

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ALIMENTOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ALIMENTOS

**REGIÃO HIDRODINÂMICA DE ENTRADA NO ESCOAMENTO
AXIAL ANULAR CONCÊNTRICO**

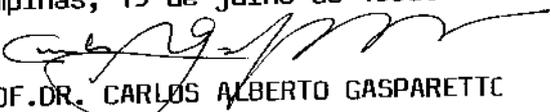
MARIA CRISTINA ANTUN MAIA

Orientador: PROF. DR. CARLOS ALBERTO GASPARETTO

PARECER

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por MARIA CRISTINA ANTUN MAIA e aprovada pela Comissão Julgadora em 19 de julho de 1996.

Campinas, 19 de julho de 1996.


PROF. DR. CARLOS ALBERTO GASPARETTO
Presidente da Banca

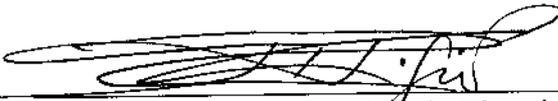
Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Alimentos da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Alimentos

Campinas - SP
Julho/1996

BANCA EXAMINADORA



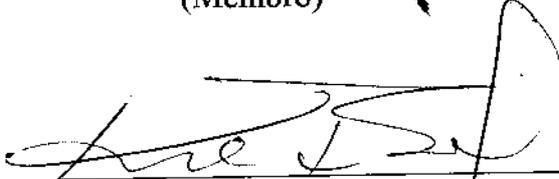
Prof. Dr. Carlos Alberto Gasparetto
(Orientador)



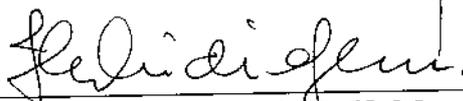
Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo
(Membro)



Prof. Dr. Edson José Vasques
(Membro)



Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail
(Membro)



Profa. Dra. Fernanda E. X. Murr
(Membro)

Prof. Dr. Satoshi Tobinaga
(Suplente)

Prof. Dr. George Cury Kachan
(Suplente)

À minha amada filha Sylvia

Aos meus queridos sobrinhos Giselle e Thiago

A pior das rotinas é a rotina da inteligência.

JHS

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, por tudo.

À Faculdade de Engenharia de Alimentos pela oportunidade de realização deste trabalho.

Ao Prof. Carlos Alberto Gasparetto, pela orientação, pela amizade, pela experiência compartilhada e, principalmente, pelos momentos de descontração.

Ao Prof. José Ricardo Figueiredo pelas valiosas sugestões na metodologia de solução do algoritmo desenvolvido nesta tese.

Aos membros da banca examinadora, pelas importantes sugestões que engrandeceram este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro na primeira fase deste trabalho.

À minha família e ao Marcelo pelo apoio financeiro na segunda fase.

Aos amigos do Laboratório de Medidas Físicas e demais colegas da pós-graduação da FEA.

Aos funcionários da FEA, em particular aos da Biblioteca, da Coordenação de Pós-Graduação e do Centro de Informática.

Aos professores e funcionários do DEA.

A todos aqueles que tornaram possível a realização deste trabalho.

Agradeço

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS	i
ÍNDICE DE TABELAS	iii
NOMENCLATURA	iv
RESUMO	vii
SUMMARY	viii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. APLICAÇÕES	1
1.2. OBJETIVO	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1. MODELOS DE COMPORTAMENTO REOLÓGICO	5
2.2. ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES CONCÊNTRICOS	10
2.2.1. As equações do problema	10
2.2.2. Princípio da aderência e camada limite	13
2.2.3. Solução para fluidos newtonianos no escoamento plenamente desenvolvido	18
2.2.4. Solução para fluidos tipo lei da potência em escoamento desenvolvido	22
2.2.5. A queda de pressão	30
2.3. A REGIÃO HIDRODINÂMICA DE ENTRADA	32
2.4. MÉTODOS DE SOLUÇÃO	34
2.4.1. Método da linearização	34
2.4.2. Métodos integrais	37
2.4.2.1. Integral da quantidade de movimento (Método de Von Karman) com abordagem de camada limite.	37
2.4.2.2. Integral da energia-quantidade de movimento	39
2.4.3. Ajuste	40
2.4.4. Método numérico das diferenças finitas (MDF)	41
2.5. A TRANSFORMAÇÃO DE MATRAS E NOWAK	47
3. MATERIAIS E MÉTODOS	50
3.1. AS EQUAÇÕES QUE DEFINEM O PROBLEMA	50

3.2. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NEWTONIANO	51
3.3. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NÃO NEWTONIANO	52
3.4. O MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENÇAS FINITAS	56
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	61
4.1. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NEWTONIANO	63
4.1.1. Perfis de velocidade axial	63
4.1.2. Perfis de velocidade radial	65
4.1.3. Comprimento de entrada	81
4.1.4. Queda de pressão	85
4.2. SOLUÇÃO PARA FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS	90
4.2.1. Comprimento de entrada	91
4.2.2. Perfis de velocidade	92
4.2.3. Queda de pressão	92
5. CONCLUSÕES	94
6. SUGESTÕES	96
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - Relação entre tensão e taxa de cisalhamento para fluidos newtonianos e não newtonianos.	8
FIGURA 2.2 - Corte longitudinal de um sistema anular concêntrico.	11
FIGURA 2.3 - Desenvolvimento do perfil de velocidades na região de entrada de um tubo anular.	12
FIGURA 2.4 - Classificação das equações diferenciais parciais	17
FIGURA 2.5 - Geometrias de entrada	33
FIGURA 3-1 - Esquema da malha de diferenças finitas	58
FIGURA 3-2 - Matriz $(n+1) \times (n+1)$ formada pelas equações (3.44) e (3.45).	60
FIGURA 4.1 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.1$ e $\sigma=0.2$.	66
FIGURA 4.2 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.3$ e $\sigma=0.4$.	67
FIGURA 4.3 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.5$ e $\sigma=0.6$.	68
FIGURA 4.4 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.7$ e $\sigma=0.8$.	69
FIGURA 4.5 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.9$.	70
FIGURA 4.6 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.	71
FIGURA 4.7 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.	72
FIGURA 4.8 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.	73
FIGURA 4.9 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.	74
FIGURA 4.10 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.	75
FIGURA 4.11 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais	76
FIGURA 4.12 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais	77

FIGURA 4.13 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais	78
FIGURA 4.14 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais	79
FIGURA 4.15 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais	80
FIGURA 4.16 - Comprimento de entrada adimensional L_e em função de σ .	81
FIGURA 4.17 - Queda de pressão adimensional em função da posição axial.	86

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 2.1 - Esquema da classificação reológica de fluidos	6
TABELA 2.2 - Valores de $\lambda(n, \sigma)$ (FREDRICKSON & BIRD, 1958)	27
TABELA 2.3 - Constantes geométricas para um tubo anular (KOZICKI <i>et alii</i> , 1966).	29
TABELA 2.4 - Esquemas de MDF recomendados para a resolução de equações de camada limite listados em ordem estimada de esforço crescente de programação (em ANDERSON <i>et alii</i> , 1984)	44
TABELA 2.5 - Trabalhos sobre escoamento anular isotérmico na entrada para fluidos não newtonianos em regime permanente	45
TABELA 2.6 - Trabalhos sobre escoamento anular isotérmico na entrada para fluidos newtonianos	46
TABELA 4.1 - Valores da posição radial de velocidade máxima, r_{\max} e do valor de u_{\max} em função de σ	64
TABELA 4.2 - Valores dos coeficientes da equação (4.1).	82
TABELA 4.3 - Valores do comprimento de entrada, L_e (99%), obtidos pelo MDF	84
TABELA 4.4 - Valores do comprimento de entrada, L_e (99%) obtidos por outros métodos	84
TABELA 4.5 - Valores de entrada, L_e	85
TABELA 4.6 - Valores do ajuste das curvas da figura 4.17	87
TABELA 4.7 - Valores do coeficiente de perda, $E(x)$	88
TABELA 4.8 - Valores de Rey_{kt} e f	89
TABELA 4.9 - Valores de F e σ^* obtidos na simulação	90
TABELA 4.10 - Comprimento de entrada calculado para vários fluidos	91
TABELA 4.11 - Valores de rey e f deste trabalho para os fluidos utilizados por TELLIS (1992).	93
TABELA 4.12 - Valores de f e $E(x)$	93

NOMENCLATURA

A	área da secção transversal	[m ²]
D	diâmetro	[m]
E	termo de correção para perdas na entrada (equação 2.55)	
F	fator de transformação (equação 3.12)	
f	fator de atrito de Fanning (equação 2.50)	
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
K	índice de consistência do fluido	[Pa.s ⁿ]
K _e	fator de correção para energia cinética (equação 2.56)	
K _m	fator de correção para a quantidade de movimento (equação 2.56)	
L	comprimento adimensional	
l	comprimento do anular	[m]
m		
n	índice de comportamento do fluido	
p	pressão	[Pa]
P	adimensional de pressão	
r	coordenada radial do tubo	[m]
R	adimensional da posição radial	
\bar{R}	adimensional da posição radial (equações 2.37 e 2.38)	
Q	vazão volumétrica	[m ³ /s]
Rey	número de Reynolds	
s	1/n (equações 2.37 e 2.38)	
t	tempo	[s]
u	componente axial da velocidade	[m/s]

\vec{u}	vetor velocidade	[m/s]
\bar{u}	valor médio da velocidade	[m/s]
U	adimensional de velocidade axial	
v	componente radial da velocidade	[m/s]
V	adimensional da velocidade radial	
r, θ, x	coordenadas cilíndricas	
X	adimensional de posição	

Letras gregas

$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi$ valores definidos nas equações 3.36 a 3.41

ϵ_0, ϵ_1 fatores geométricos (equação 2.51)

$\dot{\gamma}$	taxa de deformação	[1/s]
ρ	densidade	[kg/m ³]
τ	tensão de cisalhamento	[Pa]
μ	viscosidade	[Pa.s]
λ	posição radial de máxima velocidade axial	
∇	divergente	
ω	função definida na equação 2.56	
Λ, ϵ	funções definidas na equação 2.58	
σ	razão entre os raios interno e externo	

Sub-índices

- d desenvolvido
- e externo
- h hidráulico
- i interno
- j direção paralela ao escoamento na malha de discretização
- k direção normal ao escoamento na malha de discretização
- KT definido por KOZICKI *et alii* (equação 2.51)
- max máximo
- r direção normal ao escoamento
- x direção paralela ao escoamento
- 1,2 posições axiais do anular

Sobrescrito

- * transformação de Matras e Nowak

Tese de Doutorado: “REGIÃO HIDRODINÂMICA DE ENTRADA NO ESCOAMENTO AXIAL ANULAR CONCÊNTRICO”

Autora: Eng. Química Maria Cristina Antun Maia

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gasparetto

Departamento de Engenharia de Alimentos - FEA - UNICAMP - Julho/96

RESUMO

Foram resolvidas pelo método numérico de diferenças finitas, com esquema implícito, as equações da quantidade de movimento e da continuidade aplicadas à região de entrada do escoamento axial incompressível isotérmico laminar em regime permanente num anular concêntrico. A solução do caso newtoniano serviu como parâmetro de validação do método, sendo os resultados comparados àqueles da literatura. Para o caso não newtoniano foi adotado comportamento tipo lei da potência, pseudoplástico. Neste caso as equações de quantidade de movimento e continuidade foram transformadas de modo a obter um caso pseudonewtoniano, o que facilitou a solução, possibilitando a mesma técnica de solução do caso newtoniano. Os resultados de comprimento de entrada e de queda de pressão foram comparados àqueles disponíveis na literatura apesar destes se referirem a condições diferentes na geometria de entrada e na definição assintótica do comprimento de entrada; qualitativamente os resultados são similares para o campo de velocidades e queda de pressão, porém, quantitativamente há diferenças acentuadas.

Palavras-chave: Anular, entrada, diferenças finitas, transformação, pseudoplástico.

Ph.D. Thesis: "HYDRODYNAMIC ENTRY REGION IN CONCENTRIC ANNULAR AXIAL FLOW"

Author: *Chem. Eng.* Maria Cristina Antun Maia

Supervisor: *Prof. Dr.* Carlos Alberto Gasparetto

Department of Food Engineering - FEA - UNICAMP - July/96.

SUMMARY

The equations of momentum and continuity applied to the entry region of an axial, incompressible, isothermal, laminar and steady flow in a concentric annulus, were solved through a finite difference implicit method. The solution for the newtonian case was used for validation of the method, as this was compared to reported results. For the non newtonian case a pseudoplastic power-law model was assumed. In this case the equations were transformed in order to obtain a pseudo-newtonian system which enhanced its solution through the same technique as used for the newtonian case. Comparison of the results for entry length and pressure drop with those available in the literature showed qualitative similarity but quantitatively differences are significative. This is attributed to the entry geometries and the definition of asymptotic entry length that are both different from this work, in the only case found in the literature.

Key words: Annular, velocity, pressure, finite differences, pseudoplastic.

1. INTRODUÇÃO

1.1. APLICAÇÕES

Quando um fluido viscoso em situação de vazão constante entra em um conduto, a partir de um grande reservatório em condições isotérmicas, o perfil de velocidades varia consideravelmente à medida que o escoamento prossegue e essa variação se deve a dois fatores:

- 1) transferência de quantidade de movimento parede-fluido e
- 2) aceleração da parte central do escoamento.

Estes dois efeitos consomem energia de pressão. Portanto a perda de carga axial na entrada é mais acentuada que no perfil desenvolvido. Um perfil de velocidades uniforme na entrada evolui para uma distribuição não uniforme com um valor máximo numa certa posição radial e velocidade nula nas paredes.

As primeiras pesquisas acerca das evidências dos efeitos de entrada em regime laminar datam de 1842 e foram feitas por Poiseuille (em GILLARD & BELLET, 1980). Ele observou que a perda de carga em tubos curtos não obedecia às leis que ele mesmo havia formulado para tubos longos. Mas foi Hagenback, 1860 (em FAN & HWANG, 1966) quem interpretou o problema e introduziu um termo de correção no cálculo da perda de carga. O escoamento na região de entrada tem sido muito estudado devido à sua grande importância para determinação de perda de carga, transferência de calor e transferência de massa em dutos curtos.

No estudo do escoamento na região de entrada geralmente procura-se expressões para:

- a) o perfil de cisalhamento e, conseqüentemente, a queda de pressão ;
- b) a distribuição de velocidades e
- c) o valor do comprimento de entrada no qual é alcançado o escoamento plenamente desenvolvido.

Experimentos mostram que os perfis de velocidade e de pressão não se estabelecem simultaneamente. De um modo geral considera-se a entrada em função do perfil de velocidade. De qualquer maneira a decisão sobre o valor do comprimento de entrada está condicionada à precisão que se deseja para o valor assintótico de velocidade ou pressão.

O escoamento em sistemas anulares, concêntricos e excêntricos, constitui uma grande classe de problemas e tornou-se objeto de considerável interesse devido à sua importância em aplicações de Engenharia, tais como:

- sistemas de combustão,
- trocadores de calor em tubos duplos,
- condensadores,
- escoamento axial em máquinas de fluxo,
- transferência de calor por convecção natural,
- perfuração e produção de petróleo e gás natural,
- lubrificação e sustentação das extremidades de eixos em mancais,
- sistemas térmicos envolvendo extrusão etc.

Outro campo que tem despertado interesse é o desenvolvimento de oxigenadores e hemodialisadores onde membranas semi-permeáveis separam o sangue da fase gasosa e permitem a limpeza por transferência de massa sem degradação. Várias geometrias de membranas foram experimentadas com variável grau de sucesso. De todas essas geometrias o tubo anular parece ser o que possui maior simplicidade de projeto, manuseio e manufatura. Neste caso o conhecimento do escoamento do sangue na região de entrada de um anular tem interesse não só para prever a queda de pressão mas também para resolver as equações de difusão. Estas mesmas considerações são válidas para os casos de ultrafiltração em geometria anular que é muito empregada na indústria de alimentos.

Convém lembrar que o escoamento em tubos e o escoamento entre placas paralelas são casos limite do escoamento anular.

Uma grande variedade de fluidos de interesse prático, nas indústrias química, de alimentos e nas aplicações médicas, exibe comportamento reológico não newtoniano. São alimentos, polímeros fundidos ou em solução, fluidos biológicos (por exemplo, sangue), efluentes etc. No entanto, apesar da sua importância, o conhecimento sobre o escoamento desses fluidos não é tão abrangente quanto aqueles newtonianos. Portanto, é de grande interesse o estudo da região de entrada no escoamento de materiais não newtonianos. Apesar da importância do escoamento não newtoniano na região de entrada de um anular existem, relativamente, poucos trabalhos experimentais e teóricos sobre o tema. Os casos reais de maior interesse ocorrem com fluidos não newtonianos.

Conclui-se portanto que há motivação suficiente para pesquisas teóricas e experimentais sobre o escoamento de fluidos não newtonianos na região de entrada de tubos anulares concêntricos ou excêntricos.

1.2. OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo a caracterização da região hidrodinâmica de entrada para o escoamento isotérmico laminar permanente em tubos com geometria anular concêntrica para fluidos newtonianos e não newtonianos do tipo Ostwald-de Waele (lei da potência). Essa caracterização será apresentada na forma dos perfis radiais de velocidade e axiais de pressão e velocidade.

A solução do caso newtoniano servirá como comprovação do funcionamento do algoritmo do método de diferenças finitas. Também serão feitas comparações com os resultados de casos similares da literatura.

As equações diferenciais para escoamento não newtoniano são transformadas, de acordo com a proposta de MATRAS & NOWAK (1983), em equações para um escoamento "pseudo-newtoniano".

As equações diferenciais da continuidade e da quantidade de movimento, transformadas, fornecem a base para a análise do problema e a solução é desenvolvida utilizando-se o método numérico de diferenças finitas.

Portanto, este trabalho apresenta como inédita a solução para o caso anular concêntrico de fluido não newtoniano, das equações transformadas, utilizando o método de diferenças finitas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. **MODELOS DE COMPORTAMENTO REOLÓGICO**

Os fluidos, sejam eles puros, misturas, soluções ou suspensões, podem ser classificados de acordo com a natureza da sua resposta ao cisalhamento que resultam em escoamento laminar unidirecional.

A relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação depende de muitos fatores. A descrição mais simples é expressa pela relação

$$\tau_{k,j} = f\left(\dot{\gamma}\right) \quad (2.1)$$

onde: $\tau_{k,j}$ é a tensão cisalhante com:

k= direção normal ao escoamento

j = direção paralela ao escoamento

$\dot{\gamma} = \frac{\partial u_j}{\partial k}$ é a taxa de deformação, sendo u_j a velocidade axial do

escoamento.

A equação (2.1) é característica de um dado fluido sendo conhecida como equação reológica ou constitutiva, e sua representação gráfica é conhecida como reograma ou curva reológica.

A equação (2.1) só fica exatamente estabelecida para os fluidos newtonianos mas ela serve para se efetuar uma classificação um pouco mais detalhada, como na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Esquema da classificação reológica de fluidos

Puramente viscosos	indep.	NEWTONIANO		
		PSEUDOPLÁSTICO	sem tensão inicial	não newtonianos
	DILATANTE			
	depend. tempo	BINGHAM	com tensão inicial	
		PSEUDOPLÁSTICO E DILATANTE COM TENSÃO RESIDUAL		
	depend. tempo	TIXOTRÓPICO	não newtonianos	
REOPÉTICO				
visco- elásticos	COMPORTAMENTOS VARIADOS			

Os fluidos puramente viscosos são aqueles que não se recuperam de qualquer deformação após cessada a ação da tensão de cisalhamento.

Os fluidos viscoelásticos apresentam uma recuperação parcial da deformação assim que a ação da tensão cisalhante é cessada. Os fluidos viscoelásticos são intermediários entre os fluidos puramente viscosos e os sólidos puramente elásticos.

O comportamento reológico dos fluidos também pode ser classificado quanto ao tempo necessário para que sua estrutura e suas partículas atinjam uma situação de equilíbrio, quando submetidos a uma tensão de cisalhamento. Como o comportamento reológico é afetado pela estrutura do fluido, o comportamento varia até que esse novo equilíbrio seja alcançado. Nos fluidos com comportamento reológico independente do tempo, a aplicação de uma tensão de cisalhamento resulta numa imediata condição de equilíbrio, de tal forma que na expressão constitutiva não é necessário figurar nenhum termo referente ao tempo.

Os fluidos com comportamento reológico independente do tempo são classificados em newtonianos e não-newtonianos, dependendo da relação entre a tensão e a taxa de cisalhamento. Nos fluidos newtonianos a relação é linear e passa pela origem, como mostrado na Figura 2.1.

No presente trabalho será investigado o escoamento laminar de fluidos puramente viscosos, independentes do tempo sem tensão residual.

Os fluidos newtonianos possuem o modelo de comportamento reológico mais simples. Quando submetidos à ação de uma tensão de cisalhamento eles escoam de forma tal que o gradiente de velocidade é diretamente proporcional à tensão aplicada. Assim:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.2)$$

onde μ é a constante de proporcionalidade a uma dada pressão e temperatura, chamada viscosidade.

Os fluidos não newtonianos tipo lei da potência tem sua equação constitutiva baseada no modelo de Ostwald -de Waele:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (2.3)$$

onde K é o índice de consistência e n é o índice de comportamento

Quanto maior o parâmetro K do modelo de Ostwald-de Waele, mais "viscoso" é o fluido. Para um fluido newtoniano, K é a própria viscosidade.

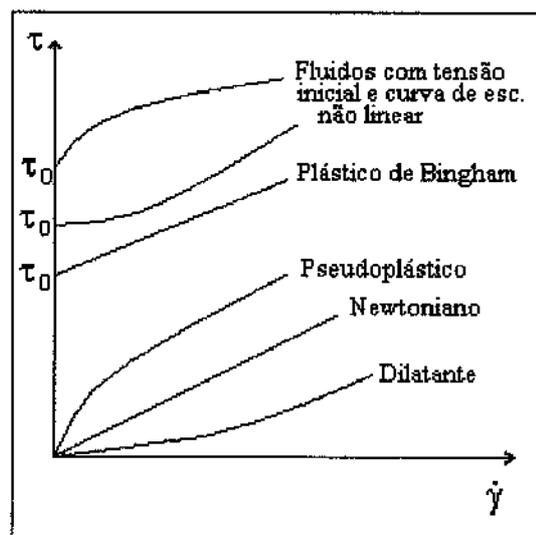


Figura 2.1- Relação entre tensão e taxa de cisalhamento para fluidos newtonianos e não newtonianos.

Este, como todos os modelos não newtonianos, é apenas o resultado de um conveniente ajuste aos pontos experimentais do reograma.

O parâmetro n pode ter valores: $n > 1$ fluido dilatante; $n = 1$ caso newtoniano; $n < 1$ fluido pseudoplástico

Os fluidos pseudoplásticos, $n > 1$, constituem a maior parte dos não newtonianos. Existem outros modelos empíricos propostos para descrever o comportamento reológico dos fluidos pseudoplásticos mas o modelo de Ostwald-de Waele consegue descrever muito bem o comportamento para baixos valores de taxa de deformação.

São exemplos de fluidos pseudoplásticos: (TELIS, 1992), sucos de frutas a altas concentrações, maionese, soluções aquosas de muitas gomas, soluções poliméricas, suspensões de amido, sabões e detergentes.

Quando n é igual à unidade, o fluido é newtoniano e a equação (2.3) se reduz à equação (2.2). São exemplos de fluidos newtonianos: água, todos os líquidos com baixo peso molecular, sucos de frutas a baixas concentrações e gases.

Quando n é maior que a unidade, o fluido é chamado de dilatante. São exemplos de materiais que apresentam comportamento dilatante algumas suspensões aquosas de dióxido de titânio, algumas soluções de açúcar com farinha de milho, algumas soluções de goma arábica com bórax e soluções aquosas de amido de milho modificado (TELIS, 1992).

2.2. ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES CONCÊNTRICOS

2.2.1. As equações do problema

Um sistema anular concêntrico é identificado pelos parâmetros σ e r_h tais que:

$$\sigma = \frac{r_i}{r_e} \quad (2.4)$$

$$r_h = \frac{r_e - r_i}{2} = \frac{r_e(1 - \sigma)}{2} \quad (2.5)$$

onde:

- σ é a razão entre os raios
- r_i é o raio externo do tubo interno
- r_e é o raio interno do tubo externo
- r_h é o raio hidráulico do sistema

A Figura 2.2 representa um sistema típico:

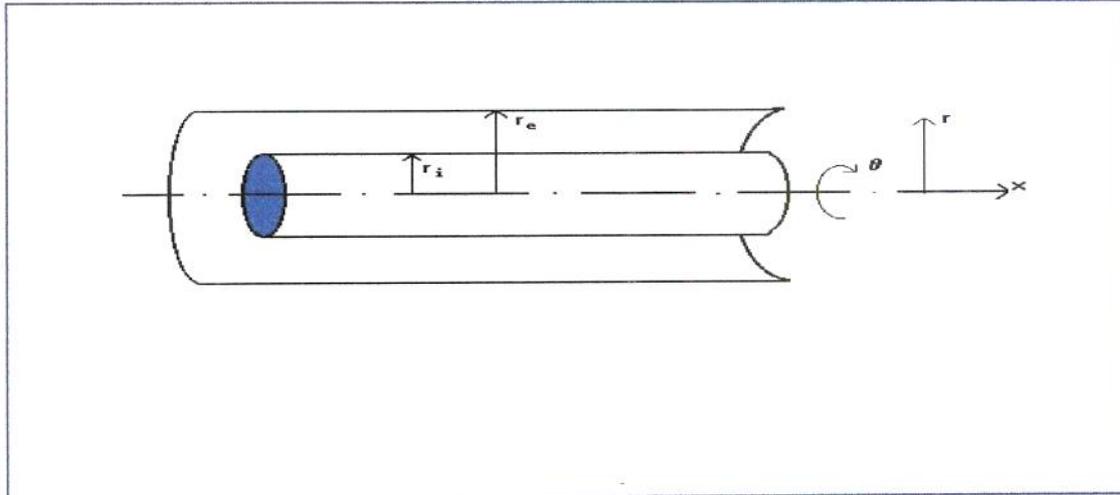


Figura 2.2 - Corte longitudinal de um sistema anular concêntrico.

A determinação do perfil de velocidades não pode ser obtida como uma solução das equações do movimento e da continuidade, sem se considerar a natureza do escoamento, se laminar ou turbulento.

Seja um fluido viscoso, com propriedades físicas constantes, entrando em um tubo anular concêntrico, horizontal, em regime laminar, isotérmico, incompressível, como mostrado na Figura 2.3:

As equações que descrevem o problema são:

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.6)$$

- Equação da quantidade de movimento

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \nabla p - \nabla \tau + \rho \vec{g} \quad (2.7)$$

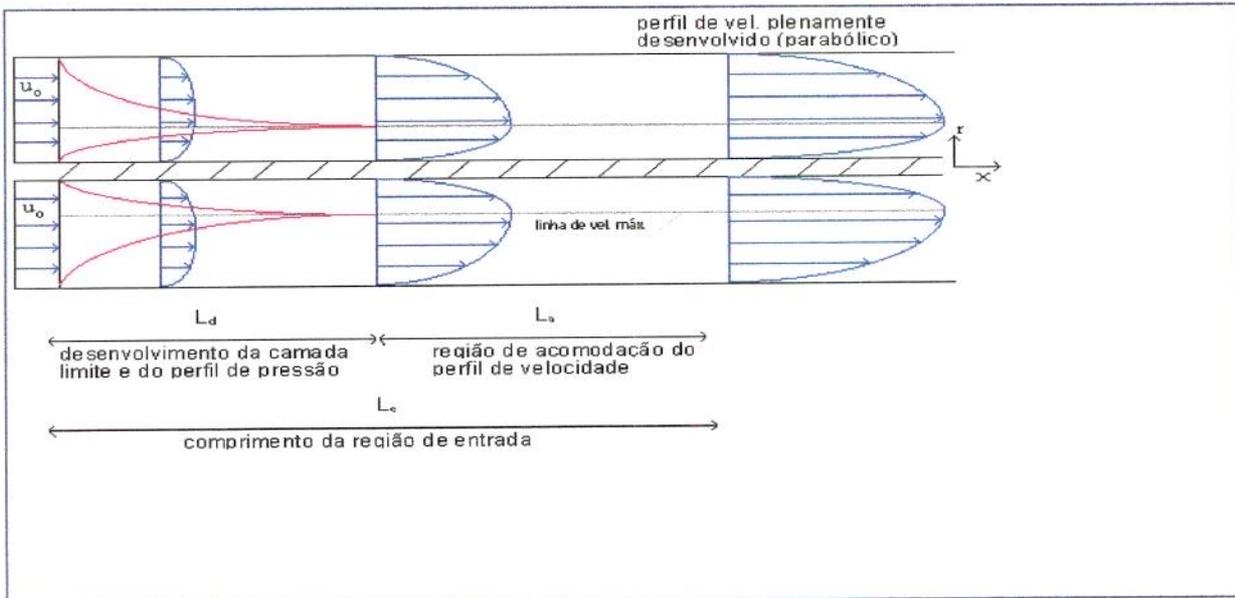


Figura 2.3 - Desenvolvimento do perfil de velocidades na região de entrada de um tubo anular.

Considerando-se:

- escoamento horizontal em regime permanente
- perfil de velocidades, u_0 , uniforme na entrada
- só há escoamento na direção axial

e escrevendo as equações em coordenadas cilíndricas para a direção do escoamento, x , e para a direção radial, r , as equações (2.6) e (2.7) tornam-se, respectivamente:

$$r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (2.8)$$

direção x :

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (2.9-a)$$

direção r:

$$\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad (2.9-b)$$

onde: u é a componente axial da velocidade

v é a componente radial da velocidade

ρ é a densidade do fluido

p é a pressão

A análise da ordem de grandeza dos termos adimensionais nas equações (2.9-a) e (2.9-b) mostra que esta última possui ordem de magnitude muito pequena em relação à primeira, sendo, portanto, desprezada na presente análise.

2.2.2. Princípio da aderência e camada limite

Apesar dos fluidos se diferenciarem em suas relações tensão de cisalhamento/taxa de deformação, eles se assemelham em seu comportamento junto à superfície dos corpos sólidos. Tanto em fluidos newtonianos como não newtonianos, a camada de fluido adjacente à superfície tem a mesma velocidade da superfície. O princípio da aderência é o resultado de observações experimentais e falha quando o fluido não pode ser considerado como um contínuo.

De acordo com a proposta de PRANDTL (1904), os efeitos viscosos de um fluido a altos Re estão limitados a uma fina camada próximo à superfície do corpo. Esta região é chamada de camada limite. Neste caso será considerado que a pressão dentro da camada limite é igual à pressão do escoamento não viscoso fora dela.

O mérito da teoria de Prandtl reside na simplificação da equação da quantidade de movimento que descreve o escoamento viscoso. Segundo a teoria da camada limite, na região de entrada em tubos há formação de uma fina camada de fluido nas paredes do tubo, devido ao atrito e à medida que o escoamento prossegue a espessura dessa camada limite aumenta até fechar no centro e daí todo o escoamento prossegue como se fosse todo ele a região de camada limite. Para o caso anular, este fenômeno é o resultado do encontro das camadas limite dos tubos interno e externo. O tratamento analítico é o mesmo para as duas e a região de máxima velocidade não é equidistante das paredes.

Na presente análise, baseada na teoria da camada limite, supõe-se que:

- o transporte axial de quantidade de movimento é desprezível se comparado com o transporte radial, ou seja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

- a pressão é função apenas da distância axial, ou seja $p=p(x)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

Considerando estas hipóteses, amparadas pelos resultados até aqui reportados na literatura para escoamentos incompressíveis e reescrevendo as equações (2.8) e (2.9-a), tem-se:

- equação da continuidade

$$r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (2.10)$$

- equação da quantidade de movimento

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{dp}{dx} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) \right] \quad (2.11)$$

As condições de contorno para um tubo circular de raio R são:

- $u(r,0) = u_0$ $u(R,x) = 0$
- $v(R,x) = 0$ $p(0) = p_0$

e para um anular de raio interno r_i e externo r_e é

- $u(r,0) = u_0$ $u(r_i,x) = u(r_e,x) = 0$
- $v(r_i,x) = v(r_e,x) = 0$ $p(0) = p_0$

Mesmo sob condições laminares, a equação do movimento não permite uma solução exata. A dificuldade vem do termo não linear de inércia que deve ser conservado na equação de quantidade de movimento para qualquer análise da

região de entrada. Não é de interesse prático o escoamento com $Re \rightarrow 0$ ("creeping flow").

As simplificações das equações fundamentais da quantidade de movimento devidas à teoria da camada limite de Prandtl são aplicáveis ao escoamento de fluidos newtonianos na região de entrada. TOMITA (1961) mostrou que este conceito também é aplicável para fluidos não newtonianos.

Segundo HORNBECK *et alii* (1965), para número de Reynolds maior que 200, e componente adimensional de velocidade radial menor que 0,24 as equações da camada limite fornecem resultados muito próximos das equações que incluem o fluxo de quantidade de movimento radial (porém não incluindo a derivada segunda da velocidade axial). Portanto, será adotado neste trabalho o modelo baseado na teoria da camada limite.

GUPTA & GARG (1981) reportam que o efeito do anular no escoamento se propaga à montante e afeta o perfil de velocidades na entrada, tornando-o curvo. WANG & LONGWELL (1964) obtiveram uma solução numérica para a equação do movimento, do escoamento através de um canal infinito e verificaram que o efeito de propagação da difusão axial da quantidade de movimento não influencia consideravelmente o perfil de velocidades na entrada, exceto para baixos números de Reynolds ($Re < 600$). Se a razão entre os diâmetros interno e externo (r_i / r_e) do anular for alta, a distribuição de velocidades se aproxima daquela do escoamento em um canal, então pode-se supor um perfil de velocidades uniforme na entrada, para um número de Reynolds maior que 600.

As simplificações devidas à teoria da camada limite convertem em parabólicas as equações elípticas da quantidade de movimento. Isto permite que se caminhe na direção do aumento de x , sendo a solução em qualquer posição independente das condições à jusante. A velocidade e a pressão em qualquer posição axial do tubo

anular podem ser determinadas usando-se os valores à montante. As designações “elíptica” e “parabólica”, relacionadas às equações diferenciais parciais, referem-se à forma da curva característica. A geometria de seus domínios de dependência e regiões de influência são mostrados na Figura 2.4.

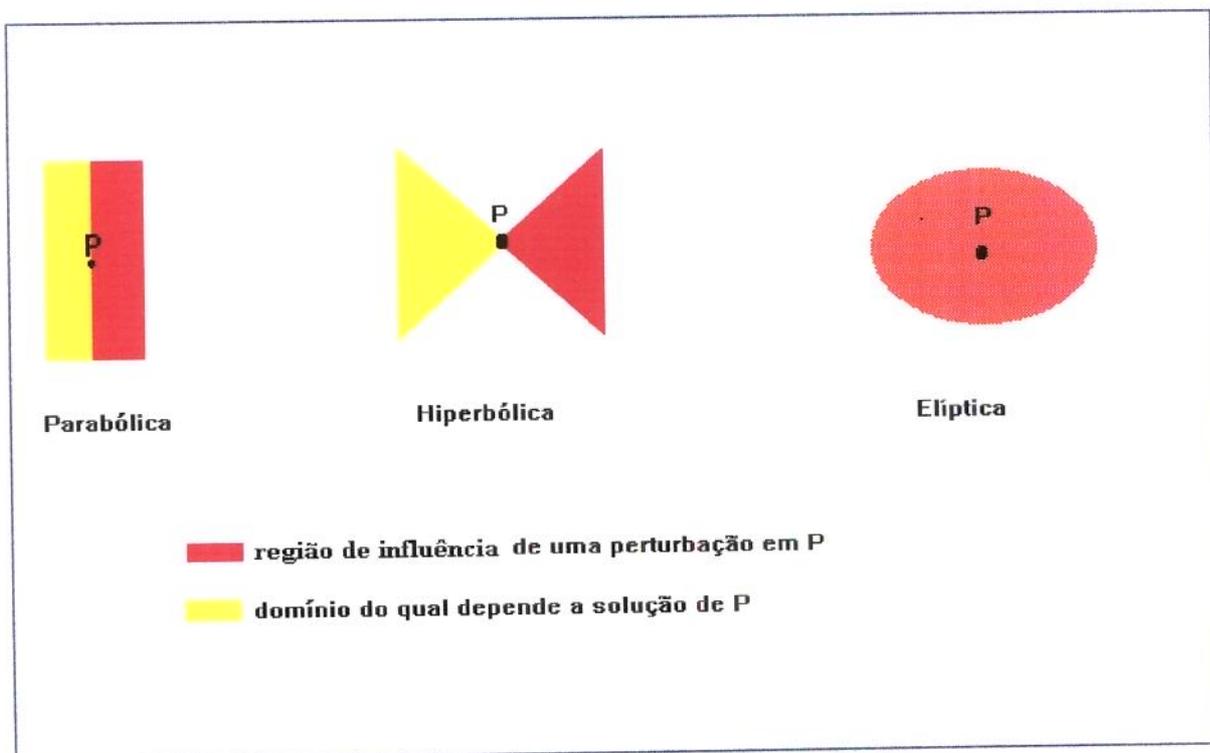


Figura 2.4 - Classificação das equações diferenciais parciais

2.2.3. Solução para fluidos newtonianos no escoamento plenamente desenvolvido

Para o caso de fluidos newtonianos, substituindo-se

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.12)$$

na equação (2.11) tem-se:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (2.13)$$

Se o fluido está escoando em regime plenamente desenvolvido, a equação (2.13) se reduz a:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (2.14)$$

A solução da equação (2.14) para escoamento anular é da seguinte forma:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[r_e^2 - r^2 + \frac{r_e^2 - r_i^2}{\ln(r_e / r_i)} \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) \right] \quad (2.15)$$

Para determinar a posição de máxima velocidade é necessário derivar a equação (2.15) e igualar a zero:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[2r - \frac{r_e^2 - r_i^2}{\ln(r_e/r_i)} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = 0 \quad (2.16)$$

onde

$$\frac{r_e^2 - r_i^2}{\ln(r_e/r_i)} \frac{1}{r} = 2r$$

e assim

$$r_{\max} = \left[\frac{r_e^2 - r_i^2}{2 \ln(r_e/r_i)} \right]^{\frac{1}{2}} = \lambda r_e \quad (2.17)$$

onde

$$\lambda = \left(\frac{1 - \sigma^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

Substituindo-se a equação (2.17) na equação (2.15) consegue-se uma simplificação da forma:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[r_e^2 - r^2 + 2r_{\max}^2 \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) \right] \quad (2.19)$$

Substituindo-se a equação (2.16) na equação (2.12) obtém-se a expressão para a tensão de cisalhamento:

$$\tau_{rx} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[r - \frac{r_e^2 - r_i^2}{2 \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (2.20)$$

que simplificada pela equação (2.17) fica:

$$\tau_{rx} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[r - r_{\max}^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (2.21)$$

A velocidade média é obtida pela relação:

$$\bar{u} = \frac{\int_{r_i}^{r_e} u r dr}{\int_{r_i}^{r_e} r dr} \quad (2.22)$$

Substituindo-se a equação (2.19) na equação (2.22), integrando e simplificando a expressão resultante chega-se à equação:

$$\bar{u} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{r_e^2 + r_i^2}{2} - r_{\max}^2 \right] \quad (2.23)$$

A expressão para a velocidade máxima é obtida pela utilização de (2.19) com a condição

$$u_{\max} = u(r)_{r=r_{\max}}$$

ou seja:

$$u_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[r_e^2 + r_{\max}^2 \left(2 \ln \frac{r_{\max}}{r_e} - 1 \right) \right] \quad (2.24)$$

Adimensionalizando a velocidade máxima em relação à velocidade média:

$$U_{\max} = \frac{u_{\max}}{\bar{u}} = 2 \left\{ \frac{r_e^2 + r_{\max}^2 \left[2 \ln \left(\frac{r_e}{r_{\max}} - 1 \right) \right]}{r_e^2 + r_i^2 - 2r_{\max}^2} \right\} \quad (2.25)$$

Reescrevendo as equações (2.15), (2.17), (2.20) e (2.23) em função da razão entre os raios, tem-se:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r_e^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_e} \right)^2 + \left(\frac{1 - \sigma^2}{\ln \left(\frac{1}{\sigma} \right)} \right) \ln \left(\frac{r}{r_e} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$r_{\max} = r_e \left[\frac{1 - \sigma^2}{2 \ln \left(\frac{1}{\sigma} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} = \lambda r_e \quad (2.27)$$

$$\tau_{rx} = -\frac{dp}{dx} \frac{r_e}{2} \left[\left(\frac{r}{r_e} \right) - \left(\frac{1 - \sigma^2}{2 \ln \left(\frac{1}{\sigma} \right)} \right) \left(\frac{r_e}{r} \right) \right] \quad (2.28)$$

$$\bar{u} = -\frac{dp}{dx} \frac{r_e^2}{8\mu} \left(\frac{1 - \sigma^4}{1 - \sigma^2} - \frac{1 - \sigma^2}{\ln \left(\frac{1}{\sigma} \right)} \right) \quad (2.29)$$

As expressões acima se reduzem ao caso do escoamento em tubos circulares, no limite quando $\sigma=0$.

2.2.4. Solução para fluidos tipo lei da potência em escoamento desenvolvido

Para estes fluidos a equação constitutiva é da forma:

$$\tau_{rx} = K \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \quad (2.30)$$

Substituindo-se a equação (2.30) na equação (2.11) tem-se:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right] \quad (2.31)$$

ou seja:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{K}{r} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n - nK \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^{n-1} \quad (2.32)$$

Para o caso do escoamento plenamente desenvolvido, a equação (2.32) se reduz

a:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{K}{r} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n - nK \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^{n-1} \quad (2.33)$$

A solução da equação (2.33) é muito complexa. FREDRICKSON & BIRD (1958) foram os primeiros a estudar este problema e apresentaram a solução como é descrita a seguir. Para o modelo lei da potência, a tensão de cisalhamento local depende da taxa de cisalhamento local segundo a relação:

$$\tau_{rx} = -K \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \frac{du}{dr} \quad (2.34)$$

A equação (2.11) para o escoamento desenvolvido fica:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) = - \frac{dp}{dx} \quad (2.35)$$

e integrada fica:

$$\tau_{rx} = \frac{P}{2} \left(r - \frac{(\lambda r_e)^2}{r} \right) \quad (2.36)$$

na qual λ é uma constante de integração e P a queda de pressão adimensional. A distância radial $r = \lambda r_e$ representa a posição na qual $\tau_{rx} = 0$.

Substituindo (2.34) em (2.36) e integrando, obtém-se a distribuição de velocidades.

$$u = r_e \left(\frac{Pr_e}{2K} \right)^s \int_k^{\bar{R}} \left(\frac{\lambda^2}{\bar{R}} - \bar{R} \right)^s d\bar{R}; \quad \sigma \leq \bar{R} \leq \lambda \quad (2.37)$$

$$u = r_e \left(\frac{Pr_e}{2K} \right)^s \int_{\bar{R}}^1 \left(\bar{R} - \frac{\lambda^2}{\bar{R}} \right)^s d\bar{R}; \quad \lambda \leq \bar{R} \leq 1 \quad (2.38)$$

na qual $s=1/n$ e $\bar{R} = r/r_e$. Na integração usou-se a condição de contorno:

$$u=0 \quad \text{em} \quad \bar{R} = \sigma \quad \text{e} \quad \bar{R} = 1$$

As equações (2.37) e (2.38) fornecem o mesmo valor de u quando $\bar{R} = \lambda$, ou seja:

$$\int_k^\lambda \left(\frac{\lambda^2}{\bar{R}} - \bar{R} \right)^s d\bar{R} = \int_\lambda^1 \left(\bar{R} - \frac{\lambda^2}{\bar{R}} \right) d\bar{R} \quad (2.39)$$

Esta é a equação determinante de λ , que é função de σ e s . Os autores apresentam os resultados desta equação em forma de tabelas.

A vazão volumétrica do escoamento, Q , é obtida substituindo-se (2.37) e (2.38) na relação

$$Q = 2\pi r r_e^2 \int_k^1 u \bar{R} d\bar{R} \quad (2.40)$$

ou seja:

$$Q = \pi r_e^s \left(\frac{\text{Pr}_e}{2K} \right)^{s-1} \int_k^1 \left| \lambda^2 - \bar{R}^2 \right|^{s-1} \bar{R}^{-s} d\bar{R} \quad (2.41)$$

As integrais das equações (2.39) e (2.40) são válidas quando s é positivo (fluidos pseudoplásticos).

Apesar da utilidade e validade dos dados de FREDRICKSON E BIRD (1958), os autores não obtiveram uma expressão analítica simples que relacione a perda de pressão axial e a vazão volumétrica do escoamento, pois não conseguiram simplificar a integral da equação (2.41). Os autores apresentaram curvas e valores numéricos da integral obtidos por expansão de série de potências para valores inteiros de s . Estas expressões analíticas, que são expansões em série extremamente enfadonhas, não são

válidas se s não é um número inteiro. Também não funcionam se $1 - \bar{R} \ll 1$. Este problema foi resolvido por HANKS & LARSEN (1979), que apresentaram uma solução algébrica simples para a equação (2.41), válida para todos os valores de n e σ . Os autores adotaram o procedimento que envolve procedimento iterativo envolvendo duas integrais. PRASANTH & SHENOY (1992) chegaram à mesma expressão, por um modo mais simples, da forma

$$Q = \frac{n\pi r_e^2}{1+3n} \left(\frac{\text{Pr}_e}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(1 - \lambda^2 \right)^{1+\frac{1}{n}} - \sigma^{1-\frac{1}{n}} \left(\lambda^2 - \sigma^2 \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (2.42)$$

O conceito de Hanks e Larsen foi posteriormente usado por Malik & Shenoy (1991) (citados por PRASANTH & SHENOY, 1992), para estudar o escoamento axial anular generalizado de Couette. Prasanth e Shenoy obtiveram uma equação generalizada para a vazão volumétrica para escoamento axial e tangencial, que se reduz à equação (2.42) para escoamento axial.

VAUGHN & BERGMAN (1966) fizeram objeções aos resultados de FREDRICKSON & BIRD (1958) como não sendo uma representação acurada dos dados experimentais, como fez BIRD (1965). Entretanto, os dados apresentados em objeção à teoria não eram bem representados pelo modelo lei da potência, o que foi mostrado por RUSSEL & CHRISTIANSEN (1974), que usaram uma equação com 3 constantes para ajustar os dados de Bergman, 1962, e por Ashare *et alii*, 1965, que reanalisaram os dados de Fredrickson, 1959, (em HANKS & LARSEN, 1979) usando o modelo de 3 constantes.

TIU & BHATTACHARYYA (1973, 1974) apresentaram dados que consubstanciam os resultados teóricos de Fredrickson e Bird mostrando que eles fornecem uma representação acurada dos dados experimentais, quando os dados viscométricos são realmente do tipo lei da potência.

MISHRA & MISHRA (1976) apresentaram uma forma compacta do perfil de velocidades para o escoamento de fluido tipo lei da potência em anulares, baseada nos perfis de velocidade em tubos e em placas paralelas:

$$\frac{u_i}{u_{max}} = 1 - \left\{ \frac{r_{max} - r}{r_{max} - r_i} \right\}^{\frac{n+1}{n}} \quad r_i \leq r \leq r_{max} \quad (2.43)$$

$$\frac{u_e}{u_{max}} = 1 - \left\{ \frac{r - r_{max}}{r_e - r_{max}} \right\}^{\frac{n+1}{n}} \quad r_{max} \leq r \leq r_e \quad (2.44)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left[\frac{n+1}{1+\sigma} \right] \left[\frac{(2n+1)(1+\sigma) + 2n\lambda}{(3n+1)(2n+1)} \right] \quad (2.45)$$

onde

$$u_{max} = \left(\frac{\Delta P}{L} \frac{r_e}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r_e^n (1-\sigma^2)}{(1-\lambda)^{-n} + \sigma(\lambda-\sigma)^{-n}} \right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad (2.46)$$

sendo λ determinado a partir da Tabela 2.2.

Estes perfis de velocidade se ajustam ao perfil analítico de Fredrickson e Bird, e também aos dados experimentais de TIU & BHATTACHARYYA (1974).

Os perfis de velocidade de MISHRA E MISHRA (1976) fornecem uma melhor previsão da queda de pressão do escoamento desenvolvido do que o procedimento simplificado sugerido por VAUGHN E BERGMAN (1966).

Tabela 2.2 - Valores de $\lambda(n,\sigma)$ (FREDRICKSON & BIRD, 1958)

n	σ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,10	0,3442	0,4687	0,5632	0,6431	0,7140	0,7788	0,8389	0,8954	0,9489
0,20	0,3682	0,4856	0,5749	0,6509	0,7191	0,7818	0,8404	0,8960	0,9491
0,30	0,3884	0,4991	0,5840	0,6570	0,7229	0,7840	0,8416	0,8965	0,9492
0,40	0,4052	0,5100	0,5912	0,6617	0,7259	0,7858	0,8426	0,8969	0,9493
0,50	0,4193	0,5189	0,5970	0,6655	0,7283	0,7872	0,8433	0,8972	0,9493
0,60	0,4312	0,5262	0,6018	0,6686	0,7303	0,7884	0,8439	0,8975	0,9494
0,70	0,4412	0,5324	0,6059	0,6713	0,7319	0,7893	0,8444	0,8977	0,9495
0,80	0,4498	0,5377	0,6093	0,6735	0,7333	0,7902	0,8449	0,8979	0,9495
0,90	0,4572	0,5422	0,6122	0,6754	0,7345	0,7909	0,8452	0,8980	0,9495
1,00	0,4637	0,5461	0,6147	0,6770	0,7355	0,7915	0,8455	0,8981	0,9496,

KOZICKI *et alii* (1966) e KOZICKI & TIU (1971) propuseram duas equações gerais para prever a vazão e a velocidade máxima em função da queda de pressão em escoamento isotérmico, desenvolvido, laminar, de fluidos não newtonianos, independentes do tempo, em dutos de secção transversal com diversas geometrias. As equações são expressas em termos de duas constantes paramétricas, características da geometria do duto, e são funções da tensão de cisalhamento que caracteriza o fluido. Os valores numéricos dos parâmetros geométricos foram determinados para geometrias circular, fenda, anular concêntrico, retangular, elíptica e triangular isósceles.

As expressões gerais desenvolvidas para as velocidades média e máxima, aplicáveis a dutos com várias geometrias, são baseadas em uma extensão da equação de Rabinowitsch (1929) e Mooney (1931) (em KOZICKI *et alii*, 1966) para escoamento em dutos circulares e fendas. Estas equações são da seguinte forma para um fluido tipo lei da potência:

$$u_{max} = \left(\frac{\bar{\tau}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{\varepsilon_1(1+n)} \right) \quad (2.47)$$

$$\bar{u} = \left(\frac{\bar{\tau}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 n} \right) \quad (2.48)$$

onde

$$\bar{\tau} = r_h \left(-\frac{dP}{dx} \right) \quad (2.49)$$

sendo $\bar{\tau}$ tensão de cisalhamento média na parede e

r_h definido pela equação (2.5).

A partir da definição do fator de atrito de Fanning segue-se que:

$$f = \frac{2\bar{\tau}}{\rho \bar{u}^2} \quad (2.50)$$

O número de Reynolds generalizado de KOZICKI *et alii* (1966) é definido segundo a relação:

$$\text{Rey}_{KT} = \frac{16}{f} = \frac{2^{3-n} r_h^n \bar{u}^{2-n} \rho}{K \left[\frac{\varepsilon_0 n + \varepsilon_1}{n} \right]} = \frac{2^{3-2n} r_e^n \bar{u}^{2-n} \rho (1-\sigma)^n}{K \left(\frac{\varepsilon_0 n + \varepsilon_1}{n} \right)^n} \quad (2.51)$$

onde ε_0 e ε_1 são parâmetros geométricos característicos da geometria do escoamento. Os valores desses parâmetros, para vários anulares, estão tabelados em função da razão entre os raios σ (equação 2.4) como mostra a Tabela 2.3.

Tabela 2.3 - Constantes geométricas para um tubo anular (KOZICKI *et alii*, 1966).

σ	0.0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ε_0	0,75	0,9510	0,9737	0,9847	0,9911	0,9946	0,9972	0,9987	0,9994	1,00	1,0
ε_1	0,25	0,4455	0,4693	0,4817	0,4890	0,4935	0,4965	0,4983	0,4992	0,4997	0,50

A principal vantagem em se adotar a presente definição do número de Reynolds reside no fato de que todos os dados do escoamento laminar desenvolvido podem ser correlacionados pela relação $f=16/Re_{yKT}$ para escoamento em tubos, independentemente da geometria do problema.

Para um fluido newtoniano, $n=1$, a equação 2.51 se reduz a:

$$Re_y = \frac{2r_e \bar{u} \rho (1 - \sigma)}{K(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \quad (2.52)$$

Quando $\varepsilon_0 = 0.75$ e $\varepsilon_1 = 0.25$ o número de Reynolds acima se reduz ao Re_y modificado para fluidos lei da potência em tubos circulares, definido por METZNER & REED (1955):

$$Re_y = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D^n}{8^{n-1} K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (2.53)$$

Quando o fluido é newtoniano, $n=1$, e a equação (2.53) se reduz a:

$$Re_y = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} \quad (2.54)$$

2.2.5. A queda de pressão

Nos trabalhos referentes ao escoamento em desenvolvimento é de grande interesse prático a determinação da queda de pressão entre duas posições axiais. Em tubos e dutos suficientemente longos para que se estabeleça o perfil desenvolvido, a queda de pressão para o escoamento laminar é a prevista pela análise de Hagen-Poiseuille mais uma quantidade adicional devida aos efeitos na região de entrada.

Seja o balanço de energia mecânica num fluido entre duas secções 1 e 2 de um anular concêntrico tais que:

1 - entrada do anular, onde o perfil de velocidades é uniforme e

2 - secção onde o escoamento é totalmente desenvolvido.

No cálculo da queda de pressão é conveniente utilizar o fator de atrito do escoamento plenamente desenvolvido e adicionar um termo de correção, E , associado ao desenvolvimento do perfil de velocidades e que considere os efeitos de entrada. Assim:

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = \frac{16}{\text{Rey}} \frac{x}{r_h} + E(x) \quad (2.55)$$

onde $(p_1 - p_2)$ é a queda de pressão entre a secção 1 e a secção 2 a uma distância x da entrada e E o coeficiente de perda localizada na entrada. O termo de correção E é composto por duas contribuições:

- à aceleração da região central

- à fricção viscosa mais alta, ou seja, maior tensão de cisalhamento na parede na região de entrada devido aos gradientes de velocidade axial, na parede, serem maiores que no perfil desenvolvido.

O coeficiente E é uma função da posição na região de entrada, mas torna-se constante no escoamento plenamente desenvolvido. Na região de entrada, E aumenta de um valor zero, em $x=0$, até um valor constante no escoamento desenvolvido. O valor desenvolvido de E representa o efeito total da região de entrada na queda de pressão.

LUNDGREN *et alii* (1964) apresentam, para um fluido newtoniano, uma expressão para determinar a queda de pressão na região de entrada de dutos de secção transversal arbitrária, sem a necessidade de resolver o perfil de velocidades em desenvolvimento. A expressão é da seguinte forma:

$$E = \frac{2}{A} \iint \left\{ \left(\frac{u_{max}}{\bar{u}} \right)^3 - \left(\frac{u_{max}}{\bar{u}} \right)^2 \right\} dA = 2(K_e - K_m) \quad (2.56)$$

onde A é a área da secção transversal ao escoamento e K_e e K_m os fatores de correção para energia cinética e quantidade de movimento, respectivamente. Esta expressão foi usada por TIU *et alii* (1972) para o escoamento de fluido não newtoniano na entrada de tubos circulares e de placas paralelas.

TIU & BHATTACHARYYA (1973) usaram, para o cálculo de E na equação (2.56), uma solução aproximada de primeira ordem baseada na proposta de KOZICKI *et alii* (1966), que definiram os parâmetros geométricos conforme equações (2.47) e (2.48).

MISHRA & MISHRA (1977) resolveram a equação (2.56) para prever o coeficiente de perdas na entrada de anulares, usando as equações (2.43) e (2.44).

2.3. A REGIÃO HIDRODINÂMICA DE ENTRADA

O comprimento hidrodinâmico de entrada pode ser definido como o comprimento do tubo necessário para que seja alcançada uma velocidade máxima correspondente a 98% (TIU & BHATTACHARYYA, 1973) ou 99% (GUPTA & GARG, 1981, ROY, 1965, CHANG & ATABEK, 1962, MANOHAR, 1965) da magnitude da velocidade plenamente desenvolvida, a partir do escoamento uniforme na entrada. McCOMAS (1967) usou valor considerado plenamente desenvolvido. A região hidrodinâmica de entrada de um tubo é aquela onde a camada limite está se desenvolvendo, desde a espessura zero até espessura igual ao raio de tubo

Alguns autores (SPARROW & LIN, 1964, SHAH & FARNIA, 1974) definem o comprimento de entrada como sendo a distância onde o coeficiente de perda alcança 98% do seu valor máximo no escoamento desenvolvido.

Uma ampla revisão sobre a região hidrodinâmica de entrada foi feita por FAN & HWANG (1966). Posteriormente foi apresentada uma revisão por GILLARD & BELLET (1980). Estes dois trabalhos são importantes como coletânea e abrangem exaustivamente o tema até final da década de 70. NOUAR *et alii* (1995) fizeram uma revisão dos métodos de solução do escoamento na entrada de anulares. Os autores também ampliaram alguns métodos desenvolvidos para dutos circulares adaptando-os à geometria anular.

Apesar da importância do escoamento na região de entrada, existem na literatura poucos trabalhos teóricos e experimentais sobre o assunto.

Quase todos os trabalhos experimentais com fluidos newtonianos na região de entrada de anulares tratam de escoamento turbulento. Os resultados apresentados por

ROTHFUS *et alii* (1955), OLSON & SPARROW (1963), OKIISHI & SEROVY (1967) e WILSON & MEDWELL (1971) mostram consideráveis diferenças no valor do comprimento e da queda de pressão na região de entrada. Essas diferenças se devem, com certeza, às diferentes geometrias de entrada usadas por estes pesquisadores. As geometrias geralmente usadas são: protuberante curva, protuberante reta, não protuberante reta e protuberante interno com externo reto, como ilustra a Figura 2.5.

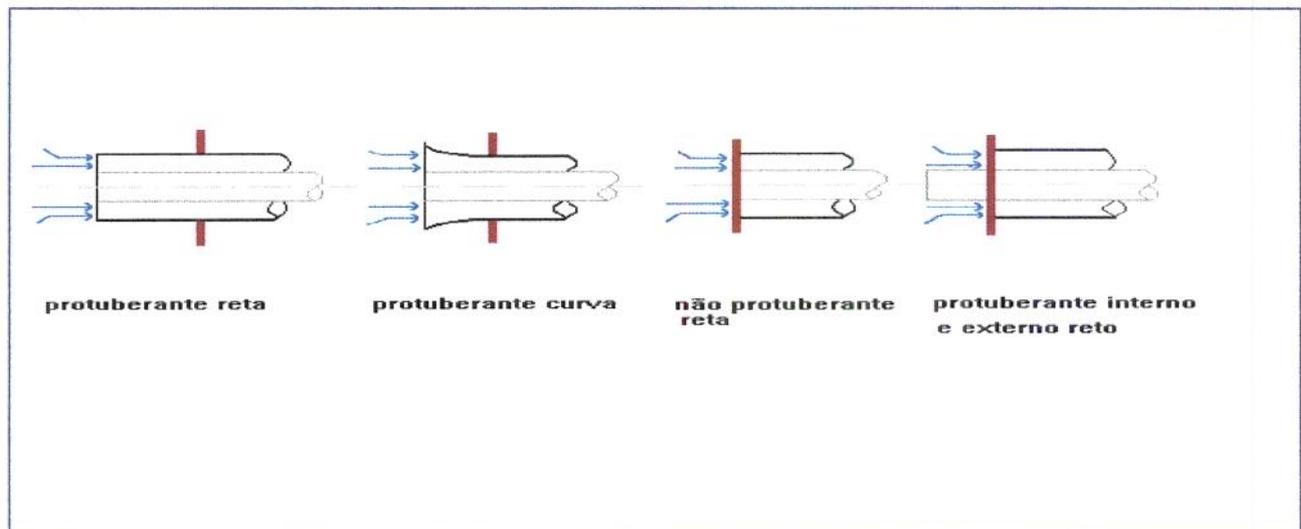


Figura 2.5 - Geometrias de entrada

No estudo do escoamento não newtoniano em anulares há uma alta queda de pressão na entrada mesmo sob condições laminares. TIU & BHATTACHARYYA (1973,1974) e BHATTACHARYYA & TIU (1974) estudaram teórica e experimentalmente o problema. Os resultados indicaram que os coeficientes de perda previstos teoricamente são, em média, 20% mais altos do que os coeficientes obtidos experimentalmente. A queda de pressão menor é resultado de um perfil de velocidades deformado na entrada pois é extremamente difícil produzir, experimentalmente, um perfil de velocidades perfeitamente uniforme como se supõe nas análises teóricas.

Não é possível obter uma solução teórica exata para o escoamento não newtoniano na região de entrada de um anular. Apesar das equações diferenciais que governam o escoamento na região de entrada serem facilmente escritas, a solução analítica exata não pode ser determinada devido ao termo de inércia não linear da equação (2.11). Entretanto, vários métodos de solução, aproximados e numéricos, foram empregados para resolver o problema da região de entrada.

2.4. MÉTODOS DE SOLUÇÃO

São apresentados diversos métodos de solução nas revisões bibliográficas citadas anteriormente (FAN & HWANG, 1966; FARGIE & MARTIN, 1971; GILLARD & BELLET, 1980). Os mais utilizados e promissores são descritos a seguir:

2.4.1. Método da linearização

As dificuldades analíticas na resolução das equações de movimento provêm da forma não linear dos termos de inércia. Uma das técnicas de soluções é a linearização dos termos de inércia, sendo a equação resultante resolvida analiticamente. O primeiro trabalho com interesse prático, nesta linha de abordagem foi apresentado por LANGHAAR (1942).

Langhaar linearizou o lado esquerdo da equação (2.11) com a seguinte proposta:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \mu \omega^2 u = -\frac{dp}{dx} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) \right] \quad (2.56)$$

onde w é função apenas de x .

Esta linearização pode ser justificada em termos teóricos. A equação acima é satisfeita para $w=0$, no regime permanente. Esta equação também é satisfeita, independentemente do valor de w , em todos os pontos da parede do tubo onde $u=0$. Entretanto, esta linearização é válida apenas na região central na qual u é uniforme, e que se considera não viscosa, e na região plenamente desenvolvida, mas não na região da camada limite do escoamento em desenvolvimento. Esta mesma linearização foi utilizada por SUGINO (1962) na análise da região de entrada em anulares, para o escoamento de fluidos newtonianos.

Targ, 1951 (em SLEZKIN, 1955) propôs uma linearização, posteriormente usada por CHANG & ATABEK (1962) e ROY (1965) para escoamento na entrada de anulares, da seguinte forma:

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = u_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.57)$$

LUNDGREN *et alii* (1964) estenderam a abordagem acima de modo a derivar soluções para o escoamento em desenvolvimento em tubos circulares e entre placas paralelas, linearizando o termo de inércia da equação da quantidade de movimento. Estes autores obtiveram uma relação para o gradiente de pressão adicional devido aos efeitos de entrada, sem necessidade de especificar o perfil de velocidades na entrada. Os resultados descrevem bem o escoamento na região de entrada num duto circular, sendo os valores da velocidade no centro do duto e da queda adicional de pressão ligeiramente inferiores aos valores obtidos pela análise de Langhaar.

Este método foi estendido com sucesso para o escoamento de fluidos não newtonianos por Tiu *et alii*, 1972 (em MISHRA & MISHRA, 1977), para a região de entrada em tubos circulares e placas paralelas e por TIU & BHATTACHARYYA

(1973) para anulares, de modo a obter a queda adicional de pressão e o comprimento de entrada.

Uma terceira linearização foi proposta por SPARROW *et alii* (1964) para tubos circulares e placas paralelas e por SPARROW & LIN (1964) para anulares. Esta proposta pode ser considerada uma síntese das duas linearizações anteriores e tem a seguinte forma:

$$\varepsilon(x)\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda(x) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.58)$$

onde $\varepsilon(x)$ é uma função indeterminada de x , \bar{u} é a velocidade média e $\Lambda(x)$ é outra função indeterminada de x que inclui o gradiente de pressão e o resíduo do termo de inércia. A análise de SPARROW *et alii* (1964) difere do tratamento de Langhaar pela utilização de uma coordenada axial estendida e pela introdução da equação de energia mecânica a fim de obter uma relação adicional para o gradiente de pressão mas as duas análises geram soluções em série em termos de funções de Bessel normais ou modificadas.

LEW & FUNG (1970) linearizaram a equação de modo similar. AIELLO & TREFIL (1976) generalizaram o método e fizeram uma estimativa dos erros obtidos pela aproximação. Mais recentemente, GILLARD & BELLET (1980) usaram este método para resolver o problema de entrada de fluidos newtonianos em escoamentos pulsados.

MISHRA & MISHRA (1977), usando técnica de linearização semelhante à de LUNDGREN *et alii* (1966), apresentaram resultados para o coeficiente de perda de carga para fluido de Bingham na região de entrada de um anular.

2.4.2. Métodos integrais

2.4.2.1. Integral da quantidade de movimento (Método de Von Karman) com abordagem de camada limite.

Neste método o escoamento é dividido em uma camada limite próxima à parede e em um escoamento não viscoso na parte central do tubo. Supõe-se um perfil de velocidade polinomial na camada limite, que se junta ao perfil de velocidades uniforme da parte central, e a equação de Bernoulli é usada na parte central para a determinação da distribuição de pressão na direção axial. O método utiliza as formas integrais das equações de quantidade de movimento e da continuidade. As equações 2.10 e 2.11 na forma integral são, respectivamente:

$$\int_0^r ur dr = \frac{UR^2}{2} \quad (2.59)$$

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^R u^2 r dr + \frac{R^2}{2} \frac{dp}{dx} + (\tau_{rx})_{r=R} R = 0 \quad (2.60)$$

Este método foi idealizado e aplicado por SCHILLER (1922), para escoamentos em tubo circular e é similar ao método de Karman-Pohlhausen para escoamento sobre uma placa plana. O autor considerou um perfil de velocidades parabólico na camada limite porém não considerou ali a dissipação viscosa e só aplicou um balanço de energia mecânica no escoamento não viscoso central. O perfil de velocidades escolhido foi uma modificação da solução de Poiseuille.

O método de Schiller foi usado por SIEGEL (1953), BOGUE (1959) e PAWLEK & TIEN (1964) para resolver o problema do escoamento na região de entrada de tubos circulares para fluidos pseudoplásticos. O procedimento foi similar, exceto pelo uso de polinomiais de 3º e 4º graus para descrever a distribuição de

velocidades na camada limite. Este procedimento é útil e simples somente para escoamentos turbulentos, não se aplicando a escoamentos laminares a altos números de Reynolds. A análise para fluidos altamente pseudoplásticos torna-se imprecisa pois o polinomial falha com o achatamento do perfil de velocidades característico dos fluidos deste tipo. EL DEFRAWI & FINLAYSON (1972) mostraram quantitativamente este problema concluindo que um perfil de velocidades apropriado para fluidos newtonianos não necessariamente é apropriado para fluidos não newtonianos, apesar de SCHLICHTING (1955) ter mostrado que a forma do perfil de velocidades na camada limite escolhido não afeta muito a solução do problema.

TOMITA (1961) conjugou este método a um método variacional, aumentando o domínio de validade da solução.

A técnica integral proposta por SCHILLER (1922) foi usada por McCOMAS (1967), que combinou as previsões de LUNDGREN *et alii* (1964), para a queda de pressão na entrada, com um balanço de força para a parte central não viscosa. Seu objetivo era prever o comprimento hidrodinâmico de entrada em dutos de secção transversal arbitrária, sem detalhar o perfil de velocidades do escoamento na entrada.

TIU & BHATTACHARYYA (1973) aplicaram esta abordagem para o escoamento de fluidos tipo lei da potência em anulares porém não consideraram os resultados realistas.

Wein & Chvojkova, 1973 (em GILLARD & BELLET, 1980) optaram por uma aproximação de "pseudosimilaridade" que permite generalizar o estudo para o caso de fluidos com modelos reológicos diversos (modelo de Ostwald, Bingham, Eyring), para o escoamento em tubos.

O método integral também foi usado por MOHANTY & ASTHANA (1978) , GUPTA (1987), (1990) e MISHRA & SINGH (1976) para o escoamento de fluidos tipo lei da potência em placas paralelas..

CHUNG & ASTILL (1976) e MISHRA *et alii* (1985) usaram o método integral para prever os resultados de comprimento de entrada e coeficiente de perda para fluido de Bingham na região de entrada de um anular. BATRA & JENA (1990) usaram este método para estudar o escoamento de sangue em anulares.

2.4.2.2. Integral da energia-quantidade de movimento

O maior obstáculo do método integral de von Karman é a suposição de um escoamento não viscoso fora da camada limite, sendo a queda de pressão calculada simplesmente a partir desta consideração. Esta suposição pode ser válida perto da entrada, onde os efeitos viscosos são observados na camada limite, mas se torna irreal na região plenamente desenvolvida. Nos últimos anos alguns autores usaram um método simples e elegante que combina o método integral de Karman-Pohlhausen e a linearização de equações. CAMPBELL & SLATTERY (1963) foram os primeiros a modificar o clássico método integral para resolver o escoamento newtoniano na entrada de um tubo circular. Os autores empregaram o perfil parabólico de velocidades de Schiller e incorporaram um balanço macroscópico de energia mecânica para todo o fluido contido no tubo a fim de considerar a dissipação viscosa dentro da camada limite. O método foi estendido por CHEN *et alii* (1970) para fluidos de Bingham. GUPTA (1977) apresentou uma versão melhorada deste método para escoamento newtoniano na entrada de tubos. FARGIE & MARTIN (1971) usaram esta abordagem simples para resolver o problema de entrada de fluidos newtonianos, combinando o método de Campbel e Slattery com a equação diferencial da quantidade de movimento. TIU & BHATTACHARYYA (1973) usaram procedimento

similar para resolver o problema do escoamento não newtoniano na entrada de anulares e compararam os resultados com aqueles obtidos pelo método de linearização e da abordagem da camada limite. Os autores concluíram que o método combinado prevê um comprimento de entrada maior e descreve melhor o escoamento na região de entrada. MASHELKAR (1975) estendeu esta análise para o estudo da região hidrodinâmica de entrada no escoamento de fluidos pseudoplásticos em tubos circulares. O procedimento envolve certas aproximações durante o desenvolvimento do tratamento teórico completo, que são mais válidas para fluidos pseudoplásticos do que para fluidos newtonianos. GUPTA & AGARWAL (1993) apresentaram uma comparação de três soluções integrais (integral da quantidade de movimento, integral da quantidade de movimento-energia e integral refinada quantidade de movimento-energia) para escoamento na entrada de fluidos tipo lei da potência em tubo circular. Analiticamente a solução integral refinada fornece uma descrição melhor do escoamento.

2.4.3. Ajuste

Este grupo de soluções é constituído pelo ajuste das soluções de camada limite, válidas perto da entrada, às soluções tipo perturbação no escoamento plenamente desenvolvido. A região hidrodinâmica de entrada é dividida em duas partes: a região situada perto da entrada é tratada como um problema de camada limite onde o crescimento da espessura da camada é calculado como no caso de uma corrente exterior acelerada. Este procedimento não fornece similaridade no perfil de velocidade mas uma solução aproximada em termos de séries de perturbação. Perto da região de escoamento plenamente desenvolvido a solução aproximada é obtida utilizando-se técnicas de perturbação do perfil de velocidade parabólico plenamente desenvolvido. A análise é completada igualando-se as duas soluções na região onde elas são aplicáveis. Este procedimento foi introduzido por BOUSSINESQ

(1891) e usado por Schlichting em 1934, para escoamento sobre placas planas. Atkinson & Goldstein (GOLDSTEIN, 1938) e TATSUMI (1952) usaram esta técnica para tubos circulares. COLLINS & SCHOWALTER (1963), usaram esta técnica para estudar o desenvolvimento do escoamento de fluidos pseudoplásticos na entrada de tubos circulares mas não conseguiram calcular o comprimento de entrada para fluidos pseudoplásticos com valores de índice de comportamento menores que 0,4, devido à lenta convergência dos cálculos. MACKILLOP (1964) empregou a mesma técnica para estudar o escoamento com transferência de calor, de fluidos tipo lei da potência em tubo circular, obtendo uma descrição simultânea da distribuição de velocidade e pressão.

2.4.4. Método numérico das diferenças finitas (MDF)

Dentre os métodos numéricos disponíveis para a solução das equações diferenciais, o método das diferenças finitas é o mais usado pois apresenta uma solução baseada nas equações diferenciais de movimento, sem supor linearização e sem a necessidade de usar soluções diferentes nas várias regiões do campo do escoamento.

Nos últimos anos, a preferência da comunidade científica mudou a favor do uso do método de diferenças finitas para a resolução de escoamento em camada limite mais complexos, principalmente devido à evolução dos computadores que hoje manipulam rapidamente grandes sistemas matriciais.

Esta abordagem envolve a redução das equações diferenciais da continuidade e do movimento a equações de diferenças finitas que são resolvidas numericamente. O método das diferenças finitas, aplicado à camada limite, numa forma muito similar à que é usada agora, começou na década de 50 com Friedrich & Forstall, 1953 (em

ANDERSON *et alii*, 1984) e Rouleau & Osterle, 1955 (em HORNBECK *et alii*, 1965). Rouleau e Osterle apresentaram um esquema implícito, não iterativo, para resolver as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento de escoamentos não confinados, sem gradiente de pressão longitudinal. Para este caso, uma das vantagens do esquema implícito de Rouleau & Osterle reside no fato de que as diferenciais das equações são linearizadas e desacopladas numa certa posição da malha. Isto é conseguido supondo-se que, quando há produto de duas variáveis desconhecidas, uma delas é substituída por seu valor na posição anterior. A equação da continuidade dissocia-se da equação da quantidade de movimento e sua solução e consequente obtenção da velocidade radial são obtidas após a obtenção do valor da velocidade axial na equação da quantidade de movimento.

No caso de escoamento confinado, que acontece todo em camada limite, o gradiente de pressão na direção do escoamento permanece desconhecido. Em tal caso o modelo simplificado do escoamento em camada limite inclui somente duas equações e três incógnitas (velocidade axial, radial e pressão). Para superar este obstáculo, BODOIA & OSTERLE (1961) usaram a equação da continuidade na forma integral juntamente com a equação da quantidade de movimento linearizada em seus termos de inércia pelo método das diferenças finitas, obtendo duas equações e duas incógnitas (pressão e velocidade axial) para escoamento newtoniano entre duas placas paralelas.

SHOHET *et alii* (1962) e HWANG & FAN (1963) usaram procedimento similar para descrever a região de entrada no escoamento magnetohidrodinâmico.

HORNBECK (1963), CHRISTIANSEN & LEMON (1965) e FRIEDMAN *et alii* (1968) usaram o método de diferenças finitas para o escoamento newtoniano na entrada de tubos circulares. GARG & GUPTA (1981) usaram o procedimento de Hornbeck para estudar a estabilidade do escoamento em desenvolvimento.

O método das diferenças finitas é um método de aproximação pois a derivada em um ponto é aproximada por quocientes de diferença num pequeno intervalo, ou seja, $\partial\phi/\partial x$ é substituído por $\delta\phi/\delta x$ onde δx é pequeno.

O plano do escoamento é subdividido em retângulos iguais de lados δx e δy e cada ponto da malha é identificado por 2 índices. Quando um ponto desconhecido é expresso diretamente em termos de um valor pivotal conhecido, tem-se um sistema explícito; quando um ponto desconhecido necessita da solução de uma série de equações, tem-se um sistema implícito.

As equações em diferenças finitas são geralmente obtidas na forma implícita, para evitar as limitações impostas a δx nos métodos explícitos, devidas à instabilidade. Se a estabilidade e convergência de tal esquema forem estabelecidas, a solução se aproximará da solução exata das equações diferenciais, à medida que o tamanho da malha se aproxima de zero.

Existem vários esquemas de resolução das equações diferenciais escritas na forma de diferenças finitas. ANDERSON *et alii* (1984) citam estes métodos listando-os em ordem crescente de dificuldade de programação, como é mostrado na Tabela 2.4.

O esquema 2 foi usado pelos seguintes autores para resolver o escoamento na entrada: SHAH & FARNIA (1974) para fluido newtoniano em anulares; LIU & SHAH (1975) para fluido de Casson em anulares; SHAH & SOTO (1974,1975) e SOTO & SHAH (1976) para fluidos não newtonianos em tubos circulares; MEHROTRA & PATIENCE (1990) para fluido tipo lei da potência em tubos circulares e por ROUND & YU (1993) para fluidos do tipo Herschel-Bulkley em anulares.

O esquema 6 foi usado por AZOUZ *et alii* (1991) para resolver o problema do escoamento desenvolvido de fluidos newtonianos em anulares excêntricos e de fluidos tipo lei da potência em anulares concêntricos.

GUPTA & GARG (1981) usaram um esquema implícito de diferenças finitas (esquema 4) para determinar a região hidrodinâmica de entrada em um anular concêntrico, sendo os resultados comparáveis aos de Sparrow & Lin, obtidos pelo método da linearização. Porém, computacionalmente, o método das diferenças finitas mostrou-se muito mais rápido. Para fluidos não newtonianos do tipo lei da potência o problema se torna maior pois não se tem disponível a expressão do perfil de velocidades plenamente desenvolvido. ANDERSSON & TOFTEN (1989) usaram o esquema de blocos (esquema 7) para resolver numericamente as equações de camada limite para um fluido tipo lei da potência.

Tabela 2.4 - Esquemas de MDF recomendados para a resolução de equações de camada limite listados em ordem estimada de esforço crescente de programação (em ANDERSON *et alii*, 1984)

1	Dufort & Frankel (1953)
2	Implícito puro (incluindo Patankar & Spalding, 1970)
3	Implícito de Crank-Nicolson (1947)
4	Implícito puro com equação da continuidade acoplada
5	Crank-Nicolson com equação da continuidade acoplada
6	Esquema de blocos modificado Blottner, 1975A, Wornan, 1977)
7	Esquema de blocos (Keller & Cebeci, 1972)

Os trabalhos relacionados ao desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica em um anular concêntrico estão sumarizados nas Tabelas 2.5 e 2.6 para fluidos não newtonianos e newtonianos. Uma revisão sobre desenvolvimento da camada limite térmica é apresentado por TERMINA & MOJTABI (1988). Revisão sobre anulares concêntricos com rotação do cilindro interno foi feita por CHUNG & ASTILL (1976), EL-SHAARAWI & SARHAN (1992) e NOUAR *et alii* (1995). Uma extensa revisão sobre anulares excêntricos foi apresentada por VASQUES (1994).

Tabela 2.5 - Trabalhos sobre escoamento anular isotérmico na entrada para fluidos não newtonianos em regime permanente.

MÉTODO	AUTOR	REF.	FL.NÃO NEWT.
Combinação	Tiu & Bhattacharyya	1973	Lei da potência
Experimental	Bhattacharyya & Tiu	1974	Lei da potência
	Tiu & Bhattacharyya	1974	Lei da potência
Diferenças Finitas	Liu & Shah	1975	Casson
	Round & Yu	1993	Herschel-Bulkley
Lineariação	Mishra & Mishra	1977	Lei da potência, Bingham

Tabela 2.6 - Trabalhos sobre escoamento anular isotérmico na entrada para fluidos newtonianos.

MÉTODO	AUTOR	REF.	REG. ESCOAM.
Linearização	Roy	1961	laminar permanente
	Chang & Atabek	1962	laminar permanente
	Sugino	1962	laminar permanente
	Sparrow <i>et alii</i>	1964	laminar permanente
	Sparrow & Lin	1964	laminar permanente
	Lundgren <i>et alii</i>	1964	laminar permanente
	Nouar <i>et alii</i>	1995	laminar permanente
Diferenças finitas	Manohar	1965	laminar permanente
	Shah & Farnia	1974	laminar permanente
	Coney & El Sharaawi	1975	laminar permanente
	Gupta & Garg	1981	laminar permanente
	Nouar <i>et alii</i>	1995	laminar permanente
Integral	Okiishi-Serovy	1967	turbulento pte.
	McComas	1967	laminar permanente
	Wilson & Medwell	1971	turbulento pte.
Experimental	Rothfus <i>et alii</i>	1955	turbulento pte.
	Olson & Sparrow	1963	turbulento pte.
Teórico - não específico	Murakawa	1956	laminar permanente

2.5. A TRANSFORMAÇÃO DE MATRAS E NOWAK

É muito prática a transformação das variáveis das equações diferenciais de modo a simplificar a sua solução. MATRAS & NOWAK (1983) propuseram um "método de transformação para descrever o escoamento em tubos de fluidos não newtonianos puramente viscosos". Este método, primeiramente apresentado pelos referidos autores (Matras, 1975, Nowak & Matras, 1979, citados em MATRAS & NOWAK, 1983), foi expandido para construir um modelo denominado "pseudo-newtoniano" para o escoamento acima. A análise de Matras & Nowak gera correlações independentes do valor do índice de comportamento. Este novo método prediz as mudanças na queda de pressão do escoamento na região de entrada de fluidos tipo lei da potência em tubos circulares.

Para se estabelecer a analogia hidrodinâmica entre o escoamento não-newtoniano de um fluido tipo lei da potência e um escoamento newtoniano imaginário num tubo circular será considerado um novo sistema de variáveis, $0 - u^* - r^*$, resultante da transformação do sistema original, $0 - u - r$. Esta transformação é feita de modo que:

$$(i) \quad r^* = f(r) \text{ sendo } r^* = 0 \text{ quando } r = 0; \quad (2.61)$$

$$(ii) \quad u^*(r^*) \equiv u(r); \quad (2.62)$$

(iii) o modelo lei da potência se transforma num modelo newtoniano de viscosidade K^* , ou seja:

$$\frac{r^*}{2} \left(\frac{\Delta P^*}{L^*} \right) = K^* \left(- \frac{du^*}{dr^*} \right) \quad (2.63)$$

(iv) a equação diferencial de balanço de quantidade de movimento para regime permanente

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{K}{r} \left(-\frac{du}{dr} \right)^n - nK \frac{d^2u}{dr^2} \left(-\frac{du}{dr} \right)^{n-1} \quad (2.64)$$

se transforma, no novo sistema de coordenadas, em uma forma válida para escoamento newtoniano:

$$\frac{\Delta P^*}{L^*} = K^* \left[\frac{1}{r^*} \left(-\frac{du^*}{dr^*} \right) - \frac{d^2u}{dr^{*2}} \right] \quad (2.65)$$

As transformações definidas nos itens (i) a (iv) geram o chamado "escoamento pseudo-newtoniano", isto é, um escoamento imaginário de um fluido newtoniano num tubo imaginário de raio R^* .

A viscosidade pseudo-newtoniana K^* é considerada uma quantidade paramétrica com valor constante nas condições do escoamento. Considera-se também que a dissipação viscosa e a vazão mássica são equivalentes em ambos os escoamentos, isto é:

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = \frac{\Delta p}{L} \quad (2.66),$$

$$\pi R^{*2} u_m^* = \pi R^2 u_m \quad (2.67)$$

$$\rho^* = \rho \quad (2.68)$$

Considerando-se um tubo circular com raio R , as relações (2.61) a (2.68) levam às seguintes transformações:

$$r^* = \left(\frac{2(n+1)}{3n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1-n}{2n}} r \quad (2.69)$$

$$R^* = \left(\frac{2(n+1)}{3n+1} \right)^{\frac{1}{2}} R \quad (2.70)$$

$$u_m^* = \left(\frac{3n+1}{2(n+1)} \right) u_m \quad (2.71)$$

$$K^* = K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{2(n+1)}{3n+1} \right)^2 \left(\frac{4u_m}{R} \right)^{n-1} \quad (2.72)$$

Com estas transformações o perfil do escoamento em desenvolvimento de um fluido tipo lei da potência pode ser obtido a partir de um fluido pseudo-newtoniano de viscosidade K^* escoando num tubo circular de raio R^* .

O fator de transformação da velocidade usado por Matras & Nowak foi obtido a partir da relação entre as velocidades média e máxima do escoamento num tubo circular, ou seja:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} u_{max}$$

com substituição das equações (2.47) e (2.48) e dos valores dos parâmetros geométricos de KOZICKI *et alii* (1966).

Esta analogia foi usada por GUPTA & AGARWAL (1993) para o escoamento de fluidos não newtonianos em tubos circulares, com resultados satisfatórios.

GUPTA (1987,1990) usou o mesmo procedimento para o escoamento entre placas paralelas usando a relação:

$$\bar{u} = \frac{2}{3} u_{max}$$

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1. AS EQUAÇÕES QUE DEFINEM O PROBLEMA

Seja um fluido não newtoniano tipo lei da potência, com a seguinte equação constitutiva:

$$\tau_{r,x} = K \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \quad (3.1)$$

em um escoamento horizontal em regime laminar, isotérmico e incompressível.

As equações que definem o problema são obtidas pela substituição da equação (3.1) na equação (2.11), de modo que:

- equação da continuidade:

$$r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (3.2)$$

- equação da quantidade de movimento:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{K}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right] \quad (3.3)$$

com condições de contorno:

$$u(r, 0) = u_0 \quad u(r_i, x) = u(r_e, x) = 0$$

$$v(r_i, x) = v(r_e, x) = 0 \quad p(0) = p_0$$

3.2. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NEWTONIANO

As equações (3.2) e (3.3) podem ser adimensionalizadas usando-se as seguintes variáveis:

$$X = \frac{x}{2(r_e - r_i) \text{Rey}_{KT}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \quad (3.4)$$

$$U = \frac{u}{\bar{u}} \quad (3.5)$$

$$V = \frac{v}{\bar{u}} \text{Rey}_{KT}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \quad (3.6)$$

$$R = \frac{r}{2(r_e - r_i)} \quad (3.7)$$

$$P = \frac{p}{\rho \bar{u}^2} \quad (3.8)$$

onde o número de Reynolds é definido segundo a relação (2.52).

Em termos destas quantidades adimensionais as equações (3.2) e (3.3) ficam:

$$R \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial R} (RV) = 0 \quad (3.9)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{dP}{dX} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \quad (3.10)$$

com condições de contorno:

$$U(R_i, X) = U(R_e, X) = V(R_i, X) = V(R_e, 0) = P(0) = 0$$

$$U(R, 0) = 1$$

onde $R_i = \frac{r_i}{2(r_e - r_i)}$ e $R_e = \frac{r_e}{2(r_e - r_i)}$

3.3. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NÃO NEWTONIANO

Para resolver o problema de entrada, que neste caso é representado pelas camadas limite que se desenvolvem nas paredes dos tubos interno e externo, utiliza-se das equações da continuidade (3.2) e da quantidade de movimento (3.3). Como este problema já é de difícil tratamento no caso newtoniano e para um fluido tipo lei da potência se torna ainda mais complexo, essas equações são transformadas segundo o método de MATRAS E NOWAK (1983) descrito na secção 2.5. As equações de transformação (2.61) a (2.72) são utilizadas para tornar o problema não newtoniano

em um problema "pseudo-newtoniano". Como estas equações são escritas para um tubo circular de raio R , tem-se que fazer uma adaptação para o caso de um tubo anular com raio interno, r_i , e raio externo, r_e . Esta adaptação é feita tomando-se como base a definição de Re_{KT} , u_{max} e \bar{u} para fluidos tipo lei da potência em anulares (equações 2.47, 2.48 e 2.51) e suas relações com a definição de Re_{MR} , (equação 2.52) para fluidos tipo lei da potência em tubos circulares.

Num escoamento anular a relação entre as velocidades média e máxima é:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sigma^2 - 2\lambda^2}{1 - \lambda^2(1 - 2 \ln \lambda)} \right) u_{max} \quad (3.11)$$

Define-se o fator de transformação F para a velocidade média, de tal modo que:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 n}{\varepsilon_1(n+1)} \right) \left(\frac{1 + \sigma^2 - 2\lambda^2}{1 - \lambda^2(1 - 2 \ln \lambda)} \right) \quad (3.12)$$

e

$$\bar{u}^* = F\bar{u} \quad (3.13)$$

Considerando-se a mesma vazão mássica em ambos os escoamentos tem-se:

$$\pi(r_e^{*2} - r_i^{*2})\bar{u}^* = \pi(r_e^2 - r_i^2)\bar{u} \quad (3.14)$$

e então:

$$(r_e^{*2} - r_i^{*2}) = F^{-1}(r_e^2 - r_i^2) \quad (3.15)$$

Da equação (3.15) resulta

$$r_e^* = F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^{*2}} \right)^{\frac{1}{2}} r_e \quad (3.16)$$

$$r_i^* = \sigma^* r_e^* = F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^{*2}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma^*}{\sigma} r_i \quad (3.17)$$

onde σ^* é a nova relação entre os raios r_i^* e r_e^* e, à semelhança da equação (2.69), tem-se:

$$r^* = F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^{*2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r_e} \right)^{\frac{1-n}{2n}} r \quad (3.18)$$

$$\sigma^* = \sigma^{\frac{1+n}{2n}} \quad (3.19)$$

Em concordância com MATRAS E NOWAK (1983):

$$\frac{\Delta P^*}{L^*} = \frac{\Delta P}{L} \quad (3.20)$$

$$\rho^* = \rho \quad (3.21)$$

$$x^* = x \quad (3.22)$$

$$u^* = u \quad (3.23)$$

$$v^* = v \quad (3.24)$$

$$\text{Re } y^* = \frac{2\rho\bar{u}^* r_e^* (1-\sigma^*)}{K^*} \quad (3.25)$$

$$K^* = K \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 n}{n} \right)^n \left(\frac{4u_m}{r_e - r_i} \right)^{n-1} F^{-2} \quad (3.26)$$

Estas transformações permitem que a solução do escoamento em desenvolvimento do fluido tipo lei da potência possa ser obtido a partir do escoamento de um fluido "pseudo-newtoniano" de viscosidade K^* num tubo anular com raio interno r_i^* e raio externo r_e^* , segundo as seguintes equações:

- equação da continuidade:

$$r^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) = 0 \quad (3.27)$$

- equação da quantidade de movimento:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{K^*}{\rho^*} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right] \quad (3.28)$$

As equações (3.27) e (3.28) podem ser adimensionalizadas usando-se as seguintes variáveis:

$$X = \frac{x^*}{2(r_e^* - r_i^*) \text{Re } y^*} \quad (3.29)$$

$$U = \frac{u^*}{\bar{u}^*} \quad (3.30)$$

$$V = \frac{v^*}{\bar{u}^*} \text{Re } y^* \quad (3.31)$$

$$R = \frac{r^*}{2(r_e^* - r_i^*)} \quad (3.32)$$

$$P = \frac{p^*}{\rho^* u^{*2}} \quad (3.33)$$

As equações adimensionais ficam:

$$R \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial R}(RV) = 0 \quad (3.34)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{dP}{dX} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \quad (3.35)$$

com condições de contorno:

$$U(R_i, X) = U(R_e, X) = V(R_i, X) = V(R_e, 0) = P(0) = 0$$

$$U(R, 0) = 1$$

onde $R_i = \frac{r_i^*}{2(r_e^* - r_i^*)}$ e $R_e = \frac{r_e^*}{2(r_e^* - r_i^*)}$.

3.4. O MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENÇAS FINITAS

A equação (3.35) pode ser colocada na forma de diferenças finitas usando-se as seguintes representações (HORNBECK *et alii*, 1965):

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{j+1,k} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j+1,k} = \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta R}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right|_{j+1,k} = \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{(\Delta R)^2}$$

$$\left. \frac{dP}{dX} \right|_{j+1,k} = \frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta X}$$

Para a malha mostrada na Figura 3.1, a equação (3.35), em diferenças finitas, para qualquer ponto (j+1,k) fica:

$$\alpha_{j,k} U_{j+1,k-1} + \beta_{j,k} U_{j+1,k} + \gamma_{j,k} U_{j+1,k+1} + \eta_j P_{j+1} = \phi_{j,k} \quad (3.36)$$

onde:

$$\alpha_{j,k} = \left[\frac{1}{2R_k(\Delta R)} - \frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} - \frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \quad (3.37)$$

$$\beta_{j,k} = \left[\frac{2}{(\Delta R)^2} + \frac{U_{j,k}}{\Delta X} \right] \quad (3.38)$$

$$\gamma_{j,k} = \left[\frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} + \frac{1}{(\Delta R)^2} - \frac{1}{2R_k(\Delta R)} \right] \quad (3.39)$$

$$\eta_j = \left[\frac{1}{\Delta X} \right] \quad (3.40)$$

$$\phi_{j,k} = \left[\frac{U_{j,k}^2 + P_j}{\Delta X} \right] \quad (3.41)$$

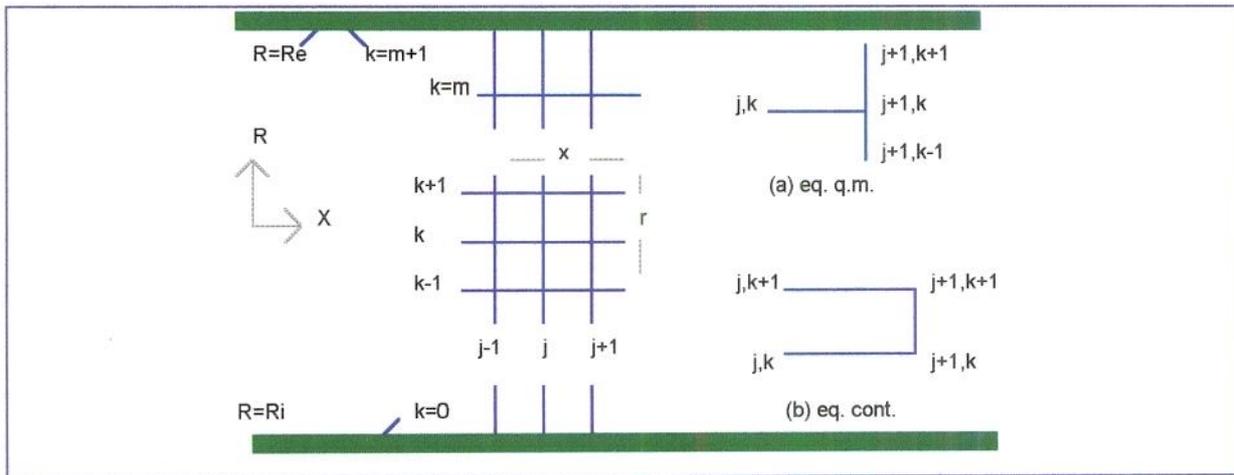


Figura 3-1- Esquema da malha de diferenças finitas

Para a equação (3.34) usa-se a seguinte representação em diferenças finitas (HORNBECK *et alii*, 1965):

$$R \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{j+1,k} = \frac{R_k (U_{j+1,k} - U_{j,k}) + R_{k+1} (U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1})}{2\Delta X}$$

$$\frac{\partial (VR)}{\partial R} = \frac{V_{j+1,k+1} R_{k+1} - V_{j+1,k} R_k}{\Delta R}$$

A equação (3.34) torna-se, então:

$$-\left[R_k (U_{j+1,k} - U_{j,k}) + R_{k+1} (U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}) \right] \frac{\Delta R}{2\Delta X} = V_{j+1,k+1} R_{k+1} - V_{j+1,k} R_k \quad (3.42)$$

A equação (3.42) satisfaz à condição:

$$\int_{R_i}^{R_e} URdR = \frac{(1 - R_i^2)}{2}$$

Reescrevendo esta equação usando a regra do trapézio e aplicando as condições de contorno:

$$U_{j,0} = U_{j,m+1} = 0$$

obtem-se:

$$\Delta R \sum_{k=1}^m U_{j,k} [R_i + k\Delta R] = \frac{(1 - R_i^2)}{2} \bar{U} \quad (3.43)$$

onde \bar{U} é a velocidade média adimensional, que é igual a 1.

A equação (3.35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{R_i}{2} U_{\frac{1}{2},j} + \frac{R_e}{2} U_{m+\frac{1}{2},j} + \sum_{k=1}^m R_k U_{j,k} = \sum_{k=1}^m R_k U_{j+1,k} \quad (3.44)$$

ou

$$\sum_{k=1}^m R_k U_{j+1,k} = \left(\frac{1 + R_i}{2} + \sum_{k=1}^m R_k \right) \bar{U} \quad (3.45)$$

As equações (3.36) para $k=1(1)m$ e (3.45) geram $(m+1)$ equações simultâneas para $(m+1)$ valores desconhecidos de $U_{j,k}$ em m pontos da malha e P_{j+1} na secção $j+1$, em termos de valores conhecidos de $U_{j,k}$ e P_j na secção j .

Sendo obtidos os valores de U , a componente radial da velocidade, V , é obtida pela equação (3.42).

As equações (3.36) e (3.44) formam uma matriz $(m+1) \times (m+1)$ do tipo tridiagonal, exceto para a linha correspondente à equação (3.44) e para a coluna correspondente ao coeficiente η_j que multiplica P, como é mostrada na Figura 3.2.

A matriz formada é resolvida pelo método de eliminação de Gauss modificado. O algoritmo, desde que obedecidas certas condições de estabilidade, é bastante eficiente para programas em computador pessoal, usando um mínimo de espaço de memória. A dificuldade está em procurar as condições de estabilidade, o que significa estruturar convenientemente o algoritmo de solução. As condições de estabilidade garantem a convergência para a solução matemática, assegurando coerência com a realidade física do problema

α_1	β_1	γ_1	0	0	η_j
0	α_2	β_2	γ_2	0	0	η_j
0	.	α_3	β_3	γ_3	0	0	η_j
0		
.			
0	0	0	...	α_k	β_k	γ_k	0	...	0	η_j
...								α_m	β_m	η_j
R_1	R_2	R_3	R_4	R_m	0

Figura 3-2 - Matriz $(m+1) \times (m+1)$ formada pelas equações (3.44) e (3.45).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o desenvolvimento deste trabalho usou-se o esquema implícito puro para o método de diferenças finitas, conforme proposto por BODOIA & OSTERLE (1961) devido à sua estabilidade para todas as combinações de Δx e Δr , para $U > 0$

O esquema implícito de diferenças finitas, assim como todas as soluções das equações diferenciais, requer a especificação das condições de contorno na entrada, ou seja, a escolha de valores para $V(R,0)$, $U(R,0)$ e $P(0)$. De acordo com GUPTA & GARG (1981), a escolha de $V(R,0)$ quase não afeta o perfil de velocidades pois o efeito das variações desses valores decai após um pequeno número de passos na entrada. Sendo necessário um grande número de pequenos passos na entrada do anular de modo a obter-se resultados mais precisos, conclui-se que a escolha de $V(R,0)$ não é muito importante, portanto escolheu-se $V(R,0)=0$, tendo como consequência os valores calculados de V na entrada muito altos e comportamento tal que $V(R,X) \rightarrow \infty$ quando $X \rightarrow 0$

A escolha de $U(R,0)=1$ na entrada não satisfaz à descontinuidade em $R=R_i$ e $R=R_e$, que o método não consegue resolver, pois o perfil de velocidades em $X=0$ é igual à unidade nos pontos da malha e igual a zero nas paredes. Procedimento semelhante foi usado por MANOHAR (1965) e ROY (1965) para corrigir a velocidade na região plenamente desenvolvida. Esses autores usaram a relação:

$$U_d = \left(\frac{m-1}{m} \right) U_{max}$$

sendo U_d a velocidade considerada plenamente desenvolvida e

U_{max} a velocidade máxima obtida

Para a escolha de $U(R,0)$ foi adotado neste trabalho o valor

$$U(R,0) = \frac{m+1}{m}$$

em concordância com GUPTA E GARG (1981) pois observou-se que este valor gera resultados de velocidade radial V mais baixos do que a escolha de $U(R,0)=1$, o que está mais próximo da realidade física do problema.

A matriz formada pelas equações (3.14) e (3.18) foi resolvida pelo método de eliminação de Gauss modificado, sendo o programa escrito em linguagem Pascal.

Foram escolhidos os valores $\Delta R=0,001$ para $\sigma=0,9$ e $0,8$ e $\Delta R=0,005$ para $\sigma=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$ e $0,8$. Estabelecendo-se uma precisão de 1% entre os refinamentos para a variação no valor de U , não se justifica o refinamento com $\Delta R=0,001$ para os valores de $\sigma \leq 0,7$ pois para estas relações de raio este valor gerou matrizes muito grandes que não puderam ser resolvidas no computador usado para a simulação. Para os valores maiores de σ , que se assemelham ao caso do escoamento entre placas paralelas, usou-se o valor $\Delta R=0,001$ pois foram obtidos para U_{\max} valores mais próximos daqueles preditos pela equação (2.25). Estes valores de ΔR estão abaixo daqueles encontrados na literatura. Para a discretização na direção axial foi escolhido o valor $\Delta X = 10^{-5}$ pois, além de ser menor do que os encontrados na literatura, mostrou ser um valor abaixo do qual os resultados mostraram independência da discretização.

A velocidade plenamente desenvolvida, U_{\max} , foi considerada como aquela obtida segundo o critério de parada, ou seja, a simulação foi feita até que o valor da velocidade fosse constante entre duas posições axiais com uma diferença menor que quatro casas decimais.

Os casos limite, $\sigma=0$ (tubo circular) e $\sigma=1$ (placas paralelas) não podem ser uma extensão do presente trabalho. Para o caso de tubo circular a condição de contorno $U(R_i, X)=0$, usada para escoamento em anulares, deve ser substituída pela condição de simetria $\frac{\partial U}{\partial R}=0$. O caso do escoamento entre placas paralelas pode ser melhor resolvido usando-se coordenadas cartesianas, x e y , e a condição de simetria. ROY (1965) observou que o valor obtido para o comprimento de entrada para $\sigma=0,8$ é igual ao obtido por TARG (1951) para o caso de placas paralelas. McCOMAS (1967) chegou à mesma conclusão para $\sigma=0,7$. De fato, os autores que trabalharam com anulares usando a abordagem da camada limite não passaram de $\sigma=0,8$.

4.1. SOLUÇÃO PARA FLUIDO NEWTONIANO

4.1.1. Perfis de velocidade axial

Observou-se boa concordância entre os valores da velocidade máxima e da sua posição radial obtidos na simulação e os valores obtidos a partir das equações (2.25) e (2.27), como mostra a Tabela 4.1.

As Figuras 4.1 a 4.5 mostram o comportamento da componente axial da velocidade U , em função de R tendo a posição axial, X , como parâmetro.

Observa-se que a posição radial de velocidade máxima se desloca na direção do raio interno à medida que o escoamento prossegue. Este efeito é melhor observado nos

valores mais baixos de σ , sendo pouco nítido para os casos $\sigma=0.8$ e 0.9 que se assemelham ao caso de placas paralelas.

Tabela 4.1 - Valores da posição radial de velocidade máxima, r_{\max} e do valor de U_{\max} em função da razão entre os raios interno e externo.

- (a) valor obtido da equação (2.25)
 (b) valor obtido neste trabalho
 (c) valor obtido da equação (2.27)

r/r_e	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U_{\max}(a)$	1,5673	1,5374	1,5222	1,5133	1,5078	1,5043	1,5021	1,5008	1,5002
$U_{\max}(b)$	1,5673	1,5374	1,5223	1,5133	1,5079	1,5044	1,5025	1,5009	1,5002
$R_{\max}(c)$	0,4637	0,5461	0,6147	0,6770	0,7355	0,7915	0,8455	0,8981	0,9496
$R_{\max}(b)$	0,465	0,545	0,615	0,675	0,735	0,79	0,845	0,898	0,950

As Figuras 4.6 a 4.10 mostram a dependência da componente axial da velocidade U , com a posição axial X para os vários valores de σ , em várias posições radiais. Observa-se que os perfis de velocidade não são simétricos em relação ao ponto médio entre os raios interno e externo. Para todos os valores de σ observa-se que a velocidade em um ponto entre o raio interno e o ponto médio é maior que a velocidade de um ponto equidistante a partir do raio externo. À medida que σ diminui esta assimetria se torna mais acentuada.

Nas posições radiais próximas às paredes o escoamento desacelera à medida que avança, devido ao atrito entre o fluido e as paredes do tubo. Nas posições radiais mais distantes das paredes o escoamento se acelera com o aumento da distância axial. Isto compensa a diminuição do fluxo de massa próximo às paredes do tubo e portanto fecha a equação da continuidade que é justamente o balanço de massa.

4.1.2. Perfis de velocidade radial

As Figuras 4.11 a 4.15 apresentam o perfil da componente radial da velocidade V em função da posição radial R para várias posições axiais X representadas pelo número de passos na direção axial, j . Os resultados obtidos proporcionam um melhor entendimento do comportamento do fluido na região de entrada, e estão de acordo com os resultados da literatura. Para todos os valores de σ , o valor inicial de V é zero, na entrada do anular onde o perfil de velocidades é achatado e também é zero na posição onde o escoamento se torna plenamente desenvolvido. Nas regiões próximas à parede externa, a velocidade radial possui valores negativos pois estão na direção oposta à coordenada radial enquanto que nas regiões próximas à parede interna possui valores positivos. Esta velocidade radial é responsável pela transferência de fluido das regiões próximas às paredes para o centro do anular, o que causa a aceleração do fluido fora da camada limite.

A assimetria dos perfis de velocidade radial aumenta com a diminuição de σ . Esta assimetria no perfil de velocidades é consequência da diferença de espessura entre as camadas limite interna e externa, numa mesma posição axial. A camada limite externa é mais espessa que a interna sendo este efeito atribuído ao maior perímetro molhado da parede externa. Obviamente, para anulares com pequenos valores de σ , esta assimetria será mais pronunciada do que para anulares com altos valores de σ pois, no limite quando $\sigma = 1$ (placas paralelas), as duas camadas limite tem espessuras iguais.

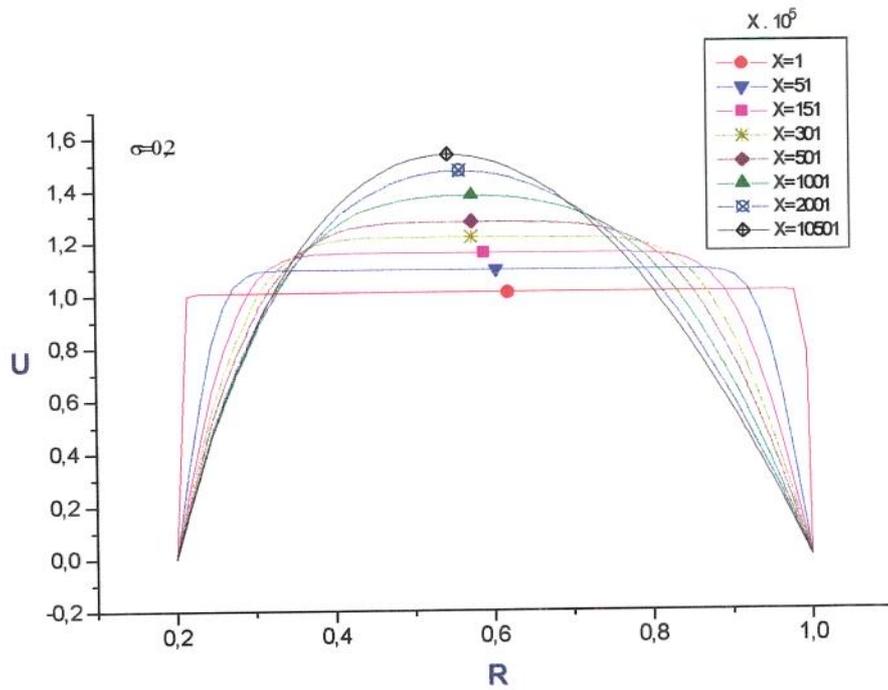
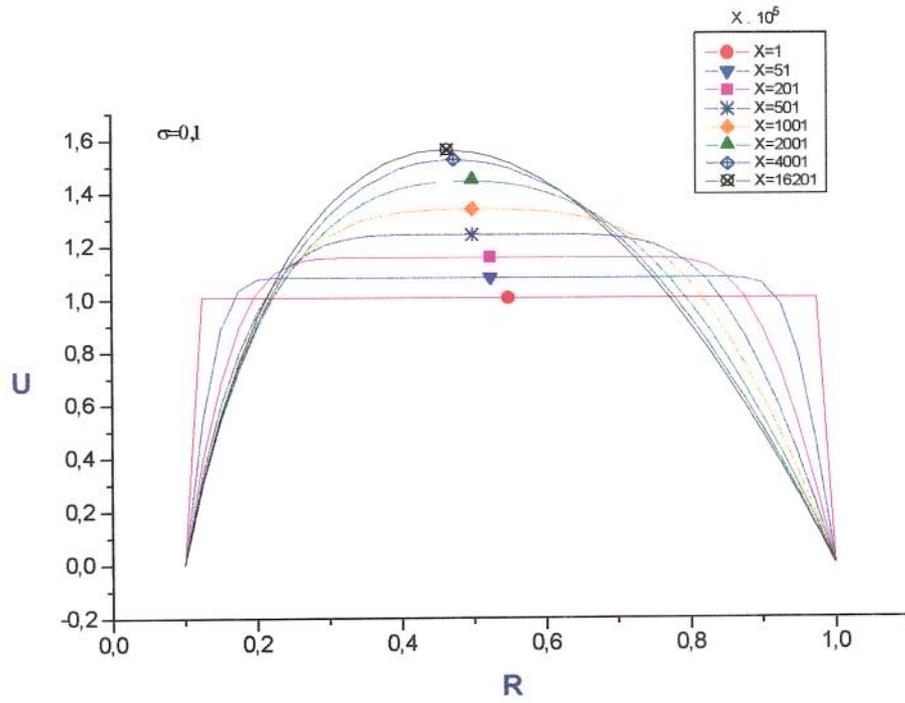


Figura 4.1 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.1$ e $\sigma=0.2$.

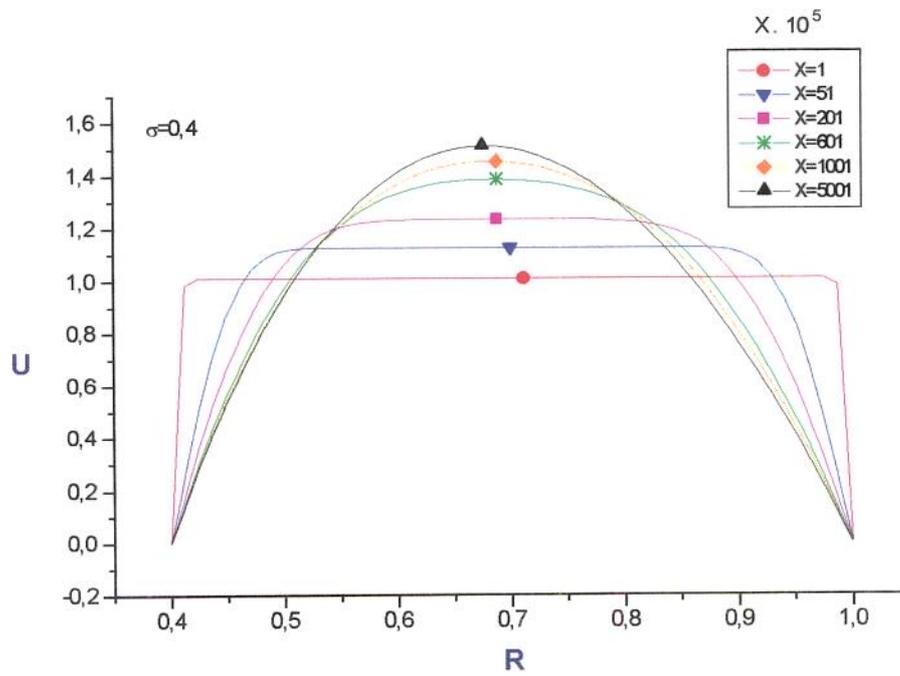
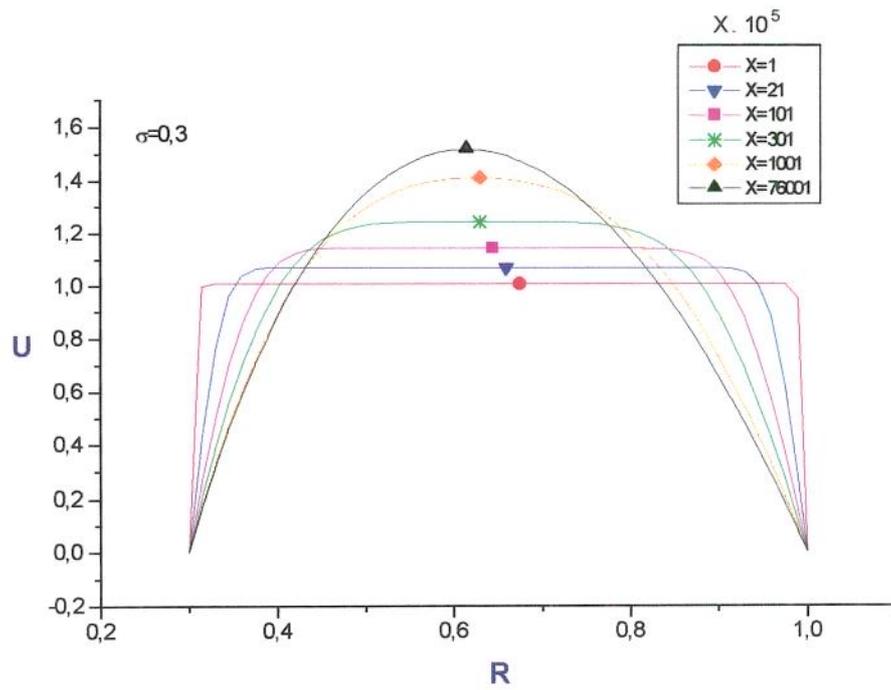


Figura 4.2 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.3$ e $\sigma=0.4$.

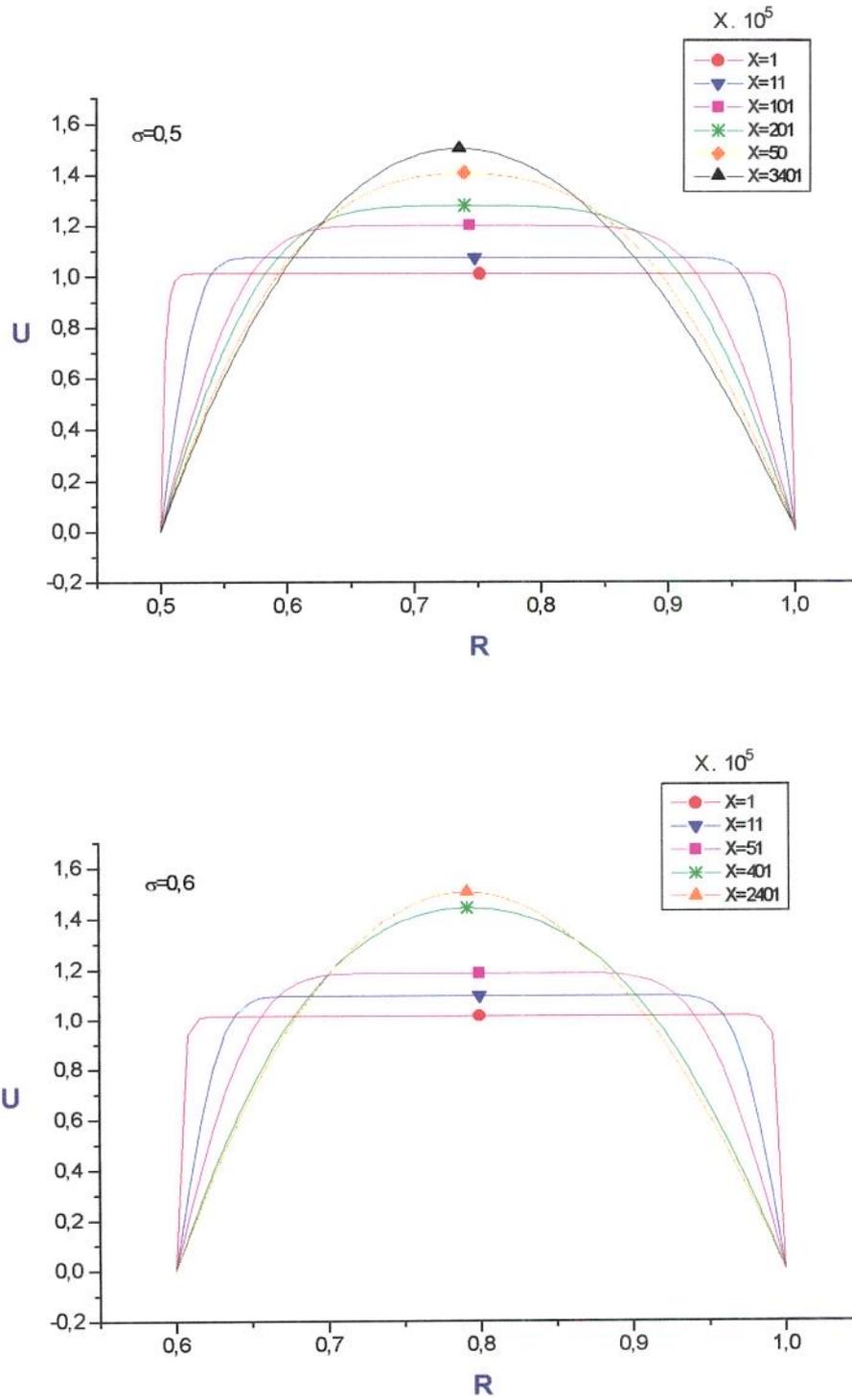


Figura 4.3 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.5$ e $\sigma=0.6$.

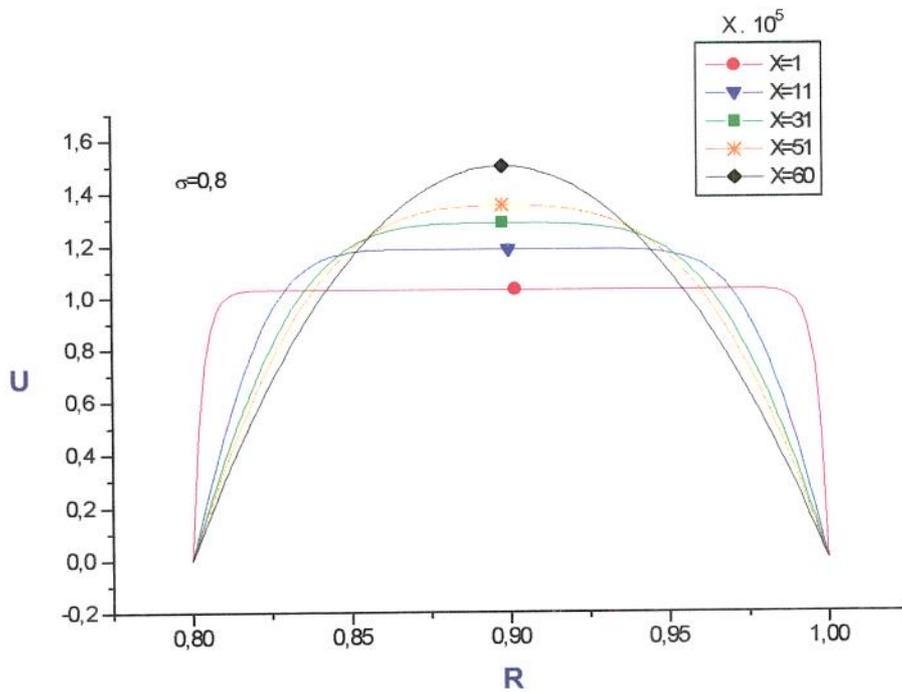
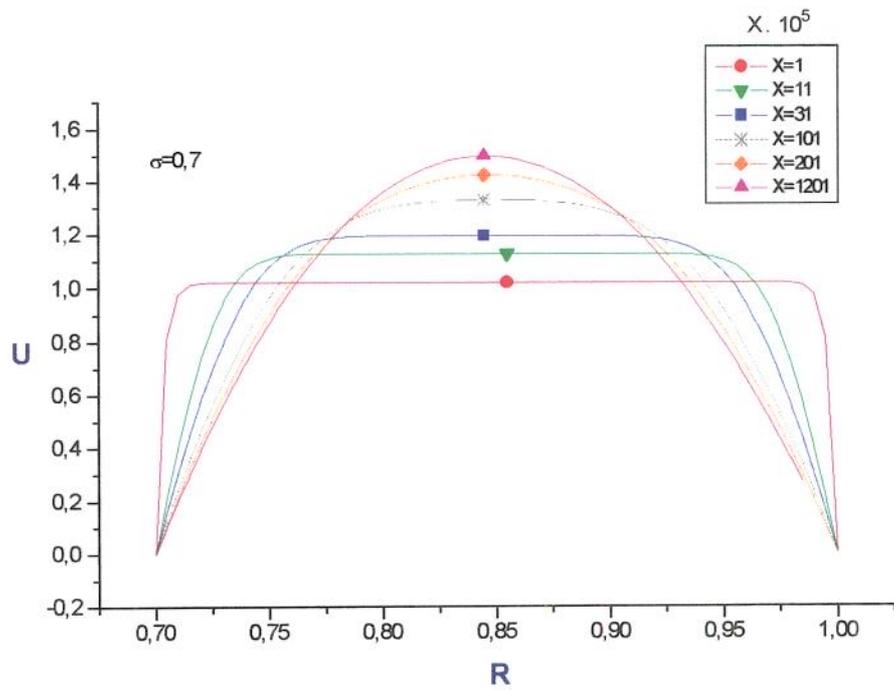


Figura 4.4 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0.7$ e $\sigma=0.8$.

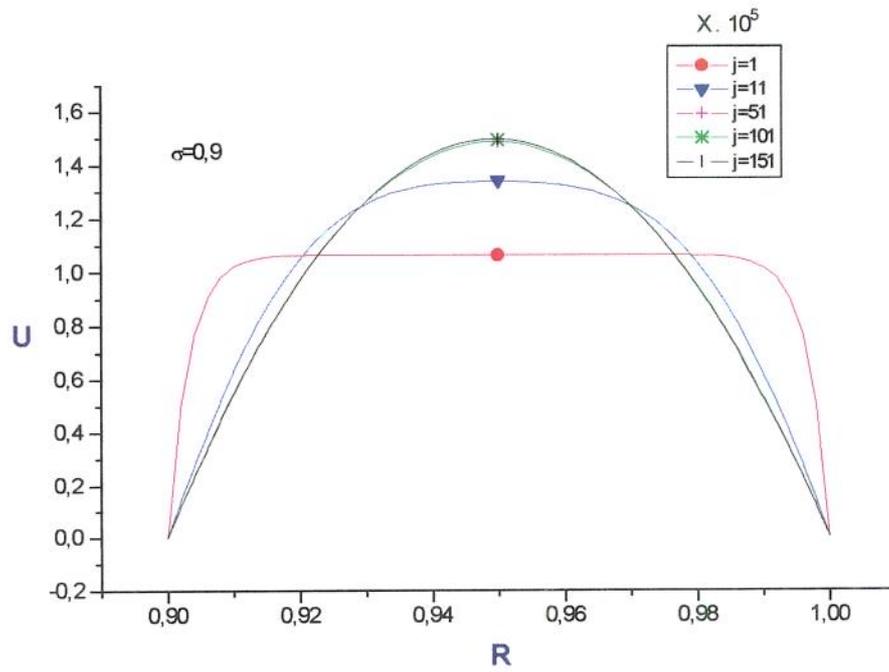


Figura 4.5 - Perfil de velocidades em várias posições axiais para $\sigma=0,9$.

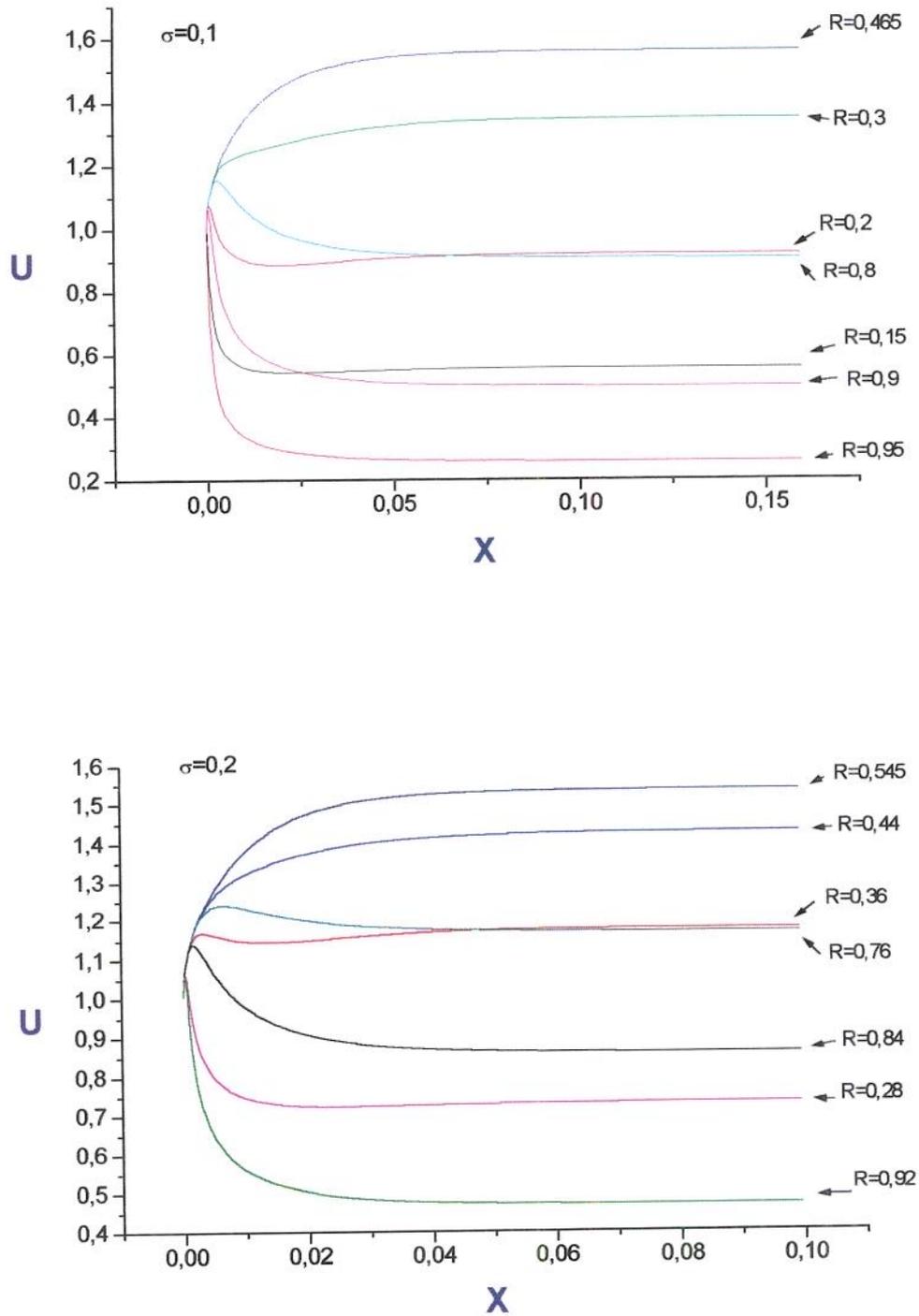


Figura 4.6 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.

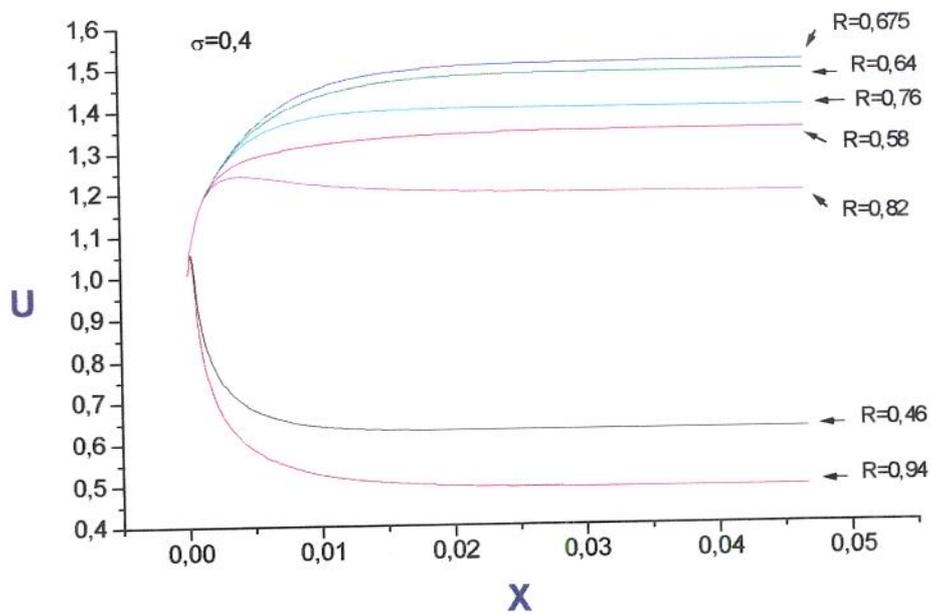
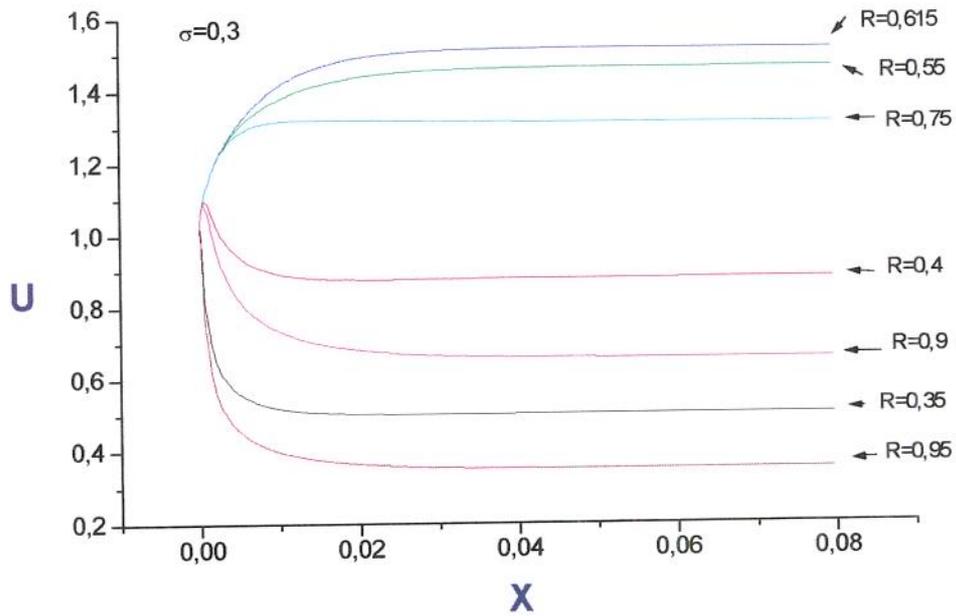


Figura 4.7 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.

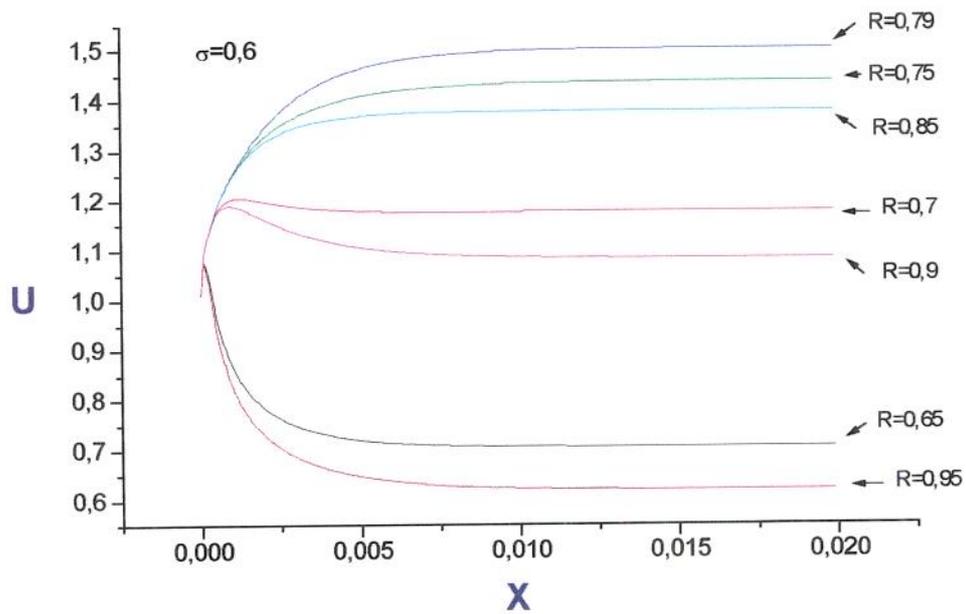
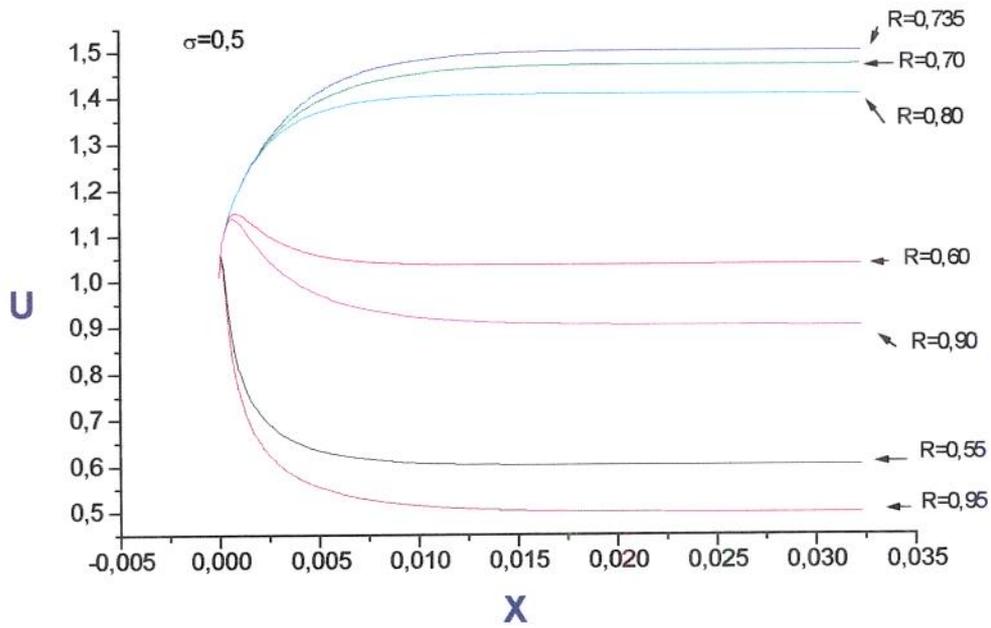


Figura 4.8 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.

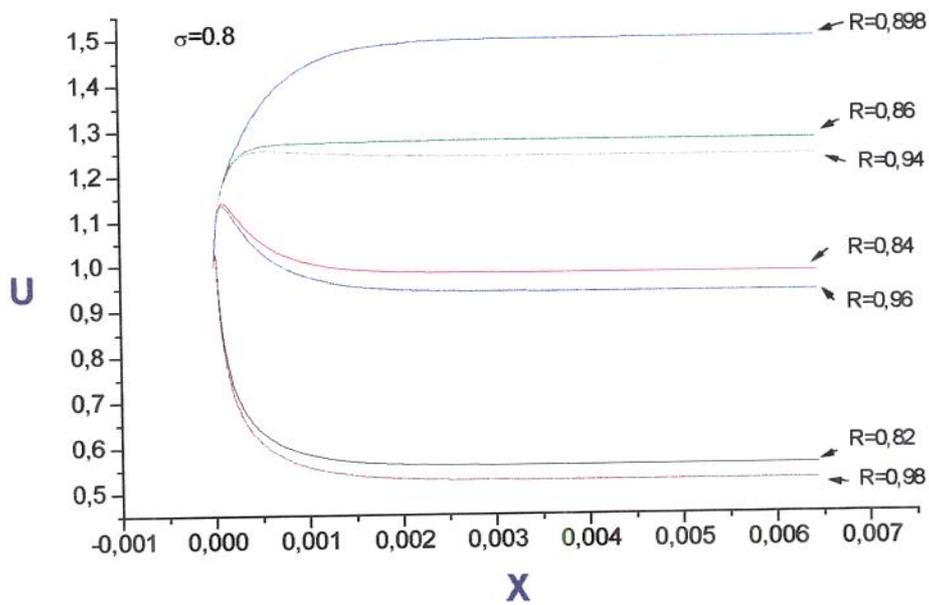
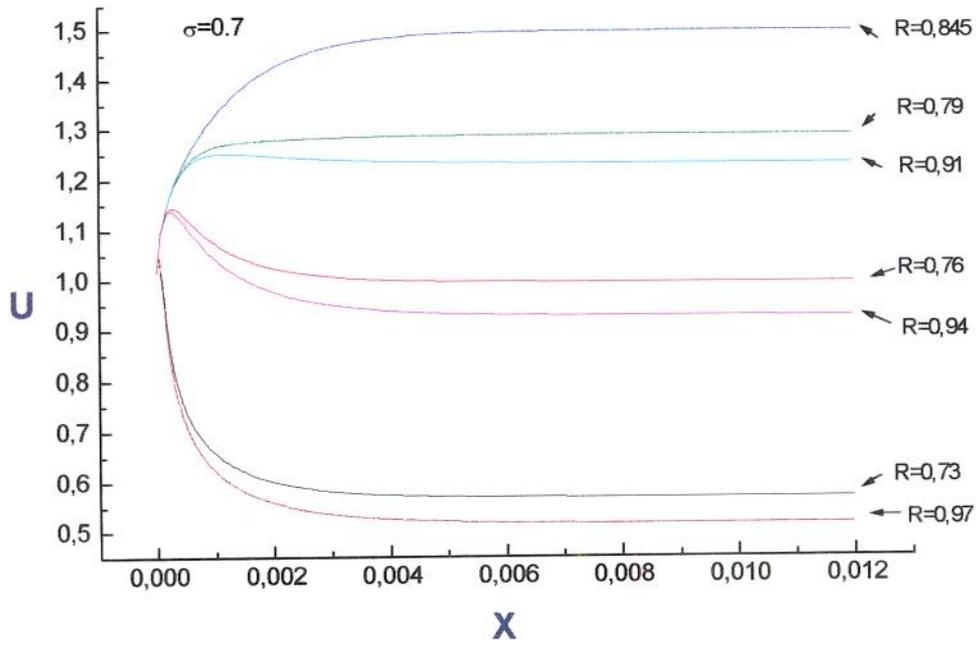


Figura 4.9 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.

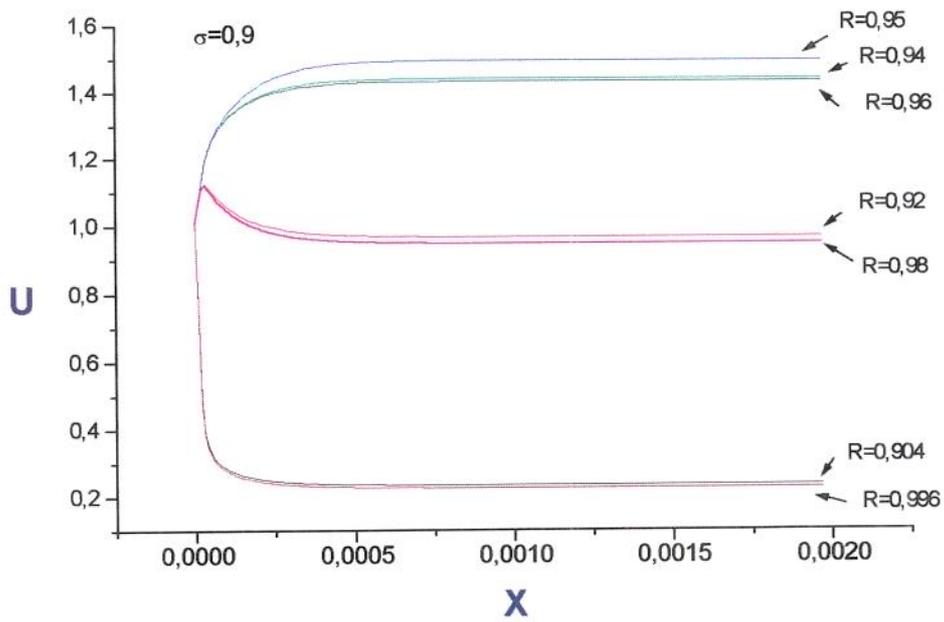


Figura 4.10 - Desenvolvimento do perfil de velocidades em várias posições radiais.

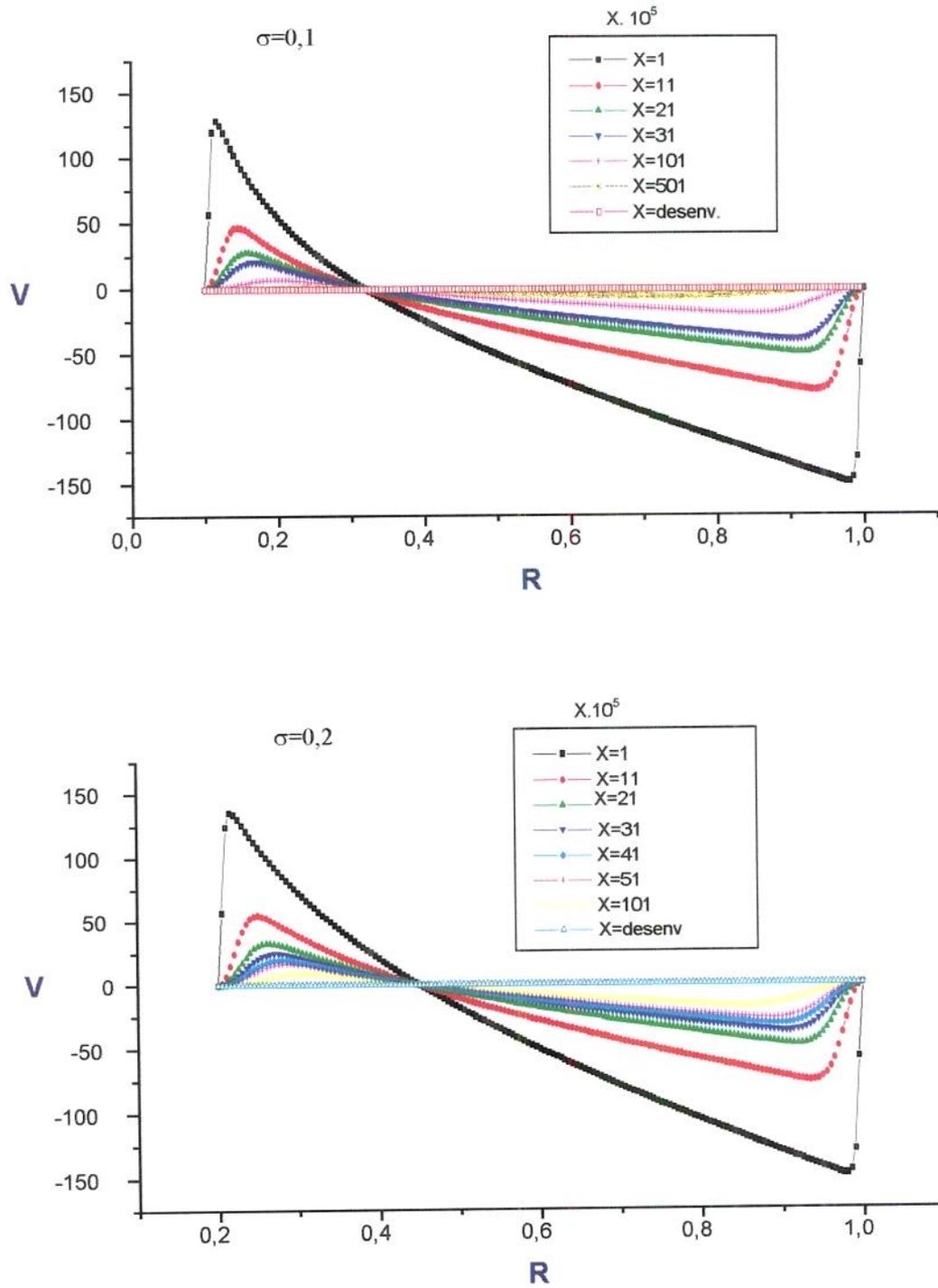


Figura 4.11 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais

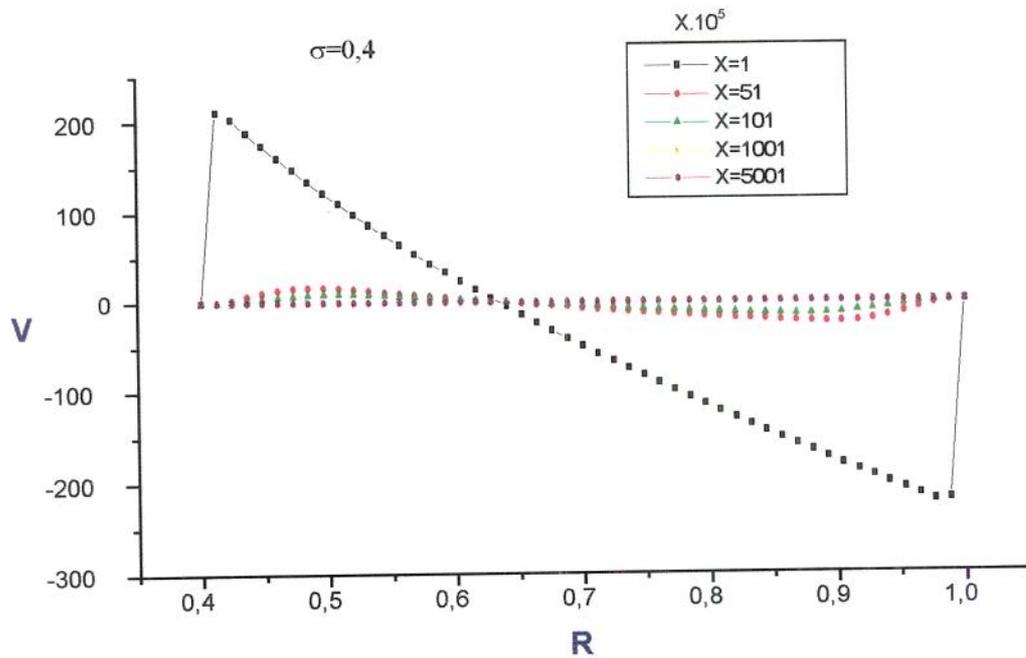
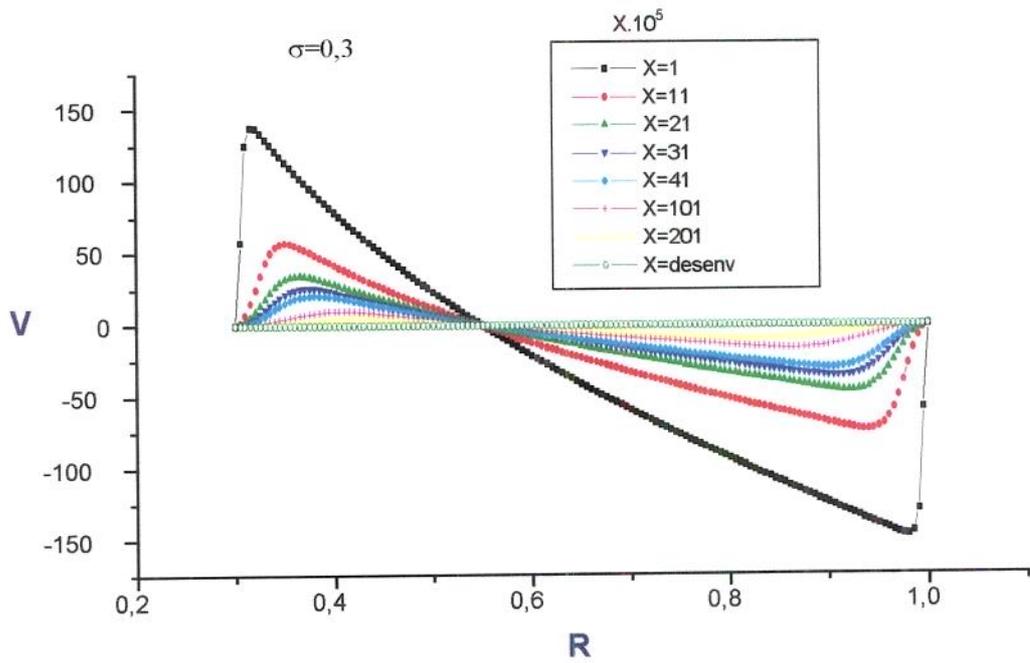


Figura 4.12 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais

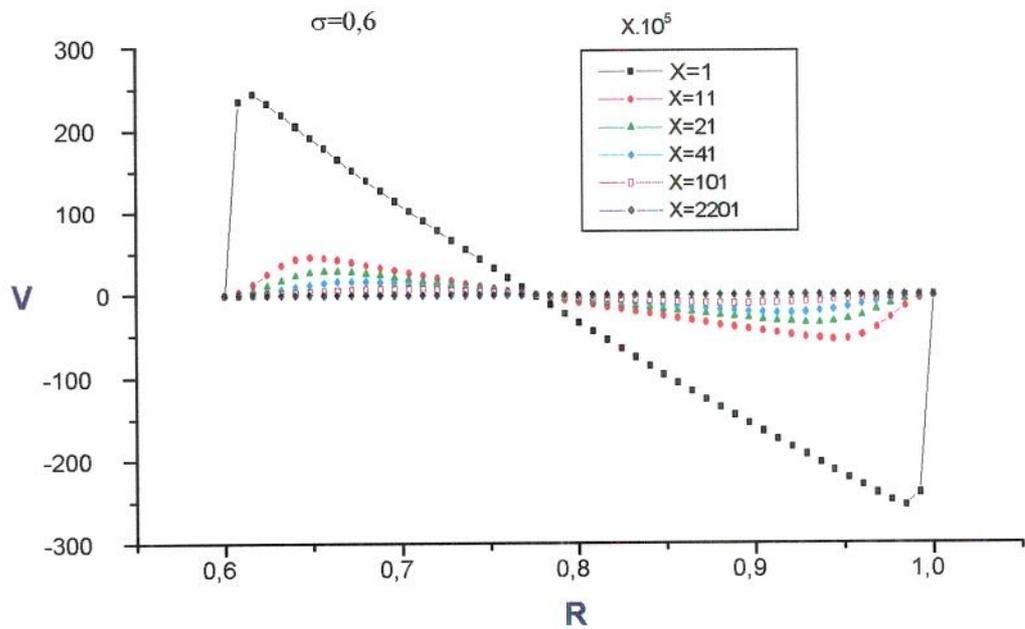
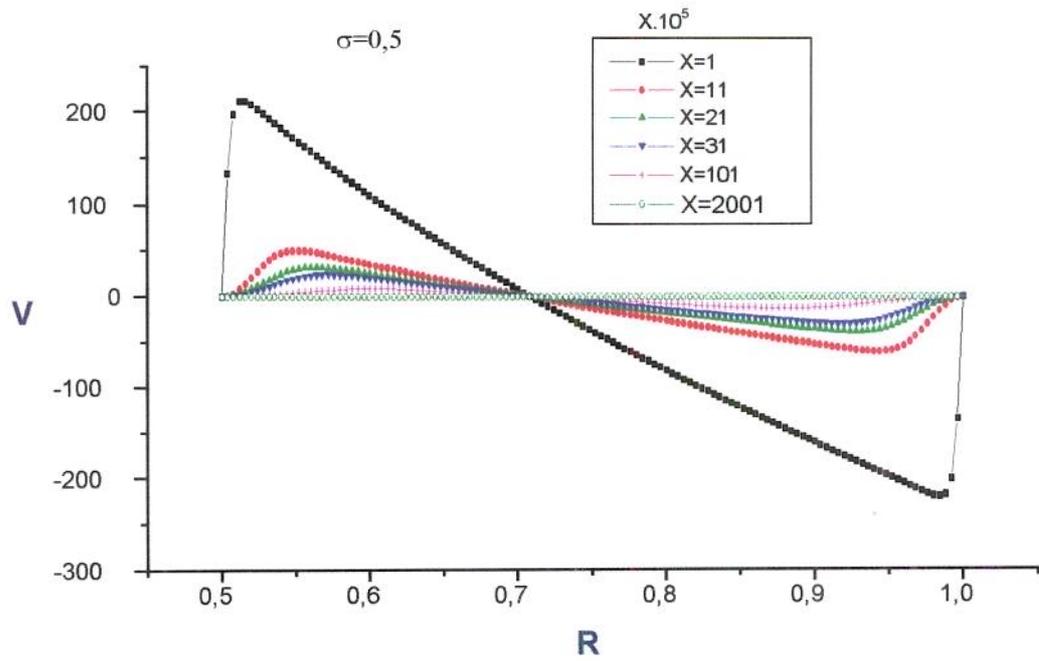


Figura 4.13 - -Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais

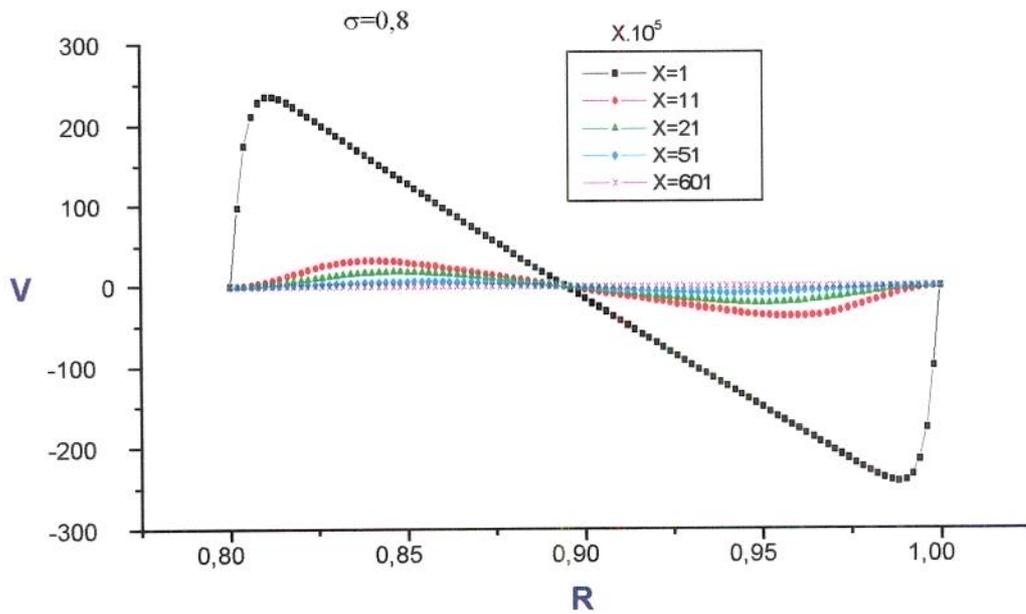
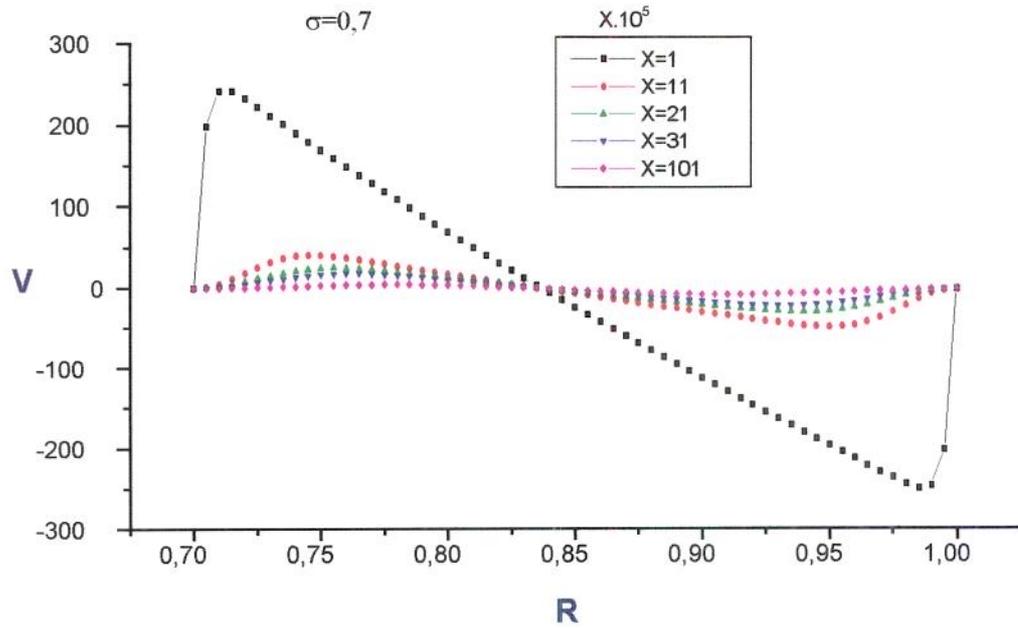


Figura 4.14 --Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais

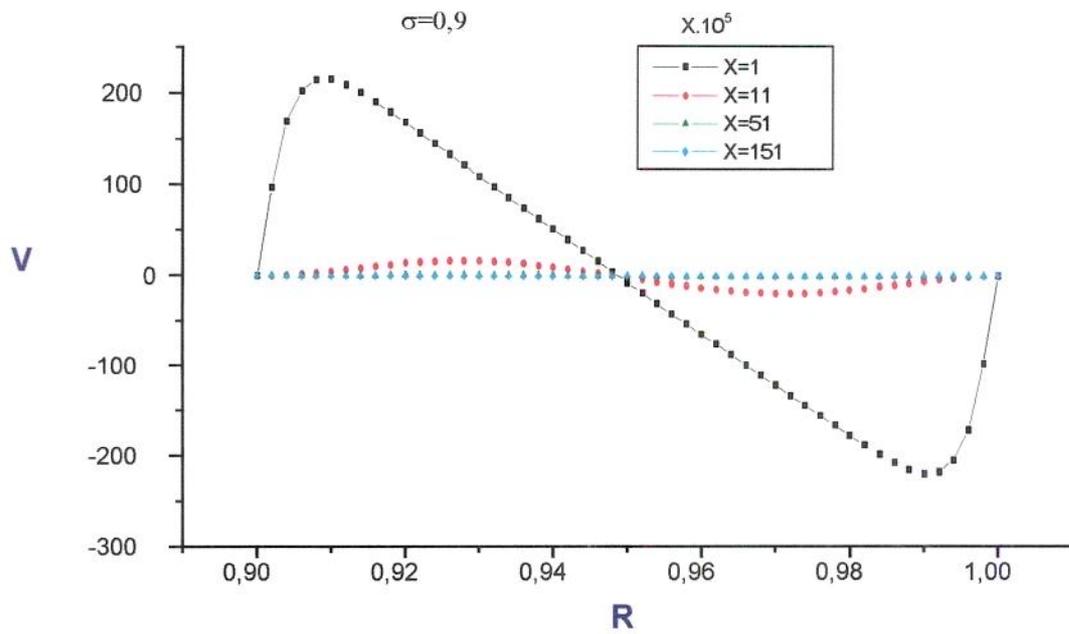


Figura 4.15 - Desenvolvimento do perfil de velocidades radial em várias posições axiais

4.1.3. Comprimento de entrada

A Figura 4.16 apresenta o comprimento de entrada, L_e , para os valores 100 (segundo o critério de parada definido anteriormente), 99 e 98 % da velocidade U em função da razão entre os raios σ . Observa-se que o valor do comprimento de entrada decresce com o aumento de σ , sendo este resultado independente do valor de Re .

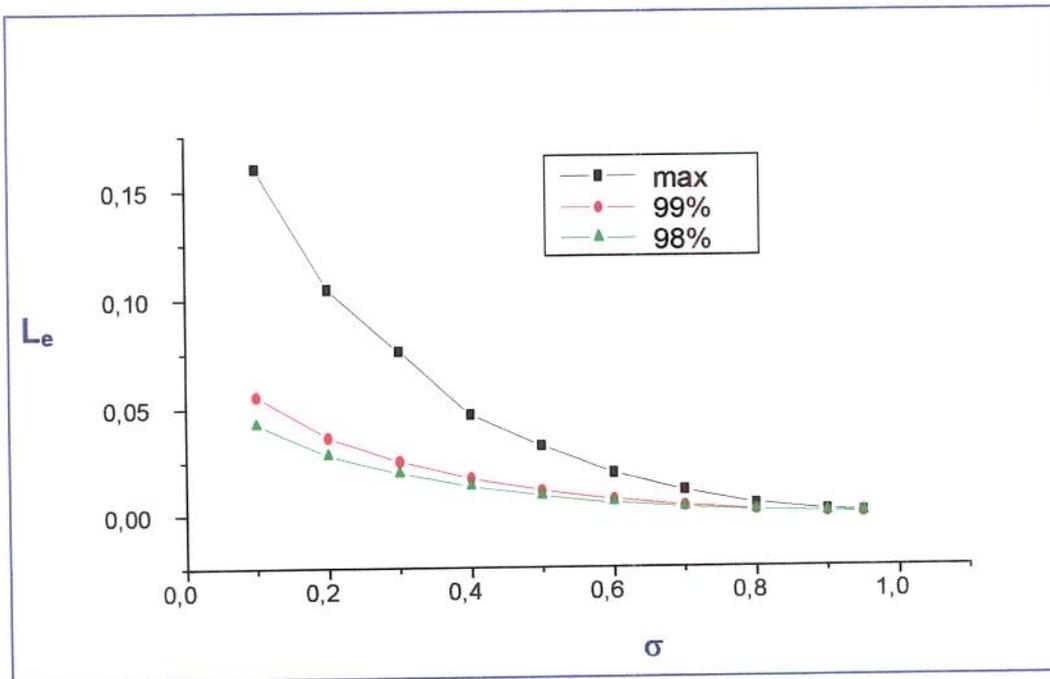


Figura 4.16 - Comprimento de entrada adimensional L_e em função de σ .

As curvas da Figura 4.16 são do tipo exponencial decrescente e podem ser ajustadas pela função:

$$L_e = A \exp\left[-\frac{\sigma - B}{C}\right] \quad (4.1)$$

sendo os valores da equação (4.1) mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores dos coeficientes da equação 4.1.

$L_e(\%)$	A	B	C	chiqd
100	0,19492	0,05441	0,24028	1×10^{-5}
99	0,06725	0,05354	0,24245	$1,3958 \times 10^{-6}$
98	0,05153	0,05307	0,24557	$9,0147 \times 10^{-7}$

Observa-se a semelhança desta equação (4.1) com o resultado obtido por LANGHAAR (1942) para o comprimento de entrada do escoamento laminar num tubo:

$$l_e = 0,05 \text{Rey}_D D$$

onde Rey_D é o número de Reynolds calculado com o diâmetro do tubo e D é o diâmetro do tubo. Esta relação indica que, quanto maior o Rey, maior o comprimento de entrada num tubo.

As Tabelas 4.3 e 4.4 mostram os resultados do comprimento de entrada adimensional obtidos por vários autores, para o escoamento newtoniano em anulares. Todos os resultados estão de acordo qualitativamente, ou seja, o comprimento de entrada diminui com o aumento de σ , sendo a taxa de decaimento maior para baixos valores de σ . Neste caso da dependência de L_e em função de σ podem ser observados dois tipos de comportamento: totalmente variável e pouco variável. Os autores que trabalharam com métodos numéricos que não diferenças finitas obtiveram valores pouco variáveis e para $\sigma > 0.5$ os valores tendem ao valor do comprimento de entrada do caso de placas paralelas ($\sigma = 1$). Este comportamento assintótico não é observado para os valores obtidos pelo MDF, pois o escoamento entre placas paralelas, quando se usam as equações em coordenadas cilíndricas, não é um caso limite para este método. Surpreendentemente, GUPTA & GARG (1981), que trabalharam com diferenças

finitas, apresentam valores assintóticos. É muito importante ressaltar que as comparações entre os valores de L_e das Tabelas 4.3 e 4.4 não são possíveis devido às diferentes definições de comprimento de entrada e dos adimensionais que completam o equacionamento do problema. O método usado também influi no valor obtido. NOUAR *et alii* (1995) relatam que o MDF com difusão axial gera valores maiores que MDF com abordagem da camada limite. As abordagens com camada limite (MDF e linearização) geram valores mais altos que o método integral que utiliza a equação da energia mecânica, conforme descrito em 2.4.2.2. Comparando dois métodos integrais TIU & BHATTACHARYYA (1973) relatam que o método energia-quantidade de movimento gera valores 20 a 30% maiores que o método da quantidade de movimento.

Nenhum autor, entretanto, explicou o porquê de comportamentos tão diferentes, ou seja, totalmente variável e pouco variável. O comportamento pouco variável observado nos resultados obtidos pelo método da linearização se deve à maneira como são determinadas as raízes das equações características, a fim de que o método forneça resultados para os casos limite $\sigma = 1$ e $\sigma = 0$. Isto é bem explicado no artigo de ROY (1965) onde a coordenada axial X fica modificada por um fator de escala, inerente ao método de linearização. Para alguns trabalhos da literatura conseguiu-se identificar um fator multiplicativo de modo que seus resultados se enquadrem numa mesma faixa de magnitude. Para uma melhor comparação entre os resultados, a Tabela 4.5 apresenta os novos valores do comprimento de entrada L_e obtidos pelo método da linearização, onde também é mostrado o fator multiplicativo aqui determinado para cada autor. É importante lembrar que os resultados de GUPTA E GARG (1981) quando multiplicados pelo fator de ROY (1965) também se enquadram na mesma faixa dos demais. Isso é surpreendente pois o método usado por eles (MDF) não deveria necessitar desse fator.

Tabela 4.3 - Valores do comprimento de entrada, L_e (99%), obtidos pelo MDF por: (1) presente trabalho, (2) MANOHAR (1965), (3) GUPTA & GARG (1981), (4) NOUAR *et alii* (1995) (camada limite), (5) NOUAR *et alii* (1995) (difusão axial), (6) SHAH & FARNIA (1974), (7) CONEY & EL-SHAARAWI (1975)

L_e							
σ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,1	0,05535	0,053	0,3			0,0125	0,082
0,2	0,03628		0,25				0,054
0,3	0,02493	0,024					0,038
0,4	0,01720		0,225				0,0257
0,5	0,01142	0,011		0,01324	0,01973		0,0168
0,6	0,00713				0,00854		0,01033
0,7	0,00394	0,0037			0,00505		0,0056
0,8	0,00172		0,215	0,0017	0,0026		0,0024
0,9	0,00042				0,001		

Tabela 4.4 - Valores do comprimento de entrada, L_e obtidos por outros métodos: (1)CHANG & ATABEK, (1962), 99%; (2) SUGINO (1962), 99%; (3)McCOMAS (1967)100%; (4) ROY (1965), 99%; (5) TIU & BHATTACHARYYA (1973),98%; (6)SPARROW *et alii* (1964),98%.

L_e						
σ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,1	0,0775		0,00725	0,288	0,066	0,12
0,2	0,065	0,02001	0,0066	0,253	0,055	0,095
0,3	0,06		0,0063	0,224	0,05	0,085
0,4	0,052			0,205	0,047	0,08
0,5	0,0470	0,01973		0,194	0,045	0,075
0,6	0,0465		0,00596	0,183	0,044	0,073
0,7	0,0460			0,18	0,043	0,073
0,8	0,0455		0,00589		0,0425	0,073
0,9	0,045		0,00588		0,042	0,073

Tabela 4.5 - Valores de entrada, L_e , : (1) presente trabalho; (2) MANOHAR (1965); (3) CONEY & EL-SHAARAWI (1975); (4) CHANG & ATABEK (1962); (5) ROY (1965); (6) SPARROW *et alii* (1964); (7) GUPTA & GARG (1981); (8) SUGINO (1962)

L_e									
σ	(1) 98%	(1) 99%	(2) 99%	(3) 99.5%	(4) 99% $(1-\sigma)^2$	(5) 99% $(1-\sigma)^2/4$	(6) 98% $(1-\sigma)^2/2$	(7) 99% $(1-\sigma)^2/2$	(8) 99% $(1-\sigma)^2$
0,1	0,04239	0,05535	0,053	0,082	0,06277	0,05832	0,0486	0,06075	
0,2	0,02798	0,03628		0,054	0,0416	0,04048	0,0304	0,04	0,01281
0,3	0,01936	0,02493	0,024	0,038	0,0294	0,02744	0,02082		
0,4	0,01342	0,0172		0,0257	0,01872	0,01845	0,0144	0,02025	
0,5	0,00895	0,01142	0,011	0,0168	0,01175	0,01212	0,00937		0,00493
0,6	0,005595	0,00713		0,01033	0,00744	0,00732	0,00584		
0,7	0,00309	0,00394	0,0037	0,0056	0,00414	0,00405	0,00328		
0,8	0,00134	0,00172		0,0024	0,00182		0,00146	0,00215	
0,9	0,00033	0,00042		0,00059	0,00045		0,00036		

4.1.4. Queda de pressão

A Figura 4.17 apresenta a variação da queda de pressão, P_0-P , em função da posição axial X para as razões entre os raios σ . A observação detalhada da Figura 4.17 mostra que, para um mesmo valor de X , os maiores valores de dP/dX estão associados a altos valores de σ , o que é evidenciado pela inclinação das retas.

Os efeitos da entrada na queda de pressão são maiores para baixos valores de σ , o que pode ser confirmado pela intersecção das retas com a abcissa. Isto se torna óbvio pois, apesar de dP/dX ser menor para $\sigma=0,1$ do que para $\sigma=0,3$, o comprimento de entrada é maior no primeiro caso, de modo que o efeito total de queda de pressão na entrada se torna maior.

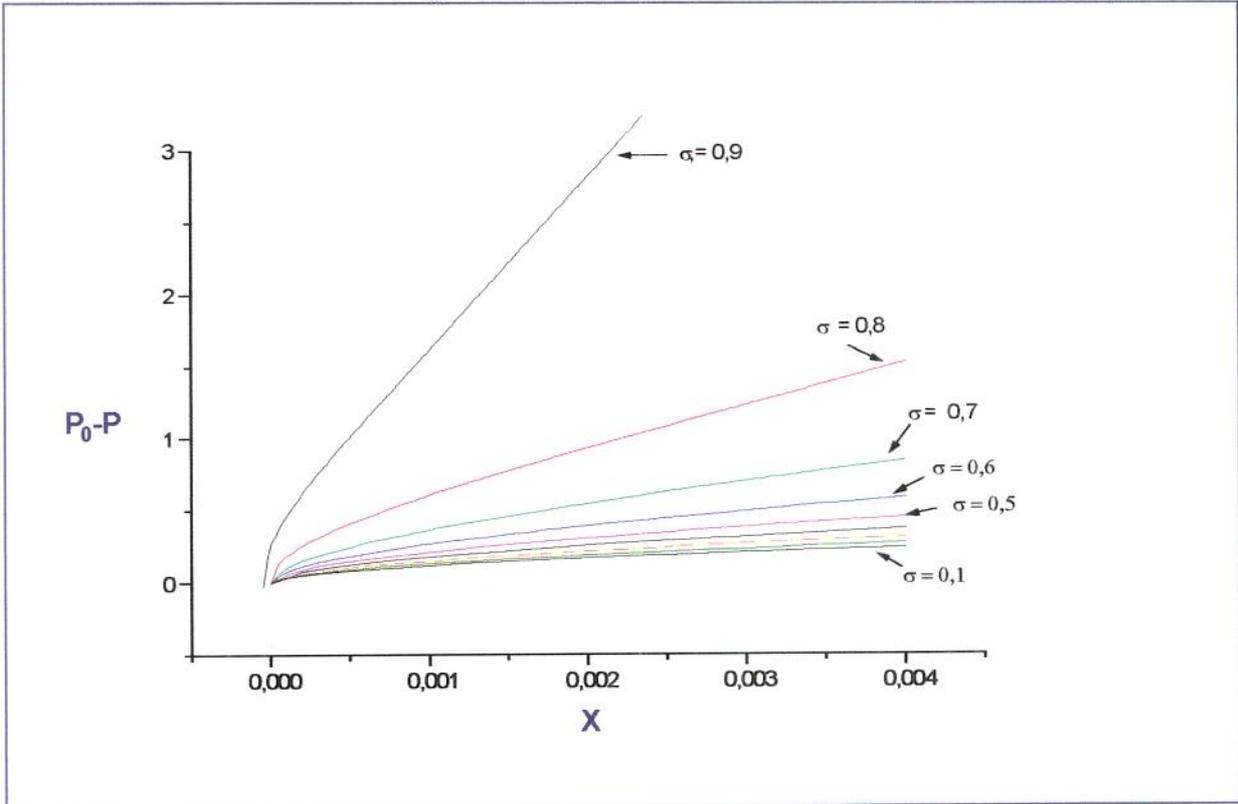


Figura 4.17 - Queda de pressão adimensional em função da posição axial.

As soluções foram feitas com u_i constante para todas as relações de raio σ . Para o ajuste das curvas da Figura 4.17 optou-se pelas seguintes relações:

- queda de pressão na entrada:

$$P_0 - P_e = CX^D \quad (4.2)$$

- queda de pressão no escoamento desenvolvido:

$$P_0 - P = A + BX \quad (4.3)$$

semelhante à equação (2.55).

$$\frac{P_0 - P}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = E(x) + f \frac{x}{r_h}$$

Para o ajuste da equação (4.2) foram usados os valores de X menores que 98% do comprimento de entrada. Para o ajuste da equação (4.3) foram usados os valores de X maiores que 98%. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Valores do ajuste das curvas da Figura 4.17; \bar{u} constante (0.2 m/s); sd é o desvio padrão

σ	$P_0 - P = A + BX$				$P_0 - P = CX^D$				
	A		B		C		D		
		sd		sd		erro		erro	chiqd
0,1	0,38335	0,00031	13,8066	0,00216	5,80712	0,04301	0,57735	0,00198	5,447.10 ⁻⁵
0,2	0,35957	0,0001	18,0447	0,00079	6,50729	0,04464	0,57435	0,00157	2,825.10 ⁻⁵
0,3	0,34721	6,05.10 ⁻⁶	23,9417	0,00006	7,66716	0,06413	0,57752	0,0019	2,135.10 ⁻⁵
0,4	0,3386	0,00005	32,8936	0,00066	9,03465	0,0953	0,57534	0,00222	1,864.10 ⁻⁵
0,5	0,33302	0,00003	47,6341	0,00068	11,0300	0,10612	0,57405	0,00186	1,648.10 ⁻⁵
0,6	0,32785	0,00004	74,7260	0,00238	14,2728	0,12911	0,57498	0,00161	1,499.10 ⁻⁵
0,7	0,32318	0,00003	133,160	0,00307	20,1844	0,27521	0,57839	0,0022	1,51.10 ⁻⁵
0,8	0,34052	2,08.10 ⁻⁶	299,761	0,0003	25,6637	0,61349	0,54096	0,00339	4,219.10 ⁻⁴
0,9	0,34766	4,9.10 ⁻⁶	1199,89	0,00224	59,9371	0,90358	0,55085	0,00776	0,00011

Da equação (4.3) deduz-se o coeficiente de perda da equação (2.54), $E(x)=2A$.

A Tabela 4.7 lista os valores do coeficiente de perdas, $E(x)$, obtidos no presente trabalho e os valores obtidos por outros autores. Observa-se que os valores obtidos no presente trabalho são mais baixos que os obtidos na literatura porém todos concordam

que a queda de pressão devido aos efeitos de entrada são mais pronunciados para baixos valores de σ .

Tabela 4.7 - Valores do coeficiente de perda, $E(x)$: (1) Presente trabalho; (2) LUNDGREN *et alii* (1964) - linearização; (3) MISHRA (1977) - linearização; (4) TIU & BHATTACHARYYA (1973) - linearização com ϵ_0 e ϵ_1 ; (5) IDEM - integral energia-quantidade de movimento; (6) IDEM - integral quantidade de movimento; (7) SPARROW & LIN (1964) - linearização; (8) ROY (1965) - linearização; (9) SUGINO (1962) - linearização.

E(x)									
σ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0,1	0,7667	0,8087	0,7849	1,0329	0,75		0,78		
0,2	0,71914	0,7542	0,7419	0,8587	0,7		0,75		0,718
0,3	0,69442	0,7264	0,7195	0,7830	0,675		0,70	0,74	
0,4	0,6772	0,71			0,65		0,68		
0,5	0,66604		0,6976	0,7188	0,64	0,62	0,675	0,72	0,6722
0,6	0,6557	0,6935			0,63		0,67		
0,7	0,64636				0,62		0,665	0,71	
0,8	0,68104	0,6872	0,6870	0,6892	0,61		0,66		
0,9	0,69532	0,6860			0,6		0,65		

MISHRA & MISHRA (1977) reporta que os dados obtidos por TIU & BHATTACHARYYA (1973) usando a técnica de linearização com os parâmetros geométricos de KOZICKI *et alii* (1966) são inconsistentes com os valores obtidos por ele e por LUNDGREN *et alii* (1964). Entretanto os dados de TIU E BHATTACHARYYA (1973) obtidos pelo método da integral da energia-quantidade de movimento são menores que os valores de SPARROW & LIN (1964), obtidos por linearização, que por sua vez são menores que os obtidos por LUNDGREN *et alii* (1964). MISHRA & MISHRA (1977) cita que os valores obtidos pela técnica de linearização geram valores maiores de $E(x)$ que os valores obtidos pela técnica da integral energia-quantidade de movimento. Como conclusão fica evidente que não há concordância entre os resultados sendo, assim, impossível eleger qualquer um deles como referência.

O valor do coeficiente de atrito f adotado neste trabalho é:

$$f = \frac{16}{\text{Rey}_{\text{KT}}}$$

Como os resultados obtidos são independentes do Rey , o valor de f não pode ser calculado a partir do coeficiente B da equação (4.3). Para uma melhor análise dos resultados serão calculados os valores numéricos para Rey_{KT} (equação 2.51) e f (equação 2.50) usando-se os valores:

$$r_e = 0,01\text{m} \quad \bar{u} = 0,2\text{m/s} \quad \rho = 1000\text{kg/m}^3 \quad \mu = 0,001\text{Ns/m}^2$$

e os valores calculados estão apresentados na Tabela 4.8. A análise da Tabela 4.8 mostra que, para uma mesma velocidade média, o fator de atrito aumenta com o aumento de σ o que gera dP/dX maior.

Tabela 4.8 - Valores de Rey_{KT} e f

σ	Rey_{KT}	f
0.1	2577,87	0,0062
0.2	2217,60	0,0072
0.3	1909,44	0,0084
0.4	1621,51	0,0099
0.5	1343,99	0,0119
0.6	1071,16	0,0149
0.7	801,60	0,0199
0.8	533,80	0,0299
0.9	266,72	0,0599

4.2. SOLUÇÃO PARA FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

A Tabela 4.9 mostra os valores de F (equação 3.12) e de σ^* (equação 3.19) obtidos na solução numérica.

Tabela 4.9 - Valores de F e σ^* obtidos na simulação

n	0,9			0,8		0,7		0,6		0,5	
	F	F	σ^*	F	σ^*	F	σ^*	F	σ^*	F	σ
0,1	1,0000	0,98177	0,088	0,9598	0,075	0,93541	0,0611	0,90738	0,0464	0,8749	0,0316
0,2	1,0000	0,98547	0,1829	0,96893	0,1636	0,9500	0,1417	0,92804	0,1170	0,90230	0,0894
0,3	1,0000	0,98837	0,2806	0,9751	0,2581	0,95987	0,2318	0,94234	0,2008	0,9215	0,1643
0,4	1,0002	0,99071	0,3801	0,98014	0,3567	0,96787	0,3287	0,954	0,2947	0,93703	0,2530
0,5	1,0003	0,99267	0,4811	0,98439	0,4585	0,97482	0,4310	0,96316	0,3969	0,95004	0,3536
0,6	0,99951	0,99381	0,5832	0,98742	0,5629	0,98155	0,5378	0,97168	0,5061	0,96207	0,4648
0,7	1,0017	0,9969	0,6863	0,98951	0,6695	0,9871	0,6485	0,98056	0,6215	0,9728	0,5857
0,8	1,0047	0,99838	0,7901	0,98956	0,7780	0,98855	0,7626	0,98345	0,7427	0,98337	0,7155
0,9	0,97954	1,0144		0,99427		0,97176		0,99462		1,0108	

Os valores da coluna referente a $n=1$ foram calculados a partir da equação (3.12) e observa-se que estão muito próximos de 1, como era esperado. Observa-se também que os valores de F e de σ^* decrescem com o valor de n , exceto para $\sigma=0.9$, donde conclui-se que esta relação de raios não é bem resolvida por esta análise.

A transformada de MATRAS E NOWAK (1983) objetiva diminuir a velocidade média e aumentar o raio de modo a manter a vazão igual no caso original e no caso transformado. No caso dos anulares, pela definição de σ^* (equação 3.19), observa-se que, à medida que diminui o valor do índice de comportamento n diminui a relação de raios. Pela definição dos adimensionais usados os resultados são independentes do Rey e portanto independentes da vazão, de modo que não se fez necessária a transformação de Matras e Nowak na relação de raios quando da solução do algoritmo.

4.2.1. Comprimento de entrada

Para o caso de fluido não newtoniano não é conveniente fazer a variação de L_e com o índice de comportamento n pois quando este varia, tem-se também a variação do índice de consistência K . Portanto fixar os outros parâmetros e variar só n fica fora da realidade.

Para uma melhor visualização dos resultados, calculou-se o comprimento de entrada para o escoamento dos fluidos não newtonianos citados em TIU & BHATTACHARYYA (1974) e comparou-se com os dados obtidos na literatura. Os resultados são apresentados na Tabela 4.10. Como era esperado, observa-se que os maiores comprimentos de entrada estão associados aos maiores Re_y , o que pode ser melhor observado nos resultados dimensionais. Os resultados adimensionais não permitem a visualização deste fato.

Tabela 4.10 - Comprimento de entrada calculado para vários fluidos; (1) TIU & BHATTACHARYYA, 1974;
* fluido fictício.

n	σ	Re_y	L_e	l_e (m)	l_e (m) (1)
1*	0,01	158,09	0,01239	0,0336661	
0,815	0,077	51	0,01238	0,00785156	0,0061839
0,70	0,20	35	0,01238	0,00564241	0,038416
0,64	0,52	18,40	0,01236	0,00298792	0,00185708
0,53	0,29	54,12	0,01236	0,00930507	0,00442564

4.2.2. Perfis de velocidade

O principal objetivo da transformação de Matras e Nowak é permitir a solução da equação da quantidade de movimento para o caso não newtoniano como se o caso fosse newtoniano. portanto os perfis de velocidade adimensionais resultantes são exatamente iguais àqueles do caso newtoniano. Assim, os perfis das Figuras 4.1 a 4.15 representam também o caso não newtoniano.

4.2.3. Queda de pressão

A transformada de Matras & Nowak faz com que os resultados adimensionais da queda de pressão em função da posição axial para qualquer, valor de n , sejam iguais aos da Figura 4.17. Vale lembrar que a diferença neste caso não newtoniano fica por conta apenas das definições da posição adimensional X e do adimensional de pressão P_0-P que estão no Capítulo 3, porém as curvas são exatamente as mesmas.

Para uma melhor compreensão dos resultados foram simulados escoamentos de fluidos tipo lei da potência num anular com os seguintes valores:

$$r_o = 0,01m \quad r_i = 0,007m \quad \bar{u} = 0,2m / s$$

As propriedades dos fluidos e do escoamento encontram-se na Tabela 4.11.

TIU & BHATTACHARYYA (1974) obtiveram resultados experimentais do coeficiente de perdas $E(x)$ num anular com relação de raios $\sigma=0,417$, para fluidos tipo lei da potência. Simulou-se, pelo método usado neste trabalho, o coeficiente de perdas $E(x)$ usando-se a situação apresentada por estes autores. Os resultados encontram-se na Tabela 4.12. É notável a concordância dos resultados $E(x)$ (1) com $E(x)$ (3), sendo importante ressaltar que estes são dois casos de tratamento analítico e

tem a entrada tipo não protuberante reta como indicado na Figura 2.2. No caso experimental E(x) (2) a geometria era do tipo protuberante interno e externo reto, conforme a mesma figura. Isto indica que o presente trabalho tem boa concordância com o único resultado de caso similar reportado na literatura, que é o caso E(x) (3) da Tabela 4.12.

Tabela 4.11 - Valores de Rey e f deste trabalho para os fluidos utilizados por TELLIS (1992).

n	K(Ns/m ²)	ρ (Kg/m ³)	Rey _{KT}	f=16/Rey
0,998	0,0301	1001	27,65	0,5786
0,9081	0,0183	1001.8	74,60	0,2145
0,81	0,0279	1002	85,23	0,1877
0,68	0,0352	1002.3	144,45	0,1107
0,423	0,05479	1002.3	440,85	0,0363

Tabela 4.12 - Valores de f e E(x): (1) presente trabalho; (2) TIU & BHATTACHARYYA (1974); (3) IDEM (1973)

n	K(Ns/m ²)	ρ (Kg/m ³)	Rey	f	E(x) (1)	E(x) (2)	E(x) (3)
0,86	0,044	1030	73,22	0,2185	0,6504	0,49	0,60
0,75	0,060	1049	93,32	0,1714	0,6071	0,43	0,55
0,68	0,325	1053	24,26	0,6595	0,6302	0,42	0,53
0,66	0,11	1008	75,54	0,2118	0,5952	0,38	0,52

5. CONCLUSÕES

A tendência assintótica dos resultados obtidos neste trabalho para o campo de velocidades em desenvolvimento no caso de fluido newtoniano, concorda com as soluções analíticas apresentadas pelas equações (2.25) e (2.27). Essa concordância mostra a adequação da metodologia utilizada para a solução do problema. Portanto essa mesma técnica de solução foi aplicada ao caso não newtoniano. Os perfis de velocidade axial e radial têm a mesma forma daqueles apresentados na literatura porém, não é possível uma comparação direta devido à definição dos adimensionais utilizados neste trabalho. O principal é o Rey cuja definição está de acordo com KOZICKI *et alii* (1966), para aplicação mais conveniente aos casos com fluidos não newtonianos. Daí, todos os adimensionais são ligados ao Rey e portanto adquirem forma diferenciada neste trabalho. De um modo geral cada autor apresenta os adimensionais segundo uma forma que mais lhe interessa. Portanto somente um reprocessamento dos resultados possibilitaria uma comparação direta.

Foi verificado que comprimento de entrada depende fortemente da sua definição, em termos do valor assintótico da velocidade, como demonstrado na Tabela 4.2 e Figura 4.16. Em muitos trabalhos da literatura não está claro qual o valor de corte adotado. Neste trabalho foi adotado o valor de 99% e os resultados são comparados aos da literatura na Tabela 4.5. Verifica-se que todos são da mesma ordem de grandeza. É importante observar que a comparação direta entre todos os resultados disponíveis, inclusive deste trabalho, não pode ser feita devido às definições dos adimensionais. Essas definições levam a fatores de escala diferentes para cada caso.

Os resultados de queda de pressão na entrada para o caso newtoniano mostraram-se compatíveis com aqueles reportados na literatura, como demonstra a Tabela 4.7. Estes resultados também são dependentes da geometria de entrada.

Nos casos com fluidos não newtonianos os perfis de velocidade e de pressão são similares àqueles newtonianos, isto devido à conveniente definição dos adimensionais e que estão baseados na definição de Rey.

O comprimento de entrada, no caso dos fluidos não newtonianos, não pode ser comparado com a literatura devido à não existência de trabalhos com a mesma geometria. As únicas referências próximas são os trabalhos de TIU & BHATTACHARYYA (1973,1974). Para comparação dos resultados destes autores com este trabalho foi necessário transformar o comprimento de entrada em valor dimensional pois os adimensionais, na forma como estavam definidos, não permitiam essa comparação. A comparação está na Tabela 4.10 onde nota-se claramente o efeito de diferentes geometrias de entrada.

A queda de pressão para os casos com fluidos não newtonianos é apresentada comparativamente na Tabela 4.11 para diferentes fluidos pseudoplásticos. Na Tabela 4.12 os resultados são comparados àqueles do trabalho de TIU & BHATTACHARYYA (1974). Nota-se na Tabela 4.11 o efeito das propriedades do fluido e para esses cálculos fixou-se o valor da velocidade média. A tentativa de fixar Rey ou a vazão não corresponde a casos físicos reais pois tanto no primeiro caso de Rey=constante como no segundo de Q=constante chega-se a absurdos físicos em que a velocidade máxima tende ao infinito, apesar do escoamento ser "laminar".

As vantagens deste trabalho sobre aqueles existentes na literatura estão na definição generalizada de Rey e na rapidez e qualidade das soluções. Note-se que os perfis de velocidade e pressão, para os casos newtoniano e não newtoniano, são similares, isto porque a transformação das equações do caso não newtoniano levou a um caso pseudonewtoniano. Com tal similaridade é possível comparar a qualidade das soluções para os dois casos.

6. SUGESTÕES

A principal sugestão a ser feita é a de que se faça tentativas de medir o campo de velocidades e a queda de pressão em escoamentos reais. Essas medidas terão que ser não intrusivas e a melhor técnica é certamente a de anemometria LASER.

Será interessante desenvolver um trabalho para homogeneizar os resultados da literatura de modo a permitir comparações. No momento, para fazer comparações é preciso, literalmente, descobrir os fatores de escala que transformam os resultados reportados.

Casos com anulares excêntricos e casos de escoamentos multifásicos são de grande interesse prático, sendo ótimos temas para trabalhos futuros.

Deve ser considerada a abordagem integral porém numa forma mais livre do que aquela como tem sido tratada na literatura até o momento. A idéia seria elaborar os perfis de velocidade e de pressão tendo como parâmetros as propriedades dos fluidos e da geometria, como mostrado por FONTES (1996). Este seria um trabalho muito longo porém a perspectiva das vantagens pode torná-lo interessante.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIELLO,G. & TREFIL,J.S. The generalized entry flow problem and the establishment of Poiseuille flow in locally constricted tubes. Journal of Biomechanics, v.9,:p.49-54,1976.
- ANDERSON,D.A.,TANNEHILL,J.C. & PLETCHER,R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer , New York, Hemisphere,1984. cap.7,p. 329-415.
- ANDERSSON,H.I. & TOFTEN,T.H. Numerical solution of the laminar boundary-layer equations for power-law fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 32,p.175-195,1989.
- AZOUZ,I.,SHIRAZI,S.A.,PILEHVARI,A. & AZAR,J.J. Numerical simulation of laminar flow of power-law fluids in conduits of arbitrary cross-section. Recent Developments in Non-Newtonian Flows and Industrial Application. ASME FED,v.124,p.73-79,Winter Annual Meeting of the ASME,Atlanta,G.A. USA ,1991.
- BATRA,R.L. & JENA,B. Entrance region flow of blood in concentric annulus. International Journal of Engineering Science, v.28,p.407-19,1990
- BHATTACHARYYA,S. & TIU,C. Developing pressure profiles for non-newtonian flow in an annular duct. AICHE Journal,v.20,n.1,p.154-158,jan 1974.
- BIRD,B. Experimental tests of generalized newtonian models containing a zero-shear viscosity and a characteristic time. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v.6,p.161-164,august,1965

- BODOIA, J.R. & OSTERLE, J.F. Finite difference analysis of plane Poiseuille and Couette flow developments. Applied Scientific Research Section A, v.10, p.:265-276, 1961.
- BOGUE, D.C. Entrance effects and prediction of turbulence in on-newtonian flow . Industrial and Engineering Chemistry , v.51, n.7, july, 1959.
- BOUSSINESQ, J. Sur la maniere dont les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire, evase a son entree, se distribuent depuis cette entree jusqu'aux endroits ou se trouve établi un regima uniforme. Comptes Rendus, v. 113, p. 9-15, 49-51, 1891
- CAMPBELL, W.D. & SLATTERY, J.C. Flow in the entrance of a tube. Journal of Basic Engineering. Transactions of the ASME, v.85, Paper n.6, Hyd-6, p. , march, 1963.
- CHANG, C.C. & ATABEK, H.B. Flow between two co-axial tubes near the entry, ZAMM, v.42, n.10/11, p.425-430, 1962.
- CHEN, S.S., FAN, L.T. & HWANG, C.L. Entrance region flow of the Bingham fluid in a circular pipe. AICHE Journal, v.16, n 2, p.293-299, 1970.
- CHRISTIANSEN, E.B. & LEMON, H.E. Entrance region flow. AICHE Journal, v.11, n.6, p.995-999, 1965.
- CHUNG, K.C. & ASTILL, K.N. Momentum integral solution of developing flow in an annulus with a rotating inner cylinder. Journal of Fluids Engeneering, Transactions of the ASME , p.558-560, sep , 1976
- COLLINS, M. & SCHOWALTER, W.R. Behavior of Non-Newtonian Fluids in the Entry Region of a Pipe. AICHE Journal, v. 9, n.6, p. 804-809, nov., 1963.

- EL-DEFRAWI, M.E. & FINLAYSON, B.A. On the use of integral methods for flow of power-law fluids. AICHE Journal, v.18, n.1, p.251-253, jan 1972.
- EL-SHAARAWI, M.A.I. & SARHAN, A. An improved implicit finite-difference scheme for boundary-layer flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 15, p. 715-728, 1992.
- FAN, L.T. & HWANG, C.L. Bibliography of hydrodynamic entrance region flow. Kansas State University Bulletin, v.50, n.3, 1966.
- FARGIE, D. & MARTIN, B.W. Developing laminar flow in a pipe of circular cross section. Proceedings of the Royal Society, v. 231A, p.461-476, 1971.
- FONTES, S.R. Fluidodinâmica e transporte de calor no escoamento laminar permanente de fluido não newtoniano na região de entrada de tubos. Campinas, 1996. 117p. Tese (Doutor em Engenharia de Alimentos), Universidade Estadual de Campinas.
- FREDRICKSON, A.G. & BIRD, B. Non-newtonian flow in annuli. Industrial and Engineering Chemistry, v. 50, n.3, p. 347-352, march, 1958.
- FRIEDMAN, M., GILLIS, J. & LIRON, N. Laminar flow in a pipe at low and moderate Reynolds numbers. Applied Scientific Research, v. 19, p. :426-438, nov., 1968.
- GARG, V.K. & GUPTA, R. C. Stability of developing flow in a pipe-nonparallel effects. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME, v.48, p.243-248, jun. 1981
- GILLARD, D.P. & BELLET, D. Effets d'entrée en écoulements pulsés non-newtoniens. Rheologica . Acta, v. 19, n. 4, p. 437-451, 1980.

- GOLDSTEIN,S. Modern Developments in Fluid Dynamics, Oxford, England: Clarendon Press, 1938. v. 11
- GUPTA,R.C. Laminar flow in the entrance of a tube. Applied Scientific Research, v. 33, p. 1-10,1977.
- GUPTA,R.C. Laminar two-dimensional entrance region flow of power-law fluids. Acta Mechanica, v. 67, p. 129-137,1987.
- GUPTA,R.C. Laminar two-dimensional entrance region flow of power-law fluids - II. Acta Mechanica, v. 84, p. :209-215,1990.
- GUPTA ,R.C.& AGARWAL,R.P. Non-newtonian fluid flow development in a circular pipe. Fluid Dynamics Research, v. 12, parte 4, p. 203-213,1993
- GUPTA,R.C. & GARG,V.K. Developing flow in a concentric annulus. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.,v.28,p. 27-35,1981.
- HANKS,R.W. & LARSEN,K.M. The flow of power-law non newtonian fluids in concentric annuli. Industrial and Engineering Chemistry-Fundamentals.,v. 18, .n. 1, p. 33-35,1979.
- HORNBECK,R.W. Laminar flow in the entrance region of a pipe. Applied Scientific Research, v. 13,section A, p. 224-32,1963
- HORNBECK,R.W.,ROULEAU,W.T. & OSTERLE,J.F. Effects of radial momentum flux on flow in the entrance of a porous tube. Journal of Applied Mechanics, v. 32, p. 195-7,1965.
- HWANG,C.L. & FAN,L.T. A finite difference analisys of laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a flat retangular duct. Applied Scientific Research., Sec. B, v. 10, p. 329-343, 1963).

- KOZICKI,W.; CHOU,C.H. & TIU,C., Non newtonian flow in ducts of arbitrary cross-sectional shape. Chemical Engineering Science, v. 21,p. 665-679,1966
- KOZICKI,W. & TIU,C. Improved parametric characterization of flow geometries, The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 49, p. :562-5 ,1971
- LANGHAAR,H.L. Steady flow in the transition length of a straight tube . Journal of Applied Mechanics , v. 9, Transactions of the ASME, v. 64, p. A:55-58,1942.
- LEW,H.S. & FUNG,Y.C. Entry flow into blood vessels at arbitrary Reynolds number. Journal of Biomechanics, v. 3, p.23-28,1970
- LIU,J. & SHAH,V.L. Numerical solution of a Casson fluid flow in the entrance of annular tubes. Applied Scientific Research, v. 31, p. 213-222, oct 1975.
- LUNDGREN,T.S.; SPARROW,E.M. & STARR,J.B. Pressure drop due to the entrance region in ducts of arbitrary cross section. J.Bas.Engng.,Trans.Am.Soc.Mech.Engrs., v.86, p. 620-6,1964.
- MACKILLOP.A.A. Heat transfer for laminar flow of non newtonian fluids in entrance region of a tube. International Journal of Heat and Mass Transfer,v. 7, p. 853-862,1964
- MANOHAR,R. An exact analysis of laminar flow in the entrance region of an annular pipe, ZAMM, v.45, p. 171-176.,1965.
- MASHELKAR,R.A. Hydrodynamic entrance region flow of pseudoplastic fluids. Proceedings of the Institute of Mechanic Engineerings. v. 188,n. 60/74, p. 683-9, 1975.
- MATRAS, Z. & NOWAK, Z. Laminar entry problem for power-law fluids. Acta Mechanica , v. 48, n. 1-2, p.81-90,1983

- McCOMAS, S. T. Hydrodynamic entrance lengths for ducts of arbitrary cross section. Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, p. 847-50, dec., 1967
- MEHROTRA, A. K. & PATIENCE, G. S. Unified entry length for newtonian and power-law fluids in laminar pipe flow. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 68, p. 529-33, aug., 1990.
- METZNER, A. B. & REED, J. C. Flow of non-newtonian fluids-Correlation of the laminar, transition and turbulent flow regions. AICHE Journal, v. 1, n. 4, p.:434-40, 1955
- MISHRA, I. M., KUMAR, S. & MISHRA, P. Entrance region flow of Bingham plastic fluids in concentric annulus. Indian Journal of Technology, v.23, p. 81-87, march, 1985.
- MISHRA, P. & MISHRA, I. Flow behavior of power-law fluids in an annulus. AICHE Journal, v.22, n. 3 ,p. 617-619, may, 1976.
- MISHRA, I. M. & MISHRA, P. Linearized approach for predicting loss coefficients in entrance region flows of purely viscous non-newtonian fluids in an annular duct. The Chemical Engineering Journal, v. 14, p. 41-47, 1977.
- MISHRA, P. & SING, L. N. Non-newtonian flow in the entrance region of tubes Indian Journal of Technology , v. 14, p.328-31, july 1976.
- MOHANTY, A. K. & ASTHANA, S. B. L. Laminar flow in the entrance region of a smooth pipe. Journal of Fluid Mechanics , v. 90, parte 3, p.:433-447, 1978
- MURAKAWA, K. Velocity distribution over the entry length in pipes with annular space. Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineerings, v. 22, p.349-353, 1956

- NOUAR, C., OULDROUIS, M., SALEM, A. & LEGRAND, J. Developing laminar flow in the entrance region of annuli-Review and extension of standard resolution methods for the hydrodynamic problems. International Journal of Engineering Science, v. 33, n.10, p. 1517-1534,1995.
- OKIISHI, T. H. & SEROVY, G. K. . An experimental study of the turbulent flow boundary layer development in smooth annuli. Journal of Basic Engineering. Transactions of the .ASME, v. 89D, p. 823-827,1967.
- OLSON, R. M. & SPARROW, E. M. Measurements of turbulent flow development in tubes and annuli with square or rounded entrances. AICHE Journal, v. 9, n. 6, p.766-770,1963.
- PAWLEK, R. A. & TIEN, C. Laminar heat transfer to non newtonian fluids in the entrance region of a circular conduit. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 42, p. 222-227,1964
- PRANDTL, L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proceedings of the International Mathematics Congress, 3 d, Heidelberg, 1904.
- PRASANTH, N. & SHENOY, U. V. Poiseuille flow of a power-law fluid between coaxial cylinders. Journal of Applied Polymer Science, v. 46, p.1189-1194,1992
- ROTEM, Z. Non-newtonian flow in annuli. Journal of Applied Mechanics, Transactions . of the A.S.M.E., v. 84E, p.421-424, jun., 1962.
- ROTHFUS, R. R., MONRAD, K. G., SIKCHI, K. G. & HEIDEGER, W. J. Isothermal skin friction in flow through annular sections. Industrial and Engineering Chemistry, v.47, n.5, p.913-918,1955.

- ROUND, G. F. & YU, S. Entrance laminar flows of viscoplastic fluids in concentric annuli. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 71, p. 642-5, aug., 1993.
- ROY, D. N. Laminar flow near the entry of coaxial tubes. Applied Scientific Research, v. 14, sec A, p. 421-430, 1965.
- RUSSEL, C. P. & CHRISTIANSEN, E. B. Axial, laminar, non-newtonian flow in annuli. Industrial and Engineering Chemistry- Process Design and Development, v. 13, n. 4, p.391-396, 1974
- SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. New York:McGraw-Hill Book Co. Inc., 1955. 205p.
- SCHILLER, L. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, v. 2, p. 96-106, 1922.
- SHAH, V. L. & FARNIA, K. Flow in the entrance of annular tubes. Computer and Fluids, v. 2, n. 3/4-D, p.285-294, 1974.
- SHAH, V. L. & SOTO, R. Non-newtonian blood flow in the entrance region of a tube. Computers & Fluids, v. 2, p. 273-84, 1974.
- SHAH, V. L. & SOTO, R. J. Entrance flow of a Bingham fluid in a tube. Applied Scientific Research, v. 30, p. 271-279, fev., 1975
- SHOHET, J. L., OSTERLE, J. F. & YOUNG, F. J. Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a plate channel. The Physics of Fluids, v. 5, n. 5, p.545-549, 1962

- SIEGEL, R. The effect of heating on boundary layer transition for liquid flow in a tube. D.Sc.Thesis, Massachusetts Institut of Technology, 1953.
- SLEZKIN, N. A. ed. Dynamics of Viscous incompressible Fluids. Gostekhizdat, Moscow, 1955 (em Russo)
- SOTO, R. J. & SHAH, V. L. Entrance flow of a yield power-law fluid. Applied Scientific Research, v.32, p. 73-85, march, 1976.
- SPARROW, E. M. & LIN, S. H. The developing laminar flow and pressuredrop in the entrance region of annular ducts. Journal of Basic Engineering, Transactions of the A.S.M.E., v.86 D, p.827-834, dec., 1964.
- SPARROW, E. M., LIN, S. H. & LUNDGREN, T. S. Flow development in the hydrodynamic entrance region of tubes and ducts. Physics of Fluids, v. 7, n. 3, p. 338-347, march, 1964.
- SUGINO, E. Velocity distribution and pressure drop in the laminar inlet of a pipe with annular space. Bulletin of the J.S.M.E. , v. 5, n. 20, p.651-655, 1962.
- TARG, S. M. Osnovaye zadachi teorii laminaraykh techenei (Fundamental Problems in the Theory of Laminar Flow), GITTL, 1951.
- TATSUMI, T. Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille régime, I. Journal of the Physical Society of Japan, v. 7, n.5, p. 489-495, 1952.
- TELIS ROMERO, J. Hidrodinâmica e transferência de calor do escoamento laminar de fluidos não newtonianos em tubos. Campinas, 1992. 134p. Tese (Doutor em Engenharia de Alimentos) - Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- TERHMINA, O. & MOJTABI, A. Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. International Journal of Heat and Mass Transfer, v.31,n.3, p.583-90,1988.
- TIU ,C. & BHATTACHARYYA, S. Flow behavior of power-law fluids in the entrance region of annuli. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 51, p.47-54, feb.1973.
- TIU ,C. & BHATTACHARYYA ,S. Developing and fully developed velocity profiles for inelastic power-law fluids in an annulus. AICHE Journal, v.20, n.6, p.1140-1144,nov., 1974.
- TOMITA, Y. Analytical treatments of non-newtonian fluid flow by introducing the conception of boundary layer. Bulletin of JSME, v.4, n.13, p.77-86,1961.
- VASQUES, E. Escoamento em sistemas anulares: mapas de velocidade. Campinas, 1994. 202p. Tese(Doutor em Engenharia Mecânica)-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- VAUGHN, R. D. & BERGMAN, P. D. Laminar flow of non-newtonian fluids in concentric annuli. Industrial and Engineering Chemistry- Process Design and Development, v. 5, n.1, p.44-47,1966
- WANG, Y. L. & LONGWELL, P. A. Laminar flow in the inlet section of parallel plates. AICHE Journal. v. 10, n.3, p.323-329,1964.
- WILSON, N. W. & MEDWELL, J. O. An analysis of the developing turbulent hydrodynamic and thermal boundary layers in an internally heated annulus. Journal of Heat Transfer, Transactions of the. ASME, v. 93C,25 1971.