

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

TESE DE DOUTORADO

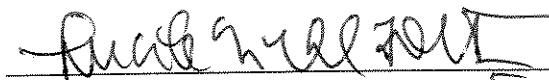
**REPRESENTAÇÕES, INTERPRETAÇÕES
E PRÁTICA PEDAGÓGICA:
A GEOMETRIA NA SALA DE AULA**

Cármem Lúcia Brancaglioni Passos

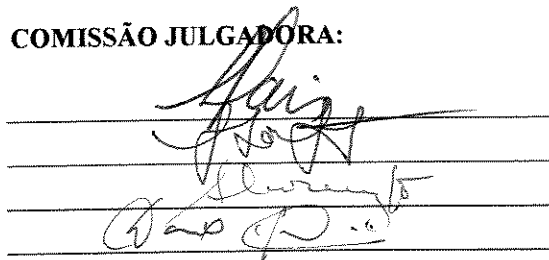
Orientadora: Lucila Diehl Tolaine Fini

Este exemplar corresponde à redação final da
Tese de Doutorado defendida por CÁRMEN
LÚCIA BRANCAGLIONI PASSOS, aprovada
pela Comissão Julgadora.

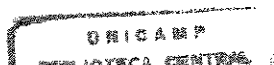
Campinas, 15 de março de 2000.



COMISSÃO JULGADORA:



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE
2000



15844

CHAMADA:

UNICAMP

P268r

EX.

QWED BC/ 41245

LOC. 278.100

C ☐ 0 ☒

RECQ 2511.00

ATA 30-06-00

* CPD

CM-00142284-5

CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

P268r Passos, Cármen Lúcia Brancaglioni.
Representações, interpretações e prática pedagógica : a
geometria na sala de aula / Cármen Lúcia Brancaglioni
Passos. -- Campinas, SP : [s.n.], 2000.

Orientador : Lucila Diehl Tolaine Fini.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Educação.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Educação Matemática.
3. Professores - Formação. I. Fini. Lucila Diehl Tolaine.
- II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.
- III. Título.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Tese de Doutorado submetida à Faculdade de Educação
da Universidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Educação Matemática.

*Aos meus queridos filhos, Fabrício e
Fernanda e ao meu marido, Passinho,
com muito amor.*

AGRADECIMENTOS

Às professoras e aos seus alunos por possibilitarem-me observá-los em seus processos de “ensinar e aprender”, e também, às suas escolas que abriram as portas para a realização desta pesquisa.

À Professora Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini, pela orientação segura e competente, valorizando sempre meu trabalho, indicando os melhores caminhos a seguir.

Ao Professor Dr. Sérgio Lorenzato e ao Professor Dr. Dario Fiorentini pela preciosa colaboração no momento do Exame de Qualificação e durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aos Professores Antonio Miguel e Anna Regina pelas precisas conversas sobre os encaminhamentos da pesquisa.

Aos queridos amigos: Regina, Rosana, Beth, Jairo, pelo carinho e amizade, e sobretudo, pelas infindáveis discussões e reflexões delineadas nos momentos de inquietação em relação às nossas pesquisas.

Aos amigos e professores da Educação Matemática da Faculdade de Educação e do COPEMA, pelas reflexões sobre as nossas ansiedades e esperanças sobre a Educação Matemática, pela amizade e pelo carinho demonstrados.

Ao Passinho e aos meus filhos, Fabrício e Fernanda, pela compreensão nas ausências, pelo amor e carinho em todos os momentos.

À minha mãe, Alice, que sempre presente, incentivou e valorizou meu trabalho.

À minha irmã, Maria Alice, pelo carinho, dedicação e presença nos momentos importantes.

Aos queridos amigos: Maria Thereza, Manoel e Lourenço, por compartilharem comigo o prazer pelo descobrir.

Ao amigo José Antonio, pela leitura e revisão cuidadosas.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	viii
Resumo	xiv
Abstract	xv
Introdução.....	1
1. Aspectos Psicopedagógicos e Epistemológicos das Representações e Interpretações Geométricas.....	4
2. A Geometria no Quadro do Ensino da Matemática.....	40
2.1 - Considerações a Respeito do Ensino da Matemática	40
2.2 - Considerações a Respeito do Ensino da Geometria	48
2.3 - Considerações a Respeito da Dimensão Histórica da Geometria	72
3. Visualização e Representação Geométricas: Reflexões Teóricas	80
4. Metodologia da Pesquisa	120
4.1 - Metodologia da Pesquisa	120
4.2 - Problema da Pesquisa	123
4.3 - Objetivos da Pesquisa	123
4.4 - Sujeitos da Pesquisa.....	124
4.5 - Procedimentos Metodológicos	125
5. Estudo de Caso	130
5.1 - Interferências na escolha dos sujeitos.....	132

5.2 - Caracterização das Escolas – Cenários da Pesquisa.....	135
5.2.1 - Escola A	135
5.2.2 - Escola B	139
5.2.2.1 - Os Professores da Escola B e as Dificuldades no Ensino da Geometria	140
5.2.3 - Escola C	150
5.3 - Descrição e Análise dos Procedimentos Geométricos em Episódios de Ensino.....	153
- Representação no Plano de um Objeto Tridimensional: Cubo, Paralelepípedo, Prisma de Base Triangular e Cilindro	155
- Nomenclatura de Objetos Geométricos	187
- Conceito de Quadrado.....	191
- Faces do Objeto Tridimensional	196
- Paralelismo e Perpendicularismo	204
- Planificação de Prismas: Paralelepípedo	209
- Transformações Geométricas no Plano: Rotação e Reflexão.....	224
- Planificação do Cilindro.....	224
- Sólidos Geométricos	227
- Da Representação Espacial à Representação Plana	235
- Interpretação e Identificação de Representações Planas de Objetos Tridimensionais	265
- Interpretação da Representação Plana e Construção De Modelos.....	269
- Montagem do Quebra-Cabeça Cubo-Soma.....	275
- Noção de Volume	277
- Procedimentos da montagem do cubo-soma	281
- Noção de Volume de Paralelepípedo	287
- Relação litro/Centímetros Cúbicos	291
- Noção de Volume do Cilindro.....	292
- Comprimento da Circunferência.....	293
- Diâmetro e Raio da Circunferência.....	295
- Razão π	296

- Área do Círculo.....	298
- Composição de Decomposição de Figuras Planas.....	304
- Classificação das Peças do Quebra-Cabeça Tangram.....	306
- Composição de Peças do Tangram Usando Outras Peças do Jogo	308
- Simetria	310
- Simetria nas Peças do Tangram.....	312
5.4 - Considerações a respeito do Estudo de Caso	314
6. Considerações Finais	316
Bibliografia.....	331

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Desenho padrão de ilusão de Müller-Lyer	11
Figura 1.2 - Desenho modificado do padrão de ilusão de Müller-Lyer	11
Figura 1.3 - Desenho da pesquisa de Würsten.....	13
Figura 1.4 - Possíveis desenhos para o losango.....	15
Figura 1.5 - Transformações “afins” do losango	15
Figura 1.6 - Transformações “afins” do losango	16
Figura 1.7 - Rotação do quadrado.....	17
Figura 1.8 - Rotação do paralelogramo	17
Figura 1.9 - Representação do quadrado com palitos e conexões	18
Figura 1.10 - Transformação do quadrado de palitos e conexões	19
Figura 1.11 - Transformação do triângulo.....	20
Figura 1.12 - Transformação do círculo.....	20
Figura 1.13 - Representação do cubo.....	21
Figura 1.14 - Figura 2 da atividade proposta pelo sujeito/professor.....	24
Figura 1.15 - Desenho do sujeito/professor.....	25
Figura 1.16 - Representação de quadrilátero não-convexo	27
Figura 1.17 - Triângulo equilátero	28
Figura 1.18 - Desenho da casinha de um professor	28
Figura 1.19 - Mediatrizes de triângulos	29
Figura 1.20 - Triângulo obtusângulo.....	30
Figura 1.21 - “Diagonais” de polígonos não-convexos.....	31
Figura 1.22 - Representação das embalagens de óleo do problema	32
Figura 1.23 - Desenho da planificação do prisma feita pelo aluno.....	32
Figura 1.24 - Representação do objeto tridimensional.....	34
Figura 1.25 - Desenho da planificação do sujeito.....	34
Figura 2.1 - Desenho de Leonardo da Vinci.....	51
Figura 2.2 - Desenho de Escher “Tang und Nacht”, 1938	52
Figura 2.3 - Atividade proposta no SAEB/97.....	66

Figura 3.1 - Diagrama apresentado por Goldenberg (1999).....	83
Figura 3.2 - Diagramas apresentados por Bishop (1979).....	95
Figura 3.3 - Ilustração do problema apresentado por Fischbein (1993)	106
Figura 5.1 - Foto das peças construídas com varetas.....	143
Figura 5.2 - Representação do prisma de base triangular	148
Figura 5.3 - Planificação do prisma feita por um dos professores.....	149
Figura 5.4 - Foto das formas geométricas expostas para os alunos da professora G.....	156
Figura 5.5 - Foto da caixa e representação feita por Eli	157
Figura 5.6 - Representação do cubo feita por Mon	160
Figura 5.7 - Esquema de representação de um cubo	160
Figura 5.8 - Representação do cubo feita por Cam	161
Figura 5.9 - Representação do cubo feita por Cel	162
Figura 5.10 - Representação do Diagrama de Schlegel (cubo)	163
Figura 5.11 - Representação do diagrama de Schlegel para pirâmide e prisma	163
Figura 5.12 - Diferentes representações (Gutiérrez, 1996b, p.34).....	164
Figura 5.13 - Representação do prisma de base triangular de Gab	165
Figura 5.14 - Representações de Hum (a) e Fab (b).....	165
Figura 5.15 - Representação do paralelepípedo feita por And	166
Figura 5.16 - Representação do paralelepípedo de Ste	167
Figura 5.17 - Representação do paralelepípedo de Adr	168
Figura 5.18 - Representação do paralelepípedo de Gio	168
Figura 5.19 - Representação do paralelepípedo de Edu.....	169
Figura 5.20 - Representação do paralelepípedo feita por Jac.....	169
Figura 5.21 - Representação do paralelepípedo feita por And	170
Figura 5.22 - Representação do paralelepípedo feita por Tha	171
Figura 5.23 - Representação do paralelepípedo feita por Fel	172
Figura 5.24 - Representação do paralelepípedo de Jos	172
Figura 5.25 - Representação do paralelepípedo feita por Jul	173
Figura 5.26 - Etapas da representação do paralelepípedo de Ren	174
Figura 5.27 - Etapas de representação do paralelepípedo feita por Joa	175
Figura 5.28 - Etapas da representação do paralelepípedo de Mic	175

Figura 5.29 - Etapas da representação do paralelepípedo de Raf	176
Figura 5.30 - Representações de Van (a) e Mai (b)	177
Figura 5.31 - Representação feita por Ron do paralelepípedo	177
Figura 5.32 - Representação e foto da caixa usada por Hel	178
Figura 5.33 - Representação do desenho de Mar	179
Figura 5.34 - Representação de Iza (caixa de pasta de dente).....	180
Figura 5.35 - Representação do desenho de Ber	181
Figura 5.36 - Representação do desenho de Bru	182
Figura 5.37 - Representação do cubo, pirâmide e paralelepípedo	183
Figura 5.38 - Representação do cilindro de Raf	184
Figura 5.39 - Representação do cilindro de Ana	185
Figura 5.40 - Representação de cilindros (Pais,1994, p.16).....	185
Figura 5.41 - Representação da configuração feita com varetas	192
Figura 5.42 - Figura com quatro partes.....	193
Figura 5.43 - Figura fechada com quatro lados	193
Figura 5.44 - Figura fechada com quatro lados iguais	193
Figura 5.45 - Três quadriláteros com lados iguais	195
Figura 5.46 - Indicação da base do paralelepípedo representado por Bru	196
Figura 5.47 - Representação das faces do prisma indicadas por Wil.....	197
Figura 5.48 - Sequência de representações feitas por Bru	198
Figura 5.49 - Representação das faces do cubo de Jul.....	200
Figura 5.50 - Representações do paralelepípedo e de suas faces feitas por Hum.....	201
Figura 5.51 - Sequência de representação de Fab.....	201
Figura 5.52 - Sequência de representações de Gab.....	203
Figura 5.53 - Sequência da representação feita por Raf.....	204
Figura 5.54 - Representação das faces paralelas de Hel	206
Figura 5.55 - Representação do perpendicularismo das faces do objeto feita por Tha	207
Figura 5.56 - Representação de perpendicularismo realizada por Ath	208
Figura 5.57 - Representação do paralelismo identificado por Daí	208
Figura 5.58 - Foto e representação da caixa utilizada por Bru.....	210

Figura 5.59 - As duas planificações “fechadas” do cubo	212
Figura 5.60 - Representação da planificação apresentada por Jul	213
Figura 5.61 - Representação da planificação do cubo feita por Car	214
Figura 5.62 - Representação da indicação dos movimentos feitos por Gab.....	215
Figura 5.63 - Representação da planificação de Jul.....	216
Figura 5.64 - Representação da primeira planificação feita por Let.....	216
Figura 5.65 - Representação da segunda planificação feita por Let	217
Figura 5.66 - Representação da terceira da planificação de Let	217
Figura 5.67 - Representação da primeira planificação de Fab	217
Figura 5.68 - Representação da planificação incorreta do cubo.....	219
Figura 5.69 - Representação da planificação incorreta do cubo.....	219
Figura 5.70 - Representação da planificação correta do cubo.....	219
Figura 5.71 - Representação das onze planificações do cubo	220
Figura 5.72 - Três momentos da planificação da caixa.....	222
Figura 5.73 - Duas planificações de paralelepípedo	223
Figura 5.74 - Primeira planificação do cilindro feita por Jul	225
Figura 5.75 - Segunda planificação do cilindro feita por Jul	226
Figura 5.76 - Representação da explicação da professora V.....	229
Figura 5.77 - Folha das atividades propostas pela professora V	230
Figura 5.78 - Foto da professora montando o cartaz com os sólidos geométricos.....	234
Figura 5.79 - Representação e foto das peças do cubo-soma	237
Figura 5.80 - Representação da peça A do cubo-soma	240
Figura 5.81 - Descrição da peça A feita pelo grupo Geométrico	241
Figura 5.82 - Descrição da peça A feita por um grupo de alunos da professora M.....	242
Figura 5.83 - Ilustração da observação de Dou	244
Figura 5.84 - Representação chapada da peça D do cubo-soma.....	245
Figura 5.85 - Descrição da peça D feita pelo grupo de alunos da professora M.....	245
Figura 5.86 - Representação da peça D feita por um dos grupos de alunos da professora M.....	245
Figura 5.87 - Descrição da peça G feita por um dos grupos de alunos da professora M.....	247

Figura 5.88 - Algumas das representações de Iza.....	249
Figura 5.89 - Algumas das representações de Gab.....	250
Figura 5.90 - Representação do tipo “Esquemática Plana”.....	250
Figura 5.91 - Representações de Mau para as peças A e B.....	251
Figura 5.92 - Representações de Mau para as peças F e G.....	252
Figura 5.93 - Representação da mensagem feita pela aluna Mel.....	253
Figura 5.94 - Representações das peças D e F da mensagem de Pat.....	253
Figura 5.95 - Representação de Maur.....	254
Figura 5.96 - Representações do tipo “Esquemática Espacial”.....	255
Figura 5.97 - Representações da mensagem de Ber.....	256
Figura 5.98 - Representação da mensagem de Sil.....	257
Figura 5.99 - Representações do tipo “Pré-realista”.....	258
Figura 5.100 - Representações das peças A, B, C e D da mensagem de Isab.....	259
Figura 5.101 - Representações das peças E, F e G da mensagem de Isab.....	260
Figura 5.102 - Foto de Multicubos.....	261
Figura 5.103 - Representação plana em perspectiva com multicubos.....	261
Figura 5.104 - Representações do tipo “Realista”.....	262
Figura 5.105 - Representação de um paralelepípedo em perspectiva isométrica.....	263
Figura 5.106 - Diferentes etapas de representação (Gutiérrez, 1998).....	264
Figura 5.107 - Cartela de figuras do cubo-soma.....	265
Figura 5.108 - Apresentação da mensagem de Mar.....	267
Figura 5.109 - Dois primeiros desenhos da atividade.....	270
Figura 5.110 - Foto da representação espacial do desenho (a).....	271
Figura 5.111 - Foto da representação plana do desenho (a).....	271
Figura 5.112 - Foto da representação plana do desenho (b).....	272
Figura 5.113 - Foto da representação espacial do desenho (b).....	272
Figura 5.114 - Desenhos da segunda atividade.....	273
Figura 5.115 - Foto da representação plana do desenho (a) da Figura 5.114.....	273
Figura 5.116 - Representação do cilindro pelos segmentos de sua geratriz.....	274
Figura 5.117 - Configuração com as peças do cubo-soma do grupo de Mar.....	277
Figura 5.118 - Representação do grupo Liv, Bru, Ber, Thi, Mic.....	282

Figura 5.119 - Representação em camadas (Gutiérrez, 1996b, p.35, fig 3)	283
Figura 5.120 - Representação do grupo Mar, Dan, Isa, Ju, Mau, Sus.....	283
Figura 5.121 - Representação ortogonal ou vistas laterais	284
Figura 5.122 - Representação do grupo Deb, Eli, Luc, Hel, Mau	284
Figura 5.123 - Representação do grupo Mar, Gab, Mar, Jul, Isa.....	285
Figura 5.124 - Esboço do procedimento feito por Iza.....	288
Figura 5.125 - Esboço do procedimento de Iza ao determinar a altura	288
Figura 5.126 - Esboço da explicação da professora sobre cm^3	289
Figura 5.127 - Tabela desenhada no quadro-negro.....	296
Figura 5.128 - Tabela feita por Eli.....	297
Figura 5.129 - Representação da composição feita com quatros setores de um semicírculo.....	299
Figura 5.130 - Representação da configuração com setores dos dois semicírculos	299
Figura 5.131 - Representação da figura desenhada no quadro-negro	300
Figura 5.132 - Representação do esquema de transformação do paralelogramo em retângulo	301
Figura 5.133 - Trabalho feito pelo aluno Bru.....	303
Figura 5.134 - Montagem do barco com as peças do Tangram.....	304
Figura 5.135 - Figuras do Tangram formado por duas peças.....	309
Figura 5.136 - Peças do Tangram com três peças do jogo.....	310
Figura 5.137 - Folha de atividade sobre eixo de simetria	311
Figura 5.138 - Peças com um eixo de simetria.....	313
Figura 5.139 - Esquema identificando a não simetria do paralelogramo	313
Figura 5.140 - Peça com quatro eixos de simetria	314

RESUMO

Esta pesquisa aborda questões a respeito da problemática do ensino da Geometria, considerando os aspectos psicopedagógicos e epistemológicos das representações e interpretações geométricas, enfatizando a complexidade presente no processo ensino-aprendizagem da Geometria.

São delineadas considerações teóricas a respeito da visualização e representação geométricas, buscando identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos, e, também, investigar como as professoras agem perante essas manifestações.

A pesquisa investigou **como o aluno representa e interpreta representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações**. Para tanto, foi desenvolvido um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, no qual foram investigados alunos de cinco classes de 4ª série do Ensino Fundamental e suas respectivas professoras, focalizando a resolução de problemas geométricos.

A análise dos dados mostrou a importância da visualização e da representação geométricas no processo ensino-aprendizagem dos alunos.

Foram analisados os procedimentos dos alunos para representar sólidos geométricos no plano e no espaço e as dificuldades no reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais; também foram analisadas as relações entre representação, visualização, a familiaridade com o desenho, as convenções e o vocabulário próprios da Geometria.

Também foram destacadas considerações didático-pedagógicas que poderão constituir-se em contribuições para desencadear reflexões sobre o ensino da Geometria e para a melhoria do trabalho em sala de aula.

ABSTRACT

This research addresses issues related to the problems in the teaching of geometry, taking into consideration the psychopedagogical and epistemological aspects of the geometric representations and interpretations and emphasizing the complexity present in the geometry teaching-learning process.

Theoretical considerations about geometrical visualization and representation are outlined seeking to identify, in classroom teaching situations, geometrical notions expressed by students, and also to investigate how teachers behave towards the way students express themselves.

The research has investigated **how the student represents and interprets geometrical representations and how the teacher perceives/sees and explores such representations**. A case study has been developed, with a qualitative focus, in which students from five fourth-grade classes of Elementary school and their respective teachers were investigated, with a focus on the solution of geometrical problems.

The data analysis has shown the importance of geometrical visualization and representation in the students' teaching-learning process.

The procedures used by the students to represent geometric solids in the plane and space and the difficulties in recognizing the plane representations of three-dimensional objects were analyzed, as well as the relationships between representation, visualization, acquaintance with the drawing, the conventions and the geometry-related vocabulary.

Didactic-pedagogical considerations have also been shown which can contribute to bring about reflections on the teaching of geometry and to the improvement of the work done in the classroom.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

A Geometria se constitui em um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a interrelação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos.

O trabalho desenvolvido em cursos de formação de educadores para as séries iniciais do Ensino Fundamental (anteriormente, Ensino Primário ou de 1º Grau) mostrou, ao longo de uma dezena de anos, as dificuldades dos futuros professores em relação à Geometria. Na prática de sala de aula foi possível perceber que esses futuros professores apresentavam um conhecimento restrito ou nulo à respeito do assunto e que provavelmente a Geometria não havia sido focalizada em seus respectivos cursos no Ensino Fundamental, na época, de 1º Grau.

Apesar da reconhecida importância da Geometria, pesquisas, tanto no Brasil como no exterior, têm mostrado que o seu ensino vem sendo relegado a um segundo plano (Pavanello, 1989; Peres, 1991; Lorenzato, 1995, dentre outros).

As experiências geométricas se apresentam de forma espontânea para crianças em atividades de exploração de objetos e do espaço físico em que se desenvolvem. As relações e as idéias geométricas são úteis em situações de todos os dias, podendo ser relacionadas com outros tópicos da Matemática e com outras áreas do conhecimento. Entretanto, quando a criança ingressa na escola, freqüentemente não lhe são oferecidas oportunidades para desenvolver idéias geométricas que aproveitem o potencial que ela traz consigo.

Entre os matemáticos e educadores em geral muitas discussões têm sido feitas a respeito da forma com que o ensino da Geometria deveria ser introduzido às crianças. Existe um certo consenso que deveria iniciar-se logo que a criança entra na escola; há, entretanto, divergências em relação aos conteúdos e aos métodos de ensino. Dentre as razões para essas divergências estaria a multiplicidade de aspectos relativos ao seu conteúdo e sua inerente complexidade, e portanto, não ser simples definir um único

caminho, linear, hierárquico, desde os seus princípios elementares até as abstrações e axiomas, a percorrer no ensino em sala de aula.

Durante toda sua vida, os alunos interagirão com objetos concretos em um espaço físico. Tanto o real como as interações podem ser matematizados, isto é, podem ser representados esquematicamente como entes geométricos. O espaço físico não é a única fonte de matematização, mas sua importância deve ser ressaltada, desde que os alunos do Ensino Fundamental elaboram o espaço lógico-matemático a partir das ações que efetuam sobre os objetos concretos em seu espaço real.

O presente estudo refere-se a um trabalho de investigação que aborda as representações, as interpretações e a prática pedagógica no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental.

Em um cenário de controvérsias a respeito do ensino da Geometria, onde muitos desafios emergem das situações práticas na escola, buscou-se identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos e também investigar a maneira como as professoras agem perante essas manifestações. A questão a investigar que norteou os trabalhos foi: **Como os alunos representam e interpretam representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações?**

Espera-se que, como resultado, as discussões apresentadas neste trabalho propiciem aos professores e aos educadores matemáticos elementos que possam desencadear a reflexão e a análise crítica possíveis de trazer contribuições para a melhoria do ensino da Geometria, e também da Matemática.

Sob tais perspectivas, este trabalho apresenta-se assim organizado:

No **Capítulo 1** são abordados os **Aspectos Psicopedagógicos e Epistemológicos das Representações e Interpretações Geométricas**, enfatizando-se as possibilidades de estabelecimento de relações entre o conhecimento geométrico apresentado pelos alunos e os conceitos geométricos historicamente construídos. Essas reflexões consideram o desenvolvimento cognitivo assim como os aspectos psicopedagógicos presentes nas representações geométricas na prática pedagógica.

No **Capítulo 2** apresentam-se considerações a respeito da **Geometria no Quadro do Ensino da Matemática** no intento de atingir questões que tratam, de modo

geral, do fracasso escolar, da formação do professor e, mais especificamente, como esses pontos são determinantes no ensino e na aprendizagem da Matemática. Apresentam-se, ainda, reflexões a respeito da Geometria e do seu ensino, procurando-se situar diferentes explicações que têm sido apresentadas a esse respeito. Delinearam-se também algumas reflexões a respeito de aspectos históricos da Geometria considerados importantes para os encaminhamentos do presente estudo.

No **Capítulo 3** emergem as **Reflexões Teóricas a Respeito da Visualização e da Representação Geométricas** com remissão aos diferentes autores que desenvolveram ou que vêm desenvolvendo investigações nesse campo. Para tanto, consideram-se aspectos de pesquisas, realizadas no Brasil e no exterior, que tratam da interrelação da visualização e da representação geométricas no processo ensino-aprendizagem da Geometria.

No **Capítulo 4** é apresentada a **Metodologia da Pesquisa** desenvolvida como Estudo de Caso.

No **Capítulo 5** estão reunidos os dados coletados, as descrições, as interpretações e a análise buscando compreender **como os alunos representam e interpretam representações geométricas e como as professoras percebem e exploram essas representações**. A esse trabalho de investigação foram incorporadas considerações a respeito de outras pesquisas, cujo tema de investigação também aborda o ensino-aprendizagem da Geometria e as representações geométricas. No decorrer desse capítulo foram feitas inferências, que de certo modo, evidenciaram a tensão manifestada no momento da ação das professoras quando estas teriam que interpretar as diferentes representações geométricas de seus alunos.

No **Capítulo 6** estão sistematizadas inferências do Estudo de Caso e também dos aspectos abordados no decorrer da pesquisa, culminando com as **Considerações Finais**. Tais inferências poderão levar os pesquisadores da área a momentos de reflexão sobre a sua prática pedagógica, assim como sobre os aspectos educacionais que estão envolvidos no processo ensino-aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental, e, também, constituir-se em elementos para novos estudos que venham a se configurar nessa área.

**ASPECTOS PSICOPEDAGÓGICOS E EPISTEMOLÓGICOS DAS
REPRESENTAÇÕES E INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS**

CAPÍTULO 1

ASPECTOS PSICOPEDAGÓGICOS E EPISTEMOLÓGICOS DAS REPRESENTAÇÕES E INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

“A Geometria é o agarrar do espaço... esse espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, dominar, com vista a viver, respirar e movimentar-se melhor” (Freudenthal², 1973, citado no NCTM, 1989, p. 133).

O conhecimento dos alunos sobre Geometria nem sempre decorre da escola. Pensando em investigar a possibilidade do estabelecimento de uma relação entre esse conhecimento, que é expresso por meio de desenhos, gestos, linguagem, entre outras manifestações, e os conhecimentos geométricos como um conjunto de conhecimentos sistematizados e historicamente construídos não se pode deixar de considerar o desenvolvimento cognitivo, assim como os aspectos psicopedagógicos das representações geométricas na prática pedagógica.

De acordo com o empirismo clássico, que dava ênfase ao papel dos sentidos, a apresentação das formas geométricas poderia ser suficiente para se conseguir que o indivíduo aprendesse os conceitos geométricos.

Para os gregos da Antigüidade, a Matemática traduzia-se pela Geometria. Para Platão, a Geometria, é “... *um elemento-chave em sua concepção de mundo*” (Davis e Hersh, 1989, p.367). A Geometria, segundo os racionalistas, desempenhou um papel primordial no entendimento das verdades do universo, e estas eram atingidas pela faculdade da razão, concebida, nesta abordagem, segundo as palavras dos referidos

² FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*, p. 403. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co.

autores, como “... um *traço inato da mente humana, pelo qual as verdades podiam ser percebidas a priori, independente da observação*”, ou seja, como verdades evidentes e não expostas às dúvidas (p.367).

Desde a Antiguidade Clássica até boa parte do século XIX, a Geometria era considerada por filósofos e matemáticos ocidentais como o mais firme e confiável ramo do conhecimento — persistência do mito de Euclides³, e configurava-se pela visão eurocêntrica da ciência. Na filosofia grega defendia-se a crença milenar de que a Geometria era originária do pensamento grego, ou seja, que a Geometria era inerente à natureza e não parte do arcabouço que o indivíduo lança mão para descrever a natureza. Dessa maneira, a Geometria situava-se no centro de todas as atividades intelectuais. Essa visão exerceu influência decisiva sobre a ciência e a filosofia ocidentais. Com Einstein passa-se a perceber que esta Geometria não é inerente à natureza, visto que, com as concepções subjacentes à teoria da relatividade, esse campo do conhecimento mostra-se como sendo da ordem do intelecto. A filosofia oriental, ao contrário da grega, sempre sustentou que as noções de espaço e tempo são construções da mente e, dessa forma, a Geometria jamais atingiu, no Oriente, status semelhante ao da Grécia. Esta atitude filosófica advertia que nossas noções de Geometria não são propriedades absolutas e imutáveis da natureza, mas sim, construções intelectuais.

Como mostram pesquisas de Piaget e Inhelder (1977), a representação do espaço das crianças não é uma simples “leitura” rápida e perceptível do seu ambiente, mas é construída a partir de sua manipulação e interação ativa com o meio; o espaço subjetivo não se constitui como uma reprodução da realidade, mas sim como uma interpretação e construção da mesma.

Verificando substrato teórico que possa elucidar o significado das formas de representação expressas pelos alunos das séries iniciais é importante considerar no presente estudo o alcance das imagens mentais e os modos pelos quais essas interferem no processo de representação do conhecimento tanto quanto considerar o papel da visualização nas representações geométricas.

³Segundo Davis e Hersh (1989), o “Mito de Euclides” é a crença de que os livros de Euclides contêm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis.

Segundo Piaget e Inhelder (1977), destacar o alcance epistemológico de um estudo sobre imagem mental consistiria em estabelecer as razões significativas relativas ao fato do conhecimento não se reduzir simplesmente a uma cópia do real e; significaria, igualmente, abordar criticamente a idéia de cópia, mostrando que não seria possível obter-se uma cópia exata do real sem contradições, uma vez que uma cópia seria apenas uma correspondência aproximada à medida que se apresenta em uma escala relativa ao real considerado (Piaget e Inhelder, 1977, p.519).

Segundo os autores citados,

“... uma das razões para considerar a imagem é que, tal como a linguagem, as suas funções são polivalentes conforme as intenções, ao passo que a função do conceito é exclusivamente cognitiva” (Piaget e Inhelder, 1977, p.517).

Além disso, conforme salientam, os problemas da imagem são

“... particularmente instrutivos, pois, para o empirismo clássico, a imagem era simultaneamente uma reflexão do objeto, na medida em que prolonga a percepção e a fonte do conceito, concebido como um sistema de imagens compostas. O papel assim atribuído à imagem fornecia portanto a justificação mais direta da hipótese de um conhecimento-cópia, oposto à do conhecimento-assimilação” (Piaget e Inhelder, 1977, p.518)

Flavell (1975) explica que Piaget dedicou-se de forma engenhosa à avaliação da capacidade infantil para conservar, medir e considerar entidades geométricas euclidianas como distância, comprimento, coordenadas retilíneas, ângulo, área e volume em seu livro *The Child's Conception of Geometry* (Piaget, Inhelder e Szeminka, 1960). Resumindo os principais pontos desse estudo, Flavell (1975) conclui que:

“... a criança precisa conceber o espaço como uma espécie de recipiente abrangedor formado por uma rede de locais ou subespaços. ... A criança tem que acabar por conceber o espaço como meio homogêneo quanto à mensuração, apesar de sua heterogeneidade quanto a subespaços ou lugares ocupados e vazios” (Flavell, 1975, p.341).

Decorrente das reflexões acima, vale ressaltar a importância de se considerar no ensino da Geometria, desde o início da escolarização da criança, a possibilidade de um maior convívio com elementos geométricos relacionados com os elementos do seu cotidiano, favorecendo o processo de construção do conhecimento.

Descrevendo o desenvolvimento da criança, Piaget (1937) mostra que, inicialmente, o sujeito elabora espaços específicos para cada domínio sensório-motor, heterogêneos e não coordenados entre si. Por exemplo, a criança não pode dirigir sua vista até os objetos que toca, nem orientar sua apreensão para os objetos que motivam sua atenção visual. Progressivamente a criança vai conseguindo uma maior coordenação de suas atividades no espaço, podendo pegar um objeto que deixou cair, reiniciar uma atividade interrompida, antecipar o deslocamento de um objeto móvel oculto, ou mesmo diferenciar os objetos que estão a seu alcance dos que não estão.

O autor mostra, analisando dados de pesquisa, que determinados conhecimentos que o adulto poderia considerar óbvios não o são para as crianças em qualquer idade. Mostra o processo ao longo do qual a criança progride na possibilidade de deslocar-se e de coordenar suas ações, processo em que o espaço circundante a estas ações vai surgindo como uma propriedade delas. Assim sendo, o espaço passa a ser exteriorizado; aparece como ambiente estável no qual se situa tanto o sujeito como o objeto. O sujeito pode chegar a conceber-se como um objeto a mais dentro de um espaço homogêneo, podendo representar seus próprios deslocamentos em relação aos deslocamentos e as posições dos objetos.

Compreende-se que a construção do espaço e dos conceitos geométricos implica em um processo gradual de elaborações e reelaborações do sujeito. A exposição oral e explicações do professor, por si sós, não seriam suficientes para a aquisição desse conhecimento geométrico.

Já as habilidades⁴ cognitivas necessárias aos alunos de 5ª à 8ª séries do Ensino Fundamental, durante o processo de ensino-aprendizagem da Geometria, devem permitir que eles formulem hipóteses, raciocinem dedutivamente, entendam o papel dos modelos matemáticos e, também, entendam a diferença entre definir e deduzir. Essas

⁴ Habilidade está sendo concebida nesta pesquisa em uma concepção ampla do termo, isto é, como a aptidão do indivíduo para uma determinada ação.

habilidades são características do estágio operacional formal segundo Piaget. Entretanto, pesquisas que empregam várias medidas do desenvolvimento cognitivo têm mostrado que 30% desses alunos raciocinam em um nível operacional concreto e que outros 30% a 40% situam-se em um nível intermediário (Farrell e Farmer⁵, 1985, McDonald⁶, 1982, citados por Farrell, 1994, p.294).

Diversas pesquisas de Piaget e de colaboradores mostram que o ser humano passa de um estado de menor para um de maior conhecimento em um processo de construção.

Piaget estabelece um paralelismo entre o **funcionamento** de qualquer organismo vivo e suas **relações** com o ambiente, destacando os processos de adaptação. Por exemplo, estabelece um paralelismo entre a **assimilação que ocorre quando o organismo incorpora alimentos** e a **assimilação de conhecimento** destacando as bases biológicas dos processos de adaptação. Do ponto de vista psicológico, é por meio de assimilação e acomodação que o sujeito chega ao conhecimento de objetos, em função das estruturas mentais já existentes.

Flavell (1975), ao mostrar em que sentido o funcionamento intelectual pode ser considerado uma dotação biológica, destaca duas características fundamentais desse funcionamento, consideradas atributos invariantes durante todo o desenvolvimento:

*“... a primeira é a **organização** e a segunda é a **adaptação** que abrange duas subpropriedades intimamente relacionadas mas conceitualmente distintas: a **assimilação** e a **acomodação**. ... Essas características invariantes que definem a essência do funcionamento intelectual e, portanto, a essência da inteligência, são também as características que vigoram no funcionamento biológico em geral. Todo ser vivo se adapta ao seu ambiente e possui propriedades de organização que possibilitam a adaptação” (Flavell, 1975, p.43).*

O referido autor diz que um processo de modificação dos elementos ao meio, de modo a incorporá-los à estrutura do organismo, é chamado de *assimilação*, isto é, os

⁵ FARRELL, M. A. e FARMER, W. A. (1985) 'Adolescents' Performance on a Sequence of Proportional Reasoning Tasks. In *Journal of Research in Science Teaching* 22, September, pp.503-518.

⁶ MCDONALD, J. L. (1982) *The Role of Cognitive Stage in the Development of Cognitive Structures of Geometric Content in the Adolescent*. (Dissertação de Doutorado). State University of New York at Albany, 1982. *Dissertation Abstracts International* 43: 733A.

elementos são assimilados ao sistema. Pelo fato dessa incorporação ocorrer de diferentes maneiras e também pelo fato das estruturas às quais os elementos são incorporados variarem muito, Piaget refere-se à assimilação como uma invariante funcional.

Nesse aspecto, Flavell (1975) assinala que:

*“... assim como os objetos precisam ajustar-se à estrutura peculiar do organismo em qualquer processo adaptativo, o organismo também precisa ajustar-se às exigências idiossincráticas do objeto. O primeiro aspecto da adaptação é chamado **assimilação**. O segundo aspecto, de ajustamento ao objeto, é chamado por Piaget de **acomodação** - isto é, o organismo precisa acomodar seu funcionamento às características específicas do objeto que está tentando assimilar” (p.45).*

Ressalta ainda que,

“... em virtude do fato de sermos organismos vivos, começamos a vida com certas propriedades irredutíveis, comuns a todos os organismos, e estes fundamentos são um conjunto de características peculiarmente funcionais. São essas características que estabelecem a continuidade entre a biologia em geral e a inteligência em particular. E são elas que tornam possível a mais sublime das realizações intelectuais” (Flavell, 1975, pp.43-44).

O autor acima citado enfatiza que, embora a *assimilação* e a *acomodação* sejam conceitualmente distintas, são indissolúveis na realidade de qualquer ação adaptativa, visto que toda assimilação de um organismo envolve uma acomodação do organismo ao objeto e que, inversamente, toda acomodação é, ao mesmo tempo, uma modificação assimilativa do objeto, ao qual o organismo se acomoda. Nesse caso, elas constituem juntas os atributos das ações adaptativas mais elementares (Flavell, 1975, pp.45-46).

Piaget mostra que o desenvolvimento é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior. Para Piaget, a equilibração é um dos fatores do desenvolvimento. Descreve funcionalmente como postulados da equilibração:

- qualquer esquema de assimilação tende a se alimentar, isto é, tende a incorporar em si próprio os elementos que lhes são exteriores e compatíveis com a sua natureza;
- qualquer esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, tende a modificar-se, em virtude de particularidades, mantendo, entretanto, sua continuidade e suas capacidades de assimilação anteriores.

Cada nível de equilíbrio dá origem a novas equilibrações e uma passagem de um nível a outro se deve às abstrações reflexivas⁷. Nesse sentido, devido ao fato do sistema superior sempre exercer um papel regulador⁸ sobre os níveis cognitivos inferiores, na projeção de um conhecimento de um patamar inferior para o superior, o superior regula o que foi insuficientemente regulado no inferior, desde as regulações iniciais até as abstrações reflexivas. Essa progressão é bem visível nas regulações ativas ou quando a conceitualização dirige a ação – abstrações refletidas⁹.

Para os estudos que se referem ao desenvolvimento do espaço perceptivo, representativo e de intuição das formas, as contribuições de Piaget e Inhelder (1993) são de especial importância. Os autores citados consideram que as relações espaciais seguem em dois planos bem distintos: o plano perceptivo ou sensório-motor e o plano representativo ou intelectual.

Flavell (1975) relata que é extensa a bibliografia piagetiana sobre percepção e apresenta uma revisão das relações entre percepção e inteligência. Uma das categorias dos experimentos realizados por Piaget e seus colaboradores abrange estudos que mostram a maneira pela qual funções intelectuais em desenvolvimento podem ajudar na

⁷ Abstração reflexiva apóia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexivo, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas (Fonte: Piaget e colaboradores, 1995, p.274).

⁸ Processo de auto-regulação é definido por Piaget como uma série de compensações ativas do sujeito como reação a perturbações exteriores, isto é, consiste em um processo de equilíbrio.

⁹ Abstração refletida é o resultado de uma abstração reflexiva assim que se torna consciente. (Fonte: Piaget e colaboradores, 1995, p.274).

aquisição de percepções verídicas¹⁰, isto é, podem ajudar o sujeito a superar os efeitos ilusórios da contração. Um desses experimentos, realizado por Piaget, Maire e Privat, ilustra o efeito amortecedor potencial das operações intelectuais sobre o erro perceptivo (Piaget, Maire e Privat¹¹, 1953-1954, citados por Flavell, 1975, p.358).

Nesse experimento, sujeitos, com idades diferentes, tinham que comparar o comprimento de duas linhas horizontais e paralelas em duas condições. Primeiramente diante do desenho padrão de ilusão de Müller-Lyer (Figura 1.1):

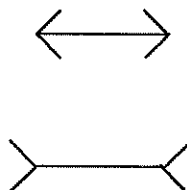


Figura 1.1 - Desenho padrão de ilusão de Müller-Lyer.
(Condição de distorção-1)
(Flavell, 1975, p.358)

Em seguida, a comparação do comprimento dos segmentos far-se-ia diante do desenho da situação anterior, modificado pela incorporação à organização da “boa forma” de um quadrado como elemento potencialmente estabilizador, redutor de ilusão (Figura 1.2):

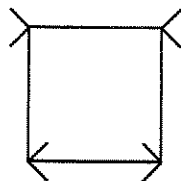


Figura 1.2 - Desenho modificado do padrão de ilusão de Müller-Lyer.
(Condição de distorção-2)
(Flavell, 1975, p.359)

¹⁰ Percepção verídica, neste contexto está sendo considerada quando o indivíduo percebe as relações entre os elementos de um desenho, intrínsecos à sua característica, sem considerar as possíveis distorções do desenho.

¹¹ PIAGET, J.; MAIRE, F. e PRIVAT, F. (1953-1954) *Recherches sur le Développement des Perceptions*. XVIII. La Résistance des Bonnes Formes à l’Illusion de Müller. Genebra: Arch. Psychol., pp.155-201.

Flavell (1975) ressalta que, a partir de uma pesquisa anterior (Piaget e Albertini¹², 1950-1952), sabia-se que a ilusão Müller-Lyer diminui levemente com a idade. O que Piaget e seus colaboradores queriam saber com esse experimento era se, com a incorporação do quadrado à figura causadora de ilusão, os sujeitos mais velhos mostrariam maior resistência à distorção do que os mais novos, isto é, se a proporção entre a condição de distorção-1 e a condição de distorção-2 aumentaria com a idade. Realmente, segundo Flavell (1975), esse aumento foi encontrado e atribuído ao desenvolvimento daquela forma de comportamento “quase intelectual” que Piaget chama de “*atividade perceptiva*”. Esta atividade “*provavelmente consistia de ações que corrigiam a ilusão através da comparação dos quatro ângulos do quadrado, da verificação do paralelismo dos lados opostos, etc.*” (Flavell, 1975, p.359).

Segundo Flavell (1975), esses e outros experimentos realizados por Piaget e seus colaboradores indicam que:

“... nas tarefas perceptivas, como nas intelectuais, a criança inicialmente confia muito em percepções passivas, imediatas, dominadas pela centração, e lenta e gradualmente as apóia em processos mais ativos - operações intelectuais e atividade perceptiva, inferências e pré-inferências - sempre que as condições permitem” (p.360).

Esses tipos de experimentos, segundo Flavell (1975), têm como objetivo mostrar que funções cognitivas que se encontram presentes no processo de desenvolvimento podem facilitar a ocorrência de percepções verídicas. Entretanto, há outros experimentos sugerindo que, às vezes, estas funções podem também impedi-las. O referido autor diz que estudos nesse sentido mostram uma

“... curiosa relação curvilínea entre a idade e o grau de veracidade: as crianças mais novas revelam maior veracidade, enquanto que o menor grau é manifestado pelas crianças mais velhas (9 a 10 anos de idade); os adultos localizam-se entre os dois extremos” (Flavell, 1975, p.361).

¹² PIAGET, J. e ALBERTINI, B. von. (1950-1952) *Recherches sur le Développement des Perceptions. XI. L' Illusion de Müller-Lyer*. Genebra: Arch. Psychol 33, pp.1-48.

Argumenta, ainda, que talvez a relação mais inequívoca deste tipo de experimento tenha sido aquela demonstrada por Würsten¹³ (1947 e 1949), onde era solicitado ao sujeito que julgasse os tamanhos relativos de duas linhas dispostas como as representadas abaixo:



Figura 1. 3 - Desenho da pesquisa de Würsten.
(Flavell, 1975, p.361)

Flavell (1975) esclarece que, neste caso, a ilusão consiste em uma superestimação da linha vertical em relação à linha horizontal. Os resultados obtidos indicam que a ilusão é pequena dos 5 aos 6 anos, aumenta e atinge um máximo de 9 a 10 anos para declinar logo após. Os sujeitos adultos revelam uma ilusão mais ou menos equivalente à do grupo de 7 a 8 anos de idade.

Piaget distingue percepção, que é definida como o conhecimento dos objetos a partir do contato direto com eles, de representação, que implica a evocação dos objetos quando ausentes e cuja construção é progressiva e não seria alcançada precocemente.

Segundo Flavell (1975), os trabalhos anteriores de Piaget sobre o desenvolvimento da representação espacial indicavam que a criança pequena ainda não percebe os elementos visuais como estreitamente interligados e intercoordenados em um sistema de coordenadas retilíneas euclidianas; por isso, as duas linhas que devem ser comparadas tendem a produzir centrações independentes e não são vistas como compondo uma única configuração¹⁴. Dessa forma, sendo elas independentes, não pode ocorrer uma centração distorcida ou efeitos de campo. Entretanto, conforme o sujeito

¹³ WÜRSTEN, H. (1947-1949) *Recherches sur le Développement des Perceptions. IX. L'Évolution des Comparaisons de Longueurs de l'Enfant à l'Adulte*. Genebra: Arch. Psychol. 32, pp.1-144.

¹⁴ Entende-se por configuração as figuras (desenhos ou diagramas) que ilustram conceitos ou teoremas.

utiliza cada vez mais um quadro comum de referência espacial, interrelacionando elementos, ele será cada vez mais dominado pelos efeitos do campo que esta interrelação acarreta, visto que,

“... À medida que a criança cresce, ela se torna capaz de atenuar a ilusão através de processos de descentração, embora não consiga mais alcançar o grau de veracidade que havia alcançado em sua inocência pré-operacional” (Flavell, 1975, pp.361-362).

Segundo Piaget, no processo de construção do espaço, logo que a criança adquire a capacidade de representar as relações espaciais para ela mesma, ela pode executar determinadas ações que implicam a necessidade de que ela considere as relações espaciais como não diretamente observáveis.

O senso comum pode levar o professor a imaginar que a visão dos objetos e a manipulação dos mesmos são recursos suficientes para que o aluno aprenda Geometria. Piaget, pesquisando o desenho realizado por crianças “olhando” o quadrado, mostra que isto não é tão simples.

Segundo Piaget (1977), para a visão empirista o conhecimento seria uma espécie de cópia dos objetos, do que o autor discorda totalmente. Uma justificativa de Piaget para sua tese é o estudo do desenho das crianças, visto ser o desenho uma cópia de um modelo¹⁵. Ele enfatiza que, quando se observa desenhos de crianças pequenas, pode ser verificado que elas não desenharam o que vêem, mas sim a idéia que fazem do objeto ou dito de outro modo, o que sabem sobre o objeto, enquanto observável perceptível. Ele afirma que *“o conhecimento é um processo contínuo de construções de novas estruturas, decorrente da interação do sujeito com o real, ele não é pré-formado, há uma criatividade contínua”*. (Piaget, 1977, p.2).

Em particular, Piaget (1977) comenta a respeito de uma situação prática onde se pede a uma criança para copiar um losango, a ela sendo apresentado o modelo. Segundo ele, a criança desenha um quadrado com uma ponta em cima ou um quadrado com uma ponta do lado, isto porque, para ela, um losango é um quadrado que tem duas pontas. Os desenhos seguintes procuram ilustrar a forma com que a criança pode ter representado o losango:

¹⁵ Modelo é entendido nesse contexto como um objeto destinado a ser reproduzido por imitação.

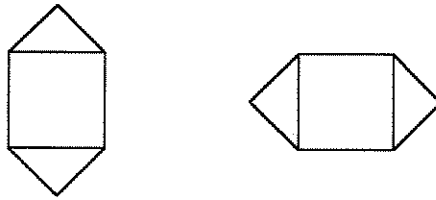


Figura 1.4 – Possíveis desenhos para o losango.

Piaget e Inhelder (1993) retratam um estudo em que era solicitado às crianças que desenhassem uma sequência de losangos, a partir das transformações na “Tesoura Nüremberg” (Figura 1.5); nesse estudo, pretendia-se verificar o conceito de paralelismo.

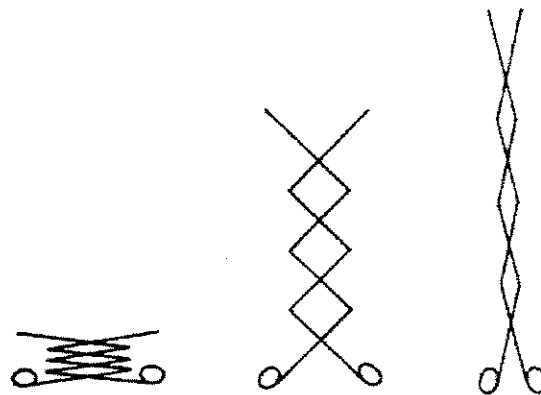


Figura 1.5 - Transformações “afins” do losango.
 (“Tesouras de Nüremberg”) (Piaget e Inhelder, 1975, p.321)

Nas análises das diferentes representações feitas pelos sujeitos (Figura 1.6) e dos interrogatórios feitos, os autores perceberam que a estrutura do losango complicava a descoberta do paralelismo em vez de simplificá-la.

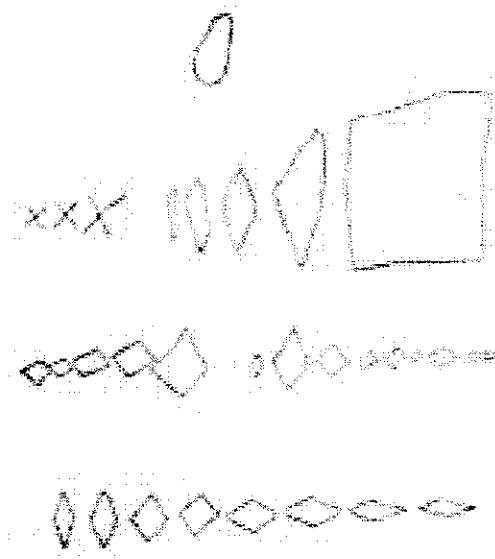


Figura 1.6 - Transformações “afins” do losango.
(Piaget e Inhelder, 1975, p.323)

Os autores destacam a problemática da construção gráfica dos losangos pela dificuldade própria dessa figura em oposição à construção de retângulos, quadrados ou mesmo triângulos. A dificuldade residiria em não compor entre si senão linhas oblíquas, não perpendiculares entre si, e sem outra base de referência além da simetria de seus pares. Certamente os autores estão se referindo aqui aos losangos que não possuem ângulos iguais, como mostrado nas possíveis transformações das Tesouras de Nuremberg na Figura 1.5. Além disso, pode-se inferir que as dificuldades encontradas na construção do conceito de paralelismo, usando-se a Tesoura de Neüremberg, poderiam estar na manipulação de tal objeto, que modifica continuamente as medidas dos ângulos internos dos losangos, alterando as medidas dos comprimentos das suas diagonais e, desta forma, um dos princípios básicos do conceito de paralelismo, ou seja, que a distância entre retas paralelas (comprimento do segmento perpendicular entre as mesmas) é fixa.

A prática pedagógica tem mostrado que, além da dificuldade da construção gráfica, a dificuldade de reconhecimento de losango com ângulos iguais é muito presente na sala de aula.

Assinalamos um episódio ocorrido com professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, quando em contato com figuras geométricas, durante um curso de aperfeiçoamento. Os participantes, ao manipularem vários objetos com formas geométricas, tiveram dificuldades em diferenciá-las; por exemplo, chamavam de losango os paralelogramos que tinham lados diferentes. Além disso, apenas com movimentos rígidos¹⁶ no espaço, como o de rotação, consideravam que as figuras mudavam de classificação; por exemplo, um quadrado deixava de ser quadrado quando sua posição era modificada, isto é, quando um dos seus lados situava-se horizontalmente em relação à mesa era um quadrado, quando sua posição era mudada, colocando-se um dos vértices na linha horizontal, era um losango; o mesmo acontecendo com paralelogramos não retângulos. Os quadros abaixo retratam as duas situações citadas (Figura 1.7 e Figura 1.8):

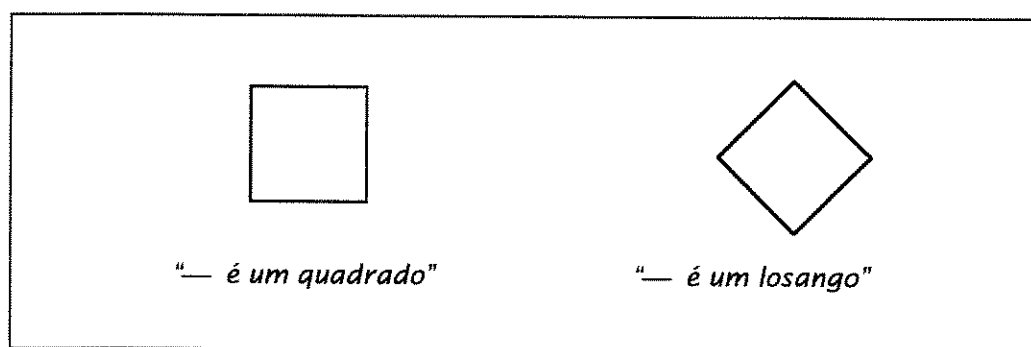


Figura 1.7 - Rotação do quadrado.

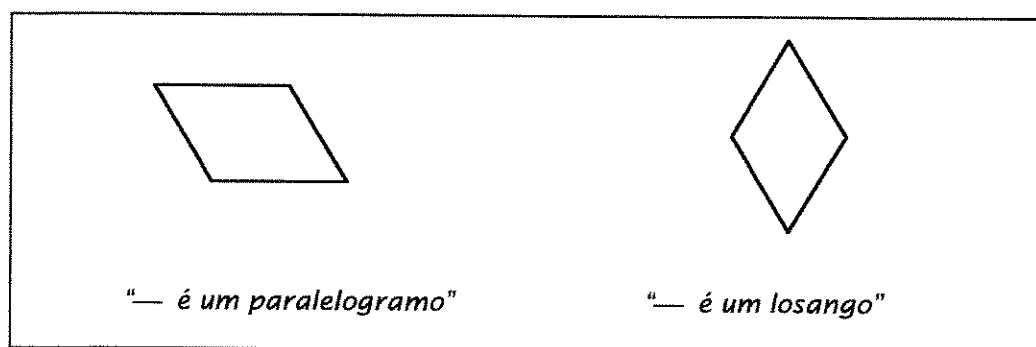


Figura 1.8 - Rotação do paralelogramo.

¹⁶ Movimentos rígidos, neste contexto, são como aqueles que não alteram a forma inicial da figura, modificando apenas sua posição no espaço.

Da análise da situação acima pode-se inferir que alguns sujeitos demonstraram a não conservação da forma dos quadriláteros por não possuírem o conceito correto de paralelogramo, ou seja, seus atributos essenciais (quadrilátero com os pares de lados opostos respectivamente paralelos). Além disso, os atributos periféricos do paralelogramo (por exemplo, o paralelogramo cujos quatro lados iguais é chamado losango) não eram relacionados de uma maneira correta. Em outras palavras, o paralelogramo que possuía os quatro lados iguais e os quatro ângulos também iguais só era identificado como quadrado quando um par de lados se apresentava na horizontal. De maneira geral, observou-se que os participantes não demonstravam saber que os quadriláteros quadrado, retângulo e losango são paralelogramos.

Para elucidar essa distorção, foi necessária a interferência da pesquisadora¹⁷, sugerindo a utilização de outro material didático, mais dinâmico, a fim de proporcionar aos sujeitos uma nova e diferente maneira de solucionar o problema. O material consistia de palitos de sorvete e conexões (tachinhas). Com eles montou-se uma representação conforme indica a Figura 1.9:

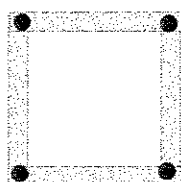


Figura 1.9 - Representação do quadrado com palitos e conexões.

Em seguida, os sujeitos exploraram e manipularam o objeto concreto, transformando, com movimentos drásticos¹⁸, a figura inicial (Figura 1.9), pela movimentação dos palitos, obtendo como resultado figuras do tipo da representada na sequência:

¹⁷ O termo pesquisadora, no presente trabalho, refere-se à autora da pesquisa.

¹⁸ Movimentos drásticos, neste contexto, são aqueles que alteram algumas das características da figura como os ângulos e a área, mantendo inalteradas outras, como as medidas dos comprimentos dos lados.

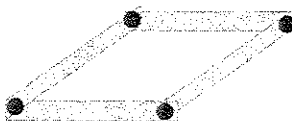


Figura 1.10 - Transformação do quadrado de palitos e conexões.

No momento em que os sujeitos movimentaram por diversas vezes o novo objeto construído, tomaram consciência de que o quadrilátero formado mantinha algumas características inalteradas, tais como a medida dos comprimentos dos lados, o paralelismo entre eles, a soma dos ângulos internos. Esse contexto foi favorável para a compreensão dos conceitos envolvidos por parte dos professores, pois possibilitou-lhes identificar que as figuras resultantes dos movimentos eram sempre paralelogramos. Com isso, puderam perceber que, no caso das figuras (quadrado ou paralelogramo), ao serem rotacionadas, permanecia a mesma figura. Esse episódio proporcionou, de certa forma, um “desabafo” por parte de alguns sujeitos: “— *Por que nós nunca aprendemos isso? Por que os livros didáticos mostram sempre as mesmas figuras?*”

Lovell (1988) apresenta um estudo sobre o desenvolvimento do conceito de espaço na criança que convém considerar neste trabalho. Do ponto de vista dos matemáticos, em geral, as relações espaciais vêm sendo ensinadas nas escolas a partir da Geometria Euclidiana (a forma com a qual quase todos nós tivemos contato com a Geometria). Esta Geometria trata das relações que dizem respeito a magnitudes (como comprimento de segmentos, medida de ângulos, áreas e volumes).

Nessa Geometria, uma figura pode ser obtida de outra por meio de um movimento rígido no espaço (transformação de reflexão, rotação ou translação), no qual há somente uma mudança de posição, mas não de mensuração. Lovell (1988) exemplifica afirmando que, como exemplo, “*os triângulos ABC e DEF (Figura 1.11) são congruentes já que um pode ser obtido do outro mantendo-os exatamente da mesma forma e apenas virando-os no espaço (movimento rígido)*” (p.82).

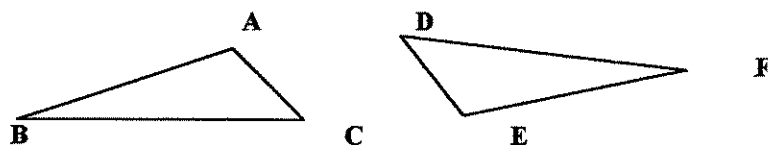


Figura 1.11 – Transformação do triângulo.
(Lovell, 1988, p.82)

Lovell (1988), em um outro exemplo, mostra uma figura sendo obtida de outra através de um movimento que ele chama de drástico; descreve então um círculo e um par de diâmetros perpendiculares traçados sobre uma superfície plana de borracha elástica. Quando esta superfície é comprimida, para aproximadamente a metade de sua largura original, o círculo é modificado para uma elipse e os diâmetros não mais formarão ângulos retos. Entretanto, não serão destruídas todas as propriedades geométricas originais; por exemplo, o centro da elipse permanecerá no ponto médio dos diâmetros, como no caso do círculo original (Figura 1.12).

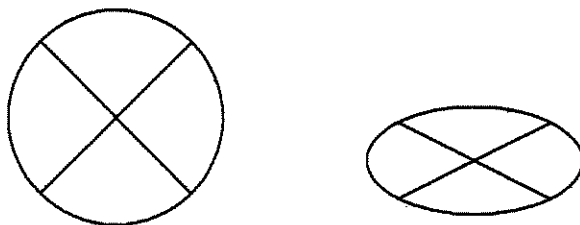


Figura 1.12 - Transformação do círculo.
(Lovell, 1988, p.83)

A Geometria Projetiva trata das propriedades espaciais que permanecem inalteradas quando sujeitas a uma outra classe de transformações. Estas transformações não são apenas as que resultam de movimentos rígidos, mas também não são tão drásticas que incluam todas as possíveis classes de deformações. Por exemplo, ao se desenhar a representação de um cubo no plano, as linhas paralelas desse cubo (arestas) não estarão desenhadas conforme aparece no real, já que ante o olhar, essas linhas tendem a convergir. Nas transformações projetivas, os comprimentos dos segmentos e os

ângulos são distorcidos até um certo ponto, dependendo da posição que os objetos são desenhados no plano (perspectiva paralela¹⁹ ou isométrica²⁰).

Apesar dessa distorção, as estruturas geométricas do cubo podem ser reconhecidas no desenho, porque certas propriedades geométricas permanecem invariantes sob as transformações projetivas. Isto é, um ponto sempre se projeta como um ponto, e uma linha em um plano sempre se projeta como uma linha em qualquer outro plano.

Do ponto de vista da prática pedagógica, Miskulin (1994), trabalhando com crianças, investigou as diferentes interpretações que elas atribuíram ao objeto quando lhes apresentou, na tela do computador, a imagem dele. A autora descreve que, ao apresentar aos sujeitos a imagem de um objeto, como o representado na Figura 1.13, e ao indagar qual seria o objeto relativo àquela imagem, não obteve uma resposta única.

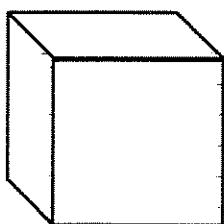


Figura 1.13 - Representação do cubo.

Miskulin (1994) ressalta que qualquer uma das diferentes interpretações da imagem do objeto apresentadas pelos sujeitos de sua pesquisa (*“um cubo sólido, três planos ortogonais com origens em direção ao fundo do papel, ou três planos ortogonais com a origem em direção ao olho do observador”*) pode ser considerada correta, e esclarece que apenas a imagem do objeto, mostrada na tela do computador, não permite dar a resposta esperada pois a imagem, por si só, não apresenta informações suficientes para tanto (p.187).

¹⁹ Na perspectiva paralela ou projeção paralela, as linhas paralelas se apresentam sempre como paralelas, independentemente de sua direção.

²⁰ Projeção isométrica é um caso particular de projeção paralela de forma que as três arestas que saem de determinado vértice se desenharam com o mesmo comprimento (no caso de um cubo) e formam ângulos de 120°.

Tão-somente pela observação da imagem do objeto poder-se-ia atribuir a ela qualquer uma das respostas que os alunos apresentaram, e outras ainda, como por exemplo, o desenho de um hexágono dividido em três partes. Ressalta-se que todas estas respostas estariam corretas, pois dependeriam da interpretação que o sistema de reconhecimento de imagens do observador fornece. Esta é uma situação problema que, se não for devidamente explorada em sala de aula, pelo professor, pode concorrer para a formação de conceitos errados, como por exemplo, conceituar o “cubo” como um “quadrado”.

Segundo Miskulin (1994), a resposta para a questão acima implicou na necessidade para os sujeitos pesquisados de rever o procedimento computacional que gerou tal figura, pois é ele que contém a descrição espacial do objeto. O sistema computacional utilizado na pesquisa em questão consiste na linguagem computacional Logo. Essa linguagem computacional foi desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology (MIT), Boston, E.U.A., pelo professor Seymour Papert. Segundo Valente (1993), como linguagem de programação, o Logo apresenta características especialmente elaboradas para implementar uma metodologia de ensino baseada no computador, explorando aspectos do processo de aprendizagem, e também características elaboradas para a exploração de atividades espaciais. Segundo o referido autor, os conceitos espaciais são utilizados em atividades de comando da Tartaruga que se move na tela do computador em atividades gráficas. No processo de comandar a Tartaruga para ir de um ponto a outro, estes conceitos devem ser explicitados. Isto fornece as condições – o sujeito necessita lidar com medida de comprimento, rotação, ângulo de giro, translação, entre outras –, para o desenvolvimento de conceitos espaciais, numéricos, geométricos, uma vez que a criança pode exercitá-los, depurá-los e, utilizá-los em diferentes situações.

Verifica-se dessa forma que, atividades de ensino explorando a Geometria das Transformações no plano como rotação, translação e reflexão, quando devidamente desenvolvidas nas salas de aula, oferecem condições para minimizar as dificuldades que os indivíduos apresentam quando manipulam figuras geométricas.

Piaget e Inhelder (1993) consideram que o indivíduo, desde o início de sua existência, constrói um espaço sensório-motor ligado aos processos de percepção e aos

da motricidade, cujo desenvolvimento progride até a emergência da linguagem e da representação figurada. Para os autores,

“esse espaço sensório motor é inserido em diversos espaços orgânicos anteriores (postural, etc.), mas dos quais está longe de constituir um simples reflexo. ... O espaço representativo vem somente após esse estágio cujos inícios coincidem com o da imagem e do pensamento intuitivo” (Piaget e Inhelder, 1993, pp.17-18).

As pesquisas de Piaget e Inhelder (1993) e colaboradores mostram que a representação do espaço pelo indivíduo apóia-se em conquistas da percepção e da motricidade mas, como se ignorasse essas conquistas, ele deve reconstruir o espaço a partir de intuições mais elementares como as de vizinhança, de separação, de envolvimento, de ordem, entre outras.

Segundo os referidos autores, as propriedades envolvidas no espaço topológico incluem noções de vizinhança, de separação, de interior e exterior e se evidenciam quando as crianças utilizam expressões tais como: dentro, fora, ao lado, vizinho de, entre, e constituem-se em essenciais para a aquisição da escrita e da aritmética. Por outro lado, essas relações não consideram as formas rígidas tais como: distância, retas, ângulos, sendo, portanto, as mais elementares para a construção e representação do espaço.

As pesquisas de Piaget e Inhelder (1993) sobre o desenvolvimento do conceito de espaço na criança indicam que os primeiros conceitos da criança são topológicos, isto é, as primeiras relações espaciais que ela pode representar em pensamento para si própria são aquelas que tratam de características externas da realidade como: proximidade, separação, ordem ou sucessão espacial, fechamento e continuidade.

Assim, os autores revelam que, até os quatro anos a criança não pode distinguir, por exemplo, um círculo de um quadrado, já que ambas as figuras são fechadas, mas pode identificar uma forma de ferradura.

A importância das ações realizadas pelos sujeitos em relação à percepção é destacada pelos pesquisadores em relação à construção do espaço.

Lovell (1988) faz uma distinção entre *espaço perceptivo* e *espaço representativo*. Para o primeiro, diz que uma criança pode distinguir já aos seis meses de

idade, entre um círculo e um triângulo, quando estes são apresentados visualmente. Entretanto, será muito mais tarde que a criança poderá *representar* em pensamento estas figuras para si própria; ou seja, apenas quando ela desenvolver os atributos essenciais de um determinado conceito. O desenvolvimento desses conceitos, segundo o autor, surge com a maturação e a experiência e depende de elaboração e re-elaboração por parte do sujeito; somente quando isto acontece, cada vez mais ele pode comunicar seu entendimento pelo uso de símbolos²¹ (p.80).

Investigando as possíveis transformações das representações matemáticas por que passaram os alunos de um curso de formação de professores das séries iniciais do Ensino Médio, tendo por base a identificação e análise dos mitos que sustentam essas representações (Passos, 1995), verificou-se que um dos sujeitos da pesquisa, desenvolvendo uma atividade de medida, com alunos de 3ª e 4ª séries do antigo 1º grau (supletivo), proporcionou situações de interação com a classe que possibilitaram aos alunos a reelaboração do conceito que apresentavam de quadrado. A situação era a seguinte: o professor entregava uma folha na qual estavam desenhadas algumas figuras geométricas, e pedia que os alunos medissem cada uma dessas figuras. Por medir entende-se medir os comprimentos dos lados dos polígonos e os comprimentos das curvas desenhadas.

Quando os alunos iniciaram a medição da figura a seguir retratada, o professor (sujeito da pesquisa) fez uma pergunta para a classe, e o diálogo estabelecido com um dos alunos, mostra como este aluno, em interação com o professor e agindo sobre o objeto, no caso o desenho, chega à construção do conceito de quadrado.

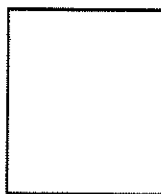


Figura 1.14 – Figura 2 da atividade proposta pelo sujeito/professor.
(Passos, 1995, p.103)

²¹ Símbolo: elemento gráfico ou objeto que representa e/ou indica de forma convencional um elemento importante para o esclarecimento ou realização de alguma coisa (Fonte: Dicionário Aurélio).

“—*A figura é um quadrado?*” Perguntou o professor para a classe.

Um dos alunos respondeu afirmativamente e o professor perguntou-lhe, “*por quê?*”. O aluno respondeu:

“—*É um quadrado porque tem quatro lados*”.

O professor insistiu:

“—*O que é um quadrado?*”

E o aluno novamente afirmou:

“—*Quando tem quatro lados*”.

A partir dessa insistência do aluno, o professor desenhou no quadro-negro a representação tal como a da figura abaixo, e perguntou-lhe se essa figura é um quadrado.



Figura 1.15 - Desenho do sujeito/professor.

Espantado, o aluno respondeu:

— “*Ô louco! Um quadrado desse tamanho!*”

E o professor insistiu:

“—*Mas tem quatro lados*”.

E então, o aluno disse:

“—*Mas o professor desenhou um comprido! Um lado está grande e outro pequeno, assim não é quadrado*”.

Novamente o professor insistiu na condição que o aluno havia dado para que uma figura fosse um quadrado, ou seja, que “tivesse quatro lados”.

O conflito ocasionado pela situação também foi estabelecido entre os demais alunos da classe, que passaram a comentar a respeito das condições necessárias para que uma figura seja um quadrado. E um dos alunos, concluiu que:

“—*Uma figura para ser quadrado tem que ter os quatro lados iguais*”.

O professor retomou o diálogo apresentando as condições para que uma figura pudesse ser considerada um quadrado, isto é, que ela possuísse os quatro lados iguais. Acrescentou, além disso, que todos os ângulos formados pelo encontro de dois lados

deveriam ser iguais. Em seguida, perguntou novamente para a classe se a figura que havia sido desenhada na folha entregue seria um quadrado.

Após essa reflexão, os alunos concluíram que a figura não poderia ser um quadrado, já que não possuía todos os lados com a mesma medida de comprimento.

Refletindo sobre as discussões a respeito do conceito de quadrado pode-se observar que o professor possibilitou situações para que os alunos refletissem sobre o conhecimento que tinham de quadrado e o reelaborassem. Nesse caso, percebe-se que o principal objetivo do professor (sujeito) nesse episódio não se constituía em considerar as propriedades intrínsecas de um quadrado, mas apenas constatar uma delas, ou seja, a igualdade entre as medidas dos seus lados, isto porque, talvez naquele momento, ele tenha eleito o conceito de medida como principal, conforme foi observado na forma como o professor conduziu esse episódio. Nesse episódio, pode ser destacado o papel importante que o professor assumiu perante o conflito gerado.

O conhecimento prévio dos alunos aliado às discussões promovidas pelo professor fez com que os alunos percebessem algumas qualidades sensoriais comuns ao quadrado; portanto, eles puderam abstrair a qualidade “lados iguais” como uma das características do objeto. O desenvolvimento de conceitos é fundamental para o crescimento da capacidade de aprendizagem. Esse crescimento na capacidade de aprendizagem representa um avanço no desenvolvimento conceitual. Por essa razão é importante destacar que, quando um aluno observa qualidades sensoriais ou perceptuais comuns em um número diferente de situações ou objetos, está abstraindo aquela qualidade da situação total. Uma qualidade comum, nesse caso a igualdade das medidas dos comprimentos dos lados de um quadrado, é fixada como um critério para incluir um objeto em uma classe.

A prática pedagógica, em situações de Resolução de Problemas, durante cursos de aperfeiçoamento e de especialização de professores, tem mostrado inúmeras situações em que os professores apresentam erros de conceitos matemáticos. Tal prática, muitas vezes, gera, na sala de aula, padrões de representação que implicam em uma distorção da compreensão do conceito pelos alunos. Um exemplo disso foi o caso de uma professora do Ensino Fundamental que classificou um polígono não convexo, conforme o que

aparece representado na Figura 1.16, como uma figura com as mesmas propriedades do triângulo; justificando, falou: “*é uma figura com três lados porque têm três pontas*”.



Figura 1.16 - Representação de quadrilátero não-convexo.

Percebe-se claramente com os exemplos acima como o aspecto *figural* prevalece sobre o aspecto *conceitual* de polígonos. Os termos *figural* e *conceitual* são definidos por Fischbein (1993).

Segundo o referido autor, o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes: uma *conceitual* e outra *figural*. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos através da linguagem escrita ou falada, com maior ou menor grau de formalismo, dependendo do nível de axiomatização com que se está trabalhando. A componente *figural* corresponde à imagem mental que associamos ao conceito e que, no caso da Geometria, tem a característica de poder ser manipulada através de movimentos como translação, rotação e outros, mantendo invariáveis certas relações.

A análise de livros didáticos mostra outras situações nas quais o triângulo é apresentado apenas na forma equilátera. O uso de tais livros pode contribuir para que o professor venha a apresentar, erroneamente, em sala de aula, uma única forma de representar o triângulo, dificultando o progresso dos alunos. Em razão disso, vale assinalar um caso específico em que tal representação exclusiva pode ter contribuído para um erro conceitual sobre a área de triângulo, verificado em episódio de ensino observado na prática docente. Nesse episódio, o sujeito, ao se defrontar com um triângulo como o representado na Figura 1.17, considerou-o com “*área zero, pois a sua base é um ponto, o qual não tem dimensão, portanto, base vezes altura igual a zero, dividido por dois, dá zero*”.

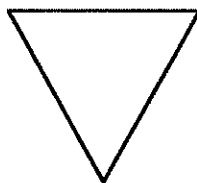


Figura 1.17 - Triângulo equilátero.

Quando alguns professores desenhavam uma “casinha” no dia-a-dia da sala de aula, como a representada na Figura 1.18, não o fazem em perspectiva, dando a impressão de que as paredes frontal e lateral estão em um mesmo plano, o mesmo ocorrendo com o telhado e a parede frontal, sem dar, em outras palavras, a idéia de profundidade. Esse tipo de representação, em geral, fica enraizado nos desenhos e raramente os professores se dão conta de que essa inadequação poderá causar problemas futuros na aprendizagem geométrica dos estudantes.

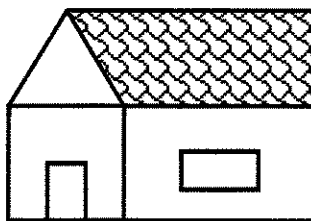


Figura 1.18 - Desenho da casinha de um professor.

A esse respeito, Kaleff (1998) sugere atividades cujo objetivo é o de desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar representações gráficas de sólidos geométricos, bem como ajudá-lo a desenvolver a habilidade para desenhar essas representações, entre elas uma “casinha”.

É muito comum também nas aulas de Geometria, durante o estudo de triângulos, ao serem abordados os pontos notáveis²², os alunos dizerem que as

²² Pontos notáveis de um triângulo: baricentro (encontro das medianas), ortocentro (encontro das alturas), circuncentro (encontro das mediatrizes) e, incentro (encontro das bissetrizes internas).

mediatrizes²³ de um triângulo “sempre” se interceptam num ponto (circuncentro²⁴) no interior do triângulo. Nesse caso, a propriedade passa a ser tomada como tal devido ao desenho protótipo em associação, o qual apresenta o ponto de interseção sempre no interior do triângulo (triângulo acutângulo), como aparece na maioria dos livros didáticos ou como é representado por muitos dos professores no quadro-negro (Figura 1.19-a). Como o triângulo obtusângulo quase não aparece nos livros, esse tipo de erro, muitas vezes, não é observado por alguns professores (Figura 1.19-c). Novamente os aspectos figurativos prevalecem frente aos aspectos conceituais.

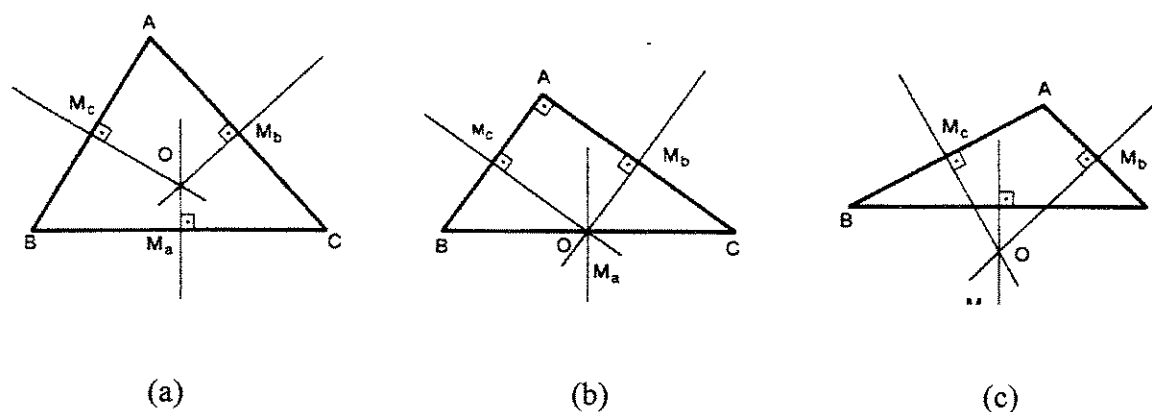


Figura 1.19 – Mediatrizes de triângulos.
(Fonte: Putnoki, 1990, p.49)

Erros semelhantes foram observados na prática pedagógica com alunos do Ensino Fundamental e também com professores em cursos de aperfeiçoamento, quando do estudo das cevianas²⁵ do triângulo. É interessante destacar, nesse contexto, a pesquisa de Hershkowitz et al (1994) que verificou que o desempenho dos professores (estagiários ou não) foi apenas um pouco melhor que o dos alunos em tarefas que

²³ Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio.

²⁴ Circuncentro é o ponto onde as mediatrizes dos lados do triângulo concorrem.

²⁵ Ceviana é qualquer segmento que une um vértice de um triângulo ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento. Cevianas notáveis: altura, bissetriz interna e mediana.

requeriam traçar uma altura²⁶ em diversos tipos de triângulos ou todas as diagonais²⁷ a partir de um dos vértices de um polígono não-convexo. Os pesquisadores descrevem uma situação na qual a tarefa consistia em traçar a altura relativa ao lado a de um triângulo obtusângulo como o da Figura 1.20. Segundo relatam, alguns professores traçaram a mediana²⁸ (em azul) de a e outros a mediatriz (em vermelho) de a e não aceitavam a idéia de uma altura externa.

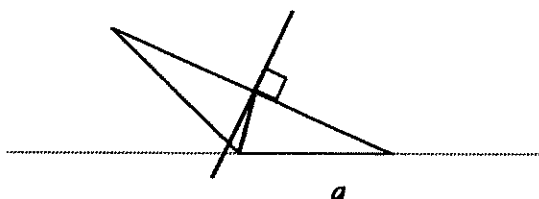


Figura 1.20 - Triângulo obtusângulo.

Os alunos deveriam ser informados da definição de altura, podendo assim executar a tarefa corretamente, de acordo com a definição e não de acordo com o que parece a eles ser imposto pela imagem.

Com relação ao traçado das diagonais, os autores também verificaram que os professores e os alunos pesquisados traçaram apenas as diagonais internas a partir de um vértice A de um polígono não-convexo. No caso da Figura 1.21 (c), fica claro que, ao traçar uma ceviana qualquer, o sujeito errou, demonstrando ter uma concepção incorreta de diagonais, ou seja, como segmentos sempre contidos no interior do polígono.

²⁶ Altura: segmento perpendicular que une um vértice do triângulo ao seu lado oposto ou seu prolongamento.

²⁷ Diagonal: segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono.

²⁸ Mediana: segmento que une um vértice ao ponto médio do seu lado oposto de um triângulo.

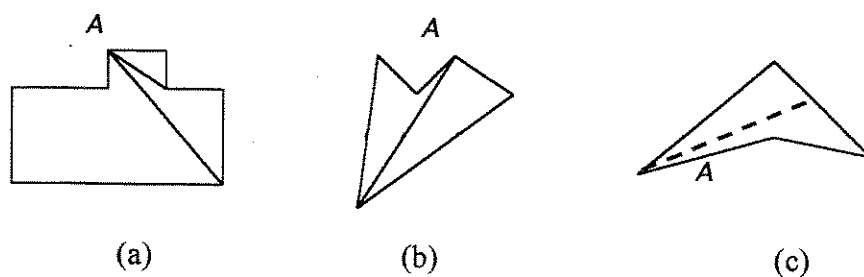


Figura 1.21 - “Diagonais” de polígonos não-convexos.
(Hershkowitz et al, 1994).

Esses exemplos são certamente triviais; entretanto, muitos exemplos, que podem causar conflitos como esses, deveriam ser usados sistematicamente na sala de aula a fim de discutir a predominância da definição sobre a figura desenhada, nos quais o conceito figural poderia ser usado e interpretado.

A prática pedagógica tem mostrado muitas situações de resolução de problemas geométricos em que os alunos não são capazes, em um primeiro instante, de perceber as faces ocultas de um cubo, quando este é desenhado no quadro-negro, em perspectiva paralela, mesmo quando são usadas linhas pontilhadas e sombreadas para indicá-las. As pesquisas feitas por Bishop (1979), na Nova Guiné, revelam que as representações de um objeto tridimensional, por meio de um desenho bidimensional, exigem uma determinada quantidade de convenções que não são imediatamente reconhecidas por pessoas de cultura não ocidental. Este fato levou-o a acreditar que nas culturas ocidentais o ensino de tais convenções exige cuidados especiais, visto que não podemos considerar que o conhecimento dessas convenções seja inato às crianças.

Uma situação interessante foi observada em sala de aula: o episódio de ensino evidenciou a dificuldade de visualização espacial de um sujeito, aluno da 3ª série de um curso de Magistério. O sujeito não demonstrou apresentar a percepção espacial de uma figura representada no plano. A situação que evidenciou esse fato pedia que os alunos resolvessem o seguinte problema: *“As latas de óleo para cozinha costumam ter 900 ml de óleo. Algumas delas têm forma prismática, outras tem forma cilíndrica. O esquema abaixo oferece as medidas, em cm, das duas embalagens (Figura 1.22). Calcule a área de chapa metálica que foi gasta na confecção de cada uma das embalagens. Qual das embalagens é a mais econômica?”*

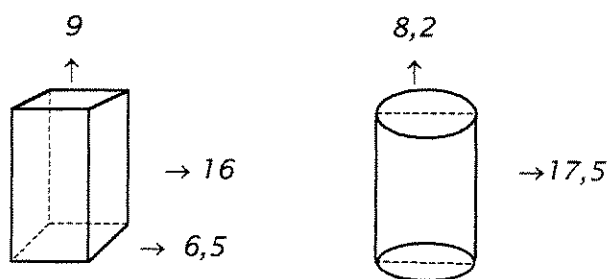


Figura 1.22 - Representação das embalagens de óleo do problema.

O mencionado aluno, ao fazer a representação de cada uma das faces do prisma no seu caderno, ou seja, a planificação do prisma, fez um desenho semelhante ao abaixo representado (Figura 1.23) e, considerou-se incapaz de calcular a área das faces superior e inferior do prisma, alegando que se tratava de paralelogramos não-retangulares, portanto, sem a medida da altura correspondente.

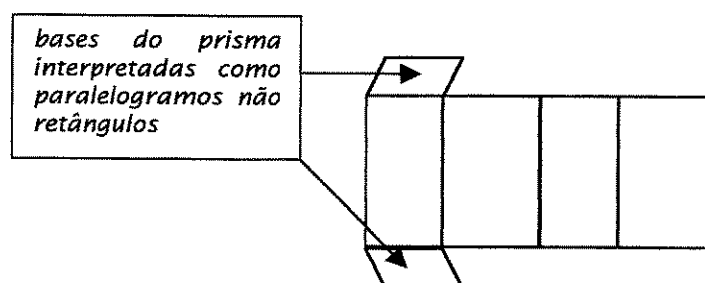


Figura 1.23 - Desenho da planificação do prisma feita pelo aluno.

No processo de resolução desse problema, nota-se que na estratégia escolhida pelo aluno ele não identificou o paralelogramo desenhado na Figura 1.22 como sendo uma das faces do objeto real (paralelogramo retângulo), surgindo, nesse momento, o conflito cognitivo; em outras palavras, ele não foi capaz de interpretar a representação do sólido desenhado, na folha da atividade, com suas características projetivas.

Pode-se perceber que o sujeito, ao visualizar a forma prismática do objeto representada no plano, ficou preso ao observável do desenho (Figura 1.22), isto é, ao seu

aspecto figural, não levando em conta o conceito de prisma em questão (forma prismática das latas de óleo possui bases retangulares). Nesse processo, ao interrogar o professor sobre a ausência da medida da altura do paralelogramo, o referido aluno lançou mão de uma nova estratégia que pudesse esclarecer o seu conflito, desenhando e recortando a planificação do sólido.

O fato do sujeito lançar mão de um outro referencial (o mais comum seria ele “extrair” das informações constantes no desenho em perspectiva as propriedades intrínsecas do objeto) para solucionar seu problema, ou seja, dele necessitar recortar sua planificação e, em seguida montá-la como a da embalagem, mostrou que ele ainda estava preso às particularidades do objeto (desenho). Isto é, o aluno não deu conta das transformações (passagem da representação plana de um objeto tridimensional para a representação do objeto no espaço), não relacionou as partes com o todo (as faces vistas no desenho, paralelogramo não-retângulo, são paralelogramos retângulos no objeto), não apresentando evidências da imagem do objeto representado, em perspectiva, no desenho.

Do ponto de vista matemático, esse problema explora, entre outros conceitos, o da Geometria Projetiva que trata das propriedades espaciais que permanecem inalteradas quando sujeitas a uma outra classe de transformações tal como anteriormente se abordou.

O desenho associado ao objeto geométrico desempenha um papel fundamental na formação da imagem mental. Para o aluno, nem sempre fica claro que o desenho é apenas uma instância física da representação do objeto. Para alguns, o desenho desempenha uma expressão de entendimento do objeto geométrico, isto é, basta desenhá-lo em uma folha de papel para compreender o problema; para outros, pode se constituir em um obstáculo para este entendimento. Isto ocorre porque o desenho guarda algumas características particulares que não pertencem ao conjunto de condições geométricas que define o objeto; é o caso das projeções.

Fischbein (1993) refere-se a esta questão dizendo que a dificuldade dos estudantes em manipular objetos geométricos, negligenciando o aspecto conceitual por pressão de restrições do desenho, constitui-se em um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria. Segundo ele, condições figurais do desenho passam despercebidas do controle conceitual, como anteriormente se abordou.

Uma outra situação da prática pedagógica, semelhante à anterior, junto a professores de Matemática, durante curso de Especialização em Educação Matemática, contribuiu para que a preocupação com o ensino da Geometria aumentasse. No processo de resolução de um problema geométrico foi solicitado aos alunos (professores) que desenhasssem a representação plana de um objeto tridimensional como o representado na Figura 1.24:

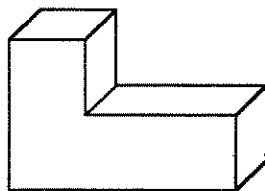


Figura 1.24 - Representação do objeto tridimensional.

Um dos sujeitos, ao desenhar a planificação do objeto, trabalhou de modo a mostrar uma das faces paralelas à base horizontal e uma das faces laterais como se fossem tais como as que aparecem na representação tridimensional (desenho), isto é, paralelogramos não retângulos. A planificação feita por esse professor está representada na Figura 1.25:

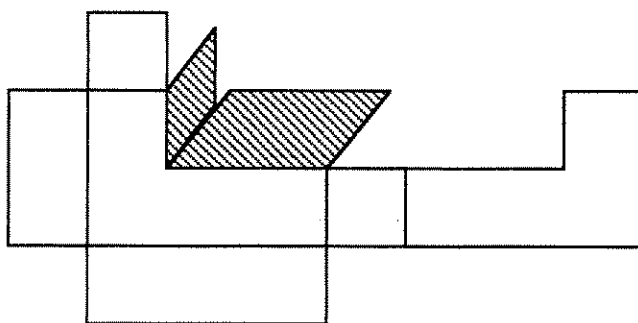


Figura 1.25 - Desenho da planificação do sujeito.

A planificação apresentada pelo sujeito evidencia que, nos paralelogramos hachurados, as faces superior e lateral do objeto, em perspectiva, quando o sujeito

transportou-as para o plano, mantiveram-se idênticas àquelas originalmente mostradas na representação tridimensional. No processo de tomada de consciência de sua estratégia o sujeito necessitou da interferência da pesquisadora para refletir na escolha de uma nova estratégia, que consistiu no recorte, montagem e desmontagem da representação do sólido.

Analisando a resposta do sujeito é possível entender que, ao deter-se nos procedimentos para desenhar a planificação do sólido no papel, o sujeito analisou as particularidades do problema como as relações entre as faces do sólido e suas medidas e testou sua planificação em função das demais características do objeto. Centrou-se no que era observável do objeto (face em perspectiva) e nas relações necessárias para representar o todo (causalidade objetiva) (Inhelder e Caprona²⁹, 1992, citados por Miskulin, 1994).

Nessas duas últimas situações-problema, podem ser observadas algumas dificuldades cognitivas como a leitura do desenho em perspectiva (paralelogramo não retângulo) e seu desenho representando um objeto do espaço (prisma reto retangular – Figura 1.22 e poliedro não-convexo – Figura 1.24). Torna-se evidente a importância de se considerar, em situações-problema dessa natureza, duas categorias básicas no processo ensino-aprendizagem da Geometria: a visualização e a representação em dois movimentos diferentes: do plano para o espacial e do espacial para o plano.

Não se pode deixar de reconhecer que a percepção espacial desempenha um papel fundamental no estudo da Geometria. O reconhecimento das formas geométricas quando representadas no plano, assim como, as propriedades intrínsecas a elas precisam ser efetivamente trabalhadas na sala de aula. Da mesma forma, atividades enfatizando as transformações geométricas no plano, como rotação, reflexão e translação são importantes para que os estudantes possam compreender as diferentes relações espaciais. Há vários níveis de compreensão da percepção espacial. Alguns são necessários e básicos para o dia-a-dia, outros são solicitados pelos diferentes níveis profissionais do indivíduo. Desta forma, uma boa formação espacial pode melhorar a adaptação do

²⁹ INHELDER, B. CAPRONA, D. (1992) *Vers le Constructivisme Psychologique: Structures? Procédures? Les deux indissociables*. In: INHELDER, B., CELLÉRIER, G., et al. *Le cheminement des découvertes de enfant*. Recherche sur les microgênèses cognitives. Paris: Delachaux et Nietlé.

mundo tridimensional, capacitando-o a compreender as diferentes formas e expressões de nossa cultura.

Bonafe (1988) analisou as dificuldades relativas ao ensino da Geometria Espacial quando o aluno não tem imagens mentais suficientemente operacionais para decodificar um desenho em perspectiva, destacando que a produção de um desenho em perspectiva, assim como sua leitura, pode se constituir em obstáculo para a aprendizagem geométrica (Bonafe³⁰, 1988, citado por Pais, 1996, p.69). Pais (1996) assinala que o aluno pode fixar sua atenção em um aspecto gráfico particular, fato que o impede de visualizar a figura como um todo. Em seu estudo, Pais (1996) percebeu que o recurso gráfico é utilizado pelos alunos para representar desde as noções fundamentais da Geometria até o caso de figuras ilustrando conceitos ou teoremas clássicos, sendo que alguns desenhos se destacam e têm maior importância, recebendo, por isso, o nome de configurações geométricas.

Pais (1996) distingue quatro elementos fundamentais, no processo de representação plana do espaço tridimensional, que intervêm fortemente na aprendizagem da Geometria, exercendo que cada um deles uma influência considerável nessa representação, ou seja: **objeto, desenho, imagem mental e conceito**. As considerações a respeito desses elementos foram feitas no Capítulo 3 do presente estudo.

Esses quatro elementos destacados por Pais (1996) não podem ser considerados desvinculados um dos outros; além disso, ele destaca o papel que tanto a intuição como a experiência exercem no processo de elaboração conceitual. O referido autor enfatiza a influência significativa das representações do conhecimento por meio de um objeto, um desenho ou por uma imagem mental, destacando que, nesse processo, “... *as demonstrações, mesmo em se tratando de um raciocínio lógico e intelectual, têm sua formalização precedida de ensaios intuitivos e/ou experimentais que acabam não aparecendo em sua redação final*” (p.73).

³⁰ BONAFA, F. (1988) *Quelques hypothèses et resultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière*. Paris: Boletim da APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement publique), n. 363, pp 151-164.

O autor ressalta que o objeto e o desenho constituem-se em recursos materiais auxiliares à construção de um conhecimento de natureza experimental e, por si mesmos, não caracterizam as noções geométricas.

Castelnuovo (1973), a esse respeito, enfatiza a importância de uma metodologia referente ao ensino da Geometria intuitiva de caráter construtivo para quem aprende. Segundo a autora, o significado científico de tal ensino poderia ser denominado de

“... curso de sínteses indutiva, termos que são eficazmente usados para indicar a série de investigações que precedem a sistematização abstrata de uma ciência e que consistem, segundo o método apregoado por Bacon, em desenvolver pouco a pouco a regularidade, as permanências aproximadas que constatamos ao nosso redor em uma multitudine de fenômenos diversos, as regularidades, das permanências sempre gerais” (Castelnuovo, 1973, p.83) (tradução da pesquisadora).

Segundo a referida autora, sintetizar indutivamente significa incluir em um conjunto um certo número de observações, de experiências, para chegar a um ponto, para reconhecer uma ou algumas propriedades comuns, assim como os elementos que não variam, bem como aqueles que variam segundo uma lei dada.

Considera-se nesse contexto que o desenho em Geometria é insuficiente para uma abordagem de caráter construtivo, isto porque, consoante a referida autora, em um desenho de uma figura feito pela professora ou mesmo pela criança, a atenção se concentra no traço desenhado, sobre o contorno da figura, e não sobre o interior. Por exemplo, para a criança o triângulo será apenas o contorno dele, o ângulo será apenas o conjunto das semi-retas, o interior da figura estará vazio porque a criança não tem preparo necessário para uma interpretação mais geral.

Em muitas situações do dia-a-dia da sala de aula podem ser encontrados padrões de representação de uma figura geométrica como única maneira de representar graficamente a imagem de um objeto geométrico. Tal procedimento faz com que o conceito de uma figura geométrica, por exemplo, fique restrito apenas à posição que a figura ocupa no plano.

Segundo Gravina (1996), os livros didáticos iniciam o estudo da Geometria com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, como,

por exemplo, quadrados com lados paralelos à borda da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc. Esse fato condiciona os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos geométricos quando em outra situação. Mais gravemente ainda, afirma a autora,

“para os alunos, a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspecto conceitual ou quer no aspecto figural, estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos” (Gravina, 1996, p.1).

Além disso, o aspecto da construção de objetos geométricos raramente é abordado. Dificilmente encontramos nos livros didáticos a instrução para construir um objeto geométrico usando papel, tesoura e cola ou qualquer outro material e, no entanto, é essa atividade que pode possibilitar ao aluno o domínio de conceitos geométricos.

O indivíduo precisa ir além do estágio de imagens como base de pensamento da representação, e precisa também ser capaz de formar e transformar figuras espaciais. Essa atividade do sujeito implica na construção de um sistema de referências de relações espaciais. O conhecimento espacial e geométrico apóia-se na atividade sensório-motora do sujeito, como mostram Piaget e Inhelder (1977). Da interiorização das ações executadas sobre o objeto, surge o pensamento geométrico que é fruto de um sistema de operações interiorizadas. A imagem resultante da percepção interiorizada terá, então, o poder de servir como suporte ao raciocínio espacial, assim como as imagens das figuras espaciais e as dos resultados das operações mentais executadas sobre as figuras são igualmente necessárias para o pensamento geométrico.

Os episódios e as considerações apresentadas anteriormente evidenciam a complexidade presente no processo ensino-aprendizagem da Geometria. Considerando elementos da Psicologia Genética piagetiana interligados à problemática das representações geométricas e o eixo central da aprendizagem geométrica no Ensino Fundamental além disso, as pesquisas sobre o assunto, afigura-se como de extrema importância e relevante estudar **como o aluno representa e interpreta representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações**; esta questão norteou todo trabalho de investigação do presente estudo. Cumpre esclarecer que, nesse

contexto, as representações geométricas podem se dar por meio de desenhos, objetos construídos, gestos, pela linguagem, entre outras manifestações.

Várias questões decorrentes da questão acima compuseram a investigação, tais como: Como os alunos representam entes geométricos para eles mesmos? Como essa forma de entendimento é representada para o outro, isto é, como os alunos a usam para “explicar” seu entendimento? Como eles interpretam as representações geométricas que, por exemplo, aparecem nos livros ou que são feitas pela professora, ou mesmo nos modelos, nas construções, entre outras? Além disso, buscou-se também investigar o alcance da intervenção do professor nos episódios de ensino.

Convém ressaltar, nesse momento, que não são poucas as manifestações de dúvidas ou mesmo hesitações que os professores de Matemática do Ensino Fundamental, principalmente os dos ciclos I e II (1ª à 4ª série), têm revelado quando são chamados para uma tomada de decisão nos distintos episódios inerentes às suas práticas educativas, mais especificamente ao ensino da Geometria. Para muitos ainda não está claro qual a importância do ensino da Geometria, ou mesmo, quais conteúdos devem ser selecionados. As dúvidas são apontadas também quanto à metodologia que deve ser utilizada e como os alunos devem ser avaliados. Nesse sentido, acredita-se que a presente pesquisa, com seus possíveis desdobramentos, possa contribuir, de algum modo, para uma reflexão dos professores que atuam no ensino da Geometria e, conseqüentemente, possibilitar a melhoria do seu ensino.

Decorrente da complexidade do assunto e com o objetivo de entender o cenário no qual o ensino da Geometria está inserido impõem-se como necessárias algumas reflexões a respeito do momento atual do ensino da Matemática, e especialmente da Geometria. Tais reflexões, bem como uma discussão a respeito dos aspectos históricos da Geometria, como um campo do conhecimento importante para o desenvolvimento dos estudantes, são tratadas no próximo capítulo, com fundamento no entendimento de que o conhecimento histórico da Geometria pode contribuir decisivamente na prática pedagógica do professor.

A GEOMETRIA NO QUADRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

CAPÍTULO 2

A GEOMETRIA NO QUADRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

“Como é possível que a Matemática, que é um produto do pensamento humano e independente de toda a existência, se adapte de uma forma tão admirável aos objetos da realidade? Será a razão humana capaz de, sem recorrer à experiência, descobrir por si só as propriedades dos objetos reais?” (Albert Einstein, 1921).

2.1 – Considerações a Respeito do Ensino da Matemática

Tendo em vista a importância da educação na busca de soluções para os problemas sociais e na contribuição da escola e do ensino da Matemática na formação da consciência social é fundamental que se procure compreender com maior clareza que situações dificultam a melhoria da qualidade do ensino.

A escola e o professor fazem parte da luta necessária para que haja a superação das condições sociais que hoje se apresentam, principalmente neste fim de século, marcado pelas grandes transformações científicas e tecnológicas que muitas vezes desafiam esquemas religiosos, filosóficos e sociais. A Matemática, conforme argumenta D'Ambrosio (1990), como representante do racionalismo científico, aparece de maneira incontestável como suporte para a ciência e a tecnologia dominantes e não poderia deixar de ser repensada nesse contexto. A tecnologia computacional tem feito com que a Matemática se converta em uma ciência mais empírica e essa mesma tecnologia tem permitido aos estudantes trabalharem mais facilmente com uma grande quantidade de informações relacionadas com problemas que, até então, não poderiam ser resolvidos de outra forma.

Entretanto, a análise do que ocorre na escola em geral mostra sérios problemas e parece muito distante das considerações acima. No quadro das críticas ao ensino da Matemática, dentre os inúmeros e complexos problemas, considera-se especialmente importante o ensino da Geometria. Algumas reflexões a respeito do movimento atual do ensino da Matemática, assim como considerações a respeito do ensino da Geometria, aliadas também a algumas reflexões a respeito do aspecto teórico da Geometria são fundamentais quando se considera o quadro descrito anteriormente.

Apesar da reconhecida importância da Matemática no contexto da formação geral dos indivíduos, avaliações nacionais sobre o ensino têm mostrado a situação caótica do ensino brasileiro, principalmente com relação ao ensino da Matemática.

A Matemática pode ser um fator determinante no fracasso escolar, gerando, de certa forma, uma grande aversão em muitos que convivem com ela, em especial, alunos. Historicamente, a Matemática tem sido considerada um tema difícil mas importante dentro do contexto escolar; talvez, por esta razão, venha sendo utilizada como filtro para a continuidade do estudo de muitas pessoas como assinalam D'Ambrósio (1990) e Kilpatrick (1994). A Geometria também tem tido uma considerável participação nesse fracasso.

As avaliações sobre o desempenho dos estudantes em Matemática e também em Geometria, realizadas por órgãos responsáveis pela educação dos Estados brasileiros, ou diretamente pelo Ministério da Educação (MEC), têm demonstrado uma ausência de conexão entre as propostas de ensino elaborados pelos órgãos governamentais e os resultados constatados nas escolas.

Essa constatação também ocorre em outros países. D'Ambrosio et al (1995) em seu artigo *Strategies for Increasing Achievement in Mathematics* ressaltam que, em 1990, o *National Assessment of Education Progress* (NAEP) - órgão americano responsável pela avaliação nacional - constatou uma grande porcentagem de estudantes americanos com nível de proficiência em Matemática abaixo do esperado em relação às suas idades.

Pesquisas brasileiras, entre elas a realizada por Silva et al (1991), através do INEPE - Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos, integrado à REDUC - Rede Latino-Americana de Informação em Educação - Fundação Carlos Chagas, assinalam a

deficiência na formação do professor como um dos fatores que têm contribuído para o fracasso do ensino de um modo geral. No trabalho ora referido é feita uma análise sobre as concepções da formação do professor no Brasil durante as três últimas décadas; uma das conclusões a que os pesquisadores da Fundação Carlos Chagas chegaram foi que os cursos de formação de professores refletem as tendências teóricas ou áreas do conhecimento predominantes em diferentes épocas.

Estudos e pesquisas como os de Passos (1995), Moura (1993), Araújo (1990), Furió et al (1992), mostram que deficiências na formação do professor de Matemática interferem na prática pedagógica desses professores, principalmente quando esta formação incide sobre as séries iniciais do Ensino Fundamental.

As relações entre a formação do professor e o fracasso da escola pública são detectadas por Pimenta e Gonçalves (1988) como um dos fatores considerados de fundamental importância para a melhoria do ensino. Os referidos pesquisadores afirmam que, em um estudo do CENAFOR (Centro Nacional de Aperfeiçoamento de Pessoal para Formação Profissional) sobre a formação de professores em nível de 2º grau (atual Ensino Médio), o fracasso da escola pública de 1º grau (atual Ensino Fundamental) pode ser atribuído ao processo de preparação dos professores, uma vez que as escolas de Magistério não têm conseguido formá-los de modo que sejam capazes de proceder às alterações necessárias na organização escolar visando melhorá-las (Pimenta e Gonçalves³¹, 1988, citados por Moura 1993).

Um aspecto importante a ser considerado na análise da situação do ensino da Matemática é que as concepções matemáticas do professor interferem na sua prática pedagógica. Investigando a formação de professores das séries iniciais (Passos, 1995) foi possível constatar que a grande maioria dos alunos pesquisados de um curso de Magistério, mais especificamente, do CEFAM - Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério, não gostava de Matemática e expressava uma aversão tão grande que chegavam a afirmar que jamais ensinariam essa disciplina, esquecendo-se de que a Matemática é um dos componentes da alfabetização. Considera-se que a alfabetização é muito mais ampla do que “ensinar a ler e escrever”, como muitos

³¹ PIMENTA, S. C. e GONÇALVES, C. L. (1988) *Diretrizes Gerais para a Habilitação Magistério 2º grau*. Projeto do convênio MEC/SEC/PUC/SP.

professores das séries iniciais declaram entender. Muitos dos alunos ingressantes naquele curso, destacavam os *“traumas que tiveram ao longo de sua formação primária”*, especialmente quanto à demasiada abstração advinda do rigor que permeava as demonstrações de teoremas e a forma abstrata com que a Geometria foi trabalhada, entre outras razões.

A preocupação a respeito da problemática que envolve a formação matemática dos futuros professores das séries iniciais, também estendida à formação geral, deve ser compreendida tendo em vista a interdependência existente entre elas.

É importante que as concepções matemáticas dos professores sejam elucidadas e reconhecidas por eles durante o processo de sua formação, no sentido de se buscar formas que possibilitem uma possível transformação das representações³² negativas, visto que as concepções dos professores a respeito dos fundamentos da Matemática estão relacionadas aos diferentes métodos de ensino que poderão ser adotados por eles, interferindo de forma negativa no processo de ensino-aprendizagem de seus alunos (Passos, 1995).

Conforme observa Kline (1976), no início da década de 1950 havia uma concordância de que o ensino da Matemática enfrentava problemas, que as notas dos estudantes eram muito baixas e que a aversão à Matemática era generalizada. Uma das grandes críticas, que até então se fazia ao currículo tradicional, era a de que os estudantes aprendiam Matemática memorizando. Kline (1976) destaca que o maior e mais vital problema ocasionado pela reforma curricular (Matemática Moderna) dizia respeito à formação dos professores. Segundo o autor citado, o conhecimento que os professores de Matemática tinham da Matemática era quase sempre inadequado (pp.201-205).

Kline (1976) cita a reunião de um grupo internacional de matemáticos, em 1959, na cidade de Royaumont na França, onde foi recomendado que se abandonasse completamente os cursos conhecidos da Matemática da escola secundária, inclusive a Geometria Euclidiana. Entretanto, conforme salienta o autor, muito da nova terminologia proposta era inteiramente desnecessária. Segundo o autor citado, a

³² Representações nesse contexto refere-se às representações sociais.

introdução de tantos termos novos, especialmente termos que não sugerem os conceitos que eles representam, sobrecarregou de maneira intolerável a memória dos estudantes. Um exemplo nessa direção, observa Kline (1976), é o artigo de Richard P. Feynman³³ (1965), ganhador do Prêmio Nobel de 1965, que, ao examinar textos que deveriam ser usados nas escolas, criticou a excessiva terminologia introduzida na Geometria:

“Alguns livros vão muito longe na definição de uma curva fechada, curva aberta, regiões fechadas e regiões abertas, etc. ... e, no entanto, não ensinam mais a geometria que o fato de que uma linha reta traçada no plano divide esse plano em dois pedaços ...” (Feynman, 1965, citado por Kline, 1976, pp.91-92).

Compartilhando com essas idéias, Castelnuovo (1989) ressalta que, ao se proceder à reforma dessa maneira, esqueceu-se de considerar as idiossincrasias dos alunos e, assim, a riqueza intuitiva foi “sufocada” por uma abstração demasiada avançada (p.28).

Em maio de 1996 foram divulgados no Brasil, através da imprensa, os primeiros resultados da avaliação realizada pelo Ministério da Educação e Cultura - SAEB (Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico)³⁴ realizada em 1995. O jornal Folha de São Paulo³⁵, em manchete de primeira página, denunciou: *“70% dos alunos não sabem Matemática”*. Segundo a reportagem, o diploma de ensino básico no Brasil, além de ser um privilégio de poucos, não garante a quem o detém o domínio de habilidades como o raciocínio e a crítica. Especificamente com relação à Matemática, os dados apontaram que 70% dos alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio não sabiam resolver problemas matemáticos, e somente a metade era capaz de formar juízo próprio sobre o que lia. As provas foram aplicadas em 124,8 mil estudantes de escolas públicas e particulares em 27 Estados e 639 Municípios. Esse

³³ FEYNMAN, R. P. (1965) *New Textbooks for the Mathematics. Engineering and Science*, 28, pp.9-15.

³⁴ SAEB – Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico é uma avaliação em larga escala, aplicada em amostras de alunos da 4ª e da 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, representativas do País e de todas as unidades da Federação, iniciada em 1991 e realizada a cada dois anos.

³⁵ Folha de São Paulo. *70% dos alunos não sabem matemática*. São Paulo - SP. C 1, pp.10-13, 05/05/96.

resultado, considerado desastroso pelo próprio Ministro da Educação, Paulo Renato Souza, levou a então secretária de Ensino Fundamental do MEC, Iara Prado, a afirmar que *“o problema é o professor”*.

Constatou-se com essa avaliação que os alunos não sabiam fazer contas básicas. Por exemplo, foram propostas aos estudantes de 8ª série três situações para a compra de lápis e perguntado qual seria a mais econômica: *“seis lápis por R\$ 1,20, quatro lápis por R\$ 1,00 ou ainda dez lápis por R\$ 1,60”*. O índice de acerto foi de apenas 30%.

O documento do MEC-SAEB/95³⁶ revela ainda alguns dados interessantes:

- *“65% dos alunos de 4ª série são capazes de somar números naturais;*
- *21% dos alunos de 4ª série apresentam conhecimento mais consolidado das quatro operações com números naturais e sabem aplicá-las para resolver problemas simples de um passo;*
- *1,5% dos alunos de 4ª série são capazes de realizar operações simples com números decimais;*
- *15% dos alunos de 8ª série estão acima do nível de habilidades que seriam trabalhadas na 6ª, 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental;*
- *3,7% dos alunos de 3ª série do Ensino Médio conseguem dominar as operações com números decimais, efetuar expressão com frações envolvendo as quatro operações, calcular área de figuras geométricas simples”.*

Nessa avaliação, o MEC considerou cinco áreas do conteúdo matemático. As habilidades exigidas para a disciplina de Matemática foram classificadas em três categorias. As áreas de conteúdo foram as seguintes:

- *Números e Operações: números (naturais, inteiros, decimais, fracionários, irracionais e reais), razões, proporções, porcentagem e operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação);*

³⁶ MEC-SAEB/95. Dados do SAEB/95 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br:81/folio.cgi/stdobject/buttoni.gif/escalas>. Arquivo capturado em 03 de março de 1998.

- *Medidas: conversão de uma unidade de medida em outra; cálculo de áreas, perímetros e volumes; estimação de resultados de medida e sua expressão por meio de representação; medidas de tempo, temperatura, comprimento, área, massa, volume e capacidade;*
- *Geometria: relação de posição entre objetos no plano e no espaço, semelhanças e diferenças entre eles; construção de figuras geométricas de duas ou três dimensões; conhecimento de propriedades das figuras geométricas; percepção de simetrias, regularidades, congruências e semelhanças;*
- *Análise de Dados, Estatística e Probabilidade: informações em gráficos e tabelas; leitura e interpretação de gráficos; médias; acontecimentos previsíveis e aleatórios e estimativas de probabilidade;*
- *Álgebra e Funções: descrição, extensão e criação de seqüências e relações entre grandezas; resolução de operações algébricas envolvendo números reais e expressões algébricas; uso de fórmulas, equações e inequações; reconhecimento de diversas maneiras de representar funções.*

Com relação às habilidades em Matemática, foram consideradas três categorias:

- *Compreensão de conceitos: reconhecer, dar nomes e apresentar exemplos de um conceito; usar modelos, diagramas e símbolos para representar um conceito; reconhecer, interpretar e aplicar símbolos para representar um conceito³⁷;*
- *Conhecimento e utilização de procedimentos³⁸: selecionar e aplicar corretamente os procedimentos adequados; usar corretamente algoritmos matemáticos; interpretar e produzir gráficos e construções geométricas;*
- *Aplicação³⁹ ou resolução de problemas: selecionar e usar estratégias, modelos e procedimentos matemáticos apropriados; usar raciocínio lógico e espacial, indutivo e*

³⁷ Por conceito, entenda-se termos, definições, princípios. Basicamente um conceito responde à pergunta: “*Que é?*”. Fonte: MEC-SAEB/95. Dados do SAEB/95 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br:81/folio.cgi/stdobject/buttoni.gif/escalas>. Arquivo capturado em 03 de março de 1998.

³⁸ Por procedimentos entenda-se cálculos, formulações, construções, estimações, execução de algoritmos, manipulações algébricas. Basicamente um procedimento responde à pergunta: “*Como se faz?*”. Fonte: MEC-SAEB/95.

³⁹ Sob aplicações reúnem-se provas, inferências, solução de problemas expressos em linguagem natural e aplicações no mundo real. Basicamente uma aplicação responde à pergunta: “*Para que serve?*”. Fonte: MEC-SAEB/95.

dedutivo, estatístico e proporcional; reconhecer e formular problemas; compreender a consistência e a suficiência dos dados e verificar se as soluções são corretas.

Os primeiros resultados do exame de desempenho dos concluintes do Ensino Médio realizado pelo MEC através do SAEB/97⁴⁰, divulgados em outubro 1997, apontaram um quadro caótico da Educação. “*Sofrível*”, como disse o Ministro da Educação. Alguns dos dados parciais divulgados mostram que, em Matemática, os alunos que estudam durante o dia acertaram apenas 27% da prova. Já os que estudam à noite acertaram em média 26% das questões. Segundo o INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais) o exame de Matemática constou de duas questões consideradas difíceis e vinte e oito consideradas médias.

O conjunto dos dados apresentados no relatório do INEP revela uma grande distância entre o que é proposto nos currículos e o que é esperado, em termos de desempenho dos alunos, e o que realmente os alunos estão sendo capazes de aprender e realizar. De modo geral, conclui o relatório, o desempenho dos alunos está aquém do que é preconizado para o momento de escolaridade que atravessam. Segundo as palavras do próprio relatório, os dados indicam que:

“garantir a aprendizagem desejável para todos os alunos é ainda um grande desafio para o sistema educacional brasileiro. Para superar esse quadro, é preciso continuar buscando o aperfeiçoamento e uma melhor adequação da formação e da prática dos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, de forma a ampliar o conhecimento e o uso de métodos de ensino mais efetivos e inovadores. É fundamental avaliar a qualidade dos recursos de ensino que estão sendo utilizados e até mesmo rever as propostas curriculares em vigor, pois somente com base nesse conhecimento é possível definir e implementar alternativas de intervenção que ampliem os níveis de aprendizagem em todas as disciplinas avaliadas pelo SAEB/97” (MEC/SAEB/97).

Diante da ampla e complexa problemática do ensino da Matemática, optou-se por focalizar o ensino de Geometria considerando a importância do seu ensino dentro do

⁴⁰ MEC/SAEB/97: primeiros resultados - Maria Inês Gomes de Sá Pestana et al. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 1999. Dados do SAEB/97 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br/saeb/saeb97/saeb97.htm>, Arquivo capturado em 21 de outubro de 1999.

contexto acima assinalado. É necessário destacar a relevância desse domínio na formação e na ação dos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, já que o ensino da Geometria resgata os aspectos referentes à relação do indivíduo com o espaço em que ele está inserido. Com esse propósito o presente estudo será tanto o de compreender como se apresenta o ensino da Geometria nesse segmento, como o de possibilitar reflexões objetivando transcender alguns dos obstáculos que permeiam esse ensino.

As preocupações explicitadas até o momento se justificam pois, apesar da reconhecida importância do ensino da Geometria, considera-se que seu ensino vem sendo relegado a um segundo plano e, muitas vezes, desprezado. Tal constatação fundamenta-se em pesquisas que abordam a problemática do ensino da Geometria tanto no Brasil como no exterior. Nesse sentido, cita-se a publicação do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (1989) na qual ressalta-se que “*entendimentos espaciais são necessários para interpretar, compreender e apreciar nosso inerente mundo geométrico*” (p.48).

Tendo como pressuposto que a compreensão espacial é necessária para interpretar, compreender e apreciar o nosso mundo que é intrinsecamente geométrico considera-se importante delinear algumas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem da Geometria.

2.2 - Considerações a Respeito do Ensino da Geometria

Diferentes explicações têm sido apresentadas sobre a história da Geometria, sua origem e seu desenvolvimento, muitas das quais confundem-se com a própria história das Ciências. Da mesma forma, diversas pesquisas foram e vêm sendo desenvolvidas sobre o processo ensino-aprendizagem da Geometria.

Considerando que o conhecimento básico da Geometria é fundamental para os indivíduos interagirem em seu meio, e também que esse conhecimento compreende conceitos de Geometria, suas propriedades e relações simples, os quais deveriam ser introduzidos nas séries iniciais, para que na sequência do Ensino Fundamental os alunos

pudessem compreender de forma significativa seus fundamentos, os professores dessas séries precisam conhecer as idéias fundamentais da Geometria e as diferentes maneiras de propiciar contextos favoráveis que levem os alunos à sua aprendizagem.

As experiências geométricas se apresentam de forma muito espontâneas para crianças, por meio de atividades naturais de exploração de objetos e do espaço físico em que elas se desenvolvem. Entretanto, quando a criança ingressa na escola, muitas vezes não são oferecidas oportunidades de desenvolver idéias geométricas que aproveitem o potencial que ela traz consigo.

A Geometria pode ser considerada como uma ferramenta muito importante para a descrição e interrelação do homem com o espaço em que vive, já que pode ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade. Concebe-se intuição geométrica como apresentada por Rojas (1991), ou seja, *“intuição é conceber de um modo claro as relações geométricas”*. Seria o “dar contar de relações entre elementos”, o “visualizar um caminho de solução”.

Entre os matemáticos e os educadores em geral muitas discussões têm sido estabelecidas a respeito da forma com que o ensino da Geometria deveria ser introduzido para as crianças. Existe um certo consenso de que ela poderia iniciar-se logo que a criança entra na escola; entretanto, há divergências com relação aos conteúdos e aos métodos de ensino. Dentre as razões para essas divergências estaria a multiplicidade de aspectos relativos ao seu conteúdo e sua inerente complexidade, e portanto, não ser simples definir um único caminho, linear, hierárquico, desde os seus princípios elementares até as abstrações e axiomas, a percorrer no ensino em sala de aula.

É interessante observar que a Geometria é um dos ramos da Matemática que pode estimular o interesse pelo aprendizado dessa ciência, pois pode revelar a realidade que rodeia o aluno, dando oportunidades de desenvolver habilidades criativas. As idéias geométricas das crianças podem ser desenvolvidas a partir de atividades de ordenação, classificação de modelos de figuras planas e de sólidos. Do mesmo modo, quando elas constroem modelos usando varetas, manipulam formas geométricas no computador, fazem dobraduras, ou quando usam espelhos para investigar eixos de simetria, podem constatar importantes propriedades geométricas. Lujan e Fini (1997) enfatizam que na pré-escola e nas séries iniciais muitos conceitos geométricos, como simetria, intersecção

de figuras planas, percepção de figuras inteiras e suas partes, dentre outras, podem ser trabalhadas com materiais manipuláveis simples e de fácil confecção; e, se constituem em uma base para o desenvolvimento de outros conceitos que serão estudados futuramente.

Nesse sentido não se pode discordar das idéias de Castelnuovo (1989), quando esta autora postula que é “*obrigação da escola*” proporcionar ao cidadão condições para que ele possa compreender a cultura científica presente no cotidiano, considerando que a Geometria pode possibilitar a conjunção entre o mundo físico e alguns conceitos matemáticos.

A curiosidade, a fantasia e a imaginação, qualidades típicas das crianças e jovens, constituem-se em fatores fundamentais a serem considerados no desenvolvimento dos conceitos geométricos. O ensino da Geometria deve estar voltado para problemas abertos (com mais de uma resposta e/ou com diferentes formas de resolução), com caráter dinâmico, que propiciem um processo de busca e investigação para resolvê-los. Nessa concepção, uma tarefa se constituiria em um problema se a pessoa que estivesse resolvendo-a encontrasse algum tipo de dificuldade que a obrigasse questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta. Com isso, os alunos envolver-se-iam com sua imaginação criativa e suas fantasias, sentindo-se interessados e motivados.

Essa conjunção poderia, por exemplo, levar a reconhecer como as aranhas tecedeiras constroem suas teias começando por fios retos que se juntam ao centro, em seguida tecendo ao redor desses fios, que vão-se alargando em órbitas cada vez mais amplas, e comparar com os procedimentos de cesteiros que, da mesma forma, trabalham com esse mesmo padrão quando constroem seus cestos. Cesteiros, artesãos, assim como tecelões de diferentes culturas demonstram a clara preferência pelas proporções simples e harmoniosas de um retângulo áureo⁴¹, um importante tema geométrico, usado largamente em construções e obras artísticas (Doczi, 1990, pp.14-15).

⁴¹ Retângulo áureo é qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se subtrair dele um quadrado ABEF, o retângulo restante, CDEF será semelhante ao retângulo original.

A percepção das proporções humanas tem variado muito ao longo dos séculos. Quando a Renascença⁴² redescobriu as ruínas clássicas da Grécia e de Roma, Leonardo da Vinci interpretou as proporções humanas em seu famoso desenho mostrando o homem com as proporções da seção áurea⁴³ (Figura 2.1).

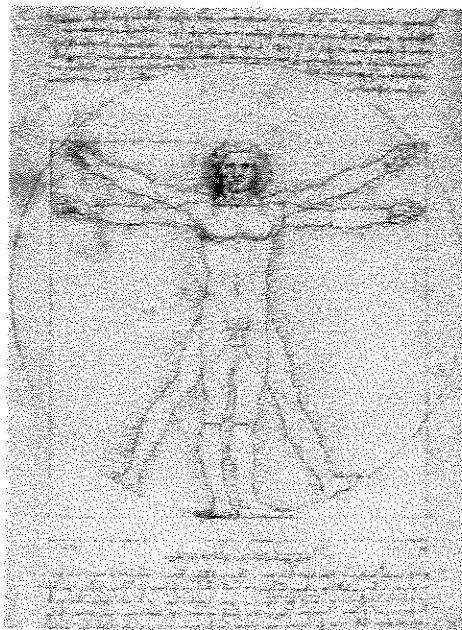


Figura 2.1 – Desenho de Leonardo da Vinci.

Muitos artistas têm se inspirado na harmonia das relações geométricas que o homem procura identificar na natureza, como é o caso de Maurits Cornelis Escher que, com seus mosaicos geométricos, como o mostrado na Figura 2.2, passou a ser admirado mundialmente a ponto de ser convidado a expor sua obra na Conferência Internacional de Matemática em Amsterdã, em 1954 (Imenes, 1988, p.36).

⁴² Renascença: Movimento artístico e científico dos séculos XV e XVI.

⁴³ Secção áurea: relação recíproca entre as duas partes desiguais de um todo, na qual a parte menor está para a maior assim como a parte maior está para o todo ($A:B=B:A+B$) (Fonte: Doczi, 1990, p.2)

METODOLOGIA DA PESQUISA

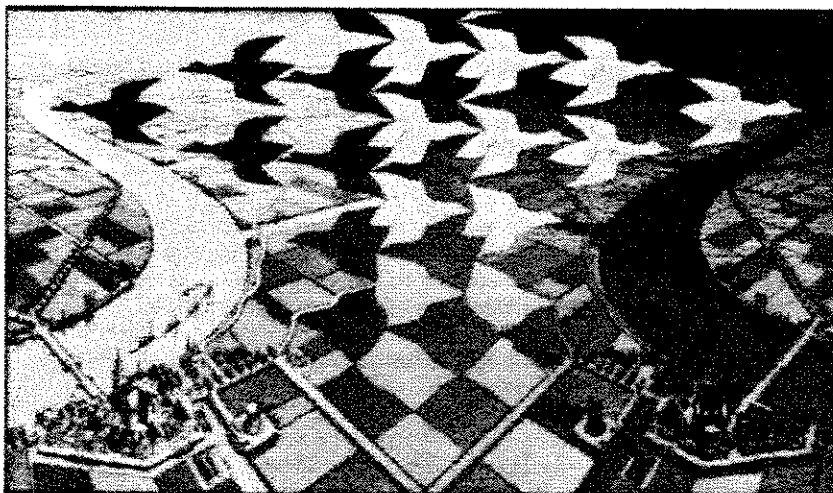


Abb. 49. Tag und Nacht, von M. C. Escher (Holzschnitt, 1938).

Figura 2.2 - Desenho de Escher “Tang und Nacht”, 1938.

A Geometria não poderia, portanto, deixar de estar presente, sob essa perspectiva, na formação dos alunos e, principalmente, na formação do futuro professor, já que, concordando com as palavras de Thom:

“... a Geometria é uma intermediária natural, e possivelmente insubstituível, entre as linguagens naturais e o formalismo matemático, onde cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo das equivalências é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. A partir deste ponto de vista, o pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de ser omitido no desenvolvimento normal da atividade racional normal do homem” (Thom⁴⁴, 1971, citado por Miskulin, 1994, p.36) (grifo da pesquisadora⁴⁵).

O interesse pelo ensino da Geometria é evidenciado quando se analisa os documentos de Encontros e Congressos em Educação Matemática. Diversas pesquisas (Clements e Battista, 1991; Gálvez, 1996; Gutiérrez, 1996b; Perez, 1991, entre outras) realizadas no Brasil e no exterior têm focalizado o ensino-aprendizagem da Geometria e oferecem elementos importantes para o posicionamento dos educadores matemáticos perante o ensino da Geometria.

⁴⁴THOM, R. (1971) *Matemática Moderna: um erro educacional e filosófico?* In: American Scientist, 59 (6), pp.695-699. Tradução de circulação restrita SCANAVINI, R.A.

⁴⁵ O termo pesquisadora, no presente trabalho, refere-se à autora da pesquisa.

Clements e Battista (1991) enfatizam que entendimentos espaciais são necessários para interpretar, compreender e apreciar o inerente mundo geométrico; entretanto, apesar da evolução do ensino da Matemática, o ensino de Geometria, em especial nos Estados Unidos, tem sido falho. Isto porque, argumentam os autores, a escola elementar praticamente não trabalha Geometria, e a escola secundária se preocupa apenas com demonstrações. Essa situação tem levado, afirmam os autores, muitos estudantes a evitarem a Geometria tendo em vista o desempenho insatisfatório que tiveram nessa área (pp.420-422).

Galvéz (1996), ao investigar quais temas geométricos estavam incluídos nos programas oficiais para a escola primária mexicana, verificou que “*não se ensinava Geometria*” de forma a contribuir para o desenvolvimento dos alunos no que diz respeito ao domínio de suas relações com o espaço, mas que o ensino da Geometria se reduzia ao conhecimento de uma “*coleção de objetos*” definidos como se fosse parte de “*um saber cultural*” dos alunos (p.249).

Esse fato também pôde ser constatado na prática educativa quando, em cursos de aperfeiçoamento para professores das séries iniciais, verificou-se esse mesmo tipo de atitude na abordagem que os professores davam à Geometria, isto é, a ênfase recaía apenas na nomenclatura das figuras geométricas, restringindo-se de forma expressiva os conceitos geométricos.

Assim, como preconiza Perez (1991), para modificar esse quadro seria necessário um ensino de Geometria que permitisse aos alunos liberdade de imaginação e expressão, como foi observado anteriormente. Nessa direção, um curso eficaz de Geometria deveria possibilitar a descoberta, favorecer a iniciativa e a originalidade críticas dos alunos, evitando que a criatividade fosse sufocada ou ignorada; sendo o professor o personagem principal nesse ambiente.

Em 1989, o *The National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, publicou Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, enfatizando nos diferentes níveis de ensino como deve ser o currículo de Geometria. Segundo as normas,

“... as crianças que desenvolvem um forte sentido das relações espaciais e que se apropriam da linguagem e dos conceitos geométricos ficam melhor preparadas para aprender idéias

relacionadas com os números e com as medidas, bem como para aprender outros tópicos matemáticos mais avançados” (NCTM, 1989, p.60).

No K-9⁴⁶, por exemplo, o NCTM define que se deve incluir tópicos de Geometria bi e tridimensional, afim de possibilitar aos alunos: descrever, modelar, desenhar e classificar formas; investigar e prever os resultados de combinar, subdividir e modificar formas; desenvolver o sentido espacial; associar idéias geométricas a idéias numéricas e a idéia sobre medidas, além de reconhecer e apreciar a Geometria no mundo real.

Muitos pesquisadores têm discutido o crescente abandono do ensino da Geometria no Brasil e também no exterior (Pavanello, 1989; Perez, 1991; Lorenzato, 1995; Gravina, 1996; Usiskin, 1994; Hershkowitz e Vinner, 1984, entre outros). Diversas causas têm sido apontadas como responsáveis por esse abandono, dentre elas destacando-se a reforma do ensino advinda com o Movimento da Matemática Moderna e, também, o despreparo do professor com relação ao desenvolvimento de conteúdos geométricos.

Pavanello (1989) ressalta que, mesmo antes do Movimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria na abordagem tradicional já estava relacionado a problemas como: o conhecimento do professor, os métodos utilizados, a dificuldade em se estabelecer um elo entre a Geometria prática indicada para a escola elementar e a abordagem axiomática introduzida no secundário. Entretanto, estes problemas tomaram proporções ainda maiores ao sofrerem a influência do movimento modernista, quando o matemático francês Jean Dieudonné, em 1959, proclamou: *“Euclides deve ser abandonado!”* (Pavanello, 1989, p.94).

Segundo a autora citada, nos livros didáticos lançados na época, escritos sob a nova orientação, está presente a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. A autora revela ainda que se procurou trabalhar a Geometria em uma abordagem intuitiva pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas, não

⁴⁶ K significa *Kintergarden*, ou seja um ano do ensino pré-escolar; os números referem-se a anos de escolaridade e as divisões correspondentes à estrutura do ensino não superior nos Estados Unidos.

existindo preocupação com a construção de uma sistematização das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

Outros problemas, maiores ainda, segundo Pavanello (1989), surgiram quando se procurou desenvolver a Geometria sob o enfoque das transformações; com o resultado de que a maioria dos professores acabou por deixar de ensinar Geometria sob qualquer enfoque, por não dominarem esse assunto. O que se observou com o movimento da Matemática Moderna foi um modelo inapropriado de ensino que, sob alegação de ser o currículo tradicional antiquado, ofereceu uma nova abordagem do antigo currículo.

M. Kline (1976) ressalta que o interesse dos matemáticos modernistas era estimular o surgimento de futuros matemáticos mas, por negligenciarem a pedagogia, fracassaram até mesmo nessa tarefa. Houve uma concentração no aspecto superficial da Matemática, no padrão dedutivo das estruturas bem estabelecidas, ao invés de se enfatizar como deveria se “pensar matematicamente”, como criar e como formular e solucionar problemas. Segundo o autor citado, isto foi resultado do desinteresse da maioria dos matemáticos pela psicologia da aprendizagem. Ele enfatiza que os matemáticos não se preocuparam em descobrir o que a Psicologia poderia oferecer nem tão pouco em desenvolver sua própria habilidade na “*arte de ensinar*” (Kline, 1976, pp.161-162).

Um dos propósitos do movimento modernista foi a tentativa de unificar o ensino dos três campos fundamentais da Matemática: Aritmética, Geometria e Álgebra. Essa unificação se daria pela introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações, os quais constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático. Conforme abordado por Miguel et al (1992), essa visão fundamentalista da Matemática modificaria o equilíbrio entre Aritmética, a Álgebra e a Geometria existente até então no currículo escolar.

Na Geometria, a abordagem euclidiana clássica, que estuda as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto relações internas entre os elementos destas figuras e destes corpos, não levando em consideração o espaço, deveria ser substituída por outras mais rigorosas e atualizadas, como a Geometria das Transformações de Felix

Klein (1872), que possui, como ponto de partida, a noção de grupo de transformações do espaço (Piaget e Garcia, 1987, p.105).

Castelnuovo (1989) ressalta que os “efeitos nocivos” do ensino da Geometria, desde seus primórdios, puderam ser sentidos até os dias atuais, isto porque, desde quando o ensino, há mais de um século, na maioria dos países, era apenas para poucos jovens privilegiados e se dava em colégios religiosos ou com mestres particulares, o ensino da Geometria se conduziu através dos Elementos de Euclides, pois não havia outros livros. Entretanto, sabe-se que Euclides não escreveu sua obra para o ensino. Alexis Claude Clairaut⁴⁷, matemático do século XVIII, já denunciava essa problemática, conforme descreve Castelnuovo (1989):

“... Não é possível que um estudante principiante possa de algum modo compreender os Elementos de Euclides do modo como o autor o elaborou, com teorias abstratas. Porque para penetrar em qualquer ciência é necessário sentir todo o esforço, todo o trabalho que a humanidade sentiu durante séculos para extrair a teoria do concreto, da realidade” (Clairaut, A. C., 1741, citado por Castelnuovo, 1989, p.27) (tradução da pesquisadora).

Castelnuovo (1989) ressalta ainda que as transformações pelas quais passou a humanidade com a evolução das sociedades, fazendo com que escolas públicas fossem organizadas em diversos países no final do século dezenove, não alteraram a forma como a Geometria vinha sendo ensinada. Os Elementos de Euclides continuaram sendo o único referencial, para todos os países. Assim sendo, os sentimentos de incompreensão, de inferioridade em relação à Matemática, manifestados pelos jovens privilegiados de outros tempos também é sentido pelos jovens estudantes de hoje.

Esses efeitos, segundo a referida autora, foram sentidos até o Movimento da Matemática Moderna, quando se propõe o fim de Euclides nas escolas, conforme fizemos observar anteriormente. As recomendações que se fizeram era de que o ensino da Geometria euclidiana deveria ser substituído por uma Matemática *“mais viva, mais motivadora, que correspondia à investigação moderna”*, destacando a unidade entre os diferentes ramos da Matemática.

⁴⁷ CLAIRAUT, A. C. (1741) *Elements de géométrie*. Editons Guathier-Villars, 1920.

Segundo Miguel et al (1992), alguns autores de livros didáticos brasileiros tentaram empreender o projeto modernista, como Catunda (1971)⁴⁸, as autoras pertencentes ao GRUEMA⁴⁹ (1977). Entretanto o que se viu foi a introdução dos conjuntos na Geometria; de conceitos topológicos elementares, tais como interior, exterior e fronteira, e de alguns tópicos da Geometria das Transformações, descaracterizando assim a abordagem axiomático-dedutiva e dando lugar a uma abordagem eclética.

Em consequência desse enfoque “conjuntivista” os conteúdos geométricos deixaram de ser considerados, como assinalam Miguel et al (1992),

“... como potencialmente ricos quer pelo seu valor cultural, quer pela sua capacidade intrínseca de possibilitar a percepção, organização e sistematização da experiência espacial dos estudantes - o que significaria, em qualquer desses dois casos, atribuir à Geometria uma especificidade inalienável - e passam a desempenhar papel de meios, úteis mas não indispensáveis para a construção das estruturas mentais básicas da inteligência, uma vez que se acreditava - e Piaget havia dado suporte para essa crença - serem essas estruturas isomorfas às estruturas básicas da nova Matemática” (Miguel et al, 1992, pp.48-49).

Miguel et al (1992) ressaltam que, embora o novo enfoque proposto para o ensino da Geometria tenha sido solicitado pela Comissão Internacional de Educação Matemática - CIEM, recomendado pelo V Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado em São José dos Campos, SP, em 1966, e também, tardiamente, pelas propostas dos Guias Curriculares para o ensino da Matemática no 1º Grau do Estado de São Paulo, (1975), além de ter sido discutido e experimentado em cursos de atualização estaduais como o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de São Paulo) e o GEMPA (Grupo de Estudos da Matemática de Porto Alegre), este novo enfoque não conseguiu impor-se na prática escolar.

Muitas pesquisas que vêm sendo realizadas nas últimas décadas têm enfatizado o esvaziamento do ensino da Geometria decorrente do movimento da Matemática

⁴⁸ CATUNDA, O. et al. *Ensino Atualizado da Matemática*. São Paulo, Edart, 1971, 4 vol.

⁴⁹ Curso Moderno de Matemática Para o Ensino de 1º Grau. (1977). 7ª série. 3ª ed. São Paulo, Editora Nacional.

Moderna, revelando que diferentes propostas de ensino buscam reverter esse quadro. Entretanto, o que pode ser observado é que, de fato, o pretendido “retorno” à Geometria não significou, a retomada da Geometria euclidiana na sua abordagem clássica, mas sim a manutenção de conceitos e propriedades fundamentais próprios dessa Geometria, abordando, a princípio, os aspectos intuitivos e experimentais e, posteriormente, chegando à deduções.

A Geometria passou a desempenhar, após a reforma modernista, a função de subsidiar a construção de conceitos e a visualização de propriedades aritméticas e algébricas.

De acordo com Pavanello (1989), a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, 5692/71, facilitou de certa forma, o abandono do ensino da Geometria no Brasil, principalmente no ensino público, pois permitiu que cada professor montasse seu próprio programa “*de acordo com as necessidades da clientela*”. Os professores do Ensino Fundamental limitaram-se, de modo geral, a trabalhar somente a Aritmética e as noções de Conjunto, fazendo com que a maioria dos alunos do Ensino Fundamental deixassem de aprender Geometria. O ensino da Geometria passou a ocorrer, quando não era eliminado, apenas no Ensino Médio. Já no ensino privado e academias militares, afirma Pavanello (1989), o ensino da Geometria continuou ocorrendo, trabalhado sob orientações diversas, integrado ou não aos demais ramos da Matemática.

Em atividades docentes, em cursos de aperfeiçoamento para professores, e também no decorrer da presente pesquisa o ensino da Geometria como acima descrito pode ser verificado. Apesar das recomendações de propostas curriculares de órgãos governamentais, como o da Proposta Curricular de Matemática para o ensino de 1º Grau do Estado de São Paulo (1988), enfatizando que o ensino da Geometria deve partir da manipulação de objetos, do reconhecimento das formas geométricas mais frequentes, para somente no final do percurso aproximar-se da sistematização (p.11); apesar das orientações que os professores recebem durante cursos de aperfeiçoamento, muito pouco tem sido realizado efetivamente na sala de aula. Conseqüentemente, os alunos, ao concluírem seus estudos no Ensino Médio, muitas vezes, não vivenciaram conceitos geométricos necessários para a continuidade de sua formação no Ensino Superior.

O despreparo do professor em relação aos conteúdos da Geometria também tem sido apontado como uma possível causa do “esvaziamento” desses conteúdos nas aulas de Matemática. A esse respeito Lorenzato (1995) ressalta que “... *como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico*” (p.4).

Kilpatrick (1994) releva que estudos sobre o conhecimento do professor têm mostrado baixos níveis de compreensão matemática e esse poderia ser um dos fatores do baixo desempenho dos alunos em Geometria. Para o autor, o tipo de conhecimento matemático que deve ter o professor e como ele deve combiná-lo com seu conhecimento pedagógico têm sido temas de muitas pesquisas e debates. Nesse sentido, ele afirma que investigações a respeito destes pontos poderão aumentar nossa compreensão sobre como os professores utilizam seus conhecimentos no ensino.

A pesquisa desenvolvida por Hershkowitz e Vinner mostra que os professores apresentam padrões de concepções incorretas de Matemática, semelhantes aos dos alunos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental (Hershkowitz e Vinner⁵⁰, 1984, citados por Hershkowitz et al, 1994).

Gravina (1996) constatou que alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul chegavam à universidade sem terem atingido os níveis mentais de dedução e de rigor em Geometria. Além disso, conforme a autora, eles apresentavam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto. Segundo ela, parte da problemática do ensino envolvendo a Geometria tem origem nos programas e metodologias de ensino de nossas escolas.

Assim como considerado no Capítulo 1 da presente pesquisa, a autora acima citada, também acredita que o tratamento estereotipado (figuras geométricas desenhadas sempre na mesma posição) dado aos objetos geométricos e a apresentação de demonstrações com argumentos ordenados e prontos podem estar interferindo na compreensão dos conceitos. Além disso, Gravina (1996) aponta o livro didático como

⁵⁰ Hershkowitz, R. e Vinner, S. (1984) *The Role of Critical and Non Critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts*. In *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, ed. Rina Hershkowitz, p.223-28. Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

um dos fatores da incompreensão geométrica, pois geralmente inicia o estudo de um tema geométrico por definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares.

As considerações de Lappan e Winter a esse respeito são esclarecedoras:

“Apesar de vivermos em um mundo tridimensional, a maior parte das experiências matemáticas que proporcionamos às nossas crianças são bidimensionais. Valemo-nos de livros bidimensionais para apresentar a Matemática às crianças, livros que contêm figuras bidimensionais de objetos tridimensionais. Sem dúvida, tal uso de “desenhos” de objetos lhes supõe uma dificuldade adicional no processo de compreensão. É porém, necessário que as crianças aprendam a lidar com as representações bidimensionais de seu mundo...” (Lappan e Winter in Dickson e outros⁵¹, 1991, citados por Duhalde e Cuberes, 1998, p.67).

Gravina (1996) revela que, ao definirem um quadrado, dos sujeitos pesquisados, 48% o fizeram considerando que *“os lados são iguais”*, 50% que *“os lados são iguais e os ângulos de 90°”* e 2% como *“lados iguais e paralelos”*. Esses dados mostram que existe um desequilíbrio entre os componentes conceitual e figural do objeto geométrico, isto é, na definição de quadrado não são guardadas informações sobre os ângulos.

Como já se mencionou anteriormente, o presente estudo evidenciou diferentes situações-problema que envolviam conceitos geométricos e as dificuldades que os professores apresentavam quando enfrentavam essas situações. Diante disso, ressalta-se, mais uma vez, que a forma com que a Geometria vem sendo abordada em sala de aula pode estar contribuindo negativamente para o desenvolvimento do conhecimento geométrico dos estudantes, até mesmo em conceitos mais simples.

A pesquisa de Pirola (1995), que estudou a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de Ensino Fundamental, baseada no modelo de formação de conceitos de Klausmeier⁵² (1977) e no modelo de desenvolvimento do pensamento

⁵¹ DICKSON, L. e outros. (1991) *El aprendizaje de la matemáticas*. Madrid: Labot.

⁵² KLAUSMEIER (1977) – *Manual de Psicología Educacional*. Aprendizagem e Capacidades Humanas: Harper e Row. Traduzido por Maria Célia Teixeira de Abreu.

geométrico de Van Hiele⁵³, constatou que a maioria dos sujeitos de 5ª série não conhecia a figura paralelogramo nem os seus tipos, situação que lhe permitiu afirmar *“que a Geometria de 1ª a 4ª série não tem conseguido levar os alunos a construir significativamente os conceitos”* (p.89). Com relação ao desempenho dos sujeitos da 8ª série, o autor constatou que eles não conseguiram escrever ou verbalizar as definições e, tampouco, desenhar muitos tipos de paralelogramos. Para ele, duas explicações podem ser dadas para esse fato:

“ou os alunos aprendem os conceitos através da valorização dos aspectos visuais (que indica o Nível 0 de Van Hiele), sem estabelecer relações com as propriedades que os mesmos possuem (que indica o Nível 1 de Van Hiele) e sem relacionar com a construção da figura utilizando a régua e o compasso, ou os alunos aprendem os conceitos e, pelo fato de não utilizar esses, esqueceram-nos” (Pirola, 1995, p.90).

Alguns estudos têm mostrado os efeitos da implementação de diferentes propostas curriculares e formas alternativas de organizar o currículo matemático nas escolas em diferentes países. Segundo Kilpatrick (1994), existe uma *“extraordinária uniformidade nos programas”*; muitos desses estudos têm mostrado uma tendência em dar maior atenção à Matemática aplicada, enfatizando a construção de modelos matemáticos que analisam problemas da vida real.

Bastos (1999) assinala que durante o Seminário Ensino e Aprendizagem da Geometria, promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, ocorrido em fevereiro de 1999, concluiu-se que não há consenso tanto em relação aos conteúdos de Geometria que deveriam ser incluídos no currículo quanto na organização desses currículos ou, ainda, na forma com que esses conteúdos seriam levados à prática. Segundo a autora, a Geometria deve ser ensinada nas escolas por fazer parte de um patrimônio cultural determinante na organização da sociedade. Por essa característica, explica a autora, a Geometria deveria ser ensinada ao longo de toda escolaridade, pois ela permite interpretar e intervir no espaço em que se vive. De acordo com tal visão, estaria incluído nesse currículo a visualização de objetos,

⁵³ Modelo Van Hiele de pensamento geométrico consiste em cinco níveis de compreensão: reconhecimento (visualização), análise, síntese ou abstração (dedução informal), dedução formal e rigor.

a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objetos; além da resolução de problemas de aplicação da Geometria em situações da vida real, e, também, a sua ligação à arte.

A autora acima mencionada ressalta que a Geometria é também a forma de representação de outros conceitos e idéias matemáticas e um saber unificador que estabelece as conexões entre as várias formas de pensamento matemático. Ressalta ainda que, se essa perspectiva não for considerada na organização do currículo escolar, não revelará ao aluno a natureza do conhecimento matemático, como também a Geometria não terá utilidade alguma, fazendo com que os alunos sintam-se fracassados diante dela.

Segundo Usiskin (1994), o insucesso característico de muitos alunos com a Geometria desestimula outros alunos a cursarem essa matéria em escolas americanas, onde os alunos do *senior high school*⁵⁴ podem optar por cursarem Geometria. Conseqüentemente, ao cursarem a faculdade, os futuros professores da escola elementar optam por não fazer o curso de Geometria e nem, posteriormente, cogitam em ensiná-la a seus alunos, perpetuando assim o ciclo do desempenho fraco. O autor sugere:

1) “Especificar um currículo de Geometria para a escola elementar por séries; 2) Não afastar os alunos do estudo da Geometria por eles serem fracos em Aritmética ou em Álgebra; 3) Exigir de todos os alunos um grau significativo de competência em Geometria; 4) Exigir que todos os futuros professores de Matemática, da escola elementar ou secundária, estudem Geometria na Faculdade; 5) Tornar clara a semântica usada nas discussões de Geometria; 6) Elevar o nível, a qualidade e a quantidade dos discursos nas discussões sobre o currículo de Geometria; 7) Analisar, de uma perspectiva curricular, as várias maneiras de formar conceitos em Geometria” (Usiskin, 1994, pp.24-25).

Entretanto, a implementação destas sugestões não é fácil. Em relação ao proposto, não se pode discordar do referido autor, mas, embora reflexões a respeito sejam constantes na prática pedagógica, tanto na formação dos professores das séries iniciais quanto na formação continuada deles, e também em Encontros e Congressos de educadores matemáticos, verifica-se não haver uma concordância em relação aos

⁵⁴ Último ano do ciclo de ensino que equivalente ao 3º ano do Ensino Médio brasileiro.

detalhes e também a respeito da natureza da Geometria que deve ser ensinada, desde a escola elementar até a faculdade.

O baixo rendimento dos alunos em Geometria foi um fato fundamental para que o casal Van Hiele se dedicasse a esse tema, o que culminou em 1957 com a Teoria de Van Hiele para o Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria⁵⁵. Essa teoria sugere que os alunos progridem através de uma sequência hierarquizada de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria e que a linguagem e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento. Os níveis são: *Nível Básico: Reconhecimento (visualização)*; *Nível 1: Análise*; *Nível 2: Síntese ou Abstração*; *Nível 3: Dedução*; *Nível 4: Rigor*.

No Brasil vários pesquisadores têm desenvolvido projetos e pesquisas investigando diversos aspectos dessa teoria. Dentre eles destaca-se o trabalho Nasser (1992) que aplicou a teoria junto a alunos de 7ª série do Ensino Fundamental público do Rio de Janeiro. Na análise a respeito do nível inicial dos alunos constatou-se que cerca de metade dos alunos testados não tinha atingido nem o primeiro nível da teoria, que corresponde ao do reconhecimento, no qual os alunos identificam, comparam e nomeiam figuras geométricas com base em sua aparência global. Segundo Nasser (1992), esse resultado pode ser explicado pela ausência de experiências prévias em Geometria, e pela eliminação do curso de Desenho Geométrico do currículo da maioria das escolas públicas.

Algumas tentativas no sentido de reverter o quadro de abandono no ensino da Geometria têm sido propostas no Brasil sugerindo o modelo teórico de desenvolvido geométrico de Van Hiele, tal como a publicada na Proposta Curricular de Matemática para o Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério - CEFAM e para a Habilitação Específica para o Magistério – HEM, da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (1990). A referida proposta assinala a importância do ensino da Geometria na formação do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental,

⁵⁵ CROWLEY, M. (1994) *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In LINDQUIST, Mary Montgomery e SHULTE, Albert P. (Org.) *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora.

“... para que o futuro professor possa desenvolver em si mesmo e, futuramente, em seus alunos as habilidades de observação, percepção espacial, argumentação, representação gráfica, habilidades lógicas ... e interrelacionar o estudo de Geometria com outros campos do conhecimento, instigando idéias, propondo aplicações práticas para que seus alunos possam enfrentar problemas reais que são, em geral, de natureza interdisciplinar. Além disso, mesmo no ensino de números, são empregados modelos geométricos que devem ser dominados; e, por outro lado, esquemas geométricos podem auxiliar a visualização de certos problemas e propriedades” (São Paulo, 1990, p.117).

A proposta indica também que a metodologia a ser desenvolvida para o ensino da Geometria deve dar-se inicialmente, através da experiência intensiva com objetos físicos e da observação dos elementos presentes no cotidiano do aluno. Além disso, sugere que as generalizações, ajudadas pelo uso de moldes, cortes, representações, medidas, construções e outros recursos, podem ser feitas mediante o raciocínio intuitivo. Ressalta, ainda, que outro recurso metodológico a ser utilizado no ensino da Geometria é o desenvolvimento histórico da disciplina.

Apesar de propostas como a indicada acima, o ensino da Geometria continua, muitas vezes, ausente da sala de aula. Pesquisa de Lorenzato (1993) aponta para algumas das causas que estariam atuando diretamente na sala de aula. O autor pesquisou duzentos e vinte e cinco professores brasileiros com cerca de dez anos de experiência, que lecionavam nas quatro séries iniciais do Ensino Fundamental, indicando que uma das causas dessa ausência seria a formação deficiente dos professores. Nessa pesquisa os professores foram submetidos a oito questões (propostas por alunos) referentes à Geometria Plana Euclidiana (conceito de ângulo, paralelismo, perpendicularismo, círculo, perímetro, área e volume), e foram obtidas duas mil e quarenta respostas erradas, sendo que somente 8% dos professores admitiram que ensinavam Geometria aos seus alunos.

A exagerada importância atribuída ao livro didático seria outra causa do abandono do ensino da Geometria salienta Lorenzato (1995), pois, em muitos deles, a Geometria se apresenta como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica, enquanto que, em outros, ela é reduzida a algumas formas banais do mundo

físico. Outro agravante seria a apresentação da Geometria na última parte do livro, aumentando a chance de ser deixada de lado por falta de tempo.

O autor acima critica ainda os currículos dos cursos de formação de professores (Licenciatura em Ciências, em Matemática, em Pedagogia e Formação para o Magistério), nos quais a Geometria possui uma frágil posição.

Situação semelhante também é relatada por Usiskin (1994) em relação ao ensino superior americano. Segundo ele, o debate a respeito do ensino da Geometria não é apenas sobre o que ensinar, mas também sobre se deveria haver algum curso de Geometria na formação do professor; e reproduz a colocação do matemático Grünbaum sobre esse tema: *“Por que tenho uma visão sombria da geometria nas faculdades e universidades? A resposta, simplesmente, é que ensinamos muito pouca geometria e o que ensinamos é feito de maneira equivocada”*. (Grünbaum⁵⁶, 1981, citado por Usiskin, 1994, p.27).

Com o propósito de avaliar o ensino paulista, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo realizou, em 1996, a primeira coleta de dados do rendimento escolar, envolvendo 1.091.329 alunos de 3ª e 7ª séries do Ensino Fundamental, matriculados em 5891 escolas, revelando um desempenho insatisfatório dos alunos em Matemática. Ressalta-se que, das trinta questões aplicadas aos alunos avaliados da 7ª série, quatorze abordavam conceitos geométricos.

Os resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP⁵⁷, publicados em novembro de 1996, revelam que o percentual de acertos em Matemática dos alunos de 3ª série foi de 65%. Já em relação à 7ª série os resultados foram bem diferentes. Dos alunos da 7ª série do período diurno apenas 39,92% acertaram as questões de Matemática, e 28,06% dos alunos da 7ª série noturna tiveram bom desempenho na disciplina.

⁵⁶ GRÜNBAUM, B. (1981) *“Shouldn't We Teach GEOMETRY?”* In *Two-Year College Mathematics Journal* 12, September, pp.232-38.

⁵⁷ SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo teve início em 1996, com finalidade de obter dados sobre o ensino, por meio do rendimento escolar dos alunos, nos componentes curriculares de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História e Geografia, dos ensinos Fundamental e Médio. Dados complementares podem ser obtidos na Internet via WWW: <http://www.educacao.sp.gov.br/>

A análise das questões de Matemática, mais especificamente das de Geometria, que fizeram parte dessa avaliação e o desempenho dos estudantes apontam para a necessidade de estudos críticos e de pesquisas sobre a avaliação em Matemática, tanto do ponto de vista dos alunos quanto dos professores.

No final de 1999, a Secretaria de Educação paulista informou, através da imprensa, que os dados do SARESP/98 indicam poucas mudanças em relação ao aproveitamento dos alunos em Matemática.

A análise dos dados coletados pelo MEC em 1997, avaliando os alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e de 3ª série do Ensino Médio, através do SAEB/97⁵⁸, mostra resultados relativos ao conteúdo de Geometria.

Dos dados publicados, serão abordados nesta pesquisa apenas os relativos à 4ª série. Esses dados revelam que 56% dos alunos da 4ª série conseguem índice de acertos superior para o nível no qual os alunos demonstram ter conhecimentos elementares de Geometria. Nesse nível, os alunos devem ser capazes de localizar a posição dos objetos, tendo como referência o próprio corpo e também devem reconhecer figuras geométricas simples, desde que representadas na forma usual. Analisando-se o tipo de questões que avalia esse nível de conhecimento pode-se dizer que a porcentagem de acertos foi muito baixa para os alunos da 4ª série. Como exemplo, apresenta-se na Figura 2.3 uma das questões que avaliou esse nível.

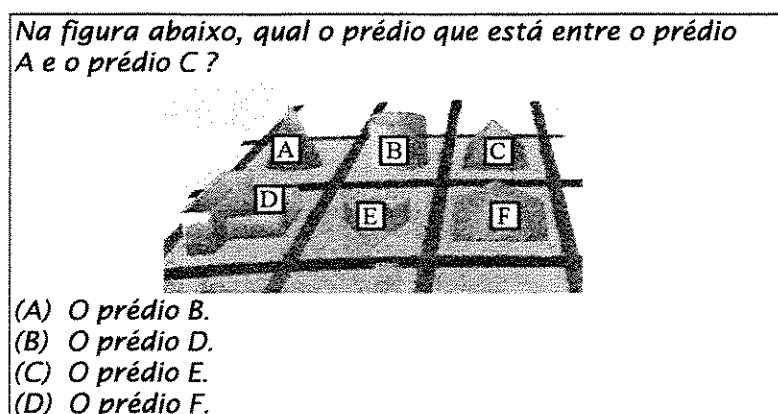


Figura 2.3 – Atividade proposta no SAEB/97.

⁵⁸ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), do Ministério da Educação – MEC. Dados do SAEB/97 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br/saeb/saeb97/saeb97.htm>. Arquivo capturado em 21 de outubro de 1999.

Em relação ao nível que supõe que os alunos possuam conhecimentos de Geometria que possibilitem-lhes a descrição da movimentação de objetos, tendo como referência o próprio corpo, e também o reconhecimento de polígonos e quadriláteros, apenas 11% dos alunos de 4ª série tiveram resultados superiores a esse nível.

Mais gravemente ainda se apresentaram os resultados relativos às questões que avaliam o nível de conhecimento que supõe que os alunos apresentem noções de paralelismo e ângulo e, também, que possam descrever a posição e o movimento de um objeto utilizando diferentes pontos de referência, pois nenhum aluno da 4ª série conseguiu atingi-lo. Nesse nível supõe-se, também, que os alunos sejam capazes de classificar os sólidos geométricos em corpos redondos e poliedros.

Os dados apresentados pelo SAEB/97 dão um panorama a respeito do atual ensino da Geometria que pode conduzir à conclusão de que o ensino da Geometria estaria ausente das salas de aula ou, então, estaria sendo desenvolvido de forma equivocada.

Dados do *National Assessment of Education Progress* – NAEP (1983), revelados por Usiskin (1994), mostram que 52% dos alunos de 17 anos do curso secundário, cursando a série que corresponde ao último ano do Ensino Médio no Brasil, relatam terem tido somente um semestre de aulas de Geometria. Esses alunos têm a possibilidade de escolher algumas das disciplinas que querem cursar, o que leva muitos a desistirem de estudar Geometria, substituindo essa disciplina por outras consideradas por eles menos frustrantes.

Ressaltando uma vez mais a importância de se compreender o processo ensino-aprendizagem da Geometria inerente ao mundo em que se vive, destaca-se a relevância do desenvolvimento de algumas habilidades do indivíduo nesse contexto, como por exemplo, a observação, a qual deve ser incentivada no ambiente escolar. Em outras palavras, torna-se imprescindível propiciar contextos favoráveis para que o aluno possa examinar atenta e minuciosamente o ambiente que o cerca, como: uma simples pedra lançada em um lago resulta em várias circunferências concêntricas que podem chamar a atenção de uma criança; a beleza das formas de uma casa de abelhas intriga pela sua engenhosa arquitetura; a beleza simétrica das folhas de um pinheiro também encanta.

Esses contextos devem ser trazidos para o ambiente de ensino. Essas ingênuas observações da natureza poderão dar início ao estudo da Geometria na escolarização das crianças, fato este que, muitas vezes, é desconhecido nas experiências escolares dos alunos e, também, de muitos professores. Ressalta-se, contudo que, esses contextos poderão compor outros contextos para o ensino da Geometria, não se caracterizando, de forma alguma, em uma visão empirista para o ensino da Geometria.

Decorrente das considerações acima, alguns questionamentos surgem: Por que não proporcionar situações de ensino que solicitem das crianças a visualização⁵⁹, o desenho e a comparação de formas em diferentes posições, desenvolvendo o sentido espacial?

A abordagem da Geometria desse modo poderia se constituir em um novo paradigma educacional? A Matemática poderia ser apresentada para os alunos como uma ciência que “emerge” de situações que permeiam nosso cotidiano? Considerando-se que o conhecimento, as relações e as idéias geométricas são, por um lado, úteis em situações de todos os dias, enquanto que, por outro, estão relacionados com tópicos da Matemática e com outras disciplinas do currículo escolar, por que então não levar em conta isso na sala de aula?

O professor teria condições de contribuir para desenvolver, em seus alunos, as habilidades de observação, percepção espacial, argumentação, representação gráfica, habilidades lógicas e interrelações? O estudo da Geometria poderia ser integrado com outros campos do conhecimento? Essa integração estaria instigando idéias, propondo aplicações práticas para que os alunos pudessem enfrentar problemas reais que são, em geral, de natureza interdisciplinar, como se recomenda nos Parâmetros Curriculares Nacionais?

Esse documento considera que a interdisciplinaridade “... *questiona a segmentação entre os diferentes campos de conhecimento produzida por uma abordagem que não leva em conta a interrelação e a influência entre eles – questiona a visão compartimentada (disciplinar) da realidade sobre a qual a escola, tal como é*

⁵⁹ Aqui, visualização é entendida como a imagem visual mental de algo que não se tem ante os olhos no momento da ação.

conhecida, historicamente se constituiu". (Brasil. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.30).

As sugestões dos Parâmetros propõem-se no sentido de interrelacionar o estudo do espaço com outras áreas do conhecimento, como a Geografia, a Astronomia, a Educação Física e a Arte. Um trabalho constante de observação, manipulação, construção de formas geométricas levará os alunos a perceberem semelhanças e diferenças entre elas. Segundo os Parâmetros, além disso, atividades geométricas podem contribuir para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de medidas de comprimento, ângulos, superfície ou outras propriedades métricas das figuras.

Ademais, tal documento chama a atenção para a *transversalidade* no ensino como sendo a "*... possibilidade de se estabelecer, na prática educativa, uma relação entre aprender conhecimentos teoricamente sistematizados (aprender sobre a realidade) e as questões da vida real e de sua transformação (aprender na realidade e da realidade)*". (Brasil. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.30).

Além das questões sugeridas pela discussão anterior, outros questionamentos surgem no contexto do ensino da Geometria: Como empregar modelos geométricos para o ensino dos números? Como podem esquemas geométricos auxiliar na visualização de determinados problemas e propriedades?

Por que não enfatizar na escola atividades que façam a criança investigar, experimentar e explorar, usando tanto os objetos do seu cotidiano quanto outros materiais físicos, específicos para o ensino da Geometria? Além disso, como a visualização pode ser considerada no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria? Como o desenho e a comparação de formas em posições diferentes interferem nesse processo?

Essas e outras questões deveriam fazer parte do cotidiano do professor preocupado com a formação de seus alunos.

Acrescente-se a isso a consideração de que a escola deve cumprir o seu papel de colocar o cidadão em contato com a cultura científica, que nos últimos anos tem entrado nos lares através da televisão, de jornais, revistas, computadores e outros meios, para que ele possa compreender o sentido de uma representação gráfica, para que ele

possa entender, pelo menos, algumas de suas relações, e para que seu mundo se faça mais amplo.

Diante dessa complexa problemática que envolve o ensino da Geometria, a conferência intitulada “*Perspectivas para o Ensino da Geometria no Século XXI*”, realizada na Catânia (Sicília – Itália), em outubro de 1995, promovida pela *The International Commission on Mathematics Instruction*⁶⁰, discutiu os objetivos do ensino da Geometria nos diferentes níveis escolares, de acordo com os diferentes ambientes e tradições culturais. Algumas das questões que fizeram parte das discussões da conferência merecem serem investigadas, quais sejam: *Por que é aconselhável e/ou necessário ensinar Geometria? O quê e como ensinar Geometria? O que é pensamento geométrico? Como ele se desenvolve? Como avaliar conhecimentos geométricos?*

Diante das perspectivas acima, as recomendações feitas na Conferência mereceriam ser amplamente divulgadas tanto aos professores quanto para os órgãos institucionais, para que pudesse ser analisada e verificada a viabilidade de sua aplicação. Descreve-se, em resumo, as principais recomendações feitas:

1. *O currículo de Matemática do ensino primário deve incluir Geometria bi e tridimensional para que os alunos sejam capazes de: descrever, desenhar e classificar figuras; investigar e prever o resultado de combinar, subdividir e transformar figuras; desenvolver a percepção espacial; relacionar idéias geométricas com idéias numéricas e de medição; reconhecer e apreciar a geometria dentro de seu mundo.*
2. *Deve-se evitar substituir o programa de Geometria pelos tópicos sobre medidas.*
3. *Merecem menos atenção atividades centradas na memorização de vocabulário, fatos e relações.*
4. *Nos seis primeiros anos de escolaridade o programa deve ser essencialmente centrado em atividades e não em teoria sobre tópicos geométricos.*
5. *Os alunos devem ter contato com atividades geométricas durante todo o ano letivo e não somente em um determinado intervalo de tempo no ano.*
6. *São recomendáveis atividades que façam conexões com áreas afins como Artes, Geografia e Física.*

⁶⁰ PERSPECTIVES ON THE TEACHING OF GEOMETRY FOR THE 21ST CENTURY. (1995) In *Education Studies in Mathematics*, 28, pp.91-98. © 1995 Kluwer Academic Publishers. Printed in Belgium.

7. *Havendo condições e se os professores estiverem preparados, devem ser organizadas atividades com tópicos não convencionais e que fogem da tradição euclidiana, tais como: topologias e grafos; geometria não-euclidiana; teoria de nós, etc.*
8. *O currículo de Geometria, principalmente a partir da 7ª. série deve ter fortes conexões com aplicações e situações reais.*
9. *Rudimentos de Geometria analítica podem ser antecipados sem enfatizar demasiadamente a notação.*
10. *É possível uma abordagem de natureza histórico-epistemológica, de que a Geometria é rica em significados.*
11. *Instituições como universidades e secretarias de educação devem organizar programas para capacitação dos professores para o ensino da Geometria*
12. *A Geometria - considerada um instrumento para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive - é, talvez, o campo mais intuitivo e concreto da Matemática e o mais ligado à realidade.*
13. *As novas tecnologias têm afetado intensamente nossa sociedade. Atividades tradicionais como o desenho técnico feito à mão, tornaram-se obsoletos. Novas profissões estão surgindo. É fato que os indivíduos deste final de século, todos, necessitam de uma Educação Visual. A Geometria tem como cumprir este papel*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) são enfáticos em defender o ensino da Geometria no início da escolarização das crianças, iniciando-se pela construção de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo, pois:

“... É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento” (Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1997, pp.125-126).

Ainda, dentre as diversas recomendações apresentadas nos Parâmetros, muitas coincidem com as propostas na Conferência acima citada, e enfatizam que o desenvolvimento do pensamento geométrico é iniciado pela visualização, *“... as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras*

geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas propriedades” (p.127).

Em vista das reflexões e questionamentos acima delineados, não se pode desconsiderar a importância do ensino da Geometria na formação geral dos estudantes. Além disso, ressalte-se a necessidade da efetiva implementação de propostas de ensino que estimulem o aluno a progredir na sua capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno no primeiro ciclo⁶¹ do Ensino Fundamental. Ressalte-se também a importância de se aprofundar esses aspectos através de atividades que mostrem, dentre outras, a possibilidade da utilização de diagramas, tabelas, mapas, esquemas no segundo ciclo⁶². Esses encaminhamentos poderiam permitir que os alunos interagissem com conceitos geométricos desde as séries iniciais.

2.3 – Considerações a Respeito da Dimensão Histórica da Geometria

Outro aspecto tido por fundamental, aqui, e que deve ser levado em conta no processo de ensino-aprendizagem da Geometria diz respeito à dimensão histórica da Geometria.

Não se pretende desenvolver neste trabalho uma investigação exaustiva sobre a história do desenvolvimento da Geometria, pois não é este o objeto da presente pesquisa. No entanto, parece ser relevante analisar algumas observações efetuadas por diferentes pesquisadores a respeito da História da Matemática.

Radice (1971) afirma que a humanidade, na sua história, estudou a Matemática em ordem inversa à que foi seguida nas nossas escolas. Sabemos que a Geometria é mais velha vários milhares de anos do que a Aritmética. O referido autor enfatiza que a Geometria foi a primeira verdadeira ciência construída pelo homem, a única verdadeira ciência da antiga Grécia.

⁶¹ Primeiro Ciclo corresponde às 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental.

⁶² Segundo Ciclo corresponde às 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental.

Eves (1992) argumenta que as primeiras considerações a respeito da Geometria podem ter sido originadas a partir de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Ele acredita que a sua natureza ou o seu caráter inerente teve conotações diferentes em períodos diferentes do seu desenvolvimento. Assim, a noção de distância aparece como um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos, isto é, a necessidade de demarcação de terras às margens do rio Nilo levou à emergência da noção de figuras geométricas simples, planas; assim como as noções de vertical, paralela e perpendicular na construção de moradias e muros teriam originado outros conceitos geométricos simples.

Em contrapartida, outros historiadores consideram que a versão da Geometria baseada nas atividades humanas, as quais requerem o controle das relações espaciais, seria a mais adequada. Pavanello (1989) afirma que:

“o que parece mais provável é que tais conhecimentos foram sendo construídos empiricamente, como resposta a necessidades de ordem prática das comunidades que no Neolítico – Idade da Pedra – deixaram sua vida nômade, passando a se fixar à terra e a cultivá-la” (Pavanello, 1989, p.21).

Já para Fehr, as formas geométricas foram sendo vagarosamente conceitualizadas até que elas adquiriram um significado abstrato por si próprias, a partir de atividades práticas e das necessidades do homem em descrever seus arredores. Desta forma, decorrente da prática de mensuração da terra foi desenvolvido um conjunto de relações ou teoremas que culminaram nos Elementos de Euclides (século III a.C.), a coleção síntese e elaboração de todos esses conhecimentos (Fehr⁶³, 1973, citado por Clements e Battista, 1991).

Sem dúvida, o desenvolvimento da Geometria como ramo da Matemática se produz com Euclides. Sua obra constituiu-se durante séculos em paradigma para o resto da Matemática e, inclusive, para outras ciências, como nos mostra a obra de Newton, 20

⁶³ FEHR, H. F. (1973) *Geometry as a secondary school subject*. In K. B. Henderson (Ed), *Geometry in the mathematics curriculum: Yearbook* (pp.369-380). Reston VA: National Council of Teacher of Mathematics Education.

séculos depois, ao tomar os Elementos de Euclides por modelo para a organização de seus Principia, nos quais expõe sua teoria da gravitação.

Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo da do homem mais primitivo, segundo Eves (1992), levavam a um certo número de descobertas geométricas, as quais ele chama de “*geometrias subconscientes*”. Para o autor, as observações do cotidiano teriam levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos e, desta forma, as

“configurações físicas que têm uma característica ordenada em contraste com as formas casuais e desorganizadas da maioria dos corpos, necessariamente chamam a atenção de um espírito que reflete e alguns conceitos geométricos elementares são assim trazidos à luz”. (Eves, 1992, pp.1-2).

Eves (1992) afirma que, quando o homem deixou de considerar apenas os problemas geométricos concretos, entre os quais não eram observadas nenhuma ligação e, que se apresentavam individualmente, a inteligência humana tornou-se capaz de extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações de formas, tamanhos e relações espaciais como casos particulares. Assim sendo, chegou-se à noção de lei ou regra geométrica. Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza geométrica, o autor chama de “*geometria científica*”. Naquele momento, indução, ensaio e erro e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta.

Analisando a origem da Geometria, Caraça (1989) afirma que em todas as relações que permeiam as atividades econômicas do proprietário da terra é necessária a determinação cuidadosa de áreas, as quais dependem da medida de certas dimensões, segundo regras que a Geometria ensina. Reforçando suas idéias, cita um trecho do livro II (Euterpe) de Heródoto - “o pai da História” - historiador grego que viveu no século V a.C., que, ao escrever a história dos Egípcios, se refere à origem da Geometria do seguinte modo:

“Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída

e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado da terra. Eu creio que foi aí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos” (Caraça, 1989, p.32).

Gerdes (1986) contesta as explicações sobre a origem da Geometria a partir das observações da natureza, baseado nos padrões geométricos do entrelaçamento da tecelagem de povos africanos, e apresenta uma discussão sobre “*o despertar do pensamento geométrico*” a partir de considerações de diferentes matemáticos sobre a origem e o desenvolvimento da Geometria. Ele desenvolveu um estudo analisando as concepções de diferentes pesquisadores com a intenção de responder questões do tipo: “*o que é a Geometria?*”, “*qual a sua origem?*” “*a Geometria teve alguma vez um início?*”.

Gerdes (1986) cita L. Blumenthal, para quem a Geometria teria surgido como ciência logo que ela se tornou dedutiva na Antiguidade Grega. Com relação a essa afirmação, Gerdes (1986) propõe uma discussão a respeito da possibilidade em se concordar em identificar Geometria com Geometria dedutiva, questionando: “*as reflexões espaciais pré-gregas foram raramente ou nunca dedutivas?*”, e ainda, “*uma indução não pressupõe uma dedução?*” (p.14).

Meschkowski inicia seu livro sobre “*evolução do pensamento matemático*” com os Elementos de Euclides e considera que os conhecimentos geométricos foram adquiridos por intuição e observação direta (Meschkowski⁶⁴, 1965, citado por Gerdes, 1986, p.14).

Para Gerdes (1986), a passagem do sistema intuitivo e de observação para o sistema rigoroso de demonstrações matemáticas permanece não esclarecida, e, nesse sentido, ele analisa que, se realmente essa passagem tivesse ocorrido, ela se constituiria em uma das transformações mais importantes na evolução do pensamento matemático. Entretanto, ele mesmo considera que “*esta passagem aparece como um salto (não-dialético)*”, e não concorda com a origem da Geometria a partir da mera intuição, ou da pura percepção imediata (p.14).

⁶⁴ MESCHKOWSKI, H. (1965) *Evolution of mathematical thought*. San Francisco.

Já as concepções de Freudenthal sobre o significado dos métodos dedutivos gregos são completamente diferentes das dos autores anteriormente citados, pois conforme ele afirma,

“ao invés de considerar como um elemento positivo as tentativas gregas de formular e demonstrar conhecimentos... através de métodos desajeitados e governados por convenções estritas, sou inclinado a vê-las como um sintoma de um dogmatismo terrificante” (Freudenthal⁶⁵, 1982, p.444, citado por Gerdes, 1986, p.15).

Para Freudenthal, a Geometria não começa tão tarde, com o formular de definições e teoremas, mas muito mais cedo, com o organizar de experiências espaciais que conduzem a essas definições e proposições (Freudenthal, 1982, citado por Gerdes, 1986).

Eves (1992) considera que as primeiras considerações geométricas do Homem deram-se a partir de observações simples provenientes da capacidade humana de reconhecer formas físicas e de comparar figuras e tamanhos, capacidade essa considerada uma qualidade natural dos seres humanos. Ele explica de maneira simples a origem de alguns conceitos geométricos como, por exemplo, quando se refere ao contorno do Sol, da Lua, do arco-íris que teriam conduzido à concepção de círculo.

Para Gerdes (1986), essa posição de Eves poderia parecer empirista, visto que as propriedades comuns a objetos diferentes são de caráter imediatamente visível e esta percepção permanece na maior parte das vezes passiva. Entretanto, salienta que Eves nota que *“as formas físicas que possuem um caráter ordenado... atraem necessariamente a atenção da mente refletiva”* e este observar leva a uma Geometria *subconsciente* (Eves⁶⁶, 1969, citado por Gerdes, 1986, p.15).

As questões que se apresentam agora, de acordo com as concepções de Gerdes (1986), são: *“como o Homem sabe quais são as formas que possuem um caráter ordenado?”*; ou mesmo, *“como o Homem aprende a descobrir ordem na natureza?”* e,

⁶⁵ FREUDENTHAL, H. (1982) *Bookreview*. In *Education Studies in Mathematics*. Dortrecht (13).

⁶⁶ EVES, H. (1969) *The history of geometry*. In *Historical topics for the mathematics classroom*. Washington. pp.165-191.

ainda, “*como a Geometria subconsciente se transformou em Geometria científica no Egito Antigo e na Mesopotâmia?*”

Gerdes (1986) afirma que estas questões indicam claramente como a posição de Eves deve ser dialeticamente superada, já que

“... para geometrizar são necessários não só objetos geometrizaáveis, mas também já a capacidade de, na percepção destes objetos, abstrair de todas as demais propriedades, para além da sua figura – e esta capacidade é o resultado de um longo desenvolvimento histórico de experiências humanas” (Gerdes, 1986, p.16).

A partir da concepção que a Geometria nasceu das necessidades dos homens, de que as idéias de linhas, superfícies, ângulos, de polígonos, cubos, esferas, etc. são todas derivadas da realidade, Gerdes (1986), apoiado nas idéias de Engels, levanta um importante questionamento sobre como estes conceitos poderiam ter partido da realidade e, também, como se formou historicamente a capacidade de geometrizar.

Nesse sentido, baseando-se na obra “Dialética da Natureza” de Engels, Gerdes (1986) aponta-nos indícios dos primórdios da Geometria terem ocorrido através do trabalho, e justifica-se:

“... na medida em que o Homem aprendeu a transformar a natureza, ... cresceu a sua inteligência. O Homem coloca a natureza no exterior através das suas transformações ao serviço dos seus fins. E esta é a última diferença, a diferença essencial entre o Homem e os restantes animais, e é ... o trabalho que causa esta diferença” (Gerdes, 1986, p.17).

Estudando a pesquisa desenvolvida por Gerdes (1986), foi possível perceber a estreita relação existente entre o processo de aquisição de imagens abstratas das relações espaciais e os objetos físicos a partir do trabalho.

Nesse aspecto, cita-se Alexandrov, que acredita que os corpos materiais e as suas formas e as relações espaciais já existiam antes do Homo Sapiens, assim como o contorno do Sol e da Lua, a superfície plana de um lago, a retilinearidade de um raio de luz, etc., estiveram sempre presentes e ofereceram muitas oportunidades ao Homem para observá-las; entretanto, na natureza não existem formas perfeitas, como círculos, retas, ou triângulos exatos. Desta forma, o fato de homem abstrair formas da natureza e

reproduzi-las em seus objetos não poderia ter ocorrido de forma passiva. O autor afirma que os homens “... *deram em primeiro lugar forma ao seu material e só depois eles reconheceram como algo imprimido ao material e que, por isso, pode ser considerado por si só, como uma abstração do material*” (Alexandrov⁶⁷, 1977, citado por Gerdes 1986, p.18).

Gerdes (1986) postula que, à medida que os homens começavam a produzir objetos de formas cada vez mais regulares e a compará-los com outros objetos, eles perceberam a “*forma desligada da particularidade qualitativa dos corpos comparados*”. Uma vez que eles conseguiam “*reconhecer a forma em si dos corpos*”, podiam fabricar outros objetos de melhor qualidade, o que veio contribuir para a elaboração mais precisa do conceito abstrato de forma (p.18).

O referido autor afirma que “*a relação dialética entre vida ativa e pensamento abstrato é o motor do desenvolvimento da Geometria*” (p.18). Para ele, não foi por acaso que uma forma simétrica, por exemplo, foi gradativamente escolhida, mas as experiências que o homem fazia, quando da construção de objetos para suas atividades de trabalho, foram mostrando que “*uma forma simétrica da superfície de corte diminui a resistência de um corpo duro, reduz o atrito e precisa de menor esforço muscular*” (p.18).

De acordo com Gerdes (1986), o reconhecimento da ordem e regularidade das formas espaciais na natureza tem origem no trabalho do homem. O autor argumenta que o homem cria essas formas para poder satisfazer as suas necessidades cotidianas e que a compreensão das formas materialmente necessárias nasce e cresce na confrontação com o material presente para realmente se poder produzir algo útil. “*No reconhecimento destas necessidades de forma e nas possibilidades assim obtidas de as empregar para realizar determinados objetivos, nasceu a liberdade humana para produzir objetos úteis e apreciados como belos*” (Gerdes, 1986, p.100).

Gerdes (1991) destaca a importância da ação do professor na formação dos estudantes. Segundo ele, os professores precisam estar conscientes da matemática

⁶⁷ ALEXANDROV (1977) *A general view of mathematics*. In Mathematics, its content, methods and meaning. Massachusetts. pp.1-64.

escondida na cultura material tradicional e também do valor cultural, educacional e científico da redescoberta e da exploração matemática.

Seria desejável que os professores proporcionassem aos alunos condições para que eles pudessem descobrir a beleza das formas, das proporções, das regularidades, de modo que eles pudessem ir descobrindo a importância dos conhecimentos geométricos para sua formação intelectual.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) ressaltam que *“uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem”* (p.128).

Entretanto, vale ressaltar que, para que o professor possa ter condições de assumir efetivamente esse papel, deveria receber uma formação geométrica adequada, na qual os diferentes aspectos relativos à visualização geométrica deveriam ser abordados, enfatizando as diferentes formas de representação de objetos geométricos, o que lhe possibilitaria contato com as diversas interpretações que podem ocorrer.

A situação revelada pelas avaliações sobre o desempenho dos alunos em Geometria, como as realizadas por órgãos oficiais, o quadro que se mostra na experiência docente e na revisão da literatura especializada, mostram a relevância de uma pesquisa que procure compreender melhor os aspectos da visualização e da representação geométrica no contexto do ensino da Geometria; assim sendo, algumas considerações teóricas são apresentadas no próximo capítulo.

**VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICAS:
REFLEXÕES TEÓRICAS**

CAPÍTULO 3

VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICAS: REFLEXÕES TEÓRICAS

“... o raciocínio visual em Matemática é importante em seu próprio direito e portanto, nós precisamos desenvolver e dar total status às atividades matemáticas puramente visuais” (Dreyfus⁶⁸, 1991, citado por Gutiérrez, 1996^a, P.17) (tradução da pesquisadora).

Apesar da utilidade da visualização e das representações geométricas no ensino da Matemática ser reconhecida pela maioria dos educadores matemáticos e também por professores de Matemática, além de ser apontada como fundamental para a formação matemática dos estudantes nos guias curriculares e nas propostas de ensino, há pouca ênfase a esse respeito na sala de aula. Pesquisadores como Gutiérrez (1996a, 1996b), Bishop (1979, 1983), afirmam que apesar dessa reconhecida utilidade, poucas pesquisas a esse respeito têm sido feitas já que na literatura pertinente aparecem apenas alguns relatos de pesquisas.

Em função de leituras e estudos a respeito da visualização, esse termo está sendo considerado para a presente pesquisa como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. Em outras palavras, seria a percepção visual do sujeito enquanto a construção de um processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em sua memória. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. A

⁶⁸ DREYFUS, T. (1991) *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*. In Furinghetti, F. (ed.) *Proceedings of the 15th PME conference*. Genova, Italy: Univ. de Genova, vol. 1, pp.33-48.

preocupação com a visualização quando se aborda o processo ensino-aprendizagem da Geometria pode ser considerada como um dos processos envolvidos nas diferentes maneiras de representações. Entende-se que a representação pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo através da linguagem e de gestos, considerados, nesta pesquisa, como instrumentos importantes para expressar conhecimentos e idéias geométricas dos sujeitos. O significado filosófico de representação, conforme o Dicionário Aurélio, é o conteúdo concreto apreendido pelos sentidos, pela imaginação, pela memória ou pelo pensamento.

Os diferentes tipos de visualização que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis.

A dificuldade que os alunos possuem em “ler” o que as representações bidimensionais de objetos tridimensionais traduzem pode estar em não conseguirem identificar os diferentes elementos que compõem esses objetos. Dessa forma, os alunos não conseguem representar para eles mesmos determinadas propriedades desses objetos, prejudicando o processo de aprendizagem da Geometria.

O desenho em perspectiva é apresentado no plano e o sentido dele (o que ele representa) implica em considerar o espaço no qual se situa; desse modo, a representação gráfica desse objeto tridimensional é bidimensional. A maneira mais usada para ensinar a representar no plano objetos do espaço é a perspectiva cavaleira ou paralela. Na perspectiva cavaleira ou paralela ou projeção paralela, as linhas paralelas se apresentam sempre como paralelas, independentemente de sua direção. Cavalca (1998) afirma que, esses tipos de representações foram observados nos séculos XVI e XVII, quando militares europeus representavam fortificações através da perspectiva cavaleira. Esse fato, para alguns historiadores, afirma o autor, teria dado origem à expressão *cavaleira*, devido ao fato desses militares serem cavaleiros. Para outros historiadores, essa expressão seria o ponto de vista a partir de onde eram feitos os desenhos, *a cavaleiro*⁶⁹ sobre as construções (p.24).

⁶⁹ A cavaleiro: expressão que significa em lugar eminente (Fonte: Dicionário Aurélio).

Quando se imagina a construção de algum objeto específico, como uma caixa por exemplo, não se pode iniciar tal construção sem antes “ver”, na mente, o que ainda não pode ser visto com os próprios olhos. Tal destreza exige aprendizagem e deve ser sistematicamente construída em diferentes momentos, tanto na escola como fora dela. Entretanto, na escola, essa capacidade poderá ser explorada com a análise de aspectos visuais de uma figura geométrica, de modo que se torne possível desenhá-la. Para desenhar um objeto geométrico é preciso que o indivíduo seja capaz de imaginar o resultado final, antecipar mentalmente e inferir corretamente a forma plana (bidimensional) e as transformações necessárias para apresentá-la na forma espacial (tridimensional).

A teoria de Van Hiele a respeito das habilidades geométricas vem sendo muito discutida atualmente, sendo citada inclusive pela Proposta Curricular de Matemática (1990) para a formação de professores das séries iniciais do Estado de São Paulo, e tem contribuído para diversas reflexões a respeito do processo ensino-aprendizagem da Geometria. Nessa teoria, como já se tratou no Capítulo 2 deste trabalho, o primeiro nível das habilidades é o da visualização (reconhecimento), o qual é considerado como um nível necessário na hierarquia para se desenvolver o pensamento geométrico.

A característica desse nível de desenvolvimento consiste em que o indivíduo pode identificar, comparar e nomear figuras geométricas tendo como referência sua aparência global. Nesse caso, por exemplo, ele poderá classificar os quadriláteros em classes de: retângulos, paralelogramos, losangos, quadrados ou trapézios.

Hoffer (1977) menciona que muitos dos conceitos geométricos não poderiam ser reconhecidos ou entendidos sem que o aluno pudesse perceber visualmente exemplos e sem que ele pudesse identificar figuras e propriedades associando-as com suas experiências prévias.

Dentro do quadro teórico elaborado por Hoffer (1990) a respeito das habilidades básicas em Geometria, a habilidade visual compreenderia cinco níveis específicos, quais sejam: *reconhecimento, análise, ordenamento, dedução e rigor* (Hoffer⁷⁰, 1990, citado por Galindo, 1996).

⁷⁰ HOFFER, A. (1990) *La geometría es más que demostración*. Notas de Matemática, 29, pp.10-24.

Considera-se que a visualização constitui-se em um importante componente desta pesquisa, como um elemento de apoio nas investigações matemáticas necessárias para a construção de conexões lógicas e de demonstrações. Assim sendo, o desenvolvimento da visualização deve ser considerado com cuidado na sala de aula.

Estudos como os de Gutiérrez (1996a, 1996b, 1998), Presmeg (1986), Bishop (1979, 1983), Del Grande (1994), Hoffer (1977), Fischebein (1993), Gorgorió (1998) entre outros, revelam preocupação com as habilidades espaciais dos estudantes, tanto na consideração do nível de realização de tarefas dadas, quanto considerando os traços cognitivos individuais que facilitam os processos de solução das tarefas. Tais estudos constituíram-se em importantes referências para a análise dos procedimentos empregados pelos sujeitos no Estudo de Caso desta pesquisa.

Não se pode discordar de Goldenberg (1999) quando ele enfatiza que a visualização em Matemática deve respeitar o seu poder, reconhecer suas limitações e conhecer as suas formas e aplicações. Como explica o referido autor, para um matemático o diagrama a seguir (Figura 3.1) é uma demonstração visual da relação algébrica que o acompanha; entretanto, não se constitui em uma demonstração para quem não sabe quais aspectos do desenho são específicos demais e, portanto, devem ser ignorados (o desenho mostra tanto os tamanhos absolutos como relativos de a e b , que são irrelevantes), e, também, que aspectos do desenho são suficientemente específicos e devem ser assumidos (os ângulos não são arbitrários e devem ser considerados como retos).

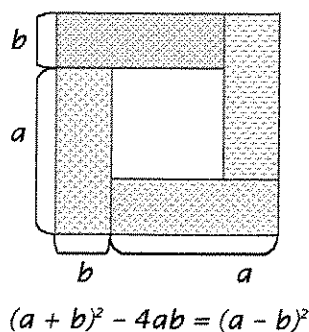


Figura 3.1 - Diagrama apresentado por Goldenberg (1999).

O referido autor assinala ainda que, para as pessoas mais experientes em Matemática, o diagrama acima é apenas uma abreviatura de uma demonstração válida da identidade descrita pela equação, quando a e b são ambos números reais positivos. Entretanto, muitas propostas de ensino e mesmo livros didáticos usam diagramas como o apresentado, sem fornecerem suficientes oportunidades aos alunos para aprender de forma mais eficiente como produzir ou transformar estes diagramas, ou para compreender seu conteúdo e suas limitações.

O uso de diagramas possui um duplo papel no processo ensino-aprendizagem da Matemática, podendo constituir-se em um facilitador ou em um dificultador desse processo. Exemplificando, convém reportar ao conflito apresentado por um aluno de 3ª série do Magistério, retratado no Capítulo 1, diante do cálculo da área da superfície de um prisma, cujo desenho constava da atividade (Figura 1.22). Alguns questionamentos decorrem desse conflito: O fato do sujeito ter o objeto desenhado pode ter ocasionado o conflito, isto é, teria possibilitado que a sua atenção ficasse centrada no aspecto figural do objeto? Se o desenho não estivesse constando da atividade, o sujeito conseguiria resolvê-lo, usando para isso seus conhecimentos anteriores (cultural e escolar) a respeito da lata de óleo? O desenho foi o dificultador na resolução do problema? Essas são questões que poderiam ser melhores investigadas e, possivelmente, trariam elementos esclarecedores para que o uso de desenho, diagramas e representações gráficas fosse avaliado no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Construções do processo de visualização aparecem em muitos estudos referentes a habilidades espaciais, independente da conceitualização de habilidade espacial que fundamenta o estudo.

Conseqüentemente, pôde-se verificar que vários termos aparecem na literatura referindo-se à *visualização*, como por exemplo: *raciocínio visual*, *imaginação*, *pensamento espacial*, *figuras*, *imagens mentais*, *imagens visuais*, *imagens espaciais* e outros. De acordo com Gutiérrez (1996a), a maioria dos artigos que são encontrados relacionados aos termos *visualização*, *habilidade espacial* ou *imagem mental* são publicações de revistas ou de periódicos de Psicologia, e somente alguns são publicações de Educação Matemática. Além disso, o autor afirma que muitas dessas publicações referem-se a estágios do desenvolvimento dos indivíduos (da tenra infância até adultos),

ao relacionamento da visualização com o desenho, escrita ou fala, com construção ou manuseio de objetos tridimensionais e outros pontos relacionados à Psicologia, Matemática ou Educação Matemática. Entretanto, pode-se também encontrar títulos relacionados a outras ciências, como engenharia, arte, medicina, economia e química.

Com base nos dados acima, o autor acima citado assinala que:

“1) Psicólogos sabem da importância da visualização há muito tempo e desenvolveram teorias detalhadas para estruturar seu trabalho e ferramentas para observar e testar indivíduos; 2) A visualização é importante para muito mais atividades do que nós poderíamos inicialmente suspeitar, embora cada especialidade esteja somente interessada em certas habilidades específicas e ambientes próprios, aquelas estreitamente relacionadas aos seus problemas de pesquisa; 3) Pessoas vindas de diferentes atividades podem ter desenvolvido diferentes sentidos para as mesmas palavras e, 4) O campo da visualização é tão amplo que não é razoável tentar abarcá-lo todo” (Gutiérrez, 1996a, p.4) (tradução da pesquisadora).

Catalá et al (1995) descrevem a *visualização* como sendo a construção de um processo visual, que sofre interferências de nossa experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em nossa memória. Segundo os autores, o desenvolvimento completo do processo visual é essencial para se obter uma adequada percepção espacial. Afirmam também, que o estímulo visual é o meio que faz avançar o processo de construção de imagens mentais. Já a representação, segundo os autores, poderá ser gráfica, como um desenho em um papel ou um modelo manipulável, considerando-se sua importância como um instrumento para expressar nossos conhecimentos e idéias.

Catalá et al (1995) afirmam que a visualização corresponde ao *“saber ver o espaço no qual a intuição é o motor que dá a partida e faz avançar a compreensão das diferentes relações espaciais”* (p.15) (tradução da pesquisadora).

Segundo Gutiérrez (1996a), não há uma concordância geral sobre a terminologia a ser usada no campo da visualização. Por exemplo, o termo **“visualização”** pode ser usado por um autor, e outro usar **“pensamento espacial”**, sendo que ambos estão partilhando o mesmo significado. Por outro lado **“imagem visual”** pode ter diferentes significados para diferentes autores. O autor acredita que tal

diversidade pode ser reflexo da diversidade de áreas onde a visualização é considerada relevante como: engenharia, arte, medicina, economia, química, entre outras.

Gutiérrez (1996a) explica que na Psicologia Cognitiva um significado de imagem mental sustentado por Denis⁷¹ (1989), Kosslyn⁷² (1980), e outros, é aquele de uma “*quase figura criada na mente*”, proveniente da memória sem ter o objeto à vista.

Kosslyn explicou detalhadamente sua teoria para imagem mental como tendo dois componentes principais: “*uma representação superficial, uma entidade quase pictórica presente na memória ativa e uma representação profunda, a informação armazenada na memória de longa duração, da qual a representação superficial é derivada*” (Kosslyn, 1980, citado por Gutiérrez, 1996a, p.5) (tradução da pesquisadora).

Entretanto, segundo Gutiérrez (1996), outros psicólogos discordam desse conceito para imagem mental, em virtude das deficiências que eles vêem na metáfora do desenho na mente e das definições consideradas vagas.

Partidários da primeira (os que acreditam na definição para imagem mental como “*uma quase figura criada na mente*”) ou da segunda (os que discordam da metáfora “*quase figura criada na mente*” e das definições “*vagas*” de Kosslyn) posições estão interessados nas maneiras como as imagens mentais são criadas, armazenadas e recuperadas na mente do indivíduo; por essa razão, afirma Gutiérrez (1996a), muitos testes desenvolvidos para avaliar a habilidade dos estudantes na manipulação da imagem mental não permitem o uso de desenhos (no caderno e nem no computador).

Esses significados atribuídos à imagem mental, como afirma Gutiérrez (1996a), não são compartilhados por muitos psicólogos educacionais, nem por educadores matemáticos, os quais tendem a atribuir a esse termo (imagem mental) um significado mais geral e simples, como o traduzido pelas palavras:

⁷¹ DENIS, M. (1989) *Image et cognition*. Paris, France: Presses Univ. de France.

⁷² KOSSLYN, S. M. (1980) *Image and mind*. London, GB: Harvard U. P.

“... uma imagem mental é uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática, contendo informação baseada em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos. “Visualização” ou pensamento visual é a espécie de raciocínio baseado no uso de imagens mentais” (Gutiérrez, 1996a, p.6) (tradução da pesquisadora).

O referido autor enfatiza que uma das principais razões dessa discordância é que, no dia-a-dia das aulas de Matemática, o uso de desenhos, figuras ou diagramas, ou mesmo representações na tela do computador, constitui-se em atividades comuns. Com isso, em oposição à abordagem dos Psicólogos Cognitivos, os educadores matemáticos consideram que as imagens mentais e as representações externas têm que interagir para se atingir um melhor entendimento no processo de resolução de problemas.

Essas reflexões se justificam nesta pesquisa considerando-se que a formação da imagem mental interfere diretamente na representação do conhecimento dos alunos. Ressalta-se também a importância da ação pedagógica do professor nesse contexto, onde, a interação entre ele e os alunos, na produção dos significados pela criança, exerce um papel fundamental, e que deve ser investigada.

Piaget e Inhelder (1993) destacam que a natureza do espaço infantil, de acordo com suas pesquisas e as de colaboradores, é essencialmente ativa e operatória começando por intuições topológicas elementares bem antes de tornar-se simultaneamente um espaço projetivo euclidiano (p.12). Os autores enfatizam e mostram que a representação espacial é construída apoiada em organização de ações realizadas pelo sujeito, no início do desenvolvimento em ações motoras e, mais tarde, por meio de ações interiorizadas que se convertem em sistemas operacionais.

Esses mesmos pesquisadores destacam a importância das ações em relação à percepção no que diz respeito à construção do espaço. Nesse sentido, não é a leitura imediata e o acesso sensorial que enseja ao sujeito a concepção de espaço, como mostram os resultados da pesquisa de Piaget e Inhelder (1993). Essa representação resulta, nesse quadro, de manipulações ativas do meio espacial, que implicam em elaborações e re-laborações do sujeito. Segundo os referido autores,

“A percepção é o conhecimento dos objetos resultantes do contato direto com os mesmos. Ao contrário disto, a representação ou imaginação envolve a evocação dos objetos em sua ausência ou, quando ocorre paralela à percepção, em sua presença. Ela completa o conhecimento perceptivo pela referência a objetos não percebidos realmente. Dessa forma, entendemos que os problemas do espaço têm um caráter operatório na formação desta noção não se reduzindo à experiência perceptiva” (Piaget e Inhelder, 1967).

A percepção espacial desempenha um papel fundamental no estudo da Geometria, reconhecendo formas, propriedades geométricas, transformações e relações espaciais. Catalá et al (1995) afirmam que a percepção espacial pode ser comparada à compreensão de um texto escrito, isto é,

“... da mesma maneira que no processo de leitura se agrupam as letras em palavras e estas em frases, obtendo-se por compreensão global uma informação, a percepção espacial se ocupa de obter uma mensagem por meio da 'leitura compreensiva' das formas e relações espaciais do nosso redor” (Catalá et al, 1995, p.16) (tradução da pesquisadora).

Catalá et al (1995) descrevem cinco etapas para o desenvolvimento da percepção espacial, propostas por Pallascio et al⁷³ (1985), as quais incluem ações que vão desde o reconhecimento dos objetos à construção e aplicação dos mesmos, quais sejam: *“visualização, estruturação, tradução, determinação e classificação”* (p.17). A etapa da *visualização* consiste em, após o sujeito ter observado um objeto, sua visualização poder ser memorizada em imagens parciais, para que possa reconhecer objetos iguais ou semelhantes, em outras posições ou escalas diferentes. Com relação à *estruturação*, esta consiste no fato do sujeito poder reconhecer e reconstruir o objeto a partir de seus elementos constitutivos básicos, após ter sido visualizado. A *tradução* seria a etapa na qual o sujeito consegue reconhecer um objeto a partir de uma descrição literária, ou vice-versa. A capacidade do sujeito poder reconhecer a existência de um objeto a partir de uma descrição de suas relações métricas é denominada de *determinação*. Por último, a *classificação* consiste na etapa em que o sujeito pode

⁷³ PALLASCIO, R., et al (1985) *Typologie des habilités perceptives d'objets polyèdre* CIRADE, n. 6, Universidad de Quebec.

reconhecer classes de objetos equivalentes segundo diferentes critérios de classificação (p.17).

Segundo Catalá et al (1995), essas etapas permitem o desenvolvimento das habilidades de *observar* (visualização), *abstrair* (estruturação), *comunicar* (tradução) e *organizar* (determinação e classificação) (p.17).

Yakimanskaya descreve *pensamento espacial* como uma forma de atividade mental que torna possível criar imagens espaciais e manipulá-las no decorrer da resolução de vários problemas teóricos e práticos, incluindo operações verbais e conceituais (Yakimanskaya⁷⁴, 1991, citado por Gutiérrez 1996a).

Lean e Clements (1981), seguindo as teorias psicológicas dominantes na época, definiram *imagens mentais* como uma ocorrência da atividade mental correspondente à percepção de um objeto, quando este não está presente para o sujeito. Quanto às *imagens visuais* os autores dizem que elas ocorrem como uma figura no “olho” da mente. E a *habilidade espacial* é definida pelos autores como a habilidade de formular imagens mentais e manipular estas imagens na mente (Lean e Clements⁷⁵, 1981, citados por Gutiérrez, 1996a).

Presmeg (1986) sugere que a definição ideal para *imagem visual* seria a de um esquema mental descrevendo informação visual ou espacial, requerendo ou não a presença de um objeto ou outra representação externa, definição essa mais ampla do que as anteriormente apresentadas pelos demais pesquisadores (p.42).

A pesquisa da referida autora, em problemas matemáticos, estabeleceu diferentes tipos de *imagens visuais*, classificando-as em:

- *Imagens concretas, pictóricas*: seria um tipo de imagens “figuras na mente”;
- *Imagens padrão*: seriam as imagens representando relacionamentos matemáticos abstratos de uma maneira visual.

⁷⁴ YAKIMANSKAYA, I. S. (1991) *The development of spatial thinking in schoolchildren* (“Soviet Studies in Mathematics Education”, vol. 3). Reston, USA: NCTM.

⁷⁵ LEAN, G. A e CLEMENTS, M. A. (1981) *Spatial ability, visual imagery and mathematical performance*. In *Educational Studies in Mathematics* 12 (1), pp.1-33.

- *Imagens de fórmulas*: seriam as imagens que os estudantes poderiam “ver” em suas mentes, da mesma maneira com que apareceram escritas no quadro-negro ou nos livros textos (uma fórmula, por exemplo).
- *Imagens cinestésicas*: seriam aquelas imagens que são criadas, transformadas ou comunicadas com a ajuda de movimentos físicos.
- *Imagens dinâmicas*: seriam aquelas imagens com movimento na mente.

Piaget e Inhelder (1995) distinguem duas grandes categorias de *imagens mentais*:

“as imagens reprodutivas, que se limitam a evocar espetáculos já conhecidos e percebidos anteriormente, e as imagens antecipadoras, que imaginam movimentos ou transformações, assim como seus resultados, mas sem haver assistido anteriormente à sua realização” (p.62).

Segundo os autores acima referidos, as imagens reprodutivas podem estar apoiadas em configurações estáticas, em movimentos (mudança de posição) e em transformações (mudança de forma) devido ao fato de que essas três situações podem ocorrer na experiência perceptiva do sujeito. As imagens antecipadoras podem ocorrer quando o sujeito imagina uma transformação de uma figura geométrica sem que ela tenha sido materializada no objeto.

Piaget (1977) distingue *percepção* de *representação*, considerando que percepção é o conhecimento dos objetos a partir do contato direto com eles, e que representação implica a evocação dos objetos em sua ausência, cuja construção é progressiva e não seria alcançada precocemente.

Bishop (1983) reconhece duas habilidades em visualização. A primeira, denominada de *processo visual* de informação (VP), inclui a *“tradução de relacionamentos abstratos e dados não figurais em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais e a transformação de uma imagem visual em outra”* (p.184). A segunda habilidade é a *interpretação de informação figural* (IFI), que envolve o conhecimento de convenções visuais e vocabulário espacial usado em trabalho geométrico, gráficos, mapas e diagramas de todos os tipos e a leitura e interpretação de imagens visuais, tanto mentais quanto físicas (p.184) (tradução da pesquisadora).

Gutiérrez (1996a) ressalta que McGee⁷⁶ (1979), resumindo resultados de várias pesquisas sobre habilidades espaciais, descreveu dez diferentes habilidades distribuídas em duas classes, quais sejam:

“Habilidades de visualização espacial: 1) habilidade de imaginar a rotação de um objeto descrito, o deslocamento em um sólido, e as mudanças relativas de posição de objetos no espaço; 2) habilidade de visualizar uma configuração na qual há movimento entre partes; 3) habilidade em compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação; 4) habilidade de manipular ou transformar a imagem de um modelo espacial em outro arranjo.

Habilidade de orientação espacial: 1) habilidade de determinar relacionamentos entre diferentes objetos espaciais; 2) habilidade de reconhecer a identidade de um objeto quando é visto de diferentes ângulos ou quando o objeto é movido; 3) habilidade de considerar relações espaciais onde a orientação do corpo do observador é essencial; 4) habilidade de perceber modelos espaciais e compará-los entre si; 5) habilidade de permanecer orientado (não se confundir) por variadas orientações nas quais um objeto espacial pode ser apresentado; 6) habilidade de perceber modelos espaciais ou manter orientação relativa a objetos no espaço” (Gutiérrez, 1996a, pp.8-9) (tradução da pesquisadora).

Procurando unificar a terminologia usada por vários autores e integrando os conflitos definidos por eles em uma única rede, Gutiérrez (1996a) se restringiu ao contexto da Educação Matemática, no qual os termos *imagem mental*, *imagem espacial* e *imagem visual* podem ser considerados basicamente equivalentes. Nesse contexto, os termos *visualização*, *imagens visuais* e *pensamento espacial* também podem ser considerados equivalentes.

Para Gutiérrez (1996a), a visualização em Matemática é “*um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades*”. Acrescenta que ela estaria integrada por quatro principais elementos: *imagens mentais*, *representações externas*, *processos de visualização* e *habilidades de visualização* (p.9) (tradução da pesquisadora).

⁷⁶ McGEE, M. G. (1979) *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. Psychological Bulletin 86.5, pp. 889-918.

Nesse sentido, o referido autor considera que

*“...uma **imagem mental** é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais;*

*... uma **representação externa pertinente à visualização** é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos diagramas, etc, que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual;*

*... um **processo de visualização** é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas”* (Gutiérrez, 1996a, p.9) (tradução da pesquisadora).

Com relação às habilidades de visualização, o autor considera um conjunto de habilidades que devem ser adquiridas pelos indivíduos, possibilitando-lhes desenvolver os processos necessários, como imagens mentais específicas para um dado problema; essas habilidades podem ter bases bem diferenciadas.

Gutiérrez (1996a) salienta que a Geometria pode ser considerada como a origem da visualização em Matemática, mas ressalta que, examinando publicações dos últimos anos que tratam de visualização na Educação Matemática, encontrou trabalhos que enfocam o ensino e a aprendizagem de Cálculo (pensamento matemático avançado), muitos são em Pré-álgebra e Sistemas Numéricos, alguns em Geometria Plana, e somente poucas publicações enfocando a Geometria Espacial.

Esse fato demonstra que as pesquisas que têm abordado esse tema ainda são insuficientes no campo da Educação Matemática, tal como foi assinalado anteriormente, considerando-se que a visualização tem sido reconhecida como um componente necessário para o ensino e aprendizagem da Geometria (exceção do período da Matemática Moderna).

A produção de imagens, possibilitando ver em perspectiva os objetos do espaço, é extremamente propícia para o desenvolvimento das intuições, dando acesso a novas figuras e, provavelmente, o uso de computadores trará novos elementos ao traçado utilizado anteriormente apenas com régua e compasso.

Com relação à dificuldade causada pela representação em perspectiva, Soller (1991) cita as idéias de Freudenthal⁷⁷ (1983), reproduzidas abaixo, com as quais não se pode deixar de concordar.

“Foi criada uma teoria geométrica – a perspectiva – para deduzir como se vêem as coisas, e esta teoria pode confirmar-se experimentalmente mediante uma máquina fotográfica, ao menos em tanto quanto está permitido identificar entre si as lentes da câmara com o olho e as capas fotossensíveis do filme com a retina. Sem dúvida, o revelado de um filme e o processamento no cérebro de uma imagem da retina não parecem ser procedimentos isomórficos. Em qualquer caso, a imagem mental de, por exemplo, um cubo parece diferir consideravelmente da imagem visual prescrita pela teoria da perspectiva. Ver, interpretar e produzir desenhos em perspectiva não se constitui em uma habilidade simples mas sim algo que tem que ser aprendido. De nenhuma maneira posso dizer como é a imagem mental de um cubo (na realidade depende de várias circunstâncias). Certamente implica muitas outras características do que as que uma pessoa vê ou se espera que veja. Implica em tudo o que se necessita para reconhecer, fazer, produzir e reproduzir cubos. Inclui faces, ainda que não se possam ver mais que três de uma vez e pode-se não estar seguro do número real, quatro, seis, ou oito. Sabe-se que um homem que está de frente tem uma costa, ainda que seja invisível: sabe-se também que uma casa contém cômodos e escadas por detrás de suas paredes” (Freudenthal, 1983, citado por Soller, G. G., 1991, p. 179) (grifo e tradução da pesquisadora).

O que tem sido verificado em muitos trabalhos publicados e também na prática pedagógica é que, conforme argumenta Freudenthal (1983), o ensino tradicional de Geometria sequer enfrenta o problema de reproduzir os procedimentos para uma representação em perspectiva mas, sim, espera que o aluno capte e aceite os métodos de representar dos adultos.

Para Freudenthal (1983),

“... A perspectiva é a representação do espaço não no sentido de um objeto mental, mas sim da reprodução em um pedaço de papel, um método adquirido por imitação, que é sistematicamente exercitado, ensinando ao estudante que veja o que realmente vê – linhas, planos, luminoso, sombra – e que finalmente se racionaliza em uma teoria completamente desenvolvida. Mas para enfatizá-lo uma vez mais, em primeiro lugar a perspectiva não é um contexto geométrico, mas sim uma classe de reprodução, no mesmo nível que outras, e que não

⁷⁷ Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel: Dordrecht.

se altera durante um longo período de tempo” (Freudenthal, 1983, citado por Soller, G. G., 1991, p. 179) (grifo e tradução da pesquisadora).

As investigações sobre as representações e as descrições de formas espaciais têm mostrado que as crianças, assim como os adultos, apresentam dificuldades para desenhar uma representação tridimensional. Uma dessas dificuldades apresentadas diz respeito ao traçado das linhas no papel, que no modelo correspondente, eram paralelas ou perpendiculares (Soller, 1991).

Esse tipo de dificuldade pôde ser percebido durante a prática pedagógica, tanto com alunos quanto com as professoras, em cursos de aperfeiçoamento, como se observou no Capítulo 1, conduzindo a reflexões a respeito da maneira com que as representações geométricas são tratadas na sala de aula, onde, muitas vezes, se reproduzem desenhos sem considerar o que estes estão representando.

Bishop (1979) verificou que o reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais não é evidente para todos os indivíduos como poderia se pensar. O referido autor desenvolveu uma pesquisa em Papua New Guinea (PNG), uma região que, no momento da pesquisa, estava experimentando profundas mudanças; onde a maioria da população tinha pouco contato com a sociedade tecnológica e com a cultura ocidental. A pesquisa de Bishop (1979) relacionou-se com os aspectos visuais e espaciais da Matemática. Ele testou, com detalhes, doze estudantes masculinos do primeiro ano da Universidade, com idades variando entre 16 e 26 anos. O seu objetivo era identificar relativas potencialidades e relativas deficiências no campo espacial e tentar relacioná-las a diferentes linguagens, ambientes e características culturais do conhecimento dos estudantes.

O pesquisador afirma que as várias tarefas que foram solicitadas aos estudantes mostraram que eles não apresentavam familiaridade com as convenções e vocabulários dos diagramas comumente usados na educação ocidental. Algumas tarefas mostraram esse fato diretamente, ressaltando Bishop (1979), como, por exemplo, a que pedia aos estudantes para fazerem modelos usando material concreto (canudos e conexões plásticas para ângulos) baseados em desenhos. Os desenhos sugeriam formas e linhas pontilhadas, usadas para indicar profundidade. Para essa tarefa os estudantes deveriam usar algumas convenções, as quais não são reconhecidas imediatamente por culturas não

ocidentais; isso fez com que dois dos estudantes produzissem objetos inteiramente planos para figuras bidimensionais, como as mostradas nos diagramas da Figura 3.2. O autor ressalta que fica claro que esses estudantes não tinham familiaridade com as convenções oblíquas, quando o quadrado, frente do objeto (cubo), é desenhado e os demais elementos (do cubo) são mostrados a partir dele (p.137).

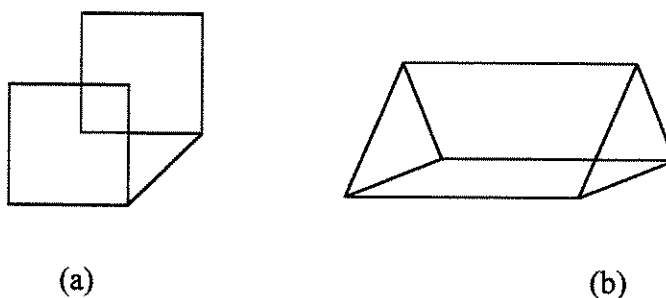


Figura 3.2 - Diagramas apresentados por Bishop (1979), p.137.

As considerações de Del Grande⁷⁸ (1987) a respeito de habilidade de percepção espacial diferem, segundo o próprio autor, das orientações de investigações habituais, que normalmente estudam essas habilidades necessárias para o sucesso em Geometria. Ele sugere que alguns tipos de atividades geométricas poderiam desenvolver e realçar as habilidades espaciais da criança da escola primária. O autor citado define percepção espacial como “*a habilidade de reconhecer e discriminar estímulos no e do espaço e para interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores*” (p.126) (tradução da pesquisadora).

Na ótica desse autor, a natureza das atividades matemáticas relacionadas com a Geometria da escola elementar permite a aquisição de experiências de percepção visual dando aos professores oportunidade de observar e detectar, desde cedo, o percentual de crianças com problemas de aprendizado geométrico. Segundo ele, essa percepção inicial das habilidades de percepção visual será fundamental para preparar os programas de Geometria e selecionar atividades que irão melhorar a percepção visual dos alunos.

⁷⁸ Publicação traduzida em português: DEL GRANDE, J. J. (1994) *Percepção espacial e geometria primária*. In Lindquist, M. M. e Shulte A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Para Hoffer, a habilidade de percepção visual e os conceitos geométricos podem ser aprendidos simultaneamente, isto porque

“... a geometria exige que o aluno reconheça figuras, suas relações e suas propriedades. A geometria informal poderia ser ensinada facilmente e incluída num programa de treinamento de percepção visual, de modo a melhorar a percepção visual do aluno” (Hoffer⁷⁹, 1977, citado por Del Grande, 1987, p.126) (tradução da pesquisadora).

Del Grande (1994) salienta que os primeiros teóricos que identificaram e testaram habilidades de percepção foram Frostig e Horne⁸⁰ (1964), os quais forneceram uma descrição abrangente sobre percepção espacial. Del Grande (1994) explica que esses autores produziram material para testes referentes às cinco primeiras das sete aptidões espaciais, quais sejam: 1) coordenação visual-motora; 2) percepção de figuras em campos; 3) constância de percepção; 4) percepção de posição no espaço; 5) percepção de relações espaciais; enquanto Hoffer (1977) examinou mais duas dessas aptidões, a saber: 6) discriminação visual e 7) memória visual (p.158).

Essas habilidades, segundo Del Grande (1994), foram selecionadas por terem relevância no estudo da Matemática e, em particular, da Geometria e são consideradas no presente estudo.

1. Entende-se por *“coordenação visual-motora a habilidade de coordenar a visão com movimentos do corpo”* (Del Grande, 1994, p.158). Quando as crianças apresentam dificuldades motoras em habilidades e movimentos simples, também possuem dificuldades em pensar qualquer outra coisa quando se concentram na tarefa que estão fazendo. Exemplificando, Del Grande (1994) explica que, se uma criança apresenta dificuldade para ligar pontos no papel, ou juntar blocos para construir estruturas de madeira, é provável que não perceba as idéias ou noções geométricas envolvidas, pois só o esforço motor já é suficiente para absorvê-la completamente. Apenas quando esta coordenação se tornar habitual é que ela será capaz de dar toda sua

⁷⁹ HOFFER, A. R. (1977) *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization*. Palo Alto, California: Creative Publications.

⁸⁰ FROSTIG, M. e HORNE, D. (1964) *The Frostig Program for the Development of Visual Perception*. Chicago: Follet Publishing Co.

atenção ao ato de aprender, percebendo objetos exteriores e suas relações. Esta habilidade constitui-se, dessa forma, indispensável para o aprendizado da Matemática e, de modo particular, para o aprendizado da Geometria, no qual as relações espaciais têm um papel de especial destaque.

2. *“Percepção de figuras em campos é o ato visual de identificar uma figura específica (o foco) num quadro (o campo)”* (Del Grande, 1990, p.158). O referido autor salienta que essa percepção é descrita como *“distinguir a frente do fundo”*. Para focalizar a atenção numa figura, há necessidade de se desconsiderar todos os marcos estranhos a ela, não se distraindo com estímulos visuais irrelevantes para sua caracterização. O estudo de Vurpillot discute *“em que medida crianças de quatro a sete anos de idade são capazes de decompor unidades de percepção em seus componentes e voltar a juntá-las em novas formas como problemas de figuras embutidas”*, constatando que 70% das crianças com quatro anos conseguiam identificar figuras sobrepostas (Vurpillot⁸¹, 1976, citado por Del Grande, 1994, p.158).

Del Grande (1994) considera que a *“percepção de figuras em campos”* é uma habilidade importante a tal ponto de prejudicar as crianças que não a adquirirem. Segundo ele, as atividades de percepção de figuras em campos incluem interseção de retas, interseção de figuras, figuras ocultas, figuras sobrepostas, finalização de figuras, reunião de partes de uma figura, semelhanças e diferenças e inversão de uma figura ou campo.

3. *“Constância de percepção ou constância da forma e tamanho é a habilidade de reconhecer que um objeto tem propriedades invariáveis, como tamanho e forma, apesar das várias impressões que pode causar conforme o ponto do qual é observado”* (Del Grande⁸², 1994, p.158). Del Grande (1990) identifica a constância da percepção da forma não mais vinculada a um determinado objeto, mas envolvendo o reconhecimento de certas figuras geométricas apresentadas em vários tamanhos, sombras, texturas e posições no espaço (p.15).

⁸¹ VURPILLOT, E. (1976) *The Visual Word of the Child*. Londres: George Allen & Unwin.

⁸² Ressalte-se que a primeira edição desse artigo foi publicada, originalmente, em 1987, em DEL GRANDE, J. J. (1987) *Spatial Percetion and Primary Geometry*. In Lindquist, M. M. e Shulte A. P. *Learning and Teaching Geometry, k-12*. Reston, Virginia: NCTM.

“*Constância de percepção*” constitui-se em um termo que também foi usado por Piaget e Inhelder⁸³ (1956), em referência à forma e aos tamanhos dos objetos (Del Grande, 1990, p.15).

Segundo Del Grande (1994), uma pessoa com constância de percepção “*reconhecerá um cubo visto de um ângulo oblíquo como um cubo*”, embora os olhos “vejam” uma imagem diferente quando o cubo é visto bem de frente ou de cima.

Nesse sentido, o autor cita Frostig e Horne (1964), referidos anteriormente, os quais descobriram que a constância de percepção depende, em parte, da aprendizagem e de experiências que são possibilitadas por atividades de natureza geométrica (p.159).

4. A “*percepção da posição no espaço*” é a habilidade que permite ao sujeito determinar a relação de um objeto com outro e com relação a si próprio (observador). Segundo Del Grande (1994), a ausência dessa habilidade “*resulta em inversões, que constituem um dilema para os educadores da área de matemática*”. As atividades desse componente lidam com a discriminação de rotações, reflexões e translações de figuras, as quais permitem que as crianças percebam que duas figuras são iguais (congruentes), quando uma é imagem da outra, mediante uma dessas transformações (p.159).

5. A “*percepção de relações espaciais* é a habilidade que o sujeito tem de ver dois ou mais objetos em relação a si próprio ou em relação um ao outro”. Se uma pessoa, exemplifica Del Grande (1994), vê que duas figuras são congruentes, quando uma é imagem da outra, por meio de uma transformação simétrica, como uma translação, uma rotação ou uma reflexão, essa pessoa consegue perceber as relações espaciais que lhe permitem observar a congruência, isto é, uma relação entre duas figuras (p.159).

6. “*Discriminação visual* é a habilidade de distinguir semelhanças e diferenças entre objetos” independentemente da posição. Del Grande (1994) explica que atividades de escolha e de classificação de objetos e formas geométricas, tal como se faz com os blocos lógicos⁸⁴ (atributos), podem ajudar as crianças a aprenderem a

⁸³ PIAGET, J. e INHELDER, B. (1956) *The Child's Conceptions of Space*. New York: W.W.Norton & Co.

⁸⁴ Blocos Lógicos: jogo de blocos composto de peças de madeira ou plástico, nas quais faz-se variar, sistematicamente, as seguintes variáveis: cor, forma, espessura e tamanho (Dienes, Z. P. (1986) *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. São Paulo: EPU, p. 3).

discriminar visualmente. “*As crianças podem usar desenhos e abstrações à medida que desenvolvem sua discriminação, fazendo comparações visuais e verbais entre as coisas que vêem*” (p.159).

7. “*Memória visual*” é a habilidade de lembrar precisamente de objetos que não estão mais à vista, relacionando suas características com as de outros objetos presentes ou ausentes. Segundo Hoffer, como a maioria das pessoas retém pequena quantidade de informações visuais – cerca de cinco a sete itens – por períodos relativamente curtos de tempo, para memorizar mais elementos ou informações, deverá lançar mão das abstrações e do pensamento simbólico (Hoffer, 1977, citado por Del Grande, 1994, p.159).

Tal recurso é comumente usado em atividades geométricas, tendo em vista a natureza da organização do conhecimento geométrico, que se fundamenta na identificação de características, a princípio, visuais, mas que acabam definindo-se como conceitos e relações abstratas. Atividades referentes à memória visual, segundo Del Grande (1994), envolvem a lembrança de um objeto entre dois ou mais, de um objeto submetido a inversões, ou da posição de muitos objetos (p.166).

Ao criticar o fato do ensino da Geometria ficar centrado na habilidade para demonstrações formais, Hoffer (1990) propõe um ensino voltado para o desenvolvimento de outras habilidades que possam ser mais práticas e que tenham uma natureza claramente geométrica. No quadro teórico a respeito das habilidades básicas em Geometria, apresentado a seguir, pode-se verificar que o referido autor propõe que tais habilidades alcancem um estado específico de desenvolvimento através dos diferentes níveis do modelo de Van Hiele (Hoffer⁸⁵, 1990, citado por Galindo, 1996, p.53).

⁸⁵ HOFFER, A. (1990) *La geometría es más que demostración*. Notas de Matemática, 29, pp.10-24.

		Nível				
		I	II	III	IV	V
		Reconhecimento	Análise	Ordenamento	Dedução	Rigor
H A B I L I D A D E	V i s u a l	Reconhecer diferentes figuras em um desenho Reconhecer informação contida em uma figura	Notar as propriedades de uma figura Identificar uma figura como parte de uma maior	Reconhecer interrelações entre diferentes tipos de figuras Reconhecer as propriedades comuns de diferentes tipos de figuras	Utilizar informação de outra figura para deduzir mais informações	Reconhecer supostas injustificações feitas ao usar figuras Conceber figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos
	V e r b a l	Associar o nome correto com uma figura dada Interpretar frases que descrevem figuras	Descrever adequadamente várias propriedades de uma figura	Definir palavras adequadas e concisamente Formular frases que mostrem relações entre figuras	Compreender as distinções entre definições, postulados e teoremas Reconhecer que informação dá um problema e que informação há que achar	Formular extensões de resultados conhecidos Descrever vários sistemas dedutivos
	P a r a d e s e n h o	Fazer desenhos de figuras nomeando adequadamente as partes	Traduzir informação verbal dada em um desenho Utilizar as propriedades dadas de uma figura para desenhá-la ou construí-la	Dada certa figura construir outras relacionadas com a primeira	Reconhecer como e quando usar elementos auxiliares em uma figura Deduzir de informação dada como desenhar uma figura específica	Compreender as limitações e capacidades de vários elementos do desenho Representar graficamente conceitos que não estão em vários sistemas dedutivos
	L ó g i c a	Dar-se conta de que há similaridades entre figuras Compreender a conservação das figuras em distintas posições	Compreender que as figuras podem classificar-se em diferentes tipos Notar que as propriedades servem para distinguir as figuras	Compreender as qualidades de uma boa definição Usar as propriedades para determinar se uma classe de figura está contida em outra	Utilizar as regras da lógica para desenvolver demonstrações Poder deduzir consequências a partir da informação dada	Compreender as capacidades e as limitações de pressupostos e postulados Saber quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico
H A B I L I D A D E	P a r a m o d e l o	Identificar formas geométricas em objetos geométricos	Reconhecer propriedades geométricas de objetos físicos Representar fenômenos em um modelo	Compreender o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos	Poder deduzir propriedades de objetos de informação dada Poder resolver problemas relacionados com objetos	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstratos Desenvolver modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e naturais

Habilidades básicas em Geometria segundo Hoffer (1990).
(In Galindo, 1996, p.53) (tradução da pesquisadora)

Cabe assinalar que, no quadro acima, quando o autor usa a palavra “figura”, a mesma deve ser entendida como uma idéia geométrica ou um desenho de um objeto geométrico ou mesmo como um símbolo.

Tartre (1990) apresenta uma categorização diferente para as *capacidades espaciais*, ou seja, a que considera dois tipos de capacidades: a *visualização espacial* e a *orientação espacial*. Nessa perspectiva, a *visualização espacial* envolve a capacidade de imaginar como se apresentará um objeto representado em uma gravura se ele for rotacionado, refletido, dobrado, ou desdobrado (Tartre⁸⁶, 1990, citado por Gordo, 1994). Já a *orientação espacial*, conforme a explicitação de Bishop (1983), envolve a capacidade de detectar as combinações de objetos de acordo com um padrão e também a capacidade de manter precisas as percepções, face à mudança de orientação. Ressalte-se que a diferença entre essas duas categorizações relaciona-se com o fato da visualização envolver sempre movimento ou alteração mental de um objeto, enquanto que, na orientação espacial, o que se altera é a perspectiva perceptual do observador (p.182).

Pelo fato da Geometria e o raciocínio espacial estarem intimamente ligados, muitos educadores têm sentido a necessidade de incluir o raciocínio espacial no currículo do ensino da Geometria como Gutiérrez (1996a, 1996b, 1998), Hershkowitz (1990), Gorgorió (1998), Parzysz (1988), Clements e Battista (1991), entre outros; entretanto, não há concordância sobre como deve ser feita.

Usiskin (1994) chama de dimensões as diferentes maneiras de considerar a Geometria em uma perspectiva curricular, para a formação de conceitos, discernindo quatro delas.

Na dimensão que ele denomina “*A geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras*”, o referido autor propõe pedir às crianças, das séries iniciais do Ensino Fundamental, que desenhem círculos, ou retângulos, ou retas paralelas e, mais tarde, pede-lhes imagens dessas figuras através de várias transformações: reflexões, rotações, mudança de tamanho. Conforme ressalta o autor, alguns psicólogos acreditam que os aspectos desta dimensão não são afetados pela

⁸⁶ TARTRE, L. (1990) *Spatial orientation skill and mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education*, 21, pp.216-229.

experiência. Entretanto, Usiskin (1994) argumenta que, como quase todos os outros aspectos da inteligência, a maioria das pessoas é afetada pela instrução ou pelo estudo achando, então, duvidoso que com esses aspectos seja diferente. Para ele, o que é ensinado provavelmente afetará a faculdade de visualização dos alunos. Porém, adverte que a visualização e o desenho são em geral negligenciados no estudo da Geometria. Fato esse já constatado no decorrer do presente estudo.

Na segunda dimensão, “*A Geometria como estudo dos aspectos espaciais do real, do mundo físico*”, o mesmo autor salienta que, embora a Geometria derive do mundo físico, suas ligações com esse mundo são ignoradas na maioria dos livros escolares. Ordenar essas ligações, segundo ele, constitui-se em um problema curricular não resolvido (p.33).

Quanto à dimensão “*A Geometria como o veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros cuja origem não é visual ou física*”, Usiskin (1994) argumenta que representações geométricas de idéias não geométricas poderiam ser melhor exploradas na sala de aula; como exemplo cita o conceito de simetria, com origem no mundo real e que, muitas vezes, é introduzido em Álgebra como propriedade dos gráficos de certas funções (p.33).

Finalmente, a dimensão “*A Geometria como exemplo de um sistema matemático*” é ressaltada pelo autor pelo fato da Geometria ser a única, dentre todas as áreas da Matemática, a ter como objetivos principais justificar, discutir lógica e dedução e escrever demonstrações (p.34).

Essas dimensões, sugeridas por Usiskin (1994), têm origem em suas pesquisas que constataram que o conhecimento de Geometria dos alunos da escola elementar era irregular e bastante limitado. Tais afirmações puderam ser comprovadas pela Avaliação Nacional Americana de 1982, a qual mostrou que menos de 10% das crianças de 13 anos de idade sabiam determinar o terceiro ângulo de um triângulo, dadas as medidas dos outros dois, por exemplo. Por outro lado, uma questão que pedia a hipotenusa de um triângulo retângulo, sendo dados os dois catetos, só foi resolvida corretamente por apenas 20% das crianças de 13 anos. Os resultados dessa pesquisa indicam, segundo Usiskin (1994), que, embora quase todos os professores concordem que a Geometria é importante o bastante para merecer um lugar de destaque em todos os níveis de ensino,

não há uma concordância quanto ao conteúdo, à sequência ou quanto ao tempo que o ensino de Geometria deve ter durante os anos de escolarização.

Gorgorió (1998) assinala que há evidências de que as habilidades espaciais dos estudantes podem ser desenvolvidas por diferentes métodos de ensino e, nesse caso, considera importante conhecer quais tipos de estratégias os estudantes usam na solução de problemas geométricos.

Parzysz (1988) estabelece a existência de dois níveis de representação de um sólido geométrico (objeto teórico caracterizado por sua definição matemática formal), aos quais correspondem diferentes quantidades de informações “perdidas”, quais sejam: *Nível 1*: formas de representação próximas aos sólidos, como representações tridimensionais como modelos de madeira, papel ou varetas; *Nível 2*: formas de representação mais afastadas dos sólidos, como representações bidimensionais (p.80).

Catalá et al (1995) destacam que no conhecimento do espaço geométrico é importante haver distinção entre os dois modos de compreensão e de expressão: “*o que se realiza de forma direta, que compreende a intuição geométrica - de “natureza visual” e o que se realiza de forma reflexiva, lógica – de “natureza verbal”*”. Segundo os autores, o primeiro é criativo e subjetivo e, o segundo é analítico e objetivo; e estes dois modos de conhecimento geométrico podem ser considerados como fases do desenvolvimento do pensamento (p.15).

Segundo Fischbein (1993) o objeto geométrico é tratado como “*conceitos figurais*” por causa da sua dupla natureza, já que é composto por duas componentes: uma *conceitual* e outra *figural*. A *componente conceitual* expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos através da linguagem escrita ou falada, com maior ou menor grau de formalismo, dependendo do nível de axiomatização com que se está trabalhando. A *componente figural* corresponde à imagem mental que associamos ao conceito e que, no caso da Geometria, tem a característica de poder ser manipulada através de movimentos como translação, rotação e outros, mantendo invariáveis certas relações.

Fischbein (1993) afirma que conceitos e imagens mentais são usualmente distinguidos nas teorias psicológicas. Citando Piéron⁸⁷ (1957), o autor diz que o que

⁸⁷ PIÉRON, H.(1957) *Vocabulaire de la Psychologie*. Paris: PUF.

caracteriza um **conceito** é o fato de que ele expressa uma idéia, uma representação geral, ideal de uma classe de objetos, baseada em seus traços comuns. Por outro lado, uma **imagem mental** é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. Segundo Fischbein (1993), em todas as teorias cognitivas atuais, conceitos e imagens são considerados duas categorias basicamente distintas de entidades mentais, exemplificando para explicar: “... o conceito de metal é a idéia geral de uma classe de substâncias que têm em comum um número de propriedades como condutor de eletricidade, etc. ... a imagem de um objeto metálico é a representação sensorial do respectivo objeto (incluindo cor, magnitude, etc.)” (p.139) (tradução da pesquisadora).

O autor apresenta essa distinção através de exemplos de demonstrações geométricas. Nessas demonstrações usa-se uma certa quantidade de conhecimentos conceituais, informação figural e operações representadas figuralmente, lidando com entidades independentes, isto é, com idéias abstratas (conceitos) e representações sensoriais (operações concretas). Ele ressalta que, em processos como esses, as operações são descritas como aparentemente práticas; entretanto, não é possível separar um objeto de si mesmo na prática. Isto significa que tratamos de um mundo ideal, com significados ideais, já que os objetos aos quais nos referimos, como pontos, lados, ângulos e as operações com eles, têm uma existência ideal, são de uma natureza conceitual; mas que, ao mesmo tempo, têm uma natureza figural intrínseca: somente enquanto nos referimos a imagens podemos considerar operações tais como separar, inverter ou superpor.

Fischbein (1993) faz alguns destaques a respeito das características das figuras geométricas relacionadas a sua natureza conceitual, que são considerados importantes para o presente estudo.

Primeiramente, diz que no raciocínio matemático não nos referimos aos elementos de um objeto geométrico (pontos, lados, ângulos, triângulos propriamente ditos) como objetos materiais ou desenhos; os objetos materiais – sólidos ou desenhos – são somente modelos materializados de entidades mentais com as quais os matemáticos lidam.

Em segundo lugar, o autor destaca que somente em um sentido conceitual pode-se considerar a perfeição absoluta das entidades geométricas: linhas, retas, círculos, quadrados, cubos, etc.

Em terceiro lugar, destaca que estas entidades geométricas não têm correspondentes materiais genuínos. Isto é, pontos (objetos de dimensão zero), linhas (objetos unidimensionais), planos (objetos bidimensionais) não existem, não podem existir em realidade. Os objetos reais da nossa experiência prática são necessariamente tridimensionais, “... *mesmo o cubo ou a esfera aos quais os matemáticos se referem, não existem em realidade, embora eles sejam tri-dimensionais. Estes são também meras construções mentais, as quais não se supõe terem qualquer realidade substancial*” (p.141) (tradução da pesquisadora).

Em quarto lugar, Fischbein (1993) destaca que todas as construções geométricas são representações gerais, como todo conceito, e nunca cópias mentais de objetos concretos particulares. Por exemplo, quando se desenha um certo triângulo ABC em uma folha de papel a fim de checar algumas de suas propriedades, como por exemplo, o fato de suas alturas serem concorrentes, não se faz referência ao desenho respectivo particular, mas a uma certa forma que pode ser a forma de uma infinita classe de triângulos.

Por último, o autor acima destaca uma quinta característica das figuras geométricas que também está relacionada à sua natureza conceitual, ou seja, o fato das propriedades das figuras geométricas serem impostas ou derivadas de definições no domínio de um certo sistema axiológico. Como exemplo, o referido autor explica que

“... um quadrado não é uma imagem desenhada numa folha de papel. É uma forma controlada por sua definição (embora possa ser inspirada por um objeto real). Um quadrado é um retângulo que tem lados iguais. Partindo destas propriedades pode-se prosseguir descobrindo outras propriedades do quadrado (a igualdade de ângulos, que são todos ângulos retos, a igualdade das diagonais, etc.)” (Fischbein, 1993, p.141) (tradução da pesquisadora).

Fischbein (1993) ressalta que uma figura geométrica pode ser descrita como tendo, intrínseca à ela, propriedades conceituais, mas que ela não é um mero conceito. Segundo ele, uma figura geométrica é uma imagem visual, que possui uma propriedade

que conceitos usuais não possuem, ou seja, ela inclui a representação mental da propriedade do espaço (p.141).

Embora muitos estudantes possam considerar a figura geométrica (desenho) como o próprio conceito, como já se observou anteriormente no segundo capítulo desta pesquisa, é importante considerar as observações acima no processo ensino-aprendizagem da Geometria.

O referido autor enfatiza que todas as figuras geométricas representam construções mentais que possuem, simultaneamente, propriedades conceituais e figurais; exemplificando, apresenta um conhecido problema: *“Em um círculo com seu centro em O desenha-se dois diâmetros perpendiculares AB e CD . Escolhe-se arbitrariamente um ponto M e desenha-se as perpendiculares MN e MP nos dois diâmetros, conforme o desenho mostra. Qual é o comprimento de PN ?”* (Figura 3.3).

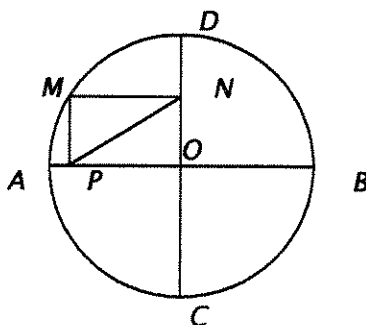


Figura 3.3 - Ilustração do problema apresentado por Fischbein (1993, p.142).

Aparentemente pode parecer impossível achar a solução pois os comprimentos de MN e MP dependem da posição do ponto M ; entretanto, ao notar-se que $MNOP$ é um retângulo, a solução fica evidente, visto que MO é diagonal desse retângulo, conseqüentemente, MO é igual a PN , que é igual ao raio dessa circunferência.

O referido autor ressalta que tanto a igualdade das diagonais, como a dos raios não são questionadas; além disso, essas medidas não dependem do desenho propriamente dito já que são impostas por definições e teoremas. O aspecto que o autor enfatiza como sendo essencial e que deve ser destacado nesse exemplo é que

“... a conclusão não é desenhada por se considerar separadamente a imagem e as restrições formais, mas por um único processo, no qual uma figura “limpa” é considerada, revelando relações lógicas. ...O fato de se chegar subitamente à solução, imediatamente após a compreensão do retângulo MNOP, sem uma investigação intermediária, sustenta a idéia de que a figura considerada é, desde o começo, não uma imagem comum, mas uma estrutura logicamente controlada. A fusão entre conceito e figura tende a ser, neste caso, completa” (Fischbein, 1993, pp.142-143) (tradução da pesquisadora).

Para Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação no raciocínio geométrico são entidades mentais chamadas de conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (formas, posição, magnitude) e que, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais, como idealidade, abstração, generalidade, perfeição.

O autor destaca ainda que, quando se opera com uma figura geométrica, a ação do sujeito é como se nenhuma outra qualidade contasse, o que não quer dizer que a representação que se tem em mente seja desprovida de qualquer qualidade sensorial, como cor, por exemplo.

Fischbein (1993) chama a atenção também para a necessidade de se considerar três categorias de entidades mentais quando se faz referência a figuras geométricas, ou seja: a definição, a imagem (baseada na experiência perceptivo-sensorial, como a imagem de um desenho) e o conceito figural. O referido autor enfatiza que o conceito figural é uma realidade mental, a construção conduzida por raciocínio matemático no domínio da Geometria, isento de quaisquer propriedades concretas sensoriais, mas que revela propriedades figurais.

O conceito figural, afirma o autor citado, é também um significado com uma particularidade, isto é, é um tipo de significado que inclui figura como uma propriedade intrínseca. Nesse sentido, exemplifica o autor, o significado genuíno da palavra círculo em Geometria, como é manipulado pelo nosso processo de raciocínio, não é redutível a uma definição puramente formal, mas é uma imagem controlada por uma definição. Segundo o autor referido, *“... sem esse tipo de imagens espaciais, a Geometria não existiria como um ramo da Matemática”* (p.149) (tradução da pesquisadora).

Tendo em vista a ambigüidade que o termo “figura” pode denotar, Fischbein (1993) enfatiza que, em seu trabalho, figura refere-se somente a imagens mentais. Como uma figura possui uma certa estrutura, uma forma, sugere que algumas especificações

deveriam ser acrescentadas: 1) *figura geométrica*: uma imagem mental cujas propriedades são completamente controladas por definição; 2) um *desenho* não é uma figura geométrica ele próprio, mas um gráfico ou uma incorporação material, concreta dela, e 3) *imagem mental* de uma figura geométrica é, usualmente, a representação do modelo materializado dela (p.149).

A figura geométrica, ela própria, é somente a idéia correspondente da entidade figural idealizada, abstrata, estritamente determinada por sua definição.

O desenho associado ao objeto geométrico desempenha um papel fundamental na formação da imagem mental. Para o aluno, nem sempre fica claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto. Quando, para alguns, o desenho desempenha uma expressão de entendimento do objeto geométrico, isto é, basta desenhá-lo em uma folha de papel para compreender o problema, para outros pode se constituir em um obstáculo para este entendimento. Isto ocorre porque o desenho guarda algumas características particulares que não pertencem ao conjunto de condições geométricas que definem o objeto, é o caso das projeções.

Baldy, Chatillon e Cadopi dizem que “ler” um desenho de um objeto em perspectiva é uma inferência sobre o objeto a partir do seu desenho,

“... o desenho, além de ter o estatuto de substituto que remete a um outro objeto (o espaço do desenho remete ao espaço do objeto desenhado)... tem o estatuto do objeto autônomo (é um conjunto de traços e de superfícies que constitui um grafismo que é um objeto em si)” (Baldy, Chatillon e Cadopi⁸⁸, 1993, citados por Cavalca, 1998, p.32).

Fischbein (1993) refere-se a esta questão explicando que a dificuldade dos estudantes em manipular objetos geométricos, negligenciando o aspecto conceitual por pressão de restrições do desenho, constitui-se em um dos maiores obstáculos para o processo ensino-aprendizagem da Geometria. Segundo ele, condições figurais do desenho passam despercebidas do controle conceitual. O autor ressalta que os estudantes deveriam ser constantemente expostos a situações conflituosas para que pudessem

⁸⁸ BALDY, R.; CHATILLON, J. e CADOPPI, M. (1993) *Dessin plan, dessin en perspective: étude des effets de transfert chez des adultes débutants. Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble: Editions La Pensée Sauvage, pp. 17-34.

executar corretamente tarefas de acordo com a definição, e não de acordo com o que parece a eles ser imposto pela imagem. Enfatizando a predominância da definição sobre a figura, usando e interpretando o conceito figural eles estariam incorrendo em menos erros em sala de aula (p.149).

Pais (1996) destaca que a representação dos conceitos geométricos por um desenho é um dos recursos didáticos mais fortemente consolidados no ensino e na aprendizagem da Geometria, como já se abordou no Capítulo 2 desta pesquisa. Ele distingue quatro elementos fundamentais no processo de representação plana do espaço tridimensional, que intervêm fortemente na aprendizagem da Geometria, sendo que cada um deles exerce uma influência considerável nessa representação, quais sejam: **objeto, desenho, imagem mental e conceito**.

O autor usa o termo **objeto** em sua concepção concreta, associado aos modelos e materiais didáticos. Pais (1996) considera que o objeto pode ser considerado como uma forma primária de representação do conceito pelo fato do processo da construção teórica ser lento, gradual e complexo e que, por isso, é possível admitir a existência de diferentes níveis de conceitualização, ressaltando que:

“...o problema dessa consideração é que, implícita à noção de representação, está uma visão platônica de se conceber o conhecimento, na qual o homem está bem distanciado do mundo das idéias. Daí a necessidade de se levar em conta todas as limitações inerentes ao próprio processo de representação” (Pais, 1996, p.68).

Nesse caso, é preciso estar claro para o sujeito que o representante é simplesmente um modelo físico, contribuindo na formação das idéias, não as substituindo.

Na concepção de Pais (1996), da mesma forma que o objeto, o **desenho** é também de natureza essencialmente concreta e particular e, portanto, oposto às características gerais e abstratas do conceito. Nesse caso, considera que esta correlação entre o particular e o geral, entre o concreto e o abstrato, que envolve a representação conceitual, revela o principal objetivo didático, isto é, a necessidade de transpor o próprio desenho (p.68). O referido autor destaca que o uso do desenho em Geometria Plana, que, muitas vezes, é identificado pelo aluno como o próprio conceito, é bem mais

simples do que quando se trata da Geometria Espacial, a qual exige o uso da perspectiva, uma das maiores dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos geométricos, como pôde ser verificado anteriormente no decorrer deste estudo.

Sangiacomo (1996) estudou a passagem do desenho para a figura geométrica, no âmbito histórico e pedagógico. A autora analisa dois pontos, considerados por ela como críticos nesse processo: a dificuldade que os alunos têm em reconhecer os invariantes de uma figura e o fato de que os alunos, em nenhum momento, são levados a perceber que existe uma classe de figuras que representa um objeto geométrico. Ela percebeu que, da forma como vem sendo apresentado, o ensino das figuras geométricas tem gerado uma série de obstáculos didáticos aos alunos.

Pais (1996) estudou as imagens mentais que podem ser associadas aos conceitos geométricos, em um contexto da epistemologia da Geometria, baseando-se nos trabalhos de Denis (1979⁸⁹ e 1989⁹⁰) que são dedicados à teoria cognitiva. Segundo ele, essas

“...imagens que são de natureza essencialmente diferente daquelas do objeto e do desenho podem ser destacadas por duas características básicas: a subjetividade e a abstração. Pelo fato de serem abstratas, podem ser relacionadas aos conceitos, embora seu aspecto subjetivo as afaste da natureza científica” (Pais, 1996, p.70).

Embora considerando ser difícil definir formalmente **imagem mental**, o autor diz que:

“... pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens mentais quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Assim como as noções geométricas são idéias abstratas e, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos” (Pais, 1996, p.70).

⁸⁹ DENIS, M. (1979) *Les Images Mentales*. Paris: Presse Universitaire Française.

⁹⁰ DENIS, M. (1989) *Image et Cognition*. Paris: Presse Universitaire Française.

Com relação à generalidade e à abstração dos **conceitos** geométricos, Pais (1996) enfatiza que eles são construídos lentamente, em um processo dialético envolvendo a influência do mundo físico e uma reflexão intelectual sobre este mundo. Para o autor *“se, por um lado, a busca desses atributos tem sido a ênfase principal do ensino da Geometria, por outro, as dificuldades na concretização deste objetivo também têm sido persistentes”* (p.70). O autor considera que uma melhor compreensão dessa natureza abstrata e geral passa por um processo evolutivo no qual o aluno pode inclusive reviver dificuldades ocorridas na própria evolução histórica do conceito. Nesse processo, o aluno recorrerá ao que lhe estivesse mais próximo e disponível, entrando em cena as representações por objetos e desenhos e, posteriormente, pelas imagens mentais.

De acordo com o autor citado, a intuição tem relação com as imagens mentais, *“pois ambas apresentam não só uma certa disponibilidade de utilização como também a propriedade de serem essencialmente subjetivas”* (p.73). Entretanto, salienta que elas não constituem recursos aceitos para o processo de validação do conhecimento.

Pais (1996) salienta que a representação de um conceito só faz sentido se o sujeito já estiver em um certo nível de formalização. Nesse sentido, diante das dificuldades impostas pela abstração, ocorre, no início da aprendizagem, uma identificação, por parte do aluno, entre o conceito e sua representação. Por exemplo, *“um simples traço no quadro negro ou no papel passa a ser a própria reta, como no caso clássico da geometria plana, em que os conceitos são identificados ao seu desenho”* (p.71).

Em situações práticas de sala de aula, quando o objetivo é desenvolver a percepção do espaço geométrico, o professor espera que o aluno volte a atenção exclusivamente à estrutura geométrica do objeto. Por exemplo, quando se observa um cubo, do ponto de vista da Geometria, a atenção do sujeito concentra-se nos elementos principais que esquematizam sua forma, fazendo-se abstração de sua cor, textura, densidade, etc.; imagina-se a forma de suas faces, arestas, vértices; entretanto, essa exploração é geralmente apenas visual. Porém, quando o professor permite a manipulação ou, inclusive, a construção do objeto, a compreensão da estrutura, sua percepção espacial pode ser mais completa.

Nesse sentido, os quatro elementos destacados por Pais (1996) – objeto, conceito, desenho e imagem mental não podem ser considerados desvinculados um dos outros. Aliado a esses elementos, Pais (1996) incorpora três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico, os quais foram distinguidos na análise epistemológica da Geometria Espacial desenvolvida por Gonseth⁹¹ (1945), e que são: o intuitivo, o experimental e o teórico. Ressalta que da “...*mesma forma que há uma base intuitiva no método axiomático, o apelo à experiência acaba determinando uma forte influência na gênese das noções teóricas da Geometria. ... As diversas relações epistemológicas que interligam esses elementos constituem o eixo central da aprendizagem geométrica*” (p.73).

Assim, como ressalta Pais (1996), acredita-se que o objeto e o desenho constituem-se em recursos materiais auxiliares à construção de um conhecimento de natureza experimental, embora, por si mesmos, aqueles não caracterizem as noções geométricas. Entretanto, na construção do conhecimento teórico geométrico, o qual é constituído pelos conceitos, são necessários tanto o recurso simultâneo, tanto as bases intuitivas, quanto a atividade experimental, que devem ser consideradas pelo professor.

Publicações da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, como as Atividades Matemáticas desenvolvidas para o Ensino Fundamental, chamam a atenção para essa problemática, destacando que é comum as pessoas conhecerem as figuras apenas pela sua forma estereotipada, isto é, na posição em que sempre aparecem na maioria dos livros didáticos, sem a preocupação com as suas propriedades. Um mesmo quadrilátero, por exemplo, pode ser indicado por nomes diferentes, conforme a posição que ocupa (AM –3, 1986, p.144). Apesar dessa publicação oficial ser de fácil acesso ao professor da escola pública estadual paulista, pôde ser verificado, em diversas situações, em cursos de aperfeiçoamento, o caso de professores que cometem esse engano.

Alguns pesquisadores têm como pressuposto a existência de uma relação entre a aprendizagem da Geometria e as capacidades espaciais do indivíduo. Entretanto, é difícil de se averiguar qual a natureza dessa relação visto que “*elementos perceptuais*

⁹¹ GONSETH, F. (1945) *La Géométrie et le problème de l'espace*. Neuchatel: Editora Griffon.

visuais fazem parte integrante dos conceitos e não podem ser separados” (Chaim, Lappan e Hershkowitz⁹², 1988, p.5, citados por Gordo, 1994).

Bishop (1983) afirma que a capacidade de interpretação de informação figurativa (IFI) é *“provavelmente responsável por muitas das relações entre as capacidades espaciais e as geométricas encontradas na literatura”* (p.185), e que aparenta ser mais fácil de treinar e desenvolver que a capacidade de processamento visual (VP).

Bishop (1983) refere-se ao processo visual no contexto matemático, em seu sentido mais amplo, portanto em um contexto onde os estímulos visuais não são necessários. Isto significa que se pode distinguir dois diferentes aspectos da habilidade de processamento visual. O primeiro no mais amplo contexto matemático, no qual relacionamentos abstratos não têm necessariamente uma origem visual e a habilidade VP poderia ser considerada como visualização e transformação de informação não figural para termos visuais. O segundo, referente à Geometria, no qual a habilidade VP poderia ser restrita à manipulação mental e à transformação de representações visuais e imagens visuais.

Particularmente importantes no domínio da Geometria, a visualização e o processo visual têm de ser considerados cuidadosamente nas aulas de Geometria, principalmente no Ensino Fundamental, quando os objetos geométricos são apresentados aos estudantes através de um desenho, um modelo ou através de tarefas geométricas que levam ao uso de desenhos e modelos.

O fato dos conceitos geométricos serem quase sempre associados com objetos físicos ou desenhos pode tornar a relação entre a Geometria e a visualização muito mais complicada do que aparenta, como já se mencionou anteriormente.

Gordo (1994) comenta a respeito do estudo realizado por Gaulin⁹³ (1985) que pretendia desenvolver algumas capacidades espaciais relacionadas com IFI

⁹² CHAIM, B., LAPPAN, G. & HERSHKOWITZ, R. (1988). *Spatial ability and visual factors – the many sided coin*. Geometry Working Group, XII PME Conference.

⁹³ GAULIN, C. (1985) *The need for emphasizing various graphical representation of 3-dimensional shapes and relations*. In L. Streefland (ED.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 53-71). Utrecht, Holanda: State University of Utrecht.

(interpretação de informação figurativa), trabalhando com professores do Ensino Elementar. Trata-se de um estudo em forma de curso, que focalizou em especial materiais que facilitassem tanto o desenvolvimento da visualização espacial como da intuição geométrica, explorando também os diferentes tipos de representações gráficas bidimensionais de sólidos multicubo⁹⁴. A pesquisa de Gaulin concluiu que o conhecimento e a experiência com diferentes tipos de representações de formas tridimensionais favorece o desenvolvimento da IFI.

Battista (1990) investigou o papel da visualização espacial nas diferenças de resultados obtidos em Geometria na escola secundária, sugerindo que os rapazes e as moças diferiam na visualização espacial; entretanto essa diferença não foi verificada nas capacidades de raciocinar logicamente nem na utilização de estratégias de resolução de problemas geométricos. Apesar de contribuir de maneira diferente nos resultados obtidos pelos rapazes e moças, o autor concluiu que a visualização espacial constitui-se em um fator importante para a aprendizagem geométrica (Battista⁹⁵, 1990, citado por Gordo, 1994).

Outra investigação semelhante à anterior, também citada por Gordo (1994), foi realizada por Battista et al⁹⁶ (1982), tendo como foco fundamental a importância da visualização espacial e do desenvolvimento cognitivo na aprendizagem da Geometria em futuros professores do Ensino Elementar. Em forma de curso, este estudo tinha como objetivo investigar até que ponto a abordagem da Geometria daquela maneira promove o desenvolvimento das capacidades espaciais de futuros professores. Os resultados dessa investigação não são conclusivos visto que diversos fatores podem ter reduzido a correlação entre as capacidades de visualização espacial e a aprendizagem da Geometria, como o fato da maioria dos participantes serem mulheres.

⁹⁴ Módulos Multicubos: sólido formado por vários cubos iguais ligados de maneira que suas faces se sobrepõem.

⁹⁵ BATTISTA, M. (1990) *Spatial visualization and gender differences in high school geometry*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, PP.47-60.

⁹⁶ BATTISTA, M.; WHEATLEY, G. & TALSMA G. (1982) *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-services elementary teachers*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, pp.332-340.

Já a pesquisa de Gordo (1994) teve como objetivos identificar e analisar os efeitos da implementação de uma proposta de intervenção que desenvolvesse capacidades de visualização espacial na aprendizagem da Matemática. A autora concluiu que o conjunto de atividades de visualização espacial implementado teve efeitos de transferência nos conhecimentos de Matemática, justificando a importância das capacidades espaciais nesse campo do conhecimento, nos primeiros anos de escolaridade (primeiro ciclo do Ensino Fundamental).

Gorgorió (1998) analisa como estratégias distintas funcionam e identifica condições sob as quais as estratégias visuais e não visuais são usadas em tarefas de transformações geométricas, enfocando um dos seus aspectos, ou seja, rotações espaciais. A referida autora conclui que a demonstração da habilidade de orientação espacial de alguém depende não somente de suas capacidades ou potencialidades, mas também das características da tarefa que ele está enfrentando. A autora aponta que os erros verificados durante a pesquisa estavam relacionados com a interpretação de representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Segundo ela, esses erros dificultaram e obstruíram a resolução dos problemas pelos estudantes, isto porque interpretar e comunicar informação espacial constituíam-se em elementos necessários para entender enunciados das tarefas e também para expressar seus resultados.

Diante das considerações da autora acima referida pode-se inferir que a habilidade de orientação espacial dos indivíduos depende também de suas habilidades para interpretar e comunicar informação espacial.

Nesse sentido, considera-se que a atividade de visualização em Matemática poderia ser definida unificando a terminologia usada pelos diversos autores acima mencionados, integrando os conceitos definidos por eles em uma rede, como a proposta por Guitiérrez (1996a) que considera *visualização* em Matemática como o tipo de *atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais como físicos*, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades. Assim sendo, a visualização está integrada por quatro elementos principais: *imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização* (p.9) (tradução da pesquisadora).

Como deixa claro Gutiérrez (1996a), *imagem mental* é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais.

Uma *representação externa* seria qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e proporcionam o raciocínio visual.

Quanto ao *processo de visualização*, entende-se, como assinala Gutiérrez (1996a), que é uma ação física ou mental, no qual imagens mentais estão envolvidas. Seriam dois os processos desenvolvidos em visualização: a interpretação visual de informação para criar imagens mentais (corresponde ao processo VP de Bishop) e a interpretação de imagens mentais para gerar informação (corresponde ao processo IFI de Bishop).

Os indivíduos deveriam adquirir e desenvolver um conjunto de *habilidades de visualização* para desenvolver os processos necessários com imagens mentais específicas para resolver um problema, como esclarece Gutiérrez (1996a).

Cavalca (1998) observou em sua prática pedagógica no Ensino Superior que, muitas vezes, os alunos resolviam corretamente problemas do ponto de vista analítico, colocando, entretanto, ao lado da solução correta, gráficos que não correspondiam a ela. Além disso, o referido autor relata que há casos em que os alunos tratavam figuras do espaço como se fossem figuras planas, constatando que esses alunos apresentavam dificuldades com a representação gráfica, tanto na sua elaboração como na sua interpretação (pp.11-13).

Assim sendo, o referido autor investigou a possibilidade de desenvolver as capacidades de visualização e interpretação em alunos que já ingressaram no Ensino Superior (Licenciatura em Matemática), criando uma sequência didática com situações que favorecessem o desenvolvimento das capacidades de interpretação e representações planas de objetos tridimensionais e de resolver problemas utilizando processos apoiados na visualização. Uma das questões pedia que os alunos desenhasssem as estruturas de barras de plásticos, representando as arestas de um paralelepípedo retângulo. É interessante ressaltar que todos os sujeitos pesquisados fizeram essa tarefa como se estivessem olhando o objeto de cima para baixo, o que na realidade não aconteceu. Eles

desenharam o objeto em posições quase idênticas, independentemente da localização de cada um na sala de aula. Isto significa que eles não representaram o que estavam vendo, mas sim o que sabiam a respeito do paralelepípedo.

Em resumo, na pesquisa acima, revela o autor, a seqüência de atividades ajudou os alunos a desenvolverem suas capacidades de interpretar representações gráficas e de resolver problemas por meio de processos apoiados na visualização. Além disso, o autor destaca que os alunos melhoraram razoavelmente sua maneira de representar no plano objetos tridimensionais. E ainda, o autor considera que o mais importante foi o fato dos alunos terem desenvolvido a percepção do caráter de substituto simbólico que os grafismos têm.

Um outro aspecto relevante a ser abordado, quando se discute o reconhecimento de representações bidimensionais, diz respeito aos objetos geométricos representados na tela do computador.

Concordando com Gutiérrez (1996a), pode-se dizer que, a revolução tecnológica, principalmente com a popularização de computadores e de outras ferramentas, tem fornecido aos professores e aos pesquisadores, de modo geral, novos contextos para o ensino da Geometria Espacial. Esses contextos tornam possível o acesso a uma outra forma de representação, uma vez que computadores com *softwares* especiais permitem aos estudantes “ver” e “transformar” um sólido, representado de várias maneiras na tela.

Programas de computadores que permitem a representação tridimensional de objetos espaciais, possibilitando aos usuários manipular esses objetos dinamicamente, através de transformações como rotações, translações, dilatação ou secções por planos, deverão ser usados nas salas de aula com mais frequência.

Miskulin (1999) apresenta reflexões a respeito das várias maneiras de se utilizar aplicativos computacionais na Educação como, por exemplo, *Geometric Supposer*, *Geometer's Sketchpad* e *Cabri Geomètre*, *Logo*, entre outros, ressaltando que os novos ambientes computacionais disponíveis possibilitam contextos propícios para o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos. A autora ressalta ainda que esses contextos podem ser utilizados para criar ambientes exploratórios em Matemática e mais especificamente em Geometria, enfatizando que ambientes de programação, como *Logo*,

propiciam um ambiente significativo de aprendizagem, no qual os alunos constroem idéias e conceitos geométricos.

Papert ressalta a importância que o computador tem no processo educacional ao introduzir uma dimensão dinâmica à investigação sobre a visualização, pois as representações de figuras planas e espaciais na tela podem ser manipuladas e transformadas de diferentes maneiras (Papert⁹⁷, 1987, citado por Fainguelernt, 1999).

Gutiérrez (1996a) ressalta que, apesar das muitas vantagens do uso de computadores para ensinar Geometria, algumas dificuldades puderam ser percebidas nos estudantes quando resolviam problemas geométricos. Citando as pesquisas de Dreyfus e Hadas⁹⁸ (1991), destaca que os estudantes tendem a fundamentar seus argumentos e conclusões a partir da aparência do sólido na tela do computador, aceitando um ângulo reto como sendo agudo porque assim parece. Nesse sentido, os estudantes necessitam interpretar corretamente os desenhos no plano, da mesma forma que com o computador, usando corretamente as ferramentas providas pelo *software*.

Miskulin (1999) ressalta que, apesar do aspecto tridimensional dos objetos representados na tela, eles são representações planas de objetos espaciais. Algumas dificuldades dos estudantes que puderam ser detectadas, quando eles interpretavam representações planas tradicionais de sólidos, também apareceram nesse novo contexto. A referida autora investigou possibilidades didático-cognitivas do Logo Tridimensional na exploração pedagógica de conceitos geométricos, revelando que as situações-problema trabalhadas, concebidas como atividades de “design”, constituíram-se em contextos favoráveis aos sujeitos pesquisados.

Gravina (1996), em sua pesquisa com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, verificou que as dificuldades cognitivas dos estudantes podem ser minimizadas com a utilização de ambientes computacionais onde a Geometria pode ser explorada de forma dinâmica. Segundo a autora, programas de criação de micro-mundos de Geometria, como o *Cabri-Geomètre* e *Geoplan*, podem se constituir em ferramentas

⁹⁷ PAPERT, S. (1987) *A critique of technocentrism in thinking about the school of the future*. Conference: Children in an Information Age: Opportunities for Creativity, Innovation & New Activities, Sofia, Bulgaria, may (text photocopied).

⁹⁸ DREYFUS, T. e HADAS, N. (1991) *Stereometrix – A learning tool for spatial geometry*. In Zimmermann, Cunningham, pp. 87-94.

poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado. Nesses ambientes, enfatiza Gravina (1996), conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural, desenvolvendo-se a habilidade de percepção das diferentes representações de uma mesma configuração e o controle sobre configurações geométricas que levam à descoberta de novas propriedades.

Pesquisas recentes, como as aqui citadas, evidenciam que as habilidades espaciais dos estudantes podem ser desenvolvidas por diferentes métodos de ensino. Dessa forma, considera-se importante conhecer quais tipos de estratégias os estudantes usam e quais são as dificuldades que eles encontram quando resolvem tarefas geométricas. O conhecimento desses dois aspectos poderia contribuir para ampliar a teoria a esse respeito, assim como para solucionar problemas existentes no ensino da Geometria.

De uma perspectiva didática, esse conhecimento seria importante para o professor, visto que os estudantes podem usar diferentes estratégias de solução de problemas. Nesse sentido, se um estilo de ensino particular for usado como única metodologia de ensino, ele poderá contribuir para se tornar em mais um obstáculo à aprendizagem dos estudantes.

O fato dos estudantes responderem às mesmas tarefas de modo diferente levanta muitas questões que certamente interessariam ao professor e também ao pesquisador educacional.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 – Metodologia da Pesquisa

No presente estudo, pretendeu-se identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos, e investigar como os professores agem perante essas manifestações. Prevvia-se que essas noções, poderiam ser identificadas nas expressões verbais, desenhos, diagramas, construções de modelos e outras manifestações de alunos e professores.

O trabalho foi desenvolvido como um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, focalizando resolução de problemas geométricos. O universo de investigação foi composto por alunos e professoras de cinco classes de 4ª série do Ensino Fundamental.

D'Ambrosio (1996) afirma que sempre que se pensa em pesquisa com esse enfoque é essencial que ela seja focalizada no indivíduo, com toda sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sócio-cultural e natural. Nesse caso, a interação pesquisador-pesquisado é fundamental. Assim sendo, em diferentes momentos da investigação a pesquisadora sentiu necessidade de interação com os alunos e com as professoras que se constituíram em sujeitos desta pesquisa

Lüdke e André (1986) consideram que, quando o objeto de investigação consiste em estudar algo singular, com significado próprio, o método ideal de investigação é o Estudo de Caso, pois essa modalidade de pesquisa deve se desenvolver em situações naturais, podendo ser uma importante fonte de dados descritivos além de permitir a existência de um plano aberto e flexível ao focalizar a realidade de forma complexa e contextualizada.

Como preconizam Lüdke e André (1986), alguns pressupostos devem ser observados pelos pesquisadores que utilizam esse método em suas investigações; entre eles são destacados, a seguir, os considerados mais relevantes para a presente pesquisa.

O investigador, mesmo partindo de alguns pressupostos teóricos iniciais, deve procurar manter-se constantemente atento a novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo, visando a descoberta. Lüdke e André (1986) ressaltam que *o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente* (p. 18).

Os Estudos de Caso dão ênfase à interpretação em um contexto. Nesse aspecto, o pesquisador precisa compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações dos sujeitos envolvidos (Lüdke e André, 1986, p. 18-19).

Outro pressuposto dos Estudos de Caso é que eles buscam retratar a realidade de forma completa, e, com relação a esse aspecto, deve-se procurar revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação ou problema, enfatizando a complexidade natural das situações, evidenciando assim a interrelação dos seus componentes (Lüdke e André, 1986, p. 19).

Além disso, os *“Estudos de Caso revelam experiência vicária”⁹⁹ e permitem generalizações naturalísticas*” (Lüdke e André, 1986, p. 19). O pesquisador deve descrever e analisar os dados coletados procurando relatar suas experiências durante o estudo, de modo que o leitor possa fazer *“generalizações naturalísticas”*. Conforme Lüdke e André (1986), *“... em lugar da pergunta: este caso é representativo do quê?, o leitor vai indagar: o que eu posso (ou não) aplicar deste caso em minha situação?”* (p. 19).

No presente estudo, o quadro teórico serviu de estrutura básica a partir da qual novos aspectos puderam ser detectados, novos elementos ou dimensões foram acrescentados, na medida em que o estudo avançava.

Lüdke e André (1986) discutem o conceito de pesquisa qualitativa à luz das cinco características básicas apresentadas por Bogdan e Biklen¹⁰⁰ (1982), quais sejam:

⁹⁹ Vicário: segundo o dicionário Aurélio, significa o que faz as vezes de outrem ou de outra coisa.

¹⁰⁰ BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. (1982) *Qualitative Research for Education*. Boston: Allyn and Bacon.

1) *“a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”*; 2) *“os dados coletados são predominantemente descritivos”*; 3) *“a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto”*; 4) *“os significados que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador”* e 5) *“a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo”*. Nessa perspectiva, a pesquisa qualitativa *“... envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”* (Lüdke e André, 1986, p. 13).

Procurou-se desenvolver a investigação que fundamenta o presente estudo sob essas orientações e, nesse caso, o ambiente natural da pesquisa foi a sala de aula com o pesquisador inserido nesse ambiente e em contato direto com a situação a ser investigada.

Além disso, como o objeto de estudo se caracterizou como uma pesquisa em ensino, exigiu a inserção do pesquisador no ambiente onde o ensino de fato acontece, isto é, na instituição de ensino. Considerando que o ensino e a aprendizagem não ocorrem em uma relação fechada, unicamente entre professor-aluno, também foram consideradas as ocorrências do dia-a-dia da sala de aula; as relações interpessoais e os acontecimentos dentro e fora da sala de aula que influenciaram, de algum modo, o ensino e a aprendizagem. Mesmo que tenham sido discutidas, no decorrer do trabalho, possíveis relações entre as situações e o contexto sócio-cultural mais abrangente, esta pesquisa esteve centrada no que ocorreu nas situações estudadas, procurando destacar os aspectos que nele puderam ser identificados.

Segundo Moura, A. (1995), o pesquisador, com sua inserção no ambiente de ensino, passa a assumir ações participativas, não apenas de observador do fenômeno ensino-aprendizagem, mas também agindo como mentor do ensino, podendo planejá-lo, interferindo na sua execução. Nesse caso, a intervenção do observador objetiva a construção dos dados relevantes para a pesquisa. Segundo a autora, o pesquisador deve colocar-se como elemento que faz parte da situação que está sendo estudada.

Segundo Lüdke e André (1986), a preocupação central ao desenvolver esse tipo de pesquisa é a compreensão de uma instância singular. Isto significa que o objeto

estudado é tratado como único, uma representação singular da realidade que é historicamente situada. Nesse sentido, sabe-se que a limitação da pesquisa em pauta não permite que seus resultados sejam generalizados mas permanece presente a pressuposição de que, ao final do trabalho, seja possível apresentar esclarecimentos sobre o ensino da Geometria que contribuam para a análise da atividade na escola fundamental e, de alguma maneira, para melhoria da qualidade do ensino.

4.2 – Problema da Pesquisa

Esta investigação buscou responder a seguinte pergunta: **como o aluno representa e interpreta tipos diferentes de representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações na sala de aula?**

Essas representações poderão ser apresentadas aos alunos no quadro-negro, no papel ou mesmo em modelos geométricos.

Várias questões derivadas da questão acima compuseram a investigação, tais como: Como os alunos representam entes geométricos para eles mesmos? Como essa forma de entendimento é representada para o outro, isto é, como os alunos a usam para “explicar” seu entendimento? Como eles interpretam as representações geométricas que, por exemplo, aparecem nos livros ou que são feitas pela professora, ou mesmo nos modelos, nas construções, entre outras? Além disso, buscou-se investigar o alcance da intervenção do professor nos episódios de ensino.

4.3 – Objetivos da Pesquisa

O objetivo da presente pesquisa consiste em identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos e, também, investigar como as professoras agem perante essas manifestações. Com o objetivo de oferecer elementos que possam culminar em reflexões críticas sobre a prática pedagógica dos professores das séries iniciais, quanto ao ensino da Geometria, busca-se, também,

elucidar as diferentes formas de interpretações que podem ser atribuídas às representações geométricas.

Um objetivo mais amplo consiste em proporcionar, aos professores e educadores matemáticos, elementos que possam ser úteis para reflexões e análises críticas que tragam contribuições para a melhoria do ensino da Geometria e, conseqüentemente, da Matemática.

4.4 – Sujeitos da Pesquisa

Foram sujeitos desta pesquisa alunos de cinco classes de 4ª série do Ensino Fundamental de três escolas e suas respectivas professoras. Uma das classes pertence a uma escola particular da cidade de Campinas, que foi denominada escola A, três classes pertencem a uma escola pública estadual da cidade de Jaguariúna, denominada escola B e a quinta classe pertence a uma escola pública estadual de Campinas, denominada escola C.

A escolha do 1º ciclo do Ensino Fundamental para esta parte da pesquisa foi feita com base na prática pedagógica referente ao período de 1989 à 1996, no qual foi desenvolvido no CEFAM – Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério de Campinas – um trabalho pedagógico, na disciplina de Matemática, em que foi possível identificar uma situação que mereceria ser esclarecida, relacionada ao desconhecimento dos alunos quanto à Geometria, e que passou a se constituir em importante objeto de pesquisa e foco da prática profissional.

Além disso, em cursos de aperfeiçoamento para professores de 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental realizados pelas Secretarias de Educação, Municipal ou Estadual, ou Rede Particular, os professores têm deixado evidente o quanto o ensino da Geometria nessa faixa de escolarização tem sido negligenciado, ainda que a Geometria sempre esteja incluída nas orientações oficiais.

Com relação aos critérios pedagógicos, a escolha da 4ª série do Ensino Fundamental justifica-se por essa série estar próxima do encerramento dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental e, nesse caso, prevê-se, ao longo do ano letivo,

o desenvolvimento do conteúdo de Geometria indicado nas Propostas Curricular para que os alunos possam continuar seus estudos no ciclo seguinte.

4.5 - Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

Através de inserções da pesquisadora nas cinco salas de aula, por meio de observação das atividades das professoras e dos alunos, foram investigados os procedimentos utilizados pelos alunos nas situações de resolução de problemas geométricos. Essas inserções da pesquisadora também se constituíram em intervenções, durante as situações de ensino-aprendizagem na sala de aula, ou fora da sala de aula, por meio de entrevistas, discussões e reflexões, junto com as professoras da classe, apoiadas tanto nos pressupostos definidos como fundamentais para a presente pesquisa, assim como nos objetivos pedagógicos das professoras. Ainda, em diferentes situações, a pesquisadora assumiu o papel de professor na sala de aula, propondo aos alunos a resolução de problemas geométricos. Tais intervenções buscaram estabelecer as relações entre as representações apresentadas pelos alunos e suas interpretações e as representações das professoras.

Ressalta-se que a metodologia de ensino utilizada pela pesquisadora com os sujeitos (alunos) desta pesquisa foi baseada em Resolução de Problemas geométricos. Entende-se que, quando o indivíduo realiza tarefas que envolvem a utilização de algoritmos conhecidos, ou para as quais existem fórmulas, estas tarefas não representarão verdadeiros problemas (Shoenfeld, 1985). Assim sendo, a Resolução de Problemas é entendida como uma metodologia na qual o sujeito é levado a refletir sobre o estado atual de um determinado fenômeno ou de uma situação, deparando-se com problemas e dúvidas, os quais poderão fazê-lo redimensionar seus valores, na busca e na investigação de novas estratégias de resolução, com o objetivo de transcender esse estado atual a fim de encontrar algo novo mas significativo para seus propósitos.

Assim, a Resolução de Problemas nesta pesquisa é entendida como um processo pelo qual o sujeito utiliza conhecimentos adquiridos, habilidades e estratégias para satisfazer a exigência de uma situação geométrica desafiadora que lhe foi

apresentada, como, por exemplo, representar um objeto tridimensional no plano bidimensional.

No decorrer da investigação, a preocupação da pesquisadora não foi apenas procurar observar e identificar um problema, tal como ele se manifestava nas atividades, isto é, não esteve centrada nas soluções corretas ou incorretas, mas sim foi a de acompanhar o processo de raciocínio do aluno em situações de resolução de problemas geométricos.

A coleta de dados foi realizada por meio de observações, registros, filmagens de episódios de ensino e de entrevistas com os professores. Ressalta-se que, em razão desta pesquisa ter enfoque qualitativo, os registros dos dados foram os mais referenciados possíveis: registrados no diário de campo, incluíram data, local e hora das anotações, com elementos identificadores dos locais e dos objetos descritos, dos indivíduos entrevistados e, quando gravados ou fotografados, as fitas continham esses mesmos dados.

Segundo Meira (1994), a análise qualitativa de processos cognitivos e da aprendizagem requer o exame de transformações relativamente sutis e rápidas nas relações entre ações, como por exemplo, as discursivas e gestuais.

Meira (1994) considera que a *videografia* apresenta-se de forma satisfatória para formar um modelo de coleta de dados que permite uma interpretação consistente dos mecanismos subjacentes à atividade humana, já que essa ferramenta possibilita “... *capturar múltiplas pistas visuais e auditivas que vão de expressões faciais a diagramas no quadro-negro, e do aspecto geral de uma atividade a diálogos entre professor e alunos*”. (Roschelle et al¹⁰¹, 1991, citados por Meira, 1994, p.3).

Por sua configuração tecnológica, o vídeo é um instrumento especialmente indicado para trabalhos desse tipo de pesquisa pois permite uma aproximação ao sujeito em estudo. As experiências gravadas no vídeo podem ser repetidas quantas vezes forem necessárias, facilitando a coleta de dados e a conseguinte análise dos mesmos a partir das anotações em protocolos dos elementos mais esclarecedores que permitem a identificação dos processos de resolução dos alunos e da reação das professoras.

¹⁰¹ ROSHELLE, R., JORDAN, G., GREENO, J. KATZENBERG, B. & DEL CARLO, C. (1991) *Preliminary report on classroom observations*. Relatório técnico apresentado ao *Institute for Research on Learning (IRL)*. Palo Alto, CA, EUA.

Vale ressaltar que a pesquisa por meio do emprego do vídeo deve ser considerada como um complemento da observação direta do pesquisador.

Os dados coletados no momento da ação das professoras em sala de aula, necessários para responder o problema, procuraram dar ênfase a alguns elementos básicos: visualização, representação e interpretação.

Isto significa que cada um desses elementos poderá estar separadamente presente em uma atividade ou poderão estar todos em uma única atividade geométrica; por exemplo, o sujeito visualiza um objeto geométrico espacial – um cubo – e vê três de suas seis faces, podendo representá-lo apenas como um quadrado (uma única face), interpretando que as demais estão atrás dessa face.

Entende-se por *visualização*, tal como foi sugerido nos Capítulos 2 e 3, a percepção visual do sujeito como sendo a construção de um processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia associada a outras imagens mentais armazenadas em sua memória. Diferentes autores consideram que o desenvolvimento completo do processo visual é essencial para se obter uma adequada percepção espacial, acreditando, além disso, que o estímulo visual é o meio capaz de fazer avançar o processo de construção de imagens mentais.

É importante destacar que as ações que vão desde o reconhecimento dos objetos até a realização e aplicação dos mesmos constituem-se em etapas para o desenvolvimento da percepção espacial. Catalá et al (1995) descrevem cinco etapas no processo de visualização propostas por Pallascio et al (1985)¹⁰², que também foram consideradas no presente estudo, quais sejam: *visualização, estruturação, tradução, determinação e classificação*.

Como também introduzido anteriormente, a *representação* poderá ser gráfica, como um desenho em um papel, ou modelos manipuláveis, considerados como instrumentos importantes para expressar nossos conhecimentos e idéias geométricas.

Algumas pesquisas sobre representações têm mostrado que as crianças, assim como os adultos, apresentam problemas para desenhar uma representação tridimensional (Capítulo 3). Uma das dificuldades apresentadas, segundo Solter (1991), ocorre com

¹⁰² PALLASCIO, R., y otros (1985): *Typologie des habiletés perceptives d'objets polyédric*. CRIADE, n. 6, Universidad de Quebec.

relação ao traçado das linhas que no modelo correspondente eram paralelas ou perpendiculares. A representação geométrica foi considerada nesta pesquisa como um componente importante para a compreensão dos estudantes de conceitos geométricos.

Considerando que o ensino da Geometria exige que os alunos reconheçam figuras geométricas, suas relações, e suas propriedades, a *interpretação* que eles podem fazer de objetos geométricos é considerada, no presente estudo, de fundamental importância para o processo de construção do conhecimento geométrico.

Por outro lado, a interação entre professor e alunos, na produção dos significados pelo aluno, exerce um papel fundamental que deve ser investigado, e tornando passível de avaliação a possível transformação da concepção do professor.

Com os dados obtidos procurou-se, entre outras coisas, identificar em especial e detalhadamente situações de representações de figuras geométricas espaciais em dois aspectos diferentes: da representação bidimensional para a representação tridimensional e da representação tridimensional para a representação bidimensional.

Investigou-se também como as professoras percebiam as manifestações de visualização e de significados dos alunos, através do registro no papel das interpretações escritas ou explicações orais deles. Além disso, esta pesquisa investigou se as professoras exploravam essas manifestações dos alunos em suas aulas e, nesse caso, como procediam nessas explorações.

Tomando como ponto de partida diversas pesquisas que apontam que os professores apresentam padrões de concepções geométricas incorretos, semelhantes aos dos alunos de 5ª à 8ª séries por exemplo, como abordado no Capítulo 2, discutiu-se durante as entrevistas com as professoras conceitos de Geometria, com o propósito de verificar os conhecimentos geométricos dessas professoras.

As situações-problema desenvolvidas durante a investigação, tanto propostas pela pesquisadora como as que foram propostas pelas professoras pesquisadas, estão descritas no Capítulo 5 da presente pesquisa.

Ressalta-se que os dados coletados foram analisados e interpretados pela pesquisadora, apoiada em estudos teóricos que abordam as representações e visualizações geométricas com o objetivo de analisar as representações geométricas dos

professores, as representações geométricas de seus alunos e a relação entre essas representações.

Todos os registros foram analisados à luz do problema de investigação, ou seja: **como o aluno representa e interpreta tipos diferentes de representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações na sala de aula**. Assim sendo, algumas possíveis variáveis que interferem nas manifestações dos alunos foram consideradas relevantes tais como:

- conhecimento matemático (conceitos, propriedades, noções, entre outros)
- vocabulário e linguagem
- convenções de rebatimento ou de perspectiva
- mudança de posição: do objeto, do observador, de ambos

Os dados foram analisados *agrupando-se* situações que se destacavam em cada um dos contextos e dos conceitos geométricos para melhor esclarecimento e compreensão do problema sob investigação. Nesse sentido, optou-se por selecionar os episódios de ensino que, segundo Moura (1992), constituem “*o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão*” (p.77).

A leitura, a análise e a interpretação das representações geométricas dos alunos procuram reunir ações, palavras, gestos ou construções feitas por eles que pudessem contribuir para a explicação dos procedimentos usados por eles para solucionar os diversos problemas geométricos.

A descrição e a análise dos dados do Estudo de Caso, apresentadas no Capítulo 5 desta pesquisa, foram apoiadas nas considerações acima delineadas.

ESTUDO DE CASO

CAPÍTULO 5

ESTUDO DE CASO

A presente pesquisa procurou identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos e, também, investigar como as professoras agiam perante essas manifestações, isto é, como elas exploravam essas manifestações, visando a construção de conceitos geométricos. Episódios de ensino foram considerados na presente pesquisa como “*o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão*” (Moura, 1992, p.77).

Com os dados obtidos procurou-se, dentre outros objetivos, identificar, em especial e em detalhes, situações de representações de figuras geométricas espaciais, em duas condições diferentes: da representação bidimensional para a representação tridimensional e da representação tridimensional para a representação bidimensional.

Investigou-se também como as professoras percebiam as manifestações de visualização e de significados dos alunos (através do registro no papel das interpretações escritas, construção de modelos ou explicações orais deles); além disso, foi investigado se as professoras exploravam essas manifestações dos alunos em suas aulas e, nesse caso, de que modo o faziam.

Compondo essa parte da pesquisa, e tomando como ponto de partida diversas pesquisas que apontam que os professores, de modo geral, apresentam padrões de concepções geométricas incorretos, foram discutidos com as professoras, durante as entrevistas que antecederam a inserção da pesquisadora na sala de aula, conceitos de Geometria, procurando verificar os conhecimentos geométricos dessas professoras. Tendo em vista o fato das entrevistas terem ocorrido de forma diferenciada nas três escolas, os comentários a respeito de cada uma aparecem no momento da contextualização de cada escola.

Constituem-se em sujeitos desta pesquisa cinco professoras de 4ª série do Ensino Fundamental e seus respectivos alunos.

A descrição e a análise dos dados obtidos nos episódios de ensino de Matemática, mais especificamente das atividades geométricas que foram propostas pelas professoras das classes investigadas, foram realizadas com a intenção de identificar na ação pedagógica apresentada por elas de que maneira a relação entre a visualização e as diferentes formas de representações geométricas dos alunos é mediada no processo da construção do conhecimento geométrico. Mais especificamente, investigou-se **como o aluno representava e interpretava tipos diferentes de representações geométricas e como as professoras percebiam e exploravam essas representações na sala de aula.**

Em alguns episódios de ensino analisados na presente pesquisa, as professoras não estiveram presentes na sala de aula, ou ainda, não prepararam atividades geométricas para serem desenvolvidas com seus alunos. Nesses casos, a pesquisadora propôs e desenvolveu atividades geométricas com os alunos a fim de investigar as diferentes interpretações geométricas dos alunos. Além disso, procurou-se discutir esses contextos a partir das possibilidades de intervenções didáticas que poderiam ter sido feitas pelas professoras.

Em função disso, ressalta-se a necessidade do delineamento de algumas questões de reflexão a respeito do contexto escolar onde esta pesquisa se processou, que orientaram a escolha dos sujeitos (professoras) e foram referências para a posterior análise dos dados, quais sejam:

- O professor possibilita situações que favoreçam atividades, interações e experiências dos alunos, favorecendo o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial?
- Como as atividades propostas pelo professor se relacionam com a visualização e a representação geométrica? Isto é, como o professor aborda as questões relativas à Geometria dentro do contexto de sala de aula?
- O professor, no desenvolvimento das atividades quotidianas de sala de aula, possibilita a expressão das experiências vividas e dos conhecimentos prévios das crianças, conduzindo-as na elaboração de um sistema de propriedades geométricas? Como isso se processa?
- Como o professor interpreta e explora as manifestações dos alunos no processo de resolução de problemas geométricos?

➤ O professor mostra interesse, isto é, considera importante o desenvolvimento de conceitos geométricos?

5.1 - Interferências na escolha dos sujeitos

Uma importante consideração a ser feita trata dos momentos que antecederam a pesquisa de campo, nos quais foram definindo os sujeitos que estariam sendo investigados. Essa consideração fornece alguns elementos que podem contribuir para as discussões a respeito da ausência do ensino da Geometria na sala de aula.

No mês de maio de 1998 iniciou-se o primeiro contato com professoras de 4ª série do Ensino Fundamental que participavam de cursos de aperfeiçoamento, promovidos pela extinta 4ª Delegacia de Ensino de Campinas, sob orientação da pesquisadora. Algumas professoras manifestaram interesse em participar da pesquisa que, a princípio, estaria investigando apenas uma classe de 4ª série.

Escolhida a professora, no início do segundo semestre daquele ano foi feito contato com a escola pública estadual em que ela lecionava, e que pertence ao município de Monte Mor. Nessa escola funcionavam as quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. A proposta de investigar as atividades da professora, assim como os procedimentos dos alunos, foi aceita pela Direção e Coordenação Pedagógica da escola.

Optou-se por desenvolver a pesquisa, inicialmente, em uma escola pública, visto a inserção da pesquisadora nesse contexto, como professora formadora de professores das séries iniciais.

Foram feitas três visitas à referida escola para exposição e início dos procedimentos de coleta de dados. Nelas foi analisado o planejamento do conteúdo programático de Matemática e verificou-se que ainda não haviam sido trabalhados conteúdos de Geometria. No contato direto com a professora, foi feita uma orientação em relação a atividades que poderiam ser desenvolvidas com a classe, abordando temas do conteúdo de Geometria. Além disso, ficou estabelecido que, após cada aula desenvolvida com a classe, haveria momentos para discussão e reflexão a respeito do que havia sido feito e sobre a continuidade da investigação.

Diante disso, marcou-se o início da fase de coleta de dados relativos à ação da professora em sala de aula. Infelizmente, um dia antes do início dessas atividades a professora procurou a pesquisadora desistindo da pesquisa, alegando que o conteúdo de Matemática estaria muito atrasado em relação ao planejamento da escola e, portanto, não seria possível iniciar naquele momento atividades de Geometria.

O motivo alegado pela professora permite que sejam feitas algumas reflexões quanto a uma das possíveis razões do abandono do ensino da Geometria nas escolas: *“Quando o tempo é curto, a Geometria fica fora da sala de aula”* (Lorenzato, 1995). Outro motivo que também poderia estar implícito nesse episódio, e deve ser considerado, poderia ser o despreparo da professora para ensinar Geometria, como ela mesma assumiu durante as entrevistas.

Diante disso, novos contatos foram feitos, optando-se por realizar a pesquisa em duas outras escolas¹⁰³: uma particular, na cidade de Campinas, denominada escola A e outra pública, da rede estadual, da cidade de Jaguariúna, denominada escola B, sendo pesquisadas uma classe na escola A e três na escola B.

Após a realização da pesquisa de campo nessas quatro classes, foi necessária mais uma inserção da pesquisadora em um ambiente de ensino a fim de verificar a prática pedagógica de outra professora, tendo em vista os dados obtidos, considerados insuficientes para responder ao problema em pauta. O objetivo específico dessa quinta classe foi o de coletar mais dados que pudessem, realmente, revelar, na ação da professora em situações de resolução de tarefas geométricas, como se dava a interpretação e a exploração das representações apresentadas pelos alunos. Nesse sentido, em março de 1999 iniciaram-se novos contatos com algumas escolas e professores.

Em abril de 1999, após algumas reuniões com a Coordenação Pedagógica de uma escola particular de Campinas, foi realizada uma reunião com uma professora de 4ª série dessa escola. A professora se mostrou interessada em participar da pesquisa. Em entrevista com essa professora, as atividades geométricas desenvolvidas por ela nos anos anteriores foram explicadas para a pesquisadora. Ela explicou que, no presente ano

¹⁰³ Os nomes das escolas, das professoras e dos alunos foram atribuídos de maneira fictícia a fim de preservá-los.

letivo, a escola havia adotado o procedimento pedagógico de utilizar projetos de ensino e, em virtude disso, ainda não havia ensinado nada a respeito de Geometria. Como o próximo projeto da escola seria a respeito das Festas Juninas, foram propostas a ela algumas atividades que poderiam ser desenvolvidas nesse período, consideradas interessantes pela professora. A partir disso, foi feito um planejamento dessas atividades, com a introdução do conceito de polígonos e poliedros a partir de balões e bandeirinhas, típicos do tema do projeto previsto. Esse planejamento seria apresentado para a Coordenação Pedagógica da escola, e posteriormente aplicado aos alunos. Assim sendo, marcou-se o início da pesquisa para o mês de maio.

Depois de tudo acertado, a coordenadora pedagógica comunicou a pesquisadora que as atividades geométricas previstas haviam sido suspensas, pois não haveria tempo hábil, no projeto Festas Juninas, para o seu desenvolvimento no primeiro semestre. Ficou acertado com a coordenadora e com a professora da escola que, em agosto de 1999, a pesquisa seria iniciada e, para tanto, novas atividades seriam planejadas de acordo com um novo projeto.

Em agosto, novos contatos foram feitos com a escola, quando a professora ressaltou sua intenção de participar da pesquisa, por ter grande interesse na área de Matemática. Entretanto, não foi possível a sua realização pois, como explicou a coordenadora pedagógica da escola, o novo projeto não permitia que conteúdos de Geometria fossem abordados; assim sendo, optou-se por buscar outra escola.

No final de agosto de 1999, em contato com alguns ex-alunos do CEFAM/Campinas, através do banco de dados da escola, foi possível localizar uma professora lecionando na 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual, aqui denominada escola C. Em setembro de 1999, foram feitas as primeiras entrevistas com esta professora e com a Coordenação Pedagógica da escola, e ambas se dispuseram em participar da pesquisa.

Embora possa parecer que o relato acima seja irrelevante diante dos objetivos da pesquisa, na medida em que o presente estudo está inserido em um contexto no qual a formação matemática dos professores das séries iniciais é discutida, considera-se importante refletir a respeito dos entraves ocorrentes no momento em que se procura investigar a prática pedagógica dos professores, principalmente quando se pretende

investigar questões referentes ao processo ensino-aprendizagem da Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

5.2 - Caracterização das Escolas – Cenários da Pesquisa

Algumas considerações a respeito das escolas, cenários desta pesquisa, serão feitas, tais como a caracterização de cada uma delas e também a descrição dos momentos que antecederam à pesquisa propriamente, isto é, das entrevistas desta pesquisadora com a Direção, a Coordenação Pedagógica e com as professoras de cada escola antes do início da coleta de dados no ambiente de sala de aula.

Nessas entrevistas, tanto com as professoras, sujeitos da pesquisa, quanto com o grupo de professores das escolas, ocorreram discussões a respeito da Matemática, abordando questões específicas de conteúdo geométrico, assim como a respeito da metodologia de ensino, entre outros assuntos, as quais são relevantes de serem tratadas neste momento, pois forneceram dados que auxiliaram as considerações do presente estudo.

A caracterização das escolas pode parecer irrelevante para o presente estudo, entretanto, poderá servir de dados para um futuro aprofundamento relacionado às diferenças no desempenho geométrico de alunos pertencentes a realidades diferentes.

5.2.1 - Escola A

A escola A pertence à rede particular de ensino de Campinas. Trata-se de uma escola que possui uma classe de cada série, desde a Educação Infantil até Ensino Fundamental. O projeto pedagógico para as quatro primeiras séries do Ensino Fundamental caracteriza-se por ministrar os conteúdos programáticos a partir de projetos de ensino, nos quais um tema gerador é desenvolvido por todas as áreas de conhecimento.

A escola conta com um laboratório de informática, biblioteca equipada, grande quantidade de materiais manipuláveis, televisão e vídeo, e, além disso, em cada classe há um computador, uma mini biblioteca e uma coleção de materiais manipuláveis para diversas áreas de ensino. O nível sócio-cultural dos alunos é considerado bom, sendo que muitos deles são filhos de professores universitários. Segundo a professora da classe, aqui denominada L, quase todos os alunos da 4ª série possuem computadores em suas casas. A professora L possui formação universitária em Pedagogia.

No final de agosto de 1998 ocorreu uma primeira reunião com a Coordenação Pedagógica da referida escola para apresentar os objetivos da pesquisa e explicitar a intenção de compartilhar as atividades geométricas que a professora estivesse desenvolvendo com a classe.

No segundo encontro foi feita uma reunião entre a pesquisadora, a coordenadora pedagógica e a professora da escola, na qual foi discutido como seria desenvolvida a investigação. Foi explicitada, para a coordenadora pedagógica, a intenção de investigar os procedimentos utilizados pelos alunos nas situações de resolução de problemas geométricos, por meio de registro e análise das questões propostas, buscando estabelecer as relações entre as representações apresentadas pelo professor e as representações dos alunos. Além disso, foi acertado que a pesquisadora estaria presente na sala de aula no sentido de intervir, se necessário fosse, durante as situações de ensino-aprendizagem. Após as aulas ocorreriam reuniões com a professora para discussões e reflexões a respeito do desenvolvimento das atividades, reuniões estas que seriam apoiadas tanto nos pressupostos definidos como importantes para a presente pesquisa, como também nos objetivos pedagógicos da professora e da escola.

A professora L explicou, no momento da entrevista, que, como o projeto pedagógico da escola trabalhava com *“projetos de ensino”*, poucos conteúdos geométricos haviam sido trabalhados até então.

Nesse encontro, tanto a professora quanto a coordenadora pedagógica expressaram aceitação da proposta, ficando acertado que a pesquisadora estaria participando das aulas uma vez por semana, durante todo o período da aula.

A investigação na escola A teve início em setembro de 1998. Nesse primeiro contato com a classe a pesquisadora observou, durante todo o período de aula (quatro

horas), a atuação da professora L. Nesse dia, em nenhum momento a professora abordou questões relacionadas com a Matemática. As atividades realizadas pela professora deram continuidade ao estudo das regiões brasileiras que estava sendo desenvolvido.

Nesse dia, como parte da investigação, procedeu-se a uma análise do caderno e da pasta de um dos alunos, com a verificação dos tópicos de Geometria que haviam sido desenvolvidos no primeiro semestre e a forma com que apareciam nos registros escritos dos alunos:

- **Medida:** O desenvolvimento do conteúdo medida foi iniciado a partir de uma pesquisa que os alunos fizeram sobre medida. Eles anotaram no caderno o que encontraram sobre medida. Segundo relato da professora L, de posse desses dados, ela fez uma síntese, anotando na lousa algumas coisas que são medidas, como tempo, comprimento e distância. As anotações do aluno revelaram que, ao lado da palavra comprimento, estava anotado no caderno do aluno “metro” e, ao lado da palavra distância, aparecia “km”. Embora o momento dessa atividade não tenha sido presenciado pela pesquisadora, pôde-se perceber que, ao fazer essa distinção, a professora não considerou o quilômetro como um múltiplo do metro, desconsiderando que comprimento corresponde à dimensão longitudinal entre dois pontos, não importando o tamanho. Notou-se também que nenhuma outra atividade a respeito de medida foi abordada nesse momento.
- **Perímetro:** O conceito de perímetro foi desenvolvido a partir de uma atividade que utilizou o jogo Poliminós¹⁰⁴. Os alunos fizeram o registro do número de lados de cada um dos pentaminós¹⁰⁵ que compõe o jogo; entretanto, a nomenclatura do polígono, classificação quanto ao número de lados, não apareceu nos registros. Os alunos encontraram o perímetro de cada um dos pentaminós, considerando a medida do comprimento do lado de um quadradinho como uma unidade de comprimento, como mostraram os registros do aluno. Em outros momentos, os alunos acharam o perímetro

¹⁰⁴ O termo **poliminó** foi apresentado por Solom W. Golomb, matemático chefe do Laboratório de Jato Propulsão do Instituto de Tecnologia da Califórnia em seu artigo “Tabuleiros de Xadrez e Poliminós” (publicado na *American Mathematical Monthly* de 1954). Ele definiu poliminó como um conjunto de quadrados em “ligações simples” (um conjunto de quadrados unidos pelas arestas).

¹⁰⁵ Pentaminós são figuras geométricas obtidas pela justaposição de seus lados de cinco quadrados iguais. Existem doze pentaminós distintos.

de algumas figuras poligonais (algumas com as medidas já indicadas nos desenhos e outras em que necessitavam medir o comprimento de cada lado em centímetro, usando uma régua graduada).

- Planificação de caixas em forma de cubos: Usando os pentaminós, os alunos confeccionaram um modelo em escala maior das peças e verificaram, experimentalmente, as que formavam caixas abertas.
- Área: Atividades de cálculo de área a partir de papel quadriculado. As atividades que estavam registradas no caderno e nas folhas da pasta do aluno revelaram que os alunos calcularam a área de figuras retangulares, sendo que todas elas já estavam quadriculadas. Não foi possível perceber, pela análise do material do aluno, se houve a generalização da área de qualquer retângulo.

No segundo dia da investigação a classe estava se preparando para uma oficina de Ciências que iria acontecer no final daquela semana na escola, portanto todas as atividades desse dia foram dedicadas à preparação dessa oficina, e nada de Matemática foi desenvolvido com os alunos.

Diante disso, em reunião com a coordenadora pedagógica, ficaram acertadas quais atividades geométricas poderiam ser desenvolvidas com a classe e também que elas poderiam ser elaboradas pela pesquisadora, que as estaria propondo para a professora aplicar em classe. Nesse mesmo dia, a professora L comunicou que no próximo momento da pesquisa, previsto para a semana seguinte, ela não estaria presente. Como a coordenadora pedagógica substituiria a professora, foi discutida a possibilidade da realização da pesquisa mesmo sem a presença da professora. Dessa forma, as atividades geométricas desse dia foram preparadas e aplicadas pela pesquisadora.

Os demais encontros com os alunos da escola A, que ocorreram até o final do ano letivo, deram-se com a presença da professora L; no entanto, a maioria das atividades desenvolvidas foi proposta e aplicada pela pesquisadora.

5.2.2 - Escola B

A opção pela escola B, escola estadual, baseou-se nas atividades que a pesquisadora desenvolveu com professores dos ciclos I e II do Ensino Fundamental na 4ª Delegacia de Ensino de Campinas de 1996 a 1998, através das oficinas “*Matemática para Professores do Ensino Fundamental*” dentro do Programa de Formação Continuada da Oficina Pedagógica. Durante esse período, alguns professores se destacaram, mostrando considerável interesse pelas discussões propostas nas oficinas e também disposição em enfrentar desafios com o ensino da Geometria, dentre eles professores da escola referida.

Trata-se de uma escola central da cidade de Jaguariúna, onde funcionam apenas os Ciclos I e II do Ensino Fundamental (1ª à 4ª série). É uma escola grande, que funciona nos períodos manhã e tarde, possuindo cinco classes de 4ª série. A escola disponibiliza para o uso dos professores uma máquina de fotocópia, diversos materiais manipuláveis, livros publicados pela Secretaria Estadual de Educação, como as Propostas Curriculares para o Ensino da Matemática no 1º Grau e as Atividades Matemáticas de 1ª à 4ª série. A escola possui também uma sala para televisão e vídeo e uma biblioteca. A escola não possui computadores para uso dos alunos ou dos professores. O nível sócio-cultural dos alunos foi considerado pela coordenadora pedagógica como médio.

O primeiro contato feito entre a pesquisadora e a Coordenação Pedagógica da escola B foi semelhante ao ocorrido com o da escola A.

Diante da proposta feita pela pesquisadora para a escola, a Coordenação Pedagógica consultou os cinco professores que lecionavam nas 4ª séries da escola, sendo que três deles se dispuseram a participar da investigação. As professoras, sujeitos da pesquisa da escola B, foram designadas como professoras G (substituída, posteriormente, por V), M e R.

O segundo contato com a escola teve a finalidade de explicar para as professoras quais eram as intenções da investigação, da mesma forma como foi exposto à professora da escola A.

A professora G cursou o Magistério em escola pública estadual. Está formada há dois anos; e durante o período da pesquisa, cursava o 2º ano do curso de Ciência com habilitação em Matemática, no período noturno.

A professora M também cursou o Magistério em escola pública estadual. Formada há dez anos, cursava, na época da investigação, o 2º ano de Pedagogia, no período noturno.

A professora R, que também cursou o Magistério em escola pública estadual, está formada há 5 anos no Magistério, possuindo formação superior em Educação Física.

Nessa entrevista com as três professoras/sujeitos da pesquisa, durante um momento da reunião pedagógica (HTP - Horário de Trabalho Pedagógico), que ocorre semanalmente com todos os professores da escola, de duração aproximada de duas horas, foi possível explicar-lhes os objetivos da presente pesquisa e iniciar uma discussão sobre o ensino da Geometria.

No último mês da pesquisa na escola B, novembro de 1998, a professora G foi substituída pela professora V, titular do cargo, que retornou de uma licença. A professora V leciona há mais de vinte e cinco anos na rede pública estadual. Desse modo, as atividades de ensino dessa classe ocorreram com duas professoras.

5.2.2.1 – Os Professores da Escola B e as Dificuldades no Ensino da Geometria

Ângulos

Diante de um questionamento da professora R iniciou-se uma reflexão sobre o processo ensino-aprendizagem da Geometria, mais especificamente sobre o conceito e a importância de ângulo¹⁰⁶. A questão foi a seguinte:

—“*Se o ensino hoje está muito mais preocupado com a realidade do aluno, um determinado assunto de Geometria pode não estar dentro dessa realidade. Como fica isso? Por exemplo, se ao falar de polígono, vai falar que ele tem um ângulo, o que isso tem a ver com a realidade do aluno?*”

¹⁰⁶ Ângulo é a medida do afastamento entre duas retas que têm um ponto em comum.

Com esse questionamento, a professora expressou um desconforto com um dos conteúdos da Geometria, e continuou:

— *“Saber as formas geométricas é importante, que são figuras diferentes, que têm formas diferentes, ... mas quando fala de ângulo, ... onde isso encaixa na vida prática do aluno?”*

As demais professoras ficaram caladas diante da fala da professora. A pesquisadora propôs que fossem observados quantos ângulos existiam ao entorno e que não são notados no dia-a-dia, por estarem incorporados ao cotidiano. Diante do silêncio, ela questionou:

— *“Como a Geometria pode ter sido organizada para ser ensinada na escola? Por que será que o estudo dos ângulos é importante na vida do homem? Será que surgiu do nada?”*

As professoras não se manifestaram, demonstrando desconhecimento do assunto.

A pesquisadora apresentou considerações a respeito da Geometria sobre: a capacidade humana de comparar formas de diferentes tamanhos; os conceitos geométricos; a noção de distância; as primeiras noções de figuras geométricas simples, planas; assim como as noções de vertical, paralela e perpendicular, as quais foram sendo adaptadas e usadas na construção de moradias e templos. Falou sobre historiadores adeptos da versão de que a origem da Geometria estaria baseada nas atividades humanas, as quais requerem o controle das relações espaciais, como abordado no Capítulo 2 desta pesquisa.

Uma das professoras observou o ângulo entre as pás do ventilador de teto existente na sala de aula, e comentou que *“esse ângulo deve ter sido importante para a sua construção”*. Outra professora disse que *“a colocação de uma prateleira em uma parede precisa de um ângulo reto”*.

A pesquisadora perguntou-lhes como elas reagiriam se um aluno fizesse esse tipo de consideração na sala de aula. Como explicariam a importância do ângulo reto para a colocação da prateleira na parede. As professoras não responderam.

Nesse momento, a professora R questionou novamente sobre a necessidade de ensinar ângulo para os alunos de 4ª série, dizendo que ela ensinava as formas

geométricas, os polígonos, mas não trabalhava ângulo, tornando explícita sua preocupação em deixar de cumprir um conteúdo que consta do livro didático, ou mesmo no planejamento curricular da escola.

A dificuldade da referida professora em justificar a importância do ensino de ângulo para seus alunos ficou implícita em sua fala, o que explica o fato dela não tratar esse conteúdo em suas aulas. Como bem assinala Lorenzato (1995), é evidente que *“não é possível ensinar aquilo que não se conhece”*. Esse fato ficou evidente quando ela declarou não ter tido formação geométrica adequada, no curso de Magistério, que lhe permitisse trabalhar com esses conceitos na sala de aula. O que também foi admitido pelas outras duas professoras.

A pesquisadora abordou, nesse momento, as noções de ângulo, explicando-lhes que essa noção é importante para os alunos das séries iniciais e que pode ser trabalhada inicialmente de modo informal, quando os alunos começam a manipular objetos como, por exemplo, observando a funcionalidade dos objetos e a forma com que foram construídos. Além disso, ressaltou que elas poderiam fazer essa abordagem quando estivessem manipulando objetos geométricos identificando aqueles que possuem ângulos, como eles se apresentam, se os ângulos fossem outros o que aconteceria, etc. Colocando sobre a mesa diversos objetos com formas geométricas a pesquisadora solicitou que as professoras escolhessem um objeto que possuísse ângulo.

Uma professora escolheu uma caixinha de papelão - representação de um prisma reto de base retangular – e disse:

— *“Eu definiria esse objeto como um retângulo que tem um ângulo”*.

Nota-se nessa colocação a confusão com a nomenclatura de figuras geométricas: ao dizer um *“retângulo”* a professora estava se referindo ao prisma reto - paralelepípedo – um objeto tridimensional; e, quando disse *“têm um ângulo”*, estava apontando para um dos ângulos de uma das faces desse objeto (o retângulo de uma das faces do prisma) e não ao ângulo poliédrico.

A pesquisadora explicou-lhes que esse objeto tem a forma de um sólido geométrico, cujas faces são retângulos, e que, portanto, esse é um objeto tridimensional. Esclareceu, também, que retângulo é um polígono, uma figura plana, de quatro lados, e

cujos ângulos são retos; portanto, que cada uma das faces do objeto tem quatro ângulos cujas medidas eram de 90° cada um.

Com a expectativa de despertar o interesse das professoras pelo assunto, a pesquisadora solicitou-lhes que decalcassem uma das faces de um objeto escolhido dentre um conjunto de caixas de papelão de formas prismáticas (sucatas), de diferentes tamanhos e formatos, e pediu que observassem o desenho resultante: uma região retangular. Em seguida, pediu-lhes que comparassem os ângulos dos polígonos resultantes. Esclareceu-lhes que atividades como essa, usando diferentes embalagens, estariam colocando os alunos em contato com diferentes ângulos, formados pelos lados das faces de um objeto tridimensional, e que, a partir delas, poderiam introduzir outros conceitos relativos a ângulo.

A professora M comentou que seus alunos, ao trabalharem composição de mosaicos, perceberam a diferença entre os desenhos resultantes e que poderiam estar também observando os ângulos entre as peças.

Polígonos

A pesquisadora apresentou às professoras modelos geométricos construídos com varetas ou canudos e ligados por conexões de borracha, que permitem manipulação, como os abaixo ilustrados.

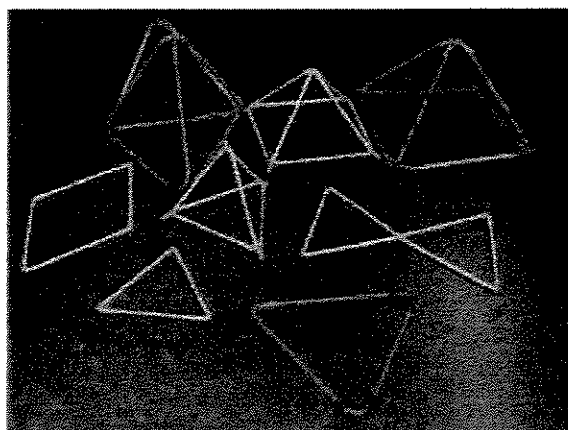


Figura 5.1 – Foto das peças construídas com varetas.

Foi solicitado que as professoras manipulassem esses objetos, observando as regularidades e as diferenças entre eles.

Ao manipularem o objeto de varetas com quatro lados iguais, ligados por conexões de borracha, uma das professoras percebeu que sua forma podia ser modificada, que seus lados não mudavam, isto é, que a medida de comprimento permanecia inalterada, enquanto a forma do objeto se modificava, alterando a medida dos ângulos, assim como a área formada no interior das varetas. As professoras perceberam que só os objetos na forma de triângulos não podiam ser modificados, isto é, eram rígidos. A pesquisadora perguntou-lhes se um aluno tivesse essa percepção como elas encaminhariam a questão (ao mesmo tempo, em que era solicitado que elas se colocassem no papel de professor diante de um questionamento dos alunos, elas estavam sendo questionadas a esse respeito pela pesquisadora). As professoras não souberam precisar. Uma delas demonstrou apenas ter se lembrado de uma palavra, de um componente do triângulo, dizendo:

— *“É por causa da base do triângulo?”*

A pesquisadora explicou-lhes que a rigidez do triângulo é uma característica somente dos triângulos, não ocorrendo com outras formas geométricas, e explicou-lhes também que, por essa característica, ele é largamente usado em construções, como nas “tesouras” dos telhados. Além disso, destacou que com o movimento do objeto com quatro lados de medidas iguais, é possível verificar que, alterando os ângulos e sem alterar a medida do comprimento dos lados, pode-se formar diferentes paralelogramos, entre eles o quadrado.

A forma com que as professoras se referiam aos vários termos geométricos indicava que elas tinham conceitos incorretos para vários polígonos, mesmo para um dos mais usados no cotidiano escolar – o quadrado. Assim sendo, a pesquisadora questionou-lhes a respeito do conceito de quadrado e de losango, isto é, como elas faziam referência a esses termos nas aulas.

Diante do experimento acima, as professoras perceberam que não bastava ao polígono ter quatro lados e também não bastava ter os lados com medidas iguais para que ele fosse um quadrado. A possibilidade do uso de material manipulável em sala de

aula foi discutida com as professoras como uma importante ferramenta na formação de conceitos geométricos.

Outra questão discutida com as professoras foi a respeito do conceito de retângulo. Uma das professoras disse:

— *“Retângulo é um polígono de quatro lados, com dois lados iguais e dois diferentes”.*

A pesquisadora perguntou-lhe se os lados precisavam ser diferentes, o que provocou dúvida entre as professoras. A pesquisadora sugeriu que elas examinassem a palavra “retângulo”, dando indícios, na entonação, que sua etimologia poderia dizer muito a respeito do conceito que ela representa. Argumentou que, em Geometria, muitas palavras trazem nos nomes algumas características a respeito de seu aspecto e sobre seu conceito. Pediu que elas encontrassem, entre os materiais disponíveis sobre a mesa (sucatas) exemplos de retângulos. As professoras apenas selecionaram os retângulos que não eram quadrados e aí, mais uma vez, a pesquisadora questionou-lhes sobre o conceito de retângulo:

— *“Se um retângulo é um quadrilátero cujos quatro ângulos são retos, por que vocês não pegaram os quadrados?”*

Esse questionamento fez com que imediatamente elas dissessem, *“mas retângulo é retângulo e quadrado é quadrado”*. Novamente a pesquisadora disse o conceito de retângulo e pediu para que elas observassem atentamente o quadrado. Após essa discussão, surpresa, uma delas disse:

— *“Então, o quadrado é também um retângulo?”*

Só então deram conta das propriedades que definem o retângulo e o quadrado, pois, até aí, como já haviam demonstrado, apresentavam-se presas ao aspecto figural do objeto, não refletindo sobre as propriedades intrínsecas a ele, ou seja, seu aspecto conceitual. Esses aspectos foram pesquisados por Fischbein (1993) e abordados no Capítulo 3 desta pesquisa.

Círculo, Circunferência e Esfera

Diante de vários materiais manipuláveis, a pesquisadora perguntou-lhes se uma bolinha de gude (de vidro) seria um modelo de uma circunferência¹⁰⁷, de um círculo¹⁰⁸ ou de uma esfera¹⁰⁹.

A professora R respondeu que representava uma esfera. E as demais professoras concordaram. Em seguida a pesquisadora perguntou-lhes qual a diferença entre cada uma delas.

A professora M respondeu que *“esfera é a superfície de fora”*. Nesse instante a pesquisadora mostrou-lhe a bolinha de gude e uma superfície esférica de plástico, perguntando se os dois objetos eram iguais. As professoras perceberam a diferença entre o maciço e o oco, dando sinais que estariam entendendo; entretanto, a professora M fez uma afirmação que mostrou um descompasso entre aquilo que estava sendo discutindo:

— *“Como uma moeda”*.

Diante dessa colocação da professora M, a pesquisadora questionou:

— *“A moeda é o mesmo que uma bolinha de gude?”*

A professora respondeu:

— *“Não. Ela é maciça, mas é mais achatada. Ela dá mais idéia de uma circunferência, ou de um círculo”*.

Percebendo o conflito existente entre as diferentes nomenclaturas, a pesquisadora perguntou-lhe:

— *“Qual a diferença entre círculo e circunferência?”*

A professora M respondeu:

— *“Círculo é só a base... não, a circunferência, ... a esfera...”*

¹⁰⁷ Circunferência é um conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. Esse ponto é o centro da circunferência.

¹⁰⁸ Círculo é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula) dada.

¹⁰⁹ Esfera é um sólido geométrico de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

A professora M, ao dizer que círculo é só a base, talvez estivesse se referindo à base de um cilindro, no caso representado pela moeda. Entretanto, diante de tal confusão, não se pode considerar que a professora, naquele momento, soubesse distinguir cada um dos entes geométricos citados. Essa confusão também foi compartilhada pelas outras duas professoras, as quais ficaram observando os objetos, em silêncio, demonstrando um certo constrangimento a esse respeito.

Nota-se, nesse caso, como raramente o cilindro é considerado quando sua altura é pequena em relação ao comprimento do diâmetro¹¹⁰ da base. O uso incorreto de alguns materiais manipuláveis poderia estar contribuindo para essa confusão, como é o caso das peças dos Blocos Lógicos: objetos tridimensionais normalmente denominados como figuras planas, em atividades de discriminação de atributos (círculo, quadrado, triângulo e retângulo).

A pesquisadora propôs às professoras uma reflexão a respeito do curso de Magistério que haviam concluído. Nessa reflexão as professoras questionaram os cursos de formação de professores realizados por elas, dizendo que eles não haviam contemplado plenamente os conteúdos geométricos, não lhes proporcionando condições adequadas de trabalharem com seus alunos.

As entrevistas e reflexões acima discutidas foram importantes para evidenciar para as professoras como a Geometria é importante na formação dos estudantes, principalmente das séries iniciais; além disso, indicaram que a formação matemática das professoras não havia dado condições suficientes para que elas tivessem um bom desempenho profissional em Geometria.

Reflexões sobre Geometria com todos os Professores da Escola B

A pedido da coordenadora pedagógica, a pesquisadora desenvolveu um trabalho de reflexão a respeito da importância da Geometria com todos os professores da escola, durante o horário de HTP – Horário de Trabalho Pedagógico (aproximadamente

¹¹⁰ Diâmetro de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência e que passa pelo centro.

2 horas), o qual merece ser considerado no presente estudo, pois trata-se do contexto educacional das professoras e dos alunos da escola B. Nesse encontro foram propostas algumas atividades, semelhantes às que os alunos estariam fazendo durante a presente investigação. Alguns desdobramentos desse episódio evidenciam, mais uma vez, como o ensino da Geometria causa desconforto àqueles que ensinam sem estarem devidamente preparados.

Nesse encontro, foram discutidos com todos os professores e também com a coordenadora pedagógica da escola B, alguns conceitos geométricos que, muitas vezes, são trabalhados erroneamente em sala de aula, fixando figuras geométricas estereotipadas, o que leva os estudantes a identificarem as figuras geométricas apenas em uma posição, deixando-os presos aos aspectos figurais da figura em detrimento dos aspectos conceituais.

Foi solicitado aos professores que desenhasssem uma caixa em forma de um sólido geométrico (prisma de base triangular), como o abaixo representado, a partir da observação da mesma.

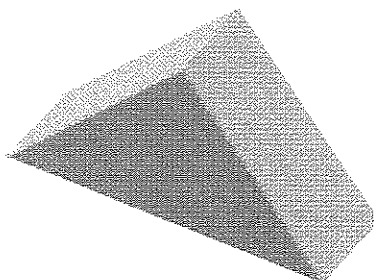


Figura 5.2 – Representação do prisma de base triangular.

Os professores, de modo geral, apresentaram o mesmo tipo de dificuldade que os alunos ao representarem no plano um objeto tridimensional, isto é, sentiram dificuldades em traçar linhas que dão sentido de profundidade ao objeto representado. Discutindo a respeito das diferentes representações resultantes, a pesquisadora explicou-lhes que o conhecimento a respeito de representação de um objeto espacial no plano não é natural, e que, portanto, precisa ser trabalhado com cuidado na sala de aula, isto é, precisa ser ensinado cuidadosamente o posicionamento de cada linha traçada, fazendo-a corresponder com o que elas representariam no objeto real.

Em seguida, foi solicitado que os professores desenhasssem a planificação desse sólido. Alguns precisaram ter a caixa em mãos. “Rolando”, isto é, rotacionando a caixa eles iam fazendo o contorno de cada uma das faces.

Dois dos professores da escola B, não consideraram corretamente as dimensões de cada uma das faces da caixa. Isto é, desenharam retângulos cujos lados (assinalados com “a” pela pesquisadora) não tinham o mesmo comprimento dos lados dos triângulos (assinalados com “b” pela pesquisadora) que, quando justapostos, formariam as arestas do objeto, como indicado na Figura 5.3.

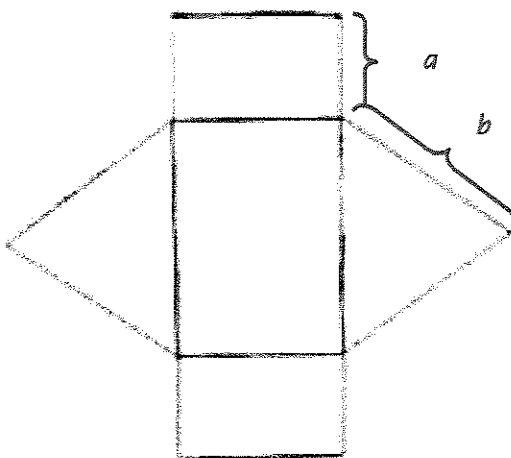


Figura 5.3 – Planificação do prisma feita por um dos professores.

Diante da planificação incorreta a pesquisadora perguntou aos professores se essa planificação corresponderia a um prisma com as características da caixa apresentada. Um deles responde afirmativamente.

A pesquisadora insistiu perguntando se, mesmo sem recortar e tentar montar a caixa, seria possível ter certeza que a planificação estaria correta. Os professores responderam afirmativamente, que estaria correta.

Com essa resposta dos professores pode-se perceber que eles não analisaram as possibilidades de construção do prisma, isto é, as medidas relativas dos comprimentos dos lados. Diante disso, a pesquisadora pediu-lhes que recortassem e montassem a caixa.

Observando a planificação incorreta feita pelos sujeitos, pode-se constatar que os retângulos, que representariam as faces laterais do objeto, não possuíam a mesma medida do lado do triângulo, ao qual serão justapostos. A não percepção dessas incorreções pode ser considerada, em nosso entender, grave, pois significa que o professor não se preocupa com os atributos do poliedro, nem tão pouco, com a relação entre as medidas dos comprimentos dos lados dos polígonos de suas faces.

É interessante ressaltar que eles só notaram o erro após recortarem a planificação e tentarem montar a caixa. Além disso, o que chamou a atenção foi o fato de que os professores não consideraram ser esse um erro que comprometeria a solução do problema proposto, visto que, intrínseco a essa planificação estava o conceito de poliedro, para o qual, a medida dos lados dos polígonos que se justapõem tem, necessariamente, o mesmo comprimento.

A expectativa resultante desses encontros era de que as discussões decorrentes pudessem contribuir, de algum modo, com a prática pedagógica das professoras que seriam investigadas, contribuindo para a coleta dos dados. Ou seja, que essas reflexões pudessem ajudar as professoras em seus momentos de ensinar Geometria, contribuindo para que elas pudessem perceber como seus alunos representam e interpretam representações geométricas e interferir nesse processo.

Entretanto, como pode ser verificado na descrição e análise das atividades, ao longo deste Capítulo, desenvolvidas junto aos alunos da escola B, essa expectativa não foi contemplada.

5.2.3 - Escola C

A escola C é uma escola pública estadual, localizada na periferia de Campinas, onde funcionam trinta e seis classes do Ciclo I e II (1ª a 4ª série) do Ensino Fundamental. O prédio escolar, no momento da pesquisa, encontrava-se em condições precárias: pouco preservado; com portas e janelas quebradas; faltando torneiras nos bebedouros; limpeza precária. Apesar disso, a escola contava com uma diretora e coordenadora pedagógica preocupadas com o desenvolvimento dos alunos, buscando

sempre recursos para superar as dificuldades pelas quais essa escola e muitas outras escolas públicas vêm passando. Dentre as várias iniciativas da Direção e Coordenação Pedagógica da escola, ressalte-se que muitas pessoas são convidadas a proferir palestras e a oferecer oficinas para os professores, visando subsidiá-los com informações e recursos a fim de proporcionar enriquecimento, teórico e metodológico, na prática pedagógica.

Das trinta e seis classes da escola, quatorze delas são de 4ª série, sendo que a pesquisa foi realizada em uma dessas classes. Ficou acertado que a pesquisadora estaria fazendo reuniões com todos os professores da escola, nos horários de HPT, nas quais estariam sendo propostas reflexões teórico-metodológicas sobre a Geometria.

Como já abordado anteriormente, a professora S, da escola C, foi formada pelo CEFAM, uma escola pública de Magistério diferenciada, que possui um tipo de proposta pedagógica e carga horária diferente das demais escolas estaduais de Magistério. A professora S possui formação superior em Pedagogia.

Na entrevista realizada com a professora S foi possível verificar que o conteúdo matemático que ela já havia desenvolvido com os alunos não foi seqüenciado, como aparece na maioria dos livros didáticos. Ela adotou em suas aulas as Atividades Matemáticas – AM - 4ª série – publicação da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, na qual as atividades são propostas em duas partes: uma destinada ao aluno e outra ao professor. Na parte destinada ao professor, aparece explicitado o tema, a meta e os comentários a respeito das atividades; e na parte destinada aos alunos, estão explicitados os objetivos, o material necessário, o desenvolvimento da atividade. Todos os alunos da professora S possuem um bloco com todas as atividades do AM - 4. Eles não possuem livro didático. A professora explicou que os alunos utilizam as folhas das atividades do AM, e outras que ela complementa.

A respeito dos conteúdos geométricos abordados pela professora S, antes da inserção da pesquisadora em sala de aula, foi possível constatar, durante a entrevista e analisando os registros escritos dos alunos, que eles foram trabalhados de forma interdisciplinar e interrelacionando os diferentes campos da Matemática. Por exemplo, ao trabalhar conceitos de múltiplos e divisores, que precederam o trabalho de frações, a professora utilizou-se de abordagens geométricas, nas quais os alunos precisavam fazer

composição de decomposição de figuras geométricas. Outro exemplo, foi a abordagem de conceitos geométricos (paralelismo, perpendicularismo, ângulo reto, triângulo retângulo, paralelogramo) ocorrida ao se trabalhar com o quebra-cabeça Tangram¹¹¹, a qual foi intermediada por atividades do conteúdo de Língua Portuguesa e Artes, sendo composto um projeto sobre Folclore para todas as classes da escola C.

A forma como a professora S abordou os conteúdos geométricos em suas aulas, que pôde ser verificada nas anotações dos cadernos dos alunos, indica que ela possui conhecimento correto sobre esses conteúdos e, também, a respeito de diferentes estratégias metodológicas por meio das quais esses conteúdos podem ser trabalhados.

Foi possível verificar também que a professora S não se limitou às atividades do AM, fazendo uso pedagógico de outras publicações, como o material de reforço para as Classes de Aceleração¹¹² e livros paradidáticos.

Durante a entrevista foi perguntado à professora S se ela tinha intenção de explorar o Tangram abordando outros conteúdos geométricos. A professora explicou que estaria trabalhando a composição de figuras usando o jogo, enfatizando que seus alunos sentiam dificuldade quando montavam figuras usando quebra-cabeça. Iria trabalhar também a formação, com as próprias peças do jogo, de outras figuras geométricas, e se possível introduziria a noção de simetria.

Com relação a outros conteúdos geométricos, a professora S explicou que pretendia trabalhar os sólidos geométricos.

¹¹¹ Tangram é um dos mais antigos quebra-cabeça de origem chinesa que se tem conhecimento. É constituído por sete peças (dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo) que guardam entre si uma proporção relativa ao quadrado que lhe deu origem.

¹¹² O projeto Classes de Aceleração, da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, foi implantado para corrigir a distorção existente no sistema de ensino, onde alunos que possuem uma defasagem idade/série são colocados numa turma convencional, sem materiais específicos e com alunos mais jovens. São salas com mais recursos pedagógicos e professores especialmente capacitados onde o ensino é intensivo e voltado para a recuperação dos alunos. Os objetivos são: eliminar defasagem idade/série, combater a evasão e evitar múltiplas repetências. A Classe de Aceleração I destina-se a alunos oriundos do Ciclo Básico (1ª e 2ª séries) que estejam com defasagem de idade (acima de 10 anos); e que após frequentarem essa classe durante um ano serão encaminhados para a 4ª série; se o desempenho for muito bom, poderão ir para a 5ª série. A Classe de Aceleração II destina-se a alunos de 3ª e 4ª série.

5.3 - Descrição e Análise dos Procedimentos Geométricos em Episódios de Ensino

A descrição e a análise dos episódios de ensino foram realizadas procurando-se agrupar atividades iguais ou semelhantes (quanto ao conteúdo) que tivessem sido desenvolvidas nas cinco classes pesquisadas. Além disso, buscou-se identificar situações que se destacaram em cada um desses contextos pesquisados, analisando-as paralelamente; procurando enfatizar a importância da ação efetiva do professor, na interpretação e na exploração das representações geométricas dos alunos (feitas pelas professoras pesquisadas ou sugeridas pela pesquisadora). No relato dos episódios de ensino procurou-se identificar a professora e a escola em que o episódio se realizava. A referência a cada uma das professoras deu-se da seguinte forma: professora da L escola A; professoras G (posteriormente, V), M e R da escola B e professora S da escola C. Quando a intervenção foi processada pela pesquisadora, a análise foi no sentido investigar as representações expressas pelos alunos e indicar possibilidades de intervenção pedagógica.

No primeiro contato propriamente dito da pesquisadora com a 4ª série da escola A, a professora L não esteve presente, como notado anteriormente, sendo substituída durante o desenvolvimento das atividades, que foram elaboradas e aplicadas pela pesquisadora, pela coordenadora pedagógica. A intervenção, nessa aula, foi feita, basicamente, pela pesquisadora. Nos encontros seguintes, foi com a presença da professora L, sendo que a maioria das atividades investigadas foi preparada e aplicada pela pesquisadora. A professora L teve uma participação mais efetiva em apenas uma das atividades.

No caso da escola B, no primeiro contato com a classe da professora G a expectativa era de que ela tivesse preparado alguma atividade de Geometria para desenvolver com os alunos, já que as entrevistas que haviam sido feitas anteriormente tiveram esse objetivo. Mas isso não ocorreu. Sendo assim, as atividades investigadas nessa classe foram preparadas e propostas pela pesquisadora. Cabe assinalar que a professora G se envolveu muito pouco com o desenvolvimento das atividades na classe, inclusive retirando-se da sala em alguns instantes, enquanto a pesquisadora propunha as atividades para os alunos. Em alguns momentos as ações da professora demonstraram

que ela poderia estar tendo essa atitude, de um certo distanciamento do momento de ensino, provavelmente em razão de sua inexperiência com abordagens de conteúdos geométricos, já que ela mostrou-se preocupada, em alguns momentos, em encontrar no livro-texto utilizado pela classe alguma referência do que estava sendo tratado com os alunos.

Com as professoras M e R, também da escola B, a participação foi um pouco mais efetiva. Apesar delas não terem preparado as atividades que foram desenvolvidas em suas classes durante a investigação, elas demonstraram interesse em verificar como os alunos realizavam as atividades, fazendo alguns comentários a respeito da maneira como os alunos procediam. Entretanto, não exploraram as diferentes interpretações e representações geométricas feitas por seus alunos.

Diferentemente das anteriores, a professora S da escola C foi a responsável pela aplicação das atividades desenvolvidas na sua classe. A pesquisadora fez algumas interferências, durante a investigação, com o objetivo de obter dados mais precisos para a presente pesquisa. Além disso, a pesquisadora sugeriu que a professora desenvolvesse algumas atividades abordando temas como a representação geométrica espacial.

Ressalte-se que as atividades desenvolvidas pela professora S foram apresentadas anteriormente para a pesquisadora, quando foram discutidos os possíveis desdobramentos que poderiam ter durante a sua realização. Posteriormente a cada atividade proposta na sala de aula, a professora e a pesquisadora reuniam-se para discutir sobre os momentos de sala de aula e para analisar os documentos escritos ou modelos geométricos produzidos pelos alunos. Esses momentos possibilitaram reflexões a respeito das estratégias elaboradas pelos alunos e também a respeito de outras atividades que poderiam ser introduzidas, assim como sobre intervenções para as próximas atividades.

O tratamento dos dados coletados nas cinco classes foi feito, como abordado anteriormente, agrupando-se os conteúdos geométricos intrínsecos às atividades propostas em sala de aula. Foram analisados os procedimentos dos alunos para representar sólidos geométricos no plano e no espaço e as dificuldades no reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais. Analisaram-se

também as relações entre representação, visualização, a familiaridade com o desenho, as convenções e o vocabulário próprios de Geometria.

Representação no Plano de um Objeto Tridimensional: Cubo, Paralelepípedo, Prisma de Base Triangular e Cilindro

A primeira atividade proposta pela pesquisadora para a classe da professora L, da escola A e para as classes da professoras G, M e R da escola B, foi a respeito da **representação plana de um objeto tridimensional**.

A pesquisadora entregou para cada um dos alunos da 4ª série da escola A uma caixa cuja forma geométrica era de um prisma reto de base retangular, solicitando que cada aluno desenhasse a sua caixa.

Já para os alunos da classe da professora G, da escola B, a pesquisadora colocou sobre a mesa quatro objetos com formas geométricas: uma caixa em forma de cubo, uma em forma de prisma de base triangular, uma em forma de prisma de base retangular e uma em forma de cilindro (Figura 5.4), e solicitou aos alunos que escolhessem um desses objetos para desenhar. Não foi mencionado o nome de cada um dos objetos; nesse caso, a identificação de cada objeto foi pela cor das caixas; o cubo seria a *caixa marrom*; o prisma de base triangular, a *caixa rosa*; o prisma de base retangular, a *caixa branca*, e o cilindro seria a *caixa cinza*. Ressalte-se que os alunos podiam se aproximar da mesa e manipular os objetos, observando suas características, se assim desejassem.

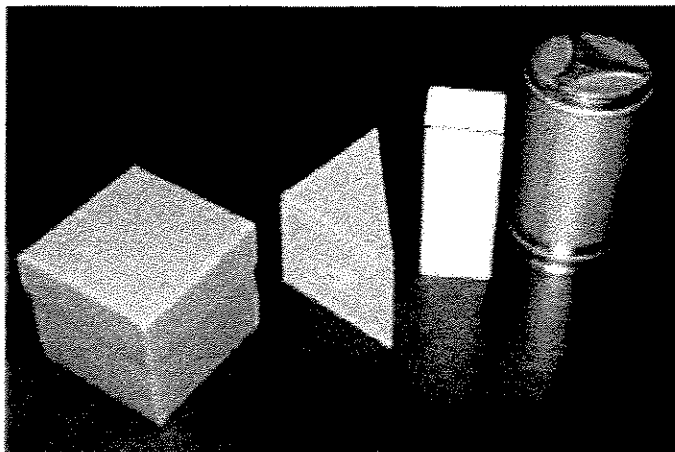


Figura 5.4 - Foto das formas geométricas expostas para os alunos da professora G.

Assim como ocorreu com as duas classes anteriores, as professoras M e R da escola B não prepararam nenhuma atividade de Geometria para a classe, no primeiro dia da investigação, portanto, a pesquisadora, procedeu da mesma forma que com os alunos da escola A, isto é, entregou para cada um dos alunos uma caixa na forma de um sólido geométrico paralelepípedo e solicitou que eles desenhasssem a caixa.

O objetivo dessa atividade, desenvolvida com quatro classes¹¹³, foi o de **verificar como os alunos representavam no plano bidimensional um objeto tridimensional**, isto é, observar qual conhecimento eles apresentavam sobre esse tipo de representação, e conseqüentemente sobre o sólido geométrico.

A descrição e a análise de situações relativas às atividades propostas para as quatro classes procurou relacionar as diferentes representações dos alunos identificando-as com as diferentes representações constantes em pesquisas na área.

Logo no início das atividades com os alunos da escola A, eles questionaram a respeito de como deveria ser o desenho.

Um dos alunos – Bru – ficou em dúvida e perguntou se era para desenhar a caixa “transparente”.

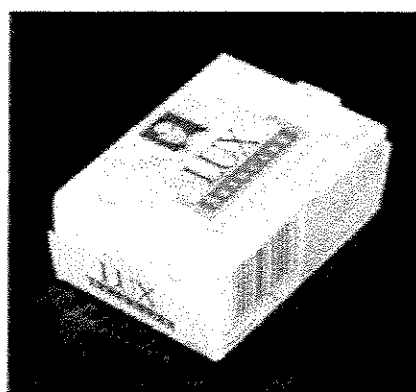
A pesquisadora perguntou-lhe o que ele queria dizer por transparente e Bru respondeu:

—“*Com os lados que não dá para ver*”.

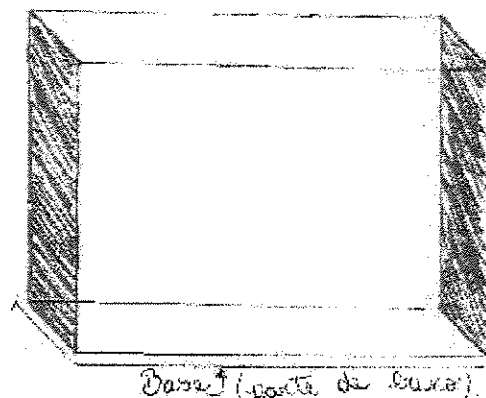
¹¹³ Essa atividade não foi desenvolvida com os alunos da professora S (escola C).

Outros alunos da escola A manifestaram concordância com a resposta de Bru, dando indicações de que eles estavam familiarizados com esse tipo de representação, e demonstraram saber como é a representação plana de objetos tridimensionais feitas em perspectiva paralela¹¹⁴. A coordenadora pedagógica, que estava presente durante essa atividade, explicou que esse tipo de trabalho era comum para os alunos daquela classe, pois estavam acostumados com representações em maquetes.

Dos dezoito alunos presentes nessa aula, dez fizeram esse tipo de representação, isto é, em projeção paralela ou isométrica¹¹⁵, com pequenas distorções de traçado. Por exemplo, dado um objeto como o apresentado abaixo (Figura 5.5-a), a aluna Eli fez a representação da Figura 5.5-b, procurando retratá-la da melhor forma possível.



(a)



(b)

Figura 5.5 - Foto da caixa e representação feita por Eli.

Os traçados dos alunos da escola A demonstraram que eles têm uma vivência com a representação de um objeto tridimensional no plano, isto é, em duas dimensões usando a perspectiva paralela.

¹¹⁴ Na perspectiva paralela ou projeção paralela, as linhas paralelas se apresentam sempre como paralelas, independentemente de sua direção.

¹¹⁵ Projeção isométrica é um caso particular de projeção paralela de forma que as três arestas que saem de determinado vértice se desenharam com o mesmo comprimento (no caso de um cubo) e formam ângulos de 120°. Isométrica, pela etimologia da palavra, **iso** significa mesma, e **métrica** significa dimensão, medida. Nesse sentido, isométrica significa, portanto, mesma dimensão.

Destaca-se que representar um objeto tridimensional em uma superfície plana, não se constitui em uma tarefa simples, como já foi observado anteriormente no Capítulo 3, pois o conceito visual de qualquer objeto que possua volume somente pode ser representado em um meio tridimensional. Dessa forma, quando se desenha um objeto sobre uma superfície plana, o que se obtém é uma “tradução” deste objeto, ou seja, a sua representação por meios bidimensionais de alguns fatores estruturais, essenciais ou particulares, do conceito visual. Segundo Reggini, (1985), as figuras obtidas podem parecer planas, como os desenhos de uma criança, ou ter profundidade, como os quadros com linhas de fuga¹¹⁶, mas em ambos os casos, a integridade do conceito visual não pode se reproduzir, totalmente, no plano (Reggini¹¹⁷, 1985, citado por Miskulin, 1999).

Soller (1991) afirma que a interpretação de desenhos de objetos tridimensionais tem sido pouco investigada. O referido autor assinala que as investigações a esse respeito têm mostrado que as crianças utilizam vários tipos de representações quando são solicitadas a fazer representações de poliedros. Além disso, as pesquisas mostram que fatores culturais afetam a representação de objetos tridimensionais e a interpretação de suas representações bidimensionais (Bishop, 1993). Segundo Soller (1991), a transferência de informação da Geometria Plana para a Espacial, e vice-versa, pode causar diversas dificuldades: para interpretar desenhos que representam formas tridimensionais; para representar em desenho as linhas paralelas e perpendiculares do modelo, revelando no desenho a profundidade; para orientar corretamente as vistas laterais do objeto, entre outras.

Nesta investigação foi possível verificar que muitos dos alunos, principalmente da escola B, apresentaram dificuldades na representação de objetos tridimensionais, principalmente quando tentavam desenhar em perspectiva paralela.

¹¹⁶ Linhas de fuga: são as linhas que se originam em pontos no desenho e convergem para um ponto na própria figura ou fora dela.

¹¹⁷ Reggini, H. C. (1985) *Ideas y Formas: Explorando el espacio con Logo*. Buenos Aires: Ediciones Galápagos.

Com relação a esse tipo de dificuldade, cita-se novamente algumas das idéias de Freudenthal¹¹⁸ (1983), abordadas no Capítulo 3, com as quais não se pode deixar de concordar.

“... Ver, interpretar e produzir desenhos em perspectiva não é uma habilidade simples, mas sim algo que tem que ser aprendido. De nenhuma maneira posso dizer como é a imagem mental de um cubo (na realidade depende de várias circunstâncias). Certamente implica muitas outras características do que as que uma pessoa vê ou se espera que veja. Implica em tudo o que se necessita para reconhecer, fazer, produzir e reproduzir cubos. Inclui faces, ainda que não se podem ver mais que três de uma vez e pode não se estar seguro do número real, quatro, seis, ou oito...” (Freudenthal, 1983, citado por Soller, G. G., 1991, p.179) (grifo e tradução da pesquisadora).

O que tem sido verificado em muitos trabalhos publicados, na prática pedagógica, e no decorrer desta investigação, é que, conforme argumenta Freudenthal (1983), o ensino tradicional de Geometria sequer enfrenta o problema de reproduzir os procedimentos para uma representação em perspectiva, mas espera que o aluno capte e aceite os métodos de representar criados pelos adultos.

Para Freudenthal (1983),

*“... A perspectiva é a **representação do espaço** não no sentido de um objeto mental, mas sim da reprodução em um pedaço de papel, um método adquirido por imitação, que é sistematicamente exercitado, ensinando ao estudante que veja o que realmente vê – linhas, planos, luminoso, sombra – e que finalmente se racionaliza em uma teoria completamente desenvolvida...”* (Freudenthal, 1983, citado por Soller, G. G., 1991, p.179) (grifo e tradução da pesquisadora).

As palavras de Freudenthal conduzem a reflexões a respeito de como as representações geométricas são tratadas na sala de aula, onde, muitas vezes, se reproduzem desenhos sem considerar o que estes estão representando.

Na classe da professora G da escola B, dos vinte e sete alunos presentes durante essa atividade, vinte escolheram desenhar o cubo; somente um dos alunos preferiu

¹¹⁸ Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel: Dordrecht.

representar o prisma de base triangular, três escolheram o prisma de base retangular e três o cilindro. A maioria dos alunos que escolheu representar o cubo mostrou uma certa familiaridade com o objeto, pois eles consideraram que era o mais fácil de se desenhar. Observando a representação feita pelo aluno Mon, pode-se verificar a prática do desenho de dois quadrados, ligados pelos segmentos que representam as arestas.

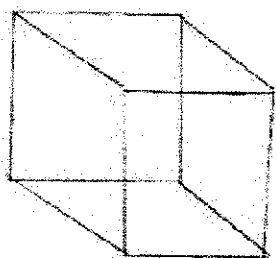


Figura 5.6 - Representação do cubo feita por Mon.

Essa facilidade em representar um cubo no plano fez com que outros alunos, ao sentirem dificuldade em representar o prisma de base retangular, por exemplo, desistissem desse desafio, optando pela representação do cubo, como pôde ser verificado pelas marcas deixadas em suas folhas de atividades.

Dentro do conjunto de alunos que escolheu representar o cubo, dezessete procuraram fazer um desenho em perspectiva paralela, usando o mesmo recurso de Mon, muito comum nas escolas, como mostrado na Figura 5.7.

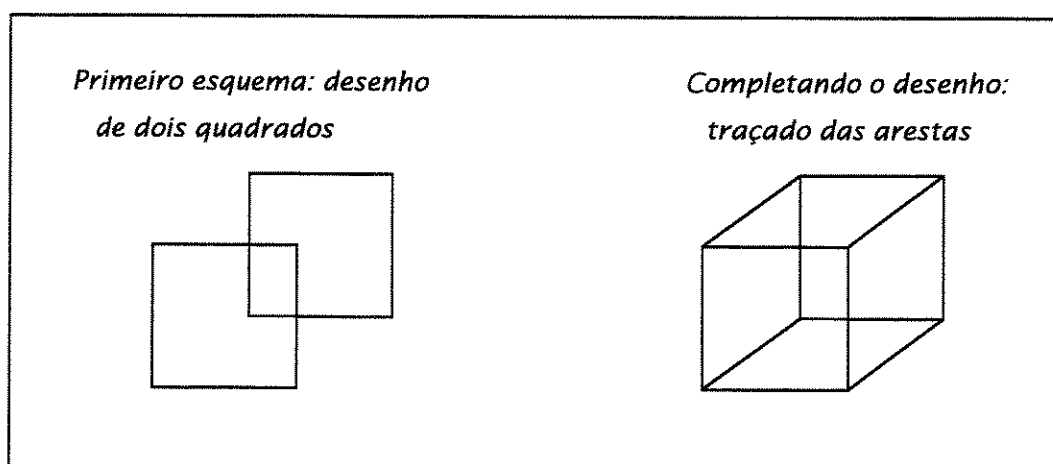


Figura 5.7 - Esquema de representação de um cubo.

A Figura 5.8 mostra que Cam, aluna da professora G, da escola B, usou esse tipo de recurso. Nesse procedimento, pode acontecer de não ser mantida a proporcionalidade existente entre as arestas do objeto. Nesse caso específico, Cam representou a face dianteira do prisma como sendo um retângulo não quadrado, e a face paralela oposta como sendo um quadrado; além disso, a distância que manteve entre essas duas faces fez com que as arestas laterais traçadas dessem a impressão de que o objeto representado consistia em um paralelepípedo, com faces diferentes.

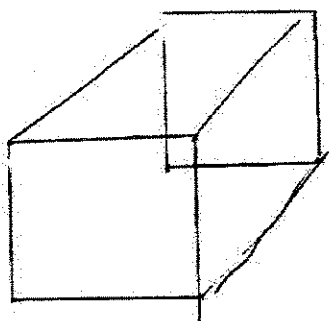


Figura 5.8 - Representação do cubo feita por Cam.

Apenas um dos alunos da professora G, Bru, ao fazer representação do cubo, desenhou somente uma de suas faces, isto é, desenhou um polígono, figura plana, para representar um objeto tridimensional.

A pesquisadora questionou o aluno se, ao olhar para seu desenho ele poderia identificá-lo como sendo realmente o cubo. O aluno diz que não sabia. Então, a pesquisadora perguntou-lhe se ele desenhasse apenas um dos lados da caixa (referindo-se a uma das faces) como seria o desenho.

Bru respondeu que seria igual. Diante disso, a pesquisadora perguntou se o desenho de um dos “lados” da caixa e o da caixa fossem feitos do mesmo modo, como seria possível diferenciar um do outro. Bru respondeu que não sabia.

A pesquisadora insistiu, agora lhe mostrando dois desenhos: o que ele havia desenhado e a representação do seu colega Mon (Figura 5.6), perguntando:

— “Qual dos dois desenhos você acha que representa melhor a caixa?”

Bru respondeu que era o desenho de Mon, mas não demonstrou estar convicto do que disse, pois não se interessou em modificar o que havia feito.

Já o aluno Cel, da classe da professora G, da escola B, fez um tipo de representação para o cubo (Figura 5.9) que poderia ser caracterizado como pertencente ao chamado *diagrama de Schlegel*, conforme explicitado por Soller (1991).

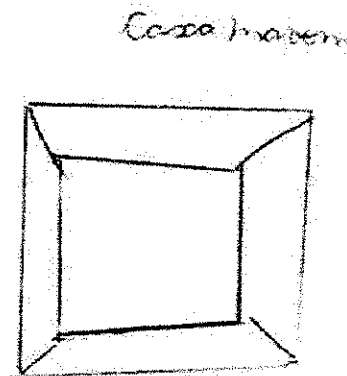


Figura 5.9 - Representação do cubo feita por Cel.

Segundo Soller (1991), esse tipo de representação ocorre quando:

“... olha-se o esqueleto de um poliedro, situando o ponto de vista muito próximo ao centro de uma das faces, dá a impressão de que esta face envolve as demais. Se se projeta sobre um plano o conjunto de arestas, aparece um polígono maior – que é a face que se fixa – que contém o restante o restante das faces” (p.186) (tradução da pesquisadora).

Soller (1991) afirma que mentalmente pode-se obter essa forma do seguinte modo: coloca-se o sólido apoiado contra uma parede, imaginando que se “retira” a face que se tem à frente e que as outras faces vão se “esticando” em direção da parede, até que fiquem planas contra ela. Finalmente, retorna-se com a face que havia sido tirada, como pode ser observado pela sequência de figuras ilustradas abaixo:

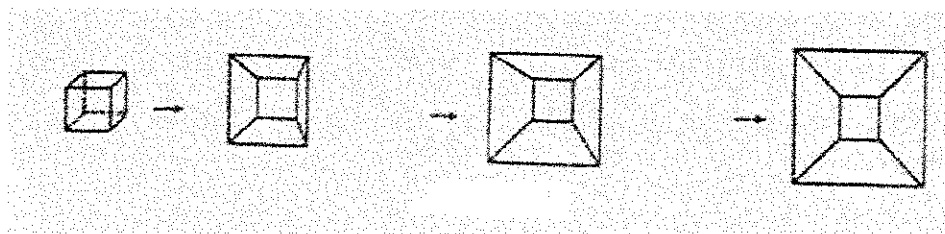


Figura 5.10 - Representação do Diagrama de Schlegel (cubo).
(Soller, 1991, p.186, Fig.8.10)

Segundo Soller (1991), o diagrama de Schlegel de um sólido, na maioria dos poliedros, pode ter aspectos diferentes. Por exemplo, no caso de uma pirâmide de base quadrada obtém dois diagramas alternativos, um a partir de sua face quadrada (Figura 5.11-a) e outro a partir de uma das faces triangulares (Figura 5.11-b); o mesmo pode ser dito do prisma de base triangular, visto a partir de uma de suas faces triangulares (Figura 5.11-c) e a partir de duas de suas faces retangulares (Figura 5.11-d).

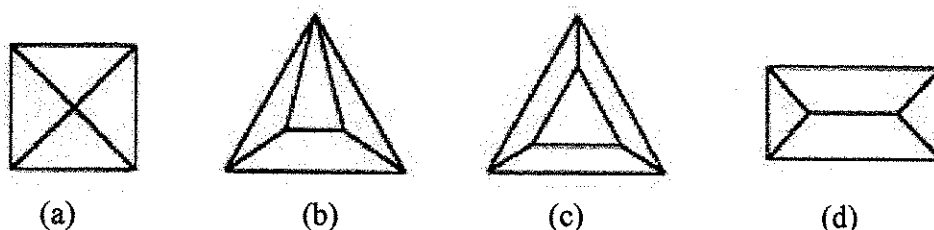


Figura 5.11 – Representação do diagrama de Schlegel para pirâmide e prisma.
(Soller, 1991, p.187, Fig. 8.11)

Soller (1991) explica que os diagramas de Schlegel permitem ver de uma só vez todas as faces, vértices e arestas de um sólido, assim como o número de faces que concorrem em cada vértice. Por outro lado, afirma o autor, o diagrama do cubo também pode ser associado a qualquer prisma cuja base seja um quadrilátero ou a qualquer pirâmide truncada, cuja base seja um quadrilátero, porque estes poliedros possuem o mesmo número de faces, vértices e arestas e em seus vértices concorrem três quadriláteros, e nessa representação não se valoriza a métrica. Quanto às faces, o que importa é o número de lados dos polígonos correspondentes, mas não a forma deles. Nesse sentido, os sólidos que são topologicamente equivalentes têm o mesmo diagrama

de Schlegel. Soller (1991) ressalta que esse tipo de diagrama pode ajudar a solucionar muitos problemas clássicos sobre coloração de faces de poliedros.

A esse respeito, Gutiérrez (1996b) ressalta que uma pessoa, ao ler uma representação plana de um sólido, tem que recuperar tanta informação perdida quanto for possível. Nesse sentido, citando Parzys (1988), afirma que essa recuperação é chamada de “*reconstituição de significado*”, ressaltando a importância de haver uma certa “convivência” entre o autor da representação e o seu leitor, sendo que esta é possível somente a partir de uma cultura geométrica comum.

Tal convivência refere-se, segundo Gutiérrez (1996b), em primeiro lugar à natureza do objeto representado, e, em segundo lugar, ao tipo de representação que é usada, e nesse caso, tanto o autor, quanto o leitor da representação teriam que concordar em usar o mesmo tipo de representação plana. Exemplificando, a Figura 5.12-a, ilustrada abaixo, poderia ser interpretada de diferentes maneiras: pode-se pensar no quadrado de fora como a face frontal de um cubo (Figura 5.12-b), vista de muito perto; ou o quadrado interno como a face frontal de uma pirâmide truncada (Figura 5.12-c); ou ainda, uma estrutura plana (Figura 5.12-d).

Pode-se dizer, nesse sentido, que a representação feita por Cel poderia ser interpretada como o sendo o caso (b), isto é, a representação de um cubo visto muito de perto, desde que estivesse acordado com o leitor do desenho a aceitação desse tipo de representação.

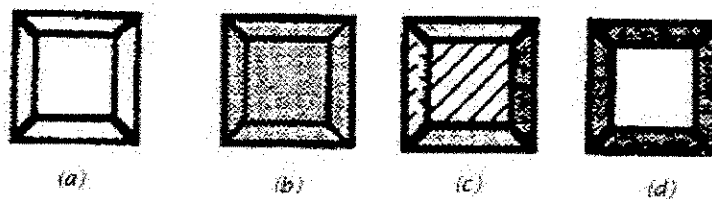


Figura 5.12 - Diferentes representações (Gutiérrez, 1996b, p.34).

Essas considerações evidenciam ser importante para as crianças adquirirem e desenvolverem habilidades que lhes permitam manejar diferentes tipos de representações planas de objetos tridimensionais. Elas também precisam ser informadas

sobre o conhecimento social relativo à Geometria. É importante que as crianças adquiram habilidades que lhes permitam criar, transformar e analisar imagens de objetos tridimensionais gerados da informação trazida por um desenho plano.

O aluno Gab, da classe da professora G, da escola B, escolheu representar o prisma de base triangular e fez um desenho (Figura 5.13) que também estaria próximo do apresentado no diagrama de Schlegel para o prisma de base triangular (Figura 5.11-c).

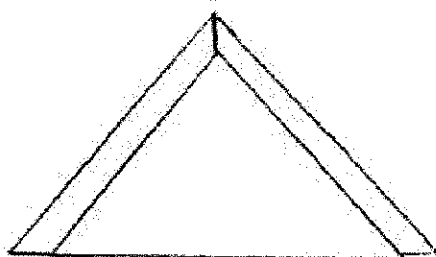
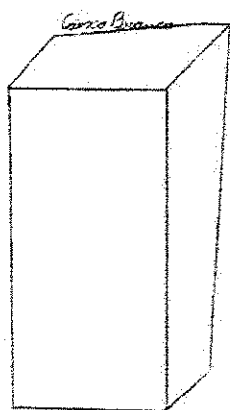
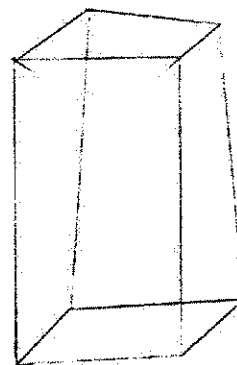


Figura 5.13 - Representação do prisma de base triangular de Gab.

Três alunos dentre os vinte e sete da professora G, da escola B, escolheram o paralelepípedo para representar. Cada um deles fez um tipo de desenho. Hum (Figura 5.14-a) e Fab (Figura 5.14-b) fizeram a representação usando um desenho próximo da perspectiva paralela, com pequenas incorreções, como pode ser visto nas representações a seguir.



(a)



(b)

Figura 5.14 - Representações de Hum (a) e Fab (b).

Já a aluna And (da professora G da escola B) fez uma representação do paralelepípedo desenhando uma figura parecida com um retângulo, repetindo o mesmo tipo de ação do aluno Bru, que havia desenhado o cubo como sendo uma figura plana, como pode ser observado abaixo:

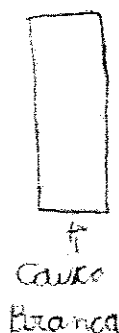


Figura 5.15 - Representação do paralelepípedo feita por And.

É interessante notar que a professora G não manifestou interesse pelo tipo de representação que a aluna fez, nada comentando com ela e nem com a pesquisadora a esse respeito. Assim sendo, a pesquisadora fez algumas perguntas para And a respeito de seu desenho. Com a intervenção buscou-se possibilitar que a aluna tivesse condições de interpretar a sua representação e a de outros colegas e que refletisse sobre a melhor maneira de se representar um objeto tridimensional no plano.

— “O desenho que você fez se parece com a caixa branca?” - perguntou a pesquisadora para a aluna.

— “Eu acho que não, mas eu não consigo...” - respondeu And. A pesquisadora perguntou-lhe se não teriam mais elementos da caixa que poderiam estar no desenho. A aluna respondeu afirmativamente, mas que não sabia como fazer.

Com essa resposta, pode-se inferir que a percepção que And demonstrava ter da representação plana de um objeto tridimensional foi diferente da de Bru, que também havia desenhado o cubo com apenas uma das faces (polígono).

No caso de Bru, o aluno pode ter desenhado apenas o que estava vendo, quando colocado de frente para o objeto. Já a aluna And, dá indícios de que sabe que o cubo é composto de outras partes (faces), entretanto sente-se com dificuldade em representá-las.

A pesquisadora também apresentou para And duas representações diferentes do prisma, a feita por ela e uma outra correta, perguntando-lhe qual delas representaria melhor a caixa. Prontamente And aponta que é a correta, comentando que *“não havia conseguido desenhar as outras partes”*.

Dos vinte e quatro alunos da classe da professora M, da escola B (escola pública), treze demonstraram estar familiarizados com a representação de um paralelepípedo no plano, pois conseguiram êxito em sua tarefa, inclusive identificando cada uma das faces no objeto e na representação plana, utilizando-se do recurso de setas para indicar a face oculta, como pode ser observado na figura feita por Ste:

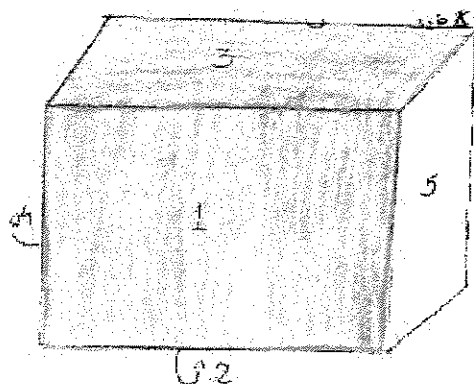


Figura 5.16 - Representação do paralelepípedo de Ste.

Dessa mesma classe, sete alunos tentaram fazer a representação do paralelepípedo, próxima da perspectiva paralela, pois não conseguiram dar sentido de profundidade para o objeto. Destaca-se o trabalho de uma aluna que, após ter feito a primeira representação incorreta na folha (Figura 5.17), não satisfeita com o seu desenho, procurou corrigir seu traçado, desenhando novamente o objeto, agora em uma outra posição, entretanto, não conseguiu atingir plenamente o objetivo, descartando-o.

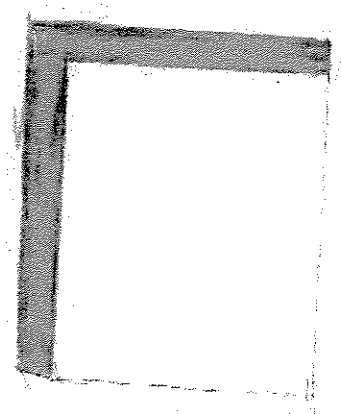


Figura 5.17 – Representação do paralelepípedo de Adr.

Destaca-se a representação feita por Gio, também aluna da professora M, da escola B, que, de certo modo, consegue fazer em perspectiva paralela a representação do paralelepípedo, mas, ao tentar identificar no desenho a face paralela à face 3, ou seja a face que indicou como 6, não deu conta de que ela ficaria oculta na representação bidimensional, então fez um desenho totalmente plano para representá-la. Ressalta-se que essa aluna, entre todos os alunos pesquisados, foi a única a não utilizar a borda horizontal da folha do papel como referência para desenhar as arestas paralelas do objeto, como pode ser visto na figura a seguir:

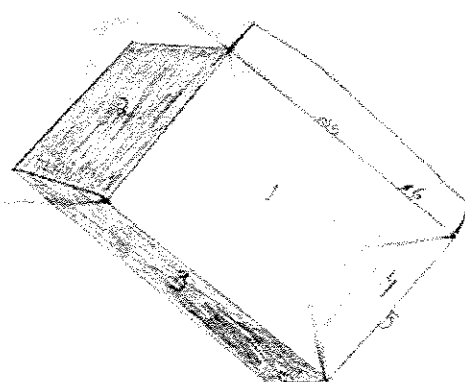


Figura 5.18 - Representação do paralelepípedo de Gio.

Outros quatro alunos da classe da professora M, da escola B, apresentaram maior dificuldade em fazer as representações. É o caso de Edu (Figura 5.19), que representou três das faces do objeto totalmente planas, desenhando duas faces que

seriam paralelas entre si (5 e 6) e que estariam ligadas à face número 1. Observa-se que, na representação do aluno, a medida de um dos lados dessas duas faces é igual à soma dos comprimentos de um dos lados horizontais das 1, 2 e 4 e não igual ao comprimento do lado horizontal da face 1.

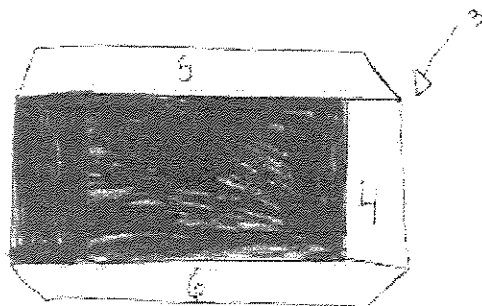


Figura 5.19 - Representação do paralelepípedo de Edu.

A representação feita por Jac, aluna da professora M, da escola B, aparece com as mesmas características do diagrama de Schlegel, citado por Soller (1991). Mesmo tendo apagado duas faces, as marcas no papel indicam que ela buscou esse tipo de representação, como pode ser observado abaixo:

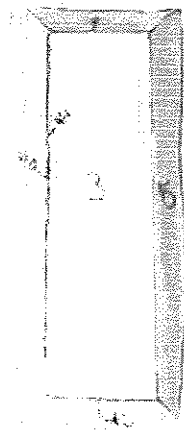


Figura 5.20 - Representação do paralelepípedo feita por Jac.

O aluno And, também da professora M, da escola B, mostrou, em seu traçado, indícios de estar representando o paralelepípedo segundo o diagrama de Schlegel, citado

por Soller (1991); entretanto, ele inclui três outras faces, o que faz com essa representação não se encaixe no tipo do diagrama citado, como pode ser verificado na Figura 5.21.

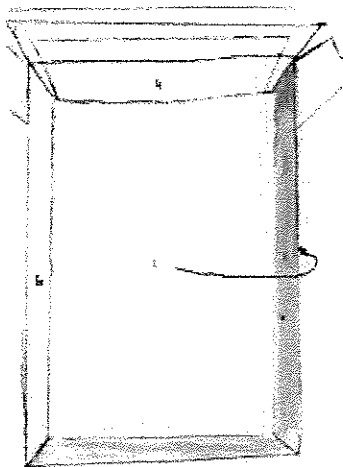


Figura 5.21 - Representação do paralelepípedo feita por And.

Apesar dos três alunos da professora M da escola B, citados acima, não terem conseguido uma representação em perspectiva paralela, eles dão mostras de estarem muito próximo de fazê-la. Nota-se também, nas representações, que esses alunos conseguem identificar alguns dos elementos constitutivos do objeto, como o número de faces e as faces que são perpendiculares entre si.

Nesse sentido, o papel do professor seria fundamental na interpretação e exploração das ações dos alunos, pois poderia introduzir outros tipos de representações, favorecendo a aquisição desse aprendizado. Essa intervenção poderia ser iniciada com a apresentação das diferentes representações feitas pelos alunos e também com diferentes representações planas de objetos espaciais, presentes em revistas, livros didáticos, etc. Comparando essas representações, as discussões poderiam ser conduzidas no sentido de se definirem quais as que melhor representam tais objetos. Além disso, os elementos constitutivos do desenho poderiam ser identificados com os respectivos elementos que constituem o objeto real. Entretanto, a professora M da escola B não fez comentários a esse respeito, quando os alunos a procuraram para perguntar se as representações que

fizeram estariam corretas. Ela sugeriu que eles fizessem um traçado pontilhado para a “linha que não estão vendo”, sem contudo explicar-lhes o porque disso.

Mesmo com essa indicação da professora, alguns alunos não obtiveram sucesso algum, como é o caso da aluna Tha que fez uma representação do paralelepípedo totalmente plana e sem relação entre os comprimentos das arestas, como pode ser constatado na Figura 5.22.

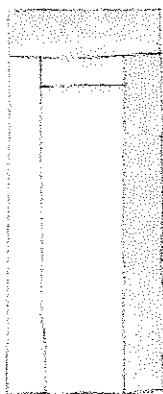


Figura 5.22 - Representação do paralelepípedo feita por Tha.

A pesquisadora pediu para que Tha comparasse a sua representação com a da sua colega Ste (Figura 5.16) e visse qual delas estaria representando melhor a caixa (paralelepípedo).

— *“O meu, porque a caixa está de pé”*, respondeu a aluna.

Ao apresentar essa resposta, a aluna mostrou que está presa à posição do objeto sobre o plano, entretanto não conseguiu perceber que a representação bidimensional ideal para um objeto tridimensional é a da Ste.

A classe que apresentou mais dificuldades em representar o paralelepípedo no plano foi a da professora R, da escola B (escola pública).

A maioria dos alunos, ao representar o paralelepípedo, fez primeiramente o desenho de um cubo e só depois de perguntar, à pesquisadora ou à professora, se estava certo, fez a representação do que seria o paralelepípedo.

Dessa classe, dos vinte e cinco alunos presentes, apenas sete fizeram a representação próxima do que seria em perspectiva paralela, dando uma certa sensação de profundidade, como o desenho de Fel (Figura 5.23).

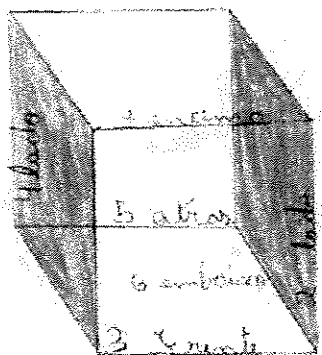


Figura 5.23 - Representação do paralelepípedo feita por Fel.

Dentro desse grupo, encontra-se a representação feita por Jos, que revela que ele primeiro desenhou dois retângulos, sobrepondo parte de um deles pelo outro e, em seguida, traçou as linhas oblíquas, indicando as arestas, como no esquema do cubo, relatada anteriormente.

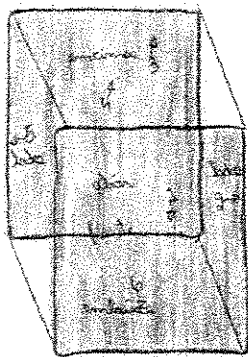


Figura 5.24 - Representação do paralelepípedo de Jos.

A aluna Jul da classe da professora R, da escola B, fez a representação da caixa que recebeu, em três posições diferentes (Figura 5.25), tentando dar, a todas elas, a idéia de profundidade, conseguindo em uma delas um melhor traçado, como pode ser

observado abaixo. Destacamos que essa aluna tinha claro onde estavam localizadas as faces paralelas entre si do objeto no seu desenho, pois coloriu a face superior, que é totalmente visível no desenho, e usou apenas um traço colorido para indicar a face oposta a ela (Figura 5.25-c).

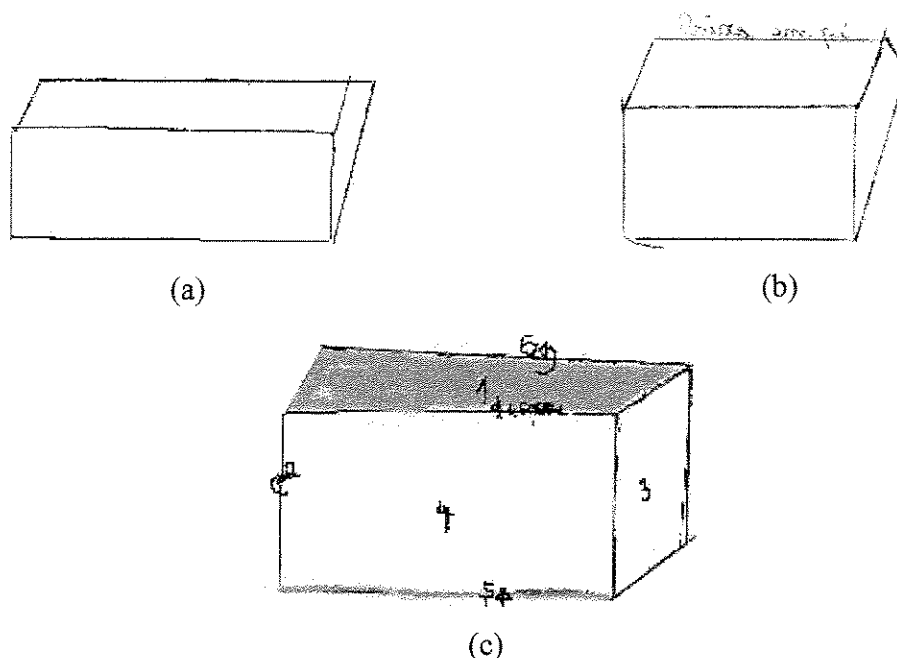


Figura 5.25 - Representação do paralelepípedo feita por Jul.

O aluno Ren, da classe da professora R, da escola B, fez três representações para o paralelepípedo. Na primeira, que não aparece na Figura 5.26, desenhou um cubo utilizando o procedimento de desenhar dois quadrados e unir os vértices correspondentes, e perguntou para a professora se estava correto. Observando o desenho, a professora perguntou-lhe se a sua caixa era um cubo. O aluno respondeu negativamente, e pediu outra folha para refazer sua tarefa. Nessa segunda folha, Ren fez dois desenhos. No primeiro deles, à esquerda (Figura 5.26-a), fez um desenho usando uma representação do tipo do diagrama de Schlegel, citado por Soller (1991), em seguida, à direita (Figura 5.26-b), desenhou um paralelepípedo em perspectiva paralela.

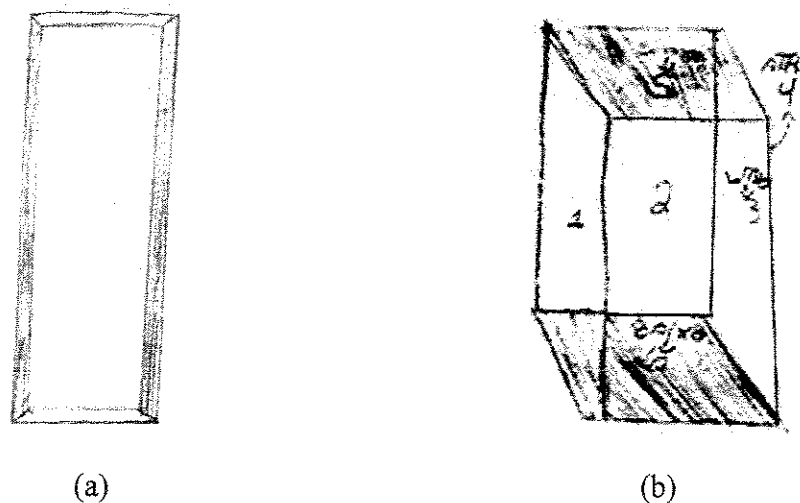


Figura 5.26 - Etapas da representação do paralelepípedo de Ren.

Questionado pela pesquisadora sobre como havia conseguido fazer o desenho em perspectiva, Ren diz que fez igual ao do cubo, demonstrando ter transferido as informações que tinha a respeito da representação do cubo para a representação de um objeto que tem forma parecida. Nota-se nessa terceira representação que o aluno identifica corretamente cada uma das faces e também um par de faces paralelas.

O aluno Joa da professora R, da escola B, fez inicialmente uma representação do paralelepípedo apresentando dificuldade ao desenhar a inclinação das faces que são paralelas entre si, como pode ser observado na Figura 5.27-a. Nessa representação ele identificou onde estaria a caixa “inteira” e onde estariam “partes da caixa”. Após ter feito essa representação, Joa pede para a pesquisadora outra folha de papel para fazer, segundo ele, o desenho correto, desenhando a representação de um cubo (Figura 5.27-b). Essa iniciativa do aluno demonstra que ele poderia ter maior familiarização com o cubo do que com o paralelepípedo e queria mostrar isso.

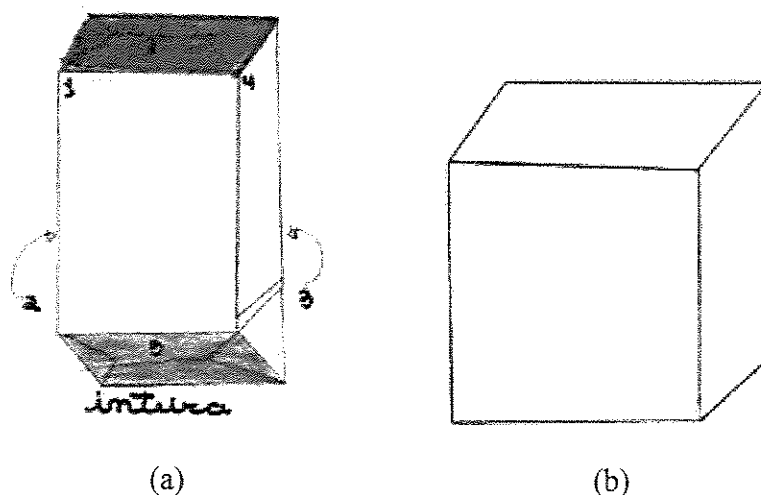


Figura 5.27 - Etapas de representação do paralelepípedo feita por Joa.

Esse fato ocorreu com outros cinco alunos, da mesma classe, que, inicialmente, desenharam o paralelepípedo usando uma representação do tipo do diagrama de Schlegel, citado por Soller (1991). Um deles, Mic, escreve no segundo desenho “cubo”, apesar da figura não dar a idéia de um cubo, reforçando a idéia da maior familiarização com o cubo, como pode ser visto nas duas representações a seguir:

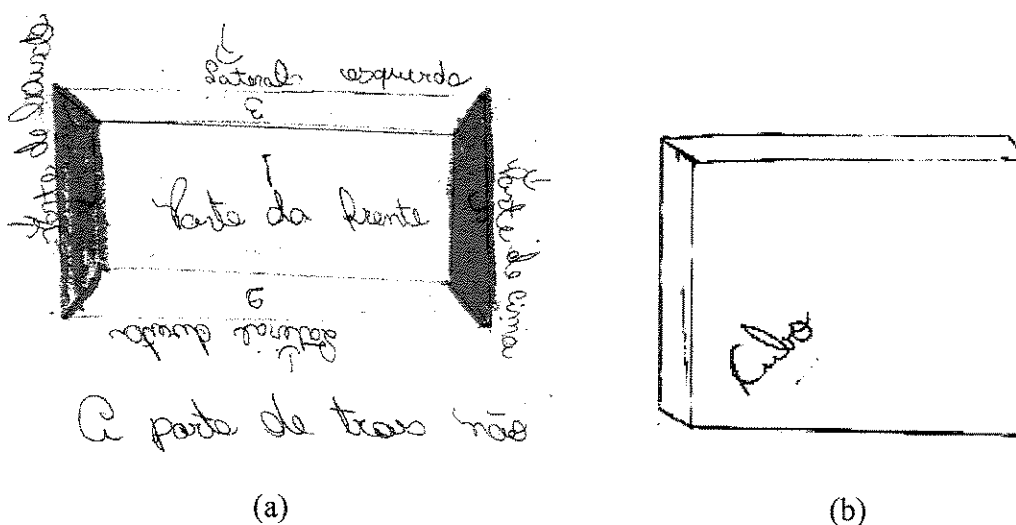


Figura 5.28 - Etapas da representação do paralelepípedo de Mic.

O aluno Raf, da classe da professora R, da escola B, precisou de três momentos diferentes para sua tarefa de representação do paralelepípedo. Na primeira vez, desenhcou

apenas um quadrado, Figura 5.29-a, e perguntou à professora se seu desenho estava correto. A professora respondeu, fazendo uma pergunta: “*não está faltando nada?*” Raf observou como um colega estava procedendo, no caso um aluno que conseguiu desenhar em perspectiva paralela, e pede ajuda no traçado. O colega de Raf fez, na folha de Raf, o desenho em perspectiva do objeto. Raf observou o desenho, completando-o com o desenho de mais duas faces, as quais numerou como sendo 4 e 5, Figura 5.29-b. Logo após, Raf observou o resultado e parecendo não concordar com o que estava vendo, pediu outra folha de papel para a pesquisadora e fez o terceiro desenho, Figura 5.29-c, representando o paralelepípedo como sendo uma das figuras do diagrama de Schlegel, citando por Soller (1991), numerando cada uma das faces, inclusive indicando a face oculta, com o número 6, por uma seta.

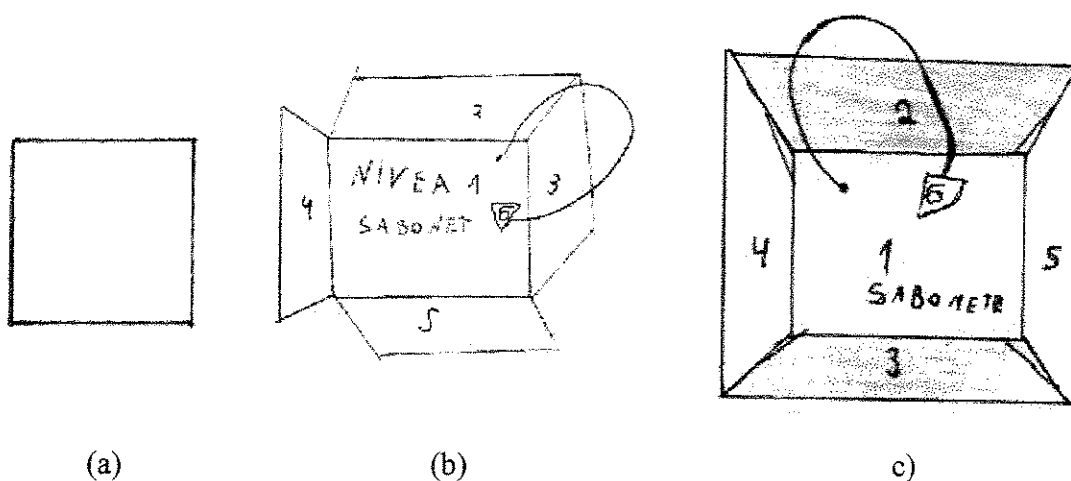


Figura 5.29 - Etapas da representação do paralelepípedo de Raf.

Três dos alunos da classe da professora R, da escola B (pública), demonstraram não saber desenhar a caixa em perspectiva, isto é, com os segmentos oblíquos que indicam as faces laterais dando sensação de profundidade, conforme pode ser observado nas representações de Van (Figura 5.30-a) e de Mai (Figura 5.30-b).

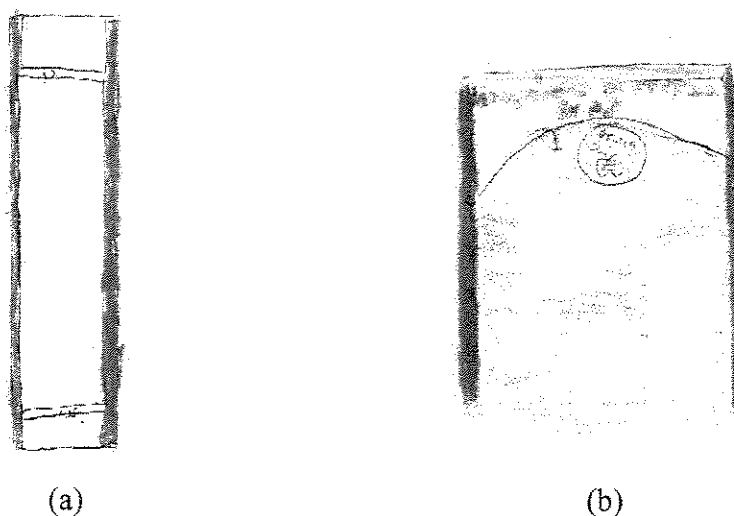


Figura 5.30 - Representações de Van (a) e Mai (b).

O terceiro aluno da classe da professora R, da escola B, que não conseguiu desenhar o paralelepípedo foi Ron, pois representou cada uma das faces da caixa como polígonos separados uns dos outros. Para identificar cada uma das faces do objeto ele usou cores diferentes e/ou ilustrações próprias do objeto em questão (caixa de sabonete), como pode ser visto abaixo. É interessante notar que Ron manteve os três pares de faces congruentes no objeto em seus desenhos.

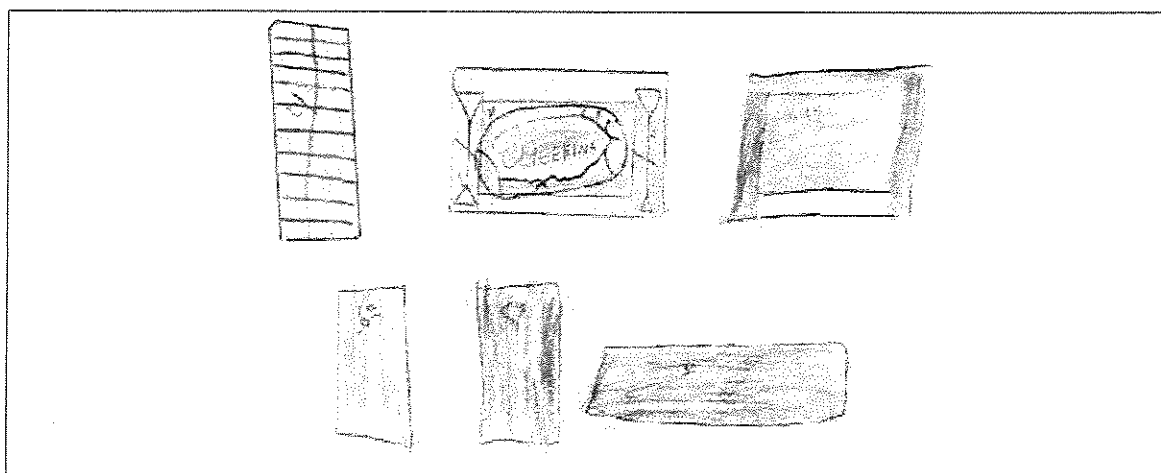
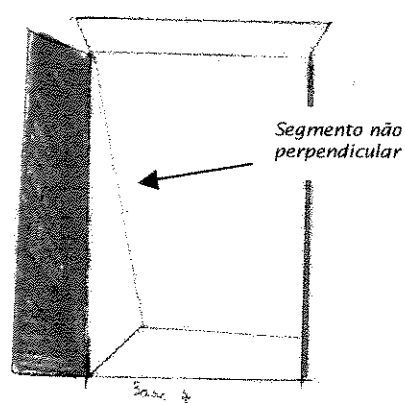


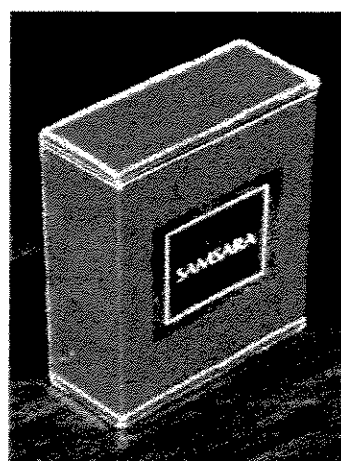
Figura 5.31 - Representação feita por Ron do paralelepípedo.

Mesmo diante dessa representação, a professora R não fez qualquer comentário ou mesmo manifestou preocupação com esse tipo de atitude do aluno.

Três alunos da professora L, da escola A (particular), também não conseguiram fazer a representação em perspectiva. A representação, feita por Hel (Figura 5.32-a), demonstra que ele não sabia como desenhar as faces não visíveis do objeto real (Figura 5.32-b), pois ao mesmo tempo em que desenhou uma face lateral visível, fez um traçado para indicá-la como não visível, desenhando um segmento não perpendicular (destacado pela pesquisadora) às faces paralelas que desenhou. Percebe-se, também, que o aluno não manteve o paralelismo entre as arestas que são paralelas no objeto, como pode ser observado em sua representação.



(a)



(b)

Figura 5.32 - Representação e foto da caixa usada por Hel.

O desenho de Mar, aluna da escola A, é “chapado” (Figura 5.33), apesar de apresentar alguma tentativa de fazer o desenho em perspectiva, que pode ser identificada nos traçados feitos na lateral esquerda inferior no desenho, destacados pela pesquisadora. A aluna conseguiu distinguir cada uma das partes de seu desenho, pois apontou, quando questionada, cada face do objeto e a correspondente no desenho. Justificou-se dizendo que *“as que estão faltando estão atrás do desenho”*. Pode-se dizer que, com esta explicação, a aluna está se referindo às faces não visíveis do objeto.

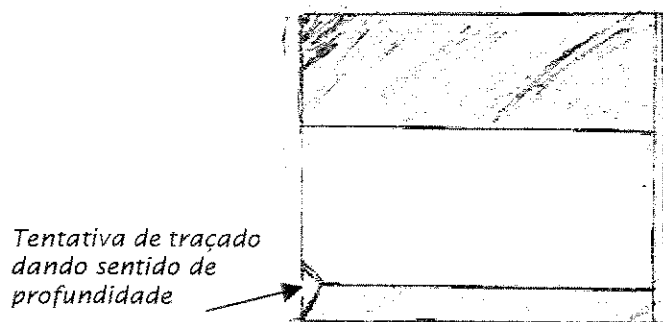


Figura 5.33 - Representação do desenho de Mar.

Refletindo sobre as representações do paralelepípedo e do cubo solicitadas aos alunos, caberia aqui ressaltar, mais uma vez, como poderia ser o papel da intervenção do professor nesse processo. Considerando a diversidade de representações apresentadas pelos alunos poderia haver uma investigação, por parte da professora, a respeito do procedimento usado por cada aluno, e uma retomada das atividades com a classe, atitudes estas que poderiam levar os alunos a coordenarem melhor as diferentes direções dos segmentos que integram a representação plana de um objeto tridimensional. Essas intervenções poderiam permitir que os alunos desenvolvessem mais eficientemente suas habilidades de desenho, favorecendo a construção dos conceitos geométricos intrínsecos à atividade (face, aresta e vértice do prisma; perpendicularismo e paralelismo; ângulo reto, entre outros).

A presente pesquisa tem mostrado a dificuldade de muitos alunos em desenhar os objetos tridimensionais e também a conscientização dos alunos a respeito dessa dificuldade, já que, em muitas ocasiões, eles apagam os traçados, refazendo várias vezes, mas seguem sua tarefa cometendo incorreções semelhantes. Alguns se manifestam frustrados e incapacitados de fazer uma representação sem a ajuda da professora.

Sabe-se que esse conhecimento não é adquirido sem a interferência do outro, é um conhecimento social, e portanto para ser aprendido precisa ser ensinado na escola, caso contrário, as dificuldades geométricas dos alunos nas séries seguintes poderão ser intensificadas.

Alguns alunos da professora L, da escola A (particular), que fizeram uma representação do paralelepípedo próxima da perspectiva paralela, também se revelaram

descontentes com o resultado de suas representações. Pode-se observar que no desenho de Iza o paralelismo entre as arestas das faces não é mantido para todas as faces representadas (Figura 5.34). Observando as marcas deixadas no papel, é possível ver que a aluna tentou, por várias vezes, obter o desenho o mais próximo possível da perspectiva paralela.

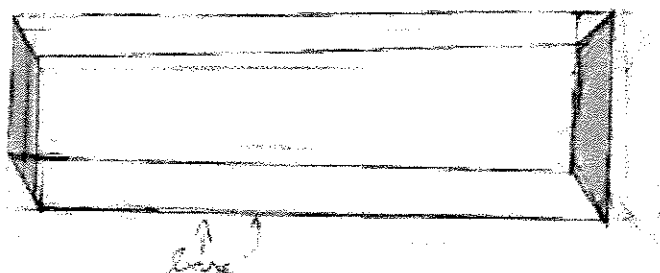


Figura 5.34 - Representação de Iza (caixa de pasta de dente).

Analisando a representação do desenho feito por Iza, pode-se inferir que a aluna possui noções de perspectiva paralela que podem ser evidenciadas pelos traços laterais coloridos (faces), demonstrando a noção de profundidade do objeto tridimensional.

Já o aluno Ber, da escola A, durante o processo de execução de sua tarefa, não concordou que o desenho que estava fazendo estaria correto. Irritado, não aceitava o desenho que conseguia fazer de sua caixa. Esse conflito fez com que ele apagasse, diversas vezes, seu traçado, tentando dar a ele uma forma em perspectiva paralela. Entretanto esse trabalho não lhe foi fácil, como pode ser observado no resultado final (Figura 5.35). Ele olhava para o desenho e dizia:

— “Não é isso...”.

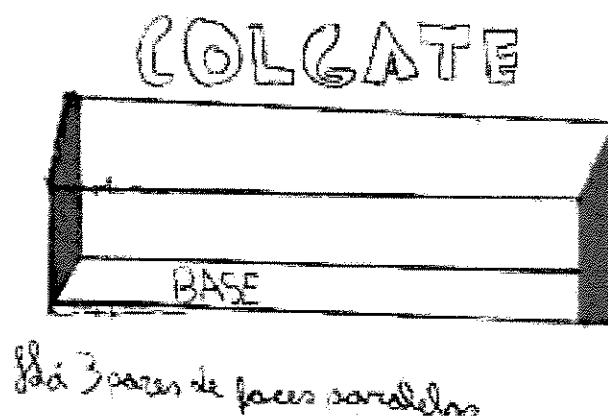


Figura 5.35 - Representação do desenho de Ber.

Inconformado com seu desenho, o aluno reconheceu que alguma coisa estaria errada, mas não conseguiu melhorar o traçado. A coordenadora pedagógica, percebendo o conflito, perguntou-lhe o motivo dele achar que seu desenho não estaria certo. O aluno respondeu:

— *“Porque não está parecendo 3D”*.

Então, ela questionou sobre o que ele teria que fazer para parecer 3D.

Apontando para o traçado que ele havia feito para uma das faces laterais, Ber diz que *“tem que colocar do outro lado”*, fazendo com a mão um movimento de rotação.

Com esse movimento, fica evidente que ele tem noção da representação que deveria ter feito; percebe-se com isso, que a sua limitação em desenhá-la não significa que ele desconhecia onde a face lateral deveria estar.

A pesquisadora interfere nesse momento mostrando para Ber o desenho feito incorretamente por um colega (Figura 5.33), perguntando-lhe se esse desenho corresponderia ao que ele estaria tentando fazer. Imediatamente Ber disse:

— *“Também não é isso. Aqui não dá para ver que é uma caixa”*.

Ber afirmou que o seu desenho não representava o objeto que ele via, mas não sabia desenhá-lo de outra maneira. Comparando-o com o que seu amigo Bru fez (Figura 5.36), Ber vê naquele o que gostaria de ter feito.

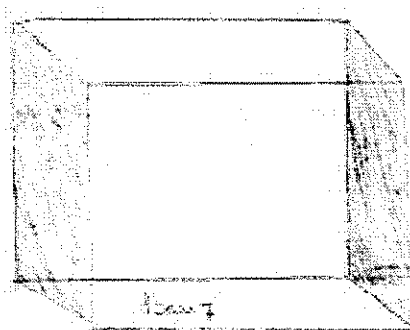


Figura 5.36 - Representação do desenho de Bru.

A pesquisadora explicitou para Ber que sua representação continha implícitos os conhecimentos de perspectiva como na representação de Bru, e o que se apresentava diferente em seu desenho correspondia ao ponto de vista do observador, em outras palavras, a face inferior do prisma quadrangular não poderia estar desenhada em perspectiva pois, a posição do sólido que encontrava-se apoiado na mesa não possibilitava-lhe a visão da mesma.

No caso de Bru, podemos inferir que, ao representar a caixa desenhando a profundidade nas quatro laterais, ele demonstra já possuir noções de perspectiva paralela.

Ressalta-se, nesse contexto, a importância da representação no processo de construção do conhecimento geométrico da criança, pois, como diz Gutiérrez (1998), ao se ensinar Geometria Espacial, o processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana se complica tendo em vista a necessidade de se recorrer a dois fatores, quais sejam: a interpretação da figura plana para convertê-la em um objeto tridimensional e a interpretação dos conceitos geométricos presentes na figura. Dessa forma, o referido autor destaca que, quando se maneja objetos espaciais e que necessitam de representação, mediante figuras planas, fica estabelecido um obstáculo, relacionado com a **capacidade de visão espacial** dos estudantes e com sua **habilidade para desenhar** representações planas de objetos tridimensionais ou para **interpretar corretamente as representações** apresentadas por outras pessoas (p.194).

As diferentes reações dos alunos, observadas nesta pesquisa, tanto da classe da escola A (particular), quanto das classes da escola B (pública), permitem inferências a respeito das dificuldades de representação plana de objetos tridimensionais, que podem

estar relacionadas particularmente com a capacidade de visão espacial dos alunos, com a sua falta de habilidade para desenhar essas representações ou com interpretações incorretas de representações, ou com essas três características interferindo ao mesmo tempo.

Caberia aqui uma reflexão a respeito da diversidade de representações planas de objetos tridimensionais, qual seja: Será que as crianças “vêm” os sólidos da maneira como os representam ou não são capazes de coordenar as diferentes direções dos elementos que integram a representação plana de um poliedro?

Pensando no questionamento acima, Gutiérrez apresenta uma ilustração de representações (Figura 5.37), desenhadas por alunos de 6ª série primária, de sólidos que estavam situados em uma mesa diante deles. As linhas grossas na representação correspondem ao último desenho, enquanto que as finas correspondem a tentativas prévias que os estudantes borraram porque se percebiam de que não eram corretas. Por exemplo, a menina que fez a representação (b), comenta Gutiérrez (1998), fazia um desenho e, ao compará-lo com o modelo tridimensional, se dava conta da incorreção na forma de suas faces laterais, da esquerda e da direita, o que a fez borrar essas partes do desenho e as repetir. Apesar do seu objetivo de fazer um desenho melhor, voltou a desenhar as arestas quase iguais às anteriores, como pode ser observado na figura apresentada pelo autor.

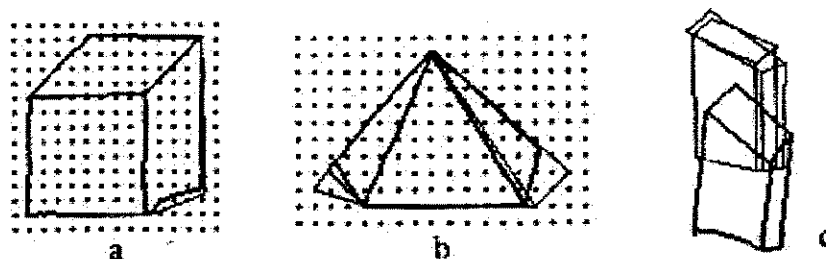


Figura 5.37 - Representação do cubo, pirâmide e paralelepípedo.
(Gutiérrez, 1998, p.206)

Convém ressaltar que o desenvolvimento de habilidades, como desenhos de representações geométricas, necessita ser trabalhado no âmbito escolar, com a efetiva intervenção do professor, visto que esse é um tipo de conhecimento social, uma construção que se dá na interação do sujeito com o seu meio cultural.

Os três alunos da classe da professora G, da escola B (pública), que escolheram representar o cilindro enfrentaram o desafio de representar um corpo redondo, que habitualmente não é requerido no contexto das séries iniciais.

Destaca-se a representação de Raf que dá uma certa noção da forma geométrica do objeto, pois o aluno consegue dar à face superior do objeto (um círculo) a forma elíptica no plano, típica desse tipo de representação, porém não repete esse feito para indicar a face inferior.



Figura 5.38 - Representação do cilindro de Raf.

Já as representações de Ana e de Lui, também alunas da professora G, buscaram representar o cilindro desenhando as faces planas do objeto (círculos) como uma figura próxima a uma elipse, como pode ser observada na representação de Ana ilustrada abaixo, não obstante as linhas que representam a face não plana não estarem na vertical.



Figura 5.39 - Representação do cilindro de Ana.

Pais (1994) identificou desenhos como os de Raf, Ana e Lui os quais apareceram em trabalhos de alunos do Ensino Fundamental. As figuras *a*, *b* e *c* da Figura 5.40 ilustram três possíveis configurações associadas ao conceito de cilindro, encontradas pelo referido autor, em livros didáticos, sendo que as demais, que se aproximam destes, foram encontrados em trabalho de alunos e são semelhantes aos apresentados pelos sujeitos da presente investigação.

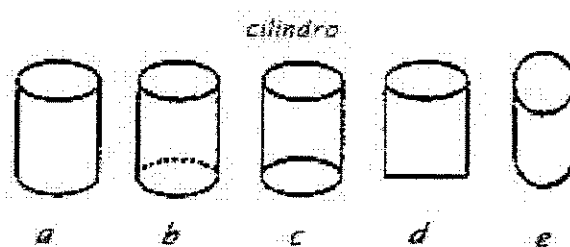


Figura 5.40 - Representação de cilindros (Pais, 1994, p.16).

Segundo Pais (1994), um dos elementos de equilíbrio dessas configurações pode ser reconhecido pela posição dos eixos das elipses que são sempre paralelos às bordas da página. Um outro ponto de equilíbrio, complementa o autor, é a existência, em todos os desenhos, de um eixo de simetria na posição vertical. Esses dados não puderam ser constatados nas representações de Ana e Lui.

Nos livros didáticos, ressalta o autor, para a representação do cilindro é adotada uma perspectiva cavaleira (paralela), com um ângulo de fuga de 90 graus e um coeficiente de redução variando aproximadamente de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Além disso, existem dois

segmentos verticais representando duas geratrizes, e uma elipse representando o círculo da base superior. Já para representar o círculo da base três maneiras diferentes são encontradas: uma elipse tendo a metade em traço contínuo e a outra metade em traço pontilhado, uma meia elipse ou uma elipse toda em traço contínuo. Segundo Pais (1996) essa última representação não favorece a leitura do objeto.

A figura *d* apresentada no quadro de Pais (1996) encaixa-se na etapa chamada de *pré-realista* por Mitchelmore (1976¹¹⁹, 1980¹²⁰). Nessa etapa os desenhos mostram a intenção de representar corpos de uma maneira realista e dotada de profundidade, ainda que sem conseguí-los totalmente. Esse aspecto é considerado no decorrer deste capítulo.

Pôde ser observado que, em geral, nas quatro classes das escolas A e B, os alunos procuraram desenhar tanto os objetos poliédricos quanto os corpos redondos que tinham em mãos (cubo, paralelepípedo, prisma de base triangular e cilindro), o mais fielmente possível, mantendo uma relativa proporção entre as faces e o paralelismo entre as arestas.

Dessa forma, o que as representações dos estudantes indicam é que as dificuldades apresentadas podem estar ligadas a pouca habilidade de coordenação motora das crianças diante desse tipo de tarefa.

No processo de ensino-aprendizagem da Geometria, o desenho de figuras geométricas é um recurso largamente utilizado pelos professores para a representação de conceitos e, muitas vezes, constitui-se em obstáculos para a aprendizagem dos estudantes. A prática pedagógica tem mostrado que muitos estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem de conceitos geométricos por apresentarem pouca habilidade em desenhar determinadas figuras geométricas ou para interpretar o que essas figuras estão representando, como pôde ser verificado no Capítulo 1 do presente estudo.

Pais (1996), ao tecer considerações epistemológicas e didáticas sobre a presença significativa do desenho nesse processo, ressalta que, da mesma forma que o objeto, o desenho é também de natureza essencialmente concreta e particular e, portanto,

¹¹⁹ MITCHELMORE, M. C. (1976). *Cross-cultural research on concepts of space and geometry*. In J. L. Martin y D. A. Bradbard (Eds.), *Space and Geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp.143-184.

¹²⁰ MITCHELMORE, M. C. (1980). *Prediction of developmental stages in the representation or regular space figures*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (2), pp.83-93.

oposta às características gerais e abstratas do conceito. Assim sendo, destaca que o uso do desenho em Geometria Plana é normalmente identificado pelo aluno ao próprio conceito; isto faz com que esse desenho se torne bem mais simples do que em Geometria Espacial, que exige, quase sempre, o recurso à técnica da perspectiva, como pôde ser observado nas representações dos alunos aqui consideradas. Essa dificuldade em colocar em evidência a terceira dimensão do objeto representado é, segundo Pais (1996), uma das maiores dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos espaciais.

Dias (1998) evidencia em seu trabalho as relações da aprendizagem existentes entre as disciplinas Geometria e Desenho Geométrico, revelando a importância do desenho geométrico enquanto elemento facilitador do desenvolvimento do pensamento espacial. Ressalte-se que a disciplina Desenho Geométrico deixou de fazer parte da grade curricular de muitas escolas, tanto públicas quanto particulares, como observado por Pavanello (1989) e verificado na prática pedagógica.

Nomenclatura de Objetos Geométricos

Nas escolas A e B, após os alunos completarem as atividades de representações anteriormente descritas, as quais foram realizadas individualmente, a pesquisadora propôs uma atividade em grupo. Explicou para os alunos que o objeto que eles haviam representado tinha a forma de um sólido geométrico e, dependendo das suas características, cada objeto recebia um nome diferente. Com o objetivo de verificar como eles interpretavam representações geométricas e, também, verificar a maneira como as professoras procediam diante dessas interpretações foram feitos alguns questionamentos aos alunos.

Perguntando-lhes se sabiam o nome dos sólidos geométricos, a pesquisadora iniciou uma discussão a respeito das noções geométricas intrínsecas aos objetos trabalhados. Considera-se importante ressaltar que esse momento possibilitou a troca de opinião entre os diferentes pontos de vista dos alunos o que acabou oferecendo novos

elementos para análise dos processos de aprendizagem dos conceitos geométricos que poderiam ser abordados a partir da sua representação.

Para os alunos das classes das professoras M e R da escola B, escola pública, e para os alunos da professora L da escola A, escola particular, que só representaram paralelepípedos, a pesquisadora pediu-lhes que observassem cada uma de suas faces; os alunos perceberam que elas eram todas retangulares. Além disso, foi pedido aos alunos que reparassem que os lados de cada uma dessas faces eram paralelos, dois a dois, por isso, recebiam o nome de paralelogramos, e que três faces que se encontravam formavam um “bico”, como o encontrado entre duas paredes e o chão da classe, assim, o objeto que eles tinham em mãos era a representação de um sólido geométrico conhecido como paralelepípedo.

Para os alunos da classe da professora G, da escola B, a pesquisadora perguntou qual seria a diferença entre os objetos expostos sobre a mesa: um cubo, um paralelepípedo, um prisma de base triangular e um cilindro. Um dos alunos disse:

— *“São polígonos. Tem uma forma geométrica”.*

Com essa afirmação, pode ser verificado como os alunos interpretavam os termos geométricos intrínsecos às atividades, da mesma forma como constatado na entrevista com as professoras da escola B. Isto é, o termo polígono é conhecido pelos sujeitos da escola B, entretanto, não é conhecido o seu conceito.

A pesquisadora questionou-os a respeito de polígonos. Diante do silêncio, e mostrando-lhes o prisma de base retangular, a pesquisadora perguntou para a classe se o referido objeto possuía polígonos.

As respostas dos alunos foram variadas:

— *“É um polígono, porque tem que ter mais que quatro partes”.*

— *“É um pentágono porque tem cinco lados”.*

— *“A caixa é polígono porque tem vários lados”.*

Outro aluno discordou dessas explicações, e disse que o objeto apresentado pela pesquisadora não era um pentágono, mas que na caixa de brinquedos da classe tinha um pentágono. Ele dirigiu-se até a referida caixa, pegou um poliedro regular de doze faces, dodecaedro, cujas faces são pentágonos regulares e mostrou uma das faces do objeto para a pesquisadora, contando o número de lados desse polígono.

Com esta atitude, fica clara a confusão que os alunos faziam entre os termos geométricos (o polígono, figura plana, foi confundido com um objeto espacial, cujas faces são polígonos). Isto mostrou uma possível ênfase na nomenclatura que pode ter sido mais explorada nas aulas em detrimento dos conceitos e das propriedades das figuras geométricas. Vale lembrar que esse tipo de comentário também ocorreu quando do contato da pesquisadora com as professoras da escola B, como notado anteriormente.

Durante essa discussão, da pesquisadora com os alunos e entre os próprios alunos, a professora G não fez qualquer comentário, não percebendo que as diferentes interpretações dos alunos poderiam ser exploradas a fim de facilitar o processo de aprendizagem da Geometria. A impressão que ficou é a de que, naquele momento, aquela discussão com os alunos estava cumprindo um importante papel também para a professora. Esse momento pode ter proporcionado a ela reflexões sobre seu próprio conhecimento a respeito desse conteúdo e sobre o que ela precisava conhecer para poder ensiná-lo em suas aulas. Notou-se que, por diversas vezes, a professora buscava encontrar no livro didático, que os alunos usam em classe, algum referencial para poder entender os desdobramentos das discussões que estavam sendo desenvolvidas na classe.

Nesse contexto, a pesquisadora esclareceu para os alunos e, de certa forma, para a professora também, que a palavra **pentágono** é uma palavra de origem grega, sendo que *penta* significa *cinco* e que *gono* significa *ângulo*.

A pesquisadora explicou também que, um **polígono** é uma figura plana, contínua, fechada por segmentos de reta, formando ângulos. O **pentágono** é, portanto, um **polígono** que possui cinco ângulos. Com o **dodecaedro** na mão, mostrou para a classe que cada uma das faces do objeto é um polígono de cinco lados, e que cada uma das faces é um pentágono, mas que o objeto não poderia receber o nome de polígono e nem de pentágono, porque é um objeto **espacial**, é um objeto tridimensional que, além de estar sobre um plano, como o da mesa, está ocupando espaço em outros planos. Fez, em seguida, o decalque de uma das faces, mostrando que cada uma das faces é um polígono de cinco lados. Falou para a classe que os objetos geométricos que têm todas as faces formadas por polígonos recebem o nome de **poliedro**, outra palavra de origem grega, na qual *poli* significa *muito* e *edro* significa *face*. Além disso, ressaltou que aquele poliedro recebe um nome especial, entretanto, o importante naquele momento era

que eles pudessem ver a diferença entre os diferentes sólidos que foram trabalhados em classe e que não ficassem preocupados com a nomenclatura, com os nomes das figuras geométricas.

A pesquisadora solicitou, em seguida, que os alunos fizessem o decalque das faces de diversos poliedros, contando o número de lados de cada uma. Depois disso, propôs para a classe fazer uma listagem com as figuras que possuem três, quatro, cinco e seis lados, explicando o nome de cada um dos polígonos desenhados, notando que os alunos, após terem tido a oportunidade de debaterem as questões acima, tiveram facilidade na tarefa.

É importante destacar que os professores, de modo geral, necessitam saber como ajudar seus alunos na formação de conceitos, identificando os níveis conceituais em que eles se encontram e propondo atividades de acordo com esses níveis. Como abordado no Capítulo 2 da presente pesquisa, Pirola (1995), estudando a formação de conceitos geométricos (triângulo e paralelogramo), baseando-se na teoria de Klausmeier (1977), apresenta alguns pontos importantes: 1) identificar o nível em que o aluno pode formar o conceito; 2) ensinar uma estratégia para atingir o conceito; 3) programar uma sequência adequada de conjuntos de exemplo e não exemplos para o ensino e avaliação do conceito; 4) tornar claro os atributos definidores do conceito; 5) estabelecer a terminologia correta para o conceito e seus atributos; 6) fornecer “feedback informativo”; 7) propiciar o uso do conceito; 8) encorajar e orientar a descoberta e a auto-avaliação do aluno.

Segundo as palavras de Klausmeier (1977),

“A aprendizagem de conceito é um objetivo educacional muito importante em todos os níveis escolares. De acordo com isso, professores, especialistas em currículos e planejadores de materiais de ensino estão envolvidos na identificação de conceitos que os alunos podem aprender em níveis sucessivamente superiores; também trabalham regularmente, visando o aprimoramento de materiais e procedimentos para ensinar conceitos” (Klausmeier¹²¹, 1977, citado por Pirola, 1995, p.92).

¹²¹ KLAUSMEIER (1977) *Manual de Psicologia Educacional. Aprendizagem e Capacidades Humanas*: Harper e Row. Traduzido por Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu.

Continuando a discussão com os alunos da classe da professora G, da escola B, a pesquisadora mostrou um cubo para eles (caixa marrom), e disse que esse objeto é o que eles estão mais acostumados a manusear. Um dos alunos, demonstrando ter compreendido as intervenções acima, disse:

— *“Cada face dele é um quadrilátero...”*

A pesquisadora concordando com o aluno, perguntou para a classe:

— *“E o que é um quadrilátero?”*

Um dos alunos respondeu:

— *“É quatro lados”*. Corrigindo imediatamente,

— *“É uma figura que tem quatro lados”*.

O desdobramento das discussões acima, intermediadas pela pesquisadora, contribuiu para que a investigação pudesse focalizar a construção do conceito de quadrado.

Conceito de Quadrado

A pesquisadora, mostrando-lhes o cubo e o prisma de base retangular, solicitou que os alunos da professora G, da escola B, observassem bem a diferença e a semelhança entre os dois objetos.

Um dos alunos, depois de pegar os objetos, observá-los atentamente, disse:

— *“São diferentes, porque um é formado por retângulos e outro é formado por quadrados”*.

A pesquisadora disse que a afirmação estava correta e questionou sobre o conceito de quadrado. Assim como as professoras haviam respondido anteriormente, quando das entrevistas com a pesquisadora, a classe respondeu:

— *“Quando tem quatro lados”*.

A pesquisadora questionou, então:

— *“Só ter quatro lados faz a figura ser um quadrado?”*

Um dos alunos respondeu:

— *“Não. Tem que ser quatro lados iguais”*.

A pesquisadora pegou quatro varetas de madeira, com o mesmo comprimento, e formou uma configuração como a representada abaixo, sobre uma mesa, não mantendo os ângulos iguais.

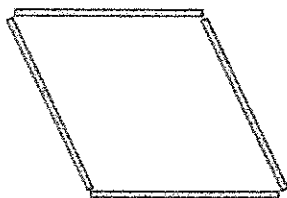


Figura 5.41 - Representação da configuração feita com varetas.

Um dos alunos, imediatamente disse que a figura não era um quadrado, assim justificando:

— “*Não é quadrado porque tem formato diferente, é um losango*”.

A pesquisadora então perguntou:

— “*O que tem de diferente?*”

O mesmo aluno respondeu:

— “*Aquele (se referindo ao modelo com as varetas) não é normal*”.

Então, outro aluno completou:

— “*É por causa dos ângulos. Têm que ser iguais*”.

Aproveitando o que o aluno falou a respeito de losango, a pesquisadora explicou à classe que a figura formada pelas varetas tinha os quatro “lados iguais” (mesma medida de comprimento) e dois pares de lados paralelos entre si e, pois isso, essa figura recebia no nome de *losango*. Explicou também que, o quadrado é um tipo especial de losango, ou seja, é um paralelogramo com os quatro lados iguais, e além disso, possui também os quatro ângulos iguais.

Dessa forma, essa discussão a respeito do conceito de quadrado e de losango possibilitou a esses alunos o entendimento das condições necessárias para que um polígono fosse considerado um quadrado dentro da classe de polígonos.

A abordagem feita pela professora S, da escola C (pública), a respeito do conceito de quadrado foi diferente, e mostrou como a ação do professor pode favorecer a formação de conceitos, como abordado por Pirola (1995).

A professora S questionou seus alunos a respeito do que era um quadrado. A cada resposta dos alunos ela fazia uma representação no quadro-negro “traduzindo em desenhos” essa resposta.

Quando os alunos disseram:

— “*Tem quatro partes*”. Ela desenhou:

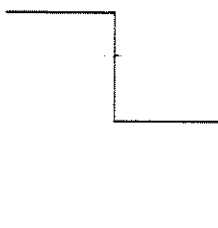


Figura 5.42 - Figura com quatro partes.

Os alunos discordaram, dizendo que teria que ser uma figura fechada de quatro lados, ao que ela desenhou:

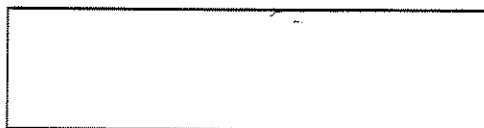


Figura 5.43 - Figura fechada com quatro lados.

Novamente os alunos discordaram, dizendo que os lados deveriam ser iguais e a figura fechada. Então, de acordo com as informações dos alunos, a professora desenhou:



Figura 5.44 - Figura fechada com quatro lados iguais.

A classe discordou, dizendo que ela havia feito outra figura, que ela havia desenhado um losango, então, ela comentou:

— “Mas é uma figura fechada e tem os quatro lados iguais”.

— “Mas você fez os lados tortos”. Retrucou um dos alunos, mostrando-se interessado em fazer ele próprio a representação. A professora concordou e ele desenhou, ao lado do losango desenhado pela professora, um quadrado com lados paralelos à margem do quadro-negro.

Então a professora fez um novo desenho, ao lado dos dois primeiros, como abaixo representado, perguntando para a classe qual a diferença entre eles.

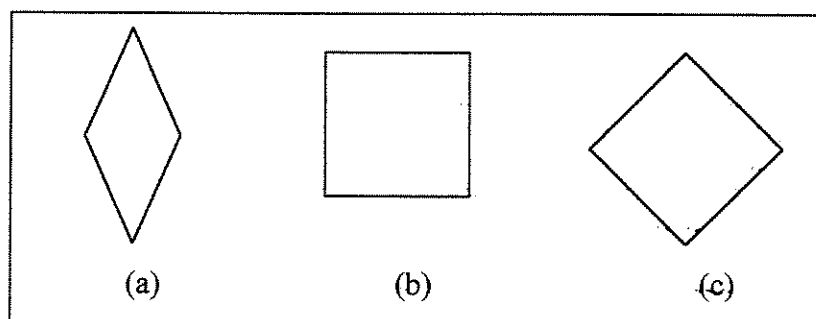


Figura 5.45 - Três quadriláteros com lados iguais.

Os alunos concordaram que as três figuras tinham os “lados iguais” (lados com a mesma medida de comprimento), mas que as suas formas eram diferentes. Um dos alunos disse que a posição estava diferente.

A professora pediu para ele explicar melhor, e ele disse:

— “No primeiro, os lados não estão retos (indicando com gestos, referia-se a falta de perpendicularismo entre dois lados consecutivos). Nos outros, só muda a posição”.

Enquanto ele estava explicando seu ponto de vista, outro aluno buscou, no conjunto de peças do Tangram¹²², o quadrado, e começou a rotacioná-la sobre sua carteira, para, em seguida, ajudar o colega na explicação, mostrando as diferentes posições que o quadrado pode ocupar.

¹²² Observe-se que, os alunos da professora S (escola C) possuíam, colado em seu caderno, um envelope com as peças do jogo.

A professora S, referindo-se às explicações dos alunos, enfatizou para a classe que os movimentos que estavam sendo feitos com o quadrado não alteravam a peça, modificando apenas a sua posição, dizendo:

— “*Quando nós giramos o quadrado, ele não deixa de ser quadrado por causa desse giro. Não é só com o quadrado que isso acontece. Se você girar qualquer figura ela não muda o formato, só a posição. Então, quadrado será sempre quadrado, independente da posição que estiver desenhado*”.

A professora explicou para a classe que o que eles estavam dizendo como “lados retos” na verdade referia-se a um termo da Geometria conhecido como ângulo. Explicou-lhes que o “canto” formado por dois lados de uma figura forma um espaço chamado de **ângulo**, e que, quando estes lados são **perpendiculares** entre si, o ângulo é chamado de **reto**. Pediu que eles observassem os ângulos da primeira figura desenhada (Figura 5.45-a), verificando que os ângulos não eram retos, mas que as outras duas figuras (Figuras 5.45-b e 5.45-c), além de terem os lados iguais, tinham todos os ângulos retos, e portanto, eram exemplos de quadrados. Em seguida pediu que eles dissessem novamente a condição para que uma figura fosse um quadrado, lembrando que eles deveriam ser coerentes com os atributos da figura, ou seja, uma figura fechada com quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

A professora salientou também que, quando a figura tem somente os quatro lados iguais, é chamada de **losango**, não destacando a inclusão do quadrado na classe dos losangos.

A maneira como a professora S conduziu a discussão a respeito de quadrado mostra que ela usou de vários exemplos e não-exemplos a partir do próprio conhecimento que os alunos tinham, o que teria permitido que eles construíssem o conceito em questão. Além disso, ela abordou aspectos intrínsecos ao conceito de quadrado, como ângulo reto, perpendicularismo, paralelismo, losango, e, também, fez uso de informações a respeito de transformações geométricas que não alteram a figura, como a rotação.

Faces do Objeto Tridimensional

Após a representação do paralelepípedo, pelos alunos das classes das professoras M e R da escola B (pública) e pelos alunos da escola A (particular), a pesquisadora pediu que eles observassem a face do objeto que estava em contato com a carteira. Após cada aluno observar sua caixa, perguntou-lhes **como poderiam identificar, no desenho que fizeram, a base que estava em contato com a carteira**, pedindo sugestões à classe.

Bru, aluno da escola A, dirigiu-se ao quadro-negro, fazendo o desenho de um paralelepípedo, como o que havia feito na folha de papel, ou seja, com todas as arestas desenhadas, e disse:

—“*É só fazer transparente...*”. Em seguida, escreve “base” e coloca uma seta indicando que a mesma não é visível no desenho, como pode ser observado na abaixo.

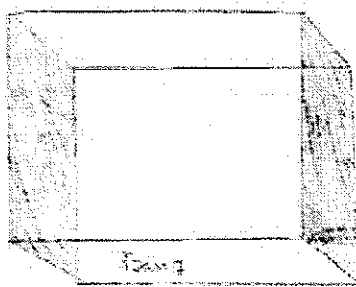


Figura 5.46 – Indicação da base do paralelepípedo representado por Bru.

Outros alunos da escola A, que não haviam desenhado o objeto como Bru, isto é, mesmo desenhando em perspectiva, não explicitaram as arestas não visíveis, perguntaram se poderiam modificar o desenho, desenhando agora a caixa “transparente”. A pesquisadora propôs uma reflexão, perguntando-lhes se seria necessário aparecer as faces que não são visíveis para se saber onde estava a base. Os alunos, discutindo entre si, disseram que não, e começam a fazer a anotação em seus desenhos.

Apenas Mar não identificou no desenho onde se encontrava a base do objeto ali representado. Por não ter conseguido fazer um desenho em perspectiva (Figura 5.33), restringiu-se a apontar com o dedo onde se encontrava a base, não anotando no seu

desenho. A aluna demonstrou não ter compreendido perfeitamente a representação de um objeto tridimensional no plano.

A participação do aluno Bru, mencionada anteriormente, permitiu a socialização do conhecimento, e alguns alunos começaram a analisar o próprio desenho, comparando os traçados, percebendo o que os diferenciavam. A coordenadora pedagógica da escola A, que estava na classe no momento, acompanhou toda a discussão e auxiliou os alunos a localizarem a base do objeto em seus desenhos.

Esse mesmo tipo de atividade foi realizado com os alunos da professora M da escola B; começou com a pesquisadora pedindo aos alunos que observassem que a caixa que eles haviam desenhado podia ser colocada sobre a mesa de diferentes maneiras. Rapidamente eles concluíram que eram de seis maneiras diferentes, e que, portanto, o objeto representado possuía seis faces.

Durante a realização dessa atividade foi possível observar que a maioria dos alunos entendeu quais eram as faces do objeto tridimensional que estavam representadas na folha de papel, isto é, no plano. Alguns alunos usaram setas para indicar onde estavam as faces ocultas no desenho, enquanto outros preferiram descrever onde estava cada face, relacionando-as com a numeração colocada na própria caixa, como fez Wil:

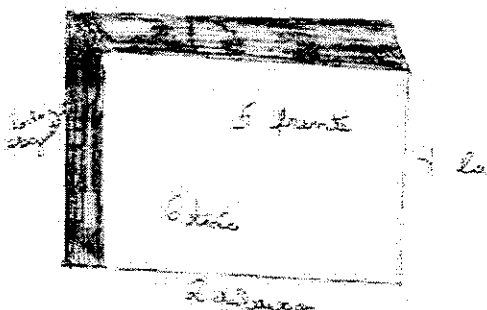


Figura 5.47 - Representação das faces do prisma indicadas por Wil.

Para cada aluno da professora G, da escola B, a pesquisadora entregou a fotocópia da representação que eles haviam feito, quando desenharam um dos objetos geométricos (cubo, prisma de base triangular, paralelepípedo e cilindro). Solicitou que eles contassem e numerassem, no desenho, cada uma das faces do objeto representado. Em seguida, solicitou que eles desenhasssem cada uma das faces do objeto. A entrega da

fotocópia, e não da folha original, foi com a intenção de afastar a possibilidade dos alunos efetuarem correções no que haviam feito.

De modo geral, os alunos **identificaram o número de faces de cada objeto**.

Dos vinte alunos que haviam desenhado o cubo, dez desenharam seis quadrados para representar as faces, apesar de alguns não terem sido precisos com as medidas de lados e ângulos iguais. Um aluno desenhou novamente o cubo em perspectiva.

Bru, aluno da professora G, da escola B, que havia desenhado apenas um quadrado para representar o cubo (Figura 5.48-a), demonstrou ter percebido incorreções em seu desenho inicial depois da discussão a respeito das representações de um objeto tridimensional no plano. Isso pode ser percebido pelo fato dele ter tentado fazer algumas modificações na fotocópia do seu desenho, que podem ser percebidas pelas marcas deixadas no papel. Por fim, acaba desenhando as faces em perspectiva sobre o quadrado que havia desenhado anteriormente (Figura 5.48-b); entretanto, para representar cada uma das faces do cubo separadamente fez apenas quatro figuras, e deixou marcas de outras que aparecem indicadas pela pesquisadora com setas (Figura 5.48-c). Com essa sequência de representações, Bru demonstrou que ainda não identificava totalmente um objeto tridimensional representado no plano, mesmo quando este desenho aparecia em perspectiva. Isso indica que ele pode ter pedido ajuda para fazer a representação em perspectiva, e que esse desenho poderia ainda não ter significado para ele.

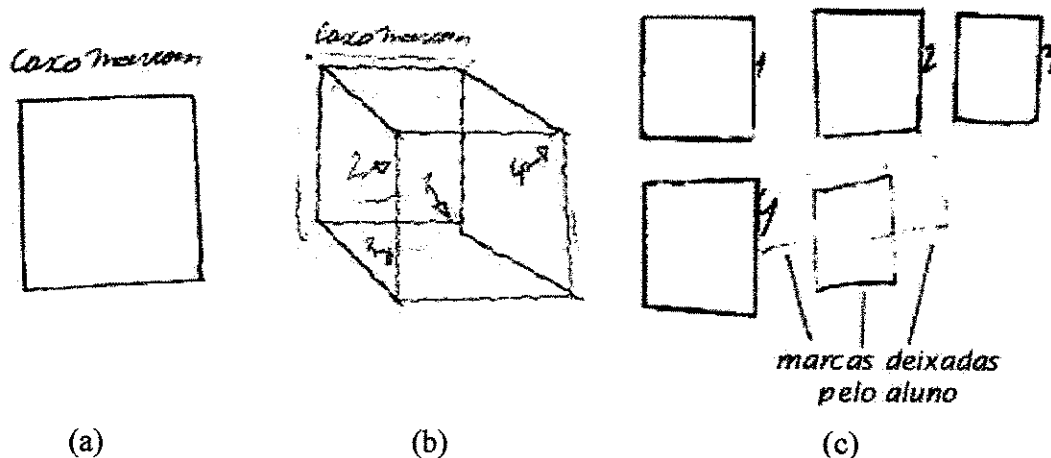


Figura 5.48 - Sequência de representações feitas por Bru.

Aparentemente, a professora não percebeu esse acontecimento na aula em que o aluno fez os desenhos; no entanto, poderia ter explorado esse tipo de representação na aula seguinte, já que teve a oportunidade de examinar o material produzido pelos alunos, em reunião com a pesquisadora após a aula. Nessa exploração, a professora poderia ter chamado a atenção dos alunos, pedindo que eles analisassem as representações (a) e (b) acima e identificassem aquela que dá uma idéia mais apropriada para uma caixa, lembrando mais uma vez que o conceito de perspectiva não é natural, mas sim um conhecimento cultural, que precisa ser ensinado. Além disso, a professora poderia ter reforçado com a classe os conceitos de faces, arestas e vértices de um prisma comparando cada uma das faces do objeto real (tridimensional) à sua representação no plano (bidimensional), fazendo também as correspondências com as faces desenhadas no item (c).

Seria interessante, aqui, introduzir alguns questionamentos sobre esse episódio: A professora percebeu ou não qual foi a interpretação que o aluno fez do objeto geométrico? A professora teria condições (teóricas e metodológicas) de discutir com o aluno e/ou com a classe a respeito dos elementos constitutivos do objeto geométrico em questão? Como ela abordaria essas questões com a classe? São questões para as quais não se tem respostas, já que não foi possível observar qualquer tipo de interpretação da professora a respeito do acontecido. Pode-se inferir que as atividades, naqueles momentos propostas e desenvolvidas pela pesquisadora, com objetivo específico para a presente pesquisa, aparentemente revelavam um conteúdo desconhecido para a professora.

Jul, aluno da professora G, que havia desenhado o cubo em perspectiva, fez a representação de cada uma das faces ligadas entre si, como se estivesse “abrindo o cubo”, “desfolhando” cada uma das faces.

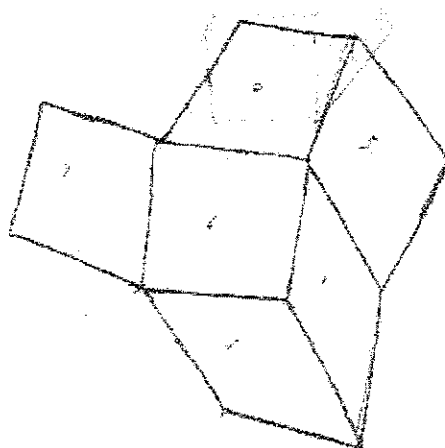


Figura 5.49 - Representação das faces do cubo de Jul.

Talvez a maneira que o aluno escolheu para representar as faces do objeto tenha sido a forma dele deixar claro onde cada uma delas estaria no objeto real.

Dos três alunos da professora G, que escolheram representar a caixa em forma de prisma de base retangular, Hum numerou apenas três faces de seu desenho em perspectiva (Figura 5.50-a) e, ao desenhar as faces correspondentes, ele fez seis figuras parecidas com “quadrados”, todas praticamente do mesmo tamanho, apagando o desenho de três delas, com corretivo (Figura 5.50-b). Isso indica que o aluno pode ter desenhado, em separado, apenas as faces que estariam visíveis no desenho do objeto em perspectiva (as que ele numerou). A representação da caixa em perspectiva e o desenho de suas faces em separado são incompatíveis, pois não mantêm a proporcionalidade.

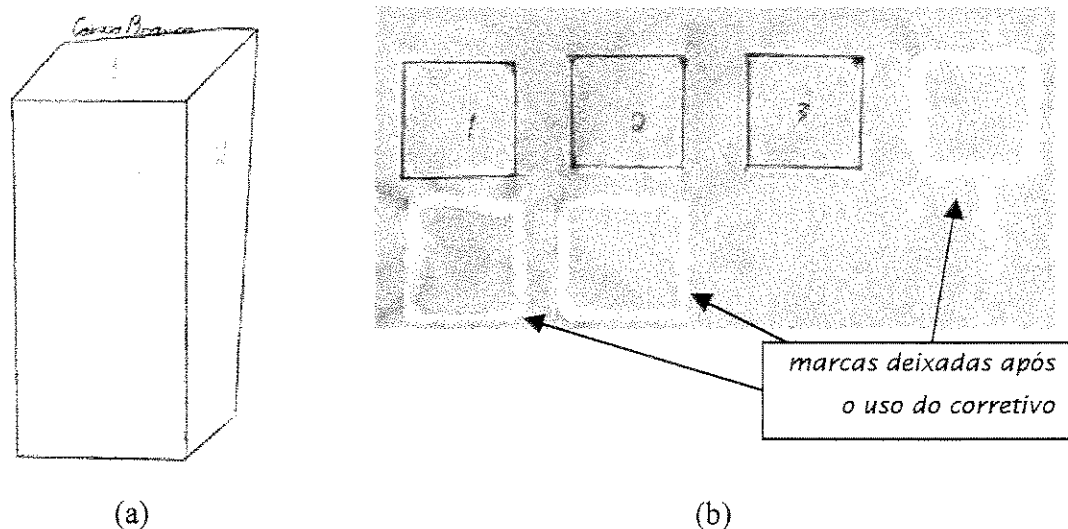


Figura 5.50 – Representações do paralelepípedo e de suas faces feitas por Hum.

Por sua vez, o aluno Fab, da mesma classe, representou o paralelepípedo próximo do correto (Figura 5.51-a), visto que as arestas das faces laterais não estão perpendiculares à base, e, também, não estão paralelas entre si, enquanto, na hora da representação das faces do objeto (Figura 5.51-b), considerou todas as faces iguais, desenhando seis quadriláteros de idênticas dimensões, como pode ser verificado a seguir.

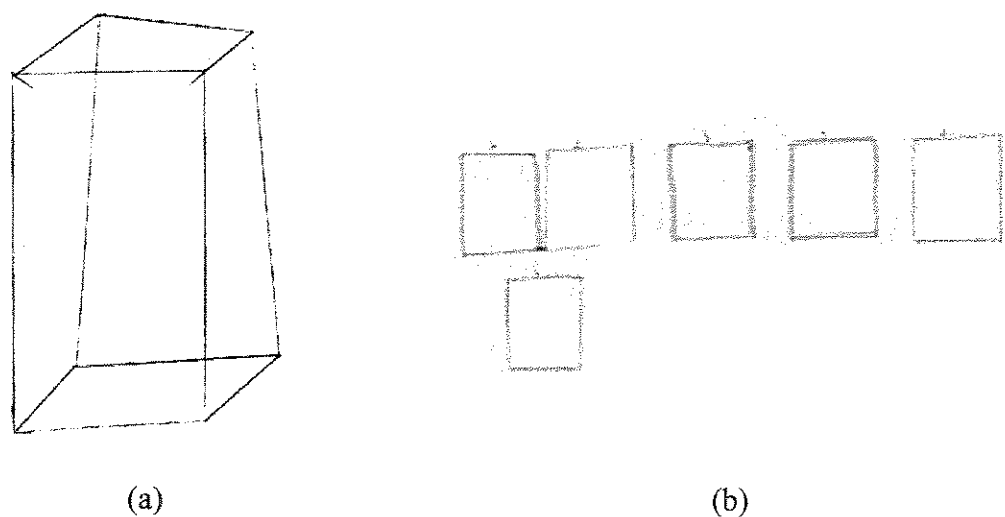


Figura 5.51 - Sequência de representação de Fab.

Do ponto de vista didático, considera-se que o aluno está muito próximo de conseguir representar corretamente tanto o objeto tridimensional no plano, quanto de identificar e representar corretamente cada uma das partes que o compõe. O fato dele não ter mantido a proporcionalidade existente entre as faces pode ser explicado pela falta de análise das características do objeto. Nesse caso, se essa questão tivesse sido discutida e trabalhada pela professora com o aluno e, também, com os demais alunos da classe, essa incorreção poderia ter sido rapidamente corrigida. Tal episódio destaca a importância da mediação no processo de construção dos conceitos geométricos. Em outras palavras, os professores, de modo geral, poderiam utilizar recursos manipuláveis com o objetivo de explorar o problema principal de diversas maneiras, como, por exemplo, recortando a embalagem, comparando suas particularidades, identificando o desenho do objeto tridimensional com os desenhos de suas partes.

Gab, aluno da classe da professora G, da escola B, que havia representado o prisma de base triangular (Figura 5.52-a), procurou representar cada face do sólido como se estivesse desmontado-o, isto é, “desfolhando” suas faces (Figura 5.52-b). Ele fez a numeração correta de cada uma das faces, inclusive das faces que não estavam visíveis em seu desenho, indicando com setas. Ao representar a face, denominada 2, o aluno demonstra que poderia estar “visualizando” a posição que a face oculta ocupava no objeto real. Apesar de Gab não ter feito a representação em perspectiva paralela, quando ele fez a segunda atividade proposta, deu mostras de que, mesmo não tendo dado ao seu desenho sensação de profundidade, tinha noção de todas as suas faces, inclusive de suas posições. Nesse caso, pode-se inferir que a dificuldade apresentada pelo aluno, ao representar o objeto tridimensional no plano, pode ser decorrente da dificuldade apresentada ao desenhar um objeto que raramente faz parte do cotidiano escolar das séries iniciais. Desse modo, a iniciativa do aluno em escolher um objeto pouco comum demonstra como o desafio para com o novo pode ser motivador para a construção de novos conceitos.

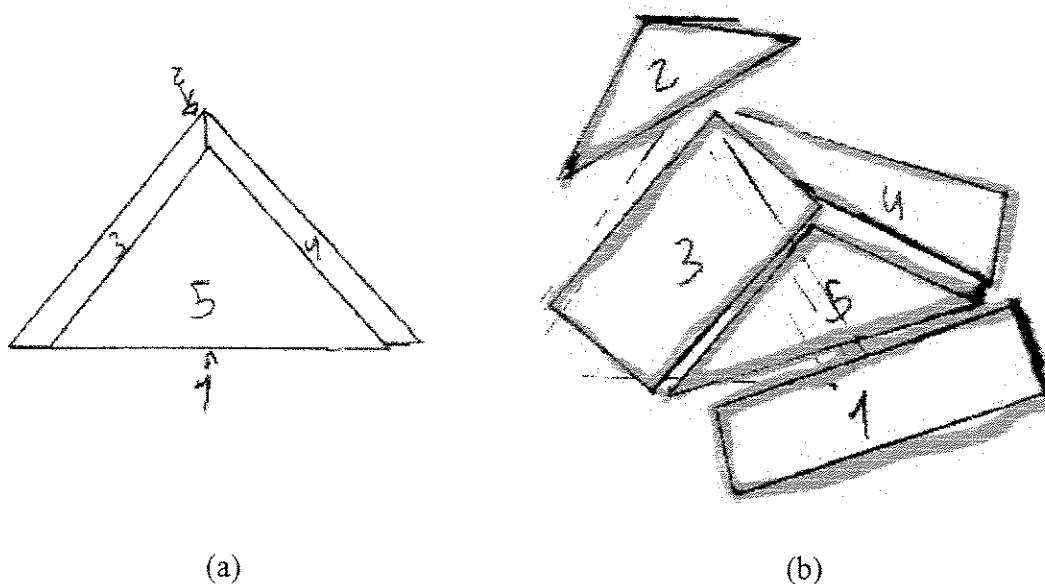


Figura 5.52 - Sequência de representações de Gab.

Dois alunos da professora G, da escola B, que haviam desenhado a representação do cilindro mantiveram, ao desenhar as faces do sólido, alguns elementos próprios do objeto, como ilustrações das embalagens. Nesse momento, eles não relacionaram o objeto espacial à representação plana, pois fizeram simplesmente um desmonte do desenho anterior.

Raf, um desses alunos, separou até mesmo uma parte da figura que representava uma ilustração no objeto real, que ele havia incorporado à representação em perspectiva (Figura 5.53-a), numerando-as como se fossem quatro as faces do cilindro. Isto é, ele não conseguiu relacionar as particularidades intrínsecas do sólido ao ser projetado no plano, mantendo-se centrado ao aspecto figural e não ao conceitual. Em virtude disso, ele desenhava como elipse as faces planas do cilindro (como aparece na representação em perspectiva), ignorando o fato de tratar-se de círculos no objeto real. Além disso, Raf desenhava a face não plana do cilindro como sendo o próprio retângulo que aparece na representação em perspectiva, não o relacionando com as suas reais dimensões.

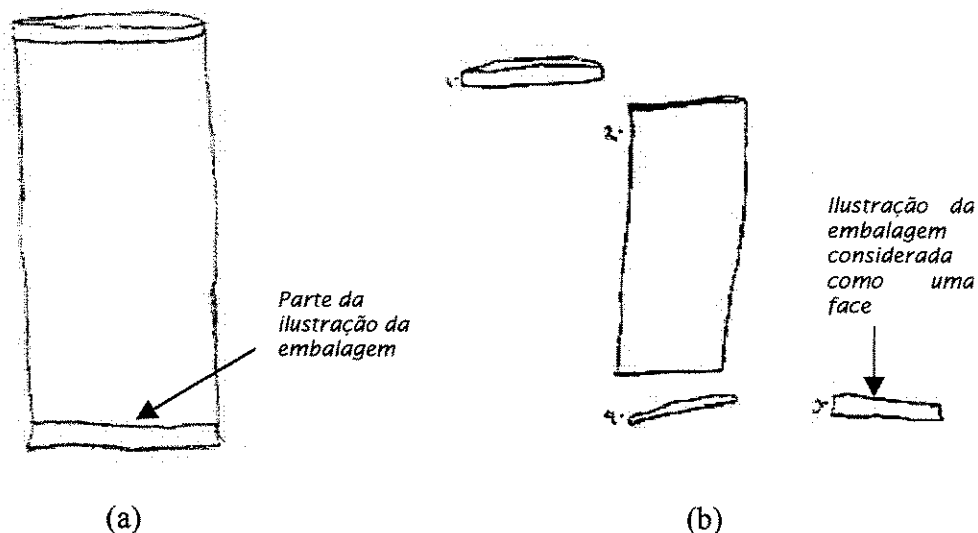


Figura 5.53 - Sequência da representação feita por Raf.

Esse fato evidencia a necessidade dos professores trabalharem com materiais manipuláveis, mediando o processo de construção de noções geométricas, de forma interativa e dinâmica, isto é, oferecendo situações intermediárias e sub-problemas com o objetivo de envolver os alunos em contextos reais de aprendizagem.

A experiência didática tem mostrado que, muito frequentemente, os alunos costumam identificar a lata de um refrigerante como um cilindro; entretanto, raras vezes reconhecerão essa forma em uma moeda ou nas peças cilíndricas dos Blocos Lógicos, por causa de sua pequena espessura, como abordado anteriormente. Atividades de exploração e de deslocamentos, com diferentes corpos geométricos, poderiam ser intensificadas com os estudantes, desde a pré-escola.

Paralelismo e Perpendicularismo

Um outro conteúdo de Geometria investigado neste estudo relacionou-se aos **conceitos de paralelismo e perpendicularismo**.

Quando a pesquisadora investigou se os alunos dispunham de tais conceitos, verificou que, tanto na escola A, quanto na B, eles não se lembravam deles. Como as professoras não manifestassem interesse em abordar tais conceitos, a pesquisadora

mediou alguns debates com os alunos dessas escolas, culminando na realização de algumas tarefas relativas a esses conteúdos, que forneceram elementos a respeito das diferentes representações e interpretações dos alunos a esse respeito. Em relação à escola C, os alunos demonstraram saber que linhas paralelas são linhas que mantêm sempre a mesma distância entre si, pois disseram que *“são linhas que correm juntas”*, fazendo gestos com as mãos que indicavam o paralelismo. Quanto ao perpendicularismo, esses alunos disseram que *“são linhas que estão retas”*, como se observou anteriormente na discussão a respeito do conceito de quadrado.

Como os alunos da escola A não respondessem o que eram retas paralelas, e, também, como a professora L não se encontrava na classe, a pesquisadora perguntou:

— *“O que são ruas paralelas?”*. Um deles respondeu:

— *“São ruas que se cruzam, assim...”* (fazendo gestos com as mãos, ele indicou o perpendicularismo entre elas). A pesquisadora então questionou:

— *“Será que ruas assim são paralelas? Ou será que são perpendiculares?”*

Uma das alunas, parecendo recuperar o que havia estudado a respeito, comentou:

— *“Paralela... paralela... uma ao lado da outra!”*

A classe concordou com as palavras da colega e os alunos citaram exemplos de ruas paralelas próximas à escola, identificando, também, na própria classe, a existência de vários paralelismos. Citaram as retas paralelas definidas pelas ferragens das vidraças, pelas bordas da mesa e, também, os planos paralelos, como o da parede do quadro-negro e o da parede do fundo da classe.

A pesquisadora pediu para eles **identificarem na caixa que haviam desenhado (paralelepípedo) as faces que eram paralelas entre si**. Os alunos indicaram com as mãos os pares de faces paralelas da caixa, observando que existiam três pares de faces paralelas. A pesquisadora pediu para que eles colorissem, em suas representações, um par de faces paralelas.

De modo geral, eles fizeram essa atividade com sucesso. Mesmo o aluno Hel, que havia apresentado dificuldade ao fazer a representação de sua caixa, como relatado anteriormente, indicou, a seu modo, o paralelismo entre as faces. Ele coloriu uma face e traçou, com a mesma cor, uma aresta paralela a ela, como pode ser observado abaixo:

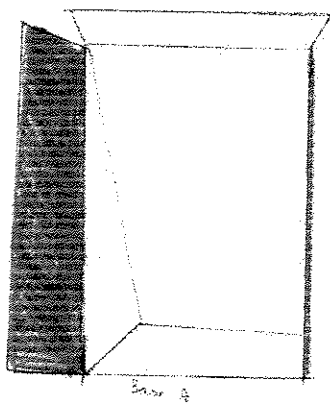


Figura 5.54 - Representação das faces paralelas de Hel.

Essa atividade proporcionou interesse nos alunos em encontrar as faces perpendiculares na caixa e entre outros objetos existentes na sala, iniciando pela análise das faces da caixa seriam perpendiculares entre si. A pesquisadora sugeriu que eles verificassem o perpendicularismo entre as faces adjacentes da caixa. Indicando com gestos, eles demonstraram claramente quais eram elas e transportaram esses dados para a sala de aula, identificando o perpendicularismo entre diversos objetos e entre diversas partes de objetos existentes na classe. Destaca-se que nesse momento a professora da classe não fez comentários.

Como mencionado anteriormente, as professoras da escola B não programaram atividades a respeito desses conteúdos; assim, as atividades foram propostas pela pesquisadora. Verificando que os alunos apresentavam dificuldade em dizer o que significava *perpendicular* e *paralela*, ela iniciou uma discussão, referindo-se aos objetos existentes na própria sala de aula. A partir disso, os alunos começaram a identificar diversos paralelismos e perpendicularismos no ambiente da classe, e, posteriormente, essas noções foram transportadas para os elementos dos sólidos desenhados por eles.

Para os alunos da professora M, foi solicitado que **identificassem o perpendicularismo entre faces adjacentes**. De modo geral, a maioria dos alunos fez essa tarefa com êxito, como pode ser verificado na representação de Tha, aluna da classe da professora M:

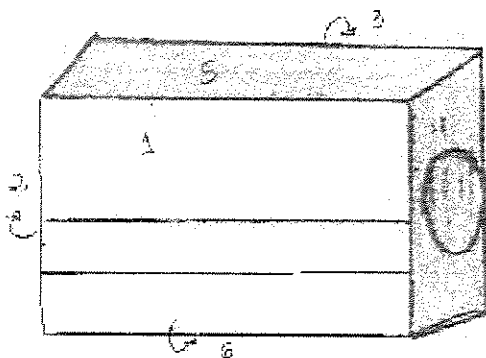


Figura 5.55 - Representação do perpendicularismo das faces do objeto feita por Tha.

Ath, aluno da classe da professora M, da escola B, que havia feito o desenho da sua caixa desenhando apenas um retângulo (uma das faces da caixa), não conseguiu identificar as faces que eram perpendiculares entre si. Mostrando o seu desenho para a pesquisadora, o aluno afirmou que, do modo como havia feito, o desenho não parecia uma caixa. A pesquisadora perguntou-lhe o que ele precisaria fazer para que o desenho se parecesse com uma caixa. O aluno respondeu:

— “*Se desenhar no retângulo o que está desenhado na caixa vai ficar parecendo uma caixa*” (referindo-se ao que aparecia impresso na embalagem que foi usada como modelo do sólido geométrico).

A pesquisadora sugeriu que ele realizasse o seu intento e verificasse se, com os desenhos que apareciam na embalagem, seu desenho poderia ser reconhecido como uma caixa.

Ath, sem iniciar o desenho, dando a impressão de estar refletindo sobre o que a pesquisadora disse, observou seu desenho e a caixa, o objeto real, concluindo, decididamente:

— “*Se a caixa não tivesse desenho, só o retângulo não ia parecer uma caixa...*”

Diante dessa conclusão, a pesquisadora perguntou-lhe o que precisaria fazer para resolver esse problema, e o aluno respondeu:

— “*Desenhar os lados que não dá para ver*” (referindo-se às faces do sólido).

Em seguida, Ath complementou seu desenho, desenhando, ainda com uma certa dificuldade no traçado, o paralelismo entre as arestas inclinadas, mas identificando

corretamente cada uma das faces do objeto e as respectivas faces na representação, dando um sentido de profundidade ao desenho, como pode ser verificado na figura abaixo:

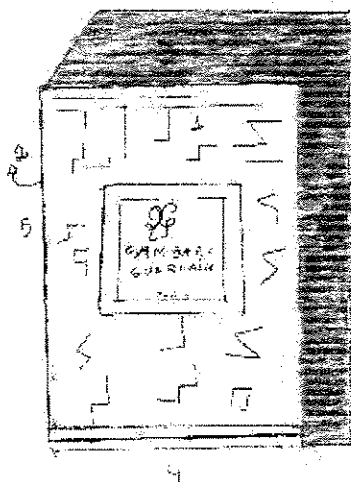


Figura 5.56 - Representação de perpendicularismo realizada por Ath.

Para os alunos da professora R, da escola B, a solicitação da pesquisadora consistiu em **identificar faces paralelas do prisma**. Para tanto, pediu que eles colorissem duas faces do prisma, paralelas entre si. A maioria dos alunos, mesmo aqueles com maior dificuldade em fazer a representação do paralelepípedo em um plano, conseguiu identificar corretamente duas faces paralelas em seu desenho, como é o caso do aluno Daí, ilustrado abaixo. Nota-se que, ao colorir o segmento, indicando uma das faces paralelas, o aluno se limitou em colorir uma das arestas da face paralela.

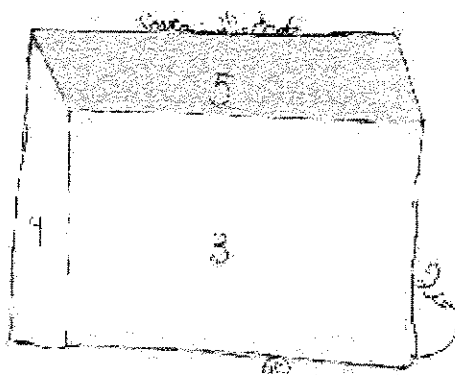


Figura 5.57 - Representação do paralelismo identificado por Daí.

Mesmo dois, dos três alunos da professora R, da escola B, que não haviam conseguido nenhum sucesso na representação do objeto tridimensional no plano, identificaram pares de faces paralelas em seus desenhos, como pode ser constatado nas Figuras 5.30-a e 5.30-b, ilustradas anteriormente. Somente um, o aluno Ron, não conseguiu identificar nenhum um par de faces paralelas na sua representação, colorindo todas as faces, sem nenhuma relação entre elas, como pode ser observado na ilustração da Figura 5.31.

Planificação de Prismas: paralelepípedo

Foi proposto pela pesquisadora que os alunos da professora L, da escola A, **desenhassem a caixa desmontada, isto é, que fizessem a planificação do paralelepípedo**. Segundo informação da coordenadora pedagógica, que substituiu a professora nessa aula, esses alunos já possuíam um certo domínio em atividades desse tipo, pois tinham o hábito de recortar planificações de sólidos geométricos quando construíam maquetes, uma prática comum na vivência escolar deles. O que diferenciou a proposta da pesquisadora foi o fato de pedir que eles identificassem cada uma das faces da caixa com a sua respectiva face no desenho da planificação. Essa identificação foi realizada através de números, possibilitando a percepção de que todas as caixas tinham o mesmo número de faces e também que todas eram paralelogramos retângulos.

O objetivo dessa proposta foi **verificar se os alunos conseguiam identificar a forma de cada uma das faces do objeto, assim como a sua perfeita posição na composição do sólido**. Além disso, esse tipo de atividade permitiu que a pesquisadora observasse os procedimentos usados pelos alunos nos quais a interrelação entre o figural e o conceitual requer uma atividade cognitiva mais complexa. Como argumenta Fischbein (1993), em tais atividades o estudante tem que aprender a manipular mentalmente objetos geométricos, recorrendo simultaneamente às operações com as figuras e às condições lógicas das operações necessárias para tal tarefa (p.158).

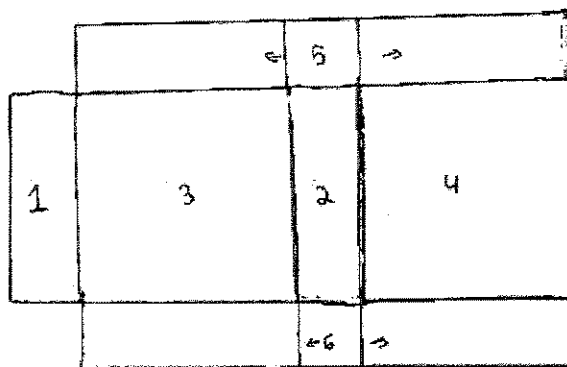
Com a intenção de verificar como os alunos interpretavam os conceitos implícitos nos sólidos geométricos, a pesquisadora solicitou-lhes que desenhassem e

identificassem a imagem geométrica obtida pela “desmontagem” da caixa (sem efetuar o desmonte, isto “abrindo” mentalmente); que indicassem as extremidades que se encontrariam (que se combinariam); e que identificassem o corpo geométrico que poderia ser obtido imaginando a dobradura de um desenho bidimensional quando o objeto tridimensional fosse reconstruído.

Ressalta-se nesse contexto a representação do objeto que foi realizada por Bru, ilustrada na Figura 5.58-b. Ao identificar as seis faces do objeto, em sua planificação, Bru fez um desenho obedecendo às características físicas das faces no objeto real, pois o mesmo possuía faces que se sobrepunham (congruentes entre si). Tal fato foi evidenciado nas palavras abaixo descritas, justificando o seu procedimento.



(a)



(b)

Figura 5.58 - Foto e representação da caixa utilizada por Bru.

— “A face 5 da minha caixa tem duas partes (o aluno abriu sua caixa, observando como se constituíam suas faces), e eu coloquei o 5 no meio e as flechinhas para mostrar que são as mesmas. Com o 6 é a mesma coisa. Ao todo são seis faces”.

Pode-se perceber que Bru, ao desenhar dois retângulos iguais para as faces 5 e 6, agiu de maneira consciente, pois ele indicou claramente, com numeração e com as setas, que as faces se sobrepunham.

Com os alunos da professora M, da escola B, a proposta foi que eles construíssem uma caixa como a que eles tinham em mãos. Para tanto, eles necessitavam fazer a planificação do objeto, o paralelepípedo retângulo.

De modo geral, os alunos fizeram o contorno de cada uma das faces na folha de papel que receberam. Alguns desenharam as faces unidas pelas arestas e, para tanto, rotacionavam a caixa quando necessário. Outros alunos desenharam separadamente cada uma das faces. Durante esse processo, alguns alunos perceberam que algumas faces desenhadas ficavam iguais, constatando, mais uma vez, que o objeto se constituía de três pares de faces iguais. Além disso, perceberam que essas faces iguais, quando a caixa fosse montada, ficariam paralelas, como haviam percebido no objeto real. Em pouco tempo, todos os alunos tinham uma caixa construída por eles, semelhante à caixa que lhes foi entregue no início da aula.

A professora M da escola B, fez com a classe um comentário dessa atividade, explicando para os alunos que *“uma caixa que possuía todas as faces quadradas é chamada de cubo; se todas as faces são retangulares, é chamada de paralelepípedo; e, se duas faces são triangulares, é chamada de prisma de base triangular”*. Diante dessa explicação, um dos alunos comentou:

— *“Então essa caixa é um paralelepípedo!”* (mostrando uma caixa de pasta de dente).

A professora concordou com o aluno e explicou mais uma vez para a classe a diferença entre cada um dos sólidos geométricos que estavam sobre sua mesa.

Para os alunos da classe da professora G, da escola B, a pesquisadora solicitou que eles **fizessem a planificação de um cubo**. Ressalta-se que o cubo é um tipo de paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas são congruentes.

Após a planificação, eles deveriam recortá-la e vincá-la, observando o resultado: uma caixa aberta ou uma caixa fechada.

Dezenove alunos desenharam a planificação de caixa fechada, sendo que quinze fizeram em “forma de cruz” e quatro em “forma da letra T” (Figura 5.59).

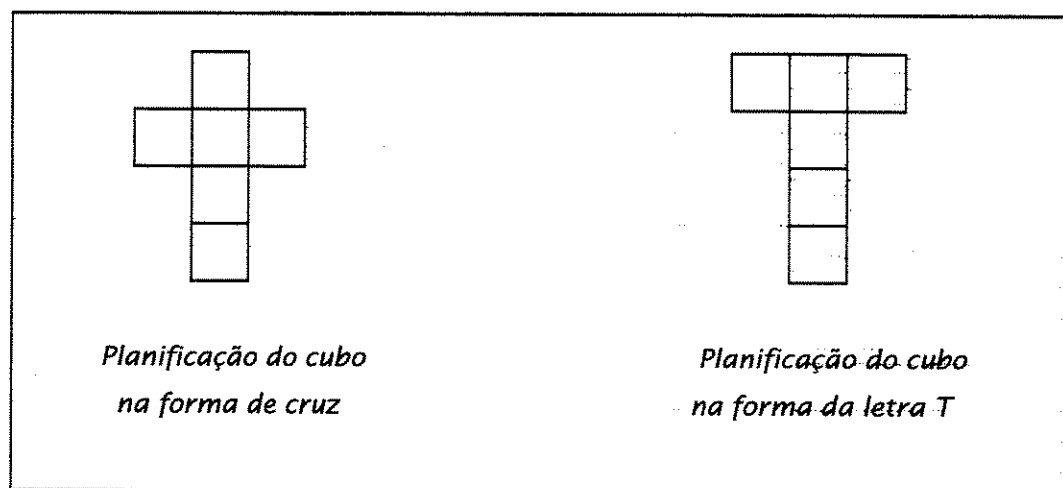


Figura 5.59 - As duas planificações “fechadas” do cubo.

As atividades de representar a “desmontagem” do cubo ou do paralelepípedo reto-retângulo constituíram-se em tarefas relativamente fáceis para os alunos, isto porque, como nas planificações acima, a simetria da imagem certamente ajudou a dobra das faces, e puderam ser feitas como uma tarefa única.

Conforme afirma Fischbein (1993) nesses casos, *“os componentes figural e conceitual são naturalmente bem integrados e, conseqüentemente, o que se manipula é um conceito figural com seus elementos”* (p.158) (tradução da pesquisadora).

Sete alunos desenharam caixas abertas, só percebendo que elas não eram a planificação do cubo ao recortarem os desenhos, e ao tentarem “montar” a representação do cubo. Alguns desses alunos mostraram a planificação que haviam feito para a professora G, da escola B, dizendo que estava faltando um “lado” do cubo (referindo-se à face que estava faltando). Essa confusão de nomenclatura não foi percebida por ela, que concordando disse: *“é, faltou um lado”*.

A pesquisadora, percebendo essa incorreção, explicou para os alunos da professora G que o cubo possui seis **faces**, portanto, aquelas planificações, que resultaram em caixas abertas, não eram planificações do cubo.

Como a professora R, da escola B (escola pública), não preparou atividades geométricas para desenvolver com seus alunos, e como havia interesse em **investigar as representações geométricas dos alunos em tarefas de planificações do cubo**, a

pesquisadora entregou para cada aluno um papel desenhado com uma malha quadrangular, solicitando-lhes que desenhasssem a planificação do cubo¹²³.

Essas atividades contribuíram com a presente pesquisa pois revelaram que combinar as extremidades correspondentes que se apresentam adjacentes no desenho de uma planificação pode ser considerada uma tarefa fácil para os estudantes; entretanto, “ver” quais extremidades (não adjacentes) se encontrarão quando o cubo for montado é mais complexa. Uma tarefa ainda mais complexa seria a de identificar outras planificações, diferentes das comumente encontradas no cotidiano escolar para o cubo.

Observe-se que um aluno, da professora R, ao desenhar uma configuração com cinco quadradinhos, pergunta à pesquisadora se sua planificação está correta. Esse aluno deu a impressão de que sabia qual seria a resposta, pois sua pergunta, foi formulada, de certo modo, como a própria resposta:

— “Com cinco não vai ser possível para completar o cubo?”.

Ao fazerem as planificações usando a malha quadrangular, os alunos a recortaram, comentando com os colegas, as diferentes planificações que foram surgiram. Aproveitando a diversidade de planificações, a pesquisadora lançou um desafio: Que eles encontrassem todas as possíveis maneiras de planificar o cubo.

Júl, um dos alunos dessa classe fez a representação ilustrada abaixo e mostrou para a pesquisadora. Antes mesmo de perguntar qualquer coisa, ele percebeu que não seria possível montar um cubo com o desenho que havia feito, mas não demonstrou saber como agir.

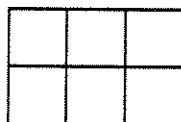


Figura 5.60 - Representação da planificação apresentada por Jul.

A pesquisadora argumentou:

¹²³ Essa atividade foi proposta apenas para os alunos da professora R (escola B).

—“São seis os quadrados que formam um cubo, mas será possível montar um cubo da forma com que os quadradinhos estão ligados? Se o desenho fosse recortado e dobrado nas linhas desenhadas, seria possível construir um cubo com ele?”

Júlia respondeu negativamente. Então, a pesquisadora perguntou:

—“Por quê? O que irá acontecer?”

Com gestos, o aluno indicou que teria que desenhar na forma de cruz, explicando que se fosse dobrar nas linhas, da maneira como ele havia feito, os “lados” (querendo se referir a faces) ficariam todos sobrepostos, assim, decidiu modificá-la.

Outro aluno, Car, desenhou a planificação ilustrada na Figura 5.61. Apresentando dúvidas, perguntou para a pesquisadora se a mesma poderia estar correta. Ela pediu que ele a analisasse e verificasse, sem recortá-la, o que iria ocorrer.

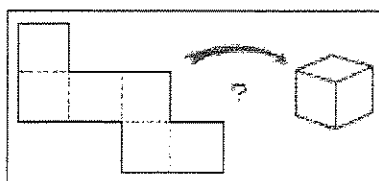


Figura 5.61 - Representação da planificação do cubo feita por Car.

Com essa indicação, a pesquisadora buscou investigar se o aluno conseguiria antecipar os movimentos que deveria fazer com cada um dos quadrados (faces) da planificação. Isto é, investigar como o aluno interpretava a representação da planificação que havia feito antes de montar o cubo.

Em atividades mentais desse tipo, Fischbein (1993) assinala que *não se imita, simplesmente, internamente atos manipuláveis externos. Trata-se de uma construção mental que requer não somente “ver” figuras, mas, também, modificar suas posições; imaginar suas posições transformadas; imaginar o efeito da transformação de figuras adjacentes*” (pp. 158-159) (tradução da pesquisadora).

Por exemplo, ao elevar (dobrando na aresta) um quadrado (face) que compõe uma planificação, de modo que ele se torne perpendicular à outra face, transporta-se também outros quadrados (faces), que, posteriormente, também serão dobrados e unidos

a outros quadrados (faces). Os resultados das sucessivas transformações têm que ser mantidos na mente e coordenados até que o sólido seja reconstruído.

Car recortou a planificação e vincou cada aresta, verificando, surpreso, que essa era uma das planificações do cubo. Eufórico, mostrou sua planificação para a professora R que, surpresa, disse:

— *“Puxa! Achei que não iria fechar”.*

Com isso, motivados pelo desafio de descobrirem outras planificações possíveis para o cubo, os alunos se envolveram com a proposta da pesquisadora.

Observando os procedimentos usados pelos alunos, a pesquisadora solicitou ao aluno Gab, o qual havia feito a planificação ilustrada na Figura 5.62, que **antecipasse, sem recortar e dobrar, se a referida configuração da planificação poderia formar um cubo**. As setas abaixo indicam os gestos que o aluno fez para mostrar as extremidades das faces que se combinariam, que ficariam ligadas quando o sólido fosse construído, e ele, portanto, concluiu que esta seria uma das planificações do cubo.

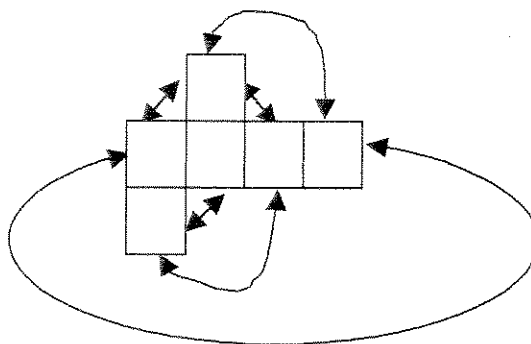


Figura 5.62 - Representação da indicação dos movimentos feitos por Gab.

Posteriormente, o aluno Gab recortou e fez as dobras necessárias para a montagem, confirmando estar certo.

Por sua vez, Júl desenhou a figura abaixo, mas demonstrou dúvida de que ela iria, realmente, formar o cubo. Esse aluno não conseguiu antecipar o que aconteceria com a planificação, quando foi solicitado que o fizesse. Ele necessitou recortá-la e, só depois de vincar cada aresta e montar a configuração, verificou tratar-se de uma das planificações do cubo.

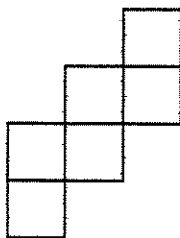


Figura 5.63 - Representação da planificação de Jul.

A cada nova formação, diante das diferentes planificações do cubo que os alunos iam construindo, a professora R demonstrava estar tão surpresa quanto os alunos.

É interessante observar que os alunos, na busca de novas planificações, começaram a antecipar os resultados, discutindo com os colegas, com a professora R e também com a pesquisadora, as diferentes possibilidades de planificação do cubo. Isto é, antes de recortarem seus desenhos, os alunos lançavam suas opiniões sobre o que iria acontecer, testavam suas hipóteses e as refaziam quando necessário. A interação ocorrida entre a pesquisadora e a aluna Let, retratada abaixo, indica a forma com que a aluna elaborou seu pensamento para conseguir sucesso na tarefa. A aluna deu mostras de ter “visualizado”, a cada nova ação, qual seria o resultado da montagem da planificação feita.

3	4	5
2		6
1		

Figura 5.64 - Representação da primeira planificação feita por Let.

Observando seu desenho, Let achou que não seria possível formar o cubo. Ela numerou as faces, e analisou o que iria acontecer, indicando com gestos, como ficariam as faces do cubo após o vinco de cada aresta. Ela considerou que as faces 2 e 6 ficariam “*em cima*” (sobrepostas). Em seguida, Let recortou sua configuração e verificou que realmente aquelas faces (2 e 6) ficaram sobrepostas. Ela verificou, ainda, que as faces 1 e 5 também ficaram sobrepostas, o que ela não havia previsto.

A pesquisadora perguntou-lhe o que deveria mudar para que a planificação ficasse correta, e a aluna respondeu:

—“*O 1 encima do 4*”. Ela estava referindo-se à ação de unir dois lados das faces 1 e 4. Let fez a mudança e verificou, com essa alteração, que só havia resolvido o problema relativo às faces 1 e 5 (Figura 5.65).

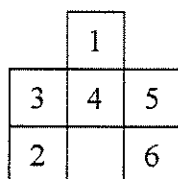


Figura 5.65 - Representação da segunda planificação feita por Let.

Let certificou-se de que precisaria fazer outra mudança, e decidiu mudar a posição da face 6, conforme apresentada na Figura 5.66. Essa ação permitiu que ela concluísse a planificação do cubo corretamente, após o recorte e a montagem de sua representação.

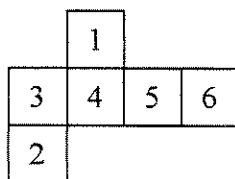


Figura 5.66 – Representação da terceira planificação de Let.

Outro aluno da mesma classe, Fab, ao fazer a configuração abaixo, procurou a pesquisadora para dizer que não havia obtido sucesso, explicando que, após recortar e dobrar nas arestas, percebeu que o “*cubo não fechava*”.

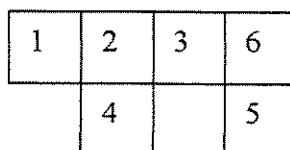


Figura 5.67 - Representação da primeira planificação de Fab.

Da mesma forma que procedeu anteriormente com Let, a pesquisadora questionou o aluno a respeito das modificações necessárias que deveriam ser feitas para obter êxito.

— *“Um ficou encima do outro”*. Disse o aluno, sem especificar a qual das faces estava se referindo.

Diante da incompreensão dessa afirmação, a pesquisadora perguntou-lhe:

— *“Quais faces ficaram sobrepostas, isto é, qual face ficou sobre a outra?”*

Fab respondeu:

— *“A 5 e a 4”*.

A pesquisadora insistiu para que ele dissesse qual a mudança que seria necessária, e Fab respondeu:

— *“Tira essa (indicando a face 5 com gestos) e coloca no lugar que está faltando”*.

A pesquisadora perguntou:

— *“Onde você vai colocar? Onde está faltando?”*

Finalmente, Fab explicou o que estava pensando:

— *“Tiro o 5 para colocar junto na 2 ou na 3, ou na 1”*.

A pesquisadora pediu-lhe que fizesse a mudança e verificasse o resultado.

Com cuidado, Fab recortou a face 5 e colou-a, com fita adesiva, junto à face 2, e conseguiu montar o cubo com sucesso.

Um outro aluno fez a representação ilustrada na figura abaixo, já demonstrando saber que esta não formaria o cubo, mas, mesmo assim, procurou a pesquisadora para mostrar que não seria possível montar o cubo, pois uma das arestas de uma das faces não coincidia com a aresta da outra.

Esse fato poderia indicar que o aluno queria mostrar para a pesquisadora seu entendimento a respeito da construção do cubo, isto é, que a coincidência das arestas das faces adjacentes precisa ser exata.

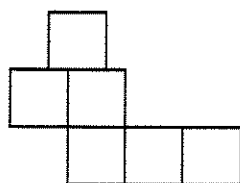


Figura 5.68 – Representação da planificação incorreta do cubo.

O próprio aluno indicou, na Figura 5.68, o “quadrado” que estaria fora do lugar; entretanto, ao mudá-lo de posição (Figura 5.69), ainda não conseguiu sucesso, ao construir uma das planificações do cubo. Ao analisar novamente seu desenho, ele indicou as faces que ficariam sobrepostas, as quais aparecem na ilustração abaixo com um (*).

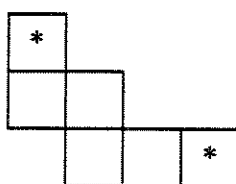


Figura 5.69 - Representação da planificação incorreta do cubo.

O aluno disse para a pesquisadora que precisaria mudar alguma coisa. Em seguida, apresentou a nova configuração da planificação, agora corretamente, construída.

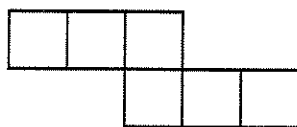


Figura 5.70 - Representação da planificação correta do cubo.

Diante de diferentes planificações, a professora R da escola B, resolveu fazer um comentário geral com a classe. Durante a discussão promovida pela professora a respeito de cada uma das planificações, por diversas vezes, ela disse “cubinho”, quando

estava se referindo ao “quadrado” (uma das faces do cubo), e vice-versa, não se dando conta da confusão entre os termos.

Os alunos que tinham obtido uma planificação diferente foram chamados pela professora para mostrar para a classe seus resultados, desenhando-os no quadro-negro. Algumas vezes, uma mesma representação foi apresentada como sendo outra, diferente; entretanto, o que mudava era apenas a posição em que ela estava sendo desenhada (refletida ou rotacionada). Quando isso ocorreu, a professora R não percebeu tratar-se de planificações iguais. Nesse caso, a pesquisadora interferiu, mostrando para a professora e para os alunos, que apenas as posições das planificações estavam mudadas (algumas estavam refletidas e outras rotacionadas).

Depois dessa discussão, a professora R percebeu que foram feitas onze planificações diferentes para o cubo, explicando para os alunos que todas elas tinham seis quadrados e que todos os quadrados eram do mesmo tamanho. Abaixo se apresentam as onze planificações encontradas pelos alunos:

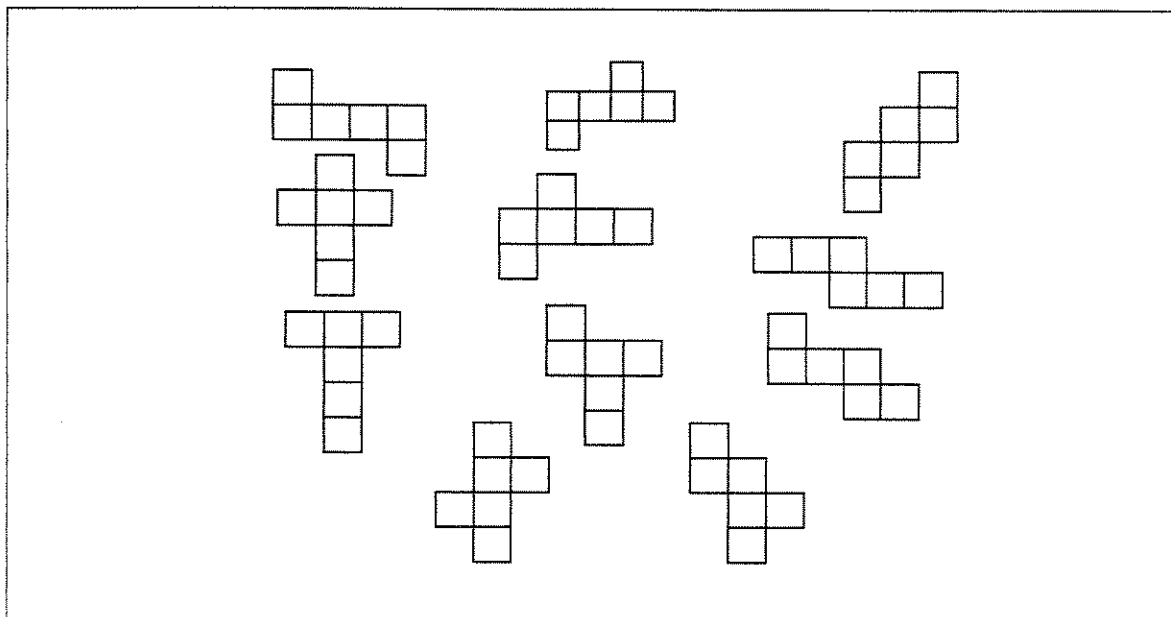


Figura 5.71 - Representação das onze planificações do cubo.

A professora R fez alguns comentários com seus alunos a respeito das diferentes caixas que compunham o conjunto de materiais manipuláveis da classe. Perguntou-lhes se todas as caixas eram cubos.

Os alunos respondem negativamente, explicando que “*umas são mais compridas*”, referindo-se às faces não iguais.

— “*Isso mesmo*”, confirmou a professora e completou:

— “*Algumas caixas possuem faces que não são todas iguais, não são quadrados iguais e por isso elas não são cubos. Quando isso acontece, essa caixa é chamada de paralelepípedo*”.

A atividade de **planificação do paralelepípedo**¹²⁴, proposta pela professora S da escola C, aconteceu depois das atividades sobre sólidos geométricos¹²⁵. Ela distribuiu para cada um dos seis grupos formados na classe uma caixa na forma do referido sólido, perguntando-lhes se sabiam identificar qual tipo de sólido a caixa representava.

Os alunos responderam que se tratava de um prisma. Recordando as discussões sobre esse assunto ocorridas anteriormente, justificaram:

— “*Sobra mais do que um vértice fora e as faces dos lados são paralelogramos*”.

Dessas palavras pode-se inferir que os alunos diferenciavam prismas de pirâmides pela quantidade de vértices fora do plano da base dos sólidos.

A professora S pediu que eles contassem as faces, os vértices e as arestas do referido sólido e, em seguida, solicitou que “desmontassem” a caixa, abrindo-a por uma de suas arestas, recortando as abas que servem para colar suas faces.

Depois disso pediu que os alunos fizessem o contorno do molde resultante em uma folha. Em seguida, pediu aos alunos que recortassem cada uma das faces do objeto real, procurando encaixá-las como em um quebra-cabeça no contorno feito.

Alguns alunos apresentaram dificuldade em montar esse quebra-cabeça, necessitando da ajuda da professora.

A professora S sugeriu que os alunos encontrassem outras maneiras de unir as faces, de modo que obtivessem uma planificação diferente daquela da embalagem original, cujo contorno haviam feito. A professora explicou para a pesquisadora que o objetivo dessa proposta era que os alunos percebessem que uma mesma caixa pode ser

¹²⁴ Esse tipo de abordagem foi realizado apenas pela professora S (escola C).

¹²⁵ A descrição e análise das atividades sobre sólidos geométricos, desenvolvidas pela professora S, da escola C, foram agrupadas com outras a esse respeito ao longo deste Capítulo.

montada de diferentes maneiras; em outras palavras, que um paralelepípedo poderia ser planificado de várias maneiras. Entretanto, nem todos os grupos de alunos entenderam a proposta e simplesmente trocaram as faces congruentes de lugar na reconstrução da caixa.

Um dos grupos que atingiu os objetivos propostos pela professora S fez uma outra planificação para a caixa, como pode ser observado na Figura 5.72-b. A Figura 5.72-a ilustra o contorno da planificação original da caixa e a Figura 5.72-c mostra o grupo de alunos reconstituindo a caixa.

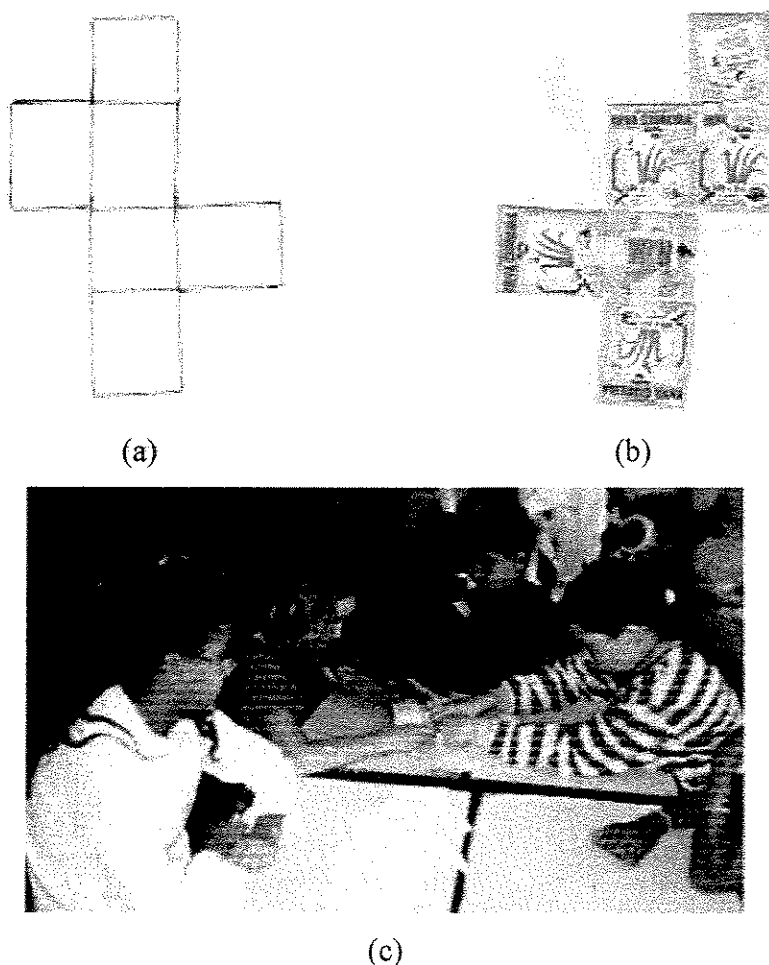


Figura 5.72 – Três momentos da planificação da caixa.

A professora S, colando os contornos das planificações das caixas no quadro-negro, promoveu uma discussão a respeito. Ao todo foram seis planificações, sendo que duas semelhantes à Figura 5.73-a e quatro semelhantes à Figura 5.73-b. Nessa discussão,

foram abordadas as noções de simetria, o que originou um novo tópico investigado nesta pesquisa.

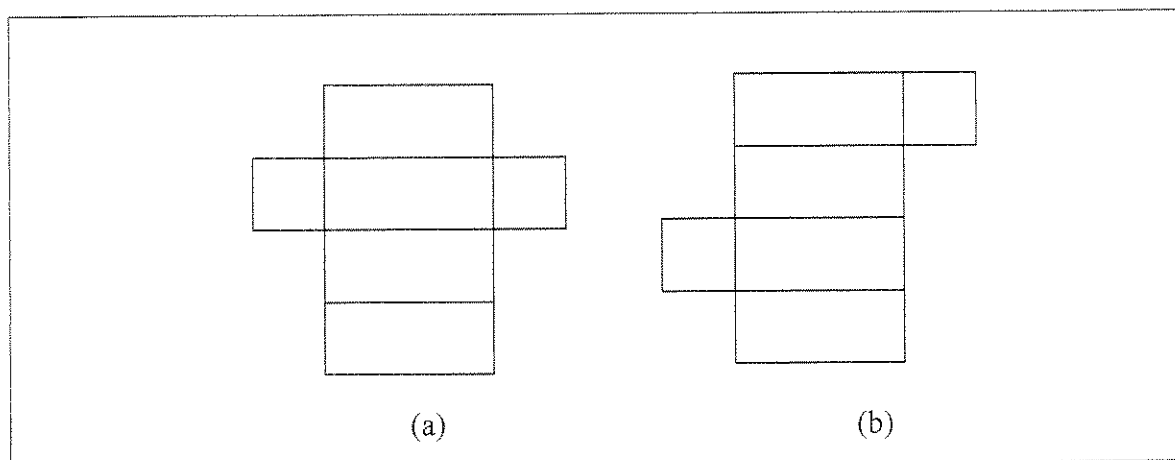


Figura 5.73 - Duas planificações de paralelepípedo.

Fischbein (1993) afirma que, quando se investiga vários tipos de transformações mentais quando objetos tridimensionais são manipulados, como rotações ou planificações (desdobramentos) e reconstituições (redobramentos), lida-se com operações lógicas como se fossem de uma natureza meramente pictórica. Entretanto, explica o autor,

“todo conhecimento tácito, envolvido nas operações mentais, como, por exemplo, as extremidades dos quadrados são iguais, as faces são quadradas, os ângulos são retos, é controlado. Sem esse controle conceitual tácito, a operação toda não teria sentido” (Fischbein, 1993, p.159) (tradução da pesquisadora).

O autor ressalta que esses tipos de atividades mentais mais complexas representam uma excelente oportunidade para os estudantes treinarem a capacidade de manusear conceitos figurais no raciocínio geométrico.

Transformações Geométricas no Plano: Rotação e Reflexão

No momento da discussão decorrente da atividade descrita anteriormente, os alunos da professora S, da escola C, não identificaram de imediato as quatro planificações desenhadas tal como ilustrado na Figura 5.73-b como sendo semelhantes, pois elas não estavam todas na mesma posição. Entretanto, a professora conduziu as discussões para que os alunos percebessem as semelhanças entre elas.

Uma das alunas propôs que **uma das planificações fosse recortada e sobreposta nas demais planificações, e, fazendo os movimentos de rotação e reflexão necessários, permitiu que os demais alunos percebessem as semelhanças.**

Pode-se dizer que a participação da aluna contribuiu para que os alunos compreendessem que algumas transformações geométricas não alteram a forma da figura, como é o caso da rotação e da reflexão. A professora, explorando a interpretação apresentada pela aluna, explicou para a classe que as planificações eram idênticas. Mostrou-lhes, com cada movimento, o que estava acontecendo, isto é, quando era feita uma rotação ou quando era feita uma reflexão, ou ainda, quando os dois movimentos eram feitos com a mesma figura ela não se modificava.

Esse episódio revela que a ação da professora, na condução das atividades, propiciou o envolvimento ativo e interessado dos alunos. Além disso, ressalta-se que a forma pela qual ela explorou as interpretações dos alunos durante a planificação dos sólidos geométricos permitiu a abordagem dos conceitos de rotação e reflexão.

Planificação do Cilindro

A professora R, da escola B, iniciou uma atividade com os alunos, sugerida pela pesquisadora, solicitando-lhes que **desenhassem a planificação de um cilindro**¹²⁶, explicando-lhes que o cilindro tem a forma de uma lata de refrigerante. Ela mostrou-lhes alguns objetos que têm essa característica, como as próprias latas de refrigerantes,

¹²⁶ Essa atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora R (escola B).

sólidos em madeira, canudos de papel alumínio, entre outros. Explicou-lhes que depois do desenho pronto, eles iriam recortá-lo, tentando montar um cilindro, cujo resultado deveria ser semelhante à forma sugerida.

A princípio os alunos não conseguiram saber como começar, mas com o auxílio e comentário da professora as planificações dos cilindros foram surgindo.

O aluno Jul, tentando ser fiel ao observável do objeto, mostrou seu desenho da planificação para a professora, perguntando-lhe se estaria correto.

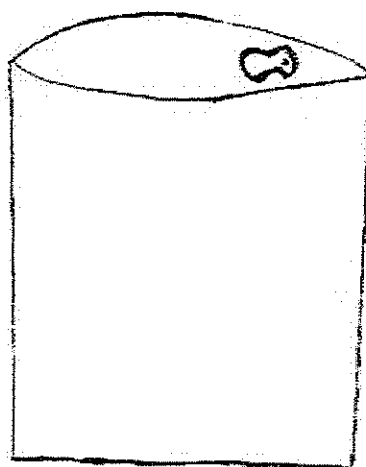


Figura 5.74 - Primeira planificação do cilindro feita por Jul.

A professora perguntou para o aluno se esse desenho, depois de recortado e montado, daria a idéia de uma lata de refrigerante. O aluno, antes de responder, recortou-o, verificando que não foi possível obter a representação da lata de refrigerante com ele, comentando:

—*“Vai faltar a parte de trás, mas não sei como colocar...”*

A professora não respondeu ao aluno, solicitando à pesquisadora que explicasse como ele poderia fazer.

Fazendo uma analogia com outro material manipulável, que também possui forma cilíndrica, a pesquisadora perguntou se ele conseguiria imaginar como ficaria “um

rolinho do papel higiênico” depois de cortado ao meio (corte pela geratriz do cilindro¹²⁷). O aluno respondeu:

—“*Fica reto*”. Entendendo que o aluno estivesse se referindo ao retângulo, que corresponde à face não plana do cilindro no objeto real, quando desenhada a sua planificação, a pesquisadora explicou para o aluno que, com a lata de refrigerante acontecia o mesmo.

Em seguida, o aluno desenhou a representação abaixo:

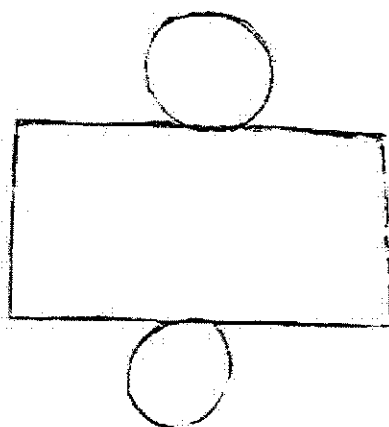


Figura 5.75 - Segunda planificação do cilindro feita por Jul.

A pesquisadora pediu para que o aluno recortasse e verificasse se corresponderia à planificação do cilindro, o que pôde ser comprovado.

Após essa discussão entre a pesquisadora, a professora e o aluno Jul, sob a atenção dos demais alunos da classe, eles perceberam como deveriam proceder para conseguirem a planificação do cilindro. Entretanto, não repararam que a medida do comprimento da circunferência das bases do cilindro teria que ser a mesma que a do lado correspondente do retângulo.

A professora também demonstrou não ter tido essa percepção, não fazendo comentários a respeito. Alguns alunos, por não terem feito corretamente a construção, conseguiram faces laterais que ficaram sobrepostas quando o cilindro foi reconstruído. Outros, ao fazerem essa face com medida de comprimento menor que a medida do

¹²⁷ Geratrizes do cilindro são segmentos paralelos ao segmento que une os centros das bases, com extremidades nos pontos das circunferências dessas bases.

comprimento da circunferência da base, verificaram que a face lateral não é suficiente para contornar o círculo da base. Eles descartaram a planificação incorreta e procuram construir outras, sem se preocuparem com a medida ideal.

Foi possível verificar que os alunos não interpretaram os elementos matemáticos intrínsecos ao cilindro corretamente, pois como assinalado, não perceberam as relações entre eles. Da mesma forma, infere-se que a professora também não percebeu tais incorreções nas interpretações dos alunos.

Uma intervenção didática adequada poderia utilizar as próprias planificações dos alunos e outros materiais em forma de cilindro para introduzir os conceitos relacionados com os elementos matemáticos dos cilindros como, por exemplo, a relação existente entre a medida do comprimento da circunferência da base (círculo) e a medida do comprimento da extremidade da face lateral, que estão justapostas (retângulo).

A pesquisadora sugeriu para a professora R, após o término da aula, que ela poderia fazer a abordagem dessas relações com os alunos, explicando-lhe alguns procedimentos metodológicos que poderiam ser usados. Entretanto, a professora não fez qualquer abordagem a respeito nas aulas seguintes.

Sólidos Geométricos

Em duas classes da escola B e na classe da professora S da escola C ocorreram **discussões a respeito dos sólidos geométricos** através de atividades preparadas pelas próprias professoras.

A professora M da escola B preparou uma aula sobre sólidos geométricos e deu início às atividades colocando sobre sua mesa alguns sólidos; em seguida, solicitou que os alunos identificassem, dentre os sólidos expostos, os que eram prismas. Os alunos ficaram observando, de suas carteiras, o que estava sobre a mesa da professora e nada responderam.

A professora mostrou-lhes uma pirâmide e perguntou-lhes se aquele sólido era um prisma. Os alunos responderam negativamente. A professora perguntou-lhes, então,

o que eram prismas. Um dos alunos respondeu, identificando as atividades feitas anteriormente:

— *“Aqueles que, nos desenhos da caixa (referindo-se às representações planas dos paralelepípedos), as faces são retangulares e também quando fizemos desenhinhos (marcações com desenhos ou números) e achamos as faces paralelas”*.

Mostrando a pirâmide novamente, a professora M perguntou-lhes se aquele sólido tinha alguma face paralela, e os alunos respondem negativamente. Em seguida, ela mostrou alguns prismas, e pediu que os alunos os identificassem a partir de suas bases. A professora M fez uma anotação no quadro-negro a respeito.

Em seguida, a professora mostrou para a classe um cilindro e perguntou-lhes se era um prisma. Os alunos ficam silenciosos, visto que haviam acabado de explicar a definição de prisma. Então, a professora explicou que aquele sólido (cilindro) não era semelhante aos prismas, e, não conseguindo concluir suas idéias, pediu ajuda da pesquisadora para que ela explicasse, aos seus alunos, as diferenças entre prisma e cilindro e os demais corpos redondos.

A pesquisadora explicou para a professora e também para os alunos, colocando sobre a mesa diferentes corpos redondos, que, em determinadas posições, esses sólidos não ficavam com uma das faces totalmente sobre o plano da mesa, e que, além disso, esses sólidos poderiam “rolar” facilmente sobre a mesa. Por esse motivo, aqueles sólidos recebiam o nome de corpos redondos. Antes de completar a classificação, a partir dos atributos de cada um deles, um aluno perguntou:

— *“Mesmo se tiver ponta?”* (referindo-se ao cone).

Mostrando cada um dos objetos, a pesquisadora explicou que tanto o cilindro, o cone, quanto a esfera eram chamados de corpos redondos, e que cada um deles tinha características diferentes, recebendo, por isso, nomes diferentes. No caso do cilindro, explicou que esse sólido possui duas faces paralelas, iguais (congruentes), chamadas de bases que têm a forma de círculos. No caso do cone, explicou que é um sólido geométrico pertencente ao grupo dos corpos redondos que possui uma face plana, chamada de base, cuja forma é a de um círculo, e que possui um vértice. E no caso da esfera, explicou-lhes que é a forma que eles estão acostumados a ver nas bolas.

Além disso, a pesquisadora enfatizou, tanto para os alunos quanto para a professora, que alguns dos objetos que estavam sobre a mesa eram representações de sólidos, já que eram feitos de papel ou de plástico.

A professora M explicou para a pesquisadora, diante dos alunos, que não poderia estar aprofundando o assunto nas suas aulas, pois aquilo que havia feito com os alunos (discussão sobre sólidos) era o que ela conseguia trabalhar com eles, reafirmando que não sabia Geometria suficiente para poder explorá-la em sala de aula.

Por sua vez, a professora V, que assumiu as aulas da professora G no final do ano letivo de 1998, foi outra professora da escola B que fez uma discussão a respeito de sólidos geométricos.

Ela preparou uma atividade para a classe sobre sólidos geométricos, apresentando, inicialmente, um resumo no quadro-negro, ilustrado na Figura 5.76.

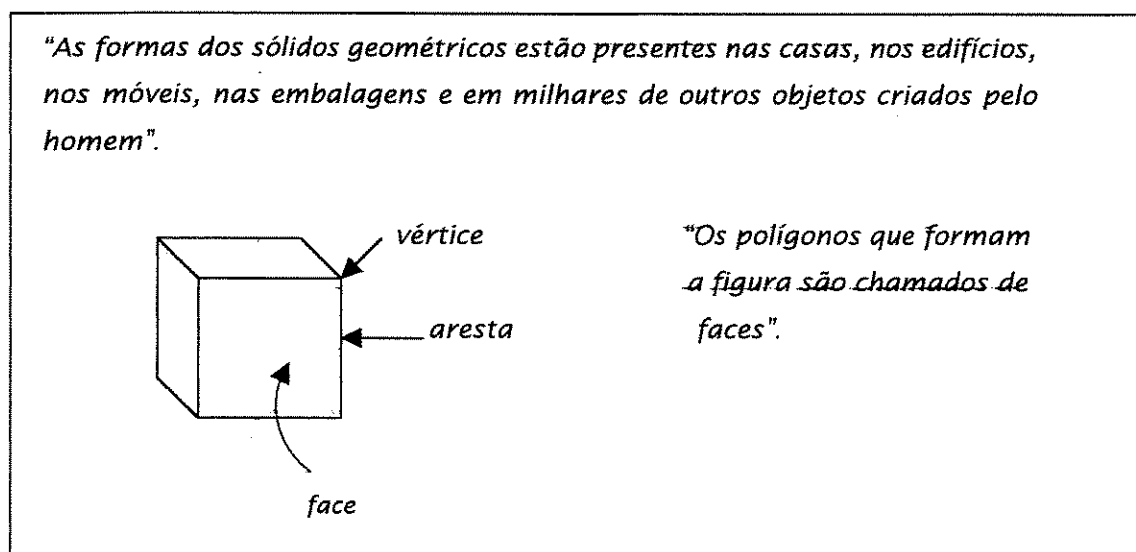


Figura 5.76 - Representação da explicação da professora V.

Em seguida, distribuiu uma folha (Figura 5.77) com questões geométricas para os alunos, solicitando que todos respondessem o que era pedido.

1



Figura 1



Figura 2



Figura 3

A tenda do índio (figura 1), o bloco de construção (figura 2) e o funil (figura 3) têm formas que, em geometria, são conhecidas, respectivamente, pelos nomes de:

- (A) pirâmide, paralelepípedo, cone. (C) cilindro, paralelepípedo, pirâmide.
 (B) pirâmide, cubo, paralelepípedo. (D) esfera, pirâmide, cone.

2

Observe os diferentes tipos de caixas utilizadas por uma loja de artesanato:



Tipo 1



Tipo 2

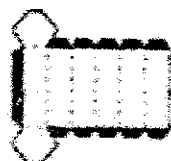


Tipo 3



Tipo 4

A vendedora monta a caixa de acordo com a escolha do cliente. Se ela utilizar os modelos que aparecem abaixo, vai usar caixas do tipo:



(A) 4 e 3

(B) 3 e 4

(C) 2 e 3

(D) 1 e 2

3

Andréa colou um decalque em cada face de suas caixas de papelão, as mesmo na que fica apoiada sobre a mesa. Observe as caixas de Andréa.



(A) 12

(B) 10

(C) 8

(D) 6

O total de decalques que ela usou foi de:

Figura 5.77 – Folha das atividades propostas pela professora V.

Essas atividades recuperavam alguns conceitos geométricos que foram desenvolvidos com a classe durante a presente pesquisa. Segundo a professora V, elas serviriam para avaliar o que os alunos haviam aprendido até então, sendo utilizadas como uma das avaliações dos alunos para compor a nota final. Após responder as questões da folha, os alunos confirmaram com a professora o resultado. Quando algum aluno apresentava uma resposta diferente da esperada, ela solicitava que ele revisse o que havia feito, até responder corretamente. Desse modo, todos os alunos entregaram as folhas respondidas corretamente.

Observando a primeira questão da atividade proposta, pode-se dizer que o objetivo intrínseco era o de identificar as formas do mundo físico com as formas dos sólidos geométricos, enfatizando o paralelepípedo, a pirâmide e o cone. A segunda atividade tinha como objetivo a visualização geométrica, isto é, identificar a representação plana de um objeto tridimensional com a respectiva planificação. Na terceira, o objetivo intrínseco era relacionar o número de faces de um objeto tridimensional com representação no plano e o número de faces no próprio objeto. Como as questões eram em forma de teste, os alunos não precisaram explicar o porque de suas respostas.

Por outro lado, a professora S da escola C (pública) introduziu a discussão sobre sólidos geométricos para seus alunos distribuindo, para cada um dos seis grupos formados na classe, diferentes moldes, em cartolina, de planificações de sólidos geométricos (um hexaedro regular, um tetraedro regular, um octaedro regular, uma pirâmide reta de base quadrada, uma pirâmide reta de base triangular, dois prismas retos de base triangular, um prisma reto-retângulo, um prisma reto de base pentagonal, um prisma reto de base hexagonal, um cilindro e um cone).

Ela solicitou que eles recortassem cada uma das planificações e montassem os sólidos. Em seguida, solicitou que fizessem uma classificação dos modelos geométricos construídos, separando-os em três grupos, segundo critérios que eles estabelecessem.

Os alunos, ao fazerem a classificação, demonstraram algumas dúvidas, como por exemplo: colocaram em um mesmo grupo o cilindro e o prisma de base pentagonal, porque "*eles pareciam tubos*", que foi um dos critérios usados por um dos grupos. Outra dúvida revelada foi a colocação do octaedro como elemento do conjunto das pirâmides

“porque ele tem bicos”, ou ainda, *“são duas pirâmides grudadas”*. Essas considerações feitas pelos grupos foram utilizadas pela professora S para a intervenção necessária.

Ela discutiu com cada grupo os atributos necessários para que um dos objetos ficasse em determinado grupo, a partir dos critérios estabelecidos pelos próprios alunos.

Um dos grupos estabeleceu um critério para o conjunto dos prismas (sem se referir à nomenclatura dos sólidos) da seguinte forma:

— *“Dos dois lados são iguais”*. Referindo-se ao fato dos prismas terem bases paralelas congruentes. Com essa percepção a respeito de um dos atributos do prisma, os alunos conseguiram identificar todos os prismas na coleção de sólidos, ficando implícito o conceito de prisma.

A professora S iniciou uma **discussão a respeito dos atributos das representações de sólidos geométricos construídos (modelos de cartolina), comparando os corpos redondos (cone e cilindro)**, explicando-lhes porque eles possuíam essa denominação.

Pegando o cubo e o cilindro, a professora perguntou para a classe quais eram os aspectos em comum e quais eram as diferenças.

Um dos alunos disse que o **cilindro** e o **cone** tinham círculos na base, e que os lados eram *“lisos”*. Essa referência, segundo o próprio aluno, era *“porque não têm dobras retas”*. Pode-se inferir que o aluno estava se referindo às faces laterais, tanto do cilindro quanto do cone, que não são poligonais, além do fato desses sólidos não possuírem arestas.

Outro aluno disse que o cubo *“tem quadrados, tem cantos”*.

A professora explicou para classe que eles haviam observado bem as diferenças entre os sólidos. De posse de um cubo, enfatizou que a parte quadrada do cubo é chamada de **face**, e que o que eles estão dizendo *“dobras retas”* indicam as faces que se encontram, as quais recebem o nome de **arestas**; e que os *“cantos”* indicam que as arestas se encontram em um mesmo ponto, os quais recebem o nome de **vértices**.

Em seguida, pediu para que eles contassem o número de faces e vértices de cada um dos sólidos que eles haviam construído, construindo uma tabela com esses dados.

Depois disso a professora S sugeriu que eles observassem todos os sólidos que se pareciam com o cubo (referindo-se às faces todas planas), verificando que, de todas as maneiras que os sólidos eram colocados sobre a mesa, o lado da figura (face) que ficava em contato com o tampo da mesa era totalmente plano e que, por essa razão, esses sólidos recebiam o nome de **poliedro**¹²⁸. Ao referir-se desse modo, a professora descreveu um poliedro como um sólido geométrico que possui todas as faces planas, sem se fazer menção à sua forma poligonal. Disse também que são muitas as formas de poliedros, apesar de estarem manipulando somente alguns.

Discutiu com os alunos as características das **pirâmides**, dizendo:

— *“Quando a base de um poliedro está apoiada na mesa e apenas um vértice fica fora (fora do plano da mesa), esse poliedro recebe o nome de pirâmide”*.

Os alunos completaram as características das pirâmides dizendo que os *“lados”* (referindo-se às faces laterais da pirâmide) eram triângulos. Mais uma vez, a percepção dos atributos do sólido (pirâmide) é estabelecida na interação proporcionada pela professora com a classe.

Com relação ao conceito de **prisma**, os alunos iniciaram a discussão dizendo *“tem quatro lados”* (referindo-se aos polígonos das faces laterais do prisma). A professora perguntou-lhes se todas as faces tinham quatro lados.

Os alunos verificaram que, no conjunto de prismas, um deles possuía todas as faces quadradas (eles sabiam classificá-lo como cubo). Eles identificaram como prisma os sólidos que possuíam todas as faces retangulares (não quadrados) e ficaram em dúvida com relação aos demais. Então, a professora pediu-lhes que observassem que esses sólidos possuíam *“pelo menos um par de faces iguais (congruentes) e paralelas entre si”* (recordando com eles o conceito de paralelismo), e que essas faces poderiam ser quadradas, retangulares, triangulares, pentagonais, hexagonais, como as que eles tinham em mãos, ou ainda terem outras formas geométricas.

A professora pediu para que os alunos colocassem os modelos de prismas sobre a carteira, apoiados por uma das bases, verificando quantos vértices estariam naquele plano.

¹²⁸ Os poliedros usados nas atividades eram todos convexos. Um poliedro convexo possui faces que são polígonos convexos, arestas que são os lados dos polígonos, e vértices que são os vértices dos polígonos.

Os alunos perceberam que o número de vértices da face, que estava apoiada no plano da mesa, dependia do número de lados do polígono da base. Em seguida, ela pediu que eles verificassem quantos vértices estavam na face paralela àquela apoiada no plano da mesa. Os alunos verificaram que era sempre o mesmo número.

Depois dessa constatação, a professora S pediu para que eles verificassem como era a forma das faces laterais (dizendo, “*dos lados que ficam em pé no sólido*”) do prisma. Os alunos verificaram que eram todas retangulares (tratava-se de prismas retos).

A professora S disse-lhes que a forma geométrica dessas faces (retângulos) também é chamada de paralelogramos, recordando com eles que o retângulo é um paralelogramo (os alunos concordam dizendo as “*linhas correm juntas*”, referindo-se ao paralelismo dos lados).

Finalmente, a professora explicou-lhes que todos os poliedros que têm essas características recebem o nome de **prismas**.

Ela explicou que um dos sólidos que eles construíram não estava se “*encaixando*” em nenhuma das classificações (dos prismas e das pirâmides), referindo-se ao **octaedro**. Ela disse para a classe que aquele era apenas um tipo **poliedro** e, como não havia, naquele conjunto, nenhum outro sólido com as mesmas características dele, ele deveria ficar apenas no conjunto de poliedros.

Em seguida, fez um resumo no quadro-negro, e fixando um cartaz com as classificações dos sólidos, no qual foram colados os diversos modelos dos sólidos geométricos construídos pelos alunos, como aparece ilustrado a seguir.

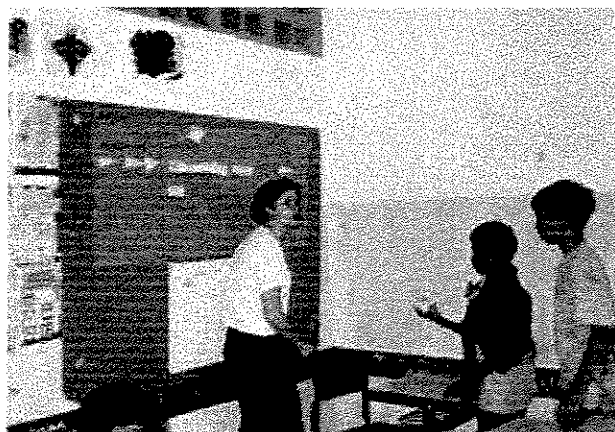


Figura 5.78 – Foto da professora montando o cartaz com os sólidos geométricos.

Da Representação Espacial à Representação Plana

Como as professoras L, da escola A, e as professoras G, M, da escola B, não haviam preparado nenhuma atividade abordando conteúdo geométrico para desenvolver com seus alunos, em um dos dias da pesquisa, a pesquisadora propôs que os alunos fizessem uma atividade baseada na pesquisa desenvolvida por Gaulin (1985), que **investigou como as crianças realizam tarefas quando necessitam transmitir “informação espacial” para uma “informação plana”, isto é, como os alunos, após visualizarem um objeto tridimensional, faziam a sua representação no plano, em duas dimensões** (Gaulin¹²⁹, 1985, citado por Soller, 1991, pp.175-179).

Considerando que a interpretação de objetos tridimensionais e a transferência das informações adquiridas para uma representação plana são particularmente importantes para a Geometria Espacial, buscou-se nessa atividade encontrar dados, através das representações dos alunos, que pudessem colaborar com a presente pesquisa, isto é, que fornecessem elementos a respeito das diferentes formas de representação dos alunos e também a respeito das interpretações que a professora faria dessas representações.

Esse tipo de atividade elucidou como os alunos concebiam a necessidade de produzirem representações que contivessem informações a respeito das propriedades intrínsecas ao objeto geométrico. Sabe-se que uma pessoa, “lendo” uma representação plana de um sólido, necessita recuperar a maior quantidade de informações perdidas que forem possíveis.

Os livros didáticos, na maioria das vezes, ainda são a principal fonte de informação para as crianças nas escolas, principalmente nas escolas públicas, e muito raramente abordam esse tipo de atividade; nesse sentido, considera-se que essa atividade trouxe novos elementos, a serem considerados na presente pesquisa, que poderão servir de subsídios didáticos para o processo ensino-aprendizagem da Geometria.

¹²⁹ GAULIN, C. (1985). *The need for emphasizing various graphical representation of 3-dimensional shapes and relations*. In L. Streefland (ED.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 53-71). Utrecht, Holanda: State University of Utrecht.

Além disso, ressalte-se a relevância desse tipo de atividade, visto que o cotidiano escolar das crianças oferece grande quantidade de interações entre o plano e o espaço, e a maioria delas requer a identificação de alguma espécie de informação espacial por meio de representações planas, como desenhos, esquemas, entre outros.

Parzys (1988) chama as atividades, do tipo acima, de “*restituição de significado*”. Ele ressalta a importância de haver uma “convivência” entre o autor da representação e o seu leitor, sendo que essa reconstituição só será possível devido a uma cultura geométrica comum. Essa convivência, segundo o autor, refere-se, em primeiro lugar, à natureza dos objetos representados, por exemplo, ponto, linha reta, triângulo, círculo, plano, etc. Em segundo lugar, relaciona-se ao tipo de representação usada, já que uma mesma representação pode ser interpretada de diferentes maneiras (Parzys, 1988, p.81).

Nessa interação, com o objetivo de **explorar a representação plana de objeto espacial**, a pesquisadora propôs a seguinte tarefa:

“Imagine que você tenha um amigo, que também está na 4ª série, e que ele mora em Jaguariúna. Ele tem uma caixa de cubos de plásticos, todos do mesmo tamanho. Você gostaria que ele construísse as seguintes formas (mostrando-lhes o conjunto de peças do cubo-soma¹³⁰) (Figura 5.79). Prepare uma mensagem para ele de modo que ele possa construir essas formas. Você poderá dar explicações usando palavras ou desenhos, como desejar”.

¹³⁰ Cubo-soma: Conjunto de sete peças geométricas, tridimensionais, formadas por cubos justapostos pelas faces, as quais possibilitam montar um quebra-cabeça – cubo, cujo volume total é de 27 unidades cúbicas.

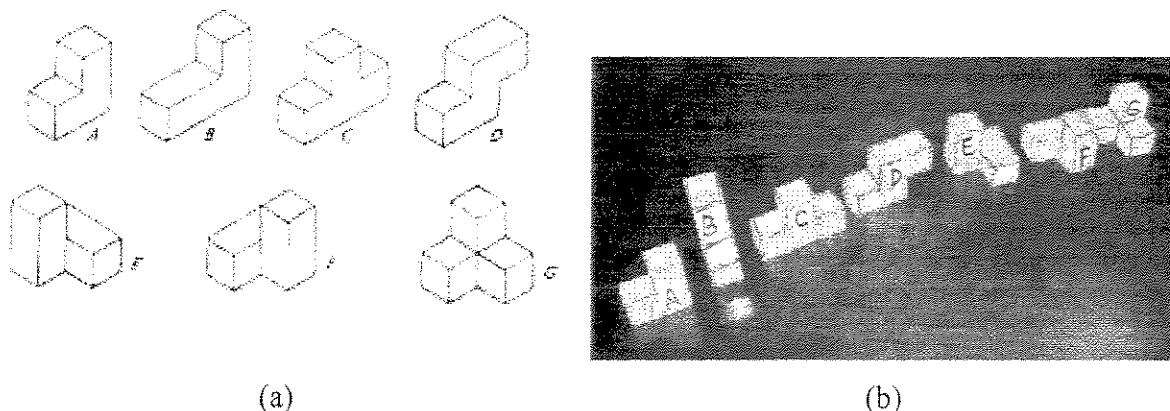


Figura 5.79 - Representação e foto das peças do cubo-soma.

Observe-se que com os alunos da professora G (escola B) e da professora L (escola A) as atividades foram realizadas individualmente. Já com os alunos da professora M, (escola B), a proposta foi que eles fizessem a representação em grupos, sendo formados sete grupos.

A professora L, da escola A, iniciou a apresentação da tarefa para seus alunos, colocando as sete peças do conjunto cubo-soma sobre a mesa, e fez uma leitura do texto. As peças foram identificadas com as letras de A a G a fim de facilitar a representação dos alunos.

Em seguida, a professora explicou-lhes o que deveriam fazer, pedindo-lhes que observassem bem as peças. Os alunos começaram a falar o que estavam observando das peças, expressando algumas interpretações que estavam fazendo, como as que se seguem:

— “Cada uma tem uma forma...”

— “Cada uma tem três quadradinhos...” Referindo-se aos cubos que formam as peças. A professora não comentou a respeito.

— “Cada uma tem duas peças...” Disse um dos alunos.

— “Cada uma tem duas peças?” Perguntou a professora para classe.

— “Não. Umas têm três partes outras têm quatro”, respondeu a aluna.

A professora, então, explicou-lhes que cada uma era uma construção. Pegou uma das peças e mostrou-a para a classe, pedindo-lhes para observarem detalhadamente cada um dos lados. Nesse instante, a aluna Iza disse:

— “Se virar de ‘ponta cabeça’, vai ficar outro formato”.

A professora fez o movimento que a aluna sugeriu, isto é, uma rotação de meia volta, e perguntou para a classe:

— “Vai ficar outra forma?”

A classe, de modo geral, respondeu negativamente. A professora L, então, completou, explicando que, conforme o jeito que se olha para a peça, enxerga-se um formato diferente. Entretanto, essa foi a única intervenção da professora a respeito da interpretação feita pela aluna. A professora poderia ter feito diferentes movimentos com aquela peça e com outras, oferecendo condições para que os alunos verificassem que, ao mudar a posição de um objeto, sua forma não se altera. Pode-se inferir que nesse episódio, apesar da professora demonstrar intenção de promover uma maior aprendizagem de seus alunos, ela pode não possuir conhecimentos geométricos suficientemente elaborados para um aprofundamento do tema.

Nesse aspecto, menciona-se Hoffer (1977), que afirma que a “*percepção da posição no espaço*” é uma das habilidades da “*percepção visual*”, como já se verificou no Capítulo 3 desta pesquisa. Essa percepção permite ao sujeito determinar a posição de um objeto no espaço em relação a si próprio. Segundo o referido autor, na investigação desse componente, é importante considerar que a criança, até determinada idade, percebe-se como o centro do seu universo perceptivo, de forma que sua percepção da posição dos objetos no espaço se estabelece tomando sempre ela mesma como referencial. Atividades envolvendo percepção da posição no espaço lidam com a discriminação de rotações e reversões de figuras. Além disso, a percepção da posição no espaço também é requerida quando a orientação não é relevante para a identificação, como é o caso da congruência de figuras; nesse caso, o sujeito precisa concluir que, com exceção das transformações, as figuras são idênticas (Hoffer¹³¹, 1977, citado por Del Grande, 1994).

Voltando à interação da professora L com seus alunos, note-se que na intervenção da professora poderiam ter sido destacados esses aspectos, e também poderiam ter sido discutidos os diferentes pontos de vista a partir dos quais um objeto

¹³¹ HOFFER, Alan R. (1977) *Mathematics Resource Project Geometry and Visualization*. Palo Alto, California: Creative Publications.

pode ser observado; chamando a atenção dos alunos para que observassem que, no dia-a-dia, é comum “ver” os objetos sempre do mesmo modo, ou como se diz no senso comum, “sempre de um mesmo ângulo”. Nesse sentido, poder-se-ia solicitar-lhes que olhassem, por exemplo, como sugere Imenes (1983)¹³², um copo a partir do seu fundo ou, então, uma lâmpada a partir da parte que é rosqueada no bocal, observações que, raramente, passam pelo pensamento das pessoas, mas que são importantes no contexto do ensino da Geometria.

Conduzindo a atividade, a professora L da escola A fez uma nova leitura da proposta, perguntando aos alunos se eles sabiam o que era um cubo.

Um dos alunos respondeu que “*é um quadrado*”. A professora perguntou novamente para a classe, modificando a pergunta:

— “*Um quadrado é cubo?*”

Um aluno então respondeu:

— “*É um quadrado em três dimensões*”.

No momento em que a professora devolveu a afirmação do aluno, em forma de questão para a classe, um dos alunos, respondeu,

— “*Um cubo é um retângulo em três dimensões*”.

A professora discordou dizendo:

— “*Não, um cubo não é um retângulo. Um cubo tem formato quadrado e ele tem seis faces*”.

Um dos alunos logo comparou o cubo com o “*dado*”, o que é muito comum no dia-a-dia da sala de aula.

Esclarecido o que era um cubo, a professora explicou detalhadamente o que os alunos deveriam fazer na atividade proposta, pedindo-lhes que escrevessem suas mensagens usando algumas palavras que eles já haviam trabalhado anteriormente, quando sentissem necessidade de se referirem à posição que os cubos teriam que ocupar para a montagem das formas geométricas, como paralela ou perpendicular.

Para os alunos da professora G, da escola B, a pesquisadora é quem fez a leitura e a explicação do desenvolvimento desta atividade. A professora da classe não se

¹³² Secretaria Extraordinária de Projetos Especiais. Brasil – Rio de Janeiro. (1993) *Curso Livre de Atualização de Conhecimentos: Matemática: Mapas e Vistas* (vídeo).

envolveu com a proposta, nem mesmo participou da aula durante a investigação, retirando-se da classe em alguns momentos.

No início das atividades de transmissão de informação espacial para uma informação no plano, a professora M, da escola B, explicou para a classe como eles deveriam proceder. Em seguida, perguntou-lhes que tipos de peças eram aquelas, mostrando uma das peças do cubo-soma.

Um aluno respondeu que era um cubo. Então a professora pegou um cubo de madeira e pediu para eles compararem com as peças do cubo-soma.

Dou, um aluno considerado “lento” pela professora M, completa:

— *“Pedaços de cubos. Peças montadas com cubos”*.

Uma aluna, mostrando a peça abaixo ilustrada, perguntou para a professora se essa peça teria três cubos ou se teria um cubo e um retângulo (referindo-se a um paralelepípedo retângulo).

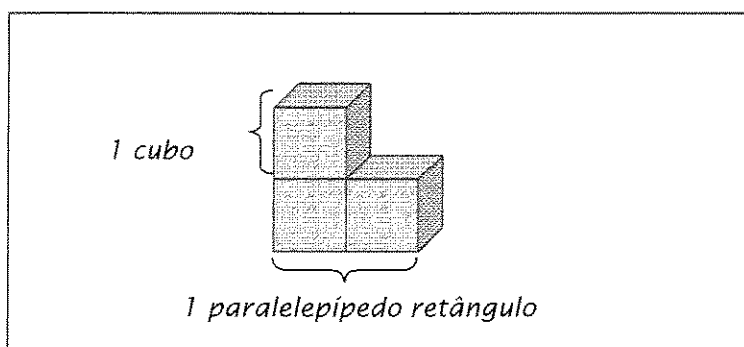


Figura 5.80 - Representação da peça A do cubo-soma.

A professora respondeu:

— *“Aqui é um cubo, (apontando para o cubo superior) e aqui é um retângulo (apontado para o paralelepípedo retângulo na horizontal da figura). Mas se você cortar, são dois cubos, portanto, ao todo serão usados três cubos”*.

Com essa colocação, nota-se que a professora trabalhou inapropriadamente com os conceitos geométricos, pois usou naturalmente o termo retângulo (uma figura plana) quando estava se referindo a um paralelepípedo (uma figura espacial). Após essa incorreção, cometeu outro erro, pois afirmou que ao *“dividir o retângulo ao meio resultavam dois cubos”*.

Esse tipo de procedimento também foi percebido durante cursos de aperfeiçoamento para professores das séries iniciais, como já assinalado anteriormente no Capítulo 1 desta pesquisa.

Pode-se inferir que a ocorrência dessas incorreções pode ser decorrente da formação matemática inadequada dos professores. De modo geral, não há, por parte de alguns professores, uma preocupação com os conceitos geométricos quando estes estão sendo trabalhados em sala de aula.

A aluna que proporcionou a discussão acima, ilustrada na Figura 5.80, antes de descrever cada uma das peças, fez uma contagem dos cubos necessários para cada uma delas, e percebeu que algumas peças eram formadas por três cubos e outras por quatro, discutindo com os colegas do seu grupo.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, a professora M, da escola B, participou de algumas discussões ocorridas nos grupos; entretanto, não fez nenhuma exploração a partir dos procedimentos adotados pelos alunos.

De modo geral, os alunos da professora M, da escola B, ficaram presos à posição em que as peças foram colocadas sobre a mesa e também à posição das letras que as identificavam.

Destaca-se que nessa classe os alunos, de modo geral, usaram tanto a linguagem escrita como a linguagem gráfica. Para a representação gráfica, os alunos fizeram desenho de forma “chapada” das peças do cubo-soma, identificando apenas uma das faces visíveis do objeto. Por exemplo, o grupo que se denominou *Geométrico*, descreveu a mensagem para peça A da seguinte forma:

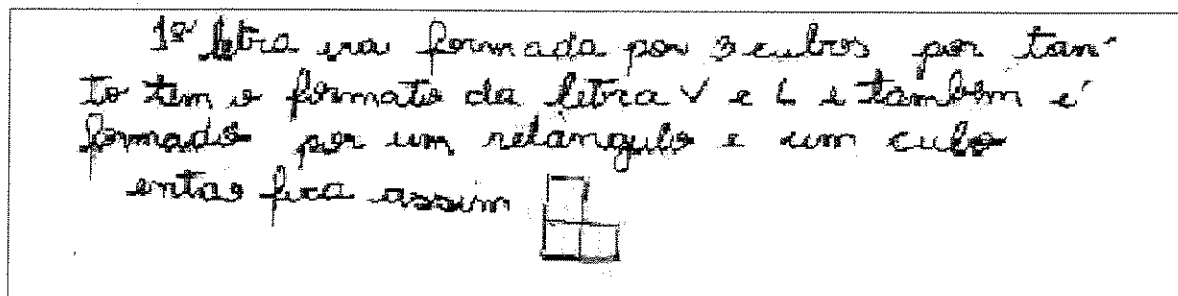


Figura 5.81 - Descrição da peça A feita pelo grupo Geométrico.

Com a representação apresentada acima, pode-se perceber que esses alunos conseguiram identificar que a figura geométrica não se modificava quando a posição é alterada, pois, em uma posição a peça pode parecer um “L”, e em outra pode parecer um “V”. Eles demonstraram possuírem determinadas habilidades espaciais que lhes permitiram identificar uma mesma figura gerada a partir de transformações geométricas. Essa importante relação poderia ter sido explorada pela professora M, já que outro grupo, ao fazer a descrição abaixo, demonstrou não ter tido essa mesma percepção.

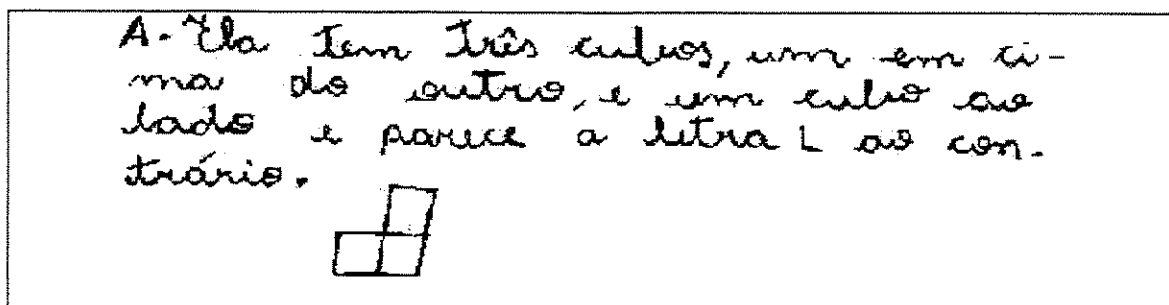


Figura 5.82 - Descrição da peça A feita por um grupo de alunos da professora M.

Ao dizerem que a peça “*parece um L ao contrário*”, os alunos demonstraram não ter dado conta de que poderiam fazer um movimento de reflexão com a peça, ou mesmo de rotação, portanto mudando a sua posição, sem alterar sua forma. Nesse sentido, demonstraram uma certa falta de habilidade espacial para essa transformação.

A falta de habilidades espaciais é discutida por Lean e Clements (1981) quando eles referem-se às pesquisas que mostram que estudantes com habilidades espaciais pouco desenvolvidas podem apresentar dificuldades no trato de conceitos geométricos. Entre essas dificuldades geométricas estariam incluídas transformações geométricas tais como interpretações (traduções), reflexões, rotações (Lean e Clementes, 1981, citados por Gorgorió, 1998).

Os conteúdos geométricos acima apresentados fazem parte do conteúdo curricular das escolas brasileiras para o Ensino Fundamental e estão expressos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). Nesse sentido, o fato dos alunos responderem às mesmas tarefas de modos diferentes poderia ter se constituído em um argumento

poderoso para que a professora explorasse vários conceitos geométricos na aula, como sugerido pelos PCN.

Após a realização dessas atividades com os alunos, a pesquisadora procurou discutir esses aspectos com as professoras, sujeitos da pesquisa. Entretanto, nos momentos que sucederam tais discussões não houve referência, por parte delas, na sala de aula.

Bishop (1983) destaca a impossibilidade de se estabelecer uma única definição para habilidade espacial. Focalizando os aspectos envolvidos nos processos de aprendizagem significativa, o autor citado sugere que sejam consideradas duas diferentes habilidades: “*a habilidade de interpretar informação figural (IFI.)*”, e “*a habilidade do processo visual (VP)*”, abordadas anteriormente no Capítulo 3 (Bishop, 1983, p.184).

O referido autor entende que a habilidade para interpretar informação visual envolve a compreensão da representação visual e do vocabulário usado em trabalhos geométricos, gráficos, mapas, e diagramas de qualquer tipo. Nessa habilidade estão presentes o conteúdo, o contexto e as relações particulares da forma e os estímulos materiais. Bishop (1983) refere-se ao processo visual no contexto matemático, em seu sentido mais amplo, e, portanto, em um contexto onde os estímulos visuais não são sempre necessários. A habilidade de processo visual envolve a visualização e a tradução de relações abstratas e informações não figurais em informações visuais (p. 184) (tradução da pesquisadora).

Considera-se que esses aspectos são particularmente importantes no domínio da Geometria, onde a visualização e o processo visual têm que ser considerados cuidadosamente, visto que, muito freqüentemente, nas aulas de Geometria, os conceitos geométricos são introduzidos aos estudantes através de um desenho ou de um modelo.

De modo geral, os alunos da professora M, da escola B, ao descrevem as peças A, B e C, do conjunto de peças do cubo-soma, não demonstraram ter sentido dificuldades. Entretanto, quando foram descrever a peça D, alguns obstáculos foram percebidos.

Os alunos tiveram dificuldades em descrever como deveriam ficar os cubos que formariam tal peça. Um dos grupos fez a descrição escrevendo: “*A peça D é formada por quatro cubos. Você deve colocar dois cubos, um ao lado do outro. Depois, colocar o*

terceiro encima do cubo que está à direita e depois colocar o outro junto desse". Entretanto, após lerem a descrição feita, eles perceberam que não estariam sendo claros, o que dificultaria o entendimento do leitor da mensagem.

Dou, um dos alunos desse grupo, usando os cubos pequenos do Material Dourado¹³³, reproduziu os procedimentos indicados na descrição, como ilustrado abaixo:

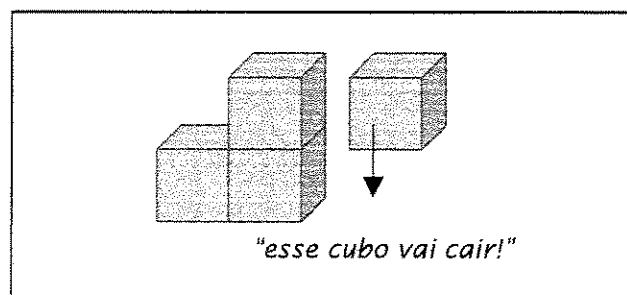


Figura 5.83 - Ilustração da observação de Dou.

O aluno explicou para a pesquisadora o que iria acontecer quando o “amigo da carta” (leitor da mensagem) fosse colocar a quarta peça:

— *“Quando colocar a outra, vai cair, porque não tem nada embaixo! Como eu vou falar, um cubo encima do outro e o outro...”*

Outro aluno do grupo, tentando ajudar, disse:

— *“Já sei, (pegando a peça D) dois embaixo, um na ponta e outro do lado da ponta”*. Os demais alunos discordam.

Cai, aluno do mesmo grupo, propôs:

— *“E se nós mudarmos a posição da peça?”* E com um movimento de rotação de $\frac{1}{4}$ de volta, deita a peça sobre a carteira, obtendo uma visão “chapada” da mesma, assim representada:

¹³³ Material Dourado Montessori destina-se, dentre outras, a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional. As unidades são representadas por pequenos cubos; as dezenas, por barras de dez cubos pequenos unidos entre si; a centena por placas quadradas de cem cubos pequenos unidos entre si e uma unidade de milhar representada por um cubo formado por mil cubos pequenos unidos entre si.

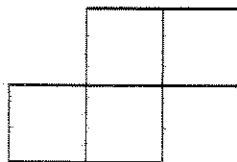


Figura 5.84 - Representação chapada da peça D do cubo-soma.

Em seguida, Cai comenta com os colegas do grupo:

— “Dá para perceber que é a mesma peça. Vamos fazer assim”.

E decidem descrever a mensagem para a peça D da seguinte forma:

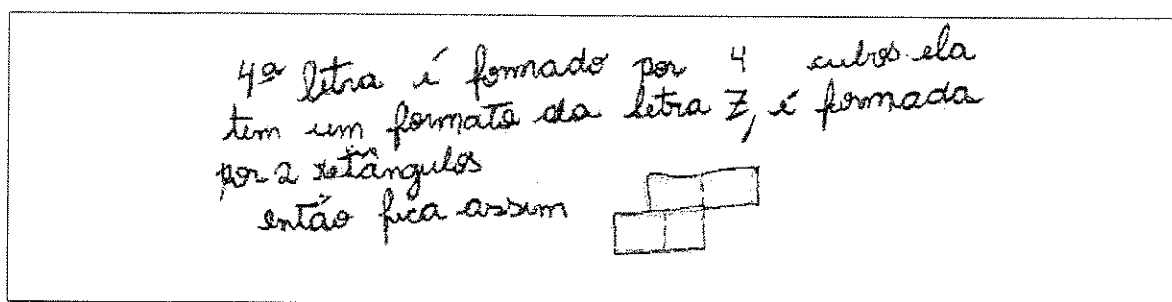


Figura 5.85 - Descrição da peça D feita pelo grupo de alunos da professora M.

Ressalte-se nesse processo a importância do trabalho em grupo, pois permitiu que os alunos discutissem seus pontos de vista, formulassem hipóteses e testassem a validade delas, chegando a perceber que o objeto em questão não se modificava se sua posição no espaço fosse modificada.

Um dos grupos resolveu o problema escrevendo: “A parte D é formada por dois retângulos que formam quatro quadrados”; em seguida, fez uma desenho para a peça D, do tipo representado abaixo:



Figura 5.86 - Representação da peça D feita por um dos grupos de alunos da professora M.

Analisando o texto e o desenho feitos por esse grupo, pode-se dizer que, quando eles disseram “*dois retângulos*”, estavam se referindo aos paralelepípedos retângulos formados pela união de dois cubos e que, quando disseram “*quatro quadrados*”, estavam se referindo à quantidade de cubos que compõe a peça. Essa incorreção no uso dos termos geométricos pode estar sendo fortalecida pelo uso incorreto desses termos que a própria professora fazia com a classe.

Outro grupo, tentando minimizar a dificuldade encontrada para descrever a peça D, utilizou três tipos de “analogias” em linguagem escrita, juntamente com uma representação gráfica, em forma “chapada” para a peça, como a da Figura 5.84. Eles escreveram na mensagem: “*A parte D é formada por 4 cubos parecendo uma cadeira em pé, dois degraus de uma escadaria ou a letra Z*”.

Durante a representação da peça G, pelos alunos da professora M, da escola B, uma discussão ocorrida em um dos grupos mereceu ser analisada na presente pesquisa.

Os alunos desse grupo identificaram a referida peça dizendo para a professora M que a mesma possuía três retângulos, então, a professora perguntou-lhes:

— “*Onde estão os retângulos?*” – referindo-se novamente à figura espacial (paralelepípedo), e não a uma figura plana.

Um dos alunos apontou para três das faces retangulares vistas na peça – duas na horizontal e uma na vertical, percebendo, nesse momento, que identificando dessa maneira a peça teria mais uma face retangular. Então se corrigiu, dizendo:

— “*Então errei por um, são quatro*”.

Quando os alunos se referiram aos retângulos, poderiam estar pensando nas formas retangulares possíveis de serem “desenhadas” nas faces do objeto – cubo-soma. Por ser um objeto tridimensional, seguindo esse raciocínio, na referida peça seria possível “desenhar” seis retângulos e não quatro, como os alunos concluíram anteriormente. Uma outra possibilidade de interpretação é que eles poderiam estar “visualizando” três paralelepípedos retângulos, considerando, separadamente, um de cada vez.

A professora pediu que eles observassem novamente a peça, dizendo:

— “Vamos observar a peça, cada retângulo (se referindo ao paralelepípedo retângulo formado por dois cubinhos) que vocês estão vendo é formado por cubinhos, então, quantos cubinhos ao todo tem a peça?”

Um dos alunos disse:

— “Ah! São cubos... então, são quatro cubos, como os outros”.

A professora concordou com o grupo e os alunos decidiram descrever a mensagem da seguinte forma:

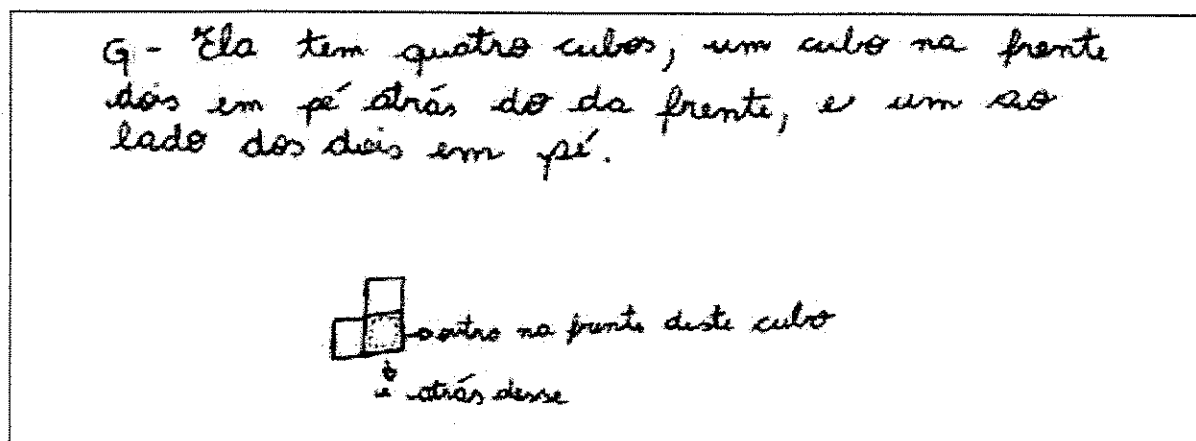


Figura 5.87- Descrição da peça G feita por um dos grupos de alunos da professora M.

Observa-se na representação gráfica feita pelos alunos um desenho pontilhado sobre um quadradinho que juntamente com as informações escritas, dão uma perfeita noção de como ficará a composição da peça usando-se quatro cubos.

Após o término dessas atividades feitas pelos grupos dessa classe, a professora M recolheu os trabalhos e trocou as mensagens entre os grupos, pedindo que cada grupo lesse o que o outro grupo havia feito, verificando se, com as informações, o leitor que recebesse a mensagem teria condições de entender as formas geométricas descritas e/ou representadas.

Essa intervenção da professora foi interessante pois mostrou para os alunos que muitas das mensagens que eles fizeram não davam condições ao leitor de construir o objeto indicado. Os grupos fizeram a leitura, e comentaram quando era ou não possível entender a mensagem e construir as peças. Entretanto, a professora não continuou a

discussão a esse respeito, enfatizando apenas que a falta de entendimento ocorreu pelo fato dos alunos não “*prestarem atenção*” durante a realização da tarefa.

Um dos objetivos intrínsecos a essa atividade era o de investigar como a professora, percebendo as diferentes interpretações e representações feitas pelos alunos, estaria explorando os conceitos geométricos intrínsecos a ela. Porém, é preciso notar que essa interpretação não ocorreu.

Caso a professora tivesse se inteirado sobre quais os tipos de estratégias que os estudantes usaram e quais as dificuldades que eles encontram nas atividades acima, poderia ter contribuído não somente para a ampliação dos conhecimentos geométricos dos alunos intrínsecos ao problema principal, introduzindo novos conceitos, mas também para a solução de novos problemas geométricos, minimizando possíveis dificuldades.

Observou-se que a referida atividade possibilitou aos alunos irem além da sua representação, isto é, eles precisaram explicar o que estavam pensando, precisaram colocar suas idéias para o outro, através de uma representação gráfica ou através da linguagem escrita e, além disso, eles precisaram interpretar outras representações geométricas, que muitas vezes não estavam suficientemente claras.

As discussões decorrentes da atividade foram importantes para que os alunos tomassem consciência da necessidade de se ter boas representações de figuras geométricas a fim de que outras pessoas consigam interpretá-las corretamente.

Durante a realização dessa atividade, os alunos da escola A (particular) mostraram-se atentos, concentrados na tarefa, empenhados em traduzir, da melhor maneira possível, a informação necessária para que a mensagem pudesse ser entendida. Eles procuraram manusear cada uma das peças, contando os cubos que as compunham, verificando as faces que ficavam visíveis de acordo com a posição em que a peça era colocada sobre a mesa.

Dentre os trabalhos produzidos pelos alunos da escola A, destacam-se os de Iza (Figura 5.88) e de Gab (Figura 5.89), por darem indícios de terem usado tipos de representações discutidas por Mitchelmore, 1976, 1980, citado por Gutiérrez, 1998. Mitchelmore estabeleceu etapas para as diferentes representações planas de objetos

tridimensionais, as quais foram utilizadas na análise dos dados coletados no presente estudo.

Nos recursos usados por Iza e Gab para descreverem as peças, evidencia-se que os alunos utilizaram um procedimento identificado por Mitchelmore (1976, 1980) como “*Esquemática Plana*”, ou seja, representaram as figuras, isto é, os quadrados e as faces do cubo-soma, desenhando uma das suas faces de forma ortogonal.

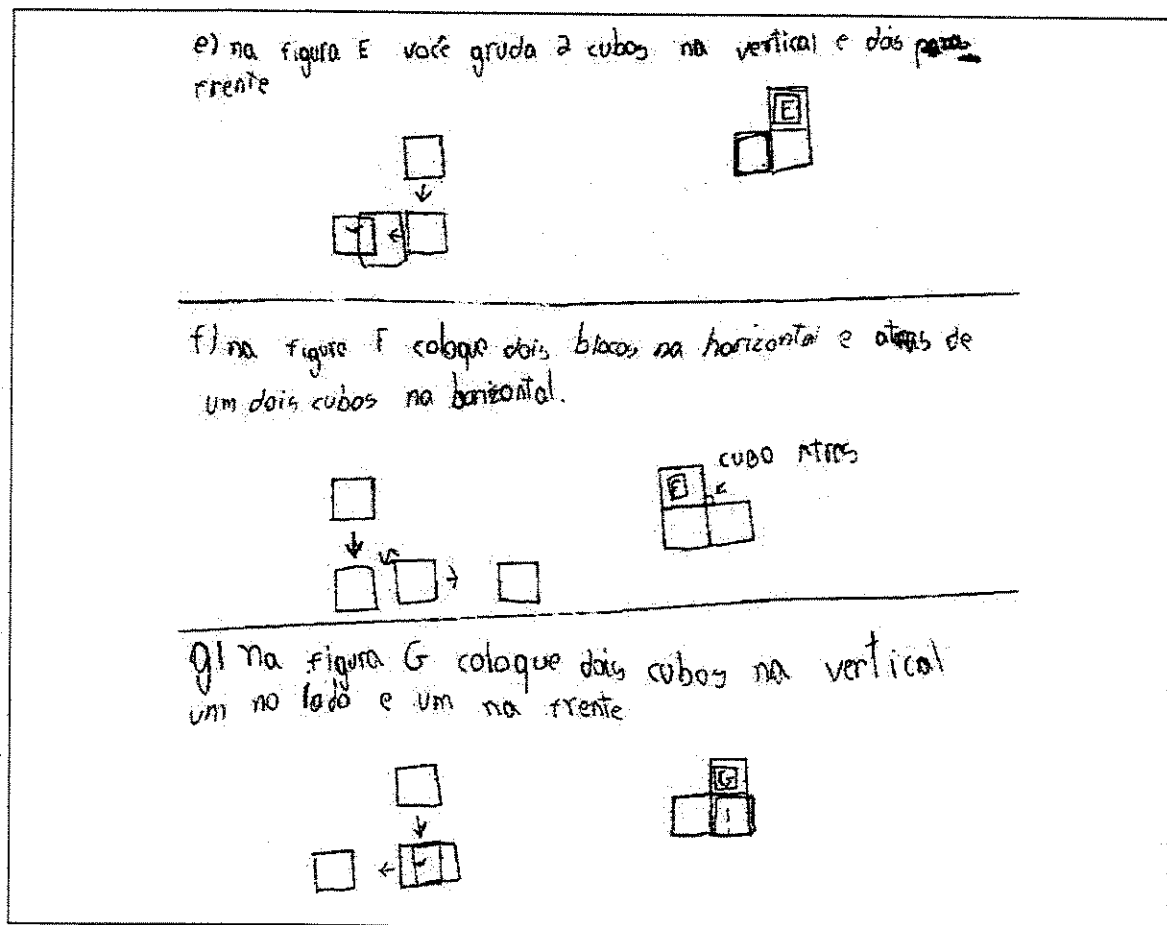


Figura 5.88- Algumas das representações de Iza.

Além disso, é conveniente observar que esses alunos incluíram em suas representações informações textuais, visuais, incluindo esquemas de montagem das peças através de setas.

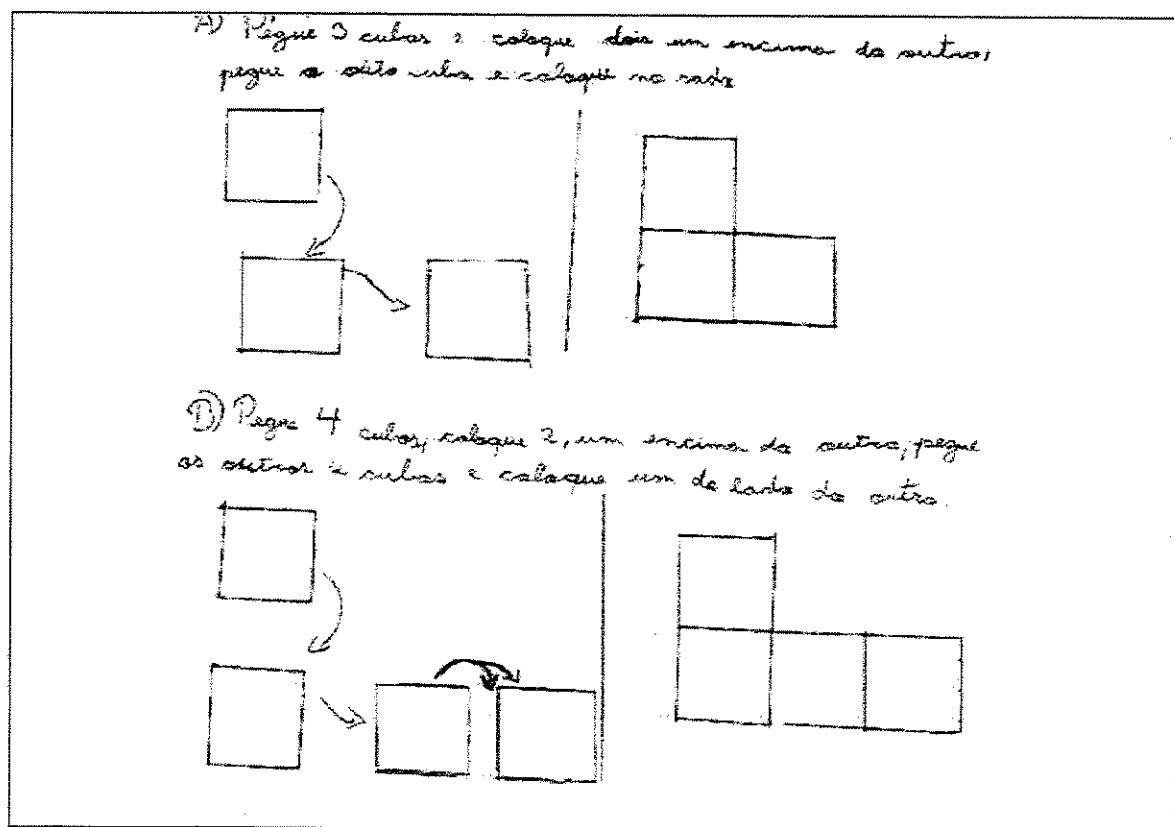


Figura 5.89 - Algumas das representações de Gab.

Mitchelmore explicita que existem quatro etapas (do tipo piagetiano) que possibilitam o processo de representação de um desenho em perspectiva. Essas representações evidenciam algumas habilidades de se representar em perspectiva (Mitchelmore, 1976, 1980, citado por Gutiérrez, 1998, p.203). Segundo Mitchelmore, na Etapa 1, a qual ele chama de “*Esquemática Plana*”, os estudantes representam as figuras desenhando uma de suas faces ortogonalmente, como pôde ser observado nas representações de Iza e Gab. As figuras abaixo são apresentadas por este autor como sendo figuras dessa etapa.

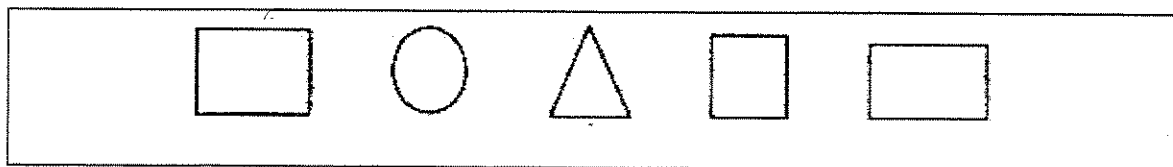


Figura 5.90 - Representação do tipo “*Esquemática Plana*”.
(Gutiérrez, 1998, p.204, Fig. 6)

Outro destaque, nessa mesma abordagem, faz-se à representação de Mau, aluno da escola A, visto que ele usou em sua representação informações de diversas naturezas ao desenhar as peças do cubo-soma de forma “chapada”, ou conforme Mitchelmore (1976, 1980), “*Esquemática plana*”. Entretanto, as informações apresentadas pelo aluno foram insuficientes para que o leitor identificasse todas peças do cubo-soma. Isto pode ser verificado quando o sujeito foi solicitado a identificar as representações que havia feito com as representações das peças do cubo-soma em outra posição.

As informações de Mau para as peças A e B (Figura 5.91) indicavam corretamente a montagem; já no caso das peças F e G (Figura 5.92) a informação era insuficiente para as montagens, pois Mau escreveu “*Ponha 2 na horizontal e 2 na vertical*”, informações insuficientes, mesmo tendo feito o desenho, como pode ser observado nas ilustrações.

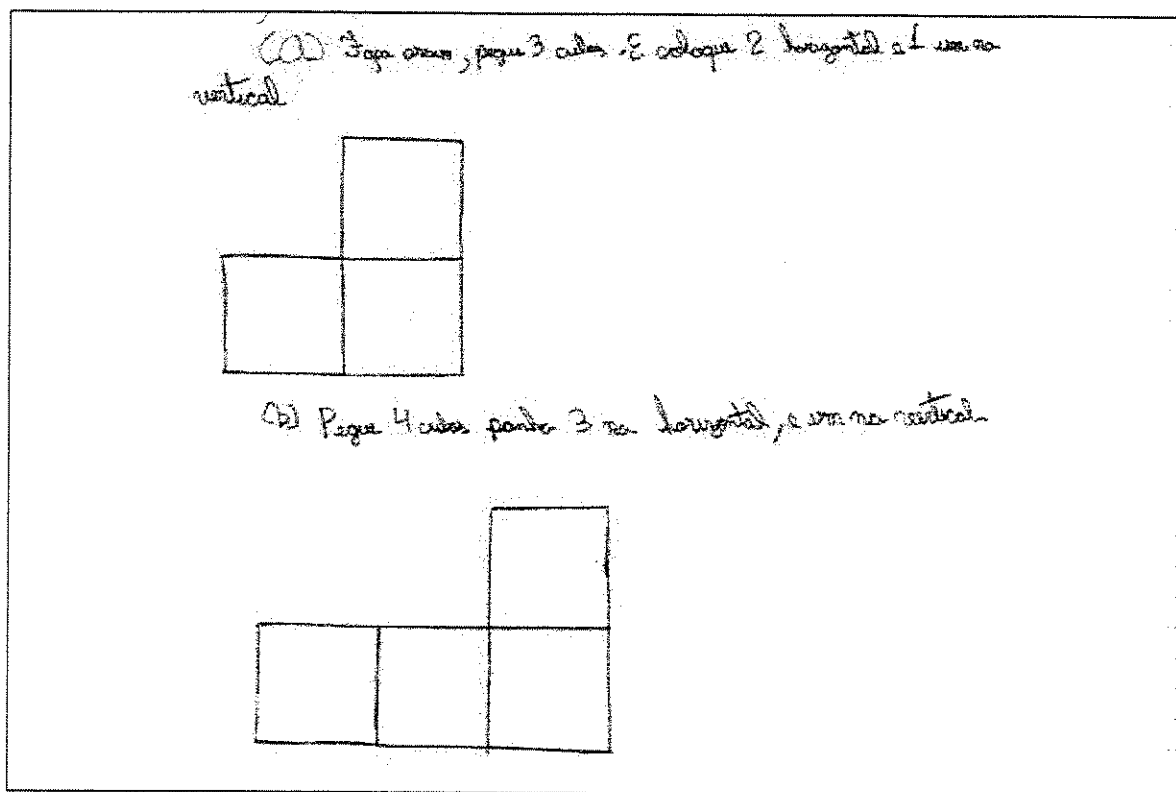


Figura 5.91 - Representações de Mau para as peças A e B.

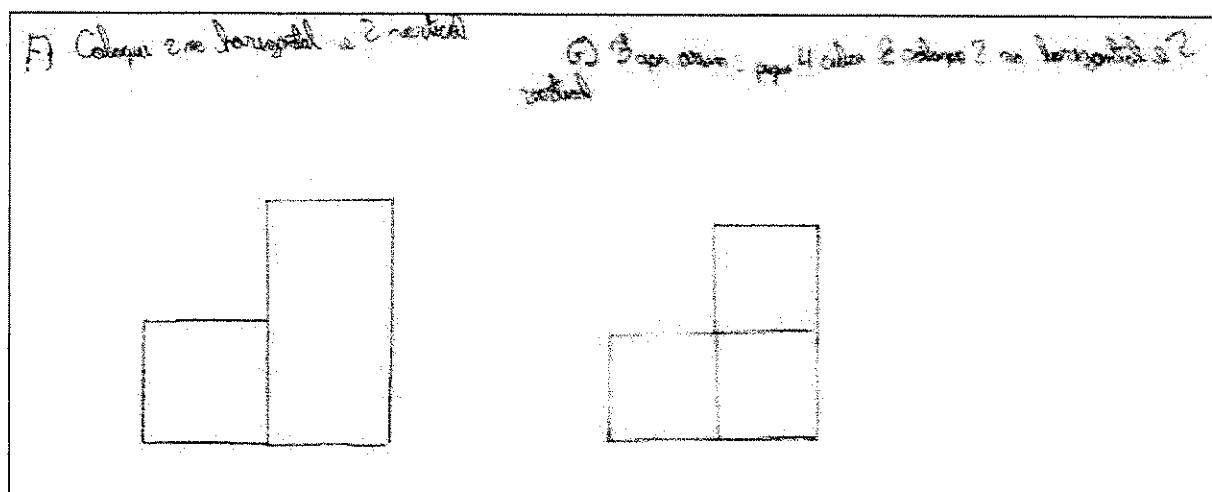


Figura 5.92 - Representações de Mau para as peças F e G.

Esse mesmo fato ocorreu com maior intensidade com os alunos da classe da professora G, da escola B (pública). Cerca de dezenove alunos fizeram uma representação do tipo “chapada” para as peças, com algumas informações escritas e algumas indicações com setas; entretanto, seriam insuficientes para a interpretação de uma outra pessoa que, lendo essas mensagens, não conseguiria realizar as construções das peças.

Mel, aluna da professora G, além de ter feito apenas descrições de cada uma das peças de forma “chapada”, usou para a representação desenhos de retângulos para indicar parte de uma face da peça, o que dificultaria ainda mais a identificação de cada peça pelo leitor. As setas que Mel colocou com numeração parecem querer indicar a quantidade de cubos usados para cada peça, como é o caso da descrição da peça A. Entretanto, ao fazer essa indicação para a peça B, colocou uma quantidade de setas e números incompatíveis com a quantidade de cubos da peça real, como pode ser observado abaixo.

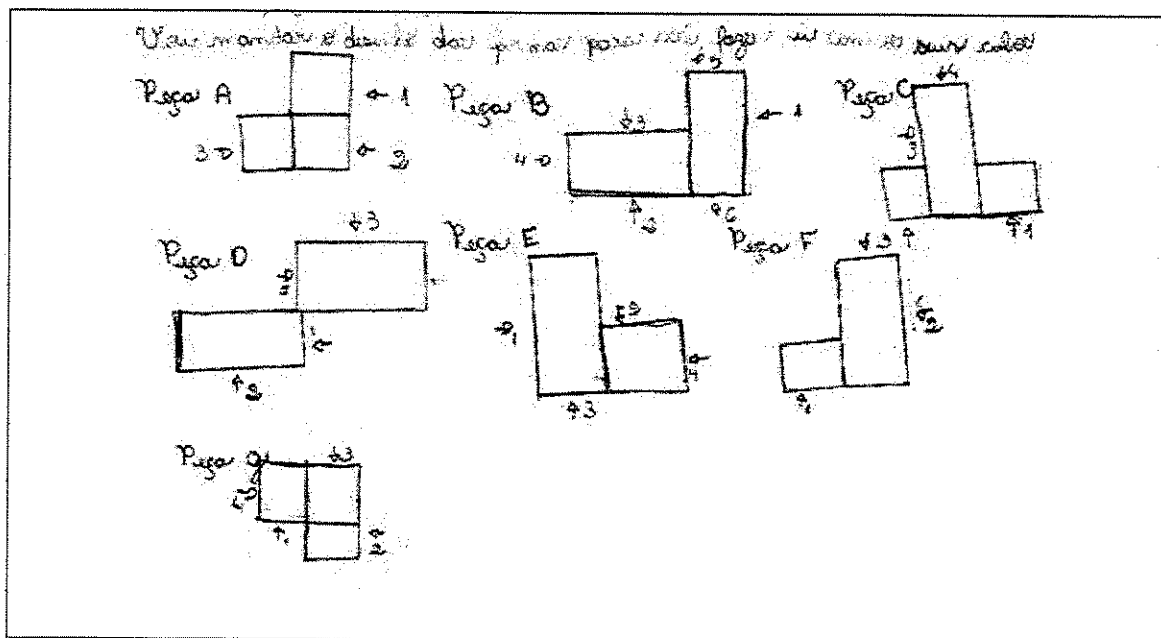


Figura 5.93 - Representação da mensagem feita pela aluna Mel.

Pat, também aluna da professora G, desenhou uma das faces das peças, indicando por quadrados os cubos que estariam sendo usados na composição. Indicou com setas onde esses cubos estariam ligados (Figura 5.94-a). Além disso, Pat usou a linguagem escrita, como no caso das peças F e G (Figura 5.94-b). Isso indica que ela pode ter percebido que apenas as setas seriam insuficientes para a resolução do problema proposto.

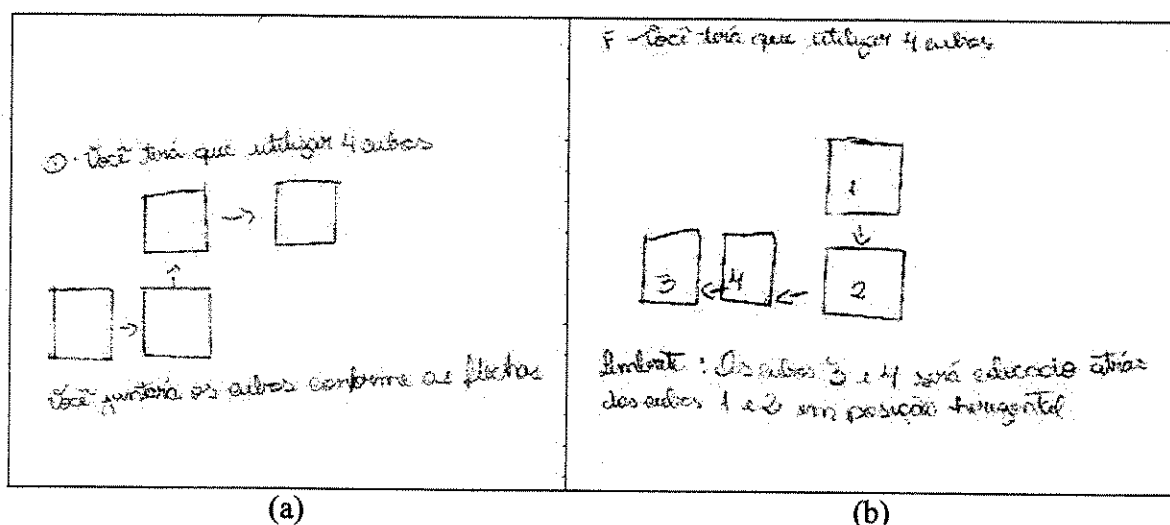


Figura 5.94 - Representações das peças D e F da mensagem de Pat.

Já na representação de Maur (Figura 5.95), aluno da escola A, observa-se que ele desenhou várias faces do objeto ortogonalmente e, às vezes, incluiu faces ocultas, que aparecem hachuradas no desenho. Esses tipos de representações não conseguem dar uma sensação de profundidade, com exceção da peça E, e são chamadas por Mitchelmore (1976, 1980) como “*Esquemática Espacial*”.

Vale destacar que, nas representações feitas por esse aluno, ele indicou com números iguais as faces de um mesmo cubo, explicitando as faces não visíveis, para as quais não conseguiu, naquele momento, dar-lhes sentido de profundidade, demonstrando com isso estar próximo de conseguir uma representação em perspectiva.

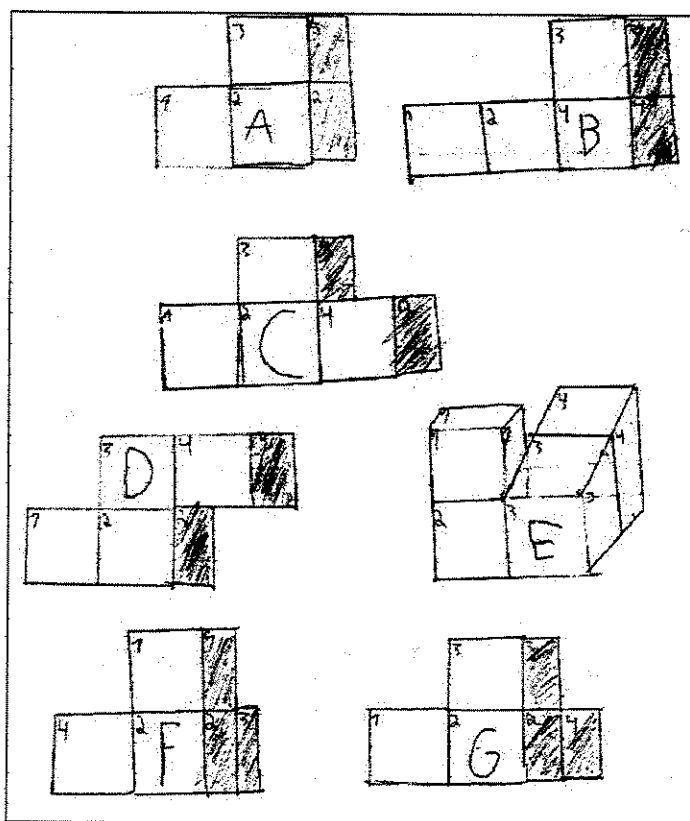


Figura 5.95 - Representação de Maur.

Segundo Mitchelmore (1976, 1980), na Etapa 2 das representações planas de objetos espaciais, estariam as figuras que são representadas desenhando várias de suas faces ortogonalmente e, às vezes, incluindo faces ocultas, conforme pode ser observado

na Figura 5.96, abaixo. Segundo o autor, nessa etapa, que ele chama de “*Esquemática Espacial*”, as representações seguem sem dar sensação de profundidade.

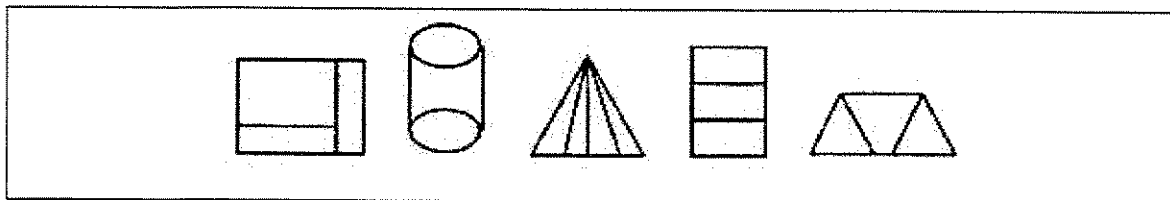


Figura 5.96 - Representações do tipo “*Esquemática Espacial*”.
(Gutiérrez, 1998, p.204, Fig. 7)

O aluno Ber (Figura 5.97), da escola A, apesar de ter usado textos e imagens em sua tarefa, não evidenciou, na representação de alguns de seus desenhos, algumas das propriedades conceituais das figuras, como por exemplo, faces paralelas e perpendiculares na composição das peças do cubo-soma.

Enfatize-se que essa constatação constitui-se em uma inferência desta pesquisadora pois, da representação do aluno, não se pode dizer que ele não possua os conhecimentos relacionados aos conceitos de profundidade que definem a natureza do poliedro, visto que ele pode ter utilizado em sua representação um ponto de vista que não lhe permitisse a representação de algumas das profundidades das peças em questão.

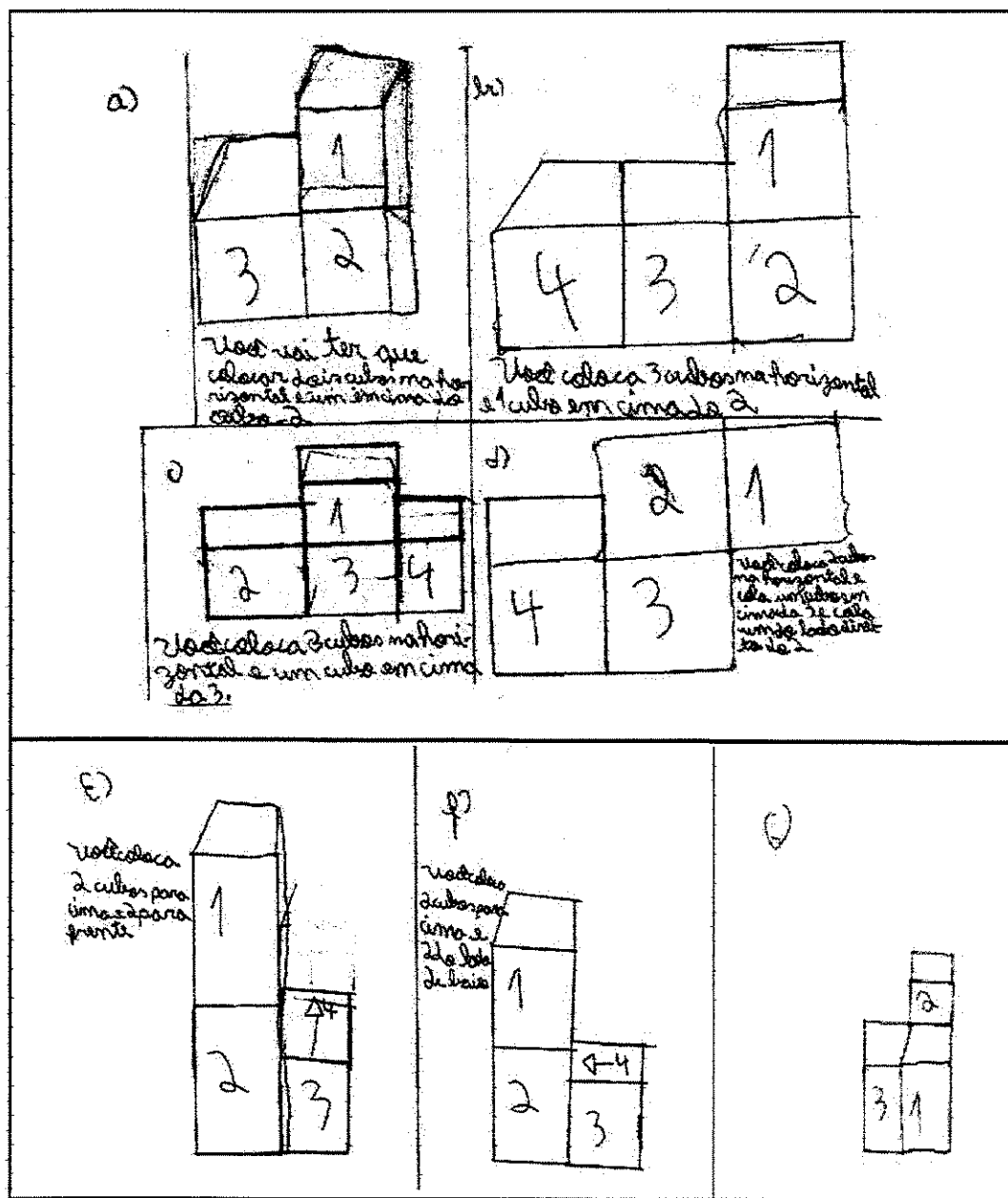


Figura 5.97 - Representações da mensagem de Ber.

A aluna Sil, da classe da professora G, da escola B, foi a única dessa classe que conseguiu dar algum sentido de profundidade em algumas das peças representadas em sua mensagem. Como pode ser observado na representação abaixo (Figura 5.98), o desenho das peças A, B indicam que a aluna pode ter tido essa intenção. Quando ela representou as peças C e D, fez o desenho de uma de suas faces, indicando por quadrados os cubos que as compõem, e por setas onde eles deverão estar unidos. Já para

representar as peças E e G a aluna demonstrou, pelas marcas deixadas no papel, que tentou fazer um desenho dando sensação de profundidade mas, não tendo êxito, usou indicações com setas e a linguagem escrita para superar a dificuldade encontrada. O desenho de Sil da peça F, feito de forma “chapado”, indica que ela pode ter usado um desenho menor para uma das faces de um dos cubos da peça, para indicar que esse cubo não estava visível, isto porque ela indicou com a seta que os “2 cubos” estariam atrás.

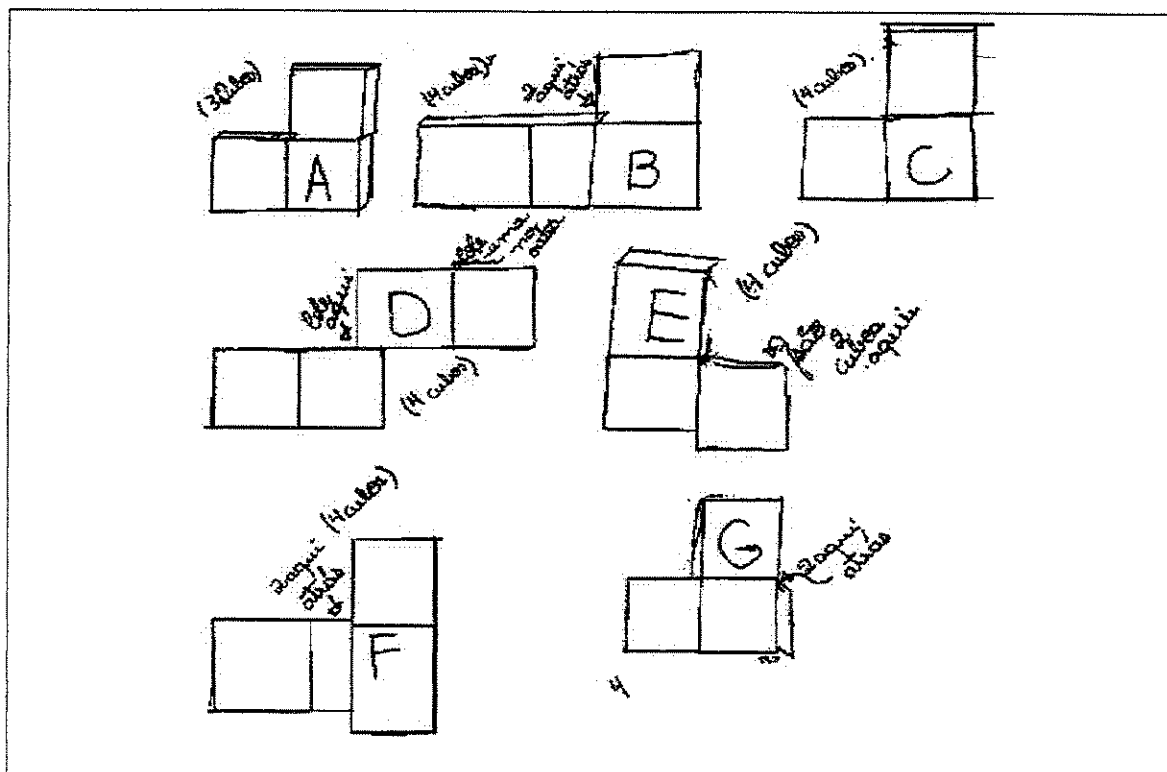


Figura 5.98 - Representação da mensagem de Sil.

Segundo Mitchelmore (1976, 1980) esse tipo de representação, ou seja, como os de Ber e Sil, mostra uma etapa de evolução da habilidade de desenho em perspectiva, denominada por ele de “*Pré-realista*”, pois os desenhos mostram a intenção de representar os corpos de maneira realista e dotados de profundidade, ainda que sem conseguí-los plenamente.

Essa seria a terceira Etapa definida por Mitchelmore (1976, 1980). A etapa “*Pré-realista*” está dividida em duas sub-etapas, cuja diferença estaria na perfeição dos

desenhos, quanto a sua tridimensionalidade, conforme pode ser observado na ilustração abaixo, identificada como sendo dessa etapa por Gutiérrez (1998).

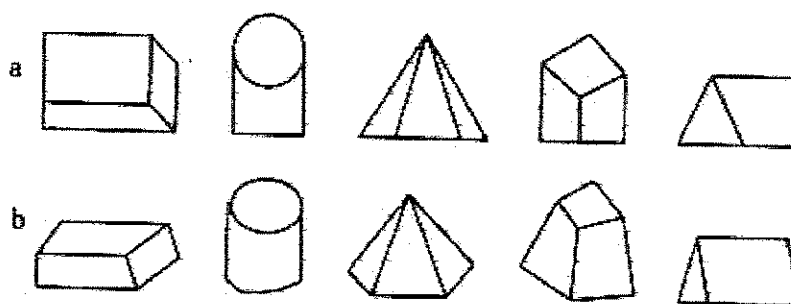
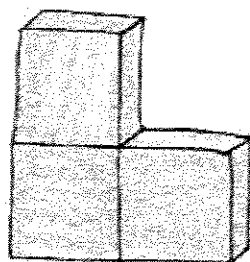


Figura 5.99 - Representações do tipo “*Pré-realista*”.
(Gutiérrez, 1998, p.204, Fig.8)

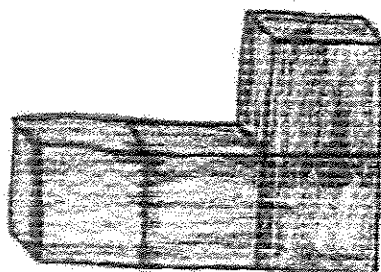
Esse tipo de ocorrência pode constituir-se em um contexto propício para que o educador desenvolva, em sua prática pedagógica, noções sobre perspectiva envolvendo diferentes pontos de vista. Alguns autores de livros didáticos têm tratado dessa temática enfatizando características e conceitos importantes sobre perspectiva como Imenes e Lellis (1997).

Destaca-se, nesse contexto, a mensagem de Isab (Figura 5.100 e Figura 5.101), aluna da escola A, que usou recursos textuais e visuais, como podem ser verificados na ilustração. Vale destacar que sua representação bidimensional de objetos tridimensionais superou qualquer expectativa, já que ela conseguiu dar aos desenhos a idéia exata dos objetos espaciais.

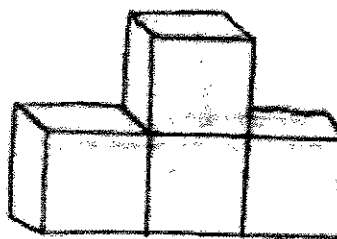
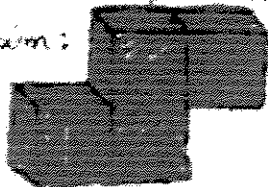
A) Na figura A, vai-se colocar um cubo do lado do outro na horizontal e um cubo em cima de um deles na vertical. Assim:



B) Na figura B, quero que me coloque 3 cubos do lado do outro na horizontal e um cubo em cima de algum outro cubo na vertical. Assim:



D) Na figura C, quero que me coloque 2 cubos um do lado do outro na horizontal, e 2 cubos em cima de um dos dois. Assim:



C) Na figura C, vai-se colocar 3 cubos um do lado do outro na vertical, e um outro em cima do do meio, como um pédio. Assim:

Figura 5.100 - Representações das peças A, B, C e D da mensagem de Isab.

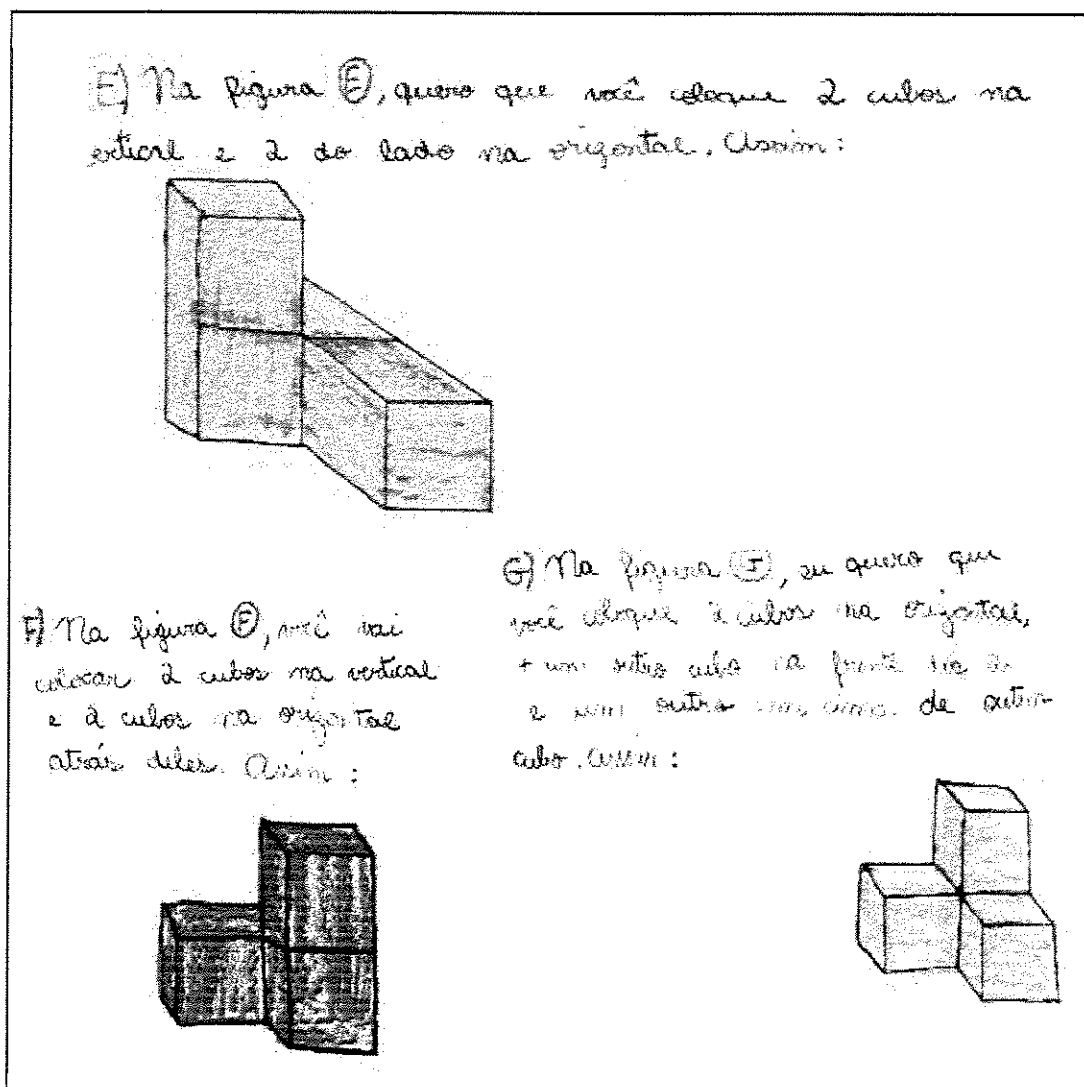


Figura 5.101 - Representações das peças E, F e G da mensagem de Isab.

Deve ser destacado que a aluna conseguiu dar noção de profundidade a todas as peças representadas, pois ela as desenhou em perspectiva paralela. Além disso, a aluna utilizou o recurso da linguagem para informar a quantidade de cubos que formava cada peça do cubo-soma, inclusive a posição que deveriam ocupar. Ao usar esse recurso, a aluna procurou garantir que as peças a serem compostas pelo leitor do texto seriam semelhantes às peças modelos.

Note-se ainda, que, ao fazer a observação textual, ela deu conta de um problema que pode ser enfrentado quando se depara com representações de objetos tridimensionais em perspectiva paralela que usam multicubos¹³⁴ (Figura 5.102).

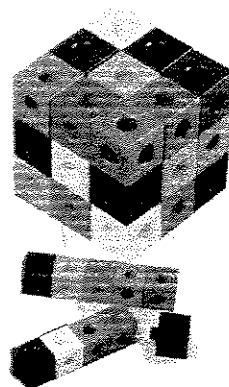


Figura 5.102 – Foto de Multicubos.

Em outras palavras, algumas representações planas de multicubos não oferecem condições para que o observador saiba exatamente com quantos cubos elas são compostas. Por exemplo, observando-se a figura abaixo, não há condições para afirmar, precisamente, de quantos cubos ela é composta, já que pode haver cubos “escondidos” pelas faces visíveis no desenho.

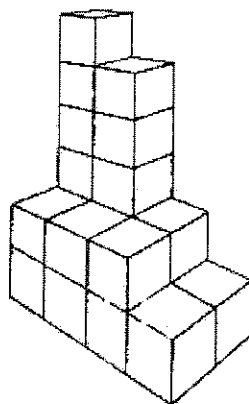


Figura 5.103 - Representação plana em perspectiva com multicubos.

¹³⁴ Módulos Multicubos: sólidos formados por vários cubos iguais ligados de maneira que suas faces se sobrepõem.

O objetivo da pesquisadora, ao propor a atividade acima descrita, consistiu em analisar as características da representação das mensagens dos alunos uns para os outros. No caso da aluna Isab, da escola A, pôde ser constatado nas representações feitas por ela uma composição de idéias que relacionam corretamente textos e desenhos com as diferentes posições dos cubos-soma no espaço. Além disso, ressalta-se que nos desenhos da aluna estão implícitos alguns indícios das características conceituais que permeiam o conceito de cubo e dos diferentes poliedros formados pelas diferentes composições dos cubos entre si, quais sejam, faces paralelas, formadas por quadrado, quadrados formados por segmentos de retas de mesma medida de comprimento e perpendiculares entre si, número de faces que compõem o cubo, entre outras.

Nos tipos de representações, como as feitas por Iza, está implícita a Etapa 4, designada por Mitchelmore (1976, 1980) como “*Realista*”, na qual os desenhos são bastante corretos e seguem, ainda que aproximadamente, as regras do desenho em perspectiva, em particular, as referentes às linhas que convergem para um ponto do infinito, conforme podem ser observadas na representação abaixo.

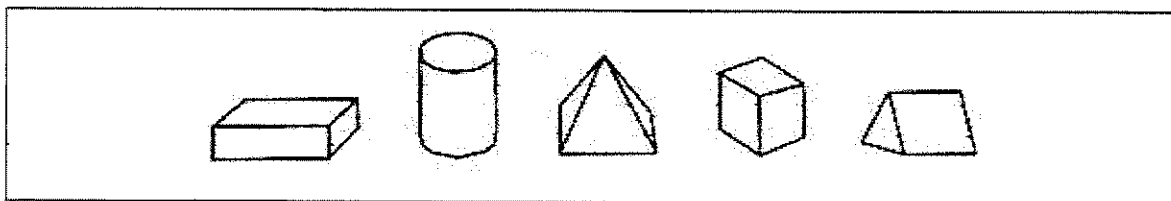


Figura 5.104 - Representações do tipo “*Realista*”.
(Gutiérrez, 1998, p.205, Fig.9)

Esse ponto do infinito pode ser considerado como *ponto de fuga*¹³⁵ de um feixe de raios luminosos ou de um conjunto de retas paralelas de um objeto, que é o ponto comum de encontro das correspondentes retas no desenho.

No traçado da perspectiva cônica de um objeto de referência é preciso que o sujeito escolha as posições de um de seus vértices e do ponto de fuga, para depois traçar as arestas; tendo claro que os prolongamentos das linhas de profundidade convergem

¹³⁵ Ponto de Fuga: ponto localizado fora ou no interior da figura para onde convergem as projeções das retas com origem na própria figura.

para o ponto de fuga, e que as demais são paralelas ou perpendiculares à linha do horizonte. Trata-se de uma tarefa complexa, principalmente para estudantes que não estão acostumados com esse tipo de representação.

A projeção em perspectiva de um cubo, por exemplo, ante o olhar do observador, apresenta as arestas mais distantes menores, e as linhas paralelas que se afastam são vistas como convergentes. Esse tipo de projeção pôde ser identificado na representação da aluna Iza.

Deve ser notado que a projeção isométrica é um tipo de projeção paralela na qual os três eixos cartesianos formam ângulos de 120° . Desenhos isométricos são usualmente feitos em uma rede de triângulos equiláteros (rede isométrica), com a convenção de que os vértices dos sólidos têm que coincidir com os pontos da rede. Em particular, a representação isométrica de um cubo é um hexágono regular dividido em três losangos, as faces visíveis do cubo. Esse tipo de abordagem é recomendado por algumas propostas curriculares de Matemática, como a que se destina à formação dos professores das séries iniciais, publicada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (1990).

Na representação isométrica, o paralelepípedo de referência é colocado de modo que todas as suas arestas fiquem igualmente inclinadas em relação ao plano do desenho. Nessa situação, as imagens das três arestas que partem do vértice mais afastado do plano do desenho formam ângulos de mesma medida entre si, como mostra a figura abaixo.

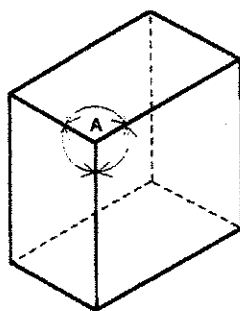


Figura 5.105 - Representação de um paralelepípedo em perspectiva isométrica.

Na publicação de Gutiérrez (1998), podem ser encontrados exemplos de diferentes etapas de representações, como pirâmides de base quadrada, paralelepípedos, cubos e octaedros regulares, feitas por alunos, e abaixo representadas, que sugerem as etapas descritas por Mitchelmore (1976, 1980), às quais se assemelham as dos sujeitos da presente pesquisa.

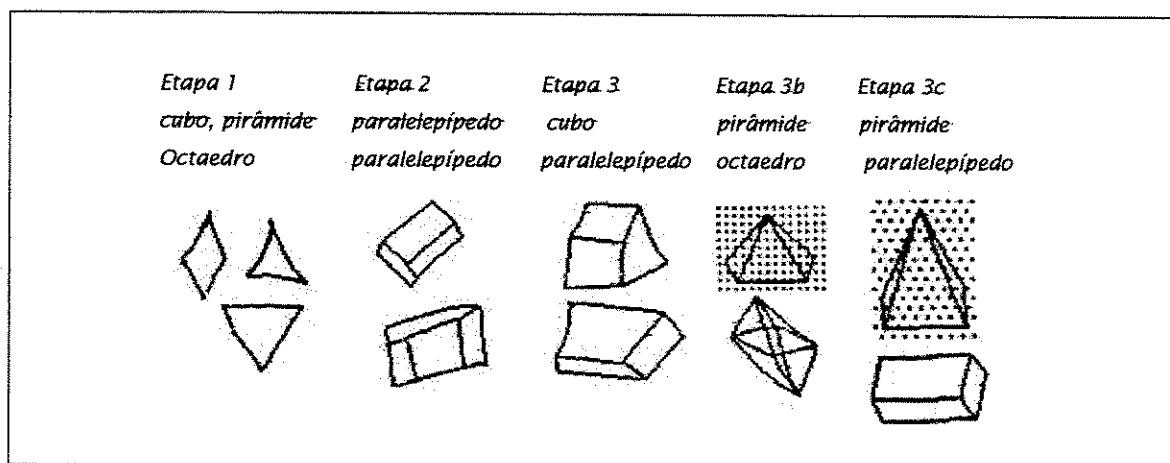


Figura 5.106 - Diferentes etapas de representação (Gutiérrez, 1998).

Diante da diversidade de representações apresentadas pelos sujeitos e também das apresentadas pelos autores citados no Estudo de Caso, caberia novamente o questionamento a respeito do que as crianças representam: As crianças vêem os sólidos da maneira como os representam ou não são capazes de representar o que vêem, em virtude da falta de capacidade em traçar os diferentes elementos que integram a representação no plano?

Entender como as crianças interpretam e representam as diferentes formas geométricas que se apresentam no contexto escolar poderia contribuir para responder o questionamento acima. Nesse sentido, atividades de interpretação e identificação de representações planas de objetos tridimensionais foram desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa.

Interpretação e Identificação de Representações Planas de Objetos Tridimensionais

Após a atividade de transmissão de informação espacial para informação plana ter sido realizada com os alunos da escola A, a pesquisadora propôs para a professora L que desenvolvesse uma nova atividade com seus alunos, qual seja: **interpretar e identificar cada uma das peças do cubo-soma desenhadas em uma cartela** (Figura 5.107) **com as representações que eles haviam feito na aula anterior**¹³⁶. É preciso notar que essa representação na cartela mostra as peças do cubo-soma em posições diferentes das que foram colocadas (sobre a mesa), quando realizaram as atividades anteriores. A posição das peças na cartela indica que elas foram desenhadas em perspectiva isométrica. Acrescente-se a isso o fato de que, no momento dessa atividade, os alunos não tinham as peças do conjunto às mãos.

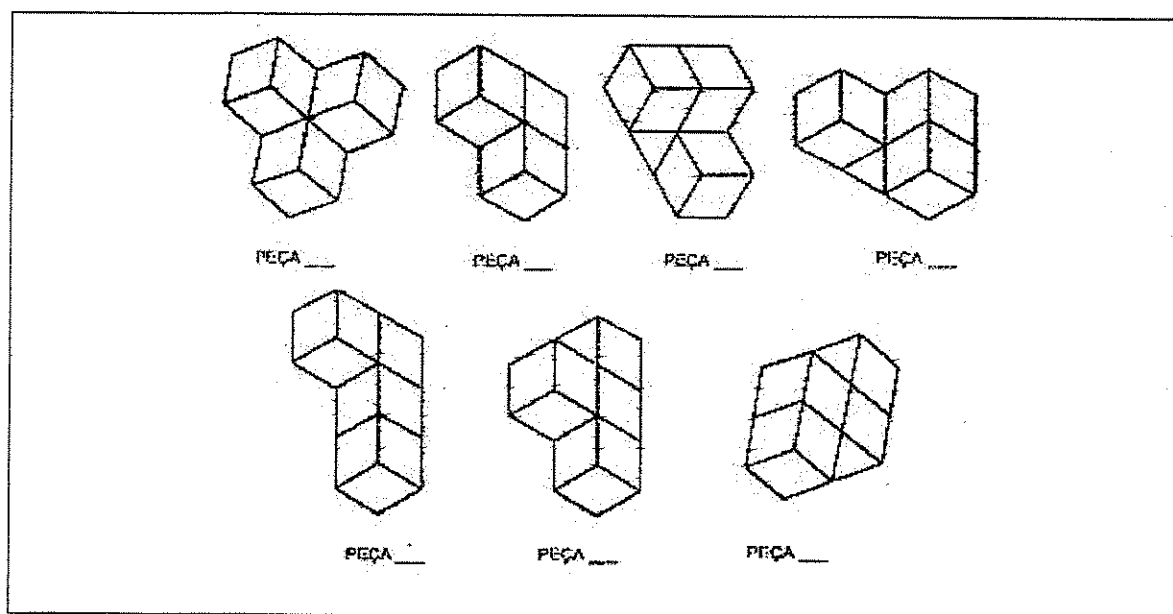


Figura 5.107 - Cartela de figuras do cubo-soma.

¹³⁶ Esta atividade foi proposta somente para os alunos da professora L (escola A).

Foi solicitado que os alunos **identificassem** cada uma das peças da cartela com as peças que eles haviam **descrito** ou **desenhado** para a mensagem da atividade anterior. Para tanto, cada aluno recebeu a sua folha de anotações de volta.

Durante o desenvolvimento dessas atividades com os alunos da escola A, a professora da classe se manteve afastada do processo de resolução pelo qual os alunos estavam passando.

A aluna Liv, que havia faltado quando os demais alunos prepararam a mensagem, sentiu-se “perdida” diante da tarefa a ser realizada. Diante dessa situação, normal no dia-a-dia da sala de aula, a pesquisadora sugeriu que ela fizesse dupla com Mar, isto é, fizesse o “papel” do leitor que estaria recebendo a mensagem e que procurasse identificar cada uma das peças que Mar havia representado em sua mensagem. Dessa forma, haveria condições de investigar como um sujeito que não havia tido contado com as peças do cubo-soma faria a interpretação da mensagem de uma outra pessoa.

Foi colocado um gravador na mesa das alunas para que toda informação a respeito desse episódio pudesse ficar registrada. Mar iniciou a leitura do texto que havia escrito e Liv, observando a representação gráfica de Mar, procurava identificar as figuras representadas (por desenhos) e as palavras usadas no texto da mensagem.

Após a primeira leitura da mensagem a respeito da peça A (Figura 5.108), Liv disse que essa peça corresponderia ao primeiro desenho representado na cartela, fazendo portanto uma leitura incorreta. A aluna, leitora da mensagem, observando a primeira figura da cartela, não conseguiu “visualizar” o cubo (parte da peça) que estava “escondido” e considerou-a compatível com o texto de Mar.

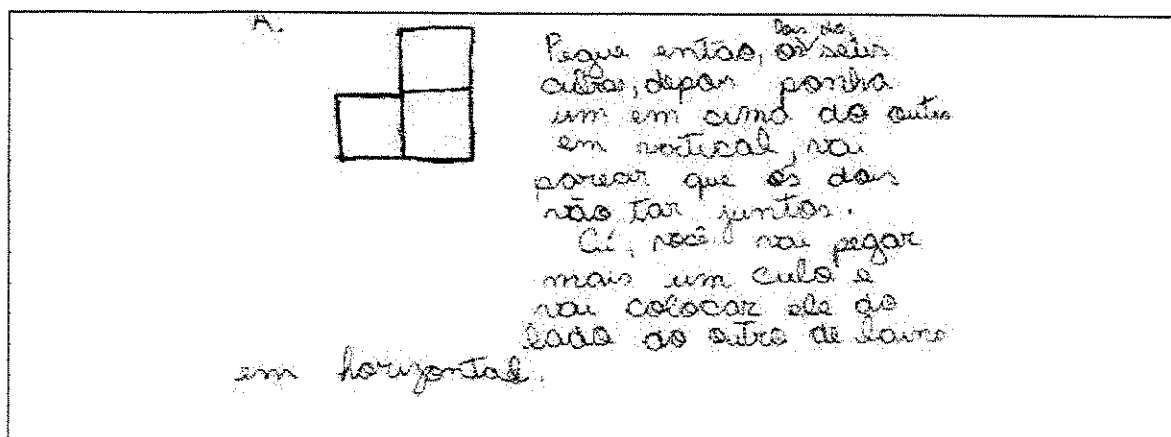


Figura 5.108 - Apresentação da mensagem de Mar.

Mar, por alguns instantes, se deteve, observando a cartela e analisando o seu desenho com a mensagem escrita, dando demonstrações de que estaria refletindo sobre ela; no entanto, ela não conseguiu perceber incorreções no momento em que Liv fez a identificação; não examinou atentamente o texto e a representação na cartela, acabando por concordar, indevidamente, com Liv. Assim, Liv acabou escolhendo a primeira figura da figura da cartela, que não correspondia à figura A da mensagem de Mar.

Os desenhos das peças do cubo-soma da cartela exigiam que o sujeito soubesse identificar corretamente um objeto tridimensional desenhado em perspectiva, em posição diferente daquela que teria caso ele fosse colocado sobre uma superfície plana. Em outras palavras, precisava identificar a quantidade de cubos que compunha cada peça e a posição de cada um deles; isto é, Liv precisava “ler” o desenho feito por Mar; uma tarefa que não é simples para muitas pessoas, principalmente para aqueles que nunca manipularam essas peças, como era o caso de Liv.

Os alunos, de modo geral, estão acostumados a ver diversas representações geométricas em livros, nas aulas, em revista, jornais, etc.; entretanto, o que é importante, e está sendo considerado na presente pesquisa, é como eles as interpretam e como as reproduzem. Para Baldy, Chatellon e Cadopi (1993), “ler um desenho” significa identificar, de forma organizada, elementos que o compõem, de modo que o sujeito represente para si mesmo determinadas propriedades dele. Segundo os autores citados,

“... ler um desenho de um objeto em perspectiva é uma inferência sobre o objeto a partir de seu desenho... Ela (leitura) explora a relação de significação que une desenho e objeto. Essa relação deve ser construída pelo sujeito para que a evocação daquilo que o desenho representa seja possível. Ela dá ao desenho o estatuto de substituto simbólico” (Baldy, Chatellon e Cadopi¹³⁷, 1993, citados por Cavalca, 1998, p.32) (grifo da pesquisadora).

Outro erro na identificação e interpretação de Liv foi decorrente da primeira identificação incorreta. Mesmo ficando um pouco confusa sobre essas duas identificações, Mar não reviu seu trabalho de representação diante da interpretação feita por Liv, mostrando-se solidária com a colega. As demais identificações foram feitas corretamente, e de forma compartilhada por Mar. Ela explicava para a colega como havia feito para representar cada uma das peças, tornando a tarefa de Liv mais simples.

O aluno Mau que fez as representações das Figuras 5.90 e 5.91, ao analisar sua descrição e as figuras da cartela, se deparou com um obstáculo, qual seja: algumas descrições feitas por ele na atividade anterior – mensagem – são praticamente idênticas, como se notou anteriormente. Nesse momento ele percebeu que, ao fazer uma descrição imprecisa, não ofereceu condições para que outra pessoa, ou ele próprio, pudesse identificar as formas geométricas desejadas. Diante desse impasse, ele constatou que sua representação não correspondia à peça no real.

A convivência de representação referida anteriormente, e considerada por Parzysz (1988) como importante para a “restituição do significado”, não ocorreu com o próprio sujeito acima citado. Nesse episódio ele foi o leitor da própria mensagem (Parzysz¹³⁸, 1988, citado por Gutiérrez, 1996b).

Segundo Bessot e outros (1993), as dificuldades encontradas na leitura de grafismos técnicos são sentidas como decorrentes de uma tendência que privilegia o aprendizado de procedimentos de tipo algorítmico em detrimento da aprendizagem do sentido, no início da aprendizagem. Segundo os autores, os conhecimentos geométricos

¹³⁷ BALDY, R.; CHATILLON, J. e CADOPPI, M. (1993) *Dessin plan, dessin en perspective: étude des effets de transfert chez des adultes débutants. Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble : Editions La Pensée Sauvage, pp.17-34.

¹³⁸ PARZYSZ, B. (1988). *Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures*. In *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp.79-92.

são constitutivos da funcionalidade do desenho e, portanto, do seu sentido (Bessot e outros¹³⁹, 1993, citados por Cavalca, 1998, p.32).

A dificuldade de visualizar objetos espaciais é muito discutida no ambiente escolar e também fora dele, principalmente por aqueles que dizem não ter “visão espacial”, e nesse sentido, a citação abaixo, de Pham e Dillinger (1996), pode ser esclarecedora.

“... talvez alguns digam que têm dificuldades para “ver no espaço”. Certamente se trata de uma maneira de falar, pois de que outro modo vêem? O que querem dizer é que têm dificuldade para reconstituir mentalmente uma figura que é sugerida por um desenho em perspectiva” (Pham e Dillinger¹⁴⁰, 1996, citados por Cavalca, 1998, p.32) (grifo da pesquisadora).

Outros alunos da classe da professora L, escola A, também perceberam incorreções em suas descrições; no entanto, alguns “puxavam” na memória as identificações das peças que haviam manipulado na atividade anterior. Nessa atividade os alunos trocaram, por diversas vezes, informações com seus colegas, fazendo as modificações que julgavam necessárias para as identificações.

Interpretação da Representação Plana e Construção De Modelos

A atividade de **interpretação de uma representação bidimensional e a sua representação tridimensional**¹⁴¹ foi sugerida pela pesquisadora à Professora S da escola C, para que a desenvolvesse com seus alunos.

¹³⁹ BESSOT, A.; DEPREZ, S.; EBERHARD, M. e GOMAS, B. (1993). *Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment*. Espaces graphiques et graphismes d’espaces. Grenoble: Editions Le Pensée Sauvage, pp.115-144.

¹⁴⁰ PHAM, F. e DILLINGER, H. (1996), *Algèbre lineaire*. Paris: Diderot Editeurs, Arts et Sciences.

¹⁴¹ Essa atividade foi realizada somente com os alunos da professora S (escola C).

O objetivo dessa atividade foi o de **verificar como os alunos interpretavam e como representavam desenhos que sugerem formas e linhas usadas para indicar a profundidade de objetos geométricos.**

A realização desse tipo de tarefa supõe que os alunos possuam considerável conhecimento de convenções usadas em representações planas de objetos tridimensionais. A tarefa consistiu na construção de modelos com o uso de material concreto (varetas e fita adesiva) baseados nos desenhos no papel.

A classe foi dividida em grupos para a realização da tarefa. No início do processo de resolução, os alunos observaram o primeiro desenho (Figura 5.109-a) e começaram discutindo, no grupo, como ficaria a representação.

Os dois desenhos abaixo foram sugeridos pela pesquisadora para compor parte da atividade, tendo como referência o trabalho de Bishop (1979), que os utilizou em sua pesquisa em Papua New Guinea, citada anteriormente no Capítulo 3.

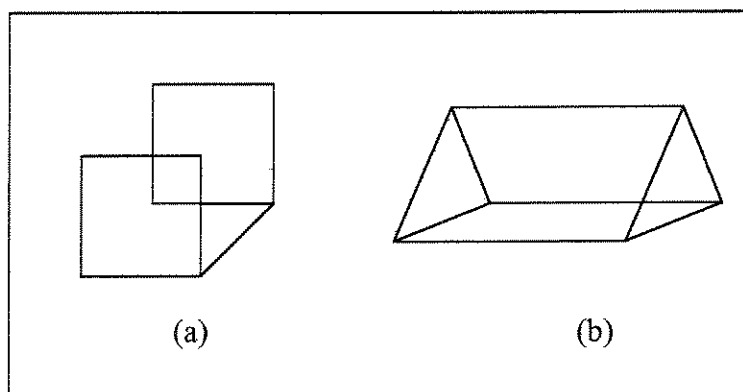


Figura 5.109 - Dois primeiros desenhos da atividade.

Um dos grupos começou colocando as varetas na posição em que deveriam ficar antes de uní-las com a fita adesiva. Depois de concordarem que essa representação estaria correta, iniciaram a fixação dos vértices e completaram a tarefa (Figura 5.110).

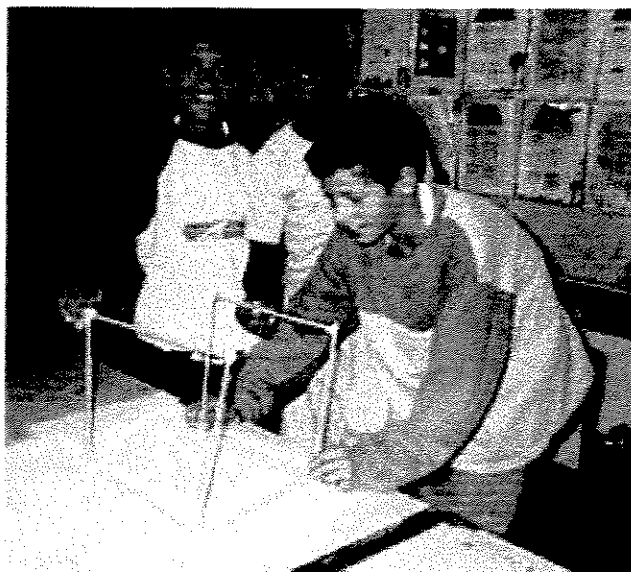


Figura 5.110 - Foto da representação espacial do desenho (a).

Dois grupos fizeram a representação totalmente plana, sendo que um deles, após verificar como os demais estavam fazendo, discutiu a respeito e decidiu modificá-la. Entretanto, os alunos do outro grupo não se incomodaram em representar de uma forma diferente do restante da classe, e confirmaram o que fizeram inicialmente, fixando as varetas com fita adesiva no plano da carteira, como pode ser verificado abaixo.

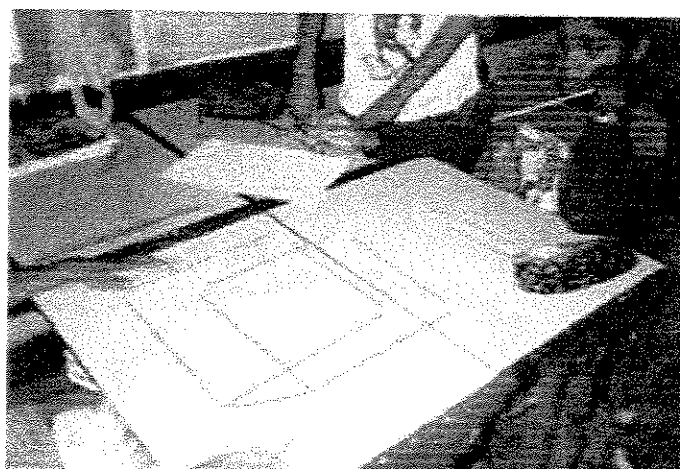


Figura 5.111 - Foto da representação plana do desenho (a).

Situação semelhante aconteceu para a Figura 5.109-b da referida atividade; somente um dos grupos representou o desenho como se fosse uma figura totalmente plana (Figura 5.112).



Figura 5.112 - Foto da representação plana do desenho (b).

Os demais grupos construíram modelos tridimensionais para a Figura 109-b da atividade, como ilustrada abaixo:

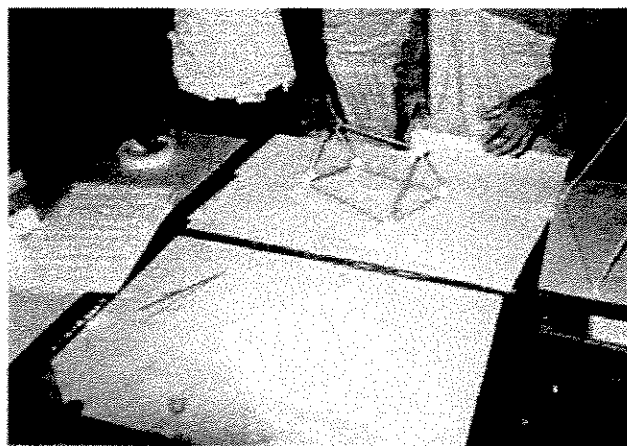


Figura 5.113 - Foto da representação espacial do desenho (b).

A segunda atividade pedia que os alunos analisassem alguns desenhos (Figura 5.114), propostos pela professora S, **verificando a possibilidade de sua construção usando varetas.**

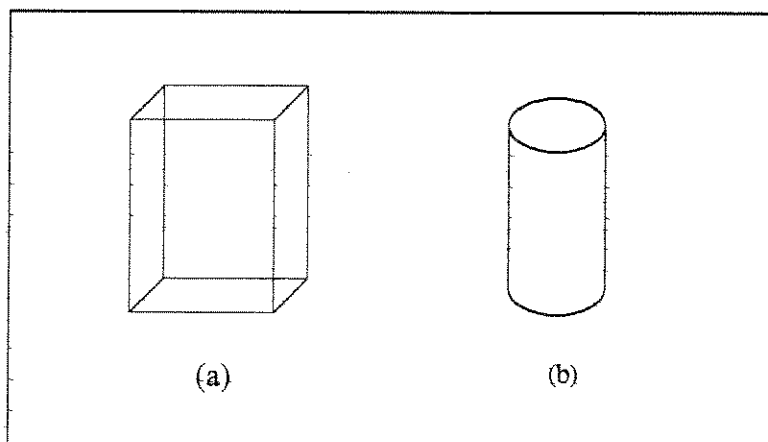


Figura 5.114 – Desenhos da segunda atividade.

Os alunos, de modo geral, não tiveram dificuldade em fazer a representação do desenho que representa um prisma. Entretanto, o mesmo grupo de alunos que havia feito as representações anteriores totalmente planas procedeu do mesmo modo para esta representação, o que pode ser verificado na foto baixo (Figura 5.115).

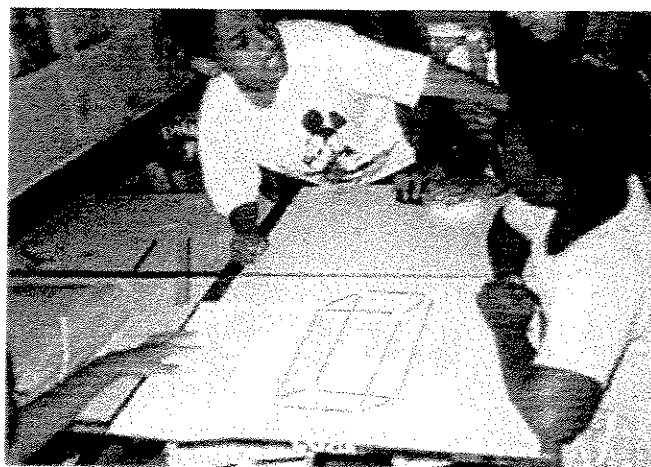


Figura 5.115 – Foto da representação plana da do desenho (a) da Figura 5.114.

Com relação ao cilindro, alguns alunos ficaram interessados em descobrir o “segredo” para representá-lo usando varetas, concluindo depois de algumas discussões nos próprios grupos que não seria possível, devido a inflexibilidade da vareta de madeira. Foi interessante o comentário de um dos alunos:

— “Se a gente colocar espetinhos , um juntinho do outro (indicando com as mãos o contorno do círculo – base), dá para formar esse desenho, fica um camudo”.

Possivelmente o aluno estava se referindo a uma construção do tipo da ilustrada na Figura 5.116. Com essa explicação, o aluno “praticamente” apresentou uma das definições para cilindro, como aparece em livros didáticos: “*reunião dos segmentos congruentes e paralelos, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados em um mesmo semi-espço de um plano*”¹⁴².

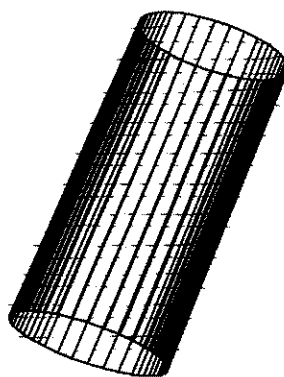


Figura 5.116 – Representação do cilindro pelos segmentos de sua geratriz.

Após a realização das atividades pelos alunos, a professora S retomou com a classe as diferentes maneiras de se representar um objeto espacial, dizendo que, algumas vezes, é possível ter em mãos o próprio objeto, em outras, o que se tem é sua fotografia, em outras, tem-se o seu desenho, como na atividade que eles haviam feito. Explicou-lhes que os desenhos eram feitos de modo que todos possam identificar o que eles representam e que ajudavam para ensinar muitos conceitos de Geometria, importantes para a formação deles.

A professora S comparou as diferentes representações feitas para o desenho da Figura 5.109-a, comentando que, da forma com que o desenho aparece, significa que ele está representando uma figura espacial, e que, por isso, sua representação com varetas não estaria ocupando somente o plano da mesa, mas também, ocupando espaço fora dela. Destacou as representações que tinham sido feitas totalmente planas, dizendo que a

¹⁴² Fonte: DOLCE, O. e POMPEO, J. N. (1985) *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Espacial*. São Paulo: Atual, p.211-j.

maneira como eles haviam feito não poderia ser considerada errada, caso eles não tivessem aprendido como fazer esse tipo de construção.

Montagem do Quebra-Cabeça Cubo-Soma

A atividade de **montagem do quebra-cabeça com as peças do cubo-soma** foi uma proposta da professora L, da escola A, logo após os alunos terem realizado a atividade de interpretação e identificação de representações planas de objetos tridimensionais¹⁴³. Trata-se de uma **atividade de composição e decomposição de objetos tridimensionais**, e constituiu-se em um importante dado para a presente pesquisa, pois introduziu os alunos às primeiras noções de volume que, posteriormente, foram trabalhadas com a classe.

A professora levou para a classe um jogo de peças do cubo-soma confeccionado em isopor, em tamanho maior que o usado pelos alunos anteriormente. Dividiu a classe em quatro grupos, e solicitou aos grupos que, um de cada vez, manipulassem essas peças, procurando formar alguma configuração com elas. Ela não lhes disse que, juntas, formariam um cubo.

O primeiro grupo, ao iniciar o “jogo” proposto com as peças, percebeu que estava faltando uma das peças. Essa percepção, certamente, foi decorrente da manipulação que haviam feito na atividade anterior com as peças de um jogo em madeira, pois ao serem questionados a respeito de qual peça estava faltando, responderam imediatamente: “*falta a G*”, o que mostra a correspondência de cada peça com as letras que as haviam identificado anteriormente.

Com a peça “G” incorporada ao conjunto, os alunos experimentaram várias montagens geométricas. O aluno Ber, disse:

— “*Com essas peças dá para formar uma pirâmide*”.

A professora perguntou-lhe se seria possível formar uma pirâmide com esses tipos de peças. Outras crianças se anteciparam e disseram que não seria possível. Entretanto, Ber insistiu no que havia afirmado, explicando:

¹⁴³ Essa atividade foi realizada somente com os alunos da professora L (escola A).

— “*Dá para formar uma pirâmide, porque as construções egípcias eram feitas de blocos*”. Ber explicou para a classe que os egípcios usavam muitos blocos para formar uma pirâmide, socializando com seus colegas um conhecimento a respeito da construção das pirâmides do Egito.

Outro aluno interferiu, dizendo que, apesar das pirâmides usarem blocos, não daria para ser uma pirâmide com as peças que tinham ali porque essas peças não tinham como formar a “*ponta*”. Alguns arriscaram-se a dizer os motivos da impossibilidade de formar uma pirâmide e disseram que não daria para formar a “*diagonal*”. Essa afirmação indica que possivelmente eles estavam se referindo à inclinação das faces laterais das pirâmides, por isso, usaram a palavra “*diagonal*”.

Percebe-se nessa fala das crianças como o desenho da diagonal de polígonos, de retângulos por exemplo, pode ter ficado gravado na memória dos alunos, isto porque, de modo geral, as diagonais são segmentos de reta que ficam, quase sempre, oblíquos à borda da folha do caderno. A professora não se manifestou com relação a essas afirmações dos alunos.

Ressalte-se que a interpretação da professora, diante das diferentes interpretações que os alunos estavam fazendo naquele momento, poderia ter sido importante para um aprofundamento teórico a respeito de alguns conceitos geométricos como: diagonais, posições da reta, diferentes formas geométricas de pirâmides, entre outros. Entretanto, essa exploração não ocorreu. Pode-se inferir que, provavelmente, ao não explorar essas diferentes interpretações a professora não percebeu as diferentes interpretações, ou não dispunha, naquele momento, de recursos teóricos e didáticos suficientes para aprofundar o assunto.

Nesse sentido, não se pode discordar de Moura (1992) quando diz que, ao se ensinar Matemática, deveríamos fazê-lo com um objetivo determinado, com intencionalidade, isto é, pensando em um processo de ensino-aprendizagem que requer “... *que dominemos, tendo em vista o sujeito que aprende (sujeito cognoscitivo), o conteúdo primeiro (conceitos já dominados pelo sujeito) e o conceito científico (aquele que se pretende sistematizar)*” (p.47).

No decorrer do processo de montagem do cubo com as peças do cubo-soma, os alunos, ao fazerem algumas tentativas, começaram estabelecendo critérios para as diferentes construções.

— “*Fizemos uma Torre de Piza faltando um tijolo*” - disse Mar, referindo-se à construção ilustrada a seguir:

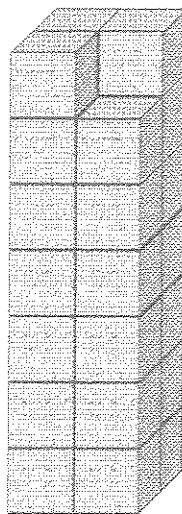


Figura 5.117 - Configuração com as peças do cubo-soma do grupo de Mar.

A observação acima deu condições para o início de uma **discussão a respeito de volume**.

Noção de Volume

A pesquisadora perguntou aos alunos do grupo:

— “*Se está faltando um cubinho, quantos seriam necessários para montar a construção completa, isto é, para formar um paralelepípedo?*”

Os alunos, observando a construção que fizeram, teceram algumas afirmações:

— “*No chão tem quatro cubinhos, para fechar o prédio teríamos que ter...*”

Bru, completou:

— “28”.

A pesquisadora perguntou: *“por quê?”* E ele respondeu:

— *“Ao todo são vinte e sete cubinhos, e está faltando um”*.

A professora fez uma pergunta:

— *“E então, quantos cubinhos têm na altura do prédio?”*

Os alunos contaram e responderam que eram sete.

A professora da classe comentou com os alunos:

— *“Tínhamos quatro cubinhos no chão, vezes sete camadas, para completar o prédio são necessários vinte e oito cubinhos. Portanto, o volume dessa forma geométrica, para ser um prédio completo, precisa de vinte e oito cubos”*.

Nota-se com essa colocação da professora a sua intenção em aproveitar as manifestações dos alunos para abordar a noção volume. Nesse procedimento, o conceito de volume discutido com os alunos, de maneira informal, possibilitou uma discussão posterior como pode ser observada nos comentários seguintes.

A pesquisadora, aproveitando a colocação da professora, perguntou aos alunos se seria possível, usando todos os vinte e sete cubinhos, construir uma forma geométrica que estivesse “fechada”, querendo se referir a uma forma prismática, no caso, paralelepípedo retângulo. Os alunos experimentaram diferentes maneiras de encaixe das peças, testando algumas possíveis medidas, e comentavam em “voz alta” o que estavam pensando:

— *“ $6 + 6 + 6 + 6 = 24$, para fechar o prédio sobram 3 cubinhos....”* Disse um dos alunos.

Esse aluno estava considerando cada camada de cubos necessária para montar um prisma cuja base teria seis cubos e cuja altura teria quatro cubos. Essa fala do aluno indica que ele estava construindo a noção de volume e, também, chegando muito próximo da definição da fórmula do volume de um paralelepípedo, isto é, concluir que a medida da área da base, multiplicada pela medida de comprimento de sua altura, resulta em seu volume. Continuando nesse raciocínio, Bru comentou:

— *“Se fossem sete na base também não dá, porque... sete ... não dá vinte e sete”*. Essa pausa na fala de Bru indica que ele estaria se referindo aos múltiplos de sete, isto porque não existe um número inteiro que multiplicado por sete resulte em vinte e sete.

— *“Usando vinte e sete cubinhos só pode ser nove, nove e nove”*, concluiu Bru, fazendo gestos com as mãos, indicando cada camada de cubos necessária para formar o prisma. Com os gestos que fez, o aluno demonstrou a compreensão da noção de volume e possibilitou a todos os demais alunos o entendimento dessa noção.

Os demais alunos concordaram com Bru e começaram a experimentar as possibilidades de resolver tal problema. Vale destacar a importância da discussão promovida pela professora, visto que a troca de informações entre os alunos, permitiu a socialização daquele conhecimento. O “jogo” ali proposto propiciou o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, possibilitando a verificação das hipóteses apresentadas pelos alunos, a investigação e a exploração do conceito em questão – volume. Para tanto, os alunos elaboraram estratégias de resolução e as testaram à medida que tentavam montar o cubo. Entretanto, a aula daquele dia encerrou-se sem que os alunos conseguissem a montagem do cubo.

Na aula seguinte, os alunos da escola A mostravam-se atentos e interessados para descobrir a maneira de montar a forma prismática, usando as peças do cubo-soma. Eles enfatizaram que “uma coisa” eles já haviam descoberto: a forma a ser construída usando as peças do cubo-soma era a de um cubo. Nesse dia, foram entregues quatro conjuntos de peças do cubo-soma, portanto a classe ficou dividida dessa forma.

Cumpru destacar que uma das alunas comentou que foi a uma feira de artesanato no final de semana e encontrou o jogo cubo-soma, ficou manipulando as peças, e que isso foi devido as atividades desenvolvidas na classe na semana anterior. *“Só não comprei o jogo porque não tinha dinheiro”*, disse a aluna. Esse fato mostrou o interesse dos alunos também fora do contexto escolar, o que pode ter sido proporcionado pela estratégia metodológica usada pela professora, a qual revelou sua intenção de propiciar a efetiva aprendizagem de um conteúdo geométrico, com propósitos pré-estabelecidos.

Logo que o primeiro grupo conseguiu fazer a montagem do cubo, a professora pediu que eles registrassem os procedimentos usados na construção para que pudessem ser comparados com os procedimentos dos demais grupos. É interessante observar que, mesmo um grupo tendo “vencido o desafio”, os demais grupos não tiveram interesse em

“copiar” os procedimentos adotados por ele. Todos os alunos queriam resolver, por eles mesmos, o desafio.

Para executar um encaixe, os alunos precisaram lançar mão de sua capacidade de percepção das relações espaciais para determinarem que peça, e em que posição, completaria a figura desejada, a partir das peças já colocadas. Depois de identificar a peça e a sua posição, eles precisaram dispor da percepção da posição no espaço para decidirem quais transformações geométricas deveriam imprimir, na peça selecionada, para que esta ficasse na posição definida por eles anteriormente.

Quando os alunos conseguiram identificar a transformação geométrica prevista, sem a necessidade da ação física, isto é, sem ter que executar a ação usando as peças do jogo, experimentando o encaixe, eles davam mostras de possuírem uma certa habilidade espacial nessa ação.

Esses alunos podem ter realizado diferentes “**rotações mentais**” em suas tarefas. A esse respeito, recorre-se aos estudos voltados para a apreensão das transformações geométricas analisando a “**rotação mental**” que vêm sendo realizados, como o de Jalles (1997), que considera a rotação mental como a capacidade de rotacionar figuras bi ou tridimensionais (Jalles¹⁴⁴, 1997, citado por Oliveira, 1998).

Del Grande (1994) enfatiza que a percepção das relações espaciais para algumas tarefas está estritamente ligada com a percepção da posição no espaço. Isto é, uma pessoa que tem essa percepção “vê” que duas figuras são congruentes, quando uma é a imagem da outra, mediante um deslizamento, uma translação ou uma rotação.

A presente investigação, em especial essa atividade, revelou momentos em que os alunos faziam a análise dos movimentos necessários para que as peças pudessem ser encaixadas no quebra-cabeça, antecipando os possíveis resultados.

Segundo Gorgorió (1998), uma “*habilidade espacial processual*” seria a habilidade necessária para efetuar operações mentais combinadas requeridas para resolver uma tarefa espacial, como a aqui apresentada. A referida autora ressalta que essa habilidade inclui não apenas a habilidade de imaginar objetos espaciais,

¹⁴⁴ JALLES, C. M. C. R. (1997) *O efeito de instruções sobre estratégias metacognitivas de crianças pré-escolares em solução de problema geométrico: um estudo exploratório*. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação de Mestrado).

relacionamentos e transformações e decodificá-los visualmente; mas também inclui a habilidade de codificá-los em termos mistos ou verbais. Além disso, essa habilidade inclui, não somente a habilidade de manipular as imagens visuais de fatos espaciais, mas também, a habilidade de resolver as tarefas usando processos que não são meramente visuais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1997) para os ciclos I e II do Ensino Fundamental, e, também, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para os ciclos III e IV do Ensino Fundamental – Matemática, conforme introduzidos anteriormente no Capítulo 3, destacam a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo a permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial. Na análise que os PCN fazem a respeito dos aspectos metodológicos para o ensino da Geometria, fica evidente a preocupação com a interação da criança com o meio ambiente, incentivando-se a utilização de todas as informações sensoriais e ainda a importância da visualização nesse processo, visto que,

“... o pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997, p.127).

Procedimentos da montagem do cubo-soma

Na proposta de montagem do cubo-soma foi solicitado que os alunos da escola A fizessem um **registro dos procedimentos usados na montagem do quebra-cabeça**. Os registros de cada grupo foram feitos de forma diferenciada, sem nenhuma interferência da professora L ou da pesquisadora.

Analisando os registros dos procedimentos do grupo composto pelos alunos Liv, Bru, Ber, Thi e Mic, (Figura 5.118), destaca-se uma representação *“por camadas”*, próxima à assim denominada por (Gutiérrez, 1996b). Esse grupo usou, além da seção de uma das faces das peças (na forma *“chapada”*), um esquema de representação para indicar como cada uma das peças deveria estar encaixada em cada camada (horizontal à

base), indicando-as por flechas. Essa representação poderia trazer alguma dificuldade, para atingir o objetivo da montagem, a quem seguisse o esquema. Entretanto, a pesquisadora, juntamente com os demais alunos da classe, analisando essa descrição, conseguiu a montagem do cubo-soma.

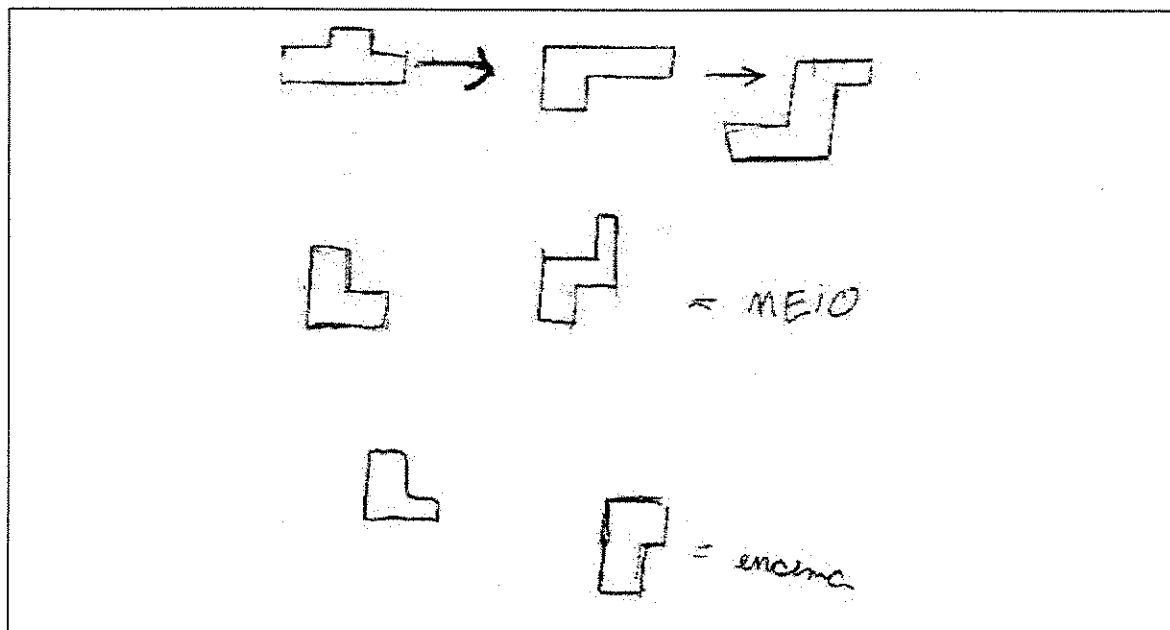


Figura 5.118 - Representação do grupo Liv, Bru, Ber, Thi, Mic.

Gutiérrez (1996b) diz que esse tipo de representação é feito de várias seções (cortes) horizontais do sólido, em certas alturas particulares, a fim de dar uma idéia das variações da forma e/ou do tamanho da parte mais baixa (os alunos indicaram como base os três primeiros desenhos da representação acima), passando pela segunda camada (denominada pelos alunos de meio) até o topo (chamada pelos alunos de encima), como mostram as representações reproduzidas abaixo:

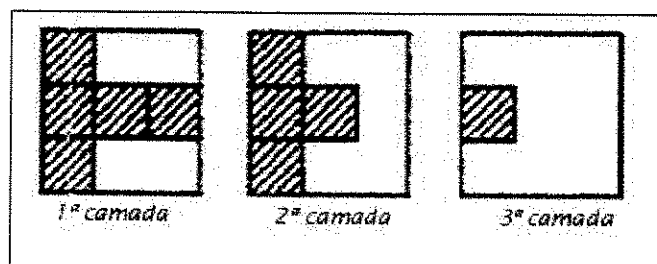


Figura 5.119 - Representação em camadas (Gutiérrez, 1996b, p.35, fig 3).

No registro feito pelo grupo dos alunos Mar, Dan, Isa, Ju, Mau e Sus (Figura 5.120), foi feita uma representação da posição das peças (indicadas com as letras que constavam nelas), identificando quatro das faces do cubo-soma.

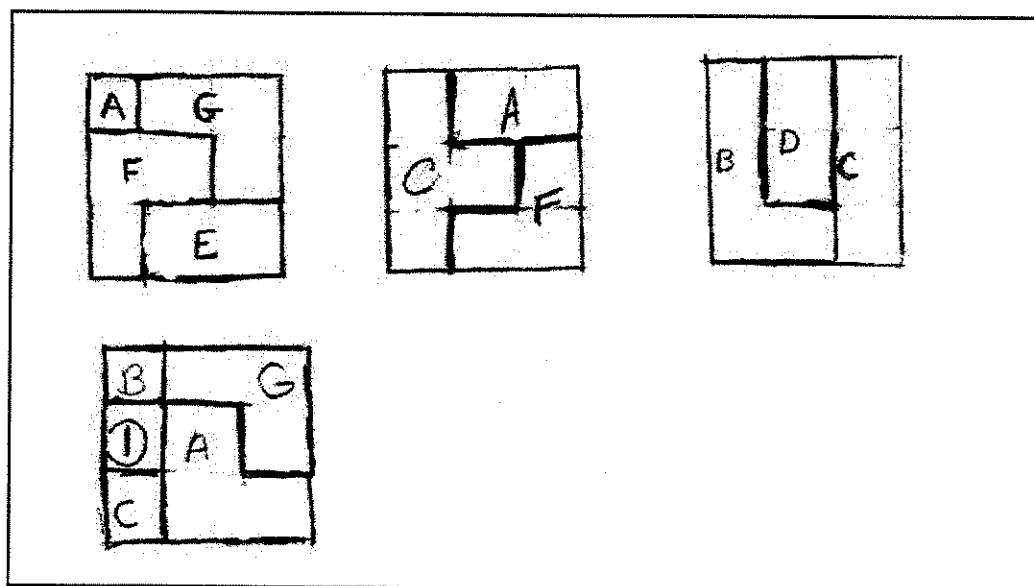


Figura 5.120 - Representação do grupo Mar, Dan, Isa, Ju, Mau, Sus.

Durante a análise e discussão a respeito da posição das peças indicadas pelo referido grupo, com os demais alunos da classe, foi possível encaixar perfeitamente as peças culminando na montagem do cubo-soma.

Esse tipo de representação é próximo da representação que Gutiérrez (1996b) chama de “*ortogonal*” ou de “*vistas laterais*”. Segundo o autor, a Figura 5.121 ilustra esse tipo de representação, o qual é muito usual em desenhos técnicos. Por exemplo, se o objeto a ser representado é um cubo, projetado ortogonalmente, cada projeção é uma das

suas vistas laterais. Em Geometria, segundo o autor, somente as vistas laterais são usualmente oferecidas: frente, cima, lados esquerdo e direito, se cada par de vistas opostas (frente/costas, cima/embaixo, direita/esquerda) forem simétricas.

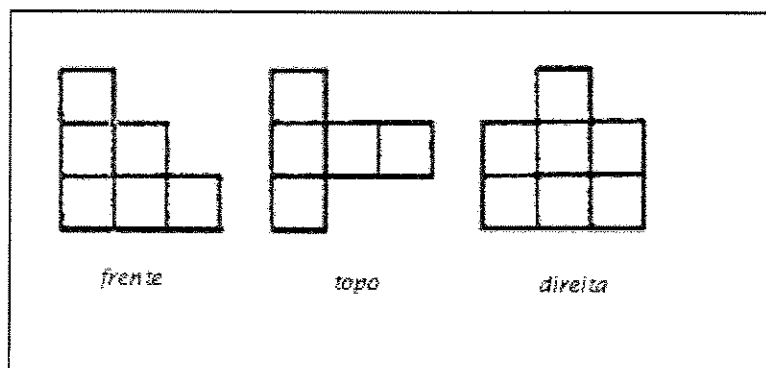


Figura 5.121 - Representação ortogonal ou vistas laterais.
(Gutiérrez, 1996b, p.35, fig. 4)

Na representação apresentada pelo grupo composto pelos alunos Deb, Eli, Luc, Hel e Mau (Figura 5.122), pôde-se verificar o uso de dois tipos de representações. Uma em “*perspectiva*” e outra em ilustração pictórica, com a identificação de cada uma das peças do jogo com cores diferentes. Essa informação pictórica apresentou uma certa característica da representação acima, porém não ortogonal. O colorido de cada uma das peças das vistas laterais (faces) permitiu a identificação delas e a montagem do cubo-soma.

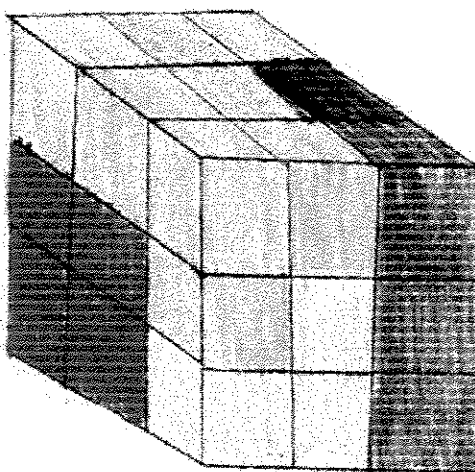


Figura 5.122 - Representação do grupo Deb, Eli, Luc, Hel, Mau.

Já a representação do grupo formado pelos alunos Mari, Gab, Mar, Liv, Jul e Isa (Figura 5.123) usou uma representação mista. Eles usaram tanto desenhos, com vistas “chapadas” de uma das faces das peças, com códigos, indicando os cubos que se sobrepunham nas peças, quanto a linguagem textual, que indicou como deveriam ser feitos os encaixes. Além disso, os alunos ordenaram a sequência dos procedimentos que deveriam ser seguidos para que se conseguisse a montagem do cubo-soma.

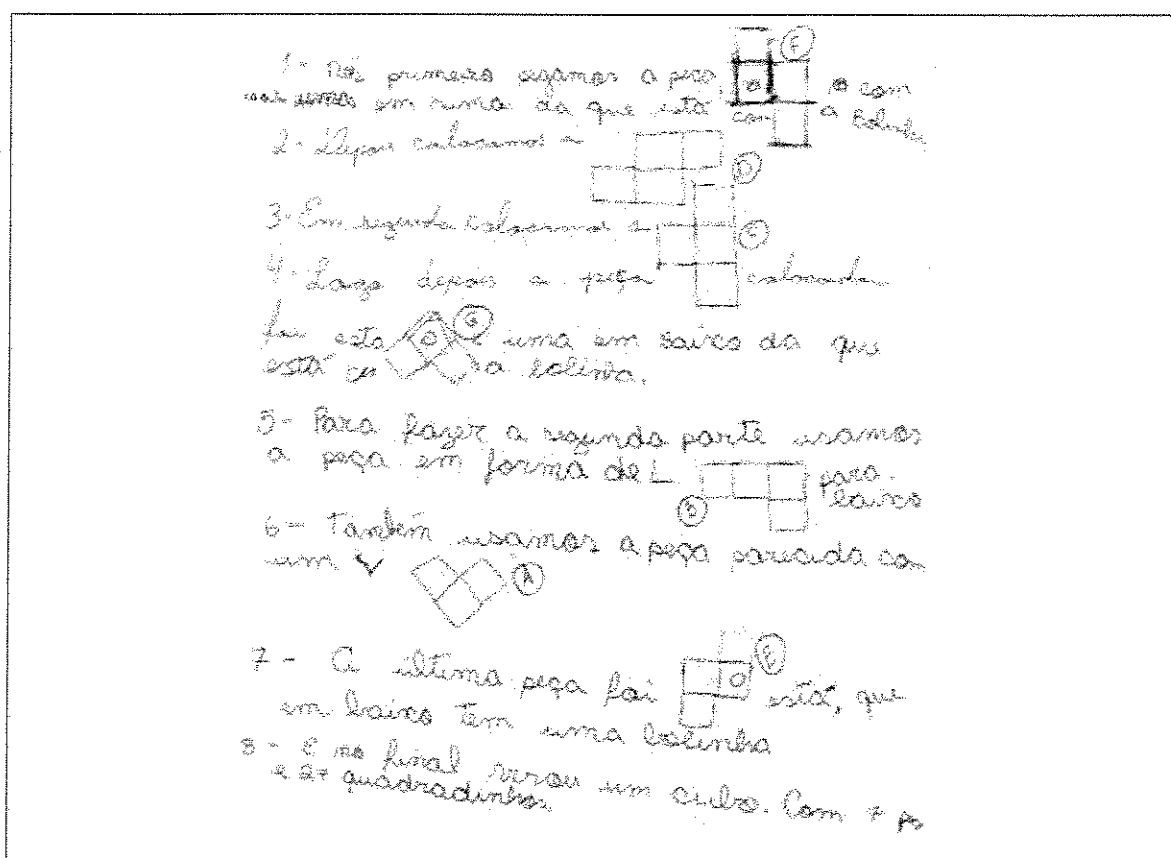


Figura 5.123 - Representação do grupo Mar, Gab, Mar, Jul, Isa.

A importância didática dessa atividade mostrou, para a presente investigação, que aprender a usar um tipo de representação plana de um objeto tridimensional requer uma dupla tarefa, isto é, os estudantes têm que aprender a desenhar representações planas dos sólidos dados e também construir sólidos de representações planas dadas.

Além disso necessitaram transmitir para o outro os procedimentos usados nessa construção.

Essas tarefas são consideradas complexas, pois solicitam muitos relacionamentos lógicos.

Cabe observar que as discussões a respeito dos registros dos procedimentos usados pelos grupos de alunos da escola A para a montagem do cubo-soma foram dirigidas pela pesquisadora.

É interessante notar que, de modo geral, os grupos mostraram-se críticos em relação aos registros dos procedimentos dos colegas, pois mesmo tendo conseguido efetuar cada uma das montagens, consideravam sempre que os procedimentos registrados pelo seu grupo estavam mais claros e mais fáceis de serem executados.

As considerações de Gutiérrez (1998) a respeito de representações planas de objetos tridimensionais foram importantes para a análise dessa parte da pesquisa. O referido autor ressalta que, atualmente, vários autores vêm investigando a capacidade do uso de representações planas por estudantes, e que alguns deles têm abordado a questão da aprendizagem de conceitos matemáticos, em contextos em que a capacidade de visualização desempenha um importante papel.

O referido autor menciona alguns pesquisadores, como Ben-Chaim, Lappan y Houang¹⁴⁵ (1994), Battista e Clements¹⁴⁶ (1996), os quais constataram as dificuldades dos estudantes do ensino primário em calcular a quantidade de cubos existentes em módulos “*multilink cubes*” – multicubos – com forma de prismas retangulares, representados em projeção paralela ou isométrica.

Segundo Gutiérrez (1998), outras investigações (Ricco, Vernaud e Rouchier¹⁴⁷, 1993) têm observado que, como consequência dessa dificuldade, os estudantes não

¹⁴⁵ Ben-Chaim, D., Lappan, G e Houng, R. T. (1985). *Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting student's performance*. In *Education Studies in Mathematic*, 16 (4), pp.389-409.

¹⁴⁶ Battista, M. T. e Clements, D. H. (1996). *Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), pp. 258-292.

¹⁴⁷ Ricco, G., Vernaud, G. e Rouchier, A. (1983). *Representation du volume et arithmétisation – Entretiens individuelles avec des élèves de 11 à 15 ans*. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1), pp.27-69.

compreendem perfeitamente o conceito de volume, fato esse que os leva a aplicar mal as fórmulas de para seu cálculo.

Noção de Volume de Paralelepípedo

Duas classes pesquisadas realizaram tarefas onde o volume de um sólido geométrico foi abordado, quais sejam, a classe da professora G, da escola B (pública) e a classe da professora L, da escola A (particular).

Depois das atividades de montagem do cubo, com as peças do cubo-soma, pelos alunos da escola A, a pesquisadora propôs um debate com os alunos com o objetivo de **investigar se eles conseguiriam chegar à generalização (ainda que usando o material concreto) da noção volume para qualquer paralelepípedo.**

Com uma caixa em forma de paralelepípedo, a pesquisadora perguntou-lhes o que teriam que fazer para calcular o volume daquela caixa.

Um dos alunos disse que só precisavam saber quantos cubinhos cabiam na caixa, fazendo referência à montagem do cubo-soma.

A pesquisadora perguntou se para isso precisaria colocar cubinhos na caixa até enche-la totalmente. Os alunos respondem negativamente, como Iza, que se encaminhou para o armário da classe e pegou do Material Dourado. Com um punhado de cubinhos, começou a colocá-los sobre uma das arestas de uma das faces, da caixa, dizendo:

— *“É só ver quantos cabem aqui, e aqui...”*, indicando com as mãos duas arestas perpendiculares da base da caixa.

A pesquisadora perguntou o que fazer com esses resultados. A classe respondeu que teriam que ser multiplicados.

Iza fez a “medição”, isto é, a contagem de quantos cubinhos eram necessários para cobrir totalmente as duas arestas em questão, concluindo que eram necessários dezesseis cubinhos para cada aresta (tratava-se de uma caixa com bases quadradas), tal como representado no esboço a seguir.

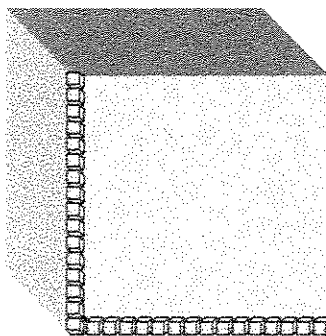


Figura 5.124 - Esboço do procedimento feito por Iza.

Diante disso, a professora da classe, que estava acompanhando a discussão entre a pesquisadora e a classe, pediu aos alunos que fizessem o cálculo necessário, isto é, que multiplicassem dezesseis por dezesseis.

Terminado o cálculo, os alunos disseram que o resultado era duzentos e cinquenta e seis; então, a professora perguntou para a classe se esse valor era o volume da caixa.

Os alunos disseram que não, respondendo imediatamente que “*é preciso saber quantas camadas*”. Em seguida, Iza novamente se dirigiu à mesa onde estava a caixa, e colocou mais sete cubinhos sobre o cubinho que unia as duas arestas cobertas pelos demais cubinhos, dizendo para a classe que seriam “*oito camadas de cubinhos*”.

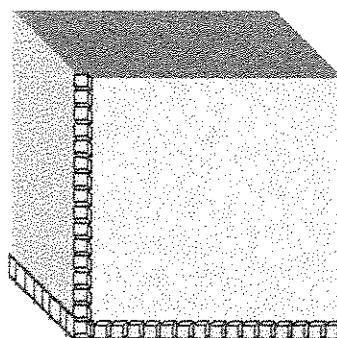


Figura 5.125 - Esboço do procedimento de Iza ao determinar a altura.

A partir daí eles efetuaram a multiplicação, do valor encontrado anteriormente, por oito, encontrando o número dois mil e quarenta e oito.

A professora explicou-lhes que essa medida de volume foi feita em cm^3 , porque cada lado do cubinho do Material Dourado tem 1cm de lado. Fez com eles uma discussão sobre o porquê da notação cm^3 , utilizando o quadro-negro para mostrar as três arestas de um cubo, como pode ser verificado na ilustração abaixo.

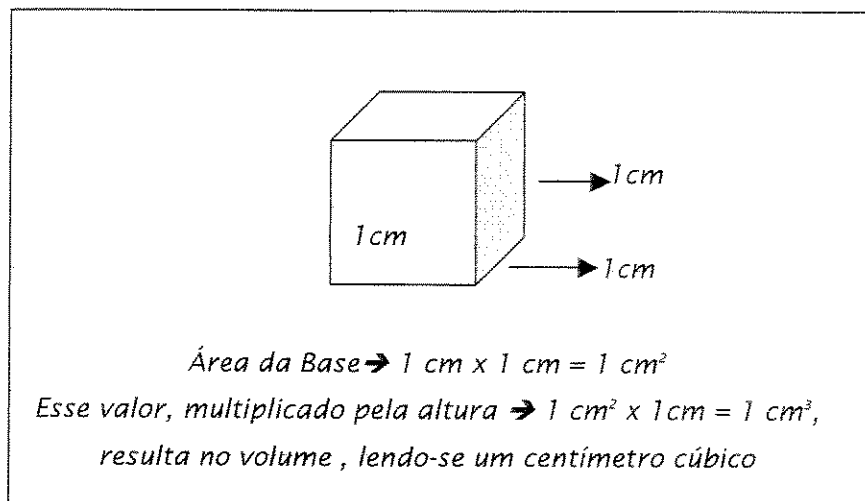


Figura 5.126 - Esboço da explicação da professora sobre cm^3 .

Durante a explicação, a professora L disse:

— “Para calcular o volume de uma caixa como aquela era preciso, sempre, saber a medida da área da base, para depois multiplicar pela medida de sua altura”.

Pode-se inferir que esses alunos conseguiram, progressivamente, organizar seus pensamentos de maneira lógica, combinando os elementos que haviam observado quando da montagem do cubo-soma com os elementos intrínsecos ao conceito de volume do paralelepípedo. Eles demonstraram ter percebido a relação existente entre os volumes de todos paralelepípedos, embora suas explicações e previsões ainda dependam de operações concretas, isto é, necessitem incidir diretamente sobre os objetos.

Com relação à abordagem do conceito de volume com os alunos da professora G, da escola B, destaca-se que a mesma ocorreu no final do ano letivo, quando a professora V, titular do cargo, retornou de uma licença. A aula que introduziu o conceito de volume foi preparada e desenvolvida por ela.

A professora V iniciou essa aula fazendo uma analogia. Comentou com os alunos que, certo dia, ao fazer compras no supermercado havia levado uma sacola para

colocar as compras, mas não pôde entrar com ela no local, pois o funcionário do supermercado pediu-lhe que deixasse a sacola no *guarda-volumes*. Em seguida, perguntou-lhes se sabiam o que era um *guarda volume*. Os alunos começaram a descrever situações em que haviam presenciado uma situação semelhante.

A professora V explicou-lhes que:

— “*Volume é o espaço que um objeto ocupa ou aquilo que cabe em um objeto, por exemplo, o volume de uma caixa de sabão é quanto de sabão em pó cabe na caixa, o volume de uma lata de refrigerante é quanto de líquido cabe na lata. O volume de uma caixa ou de uma lata pode ser descoberto fazendo-se alguns cálculos*”.

A professora sugeriu que os alunos usassem o Material Dourado para entenderem o volume do cubo.

Como eles já haviam trabalhado conceitos do sistema de numeração decimal com esse material, não tiveram dificuldade em concluir que o cubo maior do material possuía 1000 cubinhos. A professora V explicou que cada cubinho tinha as arestas medindo 1 cm de comprimento e desenhou, do mesmo modo que fez a professora L, da escola A, essa explicação no quadro-negro.

Ela explicou também o porque da representação cm^3 , fazendo um comentário sobre área e também sobre a altura do cubo, sem aprofundar a discussão.

Em seguida, a professora V perguntou qual seria o volume do cubo maior do Material Dourado, em cm^3 . Os alunos imediatamente responderam que seria de 1000 cm^3 .

Um dos alunos, pegando o material, sentiu-se motivado a explicar para a pesquisadora que:

— “*Uma placa possuía 100 cm^2 , para formar o cubo são necessárias 10 placas, (sobrepondo cada uma delas) 100 vezes 10 dá 1000, portanto são 1000 cm^3* ”.

É preciso notar que, com os alunos da professora V, a noção de volume cubo não foi estendida para os demais paralelepípedos.

Observando as anotações no quadro-negro e atento à mediação da professora, um dos alunos comentou:

— “Na minha casa tem uma piscina de lona com 3000 litros de água, então eu não preciso tirar litro por litro para saber se é isso mesmo? Se eu medir dos lados eu vejo?”

A professora V concordou com ele e complementou:

— “Isto mesmo, medindo o comprimento dos lados de qualquer recipiente é possível calcular o volume dele”.

Esse fato acabou culminando na abordagem da relação existente entre litro e centímetros cúbicos, que foi desenvolvida com essa classe.

Relação Litro/Centímetros Cúbicos

Aproveitando a intervenção do aluno da professora V a respeito do volume da piscina da casa dele, quando disse ter 3000 litros, a pesquisadora sugeriu que os alunos fizessem uma atividade empírica¹⁴⁸, **verificando se, ao colocar um litro de água em um recipiente cúbico cujas arestas medem 10 cm, a água vai derramar, vai faltar ou vai caber exatamente**. Com essa atividade buscou-se investigar como os alunos interpretavam a relação existente entre litro e centímetros cúbico.

A professora V também não sabia o que iria acontecer, portanto a pesquisadora encaminhou a atividade, utilizando uma garrafa de 1 litro e uma caixa cúbica, de plástico, cujas medidas internas das arestas eram de 10 cm. A primeira reação dos alunos foi a de dizer que iria derramar. Em seguida eles verificaram que 1 litro de água coube exatamente em um recipiente cúbico de 10 cm de aresta. Diante disso, a pesquisadora perguntou-lhes se era possível relacionar o volume da caixa com o volume do litro. Os alunos responderam que eram iguais.

A pesquisadora explicou para os alunos a relação existente entre o metro e o litro, dizendo que todas as demais unidades de medida também derivam do metro, sem enfatizá-las, contudo. Seguindo a sugestão da professora, os alunos fizeram no caderno uma representação sobre essa igualdade. Ela desenhou no quadro-negro um cubo indicando que as arestas eram iguais a 10 cm. Ao lado desse desenho, fez o esboço de

¹⁴⁸ Essa atividade foi desenvolvida somente com os alunos da professora V (escola B).

uma garrafa, indicando que a mesma possuía volume de 1 litro e indicou a igualdade entre os dois. A professora V solicitou que os alunos pesquisassem várias embalagens, observando como a capacidade era indicada, isto é, se em litro ou em metro cúbico. Ela combinou com os alunos que deveriam trazer essas embalagens para a classe no dia seguinte, quando seriam exploradas.

A pesquisadora ressaltou, naquele momento, que, assim como o metro possuía múltiplos, como o quilômetro, e submúltiplos, como o centímetro e o milímetro, o litro também possuía múltiplos e submúltiplos (mililitro), que são mais comuns de serem encontrados pois são usados para pequenas medições, como a capacidade de vidros de remédio, iogurte, etc.

Noção de Volume do Cilindro

Depois que os alunos da professora L, da escola A, encontraram o volume de um paralelepípedo, eles disseram que o cálculo de diferentes formas geométricas seria muito simples. Começaram a se referir a outras caixas existentes na classe, sendo que todas elas eram paralelepípedos.

Diante disso, a pesquisadora perguntou aos alunos se eles saberiam como calcular o volume de uma lata de refrigerante, cuja forma geométrica é de um cilindro. Os alunos disseram que era só saber quanto de água caberia dentro. Esse desafio deu início à abordagem de um novo conteúdo geométrico: **como calcular o volume de uma lata de refrigerante**¹⁴⁹.

Entretanto, para chegar até esse volume, mesmo com as noções que os alunos já possuíam a respeito do volume do paralelepípedo, seriam necessários outros conceitos que eles não possuíam, como, por exemplo, a **área do círculo**. Dessa forma, a pesquisadora propôs para a professora da classe iniciar uma discussão com os alunos a

¹⁴⁹ Essa atividade foi desenvolvida somente com os alunos da professora L (escola A).

respeito das **medidas de comprimento de uma circunferência**, do seu **diâmetro** e do seu **raio**¹⁵⁰. A professora se interessou muito em trabalhar a razão π (pi).

A aula foi iniciada com uma discussão sobre as unidades de medidas que aparecem nas embalagens de refrigerantes e demais líquidos. Os alunos observaram algumas das embalagens que foram trazidas para a classe e encontraram litro (*l*) e mililitro (*ml*). A professora explicou-lhes que mililitro era uma unidade de medida menor do litro, assim como o milímetro é do metro. Explicou também a relação $1\text{ l} = 1000\text{ ml}$.

A professora explicou para os alunos que todas as unidades de medidas foram estabelecidas a partir do metro, e que, portanto, havia uma relação entre todas elas. Sugeriu que a classe desenvolvesse uma atividade de pesquisa a respeito dessas relações. Os alunos, ao ouvirem essa sugestão, recordaram que já haviam estudado a história do metro, e um dos alunos, Gab, comentou:

—“O metro foi criado para que não houvesse confusão com as medidas dos palmos, dos pés, e para que todos tivessem uma medida igual”.

Comprimento da Circunferência

O objetivo dessa atividade era conduzir as discussões para o descobrimento da relação existente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, com os alunos da escola A¹⁵¹. Pretendia-se **investigar se os alunos iriam perceber a existência da constante π (pi), que é razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro**.

Cada aluno escolheu um objeto que tivesse forma arredondada entre objetos existentes na classe, como sucatas em forma cilíndrica, pratos, tampas de potes, uma panela e representações de sólidos geométricos (cone, esfera, cilindro).

¹⁵⁰ Raio de uma circunferência é um segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência.

¹⁵¹ Esta atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora L (escola A).

A primeira tarefa proposta pela pesquisadora foi que os alunos fizessem o desenho do contorno da face plana do objeto escolhido, isto é, fizessem o decalque do comprimento da circunferência relativa à base do objeto que cada um haviam escolhido.

Nesse momento, o aluno Mau, que havia escolhido a *esfera*, não conseguiu desenhar o que havia sido solicitado. Observando atentamente a esfera ele demonstrou ter ficado intrigado com sua forma. A professora disse para ele “*parar de graça*”, pois escolheu um objeto que não tinha a face plana, portanto, deveria trocá-lo por outro objeto. Ele pegou um tubo cilíndrico; entretanto, não devolveu a esfera para o conjunto de objetos que estava sobre a mesa da professora. Ficou observando atentamente a esfera e fez uma pergunta muito interessante, demonstrando uma curiosidade sobre um saber científico que também intrigou muitos geômetras na história.

— “*Como foi possível alguém medir a Terra se não dá para andar ao seu redor?*”

A professora não reparou no questionamento feito pelo aluno. A não observância desse fato pode ter sido pelo fato dela não ter percebido a relevância da questão, ou mesmo por não ter conhecimento histórico da Geometria a respeito do assunto; o que não pode ser considerado um despreparo da professora, já que, como foi observado anteriormente, os cursos de formação de professores, em geral, não possibilitam um amplo conhecimento geométrico, muito menos de aspectos históricos da Geometria.

O aspecto histórico da Geometria, considerado nesta pesquisa no Capítulo 2, pode desempenhar um importante papel no processo ensino-aprendizagem, possibilitando aos alunos compreender as diferentes formas com que diferentes conceitos geométricos foram desenvolvidos ao longo da história.

A pesquisadora, aproveitando o questionamento do aluno, respondeu-lhe que os matemáticos, que viveram antes de Cristo, já haviam encontrado a medida do comprimento da circunferência da Terra e que, uma das descobertas mais chocantes relacionadas ao planeta Terra, foi a que ela apresenta a forma de uma esfera, pois, antes disso, acreditava-se que era plana. Explicou-lhe, também, que um matemático grego, Erastóstenes, utilizou métodos de observação e comparação de triângulos, determinando

o comprimento da circunferência da Terra. A pesquisadora sugeriu que ele pesquisasse mais sobre esse tema.

Diâmetro e Raio da Circunferência

Os alunos fizeram o contorno da face circular do objeto que tinham em mãos. Depois, a professora L explicou-lhes que o contorno que eles desenharam representa a **circunferência** e que o **círculo** é toda a superfície ocupada pela circunferência.

A pesquisadora perguntou para a classe da escola A, como eles já haviam estudado a circunferência, se saberiam dizer o que era **diâmetro** e o que era **raio**.

Percebendo uma certa confusão entre os termos usados pelos alunos, por exemplo, dizendo “diagonal”, ao se referirem ao diâmetro, a pesquisadora desenhou no quadro-negro uma circunferência explicando-lhes o que são diâmetro e raio de uma circunferência¹⁵².

Em seguida, perguntou-lhes se saberiam encontrar o diâmetro da circunferência que eles desenharam fazendo o contorno da base dos objetos.

Um dos alunos disse que era só traçar uma reta. Outro corrigiu:

— “*Como vou saber se está bem no meio?*”

Com as reações dos alunos, discutindo como encontrar o meio de um círculo, e como a professora não interferisse nessa discussão, a pesquisadora sugeriu que eles encontrassem o diâmetro por dobradura, isto é, fazendo uma dobra no papel, bem no meio do círculo desenhado, procurando juntar os arcos dos dois semicírculos. Feito isso, pediu-lhes que traçassem, com lápis e régua, o segmento de reta que representava o diâmetro.

Em seguida, a pesquisadora pediu-lhes que medissem o comprimento desse segmento. Assim que mediram esse comprimento, os próprios alunos disseram que já sabiam calcular o raio do círculo desenhado:

— “*É só dividir por dois*”.

¹⁵² Esta discussão aconteceu apenas com os alunos da professora L (escola A).

Diante do desafio de medir o comprimento da circunferência, um dos alunos disse:

— “*Se tivéssemos uma régua redonda...*”

Outro aluno propõe o uso do “*centímetro*”, referindo-se ao termo como a fita métrica, instrumento de medida usado pela costureira, é conhecido. Como não havia esse instrumento na sala de aula, a solução apresentada pelos próprios alunos foi a de usar um pedaço de barbante e em seguida descobrir a medida em centímetros, comparando com a régua graduada.

Eles circundaram o objeto com um barbante e cortaram o pedaço exatamente correspondente ao comprimento da circunferência; em seguida, prenderam esse pedaço com fita adesiva em uma folha de papel e fizeram as medições, em centímetros, com a régua graduada.

Depois que todos haviam feito as medições, a professora L sugeriu que os dados obtidos fossem organizados em uma tabela no quadro-negro como a seguinte:

<i>Objeto</i>	<i>C = Comprimento da circunferência (em cm)</i>	<i>d = Comprimento do diâmetro (em cm)</i>

Figura 5.127 – Tabela desenhada no quadro-negro.

Razão π

Todos os alunos da escola A completaram as três colunas da tabela, desenhadas no quadro-negro, com os dados encontrados nas medições. Em seguida, a pesquisadora solicitou que eles fizessem a divisão do comprimento da circunferência pelo comprimento do diâmetro, anotando os resultados ao lado de cada linha na tabela¹⁵³.

¹⁵³ Essa atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora L (escola A).

O cálculo foi efetuado com o uso de calculadora. Ressalta-se que os alunos logo perceberam que a calculadora não possuía a vírgula, que separa os inteiros dos decimais, e começaram a questionar o porquê. Nesse momento, a professora L explicou-lhes que, no Brasil, usa-se uma vírgula para separar a parte inteira do número, da parte decimal, e que, nos Estados Unidos, é usado o ponto, e que as calculadoras obedecem a esse padrão.

Os dados encontrados na divisão foram incorporados aos dados existentes na tabela, como aparecem ilustrados na tabela feita por Eli (Figura 5.128).

Objeto	cm Comprimento da circunferên- cia	cm Comprimento do diâmetro	C:d
E. filme	10,5	3,5	3 x
fita adesiva	29,8	9,1	3,27
E. presente	24	7,7	3,11
E. filme	10,5	3,5	3
fita crepe	36	10,5	3,14
apontador	13	4,1	3,17
E. Wiské	30,5	9,5	3,21
tampa presente	25,8	8,0	3,2
tampa panela	65,5	21	3,11
copo	33,5	10,3	3,25

Figura 5.128 - Tabela feita por Eli.

Logo após o preenchimento desses dados nas primeiras linhas da tabela, alguns alunos começaram perceber a regularidade que estava ocorrendo. Percebendo a regularidade apresentada os alunos ficaram intrigados com o fato, o que pode ser observado na fala da aluna Liv.:

— “Se os números que estão sendo divididos são diferentes, como pode dar tudo três e alguma coisa?”

Quando um dos resultados deu 4,2 (Dan, que estava trabalhando com cilindro de papelão mediu o diâmetro errado, e quando fez 13,8 – medida do comprimento da circunferência – dividido por 3,28 – medida incorreta do comprimento do diâmetro – encontrou, 4.2), os alunos estranharam e começaram a questionar se o colega havia feito

a medição e os cálculos corretos. Alguns alunos foram até a carteira de Dan para conferir a divisão. Depois, conferiram as medições no objeto, verificando a incorreção.

A pesquisadora explicou para a classe que a **percepção de regularidade existente entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro** também ocorreu com matemáticos que, antes de Cristo, já haviam determinado essa constante, isto é, o valor aproximadamente 3,14. Explicou-lhes também que esse valor constante recebe um nome específico em Matemática, isto é, o nome de uma letra grega π , cuja leitura é *pi*. Ainda sobre o valor de π , a pesquisadora disse para a classe que o mesmo trata-se de um número decimal, não exato, que tinha infinitos algarismos nas ordens decimais e sem uma sequência. Explicou-lhes também que muitos pesquisadores matemáticos, com a ajuda de computadores, encontraram milhares de algarismos após a vírgula, sem encontrar nenhuma regularidade entre eles (nenhum tipo de repetição).

Como a atividade proposta, inicialmente, para os alunos da escola A, era o cálculo do volume da lata de refrigerante, esses encaminhamentos foram feitos para atingi-lo, sem recorrer ao uso de fórmulas.

Nesse sentido, dando prosseguimento a esse intento, foi feita uma nova proposta: calcular a área da superfície do círculo que os alunos estavam usando.

Área do Círculo

Nessa proposta da pesquisadora **procurou-se identificar nas representações dos alunos como eles iriam relacionar a área do círculo com a área das demais figuras geométricas**¹⁵⁴.

A professora L perguntou aos alunos o que fazer para encontrar a área da superfície de um retângulo. Os alunos respondem que era só multiplicar lado pelo lado (eles já haviam feito cálculos de área dessa figura).

— “*E no caso do círculo, como deveríamos proceder?*” — perguntou a professora para a classe.

¹⁵⁴ Essa atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora L (escola A).

Os alunos não tinham idéia do que fazer e, de certo modo, a professora também, pois solicitou ajuda da pesquisadora para desenvolver essa atividade.

A pesquisadora entregou para cada um dos alunos um disco de papel, previamente recortado, perguntando-lhes se eles tinham alguma idéia de como encontrar a área daquele círculo. Diante da negativa, ela propôs uma estratégia para encontrar a área do círculo a partir da sua divisão em setores¹⁵⁵ iguais. Assim sendo, pediu que os alunos dividissem o círculo ao meio, pelo diâmetro, e em seguida, decompussem cada semicírculo em quatro setores de mesmo tamanho.

Com esses oito setores, sugeriu que os alunos formassem uma nova figura, colocando, lado a lado quatro dos setores encontrados, como seguir:

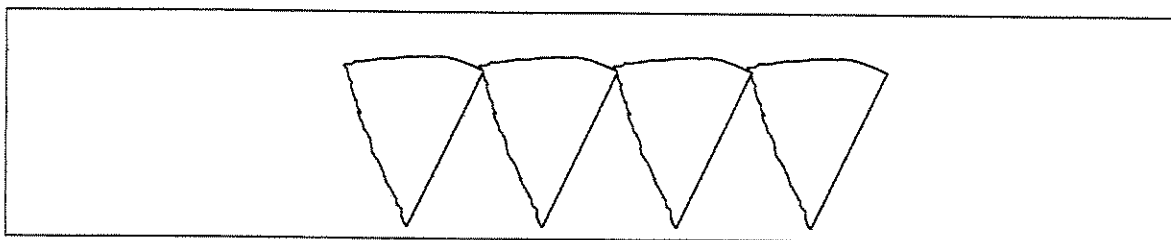


Figura 5.129 - Representação da composição feita com quatros setores de um semicírculo.

Em seguida, pediu que eles encaixassem os outros quatro setores da forma apresentada abaixo, e fizessem a colagem das peças no caderno.

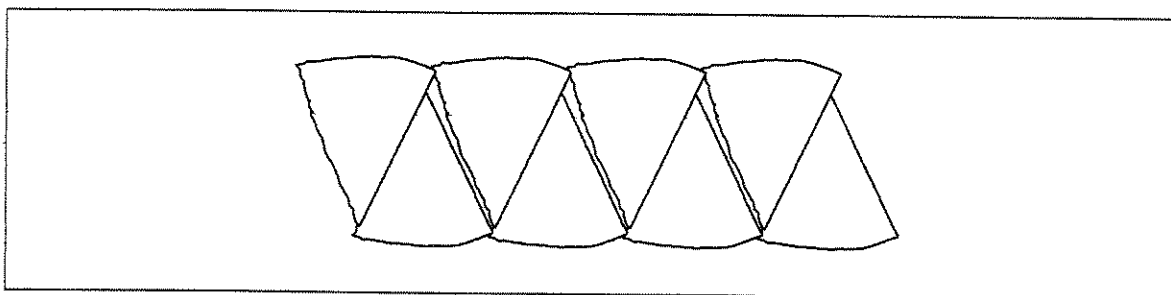


Figura 5.130 - Representação da configuração com setores dos dois semicírculos.

¹⁵⁵ Setor de um círculo é a porção do círculo compreendida entre dois raios e o arco que os mesmos interceptam.

Enquanto realizava a colagem, Gab percebeu que está formando uma figura conhecida, e disse ao colega do lado:

— “*Parece com retângulo*”.

A pesquisadora pediu que ele repetisse para a classe o que havia comentado com o colega. A pesquisadora completou, dizendo que, se cada um daqueles setores fosse dividido em partes cada vez menores, e estas encaixadas da forma como estavam fazendo, a figura formada estaria muito próxima da figura do retângulo. Em seguida, desenhou no quadro-negro a figura mencionada, debatendo com os alunos a respeito de cada uma de suas partes, identificando as transformações.

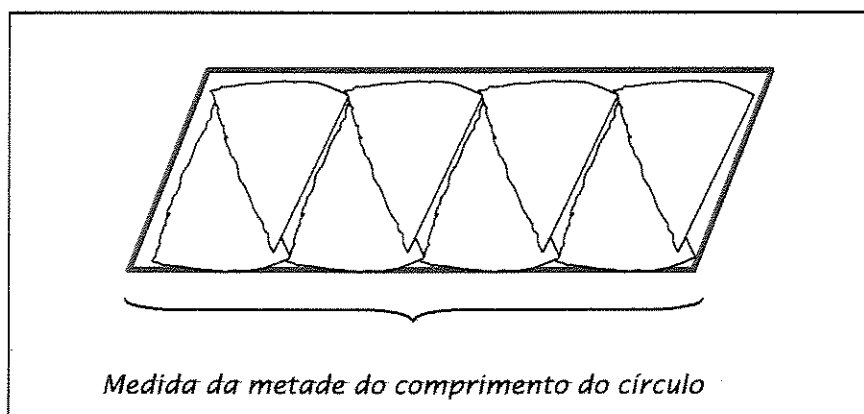


Figura 5.131 - Representação da figura desenhada no quadro-negro.

Em seguida, a pesquisadora mostrou para a classe o que aconteceria se os setores fossem ficando cada vez mais estreitos, fazendo representações no quadro-negro até conseguir chegar próximo de um retângulo.

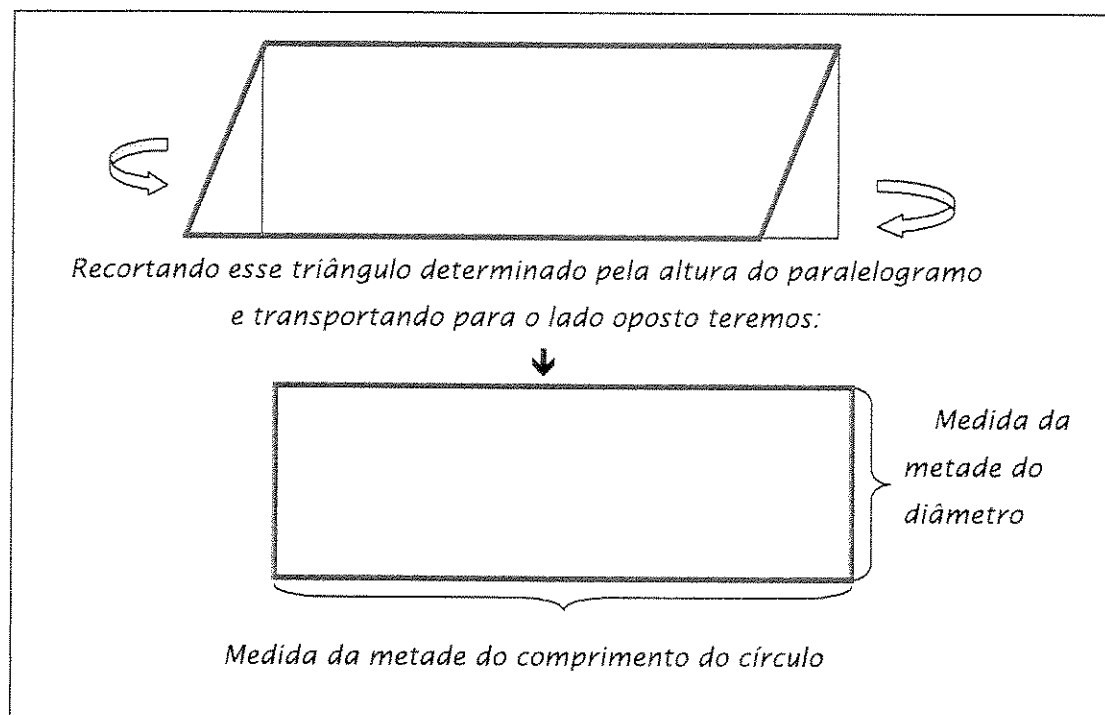


Figura 5.132 - Representação do esquema de transformação do paralelogramo em retângulo.

Depois disso, os alunos consideraram que já tinham meios de encontrar a área do círculo, cuja circunferência haviam desenhado na folha de papel. Para tanto, bastava-lhes dividir por dois os comprimentos da circunferência e do diâmetro encontrados, e multiplicar os resultados obtidos.

Uma aluna da escola A, demonstrando estar refletindo sobre o que havia sido feito, isto é, sobre os procedimentos desenvolvidos até então, e sobre a maneira de encontrar a área de um círculo usando a decomposição de figuras, perguntou:

— “... É, mais o que isso tudo tem a ver com π ? Por que tivemos que encontrar o π se não serviu para nada?”

A professora não respondeu; então, a pesquisadora explicou-lhes que não são em todas as situações que os comprimentos da circunferência e do diâmetro podem ser medidos para se calcular a área de um círculo e, nesse caso, alguns cálculos relacionando esses dados e o valor de π são feitos, possibilitando encontrar a área desejada, pois existe uma relação entre eles. Mesmo com a explicação da pesquisadora,

usando o quadro-negro para mostrar as relações existentes, os alunos demonstraram não terem percebido qual a relação existente entre a área do círculo e o π , pois se tratava de um conteúdo que exige que o sujeito estabeleça relações complexas, próprias de um nível de desenvolvimento que os alunos ainda não haviam atingido.

Entretanto, eles disseram que seriam capazes de achar a área do círculo que haviam desenhado, pois perceberam a relação feita com a atividade de decomposição de um círculo qualquer, sem o auxílio da constante π .

Destaca-se que, mesmo não tendo atingido um nível de abstração necessário para compreenderem a relação ali existente, alguns dos alunos demonstraram entender que existia, de fato, um modo de se fazer cálculos, onde alguns dados não eram possíveis de se encontrar com medições, mas que não tinham interesse em compreendê-la naquele momento. Um exemplo disso, foi a participação de Mar, o aluno que ocasionou a discussão sobre o comprimento do diâmetro da Terra, que, com a esfera na mão, explicou para os colegas:

— *“É lógico! Se não fosse assim... como seria possível saber o comprimento da Terra e de outros planetas? Ninguém ia sair por aí com um barbante medindo...”*

Novamente o aluno fez um comentário a respeito do que lhe havia chamado atenção, contribuindo para que os demais alunos conseguissem entender os desdobramentos da atividade.

O desenvolvimento da atividade permitiu que os alunos percebessem como podia ser feito o cálculo da área de um círculo, sendo conhecidos o diâmetro e o comprimento da circunferência. Além disso, eles perceberam que existia uma maneira de se encontrar a área de um círculo mesmo desconhecendo-se alguns desses dados; entretanto, ainda não conseguiram entender como se daria esse processo.

Após essa discussão, os alunos levaram para casa a tarefa de calcular a área do círculo que haviam desenhado, a partir do cálculo do comprimento da circunferência e do diâmetro que já tinham determinado. Para isso, a professora organizou, no quadro-negro, uma sequência de questões que eles deveriam responder: 1) *Qual é a metade do comprimento da circunferência?* 2) *Qual é a metade do comprimento do diâmetro?* 3) *Qual é a área do círculo determinado pela sua circunferência?*

A maioria dos alunos fez a tarefa pedida, com relativo sucesso, como pode ser observado no trabalho de Bru:

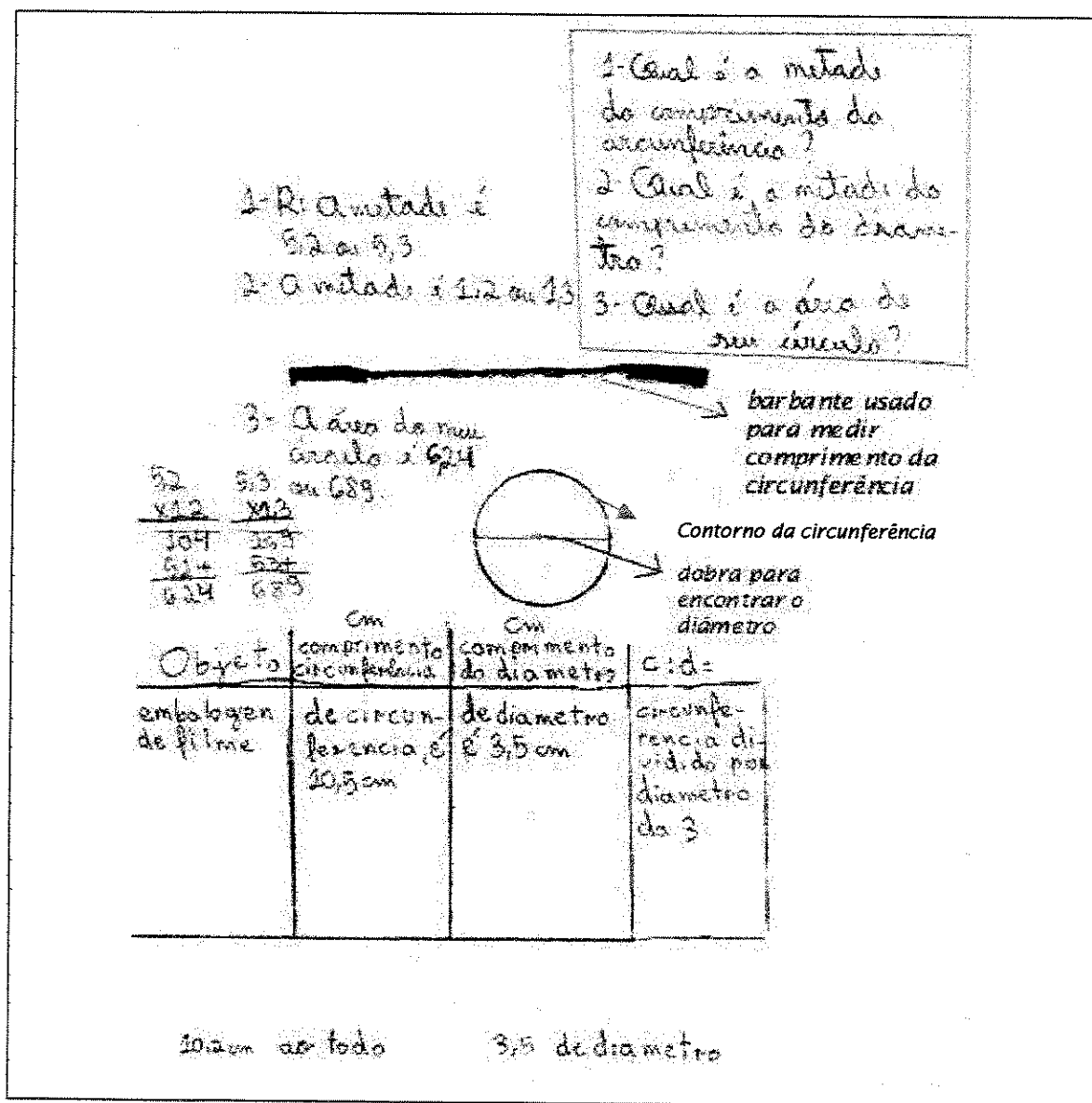


Figura 5.133 - Trabalho feito pelo aluno Bru.

Nas duas sextas-feiras seguintes não houve aula na escola (dia da pesquisa), devido a um acidente ocorrido com os alunos. Desse modo, na última sexta-feira do mês de novembro, não foi possível dar continuidade às atividades que geraram as últimas discussões com os alunos da professora L. Dessa forma, não foi possível determinar o

cálculo do volume de uma lata de refrigerante. O último encontro entre a pesquisadora e a classe também era o último letivo, portanto, a professora estava entregando os materiais/trabalhos para os alunos levarem para casa, encerrando as atividades letivas com a classe. Infelizmente, o volume do cilindro não pode ser trabalhado com a classe.

Composição e Decomposição de Figuras Planas

Como já abordado anteriormente, a professora S, da escola C, é quem propôs as atividades que foram desenvolvidas com seus alunos.

Nessa aula ela propôs atividades geométricas de **composição e decomposição de figuras planas a partir da manipulação das peças do quebra-cabeça Tangram**¹⁵⁶, as quais permitiram investigar como os alunos procediam quando realizavam esse tipo de tarefa.

Os alunos já haviam feito a construção do quebra-cabeça antes do início dessa pesquisa, conforme descrito anteriormente; portanto a utilização do material já representava uma prática conhecida para a classe.

A professora S afixou um cartaz na lousa no qual aparecia um barco montado com as peças do Tangram, como o ilustrado na figura abaixo, solicitando que os alunos fizessem essa construção, com as suas peças, sobre uma folha de papel.

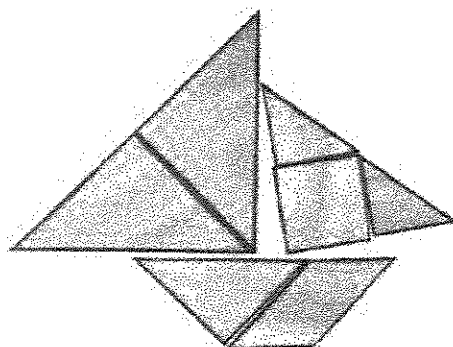


Figura 5.134 - Montagem do barco com as peças do Tangram.

¹⁵⁶ Essa atividade foi desenvolvida somente com os alunos da professora S (escola C).

Durante a montagem do barco pôde ser observada a dificuldade que alguns alunos apresentaram na tarefa, mesmo podendo observar o desenho do barco, onde os lugares de cada peça apareciam demarcados, conforme pode ser observado na figura anterior. Um dos alunos necessitou da ajuda da professora que indicou-lhe a sequência da colocação de cada uma das peças para a montagem da figura e os movimentos necessários que teria que fazer.

Nessa sequência a professora disse:

— *“Pegue as peças que estão formando a parte de baixo do barco”.*

— *“Como elas estão colocadas no desenho”?*

— *“Coloque-as como no desenho. O desenho que você montou se parece com o da lousa”?*

O aluno respondeu afirmativamente. A professora continuou:

— *“Agora pegue as peças da vela do barco que fica à direita. Quantas peças são? Como é a forma dessas peças”?*

O aluno respondeu:

— *“São dois triângulos”.*

A professora continuou a intervenção:

— *“Junte-as como no desenho da vela do barco. Que figura formou”?*

— *“Outro triângulo”.* Respondeu o aluno.

A professora ressaltou:

— *“Você viu que como dois triângulos iguais é possível formar um outro triângulo”?*

O aluno balança a cabeça, concordando com a professora, que lhe perguntou:

— *“E agora, quais as peças que formam a outra vela”.*

— *“As que sobraram”.* Respondeu o aluno.

— *“Então, coloque-as como no desenho para forma o triângulo da outra vela”*, pediu a professora.

Alguns dos alunos demonstraram não saber antecipar qual a peça inicial, e qual posição ela deveria ocupar na figura, necessitando experimentar várias peças e, em cada tentativa, rotacioná-las várias vezes até encontrarem a solução. Nesse caso, eles

demonstram dificuldade em visualizar a posição de uma figura no plano a partir do modelo apresentado.

Um dos alunos necessitou do auxílio de um colega. Mesmo com o modelo da professora e com a montagem do barco completada por um de seus colegas, não conseguiu identificar, prontamente, qual peça deve compor em cada uma das partes do barco. Ele experimentou várias vezes, sem sucesso; então, seu colega separou as peças que deveriam ficar juntas, indicando, em separado, como elas ficariam na sua montagem.

Só depois que toda a classe conseguiu montar o barco, a professora pediu que os alunos fizessem o contorno de cada uma das peças; alguns fazem também ilustrações ao redor do barco.

A dificuldade de antecipar como a peça ficaria após um movimento de transformação geométrica, como translação, rotação e reflexão, foi demonstrada por alguns alunos da classe. Nesse caso, a professora comentou com os alunos que para se montar um quebra-cabeça como aquele era preciso movimentar as peças, mudando a posição delas para que se encaixassem corretamente.

Para fixação desse tipo de abordagem, a professora preparou outros tipos de configurações com as peças do Tangram e trabalhou, em outros momentos, com os estudantes.

Classificação das Peças do Quebra-Cabeça Tangram

Em um outro momento, a professora S pediu para os alunos **separarem as peças do Tangram, formando dois grupos, segundo um critério que eles determinassem**¹⁵⁷. Explicou-lhes que, para as peças estarem no mesmo grupo, deveriam ter as mesmas características, isto é, deveriam ter atributos comuns. Segundo explicou a professora para a pesquisadora, sempre que possível, ela pedia que os alunos fizessem

¹⁵⁷ Essa atividade foi desenvolvida somente com os alunos da professora S (escola C).

algum tipo de classificação, a que era discutida com a classe, a partir dos critérios estabelecidos pelos alunos.

Dois critérios diferentes foram usados pelos alunos. A professora S escreveu esses dois critérios no quadro-negro, explicando cada um deles para a classe.

No primeiro critério, em um grupo ficariam os cinco triângulos e no outro o quadrado e o paralelogramo.

Ela perguntou aos alunos que usaram tal critério o motivo dessa escolha. Um dos alunos respondeu que o motivo foi o das peças que são parecidas. Ela perguntou:

— *“Como são parecidas? O que significa serem parecidas?”*

— *“Aqui estão os triângulos, de três lados e no outro, os de quatro lados”.*

Respondeu um dos alunos.

A professora perguntou-lhes se os triângulos eram iguais. Os alunos responderam negativamente, mas que eram parecidos, de tamanhos diferentes. Em seguida perguntou-lhes o que o quadrado e o paralelogramo tinham em comum para ficarem no mesmo grupo. Um dos alunos respondeu:

— *“Os lados correm juntos”.*

A professora pediu que ele explicasse melhor. Então o aluno, segurando o quadrado, mostrou os lados paralelos, indicando-os com os dedos, e disse:

— *“Eles seguem juntos”.*

Ao fazer essa indicação, os alunos estão referindo-se aos lados paralelos da figura. Com essa explicação, pode-se perceber que a classe já havia trabalhado a noção de paralelogramo, como sendo um polígono de quatro lados, cujos lados opostos são paralelos.

A professora explicou para a classe que, apesar dessas duas figuras terem as mesmas características, como o número de lados e dois pares de lados paralelos, elas não eram iguais. Um dos alunos complementou:

— *“No paralelogramo, os dois lados maiores são iguais e dois menores também. No quadrado, os quatro lados são iguais”.*

No segundo critério estabelecido por alguns alunos da classe, em um grupo ficaram as figuras que eles consideraram maiores (os dois triângulos grandes, e o

CONSIDERAÇÕES FINAIS

triângulo médio), e, no outro grupo, as menores (o quadrado, o paralelogramo e os dois triângulos pequenos).

A professora escreveu na lousa esse segundo critério, descrevendo e mostrando cada uma das figuras. Em seguida solicitou que os alunos comparassem o tamanho de cada uma das peças, colocando sempre uma sobre a outra, para que pudessem verificar se realmente a maneira com que as peças foram classificadas estava correta.

Os alunos concluíram que a classificação por “tamanhos” não era a mais indicada, pois não podiam separar as peças do jogo por esse critério, em dois grupos, como tinha sido a proposta da professora.

Desse modo, com o critério – tamanho –, estabelecido por uma parte dos alunos da classe, no grupo das peças maiores estariam somente os dois triângulos grandes, que têm o mesmo tamanho; no grupo das peças menores estariam os dois triângulos pequenos, que têm tamanhos iguais; e, com isso, deveria haver um outro grupo, intermediário, para as peças de tamanho médio: o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio, com tamanhos iguais. Com isso, eles perceberam que esse critério não era conveniente para uma classificação em dois grupos.

Cabe notar que a professora conseguiu perceber que no segundo critério havia incorreções, e interferiu, satisfatoriamente, procurando levar os alunos a refletirem sobre suas ações, percebendo os erros cometidos. Além disso, a intervenção da professora permitiu a exploração de noções de medida (no caso de superfície), já que possibilitou aos alunos compararem as peças usando outra como referência.

Composição de Peças do Tangram Usando Outras Peças do Jogo

Aproveitando a discussão ocasionada com o tamanho das peças do quebra-cabeça, a professora S₁ da escola C, propôs que os alunos fizessem a seguinte atividade: *“Como podemos usar os triângulos pequenos para montar o quadrado, o paralelogramo e o triângulo?”*¹⁵⁸

¹⁵⁸ Essa atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora S (escola C).

Como eles haviam percebido na atividade anterior que o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo tinham o mesmo tamanho, apesar de terem formas diferentes, pois nas três figuras cabem exatamente dois triângulos pequenos, eles representaram esse entendimento com as peças, como ilustrado abaixo:

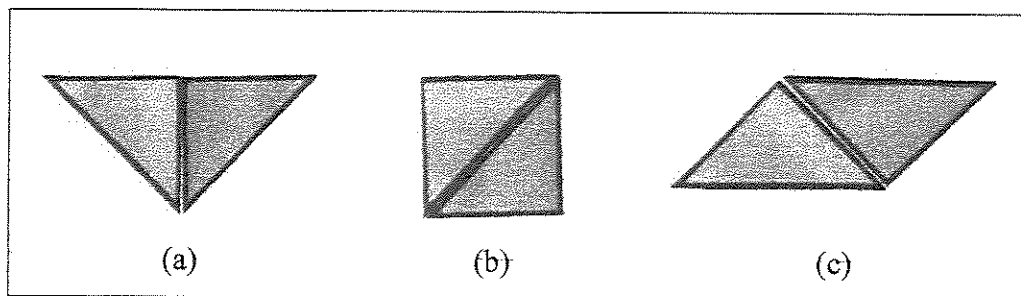


Figura 5.135- Figuras do Tangram formado por duas peças.

Durante a intervenção da professora no desenvolvimento da atividade, não foi mencionada a palavra área. Ela referia-se ao *tamanho da superfície das peças*, o que indica que o objetivo da professora era que os alunos pudessem refletir sobre o critério estabelecido por eles na atividade anterior.

Depois dos alunos terem montado as peças sugeridas na atividade, a professora S pediu que eles fizessem os seus contornos no caderno, escrevendo ao lado de cada peça que o seu tamanho era equivalente ao de dois triângulos pequenos juntos, deixando explícita a comparação entre as medidas das áreas.

Em seguida a professora propôs outro desafio: ***“Há alguma peça do Tangram que pode ser recoberta por outras três peças do quebra-cabeça?”***

Os alunos começaram a experimentar várias formas, e concluíram que o uso de três peças para formar outra só seria possível se usassem os dois triângulos pequenos com o quadrado, ou com o triângulo médio ou com o paralelogramo. Desse modo, eles fizeram as composições possíveis, formando um triângulo grande. A professora S fez com a classe um comentário a respeito de cada uma das composições e pediu que eles registrassem no caderno o que haviam encontrado, tal como feito pela aluna Ste, e que aparece ilustrado abaixo:

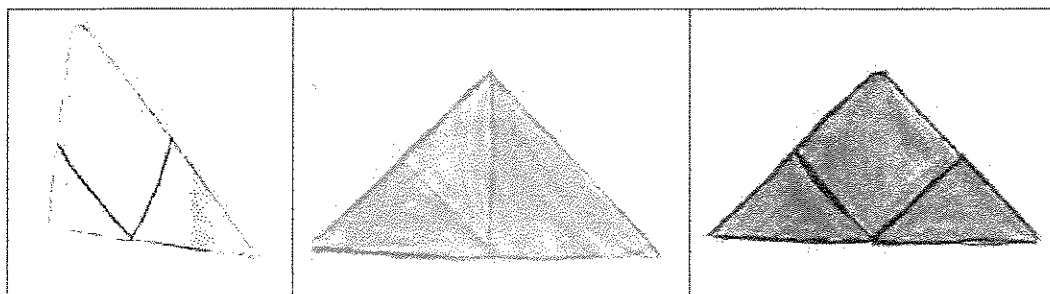


Figura 5.136 - Peças do Tangram com três peças do jogo.

A professora explicou-lhes também que, se eles usassem um dos triângulos grandes e outras duas peças quaisquer, não seria possível montar outras peças do Tangram, mostrando com as peças do jogo essa impossibilidade, visto que a composição resultante teria formas e tamanhos diferentes das peças do jogo.

Simetria

A professora S da escola C explicou para a pesquisadora que a próxima atividade com o Tangram seria desenvolvida para verificar se as peças possuíam eixo de simetria, isto é, se eram simétricas¹⁵⁹. Ela justificou a importância desse conceito e que deveria ser trabalho no Ensino Fundamental citando as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997).

Entretanto, como os alunos nunca estudaram nada a respeito, ela **introduziria a noção de simetria**¹⁶⁰ a partir de outras atividades. Desse modo, distribuiu para cada aluno uma folha (Figura 5.137), na qual encontravam-se várias figuras, solicitando que os alunos recortassem cada uma delas nas linhas tracejadas. Em seguida, os alunos deveriam dobrar as figuras resultantes ao meio, no sentido vertical do desenho.

¹⁵⁹ Essa atividade foi desenvolvida apenas com os alunos da professora S (escola C).

¹⁶⁰ Simetria é uma das propriedades de figuras geométricas que se mantém constante mediante algumas transformações que não alteram as relações métricas, mas alteram a posição dos elementos que a constitui. Nesse caso, a professora referiu-se à simetria axial, que consiste em uma figura com eixo de simetria, o qual divide-a em duas partes que podem ser sobrepostas

Isso feito, ela solicitou que eles observassem aquelas que ficaram com as duas partes iguais, separando desse conjunto, as que não apresentassem essa característica. Pediu que os alunos passassem um traço vermelho na linha que ficou definida pela marca da dobra. As figuras abaixo, destacadas com um traço vermelho, foram identificadas, pelos alunos, como tendo eixo de simetria (Figura 5.137).

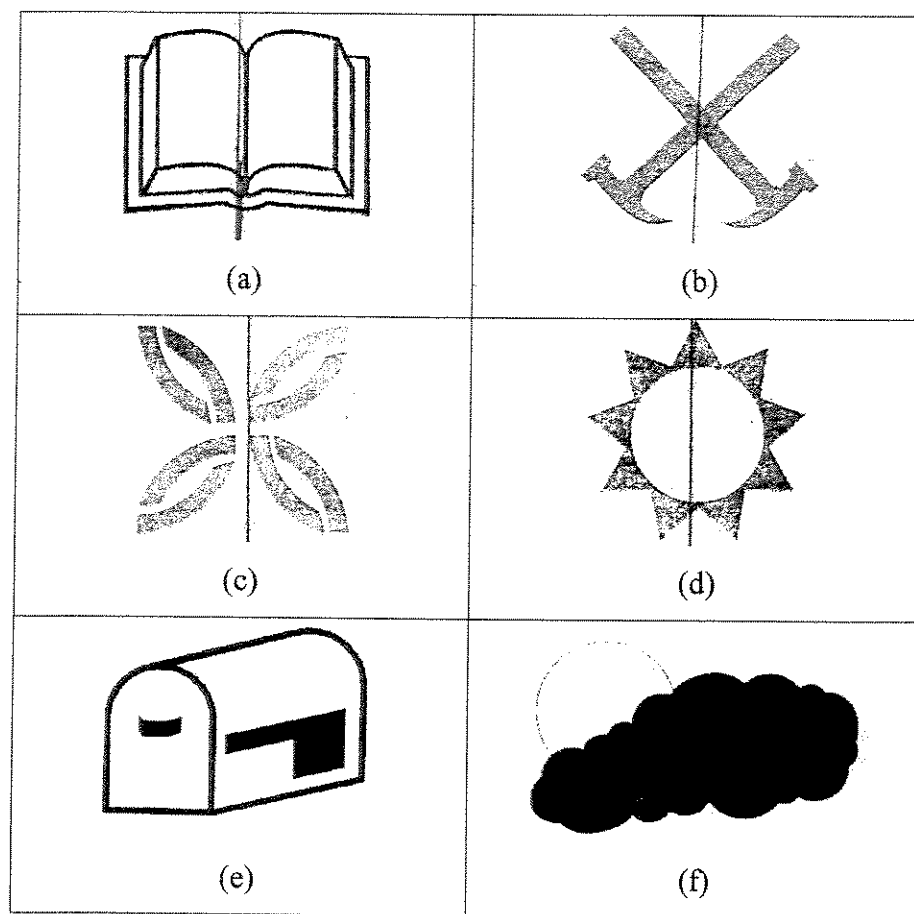


Figura 5.137 - Folha de atividade sobre eixo de simetria.

Depois disso, a professora S pediu que eles verificassem, usando um espelho sobre essa linha vermelha, o que aparecia refletido.

Alguns alunos não identificavam a figura no espelho como sendo a reflexão da parte que estava na frente do espelho (desenhada), dando a impressão de que o espelho seria transparente. Percebendo isso, a professora pediu que eles dobrassem a figura na linha vermelha, ficando somente com uma metade do papel visível sobre a carteira e que

colocassem, novamente, o espelho na linha vermelha. Agora os alunos concluíram que a imagem do espelho juntamente com a metade da figura formava a figura inteira, antes de ter sido dobrada.

A professora explicou-lhes que se eles olhassem “de cima” (perpendicularmente ao espelho), veriam somente a metade da figura, mas se olhassem de frente para o espelho, veriam a figura inteira, porque essas duas partes eram iguais, estavam separadas com a linha vermelha. Explicou que, se uma figura pode ser dividida em duas partes iguais, e que, se uma dessas partes, quando refletida ficar igual à outra, essa figura possui um eixo de simetria, e que, portanto, a figura é simétrica. Explicou-lhes que o eixo de simetria é a linha vermelha que eles traçaram.

Depois disso, propôs uma atividade artística, proporcionando mais uma vez a interdisciplinaridade, na qual os alunos fizeram uma pintura com eixo de simetria, usando uma folha de papel dobrado ao meio e tinta guache.

Depois que todos os alunos tinham feito seus trabalhos a professora S explicou-lhes que eles haviam feito uma figura simétrica, cujo eixo de simetria era a dobra do papel. Os trabalhos ficaram expostos na classe. Com essa atividade “artística”, a professora mostrou para a classe que a simetria existente em seus trabalhos também pode ser encontrada em outras figuras e objetos.

Assim sendo, os alunos fizeram outras atividades usando o espelho, nas quais precisavam descobrir onde estava o eixo de simetria na figura, e se elas teriam mais do que um eixo. Para tanto, eles precisavam anotar toda vez que, ao colocar o espelho sobre a figura, a imagem refletida mostrava a figura inteira. Essas atividades culminaram na observação da simetria das peças do Tangram.

Simetria nas Peças do Tangram

A professora S, da escola C, pediu para que os alunos **verificassem quais peças do Tangram possuíam eixos de simetria, isto é, quais eram as peças simétricas**¹⁶¹.

¹⁶¹ Essa atividade foi desenvolvida somente com os alunos da professora S (escola C).

Ela sugeriu que eles usassem o espelho para saber quais poderiam ser consideradas simétricas. Solicitou-lhes que fizessem um traço determinando o eixo de simetria.

Os alunos não apresentaram dificuldade em identificar, nas peças triangulares, figuras com apenas um eixo de simetria, como pode ser visto na representação feita por Ste.

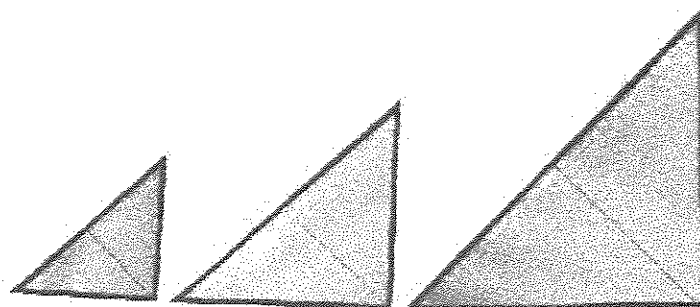


Figura 5.138 - Peças com um eixo de simetria.

Entretanto, ao analisarem o paralelogramo (não retângulo), os alunos pensaram, a princípio, se tratar de uma figura simétrica, não se dando conta que, mesmo traçando uma das diagonais, a qual divide a figura em duas partes iguais, essa linha não era um eixo de simetria.

A professora demonstrou isso para a classe, a partir de vários paralelogramos construídos com papel. Primeiro ela solicitou que os alunos recortassem alguns paralelogramos e que traçassem uma das suas diagonais. Em seguida, pediu-lhes que fizessem uma dobra sobre esse traço, verificando que, as duas partes separadas pela diagonal não se sobrepunham, como ilustrado no esquema a seguir:

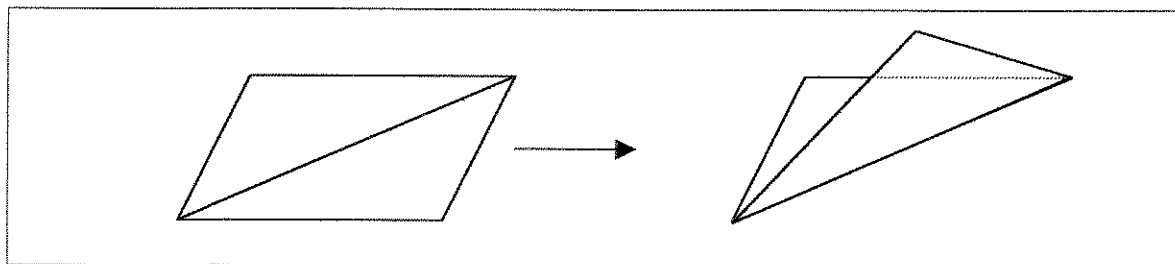


Figura 5.139 – Esquema identificando a não simetria do paralelogramo.

Com relação ao quadrado, os alunos inicialmente encontram apenas os eixos perpendiculares aos lados. Quando a professora colocou um desafio, ou seja, sugeriu que existiam outros eixos de simetria no quadrado, os alunos analisaram as diagonais da figura e concluíram que são quatro os eixos de simetria do quadrado, como pode ser observado na indicação feita por uma das alunas na Figura 5.140.

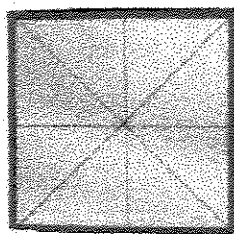


Figura 5.140 - Peça com quatro eixos de simetria.

Considera-se que a mediação proporcionada pela professora S a respeito do conteúdo de simetria foi importante para o processo de aprendizagem dos alunos. Além disso, outros conteúdos geométricos foram abordados nessa interação, como por exemplo, diagonais do quadrado.

5.4 - Considerações a respeito do Estudo de Caso

As diferentes abordagens que os diferentes conteúdos geométricos tiveram no presente Estudo de Caso revelaram muitas formas de interpretações e representações geométricas dos alunos. Além disso, revelaram algumas habilidades espaciais dos alunos que emergiram quando eles resolviam as atividades geométricas.

As referências teóricas que sustentaram a presente pesquisa envolvendo as diferentes formas de representações planas de objetos tridimensionais e vice-versa, assim como os procedimentos usados pelos alunos no desenvolvimento das atividades geométricas foram discutidos ao longo deste estudo.

Por outro lado, os procedimentos usados pelos alunos no desenvolvimento das atividades que revelaram algumas de suas habilidades espaciais permitiram que algumas

considerações a respeito dessas habilidades fossem feitas ao longo da análise, ainda que não se constituíssem o objetivo principal do presente estudo.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“O princípio da explicação da ciência clássica tendia a reduzir o conhecível ao manipulável. Hoje, há que insistir fortemente na utilidade de um conhecimento que possa servir para ser refletido, meditado, discutido, incorporado por cada um no seu saber, na sua experiência, na sua vida...” (Morin, 1990, p. 25).

Entendendo que a escola e o professor são parte essencial do esforço necessário no sentido da superação das condições sociais desiguais, hoje presentes intensamente, considera-se que a Matemática pode exercer um papel decisivo frente a tal situação.

Diante da complexidade e amplitude da problemática relativa ao ensino da Matemática, foi opção desta investigação centrar as atenções no ensino-aprendizagem da Geometria, admitida a sua relevância face ao contexto acima apontado. Cumpre destacar a natureza fundamental desse domínio na formação e na ação dos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, desde que o ensino apropriado da Geometria pode resgatar os aspectos referentes às relações do indivíduo com o espaço em que existe. Com esse propósito, o presente estudo procurou identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos e, também, investigar como os professores agiam perante essas manifestações. Buscou-se, também, elucidar as diferentes formas de interpretações que podem ser atribuídas às representações geométricas.

No presente estudo, considerando-se o desenvolvimento cognitivo e os aspectos psicopedagógicos das representações geométricas na prática pedagógica, procurou-se entender como os alunos progridem nas representações de suas atividades no espaço. Verificou-se que conhecimentos dos adultos, muitas vezes considerados óbvios, não o são para a criança. Com isso, foi possível verificar que a construção do espaço e dos

conceitos geométricos implica em um processo lento e gradual de elaborações e re-elaborações do sujeito. A presente investigação revelou que, assim como sugerem outras pesquisas a esse respeito, e também como a prática pedagógica tem evidenciado, os alunos começam reconhecendo as figuras geométricas quanto aos seus aspectos mais globais; a partir do aspecto perceptual, identificam sua forma e suas características planas ou espaciais, e só depois expressam sua compreensão de relações entre a forma e os elementos intrínsecos às figuras geométricas; posteriormente, passam à elaboração de algumas deduções simples. Essa constatação foi verificada, por exemplo, quando alguns dos alunos pesquisados resolveram atividades de sólidos geométricos: primeiramente, procederam a uma classificação de diferentes sólidos a partir de sua aparência e, posteriormente, consideraram os atributos de cada um dos objetos para que pudessem permanecer em um determinado conjunto. Só depois, analisando os atributos e as particularidades de cada um dos objetos, os sujeitos fizeram a discriminação implícita nos conceitos geométricos, embora sem conceituar exatamente.

O senso comum pode levar o professor a imaginar que a visão dos objetos e a manipulação dos mesmos constituam recursos suficientes para que o aluno aprenda Geometria. Entretanto, a prática pedagógica e a presente pesquisa mostram que esse fato não ocorre tão facilmente, como foi observado no decorrer deste estudo.

Considerando a importância da aprendizagem geométrica no Ensino Fundamental e, ainda, as pesquisas sobre o assunto, tornou-se importante e relevante estudar **como o aluno representa e interpreta representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações**. Entende-se, nesse contexto, que as representações geométricas podem ser expressas por meio de desenhos, objetos construídos, gestos, pela linguagem, entre outras manifestações.

Os dados indicaram que os professores pesquisados não trabalham os conceitos geométricos considerados como os mais elementares no Ensino Fundamental e que são recomendados nas Propostas Curriculares de Matemática do Estado de São Paulo. Por outro lado, as professoras (sujeitos da pesquisa), quando tentam ensinar Geometria para seus alunos, apresentam muita dificuldade, tanto teórica quanto metodológica, que pode comprometer o processo de aprendizagem dos estudantes. Conseqüentemente, seus

alunos desconhecem quase totalmente os mais primários conceitos geométricos, como por exemplo, os de polígonos e de quadriláteros.

Considerando-se a importância do ensino da Geometria na formação geral dos estudantes, sem pretender atribuir um sentido mais amplo do que permitem os dados coletados, que não são generalizáveis, ressalta-se a necessidade da efetiva implementação de propostas de ensino que estimulem o aluno a progredir na sua capacidade de estabelecer pontos de referência ao seu entorno e, posteriormente, possibilitem-lhe aprofundá-los por meio de atividades que mostrem, entre outras, a possibilidade da utilização de diagramas, tabelas, mapas, esquemas, permitindo a interação dos conceitos geométricos desde as séries iniciais.

Para a efetiva implementação de diretrizes para o ensino da Geometria que possibilitem o acesso do aluno a esse conhecimento, considerando-se as dificuldades constatadas na escola, é necessário que professores e escolas desenvolvam um projeto pedagógico que articule os objetivos, a metodologia e as concepções a respeito do conhecimento a ser produzido. Além disso, como indicam os dados da presente pesquisa, os cursos de formação realizados pelas professoras (sujeitos) não lhes tornam possível dispor de um conhecimento profundo desse campo da Matemática para poder ensiná-lo a seus alunos, o que indica a necessidade de assessorias, com características de formação continuada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997, 1998) ressaltam as possibilidades da Geometria em mostrar o fascinante mundo das formas para que o aluno seja conduzido a perceber e a valorizar sua presença nos elementos da natureza e em criações do homem.

As atividades desenvolvidas por uma das professoras pesquisadas permitem verificar que as sugestões dos Parâmetros para interrelacionar o estudo do espaço com outras áreas do conhecimento, como a Geografia, a Astronomia, a Educação Física e a Arte, realmente são possíveis e podem proporcionar momentos significativos de aprendizagem para os alunos. Como exemplo, a abordagem dada ao Tangram levou os alunos a navegarem pelos caminhos das lendas, das artes plásticas, da linguagem, dos conceitos geométricos (como simetria, composição e decomposição de figuras) mencionados no Capítulo 5.

Como ressaltado nos Parâmetros, os dados da pesquisa mostram que algumas das atividades geométricas desenvolvidas com os alunos pesquisados contribuíram para o desenvolvimento de procedimentos de representação e estimativa visual, assim como para o de medidas de comprimento, ângulos, superfície e outras propriedades métricas das figuras. Os dados mostram ainda resultados de um trabalho inicial abordando transformações geométricas (isometrias e homotetias), de modo a propiciar o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, como ocorreu no momento em que os alunos manipulavam diferentes planificações de prismas (Capítulo 5, Figura 5.73).

A visualização espacial foi considerada neste trabalho como uma atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais e espaciais, no estabelecimento de relações e na manipulação de objetos concretos, e que foram requeridos quando os alunos foram solicitados a resolver os problemas geométricos. Considerou-se, neste estudo, que a visualização foi integrada por quatro elementos principais, quais sejam: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. Entretanto, como já indicado anteriormente, o destaque foi dado para as representações, visto que estas podem assumir qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, gestos, construção de modelos, entre outras.

Constatou-se que diferentes aspectos interferiram nas representações planas de objetos tridimensionais. Fischbein (1993) enfatiza que, na atividade cognitiva de estudantes, quando realizam tarefas geométricas, há interação entre os aspectos figurais e os aspectos conceituais dos objetos envolvidos. Essa interação, algumas vezes, ocorreu no sentido de contribuir na realização da tarefa. Por exemplo, o aluno, analisando as particularidades do objeto, conseguiu produzir uma representação plana para ele, identificando nos elementos desenhados os elementos correspondentes no objeto. Em outros momentos, contudo, estabeleceram-se conflitos entre os aspectos figural e conceitual, visto que o aluno não conseguiu identificar quais elementos do objeto deveriam compor sua representação plana. Por exemplo, o aluno ficou preso ao observável do desenho, restringindo-se ao desenho de apenas uma das faces do objeto.

Considera-se importante que o professor no ensino da Geometria crie diferentes tipos de situações didáticas que levem em conta os aspectos enfatizados por Fischbein (1993) e Gutiérrez (1996a), os quais foram assinalados nos Capítulos 3 e 5 e que interferem na representação geométrica, tais como: a capacidade de visão espacial dos estudantes, suas habilidades para desenhar representações planas de objetos tridimensionais, suas habilidades de interpretar corretamente as representações construídas por outras pessoas. Além disso, essas situações didáticas deveriam considerar a integração natural dos componentes figural e conceitual dos objetos geométricos.

Nas várias atividades desenvolvidas na pesquisa com os alunos (sujeitos) foram destacados conceitos geométricos e os dados foram analisados agrupando-os em situações que evidenciaram os diferentes conceitos em cada um dos contextos.

Os dados mostram que os alunos usaram vários tipos de representações planas para os prismas. Além disso, foi possível verificar que a transferência de informação espacial para a plana pode revelar algumas dificuldades como, por exemplo, dificuldade para representar no desenho as linhas paralelas e perpendiculares do modelo (sólido geométrico), impedindo que se revele no desenho a profundidade capaz de conseguir fazer orientar corretamente as vistas laterais do objeto, ainda que os objetos estivessem à vista dos alunos. O traçado dos alunos demonstrou, também, que alguns deles possuíam uma certa familiaridade com a representação de um prisma. Não se sabe quem poderia ter proporcionado esse conhecimento de representação do prisma em perspectiva para os alunos. Ou algum professor das séries anteriores ou mesmo algum adulto pode ter ensinado a esses alunos algumas “técnicas de desenho” para que eles tivessem êxito nessas tarefas ou teriam desenvolvido o conhecimento de outra maneira.

Os alunos conseguiam transmitir a idéia ou a sensação de profundidade fazendo até mesmo traçados em perspectiva paralela, além de indicar a preferência pela representação do prisma retângulo, principalmente do cubo.

Ao procurar representar um objeto tridimensional no plano, os alunos enfrentaram dificuldades, por diversas vezes. Os obstáculos poderiam estar relacionados, como enfatizam Fischbein (1993) e Gutiérrez (1996a e 1996b), com a capacidade de visualização espacial, com a habilidade dos alunos para desenhar representações planas

de objetos espaciais, além da necessidade deles de interpretarem corretamente as representações apresentadas por outras pessoas. Da análise dessas representações pode-se inferir que a dificuldade dos alunos residiria em não conseguirem coordenar os diferentes elementos que integram a representação plana do objeto tridimensional.

Ao se procurar verificar como os alunos interpretavam representações geométricas, foram desenvolvidas algumas atividades que deixavam claro que, muitas vezes, tanto as professoras quanto os alunos faziam confusão ao usarem a nomenclatura específica do objeto geométrico. No caso das professoras, o que mais chamou a atenção foram as incorreções no uso de alguns conceitos, como se observa no Capítulo 5.

Observando representações de objetos tridimensionais no plano, de modo geral, os alunos conseguiram identificar no objeto e no desenho, registrando, as partes que compõem cada um dos objetos. Para tanto, eles usaram gestos, indicações com setas, palavras escritas ou orais demonstrando empenho em acertar e interesse, e, em alguns casos, que, mesmo tendo dificuldade em representar os objetos espaciais em perspectiva paralela, eles tinham consciência das suas partes no desenho. Todavia, em alguns momentos, outros alunos demonstraram estar presos às particularidades do objeto, isto é, identificaram como faces do objeto os elementos da embalagem do modelo.

Na investigação do conhecimento dos alunos a respeito dos conceitos de paralelismo e perpendicularismo verificou-se que a maioria deles já possuía algum conhecimento, uma noção, ainda que parcial, desses conceitos; entretanto, faziam alguma confusão entre eles. Após a intervenção da pesquisadora, lembrando elementos do contexto conhecido do cotidiano dos alunos, eles identificaram com maior facilidade faces paralelas e perpendiculares entre si de objetos geométricos espaciais e também quando esses objetos estavam representados no plano, conseguindo ainda identificar pares de faces paralelas ou perpendiculares em seu desenho; isso ocorreu mesmo com aqueles alunos que não haviam desenhado os objetos em perspectiva.

Os alunos, de modo geral, identificaram na planificação de um paralelepípedo cada uma das faces de uma caixa correspondente com a sua respectiva face no desenho da planificação. Da análise dos procedimentos usados pelos alunos pode-se inferir que alguns deles conseguiram superar os aspectos meramente figurais, chegando à conceitualização, o que requereu deles uma atividade cognitiva mais complexa. O aluno

precisou estabelecer relações mentalmente, em relação aos objetos geométricos, recorrendo simultaneamente às operações com as figuras e às condições lógicas das operações necessárias para a tarefa requerida.

A atuação dos alunos em relação às atividades de manipulação e de exploração de formas cilíndricas indica que esse assunto é pouco enfatizado nas classes pesquisadas. Os alunos apresentaram inicialmente muita dificuldade em prever e em entender como resultaria cada um dos elementos que compõem o cilindro após sua planificação. Para que os alunos obtivessem êxito na planificação do cilindro, a pesquisadora precisou recorrer a uma analogia com outro material manipulável, também cilíndrico, e ao recurso de recortes e dobraduras, o que indica a importância da ação em relação à compreensão de tais conceitos.

Os dados mostraram, por diversas vezes, a insegurança e hesitação das professoras pesquisadas e desconhecimento de conceitos a serem ensinados. Por exemplo, uma professora apresentava o conceito de um sólido geométrico de maneira expositiva, informativa, inclusive corretamente. No entanto, não era capaz de dar continuidade de modo conseqüente ao desenvolvimento do assunto com os alunos; apresentava perguntas sem coerência aos seus alunos chegando, mesmo, a contradizer as suas próprias explicações. Essa atitude da professora levou os alunos a mostrarem-se surpresos com as perguntas apresentadas, que realmente não faziam sentido.

Por outro lado, os dados revelam como a intervenção correta e eficiente de outra professora pode proporcionar aos alunos momentos de exploração e reflexão sobre as particularidades dos sólidos geométricos. A discussão promovida por uma das professoras a respeito dos atributos de um conjunto de sólidos geométricos levou os alunos a conceituarem cada um deles, além de identificarem alguns de seus elementos, como números de arestas, faces e vértices, posição entre as faces, entre outros.

A análise dos dados mostrou que os alunos, ao realizarem tarefas que exigiam transmissão de “informação espacial” para “informação plana” (na atividade, os alunos, após visualizarem um objeto tridimensional – não convexo –, precisavam transmitir informações, escritas e/ou desenhadas, de modo que, com essas informações, o leitor pudesse construir as mesmas peças usando cubos, como assinalado no Capítulo 5, Figura 5.79), necessitavam produzir representações que contivessem informações a respeito das

propriedades intrínsecas ao objeto geométrico. Cada aluno, ao “ler” uma representação plana de um sólido que tinha representado, procurava recuperar a maior quantidade de informações possíveis. Destaca-se que, para realizar essa tarefa, os alunos necessitaram determinar a posição de um objeto no espaço em relação a si próprio, e, conseqüentemente, envolveram-se com rotações e reflexões de figuras, embora esses procedimentos não tenham sido discutidos com eles no momento da atividade. Observou-se que a referida atividade possibilitou aos alunos irem além da sua representação, isto é, eles precisaram explicar o que estavam pensando, explicar suas idéias uns para os outros, através de uma representação gráfica ou através da linguagem escrita e, além disso, interpretar representações geométricas, também uns dos outros, que muitas vezes não estavam suficientemente claras. De modo geral, os alunos usavam representações gráficas, desenhos das peças e informações textuais para facilitar o reconhecimento dos objetos representados no plano. Cabe destacar as representações feitas por um dos alunos, que usando recursos textuais e visuais conseguiu, em uma composição de idéias, dar aos desenhos a idéia exata dos objetos espaciais.

Em razão da atividade anterior, os dados mostram que os alunos, depois de elaborarem a representação dos diferentes objetos, por meio de desenho e da escrita, e de interpretarem essa mesma informação, comparavam-nas, identificando-as com as representações planas dos mesmos objetos tridimensionais, representados em uma cartela, em perspectiva isométrica; os alunos puderam identificar incorreções cometidas por eles mesmos anteriormente. Ao tomarem consciência dos erros cometidos, cada um precisou rever seu desenho, identificando os elementos que o compunha, de forma organizada, identificando para si mesmo determinadas propriedades do objeto, relevantes para a representação e a discriminação.

Na atividade de interpretação de uma representação bidimensional e a sua representação tridimensional através de modelos com varetas, verificou-se como os alunos interpretavam e como representavam desenhos que sugeriam formas e linhas usadas para indicar a profundidade de objetos geométricos. Alguns deles tiveram dificuldades para reconhecer convenções usadas em representações planas de objetos tridimensionais, pois fizeram as representações totalmente planas.

Bishop (1983) considera que a habilidade para interpretar informação visual envolve a compreensão da representação visual e do vocabulário usado em trabalhos geométricos, gráficos, mapas, e diagramas de qualquer tipo; além disso, considera que fatores culturais afetam a representação de objetos tridimensionais e a interpretação de suas representações bidimensionais. Tais considerações foram discutidas nos Capítulos 3 e 5 da presente pesquisa.

Por outro lado, a análise dos dados evidenciou que um trabalho do tipo acima comentado, desenvolvido em sala de aula e corretamente mediado pela professora, pode favorecer a discussão de outros conceitos intrínsecos aos objetos representados no plano.

Na montagem do quebra-cabeça cubo-soma, os alunos lançaram mão de sua capacidade de percepção das relações espaciais para determinar qual peça, e em qual posição, completaria a figura desejada, a partir das peças já colocadas. Ao identificar a peça e a sua posição, os alunos demonstraram perceber a posição inicial da peça no espaço e quais seriam as transformações geométricas necessárias que deveriam imprimir a ela para que ficasse na posição definida por eles anteriormente. A verificação dos dados revelou que, em alguns momentos dessa atividade, os alunos faziam a análise dos movimentos necessários para que as peças pudessem ser encaixadas no quebra-cabeça, antecipando os possíveis resultados.

A análise dos procedimentos da montagem do cubo-soma e as diferentes representações que os alunos usaram para o registro no papel, mostraram que os alunos necessitaram de determinadas habilidades para imaginar os diferentes relacionamentos e transformações requisitadas para decodificar, visualmente ou verbalmente, os objetos espaciais. Cumpre observar que essa atividade evidencia a utilização de diferentes maneiras de registro, com procedimentos pessoais e originais. O confronto dos registros e a discussão entre os alunos sobre a possibilidade da montagem do cubo-soma a partir dos diferentes registros evidenciaram para os alunos a necessidade da existir uma convivência entre os autores de uma representação e os leitores desses procedimentos para que os objetivos, no caso, de montagem do quebra-cabeça, fossem atingidos.

Verificou-se, também nesta pesquisa, a vantagem do uso de materiais manipuláveis, como sugerido pela pesquisadora, que possibilitou aos alunos conseguirem perceber a relação entre litro e centímetro cúbico quando realizaram uma

experiência. Nas discussões subseqüentes, mediadas na sala de aula, eles relacionaram essa experiência com contextos de seu cotidiano, como a quantidade de litros de água que cabe em uma piscina em forma de prisma.

Os dados mostram que o quebra-cabeça Tangram pode ser utilizado para introdução de muitos conceitos geométricos e não simplesmente, como a prática pedagógica tem mostrado, como uma mera brincadeira, quando os alunos montam e desmontam algumas figuras usando as peças do jogo.

Os dados revelam que é possível desenvolver a noção de simetria a partir de atividades com o uso de espelhos, a partir de artes plásticas e também do quebra-cabeça Tangram. Nas atividades propostas por uma das professoras, os alunos identificaram em que situações uma figura era simétrica e qual seria seu eixo de simetria.

Os alunos não apresentaram dificuldades em identificar nas peças triangulares do Tangram a existência de apenas um eixo de simetria. Por outro lado, quando os alunos analisaram o paralelogramo, algumas dificuldades foram reveladas, pois consideraram-no, a princípio, como uma figura simétrica, sendo que a mediação da professora, utilizando recursos como recortes e espelhos, levou os alunos a compreender que o paralelogramo não era uma figura simétrica. Já com relação ao quadrado, eles conseguiram encontrar os quatro eixos de simetria.

As considerações feitas a partir da análise dos dados evidenciam como é importante para os estudantes adquirir e desenvolver habilidades que lhes permitam manejar diferentes tipos de representações planas de objetos tridimensionais, revelando que se trata de um processo longo, gradual, produzindo resultados diferentes para pessoas diferentes.

Ressalte-se, ainda, a importância dos alunos conviverem com diferentes representações geométricas, as quais poderão ajudá-los na aquisição de habilidades que lhes permitam criar, transformar e analisar imagens de objetos tridimensionais gerados pela informação trazida por um desenho plano permitindo representá-los de outras formas.

Embora o presente estudo não tenha investigado as habilidades geométricas, algumas delas foram tomadas em consideração; tal foi o caso da habilidade do desenho dos alunos, considerada nesse contexto como um fator que interfere na capacidade de

representação de sólidos e que pode interferir na compreensão dos conceitos intrínsecos a eles.

Acredita-se que os educadores devam estar conscientes de que a habilidade do desenho geométrico, com sua complexidade, não se desenvolve espontaneamente ou tão facilmente, podendo ser estimulada pelo professor e trabalhada na sala de aula com o uso e a manipulação de objetos diferentes, em diversas situações e com diferentes metodologias, com tarefas específicas e diversificadas, proporcionando interações entre os alunos e o professor.

Dentre as habilidades geométricas requeridas quando se representa e interpreta representações geométricas estaria a habilidade de imaginar objetos espaciais, relacionamentos e transformações, decodificações visuais e, também, a habilidade de codificações em termos mistos ou verbais. Além disso, estaria a habilidade de manipular as imagens visuais; e ainda, como a habilidade de resolver as tarefas poderia ser incluída nos processos não meramente visuais.

A habilidade espacial dentro dessa perspectiva, mesmo quando descrita como um termo singular, teve muitos significados no decorrer da investigação, uma vez que incluiu as formas das diferentes representações necessitadas para as diversas transformações espaciais que foram requeridas na resolução das tarefas, como rotação, translação, reflexão, dilatação. Incluiu também a forma de interpretar informação espacial como uma habilidade necessária para entender e interpretar não apenas descrições gráficas e modelos de objetos espaciais com seus relacionamentos, mas também as informações verbais e as mistas e, sobretudo, o vocabulário específico usado em trabalho geométrico. A habilidade espacial incluiu, ainda, a forma de representar uma comunicação de informação espacial como uma habilidade necessária para produzir descrições de objetos espaciais, relacionamentos e transformações intrínsecos a eles, sendo que o conteúdo dessas descrições pôde ser figural, verbal ou misto, como se evidencia nas atividades descritas no Estudo de Caso.

Dependendo das características do problema geométrico resolvido no Estudo de Caso e das imagens criadas no processo de sua resolução, os sujeitos pesquisados precisaram ser capazes de escolher, dentre as várias representações, aquela que melhor se adaptasse ao problema proposto. A visualização espacial foi requerida muitas vezes.

Além de ter sido requisitada inúmeras vezes, a visualização espacial envolveu muitas outras habilidades que podem ser investigadas em outros trabalhos de pesquisa.

Vale ressaltar que os padrões de representações geométricas encontradas com maior frequência e reiteradamente no cotidiano escolar, isto é, figuras representadas graficamente por meio de uma única maneira e posição, podem estar contribuindo para que o conceito da figura, propriamente dito, seja relegado a um segundo plano. Isto é, o trabalho dos professores, as figuras que aparecem em alguns livros didáticos e outros materiais didáticos produzidos, de modo geral, podem estar contribuindo para que os aspectos figurais prevaleçam sobre os aspectos conceituais da figura, fazendo com que o sujeito fique preso ao observável do objeto, evidenciando no desenho essa incidência exclusiva em apenas uma das faces dos sólidos, por exemplo, em detrimento de abstrações dos conceitos intrínsecos ao objeto.

De acordo com a teoria piagetiana, o indivíduo precisa transcender o estágio de imagens como base de pensamento da representação e, também, precisa ser capaz de formar e transformar figuras espaciais. Por isso, há que se atentar para o quanto de cuidado o professor deve ter quando pretende auxiliar o processo de construção do sistema de referências de relações espaciais de seus alunos, já que esse constitui-se em um processo lento, abstrato e gradual, variando de aluno para aluno.

De certo modo, as professoras pesquisadas expressavam intenções amparadas em alguns pressupostos da teoria construtivista aplicada ao ensino. Elas diziam que precisavam considerar, em suas ações, os conhecimentos prévios dos alunos e que somente a informação não proporcionaria a construção de seu conhecimento. Entretanto, quando o assunto era Geometria, apenas uma das professoras demonstrou saber estabelecer algumas relações com os conteúdos abordados, propondo aos alunos a discussão de conceitos geométricos que emergiram das situações trabalhadas.

Destaca-se, assim, nesse contexto a importância da ação do professor na formação dos estudantes. Os professores precisam estar conscientes da Matemática, em especial da Geometria, presente na vida do dia-a-dia, na cultura; ainda que nem sempre as pessoas a possam perceber com clareza, e também do valor cultural, educacional e científico da redescoberta e da exploração matemática e geométrica. Seria desejável que os professores, de modo geral, proporcionassem aos alunos condições para que eles

pudessem investigar a beleza das formas, das proporções, das regularidades, de modo que a poderem ir descobrindo a importância dos conhecimentos geométricos para sua formação intelectual, o que as professoras pesquisadas não souberam fazer em muitas situações, mesmo quando demonstraram interesse e dedicação.

Ressalte-se que, para que o professor pudesse ter condições de assumir efetivamente esse papel, ele deveria receber uma formação geométrica adequada, assim como uma formação didático-metodológica, na qual os diferentes aspectos relativos à visualização e à representação geométricas fossem considerados, enfatizando-se as diferentes formas de representação de objetos geométricos, o que lhe proporcionaria o contato com as diversas interpretações que podem ocorrer quando se está inserido no contexto de ensino-aprendizagem da Geometria.

Na pesquisa de que trata o presente estudo evidenciou-se a importância da ação e da mediação das professoras no sentido de tornar disponíveis aos alunos condições para que eles possam envolver-se com conceitos geométricos importantes para sua formação intelectual. No entanto, os sujeitos (professoras pesquisadas) não mostraram ter conhecimento suficiente de Geometria para desempenhar esse papel. Por sua vez, quando as professoras pesquisadas tiveram oportunidade de interpretar e explorar as diferentes manifestações dos seus alunos nos processos de resolução de problemas geométricos em sala de aula, muito pouco fizeram. À exceção de uma das professoras, que assumiu o desenvolvimento de todas as atividades propostas para seus alunos e também as intervenções delas decorrentes, a maioria das demais intervenções foram desempenhadas pela pesquisadora, na busca de elementos que pudessem contribuir para responder o problema da investigação em curso.

A presente investigação mostrou que foram poucas as situações de ensino proporcionadas pelas professoras capazes de favorecer o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial de seus alunos.

A insegurança e tensão das professoras, verificadas em alguns momentos do Estudo de Caso, precisam ser analisadas com cuidado neste estudo. Não é o caso de se responsabilizar, ingenuamente, as professoras por não terem conseguido proporcionar situações ótimas para avanço do conhecimento de seus alunos. Como diz Moura, A. (1995), elas carregam o ônus decorrente de uma formação acadêmica falha e

inadequada, e, além disso, embora sejam responsáveis pela formação inicial do cidadão, elas fazem parte do conjunto de profissionais sem o devido reconhecimento no contexto sócio-cultural.

Os professores de modo geral, e, em particular, os do Ensino Fundamental necessitam ter consciência das dificuldades que os alunos apresentam quando representam objetos tridimensionais no plano e vice-versa, interferindo adequadamente de modo a evitar conseqüências mais graves, no futuro, quando esses alunos estiverem cursando outras séries.

Ao mesmo tempo em que essas observações da prática pedagógica das professoras foram sendo feitas, foi possível perceber como os alunos agiam perante as atividades geométricas. Eles gostavam das atividades, mostraram-se interessados e atentos a todas propostas feitas em sala de aula e, o que é importante de se resgatar na presente investigação, demonstraram ter aprendido muitos conceitos geométricos nesse processo.

Os dados coletados, ainda que restritos, já que se trata de um Estudo de Caso, indicam que o sistema educacional não tem conseguido atingir plenamente os objetivos a que se propõe, no caso, na formação matemática dos professores das séries iniciais. Ações efetivas que possam minimizar a dificuldade dos professores, assessorias às escolas, através de cursos de aperfeiçoamento para os professores seriam importantes para a melhoria do ensino.

Ressalte-se que a atenção não pode ficar restrita apenas à formação dos futuros professores, mas também, deve ser projetada para perceber as possíveis ações que esses professores estarão delegando às futuras gerações. Considera-se que os educadores, de modo geral, precisam estar atentos que, ao prepararem as novas gerações para o mundo em que terão que viver – mundo esse rapidamente mutável –, devem estar em contínuo alerta para adaptar seu ensino, tanto em conteúdo quanto em métodos, à evolução destas mudanças que tanto afetam as condições de vida.

As intensas transformações pelas quais passa a nossa sociedade implicam na transformação constante dos conhecimentos e a exigência de uma formação continuada do professor torna-se uma garantia para a qualidade do ensino. Nesse sentido, Moura (1993) assinala que a formação do professor é *“um conceito em formação”*, quando

analisado sob o aspecto curricular da preparação deste professor para a tarefa educativa. Entende-se, aqui, esse processo de formação continuada do professor tal como enfatizado por Moura (1993), ou seja, *“...formar o professor é colocá-lo num movimento contínuo no espaço de produção de conhecimentos em contínua evolução; é possibilitar ao professor o acesso a conhecimentos produzidos e dotá-lo de instrumentos intelectuais que lhe permitam construir o seu projeto pedagógico”* (p.14).

Não se pode ignorar que a formação do professor em serviço é um passo indispensável para a melhoria da qualidade do ensino de forma geral e para o ensino da Geometria, como indicam os dados coletados. Em relação a esse aspecto, tal formação em serviço precisaria ser articulada no âmbito da escola, visto que a atualização faz parte do trabalho de quem se propõe a pensar teoricamente para buscar soluções para uma prática educativa consciente. A formação em serviço teria que estar vinculada a todos os níveis de ensino, isto é, Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Ao se formar os futuros professores deve-se ter em mente que esses serão os sujeitos que terão penetração no futuro e que muito provavelmente, não será o nosso futuro.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- ALEXANDROV. (1977) *A general view of mathematics*. In *Mathematics, its content, methods and meaning*. Massachusetts. pp.1-64.
- ARAUJO, A. P. (1990) *Formação do Professor de Matemática: Realidade e Tendências*. São Paulo: USP-Faculdade de Educação. (Tese de Doutorado).
- BALDY, R.; CHATILLON, J. e CADOPPI, M. (1993) *Dessin plan, dessin en perspective: étude des effets de transfert chez des adultes débutants*. In *Espaces graphiques et graphiques d'espaces*. Grenoble: Editions La Pensée Sauvage, pp. 17-34.
- BASTOS, R. (1999) *Geometria no currículo e pensamento matemático*. In *Revista Educação & Matemática*, n. 52. Lisboa: APM. Dados [on-line]. Disponível na Internet via WWW. http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educa52_2.htm. Arquivo capturado em 09 de junho de 1999.
- BATTISTA, M. (1990) *Spatial visualization and gender differences in high school geometry*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, pp.47-60.
- BATTISTA, M. T. e CLEMENTS, D. H. (1996) *Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), pp. 258-292.
- BATTISTA, M.; WHEATLEY, G. & TALSMA G. (1982) *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-services elementary teachers*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, pp.332-340.
- BEN-CHAIM, D., LAPPAN, G e HOUNG, R. T. (1985) *Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting student's performance*. In *Education Studies in Mathematic*, 16 (4), pp.389-409.
- BEN-CHAIM, D.; LAPPAN, G. e HOUANG, R. (1989) *Adolescents' Ability to Communicate Spatial Information: Analysing and Effecting Students'*

- Performance*. In *Educational Studies in Mathematics* 20, pp. 121-146. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- BESSOT, A.; DEPREZ, S.; EBERHARD, M. e GOMAS, B. (1993) *Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment*. In *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble: Editions Le Pensée Sauvage, pp.115-144.
- BEZZERA, M. J. e outros. (1985) *Geometria I*. Rio de Janeiro: FAE.
- BISHOP, A. J. (1979) *Visualizing and mathematics in a pre-technological culture*. In *Educational Studies in Mathematics* (10), pp.135-146. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- BISHOP, A. J. (1983) *Space and Geometry*. In LESH, R. e LANDAU, M. (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press – A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers: New York, USA, pp.175-203.
- BISHOP, A. J. (1988) *Aspectos Sociales y Culturales de la Educación Matemática*. In *Enseñaza de las Ciencias*, 6 (2), pp.121-125.
- BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. (1982) *Qualitative Research for Education*. Boston: Allyn and Bacon.
- BONAFE, F. (1988) *Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière*. Paris: Boletim da APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement publique), n. 363, pp 151-164.
- BOYER, C. B. (1974) *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.
- BRASIL. (1993) Secretaria da Extraordinária de Projetos Especiais. *Curso Livre de Atualização de Conhecimentos: Matemática: Mapas e Vistas* (vídeo). Rio de Janeiro.
- BRASIL. (1997) Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasil: MEC/SEF.

- BRASIL. (1998) MEC-SAEB/95. Dados do SAEB/95 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br:81/folio.cgi/stdobject/buttoni.gif/escalas>. Arquivo capturado em 03 de março de 1998.
- BRASIL. (1998) Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.
- BRASIL. (1999) MEC/SAEB/97: *primeiros resultados* - Maria Inês Gomes de Sá Pestana et al. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 1999. Dados do SAEB/97 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br/saeb/saeb97/saeb97.htm> Arquivo capturado em 21 de outubro de 1999.
- CARAÇA, B. J. (1989) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora (9ª ed.).
- CASTELNUOVO, E. (1973) *Didáctica de la matemática moderna*. Trad. F.R. Vázquez. México: Trillas.
- CASTELNUOVO, E. (1989) *Panorama de la Enseñanza Matemática en el Tiempo y en el Espacio*. In: *Educación Matemática*, v.1, n.3, pp.24-29.
- CATALÁ, C. A., FLAMARICH, C. B. e AYMEMMI, J. M. F. (1995) *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.
- CATUNDA, O. et al. (1971) *Ensino Atualizado da Matemática*. São Paulo: Edart. v.4.
- CAVALCA, A. P. V. (1998) *Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação*. São Paulo: EDUC.
- CHAIM, B., LAPPAN, G. & HERSHKOWITZ, R. (1988) *Spatial ability and visual factors – the many sided coin*. Geometry Working Group, XII PME Conference.
- CLAIRAUT, A. C. (1741) *Elements de géométrie*. Editons Guathier-Villars, 1920.
- CLEMENTS, D.H. & BATTISTA, M.T. (1991) *Geometry And Spatial Reasoning*. In: NCTM-TÓPICO-18, pp.420-465.
- CROWLEY, M. (1994) *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org.) *Aprendendo e*

- Ensinando Geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora.
- CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU. (1977). 7ª série. 3ª ed. São Paulo, Editora Nacional.
- D'AMBROSIO, B. S. (1993) *Formação de Professores de Matemática para o século XXI: O Grande Desafio*. In: *Pró-Posições*, v.4, n.1[10], pp.35-41.
- D'AMBROSIO, B., JOHNSON, H. e HOBBS, S. (1995) *Strategies for Increasing Achievement in Mathematics*. Alexandria, Virginia: Association For Supervision and Curriculum Development.
- D'AMBROSIO, U. (1990) *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. São Paulo: Ática.
- D'AMBROSIO, U. (1993) *Educação Matemática: Uma Visão da Arte*. In: *Pró-Posições*, v.4, n.1[10], pp.7-17.
- D'AMBROSIO, U. (1994) *Ciências, Informática e Sociedade - Uma coletânea de Textos*. Brasília: Universidade de Brasília.
- D'AMBROSIO, U. (1996) *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus.
- DAVIS, P. J e HERSH, R. (1989) *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.
- DEL GRANDE, J. J. (1987) *Spatial Perception and Primary Geometry*. In LINDQUIST, M. M. e SHULTE A. P. *Learning and Teaching Geometry, k-12*. Reston, Virginia: NCTM.
- DEL GRANDE, J. J. (1990) *Spatial Sense*. In *Arithmetic Teacher*. Novembro, pp. 14-20. Virginia: NCTM.
- DEL GRANDE, J. J. (1994) *Percepção espacial e geometria primária*. In LINDQUIST, M. M. e SHULTE A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- DENIS, M. (1979) *Les Images Mentales*. Paris: Presse Universitaire Française.
- DENIS, M. (1989) *Image et cognition*. Paris: Presses Universitaire de France.

- DIAS, M. S. S. (1998) *A Importância do Desenho na Construção dos Conceitos Geométricos*. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula. (Dissertação de Mestrado).
- DICKSON, L. e outros. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labot.
- DOCZI, G. (1990) *O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura*. Trad. Maria Helena de Oliveira Tricca e Júlia Bárány Bartolomei. São Paulo: Mercuryo.
- DOLCE, O. e POMPEO, J. N. (1985) *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Espacial*. São Paulo: Atual.
- DREYFUS, T. (1991) *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*. In FURINGHETTI, F. (ed.) *Proceeding of the 15th PME conference*. Genova, Italy: Univ. de Genova, vol. 1, pp.33-48.
- DREYFUS, T. e HADAS, N. (1991) *Stereometrix – A learning tool for spatial geometry*. In Zimmermann, Cunningham, pp. 87-94.
- DUHALDE, M. E. e CUBERES, M. T. G. (1998) *Encontros Iniciais com a Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- EVES, H. (1969) *The history of geometry*. In *Historical topics for the mathematics classroom*. Washington. pp.165-191.
- EVES, H. (1992) *História da Geometria*. In *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*. São Paulo: Atual.
- FAINGUELERNT, E. K. (1999) *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- FARRELL, M. (1994) *Geometria para professores da escola secundária*. In LINDQUIST, M. M. e SHULTE A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- FARRELL, M. A. e FARMER, W. A. (1985) *'Adolescents' Performance on a Sequence of Proportional Reasoning Tasks*. In *Journal of Research in Science Teaching* 22, September, pp.503-518.

- FEHR, H. F. (1973) *Geometry as a secondary school subject*. In K. B. Henderson (ed), *Geometry in the mathematics curriculum: Yearbook* (pp.369-380). Reston VA: National Council of Teacher of Mathematics Education.
- FEYNMAN, R. P. (1965) *New Textbooks for the Mathematics. Engineering and Science*, 28, pp.9-15.
- FISCHBEIN, E. (1993) *The Theory of Figural Concepts*. In *Education Studies in Mathematics* 24, pp. 139-162. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- FLAVELL, J. H. (1975) *A Psicologia do Desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Livraria Pioneira (1ª ed. 1966).
- FOLHA DE SÃO PAULO. (1994) Jornal de 09/08/94. São Paulo. Caderno 1, p.2.
- FOLHA DE SÃO PAULO. (1996) *70% dos alunos não sabem matemática*. São Paulo. Caderno 1, p 10-13, de 05/05/96.
- FRANCHI, A. et al. (1992) *Geometria no 1º Grau: da decomposição de figuras às fórmulas de área*. São Paulo: CLB Balieiro. (Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando; 7).
- FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co.
- FREUDENTHAL, H. (1975) *Perspectivas da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- FREUDENTHAL, H. (1982) *Bookreview*. In *Education Studies in Mathematics*. Dordrecht (13).
- FREUDENTHAL, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel: Dordrecht.
- FROSTIG, M. e HORNE, D. (1964) *The Frostig Program for the Development of Visual Perception*. Chicago: Follet Publishing Co.
- FURIÓ, C. e GIL, D. (1992) *La Formación Inicial del Profesorado de Educación Secundária: Didácticas Específicas*. In *Investigación en la Escuela*, nº 16.
- GALINDO, C. (1996) *Desarrollo de Habilidades Básicas para la Comprensión de la Geometria*. In *Revista EMA – Investigación e Inovación en Educacion*

- Matemática*. v. 2, n. 1, novembro, pp. 49-58. Bogotá, Colômbia: Editora Patricia I. Perry.
- GÁLVEZ, G. (1996) *A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária*. In PARRA, C. e SAIZ, I. "Didática da Matemática - Reflexões Psicopedagógicas". Porto Alegre: Artes Médicas.
- GAULIN, C. (1985) *The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations*. In L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 53-71). Utrecht, Holanda: State University of Utrecht.
- GERDES, P. (1986) *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Dresden (RDA): Instituto Superior Pedagógico Karl Friedrich Wander. (Tese de Doutorado em Filosofia).
- GERDES, P. (1991) *Sobre cultura, pensamento geométrico e educação*. In *Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação*. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.
- GOLDENBERG, E. P. (1999) *Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo*. Tradução Portuguesa de Educado Veloso. In *Educação & Matemática*. Lisboa, Portugal: APM, n. 47 e 48. Disponível na Internet via WWW. <http://www.apm.pt/apm/revista/educ.htm>. Arquivo capturado em 27 de outubro de 1999.
- GONSETH, F. (1945) *La Géométrie et le problème de l'espace*. Neuchatel: Editora Griffon.
- GORDO, M. F. P. C. M. (1994) *Visualização Espacial e a aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*. In *Quadrante*, V. 3, n. 1. Lisboa: APM.
- GORGORÍO, N. (1998) *Exploring the Functionality of Visual and Non-Visual Strategies in Solving Rotation Problems*. In *Educational Studies in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, (35), pp. 207-231.
- GRAVINA, M. A. (1996) *Geometria Dinâmica: Uma abordagem para o aprendizado da Geometria*. In *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Informática da*

- Educação, nov/1996. Dados [on line]. Disponível na Internet via WWW. <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/malice/artigo.htm>. Arquivo capturado em 26 de janeiro de 1998.
- GRÜNBAUM, B. (1981) "*Shouldn't We Teach GEOMETRY?*" In *Two-Year College Mathematics Journal* 12, September, pp.232-38.
- GUTIÉRREZ, A. (1992) *Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry*. In *Structural Topology*, n. 18, pp. 31-48. Cirade: UQAM (Canadá).
- GUTIÉRREZ, A. (1996a) *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*. In L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Spain: University of Valencia, July, V. 1, pp 3-19.
- GUTIÉRREZ, A. (1996b) *Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures*. In A. R. BATTURO (ed.). *New Directions in Geometry Education*. Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T, pp. 33-42.
- GUTIÉRREZ, A. (1998) *Las Representaciones planas de Cuerpos 3-Dimensionales en la Enseñanza de la Geometría Espacial*. In *Revista EMA*. Bogotá, Colombia. V. 3, n. 3, pp. 193-220.
- HERSHKOWITZ, R. (1990) *Psychological Aspects of Learning Geometry*. In *A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. ICMI Study Series. Edited by Pearl e Keremy Kilpatrick.
- HERSHKOWITZ, R. e VINNER, S. (1984) *The Role of Critical and Non Critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts*. In *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (ed.) Rina Hershkowitz, pp.223-228. Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.
- HERSHKOWITZ, R.; BRUCKHEIMER, M. e VINNER, S. (1994) *Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva*. In LINDQUIST, M. M. e

- SHULTE, A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*, pp. 273-289. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- HOFFER, A. (1977) *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization*. Palo Alto: California: Creative Publications.
- HOFFER, A. (1990) *La geometría es más que demostración*. Notas de Matemática, 29, pp.10-24.
- IMENES, L. M. P. e LELLIS, M. (1997) *Matemática Oitava Série*. São Paulo: Editora Scipione Ltda.
- IMENES, L. M. P. et al (1992) *Geometria*. São Paulo: Atual. (Prá que serve matemática?).
- IMENES, L. M. P.(1988) *Geometria dos Mosaicos*. São Paulo: Editora Scipione Ltda.
- IMENES, L. M. P.(1989) *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática*. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).
- INHELDER, B. e CAPRONA, D. (1992) *Vers le Constructivisme Psychologique: Structures? Procédures? Les deux indissociables*. In: INHELDER, B., CELLÉRIER, G., et al. *Le cheminement des découvertes de l'enfant. Recherche sur les microgèneses cognitives*. Paris: Delachaux et Nietlé.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS (INEP).(1997) Ministério da Educação – MEC. Dados do SAEB/97 [on-line]. Disponível na Internet via WWW: <http://www.inep.gov.br/saeb/saeb97/saeb97.htm>. Arquivo capturado em 21 de outubro de 1999.
- JALLES, C. M. C. R. (1997) *O efeito de instruções sobre estratégias metacognitivas de crianças pré-escolares em solução de problema geométrico: um estudo exploratório*. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação de Mestrado).
- KALEFF, A. M. M. R. (1994) *Tomando o Ensino da Geometria em Nossas Mãos*. In *Educação Matemática em Revista*. Blumenau: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano II, n. 2. pp 19-25.

- KALEFF, A. M. M. R. (1998) *Vendo e Entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos*. Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense.
- KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M. e GARCIA, S. S. (1996) *Como Adultos Interpretam Desenhos e Calculam Volumes de Sólidos Construídos por Pequenos Cubos*. In *Zetetiké*. Campinas:UNICAMP/FE/CEMPEM. v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 135-152.
- KILPATRICK, J. (1994) *Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad*. In *Educación Matemática*. Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica. pp.1-18.
- KILPATRICK, J.; RICO, L. e SIERRA, M. (1992) *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Editorial Síntesis, SA.
- KLAUSMEIER, H. J. (1977) *Manual de Psicologia Educacional. Aprendizagem e Capacidades Humanas*. Traduzido por Maria Célia Teixeira de Abreu. São Paulo: Harper e Row do Brasil.
- KLINE, M. (1976) *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo: IBRASA.
- KOSSLYN, S. M. (1980) *Image and mind*. London, GB: Harvard U. P.
- LEAN, G. A e CLEMENTS, M. A. (1981) *Spatial ability, visual imagery and mathematical performance*. In *Educational Studies in Mathematics* 12 (1), pp.1-33.
- LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P (1994) *Aprendendo e Pensando Geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- LLINARES, S. (1995) *Del Conocimiento sobre la Enseñanza para el Profesor al Conocimiento del Profesor sobre la Enseñanza: Implicaciones en la formación de profesores de Matemáticas*. In L. BLANCO y V. MELHADO (coord.). *Las Formaciones del Profesorados de Ciencias y Matemáticas en España e Portugal*. Badajoz, España: DDCEDM.
- LOPES, M. L. M. L. e NASSER, L. (org.) (1996) *Geometria: Na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ.

- LORENZATO, S. (1993) *Os "Por Quês" Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores*. In *Pró-Posições*, volume 4, n.1[10], Campinas: FE/UNICAMP.
- LORENZATO, S. (1995) *Por que não Ensinar Geometria?* In *A Educação Matemática em Revista*, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM.
- LOVELL, K. (1988) *O Desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos e Científicos na Criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. (1986) *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- LUJAN, M. L. S. e FINI, L. D. T. (1997) *Trabalhando a Geometria na pré-escola*. In *Anais do XIV Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*. Águas de Lindóia: PROEPRE/UNICAMP/LPG, p. 214.
- MACEDO, L. de. (1994) *Ensaio Construtivistas*. São Paulo: Casa do Psicólogo.
- MATOS, J. F. (1992) *Atitudes e Concepções dos Alunos: Definições e Problemas de Investigação*. In *Educação Matemática*, coleção Temas de Investigação, Instituto de Investigação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação, Lisboa.
- MCDONALD, J. L. (1982) *The Role of Cognitive Stage in the Development of Cognitive Structures of Geometric Content in the Adolescent*. (Dissertação de Doutorado). State University of New York at Albany, 1982. Dissertation Abstracts International 43: 733A.
- MCGEE, M. G. (1979) *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. *Psychological Bulletin* 86.5, pp. 889-918.
- MEIRA, L. (1994) *Análise Microgenética e Videografia: Ferramentas de Pesquisa em Psicologia Cognitiva*. *Temas em Psicologia* (3), pp. 59-71.
- MESCHKOWSKI, H. (1965) *Evolution of mathematical thought*. San Francisco.
- MIGUEL, A. (1997) *As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*. In *Zetetiké*. Campinas: UNICAMP – FE – CEMPEM. v. 5, n. 9, julho/dezembro, pp. 73-105.

- MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. e MIORIM, M. Â. (1992). *Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?* In *Pro-Posições*, Campinas: UNICAMP/FE. v. 3, n. 1 [7], março, pp. 39-54.
- MISKULIN, R. G. S. (1994) *Concepções Teórico-Metodológicas Baseadas em Logo e Resolução de Problemas para o Processo Ensino-Aprendizagem da Geometria*. Campinas: UNICAMP (Dissertação de Mestrado).
- MISKULIN, R. G. S. (1999) *Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria*. Campinas: Faculdade de Educação, UNICAMP (Tese de Doutorado).
- MITCHELMORE, M. C. (1976) *Cross-cultural research on concepts of space and geometry*. In MARTIN, J. L. y BRADBARD, D. A. (eds.) *Space and Geometry*. (ERIC: Columbus, USA), pp.143-184.
- MITCHELMORE, M. C. (1980) *Prediction of developmental stages in the representation or regular space figures*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (2), pp.83-93.
- MORIN, E. (1990) *Ciência com Consciência*. Portugal: Publicações Europa-América Ltda.
- MOURA, A. R. L. de. (1995) *A medida e a criança pré-escolar*. Campinas: UNICAMP (Tese de Doutorado).
- MOURA, M. O. de. (1992a) *O professor em formação*. São Paulo: Faculdade de Educação-USP. (Texto fotocopiado).
- MOURA, M. O. de. (1992b) *O Jogo e a Construção do Conhecimento*. In *O Jogo e a Construção do Conhecimento na pré-escola*. São Paulo: FDE. Diretoria Técnica. Série Idéias, n.10.
- MOURA, M. O. de. (1993) *Professor de Matemática: a Formação como Solução Construída*. In *Revista de Educação Matemática*. São Paulo: SBEM. Ano 1, n. 1, setembro.
- MOURA, M. O. de. (1994) *A Atividade de Ensino como Unidade Formadora*. Faculdade de Educação - USP.(Texto fotocopiado).

- NASSER, L. (1992) *Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil*. Tese de Doutorado, King's College, Universidade de Londres.
- NASSER, L. e SANT'ANA, N. F. P. (coord.). (1998) *Geometria Segundo a Teoria de van Hiele*. Rio de Janeiro: IM/UFRJ – Projeto Fundação-SPEC-PADCT-CAPES.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Tradução portuguesa. Portugal: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- OLIVEIRA, L. T. F. de. (1998) *Habilidades Especiais Subjacentes às Atividades de Discriminação e Composição de Figuras Planas Utilizando o Tangram e o Tegram*. Campinas: UNICAMP (Dissertação de Mestrado).
- PAIS, L. C. (1994) *A Representação dos Corpos Redondos no Ensino da Geometria*. In *Zetetiké*. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano 2, n. 2, março, pp. 13-23.
- PAIS, L. C. (1996) *Intuição, Experiência e Teoria Geométrica*. In *Zetetiké*. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. V. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74.
- PALLASCIO, R. et al. (1985) *Typologie des habiletés perceptives d'objets polyédric*, CIRADE, n. 6, Universidad de Quebec.
- PAPERT, S. (1987) *A critique of technocentrism in thinking about the school of the future*. Conference: Children in an Information Age: Opportunities for Creativity, Innovation & New Activities, Sofia, Bulgaria, may (text photocopied).
- PARRA, C. e SAIZ, I. (org.) (1996) *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- PARZYSZ, B. (1988) "Knowing" vs "Seeing". *Problems of the plane representation of space geometry figures*. In *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 79-92. D. Reidel Publishing Company.
- PASSOS, C. L. B. (1995) *As Representações Matemáticas dos Alunos do Curso de Magistério e suas Possíveis Transformações: Uma Dimensão Axiológica*. Campinas: UNICAMP (Dissertação de Mestrado).

- PASSOS, C. L. B. (1998) *A Importância da Visualização em Situações Práticas de Resolução de Problemas Geométricos*. In Anais do VI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. São Leopoldo: SBEM/UNISINOS. v. 2, pp. 633-635.
- PASSOS, C. L. B.; MISKULIN, R. G. S. e GRANDO, R. C. (1997) “*A Dimensão Microgenética de Representações Geométricas em situações de Resolução de problemas*”. In Anais do XIV Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Águas de Lindóia: PROEPRE/UNICAMP, p. 218.
- PAVANELLO, R. M. (1989) *O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica*. Campinas: UNICAMP (Dissertação de Mestrado).
- PAVANELLO, R. M. (1993) *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências*. In *Zetetiké*. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano 1, n. 1, março, pp. 7-17.
- PEREZ, G. (1991) *Pressupostos e Reflexões Teóricas e Metodológicas da Pesquisa Participante no Ensino de Geometria para as Camadas Populares*. Campinas: UNICAMP (Tese de Doutorado).
- PERSPECTIVES ON THE TEACHING OF GEOMETRY FOR THE 21ST CENTURY. (1995) In *Education Studies in Mathematics*, n. 28, pp.91-98. Belgium: Kluwer Academics Publishers.
- PHAM, F. e DILLINGER, H. (1996) *Algèbre lineaire I*. Paris: Diderot Editeurs, Arts et Sciences.
- PIAGET, J. (1937) *A Construção do real na criança*. Tradução Álvaro Cabral, 2ª ed. (1975). Rio de Janeiro: Zahar.
- PIAGET, J. (1964) *Seis Estudos em Psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária (ed. 1978).
- PIAGET, J. (1967) *Psicologia da Inteligência*. Rio de Janeiro: Zahar.
- PIAGET, J. (1977) *Piaget por Piaget*. (Texto fotocopiado da transcrição do filme – tradução s/autoria).

- PIAGET, J. e ALBERTINI, B. von. (1950-1952) *Recherches sur le Développement des Perceptions. XI. L' Illusion de Muller-Lyer*. Genebra: Arch. Psychol. 33, pp.1-48.
- PIAGET, J. e colaboradores. (1995) *Abstração Reflexionante*. Tradução: Fernando Becker e Petronilla B. G. Silva. Porto Alegre: Artes Médicas.
- PIAGET, J. e GARCIA, R. (1987) *Psicogênese e História das Ciências*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1956) *The Child's Conceptions of Space*. New York: W. W. Norton & Co.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1967) *Psicologia da Primeira Infância: Desenvolvimento psíquico desde o nascimento até os sete anos*. In *Psicologia das Idades*. Rio de Janeiro: Zahar (edição de 1977).
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1977) *A Imagem Mental na Criança*. Porto: Livraria Civilização - Editora.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1993) *A Representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1995) *A Psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil S.A. (14ª ed.).
- PIAGET, J.; MAIRE, F. e PRIVAT, F. (1953-1954) *Recherches sur le Développement des Perceptions. XVIII. La Résistance des Bonnes Formes à l' Illusion de Müller*. Genebra: Arch. Psychol., pp.155-201.
- PIÉRON, H.(1957) *Vocabulaire de la Psychologie*. Paris: PUF.
- PIMENTA, S. C. e GONÇALVES, C. L. (1988) *Diretrizes Gerais para a Habilitação do Magistério 2º grau*. Projeto do convênio MEC/SEC/PUC/SP.
- PIROLA, N. A. (1995) *Um Estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau*. Campinas: UNICAMP (Dissertação de Mestrado).
- PONTE, J. P. da. (1992) *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação*. In *Educação Matemática*, coleção Temas de Investigação, Instituto

- de Investigação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação, Lisboa.
- POZO, J. I. (org.) (1998) *A Solução de Problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- PRESMEG, N. C. (1986) *Visualisation in High School Mathematics*. In *For the Learning of Mathematics* 6, 3, November. Montreal, Quebec, Canada: FLM Publishing Association, pp. 42-46.
- RADICE, L. L. (1971) *A Matemática de Pitágoras a Newton*. Lisboa: Edições 70. (Biblioteca Básica de Ciência).
- REGGINI, H. C. (1985) *Ideas y Formas: Explorando el espacio com Logo*. Buenos Aires: Ediciones Galápagos.
- RICCO, G., VERNAUD, G. e ROUCHIER, A. (1983) *Representation du volume et arithmétisation – Entretiens individuelles avec des élèves de 11 à 15 ans*. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1), pp.27-69.
- RIO DE JANEIRO. (1993) *Mapas e Vistas* (vídeo). Curso Livre de Atualização de Conhecimentos: Matemática. Rio de Janeiro: Secretaria da Extraordinária de Projetos Especiais.
- RIVEROS ROCO, M. e ZANOCCO SOTO, P. (1992) *Geometria: Aprendizaje y Juego*. Santiago (Chile): Ediciones Universidad Católica de Chile.
- RODRIGO, M. J. e ARNAY, J. (org.) (1998) *Conhecimento Cotidiano Escolar e Científico: Representação e Mudança*. Tradução Cláudia Schilling. Série Fundamentos. A Construção do Conhecimento Escolar 1. São Paulo: Editora Ática.
- RODRIGO, M. J. e ARNAY, J. (org.) (1998) *Domínios do Conhecimento, Prática Educativa e Formação de Professores*. Tradução Cláudia Schilling. Série Fundamentos. A Construção do Conhecimento Escolar 2. São Paulo: Editora Ática.
- ROSHELLE, R., JORDAN, G., GREENO, J. KATZENBERG, B. & DEL CARLO, C. (1991) *Preliminary report on classroom observations*. Relatório técnico apresentado ao *Institute for Research on Learning (IRL)*. Palo Alto, CA, EUA.

- SANGIACOMO, L. (1996) *O processo da mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica – Uma engenharia didática com auxílio do Cabri-géomètre*. São Paulo: PUC (Dissertação de Mestrado).
- SANTOS FILHO, O. F. dos. (1996) *A Importância da visualização e da construção de modelos concretos para o ensino-aprendizagem da Geometria*. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula. (Dissertação de Mestrado).
- SÃO PAULO. (1985) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. *Atividades Matemáticas; 3ª série do 1º grau* (2ª ed). São Paulo: SE/CENP.
- SÃO PAULO. (1988) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º grau*. São Paulo: SE/CENP.
- SÃO PAULO. (1990) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério*. São Paulo: SE/CENP.
- SÃO PAULO. (1990) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2º grau*. São Paulo: SE/CENP.
- SÃO PAULO. (1993) *Diretrizes Gerais para a Implantação da Proposta de Reformulação dos Cursos de Magistério*. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação/CENP.
- SÃO PAULO. (1994) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudo e Normas Pedagógicas. *Matemática – 2º Grau: geometria 1*. São Paulo: SE/CENP. v. 2 (Prática Pedagógica, 2).
- SARESP. (1996) Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo/Secretaria da Educação. n. 1 (novembro). São Paulo: FDE.
- SARESP. (1997) Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo/Secretaria da Educação – n. 1 (abril). São Paulo: FDE.
- SHOELFELD, A. H. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

- SILVA, R. N. da et al. (1991) *Formação de professores no Brasil: um estudo analítico e bibliográfico*. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, REDUC.
- SOARES, M. G. (coord.). (1978) *Geometria Experimental: livro do aluno*. São Paulo: MEC/IMECC/PREMEN/SE/CENP, v. 1 e 2.
- SOLLER, G. G. (1991) *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis S.A.
- TARTRE, L. (1990) *Spatial orientation skill and mathematical problem solving*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, pp.216-229.
- THOM, R. (1971) *Matemática Moderna: um erro educacional e filosófico?* In: *American Scientist*, 59 (6), pp.695-699. Tradução de circulação restrita SCANAVINI, R.A.
- USISKIN, Z. (1994) *Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar*. In LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- VALENTE, J. A. (org.) (1993) *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP.
- VURPILOT, E. (1976) *The Visual Word of the Child*. Londres: George Allen & Unwin.
- WÜRSTEN, H. (1947-1949) *Recherches surs le Développement des Perceptions. IX. L'Évolution des Comparaisons de Longueurs de l'Enfant à l'Adulte*. Genebra: Arch. Psychol. 32, pp.1-144.
- YACKEL, E. e WHEATLEY, G. H. (1990) *Promoting Visual Imagery in Young Pupils*. In *Arithmetic Teacher*, February, pp. 52-58.
- YACKEL, E.; COBB, P.; WOOD, T.; WHEATLEY, G. e MERKEL, G. (1990) *A importância da interação social na construção do conhecimento matemático das crianças*. In *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s – 1990 Yearbook*. NCTM. Tradução portuguesa de Lurdes Serrazina e Margarida Belchior. Lisboa: Educação e Matemática, n. 18, junho de 1991.
- YAKIMANSKAYA, I. S. (1991) *The development of spatial thinking in schoolchildren* (“Soviet Studies in Mathematics Education”, vol. 3). Reston, USA: NCTM.

UNICAMP
BIBLIOTECAS CENTRAIS
SEÇÃO CIRCULANTE