura com propriedades do solo dependentes da frequência**.
- 2.- BARROS, P. L. de A. **Elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos: Funções de Green e o método dos elementos de contorno na análise da interação solo-**

estrutura. 1997. 300 f. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM), UNICAMP, Campinas, SP.

3.- BISHOP, R. E. D. **The treatment of damping forces in vibration theory.** J. Royal Aero. Soc., 59. 1955, p. 738-742.

4.- BRACEWELL, R. N. **The Fourier Transform and its applications.** McGraw-Hill, New York, N. Y, 1986.

5.- CAUGHEY, T. K. **Vibration of dynamic system with linear hysteretic damping (linear theory).** Proc., Fourth U. S. Nat. Congr. Of Applied Mech., ASCE, New York, N. Y. 1962, p. 87-97.

6.- CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. **Dynamics of structures.** 2^a ed. New York, Mc Graw-Hill, Inc., 1993. 738 p.

7.- FATHY, F., WALKER, J. **Fundamentals of Noise and Vibration.** Ed. 1998.

8.- MAKRIS, N. **Causal hysteretic element,** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1997, v. 11, p. 1209-1214.

9.- MEEK, J. M., VELETOS, A. S. **Dynamic analysis and behavior of structure-foundations systems.** Report No. 13, Dept. of Civ. Engng, Rice University, Houston, Texas, 1972.

10.- MESQUITA NETO, E. **Zur dynamischen wechselwirkung von fundamenten auf dem viskoelastischem halbraum.** VDI fortschritt-berichte, reine 11: schevingungstecchink, nv. 120, Dusseldorf, 1989.

11.- NAIR, V. V. D. **Dynamic of certain structure-foundation systems.** Thesis presented to Rice University, Houston, Texas, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Chaps. 4 and 5, (1974) pp. 53-90.

12.- PAZ, M. **Structural Dynamics. Theory and Computations.** 4^a ed. New York, Chapman & Hall, 1997. 825 p.

13.- REISSNER, E. **On the theory of bending of elastic plates.** Journal of mathematical physics, 1944. 23, p. 184-191.

14.- RIVIN, E.I.. **Stiffness and damping in mechanical design.** Ed. New Y, Spring, 1999

15.- SMITH, H.A., WU, W.H. **Effective optimal structural control of soil-structure interaction systems.** Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1997, v. 26, p. 549-570.

- 16.- STRUTT, J.W. Lord RAYLEIGH **The Theory of Sound**. Vol. 1, 2nd rev. Ed. New York, Dover. 1937.
- 17.- WOLF, J.P. **Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain**. New Jersey, Prentice Hall., Englewood Cliffs, 1988. 446 p.
- 18.- WONG, H.L. LUCO, J.E. **Dynamic response of rectangular foundations to obliquely incident seismic waves**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1978, v. 6, pp. 3–16.