

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA

**ANÁLISE VIBRACIONAL DE VIGA ENGASTADA
UTILIZANDO A TÉCNICA DE *MOIRÉ*: UM ESTUDO DE CASO**

MÁRCIO ALEXANDRE PINTO VIEIRA

CAMPINAS
JUNHO DE 2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA

**ANÁLISE VIBRACIONAL DE VIGA ENGASTADA
UTILIZANDO A TÉCNICA DE *MOIRÉ*: UM ESTUDO DE CASO**

Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora para obtenção do título de mestre em Engenharia Agrícola na área de concentração de Projeto, Desenvolvimento e Otimização de Maquinas e Equipamentos Agrícolas.

MÁRCIO ALEXANDRE PINTO VIEIRA

CAMPINAS
JUNHO DE 2006

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA:	T/UNICAMP
	V673a
V. _____	Ed. _____
TOMBO BC/	72179
PROC.	16.145.07
C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	25/04/07
BIB-ID	408734

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

V673a	<p>Vieira, Márcio Alexandre Pinto Análise vibracional de viga engastada utilizando a técnica de <i>moiré</i>: um estudo de caso / Márcio Alexandre Pinto Vieira. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.</p> <p>Orientador: Inácio Maria Dal Fabbro. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola.</p> <p>1. Vibração. 2. Interferometria. I. Dal Fabbro, Inácio Maria. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Agrícola. III. Título.</p>
-------	---

Título em Inglês: Moiré assisted vibrational analysis of a cantilever beam: a case study

Palavras-chave em Inglês: Vibration, Interferometry.

Área de concentração: Projeto, Desenvolvimento e Otimização de Máquinas e Equipamentos Agrícolas.

Titulação: Mestre em Engenharia Agrícola.

Banca examinadora: Giovanni Francisco Rabelo e Oscar Antonio Braunbeck.

Data da defesa: 26/02/2005.

SUMÁRIO.

LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE TABELAS.....	viii
I - RESUMO.....	ix
ABSTRACT.....	x
II - INTRODUÇÃO.....	1
III - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
3.1 - Teoria Eletromagnética E Interferência.	2
3.1.1 - Equações De Maxwell No Vácuo.	2
3.1.2 - Ondas Eletromagnéticas Planas.	6
3.1.3 - Fluxo De Energia E Vetor De Poynting.....	10
3.2 - Técnica De Moiré.....	18
3.2.1 - Classificação.	26
3.2.2 - Moiré De Sombra.....	27
3.2.3 - Moiré De Projeção.	30
3.2.4 - Sensibilidade Da Técnica De Moiré.....	31
3.2.5 - Identificação Da Ordem E Posição Da Franja.	33
3.3 - Teoria Da Viga Euler-Bernoulli.....	35
3.3.1 - Viga Engastada:.....	39
3.4 - Vibrações Transversais Livres Em Sistemas Contínuos:.....	41
3.5 - Ortogonalidade Dos Autovetores.	55
3.6 - Vibrações Transversais Forçadas Em Sistemas Contínuos.....	59
3.6.1 - Considerações Gerais.....	59
3.6.2 - Relações Matemáticas.....	61
3.6.3 - Medição Das Frequências De Ressonância.....	63
3.6.4 - Função De Resposta Em Frequência.....	64
3.6.5 - Comparação Das Frequências Naturais.	66
3.6.6 - Comparação Das Formas Modais.	67
3.6.6.1 - Comparação Gráfica.....	67
3.6.6.2 - Comparação Numérica.....	68
IV - MATERIAL E MÉTODOS.....	70

4.1 - Cálculo Da Constante Elástica Da Viga.....	70
4.2 - Cálculo De Densidade Do Aço E Momento De Inércia Da Viga.	71
4.3 - Cálculo Das Frequências De Ressonância.	72
4.4 - Set-Up Experimental Para Análise Modal.	73
4.5 - Comparação De Frequências De Ressonância Obtidas Através De Análise Modal Com Calculadas.....	73
4.6 - Set-Up Para Obtenção Das Franjas De Moiré.....	75
4.7 - Obtenção Das Franjas De Moiré De Projeção.	76
4.8 - Obtenção Da Forma Modal A Partir Da Análise De Moiré.....	78
V - RESULTADOS E DISCUSSÕES.	82
VI - CONCLUSÕES.	85
VII - ANEXO.	85
VIII - REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.	91

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Propagação de onda plana (BORN, 1999).....	05
Figura 02 – Frentes de Onda Plana e Representação do Vetor de Propagação \vec{k} , normal à Frente de Onda (FOWLES, 1975).....	07
Figura 03 – Geometria para Encontro de Duas Ondas Planas (CLOUD, 1998).....	13
Figura 04: Intensidade resultante versus diferença de caminho ou variação de amplitudes, S/λ , para interferência de duas ondas, onde I_1 e I_2 são as intensidades inicial das ondas.....	15
Figura 05: Interferência de onda deformada e onda de referência plana formando franjas curvas e contínuas, onde a ordem das franjas é $N(x,y)=S(x,y)/\lambda$ (POST,1994).....	17
Figura 06: Formação das franjas de <i>moiré</i> pela transmissão da luz através de dois retículos constituídos de linhas paralelas superpostos com períodos diferentes (CLOUD, 1988).....	18
Figura 07: Franjas de <i>moiré</i> produzidas pela sobreposição de duas grades. (CLOUD,1988; POST,1994).....	19
Diagrama 01: Divisão dos métodos óticos em “com contato” e “sem contato”.....	19
Diagrama 02: Divisão do método de <i>moiré</i> em técnicas “passivas” e “ativas”.....	20
Figura 08: Padrão de franjas de <i>moiré</i> representando a mudança na topografia do mecanismo escapular humano com esforço muscular (CLOUD, 1988).....	22
Figura 09: Formação de franjas de <i>moiré</i> pela superposição de grades de linhas com períodos p e q e ângulo θ pequeno entre linhas (CLOUD, 1998).....	23
Figura 10 - Intensidade luminosa observada em perfil da franja de <i>moiré</i> pela sobreposição de retículo de referência e da sombra da grade. (CLOUD, 1998).....	27
Figura 11: sistema de linhas de contorno de manequim obtidas pela técnica de <i>moiré</i> de sombra, com iluminação livre (TAKASAKI, 1970).....	28
Figura 12: Geometria e relações matemáticas do <i>moiré</i> de sombra (POST, 1994).	29
Figura 13: Esquema de exposição dupla de <i>moiré</i> de projeção para medida de deformação (POST, 1994).....	30
Figura 14: <i>Moiré</i> entre duas grades idênticas, com mesmo período e ângulos, com ângulos de abertura (a) 0.75, (b) 0.5 e (c) 0.25. (d), (e) e (f) mostram os respectivos padrões de <i>moiré</i> em	

termos de refletância ou visibilidade da luz[$0 < I < 1$]. (g), (h) e (i) mostram os padrões de percepção do <i>moiré</i> para o olho humano, em termo de densidade (AMIDROR, 2000).....	31
Figura 15: (a)padrão de franjas de <i>moiré</i> da superfície, para objeto descarregado, (b)padrão de franjas de <i>moiré</i> para objeto carregado, N_x^σ , após interferência de franjas de objeto carregado e descarregado, (c) $N_x^{\sigma,c}$ na seção AA', (d)deformação do estresse induzido, seção AA'.	34
Figura 16: Viga delgada submetida à flexão e elemento carregado típico (DOYLE, 1997)...	35
Figura 17: cortes transversais da viga mostrando distribuição do stress e dimensões.	38
Figura 18: Esquema representando Viga Engastada com Carga Estática na Extremidade.(THOMSON, 1973).....	39
Figura 19: Parte Infinitesimal da Viga, Forças Cortantes e Momentos Fletores $\Delta x = \delta x$ (SHABANA, 1991).....	41
Figura 20 – Condições de Contorno de Viga Engastada	46
figura 21- Solução interativa no MatLab para autovalores de frequência.....	47
Figura 22 - (a) forma do primeiro modo de vibração de viga engastada, (b) forma do segundo modo e (c) forma do terceiro modo (TIMOSHENKO, 1970).....	49
Figura 23: Formas Modais Características para Viga Engastada Unitária (McCALLION, 1973).....	50
Figura 24: Forma Modal Calculada para Primeiro Modo.....	51
Figura 25: Forma Modal Calculada para Segundo Modo.....	52
Figura 26: Forma Modal Calculada para Terceiro Modo.....	53
Figura 27: Deformação de continuum elástico (GENTA, 1993).....	59
Figura 28: componentes básicos do sistema de medição e excitação (EWINS, 1984).....	63
Figura 29: Rota teórica para análise de vibração (EWINS, 1984).....	64
Figura 30: Rota experimental para análise de vibração (EWINS, 1984).....	64
Figura 31: comparação da frequência medida e frequência predita pelo modelo matemático (EWINS, 1984).....	66
Figura 32: Comparações entre formas modais medidas e previstas da estrutura apresentada: (a) modo simples, (b) três modos (EWINS, 1984).....	67
Figura 33: diagrama força x alongação para aço utilizado no ensaio de vibração.....	70
Figura 34: Set-up experimental para vibração do corpo de prova (MENIN).....	73
Figura 35: Comparação entre frequências calculadas e obtidas com analisador de sinais.....	74

Figura 36: Set up experimental para obtenção de franjas de <i>moiré</i>	75
Figura 37: Grade usada na projeção.....	75
Figura 38: (a) lamina parada, servindo de base para interferência para todas as outras laminas; (b) lamina vibrando a 29.36hz; (c) lamina (b) tratada com filtro de Gauss e com curva de tom ajustada; (d) lamina vibrando a 68.3 hz; (e) lamina (d) com mesmo tratamento de (c); (f) lamina vibrando a 317.85hz, (g) lamina (f) com mesmo tratamento de (c).....	77
Figura 39: foto da interferência obtida com técnica de <i>moiré</i> e forma modal para primeira frequência de ressonância.....	79
Figura 40: foto da interferência obtida com técnica de <i>moiré</i> e forma modal para segunda frequência de ressonância.....	80
Figura 41: foto da interferência obtida com técnica de <i>moiré</i> e forma modal para terceira frequência de ressonância.....	81
Figura 42: linha espessa: valores obtidos com técnica de <i>moiré</i> , e linha tracejada: valores obtidos analiticamente.....	83
Figura 43: linha espessa: valores obtidos com técnica de <i>moiré</i> , e linha tracejada: valores obtidos analiticamente.....	83
Figura 44: linha espessa: valores obtidos com técnica de <i>moiré</i> , e linha tracejada: valores obtidos analiticamente.....	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 01. Interferência de duas ondas, variando de 89% para boa e 33% para discernível...	16
Tabela 02 - Frequência do retículo para cada tipo de <i>moiré</i> , com a respectiva Sensibilidade.	32
Tabela 03: Constantes β para os diversos modos (WEAVER, 1990).....	48
Tabela 04: Frequência de ressonância obtida na análise modal com analisador de sinais.....	74
Tabela 05: Frequências calculadas e medidas.....	74
Tabela 06: posições relativas e absolutas dos nós.....	78
Tabela 07: Valores de MAC (Modal Assurance Criterion) e MSF (Mode Shape Correlation).	84

I - RESUMO.

O fenômeno de vibração é de ocorrência comum na mecânica, geralmente associado à membros estruturais assim como elementos de máquinas. Particularmente, no campo da engenharia agrícola, vibração vem associada à ferimentos em vegetais nas operações de campo, que claramente inclui colheita, transporte e processamento. A escolha de membros estruturais simples, como a viga engastada, para validar o método, quando uma estrutura mais complexa for ser considerada. O nome *moiré* tem sua origem na língua francesa, referindo-se ao padrão de onda formado. O fenômeno é gerado quando telas são sobrepostas, produzindo padrões de ondas ou franjas, que se movem quando suas posições relativas são alteradas. O método selecionado é chamado método geométrico de moiré, que consiste em projetar uma grade sobre a superfície do objeto em estudo e superpor a foto original e a grade deformada. Software's específicos são empregados na análise de imagens. O objetivo do presente trabalho é determinar o deslocamento transversal da linha elástica na Teoria da viga engastada de Euler-Bernoulli, excitada por um excitador eletromagnético, utilizado em análise modal, utilizando a técnica de moiré descrita acima.

ABSTRACT.

Vibration phenomena are of common occurrence in mechanics, generally associated to structural members as well as to machine elements. Particularly, in the field of agricultural engineering, vibration comes also associated to vegetable bruising during field operations, which clearly includes harvesting, transportation and processing. The selection of a simple structural member as a cantilever beam to support the utility of a moiré technique in studying vibration analysis is to validate the method when more complex structures are being considered. Vibration modes of a cantilever beam are easily determined by analytical methods. The name moiré has its origin in the French language, referring to wave like pattern. The phenomenon is generated when screens superposed, producing wave like patterns or fringes, which move when its relative positions are displaced. The selected method is named geometric moiré, which consists in projecting a grid onto the object in study and superposing both, the original and the deformed grid. Specific software's were employed in the image analysis. The objective of the present work is to determine the transversal displacement of the elastic line of Euler-Bernoulli cantilever beam being excited by an electromagnetic varying field using the moiré technique described above. Keywords: vibration, geometric moiré.

II - INTRODUÇÃO.

Elementos de estruturas, bem como elementos de máquinas estão normalmente sujeitos à solicitações cíclicas. Esse gênero de solicitação freqüentemente gera efeitos negativos tanto nos componentes da máquina agrícola, tanto quanto no produto agrícola sob processo. Efeitos como ruptura por fadiga ou deterioração de produtos agrícolas sob esforços periódicos são sobejamente conhecidos. São inúmeras as motivações que levaram pesquisadores a desenvolver tópicos relacionados com solicitações periódicas e análise vibratória. Os instrumentos empregados em ensaios experimentais envolvendo análise vibratória também sofreram evolução considerável, envolvendo componentes muitas vezes de alto custo. O presente trabalho tem por objetivo aplicar o método interferométrico de *moiré* na identificação dos modos de vibração de uma estrutura simples. A estrutura selecionada consiste de uma viga engastada excitada, vibrando nas freqüências de ressonância e freqüências aleatórias.

III - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

3.1 - TEORIA ELETROMAGNÉTICA E INTERFERÊNCIA.

3.1.1 - EQUAÇÕES DE MAXWELL NO VÁCUO.

Todos os fenômenos do eletromagnetismo clássico são explicados por meio de um sistema de equações diferenciais denominadas Equações de Maxwell.

Os fenômenos eletromagnéticos macroscópicos são descritos usando dois vetores elétricos, **E** e **D**, denominados campo elétrico e deslocamento elétrico, e dois vetores magnéticos, **B** e **H**, indução magnética e excitação magnética, respectivamente. A relação entre **E** e **D** é determinada pela resposta do meio material, representada pela polarização **P** na presença do campo elétrico, e da mesma maneira para **B** e **H**, sendo relacionadas por **M**, magnetização.

Os efeitos de interação são a modificação do estado de equilíbrio de átomos, moléculas, etc, sendo necessário recorrer à mecânica quântica.

Para manter esse estudo dos fenômenos eletromagnéticos no nível macroscópico, é necessário utilizar métodos que permitam definir o campo eletromagnético como valor médio dos valores microscópicos, e considerar os meio materiais como contínuos e caracterizados por grandezas macroscópicas, tais como índice de refração, a condutividade, a polarização, a magnetização, etc. (Jackson, 1983 e Cabrera, 1993, citados por Cisneiros, 2001).

As equações de Maxwell, inomogênas ou com fontes, no vácuo, formam um sistema de quatro equações diferenciais acopladas:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

onde, ε_0 e μ_0 são constantes conhecidas como permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente, ρ como densidade espacial de carga elétrica e \vec{J} como densidade de corrente.

Para uma região livre de carga e correntes elétricas, no vácuo, as equações de Maxwell recebem o nome de “ondas eletromagnéticas” e são representadas por:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

Usando as equações 5 à 8, pode-se chegar às equações de onda para os campos elétrico e magnético. Aplicando o rotacional na equação 5, considerando as equações 6 e 7 e a identidade:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \quad (9)$$

obtém-se a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

obtém-se, por procedimento similar, a equação da onda para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

As equações 10 e 11 podem ser substituídas por três equações escalares, formalmente idênticas, cujas incógnitas são os componentes cartesianos da função vetorial correspondente, portanto a equação do tipo:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

torna-se a equação de onda escalar, com $U(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)$ representando qualquer uma das grandezas escalares das equações de onda 10 e 11 ($E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$), e a constante “c”, a velocidade de fase da onda, independente das coordenadas espaciais e do tempo.

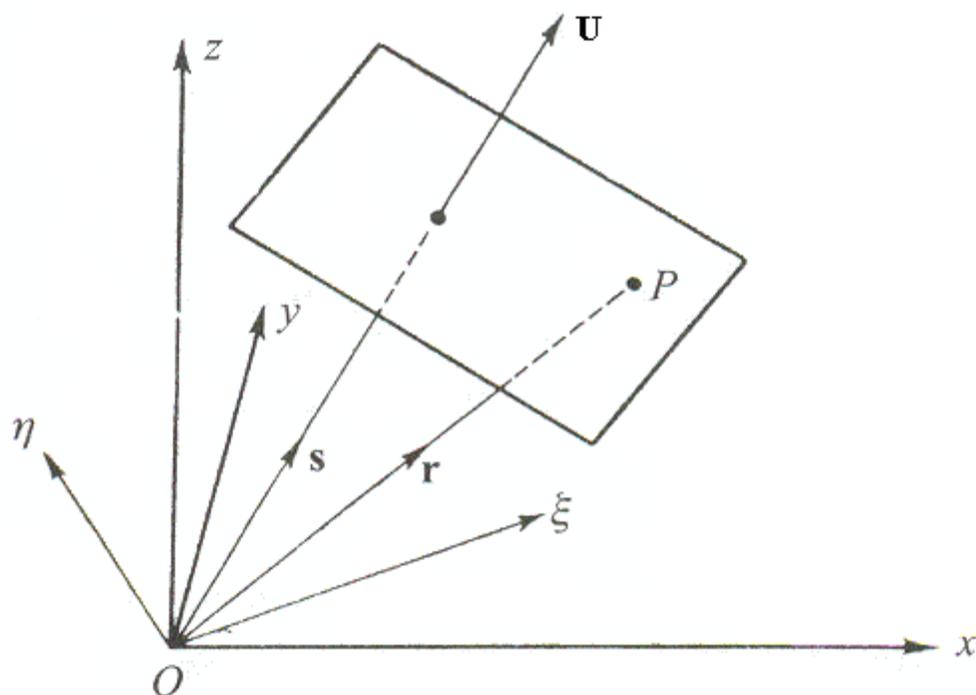


Figura 01: Propagação de onda plana (BORN, 1999).

Segundo Margenau e Murphy (1952), citados por Cisneiros (2001), usando um novo sistema de coordenadas cartesianas, introduz-se duas novas variáveis ortogonais, independentes, na direção $\mathbf{k}(s_x, s_y, s_z)$ (BORN, 1999):

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z - ct \tag{13}$$

Substituindo 13 em 12, temos:

$$\left[c^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - c^2 \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \tag{14}$$

que fica satisfeita com:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (15)$$

Segundo Cisneiros (2001), qualquer função do tipo $U = f_1(\xi)$ é uma solução da equação 12.

De maneira análoga, substituindo:

$$\eta = \alpha x + \beta y + \gamma z + ct \quad (16)$$

tem-se uma nova solução $U = f_2(\eta)$.

As duas soluções são resposta da equação 12:

$$U = f_1(\xi) + f_2(\eta) \quad (17)$$

Observa-se que os parâmetros que multiplicam as coordenadas podem ser interpretados como co-senos diretores ou versores de direção \hat{k} . Escreve-se, então, a equação 17 na forma:

$$U = f_1(\hat{P} \cdot \hat{k} - ct) + f_2(\hat{P} \cdot \hat{k} + ct) \quad (18)$$

onde $\hat{P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é o vetor de posição.

3.1.2 - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS PLANAS.

A função $f_1(\hat{P} \cdot \hat{k} - ct)$ será sempre constante quando o argumento $(\hat{P} \cdot \hat{k} - ct)$ for constante, definindo um plano que se translada segundo \hat{k} com velocidade c . Analogamente, f_2 transladando segundo um plano $-\hat{k}$ com velocidade c . Esses planos são denominados frentes de onda.

Portanto a solução da equação 12 é:

$$U(\vec{s}, t) = U_0 \cos(k\vec{r} \cdot \vec{s} - kct) \quad (19)$$

e utilizando a identidade de Moivre, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$:

$$U(\vec{r}, t) = U_0 e^{i(k\vec{r} \cdot \vec{s} \pm kct)} \quad (20)$$

ou, simplesmente:

$$U(\vec{s}, t) = U_0 e^{i(k \cdot \vec{s} \pm kct)} \quad (21)$$

onde k é uma constante escalar que transforma em adimensional a variável $\vec{r} \cdot \vec{s} \pm ct$. O vetor $\vec{k} = k\vec{s}$ é denominado vetor de propagação e o módulo $|k|$ é denominado fator de propagação.

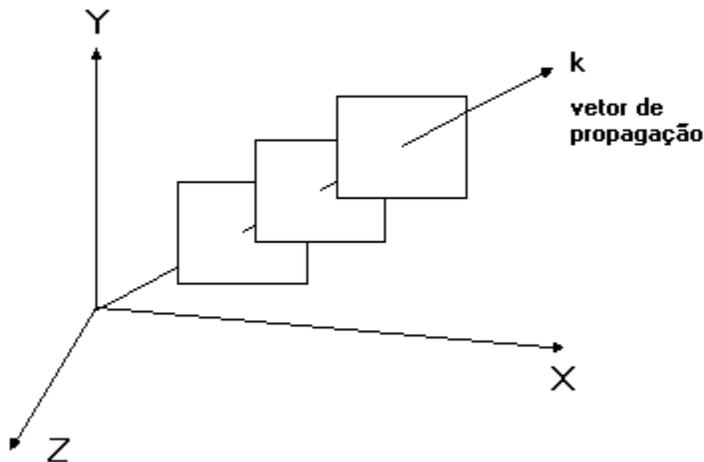


Figura 02 – Frentes de Onda Plana e Representação do Vetor de Propagação \vec{k} , normal à Frente de Onda (FOWLES, 1975).

A frequência angular ou frequência da onda é

$$\omega = kc \tag{22}$$

k também pode ser associado à frequência espacial

$$k\lambda_v = 2\pi \tag{23}$$

onde λ_v é denominado comprimento de onda no vácuo.

As equações 19 e 20, monocromáticas, que se propagam na direção x podem ser escritas como:

$$U(x,t) = U_0 \cos(kx \pm \omega t) = U_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda_v} \pm \frac{t}{T}\right)\right] \tag{24}$$

$$U(x,t) = U_0 e^{i(kx \pm \omega t)} = U_0 \exp\left[2\pi i\left(\frac{x}{\lambda_v} \pm \frac{t}{T}\right)\right] \tag{25}$$

Considerando o campo elétrico da onda plana:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{26}$$

sendo \vec{E}_0 um vetor de módulo e orientação constantes. Calculando:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \vec{E}(\vec{r}, t) \tag{27}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = i\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (28)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (29)$$

e do mesmo modo para o vetor magnético, define-se os operadores aplicáveis a ondas planas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (30)$$

$$\nabla \rightarrow i\vec{k} \quad (31)$$

Aplicando os operadores as equações 5, 6, 7 e 8, obtém-se:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (32)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (33)$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E} \quad (34)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (35)$$

concluindo-se que os vetores **E** e **B** são perpendiculares ao vetor **k**, e que são perpendiculares.

Os vetores **E**, **B** e **k** também formam uma base de vetores perpendiculares e dextrógiros (Fowles, 1975).

3.1.3 - FLUXO DE ENERGIA E VETOR DE POYNTING.

O teorema de Poynting estabelece que o fluxo de energia eletromagnética por unidade de área é dado pelo vetor \vec{S} , relacionado com a direção e magnitude da propagação.

Considerando as equações 1 e 3, multiplica-se escalarmente a equação 1 por $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ e a equação 2 por $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$, e subtrai-se a segunda da primeira:

$$\frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})] = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (36)$$

considerando a identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b} \quad (37)$$

e aplicando:

$$\frac{\partial (\vec{E}^2)}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (38)$$

obtem-se a equação 36 na forma:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (39)$$

define-se o vetor de Poynting como:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (40)$$

definindo $w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$, como densidade de energia do campo eletromagnético,

tem-se a forma diferencial do teorema de Poynting:

$$\nabla \cdot \overset{\rho}{S} + \frac{\partial w}{\partial t} + \overset{\rho}{E} \cdot \overset{\rho}{J} = 0 \quad (41)$$

Substituindo a equação 32 no vetor de Poynting, obtém-se:

$$\overset{\rho}{S} = \frac{1}{\mu_0} \overset{\rho}{E} \times \left(\frac{1}{w} \overset{\rho}{k} \times \overset{\rho}{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 w} \left[(\overset{\rho}{E} \cdot \overset{\rho}{E}) \overset{\rho}{k} - (\overset{\rho}{E} \cdot \overset{\rho}{k}) \overset{\rho}{E} \right] \quad (42)$$

das relações anteriores, obtém-se:

$$\overset{\rho}{S} = \varepsilon_0 c E^2 \overset{\rho}{s} \quad (43)$$

ou

$$\overset{\rho}{S} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \overset{\rho}{s} \quad (44)$$

De acordo com Cisneiros, se definirmos os versores \hat{e}_1 e \hat{e}_2 na direção dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente, tem-se:

$$\overset{\rho}{E}(\overset{\rho}{s}, t) = E_0 \cos(\overset{\rho}{k} \cdot \overset{\rho}{s} - wt) \hat{e}_1 = E(\overset{\rho}{s}, t) \hat{e}_1 \quad (45)$$

$$\overset{\rho}{B}(\overset{\rho}{s}, t) = B_0 \cos(\overset{\rho}{k} \cdot \overset{\rho}{s} - wt) \hat{e}_2 = B(\overset{\rho}{s}, t) \hat{e}_2 \quad (46)$$

considerando que os módulos de \mathbf{E} e de \mathbf{B} se relacionam da forma $E=cB$, e $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$, obtém-se:

$$\mathcal{S} = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(k \cdot \hat{r} - \omega t) \hat{k} = S(\hat{r}, t) \hat{k} \quad (47)$$

fixando o valor de $\hat{r} = \hat{0}$, o valor instantâneo do módulo do vetor de Poynting é:

$$\mathcal{S} = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t) \quad (48)$$

A média temporal de \mathbf{S} é denominada intensidade de onda:

$$I = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad (49)$$

onde:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (50)$$

Considera-se dois grupos de ondas de mesmo comprimento de onda, capazes de interferir uma com a outra (igual polarização e coerentes), e se propagando de acordo com o vetor \hat{k}_1 e \hat{k}_2 conforme figura 02.

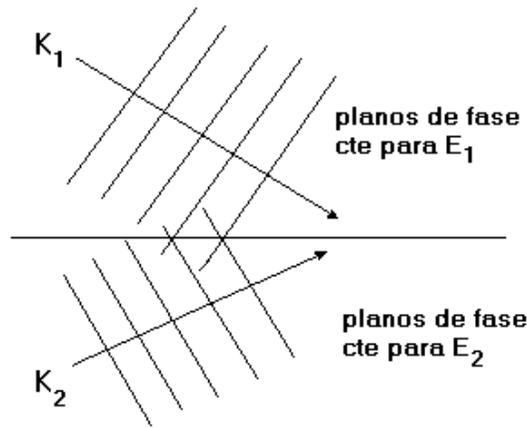


Figura 03 – Geometria para Encontro de Duas Ondas Planas (CLOUD, 1998).

As magnitudes dos vetores elétricos são:

$$E_1 = E_{01} \cos(k_1 \cdot \mathcal{P} - \omega t + \phi_{01}) = \Re(U_1 e^{i\omega t}) \quad (51)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(k_2 \cdot \mathcal{P} - \omega t + \phi_{02}) = \Re(U_2 e^{i\omega t}) \quad (52)$$

onde ϕ_{01} e ϕ_{02} são as fases iniciais em $t=0$ e $\mathcal{P} = \vec{0}$. Então $\phi_1(\mathcal{P}) = k_1 \cdot \mathcal{P} - \phi_{01}$ e $\phi_2(\mathcal{P}) = k_2 \cdot \mathcal{P} - \phi_{02}$.

Em um determinado ponto do espaço dado pela posição \mathcal{P} , a soma das duas ondas é:

$$E_S = E_1 + E_2$$

$$E_S = E_{01} \cos(\omega t - \phi_1) + E_{02} \cos(\omega t - \phi_2) \quad (53)$$

$$E_S = \frac{1}{2} U_1 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} U_1^* e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} U_2 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} U_2^* e^{-i\omega t} \quad (54)$$

$$E_S = [E_{01} \cos(\phi_1) + E_{02} \cos(\phi_2)] \cos(\omega t) + [E_{01} \sin(\phi_1) + E_{02} \sin(\phi_2)] \sin(\omega t) \quad (55)$$

A intensidade da onda pode ser calculada por:

$$I_S = \langle E_S^2 \rangle \quad (56)$$

$$I_S = 2E_S^2(\mathcal{P}) \langle \cos^2(\omega t - \phi_S(\mathcal{P})) \rangle \quad (57)$$

onde

$$E_S^2(\mathcal{P}) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos[(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_1 - \mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_2) - (\phi_{02} - \phi_{01})] \quad (58)$$

$$\phi_S(\mathcal{P}) = \arctg \frac{E_{01} \sin(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_1 - \phi_{01}) + E_{02} \sin(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_2 - \phi_{02})}{E_{01} \cos(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_1 - \phi_{01}) + E_{02} \cos(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_2 - \phi_{02})} \quad (59)$$

lembrando que a média temporal da função \cos^2 é $1/2$, tem-se:

$$I_S = E_S^2(\mathcal{P}) \quad (60)$$

substituindo os termos de irradiância em 59, tem-se:

$$I_S(\mathcal{P}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_1 - \mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_2) - (\phi_0)] \quad (61)$$

onde $\phi_0 = \phi_{02} - \phi_{01}$.

O termo $2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_1 - \mathcal{P} \cdot \mathbf{k}_2) - (\phi_0)]$, da equação anterior mostra que a irradiância não é uma simples soma, mas que contém um termo de interferência dependente do

ângulo de incidência, do comprimento de onda, da fase inicial e da posição no espaço, \mathcal{P} , onde a irradiância está sendo observada.

Devido ao termo $\cos\left[\left(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2\right) \cdot \mathcal{P} - (\phi_0)\right]$, sabe-se que a interferência varia senoidalmente no espaço, sendo o máximo a parte mais visível, e o mínimo, a menos.

CLOUD, 1999 menciona que o mínimo de irradiância nem sempre é zero, e a visibilidade ou contraste das franjas não é uma questão determinada.

Portanto define-se o parâmetro visibilidade da franja, ou refletância, “I”, para a interferência impura de ondas, isto é, quando tem amplitudes diferentes, como:

$$I = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} \quad (62)$$

De acordo com POST, a interferência destrutiva é incompleta, por causa da diferença de amplitude que ocorre entre as ondas, e apresenta a figura 04, que relaciona intensidade máxima e mínima versus diferença de caminhos, ou variação de amplitudes das duas ondas.

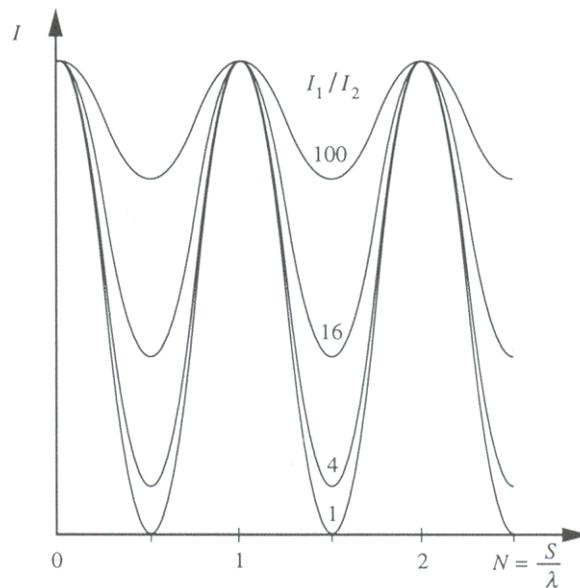


Figura 04: Intensidade resultante versus diferença de caminho ou variação de amplitudes, S/λ , para interferência de duas ondas, onde I_1 e I_2 são as intensidades inicial das ondas.

Então, de acordo com POST, a intensidade resultante é dada pela fórmula:

$$I(\%contrast) = \frac{I_{maxima} - I_{mínima}}{I_{maxima}} * 100\% \quad (63)$$

Daí resulta que a interferência de dessas duas ondas não apresentará ótima visibilidade, variando de 89% para boa e 33% para discernível (POST, 1994), conforme tabela abaixo.

Entrada	Saída:	
	I₁/I₂	I_{max}/I_{min}
1	∞	100
2	34	97
4	9	89
9	4	75
16	2.8	64
25	2.2	56
100	1.5	33

Tabela 01. Interferência de duas ondas, variando de 89% para boa e 33% para discernível.

Quando uma frente de onda w_2 emerge de uma superfície irregular (topograficamente não plana), de forma que a variação na superfície seja contínua, como mostra figura abaixo, e

interfere com superfície de referência w_1 , resulta um padrão não-uniforme de interferência, que é o mapa de contorno da separação $S(x, y)$, entre as duas superfícies.

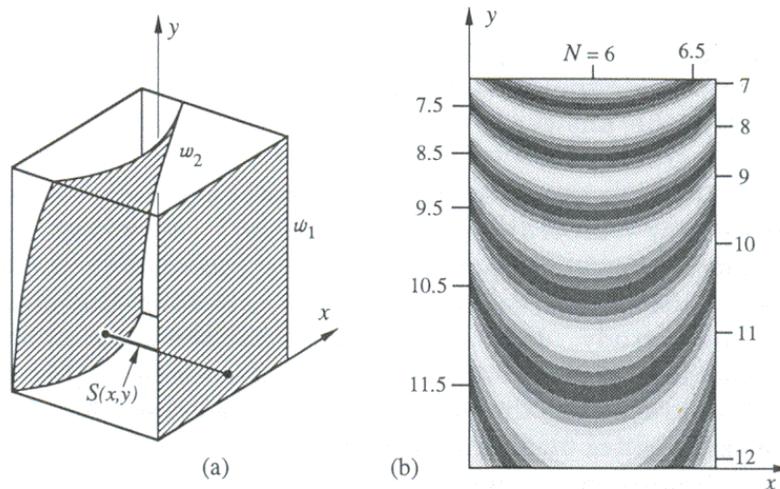


Figura 05: Interferência de onda deformada e onda de referência plana formando franjas curvas e contínuas, onde a ordem das franjas é $N(x,y)=S(x,y)/\lambda$ (POST,1994).

A separação S da frente de onda e a distância entre franjas vizinhas varia sistematicamente com x e y . Através qualquer intensidade de cor $S(x,y)/\lambda$, haverá um valor constante da ordem da franja, sendo N um número inteiro entre os valores escuros de franjas, assumindo valores fracionários entre franjas(POST,1994).

Por isso os valores da equação 63 são válidos, e a intensidade luminosa, representada pelo contraste deve ser medida e analisada no mesmo lugar do espaço onde aparece. O mesmo acontecendo para deformação em três dimensões, pois a luz é emitida de superfície irregular, ou com variações em sua topografia. Ficando claro que a modificação na separação $S(x, y)$ alterará os padrões obtidos.

A figura 06 mostra a formação dos padrões a partir da transmissão de luz entre duas grades com diferentes períodos.

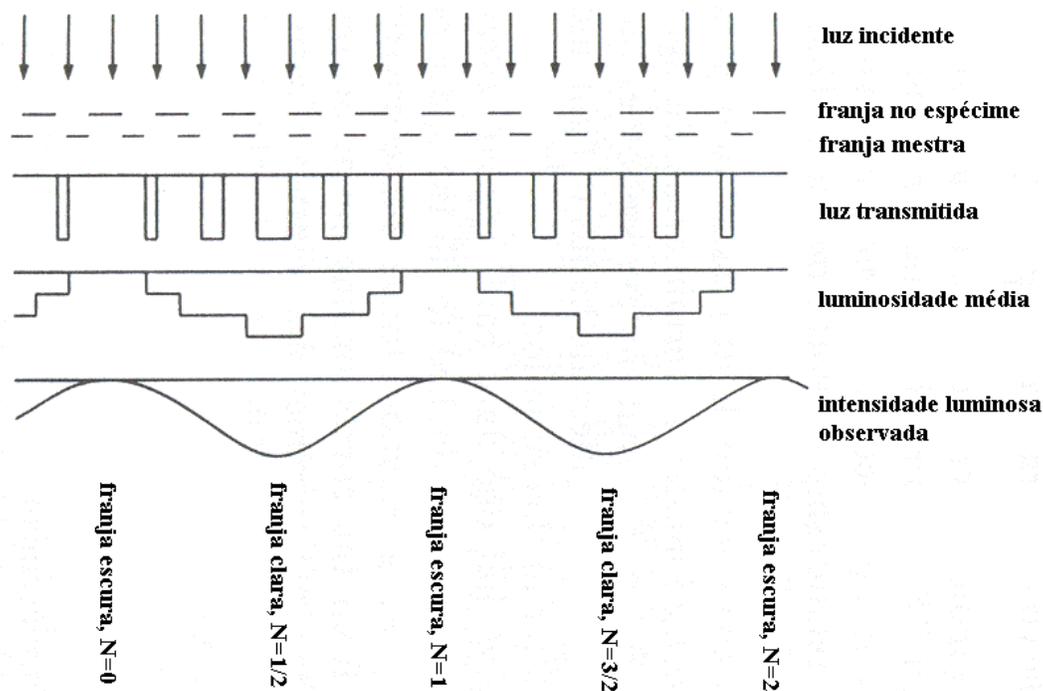


Figura 06: Formação das franjas de *moiré* pela transmissão da luz através de dois retículos constituídos de linhas paralelas superpostos com períodos diferentes (CLOUD, 1988).

3.2 - TÉCNICA DE MOIRÉ.

Quando se olha através de duas telas ou grades sobrepostas, nota-se a formação de padrões ou franjas, que são resultado da combinação das linhas dessas telas. Esse fenômeno é chamado de fenômeno ou efeito de *moiré*; e as franjas produzidas são chamadas de padrões ou franjas de *moiré*. A palavra “*moiré*” é de origem francesa que quer dizer "molhado", e denomina um tecido de seda, importado da antiga China. Esse tecido é composto de duas camadas semitransparentes, e quando existe movimento relativo entre estas camadas aparecem padrões semelhantes a ondas, denominadas franjas de *moiré*. (LINO, 2001).

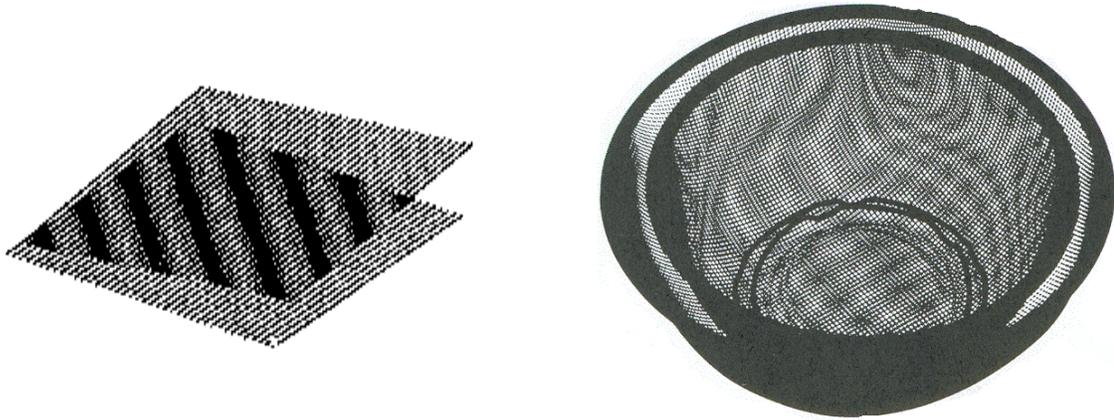


Figura 07: Franjas de *moiré* produzidas pela sobreposição de duas grades. (CLOUD,1988; POST,1994).

As técnicas perfilométricas dividem-se em “com contato” e “sem contato”, segundo a classificação de CURLESS (2001), mostrada no diagrama abaixo:

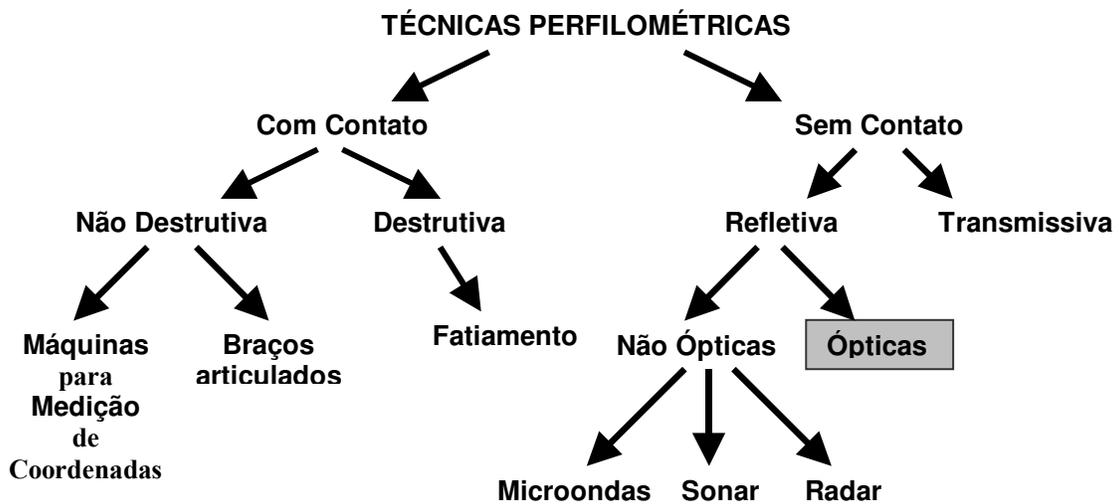


Diagrama 01: Divisão dos métodos óticos em “com contato” e “sem contato”

Curless ainda divide as técnicas óticas em “passivas” e “não-passivas”,

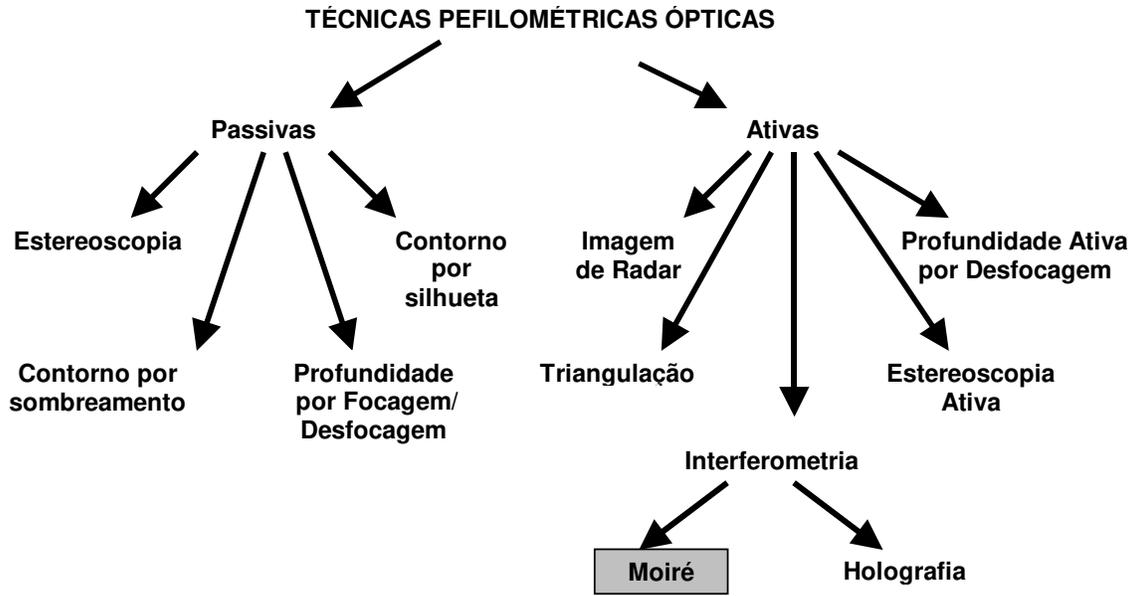


Diagrama 02: Divisão do método de *moiré* em técnicas “passivas” e “ativas”.

Segundo LIVNAT (1985) a técnica interferométrica de *moiré* é caracterizada por uma lista de excelentes qualidades, incluindo:

- Técnica instantânea de representação: o campo de deslocamento pode ser visto no momento em que a carga é aplicada,
- Alta sensibilidade no campo de deslocamentos U e V: tipicamente 2,4 franjas por μm e superiores para análise microscópica, e virtualmente nenhuma sensibilidade no campo W, isto é, para fora do plano de deslocamento,
- Alta resolução espacial: as medidas podem ser feitas em superfícies estreitas,
- Alto raio de sinal em relação ao ruído: os padrões das franjas têm alto contraste e excelente visibilidade,
- Largo campo para medidas: o método é compatível com um largo campo de medidas de deslocamento, deformação e gradientes de deformação.

D. TOLLENAR, citado por LINO (2001), estudando o fenômeno, em 1945, descobriu que as franjas de *moiré* são, na verdade, magnificadoras de movimento, e que poderiam dar uma alta sensibilidade a medições de movimentos relativos.

As Técnicas de *Moiré* são um conjunto de técnicas versáteis baseadas no fenômeno de *moiré*, usados para medição de deformação no plano e fora do plano, contornos topográficos, inclinação, curvatura e formas dos objetos.

As técnicas óticas têm sido empregadas na engenharia e na medicina como em outros diversos campos, na medição de contornos irregulares (LINO, 2002). A manutenção intacta das características externas do produto é o grande trunfo para utilização de métodos óticos em materiais sensíveis como os biológicos, além da rapidez das medidas e do armazenamento da informação adquirida em memória digital.

Uma das aplicações práticas está na fisioterapia, na medição da topografia do corpo humano, conforme figura 08.

O efeito *Moiré* é a interferência mecânica da luz, obtida pela superposição de uma rede de linhas (CLOUD, 1998).

Superpondo duas grades com linhas equidistantes com diferentes períodos, “p” e “q”, e promovendo um pequeno ângulo entre as grades conforme figura 09, obtém-se as franjas de *moiré* pela intersecção das linhas de grade, sendo os olhos responsáveis pela integração das áreas pretas, sendo esse efeito mais pronunciado quando o período das grades é menor.

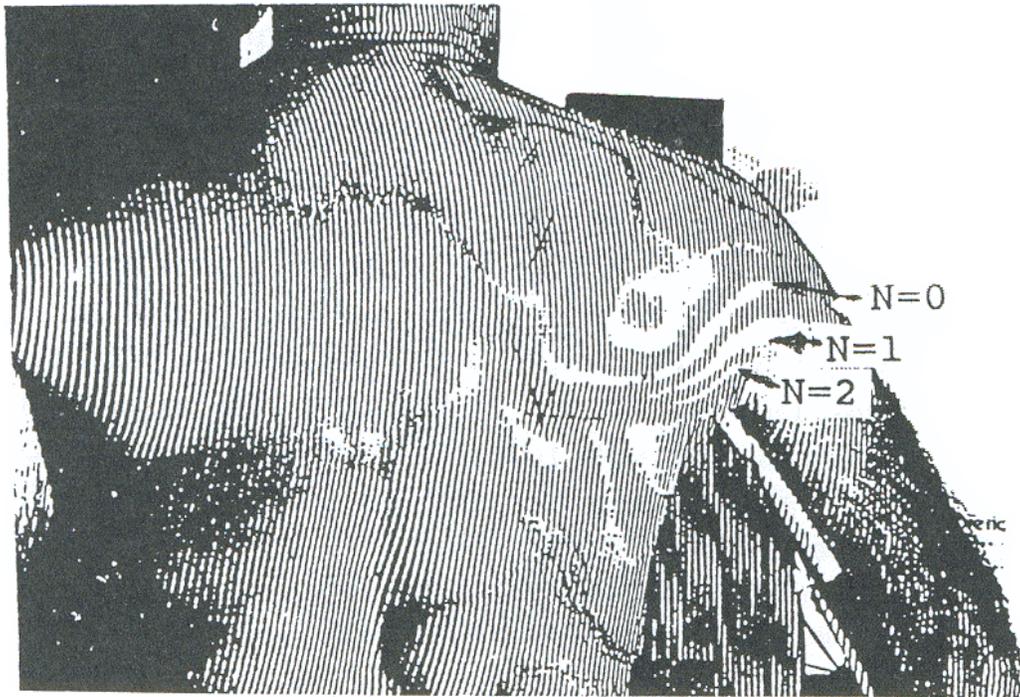


FIGURA 08: PADRÃO DE FRANJAS DE *MOIRÉ* REPRESENTANDO A MUDANÇA NA TOPOGRAFIA DO MECANISMO ESCAPULAR HUMANO COM ESFORÇO MUSCULAR (CLOUD, 1988).

O efeito *Moiré* é a interferência mecânica da luz, obtida pela superposição de uma rede de linhas (CLOUD, 1998).

O método de *moiré* é usualmente utilizado no estudo de mecânica experimental e na prática de engenharia (POST, 1994), ênfase dada a corpos submetidos a esforços, sendo utilizado para medição de deslocamentos no plano e fora do plano.

De acordo com CLOUD, o primeiro passo para análise de *moiré* é estabelecer a relação entre grades superpostas e o padrão de *moiré* resultante. Oster, Wasserman e Zwerling, 1964 e Parks, 1987 citados por CLOUD, estabeleceram relações paramétricas de forma simples e intuitiva, não sendo essa relação utilizada para superposição de estruturas complexas.

Superpondo duas grades com linhas equidistantes com diferentes períodos, “p” e “q”, e promovendo um pequeno ângulo entre as grades conforme figura 09, obtém-se as franjas de *moiré* pela intersecção das linhas de grade, sendo os olhos responsáveis pela integração das áreas pretas, sendo esse efeito mais pronunciado quando o período das grades é menor.

O padrão de *moiré* é formado pela interseção de duas linhas estreitas com períodos p e q com ângulo θ entre elas, conforme figura abaixo:

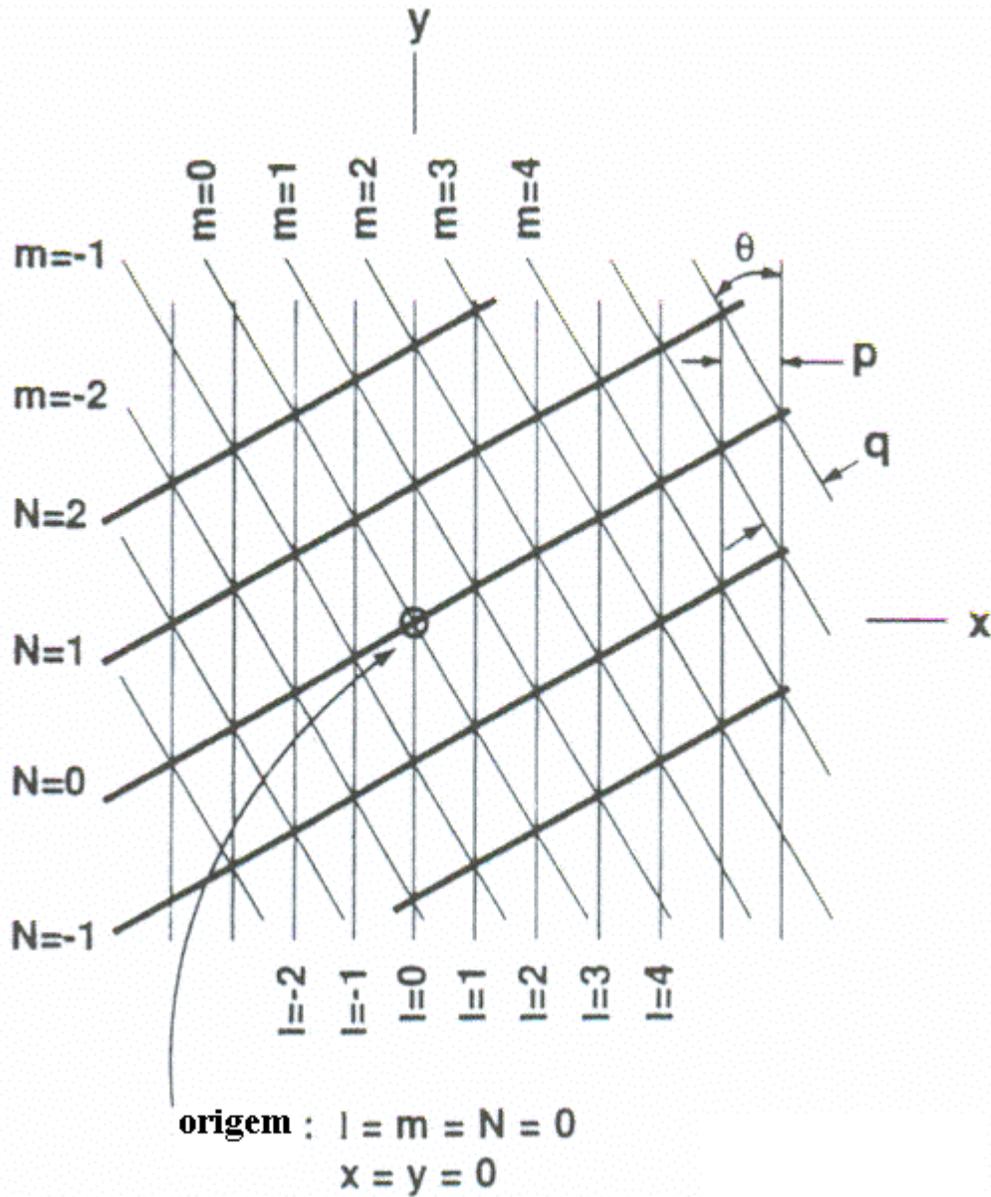


FIGURA 09: FORMAÇÃO DE FRANJAS DE *MOIRÉ* PELA SUPERPOSIÇÃO DE GRADES DE LINHAS COM PERÍODOS p E q E ÂNGULO θ PEQUENO ENTRE LINHAS (CLOUD, 1998).

As relações matemáticas entre os parâmetros das grades e a franja são conseguidas através de geometria. As linhas da grade vertical são descritas como:

$$x = lp \tag{64}$$

onde “l” é um número inteiro e “p” o período da grade.

A segunda família é expressa como:

$$x \cdot \cos \theta = mq - y \cdot \sin \theta \tag{65}$$

ou

$$x = \frac{mq}{\cos \theta} - y \cdot \operatorname{tg} \theta \tag{66}$$

obtém-se:

$$m = \frac{x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta}{q} \tag{67}$$

onde “m” é um número inteiro e “q” o período da respectiva grade.

A origem do sistema de coordenadas é em $l = m = 0$. A franja de *moiré* passa pela origem, tomada como franja de ordem zero ($N=0$).

A ordem da franja é obtida pela relação:

$$m - l = N \tag{68}$$

onde “N” é o número inteiro definindo a ordem da franja, podendo ser observado na figura 09.

Substituindo as equações 64 e 67 na equação 68, obtém-se:

$$\tag{69}$$

$$\frac{(p \cdot \cos \theta - q)x + py \cdot \sin \theta}{pq} = N$$

demonstrando que para uma ordem de franja, o valor à esquerda da equação 69 é constante.

Quando a rotação entre as grades é pequena, obtém-se uma relação linear:

$$(p - q)x + p \cdot \theta \cdot y = Npq \quad (70)$$

supondo que:

$$\varepsilon_x = \frac{(p - q)}{p} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{forma_original}} \quad (71)$$

a equação 70 pode ser expressa:

$$\varepsilon_x x + \theta \cdot y = Nq \quad (72)$$

o que mostra que a ordem das franjas de *moiré* dependem somente dos períodos iniciais das grades e suas relativas posições e orientações. Todos os métodos de *moiré* utilizam a mesma idéia (CLOUD, 1998).

Existem técnicas e variações para se obter a superposição de franjas, no plano:

- Técnica de dupla exposição;
- Técnica de dupla exposição com dois negativos;
- Aparato de sobreposição ótica;
- Método de superposição com espelho parcial.

Quando a medição requerida está fora do plano x-y, ou quando se faz o mapeamento da topografia de um objeto tridimensional, as técnicas utilizadas são:

- Sombra de *moiré*;
- Reflexão de *moiré*;
- Projeção de *moiré*.

que serão explicados nos tópicos a seguir.

3.2.1 - CLASSIFICAÇÃO.

A primeira classificação é feita por SCIAMMARELLA (1982):

- Técnica de *Moiré* ou Técnica de *Moiré* Intrínseca: produção da interferência da foto deslocada em relação à sua posição inicial.
- *Moiré* de Projeção ou *Moiré* de Sombra: produção da interferência da foto deslocada em relação a um plano de referência.
- *Moiré* de Reflexão: produção da interferência da foto deslocada angularmente em relação a um plano de referência.

Outras classificações mais recentes são feitas em relação ao período das franjas, ASSUNDI (1998), levando em consideração o período do retículo:

- Técnica do Retículo: geralmente utiliza retículos com período maior que 1mm.
- Técnica de *Moiré*: utiliza retículos com período variando de 0,1 a 1mm.
- *Moiré* Interferométrico: utiliza retículos com período menor que 0,1mm.

Também AJOVALASIT (1998), classificou a técnica em relação ao tipo de deformação:

- *Moiré* geométrico plano: Fornece os componentes “u” e “v” do deslocamento no plano; é de baixa sensibilidade.
- *Moiré* interferométrico: De alta sensibilidade e que fornece os componentes “u” e “v” do deslocamento no plano.

- *Moiré* holográfico: De alta sensibilidade e que fornece os componentes “u” e “v” do deslocamento.
- *Moiré* por reflexão: Fornece os componentes “ ϕ_x ” e “ ϕ_y ” da rotação
- *Moiré* de Sombra ou de projeção: É o método que fornece a linha de nível do componente analisado com respeito ao retículo de referência.

3.2.2 - MOIRÉ DE SOMBRA.

O método da sombra de *moiré* utiliza a sobreposição da grade com a sombra refletida no objeto (Takasaki, 1970, citado por CLOUD, 1998), conforme esquema da figura 10.

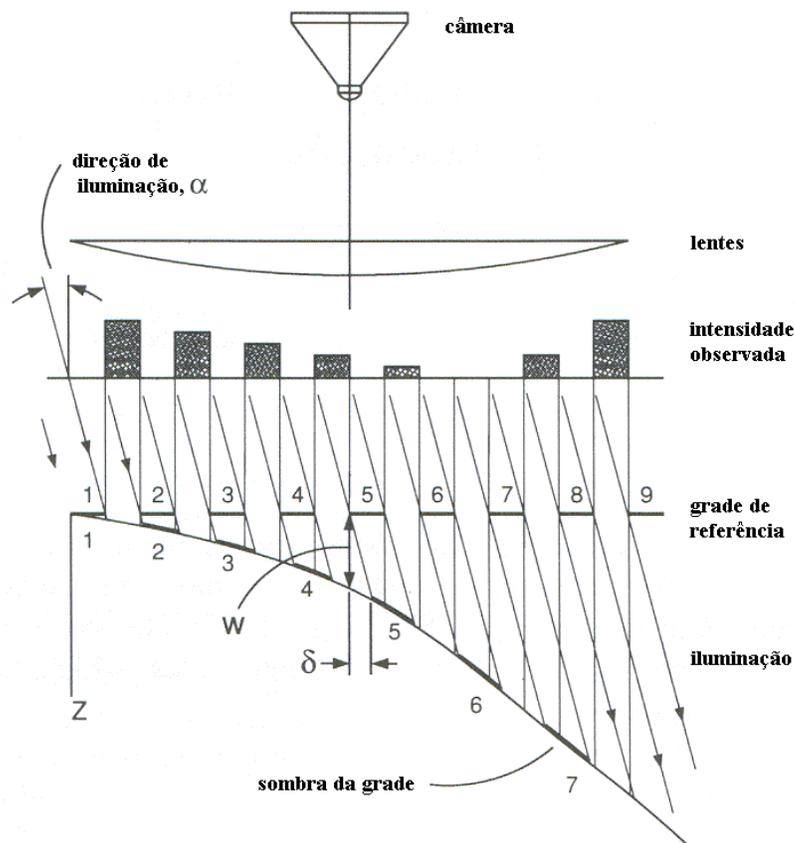


FIGURA 10 - INTENSIDADE LUMINOSA OBSERVADA EM PERFIL DA FRANJA DE *MOIRÉ* PELA SOBREPOSIÇÃO DE RETÍCULO DE REFERÊNCIA E DA SOMBRA DA GRADE. (CLOUD,

1998).

TAKASAKI apresenta em trabalho, superfície de manequim obtida pela técnica de *moiré* de sombra, conforme figura abaixo:

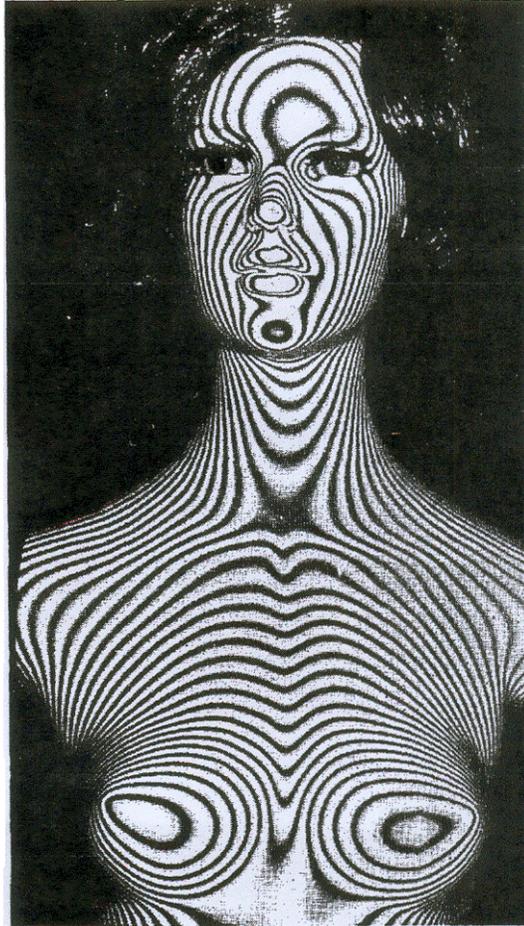


FIGURA 11: SISTEMA DE LINHAS DE CONTORNO DE MANEQUIM OBTIDAS PELA TÉCNICA DE *MOIRÉ* DE SOMBRA, COM ILUMINAÇÃO LIVRE (TAKASAKI, 1970).

Na figura abaixo, vista em corte, a luz passa pela grade de referência e encontra os pontos A, C e E no espécime. A luz é obstruída nos pontos B e D, deixando a superfície escura. Forma-se regiões claras e escuras na superfície.

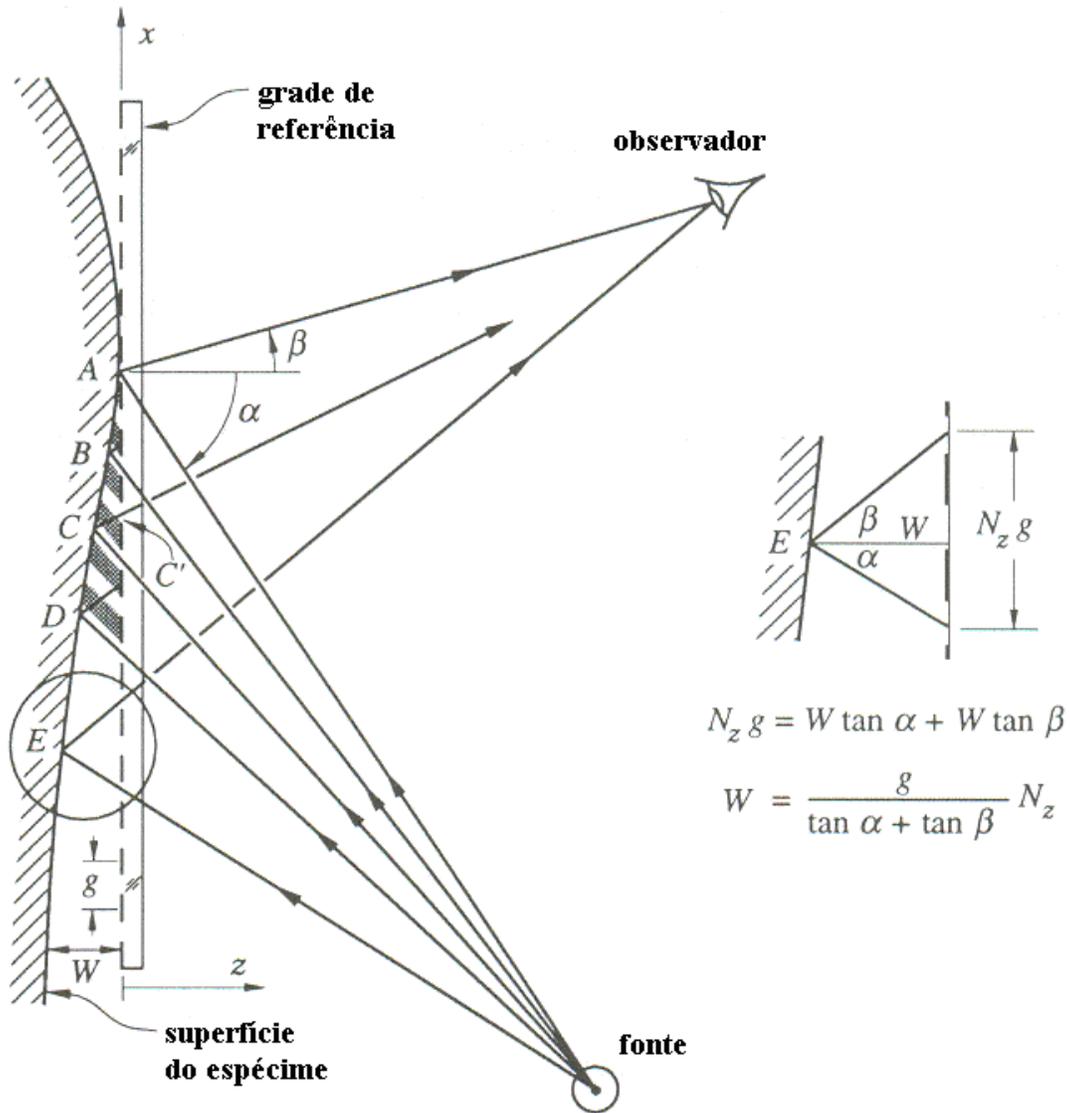


FIGURA 12: GEOMETRIA E RELAÇÕES MATEMÁTICAS DO *MOIRÉ* DE SOMBRA (POST, 1994).

Das relações geométricas obtém-se a fórmula:

$$W = \frac{g}{\tan \alpha + \tan \beta} N_z \quad (73)$$

3.2.3 - MOIRÉ DE PROJEÇÃO.

No método de projeção, a grade é projetada no objeto e as fotos deformadas e indeformadas são posteriormente sobrepostas em computador.

POST apresenta a relação para medição do deslocamento, conforme figura abaixo.

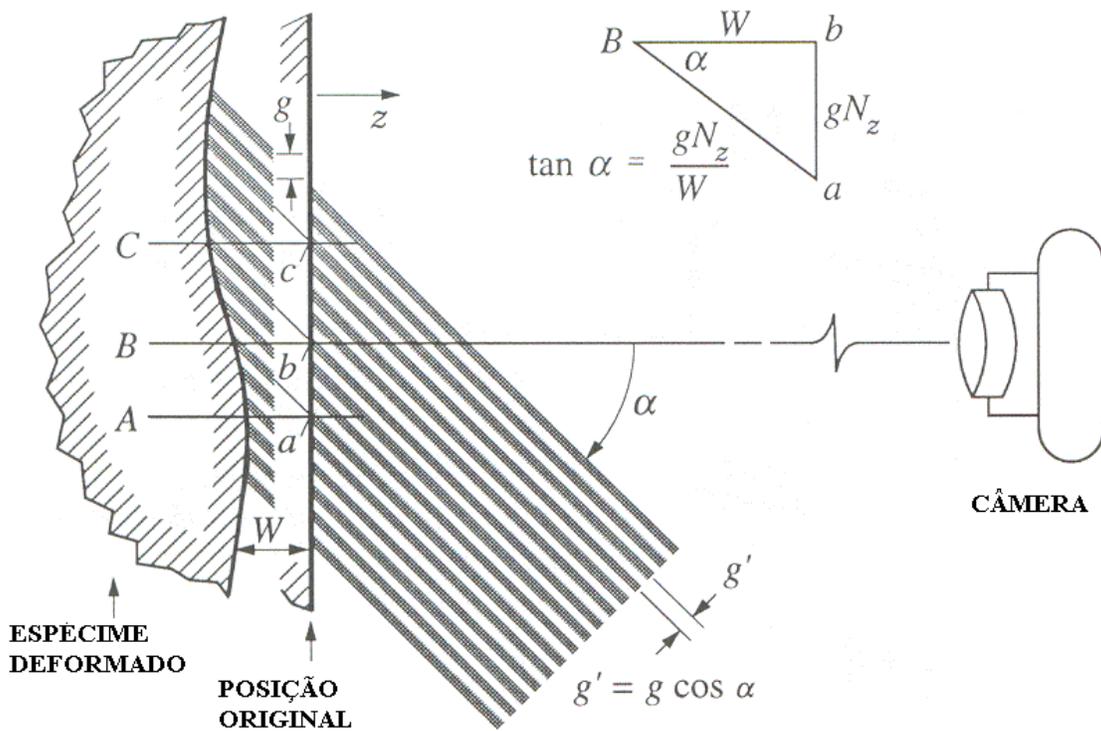


FIGURA 13: ESQUEMA DE EXPOSIÇÃO DUPLA DE *MOIRÉ* DE PROJEÇÃO PARA MEDIDA DE DEFORMAÇÃO (POST, 1994).

Constata-se que as fórmulas apresentadas para *moiré* de projeção e *moiré* de sombra são idênticas, utilizando máquina perpendicular à posição original ($\tan \beta = 0$).

3.2.4 - SENSIBILIDADE DA TÉCNICA DE MOIRÉ.

Através da técnica interferométrica de *Moiré* se consegue estabelecer padrões com alta resolução espacial e excelente claridade (WEISSMAN, 1982).

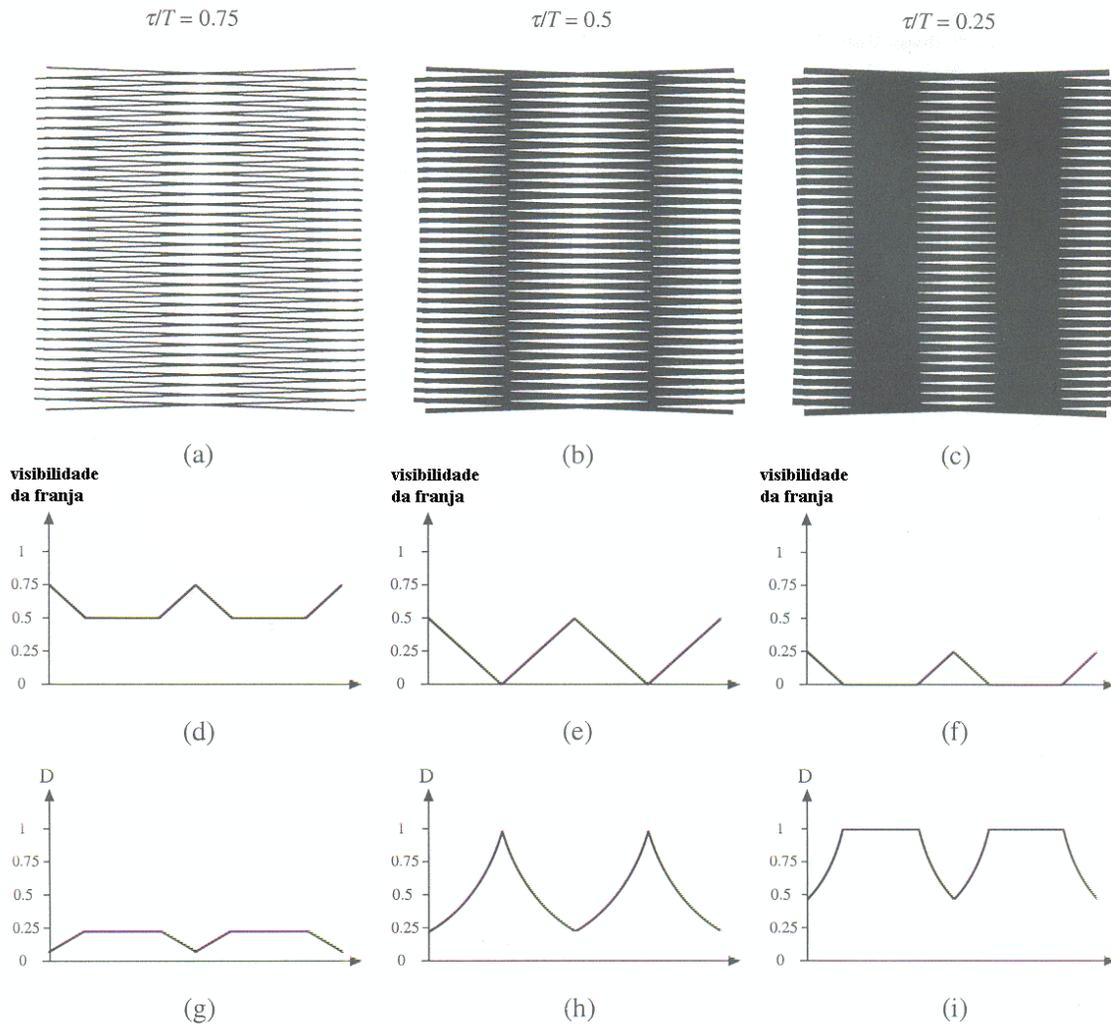


Figura 14: *Moiré* entre duas grades idênticas, com mesmo período e ângulos, com ângulos de abertura (a) 0.75, (b) 0.5 e (c) 0.25. (d), (e) e (f) mostram os respectivos padrões de *moiré* em termos de refletância ou visibilidade da luz [$0 < I < 1$]. (g), (h) e (i) mostram os padrões de percepção do *moiré* para o olho humano, em termo de densidade (AMIDROR, 2000).

A sensibilidade depende, principalmente, do período do retículo da grade, sendo o período inversamente proporcional à sensibilidade. Segundo ASSUNDI (1998), a frequência

para retículos é de 20 à 40 linhas por mm, no caso de *moiré* geométrico, e 1000 à 2000 linhas por mm para *moiré* interferométrico, e apresenta a frequência do retículo e a sensibilidade no seguinte quadro:

TM	Frequência (linhas/mm)	Sensibilidade (µm)
De sombra	< 20	100
Geométrico Plano	20 a 40	25
Interferométrico	1000 a 2000	0,5

Tabela 02 - Frequência do retículo para cada tipo de *moiré*, com a respectiva sensibilidade.

A relação entre número de ordem da franja e o deslocamento é:

$$U(x, y) = \frac{1}{f} N_x(x, y) \quad (74)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{f} N_y(x, y) \quad (75)$$

Sendo **f** é a frequência do retículo de referência, **U(x,y)** e **V(x,y)** são, respectivamente, o deslocamento na direção x e y, **N_x** o número de franjas produzidas pela deformação do objeto, e **N_y** o número de franjas quando a grade de referência e rotacionada de 90°.

Quando a deformação é necessária, recorre-se às componentes de deformação, retiradas diretamente do campo de deslocamentos (TIMOSHENKO, 1970):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (76)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (77)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (78)$$

De onde se deduz que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) \quad (79)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \quad (80)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial x} \right) \quad (81)$$

que são aplicáveis à cada ponto do campo de deslocamentos.

Um bom exemplo dado por Post (1994), no caso de rotação pura de 1°, com período do retículo de 2400 franjas por mm, o padrão de *moiré* teria uma sensibilidade de 42 franjas por mm. Outro exemplo retirado de LINO (2001), para uma deformação de 50µm em x com período de franja de 10 mm, necessita-se de um retículo com 2000 franjas por milímetro.

3.2.5 - IDENTIFICAÇÃO DA ORDEM E POSIÇÃO DA FRANJA.

POST apresenta método para identificação de franjas para medição de deformações fora do plano por método gráfico, após obtidas as franjas de *moiré*, conforme figura abaixo.

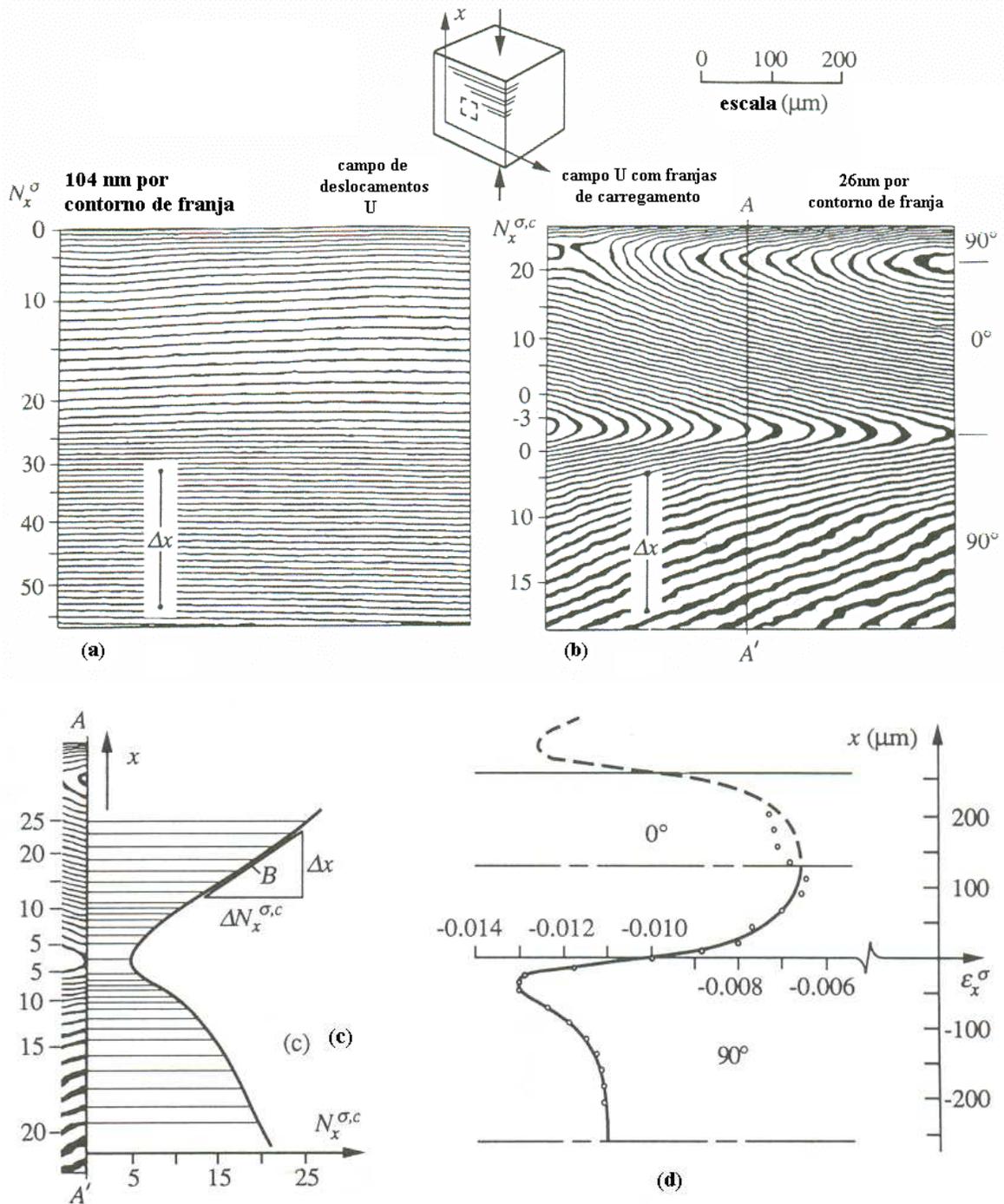


FIGURA 15: (A) PADRÃO DE FRANJAS DE *MOIRÉ* DA SUPERFÍCIE, PARA OBJETO DESCARREGADO, (B) PADRÃO DE FRANJAS DE *MOIRÉ* PARA OBJETO CARREGADO, N_x^σ , APÓS INTERFERÊNCIA DE FRANJAS DE OBJETO CARREGADO E DESCARREGADO, (C) $N_x^{\sigma,c}$ NA SEÇÃO AA', (D) DEFORMAÇÃO DO ESTRESSE INDUZIDO, SEÇÃO AA'.

Esse tipo de traçado, praticamente manual, torna a análise de deslocamentos e deformações prático e rápido, podendo ser implementado em algoritmo.

3.4 - TEORIA DA VIGA EULER-BERNOULLI.

A viga é o elemento estrutural projetado para suportar cargas laterais. Como o deslocamento é predominantemente transversal à linha elástica, forças cortantes internas e momentos fletores são gerados. O comportamento dinâmico das vigas é denominado flexão (DOYLE, 1997).

Considerando a viga com as cargas aplicadas conforme figura 16, a teoria de Euler-Bernoulli assume a presença de uma deflexão da linha elástica $v(x, t)$, pequena, com vibração limitada ao deslocamento do plano $0xy$ (GÉRARDIN, 1997) e seção transversal da viga indeformada e material isotrópico.

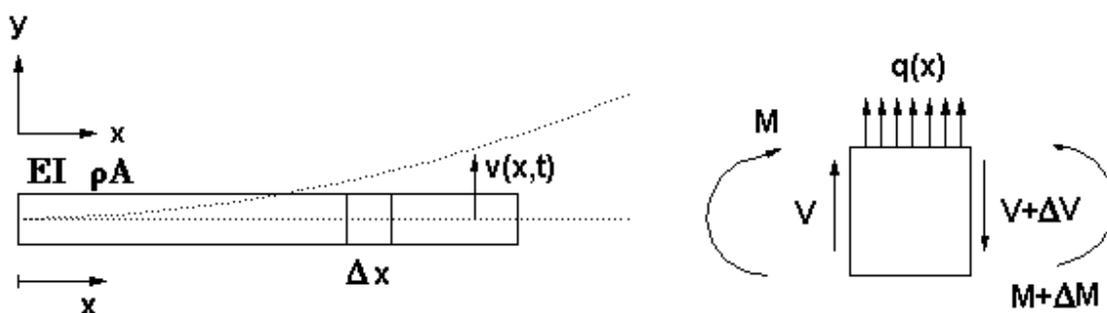


FIGURA 16: VIGA DELGADA SUBMETIDA À FLEXÃO E ELEMENTO CARREGADO TÍPICO (DOYLE, 1997).

Como a teoria de viga de Euler-Bernoulli propõe que a deflexão vertical é aproximadamente constante ao longo do comprimento, enquanto no deslocamento horizontal a área da seção permanece perpendicular à linha elástica e sem deformação na sua face, desprezando-se a presença de qualquer força cortante pertencente a ela.

Começa-se expandindo os deslocamentos da série de Taylor para deslocamentos no meio do plano (DOYLE, 1997):

$$\bar{u}(x, y) \approx \bar{u}(x, 0) + y \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} + \dots = u(x) - y\phi(x) + \dots \quad (82)$$

$$\bar{v}(x, y) \approx \bar{v}(x, 0) + y \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|_{y=0} + \dots = v(x) + y\varphi(x) + \dots \quad (83)$$

onde:

$$u(x) = \bar{u}(x, 0) \quad (84)$$

$$\bar{v}(x) = \bar{v}(x, 0) \quad (85)$$

$$\phi(x) = - \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (86)$$

$$\varphi(x) = \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (87)$$

Como o interesse é só em deformações devido à flexão, define-se $\bar{u}(x, y) = 0$, e como não há esforço cortante:

$$\bar{u}(x, y) \approx -y\phi(x) \quad (88)$$

$$\bar{v}(x, y) \approx v(x) \quad (89)$$

e a deformação axial e cortante, relativas à essas deformações, será:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -y \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (90)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \left(-\phi + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (91)$$

Para uma viga delgada, com a hipótese assumida que não há força cortante, apesar dela existir, deduz-se:

$$\phi(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (92)$$

e a única deformação diferente de zero torna-se:

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (93)$$

Para uma viga delgada, pode-se esperar σ_{xx} como stress dominante. Com essa suposição, a viga está submetida a um estado uniaxial de tensão, aplicando a Lei de Hooke, deduz-se:

$$\sigma_{xx} = -yE \frac{\partial \phi}{\partial x} = -yE \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (94)$$

Esquemmatizando a disposição da σ_{xx} no corte transversal da viga, tem-se:

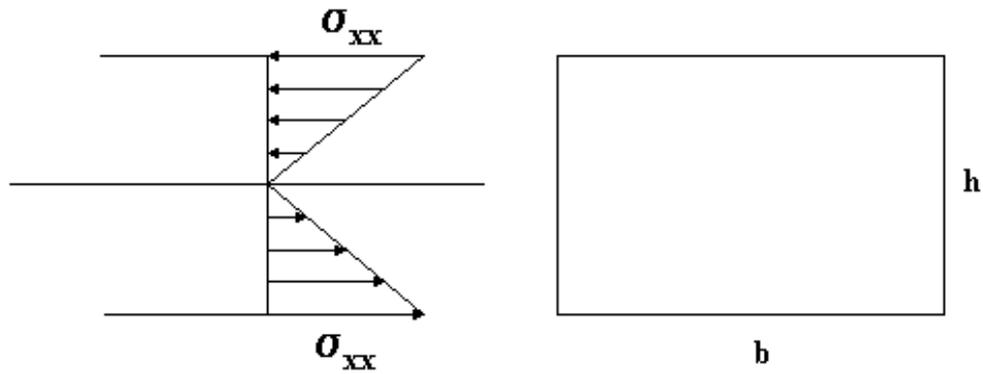


FIGURA 17: CORTES TRANSVERSAIS DA VIGA MOSTRANDO DISTRIBUIÇÃO DO STRESS E DIMENSÕES.

O momento fletor total da viga é dado pela expressão:

$$M = \int \sigma_{xx} y dA \quad (95)$$

como momento de segunda ordem é:

$$I_y \equiv \int y^2 dA \quad (96)$$

e é constante para toda a viga, tem-se:

$$M = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (97)$$

como:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q(x) \quad (98)$$

então:

$$\frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} q(x) \quad (99)$$

Para viga de seção retangular, representada na figura 17, obtém-se:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (100)$$

3.4.1 - VIGA ENGASTADA:

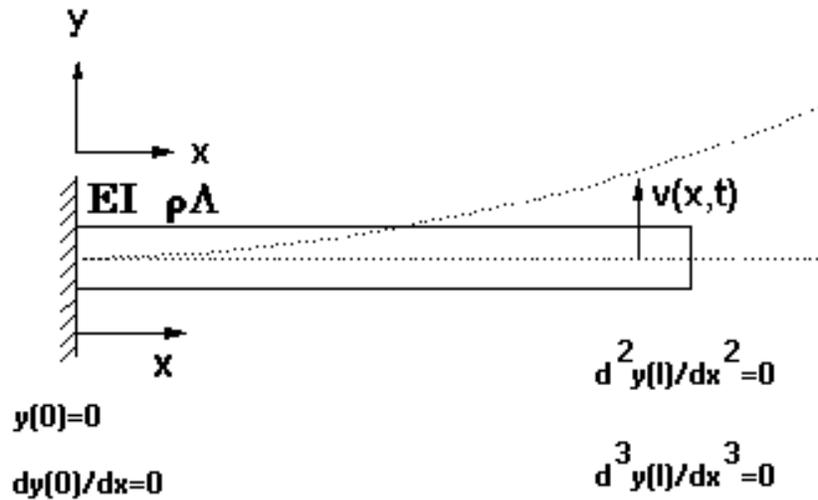


FIGURA 18: ESQUEMA REPRESENTANDO VIGA ENGASTADA COM CARGA ESTÁTICA NA EXTREMIDADE.(THOMSON, 1973).

Para determinar a deflexão da viga engastada em cada ponto de seu comprimento, supondo uma força concentrada estática na extremidade livre, tem-se:

(101)

$$M = -Pl + Px$$

Substituindo na equação diferencial:

$$-Pl + Px = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (102)$$

Integrando-se em todo o comprimento da viga, tem-se:

$$-Plx + \frac{Px^2}{2} + C_1 = EI \frac{\partial v}{\partial x} \quad (103)$$

Novamente, integrando em todo o comprimento da viga, obtém-se:

$$\frac{-Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + \frac{C_1x}{2} + C_2 = EIv(x) \quad (104)$$

Substituindo as condições de contorno indicadas na figura acima:

$$\frac{dy(0)}{dx} = 0 \quad (105)$$

$$y(0) = 0 \quad (106)$$

Obtém-se:

$$\frac{-Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} = EIv(x) \quad (107)$$

Para deflexão na extremidade da viga, tem-se a elongação máxima: $v(L) = v_{\max} = \Delta_{\max}$

$$\Delta_{\max} = \frac{Pl^3}{EI} \quad (108)$$

3.4.2 - VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS LIVRES EM SISTEMAS CONTÍNUOS:

Considerando um volume infinitesimal a uma distância x do fim de uma viga. O comprimento do volume infinitesimal é δx , ρ a densidade, A a área da seção transversal, I_y o momento de área e E o módulo de elasticidade. Sendo V e M , respectivamente, Força Cortante e Momento Fletor, e sendo $F(x, t)$ a força na extremidade da viga, tem-se os esforços representados na figura 19:

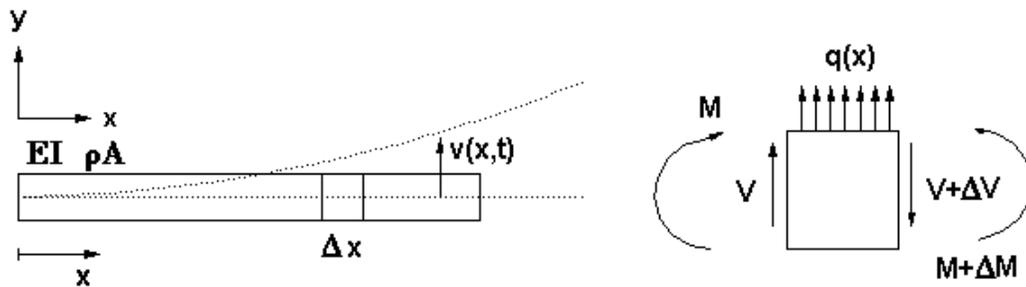


FIGURA 19: PARTE INFINITESIMAL DA VIGA, FORÇAS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES
 $\Delta X = \Delta x$ (SHABANA, 1991).

O somatório dos momentos, sem levar em conta o efeito de inércia rotacional, é:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x - M - (V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x) \delta x + q(x, t) \delta x \frac{\delta x}{2} = (\rho A \delta x) \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \quad (109)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} \delta x - V \delta x - \frac{\partial V}{\partial x} \delta x^2 + q(x, t) \frac{\delta x^2}{2} - (\rho A \frac{\delta x^2}{2}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (110)$$

Com δx muito pequeno:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (111)$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, o equilíbrio dinâmico torna-se:

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x - V + q(x, t) \delta x \quad (112)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + q(x, t) \quad (113)$$

Substituindo:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) + q(x, t) \quad (114)$$

Então, substituindo o momento elementar para viga:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{1}{EI_y} M_z \quad (115)$$

Na equação 116, tem-se:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EI_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + q(x, t) \quad (116)$$

sendo o carregamento $q(x, t) = 0$ e substituindo $c = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$, tem-se a equação diferencial parcial de quarta ordem representativa do movimento:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (117)$$

e sua solução pode ser obtida pela técnica da separação das variáveis. Assumindo-se a solução da forma:

$$v = \kappa(x)\varphi(t) \quad (118)$$

tal que $\kappa(x)$ seja uma função dependente apenas do espaço, e $\varphi(t)$ dependente apenas do tempo. Diferenciando em relação ao espaço e em relação ao tempo tem-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \kappa(x) \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} \quad (119)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \kappa(x)}{\partial x^4} \varphi(t) \quad (120)$$

Substituindo as equações e rearranjando, obtém-se um lado da equação em função do tempo e o outro em função do deslocamento:

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = -c^2 \frac{\mathbf{K}^{iv}(x)}{\kappa(x)} \quad (121)$$

A única possibilidade de satisfazer a equação 56 para todos os valores de tempo e coordenadas em “x” é determinar que ambos os lados são constantes e que a constante é igual para ambos os lados:

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = -c^2 \frac{\mathbf{K}^{iv}(x)}{\kappa(x)} = -w^2 \quad (122)$$

e sendo cada parte da equação igual a constante, usa-se o método de separação das variáveis:

$$\ddot{\varphi} + w^2 \varphi = 0 \quad (123)$$

$$\mathbf{K}^{iv} - \frac{w^2}{c^2} \kappa = 0 \quad (124)$$

A solução da equação 123 é dada por:

$$\varphi(t) = D_1 \sin wt + D_2 \cos wt \quad (125)$$

e para equação 124 assume-se que a solução do tipo:

$$\kappa(x) = Ee^{\lambda x} \quad (126)$$

Substituindo na equação 126 na equação 124, tem-se:

$$\left[\lambda^4 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 \right] Ee^{\lambda x} = 0 \quad (127)$$

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0 ; \text{ sendo } \beta = \sqrt{\frac{w}{c}} ; \quad (128)$$

as raízes da equação 128 são:

$$\lambda_1 = \beta; \quad (129)$$

$$\lambda_2 = -\beta; \quad (130)$$

$$\lambda_3 = i\beta; \quad (131)$$

$$\lambda_4 = -i\beta \quad (132)$$

e a solução geral pode ser escrita da forma:

$$\phi(x) = E_1 e^{\beta x} + E_2 e^{-\beta x} + E_3 e^{i\beta x} + E_4 e^{-i\beta x} \quad (133)$$

eliminando a componente complexa da equação utilizando as relações de Euler para variáveis complexas, tem-se:

$$\phi(x) = E_5 \sinh \beta x + E_6 \cosh \beta x + E_7 \sin \beta x + E_8 \cos \beta x \quad (134)$$

e unindo as duas equações na fórmula original:

$$v(x, t) = (E_5 \sinh \beta x + E_6 \cosh \beta x + E_7 \sin \beta x + E_8 \cos \beta x)(D_1 \sin wt + D_2 \cos wt) \quad (135)$$

onde w é definido, de acordo com a equação 128 como: $w = c\beta^2$

As condições de contorno para viga engastada estão descritas na figura 20:

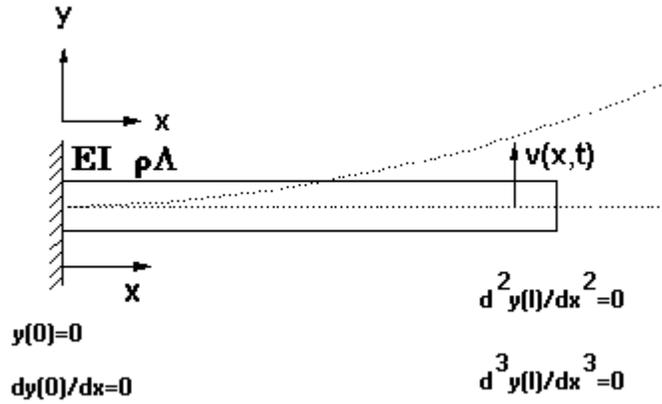


FIGURA 20 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DE VIGA ENGASTADA

Aplicando as condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned} (v)_{x=0} &= E_5 + E_7 = 0 \\ E_5 &= -E_7 \end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} &= \beta(E_5 \sinh \kappa x + E_6 \cosh \kappa x + E_7 \sin \kappa x + E_8 \cos \kappa x)_{x=0} = 0 \\ \beta(E_6 + E_8) &= 0 \\ E_6 &= -E_8 \end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{x=l} &= \beta^2 (E_5 \cosh \beta x + E_6 \sinh \beta x - E_7 \cos \beta x - E_8 \sin \beta x)_{x=l} = 0 \\ E_5(\cosh \beta l + \cos \beta l) + E_6(\sinh \beta l + \sin \beta l) &= 0 \end{aligned} \tag{138}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right)_{x=0} &= \beta^3 (E_5 \sinh \beta x + E_6 \cosh \beta x + E_7 \sin \beta x - E_8 \cos \beta x)_{x=0} = 0 \\ E_5(\sinh \beta l - \sin \beta l) + E_6(\cosh \beta l + \cos \beta l) &= 0 \end{aligned} \tag{139}$$

Das equações 73 e 74, obtém-se:

$$\frac{\cosh \beta l + \cos \beta l}{\sinh \beta l - \sin \beta l} = \frac{\sinh \beta l + \sin \beta l}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \quad (140)$$

que é redutível à:

$$\cosh \beta l \cos \beta l + 1 = 0 \quad (141)$$

Calculando-se: $\cos \beta l = -\frac{1}{\cosh \beta l}$, chega-se à resposta acima para modos superiores

à 3:

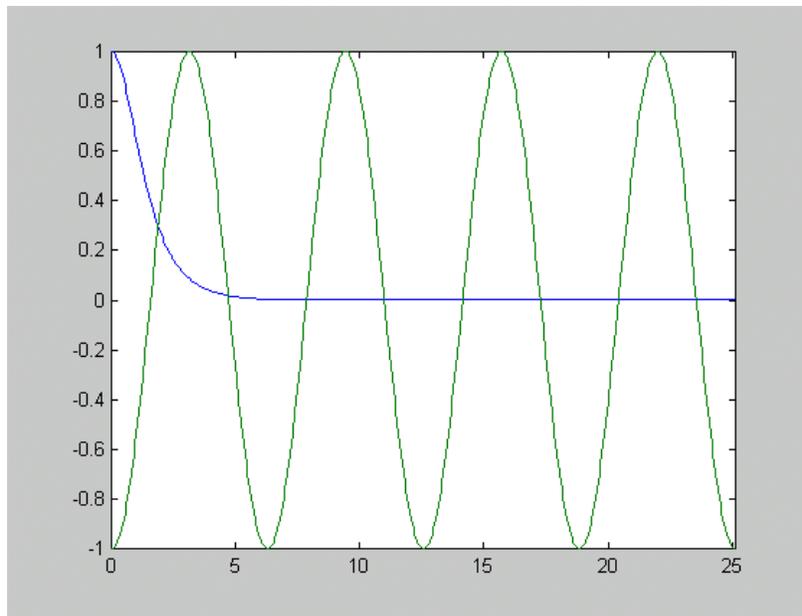


FIGURA 21: SOLUÇÃO INTERATIVA NO MATLAB PARA AUTOVALORES DE FREQUÊNCIA.

WEAVER apresenta a tabela 03 com as soluções para os valores de β para os diversos modos.

Condição de contorno	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
Viga engastada	-----	1.875	4.694	7.855

i = 4	i = 5	i = 6	i > 6
10.996	14.137	17.279	$\approx(i-1/2)\pi$

Tabela 03: Constantes β para os diversos modos (WEAVER, 1990).

As diversas frequências naturais, são obtidas a partir da relação:

$$w_j[\text{rad} / \text{s}] = \frac{\beta_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \quad (142)$$

sendo, para o primeiro modo:

$$w_1 = \frac{(1.875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \quad (143)$$

e o segundo:

$$w_2 = \frac{(4.694)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \quad (144)$$

e assim sucessivamente.

A figura abaixo, apresentada por TIMOSHENKO, apresenta as primeiras três formas modais para viga engastada.

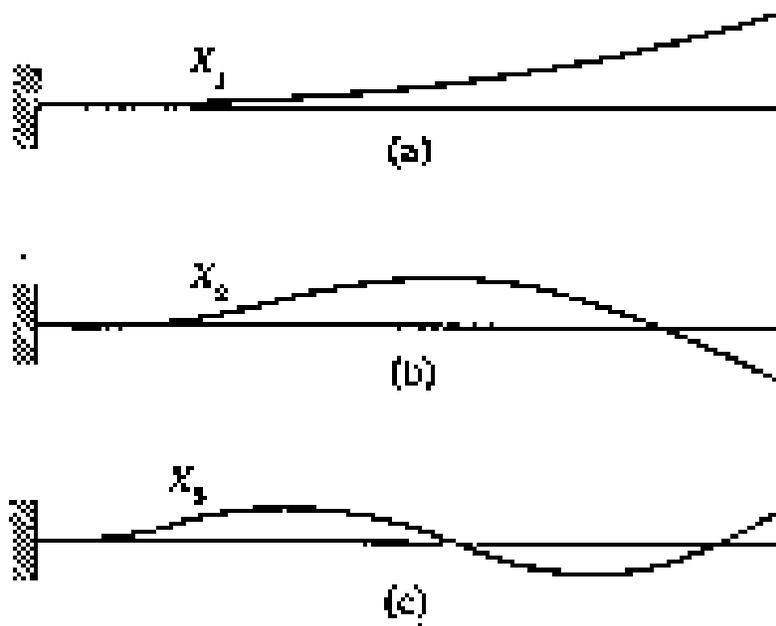


FIGURA 22: (A) FORMA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE VIGA ENGASTADA, (B) FORMA DO SEGUNDO MODO E (C) FORMA DO TERCEIRO MODO (TIMOSHENKO, 1970).

A figura 23 apresenta as primeiras quatro formas modais de vibração da viga engastada, com respectivas posições dos nós.

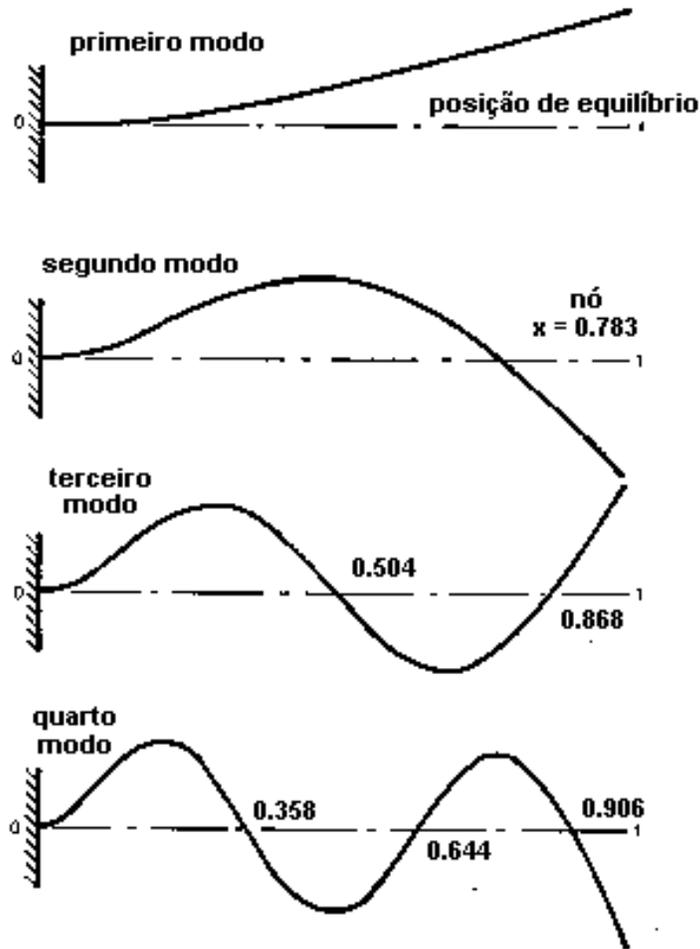


FIGURA 23: FORMAS MODAIS CARACTERÍSTICAS PARA VIGA ENGASTADA UNITÁRIA (McCALLION, 1973).

PRODONOFF continua desenvolvendo a equação para obtenção das formas dos modos.

Utilizando os resultados para as constantes das equações acima obtida para condições de contorno de viga engastada para deflexão da viga em função de x , $\phi(x)$ toma a forma:

$$\phi(x) = E_8(\sin \beta x + \frac{E_7}{E_8} \cos \beta x - \sinh \beta x - \frac{E_7}{E_8} \cosh \beta x) \quad (145)$$

das relações obtém-se a relação:

$$\frac{E_7}{E_8} = -\frac{\sin\beta l + \sinh\beta l}{\cos\beta l + \cosh\beta l} \quad (146)$$

substituindo obtém-se a fórmula para deflexão da linha elástica para os diversos modos:

$$\phi(x) = C_i \left[(\sin\beta x - \sinh\beta x) - \frac{\sin\beta l + \sinh\beta l}{\cos\beta l + \cosh\beta l} (\cos\beta x - \cosh\beta x) \right] \quad (147)$$

onde C_i é uma constante arbitrária para o modo “i”.

GENTA (1993) apresenta a equação da forma do modo como:

$$\phi(x) = \frac{1}{N_2} \left[\left(\sin\frac{\beta x}{l} - \sinh\frac{\beta x}{l} \right) - N_1 \left(\cos\frac{\beta x}{l} - \cosh\frac{\beta x}{l} \right) \right]$$

onde:

$$N_1 = \frac{\sin\beta + \sinh\beta}{\cos\beta + \cosh\beta} \quad \text{e} \quad N_2 = \sin\beta - \sinh\beta - N_1(\cos(\beta) - \cosh(\beta))$$

Associando as duas equações acima, obtém-se a fórmula geral para a forma modal:

$$\phi_{medido}(x) = \frac{C}{N_2} \left[\left(\sin\frac{\beta x}{l} - \sinh\frac{\beta x}{l} \right) - N_1 \left(\cos\frac{\beta x}{l} - \cosh\frac{\beta x}{l} \right) \right]$$

as formas modais, calculadas para cada modo, na forma adimensional, $\xi = \frac{x}{489.97}$, são apresentados nas figuras abaixo:

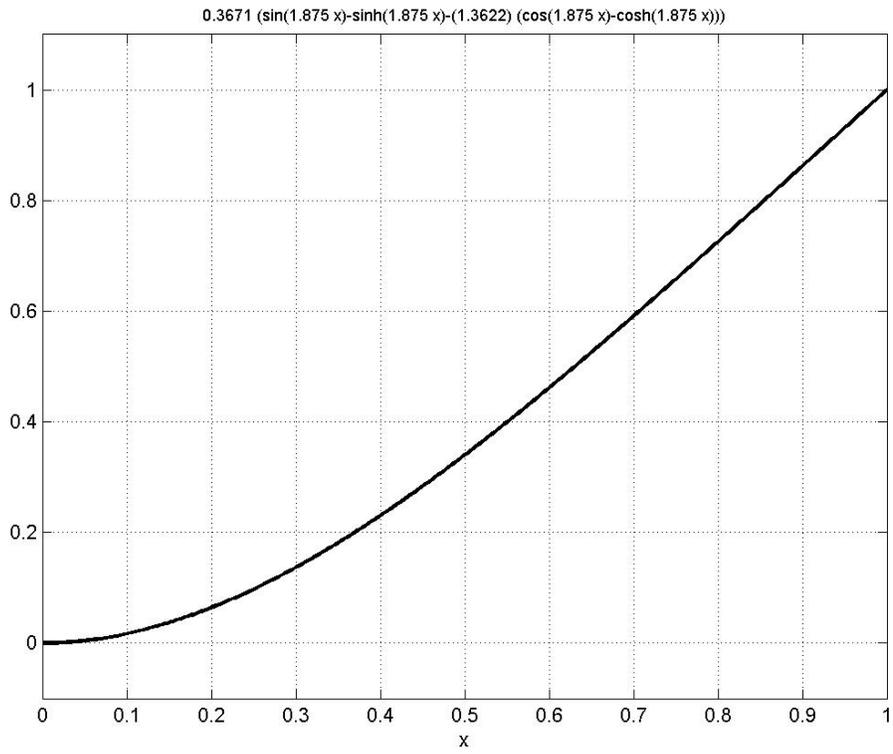


FIGURA 24: FORMA MODAL CALCULADA PARA PRIMEIRO MODO.

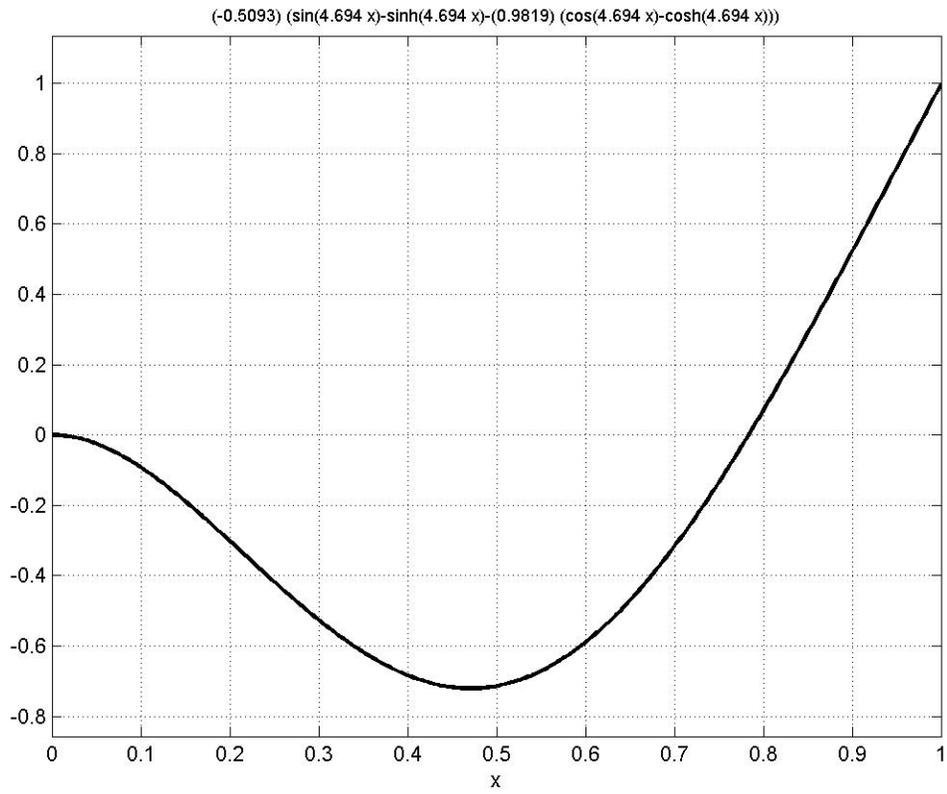


FIGURA 25: FORMA MODAL CALCULADA PARA SEGUNDO MODO.

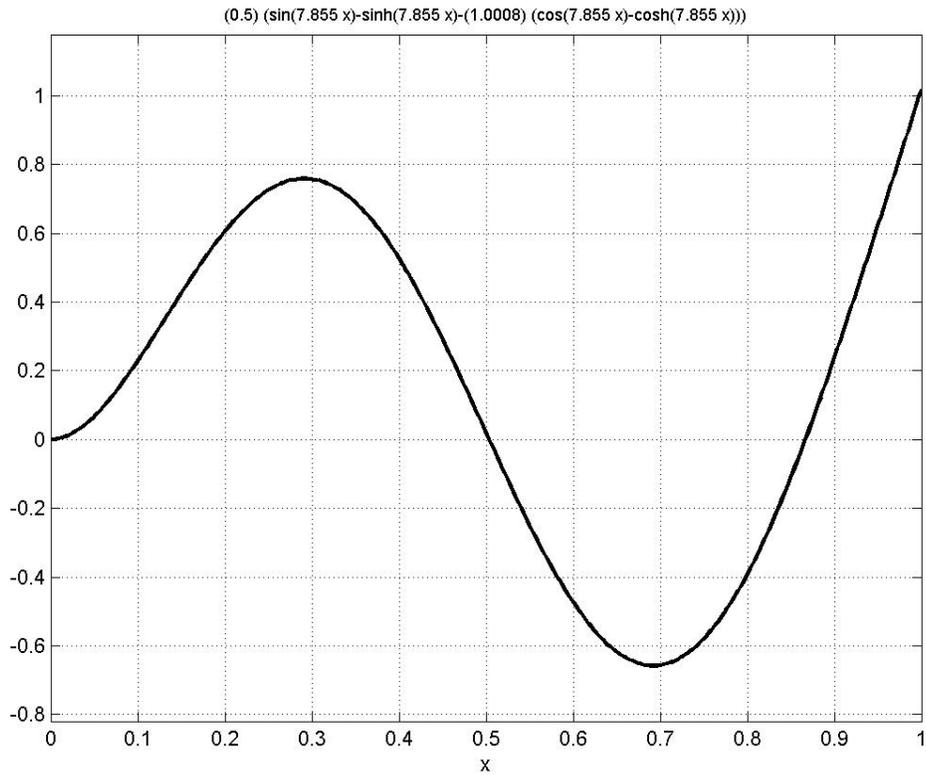


FIGURA 26: FORMA MODAL CALCULADA PARA TERCEIRO MODO.

As equações utilizadas no cálculo das formas modais do primeiro, segundo e terceiro modos são, respectivamente:

$$z(x) = \left(\frac{C}{2.7242}\right)[(\sin(1.875 * \xi) - \sinh(1.875 * \xi)) - 1.3622 * (\cos(1.875 * \xi) - \cosh(1.875 * \xi))]$$

$$z(x) = \left(\frac{C}{(-1.9636)}\right)[(\sin(4.694 * \xi) - \sinh(4.694 * \xi)) - 0.9819 * (\cos(4.694 * \xi) - \cosh(4.694 * \xi))]$$

$$z(x) = \left(\frac{C}{2.0020}\right)[(\sin(7.855 * \xi) - \sinh(7.855 * \xi)) - 1.0008 * (\cos(7.855 * \xi) - \cosh(7.855 * \xi))]$$

3.5 - ORTOGONALIDADE DOS AUTOVETORES.

O desenvolvimento dessa propriedade pode ser usado para obter um infinito número de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem desacopladas, cuja solução pode ser apresentada numa forma simples fechada, e para justificar o uso de técnicas aproximadas para obter um modelo dimensional finito para os sistemas contínuos, com um certo grau de acurácia, para a vibração dos referidos sistemas. Além disso, o uso dessa propriedade conduz para as importantes definições de: massa modal, constante de elasticidade modal e coeficientes de força modal para sistemas contínuos.

Os autovetores são ortogonais com relação à matriz de rigidez e de massa. Essa propriedade pode ser demonstrada escrevendo a equação do equilíbrio dinâmico num oscilador harmônico para o modo i -ésimo:

$$[K]\{\phi_i\} = w^2[M]\{\phi_i\} \quad (148)$$

A equação pode ser multiplicada pela transposta do vetor de Eigen j -ésimo e somada com a equação similar escrita para o j -ésimo modo, pré-multiplicada pela transposta i -ésima do vetor de Eigen, com sinal invertido:

$$\left(\frac{1}{w_i^2} - \frac{1}{w_j^2} \right) \{\phi_j\}^t [K] \{\phi_i\} = 0, \quad (149)$$

lembrando da simetria da matriz $[K]$.

Do mesmo modo pode ser mostrado que:

$$(w_i^2 - w_j^2) \{\phi_j\}^t [M] \{\phi_i\} = 0, \quad (150)$$

para as equações acima, quando $i \neq j$:

$$\{\phi_i\}^t [M] \{\phi_j\} = 0; \quad (151)$$

$$\{\phi_i\}^t [K] \{\phi_j\} = 0; \quad (152)$$

que são relações definindo a ortogonalidade dos autovetores, com respeito às matrizes de massa e elasticidade, respectivamente.

Quando $i = j$, os resultados dos mesmos produtos são diferentes de zero, resultando as constantes: **massa modal e constante de elasticidade modal**, ambos para o modo i -ésimo:

$$\{\phi_i\}^t [M] \{\phi_j\} = \bar{M}_i \quad (153)$$

$$\{\phi_i\}^t [K] \{\phi_j\} = \bar{K}_i \quad (154)$$

relacionados pela expressão da frequência natural:

$$w_i = \sqrt{\frac{\bar{K}_i}{\bar{M}_i}} \quad (155)$$

A matriz de massa modal e a matriz de elasticidade modal podem ser obtidas da seguinte relação, baseada na matrix de autovetores $[\Phi]$:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \text{diag} \{ \bar{M}_i \} = [\bar{M}] \quad (156)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \text{diag} \{ \bar{K}_i \} = [\bar{K}] \quad (157)$$

A matriz de autovetores pode ser usada para transformar o sistema de coordenadas:

$$\{x\} = [\Phi] \{\kappa\} \quad (158)$$

$$\{\kappa\} = [\Phi]^{-1} \{x\} \quad (159)$$

Isso se soma às expressões genéricas do vetor n-dimensional $\{x\}$, que determina a configuração do sistema, como uma combinação linear dos autovetores usando “n” coeficientes de proporcionalidade. Isso é possível através da propriedade dos autovetores de serem linearmente independentes e depois, formar um possível sistema de referencia no espaço das configurações do sistema.

Os autovetores não são ortogonais entre si. O produto $[\Phi]^T[\Phi]$ não resulta em uma matriz diagonal, e $[\Phi]^{-1} \neq [\Phi]$.

Se as coordenadas modais, equação 38, são introduzidas na equação de movimento, tem-se:

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = \{\bar{F}\} \quad (160)$$

$$[\bar{M}]\{\ddot{\kappa}\} + [\bar{K}]\{\kappa\} = \{\bar{F}\} \quad (161)$$

onde :

$$\bar{F}_i(t) = \{\phi_i\}^T \{F(t)\} \quad (162)$$

Para sistemas sem amortecimento, ou com amortecimento proporcional, todas as matrizes são diagonais, e a equação 161 torna-se um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem desacopladas, tornando o sistema com n graus de liberdade é quebrado em n equações, cada uma com um grau de liberdade.

$$[\bar{M}_i]\{\ddot{\kappa}_i\} + [\bar{K}_i]\{\kappa_i\} = \{\bar{F}_i\} \quad (163)$$

Os autovetores são soluções dos conjuntos lineares de equações homogêneas e não são os únicos. Para cada modo existe uma infinidade de autovetores, todos proporcionais entre si.

A resposta, no tempo, para uma excitação arbitrária pode ser computada da seguinte forma:

1. computando os autovalores e os autovetores do sistema e normalizando os autovetores;
2. computando as forças modais como funções do tempo;
3. resolvendo o sistema de n equações (equação 161), na ordem, para se obter a história temporal da resposta em termos de coordenadas modais;
4. combinando as respostas computadas através da equação 159, que conduz a história temporal do sistema em termos das coordenadas $\{x\}$.

Esse procedimento tem a notável vantagem de trabalhar com “n” equações diferenciais desacopladas, enquanto uma solução direta requererá a integração de “n” equações diferenciais acopladas.

Outra vantagem consiste em que nem todos os modos são importantes para determinar a resposta do sistema. Se os graus de liberdade são muitos, um número limitado de modos, usualmente caracterizados por baixas frequências, são suficientes para se obter a resposta com boa acurácia.

Quando alguns modos são negligenciados, a matriz reduzida de autovetores, as quais serão referidas como $[\Phi^*]$, não é quadrada. A primeira transformação, equação 159, ainda pode ser efetuada, mas a transformação da equação 160 não é mais possível.

A coordenadas modais $\{\kappa\}$ podem ser computadas das coordenadas físicas $\{x\}$ pré-multiplicando ambos os lados da equação 159 por $[\Phi]^T[M]$ e pela inversa da matriz de massas modais, obtendo assim:

$$\{\kappa\} = [\bar{M}]^{-1} [\Phi^*]^T [M] \{x\} \quad (164)$$

3.6 - VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS FORÇADAS EM SISTEMAS CONTÍNUOS.

3.6.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.

Nos sistemas discretos, a equação diferencial de movimento, pode ser facilmente substituída por um conjunto de funções lineares. A matemática usada para esse estudo é a álgebra matricial.

A situação para sólidos elásticos deformáveis é diferente, pois eles são modelados como continuum linear elástico, isto é, pode ser imaginado como uma infinidade de pontos.

Para descrever a configuração inicial do corpo, um sistema de coordenadas se torna necessário, sendo que muitos casos podem ser estudados em duas dimensões, mas há os que uma aproximação tridimensional é necessária.

A configuração a qualquer tempo pode ser obtida da configuração inicial, como uma função vetorial, expressando os deslocamentos em todos os pontos, conforme figura 27.

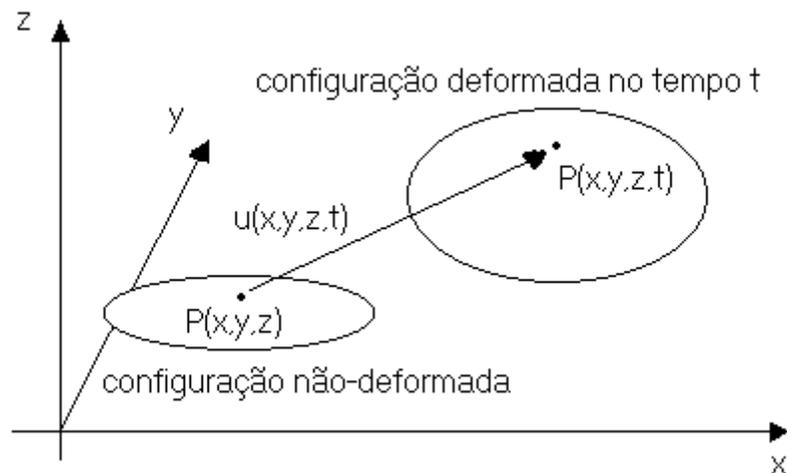


FIGURA 27: DEFORMAÇÃO DE CONTINUUM ELÁSTICO (GENTA, 1993).

O deslocamento de um ponto é um vetor, com um número de dimensões igual ao número de dimensões do espaço usado. As coordenadas generalizadas podem ser manipuladas como funções contínuas, e a função $u(x, y, z, t)$ é diferenciável em relação ao tempo pelo

menos duas vezes, sendo a primeira, a velocidade, e a segunda, aceleração, podendo haver derivadas de ordem superior.

Se o deslocamento e rotação puderem ser considerados pequenos, a definição usual de stress e strain da teoria da elasticidade podem ser usadas. Quando a dinâmica de um corpo elástico puder ser ajustada em um problema linear, como acontece quando se considera o comportamento do material como sendo linear ou não-linear geométrico, uma infinidade de graus de frequências naturais existem, e como consequência, uma infinidade de graus de liberdade.

Nos últimos dois séculos muitas técnicas de discretização foram desenvolvidas com o intuito de substituir equações diferenciais parciais por equações diferenciais ordinárias contendo só derivadas em relação ao tempo, geralmente de segunda ordem, como as para sistemas discretos.

Outra característica do problema é com relação ao esforço computacional, devido ao tamanho dos problemas autovetores e autovalores, obtidos pelas técnicas de discretização.

A classificação das técnicas de discretização são apresentadas em três grandes grupos:

- A forma do corpo deformado pode ser substituída por uma combinação linear de n funções conhecidas. Esse método pode ser chamado de método dos modos assumidos;
- A massa do corpo é agrupada em certo número de corpos rígidos, colocados em posições pré-determinadas do corpo deformado. Essas massas são conectadas por corpos sem massa, possuidores de propriedades elásticas. Usualmente as propriedades do sistema são consideradas uniformes no espaço. Com os graus de liberdade do corpo rígido, agrupados, servindo para descrever o movimento do sistema, o modelo leva, intuitivamente, para um sistema discreto. Enquanto a matriz de massa desse sistema é fácil de ser obtida, normalmente, a matriz de elasticidade é mais difícil de ser obtida;
- Outra classe seria a da modelagem pelo método dos elementos finitos. O corpo é dividido em um número determinado de elementos, chamados elementos finitos, em oposição às regiões infinitesimais usadas para escrever as equações diferenciais do sistema contínuo. A forma deformada de cada elemento é assumida como uma combinação linear de um conjunto

de funções do espaço de coordenadas utilizadas, através de um certo número de parâmetros, considerados os graus de liberdade do elemento (GENTA, 1993).

3.6.2 - RELAÇÕES MATEMÁTICAS.

A equação diferencial parcial da vibração forçada é dada abaixo:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = q(x, t)$$

De acordo com Pilkey a equação acima pode ser integrada diretamente, e em livros de dinâmica estrutural são apresentados diversos métodos. Mas para sistemas lineares, a técnica mais usada é a superposição de modal, que emprega as respostas de vibrações livres para cálculos de frequência e forma.

Separando as variáveis obtém-se:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \varphi_i(t) \quad (165)$$

De acordo com SHABANA (1991), multiplicando ambos os lados da equação diferencial parcial pelo deslocamento virtual δv e integrando para todo o comprimento da viga, obtém-se:

$$\int_0^l \left[m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta v \right] dx = \int_0^l q(x, t) \delta v dx \quad (166)$$

Substituindo a equação 80 na equação 81, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l \left[\rho A \phi_k(x) \phi_j(x) \ddot{\varphi}_k \varphi_j + \left(EI_z \phi_k''''(x) \right) \phi_j(x) \varphi_k \right] \delta \varphi_j dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l q(x, t) \phi_j(x) \delta \varphi_j dx$$

(167)

Fazendo a integração por partes:

$$\int_0^l \left(EI_z \phi_k''(x) \right)'' \phi_j(x) dx = \left(EI_z \phi_k'' \right)' \phi_j \Big|_0^l - \left(EI_z \phi_k'' \phi_j' \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(EI_z \phi_k'' \phi_j'' \right) dx \quad (168)$$

Substituindo a equação 167 na equação 166, usando as condições de contorno para viga engastada e usando as relações de ortogonalidade dos autovetores, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} [m_j \ddot{q}_j + k_j q_j - Q_j] \delta q_j = 0 \quad (169)$$

onde m_j e k_j são, respectivamente **massa modal** e **constante elástica modal** e:

$$Q_j = \int_0^l q(x,t) \phi_j(x) dx \quad (170)$$

Como as coordenadas modais ϕ_j , com $j = 1, 2, 3, \dots$, são independentes, a equação 169 se torna uma equação diferencial ordinária de segunda ordem desacoplada:

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = Q_j \quad (171)$$

onde Q_j é a força modal associada com a j -ésima coordenada modal e definida como:

$$Q_j = F(t) \phi_j(x_p) \quad (172)$$

e que $\phi_j(x_p)$ é a j -ésima função de forma calculada no ponto “p” da viga.

3.6.3 - MEDIÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA.

As medições diretas da resposta em frequência são normalmente feitas com o seguinte set-up experimental, figura 28, com apenas um ponto de excitação da estrutura:

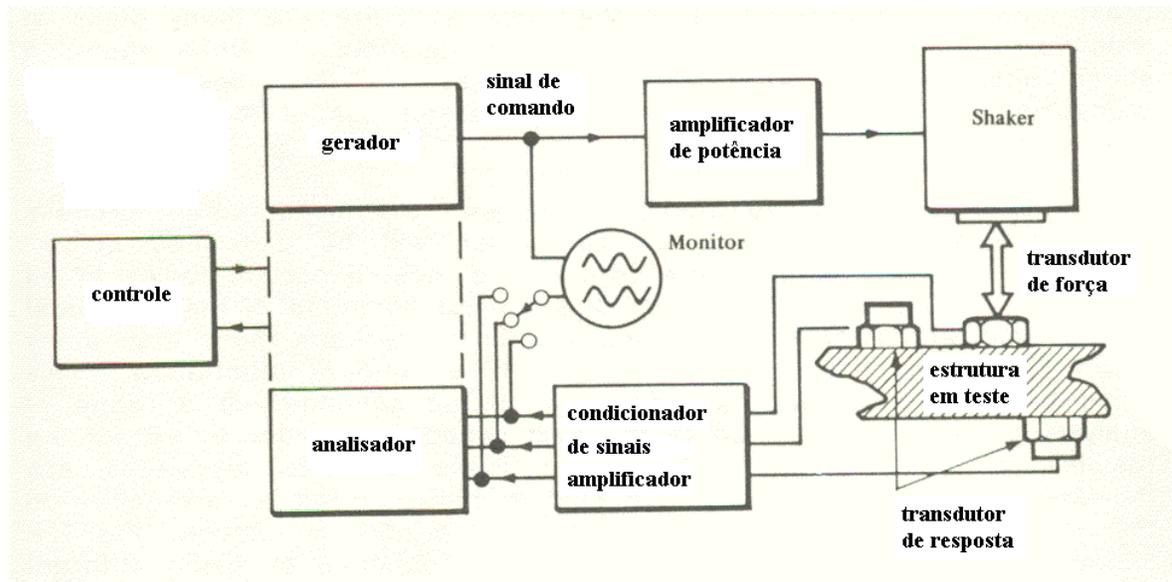


FIGURA 28: COMPONENTES BÁSICOS DO SISTEMA DE MEDIÇÃO E EXCITAÇÃO (EWINS, 1984).

De acordo com EWINS, há três aspectos básicos para obtenção de dados confiáveis para posterior análise:

- Suporte mecânico e excitação correta da estrutura;
- Correta transdução das quantidades a ser medidas – input de força e resposta do movimento;
- Processamento de sinais apropriado para o tipo de teste.

Há três opções de suporte da estrutura:

- Livre ou não-restrita;
- Fixa, que requer apoios rígidos em certos pontos;
- In situ, onde a peça é conectada a outra estrutura ou componente.

Os transdutores são elementos muito importantes no sistema, pois é essencial medida acurada das excitações como das respostas da estrutura. Transdutores piezelétricos são largamente utilizados para detectar tanto força quanto aceleração. Deve-se ter o cuidado de evitar a interferência na inercial na estrutura e utilizar um com performance adequada para a frequência e amplitude do teste.

Os parâmetros de mobilidade podem ser obtidos diretamente aplicando excitação harmônica e medindo a resposta. Esse tipo de teste é comumente chamado ‘sinewave testing’ e requer fixação da estrutura ao shaker. A espectro de frequência é coberto passando de uma frequência a outra por variações muito pequenas e contínuas.

3.6.4 - FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.

De acordo com Ewins, nas figuras abaixo, as rotas de análise de vibração são:

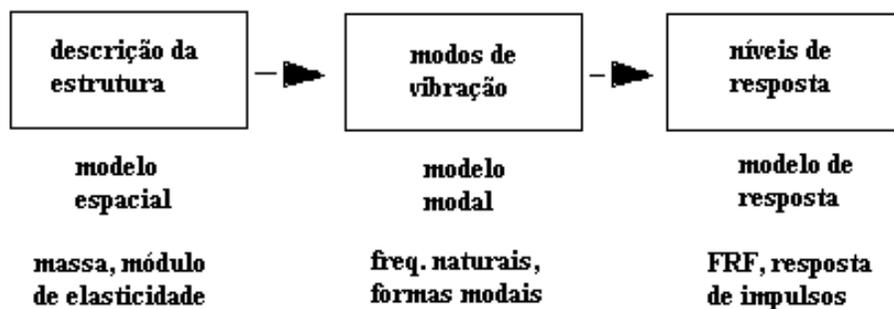


FIGURA 29: ROTA TEÓRICA PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO (EWINS, 1984).

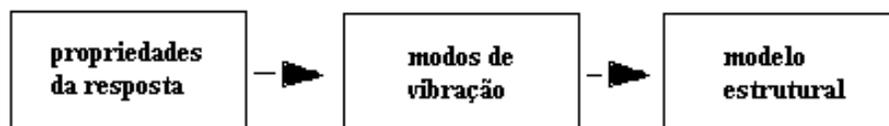


FIGURA 30: ROTA EXPERIMENTAL PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO (EWINS, 1984).

No modelo proposto, viga Euler-Bernoulli, só se considera a massa e a constante elástica.

Considerando uma excitação:

$$f(t) = fe^{i\omega t} \quad (173)$$

e assumindo a solução na forma:

$$x(t) = xe^{i\omega t} \quad (174)$$

onde x e f são complexos para acomodar amplitude e fase, a equação de movimento toma a forma:

$$(k - \omega^2 m)xe^{i\omega t} = fe^{i\omega t} \quad (175)$$

de onde se extrai o modelo de resposta na forma de função de resposta em frequência – FRF:

$$H(\omega) = \frac{x}{f} = \frac{1}{k - \omega^2 m}$$

chamada RECEPTÂNCIA, também escrita como $\alpha(\omega)$. Nota-se que ela é independente da excitação (EWINS, 1984).

Também se utiliza a resposta em frequência da velocidade, chamada MOBILIDADE:

$$Y(\omega) = \frac{ve^{i\omega t}}{fe^{i\omega t}} = \frac{v}{f} = i\omega\alpha(\omega)$$

e a aceleração – INERTÂNCIA:

$$A(\omega) = \frac{a}{f} = -\omega^2\alpha(\omega) \quad (176)$$

As formas comuns de apresentação dos resultados são:

- Módulo (FRF) versus Frequência e Fase versus Frequência (diagrama de Bode);
- Parte Real (FRF) versus Frequência e Parte Imaginária versus Frequência e;
- Parte Real versus Parte Imaginária (diagrama de Nyquist).

3.6.5 - COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS.

A comparação mais freqüente e eficiente é a das frequências naturais medidas e calculadas pelo modelo matemático, que pode ser feita com uma simples tabulação, como mostra a Figura 31:

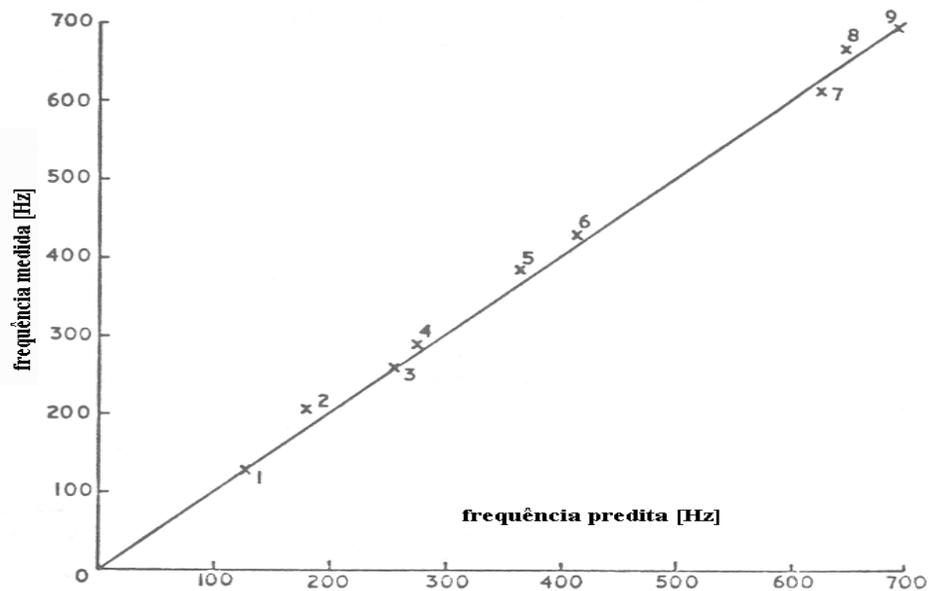


FIGURA 31: COMPARAÇÃO DA FREQUÊNCIA MEDIDA E FREQUÊNCIA PREDITA PELO MODELO MATEMÁTICO (EWINS, 1984).

As frequências calculadas pelo modelo podem ser impostas a lamina, através da montagem do aparato da Figura 31, desde que as frequências exibam correlação.

De acordo com EWINS, a medição para evitar a discrepância deve ser feita no ponto de aplicação da força, após calibragem do analisador de sinais com massa inercial de calibragem.

3.6.6 - COMPARAÇÃO DAS FORMAS MODAIS.

3.6.6.1 - COMPARAÇÃO GRÁFICA.

É o método usado em aplicações práticas. Implica que os pontos são relativos ao mesmo modo, calculado e predito (calculado) (EWINS, 1984).

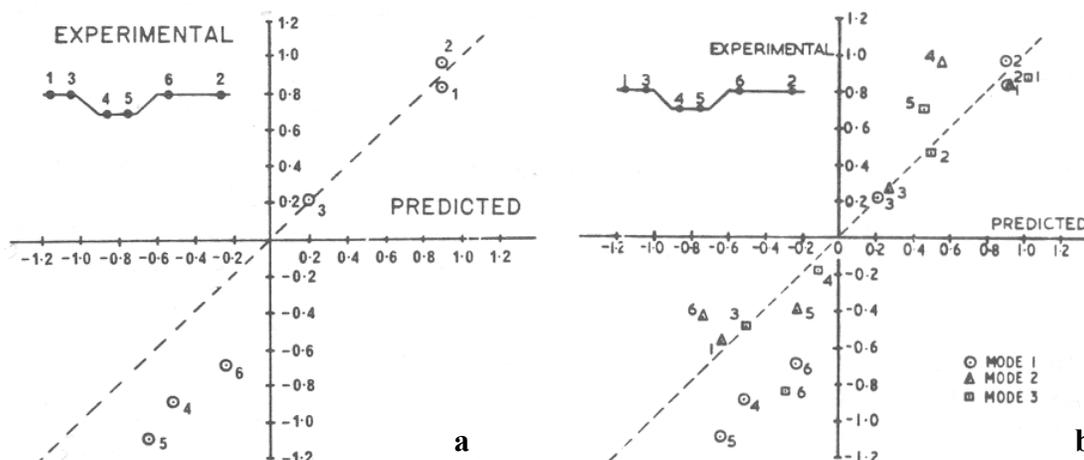


FIGURA 32: COMPARAÇÕES ENTRE FORMAS MODAIS MEDIDAS E PREDITAS DA ESTRUTURA APRESENTADA: (A) MODO SIMPLES, (B) TRÊS MODOS (EWINS, 1984).

É um método de difícil análise, pois depende da regressão dos pontos, que podem ter grande dispersão em torno da reta, que tem que ter inclinação de $45 \pm 1^\circ$, e por ter várias vezes muitos pontos envolvidos (EWINS, 1984).

3.6.6.2 - COMPARAÇÃO NUMÉRICA.

Pode-se usar além do método gráfico, o método numérico, que usa simples propriedades estatísticas para um par de valores analisados. De acordo com EWINS, vários métodos foram desenvolvidos para quantificar a comparação entre valores de formas modais preditos e medidos.

A fórmula seguinte, apresentada por EWINS, representando a melhor declividade da reta da figura anterior:

$$MSF(c, m) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_m)_j (\phi_c)_j}{\sum_{j=1}^n (\phi_c)_j (\phi_c)_j} \quad (177)$$

e dependendo da referência, pode-se usar:

$$MSF(m, c) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_c)_j (\phi_m)_j}{\sum_{j=1}^n (\phi_m)_j (\phi_m)_j} \quad (178)$$

onde MSF, ϕ_m e ϕ_c são respectivamente, Fator de Escala Modal (Modal Scale Factor), medida experimental da forma modal e medida predita da forma modal.

Deve ser notado que o parâmetro, apresentado pela fórmula de MSF, não mostra nenhuma qualidade dos pontos da curva da figura acima. Apenas mostra a declividade.

O segundo parâmetro é o Coeficiente de Correlação de Forma Modal, MSCC (Mode Shape Correlation Coefficient) ou Critério de Garantia Modal, MAC (Modal Assurance Criterion), que fornece a medida do desvio dos mínimos quadrados dos pontos em relação à reta da figura 32, e é definido por:

$$MAC(c, m) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_m)_j (\phi_c)_j \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\phi_m)_j (\phi_m)_j \right) \left(\sum_{j=1}^n (\phi_c)_j (\phi_c)_j \right)} \quad (179)$$

que é uma quantidade escalar.

Deve-se considerar dois casos especiais: (a) quando os dois modos são idênticos, (b) quando os dois modos diferem por uma constante.

$$\begin{aligned} \text{a) } \{ \phi_m \} &= \{ \phi_c \} \\ \text{b) } \{ \phi_m \} &= A \{ \phi_c \} \end{aligned} \quad (180)$$

Para o primeiro caso tem-se: $MSF(m, c) = MSF(c, m) = 1$

No segundo caso: $MSF(m, c) = A$; $MSF(c, m) = 1/A$.

Entretanto, para todos os casos: $MAC(c, m) = 1$.

Na prática, os dados típicos serão menos ideais que os esperados, e o Critério de Garantia Modal terá valores próximos a 1, de acordo com EWINS. Entretanto, a significância dessa quantidade depende consideravelmente de:

- não-linearidades na estrutura em teste;
- ruído nos dados medidos;
- fraca análise modal dos dados medidos.

IV - MATERIAL E MÉTODOS.

4.1 - CÁLCULO DA CONSTANTE ELÁSTICA DA VIGA.

A plotagem da curva força x alongação foi realizada no CT-UNICAMP, Centro de Tecnologia, numa máquina de ensaio de tração universal MOHR & FEDERHAFF.

Dureza Rockwell 15N = 83,2 ↔ Dureza Brinell = 444 ↔ $\sigma_{res}=152 \text{ kgf/mm}^2$
 $152 \text{ kgf/mm}^2 * 6.93\text{mm}^2 = 1053 \text{ kgf} \leftrightarrow \text{esc.: } 1:2000$

A curva do ensaio é apresentada na figura 33:

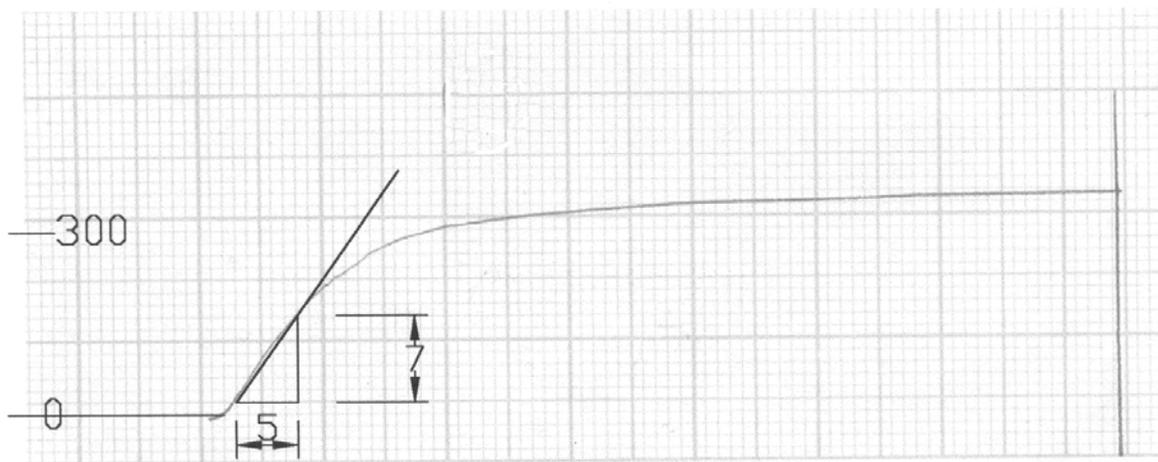


FIGURA 33: DIAGRAMA FORÇA X ELONGAÇÃO PARA AÇO UTILIZADO NO ENSAIO DE VIBRAÇÃO.

A variação do comprimento é: $\Delta L = 5 / 200 = 0.025\text{mm}$

A força atuante é: $F = 7 \cdot (500 / 50) = 70 \text{ kgf}$

A área da seção transversal do corpo de prova é: $A = 0.40\text{mm} \cdot 15.78\text{mm} = 6.31\text{mm}^2$

O comprimento inicial é: $l_0 = 50 \text{ mm}$

Tendo as relações:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{e} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (181)$$

Deduz-se que:

$$E = \frac{F}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta L} = \frac{70}{6.31} \cdot \frac{50}{0.025} = 22187 \text{ kgf} / \text{mm}^2$$

Obteve-se a constante elástica: $E = 2.2187 \cdot 10^{10} \text{ kgf/m}^2$.

4.2 - CÁLCULO DE DENSIDADE DO AÇO E MOMENTO DE INÉRCIA DA VIGA.

A pesagem foi realizada no Laboratório de Materiais Vítreos – IFGW, em balança OHAUSS ANALYTICAL PLUS, com precisão $\pm 0.0001\text{g}$.

O peso da lamina é: $P = 145\text{g}$.

Sendo o volume da lâmina:

$$V = 555.97 \cdot 30.58 \cdot 0.95 = 16151 \text{ mm}^3$$

Obtém-se a densidade:

$$\rho = 8.98 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

De acordo com a fórmula 100 do momento de inércia I_y , para rotação em torno do eixo, obtém-se:

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}((30.58)(0.95)^3) = 2.18[mm^4]$$

4.3 - CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA.

As frequências de ressonância são obtidas a partir da fórmula 142, utilizando os valores, módulo de elasticidade, momento de inércia, densidade e área transversal, calculados

acima e sabendo que $w[Hz] = \frac{w[rad/s]}{2 * \pi}$, obtém-se:

$$\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \sqrt{\frac{2.2187 * 10^{10} * 2.18}{(8.98 * 10^{-6} * 29.051)}} = 13633409.98$$

$$w_1 = \frac{(1.875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{(1.875)^2}{(489.97)^2} * 13633409.98 = 199.65 rad / s = 31.78 Hz$$

$$w_2 = \frac{(4.694)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{(4.694)^2}{(489.97)^2} * 13633409.98 = 971.82 rad / s = 154.67 Hz$$

$$w_3 = \frac{(7.855)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{(7.855)^2}{(489.97)^2} * 9287421.192 = 2303.06 rad / s = 366.54 Hz$$

4.4 - SET-UP EXPERIMENTAL PARA ANÁLISE MODAL.

A lâmina e o shaker foram fixados em base de concreto de 350 kg, representando a base inercial para o experimento, conforme figura 34: .

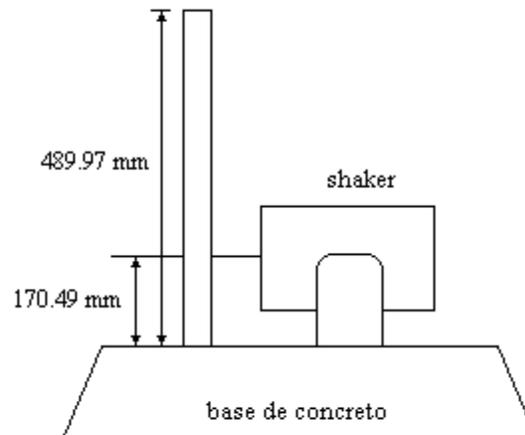


FIGURA 34: SET-UP EXPERIMENTAL PARA VIBRAÇÃO DO CORPO DE PROVA (MENIN).

A resposta estrutural foi medida com acelerômetro piezelétrico axial B&k tipo 4366, fixado no ponto de excitação.

A aquisição de sinais foi feita com analisador espectral de dois canais HP35665A, que computou a FRF (Função de Resposta em Frequência). Foi utilizada a varredura em seno na amplitude de 0 a 500Hz, necessárias para identificar as frequência de ressonância relativas aos primeiros quatro modos de vibração.

4.5 - COMPARAÇÃO DE FREQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA OBTIDAS ATRAVÉS DE ANÁLISE MODAL COM CALCULADAS.

Obtiveram-se as frequências de ressonância versus inertâncias com analisador de sinais, HP35665a, valores representados na tabela 04:

modo	Frequência (Hz)	FRF
#1	29.36	$3.31462 \cdot 10^{-3}$
#2	68.3	$487.383 \cdot 10^{-6}$
#3	317.85	$155.832 \cdot 10^{-6}$

Tabela 04: Frequência de ressonância obtida na análise modal com analisador de sinais.

As frequências calculadas e medidas são apresentadas na tabela abaixo:

modo	Frequência calculada (Hz)	Frequência medida (Hz)
#1	31.78	29.36
#2	154.67	68.3
#3	538.06	317.85

Tabela 05: Frequências calculadas e medidas

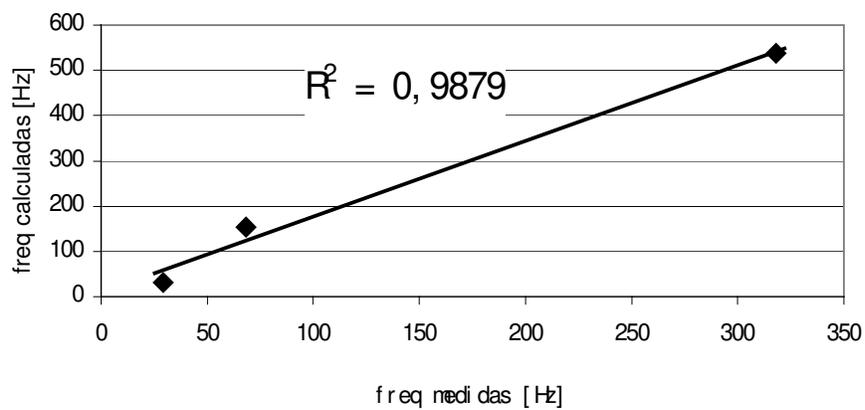


FIGURA 35: COMPARAÇÃO ENTRE FREQUÊNCIAS CALCULADAS E OBTIDAS COM ANALISADOR DE SINAIS.

4.6 - SET-UP PARA OBTENÇÃO DAS FRANJAS DE MOIRÉ.

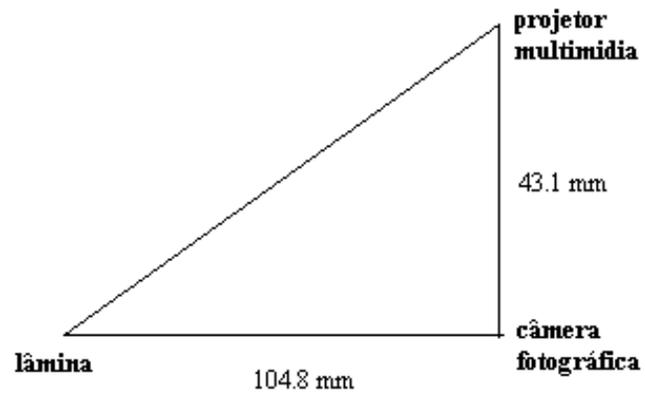


FIGURA 36: SET UP EXPERIMENTAL PARA OBTENÇÃO DE FRANJAS DE *MOIRÉ*.

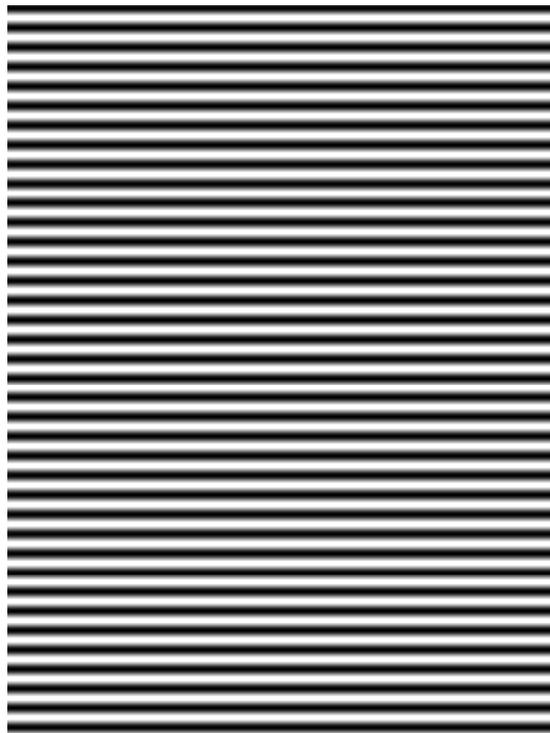


FIGURA 37: GRADE USADA NA PROJEÇÃO.

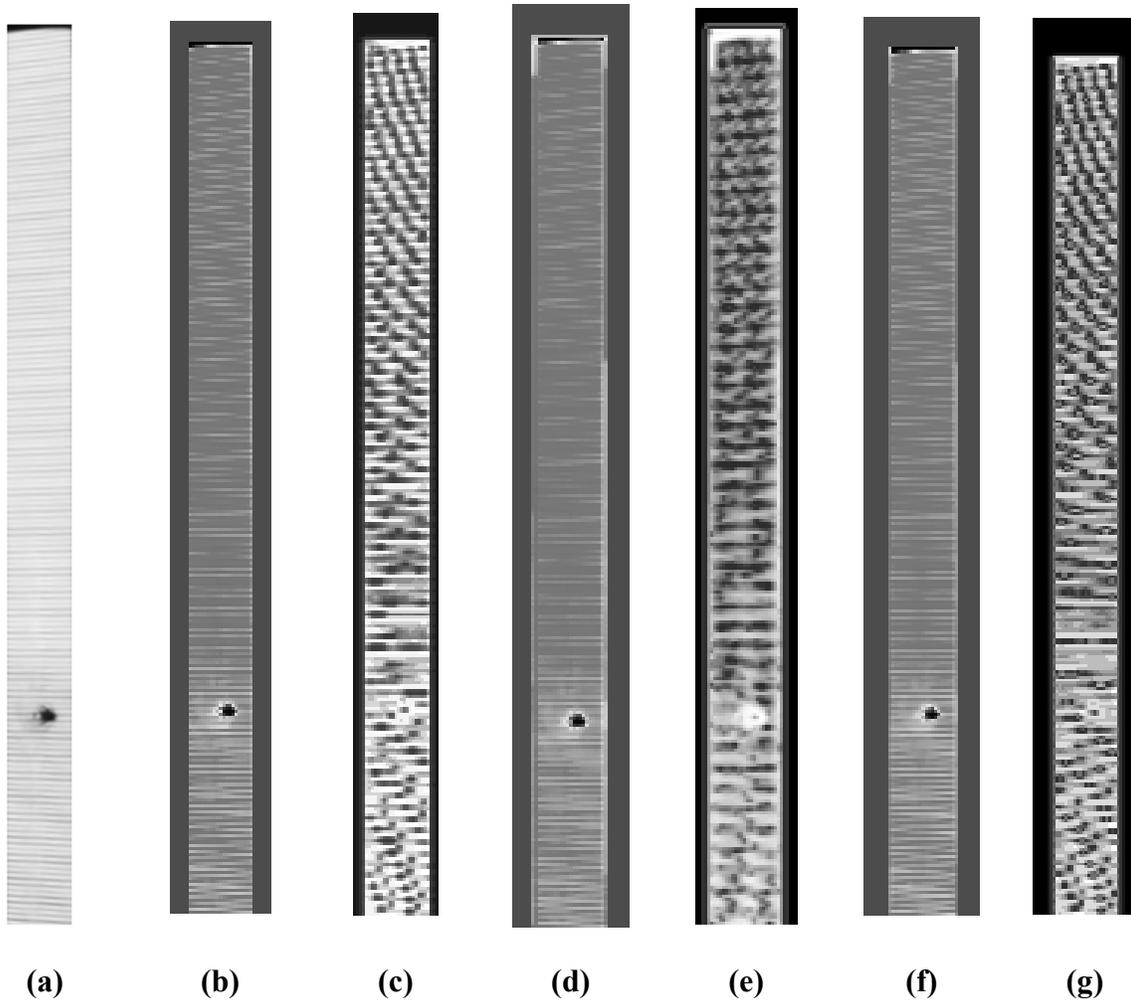
4.7 - OBTENÇÃO DAS FRANJAS DE MOIRÉ DE PROJEÇÃO.

As fotos foram obtidas com máquina CYBERSHOT 4.1 Megapixels. O período das franjas, medido na superfície do corpo, é $p=1.55$ mm, para todas as medições, dando uma sensibilidade para a técnica de $z=3.77$ mm por ordem de franjas, isto é, para cada espaço de franjas, obtém-se 3.77 mm de extensão fora do plano da foto.

$$z = \frac{N * 1.55}{\left(\frac{43.1}{104.8}\right)} = 3.77mm$$

A figura 38 mostra as diferentes fotos obtidas para cada modo, antes e depois da interferência.

As fotos com *moiré* foram tratadas com software IDRISI Kilimanjaro, da firma Clark Labs., aplicando-se filtro de Gauss.



(a) LAMINA PARADA, SERVINDO DE BASE PARA INTERFERÊNCIA PARA TODAS AS OUTRAS LAMINAS; **(b)** LAMINA VIBRANDO A 29.36HZ; **(c)** LAMINA (B) TRATADA COM FILTRO DE GAUSS E COM CURVA DE TOM AJUSTADA; **(d)** LAMINA VIBRANDO A 68.3 HZ; **(e)** LAMINA (D) COM MESMO TRATAMENTO DE (C); **(f)** LAMINA VIBRANDO A 317.85HZ, **(g)** LAMINA (F) COM MESMO TRATAMENTO DE (C).

4.8 - OBTENÇÃO DA FORMA MODAL A PARTIR DA ANÁLISE DE MOIRÉ.

Sabe-se que a lâmina, vibrando na frequência de ressonância, apresenta os nós nas posições apresentadas conforme tabela 05:

nó	X = 1	X = 489.97mm
Modo 1	0	0
Modo 2	0.783	383.64651
Modo 3	0.504	246.94488
	0.868	425.29396

Tabela 06: posições relativas e absolutas dos nós.

Partindo da informação apresentada na tabela, e utilizando técnica apresentada por POST (1994), une-se os pontos obtidos com a técnica de *moiré* e obtém-se formas modais representadas nas figuras abaixo:



0

FIGURA 39: FOTO DA INTERFERÊNCIA OBTIDA COM TÉCNICA DE MOIRÉ E FORMA MODAL PARA PRIMEIRA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA.

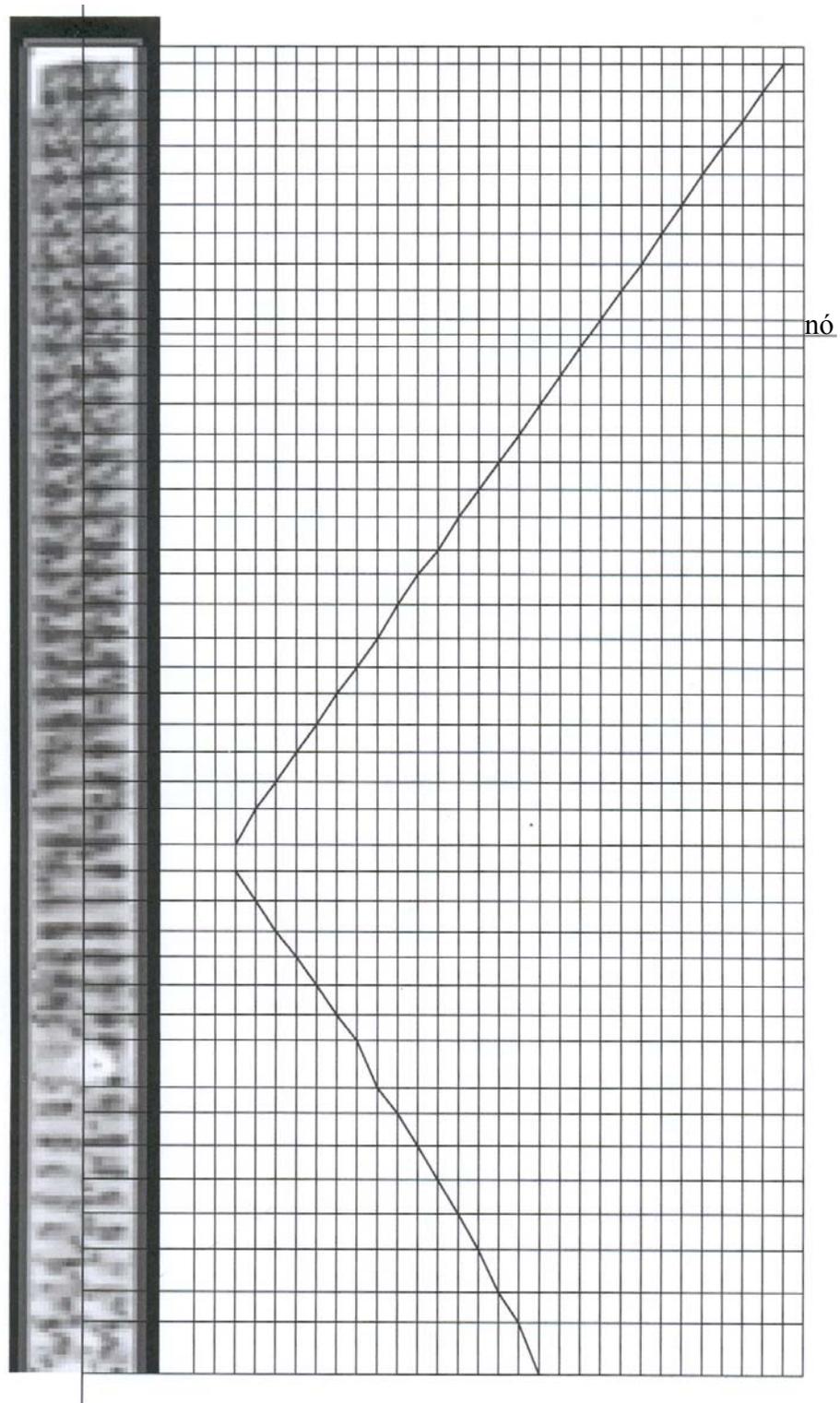


FIGURA 40: FOTO DA INTERFERÊNCIA OBTIDA COM TÉCNICA DE MOIRÉ E FORMA MODAL PARA SEGUNDA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA.

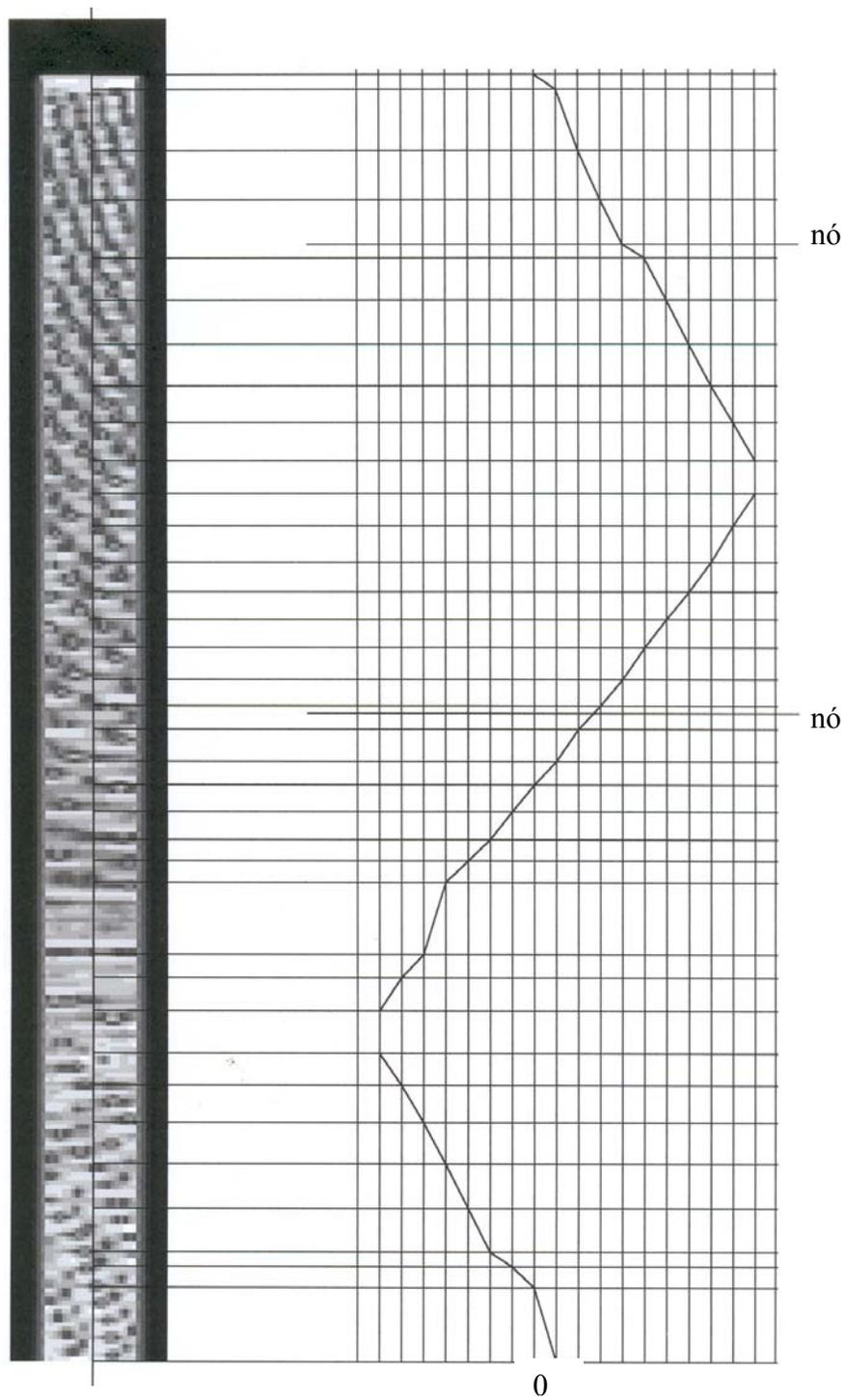


FIGURA 41: FOTO DA INTERFERÊNCIA OBTIDA COM TÉCNICA DE *MOIRÉ* E FORMA MODAL PARA TERCEIRA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA.

V - RESULTADOS E DISCUSSÕES.

Obteve-se as formas modais calculadas a partir das seguintes equações:

$$z(x) = \left(\frac{1}{2.7242}\right)[(\sin(1.875 * \xi) - \sinh(1.875 * \xi)) - 1.3622 * (\cos(1.875 * \xi) - \cosh(1.875 * \xi))]$$

$$z(x) = \left(\frac{1}{(-1.9636)}\right)[(\sin(4.694 * \xi) - \sinh(4.694 * \xi)) - 0.9819 * (\cos(4.694 * \xi) - \cosh(4.694 * \xi))]$$

$$z(x) = \left(\frac{1}{2.0020}\right)[(\sin(7.855 * \xi) - \sinh(7.855 * \xi)) - 1.0008 * (\cos(7.855 * \xi) - \cosh(7.855 * \xi))]$$

$$z(x) = \left(\frac{1}{(-2.0009)}\right)[(\sin(10.966 * \xi) - \sinh(10.966 * \xi)) - 1 * (\cos(10.966 * \xi) - \cosh(10.966 * \xi))]$$

Os valores obtidos com a técnica de *moiré* foram transformados em valores unitários e comparados com os valores calculados, ambos apresentados no anexo:

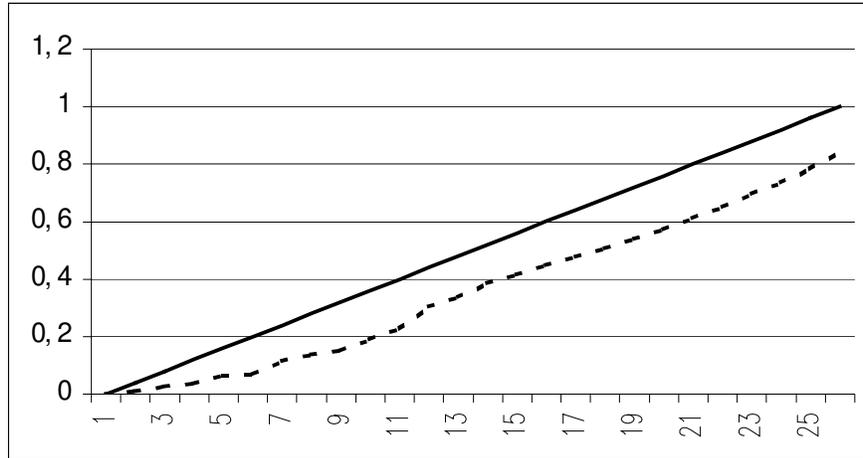


FIGURA 42: LINHA ESPESSA: VALORES OBTIDOS COM TÉCNICA DE *MOIRÉ*, E LINHA TRACEJADA: VALORES OBTIDOS ANALITICAMENTE.

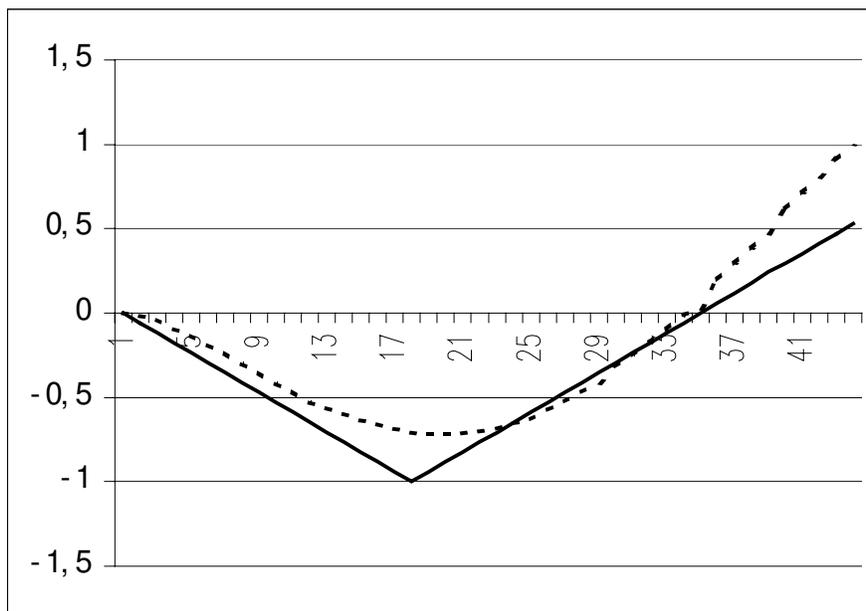


FIGURA 43: LINHA ESPESSA: VALORES OBTIDOS COM TÉCNICA DE *MOIRÉ*, E LINHA TRACEJADA: VALORES OBTIDOS ANALITICAMENTE.

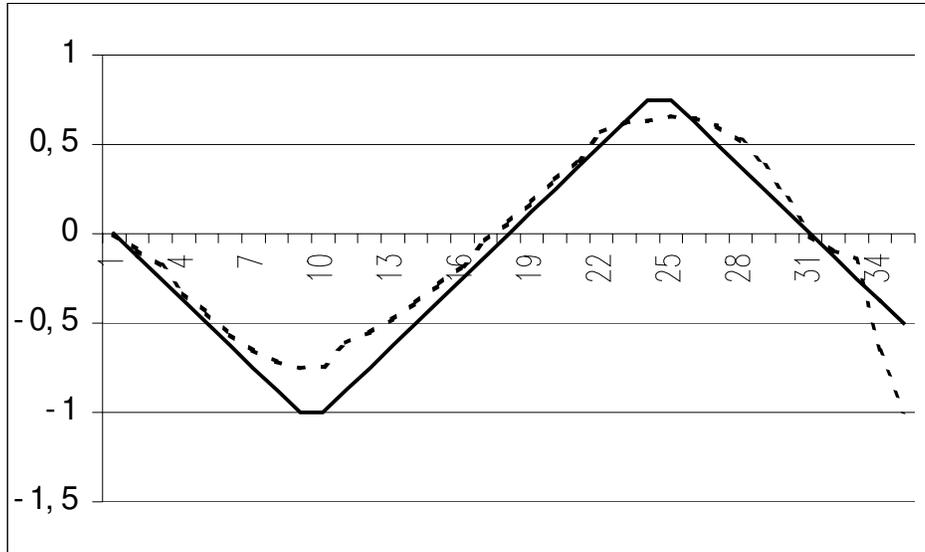


FIGURA 44: LINHA ESPESSA: VALORES OBTIDOS COM TÉCNICA DE *MOIRÉ*, E LINHA TRACEJADA: VALORES OBTIDOS ANALITICAMENTE.

Os valores MAC e MSF são apresentados na tabela 06:

modo	MAC	MSF(cal.,<i>moiré</i>)	MSF (<i>moiré</i>, cal.)
01	0.988	122.878	0.008
02	0.883	61.358	0.014
03	0.921	31.059	0.029

Tabela 07: Valores de MAC (Modal Assurance Criterion) e MSF (Mode Shape Correlation).

Os valores de MAC apresentados na tabela acima mostram que as correlações das formas modais calculadas e medidas com a técnica de *moiré* se aproximam de “1”, de acordo com o proposto por EWINS (1984), assegurando correlação.

Os valores de MSF mostram que as formas modais calculadas e medidas com a técnica de *moiré* apresentam apenas acréscimo de constante, já prevista nas fórmulas 177, 178 e 179.

VI - CONCLUSÕES.

O método interferométrico de *moiré* se mostrou satisfatório na identificação das formas modais propostas para a estrutura “viga engastada”, apresentado alta correlação de acordo com métodos utilizados em análise modal.

VII - ANEXO.

Valores obtidos com a técnica de *moiré* z (ξ), valores calculados z calc., para primeiro modo de vibração.

x	$\xi=x/489,97$	z (ξ)	z (ξ)/94,25	z calc	$xx*xx$	$xx*xp$	$xp*xp$
0	0,000	0	0	0	0	0	0
36,01	0,073	3,77	0,04	0,0099	14,2129	0,037323	9,8E-05
72,012	0,147	7,54	0,08	0,025	56,8516	0,1885	0,000625
98,777	0,202	11,31	0,12	0,0364	127,9161	0,411684	0,001325
133,873	0,273	15,08	0,16	0,066	227,4064	0,99528	0,004356
153,94	0,314	18,85	0,2	0,0682	355,3225	1,28557	0,004651
175,26	0,358	22,62	0,24	0,1145	511,6644	2,58999	0,01311
194,6	0,397	26,39	0,28	0,1358	696,4321	3,583762	0,018442
231,46	0,472	30,16	0,32	0,15	909,6256	4,524	0,0225
243,68	0,497	33,93	0,36	0,1888	1151,245	6,405984	0,035645
264,043	0,539	37,7	0,4	0,229	1421,29	8,6333	0,052441
275,12	0,562	41,47	0,44	0,3048	1719,761	12,64006	0,092903
288,722	0,589	45,24	0,48	0,3368	2046,658	15,23683	0,113434
299,296	0,611	49,01	0,52	0,3861	2401,98	18,92276	0,149073
311,157	0,635	52,78	0,56	0,4148	2785,728	21,89314	0,172059
322,751	0,659	56,55	0,6	0,4467	3197,903	25,26089	0,199541
335,302	0,684	60,32	0,64	0,4788	3638,502	28,88122	0,229249
350,52	0,715	64,09	0,68	0,5066	4107,528	32,46799	0,256644

364,436	0,744	67,86	0,72	0,5403	4604,98	36,66476	0,291924
380,423	0,776	71,63	0,76	0,572	5130,857	40,97236	0,327184
395,5	0,807	75,4	0,8	0,6112	5685,16	46,08448	0,373565
413,291	0,844	79,17	0,84	0,65	6267,889	51,4605	0,4225
433,248	0,884	82,94	0,88	0,6965	6879,044	57,76771	0,485112
454,914	0,928	86,71	0,92	0,7373	7518,624	63,93128	0,543611
479,404	0,978	90,48	0,96	0,7862	8186,63	71,13538	0,61811
489,97	1,000	94,25	1	0,8429	8883,063	79,44333	0,71048
					xx*xx	xx*xp	xp*xp
				soma	78526,27	631,4181	5,138585
				msf1	122,8778		
				msf2	0,008041		
				mac	0,988042		
				msf1*msf2	0,988042		

Valores obtidos com a técnica de *moiré* z (ξ), valores calculados z calc., para segundo modo de vibração.

x	$\xi=x/489,97$	z (ξ)	z (ξ)/64,09	z cal	$xp*xx$	$xp*xp$	$xx*xx$
0	0,00	0,00	0,0000	0	0,00	0	0
19,56	0,04	-3,77	-0,0588	-0,0174	0,07	0,000303	14,2129
30,83	0,06	-7,54	-0,1176	-0,0375	0,28	0,001406	56,8516
46,67	0,10	-11,31	-0,1765	-0,0952	1,08	0,009063	127,9161
59,94	0,12	-15,08	-0,2353	-0,1316	1,98	0,017319	227,4064

72,79	0,15	-18,85	-0,2941	-0,1895	3,57	0,03591	355,3225
85,49	0,17	-22,62	-0,3529	-0,2332	5,27	0,054382	511,6644
97,62	0,20	-26,39	-0,4118	-0,3017	7,96	0,091023	696,4321
107,05	0,22	-30,16	-0,4706	-0,35	10,56	0,1225	909,6256
124,8	0,25	-33,93	-0,5294	-0,4183	14,19	0,174975	1151,245
134,19	0,27	-37,70	-0,5882	-0,4625	17,44	0,213906	1421,29
145,36	0,30	-41,47	-0,6471	-0,5288	21,93	0,279629	1719,761
156,06	0,32	-45,24	-0,7059	-0,5645	25,54	0,31866	2046,658
165,48	0,34	-49,01	-0,7647	-0,5945	29,14	0,35343	2401,98
177,04	0,36	-52,78	-0,8235	-0,6344	33,48	0,402463	2785,728
188,17	0,38	-56,55	-0,8824	-0,6605	37,35	0,43626	3197,903
198,02	0,40	-60,32	-0,9412	-0,686	41,38	0,470596	3638,502
211,29	0,43	-64,09	-1,0000	-0,7083	45,39	0,501689	4107,528
221,35	0,45	-60,32	-0,9412	-0,7167	43,23	0,513659	3638,502
232,48	0,47	-56,55	-0,8824	-0,7206	40,75	0,519264	3197,903
242,76	0,50	-52,78	-0,8235	-0,7121	37,58	0,507086	2785,728
254,32	0,52	-49,01	-0,7647	-0,7045	34,53	0,49632	2401,98
264,17	0,54	-45,24	-0,7059	-0,6851	30,99	0,469362	2046,658
274,87	0,56	-41,47	-0,6471	-0,6547	27,15	0,428632	1719,761
287,72	0,59	-37,70	-0,5882	-0,6328	23,86	0,400436	1421,29
299,02	0,61	-33,93	-0,5294	-0,575	19,51	0,330625	1151,245
308,01	0,63	-30,16	-0,4706	-0,525	15,83	0,275625	909,6256
320,42	0,65	-26,39	-0,4118	-0,4668	12,32	0,217902	696,4321
330,7	0,67	-22,62	-0,3529	-0,4106	9,29	0,168592	511,6644
340,98	0,70	-18,85	-0,2941	-0,3141	5,92	0,098659	355,3225
351,25	0,72	-15,08	-0,2353	-0,246	3,71	0,060516	227,4064
362,64	0,74	-11,31	-0,1765	-0,175	1,98	0,030625	127,9161
373,34	0,76	-7,54	-0,1176	-0,0933	0,70	0,008705	56,8516
384,05	0,78	-3,77	-0,0588	-0,0134	0,05	0,00018	14,2129
394,32	0,80	0,00	0,0000	0,0274	0,00	0,000751	0

405,02	0,83	3,77	0,0588	0,2	0,75	0,04	14,2129
414,87	0,85	7,54	0,1176	0,2962	2,23	0,087734	56,8516
426,43	0,87	11,31	0,1765	0,3868	4,37	0,149614	127,9161
437,14	0,89	15,68	0,2447	0,475	7,45	0,225625	245,8624
448,7	0,92	18,85	0,2941	0,6208	11,70	0,385393	355,3225
459,14	0,94	22,62	0,3529	0,7127	16,12	0,507941	511,6644
468,56	0,96	26,39	0,4118	0,8094	21,36	0,655128	696,4321
479,69	0,98	30,16	0,4706	0,9081	27,39	0,824646	909,6256
489,97	1,00	33,93	0,5294	1	33,93	1	1151,245
					xp*xx	xp*xp	xx*xx
				soma	729,34	11,89	50701,66
				MSF1	61,35824		
				MSF2	0,014385		
				msf1*msf2	0,8826		
				MAC	0,8826		

Valores obtidos com a técnica de *moiré z* (ξ), valores calculados *z calc.*, para terceiro modo de vibração.

x	ξ	z (ξ)	z (ξ)/30,16	z calc*(-1)	z calc	xx*xx	xx*xp	xp*xp
0	0,00	0	0,000	0	0,0000	0	0	0
28,8	0,06	-3,77	-0,125	-0,092	0,0920	14,2129	0,34684	0,008464
42,39	0,09	-7,54	-0,250	-0,1769	0,1769	56,8516	1,333826	0,031294
59,29	0,12	-11,31	-0,375	-0,3294	0,3294	127,9161	3,725514	0,108504
76,26	0,16	-15,08	-0,500	-0,4446	0,4446	227,4064	6,704568	0,197669
92,2	0,19	-18,85	-0,625	-0,5632	0,5632	355,3225	10,61632	0,317194

106,6	0,22	-22,62	-0,750	-0,654	0,6540	511,6644	14,79348	0,427716
118,9	0,24	-26,39	-0,875	-0,7145	0,7145	696,4321	18,85566	0,51051
135,2	0,28	-30,16	-1,000	-0,7533	0,7533	909,6256	22,71953	0,567461
157	0,32	-30,16	-1,000	-0,7396	0,7396	909,6256	22,30634	0,547008
184,7	0,38	-26,39	-0,875	-0,6129	0,6129	696,4321	16,17443	0,375646
193,1	0,39	-22,62	-0,750	-0,55	0,5500	511,6644	12,441	0,3025
201,2	0,41	-18,85	-0,625	-0,4813	0,4813	355,3225	9,072505	0,23165
212,1	0,43	-15,08	-0,500	-0,3843	0,3843	227,4064	5,795244	0,147686
222,4	0,45	-11,31	-0,375	-0,2782	0,2782	127,9161	3,146442	0,077395
231,4	0,47	-7,54	-0,250	-0,1799	0,1799	56,8516	1,356446	0,032364
243,7	0,50	-3,77	-0,125	-0,0381	0,0381	14,2129	0,143637	0,001452
252,7	0,52	0	0,000	0,0668	-0,0668	0	0	0,004462
262,7	0,54	3,77	0,125	0,1795	-0,1795	14,2129	0,676715	0,03222
275,1	0,56	7,54	0,250	0,3054	-0,3054	56,8516	2,302716	0,093269
286	0,58	11,31	0,375	0,4085	-0,4085	127,9161	4,620135	0,166872
296,5	0,61	15,08	0,500	0,5664	-0,5664	227,4064	8,541312	0,320809
308	0,63	18,85	0,625	0,6221	-0,6221	355,3225	11,72659	0,387008
321,9	0,66	22,62	0,750	0,6304	-0,6304	511,6644	14,25965	0,397404
334,3	0,68	22,62	0,750	0,6563	-0,6563	511,6644	14,84551	0,43073
347,1	0,71	18,85	0,625	0,65	-0,6500	355,3225	12,2525	0,4225
361,7	0,74	15,08	0,500	0,6027	-0,6027	227,4064	9,088716	0,363247
376	0,77	11,31	0,375	0,5204	-0,5204	127,9161	5,885724	0,270816
391,8	0,80	7,54	0,250	0,3791	-0,3791	56,8516	2,858414	0,143717
408,9	0,83	3,77	0,125	0,1929	-0,1929	14,2129	0,727233	0,03721
425	0,87	0	0,000	-0,0125	0,0125	0	0	0,000156
430,3	0,88	-3,77	-0,125	-0,0946	0,0946	14,2129	0,356642	0,008949
447,4	0,91	-7,54	-0,250	-0,1412	0,1412	56,8516	1,064648	0,019937
466,4	0,95	-11,31	-0,375	-0,6524	0,6524	127,9161	7,378644	0,425626
490	1,00	-15,08	-0,500	-1	1,0000	227,4064	15,08	1

	xx*xx	xx*xp	xp*xp
soma	8811,998	261,1969	8,409449
msf1	31,05993		
msf2	0,029641		
mac	0,920649		
msf1 *msf2	0,920649		

VIII - REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.

- AJOVALIST, A. *Breve guida alla scelta dei metodi de análisis sperimentali delle tensione*. <<http://dmti.unifi.it/aias/articoli/not%2084/ajovalasit.html>>, 10/02/1998.
- AMIDROR, I. *The Theory of the Moiré Phenomenon*, Computational Imaging and Vision, Kluwer Academic Publishers, Vol. 15, Netherlands (2000).
- ASSUNDI, A. *Computer aided moiré methods*.
<http://www.ntu.edu.sg/mpe/research/programmes/sensors/sensors/moire/camm.html>, 15/04/1998.
- BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics – Eletromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 7ed., (1999).
- CLOUD, G. *Optical methods of engineering analysis*. Cambridge, Cambridge University Press (1998).
- CURLESS, B. *SIGGRAPH 99 Course on 3D Photography: Overview of Active Vision Techniques*. <<http://www.cs.cmu.edu/~seitz/course/SIGG99/slides/curless-active.pdf>>, 06/09/2001.
- DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures – Spectral Analysis using Fast Fourier Transforms*, 2ed., Springer Verlag (1997).
- EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and Praticce*, Engineering Dynamics Series, Research Studies Press LTD., England (1984).
- FERREIRA da SILVA JR, JAYME Resistência dos Materiais, 2ed, Ao Livro Técnico, RJ, Brasil (1966).
- FOWLES, G. R. *Introduction to Modern Optics*, 2ed, Dover Publications (1989).
- FREJLICH, J. *Tópicos de Ótica – Interferência, Coerência e Holografia*, Instituto de Física Gleb Wataghin, Setor de Publicações, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 58p, 3ed., (2002).
- GENTA, G. *Vibration of Structures and Machines*, Springer Verlag, New York. (1993).
- GÉRADIN, M.; RIXEN, D. *Mechanical Vibration – Theory and Application to Structural Dynamics*, John Wiley and Sons Ltd (1997).
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física IV – Ótica e Física Moderna*. LTC Editora, Brasil (1996).
- HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. *Matlab 6 – Curso Completo*, Pearson Education do Brasil (2003).
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*, Prentice Hall, Inc. (1996).
- LINO, A. C.L. *Técnica Óptica de Moiré Visando a Aplicação no Estudo de Superfícies Irregulares* Tese de Mestrado – Unicamp (2002).
- LIVNAT, A., POST, D. *The governing Equations for Moiré Interferometry and Their Identity to Equations of Geometrical Moiré*, Experimental Mechanics, vol 25, n4, pp101-118 (1985).
- LOVE, A.E.H. *A treatise on the Mathematical Theory o Elasticity*, Dover Publications, New York (1927)
- MatLab Reference Guide*, The MathWorks Inc (1996).

- MCCALLION, H. *Vibration of Linear Mechanical Systems*. Longman, London (1973).
- NASH, W. A. *Theory and Problems of Strength of Materials* 2 ed. Schaum's Outline Series, McGraw Hill Inc, (1972).
- PILKEY, W. D., WUNDERLICH, W. *Mechanics of Structures – Variational and Computational Methods* CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida (1994).
- POST, D.; HAN, B.; IFJU, P. *High sensitivity moiré: Experimental analysis for mechanics and materials*. Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, New York (1994).
- PRODONOFF, V. *Vibrações Mecânicas: Simulação e Análise*, Maity Comunicação e Editora Ltda, Rio de Janeiro, 1990.
- SCHIAMMARELLA, C. A. *The moiré method – A review*. Experimental Mechanics. v.44, n.8, p. 418-433, nov., 1982.
- SHABANA, A.A. *Theory of Vibration: An Introduction*, 2ed, Mechanical Engineering Series, Springer Verlag, New York, (1991).
- SHABANA, A.A. *Theory of Vibration; vol II: Discrete and Continuous Systems*, Mechanical Engineering Series, Springer Verlag, New York (1991).
- TAKASAKI, H. *Moiré topography*, Applied Optics, v.9, n.6, pp.1467-1472 (1970).
- THOMSON, W. T. *Theory of vibration with Applications*, Prentice Hall, (1973).
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, Inc. (1970).
- WEAVER, W. JR., TIMOSHENKO, S. P., YOUNG, D. H. *Vibration Problems en Engineering* 5ed, John Wiley and Sons (1990).
- WEISSMAN, E. M., POST, D. *Moiré Interferometry Near the Theoretical Limit*, Applied Optics, vol 21, n9, pp 1621-1623 (1982).