



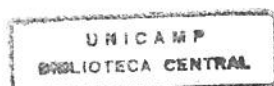
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia de Alimentos
Departamento de Tecnologia de Alimentos

Otimização de plantas de processo em batelada e semi-contínuo

Luís Felipe Toro Alonso
Engenheiro de Alimentos

Prof. Dr. Kil Jin Park *K*
Orientador

Campinas - S.P.
JUNHO de 1997





Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia de Alimentos
Departamento de Tecnologia de Alimentos

94092023

Otimização de plantas de processo em batelada e semi-contínuo

Luís Felipe Toro Alonso

Engenheiro de Alimentos

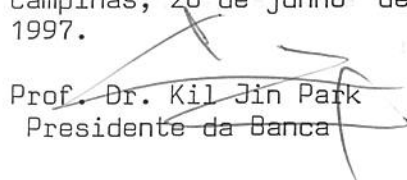
Prof. Dr. Kil Jin Park

Orientador

PARECER

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por LUIS FELIPE TORO ALONSO e aprovada pela Comissão Julgadora em 20 de junho de 1997. Campinas, 20 de junho de 1997.

da à Faculdade de Engenharia de Alimentos da
1 de Campinas, para a obtenção do título de
em Tecnologia de Alimentos.


Prof. Dr. Kil Jin Park
Presidente da Banca

Campinas - S.P.

JUNHO de 1997

"Otimização de plantas de processo em batelada e semi-contínuo"

por

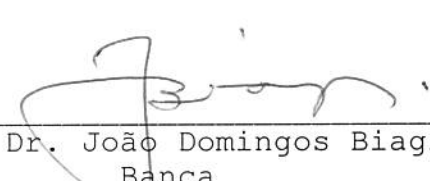
Luís Felipe Toro Alonso

Tese aprovada em 20 de junho de 1997

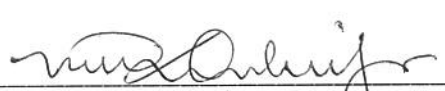
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Kil Jin Park
Orientador



Prof. Dr. João Domingos Biagi
Banca



Profa. Dra. Miriam Dugas Hubinger
Banca

Prof. Dr. Yoon Kil Chang
Banca

"O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria,
e o conhecimento do TODO PODEROSO é entendimento "
(*Provérbios 9:10*)

Agradecimentos

Sempre é difícil ser justo ao agradecer à todos que tenham acompanhado um trabalho desenvolvido em dois anos. Mas, certamente alguns não podem ser esquecidos:

Agradeço a meus pais (**Nilze e José Aylton**) pelo extenso apoio e constante preocupação em sustentar minha carreira.

Ao **Prof. Kil** pela paciência e perseverança em dirigir e incentivar a confecção desta tese.

Aos sempre presentes **Alexandre Mazzonetto e Gilberto Loth** a estimular e a suportar em todos os momentos de dificuldades.

Ao amigo e quase irmão **Luiz Fabiano** pelas dicas e pelo incentivo.

Ao **Fernando Brod** por dividir a mesa de trabalho, o computador, o orientador, o tempo, a papelada, etc...

À **Gabriela Macahdo** por tantos anos...

A **Todos** aqueles que direta ou indiretamente participaram na confecção deste trabalho.

Ao **CNPq** pelo apoio financeiro.

E por último, mas acima de todos ao meu **Senhor Jesus**, o Cristo, pois:

"Todas as coisas foram feitas por intermédio dEle,

e sem Ele nada do que foi feito se fez."

Evangelho de João 1:3

Índice

Índice	i
Lista de figuras	ii
Lista de Tabelas	iii
Nomenclatura	iv
Resumo	vii
Abstract	viii
Objetivos	ix
1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	2
2.1 Os Processos Industriais	2
2.2 Engenharia Econômica	5
2.2.1 Custo de um item descontínuo	5
2.2.2 Custo de um item contínuo	6
2.3 Otimização Não Linear	7
2.3.1 Condições de Ótimo (Khun-Tucker)	11
2.3.2 Programação Não Linear Mista Inteira (MINLP)	12
2.4 Programação não linear	13
2.4.1 Método do Gradiente	16
2.4.2 Método de Newton	17
2.4.3 Método do Gradiente Reduzido	18
2.4.4 Método do Gradiente Projetado	20
2.5 Projeto de Planta e Investimento Fixo	22
2.5.1 LOONKAR & ROBINSON (1970)	23
2.5.2 SPARROW <i>et al.</i> (1975)	31
2.5.3 GROSSMANN & SARGENT (1979)	53
2.6 Inserção de Equipamentos em Plantas Instaladas	68
2.6.1 VASELENAK <i>et al.</i> (1987)	69
2.6.2 FLETCHER <i>et al.</i> (1991)	85
2.6.3 LEE <i>et al.</i> (1993)	110
2.7 Considerações Finais	127
3. Material e Método	129
3.1 Problema Proposto	131
3.2 Solução do Problema	132
4. Resultados	134
4.1 Problema Um	134
4.2 Problema Dois	135
4.2.1 Problema de Inserção	135
4.2.2 Problema de Planta a ser instalada	138
4.3 Problema Três	139
4.3.1 Problema de Inserção	139
4.3.2 Problema de Planta a ser instalada	142
4.4 Problema Quatro	143
4.4.1 Problema de Inserção	143
4.4.2 Problema de Planta a ser instalada	146
4.5 Análise dos Resultados	147
5. Conclusão	154
6. Sugestões	156
Referências Bibliográficas	157
Anexos	159
B. Programa “proj.m”	159
A. Programa “grad.m”	161

Lista de Figuras

FIGURA 1 : SOLUÇÃO GRÁFICA DO EXEMPLO 1.	8
FIGURA 2 : PROBLEMA OTIMIZADO	15
FIGURA 3 : PROBLEMA EXEMPLO(FONTE: LOONKAR & ROBINSON,1970)	25
FIGURA 4 :FLUXOGRAMA DE OPERAÇÃO DE UMA PLANTA EM BATELADA.	34
FIGURA 5 : DIMENSIONAMENTO PELO MÉTODO HEURÍSTICO (SPARROW <i>ET AL.</i> , 1975)	43
FIGURA 6 : ESTRUTURA DAS POSSÍVEIS SOLUÇÕES PARA O DIMENSIONAMENTO DO EQUIPAMENTO. (SPARROW <i>ET AL.</i> ,1975)	46
FIGURA 7 : ALGORÍTIMO DO MÉTODO DE BUSCA E LIMITE.	49
FIGURA 8 : DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA CADA MÉTODO	51
FIGURA 9 : ESTADO DA PLANTA E CONDIÇÕES DE OPERAÇÃO	54
FIGURA 10 : PLANTA MULTI-PRODUTO SEQUENCIAL EM BATELADA	57
FIGURA 11 : PLANEJAMENTO DE UMA PLANTA EM BATELADA EM TRÊS ESTÁGIOS PARA DOIS PRODUTOS	58
FIGURA 12 : OPÇÃO C, REDUZINDO O TEMPO DO CICLO	71
FIGURA 13 : OPÇÃO B, AUMENTANDO O TAMANHO DA BATELADA	72
FIGURA 14 : ESTRUTURA DE INSERÇÃO PARA UMA PLANTA EM BATELADA.	73
FIGURA 15 : ESTRUTURA DO PROBLEMA EXEMPLO 2	80
FIGURA 16 : ESTRUTURA DO EXEMPLO 3	82
FIGURA 17 : PLANTA DE BATELADA EM DOIS ESTÁGIOS	87
FIGURA 18 : OPÇÕES DE INSERÇÃO	116
FIGURA 19 : FLUXOGRAMA DE PROCESSO PARA O EXEMPLO 7 E 8	120
FIGURA 20 : FLUXOGRAMA DE PROCESSO PARA O EXEMPLO 9	123
FIGURA 21 : FLUXOGRAMA DO EXEMPLO 10	124
FIGURA 22 : FLUXOGRAMA DO PROBLEMA PROPOSTO	131
FIGURA 23 : DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS NO PROBLEMA	134

Lista de Tabelas

TABELA 1 :PROBLEMA ILUSTRATIVO DE LOONKAR & ROBINSON (1970)	31
TABELA 2 :EXEMPLO ILUSTRATIVO DE DIMENSIONAMENTO PELO MÉTODO HEURÍSTICO	42
TABELA 3 : LISTA DE EXEMPLOS DOS ESTADOS POR ESTÁGIO	45
TABELA 4 : LISTA DOS TIPOS DE EQUIPAMENTOS	50
TABELA 5 : COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO HEURÍSTICO E O BUSCA E LIMITE	50
TABELA 6 : EXEMPLOS DE BATELADA MULTI-PRODUTO	65
TABELA 7 : RESULTADOS DOS EXEMPLOS DA TABELA 6	67
TABELA 8 : DADOS DO EXEMPLO 2	78
TABELA 9 : OPÇÕES DE INSERÇÃO DO EQUIPAMENTO, EXEMPLO 2	81
TABELA 10 : DADOS DO EXEMPLO 3	83
TABELA 11 : RESULTADOS DO EXEMPLO 3	84
TABELA 12 : TEMPOS DE CICLO ILUSTRATIVOS E FATORES DE TAMANHO PARA CADA PRODUTO	93
TABELA 13 : QUADRO ILUSTRATIVO DAS ESTRATÉGIAS DE OPERAÇÃO DO PROBLEMA	95
TABELA 14 : DADOS DO EXEMPLO 4	104
TABELA 15 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO VGW	104
TABELA 16 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO FHJ	104
TABELA 17 : DADOS DO EXEMPLO 5	105
TABELA 18 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO VGW	106
TABELA 19 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO FHJ	106
TABELA 20 : DADOS DO EXEMPLO 6	106
TABELA 21 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO VGW	108
TABELA 22 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÕES CONSIDERANDO FHJ	108
TABELA 23 : COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES	109
TABELA 24 : DADOS DE PROCESSO DO EXEMPLO ILUSTRATIVO.	113
TABELA 25 : ANÁLISE DO PROCESSO ILUSTRATIVO	114
TABELA 26 : DADOS DE F	115
TABELA 27 : ESTRATÉGIAS DE INSERÇÃO	116
TABELA 28 : DADOS DO EXEMPLO 7	120
TABELA 29 : ANÁLISE DO PROCESSO DO EXEMPLO 7	121
TABELA 30 : RESULTADOS DO EXEMPLO 7	121
TABELA 31 : DADOS DO EXEMPLO 8	121
TABELA 32 : ANÁLISE DO PROCESSO DO EXEMPLO 8	122
TABELA 33 : RESULTADOS DO EXEMPLO 8	122
TABELA 34 : DADOS DO EXEMPLO 9	123
TABELA 35 : ANÁLISE DO PROCESSO DO EXEMPLO 9	123
TABELA 36 : RESULTADOS DO EXEMPLO 9	124
TABELA 37 : DADOS DO EXEMPLO 10	125
TABELA 38 : ANÁLISE DO PROCESSO DO EXEMPLO 10	125
TABELA 39 : RESULTADOS DO EXEMPLO 10	126
TABELA 40 : DADOS DO PROBLEMA	132
TABELA 41 : SÉRIE INICIAL	148
TABELA 42 : SÉRIE PARA PLANTA A SER INSTALADA	149
TABELA 43 : SOLUÇÕES FINAIS DAS SÉRIES	149
TABELA 44 : DADOS DE TEMPO PARA OS PROBLEMAS DE INSERÇÃO	150
TABELA 45 : RESUMO DAS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DE INSERÇÃO	151

Nomenclatura

$\bar{a}_x = a_x W^{a_x}$ na equação (2.5.9)	
$\bar{b}_k = b_k W^{b_k}$ na equação (2.5.9)	
$(V_j^B)^U$ = volume máximo da nova unidade do estágio j para a opção B	[ℓ]
$(V_j^C)^U$ = volume máximo da nova unidade do estágio j para a opção C	[ℓ]
A = Área característica de um trocador de calor	[m ²]
a_x = coeficiente do custo para a unidade x em batelada	[\$/ℓ]
B_i = tamanho da batelada do produto i	[kg/batelada]
b_k = coeficiente do custo para a unidade k semi-contínua	[\$/ℓ]
C = custo de um equipamento ou planta	[\$]
c_{ij} = coeficiente de tempo para o produto i no estágio j na equação (2.5.45)	[kg/h]
C_P = custo de um equipamento P	[\$]
C_S = custo de um equipamento S	[\$]
d_{ij} = expoente de tempo para o produto i no estágio j na equação (2.5.45)	[-]
EF = inserção em fase	[-]
FF = inserção fora de fase	[-]
F = constantes de proporcionalidade	[-]
I = custo total do equipamento para a planta em batelada	[\$]
K = coeficiente linear de custo de um equipamento	[\$]
K_j = coeficiente linear de custo de um equipamento no estágio j	[\$]
M = número de estágios	[-]
N = número de produtos	[-]
n_i = número de ciclos em batelada necessários para produzir i	[-]
P = número de equipamentos semi-contínuos	[-]
p_i = preço de venda do produto i	[\$/kg]
Q_i = capacidade produtiva anual da planta	[kg/ano]

r = coeficiente de custo de um equipamento	[\$/\ell]
R = número de cadeias semi-contínuas	[-]
r_j = coeficiente de custo de um equipamento no estágio j	[\$/\ell]
S_{Hj} = fator de tamanho de um produto hipotético H no estágio j	[\ell/kg]
S_{ij} = fator de tamanho do produto i no estágio j	[\ell/kg]
t = tempo de processamento em batelada	[h]
T = tempo total de um ciclo de processamento	[h]
t_{ij} = tempo de processamento em batelada do produto i no estágio j	[h]
T_{Li} = tempo limitante do ciclo de processamento do produto i	[h]
t_x = tempo de processamento da unidade x em batelada	[h]
V = volume de um equipamento ou planta	[\ell]
V_{ij} = volume do produto i no estágio j	[\ell]
V_j^L = limite inferior do volume em um estágio j	[\ell]
V_j^U = limite superior do volume em um estágio j	[\ell]
V_P = volume de um equipamento P	[\ell]
V_S = custo de um equipamento S	[\ell]
W = capacidade produtiva da planta	[\ell/h]
Z = número de equipamentos em batelada	[-]
Z_j = número de equipamentos em batelada no estágio j	[-]

Sub Índices

B = opção B

C = opção C

$i = 1, 2, \dots, N$

$j = 1, 2, \dots, M$

$k = 1, 2, \dots, P$

L = limitante

$m = 1, 2, \dots, Z$

P = equipamento P

S = equipamento S

$x = 1, 2, \dots, Z$

$y = 1, 2, \dots, R$

Símbolos

β_K = expoente do custo de K unidades semi-contínuas [-]

α_x = expoente do custo de x unidades de batelada [-]

$\bar{\theta}_k$ = tempo associado a K unidades semi-contínuas [h]

$\bar{\theta}_P$ = tempo associado a P unidades semi-contínuas [h]

θ_y = tempo de processamento para y cadeias
semi-contínuas [h]

γ_j = expoente de custo de um equipamento no estágio j [-]

ψ = Variável binária de decisão [-]

Resumo

Um método de otimização de projeto de plantas de processamento em batelada foi desenvolvido por LOONKAR & ROBINSON (1970). Modificações ao método desenvolvidas por SPARROW *et al.* (1975) e posteriormente por GROSSMANN & SARGENT (1979) promoveram a eficiência do método em detrimento de sua simplicidade.

VASELENAK *et al.* (1987), com base no método de GROSSMANN & SARGENT (1979), adaptou o método para solução de problemas de inserção ótima de equipamentos em plantas instaladas. FLETCHER *et al.* (1991) seguido por LEE *et al.* (1993), promoveram melhorias ao método introduzindo simplificações sem reduzir significativamente sua eficiência.

Neste trabalho foram estudados os métodos citados. O método de LOONKAR & ROBINSON (1970) e o método de LEE *et al.* (1993) foram aplicados em um problema específico. Buscou-se, ainda, sugerir alterações ao método de LOONKAR & ROBINSON (1970) aumentando a eficiência do método sem prejudicar a sua simplicidade.

Abstract

A batch process design optimization method was developed by de LOONKAR & ROBINSON (1970). Modifications to the method, introduced by SPARROW *et al.* (1975) and later by GROSSMANN & SARGENT(1979), increased efficiency to the method but diminishing its simplicity.

Based on GROSSMANN & SARGENT (1979) modifications, VASELENAK *et al.* (1987), adapted the method to optimal retrofit design of batch plants. FLETCHER *et al.* (1991) followed by LEE *et al.* (1993), upgraded the retrofit method applying a set of simplifications that did not reduced significantly its efficiency.

In this thesis, all above methods mentioned were studied. Both, LOONKAR & ROBINSON (1970) and LEE *et al.* (1993) methods were applied to a particular problem. Modifications to LOONKAR & ROBINSON (1970) method were suggested, that should increase its efficiency with no decrease to its simplicity.

Objetivos

- Verificar a aplicabilidade dos métodos de LOONKAR & ROBINSON (1970) e LEE et al. (1993), para otimização de processos semi-contínuos em um modelo de processamento de chocolate.
- Modificar ou sugerir alterações aos métodos, a fim de melhorar a performance mantendo a simplicidade destes métodos.

1. Introdução

A competitividade de um produto no mercado depende entre outros fatores de seu custo de produção. Um elemento que compõe o custo de um produto é o custo de instalação de uma planta de processamento.

Uma planta mal dimensionada ainda que atenda à capacidade produtiva de uma indústria pode ter um custo elevado de instalação, reduzindo a competitividade do produto.

Métodos de otimização de plantas de processamento permitem um melhor dimensionamento de plantas a serem instaladas ou mesmo uma análise simplificada da adequação de plantas já instaladas.

Ainda, quando o mercado demanda um aumento de produção que excede a capacidade de uma planta instalada, lançamos mão de métodos de otimização para a inserção de novos equipamentos.

Estes métodos garantem a perfeita adequação da planta de processamento às necessidades produtivas a um custo mínimo de instalação.

2. Revisão Bibliográfica

Antes de introduzir aos métodos é necessário compreender estar familiarizado com os termos e conceitos em que se estruturam os métodos de otimização.

2.1 Os Processos Industriais

Os Processos industriais podem ser classificados como processos em batelada (descontínuos), contínuos ou semi-bateladas (ou semi contínuos), ou como processos estacionários ou transientes. São eles (ROUSSEAU & FELDER, 1986) :

a) Processo em Batelada

A alimentação é carregada no sistema no início do processo, e o produto é descarregado algum tempo depois. Nenhuma massa cruza os limites do sistema no intervalo de tempo entre a alimentação e a descarga.

Exemplo : Coloca-se a matéria-prima em um tacho de cocção e retira-se o produto acabado quando o processo estiver terminado.

b) Processo contínuo

É definido por um fluxo contínuo de alimentação e descarga enquanto durar o processo.

Exemplo : Uma bomba injeta, continuamente, uma mistura de líquidos em um trocador de calor a uma taxa constante, e remove produto final continuamente.

c) Processo semi-batelada (ou semi-contínuo)

Todo processo que não se enquadra como batelada ou contínuo ou seja: conjuga os dois tipos de processo.

Exemplo : Um fluxo constante de ar aquecido cruza um secador de bandejas enquanto o produto não atinge a umidade desejada.

Se os valores das variáveis de processo não variam com o tempo durante o processo, é um processo estacionário. Se qualquer variável de processo muda com o tempo, o processo é transiente. Por natureza, os processos em batelada e semi-contínuo são transientes, enquanto o processo contínuo pode ser tanto transiente, como estacionário.

Produtos de alto valor, volumes muito baixos de produção ou obtidos em períodos muito longos de processamento são freqüentemente produzidos em processos bateladas ou semi-contínuos. Em sua maioria as plantas de processamento de alimentos são em batelada ou semi-contínuas.

Plantas em batelada consistem em uma seqüência de unidades de processo em batelada, cada qual com sua capacidade especificada por seu volume. A cada estágio de processamento, o material será processado por um período específico de tempo, depois do qual ele passa a um novo estágio. Reatores, tanques e centrífugas, são exemplos típicos de equipamentos em batelada.

Plantas semi-contínuas incluem estágios semi-contínuos, cuja capacidade é definida pela taxa de saída de material. Por princípio, toda planta em batelada é uma

planta semi-contínua, onde os estágios semi-contínuos influem muito pouco no custo total da planta para ser considerada semi-contínua. A taxa de produção total de uma planta em batelada simples é especificada por dois parâmetros: as dimensões da batelada e o tempo de um ciclo. (FLETCHER *et al.*, 1991)

A dimensão da batelada é determinada pela peça de equipamento com menor volume de processamento, medido em termos de volume de produto final processado. O tempo de um ciclo é determinado pelo estágio mais longo de processamento. A produtividade pode ser aumentada, aumentando as dimensões da batelada ou reduzindo o tempo de um ciclo. As dimensões da batelada podem ser aumentadas, aumentando-se o volume do estágio limitante, substituindo-o por um equipamento de volume maior ou acrescentando equipamentos operando em fase. O Tempo do ciclo pode ser reduzido duplicando-se o equipamento no estágio limitante, dividindo o tempo do ciclo. Se apropriada, a unidade pode ser replicada, reduzindo o tempo do ciclo por um fator.

Plantas de processo em batelada multi-produto são projetadas para fazer um certo número de produtos relacionados, usando os mesmos equipamentos operando na mesma sequência. Os processos são operados em campanhas, durante cada campanha em um determinado número de dias ou semanas, um único produto é fabricado. Porque os produtos diferem, a relação entre os volumes em cada estágio e o volume final varia conforme o produto.

Semelhantemente, os tempos de processo em cada estágio diferem e os estágios limitantes serão, previsivelmente diferentes para cada produto.

2.2 Engenharia Econômica

Para se estabelecer o custo total de uma planta de processamento é necessário obter o custo de cada equipamento que compõe a planta. Todos os equipamentos tem uma determinada peça que estabelece o seu custo. A partir das dimensões desta peça característica pode-se deduzir não somente seu custo, mas a capacidade produtiva, dimensões do equipamento e outras informações singulares.

BAUMAN (citado por LOONKAR & ROBINSON, 1970) propõe que o cálculo do custo de um equipamento pode ser generalizado por uma função exponencial. Tomando-se a dimensão de uma peça que caracteriza o equipamento, determinam-se expoentes característicos para cada equipamento. Através desta função pode-se prever o custo final de um equipamento instalado como se segue:

2.2.1 Custo de um item descontínuo

Custo do reator e tanque. Usando a regra do expoente, o custo de um reator ou tanque é dado por :

$$C_p = C_s \cdot (V_p/V_s)^\alpha \quad (2.2.1)$$

com:

$$V_p = F \cdot V_s \quad (2.2.2)$$

resulta:

$$C_p = C_s \cdot \left(\frac{F}{V_s}\right)^\alpha \cdot V_p^\alpha = a_p \cdot V_p^\alpha \quad (2.2.3)$$

2.2.2 Custo de um item contínuo

Custo de uma bomba. O custo da bomba é dado por :

$$C_p = C_s \left(\frac{X_p}{X_s} \right)^\beta \quad (2.2.4)$$

Aqui, X = cabeçote $\times$ (volume a ser bombeado/tempo de bombeamento) $\times$ (fator de conversão/eficiência). Assumindo uma eficiência constante e para fornecimento constante do cabeçote:

$$X \propto (V_p / \bar{\theta}_p) \quad (2.2.5)$$

Uma vez que:

$$V_p = F \cdot V_s \quad (2.2.6)$$

onde:

$$X \propto (V_p / \bar{\theta}_p) \quad (2.2.7)$$

então:

$$C_p = C_s \left(\frac{\bar{\theta}_s}{V_s} \right)^\beta \left(\frac{V_p}{\bar{\theta}_p} \right)^\beta = b_p \left(\frac{V_p}{\bar{\theta}_p} \right)^\beta \quad (2.2.8)$$

Custo do trocador. O custo do trocador é dado por:

$$C_p = C_s (A_p / A_s)^\beta \quad (2.2.9)$$

a área do trocador pode ser estimada por:

$$A_p = \frac{Q \cdot V_p}{U \cdot \Delta T \cdot \bar{\theta}_p} \quad (2.2.10)$$

onde Q = calor transferido por batelada, U = coeficiente total de transferência de calor e ΔT = temperatura média do trocador.

uma vez que:

$$V_p = F \cdot V_s \quad (2.2.11)$$

temos:

$$C_p = C_s \left(\frac{F \cdot Q}{U \cdot \Delta T \cdot A_p} \right)^\beta \left(\frac{V_p}{\bar{\theta}_p} \right)^\beta = b_p \left(\frac{V_p}{\bar{\theta}_p} \right)^\beta \quad (2.2.12)$$

2.3 Otimização Não Linear

Todo problema de otimização pode ser enunciado como um problema em que se deseja maximizar (ou minimizar) alguma função, chamada de *Função Objetivo*. Isto deve ser feito determinando os valores de certas variáveis sobre as quais se tem tal liberdade, chamadas de *Variáveis de Controle*. Na maioria dos problemas encontraremos limitações, tais como leis físicas, segurança, necessidades de processo e outras. Estas limitações determinam a região de solução do problema e são chamadas de *Restrições* (CONVERSE, 1977).

Recolocando o problema de outra forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{S.a } \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ h(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \end{array} \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

Obs.: S.a $\Rightarrow$ Sujeito a

é um problema de Otimização em que $f(x_1, x_2, x_3)$ é a função objetivo, x_1, x_2, x_3 são as variáveis de controle e $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ e $h(x_1, x_2, x_3) \leq 0$ são as restrições do problema.

O conjunto das restrições e variáveis de controle deve formar uma região fechada, onde encontraremos as soluções possíveis para o problema. Deve formar, portanto, uma região convexa. Vale lembrar que uma função pode ter mais de um extremo (mínimo ou máximo).

Exemplo 1

$$\begin{cases} \text{Min} & x^2 + 3y^2 \\ \text{S.a} & x, y \\ & 2x + 4y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

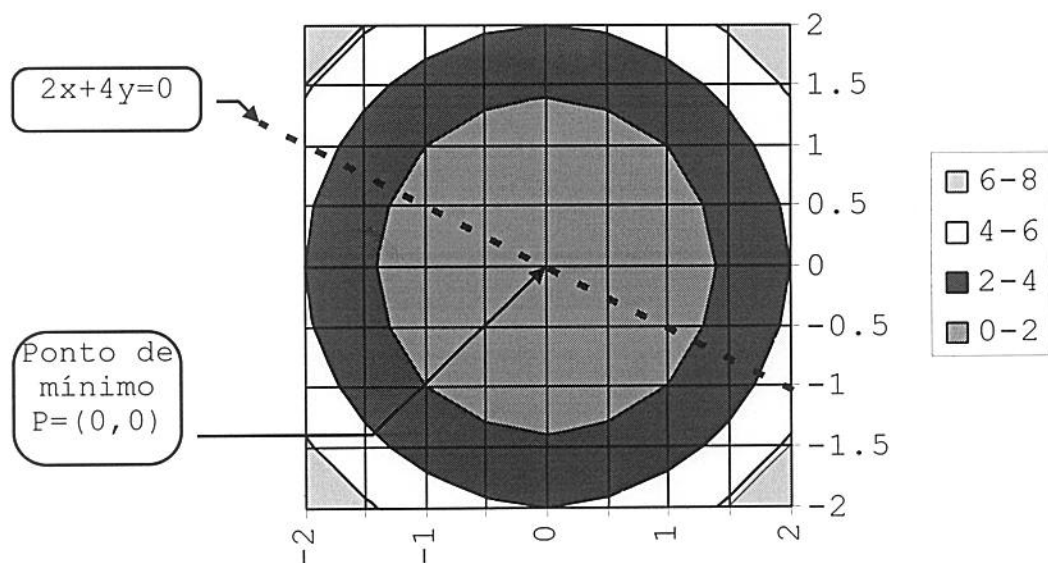


Figura 1 : Solução gráfica do exemplo 1.

Para se determinar o extremo de uma função, é necessário atender algumas condições que garantem que a solução encontrada é um ponto extremo (máximo ou mínimo). Antes de determinar estas condições é necessário estar familiarizado com termos e funções matemáticas característicos :

Gradiente

Seja S uma região convexa em um espaço vetorial E_n e $x^* \in \text{int}S$ e seja $f: S \rightarrow E_1$. Então f é dita diferenciável em x^* se existe um vetor $\nabla f(x^*)$ em E_n chamado GRADIENTE de f em

x^* e a função β satisfazendo $\beta(x^*;x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x^*$ tal que:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^t (x - x^*) + |x - x^*| \beta(x^*;x) \quad (2.3.2)$$

para cada $x \in S$

O vetor gradiente consiste nas derivadas parciais da função, isto é:

$$\nabla f(x^*)^t = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right) \quad (2.3.3)$$

Hessiana

A função f é chamada duplamente diferenciável em x^* se em adição ao vetor gradiente existe uma matriz $H(x^*)$, chamada matriz HESSIANA de f em x^* e a função β satisfazendo $\beta(x^*;x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x^*$ tal que:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^t (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*)^t H(x^*) (x - x^*) + |x - x^*|^2 \beta(x^*;x) \quad (2.3.4)$$

para cada $x \in S$

$$H(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

Jacobiano

Um vetor é diferenciável se cada um de seus elementos é diferenciável e o vetor é duplamente diferenciável se cada um de seus elementos é duplamente diferenciável.

Em particular, para um vetor diferenciável a função $h: E_n \rightarrow E_1$ onde $h(x) = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_t(x)]^t$, o JACOBIANO de h , denotado pela notação gradiente $\nabla h(x)$, é dado pela matriz:

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x)' \\ \vdots \\ \nabla h_t(x)' \end{bmatrix}_{t \times n} \quad (2.3.6)$$

cujas linhas correspondem ao gradiente transposto de $h_1, \dots, h_t$, respectivamente.

Teorema de Taylor

Seja S uma região convexa em um espaço vetorial E_n e seja $f: S \rightarrow E_1$ uma função duplamente diferenciável. A segunda ordem do teorema de Taylor pode ser estabelecida como se segue. Para cada X_1 e X_2 em S , deve haver :

$$f(x_2) = f(x_1) + \nabla f(x)^t (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^t H(x) (x_2 - x_1) \quad (2.3.7)$$

onde $H(x)$ é a Hessiana de f em x e

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ para algum } \lambda \in [0,1]$$

Função Lagrangiana

É uma função característica $L: E_n \rightarrow E_1$, na forma:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t h(x) \quad (2.3.8)$$

onde λ é um vetor e cada elemento λ_i é chamado multiplicador de Lagrange

2.3.1 Condições de Ótimo (Kuhn-Tucker)

Dado o seguinte problema **P**:

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x) \\ \text{S.a.} & g_i(x) \leq 0 \end{cases} \quad i=1, \dots, n \quad (2.3.9)$$

O mesmo pode ser rescrito na forma da função lagrangiana:

$$L(x) = l(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot g_i(x) \quad (2.3.10)$$

O problema torna-se :

$$\text{Min } L(x)$$

São condições necessárias de primeira ordem que, no ponto ótimo $\bar{x}$:

$$\nabla L(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n [\lambda_i \cdot \nabla g_i(\bar{x})] = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\text{e } \lambda_i \geq 0 ; \lambda_i \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \text{ para } i=1, \dots, n$$

São condições suficientes de segunda ordem que, no ponto ótimo $\bar{x}$:

$$\nabla^2 L(\bar{x}) > 0 \text{ que é a Hessiana da função}$$

e para garantir solução factível de **P** : $g_i(\bar{x}) \leq 0 ; i=1, \dots, n$

2.3.2 Programação Não Linear Mista Inteira (MINLP)

O problema de Programação Não Linear Mista Inteira (MINLP) constitui uma classe de problemas de Programação Não Linear (PNL). Problemas de MINLP consideram em sua solução variáveis caracterizando esta classe de problemas.

Em diversos problemas de Programação Não Linear (PNL), mesmo enquanto tratamos de variáveis como sendo contínuas, algumas delas não tem sentido quando consideradas como não inteiras. Embora, ao se equacionar a PNL, possamos tratar o número de equipamentos necessários para um processamento como uma variável não inteira, não faz sentido que se instale um número não inteiro de equipamentos.

Em problemas de MINLP, ao se utilizarem variáveis inteiras, dificuldades como descontinuidade das variáveis, obrigam a formular métodos específicos de solução para esta classe de problemas. Um exemplo de problema misto inteiro é apresentado a seguir.

Considere o problema de uma empresa, que tem de decidir entre duas cidades, A e B, para construir uma nova fábrica, e se for possível, também construir um armazém na mesma cidade. Considera-se que o capital disponível para o investimento é \$25 milhões. O objetivo é encontrar a combinação que maximiza o lucro. (NEMHAUSER & GARFINKEL, 1972)

Decisão	Questão	Variável	Lucro	Capital necessário
1	Fábrica em A?	x_1	7 milhões	20 milhões
2	Fábrica em B?	x_2	5 milhões	15 milhões
3	Armazém em A?	x_3	4 milhões	12 milhões
4	Armazém em B?	x_4	3 milhões	10 milhões

Definem-se as variáveis de decisão como binárias:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{decisão } j \text{ e' sim} \\ 0, & \text{decisão } j \text{ e' não} \end{cases}$$

a empresa deseja construir somente uma fábrica : $x_1 + x_2 = 1$

a empresa deseja construir ao menos um armazém : $x_3 + x_4 \leq 1$

o armazém será construído se a fábrica for construída :

$$x_3 - x_1 \leq 0 \qquad x_4 - x_2 \leq 0$$

assim o problema completo é :

$$\text{Maximizar } Z = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

Sujeito a

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 & & & & = 1 \\ & & x_3 + x_4 & & \leq 1 \\ -x_1 & + & x_3 & & \leq 0 \\ & -x_2 & + & x_4 & \leq 0 \end{array}$$

$$x_j \text{ é inteiro } j = 1, 2, 3, 4$$

Uma alternativa para solucionar um problema de MINLP é dividir o problema inteiro em problemas menores não inteiros e prosseguir a otimização. Desenvolver um método para solucionar esta classe de problemas foge ao escopo desta tese.

2.4 Programação não linear

O problema exemplo anteriormente citado pode ser solucionado, apenas derivando a função objetivo e verificando se o resultado não fere nenhuma das restrições do problema.

A complexidade de solução de um problema de otimização, entretanto, aumenta vertiginosamente, quando aumentamos o número de variáveis de controle e/ou o conjunto de restrições. Podem também surgir empecilhos como a complexidade da própria função e descontinuidades na função, ou ainda a não convexidade do conjunto de restrições.

Ao equacionar um problema de otimização, pode-se alterar o conjunto de restrições a fim de que formem um conjunto convexo e modificar a função objetivo para eliminar as descontinuidades. Mas, a complexidade do conjunto de restrições ou da função objetivo obriga-nos a lançar mão de métodos computacionais de resolução.

Os métodos computacionais de resolução fazem uma busca de forma iterativa até localizar o ponto de mínimo da função objetivo.

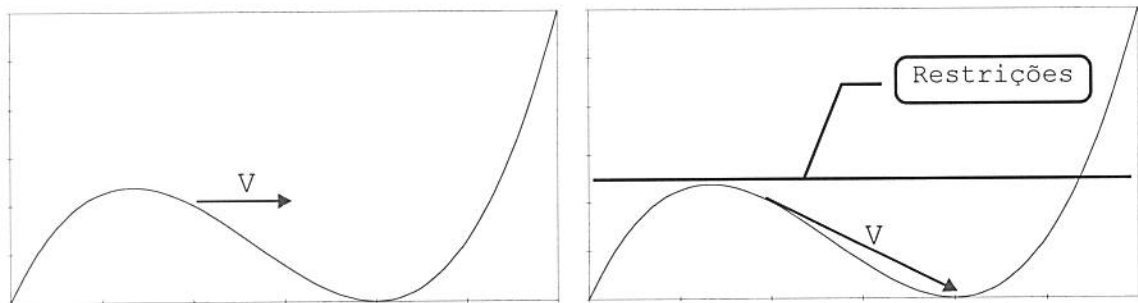
A busca desenvolve-se, resumidamente, segundo os seguintes passos :

1. Define-se um *ponto inicial* (P_0), que é o ponto de partida da busca, ele deve estar dentro da região de solução do problema e é definido arbitrariamente. O conhecimento do problema auxilia a resolução, quanto mais próximo do ponto de mínimo, mais rapidamente encontra-se o mínimo.

2. Define-se a *direção de busca* (d): é a direção com que vamos nos deslocar sobre a função para alcançar o ponto de mínimo. A direção deve apontar para o ponto de mínimo.

3. Define-se um *passo de busca* (a): é o quanto vamos nos deslocar sobre a função para alcançar o ponto de mínimo. A direção e o passo dependem integralmente. Um passo em uma direção pode ser excessivo enquanto em outra não. Ainda, um passo muito grande pode violar as restrições, enquanto um passo muito pequeno torna mais lenta a busca (figura 2).

4. Caminha-se na direção do vetor formado pelo ponto inicial, a direção e o passo ($P_o + a \cdot d$). Calcula-se a nova posição ($P = P_o + a \cdot d$) verifica-se se a nova posição é o ponto de mínimo, ($|P - P_o| < \varepsilon$) ou se nenhuma restrição foi violada. Se não repetem-se os procedimentos 2, 3 e 4 até o ponto de mínimo. (BAZARAA et al., 1993)



Vetor de Busca $V = P_o + a \cdot d$

Problema otimizado

Figura 2 : Problema otimizado

Os Métodos de programação linear diferenciam-se na forma de cálculo do vetor busca. Cada método é mais ou menos sensível à definição dos parâmetros que definem o vetor busca (ponto inicial, passo e direção). Deste modo, um método de otimização pode ser pouco confiável e rápido, ou muito confiável e lento.

2.4.1 Método do Gradiente

O método de Gradiente é adequado para problemas de otimização irrestrita. O algoritmo do método do Gradiente pode ser resumido da seguinte forma:

Dado o problema : $\text{Min } f(x)$

1. Define-se um ponto inicial (P_o): $x_o \forall \mid x \in D=\{f(x)\}$

2. Define-se a direção de busca (d) : que no método do Gradiente é definida pelo gradiente da função

$$d = -\nabla f(x_k)^t \quad (2.4.1)$$

3. Define-se um passo de busca (a) : dado por :

$$a = \frac{\nabla f(x_k)^t \cdot \nabla f(x_k)}{(\nabla f(x_k)^t \cdot H(x_k)) \cdot \nabla f(x_k)} \quad (2.4.2)$$

4. Caminha-se na direção do vetor formado pelo ponto inicial, a direção e o passo (P_o+a*d). Calcula-se a nova posição ($P = P_o+a*d$)

$$x_{k+1} = x_k + \left[-\nabla f(x_k)^t \right] \cdot \left[\frac{\nabla f(x_k)^t \cdot \nabla f(x_k)}{(\nabla f(x_k)^t \cdot H(x_k)) \cdot \nabla f(x_k)} \right] \quad (2.4.3)$$

verifica-se se a nova posição é o ponto de mínimo :

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \quad (2.4.4)$$

Se não, repetem-se os procedimentos 2, 3 e 4 para $k=k+1$ até localizar o ponto de mínimo.

O método do Gradiente é um método eficiente, e pode ser aplicado à qualquer função. Não é um método muito rápido, localizando o mínimo da função com uma precisão aceitável (BAZARAA et al., 1993).

2.4.2 Método de Newton

O método de Newton é adequado para problemas de otimização irrestrita. O método de Newton supõe que a função objetivo possa ser aproximada por uma função quadrática (do teorema de Taylor) :

$$q(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^t H(x_k) (x - x_k) \quad (2.4.5)$$

O algoritmo do método de Newton pode ser resumido da seguinte forma:

Dado o problema : $\text{Min } f(x)$

1. Define-se um ponto inicial (P_0): $x_0 \forall \mid x \in D = \{f(x)\}$

2. Define-se a direção de busca (d) : que no método de Newton é definida pelo gradiente da função

$$d = -\nabla f(x_k)^t \quad (2.4.6)$$

3. Define-se um passo de busca (a) : dado por :

$$a = \frac{1}{H(x_k)} \quad (2.4.7)$$

4. Caminha-se na direção do vetor formado pelo ponto inicial, a direção e o passo ($P_0 + a*d$). Calcula-se a nova posição ($P = P_0 + a*d$)

$$x_{k+1} = x_k + \left[\frac{-\nabla f(x_k)^t}{H(x_k)} \right] \quad (2.4.8)$$

verifica-se se a nova posição é o ponto de mínimo :

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \text{ ou } |\nabla f(x_k)| \leq \varepsilon \quad (2.4.9)$$

Se não, repetem-se os procedimentos 2, 3 e 4 para $k=k+1$ até localizar o ponto de mínimo.

O método de Newton é um método eficiente, e deve ser aplicado preferencialmente em funções quadráticas. Para funções quadráticas é um método muito rápido, localizando o mínimo da função com uma precisão aceitável. O método de Newton perde precisão se aplicado a funções não quadráticas.

(BAZARAA et al., 1993)

2.4.3 Método do Gradiente Reduzido

O método do Gradiente Reduzido é adequado para problemas de otimização restrita. O método do Gradiente Reduzido equaciona problemas na forma:

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x) \\ \text{S.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Assume-se que os m componentes de A são linearmente independentes e todo ponto extremo de uma região factível tem m componentes estritamente positivos.

O algoritmo do método do Gradiente Reduzido pode ser resumido da seguinte forma:

1. Define-se um *ponto inicial* (P_0):

x_0 que satisfaça $Ax = b$ e $x \geq 0$

2. Define-se a *direção de busca* (d) ;

Seja $d_k^t = (d_B^t, d_N^t)$ onde :

I_k = índice dos m maiores componentes de x_k

$$B = \{a_j : j \in I_k\} \quad N = \{a_j : j \notin I_k\} \quad (2.4.11)$$

$$r^t = \nabla f(x_k)^t - \nabla_B f(x_k)^t \cdot B^{-1} \cdot A \quad (2.4.12)$$

$$d_j = \begin{cases} -r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j \leq 0 \\ -x_j r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j > 0 \end{cases} \quad (2.4.13)$$

$$d_B = -B^{-1} \cdot N \cdot d_N \quad (2.4.14)$$

verifica-se se a nova posição é o ponto de mínimo :

Se $d_k = 0$; x_k é um ponto de Khun-Tucker,
ponto de ótimo portanto.

3. Se $d_k \neq 0$ define-se um *passo de busca* (a): λ_k

Solucionar o problema :

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x_k + \lambda \cdot d_k) \\ \text{S.a} & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \end{cases}$$

$$\text{onde } \lambda_{\max} = \begin{cases} \min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{-x_{jk}}{d_{jk}} : d_{jk} < 0 \right\} & \text{se } d_k < 0 \\ \text{infinito} & \text{se } d_k \geq 0 \end{cases}$$

4. Seja λ_k a solução ótima do passo 3, calcula-se a nova posição ($P = P_0 + a \cdot d$)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot d_k \quad (2.4.15)$$

Repetem-se os procedimentos 2, 3 e 4 para $k=k+1$ até localizar o ponto de mínimo.

Como se pode observar, o método do Gradiente Reduzido possui uma otimização como parte da solução do problema, para equacionar esta otimização. Tanto o método do Gradiente como o método de Newton podem ser usados para solucionar o passo 3.

(BAZARAA *et al.*, 1993)

2.4.4 Método do Gradiente Projetado

O método do Gradiente Projetado é adequado para problemas de otimização restrita. O método do Gradiente Projetado equaciona problemas na forma:

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x) \\ \text{S.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Assume-se que os m componentes de A são linearmente independentes e todo ponto extremo de uma região factível tem m componentes estritamente positivos.

O algoritmo do método do Gradiente Projetado pode ser resumido da seguinte forma:

Suponha que A e b possam ser decompostos em (A_1, A_2) e (b_1, b_2) tais que $A_1 x_1 = b_1$ e $A_2 x_2 < b_2$.

1. Define-se um *ponto inicial* (P_0):

x_0 que satisfaça $Ax \leq b$ e $x \geq 0$

2. Define-se a *direção de busca* (d) ;

Se $A_1 = \{\}$ pare. Se $\nabla f(x_k) = 0$, seja $d_k = -\nabla f(x_k)$ e proceda para o passo 3.

Senão faça $M = A_1$ e calcule :

$$P = I - M^t (MM^t)^{-1} M \text{ e } d_k = -P \nabla f(x_k). \quad (2.4.17)$$

Se $d_k \neq 0$, proceda para o passo 3

Se $d_k = 0$, calcule:

$$w = - (MM^t)^{-1} M \nabla f(x_k) \quad (2.4.18)$$

Se $w \geq 0$ pare x_k é um ponto de Khun-Tucker,
ponto de ótimo portanto.

Seleciona-se o menor componente negativo de w , seja w_j . Recalcule A_1 , deletando a linha j correspondente em A_1 e repita o passo 2

3. Define-se um *passo de busca* (a): λ_k

Solucionar o problema :

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x_k + \lambda \cdot d_k) \\ \text{S.a} & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \end{cases}$$

$$\lambda_{\max} = \min\{q_i / p_i\} \text{ onde } q = b_2 - A_2 x_k \text{ e } p = A_2 d_k$$

4. Seja λ_k a solução ótima do passo 3, calcula-se a nova posição ($P = P_0 + a \cdot d$)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot d_k \quad (2.4.19)$$

Repetem-se os procedimentos 2, 3 e 4 para $k=k+1$ até localizar o ponto de mínimo.

O método do Gradiente Projetado também possui uma otimização como parte da solução do problema, em que o método de Newton, o método do Gradiente e outros podem ser usados para solucionar o passo 3. (BAZARAA et al.,1993)

2.5 Projeto de Planta e Investimento Fixo

No projeto de plantas em batelada, a seleção ótima dos equipamentos reduz o capital inicial do investimento. Esta seleção é dificultada pelas inter-relações entre as diversas peças do equipamento. Considere o exemplo de um reator em batelada com bombas de alimentação e descarga, para uma dada capacidade de produção, necessita-se de um reator maior, quando bombas pequenas são especificadas.

O tamanho do reator reduz quando especificamos bombas maiores. Obviamente, o balanço das dimensões é necessário para obter a solução adequada e um custo mínimo de equipamentos.

O maior objetivo no projeto de plantas de processamento é atingir uma capacidade de produção mensal ou anual especificada com um mínimo de capital investido. Para um máximo aproveitamento, o material de construção e os custos operacionais devem ser minimizados.

LOONKAR & ROBINSON (1970) descrevem um procedimento para cálculo das dimensões de peças interdependentes de equipamentos, reduzindo o investimento fixo em uma planta de processamento em batelada. Leis exponenciais de custo (BAUMAN, 1964) são apresentadas para batelada e unidades semi-contínuas e combinadas para formar uma função geral objetiva. Cálculo ordinário é aplicado para estabelecer as necessárias condições para as dimensões ótimas dos equipamentos. Estas condições levam a um conjunto de equações algébricas unidimensionais, solucionáveis por simples técnicas de cálculo iterativo.

SPARROW *et al.* (1975) propõe um procedimento para o problema levantado por LOONKAR & ROBINSON (1970), desta vez tomando em conta o tempo necessário para desenvolver o processo em batelada, e estabelecem uma nomenclatura adequada. A fim de solucionar a otimização, SPARROW *et al.* (1975) definem o problema como uma PNL e a equacionam pelo método de busca e limite. GROSSMANN & SARGENT (1979) em seguida reformulam o problema proposto por SPARROW *et al.* (1975) agora como um problema de MINLP.

2.5.1 LOONKAR & ROBINSON (1970)

A logística de uma planta em batelada pode ser complexa, podendo incluir ciclos enlaçados, uso repetido de um equipamento individual em um mesmo ciclo e unidades em paralelo em certas seções da planta. Há também as linhas "multi-uso", nas quais diversos produtos são produzidos usando os mesmos equipamentos. LOONKAR & ROBINSON (1970) consideram somente uma planta em batelada para um único

produto. Cada planta em batelada pode ser entendida como uma série de cadeias semi-contínuas funcionando em seqüência.

Considerando-se uma planta, utilizada para produzir um determinado produto i , tal planta tem Z equipamentos em batelada e P equipamentos semi-contínuos. O tempo total do ciclo é T , calculado segundo a soma dos tempos de residência de equipamentos em batelada e o tempo necessário à execução das diversas cadeias. Se há R cadeias semi-contínuas e Z bateladas, o tempo total será:

$$T = \sum_{x=1}^Z t_x + \sum_{y=1}^R \theta_y \quad (2.5.1)$$

A capacidade de produção da planta está também relacionada com o volume de produto por batelada e o tempo total da batelada.

$$\bar{W} = V/T \quad (2.5.2)$$

Segue-se que uma planta de capacidade de produção conhecida $\bar{W}$ e tempos individuais de batelada (todos t_x e θ_y), está baseado no volume atualmente suportado nos vários estágios de processo. O volume atualmente suportado nos vários estágios de processo é proporcional ao volume total de produto na batelada de processo, V ; a proporcionalidade é constante e dada pela formulação do produto e propriedades físicas de fluido do produto.

A figura 3 mostra uma cadeia semi-contínua. Há 3 unidades em bateladas, 5 semi-contínuas e 3 cadeias. ($Z= 3$, $P= 5$, $R= 3$).

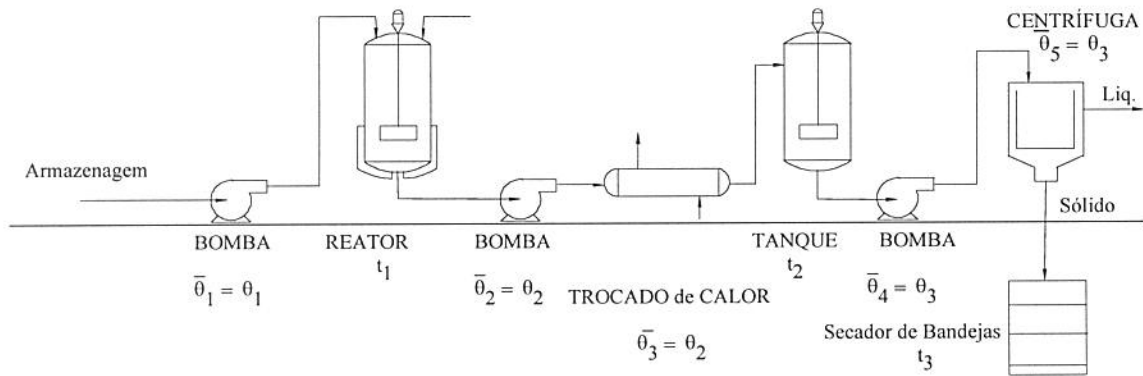


Figura 3 : Problema exemplo (fonte: LOONKAR & ROBINSON, 1970)

Expressão Geral dos Custos

Expressões para o custo de instalação de cada peça de equipamento são necessários para a minimização do custo dos equipamentos da planta. Tais expressões são prontamente obtidas segundo regras exponenciais para projeção de custos. As expressões de custo podem ser classificadas de duas formas:

Equipamento em Batelada

$$C_x = a_x \cdot V^{\alpha_x} \quad (2.5.3)$$

Equipamentos Semi-Contínuos -

$$C_k = b_k \cdot \left(\frac{V}{\bar{\theta}_k} \right)^{\beta_k} \quad (2.5.4)$$

Aqui $\bar{\theta}_k$ é o tempo envolvido com k unidades semi-contínuas. Os P $\bar{\theta}_k$ s não são independentes, uma vez que há somente R cadeias semi-contínuas ($R \leq P$) com R $\bar{\theta}_y$ s independentes, isto é:

$$\bar{\theta}_k = \bar{\theta}_k(\theta_y) \quad (2.5.5)$$

Por exemplo na figura 3 temos :

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2$$

$$\bar{\theta}_3 = \theta_2$$

$$\bar{\theta}_4 = \theta_3$$

$$\bar{\theta}_5 = \theta_3$$

Proposição do Problema

Dado um plano especificando a seqüência de operações (incluídos os tempos de residência, etc.) para uma planta em batelada, e um projeto preliminar dos equipamentos de processo, encontrar as dimensões de equipamentos que minimizem o custo de instalação da planta. A planta deve produzir uma quantidade específica de produto em um período de tempo (m^3/ano).

O custo total dos equipamentos para uma planta em batelada é dada por :

$$I = \sum_{x=1}^Z a_x \cdot V^{\alpha_x} + \sum_{k=1}^P b_k \cdot \left(V / \theta_k \right)^{\beta_k} \quad (2.5.6)$$

Uma vez que a produção é fixa a seguinte igualdade deve ser satisfeita

$$W = V/T = V / \left(\sum_{x=1}^Z t_x + \sum_{y=1}^R \theta_y \right) \quad (2.5.7)$$

O problema então será minimizar I pela escolha de R $\bar{\theta}_y$ s que satisfaçam a equação 2.5.7 (o tempo de residência t_x do processo em batelada é fixado segundo o plano de processo e em geral não pode ser ajustado pelo engenheiro de projetos.)

Análise

O problema de minimização com múltiplas variáveis é resolvido facilmente através do Cálculo diferencial. O problema também se encaixa em problemas solucionáveis por programação não linear.

Resolvendo a equação 2.5.7 para V e substituindo na equação 2.5.6 temos:

$$I = \sum_{x=1}^Z a_x \cdot W^{\alpha_x} \cdot T^{\alpha_x} + \sum_{k=1}^P b_k \cdot W^{\beta_k} \cdot \left(\frac{T}{\theta_k} \right)^{\beta_k} \quad (2.5.8)$$

Fazendo:

$$\overline{a_x} = a_x \cdot W^{\alpha_x} \text{ e } \quad \overline{b_k} = b_k \cdot W^{\beta_k}$$

Então:

$$I = \sum_{x=1}^Z \overline{a_x} \cdot T^{\alpha_x} + \sum_{k=1}^P \overline{b_k} \cdot \left(\frac{T}{\theta_k} \right)^{\beta_k} \quad (2.5.9)$$

Estabelecendo as condições para a minimização em I :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_y} = 0, \quad y = 1, 2, \dots, R \quad (2.5.10)$$

Resultando:

$$\sum_{k=1}^P \overline{b_k} \cdot T^{\beta_k} \cdot (\overline{\theta_k})^{-\beta_k-1} \cdot \frac{\partial \overline{\theta_k}}{\partial \theta_y} = \sum_{i=1}^M \overline{a_x} \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} + \sum_{k=1}^P \overline{b_k} \cdot T^{\beta_k-1} \cdot (\overline{\theta_k})^{-\beta_k} \quad (2.5.11)$$

$$y = 1, 2, \dots, R$$

Note que:

$$\frac{\partial \overline{\theta_k}}{\partial \theta_y} = \begin{cases} 1, & \overline{\theta_k} = \theta_y \\ 0, & \overline{\theta_k} \neq \theta_y \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Sendo:

$$A_y = \begin{cases} \sum_{k=1}^P \bar{b}_k \cdot T^{\beta_k} \cdot (\bar{\theta}_k)^{-\beta_k-1} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial \theta_y}, & y = 1, 2, \dots, R \\ \sum_{k=1}^P \bar{b}_k \cdot T^{\beta_k} \cdot (\theta_y)^{-\beta_k-1} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial \theta_y}, & y = 1, 2, \dots, R \end{cases} \quad (2.5.13)$$

A equação 2.5.11 pode ser rescrita como:

$$A_y = \sum_{x=1}^Z \bar{a}_x \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} + \sum_{y=1}^R A_y \cdot T^{-1} \cdot \theta_y, \quad y = 1, 2, \dots, R \quad (2.5.14)$$

Uma vez que a parte direita da equação 2.5.15 é independente de y :

$$A_y = A_1 = A_2 = \dots = A \text{ (uma constante)}$$

A equação 2.5.15 pode ser rescrita como :

$$A_y = \sum_{x=1}^Z \bar{a}_x \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} + (A/T) \sum_{y=1}^R \theta_y, \quad (2.5.15)$$

ou :

$$A_y = \left(\sum_{x=1}^Z \bar{a}_x \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} \right) / \left((1-1/T) \sum_{y=1}^R \theta_y \right) \quad (2.5.16)$$

uma vez que:

$$T - \sum_{l=1}^R \theta_l = \sum_{x=1}^Z t_x$$

então:

$$A = \sum_{x=1}^Z \bar{a}_x \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} / \sum_{x=1}^Z t_x \quad (2.5.17)$$

combinando as equação 2.5.13 e equação 2.5.17 :

$$\sum_{k=1}^P \bar{b}_k \cdot T^{\beta_k} \cdot (\theta_y)^{-\beta_k-1} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial \theta_y} = \sum_{x=1}^Z \bar{a}_x \cdot \alpha_x \cdot T^{\alpha_x-1} / \sum_{x=1}^Z t_x, \quad y = 1, 2, \dots, R \quad (2.5.18)$$

A equação 2.5.18 representa o conjunto de equações quando a função objetivo, I , está em seu mínimo.

Solução

Devido à não linearidade da equação 2.5.18, uma solução explícita para o valor ótimo de θ_1 não pode ser obtida. Entretanto, a equação 2.5.18 pode ser prontamente solucionada numericamente (todas as equações são consideradas unidimensionais). Um algoritmo para tanto é descrito a seguir:

PASSO 1 - Supor T (T^0) e calcular A de acordo com a equação 2.5.17.

PASSO 2 - Calcular os $R \theta_y$ pela equação 2.5.18.

PASSO 3 - Somar os θ_y e t_x para obter um novo T (T^1) e comparar com a suposição original (T^0).

Se $|T^1 - T^0| \geq \epsilon$ onde ϵ é o critério de convergência, T^0 é corrigido por qualquer procedimento adequado e os passos 1 a 3 são repetidos. Se $|T^1 - T^0| < \epsilon$, o problema está solucionado. Uma vez que a parte esquerda da equação 2.5.18 usualmente terá mais de um termo que possui θ_1 , um procedimento numérico se faz necessário para o segundo passo acima. Por exemplo, a expressão para θ_2 da figura 3 é :

$$b_2 \cdot T^{\beta_2} \cdot \theta_2^{-\beta_2-1} + b_3 \cdot T^{\beta_3} \cdot \theta_3^{-\beta_3-1} = A \quad (2.5.19)$$

Um procedimento eficiente para corrigir ambos T e o segundo passo acima é usar um polinômio de segundo grau Lagrangiano para ajustar as iterações nas três últimas funções. A raiz do polinômio depois é utilizada como uma próxima tentativa. A convergência em geral é rápida.

Problema Ilustrativo

Considere a seqüência em batelada apresentada na figura 3. Assuma que a produção requerida é 50m³/hora e as expressões do custo na região de interesse são :

$$C_{\text{reator}} = 592 (V)^{0.65}$$

$$C_{\text{tanque de alimentação}} = 528 (V)^{0.39}$$

$$C_{\text{secador}} = 1200 (V)^{0.52}$$

$$C_{\text{bomba1}} = 370 (V/\theta_1)^{0.22}$$

$$C_{\text{bomba2}} = 250 (V/\theta_2)^{0.40}$$

$$C_{\text{trocador}} = 210 (V/\theta_2)^{0.62}$$

$$C_{\text{bomba3}} = 250 (V/\theta_3)^{0.40}$$

$$C_{\text{centrífuga}} = 200 (V/\theta_3)^{0.85}$$

Os tempos são dados na tabela 1, junto às tentativas iniciais de θ_y e os valores ótimos calculados usando o conjunto de equações apresentado na equação 2.5.18. Também estão os tempos totais de batelada, volumes e custo total. Como pode ser visto, a economia líquida nos custos do equipamento é \$46.000, ou aproximadamente 1/3 do inicialmente estimado.

Uma vez que não se pode adquirir bombas, autoclaves, etc., em dimensões fracionárias, o ótimo não é sempre possível. Entretanto, o valor ótimo serve de guia e as dimensões próximas são as escolhidas. O custo total da unidade padrão estará próximo ao mínimo calculado e a economia ainda será substancial.

Tabela 1 : Problema ilustrativo de LOONKAR & ROBINSON (1970)

	Tentativa inicial [h]	Valor ótimo calculado [h]
t_1	3	3
t_2	1	1
t_3	6	6
θ_1	0,25	0,10
θ_2	0,50	1,40
θ_3	0,50	3,29
T Tempo total	11,25	14,80
V Volume/batelada	563 m ³	740 m ³
I Custo Total	\$162000	\$116000

2.5.2 SPARROW *et al.* (1975)

O projeto da planta é fundamental para o cálculo de balanços de massa e energia, dimensionamento de equipamentos e custos, e análise econômica de tal planta. Um passo chave nos cálculos é o dimensionamento dos equipamentos. A abordagem tradicional é examinar um pequeno conjunto de dimensões, determinado com base na experiência, de um largo espectro de possibilidades. O tempo consumido, envolvido neste método, e a necessidade de examinar um espectro maior de possibilidades estimulou o trabalho descrito neste artigo e o desenvolvimento de métodos aceitáveis para solução computacional destes problemas.

Tipos de Processamentos em Batelada Multi-produtos

Processos em batelada são normalmente usados para manufaturar produtos de alto valor ou baixo volume de produção e/ou que requeiram procedimentos complicados de

produção. No caso de produtos de baixo volume é normalmente econômico produzir dois ou mais produtos em um mesmo grupo de equipamentos que podem ser projetados para ser tanto uma planta "multi-produto" como uma planta "multifuncional".

Em uma planta multi-produto todos os produtos seguem essencialmente o mesmo caminho durante o processo e usam os mesmos equipamentos. Normalmente, em tais plantas, somente é processado um produto de cada vez. Uma gama de produtos é feita em corridas ou "campanhas" de cada produto por turno.

Na planta "multifuncional" o trabalho é realizado em equipamentos, conforme eles vão sendo liberados ao completar trabalhos anteriormente iniciados. Também, não há um caminho comum de movimentação dos produtos. Na verdade, sucessivas bateladas de um mesmo produto podem tomar diferentes rotas no processo. Nestas plantas, mais de um produto pode ser fabricado simultaneamente. O conjunto de produtos para uma planta multifuncional normalmente não é fixo, novos produtos são adicionados, produtos mais antigos são descontinuados ou ainda transferidos para uma nova planta.

Como não há uma divisão rígida entre as duas categorias, é possível classificar uma planta de uma forma ou de outra. Este artigo concentra-se na solução de plantas multi-produto.

Características de Processos em batelada.

Um processo em batelada é ocorre em dois tipos de equipamentos, como definidos por LOONKAR & ROBINSON (1970) : equipamentos em batelada - definidos por seu volume e não pela taxa de produção ou vazão; equipamentos semi-contínuos - definidos pela taxa de produção ou vazão.

Um ou mais itens idênticos em batelada podem operar em paralelo formando um estágio em batelada. Os vários estágios em batelada, em um processo, estão ligados por um equipamento semi-contínuo.

Um equipamento em batelada normalmente passa pelo ciclo de enchimento, processamento, esvaziamento, limpeza e às vezes, um tempo de espera pelo próximo enchimento. O tempo para passar de um ciclo para outro, excluído o tempo de espera é o tempo de ciclo da unidade T_{ij} para um produto i em um estágio j . Se, para o estágio j , há Z_j unidades em paralelo e cada uma é carregada em turnos por bateladas do estágio precedente, o tempo de ciclo do estágio é dado por:

$$\frac{T_{ij}}{Z_j} \quad (2.5.20)$$

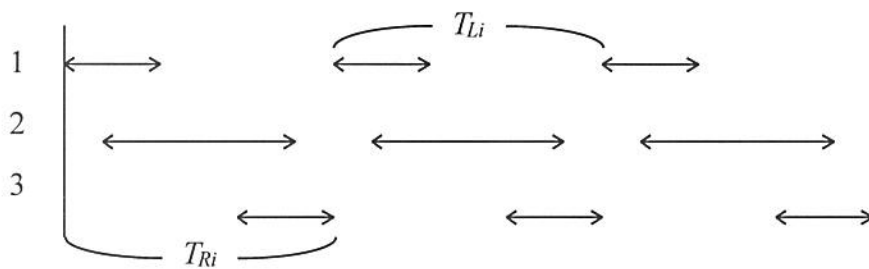
Chamamos o tempo necessário para uma batelada ser totalmente processada de tempo de residência do processo T_{Ri} para o produto i .

O Processo em batelada pode ser operado por uma destas Duas formas (figura 4). Operando sem enlaçamento somente uma batelada em cada instante e T_{Li} é o tempo limite do ciclo para o produto i , (intervalo de tempo para a produção de sucessivas bateladas). T_{Li} é então, o tempo necessário para uma batelada de material ser totalmente processada, assim:

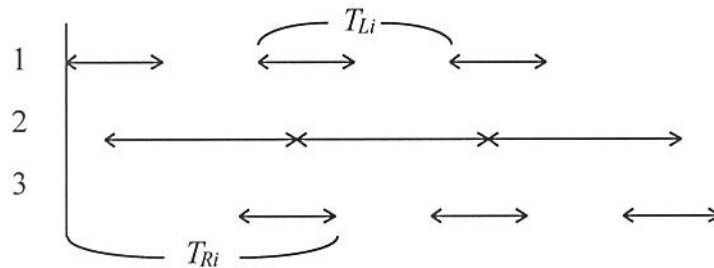
$$T_{Li} = T_{Ri} \quad (2.5.21)$$

Havendo enlaçamento, o tempo limite do ciclo para um produto i é limitado ao estágio em batelada que possui o ciclo mais longo, assim :

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (2.5.22)$$



Operação sem enlance



Operação com enlance

Figura 4 : Fluxograma de operação de uma planta em batelada.

O Problema de Projeto

O engenheiro deve especificar um projeto de planta que seja capaz de atender às necessidades produtivas e ao mesmo tempo econômicas.

Buscando equacionar o projeto, diversos problemas podem surgir :

1- Os diversos tempos de ciclo e fatores de tamanho devem ser combinados para formar uma única planta.

2- Se o processo operar com ciclos enlaçados, então o número de estágios em paralelo afeta diretamente o conjunto da planta e torna-se a chave do projeto da planta

3- Os equipamentos são adquiridos em tamanhos padrão

4- O tempo de cada ciclo é diretamente afetado pelos volume dos equipamentos semi-contínuos.

Ainda, deve-se lembrar que há sempre um grande número de alternativas e estruturas de processo que devem ser considerados. Isto, porque, o projeto da planta deve prever futuros desenvolvimentos. Também, a necessidade de cada produto não é conhecida com precisão e suas necessidades não são exatamente o ótimo.

O critério de mérito normalmente usado em estudos determinísticos de projetos é a soma do capital investido na instalação e faturamento de cada produto. são critérios mais freqüentes que a taxa de retorno. Em indústrias químicas é comum que a operação dos itens individuais dos

equipamentos seja fixa, ou ao menos, não à vontade do engenheiro de projetos. O capital investido na planta é usada como função objetivo do problema. Esta simplificação não é válida se houver uma modificação na matéria prima ou na utilização dos equipamentos ou alteração na dimensão dos equipamentos. Assume-se que nenhuma destas mudanças será significativa.

SPARROW *et al.* (1975) concentram a atenção na escolha do equipamento em batelada que normalmente representa 80% do custo do equipamento. Itens semi-contínuos, como bombas, são normalmente escolhidos em função da segurança e com base na experiência anterior.

Uma formulação útil para a otimização do capital seria a função objetivo a seguir:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^M Z_j \cdot a_j \cdot (V_j)^{\alpha_j} \quad (2.5.23)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i \cdot T_{Li}}{B_i} \leq H \quad (2.5.24)$$

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (2.5.22)$$

$$B_i = \min_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{V_j}{S_{ij}} \right\} \quad (2.5.25)$$

onde Q_i = capacidade produtiva do produto i por ano, H = tempo total disponível para a produção por ano, V_j = tamanho do estágio j , a_j , α_j = coeficiente de custo do equipamento no estágio j , S_{ij} = fator de tamanho do produto i no estágio j e B_i = tamanho da batelada de produto i .

O problema pode ser solucionado, fixando-se Z_j e variando V_j continuamente. A otimização pode ser conduzida usando os diversos algoritmos existentes.

SPARROW *et al.* (1975), afirma que em um número considerável de problemas a convergência é desacelerada pela restrição do tempo disponível para a produção. Isto junto à necessidade de se utilizar dimensões padrão levou à busca de formas alternativas de solução.

O cálculo das dimensões do equipamento para um único produto é direta. Quando o tempo limite do ciclo e o tempo disponível para produção são conhecidos, a dimensão da batelada pode ser calculada diretamente da equação 2.5.24. Cada estágio em batelada é dimensionado para acomodar um tamanho de batelada, então a equação 2.5.25 pode ser usada sem a minimização como uma igualdade para cada estágio, a fim de determinar as dimensões dos estágios.

Maiores graus de liberdade estão presentes em uma planta multi-produto. O projetista pode especificar por exemplo, o tamanho relativo das bateladas dos produtos ou as dimensões relativas dos diferentes estágios. Os valores das variáveis que satisfazem as restrições 2.5.24, 2.5.22 e 2.5.25 devem ser encontradas a fim de obter as soluções factíveis do problema para os quais a função objetivo 2.5.23 será calculada.

Os dois métodos de solução para este problema sobrepõem estas dificuldades na busca direta, mencionada anteriormente. Em uma abordagem heurística os tamanhos relativos dos equipamentos são especificados assumindo-se valores de S_{Hj} para um produto hipotético que satisfaça as restrições. Para cada produto, a razão do tamanho da batelada para o tamanho de um produto hipotético é determinada. Uma solução factível para o tamanho da batelada de um produto hipotético que satisfaça as restrições é facilmente obtido. Das dimensões deste equipamento, os estágios individuais podem ser calculados

diretamente como em uma planta para um único produto. Um método proposto é selecionar os fatores de tamanho S_{Hj} o que é apresentado para dar uma bons projetos sem a necessidade de cálculos repetidos.

No método de busca e limite, a dimensão absoluta do equipamento em batelada é especificada. Cada solução é checada, se é factível e as dimensões são consideradas alternadamente, de forma ordenada, para garantir que uma solução ótima seja encontrada.

Solução Heurística

Este método pode ser dividido em três partes:

- 1- Cálculo da dimensões exatas dos equipamentos a partir de um dado Z_j
- 2- Conversão das dimensões em dimensões padrão
- 3- Escolha de um novo Z_j

O cálculo das dimensões exatas V_j é baseado na idéia de definir um novo produto hipotético. As necessidades de produção e características de cada produto são convertidas para os dados equivalentes do produto hipotético e o equipamento dimensionado para atender a produção deste produto hipotético.

No início do procedimento, assume-se que valores de S_{ij} , Z_j , T_{Li} , Q_i e H estão disponíveis. Ainda, um conjunto de valores necessários para o cálculo do fator S_{Hj} necessário em cada estágio para o produto hipotético. Estes valores vão, de fato, especificar as dimensões relativas do equipamento em cada estágio.

O fator de conversão de tamanho F_i é calculado para converter o produto i para o produto hipotético. O tamanho da batelada do produto i é limitada ao estágio em que a necessidade do produto i em relação ao produto hipotético é maior.

$$F_i = \max_{j=1,\dots,M} \left\{ \frac{S_{ij}}{S_{Hj}} \right\} \quad (2.5.26)$$

F_i é a razão entre a quantidade de produto hipotético e produto i que pode ser fabricado em uma batelada.

Se em qualquer estágio, o tamanho necessário da batelada para cada um dos produtos atuais é, de fato, menor que o do produto hipotético, então o fator de tamanho postulado para o produto hipotético pode ser reduzido até as restrições do produto real.

$$S_{Hj} = \max_{i=1,\dots,N} \left\{ \frac{S_{ij}}{F_i} \right\} \quad j = 1, \dots, M \quad (2.5.27)$$

Dadas as dimensões do equipamento escolhido para produzir B_H (kg/batelada) de um produto hipotético, então a dimensão da batelada do produto i é :

$$B_i = \frac{B_H}{F_i} \quad (2.5.28)$$

O número de bateladas por ano necessárias para produzir Q_i (kg) de i é :

$$n = \frac{Q_i \cdot F_i}{B_H} \quad (2.5.29)$$

O tempo necessário para produzir i em um ano será:

$$T_i = \frac{T_{Li} \cdot Q_i \cdot F_i}{B_H} \quad (2.5.30)$$

O tempo total:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{T_{Li} \cdot Q_i \cdot F_i}{B_H} \quad (2.5.31)$$

O tempo disponível é H logo:

$$B_H \geq \frac{\sum_{i=1}^N T_{Li} \cdot Q_i \cdot F_i}{H} \quad (2.5.32)$$

O tamanho do equipamento é dado por :

$$V_j = B_H \cdot S_{Hj} \quad j = 1, \dots, M \quad (2.5.33)$$

Se T_{Li} ou S_{ij} são funções de V_j então o procedimento básico pode ser repetido, até que a convergência seja obtida para V_j .

O problema permanece em como escolher valores de S_{Hj} que forneçam "bons" valores de V_j . Uma solução é usar um processo de otimização. No máximo, somente $M-1$ de S_{Hj} são independentes e o problema original com M , V_j e a restrição H fica reduzido à escolha de $M-1, S_{Hj}$. A essência do problema é escolher as corretas razões de V_j . A aproximação adotada foi calcular S_{Hj} a partir da somatória de S_{ij} . Uma variedade de soluções é possível envolvendo o custo do equipamento, tempo dos ciclos, e outros.

O seguinte esquema de balanço entre as necessidades produtivas tem sido eficiente :

$$S_{Hj} = \frac{\sum_{i=1}^N S_{ij} \cdot Q_i}{\sum_{i=1}^N Q_i} \quad j = 1, \dots, M \quad (2.5.34)$$

A conversão para as dimensões padrões é conduzida em dois estágios. Inicialmente, V_j é arredondado para cima, para o maior valor padrão. O custo do equipamento em cada estágio é então calculado, trabalhando com os estágios em ordem decrescente do seu custo. Calcula-se o efeito de se utilizar um equipamento de dimensões padrão menores. Se restrição 2.5.24 não é violada, então a dimensão é fixada como o menor tamanho e o procedimento segue. Se 2.5.24 é violada então o tamanho padrão imediatamente anterior é substituído, para então seguir o procedimento.

O seguinte algoritmo é usado para variar Z_j em uma tentativa de minimizar o custo dos equipamentos. Inicialmente todos os Z_j devem ser iguais a 1. Um conjunto factível de dimensões padrão dos equipamentos é calculado, usando as duas partes anteriores do método. Para cada estágio, Z_j é temporariamente acrescido de 1 e o valor de B_H é calculado usando a equação 2.5.22 e 2.5.33. O valor de Z_j para o estágio que produzir o menor valor de B_H é permanentemente acrescido de 1 e um conjunto factível de dimensões é novamente calculado. Então, Z_j é acrescido até que não haja melhoria em M iterações.

A solução é encontrada dentre as soluções que produzem o menor custo. O gráfico com o método completo esta presente na figura 5 . A tabela 2 é um exemplo que ilustra o método.

Tabela 2 :Exemplo ilustrativo de dimensionamento pelo método heurístico
 $N = 3$ $M = 4$ $H = 6000$ Dimensões padrão 2500, 4000, 6300, 10000, 16000 ℓ

	8,28	3,70	2,95	6,56	
S_{ij}	5,57	4,09	3,27	6,16	
	2,34	0,80	5,69	5,98	
	1,15	9,86	5,27	5,30	
T_{ij}	5,95	7,01	6,99	1,08	
	3,95	6,00	5,13	0,65	
a_j	400	400	400	400	
α_j	0,60	0,60	0,60	0,60	
Q_i	436000	234000	258000	-	
S_{Hj}	5,91	3,09	3,75	6,29	Equação 2.5.35
F_i	1,40	1,32	1,52	-	Equação 2.5.27
S_{Hj}	5,91	3,09	3,75	4,69	Equação 2.5.28
Z_j	1,00	1,00	1,00	1,00	
T_{Li}	9,86	7,01	6,00	-	Equação 2.5.22
B_H	1900	-	-	-	Equação 2.5.33
V_j	11234	5847	7122	8911	Equação 2.5.34
V_j padrão	10000	6300	10000	10000	

Custo do equipamento \$337000,00. Tempo necessário p/ produção 5972h

Ao finalizar o algoritmo (também a solução ótima)

n_j	1,00	2,00	1,00	1,00
V_j padrão	10000	4000	6300	6300

Custo do equipamento \$369000,00. Tempo necessário p/ produção 5993h

(SPARROW et al., 1975)

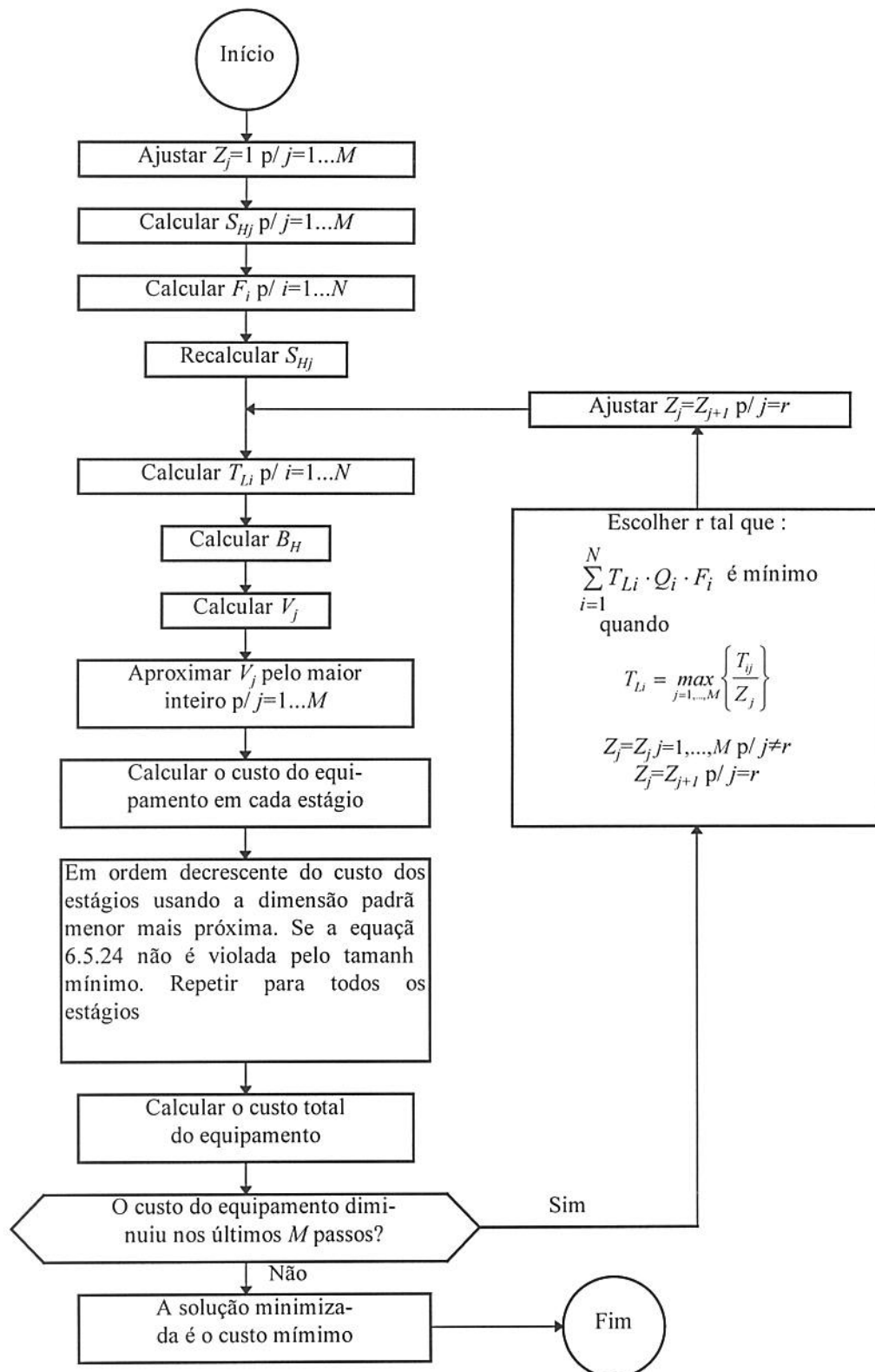


Figura 5 : Dimensionamento pelo método heurístico (SPARROW et al., 1975)

Solução de Busca e Limite

A técnica de otimização por busca e limite é, essencialmente uma procura inteligente do conjunto de soluções possíveis. O nome busca e limite deriva das duas operações básicas :

1- Busca : onde o conjunto de soluções é dividido em subconjuntos

2- Limite : onde um limite é calculado para a função objetivo em um dado subconjunto. Se, uma solução factível é conhecida e o limite calculado para outro subconjunto é melhor que o subconjunto da função objetivo para a solução factível, então, este subconjunto deve ser descartado.

O problema de dimensionamento do equipamento requer que em cada estágio o valor Z_j e V_j sejam selecionados. Se um limite superior puder ser ajustado para Z_j , então o número de dimensões padrão forma um conjunto finito para cada estágio. Assumindo 15 dimensões padrão e um limite superior 3 para Z_j então, há 45 possíveis estados para um estágio (assumindo que os itens em paralelo são estágios idênticos). Para M estágios então, há 45^M soluções possíveis. Este conjunto de soluções pode ser visto na árvore da figura 6. Cada nó de busca representa um subconjunto de possíveis soluções e é gerado a partir de um nó precedente, selecionado o estado de cada estágio. Cada nó, exceto os do estágio M terão 45 possíveis buscas partindo deste. A tabela 3 é uma amostra dos estados dos estágios.

Tabela 3 : Lista de exemplos dos estados por estágio

Estado	No. em paralelo	Volume [ℓ]	Custo [\$]	Economia [\$]
1	1	2500	44000	0
2	1	4000	58000	14000
3	1	6300	76000	32000
4	1	10000	100000	56000
5	2	2500	88000	44000
6	2	4000	116000	72000
7	2	6300	152000	108000
8	2	10000	200000	156000

(SPARROW *et al.*, 1975)

Cada operação de busca requer duas decisões :

1- Qual nó deve ser considerado na busca? Buscar a partir do nó com o menor limite (eficiente em alguns métodos computacionais) ou buscar a partir do último nó gerado (limita o número de nós a ser preservado em M).

2- Do nó selecionado, qual estado no próximo estágio deve ser considerado? Considerar os estados em ordem de custo, ou considerar os estados na ordem em que são gerados como na tabela 3

Qualquer nó ou subconjunto, que violar a restrição de tempo 2.5.24 deve ser descartada. Isto deve, também, ser conduzido no início de cada estágio separadamente, uma vez que isto previne que cada um dos estados não factíveis, sejam estudados repetidamente.

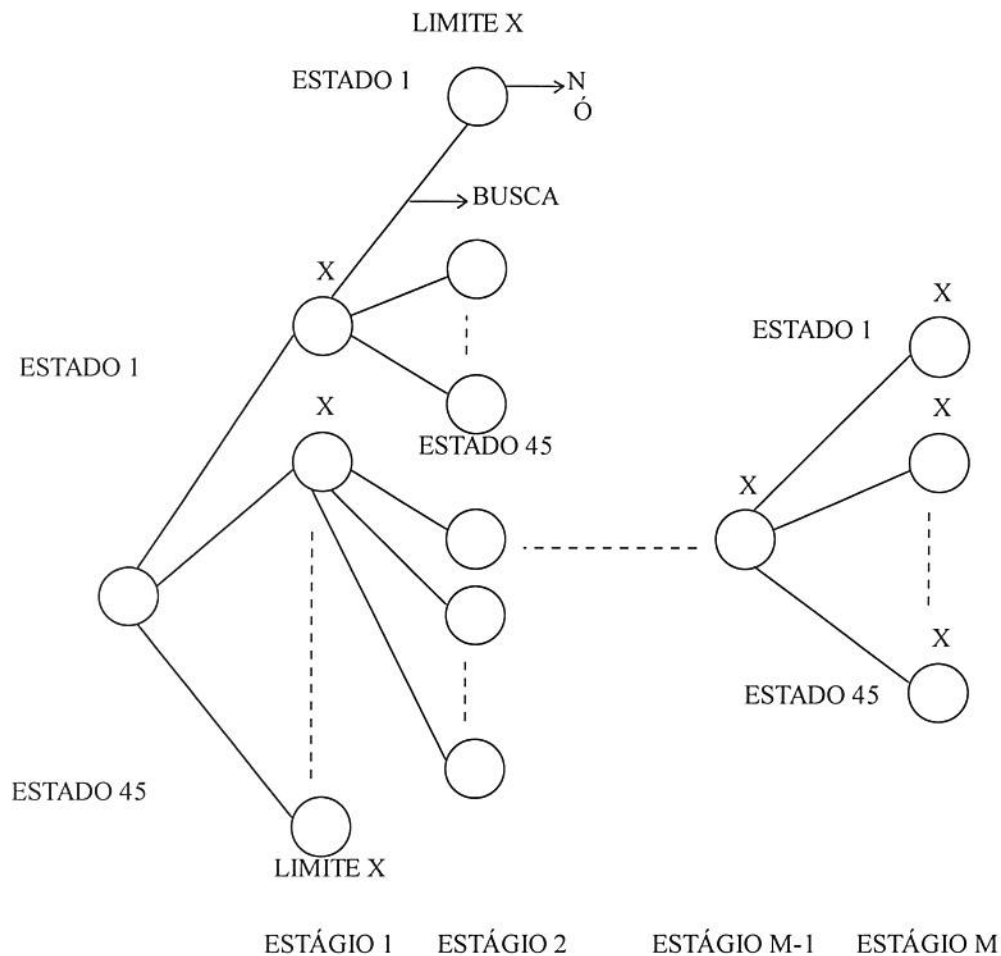


Figura 6 : Estrutura das possíveis soluções para o dimensionamento do equipamento. (SPARROW *et al.*, 1975)

Em lugar de usar o custo normal dos equipamentos para calcular o limite de um subconjunto de soluções, um limite melhorado pode ser calculado usando os custos menores. Os custos menores são obtidos subtraindo-se o custo mínimo de cada estágio do custo de cada estado em um estágio (Tabela 3). O custo mínimo para cada estágio é a somatória de todos os estágios e forma um limite inferior da função objetivo. O limite, em um subconjunto de soluções, é formado adicionando-se ao limite inferior o custo reduzido de cada

estado que foi fixado para o subconjunto. Se, o limite assim formado excede a melhor solução para o problema, o nó é descartado.

Várias estratégias de busca foram implementadas e testadas em uma variedade de problemas, onde T_{ij} , S_{ij} , a_j , α_j e Q_i foram aleatoriamente gerados. O algoritmo que ocupou o menor tempo médio computacional para um M variando de 3 a 12 foi :

1- Sempre buscar à partir do último nó gerado. Como M é incrementado esta estratégia exhibe uma melhora crescente sobre a busca a partir do nó de menor limite.

2- Considerar estados nos estágios em ordem crescente de custo. Se, esta política é adotada em um dado estado nem o limite de tempo do ciclo nem, o tamanho da batelada (equações 2.5.22 e 2.5.25), então outros estados daquele nó não tem de ser considerados, uma vez que eles irão somente aumentar o limite no custo e não melhora nem B_i nem T_{Li} . Esta estratégia efetivamente reduz o tempo computacional comparado ao usado na tabela 3.

3- Considerando estágios em ordem decrescente de custo. Isto pode ser feito usando-se o método da solução heurística, para estimar o custo do equipamento em cada estágio. Os estágios são considerados, não na ordem em que eles aparecem no processo, mas, na ordem decrescente do custo dos equipamentos. Isto aumenta consideravelmente a eficiência do limite no custo e, em média, requer metade do tempo computacional considerando os estágios na ordem natural.

4- Usar um limite inferior de custo, provido pelo método da solução heurística, reduz o tempo computacional em até 30% se comparada ao cálculo sem o limite inicial.

O algoritmo completo está descrito na figura 7.

Comparação entre o método heurístico e o método
de busca e limite

Assumiu-se que seis tipos diferentes de, equipamento estão disponíveis (tabela 4). Para cada estágio em batelada o tipo de equipamento foi aleatoriamente selecionado, com base na probabilidade de sua ocorrência. Valores de S_{ij} e T_{ij} , foram amostrados da distribuição uniforme nos níveis apresentados na tabela 4. O Q_i foi amostrado entre 100000 e 500000kg/ano. Para cada tipo de equipamento 15 tamanhos padrão estavam disponíveis em um fator multiplicador 5:10. Estes tamanhos padrão foram selecionados para que o tamanho médio estivesse no meio da faixa de tamanhos disponíveis.

Uma variedade de tamanhos de plantas é apresentado na tabela 5 (número máximo de estágios em paralelo = 3). Cada linha na tabela 5 é feita a partir de dados tomados de 12 problemas diferentes. A percentagem de economia é calculada como:

$$\text{Economia\%} = \frac{(\text{custo solução heurística} - \text{custo da solução ótima})}{\text{custo da solução ótima}}$$

Para muitos dos problemas gerados, ambos os métodos resultaram na mesma solução. O método heurístico exigiu um tempo computacional consideravelmente menor.

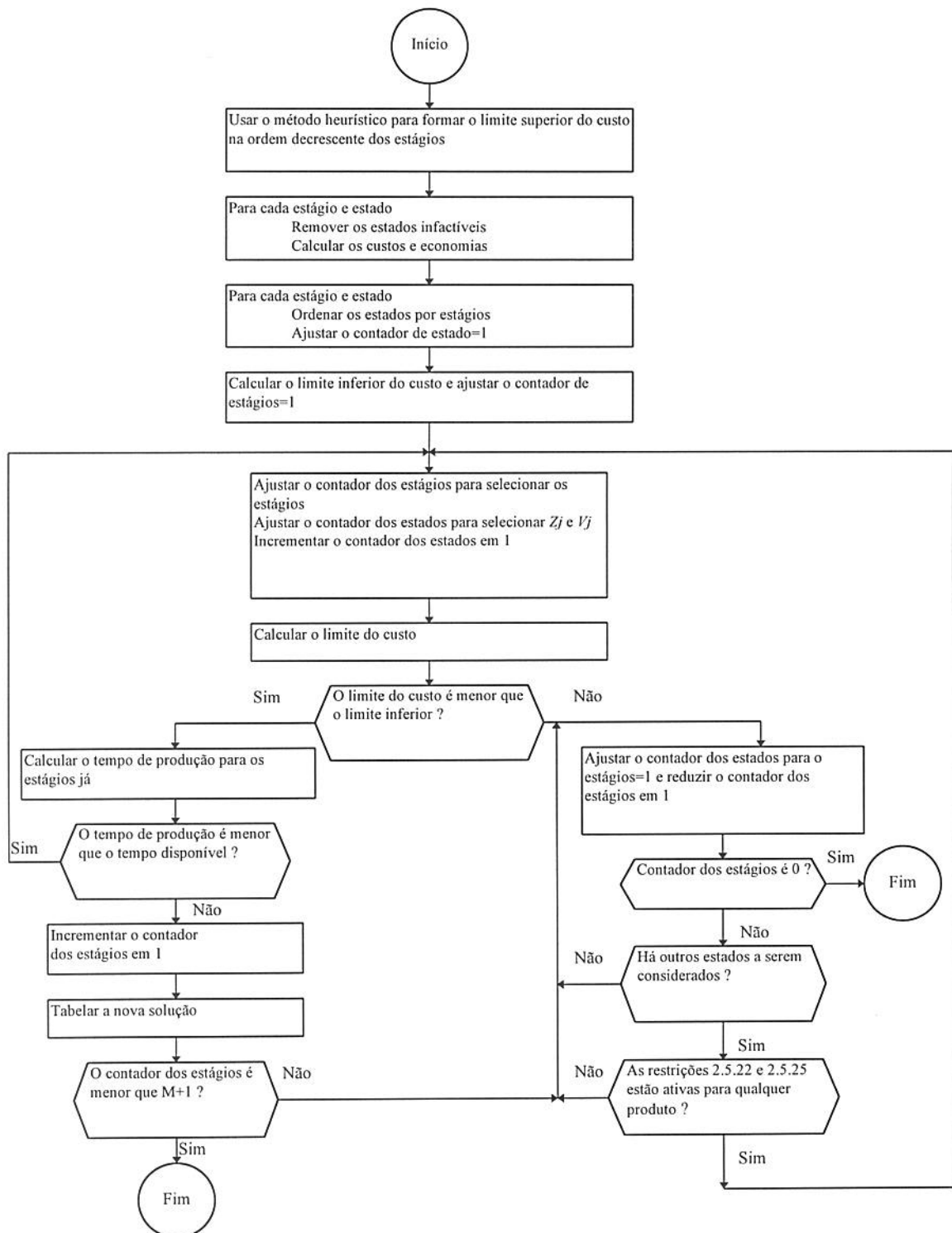


Figura 7 : Algoritmo do método de busca e limite.

Tabela 4 : Lista dos tipos de equipamentos

Tipo	Unidade	Coeficiente de custo		Probabilidade de ocorrência
		a	α	
Misturador	ℓ	400	0.60	0.55
Prensa	m^2	2500	0.85	0.10
Filtro	m^2	60000	0.50	0.10
Secador 1	m^3	110000	0.50	0.10
Secador 2	m^3	60000	0.50	0.10
Centrifuga	m^3	230000	0.80	0.05

Tipo	Faixa de S_{ij}	Faixa de T_{ij}	Volume
	$[\ell/kg]$	$[h/batelada]$	Padrão
Misturador	0-10	0-10	3-40000
Prensa	0-0,033	0-10	0,21-133
Filtro	0-0,002	0-10	0,0126-8
Secador 1	0-0,001	0-10	0,0063-4
Secador 2	0-0,001	0-10	0,0063-4
Centrífuga	0-0,001	0-10	0,0063-4

Tabela 5 : Comparação entre o método heurístico e o busca e limite

No. de produtos	No. de estágios	Economia %		Tempo do Método [s]			No. de problemas gerados
				Heurístico	Busca e Limite		
		Média	Máxima	Média	Média	Máxima	
4	3	0,87	10,38	0,08	0,32	0,39	12
4	6	0,98	2,99	0,32	1,90	4,81	12
4	9	2,38	12,61	0,88	15,31	59,45	12
4	12	0,43	2,87	1,85	81,1	229,32	9

(SPARROW *et al.*, 1975)

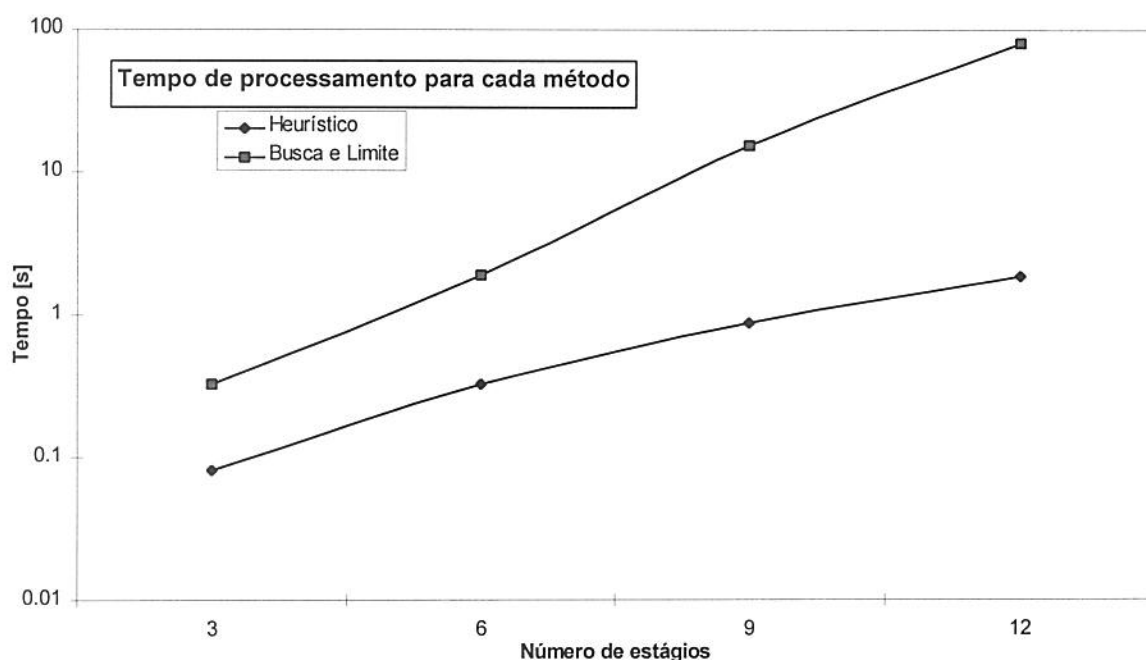


Figura 8 : Distribuição do tempo de processamento para cada método

Entretanto, usando somente o método heurístico a economia está em torno de 10%. Sem o método heurístico, para iniciar a busca e limite, o tempo de processamento foi consideravelmente maior.

Os tempos de processamento na Tabela 5 foram calculados para um CDC6400 (tempos para o busca e limite, incluído o tempo para gerar a solução heurística). A variação no tempo computacional é individual, para os problemas de dimensões similares é característica do método de busca e limite. A figura 8 mostra a média dos tempos computacionais plotados contra o número de estágio para cada método. A curva também é dada para a solução de busca e limite quando o máximo número de etapas em paralelo foi 2.

Discussão

Dois métodos de dimensionamento de plantas de processo equipamentos em batelada foram descritos.

O primeiro método permite uma solução factível obtida com poucos cálculos. Apesar da simplicidade, leva a soluções que, na média, tem um baixo desvio percentual da solução ótima. Considerando as incertezas do mercado e os dados técnicos para tais processos, a economia esperada é desprezível. Pode ser usada como base para analisar as alternativas e auxiliar nos cálculos

O segundo método é baseado na técnica de busca e limite e permite a obtenção de uma solução ótima. A experiência indica que o tempo computacional para até 12 estágios, não é excessiva, entretanto uma variabilidade nos tempos deve ser observada. Este método pode ser usado para gerar uma variedade de soluções factíveis em que o custo repousa em uma faixa fixa de ótimo (o que pode ser útil considerando a vantagem dos diferentes "lay-outs" de plantas). Outra vantagem do método de busca e limite é a fácil inclusão de restrições adicionais. Estas restrições adicionais podem, ainda, acelerar a solução. O método de busca e limite pode ainda ser alterado para incluir bateladas separadas para processamento paralelo, itens de equipamento e situações em que mais de um produto é produzido simultaneamente.

Finalmente, esquecendo o tempo limitante do ciclo T_{Li} e trabalhando com taxas de produção, em lugar da quantidade por batelada, o método pode ser usado para plantas de processo contínuo em que a produção é conduzida em campanhas.

2.5.3 GROSSMANN & SARGENT (1979).

Freqüentemente, há situações em que uma planta ou um conjunto de equipamentos é usada de diferentes formas, em diferentes momentos. A amplitude de aplicações vai do processamento seqüencial de produtos inteiramente diferentes (da mesma forma em que ocorre na indústria química), ao contínuo realinhamento das condições de processamentos contínuos para atender o mercado e estocagem (como em refinarias).

Característica fundamental de uma planta multifuncional é que ela deve ter suficiente flexibilidade a fim de atender às especificações que variam ao longo do tempo. Assumindo-se que as especificações são dadas, o projeto ótimo de uma planta multifuncional, passa a ser um problema de otimização de controles, os estados do processo têm de ser apresentados como um sistema de equações diferenciais. Entretanto, em muitos casos, a dinâmica do processo pode ser desprezada e é possível formular o problema de otimização do projeto como um problema de otimização não linear.

O projeto de uma planta multifuncional em batelada é dado como exemplo. As implicações matemáticas são analisadas posteriormente, em separado, devido às complicações causadas pelo aparecimento de variáveis inteiras, nas restrições e nos subconjuntos das variáveis.

Teoria

Assume-se que a planta será submetida a operação em condições constantes em n sucessivos períodos de tempo como apresentado na figura 9. O efeito dinâmico de mudar de um estado para outro será pequeno, no domínio do tempo, se o tamanho de cada período t_k , ($k = 1, 2, \dots, n$), é suficientemente longo. A performance da planta em cada período pode ser representada pelo sistema não linear de equações :

$$f^k(u, v^k, x^k, t^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.35)$$

onde u , v^k são vetores das variáveis de projeto associados ao dimensionamento de unidades e, x^k é o vetor de estado e controle das variáveis.

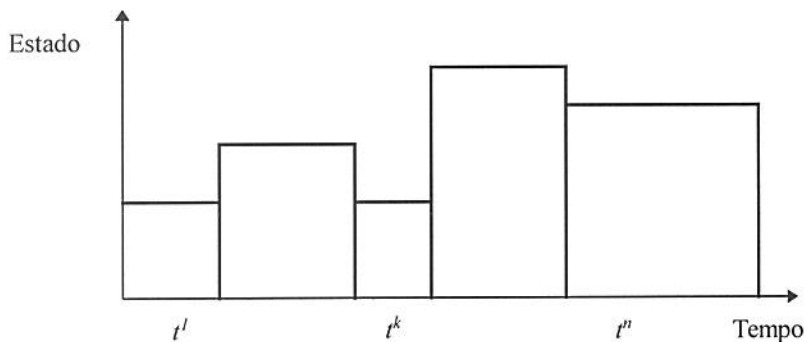


Figura 9 : Estado da planta e condições de operação

O vetor v^k representa o conjunto de variáveis definindo a porção da planta usada no período k , enquanto o restante das variáveis da planta em u são as que possuem valores fixos. Uma vez que a planta deve ter uma capacidade que, atenda às necessidades em qualquer período, um vetor limite das variáveis de projeto $\hat{v}$, deve ser escolhido, tal que :

$$\hat{v} \geq v^k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.36)$$

Uma formulação similar é obtida de várias outras condições das variáveis; por exemplo, se a pressão de operação varia de um momento para outro, a planta deve ser projetada para suportar a máxima pressão de operação. Haverão outras restrições ao projeto e à forma de operação a cada período

$$h_L^k \leq f^k(u, v^k, x^k, t^k) \leq h_U^k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.37)$$

assim como outras restrições em geral

$$S_L \leq S(u, \hat{v}, v^1, v^2, \dots, v^n, x^1, x^2, \dots, x^n, t^1, t^2, \dots, t^n) \leq S_U \\ k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.38)$$

O custo da planta é dado por

$$C = f^0(u, \hat{v}, v^1, v^2, \dots, v^n, x^1, x^2, \dots, x^n, t^1, t^2, \dots, t^n) \quad (2.5.39)$$

O problema de otimização do projeto, agora consiste em escolher $u, \hat{v}, v^k, x^k, t^k, k = 1, 2, \dots, n$, que minimize C sujeito às restrições 2.5.35, 2.5.36, 2.5.37 e 2.5.38,. Assumindo que $f^0, S, f^k, h^k, k = 1, 2, \dots, n$, são variáveis diferenciáveis contínuas e todas as variáveis envolvidas são contínuas, o problema a ser solucionado corresponde ao Problema Não Linear, para o qual algoritmos eficientes estão disponíveis.

Há, entretanto, alguns aspectos específicos neste problema, que valem a pena ser mencionados. Em geral C aumenta estritamente vinculado à $\hat{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, e assim os limites em 2.5.36 ficam ligados a cada elemento de período k exceto se a restrições 2.5.38 impeça. Segue-se que das condições de ótimo de Khun-Tucker para $\hat{v}$, para os valores fixos de $u, \hat{v}, v^k, x^k, t^k, k = 1, 2, \dots, n$, assumindo que as restrições 2.5.38 estejam inativas

$$\frac{\mathcal{C}}{\hat{v}_i} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.5.40)$$

$$\lambda_{ik}(\hat{v}_i - v_i^k) = 0 ; \lambda_{ik} \geq 0 ; (\hat{v}_i - v_i^k) \geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, m ; k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.41)$$

Uma vez que, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, $\mathcal{C}/\hat{v}_i > 0$, está claro de 2.5.40 que existe $\lambda_{ik} > 0$ para ao menos um k .

Isto implica que, de 2.5.41, ao menos uma restrição está ativa para cada componente de $\hat{v}$, e então:

$$\hat{v}_i = \max_{k=1,2,\dots,n} \{v_i^k\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.5.42)$$

Deve-se notar que: a formulação de 2.5.36 que deve ser usada, como as derivadas em 2.5.42, com respeito a v_i^k , são descontínuas, implicando em possíveis falhas nas condições de Khun-Tucker e conseqüente surgirão dificuldades numéricas. (GROSSMANN & SARGENT, 1979).

Também deve-se cuidar para que ao formular o problema de projeto da planta de processo, como o vetor u reduz efetivamente os graus de liberdade de 2.5.35 se comparada ao problema com um período. Graus adicionais de liberdade sempre podem ser introduzidos, seja especificando as condições de descarga como desigualdades, ou modificando o fluxograma, adicionando "by-passes", equipamentos de reserva e outras estratégias de controle. Na próxima seção, exemplos de plantas multifuncionais serão apresentadas.

Formulação do Problema

O problema de projeto formulado por SPARROW *et al.* (1975) será considerado. Como apresentado na figura 10, a planta consiste de uma sequência M de estágios de processamento em batelada usada para processar N diferentes produtos. Em cada estágio j , Z_j unidades operam independentemente, em paralelo, e todas as unidades em um dado estágio j têm o mesmo tamanho V_j (ℓ).

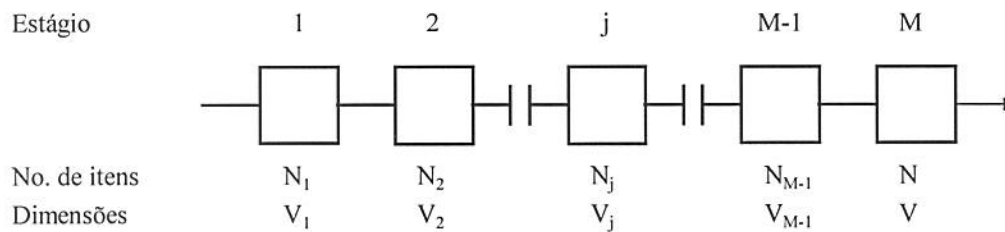


Figura 10 : Planta multi-produto sequencial em batelada

Novamente, o tempo necessário para o processamento de uma batelada do produto i no estágio j é dado por :

$$T_{ij} = t_{ij} + c_{ij} \cdot B_i^{d_j} \quad i = 1, 2, \dots, N ; j = 1, 2, \dots, M \quad (2.5.43)$$

onde $t_{ij} \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$ e γ_j são constantes, e B_i (kg) é a dimensão do produto i .

O tamanho da batelada necessária V_{ij} , para o processamento do produto i no estágio j é dado por :

$$V_{ij} = B_i \cdot S_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N ; j = 1, 2, \dots, M \quad (2.5.44)$$

onde $S_{ij} \geq 0$ é uma constante. Os volumes da unidade V_j devem ser selecionados para satisfazer :

$$V_j \geq V_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N ; j = 1, 2, \dots, M \quad (2.5.45)$$

e estão disponíveis nas dimensões :

$$V_j^L \leq V_{ij} \leq V_j^U \quad j= 1,2,\dots,M \quad (2.5.46)$$

onde V_j^L , V_j^U são limites dados.

A planta opera um ciclo em condições estacionarias e uma armazenagem auxiliar está disponível, assim cada batelada de produto, uma vez iniciada, deve ser processada em todos os estágios sem nenhum período de espera. A situação é ilustrada na figura 11.

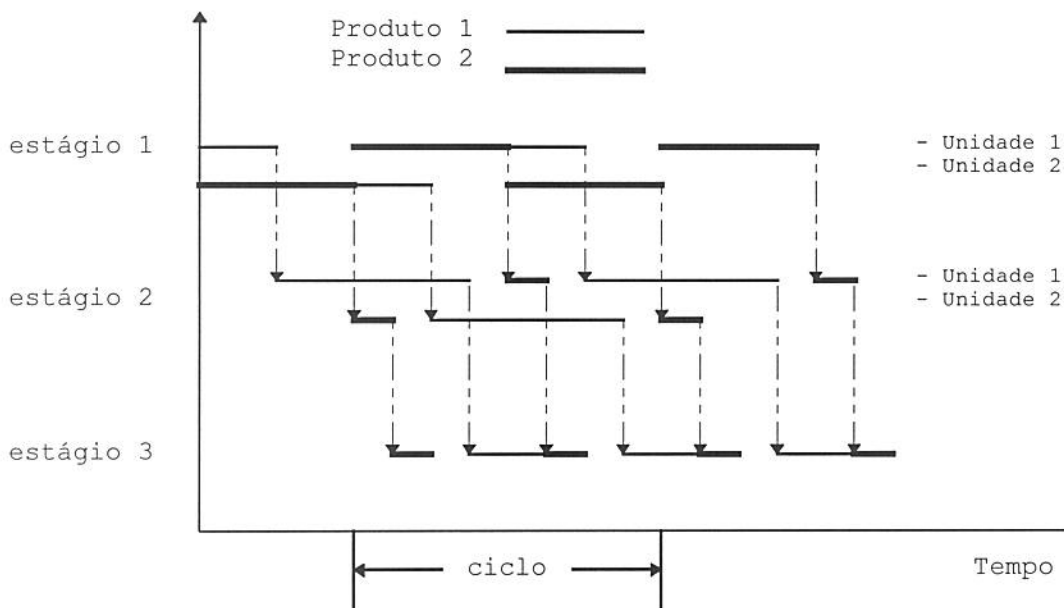


Figura 11 : Planejamento de uma planta em batelada em três estágios para dois produtos

Em um período de operação H (h), o número de bateladas, n_i , para cada produto i , e seus tamanhos B_i , devem ser escolhidos para atingir uma determinada produção Q_i (kg)

$$Q_i = n_i \cdot B_i \quad (2.5.47)$$

O número de unidades em cada estágio deve ser escolhido de para que todas as bateladas possam ser processadas. A seqüência resultante e as restrições de capacidade são complexas, e requerem a introdução de um grande número de variáveis binárias auxiliares.

Entretanto, SPARROW et al. (1975) usam uma restrição simplificada, que resulta em boas soluções otimizadas, obtida pela seguinte explicação.

Em média, o tempo para processar n_i bateladas de produto i no estágio j será $(n_i \cdot T_{ij} / Z_j)$, e claramente devemos ter :

$$H \geq \sum_{i=1}^N \frac{n_i \cdot T_{ij}}{N_j} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.5.48)$$

entretanto, como visto no exemplo da figura 11, a seqüência das restrições previne o uso continuado de todas as unidades em todos os estágios, então, a igualdade não pode em geral ser obtida para todos os j em 2.5.48. Por outro lado, está claro que o planejamento sempre pode ser realizado, se o período H é suficientemente longo para permitir o tempo máximo do ciclo, T_{Li} , dado por :

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (2.5.22)$$

em todos os estágios. Isto leva à restrição

$$H \geq \sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \quad (2.5.49)$$

o que é claramente conservativo, uma vez que exclui a possibilidade de que os produtos possam ser simultaneamente processados como na figura 11. O ótimo real está entre 2.5.48 e 2.5.49 e se esta diferença é grande, pode ser com-

pensador considera a seqüência geral das restrições, mas aqui segue-se SPARROW *et al.* (1975) usando-se 2.5.22 e 2.5.49.

O problema de projeto é seleccionar B_i , V_j e Z_j a fim de minimizar o capital (\$) da planta, dado por :

$$C = \sum_{j=1}^M r_j \cdot V_j^{\alpha} \cdot Z_j \quad (2.5.50)$$

sujeito às restrições: 2.5.43-2.5.47 , 2.5.22 e 2.5.49.

Está claro, da figura 11, que o número de bateladas n_i dado para um período arbitrário H , não é necessariamente um valor inteiro, mas o número de unidades Z_j . Em cada estágio deve ser um positivo inteiro, então o problema é um problema de programação não linear inteira mista (MINLP). Esta classe de problema é extremamente difícil de ser equacionada, e em geral os métodos não prevêm soluções eficientes.

SPARROW *et al.* (1975) assumiram que as dimensões das unidades não estavam disponíveis para uma faixa contínua e que a diferença das dimensões padrão era desprezível. O problema era então formulado como um problema discreto e solucionado por uma técnica de busca e limite associada à uma estimativa heurística. O método torna-se menos eficiente quando o tempo do ciclo depende da dimensão da batelada, quando c_{ij} não é zero em 2.5.44. De fato, no artigo todas as soluções foram obtidas para $c_{ij}=0$ em 2.5.44. Com a presente MINLP formulada, a dependência do tempo de ciclo com a dimensão das bateladas é levada em conta sem dificuldade.

O Subproblema Relaxado

A solução da MINLP pode ser obtida equacionando uma seqüência de subproblemas relaxados nos quais as variáveis são tratadas como contínuas. Pela eliminação de algumas variáveis intermediárias, este problema relaxado pode ser formulado como se segue:

Selecionar B_i , T_{Li} , V_j , Z_j que minimizam :

$$C = \sum_{j=1}^M r_j \cdot V_j^{\gamma} \cdot Z_j \quad (2.5.51)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} H &\geq \sum_{i=1}^N \frac{Q_i \cdot T_{Li}}{B_i} & V_{ij} &\geq B_i \cdot S_{ij} \\ T_{Li} \cdot Z_j &\geq t_{ij} + c_{ij} \cdot B_i^{d_j} & B_i &\geq 0 \\ V_j^L &\leq V_j \leq V_j^U & Z_j^L &\leq Z_j \leq Z_j^U \\ i &= 1, 2, \dots, N & j &= 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Pode-se observar que os limites Z_j^L , Z_j^U são sistematicamente ajustados na seqüência do problema. Inicialmente, o limite inferior Z_j^L é ajustado para todo j , uma vez que, claramente deve haver ao menos um equipamento em cada estágio. Também está claro que todas as restrições em 2.5.51 podem ser satisfeitas, estritamente com inequações, em todos os casos selecionando B_i suficientemente pequeno e Z_j^U suficientemente grande. Uma vez que a função objetivo e as funções restrições são contínuas, e os valores das variáveis estão limitados, a função objetivo atende a um mínimo, em um conjunto factível de valores das variáveis. Então, o problema 2.5.51 tem ao menos uma solução ótima, e é interessante estabelecer se há mais de uma.

Quando $0 < d_j < 1$ e $0 < \gamma_j < 1$, o que usualmente ocorre, o problema 2.5.51 tem uma função objetivo não convexa e um conjunto não convexo de soluções factíveis, e sob estas circunstâncias a possibilidade de múltiplos mínimos locais, normalmente não pode ser excluída. Entretanto, o problema pode ser reformulado como se segue (GROSSMANN & SARGENT, 1979) :

Selecionar B_i , T_{Li} , V_j , Z_j que minimizam

$$C = \sum_{j=1}^M r_j \cdot V_j^{\gamma_j} \cdot Z_j \quad (2.5.52)$$

sujeito a

$$\frac{t_{ij}}{T_{Li} \cdot N_j} + \frac{C_{ij} \cdot B_i^{d_j}}{T_{Li} \cdot N_j} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i \cdot T_{Li}}{H \cdot B_i} \leq 1$$

$$\frac{B_i \cdot S_{ij}}{V_j} \leq 1$$

$$\frac{V_j^L}{V_j} \leq 1$$

$$\frac{Z_j^L}{Z_j} \leq 1$$

$$\frac{V_j}{V_j^U} \leq 1$$

$$\frac{Z_j}{Z_j^U} \leq 1$$

$$V_j > 0$$

$$Z_j > 0$$

$$B_i \geq 0$$

$$T_{Li} > 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$j = 1, 2, \dots, M$$

Solução da MINLP

A MINLP pode ser solucionada usando a técnica de busca e limite associada a um algoritmo PNL (programação não linear).

Em geral, os passos a serem seguidos são os seguintes:

1. Equacionar o problema 2.5.51. Se todos os Z_j^R são inteiros, PARE
2. Uma solução factível do problema misto, que é uma boa estimativa do ótimo, pode ser obtida tomando como ponto inicial a solução do passo 1 e equacionando o problema 2.5.52 adicionando as restrições

$$\sum_{j=1}^M (\langle Z_j^R \rangle - Z_j) \cdot ([Z_j^R] - Z_j) = 0 \quad [Z_j^R] \leq Z_j \leq \langle Z_j^R \rangle$$

$$j = 1, 2, \dots, M \quad (2.5.53)$$

onde $[x]$ = maior inteiro $\leq x$ e $\langle x \rangle$ = menor inteiro $\geq x$

3. Uma árvore, com raiz no problema relaxado, é enumerada indicando para cada extremidade uma restrição com um particular Z_j até que todas as soluções factíveis da MINLP são obtidas. Em cada nó, o subproblema de PNL é definido em que as restrições são o caminho, conectando os nós com a raiz, enxertados ao problema relaxado. As soluções destes subproblemas representam os limites inferiores do ótimo do problema de MINLP.

O limite cresce monotonicamente ao expandir os nós da árvore, uma vez que a unicidade de cada solução é garantida e o espaço factível é reduzido a cada nó. Entretanto, nós, que apresentam soluções que excedem a melhor estimativa calculada, não precisam ser expandidos, onde os nós terminais que são inferiores à melhor estimativa atual, são tomados como nova melhor estimativa.

No primeiro passo das soluções inteiras Z_j , $j = 1, 2, \dots, M$ não devem ser raras uma vez que as variáveis tendem atingir os seu limites inferiores dados em 2.5.49. Na estratégia de busca e limite, uma seqüência de PNLs têm de ser solucionadas. Mesmo quando muitas soluções são descartadas, a exigência computacional pode ser excessiva. Então, é importante ter-se uma boa estimativa inicial, como a obtida no passo dois, que poderá ser o ótimo global em muitos casos. Como o ótimo do problema relaxado, q_R , é conhecido e é um limite inferior válido, a tolerância ϕ para o subótimo determinado no passo 2, q_E , é dada por:

$$\phi = \frac{q_E - q_R}{q_R} \quad (2.5.54)$$

quando a tolerância ϕ é pequena, a solução subótima deve ser adequada para fins práticos e os cálculos do passo 3 podem ser evitados.

Resultados Numéricos

Os exemplos formulados e equacionados por GROSSMANN & SARGENT (1979) apresentados na tabela 6 foram e os resultados estão apresentados na tabela 7. Em todos os casos, as soluções foram obtidas com sucesso com um tempo computacional entre 20 e 80s em um CDC6400. Pode-se ver que ϵ é muito pequena, fazer a aplicação do esforço de busca e limite dificilmente vale a pena.

Tabela 6 : Exemplos de batelada multi-produto

Problema 1.

$$M = 3 \quad ; \quad N = 2 \quad ; \quad H = 6000 \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

$$r_j = 250 \quad ; \quad \gamma_j = 0.6 \quad ; \quad 250 \leq V_j \leq 2500 \quad ; \quad 1 \leq Z_j \leq 3$$

Problema 1a.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 8 \\ 16 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c = 0 \quad Q = \begin{bmatrix} 40000 \\ 20000 \end{bmatrix}$$

Problema 1b.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,80 & 0,32 \\ 0,45 & 0,67 & 0,18 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 40000 \\ 20000 \end{bmatrix}$$

Problema 1c.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 8 \\ 16 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c = 0 \quad Q = \begin{bmatrix} 200000 \\ 100000 \end{bmatrix}$$

Problema 2.

$$M = 3 \quad ; \quad N = 2 \quad ; \quad H = 6000 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$r_j = 250 \quad ; \quad \gamma_j = 0.6 \quad ; \quad 250 \leq V_j \leq 2500 \quad ; \quad 1 \leq Z_j \leq 3$$

$$S = \begin{bmatrix} 4,2 & 4,3 & 2,2 & 6,4 \\ 2,2 & 2,2 & 3,3 & 5,0 \\ 4,4 & 7,1 & 6,5 & 2,0 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 12 & 7 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = 0 \quad Q = \begin{bmatrix} 20000 \\ 40000 \\ 50000 \end{bmatrix}$$

Problema 3.

$$M = 4 \quad N = 3 \quad H = 6000 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$r_j = 250 \quad \gamma_j = 0.6 \quad 250 \leq V_j \leq 10000 \quad 1 \leq Z_j \leq 3$$

$$S = \begin{bmatrix} 8,28 & 9,70 & 2,95 & 6,57 \\ 5,58 & 8,09 & 3,27 & 6,17 \\ 2,34 & 10,3 & 5,70 & 5,98 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 1,15 & 9,86 & 5,28 & 1,20 \\ 5,95 & 7,01 & 7,00 & 1,08 \\ 3,96 & 6,01 & 5,13 & 0,66 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,24 & 0,40 & 0,50 \\ 0,15 & 0,35 & 0,70 & 0,42 \\ 0,34 & 0,50 & 0,85 & 0,30 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 40000 \\ 20000 \end{bmatrix}$$

$$d_j = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,33 \\ 0,30 \\ 0,20 \end{bmatrix}$$

Tabela 7 : Resultados dos exemplos da Tabela 6

Problema	V_j	B_i	T_{Li}	Z_j	C
1a	480	240	20	1	38499,8
	720	120	16	1	
	960			1	
1b	357,7	161,1	14,37	1	30968
	494,5	82,42	10,01	1	
	644,3			1	
1c	solução não inteira				106346
	1250	625	9,959	1,8201	
	1875	312,5	8,79	2,008	
	2500			1	
1c	solução inteira $\epsilon=0,0039$				106769
	1200	600	10	2	
	1800	300	8	2	
	2400			1	
2	682,4	162,48	8	1	61300
	1010,11	208,45	6	1	
	1008,1	155,1	12	1	
	1042,2			1	
3	solução não inteira				349471
	8536,1	1030,1	6,29	1,503	
	10000	1236,1	6,4	1,943	
	5533,9	970,8	6,17	2,002	
3	7626,7			1	353744
	solução inteira $\epsilon=0,0122$				
	9247,9	1030,1	6,29	2	
	10000	1234,9	6,44	2	
	5533,9	970,9	6,17	2	
7619,4			1		

Discussão

O problema de projeto ótimo de uma planta de processamento "multifuncional" pôde ser formulado como uma PNL. O problema de projeto ótimo de uma planta de processamento em batelada foi formulado como uma MINLP. O método proposto para a solução, determina uma solução exata ou uma boa solução subotimizada, sendo possível evitar um longo desenvolvimento do procedimento de busca e limite.

A técnica, geralmente desenvolvida, para plantas "multifuncionais" pode ser aplicada para o projeto de uma variedade de situações e provê uma base racional para o projeto de plantas flexíveis para os quais as especificações e dados de projeto são incertos.

2.6 Inserção de Equipamentos em Plantas Instaladas

Ao alterar-se as metas de produção, pode-se ultrapassar a capacidade instalada de uma determinada planta. A inserção de peças de processamento pode expandir a capacidade instalada, a fim de atingir as novas metas de produção sem que se tenha de instalar uma nova linha de produção.

FLETCHER et al. (1991) analisa o caso de uma planta existente para a qual novos níveis de produtividade e lucros de venda foram estabelecidos. Um novo equipamento na forma de uma *inserção* é acrescentado para atingir um perfil econômico ótimo. FLETCHER et al. (1991) analisa as possíveis inserções, aplicadas em diferentes exemplos,

inclusive, o problema previamente considerado por VASELENAK *et al.* (1987).

LEE *et al.* (1993) trata da inserção ótima de um novo equipamento em uma planta existente. Os autores apresentam uma abordagem heurística à proposta de FLETCHER *et al.* (1991), primeiramente determinando as possíveis posições de colocação das inserções para então equacionar o problema de otimização do equipamento.

As convenções adotadas por LEE *et al.* (1993) e FLETCHER *et al.* (1991), correspondem às, normalmente, aplicadas a problemas de otimização de plantas multi-produtos em batelada, como formulados por SPARROW *et al.* (1975) e GROSSMANN & SARGENT (1979).

2.6.1 VASELENAK *et al.* (1987)

Refere-se à inserção ótima em uma planta de processamento em batelada. Os tipos e tamanhos de equipamentos para uma planta de processo em batelada são dados. Devido às necessidades de mercado e novos objetivos de produção são especificados para um conjunto de produtos. O problema, então, consiste em encontrar as modificações de projeto que envolvam a compra de um novo equipamento para uma planta existente maximizando o lucro.

Os objetivos de produção dados para o problema de inserção podem ser fixos ou estabelecidos como limites superiores para o seguinte problema: o custo de um novo equipamento para operar nesses novos níveis de produção é

maior que o ganho do aumento da produtividade, então, nenhum novo equipamento deveria ser inserido ou nenhuma adição limitada deve ser feitas em níveis mais baixos de produtividade. Então, os níveis de produção devem ser otimizados como parte do problema de inserção.

Estas e outras suposições correspondem às normalmente consideradas no projeto de plantas multi-produto de processamento em batelada (SPARROW et al., 1975 ; GROSSMAN & SARGENT, 1975). Estas suposições incluem as seguintes:

- A formulação de cada produto é dada, tempos de processamento são específicos para cada produto e cada tipo de equipamento.
- Os produtos são manufaturados seqüencialmente, usando um planejamento de produção e enlaces.
- O material pode ser retido na sua unidade de produção até que o próximo estágio de produção esteja liberado. Isto é : os vasos de processamento podem atuar como tanques de estocagem.
- Uma faixa contínua e larga de dimensões dos equipamentos está disponível.
- O número de bateladas pode ser um número não inteiro, pois assume-se, é um número elevado.
- Equipamentos semi-contínuos não serão considerados, embora este princípio possa ser incluído ou não na formulação do problema.

O problema de inserção ótima em plantas de processo em batelada de multi-produtos, pode ser formulada como uma programação não linear mista inteira (MINLP), problema em que duas possibilidades de inserção de novos equipamentos são incluídas. O equipamento inserido pode ser usado para

reduzir o tempo de ciclo ou ainda aumentar o tamanho da batelada de cada produto. Usando transformações exponenciais e aproximações lineares, o problema de MINLP converge para uma solução ótima. Dois exemplos são considerados para sugerir uma aproximação para o problema combinatório em que a inserção pode ser manipulada e que poucas alternativas têm de ser analisadas com um esforço computacional modesto.

Opções para novos equipamentos

As modificações no projeto de plantas de batelada multi-produto envolverão a adição de um novo equipamento à planta existente. Qualquer novo equipamento pode ser utilizado de duas maneiras :

1. Aliviando os gargalos dos estágios operando em paralelo (opção C)

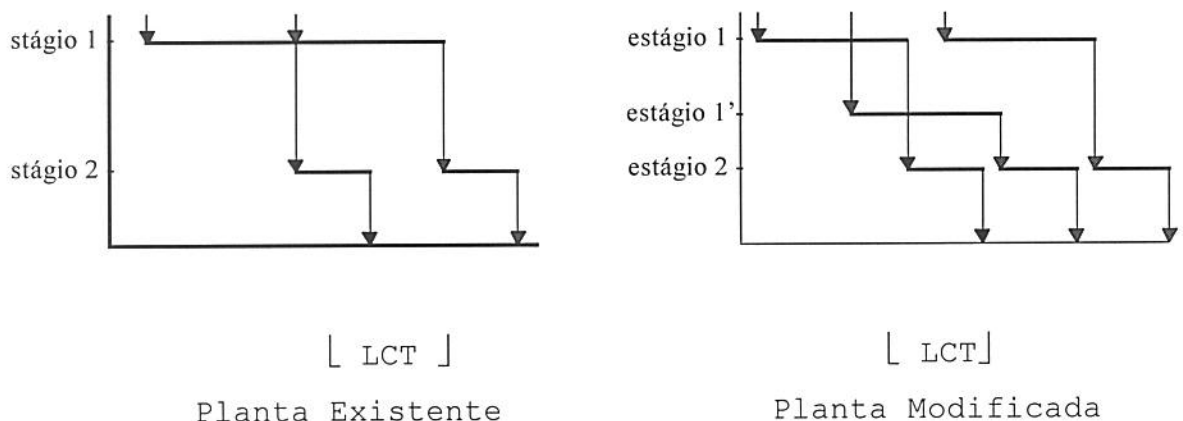
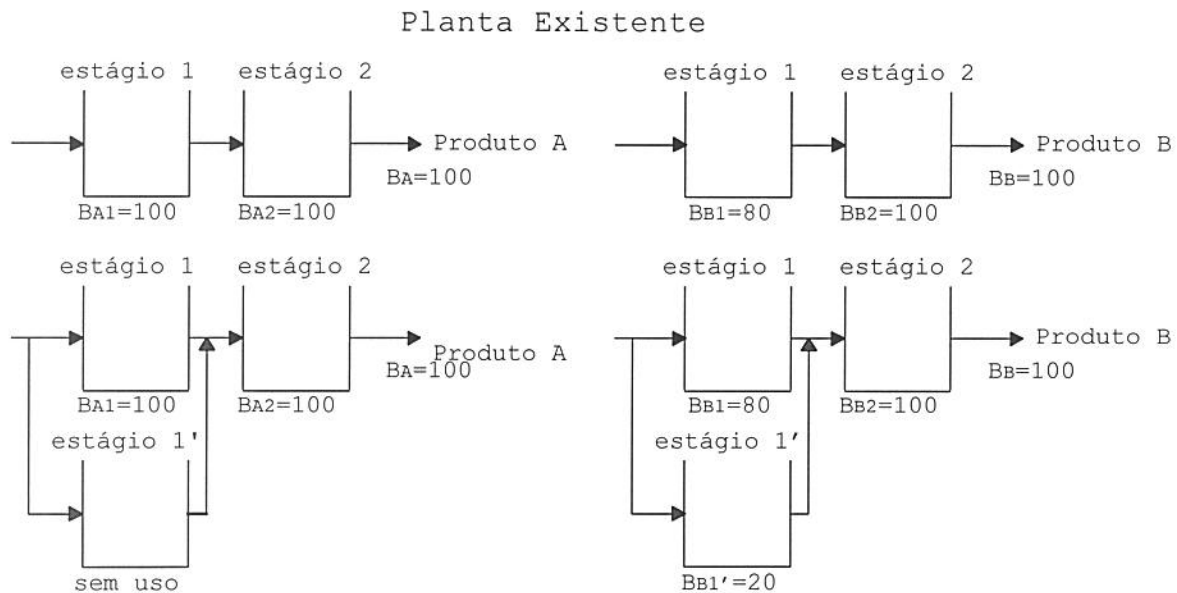


Figura 12 : Opção C, reduzindo o tempo do ciclo

2. Aumentando o tamanho da atual batelada operando em paralelo e em fase com o equipamento instalado (opção B).



Planta Modificada

Figura 13 : Opção B, aumentando o tamanho da batelada

A opção C aumenta a produção reduzindo o tempo do ciclo do estágio de um produto, i.e. o tempo necessário para produzir uma batelada de produto. O novo equipamento usado desta forma opera fora de fase com o equipamento existente. O gráfico da figura 12 demonstra como a produção pode ser aumentada por esta alternativa. Como se pode ver, a opção C reduz o tempo ocioso de uma unidade, permitindo uma utilização mais eficiente do equipamento.

A opção B, por outro lado aumenta a produção aumentando o tamanho da batelada de cada produto. Um novo equipamento usado desta forma opera em paralelo e em fase com um equipamento já existente, como visto na figura 13. Esta opção tira vantagem do excesso de volume de uma unidade.

Uma vez que as duas opções propostas podem ser aplicadas para cada estágio, todas as alternativas para inserção ótima na planta levam à estrutura apresentada na figura 14. Apesar de apresentar somente uma potencial inserção na figura, é claramente possível inserir múltiplas unidades para cada opção em cada estágio. Pela representação da figura 14, o problema de inserção pode ser formulado como uma programação não linear mista inteira para determinar o ótimo, sem analisar todas as alternativas possíveis.

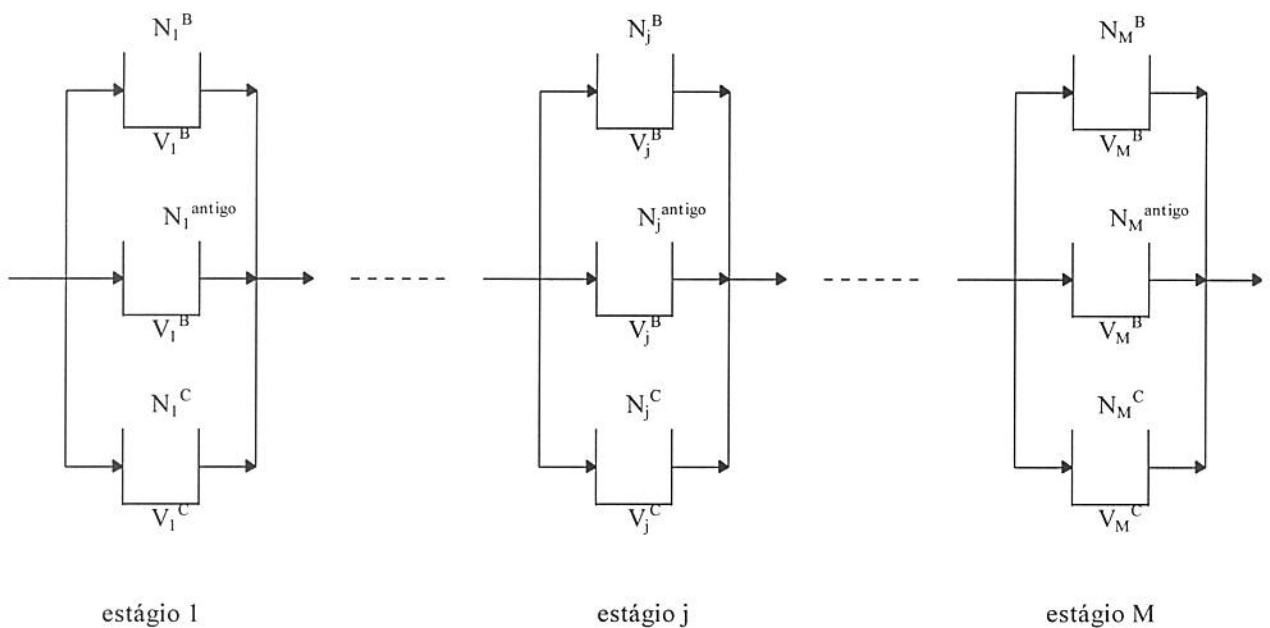


Figura 14 : Estrutura de inserção para uma planta em batelada.

Formulação

O objetivo do problema de inserção é maximizar a lucratividade de cada batelada de processamento, dada pela demanda de novos produtos e preços. O lucro é definido como o lucro líquido da venda dos produtos, subtraindo o custo anual de investimento. O lucro líquido por unidade de produto i é definido como p_i . Para levar em conta economias

de escala, o custo do equipamento será aproximado por um custo fixo K_j , que é o custo anual do equipamento j (que inclui : os custos da tubulação, instrumentação e alguns custos de instalação) e r_j (é o custo anual proporcionalmente constante do equipamento j , que é o aumento linear do custo em função do tamanho do equipamento).

A função objetivo para o problema de inserção pode ser dada como :

$$\max \sum_{i=1}^N p_i \cdot n_i \cdot B_i - \sum_{j=1}^M \left[\sum_{m=1}^{Z_j^B} \sum_{x=1}^{Z_j^{ant}} r_j (V_{jm}^B)_x + \sum_{m=1}^{Z_j^C} r_j \cdot V_{jm}^C \right] - \sum_{j=1}^M \left[\sum_{m=1}^{Z_j^B} \sum_{x=1}^{Z_j^{ant}} k_j (\psi_{jk}^B)_x + \sum_{m=1}^{Z_j^C} k_j \cdot \psi_{jm}^C \right] \quad (2.6.1)$$

onde n_i = número de bateladas de produto i ; B_i = dimensão da batelada de produto i ; $(\psi_{jm}^B)_x$ = variável binária para a $mésima$ nova unidade para expandir o tamanho da $xésima$ unidade antiga no estágio j na opção B ; ψ_{jm}^C = variável binária para o decréscimo do ciclo de tempo da $mésima$ unidade no estágio j para a opção C ; $(V_{jm}^B)_x$ = volume da $mésima$ nova na $mésima$ unidade antiga no estágio j para a opção B ; V_{jm}^C = volume da $mésima$

nova unidade no estágio j para a opção C ; i = índice do produto ; j = índice do estágio ; m = número de novas unidades instaladas no estágio j ($m=1,2,\dots,Z_j^B$ na opção B, $m=1,2,\dots,Z_j^C$ na opção C) ; x = índice do número de unidades existentes em paralelo no estágio j ($x=1,2,\dots,Z_j^{ant}$). Esta definição de variáveis permite diferenciar os itens de equipamento com diferentes tamanhos.

Os limites superiores de produção para cada produto i . O dado para uma demanda conhecida, expressa na forma :

$$n_i \cdot B_i \leq Q_i \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.2)$$

onde $n_i B_i$ é a quantidade de produto i , Q_i é o limite superior de produção do produto i , e n_i é o número de ciclos.

O número total de unidades Z_j é usado para determinar o ciclo de tempo de cada estágio j , é a somatória do número de unidades antigas e novas (omitindo as unidades, da opção B, uma vez que estas operam em fase com unidades antigas), dado por :

$$Z_j = Z_j^{ant} + \sum_{m=1}^{Z_j^C} \psi_{jm}^C \quad j = 1, \dots, M \quad (2.6.3)$$

O LCT (Ciclo Limitante de Tempo) T_{Li} é expresso por:

$$T_{Li} \geq \frac{t_{ij}}{Z_j} \quad j = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.4)$$

onde Z_j é o número de equipamentos no j ésimo estágio em paralelo.

Combinando as restrições 2.6.3 e 2.6.4, a inequação torna-se :

$$Z_j^{ant} + \sum_{k=1}^{Z_j^C} \psi_{jk}^C \geq \frac{t_{ij}}{T_{Li}} \quad j = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.5)$$

que define o tempo total de processo para cada produto T_{Li} .

Estes tempos não podem exceder o tempo total de processamento H :

$$\sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \leq H \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5.49)$$

O número total de novas unidades para cada estágio deve estar entre os limites inferiores e superior especificados :

$$0 \leq \left[\sum_{m=1}^{Z_j^B} \sum_{x=1}^{Z_j^{ant}} (\psi_{jm}^B)_x + \sum_{m=1}^{Z_j^C} \psi_{jm}^C \right] \leq Z_j^U \quad j = 1, \dots, M \quad (2.6.6)$$

Também, para garantir que o equipamento possa acomodar os níveis requeridos de produção, as restrições devem ser rescritas de forma que o tamanho do equipamento seja maior que o volume necessário para cada produto que utiliza o estágio. Neste caso a restrição para a opção B será :

$$\sum_{m=1}^{Z_j^B} (V_{jm}^B)_x + (V_j^{ant})_x \geq S_{ij} \cdot B_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M \quad x = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.7)$$

onde S_{ij} é o fator de tamanho para o produto i no estágio j e V_j^{ant} é o volume da peça existente no equipamento.

Em caso de redução do tempo de batelada (opção C), as restrições da capacidade são :

$$U[1 - \psi_{jm}^C] + V_{jm}^C \geq S_{ij} \cdot B_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M \quad k = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.8)$$

onde U é um número suficientemente grande para tornar a restrição redundante quando esta opção não é selecionada.

Restrições adicionais e restrições de integralidade para os casos acima são :

$$0 \leq (V_{jm}^B)_x \leq (V_j^B)^U$$

$$i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M ; x = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.9)$$

$$0 \leq V_{jm}^C \leq (V_j^C)^U$$

$$i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M ; m = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.10)$$

$$(V_{jm}^B)_x \leq U(\psi_{jm}^B)_x$$

$$i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M ; m = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.11)$$

$$V_{jk}^C \leq U(\psi_{jk}^C)$$

$$i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M ; k = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.12)$$

onde $(V_j^B)^U$ é o tamanho máximo da nova unidade do estágio j para a opção B e $(V_j^C)^U$ é o tamanho máximo da nova unidade do estágio j para a opção C. Finalizando, estabelecem-se restrições que ordenam a seleção das unidades em cada estágio, eliminando-se combinações redundantes das variáveis binárias.

$$(\psi_{jm}^B)_x \leq (\psi_{j,m+1}^B)_x$$

$$j = 1, \dots, M ; m = 1, \dots, (Z_j^B - 1) ; x = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.13)$$

$$(\psi_{jm}^C) \leq (\psi_{j,m+1}^C)$$

$$j = 1, \dots, M ; m = 1, \dots, (Z_j^C - 1) \quad (2.6.14)$$

O problema definido pelas equações 2.6.1, 2.6.2, e de 2.6.5 a 2.6.14 correspondem a uma MINLP. Na formulação desta MINLP, os objetivos da inserção são expressos matematicamente e todas as alternativas para a inserção do equipamento estão inclusas nesta formulação.

Problema Exemplo 2

A fim de ilustrar o uso da MINLP, considera-se o caso de dois produtos A e B, presentemente manufaturados em uma planta de dois estágios. Cada estágio tem duas unidades, com volumes respectivamente $V_1 = 4000 \ell$ e $V_2 = 3000 \ell$. Os fatores de tamanho e tempos de processamento são dados na Tabela 8.

Tabela 8 : Dados do exemplo 2

	Produto	Estágio 1	Estágio 2
$S_{ij} [\ell/\text{kg}]$	A	2,0	1,0
	B	1,5	2,25
$t_{ij} [\text{h}]$	A	4,0	6,0
	B	5,0	3,0

O equipamento existente é usado para produzir $1 \times 10^6 \text{kg/ano}$ de produto A e $8 \times 10^5 \text{kg/ano}$ de produto B. À partir de uma pesquisa de mercado, estabelece-se que a

produção pode ser aumentada para 1.2×10^6 kg/ano de produto A e 1×10^6 kg/ano de produto B. Estas metas representam os limites de produção. O lucro líquido é 1\$/kg de produto A e 2 \$/kg de produto B. Então se produzidos ao limite, o lucro máximo será 3200000 \$/ano. O custo de instalação de uma nova unidade é dada pela correlação $32.54(V/10^{-3}) + 30.56$ (10^3 \$/ano). Com base nestas informações, deseja-se determinar qual novo equipamento, se for o caso deve ser adquirido para maximizar o lucro no período de um ano (6000h de trabalho).

A figura 15 mostra a estrutura do problema, onde até duas possíveis adições são consideradas em cada estágio. A correspondente MINLP, envolve oito variáveis binárias, seis variáveis contínuas não-lineares (número de bateladas, tempos de ciclo e tamanho das bateladas), oito variáveis contínuas lineares (volume de novos equipamentos) e 31 restrições de desigualdade.

Um método simples de resolução da MINLP é enumerar todas as possíveis alternativas e resolver suas correspondentes PNLs resultantes das combinações das variáveis binárias.

Quinze alternativas podem ser consideradas para a aquisição de dois ou menos equipamentos como apresentado na Tabela 9. Para cada alternativa foi utilizado um pacote matemático (MINOS/ Augmented) requerendo cerca de 2.5s em um computador DEC-20 para cada caso. Para todos os 15 casos o tempo foi de 38s.

Na Tabela 9, os níveis de produção para a planta são otimizados, primeiramente, para obter o limite inferior de lucratividade. Os próximos quatro casos, mostram o lucro

máximo obtido para uma nova peça incluída no sistema, nos demais casos, a inserção de duas novas peças de equipamento.

A solução ótima é o caso 5, o uso de uma unidade para expandir a capacidade do estágio 2 que leva um lucro de $3115(10^3\$/\text{ano})$. Isto representa 13% de ganho comparado ao caso em que não há inserção na planta.

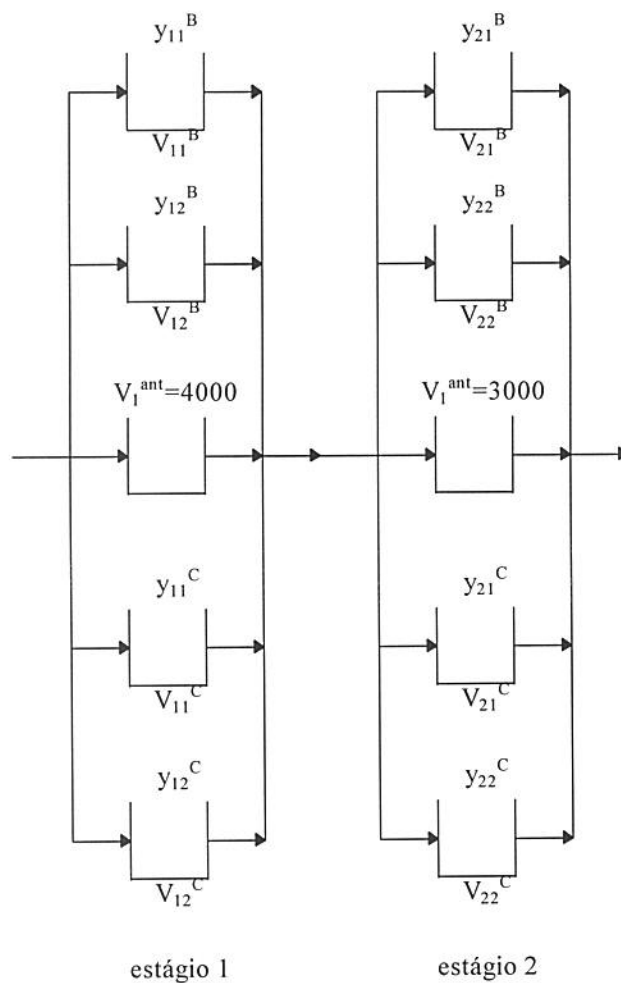


Figura 15 : Estrutura do problema exemplo 2

A busca deve terminar com dois equipamentos para cada estágio. O lucro máximo que pode ser alcançado usando três unidades ou mais é a diferença entre o faturamento máximo e custo fixo de três unidades, $3200-3(30.56)=3108(10^3\$/\text{ano})$.

Uma vez que o lucro é menor que a lucratividade do caso 5, as combinações envolvendo 3 ou mais unidades são desconsideradas.

Tabela 9 : Opções de inserção do equipamento, exemplo 2

caso	N_1^C	N_2^C	N_1^B	N_2^B	meta alcançada?	Lucro ($\$10^3$)
1	0	0	0	0	Não	2750
2	1	0	0	0	Sim	3044
3	0	1	0	0	Não	2997
4	0	0	1	0	Não	3029
5	0	0	0	1	Sim	3115
6	1	0	0	1	Sim	3014
7	1	0	1	0	Sim	3014
8	1	1	0	0	Sim	3000
9	0	1	0	1	Sim	3033
10	0	1	1	0	Sim	3033
11	0	0	1	1	Sim	3090
12	2	0	0	1	Sim	2889
13	0	2	0	0	Sim	2869
14	0	0	2	0	Não	2998
15	0	0	0	2	Sim	3084

Problema Exemplo 3

A Tabela 10 apresenta os dados para o exemplo 3, uma instalação envolvendo 4 produtos e 4 estágios operando 6000h/ano. A estrutura com todas as alternativas para o novo equipamento estão apresentadas na figura 16. O uso de um item em cada opção foi considerado em cada estágio. A formulação da MINLP resultante requer 9 variáveis binárias para representar as potenciais novas unidades, 25 variáveis contínuas, 26 variáveis restrições não e 52 restrições lineares. Os coeficientes de custo para o modelo estão na Tabela 10.

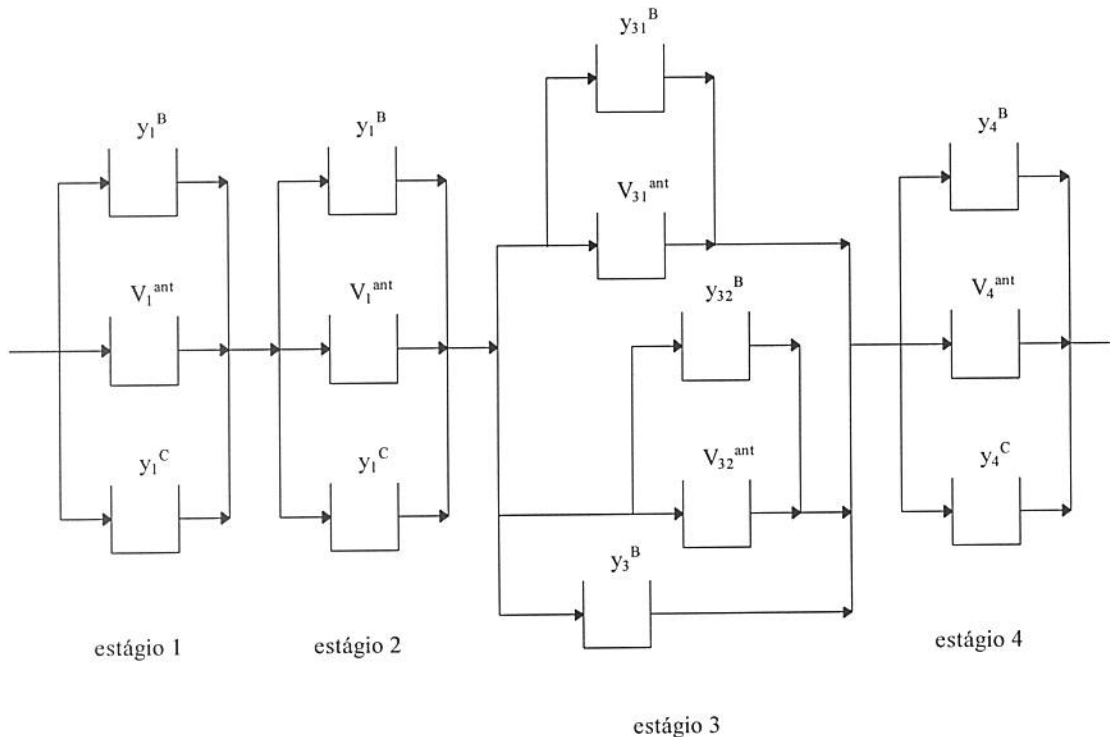


Figura 16 : Estrutura do exemplo 3

Em cada iteração, são efetuadas pelo menos duas iterações, uma de PNL e uma de MINLP mostradas na Tabela 11, consumindo 1.7min de tempo de CPU, em um computador DEC-20. Como visto na Tabela 11, a solução ótima é adquirir uma unidade ($V_4^B=2547 \ell$) para expandir a capacidade do estágio 4. A solução foi encontrada na segunda iteração e o lucro foi de 513300\$/ano, comparado a um lucro de 460900\$/ano quando nenhum equipamento é comprado para a planta. Então um acréscimo de 11% na lucratividade é alcançado com a inserção na planta. Os níveis de produção atingem seu máximo na solução ótima.

Tabela 10 : Dados do exemplo 3

		estágio				
		Produto	1	2	3	4
t_{ij} [h/bat.]	A	6,3822	4,7393	8,3353	3,9443	
	B	6,7938	6,4175	6,4750	4,4382	
	D	1,0135	6,2699	5,3716	11,9213	
	E	3,1977	3,0415	3,4609	3,3047	
S_{ij} [ℓ/kg/bat.]	A	7,9130	2,0815	5,2268	4,9523	
	B	0,7891	0,2871	0,2744	3,3951	
	D	0,7122	2,5889	1,6425	3,5903	
	E	4,6730	2,3586	1,6087	2,7879	

		estágio j	V_j [ℓ]	Z_j	K_j	r_j
custo	1	4000	1	15,28	0	
	2	4000	1	38,20	0	
	3	3000	2	45,84	0	
	4	3000	1	10,18	0	

		Produto	p_i	Q_i
Preço e demanda	A	1,114	268200	
	B	0,535	156000	
	D	0,774	189700	
	E	0,224	166100	

Este problema exemplo, tem 2^9 ou 512 diferentes combinações para a adição de novos equipamentos. Uma vez que cada PNL consome 6.5s de tempo de CPU, são necessários 55min de tempo de CPU, para equacionar o exemplo 3, ficando claro a economia de tempo no processamento.

Tabela 11 : Resultados do exemplo 3

	Produto	n_i	B_i [kg]	T_{Li} [h]
Solução	A	530,60	505,5	6,382
ótima	B	95,48	1634,0	6,794
$V_4^B=2547 \ell$	D	122,80	1545,0	11,920
	E	151,70	856,0	3,305

Discussão

É interessante notar que na solução dos dois exemplos os limites de produção foram tomados no limite superior e os equipamentos foram selecionados para aumentar o tamanho das bateladas.

Em geral, no melhor resultado esperado o custo de investimento para o equipamento adicional é superado pelo aumento de faturamento proveniente das novas metas de produção. Não é correto, entretanto, esperar que : sempre a solução mais adequada seja aumentar o tamanho das bateladas. Entretanto, esta opção tende a ser a solução, quando o gargalo do estágio difere para cada produto e valores fixos são assumidos para o tempo de processamento. Se o tempo de processo cresce monotonicamente com o tamanho da batelada, a opção de adicionar o equipamento reduzindo o tempo do ciclo, torna-se mais atrativa, assim como bateladas de dimensões menores reduzem o tempo de ciclo.

2.6.2 FLETCHER et al. (1991)

Produtos de alto valor ou de volumes muito baixos de produção são freqüentemente produzidos em processos batelada ou semi-contínuos. Processos em batelada consistem em uma seqüência de unidades, cada qual com sua capacidade especificada por seu volume. A cada estágio de processamento, o material é alimentado para uma unidade onde será processado por um período específico de tempo, depois do qual ele passa a um novo estágio. Reatores, tanques e centrífugas, são exemplos típicos de equipamentos em batelada. Plantas semi-contínuas, incluem estágios semi-contínuos, tais como bombas e trocadores de calor, cuja capacidade é definida pela taxa de saída de material. Por princípio toda planta em batelada é uma planta semi-contínua, onde os estágios semi-contínuos influem muito pouco no custo total da planta para ser considerada semi-contínua. A taxa de produção total de uma planta em batelada simples, é especificado por dois parâmetros : as dimensões da batelada e o tempo de um ciclo.

As dimensões da batelada são determinadas pela peça de equipamento com menor volume de processamento medido em termos de volume de produto final processado. O tempo de um ciclo é determinado pelo estágio de tempo mais longo de processamento. A produtividade pode ser aumentada, aumentando as dimensões da batelada ou reduzindo o tempo de um ciclo. As dimensões da batelada pode ser aumentada, aumentando-se o volume do estágio limitante, substituindo-o por um equipamento de volume maior, ou acrescentando volumes operando em fase. O Tempo do ciclo pode ser reduzido duplicando-se o equipamento no estágio limitante, dividindo o tempo do ciclo. Se apropriada, a unidade pode ser replicada reduzindo o tempo do ciclo por um fator.

Plantas de processo em batelada multi-produto são projetadas para fazer um número de produtos relacionados usando-se um mesmo equipamento operando na mesma seqüência. Os processos são operados em campanhas. Durante cada campanha em um determinado número de dias ou semanas, um único produto é fabricado. Pois a relação entre os volumes em cada estágio e o volume final de produto varia conforme o produto. Semelhantemente, os tempos de processo em cada estágio diferem e os estágios limitantes serão, previsivelmente diferentes para cada produto.

Os autores analisam o caso de uma planta existente em que novos níveis de produtividade e lucros de venda foram estabelecidos. Um novo equipamento na forma de uma *inserção* é acrescentado para atingir um perfil econômico ótimo.

As convenções adotadas, correspondem às normalmente aplicadas aos problemas de otimização de plantas multi-produtos em batelada, como formulados por SPARROW *et al.* (1975) e GROSSMANN & SARGENT (1979). Apresenta-se uma nova formulação matemática do problema, aplicada em diferentes exemplos inclusive o problema previamente considerado por VASELENAK *et al.* (1987). A nova formulação, elimina as restrições arbitradas introduzidas por VASELENAK *et al.* (1987) e aumenta a economia na solução do problema.

Formulação do problema.

Os produtos serão identificados pelo índice i e o número total manufaturado é o parâmetro fixo N . Precisamos determinar a quantidade de produto i produzida em qualquer batelada - quantidade B_i (kg). Em uma planta multi-produto os diferentes produtos passam essencialmente pelo mesmo caminho na planta, passando por uma seqüência de estágios.

Estes são identificados pelo índice j e o número total deles na planta é M . Cada estágio, assume-se, consiste em um número de peças de equipamento ou unidades que são iguais em função e operadas em paralelo.

O número de unidades nos estágios da planta existente é o valor fixo Z_j^{ant} , as unidades em cada estágio são identificadas com o índice x . O volume de uma unidade em um estágio existente na planta é $(V_j^{ant})_x$. Como resultado da escala de produção convencionalmente aplicada, considerações são assumidas em relação ao problema. Em uma nova planta normalmente, as unidades são idênticas em tamanho, entretanto, esta é uma propriedade que não assumimos na planta existente uma vez que se supõe que a mesma tenha sido objeto de inserções anteriores. Uma planta simples de batelada em dois estágios é ilustrada na figura 17.

Tempo de processo e escala de produção

Qualquer equipamento em batelada segue o ciclo básico de enchimento, processamento, esvaziamento, limpeza e uma

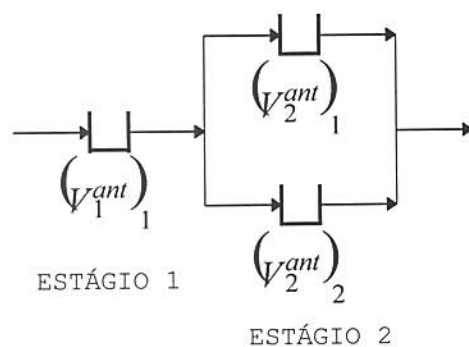


Figura 17 : Planta de batelada em dois estágios

possível espera para ser novamente utilizado. Para um produto i em uma unidade no estágio j isto é convencionado como o Tempo do ciclo da unidade, $T_{ij}(h)$, que exclui somente o tempo de espera. GROSSMANN & SARGENT (1979) usam a expressão:

$$T_{ij} = t_{ij} + c_{ij} \cdot B_i^{d \cdot j} \quad (2.5.43)$$

onde t_{ij} , c_{ij} , $d_j \geq 0$ são parâmetros fixos.

VASELENAK et al. (1987) tomam $c_{ij} = 0$ e adotam essa condição nesta formulação para termo de comparação. Assim o tempo do ciclo será t_{ij} . Se há $Z_j \geq 2$ unidades em paralelo o em um estágio em que elas são carregadas com o produto das bateladas anteriores - operam em seqüência - o tempo do ciclo do estágio será :

$$\frac{T_{ij}}{Z_j} \quad (2.5.20)$$

O tempo de operação da planta será $H(h)$ e é tipicamente 6000h - um ano de operação. Precisamos determinar o número de bateladas n_i do produto i manufaturado neste período. Um número limitado de enlaces

na escala de produção é utilizada. Assim, assumimos que as bateladas de um mesmo produtos podem se enlaçar ou seja diversas bateladas do produto podem estar sendo processadas ao mesmo tempo na planta. Entretanto não se admitem bateladas de diferentes produtos em um mesmo momento. Apesar de que na programação a longo prazo admita-se que um número de bateladas de outro produto seja preparada antes

da mudança para um outro produto. O problema em que diferentes produtos podem ser processados simultaneamente é muito complexo. Então em comum com GROSSMANN & SARGENT (1979), para o produto i definimos o tempo limitante do ciclo T_{Li} - intervalo de produção de sucessivas bateladas - como sendo o máximo ciclo de tempo em um dado estágio dado por:

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (1.5.22)$$

O estágio em que, esta condição é atingida para um produto em particular, é chamado de gargalo. Se o número de bateladas sucessivas de um produto é longo o suficiente tal que o tempo de mudança de produto possa ser ignorado, a restrição :

$$\sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \leq H \quad (2.5.49)$$

garante que o número de bateladas para cada produto a ser produzida pode ser programada dentro de um determinado período de operação.

Tamanhos das bateladas, produção total e ganhos

Cada produto manufaturado terá diferentes características de processo, tais que a capacidade de processamento para uma unidade de massa em cada peça de equipamento deverá variar de um equipamento para outro, e será diferente para os vários produtos. A capacidade de processamento requerida por unidade de massa de produto, assume-se, independe do volume de cada unidade. Este pode, então, ser identificado como um estágio. Este fator de

tamanho relativo à unidade de massa de produto i em uma batelada deixando a planta, para o volume requerido no processo em qualquer unidade em um estágio j é o parâmetro fixo $S_{ij}(\ell/\text{kg})$. Logo para o produto i em uma unidade de volume V_j em um estágio j , definimos o tamanho da batelada como V_j/S_{ij} .

O *tamanho mínimo da batelada* no estágio é o tamanho mínimo da unidade em batelada dentre todas as unidades operadas em seqüência em qualquer estágio. O tamanho mínimo de um estágio sobre todos os estágios é denominado *tamanho de estágio limitante*. O estágio em que esta situação ocorre é denominado *tamanho do gargalo*.

Para uma planta em particular os parâmetros de processamento em batelada são o número de ciclos, tamanho mínimo da batelada e o ciclo limitante de cada produto. Os valores dos parâmetros de processo determinam a produção total. SPARROW *et al.* (1975) e GROSSMANN & SARGENT (1979) propõem que uma quantidade de produto i manufaturada e um

período de operação que obtêm uma certa massa $Q_i(\text{kg})$ o que leva às restrições:

$$n_i \cdot B_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5.47)$$

Entretanto, em comum com VASELENAK *et al.* (1987), consideramos Q_i como a meta de produção que não é necessariamente alcançada. Os ganhos líquidos provenientes da venda das unidades de massa de produto i , p_i é introduzido. Este valor de produção é o preço de venda do item contra o custo dos itens. Logo a restrição 2.5.47 é substituída por :

$$n_i \cdot B_i \leq Q_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.15)$$

O critério ótimo do projeto é então o econômico, e o valor total da produção :

$$\sum_{i=1}^N p_i \cdot n_i \cdot B_i \quad (2.6.16)$$

constitui-se em um critério de otimização econômico.

Custo de Equipamento

O volume do equipamento é calculado tal que em um estágio j , o volume de uma unidade deve estar entre V_j^L e V_j^U . Quando se assume que um equipamento está disponível em um conjunto contínuo ou discreto de tamanhos, é necessária uma distinção quando definimos os modelos. Correntemente em comum com VASELENAK *et al.* (1987), SPARROW *et al.* (1975) e GROSSMANN & SARGENT (1979), assumimos que as novas unidades estão disponíveis em uma faixa contínua de tamanhos. O cus-

to de uma peça do equipamento do tipo a ser usado no estágio j é convencionalmente calculado como função do seu volume V na forma :

$$K_j + r_j \cdot V^{\gamma_j} \quad (2.6.17)$$

onde $K_j, \gamma_j, r_j \geq 0$ são parâmetros fixos, tais que o custo mínimo:

$$K_j + r_j \cdot (V_j^L)^{\gamma_j} \quad (2.6.18)$$

é não nulo. Esta função de custo (tipicamente $\gamma_j = 0.6$) tem sido implementada em nossa formulação, mas para comparação com VASELENAK *et al.* (1987), ajusta-se $\gamma_j = 1$

O Problema da inserção

Suponha que novas metas de produção são estabelecidas. Se elas podem ser alcançadas com o equipamento existente, nenhuma alteração tem de ser feita. Mas, se as novas metas de produção não podem ser alcançadas com o equipamento disponível, novos equipamentos deverão ser inseridos para elevar a produção de alguns produtos, então temos o problema de inserção na planta.

Em um problema de inserção, a configuração da planta têm de ser revista, a estratégia de operação, as dimensões dos equipamentos e os parâmetros de processo em batelada têm de ser encontrados para garantir a lucratividade da planta - a produção total subtraindo o custo de qualquer equipamento - é otimizada. A seleção e o número de equipamentos a serem inseridos em cada estágio da planta e o método de operação formam a estratégia de inserção e são decisões discretizadas, representadas na formulação matemática com variáveis binárias ou inteiras. O volume de

cada nova unidade e os parâmetros de processo em batelada podem assumir quaisquer valores, dentro de certos limites, e são representadas por variáveis contínuas. As decisões no plano para resolução do problema pode cair em duas classes, binária ou real. Esta distinção é importante, uma vez que caracteriza o método de resolução.

Novas unidades podem ser inseridas em paralelo com unidades já existentes. Isto forma uma nova configuração na planta para a se qual faz necessária uma nova estratégia de operação. A estratégia de operação para cada nova unidade permite as seguintes configurações :

1. Operação em paralelo com uma unidade existente m , aumentando efetivamente a sua capacidade - opção B
2. Operação em série com unidades existentes, reduzindo o tempo de ciclo - opção C

A formulação do problema de inserção usado por VASELENAK et al. (1987) - a formulação VGW - assume que ou a opção B ou a opção C é assumida para todos os produtos. A formulação de FLETCHER et al. (1991) para o problema - a formulação FHJ - permite uma estratégia de operação diferente apara cada produto.

Então, para, um produto i , uma nova unidade em particular poderá ser operada aplicando a opção B ou a opção C . Também é possível que a nova unidade não seja utilizada para um produto em particular. A maior flexibilidade da formulação FHJ é ilustrada no exemplo introduzido na Tabela 12.

Tabela 12 : Tempos de ciclo ilustrativos e fatores de tamanho para cada produto

Produto	Tempo de ciclo da unidade t_{ij}		Fator de Tamanho S_{ij}	
	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 1	Estágio 2
1	1/2	2	v	$v/2$
2	1	1	$v/2$	v

Dependendo da localização dos gargalos de produção podem ser aumentada pela opção B afim de permitir bateladas maiores de produtos processados ou pela opção C reduzindo o tempo de ciclo de um produto. A formulação FHJ é apresentada como um problema MINLP. Uma comparação quantitativa entre as formulações FHJ e VGW é feita usando os exemplos e as conclusões sobre os méritos das duas formulações é fornecida.

Antes de seguir para um exemplo mais complexo, uma simples ilustração das opções permitidas pelas duas formulações dadas, para manufaturar dois produtos P_1 e P_2 usando a planta básica ilustrada na figura 17.

Em uma planta existente, as duas unidades do estágio 1 são operadas alternadamente para obter o menor tempo de ciclo possível. Todas as três unidades têm volume V . O tempo de ciclo e o fator de tamanho são dados na Tabela 12. A planta existente é dada como caso 1 na Tabela 13. Os outros casos existentes são:

- Caso 2. Nova unidade no estágio 1 de volume V operando em fase para os dois produtos.
- Caso 3a. Nova unidade no estágio 1 de volume V operando em seqüência para os dois produtos.
- Caso 3b. Nova unidade no estágio 1 de volume $V/2$ operada em fase com os dois produtos.
- Caso 4a. Nova unidade no estágio 1 de volume V operada em fase com o produto P_1 e em seqüência para o produto P_2 .
- Caso 4b. Nova unidade no estágio 1 de volume $V/2$ não operada com o produto P_1 e em seqüência para o produto P_2 .
- Caso 5. Nenhuma nova unidade inserida, mas com as duas unidades no estágio 2 operando em fase para o produto P_2 e em seqüência para o produto P_1 .

A produção no caso 1 - a planta existente é calculada como se segue :

Os tempos de ciclo para o estágio 1 são dados na Tabela 22. No estágio 2, os tempos de ciclo são reduzidos por um fator 2 porque têm duas unidades operando

alternadamente. O tamanho das bateladas é calculado V/S_{ij} . A taxa de produção de cada produto é então calculado por (Tamanho limite da batelada)/(Tempo limite do ciclo).

Caso 2 é uma das inserções permitidas pela formulação de VGW. O volume efetivo no estágio 1 é dobrado, inserindo uma unidade de volume V em paralelo com a unidade existente e operando-os em fase. Os tempos de ciclo permanecem inalterados, mas o volume da batelada é aumentado para $2V/S_{ij}$. O caso 3a é uma inserção alternativa permitida pela formulação VGW. O tempo de ciclo efetivo para o estágio 1 é reduzido, inserindo uma unidade de volume V operada em sequência com a unidade original. Estas duas formas alternativas de inserções de volume V permitem dobrar a taxa de produção de P_1 e P_2 .

Tabela 13 : Quadro ilustrativo das estratégias de operação do problema

Caso		Operação		Tempo de Ciclo			Volume de Batelada			
		Estágio		Estágio		Limite	Estágio			Razão
		1	2	1	2		1	2	Limite	
1	P_1	-	C	1/2	1	1	1	2	1	1
	P_2	-	C	1	1/2	1	2	1	1	1
2	P_1	B	C	1/2	1	1	2	2	2	2
	P_2	B	C	1	1/2	1	4	1	1	1
3a	P_1	C	C	1/4	1	1	1	2	1	1
	P_2	C	C	1/2	1/2	1/2	2	1	1	2
3b	P_1	C	C	1/4	1	1	1/2	2	1/2	1/2
	P_2	C	C	1/2	1/2	1/2	1	1	1	2
4a	P_1	B	C	1/2	1	1	2	2	2	2
	P_2	C	C	1/2	1/2	1/2	2	1	1	2
4b	P_1	-	C	1/2	1	1	1	2	1	1
	P_2	C	C	1/2	1/2	1/2	2	1	1	2
5	P_1	-	C	1/2	1	1	1	2	1	1
	P_2	-	B	1	1	1	2	2	2	2

Os dois casos 2 e 3a também são permitidos pela formulação FHJ, porém, esta permite uma forma adicional de inserção de uma unidade V ao estágio 1. É a inserção descrita no caso 4a. A unidade adicional é operada em fase com P_1 e em sequência com P_2 . A simples modificação na estratégia de operação permite dobrar a taxa de produção de ambos os produtos sem nenhum custo superior ao dos casos 2 e 3a.

Caso 3b ilustra uma desafortunada restrição imposta por VGW quando inserindo unidades para reduzir o tempo de ciclo de todos os produtos. No caso 3a, a taxa de produção de P_2 é dobrada reduzindo-se o tempo de ciclo do estágio 1 e conseqüentemente seu Tempo limite de ciclo. No estágio 2 o volume do vaso para processar o tamanho limite do vaso para

P_2 é $V/2$ então, na operação, os vasos de volume $V/2$ estarão meio cheios. Então adicionando o vaso de volume $V/2$ ao estágio 1, permitiria o tempo de ciclo para P_2 ser reduzido, enquanto se mantém o tamanho limite da batelada. Assim, também faz-se necessário usar o novo vaso só no estágio 1 para reduzir o tempo de ciclo para o produto P_1 . O gargalo para o produto P_1 é o estágio 2, então não há um benefício com esta redução. Infelizmente, o tamanho limite da batelada requer um volume de processo V no estágio 1. Operando vasos $V/2$ e V em sequência com o estágio 1 reduz-se o tamanho da batelada no estágio 1 e conseqüentemente o tamanho limite da batelada do produto P_1 . Segue-se que as taxas de produção são reduzidas para P_1 e dobradas para P_2 . Esta estratégia de operação é ilustrada no caso 3b. Para o produto P_1 consideramos que a nova unidade irá operar em fase com a original, mas uma vez que, a capacidade disponível é $3V/2$ e o exigido pelo gargalo é V , então a

nova unidade estará subutilizada na produção de P_1 . Conseqüentemente a taxa de produção é dobrada para P_2 e constante para P_1 .

Finalmente, o caso 5 mostra como uma modificação simples na estratégia de operação, na planta existente, permite dobrar a taxa de produção de P_2 , sem a inserção de um novo equipamento. O problema de maximizar a saída a partir de uma planta existente o "ressequenciamento" que também tem um interesse prático.

A simples ilustração da tabela 13 demonstra que a formulação FHJ é potencialmente mais eficiente para obter um aumento na taxa de produção, que a formulação VGW, a um mesmo custo ou até um ganho maior a um custo menor. Os exemplos também ilustram a diferença qualitativa entre as

formulações FHJ e VGW. A formulação matemática detalhada de FHJ e sua aplicação para o problema VGW são dadas a seguir.

Formulação e solução

Uma estratégia de inserção é determinada por decisões discretizadas representada na formulação abaixo pelas variáveis binárias. Novas unidades no estágio j são identificadas pelo índice k e a decisão de adicionar novas unidades em particular é indicada pela variável binária y_{ijk} assumindo o valor 1. O número máximo de unidades que podem ser adicionadas ao estágio j e à planta num todo são denotadas por Z_j e Z^U , respectivamente.

A estratégia de operação B ou C com o produto i com m novas unidades em um estágio j é indicada por uma das variáveis binárias $\left(\psi_{ijm}^B\right)_x$ ou ψ_{ijm}^C assumindo o valor 1.

No estágio j , as m novas unidades tem um volume V_{ijm} . Correspondendo à estratégia de operação selecionada para o produto i , o volume de processamento necessário esta representado pela variável $(V_{ijm}^B)_x$ ou V_{ijm}^C . Os limites de todas as variáveis são dadas na nomenclatura.

A formulação MINLP

A função objetivo para o problema é a maximização :

$$\max \sum_{i=1}^N p_i \cdot n_i \cdot B_i - \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^{Z_j} (K_j \cdot \psi_{jm} - r_j \cdot V_{jm}) \quad (2.6.19)$$

as metas de produção geram as seguintes restrições:

$$n_i \cdot B_i \leq Q_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6.15)$$

O Tempo limite do ciclo para o produto i é dado por :

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (2.5.22)$$

onde

$$Z_j = Z_j^{ant} + \sum_{m=1}^{Z_j^C} \psi_{jm}^C \quad j = 1, \dots, M \quad (2.6.3)$$

o que leva às restrições :

$$Z_j^{ant} + \sum_{k=1}^{Z_j^C} \psi_{jk}^C \geq \frac{t_{ij}}{T_{Li}} \quad j = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.5)$$

o período de tempo de operação gera a restrição:

$$\sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \leq H \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5.49)$$

O limite no total de novas unidades leva à restrição :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^N \psi_{ijm} \leq Z^U \quad (2.6.20)$$

Para garantir que as novas unidades, quando usadas, satisfaçam os limites inferior e superior do volume necessita-se das restrições:

$$V_{ijm} \geq \psi_{jm} \cdot V_j^L, \quad j = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, Z_j. \quad (2.6.21)$$

A necessidade de que, para cada produto, cada nova unidade seja operada em seqüência com uma unidade existente ou em fase gera as restrições :

$$\begin{aligned} \psi_{ijm} &= \sum_{x=1}^{Z_j^{ant}} \left(\psi_{ijm}^B \right)_x + \psi_{ijm}^C, \quad i = 1, \dots, N, \\ j &= 1, \dots, M, \quad ; \quad m = 1, \dots, Z_j. \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Quando as novas unidades são adicionadas ao estágio j e usadas em fase com as unidades existentes, a necessidade de que os volumes sejam suficientes para processar a batelada leva às restrições da opção B de capacidade :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{Z_j^B} \left(V_{jm}^B \right)_x + \left(V_j^{ant} \right)_x &\geq S_{ij} \cdot B_i \quad i = 1, \dots, N \\ j &= 1, \dots, M \quad ; \quad x = 1, \dots, Z_j^{ant} \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Pode-se observar que, para algumas estratégias de inserção, $(V_{ijm}^B)_x = 1$ e o volume ótimo de processamento $(V_j^{ant})_x = 0$ então no estágio j , a nova unidade m não é usada para processar o produto i .

Suponhamos que substituindo 2.6.22 pelas inequações o que permite $y_{ijm}^C = 0$ e $(\psi_{ijm}^B)_x = 0 \forall m$ se $\psi_{ijm} = 1$. Isto força $(B_{ijm}^B)_x = 0$ e deve ser vista como a forma mais óbvia para representar uma nova unidade não utilizada para um produto i . Entretanto, isto poderia permitir que a programação de variáveis binárias distintas, nos leve a um mesmo design, que seria uma fonte de redundância que deve ser evitada.

Quando as novas unidades são inseridas no estágio j e usadas em seqüência com as unidades existentes, temos as restrições da opção C que garantem que os volume das unidades que operam em seqüência são suficientes para o volume total da batelada :

$$U[1 - \psi_{jm}^C] + V_{jm}^C \geq S_{ij} \cdot B_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M ; k = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.8)$$

onde U é o maior valor que garanta que a restrição seja satisfeita quando $\psi_{ijm}^C = 0$.

As restrições no volume de processo nas novas unidades geram as restrições:

$$0 \leq (V_{jm}^B)_x \leq (V_j^B)^U \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M ; x = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.9)$$

$$0 \leq V_{jm}^C \leq (V_j^C)^U \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M \quad m = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.10)$$

$$\left(V_{jm}^B \right)_x \leq U(\psi_{jm}^B)_x \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M \quad m = 1, \dots, Z_j^{ant} \quad (2.6.11)$$

$$V_{jm}^C \leq U(\psi_{jm}^C) \quad i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, M \quad m = 1, \dots, Z_j^C \quad (2.6.12)$$

Programações distintas para as novas unidades são garantidas pelas restrições :

$$\psi_{jk} \geq \psi_{j,k+1} \quad , \quad j = 1, \dots, M \quad , \quad k = 1, \dots, Z_j - 1 \quad (2.6.23)$$

Equacionando o problema de MINLP

Pode-se equacionar o problema de MINLP, equacionando-se uma seqüência de subproblemas. Estes se alternam entre a programação não linear (PNL) e a linear mista inteira (MILP). Indexados por k , iniciam-se com a PNL. O problema PNL corresponde ao MINLP com valores fixos das variáveis binárias, então o problema MINLP necessita valores iniciais. Fisicamente, a solução $MILP^k$ determina uma estratégia de inserção para a qual os valores ótimos para os volumes de novas unidades e os parâmetros de processo são determinados pela solução do PNL^{k+1} . A menos que se tenha uma idéia, intuitiva ou heurística, do ótimo na estratégia de inserção, escolhemos os valores iniciais das variáveis binárias correspondentes aos valores da planta não modificada. Os parâmetros ótimos de processo são sempre interessantes, uma vez que, as novas metas de produção são atingidas. Então soluciona-se o problema MINLP.

O problema MILP minimiza grande parte da aproximação linear da função objetivo do problema MINLP - linearizações são feitas na solução de cada problema PNL - submetido às restrições lineares e um conjunto de aproximações para cada restrição não linear do problema MINLP, junto com as que tornam os valores anteriores impraticáveis.

O algoritmo leva à solução global do problema de MINLP convexo. Uma vez convexos, os problemas de PNL têm uma solução global única e as linearizações podem ignorá-la. Isto garante que na região em que se soluciona o problema MINLP, estando inclusa na região em que o problema de MILP, que o conjunto de linearizações da função objetivo do problema de MINLP também ignoram-na. Entretanto, na MINLP

definida de 2.6.19 a 2.6.23 as exponenciais negativas do termo representando a produção na função objetivo são convexas.

VASELENAK et al. (1987) mostram que se cada uma das variáveis binárias é fixada, o problema PNL resultante tem uma única solução ótima. Entretanto, a linearização das exponenciais negativas superestimam a função objetivo do problema, assim um sistema de "reduzidores" lineares deve ser montado. Conseqüentemente o algoritmo pode ser apresentado para encontrar a solução global da formulação acima apresentada.

Exemplos

Três exemplos são apresentados. Os dois primeiros devem-se a VASELENAK et al. (1987) e demonstram que a estratégia de inserção dá melhores resultados que a formulação FHJ. O terceiro exemplo demonstra uma situação onde a formulação FHJ resulta em uma otimização considerada

melhor que a obtida usando a formulação VGW. Uma situação como esta é sempre esperada quando há uma diferença significativa em tempos e fatores de tamanho entre os produtos em cada estágio e seus gargalos em diferentes estágios.

Cada exemplo foi equacionado usando as duas formulações. Os resultados apresentados em termos de seqüências de estratégias de inserções consideradas durante a solução de cada problema. A opção de operação para cada configuração básica é indicada por B se a nova unidade operar em fase com uma m existente, ou C se operar em seqüência com as unidades existentes. Em nossa formulação, se uma nova unidade não é usada na manufatura de um produto em particular, isto é indicado pela variável n_i .

Exemplo 4

Os dados para este exemplo estão na tabela 14 e a seqüência de inserções considerando as formulações FHJ e VGW, estão nas tabelas 15 e 16 respectivamente.

O valor da função objetivo para o projeto ótimo, com a formulação FHJ, mostra um ganho de apenas 0.3% sobre a formulação VGW. Isto se deve à produção relativamente grande comparada com o custo de novas unidades. Entretanto, uma vez que as novas metas de produção são alcançadas usando as duas formulações, o custo do novo equipamento pode ser o indicador para comparar os projetos. A formulação VGW requer o gasto de \$85540 para o novo equipamento. A Formulação FHJ gasta \$75950 o que representa uma economia de 11%.

Tabela 14 : Dados do exemplo 4

Produto	Estágio 1 t_{ij}	Estágio 2 (h)
P_1	4,0	6,0
P_2	5,0	3,0
Produto	S_{ij} (ℓ/kg)	
P_1	2,0	1,0
P_2	1,5	2,25
Z_j^{ant}	1	1
V_j^{ant}	4000	3000
Z_j	2	2
K_j (\$)	30560	30560
r_j (\$/ℓ)	32,54	32,24
V_j^L (ℓ)	0	0
V_j^U (ℓ)	4000	3000
Produto	p_i (\$/kg)	Q_i (kg)
P_1	1,0	1200000
P_2	2,0	1000000

Tabela 15 : Estratégias de inserções considerando VGW

NLP (k)	Novas unidades		Operação (todos os produtos)	Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)		
1	-	-	-	2750000
2	2	1687	B_1	3115000

Tabela 16 : Estratégias de inserções considerando FHJ

NLP (k)	Novas unidades		Operação		Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)	P_1	P_2	
1	-	-	-	-	2750000
2	2	1687	N	B_1	3115000
3	1	1358	B_1	C	3125000
4	2	1395	C	B_1	3124000

Exemplo 5

Para este exemplo, os dados estão na Tabela 17 e a sequência de estratégias de inserção considerados são dados nas Tabela 18 para VGW e tabela 19 para FHJ.

O valor da função objetivo para o projeto ótimo da formulação FHJ mostra um pequeno ganho de 0.7% sobre a VGW. As metas de produção não são alcançadas por nenhum dos projetos. Com VGW gasta-se menos com o novo equipamento, mas um ganho na produtividade com FHJ compensa o custo largamente.

Tabela 17 : Dados do exemplo 5

Produto	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 4
	t_{ij} (h)			
P_1	6,3822	4,7393	8,3353	3,9443
P_2	6,7938	6,4175	6,4750	4,4382
P_3	1,0135	6,2699	5,3713	11,9213
P_4	3,1977	3,0415	3,4609	3,3047
Produto	S_{ij} (ℓ/kg)			
P_1	7,9130	2,0815	5,2268	4,9523
P_2	0,7891	0,2871	0,2744	3,3951
P_3	0,7122	2,5889	1,6425	3,5903
P_4	4,6730	2,3586	1,6087	2,7879
Z_j^{ant}	1	1	2	1
V_j^{ant}	4000	4000	3000	3000
Z_j	2	2	2	2
K_j (\$)	15280	38200	45840	10180
c_j (\$/ℓ)	16,27	40,68	48,81	10,84
V_j^L (ℓ)	0	0	0	0
V_j^U (ℓ)	4000	4000	3000	3000
Produto	p_i (\$/kg)	Q_i (kg)		
P_1	1,114	268200		
P_2	0,535	156000		
P_3	0,774	189700		
P_4	0,224	166100		

Tabela 18 : Estratégias de inserções considerando VGW

NLP (k)	Novas unidades		Operação (todos os produtos)	Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)		
1	-	-	-	461400
2	4	2547	B_1	518000

Tabela 19 : Estratégias de inserções considerando FHJ

NLP (k)	Novas unidades		Operação				Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)	P_1	P_2	P_3	P_4	
1	-	-	-	-	-	-	461400
2	4	2547	N	B_1	B_1	N	518000
3	4	3000	N	B_1	C	C	521800

Exemplo 6

Na Tabela 20 estão os dados deste exemplo e na sequência as estratégias de inserção usadas nas formulações VGW e FHJ, dadas nas Tabelas 21 e 22, respectivamente :

Tabela 20 : Dados do exemplo 6

Produto	Estágio 1	Estágio 2
	t_{ij} (h)	
P_1	4,7	10,1
P_2	4,1	3,8
P_3	2,9	2,7
P_4	5,3	11,8
Produto	S_{ij} (ℓ/kg)	
P_1	4,8	2,0
P_2	3,6	4,9
P_3	3,9	5,6
P_4	8,3	3,6
N_j^{ant}	1	1
V_j^{ant}	4000	3000
Z_j	2	2
K_j (\$)	12800	11400
r_j (\$/ ℓ)	13,63	12,14
V_j^L (ℓ)	1000	1000
V_j^U (ℓ)	4000	3000
Produto	p_i (\$/kg)	Q_i (kg)
P_1	0,63	290000
P_2	0,53	300000
P_3	0,44	350000
P_4	1,09	140000

Com a formulação FHJ, o valor ótimo da função objetivo mostra um ganho de 12% sobre a formulação VGW. As novas metas de produção são alcançadas pelas duas formulações. Como no exemplo 4, o custo do novo equipamento pode ser usado para comparar os projetos. A formulação VGW requer o gasto de \$96400 para compra de um novo equipamento. O valor correspondente na formulação FHJ é \$32000, o que significa uma economia de 67%.

A solução ótima com a formulação FHJ envolve a adição de uma unidade de volume 1699 ℓ , em paralelo com a existente no estágio 2 a um custo de \$32000, sendo usada em seqüência por P_1 e P_4 e em fase por P_2 e P_3 . Com a formulação VGW seria razoável considerar a estratégia de inserção. Adicionando duas unidades no estágio 2 em paralelo com a existente. Uma operada em fase com a original e a outra em seqüência (para todos os produtos). Claramente a adição de unidades de 1699 ℓ permite os mesmos níveis de produção obtidos como ótimos na formulação. Estes níveis de produção estão no limite superior resultando em um valor total de produção de \$648300. Quando o custo das novas unidades (\$6400) é deduzido, a lucratividade é de \$54800.

Porque não aplicarmos a solução usando a formulação VGW? A resposta é que somos forçados a dividir o tempo de ciclo para P_2 e P_3 o que não tem nenhuma vantagem prática uma vez que o gargalo do ciclo estão no estágio 1, mas adicionar somente uma unidade de dimensões maiores mantém o tamanho limite da batelada o que ocorre no estágio 2. Se o limite superior no volume das unidades é aumentado, encontra-se que o volume ótimo das novas unidades aumentadas na estratégia de inserção em um volume de 1631 ℓ

operando em fase com o original e um volume de 4631 ℓ operando em seqüência. O custo extra de unidades maiores reduz a lucratividade para \$549500 e a estratégia de inserção permanece correspondente à PNL abaixo. Então, verificamos na prática o efeito das restrições no problema de projeto na formulação VGW que foi indicado no exemplo.

Tabela 21 : Estratégias de inserções considerando VGW

NLP (k)	Novas unidades		Operação (todos os produtos)	Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)		
1	-	-	-	386500
2	2	3000	C	490100
3	1	3465	B_1	550900
	2	2137	B_1	
4	1	2624	B_1	551900
	2	3000	C	
5	1	3733	C	542000
	2	2568	C	

Tabela 22 : Estratégias de inserções considerando FHJ

NLP (k)	Novas unidades		Operação				Objetivo (\$)
	estágio	volume (ℓ)	P_1	P_2	P_3	P_4	
1	-	-	-	-	-	-	386500
2	2	1699	C	B_1	B_1	C	616300

Comparação entre as formulações

O exemplo 5 mostra que nem sempre é possível comparar as formulações em termos de gastos com novos equipamentos, uma vez que o valor da produção não será o mesmo, se as metas de produção não forem atingidas. Quando as duas formulações são consideradas em termos de lucratividade da

planta com inserção contra a lucratividade da planta existente, a performance das formulações é comparável, Tabela 23.

Tabela 23 : Comparação das formulações

Exemplos	1	2	3
Formulação VGW (%)	13	12	43
Formulação FHJ (%)	14	13	59

Discussão

A nova formulação para a otimização do projeto de uma planta multi-produto em batelada apresentada inclui a formulação apresentada por VASELENAK et al. (1987) como um subconjunto. Então a nova formulação deve fornecer resultados ao menos tão bons quanto os da formulação VGW.

Os exemplos trazem à baila um caso que revela um lapso na formulação do MINLP adotado por VASELENAK et al. (1987). As soluções que se obtêm não coincidem com o ótimo que eles afirmam obter, isto é : não é a máxima lucratividade que se obtêm, quer adicionando unidades em paralelo ou em seqüência.

Conclui-se que: a nova formulação de inserção apresentada aqui representa um avanço significativo na prática previamente adotada. Deve-se notar, que mesmo esta formulação exclui o "design" das plantas que podem alcançar na prática, pelo ressequenciamento dos equipamentos ou agrupando novos equipamentos, de formas alternativas, para os diferentes produtos.

Deve-se notar que: cada grau de flexibilidade de operação introduz um número maior de (decisões) variáveis binárias. Para a formulação acima, os subproblemas PNL são simples e a dificuldade dominante para a resolução do problema de MINLP é a solução do problema de Programação Linear Mista Inteira (MILP) .

O esforço computacional está essencialmente relacionado com o número de variáveis inteiras e nossa formulação requer N vezes o número de formulações de VASELENAK *et al.* (1987), onde N é o número de produtos. Então, para um problema com uma grande quantidade de produtos, a formulação potencialmente se encarece. Para os exemplos estudados, porém, ambas formulações podem ser solucionadas em uma estação de trabalho SUN 3/60.

2.6.3 LEE *et al.* (1993)

O contínuo desenvolvimento na produção de produtos de alto valor em indústrias químicas tem estimulado estudos sobre os processos em batelada. Processos em batelada são usados por sua flexibilidade em acomodar uma variedade de matérias-primas, certas etapas de natureza particular (como crescimento de bactérias e etc.) e as sazonalidades das demandas de mercado.

Pelos méritos descritos, não somente o projeto ótimo de uma nova planta mas também o problema de inserções em uma planta existente, tem sido tratado em diversos artigos. Devido às alterações no volume de produção e preço de venda, problema de inserção de novos equipamentos em uma planta em batelada instalada desponta. Então, podemos

equacionar o problema de inserção ótima, para economicamente determinar as dimensões ótimas do novo equipamento. A planta em batelada consiste em uma sequência de estágios contínuos e semi-contínuos. Como as etapas semi-contínuas contribuem pouco para o custo total, nenhum estágio semi-contínuos é considerado no "design" da inserção. O problema de inserção ótima de processos em batelada multi-produto foi tratado por VASELENAK *et al.* (1987) e FLETCHER *et al.* (1991). Em seus artigos mostram, que o problema de inserção ótima para uma planta multi-produto pode ser formulada como uma MINLP.

A MINLP adotada por VASELENAK *et al.* (1987) é inserir todas as unidades ou em paralelo ou em sequência. A formulação da MINLP por FLETCHER *et al.* (1991) mostra que uma unidade pode operar em diferentes formas para diferentes produtos. Embora tenham usado variáveis binárias para determinar a posição de inserção, este artigo mostra que as variáveis podem ser substituídas por regras heurísticas. Ainda, Programas de solução de MINLP não podem resolver problemas com muitas variáveis e não-linearidades. Neste artigo, um procedimento heurístico é apresentado determinando as posição dos equipamentos. Então, um PNL (Problema não linear) é formulado afim de obter-se as dimensões ótimas e usou-se o procedimento para tratar quatro exemplos (VASELENAK *et al.*, 1987 e FLETCHER *et al.*, 1991).

Inserção Ótima

Geralmente, o problema de inserção ótima é equacionado em duas etapas : determinar a posição de inserção do equipamento e qual o tamanho do equipamento a fim de maximizar o lucro.

Determinação da posição de inserção do equipamento.

Assumimos que N produtos são produzidos em um processo de M estágios em batelada. Os índices i e j identificam os produtos e estágios respectivamente. O tamanho da unidade em batelada B_{ij} é determinado por (GROSSMAN & SARGENT, 1979) :

$$B_{ij} = V_j / S_{ij} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M \quad (2.5.44)$$

onde V_j é o volume do j ésimo equipamento e S_{ij} é o fator das dimensões do j ésimo equipamento que produz I . Assim LBS (Tamanho Limitante da Batelada) B_i é expresso por :

$$B_i = \min_{j=1, \dots, M} B_{ij} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.24)$$

O Tempo de ciclo da unidade T_{ij} é usualmente determinado por (GROSSMAN & SARGENT, 1979) :

$$T_{ij} = t_{ij} + c_{ij} \cdot B_i^{d \cdot j} \quad (2.5.43)$$

onde c_{ij} e d_{ij} são coeficientes de correlação entre T_{ij} e B_i . Para compararmos com FLETCHER et al. (1991), T_{ij} é definido como t_{ij} ($c_{ij}=0$).

$$T_{ij} = t_{ij} \quad (2.6.25)$$

LCT (Ciclo Limitante de Tempo) T_{Li} é expresso por:

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \left\{ \frac{T_{ij}}{Z_j} \right\} \quad (2.5.22)$$

onde Z_j é o número de equipamentos inseridos no j ésimo estágio em paralelo.

A taxa de produção total da planta em batelada é dado por dois parâmetros LBS e LCT. Quando um novo equipamento é inserido em uma planta existente, a estratégia de operação tem duas formas. Uma é fora de fase (FF), reduzindo o LCT; outra é em fase (EF) o que aumenta a LBS. As estratégias estão descritas nas figuras 12 e 13 .

A figura 12 mostra o efeito que reduz o LCT ao inserir o equipamento em seqüência em um estágio. A figura 13 mostra o efeito que aumenta LBS de 80 para 100 ao se inserir o equipamento em paralelo em um estágio. Desta forma 2 regras heurísticas podem ser enunciadas:

1. Analisar a planta existente segundo a equação 5, e inserir novas unidades fora de fase (FF) onde ocorrer o LCT.
2. Analisar a planta existente segundo a equação 2, e inserir novas unidades em fase (EF) onde ocorrer o LBS.

Tabela 24 : dados de Processo do exemplo ilustrativo.

Produto	t_{ij} (h)	
	estágio 1	estágio 1
A	0.5	1
B	1	0.5
Produto	S_{ij} (ℓ/kg)	
	estágio 1	estágio 1
A	V	V/2
B	V/2	V
V_j^{ant}	V	V

Este algoritmo, que determina a posição do equipamento a ser inserido, com referencia à figura 17 (FLETCHER et al., 1991). Com os dados da tabela 24, para cada produto fabricado, analisa-se as equações 2.6.25 e 2.5.22 , onde ocorrem LCT e LBS. Como resultado da análise temos a Tabela 25.

Tabela 25 : Análise do Processo ilustrativo

Produto	LCT	LBS	estágio 1	estágio 2
A	$\max(0.5;1)=1$ estágio 2	$\min(V/V;V/[V/2])=1$ estágio 1	LBS	LCT
B	$\max(1;0.5)=1$ estágio 1	$\min(V/[V/2];V/V)=1$ estágio 2	LCT	LBS

Três sugestões de podem ser feitas baseadas nas regras 1 e 2 referindo-se à Tabela 25:

- 1ª Sugestão.** Equipamento FF é inserido no estágio 1 no caso do produto A ou equipamento EF é inserido no estágio 1 no caso do produto B
- 2ª Sugestão.** Equipamento FF é inserido no estágio 1 no caso do produto A ou equipamento EF é inserido no estágio 1 no caso do produto B
- 3ª Sugestão.** Adiciona-se ambos os equipamentos propostos pela regra 1 no estágio 1, como o proposto pela regra 2 no estágio 2.

LEE et al. (1993) sintetiza sete casos partindo das três sugestões (figura 18). A Tabela 26 resume os efeitos entre os sete casos e a produtividade de cada caso (LBS/LCT). O caso 1 é o do processo já existente (produtividade=1). No caso 6 quadruplicando a produtividade

implica na inserção de três equipamentos . Tempo de ciclo da unidade FF e o tamanho da batelada da unidade EF no j ésimo estágio são dados pelas equações:

$$(\text{Ciclo de tempo unitário})_j = \frac{\text{ciclo de tempo da unidade existente}}{(\text{No. de unidades existentes} + \text{No. de unidades inseridas})_j}$$

$$(\text{Tamanho da batelada unitária})_j = \frac{\text{Vol. de unidades existentes} + \text{Vol. de unidades inseridas}}{(\text{Fator de tamanho das unidades existentes})_j}$$

Quando o volume de vendas é infinito, a contínua inserção de novos equipamentos é boa para elevar a produtividade. O custo fixo é considerado quando uma nova unidade é adicionada. A inserção ótima é determinada como a função objetivo F que se segue:

$$F = n \cdot G - x \cdot C \quad (2.6.26)$$

onde n é o aumento na produtividade, x é o número de equipamentos adicionado, G é o lucro anual da venda, e C é custo da inserção.

A Tabela 26 apresenta os valores de F em cada caso. Se $C > G$ então o melhor caso é o 2. Se $C < G$ então, o melhor caso é o 6.

Tabela 26 : Dados de F

CASO	F	CASO	F
1	G	5	$3G-2C$
2	$2G-C$	6	$4G-3C$
3	$1,5G-C$	7	$4G-4C$
4	$2G-2C$		

Tabela 27 : Estratégias de Inserção

CASO	PRODUTO	OPERAÇÃO		CICLOS (h)		LCT	TAMANHO (kg)		LBS LCT	Figura 18 : Opções de inserção	
		ESTÁGIO	ESTÁGIO	ESTÁGIO	LBS						
							1	2			1
1	A	EF		0.5	1	1	1	2	1	1	
	B	FF		1	0.5	1	2	1	1	1	
2	A		FF	0.5	1	1	2	2	2	2	
	B		EF	0.5	0.5	0.5	2	1	1	2	
3	A		FF	0.5	2/3	2/3	1	2	1	3/2	
	B		EF	1	0.5	1	2	3/2	3/2	3/2	
4	A	EF	FF	0.5	0.5	0.5	1	2	1	2	
	B	FF	EF	1	0.5	1	2	2	2	2	
5	A	EF	FF	0.5	2/3	2/3	2	2	2	3	
	B	FF	EF	0.5	0.5	0.5	2	3/2	3/2	3	
6	A	EF	FF	0.5	0.5	0.5	2	2	2	4	
	B	FF	EF	0.5	0.5	0.5	2	2	2	4	
7	A	EF	FF	0.5	1/3	0.5	3	2	2	4	
	B	FF	EF	1/3	0.5	0.5	2	2	2	4	

EF ⇒ Equipamento operando em Fase FF ⇒ Equipamento operando fora de Fase

Determinação da dimensão do equipamento a ser inserido.

Geralmente a produção é limitada como menor do que uma determinada demanda predeterminada; dessa forma a restrição será:

$$n_i \cdot B_i \leq Q_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.15)$$

onde $n_i B_i$ é a quantidade de produto i , Q_i é o limite superior de produção do produto i , e n_i é o número de ciclos. O tempo de operação H é maior que o tempo total de produção :

$$\sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \leq H \quad (2.5.49)$$

O custo linearizado do equipamento é expresso por (VASELENAK et al., 1987):

$$C = K_j + r_j \cdot V_j^{novo} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.6.27)$$

onde K_j é o custo fixo e r_j é o coeficiente do custo. O lucro sobre a venda é expresso por (VASELENAK et al., 1987):

$$L = \sum_{i=1}^N p_i \cdot n_i \cdot B_i \quad (2.6.16)$$

onde p_i é o preço de venda do produto i . Então a função objetivo é definida maximizando o lucro expresso pela equação 2.6.16 subtraída a equação 2.6.29.

A função objetivo e suas restrições estão resumidas no Problema Não Linear que se segue:

$$\max \sum_{i=1}^N p_i \cdot n_i \cdot B_i - \sum_{j=1}^M (K_j + c_j \cdot V_j^{novo}) \quad (2.6.28)$$

Sujeito a :

$$n_i \cdot B_i \leq Q_i , \quad i = 1 , \dots , N \quad (2.6.15)$$

$$\sum_{i=1}^N n_i \cdot T_{Li} \leq H \quad (2.5.49)$$

$$V_j^L \leq V_j^{novo} \leq V_j^U \quad j = 1, \dots, N \quad (2.6.29)$$

$$n_i , B_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.30)$$

onde B_i e T_{Li} são obtidos pelas equações 2.6.24 e 2.5.22.

O número de bateladas previstas em geral não será um inteiro, assim o valor será simplesmente truncado para o maior inteiro. Como o número de bateladas é grande, a aproximação é razoável.

Caso o novo equipamento seja inserido no $j^{\text{ésimo}}$ estágio e o novo equipamento seja operado fora de fase quando o produto i é produzido, as seguintes equações são incluídas nas restrições:

$$B_i \leq \frac{V_{ij}^{nov}}{S_{ij}} \quad [j = j]$$

$$B_i \leq \min(V_j^{ant}/S_{ij}) \quad [j = 1, \dots, M \text{ e } j \neq j] \quad (2.6.31)$$

T_{Li} da equação 2.5.22 deve ser substituído pelo T_{Li} da equação 2.6.32.

$$T_{ij}^{novo} = \frac{T_{ij}}{Z_j + 1} \quad [j = j]$$

$$T_{ij}^{novo} = \frac{T_{ij}}{Z_j} \quad [j = 1, \dots, M \text{ e } j \neq j]$$

$$T_{Li} = \max_{j=1, \dots, M} \{T_{ij}^{novo}\} \quad (2.6.32)$$

Se o novo equipamento é inserido no j ésimo estágio e novo equipamento seja operado em fase, as seguintes equações devem ser adicionadas :

$$B_i \leq \frac{V_{ij}^{novo} + V_{ij}^{ant}}{S_{ij}} \quad [j = j]$$

$$B_i \leq \min(V_j^{ant}/S_{ij}) \quad [j = 1, \dots, M \text{ e } j \neq j] \quad (2.6.33)$$

O Problema definido pelas equações 2.6.28 a 2.6.33 é o Problema Não Linear (PNL). O volume ótimo é determinado, equacionando o problema acima aplicando o método do gradiente reduzido. A solução para uma planta existente é obtida com $V_j^{novo} = 0$

Para uma planta de M estágios o número de PNL a serem solucionadas será 2^M no pior caso, mas se forem conhecidos os gargalos do processo esse número será menor que 2^M .

Aplicações

Exemplo 7 (VASSELENAK et al., 1987 ; FLETCHER et al., 1991)

A Figura 19 mostra a estrutura de processo para o exemplo 7.



Figura 19 : Fluxograma de Processo para o exemplo 7 e 8

A demanda de produtos A e B muda de 1000 Ton. de A/ano e 800 Ton. de B/ano para 1200 Ton. de A/ano e 1000 Ton. de B/ano. O equipamento existente vem sendo usado para atender a demanda anterior. O problema de inserção ocorre para atender à nova demanda. Pelo algoritmo sugerido por LEE et al. (1993) primeiro analisam-se os dados da Tabela 28 e então os resultados na Tabela 29.

Tabela 28 : Dados do Exemplo 7

Produto	t_{ij} (h)	
	estágio 1	estágio 2
A	4,0	
B	5,0	

Produto	S_{ij} (kg)	
	estágio 1	estágio 2
A	2,0	1,0
B	1,0	2,25
V_j^{ant}	4000	3000
V_j^L	0	0
V_j^U	4000	3000
K_j (\$)	30560	30560
r_j (\$/ℓ)	32,54	32,24

Produto	p_i (\$/kg)	Q_i (kg/ano)
A	1,0	1200000
B	2,0	1000000

Equacionam-se três PNL, inserindo os equipamentos no estágio 1, no estágio 2 e nos estágios 1 e 2. As soluções ótimas são obtidas usando o método do gradiente reduzido. Os tempos de processamento são dados para uma estação de trabalho IRIS25G operando sob UNIX 4.3. Os resultados das três PNL estão resumidos na Tabela 30. A Tabela 30 indica o volume ótimo do equipamento (1358,1) operando no estágio 1 em fase para o produto A e fora de fase para o produto B.

Tabela 29 : Análise do Processo do Exemplo 7

Produto	LCT	LBS	estágio 1	estágio 2
A	6	4000/2	LCT	LBS
B	5	3000/2.25	LBS	LCT

Tabela 30 : Resultados do exemplo 7

PNL	nova unidade		operação		Lucro (\$)	Tempo CPU (s)
	estágio	tamanho (ℓ)	A	B		
-	existente	-	-	-	275150	0,6
1	1	1358	EF	FF	3125200	0,7
2	2	1395	FF	EF	3124500	0,8
3	1	1545	EF	FF		
	2	1554	FF	EF	3041600	1,1

Exemplo 8

O processo estruturado para o problema 2 é o mesmo do problema 1. Consideram-se os termos c_{ij} e d_{ij} no tempo de ciclo da unidade T_{ij} . Este problema lida com a aplicação das regras heurísticas quando os tempos de processo não são constantes. Também implementamos o custo anual do equipamento com γ_j :

$$K_j + r_j \cdot (V_j^{novo}) \gamma_j \quad (2.6.34)$$

Tabela 31 : Dados do exemplo 8

Produto	estágio 1			estágio 2		
	$t_{ij}(\text{h})$	c_{ij}	d_{ij}	$t_{ij}(\text{h})$	c_{ij}	d_{ij}
A	4,0	0,0172	0,865	6,0	0,0081	0,967
B	5,0	0,0364	0,823	3,0	0,0574	0,623

Tabela 31 : Dados do exemplo 8 (continuação)

Produto	S_{ij} (kg)	
	estágio 1	estágio 2
A	2,0	1,0
B	1,0	2,25
V_j^{ant}	4000	3000
V_j^L	0	0
V_j^U	4000	3000
K_j (\$)	30560	30560
r_j (\$/ℓ)	32,54	32,24
γ_j	0,6	0,54

Produto	P_i (\$/kg)	Q_i (kg/ano)
A	1,0	1200000
B	2,0	1000000

Tabela 32 : Análise do Processo do Exemplo 8

Produto	LCT	LBS	estágio 1	estágio 2
A	16,3	4000/2	LBS	LCT
B	8,1	3000/2.25	LCT	LBS

A Tabela 33 apresenta a inserção ótima do exemplo 8.

Tabela 33 : Resultados do exemplo 8

PNL	nova unidade		operação		Lucro (\$)	Tempo de CPU (s)
	estágio	tamanho (ℓ)	A	B		
-	existente	-	-	-	861090	1,0
1	1	2000	EF	FF	1688500	1,1
2	2	3000	FF	EF	1069500	1,1

Exemplo 9 (FLETCHER et al., 1991)

A figura 20 mostra o fluxograma do processo do exemplo 9. Neste problema a planta produz quatro produtos diferentes em dois estágios.



Figura 20 : Fluxograma de Processo para o exemplo 9

Utilizando os dados da Tabela 34, analisamos o problema na Tabela 35 e determinamos o volume ótimo da mesma forma que no problema 7.

Tabela 34 : Dados do Exemplo 9

Produto	t_{ij} (h)	
	estágio 1	estágio 2
A	4,7	10,1
B	4,1	3,8
D	2,9	2,7
E	5,3	11,8

Produto	S_{ij} (kg)	
	estágio 1	estágio 2
A	4,8	2,0
B	3,6	4,9
D	3,9	5,6
E	8,3	3,6
V_j^{ant}	4000	3000
V_j^L	0	0
V_j^U	4000	3000
K_j (\$)	12800	11400
r_j	13,63	12,14

Produto	P_i (\$/kg)	Q_i (kg/ano)
A	0,63	290000
B	0,53	300000
D	0,44	350000
E	1,09	140000

Tabela 35 : Análise do Processo do Exemplo 9

Produto	LCT	LBS	estágio 1	estágio 2
A	10,1	4000/4,8	LBS	LCT
B	4,1	3000/4,9	LCT	LBS
D	2,9	3000/5,6	LCT	LBS
E	11,8	4000/8,3	LBS	LCT

A Tabela 36 apresenta os resultados da análise para o exemplo 9. Inserindo o novo equipamento (1699,1 ℓ) no estágio 2 em paralelo trará o lucro máximo.

Tabela 36 : Resultados do exemplo 9

PNL	nova unidade		operação				Lucro (\$)	Tempo de CPU (s)
	estágio	tamanho (ℓ)	A	B	D	E		
-	existente	-	-	-	-	-	406300	1,2
1	1	3200	EF	FF	FF	EF	474170	1,3
2	2	1699	FF	EF	EF	FF	618730	1,3
3	1	2204	EF	FF	FF	EF	524740	1,4
	2	2585	FF	EF	EF	FF		

Exemplo 10

(VASSELENAK *et al.*, 1987 ; FLETCHER *et al.*, 1991)

A figura 21 mostra o fluxograma do processo do exemplo 10. Neste problema, a planta produz quatro produtos diferentes em quatro estágios.

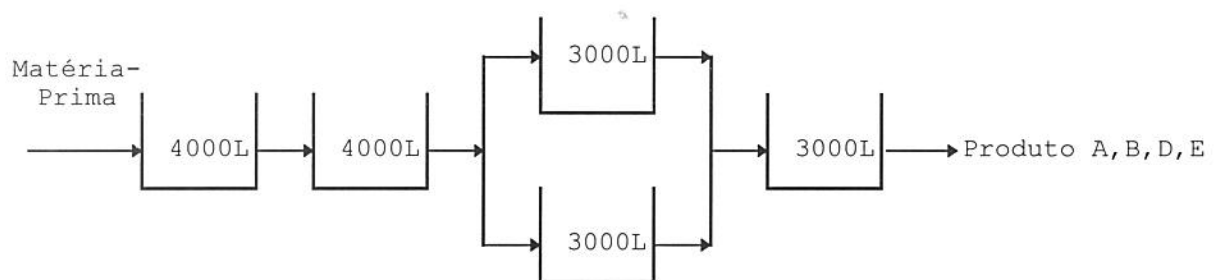


Figura 21 : Fluxograma do exemplo 10

Com os dados da Tabela 37, analisamos o exemplo 10 na Tabela 38.

Tabela 37 : Dados do Exemplo 10

Produto	t_{ij} (h)			
	estágio 1	estágio 2	estágio 3	estágio 4
A	6,3822	4,7393	8,3353	3,9443
B	6,7938	6,4175	6,4750	4,4382
D	1,0135	6,2699	5,3712	11,9213
E	3,1977	3,0415	3,4609	3,3047

Produto	S_{ij} (kg)			
	estágio 1	estágio 2	estágio 3	estágio 4
A	7,9130	2,0815	5,2268	4,9523
B	0,7891	0,2871	0,2744	3,3951
D	0,7122	2,5889	1,6425	3,5903
E	4,6730	2,3586	1,6087	2,7879
V_j^{ant}	4000	4000	3000	3000
V_j^L	0	0	0	0
V_j^U	4000	4000	3000	3000
K_j (\$)	15280	38200	45840	10180
r_j (\$/ℓ)	16,27	40,68	48,81	10,84

Produto	P_i (\$/kg)	Q_i (kg/ano)
A	0,63	290000
B	0,53	300000
D	0,44	350000
E	1,09	140000

Tabela 38 : Análise do Processo do Exemplo 10

Produto	LCT	LBS	estágio 1	estágio 2	estágio 3	estágio 4
A	6,3822	4000/7,9130	LBS/LCT			
B	6,7938	3000/3,3951	LCT			LBS
D	11,9213	3000/3,5903				LBS/LCT
E	3,4609	4000/4,6730	LBS			LCT

Utilizando a Tabela 38, sabe-se que os estágios 1 e 4 são limitantes. Não é necessário então equacionar a PNL para os estágios 2 e 3, uma vez que, nenhuma inserção nestes estágios equaciona o problema. Entretanto, teríamos de resolver 16 PNL no pior dos casos. Equacionam-se apenas 9 neste problema. A melhor solução é a inserção de um equipamento (3000 ℓ) em paralelo no estágio 4. Se o limite superior do volume das unidades for aumentado, os valores ótimos se alteram. (LEE et al., 1993)

Tabela 39 : Resultados do exemplo 10

PNL	nova unidade		operação				Lucro (\$)	Tempo de CPU (s)
	estágio	volume (ℓ)	A	B	D	E		
-	existente	-	-	-	-	-	459000	1,1
1	1	4000	EF	FF	-	EF	466120	1,3
2	1	697	FF	FF	-	EF	467000	1,3
3	4	2547	-	EF	EF	FF	521340	1,2
4	4	3000	-	EF	EF	FF	521780	1,2
5	1	1000	EF	FF	-	EF	496550	
	4	582	-	EF	FF	FF		1,4
6	1	2925	FF	FF	-	EF	461810	
	4	2897	-	EF	FF	FF		1,4
7	1	1000	EF	FF	-	EF	503170	
	4	1971	-	EF	EF	FF		1,2
8	1	3141	FF	FF	-	EF	464470	
	4	2338	-	EF	EF	FF		1,3

Discussão

Sugere-se o método de inserção para um novo equipamento em uma planta em batelada multi-produto. O método baseia-se em regras heurísticas e PNL. A vantagem do método de LEE é a sua simplicidade e poder facilmente ser transposto para o computador. Estas vantagens resultam da formalização pelas regras heurísticas 1 e 2 sintetizando o passo de adição do equipamento a ser inserido. Os resultados dos exemplos 7,9 e 10 são os mesmos que os propostos por FLETCHER *et al.* (1991).

As ferramentas computacionais que tratam as MINLPs não são capazes de equacionar problemas com muitas variáveis binárias e não-linearidades. Apesar de o número de PNL ser grande, o método pode ser aplicado para um problema de inserção com muitos estágios e produtos. (LEE *et al.*, 1993)

2.7 Considerações Finais

Seis métodos de otimização foram descritos. Primeiramente o método de LOONKAR & ROBINSON (1970), para o projeto de plantas, que é um método de resolução simples. O PNL resultante é simples de ser resolvido, entretanto a aplicação do método é restrita a um único produto sendo limitado ainda por não levar em conta as variações de volume do produto ao longo do processo e os diferentes modos de operação dos equipamentos na planta (em fase ou fora de fase).

SPARROW *et al.* (1975) reformulou o método de LOONKAR & ROBINSON (1970), levando em conta as variações de volume do produto ao longo do processo e os diferentes modos de operação dos equipamentos na planta. Para equacionar o problema de PNL modificado, SPARROW *et al.* (1975) sugere a aplicação do método de busca e limite. Este método é trabalhoso e o custo computacional é intenso mas garante uma solução precisa do problema uma vez que todas as possíveis soluções são analisadas.

GROSSMANN & SARGENT (1979) introduzem ao problema de SPARROW *et al.* (1975), os modos de operação como variáveis. Ao incluir o modo de operação como variáveis, o problema de PNL torna-se uma MINLP. A solução da formulação da MINLP é mais rápido. Os problemas desta classe, entretanto, invariavelmente exigem soluções específicas e com um elevado custo computacional. O método de GROSSMANN & SARGENT (1979) para o projeto de plantas é sem dúvida o mais completo dentre os anteriormente citados, mas é sem dúvida o mais trabalhoso.

VASELENAK *et al.* (1987), com base no artigo de GROSSMANN & SARGENT (1979), modifica o método adaptando-o para solução de problemas de inserção ótima de equipamentos em plantas instaladas. Da mesma forma o problema resultante é uma MINLP de solução inóspita, porém eficiente.

A fim de tornar mais simples a solução do problema de VASELENAK *et al.* (1987), FLETCHER *et al.* (1991) sugere a análise em separado do modo de operação para inserção dos equipamentos. FLETCHER *et al.* (1991) mantém a solução do problema como uma MINLP, uma vez que a análise é parte do problema. A sugestão de FLETCHER *et al.* (1991) elimina etapas de solução da MINLP mas não elimina a MINLP.

LEE *et al.* (1993) analisando os problemas anteriores de VASELENAK *et al.* (1987) e GROSSMANN & SARGENT (1979), segundo a sugestão de FLETCHER *et al.* (1991), infere duas regras heurísticas para a análise do modo de operação dos equipamentos. A partir destas regras, o modo de operação dos equipamentos deixam de ser introduzidos como variáveis do problema, permitindo que o problema seja equacionado aplicando os métodos de solução de PNL simplificando a solução do problema.

O interesse deste trabalho é, aplicando o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) e o método de LEE *et al.* (1993) em um problema específico, sugerir alterações ao método de LOONKAR & ROBINSON (1970), aplicando as regras de LEE *et al.* (1993) aumentando a eficiência do método sem prejudicar a sua simplicidade (ou seja sem introduzir a MINLP).

3. Material e Método

Para verificar a aplicabilidade dos métodos em situações reais de produção, será formulada uma série de problemas que desenvolvidos, permitirão estabelecer comparações entre os métodos. Para tanto selecionou-se como processo exemplo o processo de manufatura do chocolate. O processo de produção de chocolate é um processo semi-contínuo, desenvolve-se em basicamente seis etapas, duas etapas em batelada.

O processamento do chocolate pode ser brevemente descrito pelas seguintes etapas (MINIFIE, 1989):

1. *Mistura* : Onde ocorre a mistura da massa de cacau, leite, manteiga de cacau e outros elementos que compõe o chocolate. Nesta etapa é importante obter uma massa homogênea e bem proporcionada, o tempo de processamento varia entre 12 e 15 minutos, realizada em tanques de mistura, é uma etapa descontínua.
2. *Refino* : Onde ocorre o refinamento da massa. A massa de chocolate proveniente da mistura, ainda que homogênea, apresenta diferenças na granulometria dos elementos que a compõe. A massa então é prensada em rolos, até atingir a granulometria adequada; o tempo de residência varia entre 30 e 90 minutos, realizada em prensas de rolos; é uma etapa semi-contínua.

3. *Conchagem* : Considerada uma das etapas mais importantes do processamento do chocolate. A massa é continuamente revolvida a fim de remover compostos voláteis de sabor indesejado, formação de sabores e redução da viscosidade da massa. O tempo de processo é extenso com um mínimo de 6 horas, podendo se estender até a 96 horas. Quanto mais prolongada a conchagem, maior a qualidade final do chocolate
4. *Moldagem* : A massa é distribuída em moldes que darão forma ao chocolate. É necessário também agitar os moldes para remover bolhas de ar do interior da massa. Após esta etapa pode-se incluir uma etapa de recheio como na produção de bombons. É uma etapa contínua.
5. *Temperagem* : Nesta, que é outra etapa mais importante do processamento do chocolate, a massa nas formas é resfriada. O resfriamento deve ser uniforme e bem desenvolvido para que ocorra a correta formação de cristais da manteiga de cacau. A má formação desses cristais pode resultar na ocorrência dos "bloom" . Os cristais mal formados são mais instáveis e podem se fundir e migrar para fora da massa provocando a formação de pontos de aspecto e sabor indesejados, é uma etapa contínua.
6. *Embalagem e armazenamento* : Caso a temperagem tenha sido corretamente desenvolvida, o chocolate moldado "descola" das formas. A embalagem deve proteger o chocolate da exposição à luz e penetração de água. O armazenamento do chocolate deve ser feito em locais com temperatura adequada. Variações excessivas de temperatura podem provocar "bloom" dos cristais da manteiga de cacau, são etapas contínuas.

3.1 Problema Proposto

O problema proposto incluirá somente as três primeiras etapas do processo, a mistura, o refino e a conchagem, por serem etapas descontínuas do processo. O problema será considerado para um único produto.

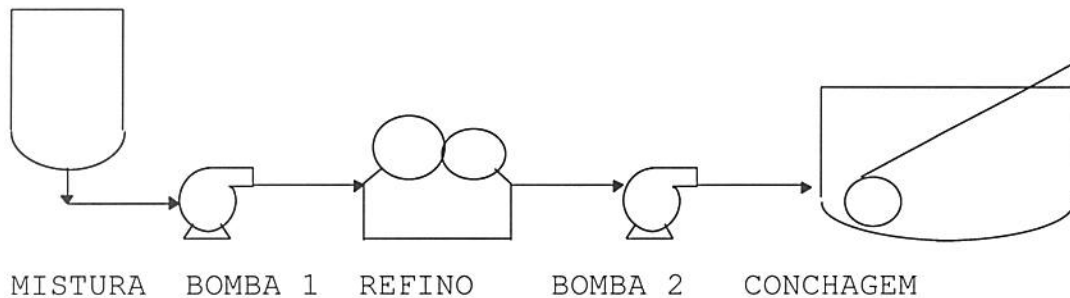


Figura 22 : Fluxograma do problema proposto

A primeira parte do problema proposto será calcular o volume otimizado para uma planta a ser instalada com capacidade produtiva de 3000 Ton./ano com um período de operação de 6000 horas/ano, aplicando o método de LOONKAR & ROBINSON (1970).

A segunda parte do problema proposto será calcular a inserção ótima para elevar a capacidade da planta resultante do problema anterior para 3600 Ton./ano, aplicando o método de LEE et al. (1993). Calcular o volume otimizado para uma planta a ser instalada com a mesma capacidade, aplicando o método de LOONKAR & ROBINSON (1970).

A terceira e quarta partes do problema repetem o segundo problema para as capacidades de 4500 Ton./ano e 6000 Ton./ano.

Segundo LEE et al. (1993), os itens contínuos devem ser tomados em conta como uma cadeia semi-contínua junto ao item em batelada que subsequente. Entretanto, embora a etapa de refino seja contínua, o seu tempo de residência é muito extenso e poderia ser considerado como uma etapa semi-contínua. Para verificar esta possibilidade, cada problema de inserção foi dividido em três subproblemas:

- a) considerando as etapas de refino e conchagem como uma única etapa semi-contínua e a mistura como etapa em batelada.
- b) considerando as etapas de mistura e refino como uma única etapa semi-contínua e a conchagem como etapa em batelada.
- c) considerando as etapas de refino e conchagem como etapa em batelada independentes e a mistura como uma etapa semi-contínua independente.

Obs.: Quando são considerados dois estágios juntos
 S_j será a média do S_j dos estágios

3.2 Solução do Problema

Serão considerado os dados da tabela 40 para a formulação e solução dos problemas.

Tabela 40 : Dados do Problema

Equipamento	K_j [\$]	r_j [\$/\ell]	γ_j [-]	S_j [\ell/kg]	t_j [h]
Bomba	1850	210	0,40	-	0,25
Mistura	3125	450	0,38	1,12	0,25
Refino	12800	582	0,65	0,83	1,00
Conchagem	25680	475	0,57	0,67	12,00

(Fonte : MINIFIE, 1989 ; PETERS & TIMMERHAUS, 1991)

Aplicativos de planilhas de cálculo (Excel 5.00) e de cálculo avançado (Mathematica 2.2.3) foram utilizadas para estruturar os algoritmos e desenvolver todos os cálculos necessários. Foram desenvolvidos dois programas para otimização, incluídos no Anexo. Estes programas foram desenvolvidos para o aplicativo Matlab 4.0 para cálculos matemáticos em computadores modelo 486. O programa "grad.m" equaciona problemas de otimização irrestrita (pelo método do gradiente), necessário para encontrar a raiz dos polinômios ao desenvolver o método de LOONKAR & ROBINSON (1970). O programa "proj.m" equaciona problemas de otimização restrita (pelo método do gradiente projetado), necessário para minimizar os subproblemas formulados ao desenvolver o método de LEE *et al.* (1993).

Os métodos de solução considerados, pressupõem que as variáveis de controle sejam contínuas. Desta forma, variáveis como número de ciclos da batelada, ou o volume do equipamento pode resultar em valores não inteiros. Não podemos, entretanto, considerar valores não inteiros na solução final, sendo utilizado então o maior valor inteiro próximo à solução considerada. No caso do volume dos equipamentos, deverá ser considerado o seguinte conjunto de valores (em litros):

$$V = \begin{Bmatrix} 2500 & 3000 & 3500 & 4000 & 4500 & 5000 \\ 5500 & 6000 & 6500 & 7000 & 7500 & 8000 \\ 8500 & 9000 & 9500 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 11500 & 12000 & 12500 & 13000 & 13500 & \end{Bmatrix}$$

4. Resultados

São apresentados a seguir os resultados obtidos da aplicação dos métodos segundo cada problema formulado:

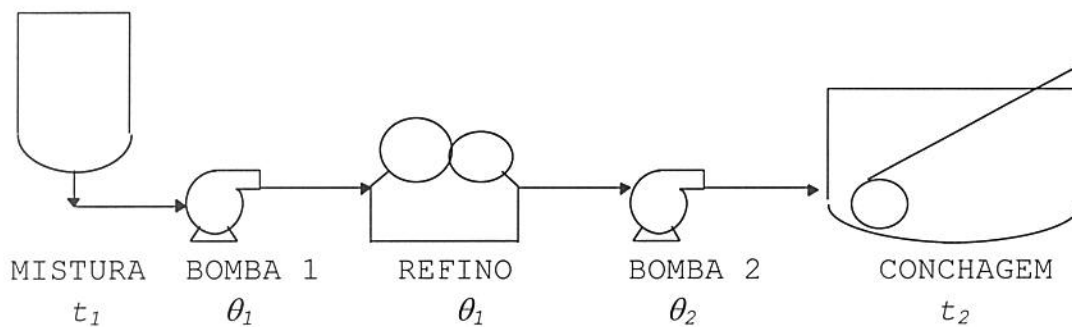


Figura 23 : Distribuição dos tempos no problema

4.1 Problema Um

$$Q = 3000000 \text{ kg/ano} \quad H = 6000 \text{ h/ano} \quad W = 500 \text{ kg/h}$$

Dados iniciais

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 1,25 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,25 \text{ h} \quad t_2 = 12 \text{ h}$$

Iteração	1	2	3	4	5
$V \text{ (}\ell\text{)}$	7700	11934	12852	13030	13065
$T \text{ (h)}$	13,75	21,31	22,95	23,27	23,33

Solução:

$$V = 13500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 468891$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 2531109$$

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 10,14 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,94 \text{ h} \quad t_2 = 12 \text{ h}$$

4.2 Problema Dois

4.2.1 Problema de Inserção

$$Q = 3600000 \text{ kg/ano} \quad H = 6000 \text{ h/ano} \quad W = 600 \text{ kg/h}$$

Subproblema a) - Considerando o refino junto à conchagem.

Processo	estágio 1	estágio 2 e 3
T (h)	0,25	22,80
B (kg)	12054	18000

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 2 e 3
22,80	12054	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

Iteração	1	2	3	4	5
V (ℓ)	1199	1794	1989	1993	2010
n (-)	274	264	260	260	261
Lucro^* (\$)	3590220	3589119	3588808	3588802	3588776

$\text{Lucro}^* = \text{Faturamento} - \text{Custo do equipamento inserido}$

Solução:

$$V = 2500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 470005$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3129995$$

Obs.: Lucro Líquido = Faturamento - Custo Total da planta

Inserindo fora de fase no estágio 2 e 3

<i>Iteração</i>	1
V (ℓ)	9040
n (-)	299
$Lucro^*$ (\$)	3260238

Solução:

$$V = 9500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 627624$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 2972376$$

Subproblema b) - Considerando a mistura junto ao refino.

Processo	estágio 1 e 2	estágio 3
T (h)	10,39	12,94
B (kg)	13776	20149

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1 e 2	estágio 3
12,94	13776	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
V (ℓ)	3724	5570	6178	6189	6246
n (-)	205	185,0	180	179	179
$Lucro^*$ (\$)	3452247	3414509	3403161	3402960	3401919

Solução:

$$V = 6500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 554873$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3045127$$

Inserindo fora de fase no estágio 3

<i>Iteração</i>	1
V (ℓ)	9230
n (-)	261
$Lucro^*$ (\$)	3487851

Solução:

$$V = 9500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 509240$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3090760$$

Subproblema c) - Considerando os três estágios separados.

Processo	estágio 1	estágio 2	estágio 3
T (h)	0,25	10,14	12,94
B (kg)	12054	16265	20149

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 3
12,94	12054	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
V (ℓ)	2813	4207	4667	4675	4717
n (-)	247	228	222	222	221
$Lucro^*$ (\$)	3587673	3586152	3585721	3585713	3585675

Solução:

$$V = 5000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 471015$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3128985$$

Inserindo fora de fase no estágio 3

<i>Iteração</i>	1
<i>V</i> (ℓ)	8076
<i>n</i> (-)	299
<i>Lucro*</i> (\$)	3494190

Solução:

$$V = 8500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 505394$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3094606$$

4.2.2 Problema de Planta a ser instalada

Dados iniciais

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 1,25 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,25 \text{ h} \quad t_2 = 6 \text{ h}$$

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
<i>V</i> (ℓ)	5208	7970	8535	8649	8669
<i>T</i> (h)	7,75	11,86	12,7	12,87	12,91

Solução:

$$V = 9000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 487417$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3112583$$

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 6,09 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,57 \text{ h} \quad t_2 = 6 \text{ h}$$

4.3 Problema Três

4.3.1 Problema de Inserção

$$Q = 4500000 \text{ kg/ano} \quad H = 6000 \text{ h/ano} \quad W = 750 \text{ kg/h}$$

Subproblema a) - Considerando o refino junto à conchagem.

Processo	estágio 1	estágio 2 e 3
T (h)	0,25	12,66
B (kg)	8036	12000

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 2 e 3
12,66	8036	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

Iteração	1	2	3	4	5
V (ℓ)	974	1456	1615	1618	1635
n (-)	505	482	475	475	474
$Lucro^*$ (\$)	4490752	4489710	4489422	4489417	4489387

Solução:

$$V = 2000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 488552$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 4011448$$

Inserindo fora de fase no estágio 2 e 3

<i>Iteração</i>	1
<i>V</i> (ℓ)	6027
<i>n</i> (-)	560
<i>Lucro*</i> (\$)	4227702

Solução:

$$V = 6500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 644616$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3855384$$

Subproblema b) - Considerando a mistura junto ao refino.

Processo	estágio 1 e 2	estágio 3
<i>T</i> (h)	6,34	6,57
<i>B</i> (kg)	9184	13433

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1 e 2	estágio 3
6,57	9184	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
<i>V</i> (ℓ)	2484	3716	4121	4128	4164
<i>n</i> (-)	384	347	336	336	335
<i>Lucro*</i> (\$)	4381736	4352424	4343627	4343478	4342712

Solução:

$$V = 4500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 556232$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3943768$$

Inserindo fora de fase no estágio 3

<i>Iteração</i>	1
V (ℓ)	6153
n (-)	490
$Lucro^*$ (\$)	4405696

Solução:

$$V = 6500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 551284$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3948716$$

Subproblema c) - Considerando os três estágios separados.

Processo	estágio 1	estágio 2	estágio 3
T (h)	0,25	6,09	6,57
B (kg)	8036	10844	13433

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 3
6,57	8036	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
V (ℓ)	1874	2803	3109	3115	3144
n (-)	464	427	417	416	415
$Lucro^*$ (\$)	4488989	4487685	4487316	4487309	4487275

Solução:

$$V = 3500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 489321$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 4010679$$

Inserindo fora de fase no estágio 3

<i>Iteração</i>	1
$V \text{ (}\ell\text{)}$	5384
$n \text{ (-)}$	560
$\text{Lucro}^* \text{ (\$)}$	441072

Solução:

$$V = 5500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 542354$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3957646$$

4.3.2 Problema de Planta a ser instalada

Dados iniciais

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 1,25 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,25 \text{ h} \quad t_2 = 3 \text{ h}$$

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
$V \text{ (}\ell\text{)}$	3990	5981	6527	6662	6695
$T \text{ (h)}$	4,75	7,12	7,77	7,93	7,97

Solução:

$$V = 7000 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 628410$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 3871590$$

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 4,33 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,39 \text{ h} \quad t_2 = 3 \text{ h}$$

4.4 Problema Quatro

4.4.1 Problema de Inserção

$$Q = 6000000 \text{ kg/ano} \quad H = 6000 \text{ h/ano} \quad W = 1000 \text{ kg/h}$$

Subproblema a) - Considerando o refino junto à conchagem.

Processo	estágio 1	estágio 2 e 3
T (h)	0,25	7,72
B (kg)	6250	9333

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 2 e 3
7,7	6250	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

Iteração	1	2	3	4	5
V (ℓ)	981	1467	1627	1630	1646
n (-)	842	794	793	779	777
$Lucro^*$ (\$)	5990708	5989690	5989401	5989396	5989690

Solução:

$$V = 2000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 629714$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5370286$$

Inserindo fora de fase no estágio 2 e 3

<i>Iteração</i>	1
V (ℓ)	4688
n (-)	960
$Lucro^*$ (\$)	5761695

Solução:

$$V = 5000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 814982$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5185018$$

Subproblema b) - Considerando a mistura junto ao refino.

Processo	estágio 1 e 2	estágio 3
T (h)	4,58	3,39
B (kg)	7143	10448

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1 e 2
4,58	7143	LBS/LCT

Inserindo em fase no estágio 1 e 2

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
V (ℓ)	1933	2892	3208	3213	3239
n (-)	658	594	576	576	574
$Lucro^*$ (\$)	5896590	5871526	5863986	5863869	5863262

Solução:

$$V = 3500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 687074$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5312926$$

Inserindo fora de fase no estágio 1 e 2

<i>Iteração</i>	1
V (ℓ)	7000
n (-)	840
$Lucro^*$ (\$)	5788464

Solução:

$$V = 7000 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 738875$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5261125$$

Subproblema c) - Considerando os três estágios separados.

Processo	estágio 1	estágio 2	estágio 3
T (h)	0,25	4,33	3,39
B (kg)	6250	8434	10448

LCT (h)	LBS (kg)	estágio 1	estágio 2
4,33	6250	LBS	LCT

Inserindo em fase no estágio 1

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
V (ℓ)	1459	2182	2420	2424	2446
n (-)	794	732	713	713	711
$Lucro^*$ (\$)	5989704	5988519	5988184	5988179	5988149

Solução:

$$V = 2500 \text{ ℓ}$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 630011$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5369989$$

Inserindo fora de fase no estágio 2

<i>Iteração</i>	1
$V \text{ (}\ell\text{)}$	5185
$n \text{ (-)}$	960
$\text{Lucro}^* \text{ (\$)}$	5836496

Solução:

$$V = 5500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 714124$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5285876$$

4.4.2 Problema de Planta a ser instalada

Dados iniciais

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 1,25 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,25 \text{ h} \quad t_2 = 1,5 \text{ h}$$

<i>Iteração</i>	1	2	3	4	5
$V \text{ (}\ell\text{)}$	3640	4906	5253	5354	5376
$T \text{ (h)}$	3,25	4,38	4,69	4,78	4,80

Solução:

$$V = 5500 \ell$$

$$\text{Custo de instalação (\$)} = 921636$$

$$\text{Lucro líquido (\$)} = 5078364$$

$$t_1 = 0,25 \text{ h} \quad \theta_1 = 2,81 \text{ h} \quad \theta_2 = 0,24 \text{ h} \quad t_2 = 1,5 \text{ h}$$

4.5 Análise dos Resultados

Um total de vinte e duas soluções foram obtidas, para as capacidades produtivas 3000Ton./ano, 3600Ton./ano, 4500Ton./ano e 6000Ton./ano. Para estas três últimas capacidades, aplicou-se o método de LEE *et al.* (1993) fazendo inserções em fase e fora de fase com o equipamentos instalados.

Encontraram-se soluções para três diferentes configurações dos estágios de processo formando os seguintes subproblemas: considerando as etapas de refino e conchagem como uma única etapa semi-contínua e a mistura como etapa em batelada, considerando as etapas de mistura e refino como uma única etapa semi-contínua e a conchagem como etapa em batelada e considerando as etapas de refino e conchagem como etapa em batelada independentes e a mistura como uma etapa semi-contínua independente.

Aplicou-se o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) para as quatro capacidades. Uma série inicial, supondo um a unidade de cada equipamento, foi calculada (tabela 41). Entretanto, como pode-se observar na série de tempos que solucionam a equação, a solução se repete (as diferenças no tempo são pouco significativas), resultando em volumes meramente proporcionais à capacidade produtiva.

Os volumes encontrados para esta série inicial, excessivamente grandes, fogem ao conjunto de volumes considerado em disponibilidade no mercado. Ainda, se considerados como base de cálculo para o método de LEE *et al.* (1993), as soluções também se repetem, resultando em inserções meramente proporcionais à capacidade produtiva.

A monótona repetição dos resultados restringe a comparação entre os métodos, suas vantagens ou desvantagens. Estes resultados foram então desconsiderados para a comparação dos algoritmos e por isso não figuraram nos itens **3.1** a **3.4**.

Tabela 41 : Série inicial

Iteração	Tempo (h)				Volume (ℓ)			
	Capacidade Ton./ano				Capacidade Ton./ano			
	3000	3600	4500	6000	3000	3600	4500	6000
1	13,75	13,75	13,75	13,75	7700	9240	11550	15400
2	21,31	21,37	21,46	21,57	11934	14361	18026	24158
3	22,95	23,05	23,08	23,22	12852	15490	19387	26006
4	23,27	23,37	23,47	23,64	13031	15705	19715	26477
5	23,33	23,42	23,55	23,72	13065	15738	19782	26566

A fim de evitar esta repetição, a cada problema formulado para uma planta a ser instalada, assumiram-se as soluções dos problemas de inserção fora de fase em três estágios independentes (subproblema c). Em outras palavras, a cada problema formulado para uma planta a ser instalada, o tempo de conchagem foi reduzido pela metade, o que só pode ser feito inserindo uma peça de mesmo volume operando fora de fase.

Os resultados da Tabela 41, embora tenham sido desconsiderados, também têm valor prático significativo. Em alguns casos (4500 e 6000Ton./ano) o custo de instalação (tabela 43) é inferior aos obtidos com os resultados da tabela 42, considerados para a comparação dos algoritmos.

Tabela 42 : Série para planta a ser instalada

Iteração	Tempo (h)				Volume (ℓ)			
	Capacidade Ton./ano				Capacidade Ton./ano			
	3000	3600	4500	6000	3000	3600	4500	6000
1	13,75	7,75	4,75	3,25	7700	5208	3990	3640
2	21,31	11,86	7,12	4,38	11934	7970	5981	4906
3	22,95	12,70	7,77	4,69	12852	8535	6527	5253
4	23,27	12,87	7,93	4,78	13031	8649	6662	5354
5	23,33	12,91	7,97	4,80	13065	8669	6695	5376

Tabela 43 : Soluções finais das séries

Capacidade (Ton./ano)	Tabela 42		Tabela 41	
	Volume (ℓ)	Custo (\$)	Volume (ℓ)	Custo (\$)
3000	13500	468891	13500	468891
3600	9000	487417	16000	515019
4500	7000	628410	20000	583447
6000	5500	921636	27000	691712

Ao considerar o problema de inserção como três subproblemas, altera-se o efeito do tempo sobre a solução de cada problema. O efeito do tempo fica concertado no segundo estágio (refino e conchagem) no subproblema *a*. O efeito do tempo fica distribuído entre os estágios nos subproblemas *b* e *c* (Tabela 44).

Na inserção em fase, quase não há diferença entre os tempos dos subproblemas *b* e *c*, as soluções, entretanto, são significativamente diferentes (Tabela 44). Esta diferença decorre de dois fatores, o fator de tamanho e o custo. No subproblema *b*, o fator de tamanho é menor que em *c*, isto só já resulta em um volume maior para a solução *b*. Ainda, a inserção no primeiro estágio, no subproblema *b*, insere dois

equipamentos, mistura e refino. No subproblema c a solução de inserção no primeiro estágio, insere somente um equipamento (para mistura) assim o custo é maior em b.

Tabela 44 : Dados de tempo para os problemas de inserção

Subproblema	Capacidade (Ton./ano)	Tempo (h)		
		Mistura	Refino+Conchagem	
a	3600	0,25	23,08	
	45000	0,25	12,66	
	6000	0,25	7,72	
b	3600	Mistura+Refino		Conchagem
	3600	10,39		12,94
	4500	6,34		6,57
c	6000	4,58		3,39
	3600	Mistura	Refino	Conchagem
	3600	0,25	10,14	12,94
	4500	0,25	6,09	6,57
	6000	0,25	4,33	3,39

Na inserção fora de fase, a solução aproximada do volume dos subproblemas a e b são idênticas. A diferença aparece no custo, o subproblema a, insere dois equipamentos, refino e conchagem. No subproblema c a solução de inserção, insere somente um equipamento (na conchagem) assim o custo é maior em a. Já o volume em c é menor por que o fator de tamanho no estágios anteriores são maiores tanto em a como em b.

Tabela 45 : Resumo das soluções dos problemas de inserção

Capacidade (Ton./ano)	Sub Problema	Inserção EF		Inserção FF	
		Volume (ℓ)	Custo (\$)	Volume (ℓ)	Custo (\$)
3600	a	2500	470005	9500	627624
	b	6500	554873	9500	509240
	c	5000	471015	8500	505394
4500	a	2000	488552	6500	644616
	b	4500	556232	6500	551284
	c	3500	489321	5500	542354
6000	a	2000	629714	5000	814982
	b	3500	687074	7000	738875
	c	2500	630011	5500	714124

A inserção em fase no primeiro estágio foi a melhor solução para os subproblemas a e c. A inserção fora de fase no segundo estágio foi a melhor solução para o subproblema b, exceto para a capacidade de 6000Ton./ano. Devido às inserções para alterar o tempo conchagem, o efeito do tempo sobre a solução do subproblema b fica reduzido, produzindo um resultado diferente do obtido em outras capacidades.

LEE et al. (1993) recomenda associar os estágios contínuos aos estágios em batelada ou semi-contínuos, que é o subproblema a. A melhor solução de fato, dentre as três capacidades é a inserção em fase no primeiro estágio obtida para o subproblema a. Inserindo fora de fase entretanto, a melhor solução é obtida para o subproblema c. O subproblema b poderia ser suprimido uma vez que a solução que ele provê é inferior às soluções obtidas por a ou por c. Ainda, inserindo em fase, a solução não difere excessivamente para os subproblemas a e c. A diferença entre os resultados pode mudar dependendo do custo do equipamento, aumentando ou diminuindo sua relevância na solução do problema. Por este

motivo para estabelecer a diferença entre os subproblemas seria necessário reformulá-los aplicando equações idênticas de custos para todos os estágios.

Ambos os métodos possuem uma convergência excelente, tendo convergido em 5 iterações. O número de iterações pode variar com a precisão exigida ao se formular os programas de otimização. As soluções para os problemas de inserção fora de fase necessitam somente de uma iteração devido à restrição 2.6.33. Com esta restrição a inserção deve ter o mesmo tamanho ou maior que o LBS do estágio em que se aplica a inserção.

Ora, um tamanho maior implica certamente em um custo maior, sendo desnecessário prosseguir a otimização. A restrição poderia ser substituída por uma restrição de igualdade.

O esforço computacional para equacionar os problemas de uma planta a ser instalada aplicando o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) é muito menor que o exigido para equacionar os problemas de inserção aplicando o método de LEE et al. (1993). O esforço exigido pelo método de LEE et al. (1993) tende a ser maior quanto maior o número de estágios e produtos a serem considerados. O esforço exigido pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970) aumenta em uma proporção muito menor que o método de LEE et al. (1993). É necessário lembrar que, a não ser que se aplique a uma planta já conhecida, o método de LEE et al. (1993) é aplicado a uma planta a ser instalada com capacidade menor formulada pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970). Desta forma, o método de LEE et al. (1993) aprimora o resultado obtido pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970) compensando suas deficiências.

Em todos os casos as soluções de LEE *et al.* (1993) são melhores que as obtidas por LOONKAR & ROBINSON (1970). Este fato não implica em que o método de LEE *et al.* (1993) seja mais eficiente que o método de LOONKAR & ROBINSON (1970). O esforço computacional exigido ao solucionar o método de LEE *et al.* (1993) é uma desvantagem considerável, enquanto o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) vantajoso por sua simplicidade pode apresentar soluções próximas à de LEE *et al.* (1993). Se consideradas as diferentes configurações em que a planta pode ser instalada, incluindo então as soluções da série inicial, o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) pode até suplantiar o método de LEE *et al.* (1993).

O método de LOONKAR & ROBINSON (1970) não provê soluções melhores que as de LEE *et al.* (1993) por que considera o volume resultante na otimização igual para todos os equipamentos. Ao fazer esta consideração, o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) ignora as possíveis mudanças na densidade do produto ao passar de um estágio a outro do processamento. O fator de tamanho usado por LEE *et al.* (1993) garante que essas diferenças sejam consideradas, o que certamente proporciona melhores resultados. Uma reformulação no método de LOONKAR & ROBINSON (1970) incluindo o conceito do fator de tamanho tornaria o método mais eficiente, permitindo equipamentos de volumes e conseqüentemente custos menores.

O método de LOONKAR & ROBINSON (1970) não leva em conta também as diferentes configurações que podem ser aplicadas à planta. Ao observarmos a tabela XLIII vemos que diferentes configurações podem reduzir o custo de instalação da planta. Uma reformulação no método de LOONKAR & ROBINSON (1970) introduzindo as regras de inserção de LEE *et al.* (1993) tornaria o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) mais eficiente.

5. Conclusão

Os métodos de LOONKAR & ROBINSON (1970) e LEE *et al.* (1993) foram aplicados aos problemas formulados, os resultados recomendam o método de LEE *et al.* (1993). Ele pode ser aplicado a uma planta a ser instalada com capacidade menor formulada pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970). Desta forma, o método de LEE *et al.* (1993) aprimora o resultado obtido pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970) compensando suas deficiências.

Ao considerar o problema de inserção como três subproblemas, altera-se o efeito do tempo sobre a solução de cada problema. LEE *et al.* (1993) recomenda associar os estágios contínuos aos estágios em batelada ou semi-contínuos, que é o subproblema a. Nenhum dos resultados destaca decisivamente um subproblema a ser considerado em todas as situações por que os resultados podem mudar dependendo do custo do equipamento, aumentando ou diminuindo sua relevância na solução do problema. Por este motivo para estabelecer qual o subproblema que equaciona melhor método melhor seria necessário reformulá-los aplicando equações idênticas de custos para todos os estágios.

Ambos os métodos possuem uma convergência excelente, tendo convergido em 5 iterações e produzindo resultados satisfatórios a todos os problemas.

O esforço computacional para equacionar os problemas de uma planta a ser instalada aplicando o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) é muito menor que o exigido para equacionar os problemas de inserção aplicando o método de LEE *et al.* (1993). O método de LEE *et al.* (1993) é aplicado a uma planta com capacidade menor formulada pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970). O método de LEE *et al.* (1993) aprimora o resultado obtido pelo método de LOONKAR & ROBINSON (1970) compensando suas deficiências.

Em todos os casos as soluções de LEE *et al.* (1993) são melhores que as obtidas por LOONKAR & ROBINSON (1970). Este fato não implica em que o método de LEE *et al.* (1993) seja mais eficiente que o método de LOONKAR & ROBINSON (1970). O esforço computacional exigido ao solucionar o método de LEE *et al.* (1993) é uma desvantagem considerável, enquanto o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) vantajoso por sua simplicidade pode apresentar soluções próximas à de LEE *et al.* (1993).

6. Sugestões

O método de LOONKAR & ROBINSON (1970) aplicado em plantas a ser instaladas produz resultados satisfatórios com um mínimo esforço computacional. É possível, entretanto, aprimorar o método introduzindo conceitos da otimização de LEE *et al.* (1993). Conceitos como o fator de tamanho e as regras de inserção de LEE *et al.* (1993) tornariam o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) mais eficiente, sem aumentar o esforço computacional exigido para a solução do método.

Diferentes soluções para o método de LOONKAR & ROBINSON (1970) podem ser obtidas se consideradas todas as configurações, modos de operação ou a possibilidade de manufaturar na mesma instalação diferentes produtos. Estes dados se introduzidos também ao método aumentariam em muito sua eficiência como expandiriam a esfera aplicação do método. Estas mudanças entretanto, aumentam também esforço computacional exigido para a solução do método.

Um estudo aprofundado para reformular o método de LOONKAR & ROBINSON (1970), explorando suas qualidades se faz premente.

Referências Bibliográficas

- BAUMAN, H.C., "Fundamentals of Cost Engineering in the Chemical Industry" ; Reinhold, NY, 1964, pp.42-76
- BAZARAA, M.S., SHERALI, M.D., SHETTY, C.M. ; "Nonlinear Programming - Theory and Algorithms"; 2ªEd., John Wiley & Sons Inc., NY, 1993
- CONVERSE, A.O. ; "Otimização" ; 1ªEd., Edart/EDUSP, SP, 1977
- FLETCHER, R., HALL, J.A.J., JOHNS, W.R. ; "Flexible Retrofit Design of Multiproduct Batch Plants" ; Computers Chem. Engng., **15**(12), 1991, pp.843-852
- GROSSMANN, E.I., SARGENT, R.W.H. ; "Optimum Design of Multipurpose Chemical Plants" ; Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., **18**(2), 1979, pp.343-348
- LEE, H.K., LEE, I.B., YANG, D.R., CHANG, K.S. ; "Optimal Synthesis for the Retrofitting of Multiproduct Batch Plants" ; Ind. Eng. Chem. Res., No.**32**, 1993, pp.1087-1092
- LOONKAR, Y.R., ROBINSON, J.D. ; "Minimization of Capital Investment for Batch Process - Calculation of Optimum Equipment Sizes" ; Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., **9**(4), 1970, pp.625-629
- "MATLAB" ; versão 4.0, The MathWorks Inc. , 1993

"Microsoft Excel for Windows" ; versão 5.00 , Microsoft Corporation , 1995

MINIFIE,B.W. ; "Chocolate, Cocoa and Confectionery : Sience and Technology", 3ªEd., Ed. AVI, NY, 1989, 903p.

NEMHAUSER,G.L. , GARFINKEL,R.S. "Integer Programming" ; 2ªEd., Ed. John Wiley & Sons Inc., NY, 1972 , 471p.

PETERS,M.S., TIMMERHAUS,K.D. ; "Plant Design and Economics for Chemical Engineers" ; 4ªEd., McGraw-Hill Inc., NY, 1991, 910p.

ROUSSEAU,R.W., FELDER,M.R. ; "*Elemantary Principles of Chem. Process*" ; 2ªEd., John Wiley & Sons Inc., NY, 1986, pp83-84

SPARROW,E.R., FORDER,G.J., RIPPIN,D.W.T. ; "*The Choice of Equipment Sizes for Multiproduct Batch Plants. Heuristics vs. Branch and Bound*" ; Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., **14**(3), 1975, pp.197-203

VASELENAK,J.A., GROSSMANN,I.E., WESTERBERG,A.W. ; "*Optimal Retrofit Design of Multiproduct Batch Plants*" ; Ind. Eng. Chem. Res., No.**26**, 1987, pp.718-726

WOLFRAM, S., "Mathematica for Windows" ; versão 2.2.3, Wolfram Research Inc. , 1994

Anexo

Estes programas foram desenvolvidos para o aplicativo Matlab 4.0 para cálculos matemáticos.

A. Programa "grad.m"

O programa "grad.m" equaciona problemas de otimização irrestrita (pelo Método do Gradiente), necessário para encontrar a raiz dos polinômios ao desenvolver o método de LOONKAR & ROBINSON (1970). No caso de LOONKAR & ROBINSON (1970) o problema a ser solucionado é do tipo:

Dado o polinômio :

$$P(x) = \sum_{i=1}^N k_i \cdot x^{c_i} \quad \text{onde } k_i \text{ e } c_i \text{ são constantes}$$

Encontrar x que satisfaça :

$$P(x) = A \quad \text{onde } A \text{ é constante}$$

Para que pode ser solucionado pelo "grad.m" reformulando o problema da seguinte maneira:

$$\text{Min } [P(x) - A]^2$$

Como é uma função é quadrática pode-se reformular o programa "grad.m" para equacionar o problema pelo Método de Newton

O programa que se segue, foi rescrito, de forma a solucionar o problema exemplo :

$$\text{Min } f = -4x + 2x^2 - 2xy - 6y + 2y^2$$

```

% grad.m
% Programa de otimização irrestrita
% Método do Gradiente
% Criado para Matlab 4.0
% Autor: Luís Felipe Toro Alonso
% Agosto 1996
% Exemplo bidimensional
c=2
e=10^(-c);
X=zeros(1,2);
i=1;
x=X(1,:);
y=1;
dx=-15*x^2+4*x^3-3*y
dy=-3*x+4*y^3
dxx=-30*x+12*x^2
dxy=-3
dyy=12*y^2
dyx=-3
G=[dx;dy];
H=[dxx dxy ; dyx dyy];
a=(G'*G)/((G'*H)*G)
d=-G'
while norm(G) > e
    X(i+1,:)=X(i,:)+a*d;
    i=i+1
    x=X(i,1)
    y=X(i,2)
    dx=-15*x^2+4*x^3-3*y
    dy=-3*x+4*y^3
    dxx=-30*x+12*x^2
    dxy=-3
    dyy=12*y^2
    dyx=-3
    G=[dx;dy];
    H=[dxx dxy ; dyx dyy];
    a=(G'*G)/((G'*H)*G)
    d=-G'
end;

```

B. Programa "proj.m"

O programa "proj.m" equaciona problemas de otimização restrita (pelo Método do Gradiente Projetado), necessário para minimizar os subproblemas formulados ao desenvolver o método de LEE et al. (1993). Em seu artigo, LEE et al. (1993) utiliza-se do Método do Gradiente Reduzido. Porém, o Método do Gradiente Reduzido atende à restrições de igualdade ($Ax = b$) o que, exigiria uma transformação de variáveis para solucionar a inserção de LEE et al. (1993). O Método do Gradiente Projetado atende à restrições ($Ax \leq b$) sendo mais facilmente aplicado.

O programa que se segue, foi reescrito, de forma a solucionar o problema exemplo :

$$\begin{cases} \min & f(x,y) \\ \text{S.a.} & \\ & R \cdot (x,y)' \leq E \end{cases}$$

onde :

$$f = -4x + 2x^2 - 2xy - 6y + 2y^2 \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

% proj.m
% Programa de otimização restrita
% Método do Gradiente Projetado
% Criado para Matlab 4.0
% Autor: Luís Felipe Toro Alonso
% Agosto 1996
% Exemplo bidimensional

R=[1 1;1 5;-1 0;0 -1];
E=[2;5;0;0];
l=size(R,1);
c=size(R,2);
i=1;
x=0;
y=0;
X=[x y]';
f=2*x^2+2*y^2-2*x*y-4*x-6*y;
dx=4*x-2*y-4;
dy=4*y-2*x-6;
G=[dx;dy];
k=1;
n=1;
for m=1:l,
    if (R(m,:) * X == E(m,:));
        A(k,:) = R(m,:);
        C(k,:) = E(m,:);
        k=k+1;
    end;
    if (R(m,:) * X ~ E(m,:));
        B(n,:) = R(m,:);
        D(n,:) = E(m,:);
        n=n+1;
    end;
end;
end;

```

```

k=size(A);
I=eye(k);
P=I-(A'*inv(A*A')*A);
d=-P*G
u=-inv(A*A')*A*G
k=max(size(u));
t=0;
for m=1:k
    if u(m,:)<0, t=1; end;
end;
%iterativo
while (t==1),
    n=1;
    for m=1:k,
        if (u(m,:)~=min(u));
            T(n,:)=A(m,:);
            n=n+1;
        end;
    end;
    A=T;
    P=I-(A'*inv(A*A')*A);
    d=-P*G
    s=D-B*X;
    v=B*d;
    k=size(s);
    for m=1:k;
        n(m,1)=s(m)/v(m);
    end;
    n=min(n);

```

```

% minimiza
    e=0.0001;
    i=1;
    a=0;
    x=X(1)+a*d(1);
    y=X(2)+a*d(2);
    dx=4*x-2*y-4;
    dy=4*y-2*x-6;
    G=dx+dy;
    H=8;
    AA=(G'*G)/((G'*H)*G);
    DD=-G';
    while ((norm(G)>e)*(a<=n)),
        a=a+AA*DD;
        i=i+1;
        x=X(1)+a*d(1);
        y=X(2)+a*d(2);
        dx=4*x-2*y-4;
        dy=4*y-2*x-6;
        G=dx+dy;
        H=8;
        AA=(G'*G)/((G'*H)*G);
        DD=-G';
    end;
    if a>=n , a=n, end;
X=X+a*d;
x=X(1,:);
y=X(2,:);
f=2*x^2+2*y^2-2*x*y-4*x-6*y;
dx=4*x-2*y-4;
dy=4*y-2*x-6;
G=[dx;dy];

```

