UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E O SEU PAPEL NO ENSINO DE FUNÇÕES: UMA VISÃO HISTÓRICA

Giácomo Augusto Bonetto

Orientadora: Profª Drª Maria do Carmo Domite Mendonça

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Giácomo Augusto Bonetto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data 26 / 08 / 99

Assinatura: M Mendes

Orientadora

COMISSÃO JULGADORA:

M Mendes

Nilson José Machado

Maria Angela Miorim

1999

CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

B641c

Bonetto, Giácomo Augusto.
A construção da representação gráfica e o seu papel no ensino de funções : uma visão histórica / Giácomo Augusto. -- Campinas, SP : [s.n.], 1999.

Orientador : Maria do Carmo Dômite Mendonça.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Matemática - História. 2. Livros didáticos. 3. Funções (matemática). 4. Educação – História. 5. *Representações gráficas. I. Mendonça, Maria do Carmo Dômite II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Resumo

Neste trabalho investigamos a constituição da representação gráfica de funções no processo da história da matemática, procurando compreender seu papel histórico no ensino de funções. A investigação sob uma perspectiva histórica foi orientada pelo estudo teórico de textos clássicos da história da matemática mundial, perpassando livros didáticos usados no ensino brasileiro, desde o final do século XIX até a última década do século XX.

De modo a analisar fatos significativos sobre as representações gráficas presentes nos livros didáticos, tomamos um caminho qualitativo de cunho teórico, com categorias elaboradas a partir da articulação entre a leitura histórica e evidências que emergem da investigação em livros didáticos.

Resultados oriundos da nossa incursão pela história da matemática permitiram caracterizar a gênese da representação gráfica na antigüidade grega por meio da elaboração dos sistemas de coordenadas, assim como, discutir o aspecto funcional das representações gráficas na Idade Média. Tal tentativa de reconstituição histórica possibilitou analisar as contribuições dos estudiosos renascentistas para o desenvolvimento da geometria analítica e representações gráficas, bem como avaliar a consolidação, sofisticação e início do ensino sistemático desses conteúdos, notados a partir do século XVII na Europa. Com apoio da abordagem histórica procuramos resgatar a evolução do ensino das representações gráficas no Brasil por meio da análise de livros didáticos de autores, de algum modo, considerados influentes.

Abstract

In this work we investigate the constituition of the functions' graphical representation in the Mathematics history's process and we try to understand its historic paper in the funciton's teaching. The investigation in an historic perspective was oriented by the theoric study of the world Mathematic's history's classic texts passing by the didatic books used in the brazilian teaching, since the end of the XIX century till the last decade of the XX century.

To analyse significatives facts about graphical representations in the didactic books we take the theorethical qualitative way with the elaborated categories from the articulation between the historic reading and the evidences that emerge from the investigation in didatic books.

The results proceeding of our incursion to the Mathematic's history permited to caracterize the genesis of the graphical representation in the greek ancient times through the elaboration of the coordinates systems and to discuss the functional aspect of the graphical representations in the Middle Age. Such historic reconstituition's attempt made possible to analyse the renaissance studious contributions to the development of the analytical geometry and graphical representation as well as to evaluate the consolidation, the sofistication and the beginning of the systematic teaching of these contents, noted since the XVIII centur in Europe. With the help of the historic abordage we try to redeem the teaching evolution of the graphical representation in Brazil through the analyse of the author's didatic books, by the way, they are considered influential (the authors).

Para meus pais,
Juvenal e Darci,
por todo seu Amor,
dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as bênçãos e graças concedidas durante este trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido.

À minha orientadora Profª Drª Maria do Carmo Domite Mendonça, por tudo! Por ter acreditado em mim e em meu trabalho. Por ter aceitado me orientar. Pela dedicação e incontáveis horas de atenção e orientação. Pelo incentivo, estímulos e força constantes. Por ajudar a traçar da melhor maneira o mapa e ajudar a caminhar olhando sempre para todas as belezas e riquezas do caminho. Pela amizade e compreensão maternas.

Aos membros da douta Banca, em especial à Profª Drª Maria Ângela Miorim e ao Prof. Dr. Nilson José Machado, pelos inestimáveis conselhos e por toda atenção dispensada.

Aos meus familiares, em especial a Josi e Estêvão, pelo apoio, incentivo e carinho fraternos. Também, ao Cláudio, à Márcia, à *Nenê*, ao *Mininão*, ao *Loirinho*, ao Joel e Jorge, pelo apoio, incentivo e carinho.

À Cláudia, pela *presença* e *compreensão* em todas as horas.

À Profª Eliana Maria Zanuni, que sempre me incentivou a descobrir as belezas da Matemática e do Magistério, por subtrair dúvidas, somar esperanças, dividir tristezas, e multiplicar alegrias, ... Neste trabalho, pela ajuda, esclarecimentos e disponibilidade irrestritas, em especial na realização das entrevistas no período anterior ao exame de qualificação.

Ào Prof. Marcos Fernando Orlando, pela amizade e acolhida fraternas, por todos os incontáveis almoços, por compartilhar dúvidas e certezas, por toda a força, ... Neste trabalho, pela ajuda, esclarecimentos e disponibilidade irrestritas, em especial na realização das entrevistas no período anterior ao exame de qualificação.

A todos os professores do programa de Pós Graduação da Faculdade de Educação que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores dos grupos de pesquisa do CEMPEM/PRAPEM, em ordem alfabética, Anna Regina Lanner de Moura, Antônio Miguel, Dario Fiorentini, Dione Lucchesi de Carvalho, Maria Ângela Miorim, pelas preciosas orientações, gratuitas atenções e revigorantes estímulos, que proporcionaram muito ânimo e ajuda no caminhar.

Aos colegas dos grupos de pesquisa do CEMPEM/PRAPEM, em ordem alfabética, Adair Mendes Nacarato, Arlindo José de Souza Junior, Celi Aparecida Espasandin Lopes, Dulce Maria Britto Abreu, Ettiêne Guécios De Domênico, Frederico da Silva Reis, Gilberto Francisco Alves de Melo, Maria do Carmo Mendonça, Paulo César Oliveira, Renata Anastácio Pinto, Roseli de Alvarenga Corrêa, Vera Lúcia Figueiredo, Valéria de Carvalho e Wilton Sturm, pelas valiosas e espontâneas considerações que proporcionaram muito alento, direção no caminhar.

Ao Prof. José Carlos Putnoki - *"Jota"* - pelo acesso irrestrito à sua bela coleção de livros, pelos importantíssimos esclarecimentos a respeito dos livros didáticos de Matemática, franceses e brasileiros, e pelo profundo incentivo ao meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio, ao Prof. Ms. Antonio José Lopes "Bigode", ao Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente e ao Prof. Dr. Rui Madsen, pelos inestimáveis esclarecimentos a respeito da História da Matemática no Brasil, bem como dos livros didáticos brasileiros.

À Cláudia de Oliveira Facuri pelos inestimáveis esclarecimentos a respeito da História das últimas três décadas.

À Nadir, Marina e Vanda, da secretaria da Pós Graduação da Faculdade de Educação, pela resignada atenção dispensada e pelo excelente trabalho realizado.

A todos os funcionários da Biblioteca Professor Achille Bassi – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC – USP – São Carlos) - onde pude encontrar e consultar a coleção dos livros pertencentes ao Professor Odelar Leite Linhares. Em especial, agradeço à Gláucia Maria Saia Cristianini – Diretora Técnica da Biblioteca – por permitir a consulta de maneira irrestrita; à Juliana de Souza Moraes – responsável pela Seção de Tratamento de Informação – pela atenção, esclarecimentos e ajuda sempre solícitas; à Srª Maria e à Srª Gislene, que em muito ajudaram no processo de reprodução dos textos originais; e à Srª Giselda sempre muito atenciosa na recepção da biblioteca.

A todos os funcionários da Biblioteca da Faculdade de Educação da UNICAMP, pela pronta atenção dispensada nas inúmeras consultas ao acervo e em especial a Rose pelos esclarecimentos quanto às normas de publicação.

A todos os funcionários da Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP – pela pronta atenção dispensada nas consultas ao seu acervo.

A todos os funcionários da Biblioteca da Faculdade de Educação e da Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística – USP / São Paulo – pela pronta atenção dispensada nas consultas aos seus respectivos acervos.

À Josi Bonetto Russoni, por todos os serviços, em especial os realizados com o Scanner, prestados de maneira irrestrita, ágil e eficaz, durante a etapa final do trabalho.

À Profª Aparecida Yembo e à Profª Dulce Maria Peixoto, pelas cuidadosas revisões ortográfico/gramaticais realizadas nos textos elaborados durante a pesquisa.

Ao Marcos Levi, pelas incansáveis e incondicionais assistências técnicas nos momentos em que o computador "fez charme".

Ao José Nelson Bonetto e ao Fabiano Bonetto, pelos serviços prestados com o Scanner.

A todos aqueles que sempre me ajudaram e acreditaram no meu trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Na matemática, bem como no seu ensino, existem inúmeras maneiras de se representar e compreender o conceito de função – uma delas é a representação gráfica. Uma investigação do papel da representação gráfica no ensino de funções – e em outros campos do ensino da matemática – pode indicar o valor desta forma de expressão do pensamento matemático.

Nessa perspectiva, elegemos a representação gráfica como tema da nossa pesquisa, acreditando no valor deste recurso, tanto no âmbito exploratório, como no pedagógico.

Na verdade, no âmbito exploratório encontramos os mais variados caminhos de pesquisa. Ao nos depararmos com as várias possibilidades de investigação suscitadas pelo tema, o caminho da abordagem histórica se mostra extremamente rico, desafiador e inspirador.

De fato, ao explorarmos os conceitos relativos à representação gráfica de funções, sob uma perspectiva histórica, a beleza e a grandeza do tema se confirmam a cada fato novo revelado.

Muitas questões emergem no campo do estudo das representações gráficas de funções e, com um olhar voltado à história, parece valioso tentar compreender como se constituíram tais representações no processo da história da matemática. Ainda mais, tentar reconhecer o papel histórico das representações gráficas no ensino de funções, pode nos remeter a uma investigação muito rica e extremamente prazerosa.

Organizando nossa trajetória de pesquisa apresentamos neste texto quatro capítulos:

No primeiro capítulo esboçamos alguns conceitos gerais a respeito das representações gráficas de funções e procuramos esclarecer como foram norteados nossos passos de investigação histórica.

Iniciamos, no segundo capítulo, a exploração histórica, onde buscamos caracterizar a gênese da representação gráfica, por meio dos sistemas de coordenadas na antigüidade grega; voltamo-nos então, ao aspecto funcional das representações gráficas na Idade Média; analisamos em seguida, as contribuições dos estudiosos renascentistas, o que possibilitou estudar a consolidação, sofisticação e início do ensino sistemático desses conteúdos, notados a partir do século XVII na Europa.

Adentramos, no terceiro capítulo, no campo da história da matemática escolar brasileira e procuramos reconstituir, por meio da análise de livros didáticos, como se deu o ensino das representações gráficas no Brasil, do final do século XIX até a primeira metade do século XX.

Concluímos nossa trajetória, analisando, no quarto capítulo, as representações gráficas em alguns livros didáticos da última década do século XX.

CAPÍTULO 1

UMA RECONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA: O PAPEL NO ENSINO DE FUNÇÕES SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

> *Quando ele faz a tabela, ele pode chegar à seguinte conclusão, "os resultados dão sempre pares" então ele já vai generalizar: "conjunto imagem, números pares!" vamos dizer... Quando você coloca o gráfico para que ele identifique, no gráfico, é uma dificuldade tremenda!!! O domínio tudo bem. Ele lê bem o domínio... Que tipo de número você usou? Tudo bem... Mas na imagem é uma 'coisa' impressionante como eles erram!*
>
> *Profª Eliana Maria Zanuni*[1]

> *Agora é o que eu disse; para cada funçãozinha eu trabalho com um gráfico! Eu não consigo dar uma aula de função se eu não puser um gráfico na lousa, não tem jeito. É fundamental, o 'cara' tem que aprender a enxergar graficamente a função. É complicado ...*
>
> *Prof. Marcos Fernando Silveira Orlando*[2]

1. Representação gráfica no ensino de funções: algumas abordagens

O estudo sobre o ensino de funções tem se mostrado, no âmbito da Educação Matemática, um campo fecundo para os mais variados tipos de investigação. Pesquisas envolvendo a aquisição e as dificuldades da compreensão do conceito de função pelos alunos, conhecimento profissional e crenças dos professores em relação a esta noção matemática, aspectos cognitivos e socioculturais e o ensino de

---

[1] As citações, na abertura de cada capítulo, foram extraídas das entrevistas realizadas com a Profª Eliana Maria Zanuni em 08/04/98 e com o Prof. Marcos Fernando Silveira Orlando em 27/03/98. Tais entrevistas seriam analisadas, com o intuito de investigar a concepção de tais professores com respeito à representação gráfica para o ensino de função, entretanto após o Exame de Qualificação, optamos por desenvolver o estudo histórico em detrimento da análise de tais entrevistas e de outras atividades.

[2] Idem

funções, softwares utilizados como ferramentas para o ensino de funções, entre outros, são exemplos das múltiplas abordagens de pesquisa evocadas pelo tema "ensino de funções" e; em termos de ensino-aprendizagem, os estudos da representação gráfica, nas várias abordagens citadas, assumem um importante papel, tanto no âmbito pedagógico como no campo exploratório.

Desse modo, no caso específico das funções matemáticas, o que nos motiva a ilustrar nosso texto com aspectos pedagógicos a respeito do ensino de funções e das representações gráficas é, de certo modo, a notória especificidade de cada temática de investigação citada.

Nesta perspectiva, vale ressaltar que o desenvolvimento do processo de construção do conceito de função espera uma articulação do conhecimento do educando com conhecimentos matemáticos que envolvem entre outros: a *noção de variável* – relacionada às grandezas quantitativas; *a noção de dependência* – entre grandezas variáveis; a *noção de regularidade* – em fenômenos e situações reais, ou ainda em estruturas ou conjuntos de 'entes' construídos matematicamente (padrões geométrico, seqüências numéricas, etc.); e a *noção de generalização* – dos fenômenos que ocorrem com certa regularidade.

No mesmo sentido, para a construção do conceito de função, é necessário que o aluno esteja familiarizado com as *representações de função*: *representações gráficas* – onde a ênfase está nos gráficos, figuras, diagramas e tabelas; *representações analíticas* – expressões e símbolos matemáticos que comuniquem matematicamente; *representações verbais* – palavras oral/escrita que comuniquem tal relação.

Sob a nossa apreciação, a representação gráfica pode ser entendida como parte necessária, tanto na representação como no processo de construção e entendimento do conceito de função.

Outro aspecto a ser lembrado, no contexto *funções,* é o estabelecimento de *níveis de compreensão deste conceito matemático.* BERGERON & HERSCOVICS (1982) distinguem quatro níveis de compreensão: *intuitiva; matematização inicial; abstração do conceito; e formalização.*

Desse modo, a ilustrar o estudo de Bergeron e Herscovics, sob a influência de outras discussões neste contexto, destacamos, numa breve análise, a representação gráfica, nos quatro níveis de compreensão apresentados. Tal análise, naturalmente, também reflete a nossa compreensão de representação gráfica – em especial da construção/interpretação/análise de gráficos – de um aspecto específico do conceito de função.

No *nível da compreensão intuitiva,* podemos situar a construção e a interpretação de tabelas e gráficos mais simples, como os gráficos estatísticos de barras, colunas e setores. No *nível da matematização inicial,* localizamos as interpretações e a construções de gráficos cartesianos mais simples, como os das funções lineares. Já no *nível da abstração do conceito,* encontramos a construção e interpretação de gráficos convencionais e não-convencionais. Finalmente, no *nível da formalização,* situamos a classificação das funções mediante a interpretação dos gráficos cartesianos.

De modo geral, sob esta análise, a representação gráfica pode ser entendida como um componente, com características próprias, de cada um dos níveis que compõem o processo de construção do conceito de função.

Em termos ainda da articulação entre a conceituação e a representação gráfica de funções, FERREIRA (1998, p. 3) primeiramente chama a atenção sobre a utilidade prática da representação gráfica ao afirmar que *não é difícil encontrar informações representadas por gráficos, tais como em jornais, revistas, etc.* o que nos leva a supor, que uma das motivações dessa utilização é o fato de que tal representação é usada *como um meio onde o acesso à informação é facilitada.*

Em contrapartida, FERREIRA (1998, p.3) ainda considera as posições de pesquisadores que defendem que *a interpretação de gráficos não é tão fácil* e, lembram ainda, *que o uso da representação Cartesiana tem tanto o potencial de obscurecer quanto o de facilitar o entendimento de conceitos necessários para a sua interpretação* o que naturalmente, nos remete à reflexão sobre a dualidade do potencial da representação gráfica. Para tal reflexão, vale ressaltar pesquisas como as de ESPINOSA (1995), DUVAL (1994), e BISHOP (1983).

Neste sentido, ESPINOSA (1995, p.64) ao estudar as dificuldades da passagem de uma representação gráfica para uma representação de um contexto real, esclarece que *a articulação de uma representação a outra tem a ver com o processo de associar mentalmente – preservando o significado – as diferentes representações de um conceito*[3] e nos alerta sobre a *importância de investigações que nos permitam esclarecer os processos de articulação entre diferentes representações do conceito de função*[4]. ESPINOSA (1995, p.66)

Ainda nesta direção, após analisar sistematicamente vários aspectos que revelam as dificuldades dos alunos ao passar de uma representação para outra, DUVAL (1994) defende que

> as *representações gráficas exigem um trabalho de aprendizagem particular* e que *Não se pode remeter para sua utilização à interpretação espontânea e imediata que está ligada à percepção das figuras e imagens.*[5]

---

[3] A tradução do original, em espanhol, é minha.

[4] A tradução do original, em espanhol, é minha.

[5] A tradução do original, em francês, é de Osmar Schwarz e Sílvia D. A. Machado (PUC–SP).

Lembramos que DUVAL (1994) classifica as representações gráficas como "representações semióticas" no sentido de possuírem dois aspectos básicos e intimamente ligados, porém, distintos: a **forma** – ou o representante, neste caso, a representação gráfica das funções – e o **conteúdo** – ou o representado, neste caso, as funções.

Em seu trabalho, DUVAL (1994) salienta a importância do conteúdo *representado*, porém defende que: *é a forma das representações que comanda o tipo de tratamento que se pode dar* alertando que a *análise dos processos de compreensão e de aprendizagem matemática não pode então ignorar a importância do caráter semiótico das representações.*

Nessa temática, DUVAL (1994) ressalta importantes conceitos sobre os sistemas de representação e defende a idéia de que é importante estabelecer abordagens de ensino que explorem os vários aspectos e significados nos processos de mudança de uma representação à outra – por exemplo, da representação gráfica para a algébrica (escrita simbólica) e vice-versa.

Neste contexto, ainda explorando a dualidade da composição conteúdo/forma, DUVAL (1994) busca esclarecer aspectos importantes no campo da *"organização semiótica das representações"*; indicando que

> *O problema da aprendizagem das representações gráficas não concerne à diferenciação entre a forma e o conteúdo representado mas a discriminação das unidades significantes constituindo a forma, isto é a discriminação dos valores visuais pertinentes e valores visuais não pertinentes à figura-forma.*

Parece natural que à medida que refletimos sobre o potencial da representação gráfica, seu ensino/aprendizagem e seu papel no ensino de funções, outros componentes teórico-práticos da representação em estudo, chamem a atenção para discussão e análise.

É certo que um desses componentes é a **visualização**, e que de acordo com BISHOP (1980 e 1983), assume papel de destaque não só no ensino de funções, mas em todo o ensino da matemática, desde que entendamos a visualização de maneira ampla, isto é, como um agente tanto no campo da geometria como também no campo da álgebra e da aritmética.

É oportuno lembrar que BISHOP (1980 e 1983), ciente da complexidade dos conceitos relativos à visualização em matemática, contribui para a problemática da construção de habilidades por distinguir e explorar as idéias de *habilidade para interpretar informações figurais* e *habilidades para o processamento visual.* A primeira destas habilidades diz respeito a *'forma'* dos estímulos materiais, tais como os gráficos, diagramas, a representação gráfica de funções; enquanto, a outra, diz respeito aos *'processos'* de estímulo, tradução, transformação, e manipulação das informações visuais.

Assim, podemos, de algum modo, afirmar que as representações, no que se refere às pesquisas voltadas ao ensino/aprendizagem dos conceitos relativos a funções – como representações algébricas/simbólicas/analíticas, verbais/literais e gráficas/figurais/visuais – assumem um importante papel. Consideramos a riqueza de cada uma dessas representações e, particularmente, vislumbramos as representações gráficas como um tema rico e instigador para investigações e reflexões.

Conforme o exposto, parece natural reconhecer que a representação gráfica é vista como uma forma de organizar o pensamento matemático, como um tema amplo, complexo e de grande valor exploratório, o que foi notado após uma breve incursão por algumas de suas múltiplas abordagens de pesquisa – níveis de apreensão do conceito; utilização e utilidade da representação gráfica; dualidade do seu potencial no ensino; seu papel nas diferentes articulações com outras representações; caráter semiótico próprio; visualização como componente de sua construção e entendimento.

A seguir, moveremos nossos esforços para um outro enfoque, que ao nosso ver é tão importante quanto as abordagens citadas: a representação gráfica sob uma perspectiva histórica.

2. A Perspectiva Histórica

Quando se busca o caminho da pesquisa, é bastante comum encontrar introduções/especificações históricas associadas ao campo do conhecimento em questão ou à história mais geral - isso também pode ser verificado nas pesquisas em educação matemática. Por um lado, tais especificações buscam de um modo geral, contextualizar, ilustrar ou indicar os principais avanços conquistados pela humanidade na construção do objeto, ou tema, da pesquisa em questão. Por outro lado, tendem a situar os estudos e pesquisas atuais num contexto mais amplo de desenvolvimento científico/cultural e, de certa forma, inserem as contribuições e resultados mais recentes – além dos próprios resultados do estudo em questão – na própria história do objeto de pesquisa abordado.

Como se sabe, se um pesquisador em Educação Matemática tentar subsidiar, por exemplo, um estudo sobre a construção do conceito de *número*, não terá dificuldades em encontrar textos com abordagens históricas a respeito dos *números*. Entretanto, tal estudioso não terá a mesma facilidade se optar pelo estudo de outros conceitos matemáticos, como por exemplo, o *cálculo combinatório*. É claro que o tema *números* é mais abrangente que o *cálculo combinatório*, porém, devemos lembrar o quão interessantes e variadas são as matizes pedagógicas deste último tema, que também incita muitas pesquisas.

Neste sentido, a *representação gráfica de funções* é um tema cujas discussões e abordagens históricas são escassas e, como foi considerado, também se mostra interessante e revela muitas nuanças para discussão e estudo.

Naturalmente, um estudo histórico sobre um assunto não é motivado apenas pelo fato de preencher lacunas – no sentido de introduzir outras abordagens pedagógicas de estudo do mesmo tema. Parece mais natural entender o estudo histórico como algo mais abrangente no âmbito da investigação e, de modo restrito, como portador de métodos e abordagens de investigação específicas para seus próprios objetos de pesquisa.

Sempre é válido ressaltar que o resgate histórico de um tema, quando bem realizado, pode se apresentar como uma fonte precursora de conceitos e idéias para várias argumentações e articulações em diversos campos de atuação científica.

Sob esta perspectiva, detenhamo-nos em riquezas e limitações que uma abordagem histórica pode encaminhar e apresentar no âmbito da pedagogia da matemática. Nos últimos anos, alguns educadores têm discutido de modo crítico, apontando argumentos favoráveis e não favoráveis à postura pedagógica centrada no ensino da matemática por meio da história da matemática.

Neste sentido, MIGUEL (1997, p.75) aponta para o suposto caráter de motivação da história matemática, considerando o discurso de alguns estudiosos que defendem que o *conhecimento histórico dos processos matemáticos despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado*. Em seguida, o próprio autor enfraquece tal ponto de vista ao lembrar que o ensino da própria história não é automotivador, o que é facilmente verificado por muitos professores de história.

O autor também ressalta um argumento que coloca a história da matemática como uma base de apoio para fazer os alunos perceberem alguns aspectos gerais da matemática. Entre os vários aspectos considerados destaca-se aquele que considera a matemática como uma *criação humana* construída a partir de *necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas,* tendo conexões com a *filosofia; religião; lógica, etc.* MIGUEL (1997, p.77). Avaliando as limitações de tal argumentação, como feito no argumento anterior, MIGUEL (1997) nos lembra que é necessária a posse de uma história da matemática escrita de maneira adequada, para que o aluno realmente entenda as percepções citadas.

Outro ponto destacado em MIGUEL (1997), reconhece a história da matemática como *um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico.* MIGUEL (1997, p.83). Neste caso o autor esclarece que se o objetivo pedagógico for norteado pelo incentivo ao pensamento crítico, os defensores desta argumentação acreditam que tal objetivo pode ser alcançado por uma *reconstituição histórica que revelasse tão somente aquilo que é estritamente indispensável para o afloramento do jogo dialético, puro e sutil das idéias matemáticas.* MIGUEL (1997, p.83).

Sob esta perspectiva, o autor analisa o enfoque heurístico desta proposta e os aspectos lógicos e epistemológicos desse tipo de reconstituição histórica – cujo exemplo é o livro "Provas e Refutações" de Lakatos (1978) - alertando que neste caso *cabe à história apenas o papel secundário de fornecer o substrato real e bruto a ser destilado a fim de se obter como produto o puro jogo dialético das idéias* MIGUEL (1997, p.84).

Refletindo então, sobre o papel que a história passa a assumir, MIGUEL (1997, p.84) alerta que *Lakatos não apenas estabelece uma dicotomia entre história real e história destilada como também atribui um papel de destaque à segunda em relação à primeira.* Entretanto, MIGUEL (1997, p.85) considera a história destilada uma alternativa *superior em relação àquilo que os historiadores têm chamado de história-narrativa ou história-crônica,* mas chama a atenção para as limitações da reconstituição histórica com esse tipo de enfoque no que diz respeito ao seu processo de elaboração. Nas palavras de MIGUEL, tal reconstituição histórica:

> *enfatiza uma problematização meramente lógica e epistemológica do desenvolvimento de uma conjectura, conceito ou teoria. Nela, as idéias, processos e métodos aparecem voluntariamente desligados do contexto social mais amplo de sua produção, fazendo com que tal contexto desempenhe um papel pouco significativo (se é que desempenha algum papel) para a constituição da destilação.* MIGUEL (1997, p.85).

Vale lembrar em nossa reflexão, o argumento de que o enfoque histórico pode ser considerado como *um instrumento promotor de atitudes e valores* MIGUEL (1997, p.87). Tal argumento é atribuído a KLINE(1972) que defende, segundo MIGUEL (1997, p.87), a necessidade de se apresentar ao aluno *os erros, as lacunas e as hesitações por que passaram os grandes matemáticos na produção do conhecimento,* o que pode gerar no estudante *"o desenvolvimento de atitudes positivas, desejáveis tanto na formação do futuro pesquisador quanto na formação do cidadão* MIGUEL (1997, p.88). Entre as atitudes positivas, podemos citar a coragem, determinação e persistência para enfrentar e buscar soluções satisfatórias para os problemas.

A favor do uso no ensino de um encaminhamento pela história, a defesa que *a história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática* é mais um argumento importante, dos vários apresentados por MIGUEL (1997, p.90). Aqui, o autor ressalta a posição dos estudiosos defensores de um ensino que valorize a evolução histórica dos conceito matemáticos como balizadora da conduta pedagógica, no sentido de evidenciar a origem, os sucessivos obstáculos, a sofisticação, a aceitação, a compreensão, etc. de um certo conceito matemático apresentado ao aluno, buscando assim, a construção do significado de tal conceito pelo estudante.

De modo a encaminhar uma discussão mais crítica, no que se refere ao resultado do encontro da história e da pedagogia da Matemática, voltêmo-nos aos argumentos que têm contestado tal processo.

Ainda, segundo MIGUEL (1997, p.95), um entrave na pedagogia da matemática, pela sua história, é *a ausência de uma literatura adequada,* bem como *a natureza imprópria da literatura disponível,* o que dificulta um trabalho didático/pedagógico baseado na história; entretanto, MIGUEL (1997, p.95) salienta de maneira muito oportuna, que tais entraves devem ser entendidos como

> *um apelo à necessidade de constituição de núcleos de pesquisa em história da matemática dos quais façam parte historiadores, matemáticos e educadores matemáticos e outros profissionais que possam contribuir para a elaboração de reconstituições esclarecedoras de épocas, temas, situações e biografias.*

Ainda nesta perspectiva, MIGUEL (1997, p.95) esclarece que a natureza imprópria da literatura se deve ao fato das *publicações matemáticas destacarem unicamente os resultados matemáticos e ocultarem a sua forma de produção,* o que dificulta a reconstituição histórica a respeito de um tema – porém, segundo o mesmo autor, esta dificuldade deve ser encarada:

> *menos como uma barreira intransponível às iniciativas pedagógicas que buscam uma vinculação entre a história e a educação matemática, e mais como um estímulo à continuidade das investigações nesse sentido.* MIGUEL (1997, p.96).

GRATTAN-GUINNESS (1973), segundo MIGUEL (1997), também se mostra preocupado em relação à interação pedagogia e história, pois *mesmo pondo de lado os inevitáveis assuntos técnicos envolvidos, as crianças têm pouco ou nenhum sentido do progresso* *histórico, pelo menos não o possuem para os temas científicos que elas associam com as coisas imediatas* (GRATTAN-GUINNESS, 1973, p.449). Frente a tal ponto de vista MIGUEL (1997, p.98) desloca a discussão do campo da educação matemática para o campo da educação histórica e reflete sobre o *momento adequado para o início escolar do aprendizado da própria história.*

Neste sentido, vale refletir sobre a pergunta formulada por MIGUEL (1997, p.99):

> *... em que se basearia a crença de que as crianças e adolescentes poderiam aprender significativamente a matemática via história, se a compreensão da própria história acha-se, de partida comprometida?*

Ainda, discutindo tal obstáculo, o mesmo autor lembra outra limitação cognitiva da criança:

> ... a *incapacidade de dominar a duração, isto é, de ordenar os eventos sucessivos ou simultâneos. Isso decorreria do fato de a criança sentir-se impotente para desvencilhar-se do evento vivido e compará-lo com outros ou com algum outro tomado como referência ou, em outras palavras, dever-se-ia ao fato de ela viver no instante presente e no futuro.* MIGUEL (1997, p.99).

Em seguida, MIGUEL (1997, p.100) nos apresenta sua reflexão, mais uma vez voltada a considerar tais limitações com uma postura positiva, incentivando-nos a conciliar esforços para a superação de tais dificuldades – tanto no campo da educação histórica como no da educação matemática – iniciando a construção do pensamento histórico de maneira pedagogicamente adequada, buscando a superação dos obstáculos cognitivos apresentados de maneira gradativa e contínua:

> *Pois, se assim não fosse, isto é, se essa superação pudesse ocorrer de modo espontâneo, seria de se esperar que esse universo histórico*

> *estivesse franqueado ao adulto. ... Do mesmo modo como as experiências acumuladas pelo adulto num espaço vivido não o conduzem, necessariamente, às leis geométricas subjacentes a um espaço concebido; do mesmo modo como as freqüentes percepções de regularidades por parte do adulto – induzindo-o a generalizações – não o conduzem, necessariamente, às leis de transformação subjacentes à álgebra simbólica, assim também, a simples possibilidade de transferência afetiva e domínio da duração por parte do adulto não lhe franqueia, infalivelmente o acesso para a apropriação significativa do conhecimento histórico.*

Ao refletirmos sobre os argumentos reforçadores e contestadores, aqui apresentados, e levando em conta outros mais, acreditamos, assim como MIGUEL (1997, p.101), *que devemos encarar com uma certa prudência a suposta importância pedagógica da história.* Prudência pois acreditamos que o valor pedagógico de um tema/metodologia depende da forma como é desenvolvida e implementada – em nosso caso, a abordagem histórica no ensino da matemática.

Neste sentido, o mesmo autor nos esclarece que uma história ao ser pensada e reconstituída com preocupações pedagógicas, levando em conta os diversos fatores presentes *no processo de planejamento didático - pode e deve desempenhar um papel subsidiário em Educação Matemática, qual seja, o de um ponto de referência para a problematização pedagógica.* MIGUEL (1997, p.101).

Cabe-nos então a reflexão sobre o tipo de história que o educador matemático interessado deve primar. Tal reflexão passa pelo questionamento das preocupações e prioridades que um educador deve ter em mente ao optar por um estudo histórico.

Ainda em MIGUEL (1997, p.101), buscamos referências para analisar tais aspectos, pois tal autor defende que na busca de se estabelecer uma reconstituição histórica, o educador deve, ao fazê-la, *enfatizar a reconstituição, não apenas dos resultados matemáticos, mas sobretudo dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e* *cultural nos quais esses resultados se produziram* o que pode contribuir para uma aprendizagem da matemática mais significativa por parte do aluno.

Nesta mesma perspectiva, MIGUEL (1997, p.103) faz uma apreciação do tipo que encaminha a história, de modo a estabelecer pontos de referência para a prática pedagógica problematizadora em matemática:

> *Somente uma história da matemática pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica, vindo substituir as enfadonhas histórias evolutivas das idéias matemáticas, quase sempre desligadas das necessidades externas e/ou internas que estiveram na base de sua origem e transformação, poderia constituir-se em ponto de referência para uma prática pedagógica problematizadora em matemática que tivesse por meta uma problematização, entendida como simultaneamente lógica, epistemológica, metodológica, psicológica, sociológica, política, ética, estética e didática.*

Considerações como esta, em muito nos motiva na busca de uma história da matemática que possa ser interessante, apreciada e usada por professores e alunos. Estamos certos de que os obstáculos para articular e apresentar tal história são muitos, entretanto é muito gratificante e prazeroso enveredar nos caminhos da investigação histórica.

Naturalmente, poderíamos ainda listar outros motivos que justificam o estudo histórico, entre eles, a *consciência* de que os processos históricos, que motivaram/direcionaram e estabeleceram muitos dos fatos matemáticos, podem *esclarecer* o que nos motiva/direciona e faz estabelecer o que hoje estudamos e ensinamos aos nossos alunos.

Assim, considerando a importância e riqueza da representação gráfica de funções como tema de pesquisa, a escassez de textos didáticos com referências históricas a esse respeito e o valor pedagógico que uma *abordagem histórica pode assumir, decidimos estudar a representação gráfica de funções sob a perspectiva histórica.*

Na verdade, com o olhar voltado para os conceitos relativos à representação gráfica, é importante estabelecer duas perguntas que podem, de algum modo, nortear toda nossa incursão pela história: ***Como se constituiu a representação gráfica de funções no processo da história da matemática? É possível reconhecer o papel histórico da representação gráfica no ensino de funções?***

Parece natural, que para desenvolver as respostas ou pontuar indícios para tal, em nossa pesquisa vamos à procura de fatos, situações e indícios que apontaram motivos – necessidades, interesses, conveniências históricas, argumentos, entre outros – que encaminharam a representação gráfica de funções como um dos conteúdos indispensáveis ao desenvolvimento da matemática. Daí, emergem outras valiosas perguntas a respeito da representação gráfica como:

Quais suas origens? O que impediu seu desenvolvimento em determinadas épocas? Quais as necessidades históricas próprias deste sistema de representação? Quais os motivos históricos que determinaram sua aceitação? Quando e como foi impulsionado o seu ensino? O que motivou seu desenvolvimento e suas sofisticações?

Esperamos que o encaminhamento das respostas amplie nossa consciência sobre processos históricos que fundamentaram o desenvolvimento da representação gráfica de funções, possibilitando assim, maior competência para elaborar e avaliar tratamentos pedagógicos destes conceitos.

Em síntese podemos dizer que, o estudo histórico sobre um tema, quando entendido e feito de maneira ampla e adequada, assume um importante papel para a compreensão efetiva do objeto estudado. Muitos são os objetos matemáticos que carecem de uma investigação histórica mais adequada. Investigação que pode ser usada com objetivos pedagógicos específicos e estruturados, tornando-se um valioso recurso para a implementação de abordagens pedagógicas que considerem a história como indispensável na educação do cidadão. Buscar a constituição da representação gráfica de funções no processo da história da matemática, bem como tentar reconhecer o papel histórico da representação gráfica no ensino de funções, pode significar um avanço na direção de suprir os educadores de recursos para implementação de um ensino mais gratificante e uma aprendizagem mais significativa da matemática.

Nos próximo item, apresentaremos o tipo de fonte escolhida para nossa investigação histórica e as categorias de análise para o estudo da representação gráfica em seu desenvolvimento histórico-pedagógico.

3. Os Livros Textos como Artefatos na Exploração Histórica

De início, mesmo que possa parecer óbvio, vale lembrar o quão vasto é o campo da pesquisa histórica, assim como a variedade de abordagens que podem ser assumidas pelo historiador. Neste sentido, ROCHA (1982, p. 275), que em uma análise geral sobre a História, afirma que *o objecto da história tem variado ao longo dos séculos* e expõe tal variação destacando/classificando as principais matizes/tendências assumidas ao longo do tempo, dentre as quais a *Histórias narrativa*; a *pragmática*; *a pedagógica*; *a evolutiva*; *a sociológica e*; *a holística* (1982, p.275 e p.276).

Reconhecemos, também, que a investigação histórica tem estado atenta não somente a um evento, tratando-o de modo cronológico, mas tem como uma de suas preocupações fundamentais o estabelecimento das causas e fatos relacionados ao evento sob uma perspectiva criteriosa de análise.

Parece, então, natural entender que os historiadores têm diferentes preocupações importantes em seu trabalho de investigação e sob esta perspectiva, GARCIADIEGO(1996, p. 15) lembra a atenção/preocupação dos historiadores em discutir o *desenvolvimento técnico do pensamento científico,* procurando encontrar, sob essa abordagem, *entre outras coisas, os conceitos chaves que influenciaram no desenvolvimento das ciências.*[6]

Desse modo, parece desafiador e pertinente, em nosso estudo de cunho investigativo, desvendar os principais conceitos relacionados com a representação gráfica em sua evolução histórica. Para tanto, consideramos importante voltar nossa atenção aos meios adequados e necessários para responder as perguntas feitas no item anterior – em outras palavras, estaremos analisando as fontes geradoras da nossa pesquisa.

Assumimos para nosso trabalho, a classificação que GARCIADIEGO(1996) faz para as fontes históricas, que podem ser *primárias; secundárias, terciárias (ou n-árias).*

Por fontes primárias, consoante a GARCIADIEGO(1996, p. 17), entendemos aquelas *produzidas por aqueles que diretamente tomaram parte ou estavam presentes no momento* em estudo. (tradução minha). O autor esclarece:

> *Fontes primárias são aquelas que proporcionam dados diretos do passado. Estas fontes primárias são a matéria prima para a investigação, já que estas compreendem os trabalhos produzidos pelas próprias figuras históricas. Estas fontes incluem livros e artigos de investigação original, material inédito, correspondência pessoal, diários pessoais, escritos autobiográficos, fotografia, microfilmes, microfichas, filmes, etc. [...] As fontes primárias podem também consistir em comunicações verbais ou respostas; assim como críticas ou resenhas feitas por aqueles que participaram ou foram testemunhas dos eventos descritos.* GARCIADIEGO (1996, p.17 e p.18) (tradução minha).

---

[6] A tradução do original, em Espanhol, é minha.

Ainda sob influência de GARCIADIEGO (1996, p. 17), entendemos como fontes secundárias, aquelas que são resultado de um trabalho de interpretação sobre as fontes primárias, ou seja, *trabalhos baseados em fontes primárias.* (tradução minha). GARCIADIEGO (1996, p. 18) ressalta que:

> *As fontes secundárias são produzidas por historiadores profissionais que têm analisado o trabalho de uma figura histórica e o desenvolvimento de uma idéia particular ou teoria. Destes recursos incluem publicações históricas, tratados gerais e alguns livros textos. Estas, de um modo geral, contém uma cronologia crítica, interpretações históricas possíveis e resumos das fontes primárias mais importantes.*(Tradução minha)

Finalmente, as fontes terciárias (ou n-árias) são aquelas que se baseiam principalmente em fontes secundárias, e de acordo com GARCIADIEGO (1996, p. 20):

> *Em geral, o material de referência é fonte terciária ou n-ária. Podem incluir dicionários, enciclopédias, atlas, coleções bibliográficas, diretórios de periódicos e índices, guias periódicos e índices de periódicos, periódicos históricos, biografias de materiais, guias de resumos, catálogos de arquivos, entre muitos outros.* (Tradução minha)

As especificações sobre tais fontes, remete-nos a situar nossa pesquisa quanto ao tipo de fonte usada. Neste contexto, podemos afirmar que usamos os três tipos de fonte discutidas em GARCIADIEGO (1996).

Como exemplo, podemos destacar que ao trabalhar com os livros textos antigos, estávamos em contato com fontes primárias. De forma análoga, é válido afirmar que analisamos fontes secundárias, na medida que constatamos que os livros ou teses específicas, sobre a história da matemática, foram elaborados por autores que partiram, em especial de fontes primárias. Em termo, parece claro que as demais fontes utilizadas, desde os primeiros levantamentos bibliográficos, até as informações gerais apresentadas na narrativa histórica, construíram-se de fontes terciárias ou n-árias.

Na verdade, estamos cientes de que tão importante quanto as fontes escolhidas, foram os procedimentos que usamos para a análise de tais fontes, em especial, das primárias.

A obra de HARIKI (1992) foi a nossa primeira orientação/inspiração para encontrar categorias, de modo a iniciar uma análise dos livros textos antigos. HARIKI (1992) analisa, em sua tese de doutorado, o discurso dos autores de livros textos em obras da disciplina Análise Complexa.

Para tanto, HARIKI (1992) estabelece primeiramente as funções do discurso matemático, ressaltando três momentos reflexivos - transmissão da informação; construção do conhecimento; e negociação dos significados – e ressalta as tensões entre o discurso matemático posto ora em caráter científico, ora em caráter pedagógico. HARIKI defende que

> *o discurso expresso nos livros textos de matemática, como uma reflexão entre os discursos científico e pedagógico, é também estruturado por tensões causadas por conflitos entre as tendências, movimentos e concepções filosóficas, epistemológicas, psicológicas e pedagógicas.*[7] HARIKI (1992, p.31)

Tal afirmação, nos inspira a procurar estabelecer *evidências da influência (ou não), mesmo que parcial, da corrente pedagógica/filosófica vigente no discurso/postura* do autor do livro texto

---

[7] A tradução do original, em inglês, é minha.

– cosideramos esta preocupação como uma categoria de análise dos livros textos antigos.

As tensões/conflitos no discurso dos autores dos livros textos de matemática segundo HARIKI (1992), também são motivadas pela maior ou menor importância que o autor atribui a uma das funções do discurso, ou seja, transmissão da informação *versus* construção do conhecimento *versus* negociação dos significados.

Ao analisar como os autores constroem seus textos, HARIKI (1992, p 42) nos dá indícios de como a representação gráfica é usada na negociação da intuição entre o autor e o leitor, pois *a explicação no discurso matemático implica freqüentemente na mudança da argumentação lógica para a intuitiva e heurística, pelo uso de exemplos, figuras, esquemas, etc.* (Tradução minha). Ainda, no segundo HARIKI (1992, p 74), os autores trabalham a linguagem de maneira informal, usando da retórica para expor os conceitos matemáticos. Tal movimento é caracterizado por HARIKI (1992, p 74) nos seguintes termos:

> *há o discurso da matemática informal que é caracterizada pelo discurso de explicação e argumentação pedagógica ... O discurso da matemática informal é essencialmente um discurso retórico, um discurso persuasivo, no qual são negociados os significados e valores entre o autor e o leitor. É dirigido pelas concepções educacionais e psicológicas do autor (preconceitos, influências, preferências), que parecem freqüentemente ser inconscientes.* (Tradução minha).

Desse modo, fomos, novamente, incitados a verificar, no discurso dos autores de livros textos antigos se *há ou não indícios de valorização da representação gráfica no que se refere ao trabalho com funções*. Assim, notar o *valor que a representação gráfica assume para o autor do livro didático* é outra categoria de análise que usaremos ao analisar as obras escolhidas.

HARIKI (1992) deixa claro ainda, que no processo de argumentação persuasiva, os autores apelam para a intuição do leitor como estratégia de convencimento da validade de uma proposição. Podemos dizer que neste tipo de argumentação os autores se valem de exemplos, metáforas, modelos, particularizações, entre outros para negociação da validade/significado do conceito estudado. Vale ressaltar as nuanças que este tipo de discurso traz:

> *No discurso matemático é conveniente distinguir dois modos de explicação intuitiva: EXEMPLOS, e FIGURAS. Em outras palavras, nós temos que investigar (i) a função retórica de exemplos, casos particulares, modelos, etc., e (ii) a função retórica de figuras, diagramas, tabelas, figuras de linguagem, etc.* HARIKI (1992, p 75) (Tradução minha).

Na discussão da função retórica que as figuras assumem, HARIKI (1992, p 109) esclarece que as figuras, *junto aos exemplos, são comumente usadas em livros textos de matemática universitária como ferramentas de explicação, justificação e ilustração.* (Tradução minha). Vale ressaltar ainda, que este autor estabelece diferenças entre os tipos de figuras presentes nos livros didáticos, sendo que os gráficos *usam relações espaciais para representar relações não espaciais.* HARIKI (1992, p 110. (Tradução minha).

Embora HARIKI (1992, p 110) atribua às figuras/gráficos um valor retórico no contexto do discurso matemático, devemos estar atentos que tal autor considera, de maneira mais ampla, o uso das figuras no discurso pois afirma que *Minha intenção aqui é considerar figuras de acordo com suas três funções ou dimensões: informador, heurístico, ou retórico.* (Tradução minha).

Assim, para explorar de maneira mais sistemática as funções/dimensões que a representação gráfica de funções pode assumir, tentaremos pontuar como os gráficos são usados pelos autores, em vários sentidos. Primeiramente vale analisar *se os gráficos são utilizados para introduzir um assunto; exemplificar o assunto tão* *somente; ou se é utilizado com o aspecto de complementar o desenvolvimento do tópico exposto pelo autor.* Ainda neste sentido, vale a pena analisar *como são exploradas as construções dos gráficos pelos autores.* É interessante ainda verificar se *são feitas análises gráficas pelos autores após a construção/apresentação de um gráfico.* Ainda mais, vale a análise dos gráficos desenvolvidos nos livros textos, *no aspecto de estar ou não vinculados a situações reais ou modelos próximos de situações reais.*

Parece claro que para HARIKI (1992), os gráficos e as representações cumprem amplo papel na negociação do significado no discurso dos autores de livros textos de matemática. Entretanto, queremos ir além dos papeis atribuídos à representação gráfica, situada apenas como componente importante do discurso matemático. Logo, chamamos a atenção para o fato de que a representação gráfica, representa por si só, uma forma complexa e repleta de predicados para a representação de um conceito – principalmente no que diz respeito às funções – como discutimos no início deste capítulo. Isso nos motiva a elencar outras categorias de análise, próprias para a investigação do papel que a representação gráfica assume ao longo do tempo nos livros didáticos. Esperamos que estas categorias nos auxiliem a entender melhor a função que a representação gráfica assume no discurso matemático.

Tais categorias emergiram de maneira natural no processo de estudo e análise dos livros a que tivemos acesso. Assim, pretendemos também verificar nos livros textos se os autores usam *a representação gráfica como um recurso/ferramenta de convencimento/persuasão para alcançar o leitor/educando.*

Como as obras escolhidas pertencem a momentos característicos da nossa história escolar as categorias de análise podem abordar aspectos relativos à seqüência histórica própria de nosso estudo. Portanto, é válido tentar destacar se *há aumento ou diminuição* *quantitativas na incidência das representações gráficas nas obras que são um período para outro período subseqüente.* Vale dizer que, se verificarmos o aumento das representações gráfica de forma acentuada, tentaremos também pontuar em *que momento de nossa história escolar isso ocorre.*

Ainda atentos ao aspecto da evolução histórica das representações gráficas, tentaremos verificar se *há evolução ou retrocesso significativos no aspecto qualitativo da sofisticação e requinte das representações gráficas apresentadas nas obras de um período para outro.* De maneira análoga a feita na análise quantitativa do aparecimento das representações gráficas, tentaremos pontuar *os momentos onde a evolução qualitativa foi mais ou menos acentuada* historicamente.

Parece natural que neste tipo de análise histórica vale a tentativa de *comparar as representações gráficas que os autores usavam, em seus livros textos, às representações gráficas que estamos acostumados a encontrar nos livros textos publicados atualmente.*

É valido também, a busca de indícios que indiquem *alguma retomada, por parte dos autores de livros didáticos, dos processos de construção, bem como de idéias presentes no desenvolvimento histórico da representação gráfica.*

Acreditamos que tentando traçar paralelos entre a representação gráfica dos vários períodos, como foi descrito, estaremos criando subsídios para reflexões mais sistemáticas; bem como, para estabelecimento de relações/conexões mais sutis entre as diferentes abordagens dadas pelos autores de livros didáticos, com respeito à representação gráfica, no decorrer da história.

Em resumo, podemos dizer que ao construir a uma pesquisa histórica devemos considerar, de maneira crítica, as possíveis reflexões históricas a serem feitas. Para o bom desenvolvimento das análises históricas, estaremos atentos à diversidade de fontes escolhidas para a pesquisa. Os procedimentos de interpretações das fontes de pesquisa são tão importante quanto a escolha destas fontes. Cientes dessa importância, elegemos algumas categorias para análise dos livros didáticos antigos, buscando uma melhor compreensão do papel que a representação gráfica desempenhou no ensino de funções, assim como, no discurso dos autores de livros didáticos ao longo da história.

Nestes termos, podemos destacar as categorias de análise, entre as enunciadas a seguir:

- *procurar compreender se existem evidências da influência da corrente pedagógica/filosófica vigente no discurso do autor do livro texto;*
- *procurar compreender o valor que a representação gráfica assume para o autor do livro didático;*
- *procurar compreender se os gráficos são utilizados pelos autores para introduzir um assunto; exemplificar o assunto tão somente; ou se são utilizados com o aspecto de complementar o desenvolvimento do tópico estudado;*
- *procurar compreender como os autores exploram as construções dos gráficos e se são feitas análises gráficas após a construção/apresentação de um gráfico;*
- *procurar compreender se os gráficos desenvolvidos nos livros textos, estão ou não vinculados a situações reais ou modelos próximos de situações reais;*
- *procurar compreender se os autores usam a representação gráfica como um recurso de convencimento/persuasão para alcançar o educando;*
- *procurar compreender na mudança dos períodos históricos característicos se há variações quantitativas na incidência das representações gráficas nos livros didáticos e em que períodos essa variação ocorre de maneira mais acentuada;*

- *procurar compreender se há, e em que períodos ocorrem, mudanças qualitativas significativas (sofisticação/requinte) das representações gráficas apresentadas nos livros didáticos e;*
- *procurar compreender as representações gráficas que os autores usavam em seus livros e compará-las às representações gráficas que usadas nos livros didáticos da atualidade.*
- *procurar reconhecer se há nos trabalhos do períodos em questão alguma retomada dos processos e idéias desenvolvidas na construção histórica da representação gráfica.*

A análise dos livros didáticos, conforme os critérios expostos, será parte decisiva em nossa reflexão sobre as perguntas de pesquisa. Outra parte fundamental para o encaminhamento de respostas será o desenvolvimento da história da representação gráfica e os nossos esforços estarão voltados para essa constituição histórica nos próximos capítulos.

Capítulo 2

UM PANORAMA DA CONSTRUÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA E DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES ATÉ O SÉCULO XIX.

> *O aluno precisa saber isso! Se o aluno não sabe, não tem ligação com isso ... morre! É como se você..., como se você secar ou estancar uma fonte de água mineral. A água só chega no seu final se ela sai de dentro da fonte e percorre todo o seu caminho. De onde ela vem? Do lençol freático? Se eu secar o lençol não vai ter água lá em cima. Então é isso! Você está secando a origem! Toda a matemática que é feita em sala de aula tem origem!*
>
> *Prof. Marcos Fernando Silveira Orlando*

> *Um gráfico cartesiano para mim, primeiro, ele tem que localizar pontos. Então, para localizar pontos nada melhor que uma batalha naval! Então, a gente brinca de batalha naval mesmo! Aí eles tem bastante noção de lateralidade, onde estão os positivos, os negativos, assim na horizontal, na vertical. Então eles estão brincando, eu não falo em hipótese alguma o que é aquilo. Nós estamos brincando de batalha naval, só que na minha batalha naval tem os quatro setores!*
>
> *Profª Eliana Maria Zanuni*

A elaboração deste capítulo objetiva a melhor compreensão da constituição/construção da representação gráfica produzida sócio-historicamente pela humanidade, centrando nossas análises até o século XIX, quando culmina o ensino sistemático da representação gráfica na Europa. A reconstituição da história da matemática escolar no Brasil, bem como o ensino da representação gráfica em nosso país serão abordados nos capítulos 3 e 4.

Com efeito, a interrogação histórica em relação aos conceitos relativos à representação gráfica requer o estudo da história da geometria analítica, pois os textos pesquisados sobre a História da Matemática referem-se quase que exclusivamente à história da "geometria analítica" e bem poucas vezes à "representação gráfica de funções".

Nesse contexto, estudar a história da representação gráfica de funções é estudar a história da geometria analítica, já que a representação gráfica de funções em planos e espaços cartesianos lança mão dos mesmos instrumentos de representação gráfica dados pela geometria analítica.

Desse modo, quando for conveniente/necessário indicaremos a "representação gráfica" pelo termo "geometria analítica", ora associada à idéia de curvas como sistemas de coordenadas para localização de pontos/curvas/parametrizações, ora à idéia funcional, descrevendo gráficos e curvas, bem como suas parametrizações estabelecidas pela variação de quantidades dependentes, no sentido mais usual de funções.

Vale lembrar aqui a primeira das perguntas da pesquisa, que norteará nossa incursão histórica: *Como se constituiu a representação gráfica de funções no processo da história da matemática?*

Devemos também lembrar as perguntas específicas originadas da pergunta acima, e que em mesmo grau, direcionarão nossa reflexão a respeito da representação gráfica: Quais suas origens? O que impediu seu desenvolvimento em determinadas épocas? Quais as necessidades históricas próprias deste sistema de representação? Quais os motivos históricos que determinaram sua aceitação? Quando e como foi impulsionado o seu ensino? O que motivou seu desenvolvimento e suas sofisticações?

É válido antecipar o eixo principal do nosso estudo neste capítulo. Assim, primeiramente estudaremos a origem dos sistemas de coordenadas, indispensáveis para várias formas de representação gráfica; em seguida estudaremos a representação gráfica com aspecto funcional desenvolvido na Idade Média; na seqüência, analisaremos as contribuições de Descartes e Fermat no desenvolvimento da geometria analítica; e discutiremos o movimento de consolidação, sofisticação e início do ensino sistemático da geometria analítica e representação gráfica.

1. Sistemas de Coordenadas: origem e desenvolvimento

É importante ressaltar que existe discordância entre os historiadores quanto a época de surgimento e a origem da geometria analítica e esta discordância se deve à maneira de conceituar a geometria analítica. Entre os diferentes argumentos há alguns que defendem a origem associada às necessidades práticas de localização de pontos por meio de coordenadas utilizadas na antigüidade e, há outros, que defendem tal origem associada às representações geométricas de comparações e variações de quantidades, apresentadas, por exemplo, por Nicole Oresme (1323?-1382) cujo foco é especialmente funcional. Nessa perspectiva, há aqueles que entendem a geometria analítica útil para o estudo de curvas, e talvez seja esta uma das argumentações mais aceitas pelos matemáticos e historiadores, devido a freqüência desta abordagem nos tratados sobre o assunto. Segundo EVES (1992, p. 17):

> *Aqueles que localizam essa invenção na antigüidade salientam que o conceito de fixar a posição de um ponto por meio de coordenadas convenientes foi empregado no mundo antigo por egípcios e romanos em agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. E, se a geometria analítica implica não só o uso de coordenadas, então um forte argumento a favor de se creditar sua invenção aos gregos é o fato de que Apolônio deduziu o cerne de sua geometria das secções cônicas dos equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas, idéia que parece ter se originado com Menaecmus por volta de 350 a.C..*

Desse modo, numa perspectiva histórica, a geometria analítica depende de um sistema de coordenadas e sua origem está vinculada a este tipo de estrutura. Assim, procuraremos investigar sistemas que se aproximaram ou proporcionaram "alicerces" para o desenvolvimento do sistema que atualmente utilizamos. Os antigos sistemas, por vezes apresentavam alto grau de sofisticação, mas eram facilmente manipulados pelos estudiosos e bastante convenientes para os estudos da época.

De fato, o desenvolvimento de sofisticados sistemas de coordenadas, associados ao estudo das cônicas e suas secções, ocorreu na época grega conhecida como "Idade Helênica" (entre 300 a 150 a.C.). No início dessa época, Alexandre, o Grande (346 a.C.–323 a.C.), unificou em um único império os reinos da Grécia, Egito e Oriente Médio, uma organização cosmopolita onde o domínio político/cultural grego impulsionou, nas cidades, a construção das academias, universidades, bibliotecas e museus. O convívio de várias culturas proporcionou à ciência grega, em especial, com a assimilação das ciências egípcia e babilônica, um notável crescimento, legando aos demais povos um desenvolvimento cultural mútuo.

De um modo geral, entre as diversas ciências que se desenvolveram no centro cultural e mercantil de Alexandria, a matemática colocou-se em evidência. No campo da geometria, destacou-se o desenvolvimento do estudo das secções cônicas – vale ressaltar que a elaboração de tal estudo deu-se de modo internalista, isto é, dissociado de aplicações práticas. Vale também destacar que estes estudos chamaram a atenção de matemáticos gregos, entre eles Menaecmus (360 a.C), mestre de Alexandre e contemporâneo de Aristóteles. Tais motivações, sob forte influência do pensamento platônico, incluíram a discussão do problema das cônicas, uma busca de curvas adequadas para a duplicação do cubo, a qual apresenta as primeiras elaborações sistemáticas de um sistema de coordenadas. Segundo BOYER(1996, p. 65):

> *Menaecmus aparentemente deduziu as propriedades das secções cônicas e outras mais. Como esse material tem forte ar de uso de coordenadas, como foi ilustrado acima, foi algumas vezes sustentado que ele dispunha da geometria analítica. Tal opinião é parcialmente justificável, pois certamente Menaecmus não sabia que uma equação em duas quantidades incógnitas determina uma curva. Na verdade, o conceito geral de equação em quantidades incógnitas era estranho ao pensamento grego..*

Menaecmus, discípulo de Eudoxo (408 - 355? a.C.) que foi discípulo de Platão (427 - 347 a.C.), desenvolveu com sutileza a teoria das proporções usada no Livro V de *Os elementos*, de Euclides (300 a.C). Ressalta-se que o próprio Euclides também apresentou um estudo sobre cônicas; entretanto, esses textos foram perdidos e, entre outras perdas, está aquela que tratava sobre *Porismas*. De acordo com BOYER(1996, p.70), *a perda dos Porismas de Euclides é particularmente irritante, pois podem ter representado uma antiga aproximação a geometria analítica.*

Por se tratar de uma obra perdida, muitas conjecturas foram feitas sobre a natureza dos *Porismas* e, nesse sentido, BOYER BOYER(1996, p.70) ressalta a possibilidade de uma interpretação desse estudo sob um aspecto mais funcional e aponta um dos possíveis motivos pelo qual a geometria analítica não teve, no período em questão, um desenvolvimento maior:

> *Outros descreveram um porisma como uma proposição em que se determinava uma relação entre quantidades conhecidas e variáveis ou indeterminadas, talvez a melhor aproximação da idéia de função da antigüidade. Se um porisma era, como se pensou, uma espécie de equação verbal de uma curva, o livro de Euclides sobre Porismas pode ter diferido de nossa geometria analítica principalmente pela falta de símbolos e técnicas algébricas...*

Um outro estudo, mais antigo que o de Euclides, escrito por Aristeu (c. 320 a.C.), tratou dos *Lugares sólidos*. Estes textos também se perderam, porém motivaram/influenciaram o estudo sistemático das cônicas e o subseqüente desenvolvimento dos sistemas de coordenadas, especialmente úteis, para os matemáticos da época. Neste contexto, podemos destacar os estudos de Apolônio de Perga (c. 262 – c. 190 a.C), entre eles as *Cônicas*, semelhante à *As Cônicas* de Euclides, sendo a primeira mais completa e sofisticada que a última.

Apolônio, conhecido como *o Grande Geômetra*, tinha grande domínio nos diversos assuntos pesquisados por seus contemporâneos, em especial no campo da astronomia. Nesse campo, seu trabalho - um modelo astronômico mais preciso que o de Aristóteles - influenciou muitos matemáticos de sua época e épocas posteriores. Alguns aspectos de sua obra sobre as *Cônicas* são especialmente valiosos para o nosso trabalho, pois revelam o aprimoramento do uso de coordenadas e algumas generalizações resultantes da análise das secções para diversos tipos de cones, proporcionando um grande número de problemas formulados que, quando recuperados em outras épocas, impulsionaram o desenvolvimento da geometria analítica. Em STRUIK (1989, p.98), as características gerais das Cônicas e uma interpretação a respeito:

> *É um tratado sobre a elipse, a parábola e a hipérbole, introduzidas como secções de um cone circular, e vai até a discussão das evolutas de cônicas. ...referem-se a certas propriedades das áreas dessas curvas, que são expressas na nossa notação pelas equações (notação homogénea,* p, d *são linhas em Apolónio)*
>
> $y^2 = px; \; y^2 = px \pm \dfrac{p}{d} x^2;$
>
> *(o sinal mais correspondente a hipérbole e o sinal menos a elipse).*

De fato, o que chamamos de eixos da elipse (ou hipérbole), Apolônio chamava de diâmetros conjugados e traçava na extremidade de um dos eixos uma reta paralela ao outro. Essas retas são perpendiculares e ele as assume como retas de referência de seu sistema de coordenadas. Entendia a reta traçada pela extremidade de um diâmetro como a tangente da curva, uma concepção estática de tangente. Por vezes, para determinar as retas de referência do sistema de coordenadas, assumia qualquer ponto da curva, traçando uma reta pelo centro (diâmetro) e a tangente a curva pelo ponto dado. Com estes *eixos coordenados* as abscissas eram *as distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência enquanto que as ordenadas eram os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva.* Da explicação de BOYER(1996, p.106), as figuras 1a e 1b abaixo:

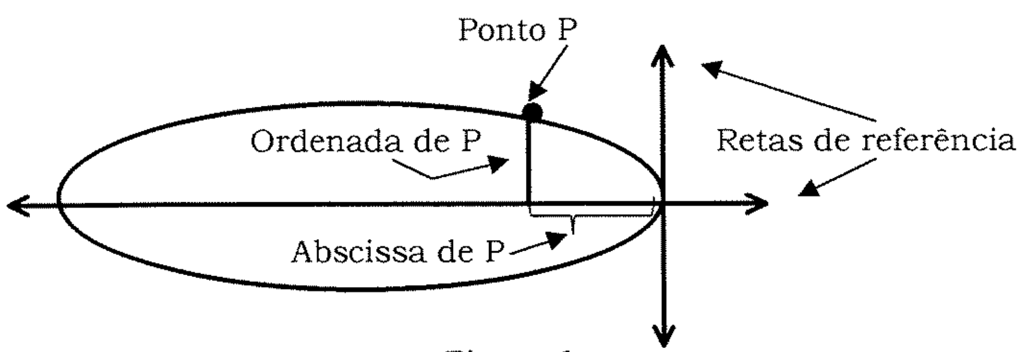


Figura 1a

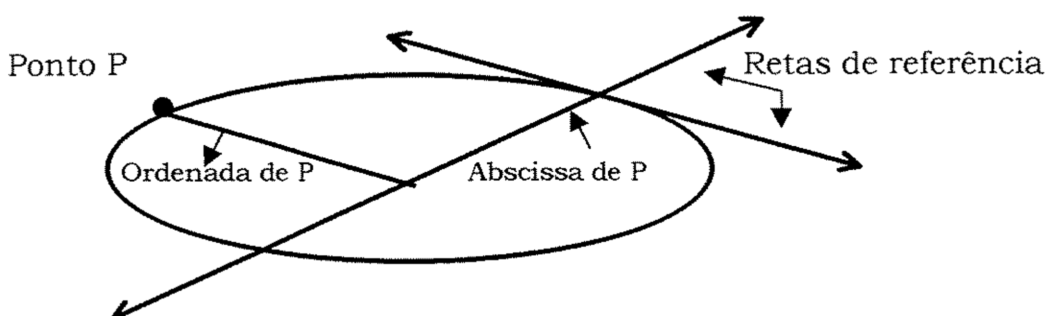


Figura 1b

FIGURA 1: Interpretação de um provável sistema de coordenadas usado por Apolônio

Naturalmente, podemos entender a dimensão da riqueza do trabalho de Apolônio no estudo das propriedades das curvas, obtidas nas secções cônicas, como um referencial para o estudo das origens de sistemas de coordenadas, pois as *relações de Apolônio entre essas abcissas e ordenadas correspondentes são nem mais nem menos as formas retóricas das equações das curvas.* BOYER(1996, p.106).

Numa síntese sobre as *"Cônicas"* de Apolônio, STRUIK (1989. p.98) coloca em evidência dois pontos importantes. Primeiro, esclarece a respeito do uso de coordenas nesse contexto, como o que segue:

> *Apolônio não possuia nosso método de coordenadas, porque não tinha notação algébrica (provavelmente rejeitou-a conscientemente sob a influência da escola de Eudoxo). Muitos dos seus resultados, porém, podem ser transcritos imediatamente em linguagem de coordenadas - incluindo a propriedade das evolutas que é idêntica à equação cartesiana.*

Segundo, STRUIK apresenta seu entendimento sobre a geometria analítica, enquanto pesquisador da história da matemática, quando afirma *a minha tese, então, é que a essência da geometria analítica é o estudo dos loci através de suas equações, e isto era conhecido pelos Gregos, sendo a base de seus estudos sobre secções cônicas.* STRUIK (1989. p.98).

Assim, STRUIK salienta a importância da necessidade de um desenvolvimento prévio da linguagem algébrica para a manipulação e o estudo dos *lugares geométricos*, como apresentado na geometria analítica dita moderna. Este é também um argumento presente no discurso de outros historiadores. Segundo EVES (1992. p.17), *... para que a geometria analítica pudesse assumir sua forma atual, altamente prática, teve de aguardar o desenvolvimento do simbolismo algébrico.*

No mesmo sentido, BOYER assinalou, ao discorrer sobre os *Porismas*, com a intenção de superar a defesa do argumento em questão. Afirma BOYER(1996. p.107):

> *... Que Apolônio, o maior geômetra da antigüidade, não tenha desenvolvido a geometria analítica se deveu provavelmente à pobreza de curvas mais do que de idéias. Não são necessários métodos gerais quando os problemas se referam sempre a um caso dentre um número limitado de casos particulares. Além disso, os inventores modernos da geometria analítica tinham toda a álgebra da Renascença a sua disposição, enquanto que Apolônio trabalhava necessariamente com o instrumento mais rigoroso mas menos manejável da álgebra geométrica.*

A investigação na busca de generalizações também é notada nos trabalhos de Arquimedes (c. 287 a.C. - 212 a.C.), mas fica evidente que a elaboração do sistema de coordenadas ainda aparece, mais como um subproduto das manipulações geométricas associadas à teoria de proporções, do que como um instrumento desenvolvido para este fim, ou respondendo a busca de um sistema geral de coordenadas. BOYER (1996. p.106) ainda afirma que:

> *... o sistema de coordenadas era sempre superposto a posteriori sobre uma curva dada a fim de estudar suas propriedades. Não parece haver exemplo na geometria antiga de ser o sistema de coordenadas estabelecido a priori de para fins de representação gráfica de uma equação*

Há fortes indícios de que Apolônio tenha sido educado em Alexandria e lá ensinado por algum tempo. Assumindo isto, podemos supor que ele foi diretamente influenciado pelas diversas linhas de pensamento de diferentes partes do mundo, presentes naquele centro, assim como o contato com grandes matemáticos, pode tê-lo ajudado na elaboração, discussão, divulgação e aceitação de sua obra.

A influência de sua obra nas ciências foi marcante. A transmissão e a permanência de suas idéias manifestam-se em muitos momentos e com isso, naturalmente, foram preservadas a sistematização e a manipulação das coordenadas implícitas em seu trabalho.

Cabe-nos, então, explorar mais sistematicamente o que proporcionou tal aprovação pela comunidade dos matemáticos, pois tal entendimento pode auxiliar na compreensão de certos processos de transmissão, aceitação, uso e reelaboração de sistemas de coordenadas e por conseqüência, da própria geometria analítica e representação gráfica.

As especulações sobre a aprovação/aceitação desta forma de abordar tal conteúdo apontam para várias hipóteses. Podemos destacar, entre outras, o caráter transdisciplinar dos estudos de Apolônio, envolvendo diversas áreas de estudo que buscavam interpretação matemática para os fenômenos oriundos em seu campo. Neste sentido, outros argumentos podem ser assim descritos:

- a aceitação e aprovação, pelos seus contemporâneos, do seu célebre modelo astronômico, o que se justifica pela riqueza de detalhes comparado ao modelo de Aristóteles;
- a tradução de suas obras;
- a sofisticação dos problemas em aberto, presentes na estrutura de seus escritos;
- a retomada direta de seus estudos sobre cônicas por Papus (cerca de 300 d.C);
- a aplicabilidade de seus resultados para o estudo de trajetórias.

De acordo com BOYER, a obra de Apolônio foi bastante abrangente. Podemos citar, entre seus estudos, o desenvolvimento de um esquema para representar grandes números, as discussões sobre processos rápidos de calcular, as soluções de quadráticas usando álgebra geométrica e a elaboração de teoremas em geometria espacial.

Vale ainda ressaltar sua influência na Astronomia e a importância desse campo de estudo para as ciências e civilizações antigas. Nessa perspectiva, STRUIK (1989, p.98) aponta que *a matemática, através da história e até à actualidade, não pode ser* *separada da astronomia* e indica que *... o seu desenvolvimento determinou, e não em pequena extensão, o rumo da matemática.*

Nesse sentido, BOYER (1996, p.98) nos ajuda a encontrar indícios da influência/preservação da obra de Apolônio e de seu modelo astronômico já que *durante cerca de 1.800 anos os dois modelos - um, de Eudoxo e outro de Apolônio - foram rivais cordiais disputando a preferência dos estudiosos.*

Parece-nos claro o quão influente era o pensamento de Apolônio na antigüidade. Embora essa influência possa, em parte, justificar a retomada de suas idéias em períodos posteriores, vale a pena examinar mais atentamente esse tema, pois é possível afirmar que muitos estudiosos que contribuíram para
o desenvolvimento da Geometria Analítica tiveram contato, e/ou inspiraram-se nos pensamentos de Apolônio.

A obra *"Cônicas"* tem uma estrutura bastante interessante. Embora seja de difícil leitura, uma vez que é um tratado avançado para o aprofundamento do estudo de curvas, sua apresentação abre espaço para o estudo de muitos problemas associados. Os problemas e seus resultados, presentes nas *"Cônicas"*, discutidos em termos da álgebra geométrica – rigorosa, porém de alcance limitado – permitiram generalizações e foram reelaborados posteriormente com recursos mais sofisticados, como por exemplo, encaminharam a elaboração de uma álgebra mais versátil.

Dentre os muitos matemáticos que investigaram as obras de Apolônio podemos citar Papus, autor de *Coleção*, que em vários volumes faz uma preciosa descrição histórica da matemática grega, bem como complementa, em muitos sentidos, os trabalhos de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu.

As investigações de Papus sobre as obras de Apolônio produziram resultados efetivamente criativos para o desenvolvimento da geometria analítica. Para confirmar nossa afirmação, recorremos outra vez a BOYER (1996, p.127):

> *De muito maior significado na história da matemática é o livro VII, em que, graças a sua propensão em generalizar, Papus chega perto do princípio fundamental da geometria analítica. Os únicos métodos reconhecidos pelos antigos para definir curvas planas eram 1) definições cinemáticas em que o ponto se move sujeito o dois movimentos superpostos e 2)secção por um plano de uma superfície geométrica, tal como um cone ou esfera ou cilindro.*

Nestes textos, o número de curvas era pequeno e quando tratadas, eram restritas a um pequeno número de casos. No entanto, o livro VII apresenta uma surpresa, pois *Papus propôs um problema generalizado que levava a uma infinidade de novos tipos de curvas. Esse problema, mesmo em sua forma mais simples, é conhecido usualmente como problema de Papus* conforme relata BOYER(1996, p.127).

Ainda sobre a influência de Apolônio, mas já como decorrência de seu estudos sobre conceitos próximos à Geometria Analítica, Papus apresenta:

> *... Em sua primeira forma o problema é chamado "o lugar a três ou quatro retas", descrito acima em conexão com a obra de Apolônio. ... Papus dá a impressão de que os geômetras tinham fracassado nas tentativas de chegar a uma solução geral e de que ele teria sido o primeiro a provar que o lugar é sempre uma secção cônica ...BOYER, (1996, p.127)*

Este problema, segundo BOYER(1996, p.103p), *desempenhou um papel importante na matemática de Euclides a Newton* e sob a influência do mesmo, *Descartes em 1637 pôs à prova sua geometria analítica.* EVES(1997, p.201) e relata que Viète e Euler também se ocuparam do problema de Papus, lembrando que a simplificação da simbologia matemática foi uma das características dos trabalhos dos dois matemáticos citados.

BOYER (1996, p.128) relata ainda que Papus começa a considerar, para seu problema, os casos envolvendo até seis retas - trabalhando assim, até a terceira dimensão. A partir daí, não conseguiu interpretações tangíveis para os resultados de suas investigações, embora afirme que:

> *... homens que viveram um pouco antes que nós se permitiam interpretar tais coisas, que nada significa que seja compreensível, falando do produto do conteúdo de tais retas do quadrado disso ou conteúdo daquelas. Tais coisas porém poderiam ser enunciadas e provadas de modo geral, usando proporções compostas ....*

Ainda, segundo BOYER (1996, p.128):

> *Os predecessores não citados por um nome evidentemente estavam dispostos a dar um passo muito importante na direção de uma geometria analítica que incluiria curvas de grau superior a três, assim como Diofante tinha usado as expressões quadrado - quadrado e cubo - cubo para potências superiores de números. Se Papus tivesse seguido a sugestão até longe, poderia ter se antecipado a Descartes com uma classificação geral e teoria das curvas, indo muito além da distinção básica entre lugares planos, sólidos e lineares.*

A observação acima revigora a indagação dos motivos que impediram o aparecimento, naquele momento, de uma Geometria Analítica que, apesar de um tratamento e uma simbologia diferentes da que atualmente conhecemos, apresentava conceitos bem próximos da Geometria Analítica moderna.

O ilustre francês René Descartes (1596-1650) havia *percebido que, para qualquer número de retas no problema de Papus, uma curva específica fica determinada, assim como as cincompações algébricas que Diofante desenvolveria teria sido suficiente para revelar algumas das propriedades das curvas,* como relata BOYER (1996, p.128). Entretanto, isso não era suficiente já que *Papus, no fundo, era unicamente um* *geômetra, como Diafone tinha sido, unicamente um algebrista* e que, para realizar tal tarefa, era necessário:

> *... que aparecesse um matemático que se ocupa-se ao mesmo tempo com álgebra e geometria; é significativo que quando tal figura apareceu na pessoa de Descartes, foi esse mesmo problema de Papus que serviu de ponto de partida para a invenção da geometria analítica.*

O estudo das obras de Papus e Apolônio, como pudemos perceber, foi retomado por muitos homens notáveis. Além dos já citados, é conveniente lembrar de *Edmond Halley, em 1706, ...; Robert Simson, em 1749, Viète, em1600, Ghetaldi, em 1607 e 1613, Alexander Anderson, em 1612, e Samuel Horley, em 1770,[...]; Fermat, em 1736, e Simson em 1746,* nestes casos com a preocupação voltada para suas traduções. EVES(1997, p. 201)

Ressaltaremos agora a aplicabilidade dos resultados de Papus e Apolônio para o estudo de trajetórias como último dos inúmeros aspectos que proporcionaram a difusão do trabalho de Apolônio.

As concepções e o estudo do comportamento das curvas, iniciados pelos gregos, foi fundamental nos estudos posteriores que envolvem a cinemática. Isto aponta para um possível motivo da retomada dos estudos de Papus e Apolônio.

O estudo de trajetórias é indispensável para a dinâmica terrestre bem como para a mecânica celeste. Esses dois campos da ciência sempre se mantiveram ativos, mesmo em períodos onde houve acentuado declínio das atividades intelectuais mais avançadas - como na chamada Idade Média. Mesmo nesses períodos, talvez por se tratar de assuntos com grande aplicabilidade prática ou que emergiam em discussões de cunho filosófico ou religioso - ou ainda por outros motivos - as questões pertinentes à dinâmica terrestre e à mecânica celestes continuaram sendo abordadas.

A relevância do estudo das trajetórias, presente no escritos de Apolônio, é defendida na afirmação de BOYER (1997, p. 104) que:

> *... Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes normais a secções cônicas. Sem o conhecimento das propriedades a tangentes a uma parábola, uma análise de trajetórias locais seria impossível, e um estudo de planetas é impensável sem referências às tangentes a uma elipse. É claro, em outras palavras, que foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1800 anos mais tarde, os Principia de Newton; esse, por sua vez, deu aos cientistas condições para que a viagem de ida e volta à lua fosse possível.*

Embora BOYER saliente o caráter contemplativo e internalista da matemática desenvolvida por Apolônio, vale ressaltar ainda que mesmo sob influência direta do pensamento platônico, sua obra voltou-se também para as operações aritméticas – consideradas extremamente úteis para tarefas cotidianas, de aplicabilidade imediata, consideradas porém, de menor valor, já que tal exercício não era tão nobre. BOYER, 1996, p. 104). Podemos até especular, que possíveis comparações e disputas intelectuais com Arquimedes puderam incitar tal perfil na obra de Apolônio.

De maneira geral, podemos concluir que o elaboração das principais idéias relativas a um elaborado sistema de coordenadas culminaram num momento histórico, de inestimável riqueza cultural, no qual a matemática atingiu alto grau de sofisticação e, em especial, nas obras de matemáticos notáveis como Apolônio. E, este, como dissemos, influenciado diretamente pelos estudos desenvolvidos por toda uma escola e comunidade de sábios - vindos de várias partes do mundo. Sábios que, muitas vezes, abordavam problemas numa perspectiva teórica internalista e, portanto, dissociada da realidade prática, caracterizando assim uma visão contemplativa da matemática.

A influência da obra de Apolônio - que focaliza principalmente curvas derivadas de secções cônicas - foi marcante em sua época e posteriormente, já que serviu de base para inúmeras questões e pesquisas na própria geometria, além de ser suporte teórico para a engenharia. Da tradução de tais obras houve a germinação dessas idéias, que quando transmitidas, incitaram elaborações rumo ao campo da geometria analítica moderna, que por vezes não se desenvolveu com estrutura próxima à conhecida hoje, dado a falta de recursos algébricos.

O desenvolvimento do sistema de coordenadas adequado ao estudo das cônicas difere do sistema de coordenadas convencional. Naturalmente nos parece ter antes derivado deste estudo que elaborado para este estudo, além de surgir num contexto de alta sofisticação dos problemas geométricos - dissociados em uma primeira instância dos problemas cotidianos. Problemas geométricos que seguiam uma linha mais voltada ao desenvolvimento de questões internas das estruturas matemáticas estudadas.

2. Representação Gráfica na Idade Média: aspecto funcional

Naturalmente, a elaboração/sofisticação dos conceitos relativos aos sistemas de coordenadas foi um fator decisivo para o desenvolvimento da geometria analítica/representação gráfica de funções. Outro fator decisivo para a representação gráfica de funções, foi o desenvolvimento da representação gráfica de duas grandezas relacionadas.

Na antigüidade ocorreram as primeiras elaborações de sistemas de coordenadas, enquanto que as primeiras representações gráficas, com um aspecto funcional, surgiram no final da Idade Média – situada aproximadamente entre os séculos V e XV.

Do século V ao século XI, na Europa medieval houve o declínio da cultura clássica. São complexos os processos de miscigenação de culturas e povos na Idade Média. A mescla se deve às diversas invasões no antigo Império Romano, agora estagnado. No início deste período ocorreram as invasões germânicas. A partir do século VII, no Mediterrâneo, a expansão do Islã é notada com as invasões muçulmanas e finalmente, nos séculos IX e X, ocorrem as invasões normandas.

As constantes guerras impuseram à Europa o caos social, gerando assim, grande insegurança na população. Um dos reflexos dessa insegurança foi o crescimento da religiosidade entre os homens medievais que buscaram certo alento e consolo na igreja cristã.

Podemos dizer que a cultura medieval desse período é caracterizada pela assimilação de princípios germânicos aos antigos valores romanos, sob forte influência do cristianismo.

Sob essa ótica, é importante ressaltar o poder da Igreja Católica, notado pelas suas inúmeras terras e pela influência exercida junto aos líderes políticos da época. Por toda a Europa foram construídos mosteiros que abrigavam escolas eclesiásticas e suas bibliotecas; o clérigo se ocupava de discussões filosóficas à luz da teologia. Na matemática os esforços centraram-se na elaboração de calendários, com atenção para o cálculo da data da Páscoa.

No período final da Idade Média, do século XI ao século XV, notamos a expansão das cidades impulsionando o intercâmbio comercial e cultural com os centros do oriente. Para a matemática européia foi revigorante o contato com a cultura árabe, pois os árabes durante a Idade Média, preservaram os estudos da geometria grega, desenvolveram sistemas de numeração sob influência hindu, além de aperfeiçoarem sistematicamente a álgebra e a trigonometria.

Nesse contexto, na Europa, ao final do século XII e início do século XIII, muitas universidades foram fundadas além, de ter ocorrido a tradução de muitas obras árabes e gregas – acentuando a retomada dos estudos matemáticos.

Vale lembrar que, embora fossem feitas inúmeras traduções, houve certa ruptura dos estudos avançados que desenvolveram sistemas de coordenadas na antigüidade grega, e segundo BOYER (1996, p.178)... As cônicas *de Apolônio era pouco conhecido, exceto algumas propriedades simples da parábola que apareciam nos múltiplos tratados sobre óptica, um ramo da ciência que fascinava os filósofos escolásticos*

É importante ressaltar que entre aqueles que retomaram os estudos matemáticos na Europa, destacaram-se os filósofos escolásticos que, de maneira geral, pertenciam à Igreja Católica e discutiam questões religiosas à "luz da razão". Na matemática, entre os escolásticos, Nicole Oresme(1323?-1382) assumiu papel de destaque. Segundo STRUIK(1989, p.142), *... o mais importante desses matemáticos eclesiásticos da Idade Média foi Nicole Oresme, bispo de Lisieux, na Normandia, que trabalhou com potências fracionárias.*

Oresme desenvolveu estudos sobre proporcionalidade, assim como outros matemáticos do período medievo, com o objetivo de explicar fenômenos físicos, tais como a velocidade, postulados inicialmente por Aristóteles.

Outra discussão, de interesse dos estudiosos escolásticos, estava relacionada à *quantificação das 'formas' variáveis*, que segundo a explicação de Boyer, essas formas podiam representar *... a velocidade de um objeto móvel e a variação de temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não uniforme...*BOYER(1996. p.180).

Conforme ressalta BOYER(1996. p.180), enquanto estudava problemas e teoremas relativos à variação das formas, Oresme teve um *pensamento brilhante - por que não traçar uma figura ou gráfico de maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções....*
De fato, temos nos estudos de Oresme a primeira representação gráfica no sentido funcional e, ainda, o conceito de variação de duas

quantidades é ligado à idéia de continuidade. Mais uma vez, recorrendo a BOYER(1996. p.180):

> *Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou o gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo o cumprimento representava velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta, e se o movimento uniformemente variado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo. (ver Fig. 14.2).*

Figura 14.2

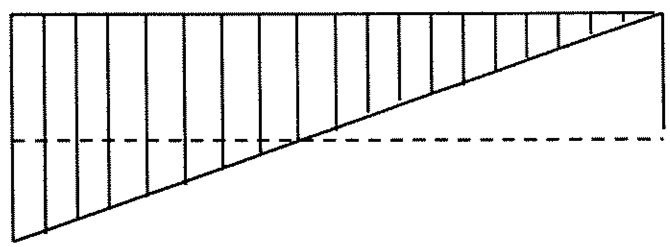


FIGURA 2. Representação gráfica feita por Nicole Oresme segundo BOYER

FONTE: *História da Matemática*, BOYER, C.B., 1996 – Pág.180

-

É gratificante perceber que está implícito no trabalho de Oresme o uso de coordenadas, no qual *longitude*, ou a representação do tempo, corresponde à abscissa, e a *latitude*, ou a representação da velocidade, corresponde à ordenada. Naturalmente, temos mais uma vez a elaboração de um sistema de coordenadas, mas sem dúvida o aspecto mais importante dessa representação é a conotação funcional, como destaca BOYER(1996. p.181):

> *Seu uso de coordenadas, é claro, não era novo, pois Apolônio, e outros antes dele tinham usado sistema de coordenadas, mas sua representação gráfica de uma quantidade variável era novidade. Parece que ele percebeu o princípio fundamental de se poder*

> *representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear.*

Naturalmente, a partir dessa notação, Oresme explorou, de maneira rudimentar, outros aspectos relacionados às funções, tais como diferenciais e integrais. Talvez, porque sua preocupação estava voltada a esses outros aspectos, ele não desenvolveu o estudo de outras curvas. Afirma BOYER(1996. p.181):

> *Além disso, Oresme se interessava principalmente pela área sob a curva; por isso não é muito provável que tenha visto a outra metade do princípio fundamental da geometria analítica - que uma curva plana possa ser representada, com relação ao sistema de coordenadas, como uma função de uma variável.*

Um outro fator que pode ter impedido Oresme de conseguir maiores avanços no desenvolvimento da geometria analítica está, novamente, no argumento de que ele não dispunha de recursos algébricos mais sofisticados. Na verdade, mais uma vez, a sofisticação algébrica se faz necessária para o desenvolvimento da geometria analítica. Tal interpretação vem de BOYER(1996. p.182):

> *O que precisava ter era, naturalmente, uma geometria algébrica em vez da representação pictorial que tinha em mente; mas a fraqueza técnica prejudicou a Europa durante todo o período medieval.*
> *Os matemáticos do Ocidente durante o século quatorze tinham imaginação e precisão de pensamento porém faltava-lhes técnica algébrica e geométrica; ...*

Embora ele não tenha explorado outras curvas, ainda num sentido funcional, em sua principal obra *Tractatus de Figuratione polentiarum et mensurarum*, BARON & BOS (1985, p.60) considera que *...Oresme também incluiu uma passagem interessante onde ele sugere a possibilidade de se usar um sistema de coordenadas tridimensional para* *representar uma qualidade, ou forma, tendo extensão em espaço e tempo...*, o que indica que Oresme especulou a respeito da representação gráfica na terceira dimensão. A esse respeito BOYER (1996, p.182) também reconhece que:

> *Aqui Oresme chegou a sugerir uma extensão de três dimensões de sua "latitude de formas" em que uma função de duas variáveis independentes era representada como um volume de todas as ordenadas erigidas segundo a regra dada, em pontos numa parte do plano de referência. Encontramos até uma insinuação de uma geometria de quatro dimensões quando Oresme fala em representar a intensidade de uma forma para cada ponto de um corpo ou volume de referência.*

Assim, temos uma noção do significado dos estudos deste matemático escolástico como precursor no desenvolvimento da representação gráfica de funções. Refletiremos agora, a respeito de alguns fatores que proporcionaram a continuidade, divulgação e transmissão desses estudos e idéias às gerações posteriores.

Como pudemos notar, as idéias e conceitos presentes nos estudos de Oresme estão relacionados às discussões sobre o movimento dos corpos.

Discussões a respeito do movimento (velocidade/aceleração) eram constantes naquele período, uma vez que faziam parte de elucubrações filosóficas dos escolásticos baseados nas recuperações dos escritos gregos, principalmente os de Aristóteles. Essa temática é emergente na Europa medieval, com grande influência nos estudos matemáticos de épocas posteriores. EVES (1997. p.295) assim revela:

> *As elucubrações dos filósofos escolásticos levavam as teorizações sutis sobre o movimento, infinito e contínuo, conceitos de importância fundamental na matemática moderna. O século de disputas e tergiversações escolásticas podem responder, até certo ponto, pela notável transformação da matemática antiga em moderna; como*

> *sugeriu E.T. Bell, essas discussões talvez constituíam uma análise submatemática.*

A discussão desses pensamentos e conceitos se espalhava pela Europa, já que *a filosofia e a ciência aristotélicas tinham sido recuperadas e eram ensinadas nas universidades e nas escolas religiosas* como esclarece BOYER(1996, p. 177). Segundo BARON & BOS (1985, p.58), o trabalho de Oresme foi difundido nesse contexto, dado que o *problema da latitude das formas provocou muitas discussões e motivou grande partes das idéias de movimento.*

Os conceitos relativos à latitude das formas foram apresentados por Oresme em *De latitudinibus formarum* (c. 1360) influenciando os estudiosos da época medieval. Na verdade, podemos transpor essa influência aos precursores da geometria analítica moderna, pois esse *trabalho foi impresso várias vezes entre 1482 e 1515 e pode ter influenciado os matemáticos do Renascimento, incluindo Descartes.* STRUIK (1989, p.142).

Nesse sentido, confirmamos nossa argumentação, ressaltando que *A representação gráfica de funções, conhecida então como a latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu.* BOYER (1996, p.181).

Assim, podemos concluir que a continuidade/transmissão das idéias relacionadas à representação gráfica com aspecto funcional, foi devida principalmente aos seguintes processos:

– aos inúmeros estudos sobre o movimento, desenvolvidos naquela época e em épocas posteriores, e entre estes estudos, os de Nicole Oresme eram muito influentes;

– popularidade do problema da latitude das formas, entre os estudiosos – refletida pelas inúmeras transcrições da obra de Oresme, onde encontrava-se a representação gráfica das "formas variáveis";

– a discussão/ensino dos problemas relativos à latitude da formas nas escolas e universidades, sob influência do poder eclesiástico.

Em síntese, podemos afirmar que entre as várias especulações filosóficas dos eclesiásticos na Idade Média, chamaram a atenção de Nicole Oresme, aquelas que envolviam questões sobre movimento. Oresme estudou o problema da "latitude das formas" – que dizia respeito à "quantificação de formas variáveis". Pictoricamente a velocidade foi quantificada e sua variação foi representada em função da variação do tempo. Oresme não fez a representação de outros fenômenos e curvas, não só porque não dispunha de recursos algébricos, mas também por ter se centrado em outros aspectos, as investigações da velocidade em sua representação gráfica. O trabalho desenvolvido por este escolástico foi preservado e discutido nos meios científicos dada sua influência e importância no estudo dos fenômenos relacionados ao movimento.

3. Descartes e Fermat

É interessante notar que, desde 1360, com a divulgação dos estudos de Oresme, até 1637, com a publicação dos estudos de Descartes, não temos indicações de grandes avanços na representação gráfica de curvas. Entretanto, devemos lembrar que este período foi marcado por importantes desenvolvimentos na Matemática.

O final da Idade Média e início dos tempos modernos são caracterizados pela formação dos Estados Nacionais, num ambiente de união da burguesia com o rei. Este foi um período de grande crescimento das cidades e de intensa atividade comercial, notada pela expansão marítima, pelo mercantilismo e colonização das novas terras descobertas. No âmbito cultural, o pensamento e o estudo da cultura grega foi ainda mais revigorado pelos humanistas – que revivificaram os valores da antigüidade clássica. As explorações marítimas demandavam novas tecnologias, os contatos com as novas culturas forneceram inúmeros dados para a discussão científica. Cidades portuárias da costa atlântica da Europa, cresceram rapidamente, e para estas cidades imigravam muitos estudiosos patrocinados pela realeza e pelos mercadores.

De fato, esse foi o período da "Reforma" que provocou divisões na Igreja Católica, sendo que alguns dos grupos filosóficos que emergiam destas divisões se mostravam mais receptivos às discussões científicas. Neste período de transformação de valores culturais, tão bem conhecido como "renascimento", podemos notar os estudiosos renascentistas aplicando métodos característicos das ciências modernas, tais como a reelaboração de teses e hipóteses através da experimentação empírica.

Em cada nação, o movimento de consolidação dos Estados Nacionais ocorreu à luz de inúmeras disputas e perseguições políticas/religiosas entre grupos de nobres – movimento que, em alguns casos, culminaram em guerras civis. Este processo de consolidação, culminou com a total centralização do poder real – absolutismo monárquico – sendo os estados absolutistas inglês e francês exemplos deste sistema de governo, onde a prática econômica se resumia ao mercantilismo.

Após esse breve panorama histórico, que nos põe a par dos principais acontecimentos ocorridos desde o fim da idade média até a consolidação dos estados absolutistas, voltamos ao século XVI para apontar os franceses como os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria analítica.

Primeiramente queremos voltar nossas atenções para o trabalho de François Viète (1540-1603), que contribuiu na aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. As principais contribuições de Viète estão na álgebra, com o desenvolvimento das soluções de equações de maneira mais geral, e não apenas para casos específicos. Influenciado pelas obras de Papus e Apolônio, – novamente estudadas a partir da segunda metade do século XVI – *o pensamento de Viète sempre se mantinha próximo da geometria*, o que o ajudou a relacionar a álgebra com a geometria e tal fato leva Boyer a afirmar que *...interpretando as operações algébricas fundamentais geometricamente, Viète percebeu que régua e compasso bastam, até para as raízes quadradas.[...] ou, a fortiori, resolver geometricamente qualquer equação cúbica.* BOYER (1996. p.210) Estas considerações relevadas por BOYER (1996. p.210), culminam numa observação muito importante:

> *Aqui vemos claramente uma tendência muito significativa - a de associar a nova álgebra avançada com a antiga geometria avançada. A geometria analítica não poderia estar muito distante, e Viète poderia tê-la descoberta se não tivesse evitado o estudo geométrico das equações indeterminadas.*

Notamos então, o quão próximo estava Viète da geometria analítica descrita por Descartes e Fermat. Podemos caracterizar Viète como um dos matemáticos renascentistas, de um período de transição, que assimilou as matemáticas medievais e os estudos avançados dos clássicos gregos, contribuindo com sua álgebra para o desenvolvimento da matemática nos tempos modernos.

Nesse período de transição, os conceitos relacionados à representação gráfica de funções e geometria analítica foram desenvolvidos também por Galileu Galilei (1564–1642) e seu discípulo Boaventura Cavalieri (1598–1647) – famosos matemáticos italianos.

Segundo BOYER (1996, p.224), nos estudos relativos aos movimentos e trajetórias, Galileu seguiu as representações gráficas de Oresme:

> *É praticamente certo, no entanto, que ele conhecia perfeitamente a obra de Oresme sobre a latitude das formas, em várias vezes em* Duas novas ciências *Galileu usou um diagrama de velocidade*

> *semelhante ao gráfico triangular de Oresme. Porém, Galileu organizou as idéias de Oresme e deu-lhes uma precisão matemática que lhes faltava.*

Sob influência de Galileu, Cavalieri estudou trajetórias com auxílio da "curva espiral de Arquimedes", relacionando-a à parábola e desenvolvendo conceitos relativos à representação dos pontos das curvas por meio de coordenadas – hoje conhecidas, como polares e retangulares.

Entretanto, devemos observar, que a influência dos trabalhos de Oresme foi notada, especificamente, nos locais onde se desenvolveram os estudos relacionados ao movimento. Assim reconhece BOYER(1996, p.219):

> *É interessante notar que embora Oresme tivesse usado tanto índices de potências fracionárias, quanto métodos de coordenadas em geometria, isso parece ter tido influência apenas muito indireta, ou nenhuma, no progresso da matemática nos Países Baixos e na França no começo do século dezessete.*

Desse modo, podemos afirmar que a representação gráfica proposta por Oresme pouco influenciou o trabalho dos franceses, que seguiram uma linha de investigação matemática mais voltada às equações.

A sofisticação da discussão das equações e os avanços na notação algébrica denotam grande progresso da álgebra no final do século XVI e durante todo o século XVII. Neste período devemos destacar os estudos dos franceses René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) na elaboração da geometria analítica e representação gráfica de curvas – com uma estrutura muito próxima da usada atualmente. Neste sentido, KATS (1992, p.395) afirma que na obra destes matemáticos, encontramos *as mesmas técnicas básicas que relacionam álgebra e geometria, as técnicas cujo desenvolvimento* *adicional culminou no objeto moderno da geometria analítica* (A tradução é minha). Cabem a Fermat e Descartes, cada um com uma perspectiva de estudo próprios, os avanços mais significativos na estruturação da geometria analítica, até então, e em relação à participação simultânea desses matemáticos, KATS (1992, p.395) ressalta que *desenvolveram de maneira distinta diferentes aproximações para um assunto comum, diferenças causadas pelos diferentes pontos de vista sobre a matemática* (A tradução é minha). Dessa forma, vale analisar as contribuições que cada um (destes matemáticos) proporcionou à evolução da geometria analítica e representação gráfica.

Descartes, conhecido como "o pai da filosofia moderna", em 1637 apresenta em sua obra, *Discours de la méthode pour biem conduire as raison et chercher la vérité dans lá sciences* – estudos filosóficos que influenciaram o pensamento científico por quase um século. Essa obra contem três apêndices, sendo *La géométrie*, aquele que apresenta a chamada geometria cartesiana, hoje associada à geometria analítica.

Em *La géométrie*, Descartes retoma o estudos de alguns problemas geométricos da antigüidade clássica, principalmente aqueles propostos por Papus, e apresenta uma nova abordagem, cujo objetivo, segundo BOYER (1996, 232) assim se mostra:

> *... é geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria a álgebra. A obra de Descartes é com demasiada freqüência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, ao passo que na verdade poderia ser bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica.*

Confirmando tal aspecto da obra de Descartes, KATZ (1992, p.399) afirma que *Descartes se preocupou mais em demonstrar as relações das construções geométricas com as soluções para as equações algébricas.*(A tradução é minha)

Segundo BOYER (1996, p.232), devemos entender que Descartes fornecia representações geométricas de operações algébricas, e ainda *ia mais longe do qualquer de seus predecessores em sua álgebra simbólica, e na interpretação geométrica da álgebra*, sendo esse o caráter principal de sua obra. Isto é confirmado por STRUIK (1989, p.166) ao ressaltar que:

> *Os méritos de Descartes se encontraram sobretudo na aplicação consistente da desenvolvida álgebra do século XVI à análise geométrica dos antigos e, através disto, num enorme alargamento de sua aplicabilidade. Um segundo mérito é a definitiva rejeição de Descartes das restrições de homogeneidade de seus predecessores, ainda freqüentes na* logistica speciosa *de Viète, de forma que* x^2, x^3, xy *eram agora considerados como segmentos de recta.*

Assim, notamos que para Descartes era natural desenvolver a álgebra lançando mão de representações geométricas, assim como estudar problemas geométricos com a ajuda da álgebra. Embora o título da obra possa sugerir um trabalho exclusivamente voltado para a geometria – e sem dúvida, grande parte dos problemas abordados eram motivados a partir da geometria – o caráter algébrico, decorrente da escola francesa, era igualmente considerado nas associações feitas por Descartes que, segundo BOYER(1996, p.233):

> *... tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem mostrar parcialidade por nenhuma delas. Acusava a segunda de usar, demasiado pesadamente, diagramas que fatigam a imaginação desnecessariamente, e a primeira de ser uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. O objetivo de seu método, portanto, era duplo: 1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e 2) dar significado as operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.*

No intuito de dar significações aos processos algébricos e geométricos, o método de Descartes *consiste então em partir de um sistema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e* *depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente* como esclarece BOYER((1996, p. 233).

Na busca constante de interpretações algébricas para problemas geométricos – principalmente o de Papus – Descartes entendeu e buscou exprimir lugares geométricos através de equações algébricas. No entanto, vale esclarecer a respeito de duas questões comumente associadas a sua obra: o uso de coordenadas e a representação gráfica das curvas.

Quanto ao uso de coordenadas na obra de Descartes, BOYER esclarece que *não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente assumidas* e, mais adiante afirma que *Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abcissas negativas.* BOYER (1996, p. 235 e p. 236).

Quanto a representação gráfica de curvas, em associação ao uso de coordenadas, BOYER (1996, p. 236) salienta que *em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar as curvas que nunca entendeu o significado de coordenadas negativas* e o mesmo autor conclui:

> *Ainda mais o princípio fundamental da geometria analítica – a descoberta de que equações em duas incógnitas correspondem a lugares – só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalmente.*
> *"A solução de qualquer desses problemas sobre lugares não é mais do que achar um ponto para cuja completa determinação falta uma condição... Em todo caso assim se pode obter uma equação contendo duas incógnitas".* BOYER (1996, p. 236)

Nas palavras de BOYER podemos obter uma síntese que associa muitos dos aspectos discutidos, da obra de Apolônio e sua relação com a obra de Descartes, além do aspecto fundamental da obra de Oresme,

> *Nossa exposição analítica de Descartes deve ter deixado claro quão longe estavam os pensamentos do autor de considerações práticas que hoje estão tão freqüentemente associadas com o uso das coordenadas.... **La géomètrie** em seu tempo foi tanto um triunfo da teoria não prática quanto **As cônicas** de Apolônio na antigüidade, apesar do papel extraordinariamente útil que ambas viriam a desempenhar. Além disso, o uso de coordenadas oblíquas era quase o mesmo nas duas obras, confirmando assim que a origem da geometria analítica moderna está na antigüidade mais que na latitude de formas medieval.... Mesmo que Descartes conhecesse a representação gráfica de Oresme de funções, e isso não é evidente, não há nada em sua forma de pensar que indique ter ele percebido qualquer semelhança entre a finalidade da latitude de formas e sua própria classificação das construções geométricas. A teoria das funções veio a tirar grande proveito da obra de Descartes, mas a noção da forma ou função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria cartesiana.* BOYER (1996, p. 237)

Dessa forma, temos até aqui algumas características principais da obra de Descartes, o que nos permitirá a comparação com o trabalho de seu contemporâneo Fermat, que em muito contribuiu para o avanço da geometria analítica e a representação gráfica de curvas.

Fermat devido as suas contribuições nas várias áreas da matemática, em especial para a moderna teoria dos números EVES (1997, p.390), é considerado o maior matemático francês do século XVII.

BOYER (1996, p. 238) relata que na tentativa de reconstruir uma das obras de Apolônio, Fermat pôde perceber, antes da publicação da *Geometria* de Descartes, o princípio fundamental da geometria analítica, desde que :

> *"Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva".*

Conclusões como estas podem ter direcionado o trabalho de Fermat, o que difere notadamente da obra de Descartes, pois *Fermat dava ênfase ao esboço das soluções das equações indeterminadas, em vez de à construções das soluções algébricas determinadas* BOYER(1996. p. 239). Nesta perspectiva, sua obra *Ad locus planos et solidos isagoge* –

Introdução aos lugares planos e sólidos – traz o esboço de retas, hipérboles, parábolas, elipses e círculos. Em sua outra obra, *Método para achar máximos e mínimos*, além de desenvolver métodos de cálculo diferencial à sua maneira, sendo assim um dos precursores do cálculo, esboça curvas de grau superior. Os esboços citados são feitos de maneira muito próxima a nossa, uma vez que é implícito o uso de eixos coordenados com configuração perpendicular, conforme esclarece BOYER(1996. p. 240).

Vale ressaltar que ao trabalhar com a representação gráfica das equações indeterminadas, Fermat em muito se aproximou da nossa atual representação gráfica de funções, pois estava implícita a dependência entre as variáveis em questão. Confirmando tal aspecto, KATZ(1992, p. 396) relata que em seus estudos está presente a idéia da *correspondência entre lugar geométrico e equações algébricas indeterminadas em duas ou mais variáveis, e a construção geométrica para esta correspondência, um sistema de eixos ao longo dos quais as variações estão representadas* (A tradução é minha).

Assim, a constante representação gráfica das curvas, a partir de suas equações, e o uso do sistema de coordenadas perpendiculares feito de maneira mais sistemática, podem ser apontados como pontos que diferenciam a obra de Fermat da de Descartes.

Ainda recorrendo a BOYER (1996), naturalmente os trabalhos desses dois matemáticos apresentaram semelhanças, entre os pontos comuns podemos citar que os dois estudiosos não consideravam coordenadas negativas e seus estudos situam-se dentro de uma abordagem internalista da matemática, além de motivados por problemas geométricos da antigüidade clássica, que neste novo contexto eram trabalhados com os recursos de uma álgebra mais sofisticada, diferentemente do que havia ocorrido na idade média

Vale lembrar que ambos os trabalhos sugerem a representação gráfica em dimensão superior a do plano, como BOYER(1996, p. 236) chama a atenção, no trabalho de Descartes, Livro II de *La geometrie:*

> *Há até um enunciado de um princípio fundamental de geometria analítica no espaço:*
> *"Se faltam duas condições para a determinação de um ponto, o lugar do ponto é uma superfície."*
> *No entanto Descartes não deu qualquer exemplo de tais equações nem amplificação dessa breve sugestão de geometria analítica em três dimensões..*

Sobre a obra de Fermat, BOYER (1996, p. 239) é bastante claro quando afirma que:

> *"Há certos problemas que envolvam só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolveram duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc.*

Uma vez que destacamos os principais avanços e características das obras destes dois franceses, no campo da geometria analítica e representação gráfica, devemos relevar que, os vários assuntos abordados, a superação das limitações da forma algébrica homogênea e os pensamentos filosóficos presentes no *Discours de la Méthode*, de Descartes, influenciaram em muito seus contemporâneos. Já os estudos desenvolvidos por Fermat nos diversos campos da matemática, da teoria dos números ao estudo das probabilidades, projetaram-no como outro estudioso de grande influência.

Nessa perspectiva, a investigação das teorias elementares do cálculo feita por Descartes e Fermat, são contribuições imprescindíveis para os posteriores avanços desta área de estudo, já que discutiram sistematicamente curvas algébricas e não algébricas e destas discussões resultaram, por exemplo, métodos para a determinação de tangentes a curvas dadas. Vale lembrar que ao discutir as curvas, com métodos para encontrar a área abaixo das mesmas, além de pontos de máximo e mínimo, com o auxílio da representação gráfica, Fermat contribuiu decisivamente para a elaboração do Cálculo. (BOYER, 1996, STRUIK, 1989)

Naturalmente, a influência dos estudos realizados por estes dois estudiosos se fazia presente no ambiente de vigorosas discussões científicas, bem como na relação de ensino promovido em academias recém fundadas. STRUIK (1989, p. 169) faz a caracterização precisa das academias, onde surge o cientista moderno, ao afirmar que *formaram-se à volta dos grupos de discussão de homens cultos [...] em oposição às universidades, que mantinham o espírito do período escolástico [...], exprimiam o novo espírito de investigação.*

Em suma, podemos dizer que a geometria analítica e a representação gráfica, uma forma muito próxima à moderna, começou a ser esboçada no período das grandes navegações, que demandavam novas tecnologias, além de evidenciar o contato com novas culturas, num ambiente propício para o desenvolvimento da chamada cultura renascentista, que no panorama político culminou com a consolidação dos chamados Estados Modernos.

Dentro desse movimento os valores gregos são revigorados, bem como a reconstituição de clássicos, como as obras de Papus e Apolônio. Essa retomada, contemplada com um desenvolvimento de boa parte das bases da moderna geometria analítica, foi motivada pelo estudo de antigos problemas geométricos, agora discutidos com o auxílio de uma álgebra mais avançada, por estudiosos como Descartes e Fermat; o primeiro, cujo pensamento filosófico influenciou toda uma época, voltou-se ao estudo de equações e suas raízes; o segundo, cuja influência é devida aos avanços em diversos ramos da matemática, voltou-se ao estudo das curvas, com caráter mais próximo do funcional, situado na interdependência de variáveis. E entre essas discussões, presentes no ensino das academias, surgem bases para o desenvolvimento mais sistemático do cálculo em períodos posteriores.

4. Geometria Analítica e Representação Gráfica: consolidação, sofisticação, e início de um ensino sistemático.

Como já comentamos, a geometria analítica e as diferentes representações gráficas do século XII, foram elementos que ajudaram e/ou embasaram algumas das elaborações/avanços que o cálculo apresentou durante os séculos seguintes.

Esta nova geometria, cada vez mais perfilada, mostrava-se como uma ferramenta eficiente ou um método para o estudo de inúmeros problemas matemáticos e teorias que foram se constituindo no final do século XII e durante os séculos XIII e XIX. Num processo contínuo, o desenvolvimento da matemática nestes períodos valeu-se da geometria analítica e das representações gráficas, que num movimento recíproco, consolidaram-se e alcançaram grande sofisticação.

Pretendemos neste momento, voltar nosso olhar para alguns pontos marcantes deste processo de consolidação e sofisticação da representação gráfica / geometria analítica, bem como na transmissão dos conceitos, atentos é claro, ao início de seu ensino sistemático.

Primeiramente lembramos que o final do século XVII assinala o início da superação dos Estados Absolutistas e do modelo econômico vigente, o mercantilismo, que caracterizaremos como um modelo de transição da prática econômica feudal para o modelo do moderno capitalismo industrial, que se configurou em fins do século XVIII. Entre os vários fatores responsáveis pela transição, podemos citar a necessidade de uma prática econômica mais dinâmica, condizente com o desenvolvimento econômico das nações, não representando entraves além de ser consonante aos interesses da classe burguesa.

Neste sentido, o pensamento liberal, que se configurou durante o final do século XVII e durante o século XVIII, atendeu os anseios da burguesia. Naturalmente, as revoluções políticas que caracterizaram a superação dos Estados Absolutistas com o estabelecimento de uma nova ordem social foram marcadas por inúmeras batalhas civis.

Convenientes são os exemplos do estabelecimento do parlamentarismo na Inglaterra em 1688, com a Revolução Gloriosa após sucessivas revoluções; a Revolução Americana que finda em 1787, tornando os Estados Unidos uma nação federativa após longo período de batalhas para superar o jugo colonial da metrópole inglesa; além é claro da longa Revolução Francesa, iniciada em 1789, levando ao poder diferentes grupos da burguesia, que sob pressões externas anti-revolucionárias, disputaram o poder até o seu término, em 1799 com a tomada do poder por Napoleão Bonaparte. Napoleão, aliado à burguesia, liderou a França em conquistas militares até o ano de 1812 e difundiu os ideais revolucionários, mas após derrotas sucessivas encerrou sua trajetória como líder francês em 1815, conseguindo em partes atender as aspirações burguesas.

Um dos reflexos das conquistas napoleônicas foi a vinda da corte real portuguesa ao Brasil em 1807, fugindo da investida francesa. Isto modificou a estrutura da colônia que passava então a ser sede do governo português, que mediante as necessidades da nova sociedade colonial, criou instituições de ensino para a formação de oficiais e engenheiros nas escolas militares, bem como a formação de médicos para servir à corte e às forças militares. (WEREBE, 1994)

Sem dúvida, foi um período turbulento, notado por inúmeros conflitos civis, além da ocorrência de epidemias que assolaram a

Europa, o que pode ter orientado alguns dos deslocamentos dos cientistas, e quem sabe, centros de discussão e produção científica da época.

Ainda no plano científico/cultural, a figura ilustre de Isaac Newton (1642–1727), ao buscar explicações para os fenômenos físicos por meio de leis naturais, exemplifica um perfil marcante dos estudiosos daquele período: o desejo de encontrar explicações para os fenômenos sociais por meio de leis naturais que regessem a economia, a política, a religião e até o pensamento filosófico.

Neste âmbito, a ordem liberal foi predominante e sua defesa/evolução deveu-se em boa parte, aos chamados filósofos iluministas que confiavam em sua capacidade racional, rejeitavam qualquer tipo de autoridade arbitrária, e exaltavam a ciência.

Após a caracterização da burguesia, como a classe que detinha o poder político, o cenário europeu conheceu relativa estabilidade – suas nações caminharam num processo de fortalecimento do ideário liberal, notando-se cada vez mais a evolução e aceleração das técnicas de produção associadas a um grande progresso científico e tecnológico. Esse conjunto de transformações dos meios de produção e da tecnologia, acompanhadas pelos surgimento das indústrias em cidades cada vez mais populosas costuma-se denominar Revolução Industrial.

Estas características foram notadas, num primeiro momento, na Inglaterra em meados do século XVIII e em seguida nos demais países. As inovações tecnológicas nos mais variados domínios são enormes, e características do novo processo de industrialização são percebidas no uso do ferro, do carvão e do vapor – predominantes até a metade do século XIX – bem como do aço e da eletricidade – que ganharam destaque a partir de meados do século XIX.

No período assim contextualizado – final do século XVII até o final do século XIX – foram dados os passos decisivos para a sofisticação, consolidação e definitivo início do ensino sistemático da geometria analítica bem como das representações gráficas subjacentes. Como reflexo da aceitação e continuidade da abordagem feita por Descartes e Fermat encontramos o francês Philippe de Lahire (1640–1718) que em sua obra *Nouveaux éléments des sections coniques ... forneceu um dos primeiros exemplos de uma superfície dada analiticamente por um equação a três incógnitas – o que foi o primeiro passo para geometria analítica no espaço.* BOYER (1996, p. 253).

Como já salientamos, foi grande a influência no meio científico das obras de Fermat e Descartes. Este último, em virtude de ter morado por 20 anos na Holanda e ali divulgado suas idéias, gozou de grande prestígio naquele país. De fato, isso é percebido na obra do holandês Frans van Shooten (1615–1660), e de seus sucessores, responsáveis por edições traduzidas, e ampliadas da *La géometrie* de Descartes nos anos de 1649 até 1683, o que é resumido no comentário que "provavelmente não é exagero dizer que embora a geometria analítica fosse produzida por Descartes, ela foi estabelecida por Schooten.BOYER(1996, p. 255)

Outro holandês, que associado a Shooten contribuiu para a divulgação da geometria analítica que começava a se constituir, foi Jan De Witt (1629–1672) que na segunda parte de seu livro *Elementa curvarum*, editada em conjunto com a obra de Shooten nos anos de 1649 a 1661, usa coordenadas tão sistematicamente, sendo considerado o autor do *primeiro livro texto de geometria analítica.* BOYER (1996, p.255)

Na obra citada, segundo BOYER(1996, p. 256):

> *A finalidade da obra de De Witt é reduzir todas as equações de segundo grau em x e y à forma canônica por translação e rotação de eixos.*
> *Ele sabia reconhecer quando uma tal equação representava uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme a chamada característica fosse negativa, nula ou positiva.*

Vale mencionar que os trabalhos do também holandês, Johann Hudee (1656–1657), discípulo de Shooten, foram decisivos para o aprimoramento da geometria analítica, já que:

> *Nas* Exercitationes *de Schooten há uma secção por Hudde sobre o estudo das coordenadas de uma superfície de quarto grau, uma antecipação de geometria analítica no espaço que é anterior inclusive a de Lahire, embora menos explicitamente descrita. BOYER (1996, p. 256)*

Outros distintos matemáticos holandeses contribuíram para a consolidação da obra de Descartes e de Fermat, mas vale a pena ressaltar a figura de Christiaan Huygens (1629–1695) sob dois aspectos; a aceitação das coordenadas negativas no tratamento da representação gráfica, bem como no uso de tal representação para a discussão de problemas práticos – em especial o estudo do movimento oscilatório do pêndulo, que mais tarde contribuiu para o desenvolvimento de teorias mais avançadas do cálculo.

O primeiro aspecto pode ser discutido a partir de René François de Sluse (1622-1685) que tentou esboçar graficamente algumas curvas, sendo que Huygens o fez de maneira completa, como salienta BOYER (1996, p. 257):

> *Sluse erroniamente pensou que casos como $y = x^2(a - x)$ tinham forma de pérola, pois, as coordenadas negativas não sendo compreendidas então, Sluse assumiu a simetria em relação ao eixo (das abcissas). No entanto, Christiann Heygens (1629-1695), que tinha a reputação de ser o melhor aluno de Schooten, achou os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão e conseguiu esboçar a curva corretamente tanto para coordenadas positivas quanto para negativas.*

Já a segunda característica importante da obra de Huygens é contemplada no comentário feito por BOYER (1996, p. 259):

> *Os conceitos do raio de curvatura e evoluta tinham sido sugeridos na obra puramente teórica sobre* As cônicas *de Apolônio, mas somente pelo interesse de Huygens em horologia é que os conceitos finalmente encontraram lugar permanente na matemática. A geometria analítica fora um produto de considerações essencialmente teóricas, mas o desenvolvimento dado por Huygens à idéia de curvatura foi estimulada por preocupações práticas.*

Nossas observações sobre a influência da geometria analítica na Holanda indicaram o movimento de aceitação e início de consolidação dos estudos nessa área, e sob esse foco, é grande a contribuição dos matemáticos ingleses, que começam a se destacar no cenário europeu durante os anos seguintes – propiciando, em seguida, a elaboração sistemática do cálculo de Newton e Leibniz. (STRUIK, 1989).

BOYER (1996, p. 261) esclarece que o inglês John Wallis (1616–1703), cuja obra reflete a influência holandesa, também contribuiu para a representação gráfica, pois *em 1655, tinha publicado dois livros muito importantes, um sobre geometria analítica, o outro sobre análise infinita,* além de ter usado coordenadas para discutir cônicas, pôde chegar

> *mais perto ainda que Fermat da definição moderna da cônica como lugar de pontos num plano, munido de sistema de coordenadas, cujas coordenadas satisfazem a uma equação do segundo grau em duas variáveis, fato que Descartes percebia mas ao qual não deu ênfase.*

Wallis também investigou superfícies, entretanto não estabeleceu equações que as descrevessem. A falta de um interesse maior pela representação gráfica, como recurso para interpretar fatos, através da geometria analítica no espaço, parece ser uma das marcas dos estudos desenvolvidos naquele período, como explica BOYER ao comentar que foi *uma pena que a geometria de superfícies e curvas em três dimensões estivesse atraindo tão pouca atenção que quase um século* *depois a geometria analítica no espaço praticamente não fora desenvolvida.* BOYER (1996, p. 263).

Embora a geometria analítica e sua representação gráfica no espaço não estivesse totalmente desenvolvida, podemos dizer que por volta do ano de 1670 as bases da representação gráfica no plano, por meio da geometria analítica, pareceram estar totalmente consolidadas. Nesse sentido podemos afirmar que o domínio da manipulação das coordenadas já era estabelecido e notado nas obras de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uma vez que:

> *Percebeu então , em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das* diferenças *das ordenadas e das abcissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área. BOYER (1996. p. 276)*

É creditada a Leibniz e Newton grande parte da elaboração sistemática do cálculo. Vale a pena estudar o papel desempenhado pela geometria analítica e pela representação gráfica neste novo domínio da matemática, se relevarmos a afirmação de EVES (1997, p. 462):

> *O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores.*

Podemos então confirmar a consolidação da representação gráfica, associada ao cálculo, na afirmação de BOYER (1996. p. 282):

> *Também* Enumeratio *fora escrito por volta de 1676, e é o mais antigo exemplo da obra dedicada unicamente a gráficos de curvas planas de grau superior. Newton notou setenta e duas espécies de cúbicas (uma meia dúzia é omitida) e uma curva de cada espécie é cuidadosamente traçada. Pela primeira vez são usados sistematicamente dois eixos, e não há hesitação quanto a coordenadas negativas.*

Um aspecto que pode ser apreciado na obra de Newton, que trabalhou com habilidade o par cálculo-representação gráfica, é o da mútua complementação do tratamento algébrico/gráfico, naturalmente, desenvolvido nessas teorias. Nesse sentido BOYER (1996, p.439) esclarece que a teoria dos fluxos desse cientista foi logo aplicada e interpretada na determinação de *máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas* ... como confirma EVES(1997). STRUIK (1989) ainda salienta a preocupação de Newton na classificação de curvas cúbicas no trabalho *Enumeratio linearum tertii ordinis*, citado acima.

Do que foi considerado até aqui, nos certificamos da consolidação da geometria analítica. Analisando o movimento matemático do período, podemos indicar os esboços das primeiras sofisticações da representação gráfica ao assinalarmos a elaboração de outros sistemas de coordenadas para o estudo de curvas, bem como de suas eficientes manipulações – em especial os sistemas de coordenadas polares e retangulares, investigados por Jakob Bernoulli (1654–1705), como apontam STRUIK(1989) e EVES(1997).

Nesse contexto devemos estar atentos à obra do francês G. F. A de L'Hopital (1661-1704) que colaborou para a aceitação e divulgação, em larga escala, da geometria analítica, dado sua influência no meio científico bem como ao caráter pedagógico de seu textos:

> *L'Hospital era um autor excepcionalmente convincente, pois seu* Traité analytique des sections coniques, *publicado postumamente em 1707, fez pela geometria analítica do século dezoito o que a* Analyse *fizera pelo cálculo. O* Traité *não era especialmente original, mas tinha qualidades pedagógicas que o tornaram o tratado padrão sobre cônicas durante a maior parte do século.BOYER (1996, p. 290).*

Então notamos como vários autores se dedicavam a ampliação e discussão do estudo das curvas, sendo James Stirling (1692-1770) e

Colin Maclauring (1698–1746) dois matemáticos que contribuíram neste sentido. Influenciados diretamente pelos estudos de Newton, publicaram vários tratados investigando curvas e suas raízes. BOYER (1996)

A mobilidade geográfica dos matemáticos, sua comunicação bem como a divulgação de seus estudos era notada em quase toda a Europa do século XVIII. Tal característica foi acentuada no século XIX com a fundação de inúmeros jornais/revistas/periódicos voltados para a discussão matemática.

Nesse período de intensa produção/divulgação científica se configura a representação gráfica do espaço associada à geometria analítica e seus métodos – esses estudos alcançaram alto grau de complexidade. Algumas dessas especulações são confirmadas na análise das obras do suíço Jacob Hermann (1678–1733), feitas por BOYER (1996, p. 299):

> *Hermann fez contribuições a geometria analítica no espaço e a coordenas polares, [...] deu equações polares também de curvas algébricas, juntamente com equações de transformação de coordenadas retangulares para polares. O uso de Hermann fez de coordenadas no espaço também foi mais ousado que o de Jeam Bernoulli, [...] aplicou eficazmente coordenadas no espaço a planos e a diferentes tipos de superfície quadráticas. Deu início ao uso de ângulo de direção mostrando que o seno do ângulo que o plano az + by + cx = c² faz com o plano xy é dado por* $\sqrt{b^2+c^2}\,/\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

A geometria analítica no espaço, que ganhou forma nas obras de Herman, foi bastante explorada pelo francês Alexix Claude Clariaut (1713–1765), que em 1731 escreveu o primeiro tratado sobre geometria analítica no espaço, entitulado Recherches sur els couber à double coubure, onde pode ser encontrada a manipulação de curvas no espaço por *meio de projeções em dois planos ortogonais*, curvas determinadas pela intersecção de várias superfícies , fórmulas para a distância no plano e no espaço, além de tangentes de curvas no espaço. BOYER (1996, p. 312).

Nessa abordagem, a representação gráfica no espaço avançou definitivamente, ganhando consistência e sendo muito ampliada na obra do suíço Leonhard Euler (1707-1783) pois o segundo volume de sua *Introductio in analysis infinitoru*, de 1748, traz um conteúdo de geometria analítica, que em comparação ao de Clariaut:

> *... era mais extenso, mais sistemático e mais eficaz. Desde 1728 Euler contribuiu com artigos no* Commentarii *de Petersburgo sobre o uso de geometria de coordenadas no espaço, dando equações gerais para três grandes classes de superfícies - cilindros, cones e superfícies de revolução.*[95] *(BOYER, 1996)*

SILVA (1993, p. 58), alerta para a importância desta obra afirmando que *o livro Introductio de Euler é provavelmente o livro didático mais influente dos tempos modernos* e STRUIK (1989, p. 196) ressalta que *em vários campos, a apresentação feita por Euler adquiriu a sua forma quase definitiva* de forma a esclarecer o quão influente foram seus estudos para as gerações posteriores.

Numa análise mais atenta BOYER (1996, p. 318) salienta que o livro *fez mais do que qualquer outro para tornar o uso de coordenadas, tanto em duas quanto em três dimensões, a base para o estudo sistemático das curvas e superfícies* e indica, em seguida, que nesta obra encontramos *uma teoria geral de curvas, baseada no conceito de função que era central no primeiro volume*, onde encontramos *praticamente pela primeira vez, o estudo gráfico das funções trigonométricas*.

É vasta a obra matemática de Euler e entenderemos de maneira decisiva sua contribuição no campo da geometria analítica, em especial na representação gráfica de funções, ao atentarmos para a análise feita por BOYER (1996, p. 306) ao apontar que:

... serviu como fonte para os florescentes desenvolvimentos da matemática durante toda a segunda metade do século dezoito. Dessa época em diante a idéia de "função" tornou-se fundamental na análise. Fora prenunciada pela latitude de formas medieval, e estava implícita na geometria analítica de Fernat e Descartes, bem como no cálculo de Newton e Leibniz. [...] O quarto parágrafo da Introductio define função como uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e números ou quantidades constantes". (Às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada a mão livre sobre um plano).

Na figura 3, temos a reprodução de uma das partes das tábuas de desenho encontradas ao no livro de *Introductio* de Euler. Nesta figura, podemos observar como Euler fazia a representação gráfica das funções abordadas em sua obra.

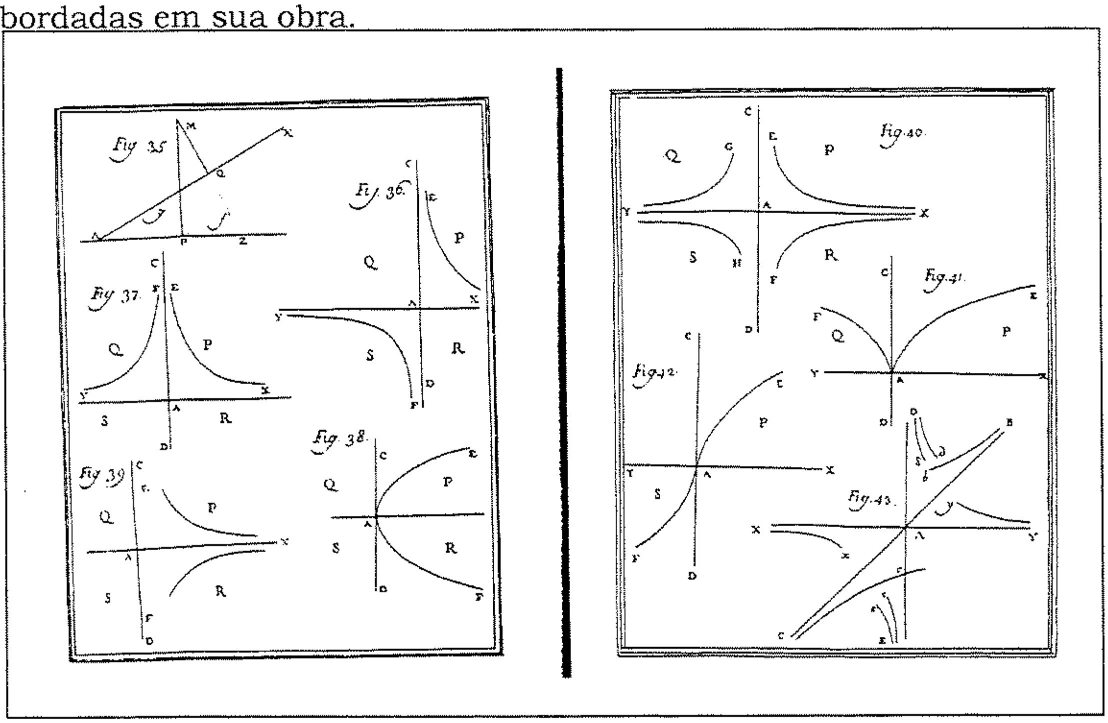


FIGURA 3: Parte das tábuas de ilustrações do livro *Introductio in analysis infinitoru*, 1748 – Leonard Euler.
FONTE: Introduction to Analysis of the Infinite - Book II – Translated by John D. Blanton /Springer Verlag /NY- USA

Confirmado tal aspecto, Silva sintetiza a afirmação acima ao revelar que *a idéia de função estava conectada com o estudo analítico de curvas*. SILVA(1993, p. 58).

Inúmeras são as riquezas da obra de Euler e nos limitamos a citar como reflexos dessa riqueza outros dois avanços pois descreveu e ajudou a introduzir a parametrização de curvas além de sofisticar e estabelecer definitivamente o uso de coordenadas polares. BOYER (1996, p. 318).

Uma das marcas do período em que Euler atuou, foi a publicação crescente de livros textos com um perfil mais didático e portanto, acessível a um número maior de estudiosos, e segundo SILVA (1993), responsável, muitas vezes, pela popularização da geometria analítica naqueles séculos.

Assim, encontramos indícios de como os inúmeros livros textos, em várias línguas e compilações, contribuíram para a introdução da representação gráficas de funções e da geometria analítica no ensino e segundo BOYER(1996, p. 321):

> *poderíamos acrescentar que foi a segunda metade do século que produziu o gênero freqüentemente conhecido como Cours d'Analyse – uma obra em vários volumes cobrindo toda a matemática do nível elementar ao mais alto. (...) Foi através de tais compilações, mais do que através das obras originais dos próprios autores, que os progressos matemáticos de Euler e d'Alembert se tornaram amplamente conhecidos.*

Ocorre na França, justamente no ano de 1794, a fundação da Escola Politécnica e da Escola Normal, num ambiente que demandava novas práticas de ensino e novos livros textos, e STRUIK (1989, p.234) ressalta que:

> *Uma instrução em matemática teórica e aplicada fazia parte do currículo. Era dada a ênfase quer a pesquisa quer o ensino. Os melhores cientistas das França foram induzidos a colaborar com a escola; muitos grandes matemáticos franceses eram estudantes, professores ou examinadores na Ecole Polytechnique[138].*
> *A introdução nesta instituição, assim como noutras escolas técnicas, exigia um novo tipo de livros. Os tratados eruditos para iniciados, que*

> *eram característico do período de Euler, tinham de ser suplementados com manuais escolares.*

Mais adiante, Struik complementa que boa parte dos livros textos do século XIX foram elaborados em função da escola politécnica e revela surpreendentemente que *a sua influência pode ser detectadas nos nossos textos actuais.* STRUIK (1989, p.234).

Um dos mais importantes professores de geometria dessa escola foi Gaspard Monge (1746–1818), visto que *com a reforma do currículo de matemática, a necessidade de dispor de livros adequados se tornou aguda.* BOYER (1996, p. 327)

O papel desempenhado por Monge foi fundamental, tanto na elaboração de livros, como no incentivo ao ensino de geometria nos cursos universitários. Ao elaborar problemas que envolviam superfícies assinalou uma *mudança no ensino da matemática, que foi promovido primariamente pela Revolução Francesa* – destacando-se como excelente professor e *formador de currículos* BOYER (1996, p. 328).

Segundo Boyer, Monge contribuiu enormemente para o ensino de Geometria Analítica, visto que:

> *... também, não havia texto disponível, e assim Monge se viu compelido a escrever e imprimir suas* Feuilles d'analyse *(1795) para o uso dos estudantes. Aqui a geometria analítica de três dimensões realmente tomou forma; foi esse curso, exigido aos estudantes da Polytechinique, que formou o protótipo dos programas de geometria analítica no espaço. BOYER (1996, p.328)*

Além do considerado acima, lembramos que a forma como foram compostos seus textos parece aproximá-los dos atuais, já que ao citar um de seus trabalhos, BOYER (1996, p.329) afirma que *todo volume poderia ser usado sem dificuldades como texto no século vinte.* Estes trabalhos e outros em coautoria com Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769–1834) foram escritos por volta de 1800 e suas semelhanças com os atuais é confirmada por STRUIK (1989, p.235) ao notar que *começamos, por fim, a reconhecer os nossos textos actuais de geometria analítica.* STRUIK (1989, p.237) também chama atenção para uma nuança fundamental das contribuições de Monge, uma vez que a Escola Politécnica *continuou a florescer dentro do espírito de Monge. A própria natureza do ensino tornou difícil a separação entre matemática pura e aplicada*

EVES (1997) ao analisar alguns dos procedimentos e fórmulas contidas nos trabalhos desse professor, reforça as afirmações acima. SILVA conclui nossa discussão, indicando a influência da abordagem feita por Monge no trabalho de outro eminente matemático, cujo trabalho voltou-se para a discussão da geometria analítica do plano, François Lacroix(1765–1843):

> *Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro didático sobre Geometria Analítica. Lacroix (1765-1843) foi um autor que teve muito sucesso na vendagem de seus livros. A primeira edição (...) surgiu em 1798 e, em 1897, a 25ª edição desta obra.*
> *Lacroix, assim como Newton, considerava que a Álgebra e a geometria deveriam ser tratadas separadamente, tão separadamente quanto possível, e que os resultados de cada uma servissem para a mútua clarificação. SILVA (1993. p. 63)*

Como SILVA (1993) podemos afirmar que a geometria analítica tinha alcançado nas obras de Monge e Lacroix sua forma final.

Então, parece natural acreditar que nesse período, e daí em diante, além do ensino sistemático, os avanços indicaram principalmente a sofisticação e aplicação da geometria analítica e representação gráfica.

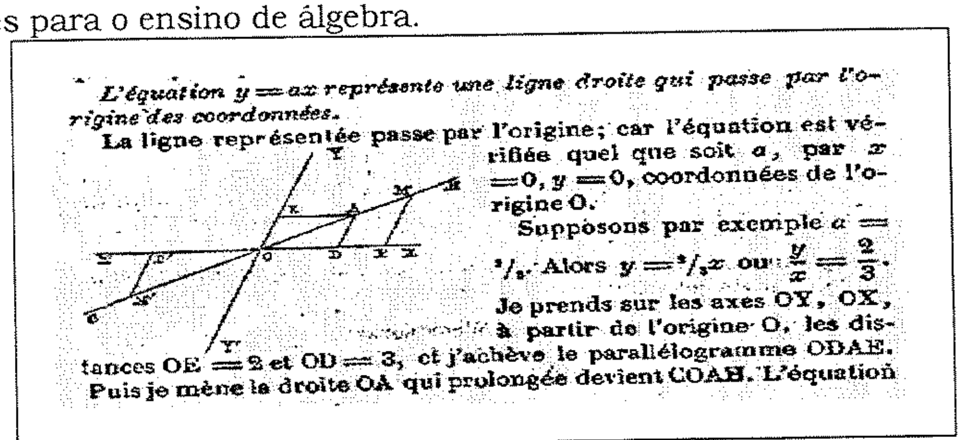
Nessa época, os avanços, bem como a influência para as gerações seguintes, são encontrados nas obras de inúmeros matemáticos, e muitos outros professores das mais variadas áreas da matemática aplicada e pura, dos quais citamos, por exemplo, Lazare Carnot (1753-1823 - organizador da vitória militar da revolução francesa) desenvolveu as coordenadas intrínsecas ao confrontar habilmente diferentes sistemas de referências e coordenadas; Adrien-Marie Legendre (1752-1833) que desenvolveu trabalhos acentuando o rigor matemático, além de serem difundidos no ensino, principalmente nos Estados Unidos da América; Joseph Louis Lagrange (1736-1813) que generalizou coordenadas ao usar derivadas abandonando praticamente a representação geométrica; Gabriel Lamé (1795-1870) e Étienne Bombillier (1798-1840) que contribuíram na simplificação da notação e trabalharam o estudo de curvas pelo "método da notação abreviada", sendo que o primeiro também associou coordenadas curvilíneas e equações diferenciais no estudo de problemas de calor.

Neste momento lembramos um fato curioso. A primeira tentativa de se representar graficamente um número complexo, feita por Caspar Wessel (1745-1718) em 1797, foi praticamente ignorada, parecendo-nos que o desenvolvimento alcançado pela geometria analítica nos anos seguintes atuou de forma fundamental para a representação gráfica dos números complexos, pois somente no ano de 1831, mais de três décadas após a primeira tentativa, surgia a segunda tentativa com a representação dada pelo alemão Carl Friedrish Gauss (1777-1855), e a partir de então, os números complexos foram aceitos definitivamente BOYER(1996). Podemos supor quão importante foi a conveniente representação gráfica para o estabelecimento e aceitação de uma teoria até então controversa, já que com sua representação Gauss *afastou para sempre o mistério que ainda rodeava os números complexos, representando-os por pontos num plano* - além de contribuir no estudo de superfícies curvas usando coordenadas curvilíneas. STRUIK (1989, p.230).

Lembramos oportunamente que outro alemão, Julius Pücker (1801-1868), considerado o primeiro especialista em geometria analítica, foi um dos maiores responsáveis pela sua sofisticação. A ele deve-se boa parte dos avanços e aplicações do "método da notação abreviada", "coordenadas homogêneas", "representação complexa", "princípio geométrico da dualidade", sendo este último, decisivo para a chamada "aritmetização da geometria".

A Arthur Cayley (1821–1895) e James Joseph Sylvester(1814–1897) devemos a associação dos determinantes à geometria analítica, mostrando a ligação de um método puramente algébrico à uma elegante representação gráfica.

Ilustrando nosso texto, apresentamos na figura 4, a ilustração da interpretação geométrica de uma equação de 1º grau a duas variáveis, encontrada um livro de 1880, usado nos liceus e colégios franceses para o ensino de álgebra.



L'équation $y = ax$ représente une ligne droite qui passe par l'origine des coordonnées.

La ligne représentée passe par l'origine; car l'équation est vérifiée quel que soit a, par $x = 0$, $y = 0$, coordonnées de l'origine O.

Supposons par exemple $a = {}^2/_3$. Alors $y = {}^2/_3 x$ ou $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$.

Je prends sur les axes OY, OX, à partir de l'origine O, les distances OE = 2 et OD = 3, et j'achève le parallélogramme ODAE. Puis je mène la droite OA qui prolongée devient COAB. L'équation

FIGURA 4: Interpretação geométrica da equação $y = \frac{2}{3}x$.

FONTE: *Cours Complet d'Algèbre Élémentaire,* A. Guilmin, 1880, p. 132

Encerramos, assim, a análise dos eventos, que resultaram na configuração daquilo que chamamos de geometria analítica/representação gráfica. Infelizmente omitimos outros nomes e feitos de matemáticos que à sua maneira, contribuíram elegantemente nesse campo do conhecimento.

Em resumo, a representação gráfica e a geometria analítica a partir do século XII, por meio de um movimento de contínua e acelerada consolidação/sofisticação, bem como, divulgação e ensino conquistaram importante e definitivo papel na matemática. Esse movimento se deu num ambiente de profundas transformações e revoluções políticas/filosóficas revelando a força da burguesia e de seu ideário liberal. Notáveis estudiosos contribuíram para a caracterização desse novo campo de estudo, que aliado ao cálculo de Newton e seus contemporâneos acompanhou e auxiliou os profundos avanços da matemática pura e aplicada. A influência do pensamento matemático francês, imediatamente assimilado na Holanda, incorreu nas primeiras divulgações da geometria analítica em caráter mais amplo. Esse ramo da matemática cresceu em aplicação e sofisticação. Matemáticos ilustres como Euler determinaram sua aceitação por meio do aprimoramento da teoria, agora também associada às funções e suas curvas; da notação utilizada; bem como, da divulgação didática de seus textos.

A nova realidade do ensino nas recém fundadas escolas, que supriam basicamente as necessidades militares, impulsionou profundas mudanças no ensino. Mudanças sentidas na reorientação do currículo como nos livros textos, de linguagem mais acessível, publicados por notáveis matemáticos e professores.

O desenvolvimento da matemática neste período foi notável, processo igualmente percebido na geometria analítica, que agora atingia alto grau de complexidade e amplo campo de atuação, caracterizando-a como uma especialidade dado o poder de alcance e generalidade de seu método.

Uma vez que refletimos sobre os principais eventos da construção da geometria analítica e representação gráfica, pretendemos no próximo capítulo caracterizar os primórdios da matemática escolar no Brasil, pontuar como se realizou a inserção da geometria analítica no ensino brasileiro e, analisar a evolução das representações gráficas de funções nos livros didáticos nacionais.

CAPÍTULO 3

AS ORIGENS DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES NA MATEMÁTICA ESCOLAR BRASILEIRA

> *Aí, quando ele percebe que a parábola tem um eixo de simetria ... porque, você deu uma tabela imensa para ele fazer, com a calculadora, tudo bem, ele já sabe os pontos, então ele vai colocando os pontos e depois de várias vezes, ele começa a falar _"Ô, mas se eu dobrar esse papel aqui, o que aconteceu de um lado, aconteceu do outro" ... eixo de simetria! Mas ele tem que chegar nisso! Qual é o ponto menor? É o ponto mínimo da função? No vértice. Quando ele chega a essa conclusão, que isto aqui, esse eixo vai passar bem pelo ponto mínimo, facilita bem..*
>
> Profª Eliana Maria Zanuni

> *Divido a lousa em 4 ou 5 partes e vou fazendo os gráficos. Aí ... faço* $y = x^2 - 1$*, aí ... eu mostro: "_ Vocês estão vendo? Olha, aqui. Eu adicionei 2 unidades na função, a imagem subiu 2 unidades; aqui eu adicionei 3, subiu 3 unidades; aqui eu tirei 1, desceu 1 unidade. Está certo? Então, o que é esse* $f(x) + a$ *que está aqui? Este "azinho" que está aqui? Esta constante? Está constante é o parâmetro que está subindo o gráfico uma unidade, ou descendo o gráfico uma unidade." Então eu faço isso muito empiricamente. Um por um ..., deixo o aluno perceber. Se eu tiver que demorar 3, 4 aulas para dar o assunto, eu demoro. Mas ele vai ter uma visão concreta do assunto...*
>
> Prof. Marcos Fernando Silveira Orlando

1. Uma breve caracterização da matemática escolar no Brasil: 1500 a 1900

Nesta seção, assinalaremos de maneira global, alguns acontecimentos no panorama histórico brasileiro, no período do descobrimento até o início do século XX. Logo em seguida, discutiremos de maneira mais local, o mesmo período, com o intuito de assinalar os principais eventos no processo de organização da matemática escolar no Brasil até o início do século XX.

Tal relato objetiva reavivar o cenário em que as representações gráficas de funções se apresentaram de maneira sistemática no ensino brasileiro. Ao final desta seção, estaremos mais preparados para apresentar, na seção subseqüente, as representações gráficas de uma maneira mais contextualizada.

Como apontamos no capítulo anterior, o período final da Idade Média é marcado por profundas transformações dos panoramas político, social e econômico, assinalando no cenário Europeu, a passagem gradativa do modo de vida feudal para o urbano. São complexos os processos de organização dos Estados Modernos. Vale lembrar que nesse processo, a expansão marítimo-comercial, que emergia principalmente pela necessidade de estabelecer novos mercados fornecedores de produtos aos consumidores europeus, foi decisiva para o fortalecimento econômico e político da classe burguesa aliada ao rei – o que pode ser notado de maneira peculiar em Portugal, Espanha e Inglaterra.

Como em vários Estados europeus, o processo de descobrimento e colonização das novas terras, marca a expansão da economia mercantil da Europa. No processo de colonização, um dos papéis do Estado metropolitano é o controle dos mecanismos políticos mercantilistas, enquanto que a burguesia assume, de certa forma a função de investir e realizar comércio colonial. Comercio voltado naturalmente para a exploração dos recursos naturais e agrícolas da colônia, com uma importante fonte de acúmulo de riqueza.[1]

---

[1] A elaboração do panorama histórico inicial, com respeito a educação/ensino, desenvolvido neste capítulo é norteada pelos textos *Grandezas e Misérias do Ensino no Brasil,* de WEREBE (1994), *As Ciência no Brasil,* organizado por AZEVEDO (1955) e, *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930),* escrita por VALENTE (1997).

A colonização realizada no Brasil por Portugal cumpre alguns interesses fundamentais para a metrópole portuguesa, dentre os quais destacamos a ocupação, exploração e proteção das terras coloniais. Os mecanismos que garantem o êxito na realização desses interesses, são complexos e variados; entretanto, podemos citar, a larga participação da Igreja contribuindo, com as missões jesuíticas, para a 'pacificação' dos povos indígenas – que, escravizados, eram usados nas atividades de exploração mercantil – além da construção de vilas e fortes cumprindo o objetivos da ocupação e proteção das terras coloniais, contra as investidas de outros países.

Analisando mais atentamente o papel das missões jesuíticas, é válido lembrar que os jesuítas praticamente monopolizaram a educação no Brasil Colônia até o ano de 1759, quando foram expulsos pelo Marquês de Pombal, entretanto, sua influência não cessa com essa expulsão.

Atentos os eventos sócio-políticos ocorridos na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, reiteramos que a fuga da corte real portuguesa para o Brasil em 1807, devido às investidas napoleônicas, marca um período de profundas mudanças na estrutura da colônia, nova sede do governo português. Naturalmente, em resposta às necessidades da sociedade colonial da época, bem como satisfazer os interesses políticos-mercantis da realeza, são criadas instituições de ensino para a formação de oficiais e engenheiros nas escolas militares bem como, a formação de médicos para o servir à corte e às forças militares. Nesses novos núcleos de ensino, o estudo das ciências no Brasil se desenvolve com caráter prático e, aos poucos, vão se estabelecendo os níveis de ensino resultando a gradativa separação dos níveis secundário e superior. Das instituições de ensino, criadas com fins bélicos, podemos citar a Academia Real dos Guardas-Marinha, criada em 1779, em Portugal, transferida para o Rio de Janeiro juntamente com a corte, e a Academia Real Militar, criada em 1810, também na capital do reinado. É digno de nota, que, no período anterior ao da instalação da corte real, outros núcleos já serviam para a educação/treinamento militar na colônia - como a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, criada em 1792, no Rio de Janeiro.

A exemplo das várias colônias que de certa forma, sustentavam a economia capitalista européia, no Brasil, após a volta da corte para Portugal, as classes sociais dominantes também deram ênfase a contestação do julgo econômico imposto pela metrópole. Naturalmente, o processo que culminou na proclamação da independência em 1822, não pode ser dissociado dos profundos movimentos de mudança, ocorridos a partir da metade do século XVIII na Europa, sendo notáveis a Revolução Industrial e o fortalecimento do ideário liberal.

Uma vez estabelecido o Império, tendo como pano de fundo as constantes disputas políticas entre grupos liberais e grupos conservadores, vale lembrar, que os membros das elites, marcam a primeira metade do século XIX, no âmbito político-legislativo, por inúmeras discussões de cunho administrativo-social.

Os critérios para uma reforma da educação no território nacional também fazem parte destas discussões e, embora sejam estabelecidas leis a respeito do funcionamento do ensino, poucos são os resultados práticos para uma escolarização mais geral da população. Nesse contexto, é atribulado o processo de criação das escolas normais, liceus e colégios de ensino público, sendo o Colégio Pedro II, criado em 1837, uma escola de referência tanto na qualidade, quanto no ensino em nível secundário. Vale lembrar que o ensino ginasial e secundário desse período também é marcado pelo aparecimento de inúmeras escolas particulares, onde a presença dos colégios católicos é predominante.

Já no final do século XIX, o processo de transição do regime monárquico para o republicano traz a tona o fortalecimento das oligarquias cafeeiras, que, sob um regime governamental de fachada liberal, manipulam os mecanismos de eleição democrática. Essa manipulação é acompanhada pela aumento da insatisfação das classes populares – cada vez mais excluídas dos processos políticos e dos benefícios da modernidade – o que assinalam a estagnação do modelo de Estado liberal, acentuando ainda mais as inquietações sociais, sendo a revolução de 1930 é um reflexo deste processo de estagnação política.

Finalmente, devemos lembrar que, no cenário mundial, a competição imperialista das nações européia para o domínio de várias regiões da América Latina, África e Ásia, mostrando sua força de dominação e influência político/cultural. Tal dominação é sentida em todos os campos, haja visto no Brasil, os reflexos de tal dominação cultural e filosófica disseminada nos mais variados campos do saber e escolarização.

Uma vez que assinalamos de maneira global alguns acontecimentos no panorama histórico brasileiro, no período do descobrimento até o início do século XX, assinalaremos a seguir de maneira local, o mesmo período, buscando assinalar os principais eventos no processo de organização da matemática escolar no Brasil até o início do século XX.

Os 210 anos da permanência e atuação dos jesuítas no Brasil colonial, são marcantes para as concepções de ensino na sociedade colonial e as influências desta atuação serão sentidas em períodos posteriores. Como já afirmamos, a presença e atuação jesuítica do período de 1549 a 1759 no ensino é monopolizadora.

Neste sentido AZEVEDO (1955, p.19) aponta que:

> *Mas êsse fato do domínio quase exclusivo da Igreja, essa conexão, tão característica, do poder civil e do poder eclesiástico que se estendeu pelo Império adentro até à questão religiosa, e essa absorção do ensino pelo clero, regular e secular, foram tanto mais decisivos na história colonial quanto mais poderosa (e sob tantos aspectos,*

benéfica) a influência que exerceu na vida social, política e mesmo econômica da nacionalidade em formação.

Para um melhor entendimento dessa atuação, recorremos à WEREBE (1994, p. 22) que consultando AZEVEDO (1943), apresenta dados interessantes sobre as posses dos jesuítas que na época da expulsão:

... estes, possuíam 36 residências, 36 missões, e 17 colégios e seminários, sem contar os seminários menores e as escolas de ler e escrever. Note-se porém que não há acordo entre os autores quanto ao número de estabelecimentos mantidos pelos jesuítas nessa época.

A postura conservadora da Igreja e os reflexos de tal posição nos países da Península Ibérica e suas colônias, onde sua atuação é marcante, sustenta um ensino tradicional preconizando valores de cunho eclesiástico – que os jesuítas também defendiam - em contraposição às abordagens mais liberais e revolucionárias que alguns países europeus assumiram no âmbito científico-cultural.

Nesse sentido, valemo-nos das afirmações de AZEVEDO (1955, p.12 e p.13) ao esclarecer que:

Pois, se o mesmo fato que observamos, entre nós, se verificou nos países de colonização espanhola, parece ter-se mantido, nos dois povos da Península Ibérica, antes de se acusar fortemente nas colônias que fundaram, o mesmo espírito tradicional ou a mesma mentalidade mais ou menos hostil aos progressos de um novo tipo de cultura. O espírito científico que se havia propagado pela Europa, sobretudo a partir do século XVII, se despontou em Portugal e Espanha, não encontrou aí condições favoráveis ao seu desenvolvimento normal, e a cultura que êsses dois povos transferiram às colônias, foi exatamente a que nêles acabou por predominar, a despeito das participações iniciais de um e de outro nas conquistas do Renascimento.

Nesse sentido, podemos afirmar que no campo do ensino da matemática, o trabalho jesuítico, foi inferior ao desenvolvido em muitos países da Europa, pois, segundo VALENTE (1997, p. 25):

> *A generalização dos estudos matemáticos como cultura escolar dos colégios jesuítas, parece ter* ***fracassado*** *ou, no mínimo não ganhou o destaque e importância pensados por Clavio. Poucas escolas mantiveram cursos de matemática. Além disso, as matemáticas não se impuseram facilmente como ciência, mesmo aos próprios professores de ciências da ordem jesuítica.* (o grifo é nosso)

Cabe aqui mencionar dois aspectos importantes: o primeiro, é que a formação escolar dos alunos dos colégios jesuíticos era voltada a formação literária, baseada principalmente no latim; o outro diz respeito a atuação do padre Clavio[2], como um importante autor de livros difundidos na ordem jesuítica naquele período. Nas palavras de VALENTE (1997, p.18), Clavio:

> *Escreveu extensos tratados de aritmética, geometria, álgebra e astronomia que representam etapas importantes na difusão dos conhecimentos matemáticos pois possuiam muitas qualidades pedagógicas e, além disso, foram difundidos pela Europa servindo de referência aos colégios jesuítas.*

Ainda recorrendo a VALENTE (1997), esclarecemos que outros autores jesuítas contemporâneos a Clavios, atuaram na composição de

---

[2] Segundo VALENTE (1997, p. 17): *Clavio é um dos jesuítas que se ocupou das ciências de modo muito destacado.* Clavius *nasceu em Bamberg, Alemanha, em 1537 e morreu em Roma em 1612. Era matemático e astrônomo. Clavio foi amigo de Galileo porém, foi também um dos primeiros homens da igreja a denunciar a teoria de Copérnico como absurda e contrária às Santas Escrituras...Membro da Companhia de Jesus desde 1580, Clavio empreendeu a tarera de promover o ensino de ciências matemáticas na Instituição esforçando-se por mostrar que a astronomia e as matemáticas tinham um valor científico importante num meio dominado pela 'filosofia natural'.*

livros e manuais com conteúdos matemáticos[3]. Tais obras, muitas vezes eram pautas com preocupações de exposição didática, traziam conhecimentos matemáticos e astronômicos de ordem elementar, ,já que eram destinados a instrução e uso dos navegadores e freis jesuítas na exploração e colonização ultramarinas.

Nessa perspectiva, por meio da análise que VALENTE (1997) faz de uma das obras usadas pelos jesuítas, evidenciamos o caráter prático e informal da matemática presente e *Aula da Esfera*[4].

Podemos concluir qual foi o aspecto geral da intervenção jesuítica no ensino da matemática em suas escolas no Brasil, baseados na afirmação de VALENTE (1997, p.28):

> *Tudo leva a crer, enfim, apesar dos poucos conhecimentos sobre o tema, que as ciências e em particular a matemática não constituiram (sic), ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento integrante da cultura escolar e formação daqueles que aos colégios da Cia. de Jesus ocorriam.*

Podemos afirmar, finalmente, que a tímida ocorrência, ou quase inexistência, de um processo mais efetivo de integração da matemática na escolarização jesuítica, reflete uma tendência mundial:

> *Transcorrerá muito tempo, não somente no Brasil, mas em toda a Europa para que a matemática troque o* status, *de ensino prático, técnico e menor e ganhe lugar, junto das letras, como cultura geral escolar.* VALENTE (1997, p.27)

---

[3] Tais obras, ao que parece, eram compostas predominantemente em Portugal.

[4] Encontramos em VALENTE (1997, p. 18, nota de rodapé) a informação que a *Aula da Esfera* é uma tradução feita, em 1537, pelo primeiro cosmógrafo-mor do reino português, Pedro Nunes, do abra *Tractatus da Sphaera (1233)*, do inglês, John of Hollywood, mais conhecido por Johannes Sacroboscus.

Voltaremos nossas atenções para o tipo de apresentação matemática ocorrida no Brasil Colônia, em função da necessidade de formar mão-de-obra apta para a construção militar e civil, bem como para o treinamento militar. Necessidades impulsionadas pela preocupação da Metrópole em proteger a colônia das investidas piratas, ampliar os domínios territoriais e garantir a posse e exploração das terras conquistadas.

Mesmos parecendo natural, vale lembrar que na construção de fortes, postos de comando militar, pontes, igrejas, estabelecimentos comerciais, casas e casarões, entre outros, é necessário um mínimo de conhecimento matemático – o mesmo pode ser considerado, para as práticas comerciais e de navegação.

No cenário militar, o aperfeiçoamento das armas de fogo, principalmente dos canhões, traz a tona a necessidade de uma arquitetura especial para a construção dos fortes. Nesta direção, VALENTE (1997, p. 31) aponta que:

> *Fica constituída, assim, uma forma inteiramente nova de arquitetura das fortificações. Ambos: a evolução da* artilharia *e o conseqüente nascimento de novas formas construtivas, criam a necessidade da existência de uma mão de obra especializada. É assim que nascem, por toda parte, as* Aulas de Artilharia e Fortificações.

Contudo, devemos estar cientes de que os primeiros cursos e instituições que difundem o conhecimento técnico militar são realizados em Portugal – que também necessitava aperfeiçoar seu exército. Na Colônia, naturalmente são percebidos os seus efeitos, e a instrução daqueles que almejavam tal instrução era feita, parte nas academias militares situadas em Portugal, segundo informa CASTRO (1955, p. 47), parte na por meio da *Aula de Fortificações* no Rio de Janeiro, criada em 1699, conforme assinala VALENTE (1997, p. 36).

A partir de 1738, a obrigatoriedade do ensino militar a todo oficial, faz com que a demanda pela instrução militar aumente, sendo criada a *Aula de Artilharia e Fortificações do Rio de Janeiro*, que ao nosso ver, é um fato importante para a história da matemática escolar brasileira, já que nesse ambiente surgem os primeiros livros didáticos de matemática no Brasil. VALENTE (1997, p. 38)

A introdução de livros didáticos está associada ao professor militar José Fernandes Pinto Alpoim[5] que escreve os dois primeiros livros didáticos de matemática do Brasil, *Exame de Artilheiros* em 1744 e o *Exame de Bombeiros* em 1748. VALENTE (1997, p. 41).

As características gerais destas obras são apresentadas por VALENTE (1997, p. 42) ao observar que:

> *... devemos frisar bem que a finalidade dos livros era militar [...] visavam também atender objetivos didático-pedagógicos. Do ponto de vista da matemática que nos livros aparecem é ela elementar, constitui-se de conteúdos que hoje encontramos nos cursos de 1° e 2° graus e, mais que isso, não se tem conhecimento de textos de matemática mais antigos escritos na colônia.*

Chamamos a atenção para o fato de que as obras de Alpoim, apresentam caráter e estrutura de escrita, bastante elementares, além disso:

> ***Não*** *estão, os conteúdos matemáticos, organizados ainda como uma teoria escolar.* ***Não estão postos*** *os conteúdos como uma* ***seqüência de princípios, exemplos, generalização e exercícios****. Os textos contêm informações de como fazer, como proceder dentro das atividades militares de artilheiros e bombeiros.* VALENTE (1997, p. 54) (Os grifos são nossos)

---

[5] Alpoim nasceu em Portugal, no ano de 1700 e lecionou a *Aula de Artilharia e Fortificações do Rio de Janeiro* de 1738 até 1765, ano de sua morte.

Salientamos ainda, com a feliz intervenção de VALENTE (1997, p. 54), outro importante aspecto da obra de Alpoim, que se fará presente na elaboração de livros didáticos de períodos posteriores:

> *A prática de* ***cercar-se de inúmeros tratados, compilá-los para ministrar cursos*** *e por fim* ***utilizar a experiência pedagógica adquirida*** *para escrita de textos próprios para os alunos* ***irá revelar-se a gênese da produção da matemática escolar****. No Brasil isso se deve inicialmente a Alpoim.* (Os grifos são nossos)

Como assinalamos, encontramos no processo de elaboração dos textos didáticos a influência de outros textos já elaborados. Uma análise das fontes a que recorriam os autores, muitas vezes, compiladores, ou simplesmente tradutores dos livros nacionais dos séculos XVIII, XIX e início do século XX, leva-nos a constatação da influência notável que o estilo e contribuições didático-literárias francesas exerceram sobre os autores brasileiros. Haja vista a influência do pensamento filosófico de Descartes e de sua doutrina no cultura moderna, bem como, das contribuições de ilustres matemáticos franceses como ressaltamos no capítulo anterior.

Parece natural que, sob a influência francesa no aperfeiçoamento de livros textos e evolução natural do ensino em suas escolas e academias militares, os livros didáticos nacionais evoluem em conteúdo e forma nos períodos posteriores ao da obra de Alpoim.

O processo de reestruturação do frágil exército Português, em relação às nações Européias, na segunda metade do século XVIII , também é percebido no Brasil, sendo um dos reflexos da reorganização militar, a elaboração e adoção de livros didáticos mais completos e modernos em relação ao ensino de matemática.

Um dos livros que marca esse movimento de evolução é o livro francês de 1725, *Nouveau Cours de Mathématiques*, de Bélidor[6], traduzido para o português em 1764 por *Manuel de Sousa, capitão de Infantaria e engenheiro em Lisboa.* VALENTE (1997, p. 59). Tal livro foi usado em Portugal por mais de 20 anos, e, para termos uma noção do grau de estruturação da matemática escolar daquele período, transcrevemos a seguir, os conteúdos organizados no livro de Bélidor, numa de suas edições[7], analisada por VALENTE (1997, p.63):

1. *introdução à geometria*
2. *razões, proporções, progressões, logarítmos, equações do 1o. e 2o.graus.*
3. *posições relativas de duas retas*
4. *propriedades dos triângulos e dos paralelogramos*
5. *propriedades do círculo*
6. *polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo*
7. *relação entre perímetro e área de figuras semelhantes*
8. *área e volume dos sólidos*
9. *seções cônicas*
10. *trigonometria retilínea e nivelamento*
11. *cálculo das medidas em geral*
12. *aplicação da geometria à medida de áreas e volumes*
13. *uso da geometria no cálculo de áreas equivalente e uso do compasso de proporção*
14. *do movimento dos corpos e do lançamento de bombas*
15. *mecânica estática*
16. *hidrostática e hidráulica*

Os tópicos, descritos acima, apresentam uma matemática escrita sem *maior rigor e formalidade,* compondo um *texto didático e acessível aos alunos.* VALENTE, [1997, p. 65]

---

[6] Professor do corpo de artilharia da frança Bernard Forest de Bélidor, data de nascimento incerta, (1697/8 ?), nas palavras de VALENTE (1997, p.56), *teve uma vida que mesclou o científico, o pedagógico e o militar,* até a data de sua morte em 1761.

[7] Edição francesa, que serviu para a tradução portuguesa 1764, muito difundida no Brasil.

Quanto à estrutura de escrita dos conteúdos apresentados em cada capítulo, VALENTE, (1997, p. 63) afirma que:

> *Cada uma de suas partes tem um item inicial de definições e seguem as proposições. As proposições são teoremas demonstrados ou problemas resolvidos. Nas demonstrações, Bélidor preocupa-se com a simplicidade e rapidez. Muitas vezes, o que escreve como demonstração de teoremas transforma-se em aplicações numéricas ou em construções geométricas. O que interessa em realidade é que seus alunos saibam onde e como aplicar os teoremas que menciona. Para isso o autor sempre inclui, seja nas demonstrações, seja nos exercícios resolvidos, situações práticas.*

Outra obra que marcou época no corpo de artilharia foi *Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* composta de vários volumes e escrita por Étienne Bézout[8]. Entendemos a dimensão da influência da obra de Bézout, se considerarmos que, de seus livros, o volume que trata da aritmética[9], no ano de 1849 ainda fazia *parte dos livros indicados pelo ministro francês da Instrução Pública.* VALENTE(1997, p. 73)

Assim como VALENTE (1997, p. 82), consideramos as obras de Bélidor e Bézout como matrizes da matemática escolar brasileira, pois:

> *... em Bélidor e Bézout a matemática, nos cursos militares, irá ganhar independência com um (sic) autonomia relativa em relação às praticas militares. Isso explicará também porque Bézout, sobretudo, será um autor adotado em diversos cursos não militares e chegara até nós até o final do século XIX nos liceus e colégios da Europa, EUA e Brasil.*

---

[8] Bézout (1739-1783) publicou os vários volumes de seu *Cours de Mathématiques* durante os anos de 1764 e 1769. VALENTE (1997, p. 72)

[9] Este livro, também traduzido para o português, por Monteiro da Rocha, com o nome *Elementos de Arithmética*, foi usado tanto em Portugal como no Brasil

No Brasil, os processos que caracterizam de forma acentuada a distinção entre o conteúdo matemático a ser ensinado em nível superior, daquele ensinado em nível secundário, podem ser percebidos com maior clareza após a chegada da Corte portuguesa. A demanda por novos cursos para suprir com mão de obra especializada as necessidades da Corte, leva D. João VI a instalar cursos superiores no Brasil. Neste sentido, WEREBE (1994, p. 28) salienta que:

> *Foi assim inaugurado o ensino superior, com finalidade estritamente utilitária, de caráter profissional, visando a formar os quadros exigidos por essa nova situação: os oficiais e engenheiros, encarregados da defesa militar da Colônia, os médicos para a Corte, o exército e a marinha.*

Associado ao processo de distinção dos níveis de ensino, naturalmente ocorre o processo de distinção dos conteúdos matemáticos a ser ensinados em cada nível. Como as atenções estavam voltadas à formação profissional, papel do recém implantado ensino superior, a caracterização dos ensino secundário, deu-se principalmente nas reorganizações as instituições militares, onde a matemática era ensinada com destaque, em relação aos outros estabelecimentos de ensino.

Foi um processo lento e gradual, mas vale lembrar que Academia Real dos Guardas–Marinha vai se constituindo num curso de nível secundário enquanto que Academia Real Militar faz as vezes de um curso em nível superior, e segundo VALENTE (1997, p. 102) é dessas instituições *que virão os **professores** e **livros didáticos** de matemática para o ensino nos preparatórios e liceus provinciais.* (o grifo é nosso).

Outro fato importante, quanto ao ensino em nível secundário, é a influência que o colégio Pedro II exerceu na determinação dos conteúdos a serem ensinados nos anos posteriores a sua criação em 1837, e consequentemente, na elaboração dos livros didáticos.[10]

Um importante esclarecimento a ser feito é que o ensino, em caráter secundário, era voltado para a preparação dos alunos que posteriormente ingressariam no curso superior.

Tal postura, faz com que as matemáticas secundárias começam a deixar de ser um *saber técnico, específico das Academias Militares e vão passar a fazer parte da cultura escolar geral de formação do candidato ao ensino superior.* (1997, p. 112)

São vários os autores brasileiros que contribuíram para caracterização da matemática escolar em nível elementar e secundário com seu livros didáticos, influenciados diretamente pelo saber escolar que também se caracterizava na Europa, em especial na França, durante todo o século XIX. Várias são as traduções, compilações e adaptações de livros estrangeiros para uso no ensino brasileiro.

Citamos aqui Cândido Batista de Oliveira, Francisco de Paula Leal, Pedro d'Alcantara Bellegarde, Francisco Vilela Barbosa, Timotheo Pereira, Cristiano Benedito Ottoni, João Antonio Coqueiro, José Adelino Serrasqueiro, João José Luis Vianna, Araão Reis, Lucano Reis, Raja Gabaglia, Antonio Trajano, Luiz Pedro Drago, entre outros ilustres professores de matemática, que, com seu amor ao ensino dessa ciência, ajudaram a construir capítulos importantes na história da matemática escolar do Brasil no século XIX e início do século XX. Uma análise mais detalhada de suas obras, o que foge dos objetivos do nosso trabalho, pode ser encontrada em VALENTE [1997]. Analisaremos, sim, na próxima etapa, as obras de alguns destes importantes autores, de forma mais local, buscando caracterizar as formas com as quais as

---

10 Os livros usados no colégio Pedro Segundo II e seu professores também vinham do meio militar.

representações gráfica de funções foram apresentada nos livros didáticos naquele período.

Lembramos finalmente que o final do século XIX é marcado pelo surgimento, no Brasil, das coleções de livros didáticos elaboradas na França, livros que apresentam todo um conteúdo organizado, dando indispensável atenção ao exercícios, em grande número e variedade, característica importante dos livros textos do período, e que se acentuou no início do século XX. Tais coleções eram elaboradas em congregações religiosas e foram muito difundidas nas escolas cristãs da França, bem como nos colégios católicos do Brasil. O uso de tais livros no Brasil ocorreu com suas sucessivas traduções/adaptações, e, por vezes, pelo próprio uso dos originais publicados na França. As coleções F.I.C. e F.T.D. marcaram época, podemos refletir sobre sua influência, considerando que encontramos em uma de nossa incursões a bibliotecas, um livro da coleção FTD editado ainda em 1965.

Em resumo, podemos afirmar que, as mudanças do cenário europeu desde o Renascimento até o início do século XX, cada vez mais eram sentidas nas terras descobertas com a expansão marítima comercial. Nesse panorama de progressiva ligação política, social e econômica, a cultura e os valores europeus determinam os moldes de construção da organização social nas novas terras. É nesse cenário que os padrões científico-cultural do Brasil são determinados.

No que diz respeito à evolução do ensino dos saberes matemáticos no nível escolar, a influência é total, dada por intervenção conservadora dos jesuítas, num primeiro momento, com uma matemática voltada às necessidades de navegação ou dada posteriormente, por uma matemática voltada aos fins bélicos, seguindo os passos das academias militares francesas. Um dos motivos que garante em períodos posteriores, forte influência nos ensino das matemáticas escolares do século XVIII ao XX.

Neste cenário, onde atuaram muitos personagens importantes, podemos voltar nossas atenções para dois movimentos indissolúveis e coparticipantes da caracterização da matemática escolar brasileira: o da evolução e elaboração dos livros didáticos e o da determinação do conteúdo matemático a ser ensinado.

2. Representações gráficas: final do século XVIII e início do século XIX.

Quando se investigam, por exemplo, indícios da presença de um conteúdo matemático em livros-texto, os esforços podem ser voltados para várias direções. Podem, por uma via, buscar as datas, autores ou obras onde incidência do conteúdo investigado aparece pela primeira vez, na nossa pesquisa, esse esforço pode nos remeter à períodos onde a matemática escolar ainda não está caracterizada tanto em conteúdo a ser ensinado, como em níveis de ensino estabelecidos.[11]

Em outra via, os esforços investigativos, podem nos levar aos estudos de obras, autores de uso e influência reconhecidas. Parece natural entender que tais movimentos de busca bibliográfica, com direções aparentemente distintas, são complementares e não exclusivos, uma vez que um autor pode determinar o uso, pela primeira vez, de um conceito e ainda influenciar decisivamente nas obras dos autores contemporâneos e de períodos posteriores.

De fato, ao estudarmos a gênese da representação gráfica, podemos perceber os aspectos conforme apontados. Em nossa investigação, percebemos que o processo de caracterização da representação gráfica de funções, na matemática escolar no Brasil,

---

[11] Tal reflexão poderia nos remeter ao aparecimento no Brasil, mesmo que timidamente, das obras de Descartes, Fermat e Euler, de influência e uso mundial, ou ainda às obras jesuíticas de caráter eclesiástico, onde podem estar presentes representações gráficas semelhantes as de Oresme.

assim como a própria caracterização dos saberes escolares, segue um longo caminho de construção, evolução e sofisticação de sua conceituação.

Outro fator de suma importância a ser considerado é a própria construção, evolução e sofisticação do conceito de função, ao qual as representações gráficas estão ligadas.

Por meio das análises que se seguem, buscaremos percorrer um dos caminhos da constituição da representação gráfica de nossa matemática escolar, com a atenção imersa em algumas importantes obras didáticas que participaram do processo escolarização nacional.

Vale citar o trabalho de Serrasquero, uma vez que, *em 1891, os programas do colégio Pedro II (Ginásio Nacional) indicam o uso* de sua *Aritmética e Álgebra.* VALENTE (1997, p. 148).

Conseguimos analisar um exemplar de seu *Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinia*, em sua 4ª edição, em Coimbra, no ano de 1891, livro que compunha o *Curso de Mathemática Elementar*, juntamente com os tratados elementares de aritmética e álgebra, citados anteriormente.


CURSO DE MATHEMATICA ELEMENTAR

TRATADO ELEMENTAR

DE

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

COMPOSTO SEGUNDO

O

PROGRAMMA OFFICIAL

PARA O ENSINO D'ESTA SCIENCIA NOS LYCEUS

E NOÇÕES DE GEOMETRIA ANALYTICA

POR

José Adelino Serrasqueiro

BACHAREL FORMADO EM PHILOSOPHIA PELA UNIVERSIDADE DE

PROFESSOR DE MATHEMATICA NO LYCEU CENTRAL DE COIMBRA

SOCIO EFFECTIVO DO INSTITUTO DA MESMA CIDADE

4.ª EDIÇÃO

COIMBRA

LIVRARIA CENTRAL DE J. DIOGO PIRES — EDITOR

8 — Largo da Sé Velha — 8

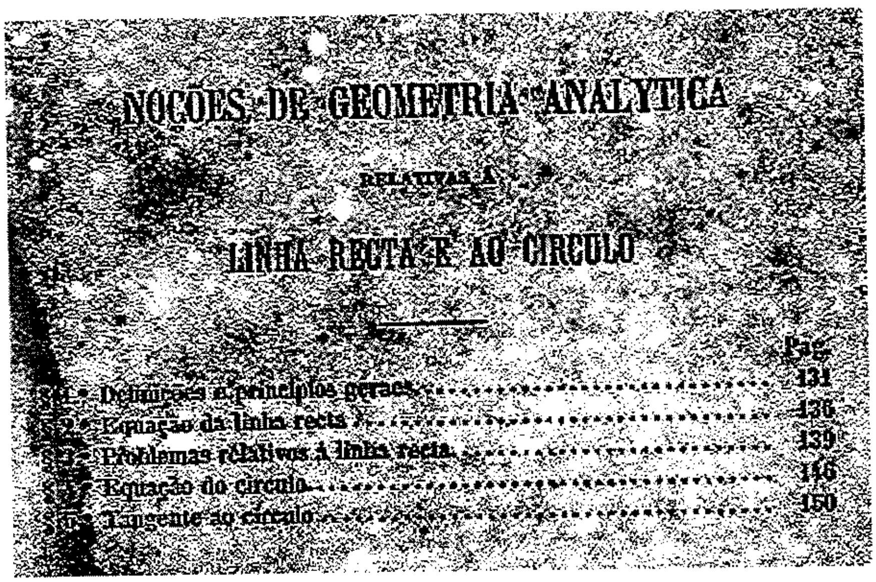
1891

FIGURA 5 – Frontispício de *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Na reprodução do frontispício, devemos atentar para dois detalhes interessantes: a inscrição *Composto Segundo o Programma Official para o Ensino d'esta Sciencia nos Lyceus e Noções de Geometria*

Analytica (5a); o outro detalhe, escritos à caneta, o nome daquele que talvez tenha sido o seu primeiro proprietário, bem como a cidade, *Rio* (de Janeiro), e a data da compra *Dezembro, 2 ...* (?), *1894.* (5b)

Uma breve análise do índice, nos dá a idéia do conteúdo da obra, (ver no Apêndice 1), nos chamando a atenção, a última parte do livro, onde são encontradas noções básicas de Geometria Analítica. Na figura 6, temos a descrição por completo da geometira analítica trabalhada por Serrasqueiro


NOÇÕES DE GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS Á

LINHA RECTA E AO CIRCULO

FIGURA 6 – Índice da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

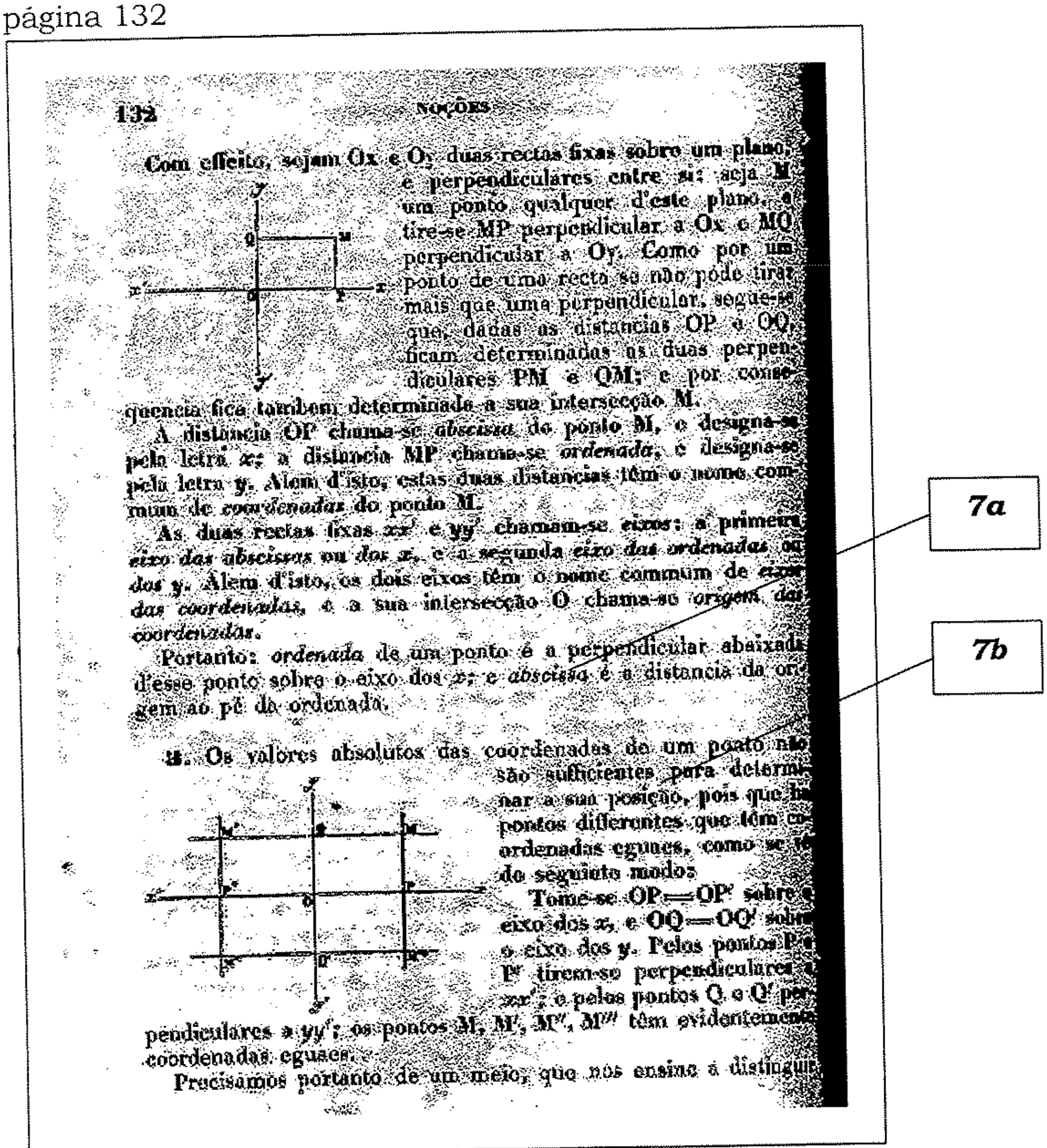
Na introdução de sua geometria analítica, Serrasqueiro, atribui a esta geometria um caráter amplo, onde alguns dos problemas trigonométricos podem ser situados, e justifica o uso do método das coordenadas para o desenvolvimento da geometria analítica.

Nas palavras do autor:

> *A sciencia, que ensina a resolver por meio da algebra, as questões relativas ás grandezas geometricas, chama-se* geometria analytica. *Constitui pois uma parte d'esta sciencia a trigonometria, que ensina a resolver pela algebra as questões relativas aos triângulo.*

A geometria analytica, para conseguir o seu fim, emprega o methodo geral das coordenadas, *pelo qual se fixa a posição dos pontos e linhas, que fazem parte das figuras geometricas. É este methodo que vamos expor.* SERRASQUEIRO (1891, p. 131)

Em seguida apresenta as primeiras representações gráficas na página 132


132 NOÇÕES

Com effeito, sejam Ox e Oy duas rectas fixas sobre um plano, e perpendiculares entre si: seja M um ponto qualquer d'este plano, e tire-se MP perpendicular a Ox e MQ perpendicular a Oy. Como por um ponto de uma recta se não póde tirar mais que uma perpendicular, segue-se que, dadas as distancias OP e OQ, ficam determinadas as duas perpendiculares PM e QM; e por consequencia fica tambem determinada a sua intersecção M.

A distancia OP chama-se *abscissa* do ponto M, e designa-se pela letra *x*; a distancia MP chama-se *ordenada*, e designa-se pela letra *y*. Alem d'isto, estas duas distancias têm o nome commum de *coordenadas* do ponto M.

As duas rectas fixas *xx'* e *yy'* chamam-se *eixos*: a primeira *eixo das abscissas* ou *dos x*, e a segunda *eixo das ordenadas* ou *dos y*. Alem d'isto, os dois eixos têm o nome commum de *eixos das coordenadas*, e a sua intersecção O chama-se *origem das coordenadas*.

Portanto: *ordenada* de um ponto é a perpendicular abaixada d'esse ponto sobre o eixo dos *x*; e *abscissa* é a distancia da origem ao pé da ordenada.

2. Os valores absolutos das coordenadas de um ponto não são sufficientes para determinar a sua posição, pois que ha pontos differentes que têm coordenadas eguaes, como se vê do seguinte modo:

Tome-se OP=OP' sobre o eixo dos *x*, e OQ=OQ' sobre o eixo dos *y*. Pelos pontos P e P' tirem-se perpendiculares a *xx'*; e pelos pontos Q e Q' perpendiculares a *yy'*; os pontos M, M', M'', M''' têm evidentemente coordenadas eguaes.

Precisamos portanto de um meio, que nos ensine a distinguir

FIGURA 7 – Página 132 da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Podemos notar na exposição de Serrasqueiro, que os termos *abscissa, ordenadas,* aproximam sua linguagem da moderna (7a) e seu discurso não contradiz aquilo seu entendimento do papel de localização (7b) do método de coordenadas.

Devemos estar atentos, pois, por muito tempo, os conceitos relativos à representação de entes geométricos na geometria analítica estão intimamente ligados as representações gráficas com caráter funcional. Tal característica pode ser percebida também na obra de Serrasqueiro, pois na página 134 encontramos as seguinte afirmação:

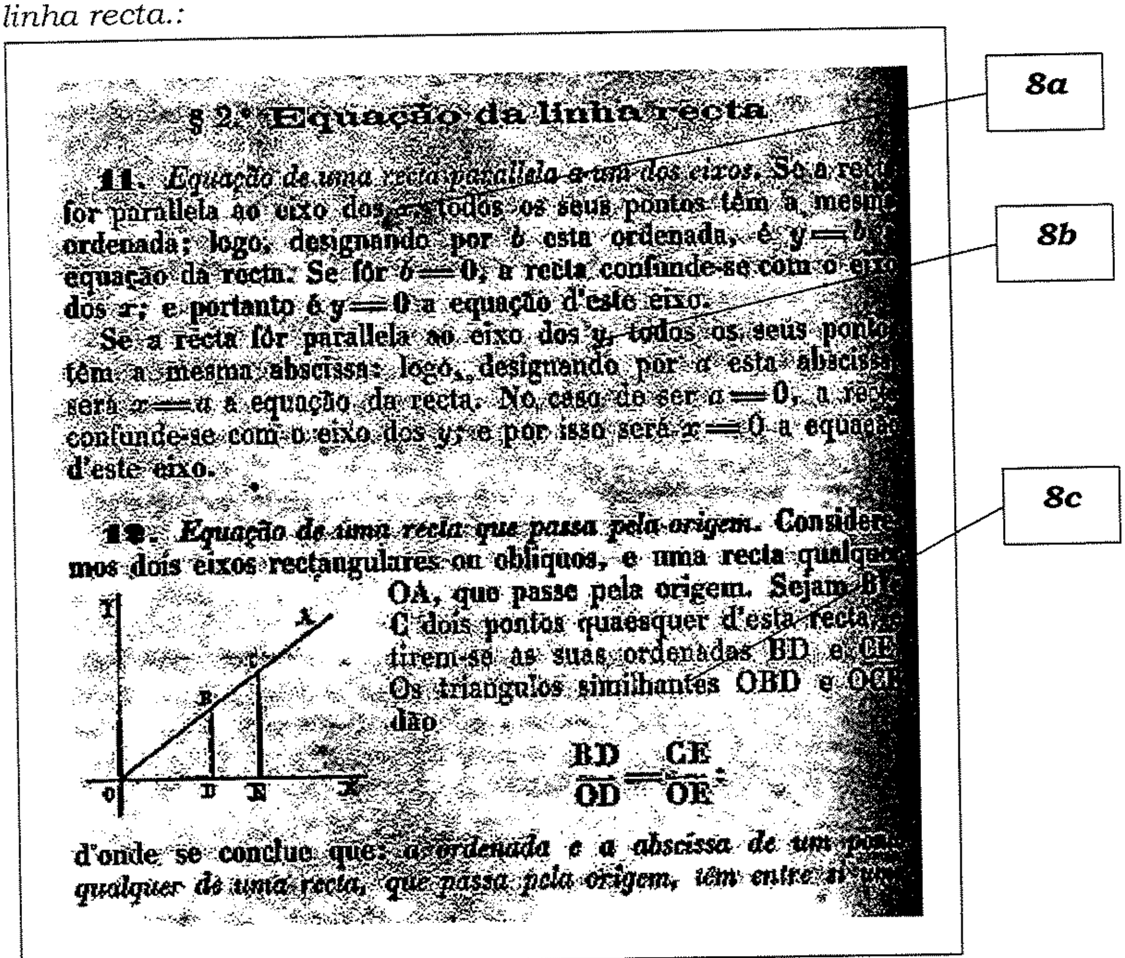
> 9. Uma **equação** entre duas variaveis, f(x, y) = 0, em geral **representa uma curva**, cujos pontos têm por coordenadas os valores de x e y que satisfazem a equação. *Suppondo a equação resolvida em ordem a uma das variáveis y por exemplo, obtemos y expresso em x, isto é, y = f(x).*
> *Dando a x differentes valores, a, a', a'', . . . por meio da equação obtemos os valores correspondentes de y; e supponhamos que para*
> *x = a, a', a'', . . .*
> *achamos y = b, b', b'', . . .*
> *Construindo os pontos que têm respectivamente por coordenadas a e b, a' e b', a'' e b'', . . . e unindo estes pontos por meio de uma curava ontínua, esta curva chama-se* curva da equação. *Portanto* curva de uma equação *é* o logar geometrico *de todos os ponto, cujas coordenadas satisfazem a equação.* SERRASQUEIRO (1891, p. 135) (Os grifos são nossos)

É possível reconhecer na obra de Serrasqueiro a proximidade da concepção de sua geometria analítica com a concebida por Descartes e Fermat para a discussão algébrica. Para definir em sua geometria analítica o conceito de lugar geométrico, Serrasqueiro percorre todo um caminho, de certa forma é baseado na concepção de que as *funções escritas na forma implícita* (denominação moderna) são equações que podem ser representadas graficamente. Em outras palavras, Serrasqueiro estabelece a conexão de *curva* a partir de *equação,* ou *função* ao nosso entender, atentos aos critérios de nomenclatura e rigor da época.

Logo em seguida, Serrasqueiro estabelece a conexão no sentido contrário, ou seja, *equação* obtida a partir da *curva*:

> *Reciprocamente,* ***a equação y = f(x)****, em relação á linha traçada, chama-se* equação da linha. *Portanto* equação de uma linha *é a* ***expressão da relação****, que há entre as coordenadas dos seus differentes pontos.* SERRASQUEIRO (1891, p. 136) (Os grifos são nossos)

Ao que parece, após dar a idéia da representação gráfica e definir lugar geométrico, Serrasqueiro procura abrir caminho para desenvolver sua geometria e por vezes apresentar e discutir as representações gráficas do resto do livro, a começar pela *equação da linha recta.*:


§ 2.º Equação da linha recta

11. *Equação de uma recta parallela a um dos eixos.* Se a rec[...] fôr parallela ao eixo dos x, todos os seus pontos têm a mesm[...] ordenada; logo, designando por b esta ordenada, é $y = b$ [...] equação da recta. Se fôr $b = 0$, a recta confunde-se com o eixo dos x; e portanto é $y = 0$ a equação d'este eixo.

Se a recta fôr parallela ao eixo dos y, todos os seus pont[...] têm a mesma abscissa: logo, designando por a esta abscissa, será $x = a$ a equação da recta. No caso de ser $a = 0$, a rec[...] confunde-se com o eixo dos y, e por isso será $x = 0$ a equação d'este eixo.

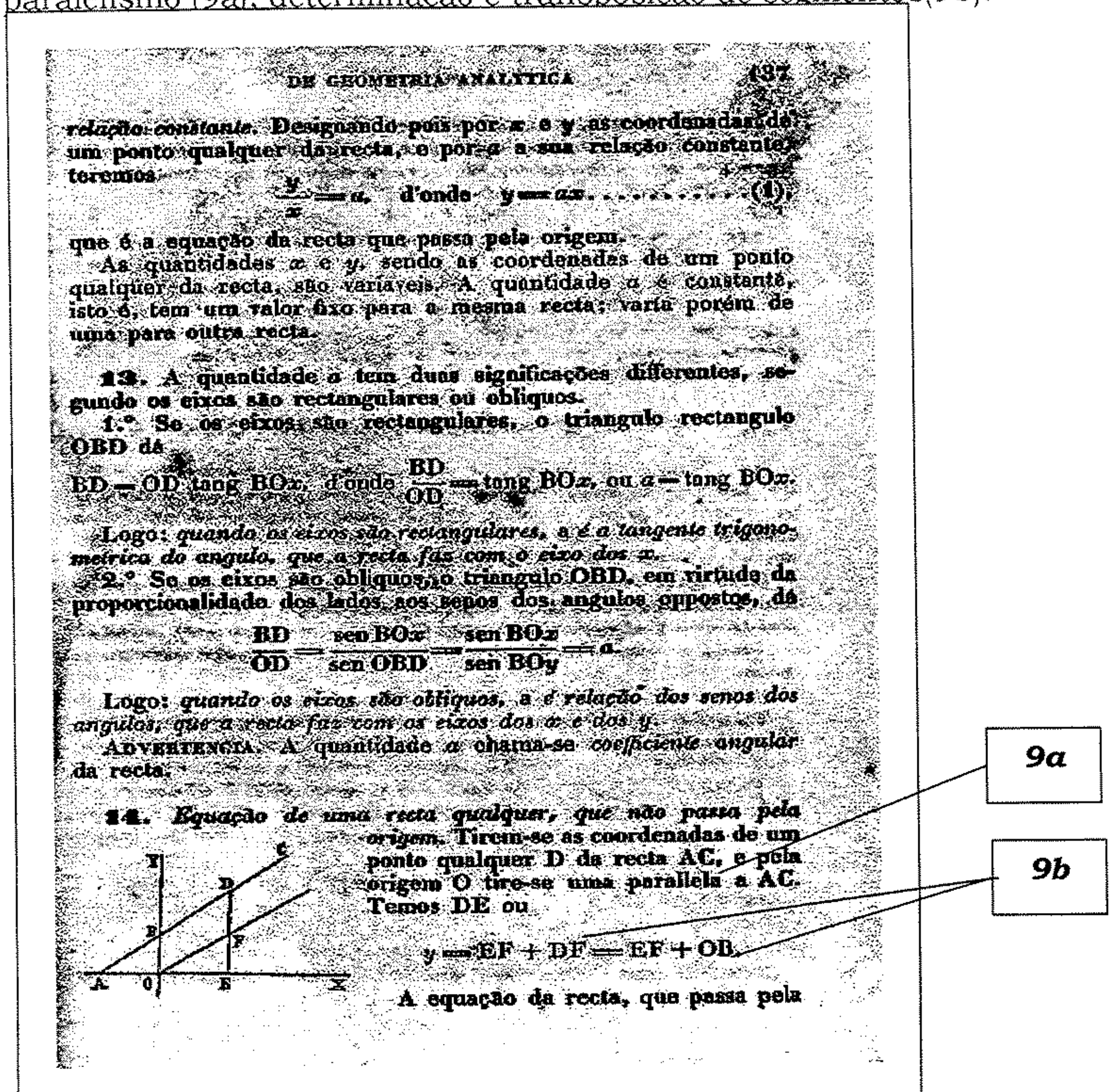
12. *Equação de uma recta que passa pela origem.* Considere[...]mos dois eixos rectangulares ou obliquos, e uma recta qualquer OA, que passe pela origem. Sejam B [...] C dois pontos quaesquer d'esta recta, [...] tirem-se as suas ordenadas BD e CE. Os triangulos similhantes OBD e OCE dão

$$\frac{BD}{OD} = \frac{CE}{OE};$$

d'onde se conclue que: *a ordenada e a abscissa de um pon[...] qualquer de uma recta, que passa pela origem, têm entre si [...]*

FIGURA 8 – Parte da página 136 da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Notamos que Serrasqueiro começa com os casos mais simples de retas, as paralelas aos eixos coordenados, sem desenhá-las (8a e 8b) e então segue, caracterizando a equação da reta que passa pela origem, por meio de recursos da geometria plana, em especial, pela semelhança de triângulos (8c e 8d). Tal fato pode ser observado no início da página 137, onde, também, são apresentados a caracterização do coeficiente angular e a obtenção da equação da reta, mais uma vez por meio de recursos da geometria plana, tais como paralelismo (9a), determinação e transposição de segmentos(9b).



DE GEOMETRIA ANALYTICA 137

relação constante. Designando pois por x e y as coordenadas de um ponto qualquer da recta, e por a a sua relação constante, teremos

$$\frac{y}{x} = a, \quad \text{d'onde} \quad y = ax \ldots\ldots\ldots (1),$$

que é a equação da recta que passa pela origem.

As quantidades x e y, sendo as coordenadas de um ponto qualquer da recta, são variaveis. A quantidade a é constante, isto é, tem um valor fixo para a mesma recta; varia porém de uma para outra recta.

13. A quantidade a tem duas significações differentes, segundo os eixos são rectangulares ou obliquos.

1.° Se os eixos são rectangulares, o triangulo rectangulo OBD dá

$$BD = OD \cdot \text{tang}\,BOx, \quad \text{d'onde} \quad \frac{BD}{OD} = \text{tang}\,BOx, \quad \text{ou} \quad a = \text{tang}\,BOx.$$

Logo: *quando os eixos são rectangulares, a é a tangente trigonometrica do angulo, que a recta faz com o eixo dos x.*

2.° Se os eixos são obliquos, o triangulo OBD, em virtude da proporcionalidade dos lados aos senos dos angulos oppostos, dá

$$\frac{BD}{OD} = \frac{\text{sen}\,BOx}{\text{sen}\,OBD} = \frac{\text{sen}\,BOx}{\text{sen}\,BOy} = a.$$

Logo: *quando os eixos são obliquos, a é relação dos senos dos angulos, que a recta faz com os eixos dos x e dos y.*

ADVERTENCIA. A quantidade a chama-se *coefficiente angular* da recta.

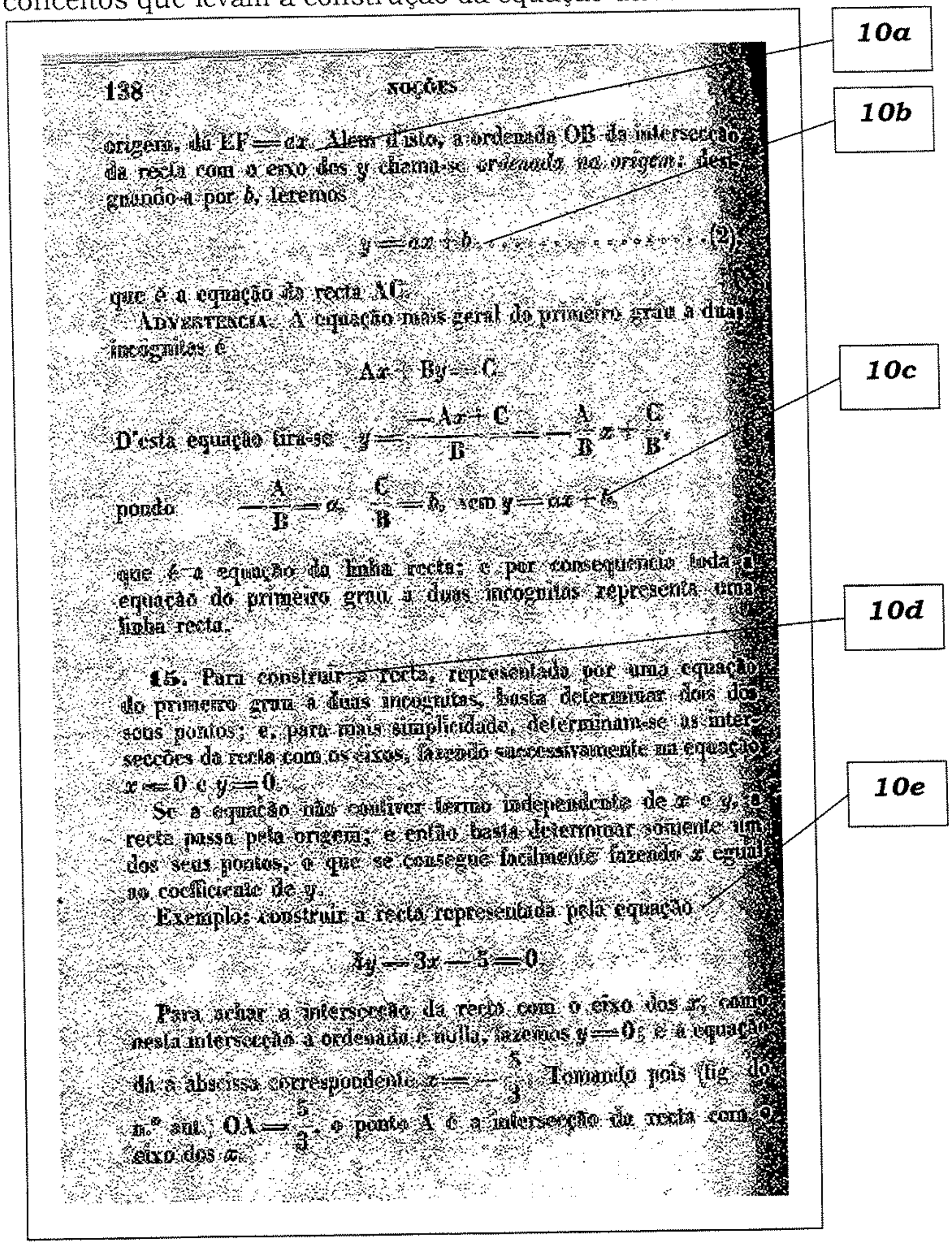
14. *Equação de uma recta qualquer, que não passa pela origem.* Tirem-se as coordenadas de um ponto qualquer D da recta AC, e pela origem O tire-se uma parallela a AC. Temos DE ou

$$y = EF + DF = EF + OB.$$

A equação da recta, que passa pela

FIGURA 9 – Página 137 da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Além disso, ao trabalhar com recursos de geometria plana, Serrasqueiro, preocupa-se em apresentar de maneira gradual os conceitos que levam a construção da equação da reta:



138 NOÇÕES

origem, da $EF = ax$. Alem d'isto, a ordenada OB da intersecção da recta com o eixo dos y chama-se *ordenada na origem*; designando-a por b, teremos

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

que é a equação da recta AC.

ADVERTENCIA. A equação mais geral do primeiro grau a duas incognitas é

$$Ax + By = C.$$

D'esta equação tira-se $y = \frac{-Ax + C}{B} = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$,

pondo $-\frac{A}{B} = a$, $\frac{C}{B} = b$, vem $y = ax + b$,

que é a equação da linha recta; e por consequencia toda a equação do primeiro grau a duas incognitas representa uma linha recta.

15. Para construir a recta, representada por uma equação do primeiro grau a duas incognitas, basta determinar dois dos seus pontos; e, para mais simplicidade, determinam-se as intersecções da recta com os eixos, fazendo successivamente na equação $x = 0$ e $y = 0$.

Se a equação não contiver termo independente de x e y, a recta passa pela origem; e então basta determinar sómente um dos seus pontos, o que se consegue facilmente fazendo x egual ao coefficiente de y.

Exemplo: construir a recta representada pela equação

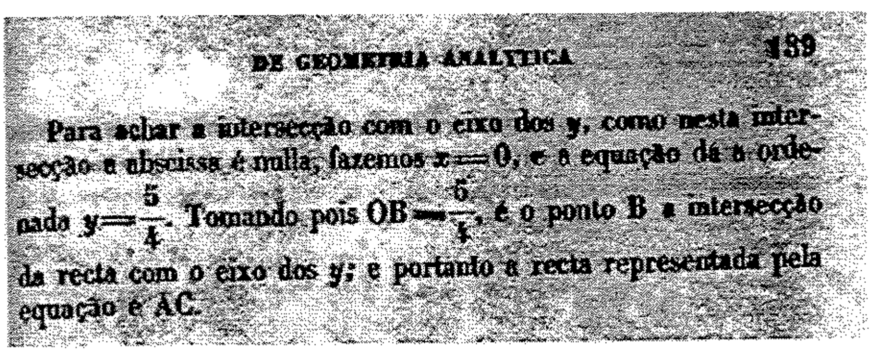
$$4y - 3x - 5 = 0.$$

Para achar a intersecção da recta com o eixo dos x, como nesta intersecção a ordenada é nulla, fazemos $y = 0$; e a equação dá a abscissa correspondente $x = -\frac{5}{3}$. Tomando pois (fig. do n.º ant.) $OA = \frac{5}{3}$, o ponto A é a intersecção da recta com o eixo dos x.

FIGURA 10 – Página 138 da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Conforme analisamos, o autor usa, para sua equação da reta, os resultados estabelecidos anteriormente, ou seja, a equação da reta que passa pela origem (10a) e faz importantes generalizações, além de apresentar a equação geral da reta (10b e 10c). É possível afirmar que, nesse movimento de elaboração, Serrasqueiro denota em sua obra, um caráter de sutil construção geométrica-axiomática, sem perder de vista, a exposição didática, sem maiores formalismos.

Confirmando nosso ponto de vista, ao final da página 138 e início da página 139 (FIG 11), logo em seguida à construção da fórmula geral da reta, Serrasqueiro expõe detalhadamente por meio de um exemplo(10e) a forma de se obter a equação de uma reta (10d), mas não faz a representação gráfica correspondente.


DE GEOMETRIA ANALYTICA 139

Para achar a intersecção com o eixo dos y, como nesta intersecção a abscissa é nulla, fazemos $x=0$, e a equação dá a ordenada $y=\frac{5}{4}$. Tomando pois $OB=\frac{5}{4}$, é o ponto B a intersecção da recta com o eixo dos y; e portanto a recta representada pela equação é AC.

FIGURA 11– Parte da página 138 da obra *Trigonometria Rectilinea* - 1891
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Assim, Serrasqueiro inicia sua geometria analítica, e, de maneira análoga, constrói o resto do texto, voltando as atenções para o estudo de retas (ver apêndice 1) e circunferências, com as atenções votadas aos procedimentos básicos, associados sempre ao caráter geométrico de suas construções.

Conforme foi exposto, a obra aqui analisada, faz parte do *Curso de Mathematica Elementar,* de quatro volumes onde figuram também o *Tratado Elementar de Arithmetica, Tratado de Geometria*

Elementar e o Tratado de Algebra Elementar, sendo que esta última obra, foi por nós analisada em sua 3ª e 15ª edições.

Na análise dessas edições, não encontramos representações gráficas, o que pode sugerir a inexistência de gráficos nas outras edições.

De maneira resumida, podemos afirmar que Serrasqueiro[12] em sua *Algebra Elementar,* desenvolve a estrutura algébrica necessária, para representar, operacionalizar, discutir equações algébricas variadas e analisar variados temas como sistemas de equações lineares, equações polinomiais, exponenciais, logaritmos, determinantes, encerrando a obra com a aplicação de determinantes a discussão de sistemas lineares, usando uma linguagem próxima à nossa.

É interessante notar que, mesmo trabalhando com expressões do tipo $ax + by = c$, o autor não se preocupa em representá-las graficamente, como foi feito em sua *Trigonometria Rectilinea.*

A ausência de representações gráficas na *Algebra Elementar* de Serrasqueiro não é um fato isolado, o mesmo se repete em obras de álgebra, de importantes professores daquele período. Analisamos, e não encontramos representações gráficas nas seguintes obras:

- *Elementos de Algebra,* compilados[13] por C. B. Ottoni, em sua 5ª edição, Rio de Janeiro, em 1882.[14]
- *Algebra Elementar,* de Antonio Trajano, em sua 5ª edição, Rio de Janeiro, em 1905.

---

[12] Ver índice da 15ª edição e relação de outras obras do autor no Apêndice 1.

[13] Segundo VALENTE (1997), as obras de Ottoni são referência nacional, e tal autor lança mão, para suas compilações e adaptações em álgebra, das obras de Louis Pierre Bourdon, em especial, *Eléments d'Algébre (1817)* que foi impresso até o final do século XIX, para o ensino nas academias militares francesas.

[14] Ver frontispício no Apêndice 1

- *Algebra Elementar*, de Antonio Trajano, em sua 11ª edição, Rio de Janeiro, em 1926.
- *Algebra Elementar - 3º Anno do Curso do Gymnasio Nacional e dos Gymnasios Equiparados* - de Arthur Thiré, em sua 1ª edição, São Paulo, em 1909.
- *Algebra Gymnasial - 1ª Parte* - de Arthur Thiré, em sua 4ª edição, pela editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, São Paulo, Paris e Lisboa, em 1917.
- *Algebra - 4º Anno do Curso do Gymnasio Nacional e dos Gymnasios Equiparados* - do Pe. Köhly e Arthur Thiré, em sua 1ª edição, São Paulo, em 1907.

Como verificamos pela análise dessas obras, a ausência das representações gráficas nos livros de álgebra dos escritores do período em questão não é rara. Entretanto, devemos estar atentos ao fato de que outros livros de álgebra possuírem tais representações. Nesse sentido, apresentamos a obra *Elementos de Algebra*, do professor André Perez y Marin.

No frontispício do livro de Marin, encontramos dizeres que mostram que se trata de uma obra usada em escola católica, mais especificamente, na cidade de Campinas: *Elementos de Algebra – Contendo toda a materia dos programmas dos Gymnasios e do Collegio Pedro II – pelo professor André Perez y Marin – Lente cathedrático de Aruthmetica e Algebra do Gymnasio do Estado em Campinas – Obra approvada pelo Governo do Estado de S. Paulo e pelo Conselho Superior de Instrucção Pública do Estado de Minas, para uso dos Estabelecimentos de ensino secundário – 5ª Edição – Revista e melhorada - S. Paulo – Escolas Proffissionaes do Lyceu Coração de Jesus – 1923.*[15]

A obra de Marin apresenta um organização temática semelhante a da *Algebra* de Serrasqueiro, porém, trabalha as

---

[15] Ver frontispício no Apêndice 1

representações gráficas de maneira mais extensa que as encontradas na introdução a geometria analítica da *Trigonometria Rectilinea* de Serrasqueiro. Tais representações aparecem após Marin ter feito todo um trabalho algébrico relacionados às equações, ainda mais, como último tópico do capítulo que trata fundamentalmente das equações e sistemas lineares; entretanto, o autor não interpreta a discussão de sistemas, já realizadas de modo algébrico, usando a representações gráficas.

12a

VI. — REPRESENTAÇÕES GRAPHICAS

115. **Coordenadas rectilineas.** — Para determinar a posição de um ponto *M* sobre um plano, é preciso conhecer as rectas *MP* e *MQ* dirigidas desse ponto parallelamente a duas rectas fixas, *XX'* e *YY'*, situadas no plano. A distancia *MP* chama-se *ordenada*, e representa-se por *y*, e a distancia *MQ* tem o nome de *abscissa* e se representa por *x*. Essas duas rectas, ordenada e

FIGURA 12– Parte da página 135 da obra *Elementos de Álgebra* - 1923
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

A exemplo de Serrasqueiro, Marin inicia seu estudo por meio dos sistemas de coordenadas (12a); segue, também, usando argumentos geométricos, como semelhança de triângulos, para suas esclarecimentos e demonstrações de sua representações gráficas, mas difere, essencialmente de Serrasqueiro, por primeiro anunciar a forma de equação (13a), valendo-se da álgebra discutida nas páginas anteriores(13b), para em seguida demonstrar, usando os casos de análise (13c), suas conclusões e afirmações de caráter geométrico-algébrico, denotando uma relação maior das representações gráficas com o tratamento algébrico das equações.

abscissa, recebem tambem em conjuncto o nome de *coordenadas*.

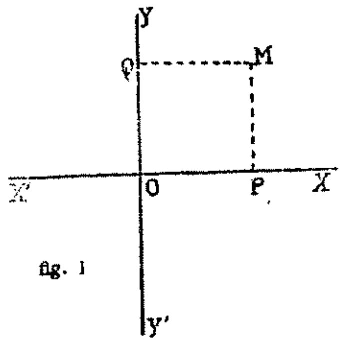


fig. 1

As rectas XX' e YY' chamam-se *eixos coordenados*, e o ponto O, em que esses eixos se cortam, é a *origem* das coordenadas.

Por convenção consideram-se positivas as ordenadas situadas acima do eixo XX', e negativas as situadas abaixo desse eixo; analogamente são positivas as abscissas contadas á direita do eixo YY', e negativas as contadas á esquerda desse eixo.

116. Representação graphica da equação do primeiro grau da forma

$$ax + by = c.$$

13a

Resolvendo esta equação em relação a uma das incognitas, y por exemplo, obtem-se:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b};$$

13b

e representando, para simplificar, $-\frac{a}{b}$ por m e $\frac{c}{b}$ por n, vem:

$$y = mx + n.$$

Nesta questão devemos considerar dois casos.

13c

1.º caso: $n = 0$. Sendo n nullo, a equação tomará a forma

$$y = mx, \text{ donde } m = \frac{y}{x},$$

em que x e y terão o mesmo signal ou signal contrario, segundo m for positivo ou negativo.

FIGURA 13– Página 136 da obra *Elementos de Álgebra* - 1923
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Comparando com a obra de Serrasqueiro, podemos dizer que há uma tímida evolução quantitativa[16] dos gráficos e explicações que Marin faz em seu livro e também, uma pequena evolução qualitativa, no que diz respeito às aplicações que os gráficos podem ter, pois, há a inserção de um tópico que discute a representação gráfica da temperatura de um doente e do movimento de um trem, encerrando as apresentação dos gráficos em sua obra. Entretanto, esclarecemos que tais representações não eram novidade, nem tão pouco, as apresentações que autor faz podem ser consideradas como um avanço significativo, pois em livros de anos anteriores ao da edição de Marin, tais situações já eram trabalhadas e representadas. Deixamos para apresentar tais representações gráficas, na próxima seção, quando discutiremos as coleções FIC e FTD.

Em resumo, podemos dizer que presença das representações gráficas nos livros didáticos usados no Brasil, no final do século XIX e início do século XX, ainda está se constituindo. Isso pode ser notado pelo número de obras que incluem tais representações, bem como, pela obras onde tal representação é ausente.

Parece claro que, a partir das representações gráficas analisadas, uma presente no livro de Serrasqueiro, final do século XIX, a outra no início do século XX, obra de Marin, percebemos uma grande influência da geometria plana, em especial o uso da semelhança de triângulos, na elaboração do discurso dos autores. Na verdade, as representações gráficas, ainda não tem um lugar ou papel *fixo* com respeito aos conteúdos escolares ensinados nesses períodos. Tal fato ainda será notado por muito tempo, pois conceitos como o de função ainda não estão totalmente constituídos enquanto organização didático escolar. Parece natural também, reconhecermos a influência francesa

---

[16] Ver Apêndice 1

para as representações gráficas nos livros do início do século, isso será clarificado com a análise da coleções FIC e FTD.

3. As representações gráficas nas Coleções FIC e FTD

Voltaremos nossas atenções às duas coleções de livros didáticos de matemática, surgidas na França e aqui utilizadas, traduzidas ou por vezes na língua original, no final do século XIX e início do século XX. Após as análises desta etapa, perceberemos o quanto estas coleções foram importantes para o estabelecimento das representações gráficas no ambiente escolar e como foram decisivas para determinar o estilo de muitos autores ao se trabalhar a representação gráfica na matemática escolar brasileira.

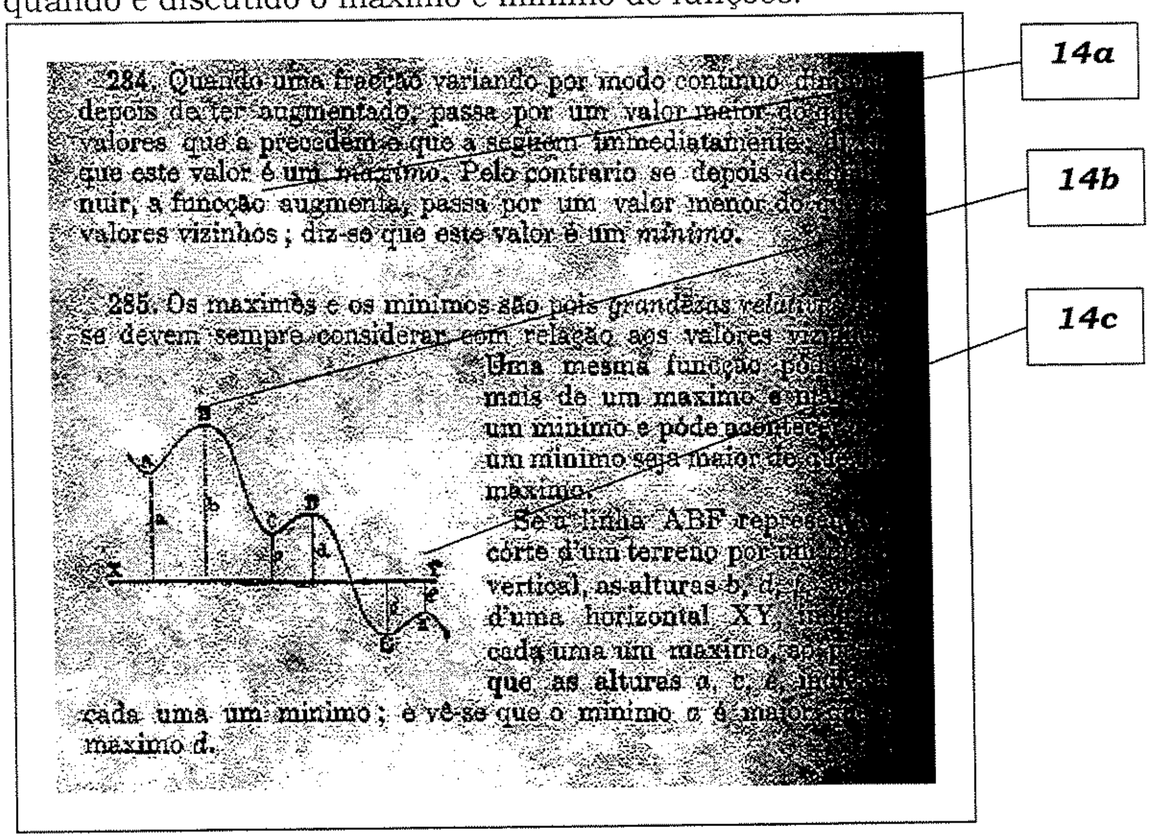
Em VALENTE (1997, p 164) encontramos uma importante constatação, que, de certo modo, pode dar indícios para confirmar nosso ponto de vista:

> *... no final do século XIX, surge no Brasil uma literatura didática, marcada sempre pela sigla F.I.C.. São os* Elementos de Arithmetica por F.I.C., *os* Elementos de Geometria por F.I.C. *etc,. Deve-se ao professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia a introdução, no pais, destes livros [...] Os livros têm uma característica particular em relação aos manuais escolares de matemática utilizados até então: representam* ***anos e anos de experiência pedagógica*** *acumulada no ensino das matemáticas em* escolas. *Até então, a maioria dos livros de matemática devia sua origem aos* colégios *sobretudo técnico-militares.* (o grifo é nosso).

A partir de uma consulta do fac-símile dos *Élemens de Trigonometrie e Exercises de Trigonometrie,* com o auxílio do professor José Carlos Putnoki, pudemos constatar que a sigla F.I.C. refere-se às iniciais do nome do frei superior da ordem dos *Frères de l'Instruction Chrétienne,* responsável pela edição das obras no período de 1875 a 1884 – a sigla F.I.C. corresponde as iniciais: **F**rère **I**RLIDE – Jean-Pierre **C**AZENEUVE sendo CAZENEUVE o nome civil do frei. Naturalmente, os livros eram escritos pelos freis daquela ordem. Esclarecemos, também, que tais livros receberam posteriormente as denominações F. J. (1884 1897) e F.G.M. (1897-1913) uma vez que houve mudança do frei superior e de maneira análoga J. e G.M. são as abreviaturas dos nomes do freis **J**OSEPH e **G**ABRIEL-**M**ARIE respectivamente.

Inúmeras são as edições dessa coleção, e a seguir, analisaremos alguns pontos que nos chamaram a atenção, no livro *Elementos de Álgebra*, em uma de suas edições, cujo frontispício[17] traz os dizeres *Elementos de Álgebra - com numerosos exercícios, por F.I.C. – Revistos e Adaptados a Instrucção Secundária do Brazil – pelo Dr. Eugênio de Barros Raja Gabaglia.*

A primeira representação gráfica é encontrada na página 182, quando é discutido o máximo e mínimo de funções.


284. Quando uma fracção variando por modo continuo dimi... depois de ter augmentado, passa por um valor maior do que... valores que a precedem e que a seguem immediatamente, diz-se que este valor é um *maximo*. Pelo contrario se depois de dimi-nuir, a funcção augmenta, passa por um valor menor do que os valores vizinhos; diz-se que este valor é um *minimo*.

285. Os maximos e os minimos são pois *grandezas relativas* ... se devem sempre considerar com relação aos valores vizinhos. Uma mesma funcção póde ... mais de um maximo e ... um minimo e póde acontecer ... um minimo seja maior do que ... maximo.

Se a linha ABF representa ... corte d'um terreno por um ... vertical, as alturas b, d, ... d'uma horizontal XY, ... cada uma um maximo, ... que as alturas a, c, e, ... cada uma um minimo; e vê-se que o minimo c é maior ... maximo d.

FIGURA 14– Parte da página 182, *Elementos de Álgebra - FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Como analisamos, o conceito de função já vem sendo trabalhado na obra (14a), e pela análise das partes anteriores, sua conceituação é muito próxima a usada nos dias de hoje. É interessante perceber que os valores correspondentes às ordenadas são marcados no próprio gráfico (14b), já que o autor não desenha o eixo das ordenadas, esboçando apenas o eixo X, (14c).

Vale ressaltar que, logo após esta representação gráfica, o autor esclarece que a ... *theoria dos máximos e mínimos não é de domínio da algebra elementar ...* , entretanto, na mesma página, apresenta o o problema de *achar o máximo e o mínimo do* ***trinômio****, do 2º grao* ax^2+bx+c.(o grifo é nosso), entretanto não é feita aqui a representação gráfica desta discussão.

Podemos afirmar que, nas obras FIC e em outras daquele período, é muito comum associar a representação gráfica, e até mesmo as funções, às equações, polinomiais entre outras. Assim, é possível afirmar que o ponto central destas obras é a discussão das equações algébricas, sendo que a representação gráfica assume um papel subsidiário nesta discussão-construção de significados.

Reforçando nosso ponto de vista, lembramos que em tais livros, ao invés de aparecer enunciado *estudar o sinal, os máximos e mínimos, . . . da função,* aparece enunciado *estudar o sinal, os máximos e mínimos, . . . da equação,* e conforme o caso, e em alguns deles, toda a discussão é acompanha de representações gráficas.

Há, porém, um fato peculiar nessa obra: as representações gráficas são discutidas, desde a questão da localização de pontos até a construção de gráficos de funções racionais do tipo $y=\frac{A(x)}{B(x)}$, com *A(x)* e *B(x),* representando polinômios já discutidos no decorrer do livro.

---

[17] Ver Apêndice 2.

APPENDICE

QUESTÕES DIVERSAS

15a

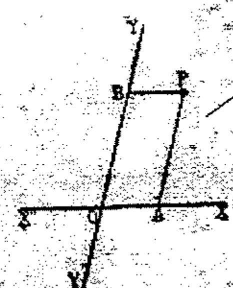
15b

15c

I. — Noções sobre a representação graphica das funcções algebricas.

Modo de fixar a posição de um ponto em um plano.

…17. Quando se quer fixar a posição d'um ponto P em um plano, …çam-se por este ponto parallelas a duas rectas OX e OY, fixas …sse plano. A distancia P A ou O B cha-…se *ordenada* do ponto P, ao passo que a dis-…cia OA é a *abscissa* do mesmo ponto; os …primentos OA e PA, considerados simul-…neamente, são as *coordenadas* do ponto P.



As rectas OX e OY são os *eixos das coorde-*…*nadas* e designam-se frequentemente, o pri-…meiro pelo nome de eixo dos *x*, o segundo pelo …e eixo dos *y*.

Por convenção, o ponto O, onde se cortam …s eixos, toma-se como origem das distancias; …onsideram-se como positivas as ordenadas …edidas acima do eixo OX, e como negativas …s que são medidas abaixo d'este eixo; igual-…mente consideram-se como positivas as abscissas contadas á direita …e O sobre OX e como negativas as contadas á esquerda de O.

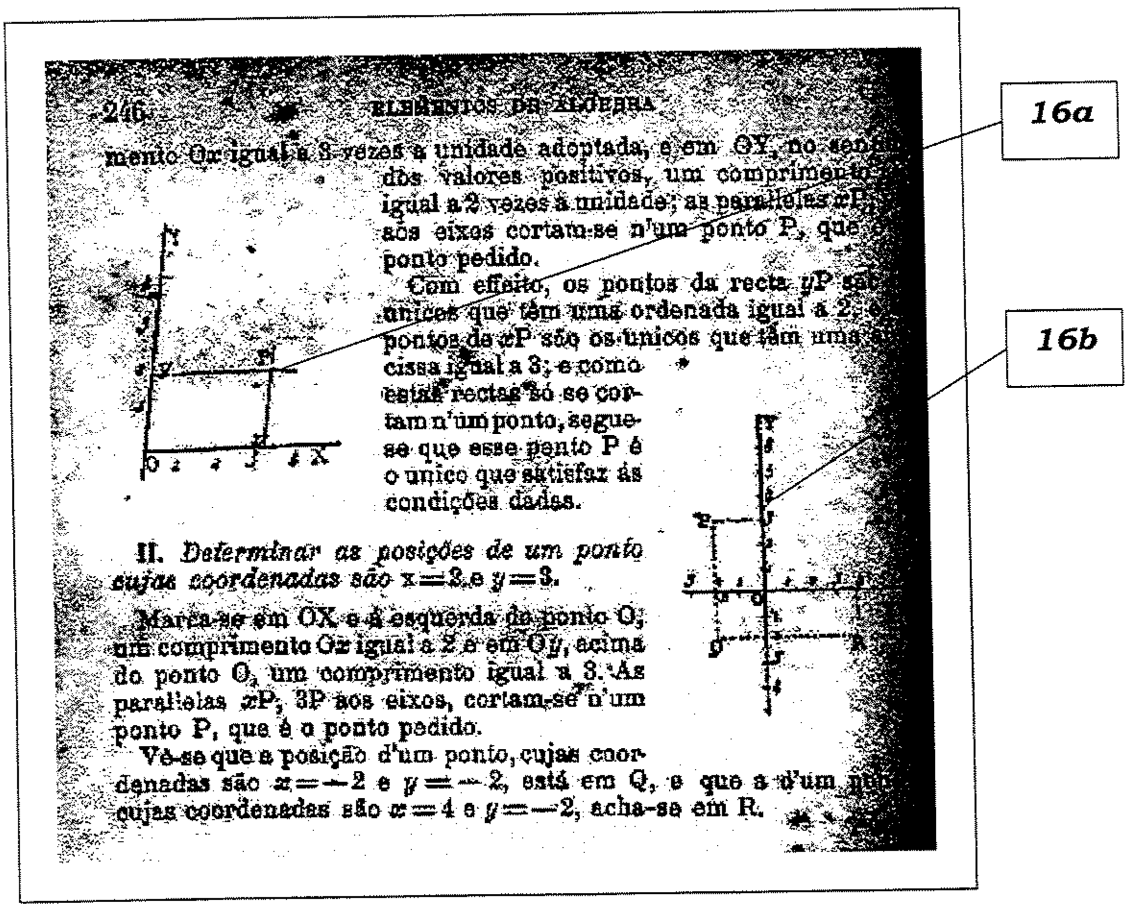
433. A posição d'um ponto P está determinada, quando são dadas …s suas coordenadas.

434. Exemplos. 1. *Determinar a posição d'um ponto cujas coor-*…*denadas são* x = 8 *e* y = 2.

Marca-se em OX e no sentido dos valores positivos, um compri-

FIGURA 15 – Página 245 da obra *Elementos de Álgebra - FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Parece claro que, a ordem de apresentação das representações gráficas como em quase todas as obras analisadas, começa pelo trabalho de localizar pontos (15a) e neste sentido, ainda se faz presente a influência da obra de Apolônio, já que os primeiros eixos apresentados são escritos de maneira oblíqua (15b). Há também a preocupação didática de se exemplificar numericamente a determinação de um ponto (15c), esse simples fato parece indicar um diferencial em relação as obras de Serrasqueiro e Marin.


246 ELEMENTOS DE ALGEBRA

mento Ox igual a 3 vezes a unidade adoptada, e em OY, no sentido dos valores positivos, um comprimento igual a 2 vezes a unidade; as parallelas xP, aos eixos cortam-se n'um ponto P, que é o ponto pedido.

Com effeito, os pontos da recta yP são unicos que têm uma ordenada igual a 2, e pontos de xP são os unicos que têm uma abcissa igual a 3; e como estas rectas só se cortam n'um ponto, segue-se que esse ponto P é o unico que satisfaz ás condições dadas.

II. *Determinar as posições de um ponto cujas coordenadas são* $x=2$ e $y=3$.

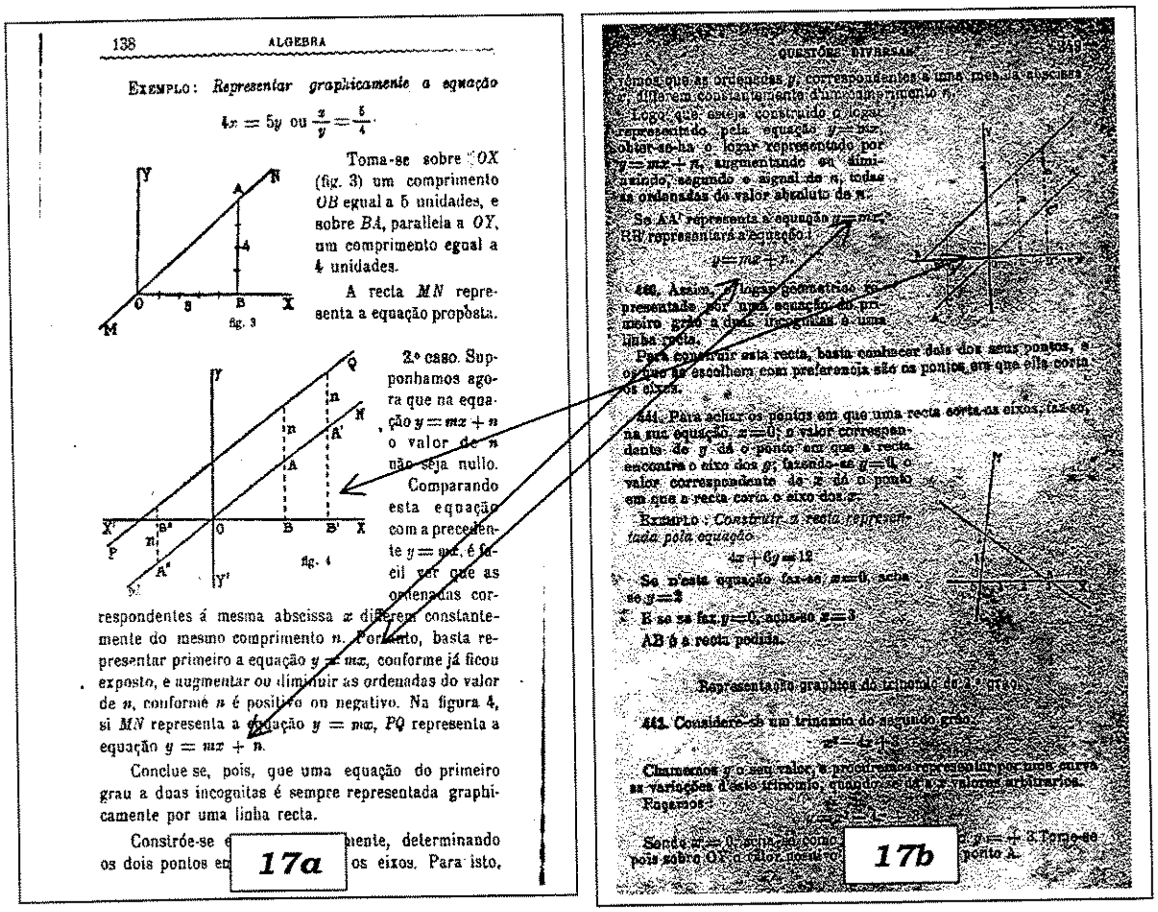
Marca-se em OX e á esquerda do ponto O, um comprimento Ox igual a 2 e em Oy, acima do ponto O, um comprimento igual a 3. As parallelas xP, 3P aos eixos, cortam-se n'um ponto P, que é o ponto pedido.

Vê-se que a posição d'um ponto, cujas coordenadas são $x=-2$ e $y=-2$, está em Q, e que a d'um ponto cujas coordenadas são $x=4$ e $y=-2$, acha-se em R.

FIGURA 16– Parte da pág. 245 da obra *Elementos de Álgebra - FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Há um fato interessante na cuidadosa explicação que o autor faz sobre a determinação da posição dos pontos, tanto nos eixos oblíquos(16a), quanto nos eixos retangulares (16b), que é a marcação de todos os números na escala dos eixos que são graduados.

De maneira similar, a feita em Marin, é trabalhada a representação gráfica das retas, porém em F.I.C. encontramos uma discussão mais detalhada, dos casos possíveis para a representação da reta, também associada à equação do primeiro grau[18]. Ao nosso ver, talvez Marin tenha tido a preocupação de sintetizar e adaptar a representação gráfica desenvolvida em FIC, sendo que a figura 17, exemplifica algumas das similaridades destas obras.



138 ALGEBRA

EXEMPLO: *Representar graphicamente a equação*

$$4x = 5y \text{ ou } \frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$$

Toma-se sobre OX (fig. 3) um comprimento OB egual a 5 unidades, e sobre BA, parallela a OY, um comprimento egual a 4 unidades.

A recta MN representa a equação proposta.

fig. 3

2.º caso. Supponhamos agora que na equação $y = mx + n$ o valor de n não seja nullo.

Comparando esta equação com a precedente $y = mx$, é facil ver que as ordenadas correspondentes á mesma abscissa x differem constantemente do mesmo comprimento n. Portanto, basta representar primeiro a equação $y = mx$, conforme já ficou exposto, e augmentar ou diminuir as ordenadas do valor de n, conforme n é positivo ou negativo. Na figura 4, si MN representa a equação $y = mx$, PQ representa a equação $y = mx + n$.

fig. 4

Conclue se, pois, que uma equação do primeiro grau a duas incognitas é sempre representada graphicamente por uma linha recta.

Constróe-se e[illegible]mente, determinando os dois pontos em [illegible] os eixos. Para isto,

17a

QUESTÕES DIVERSAS 349

[illegible] que as ordenadas y, correspondentes a uma mesma abscissa x, differem constantemente d'um comprimento n.

Logo que esteja construido o logar representado pela equação $y = mx$, obter-se-ha o logar representado por $y = mx + n$, augmentando ou diminuindo, segundo o signal de n, todas as ordenadas do valor absoluto de n.

Se AA' representa a equação $y = mx$, BB' representará a equação

$$y = mx + n.$$

440. Assim, o logar geometrico representado por uma equação do primeiro grão a duas incognitas é uma linha recta.

Para construir esta recta, basta conhecer dois dos seus pontos, e os que se escolhem com preferencia são os pontos em que ella corta os eixos.

441. Para achar os pontos em que uma recta corta os eixos, faz-se, na sua equação, $x = 0$; o valor correspondente de y dá o ponto em que a recta encontra o eixo dos y; fazendo-se $y = 0$, o valor correspondente de x dá o ponto em que a recta corta o eixo dos x.

EXEMPLO: *Construir a recta representada pela equação*

$$4x + 6y = 12$$

Se n'esta equação faz-se $x = 0$, acha-se $y = 2$

E se se faz $y = 0$, acha-se $x = 3$

AB é a recta pedida.

Representação graphica do trinomio do 2.º grão.

442. Considere-se um trinomio do segundo grão [illegible]

Chamemos y o seu valor, e procuremos representar por uma curva as variações d'este trinomio, quando se dá a x valores arbitrarios.

Façamos [illegible]

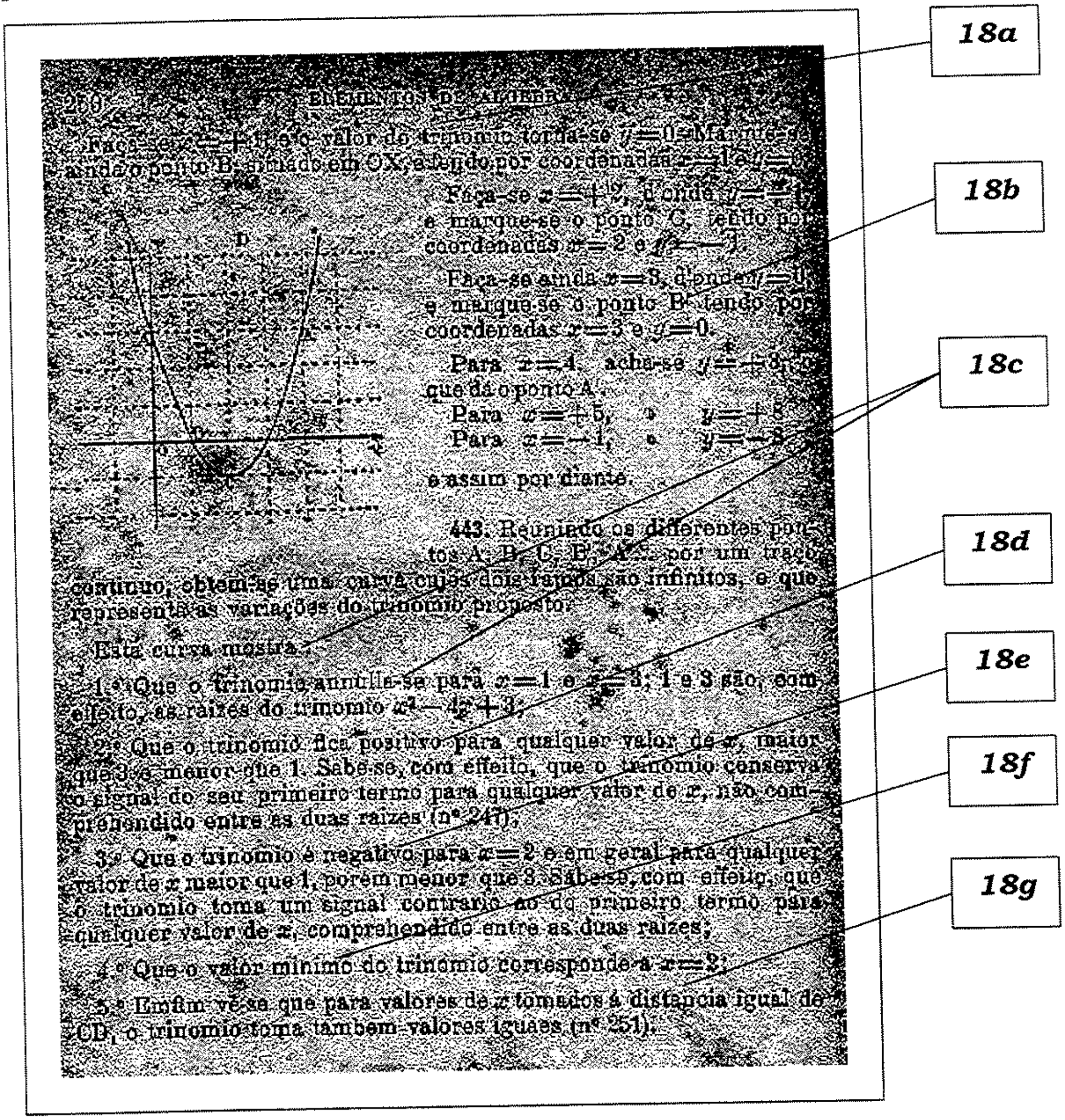
Sendo $x = 0$, acha-se como [illegible] $y = +3$. Tome-se pois sobre OY o valor positivo [illegible] ponto A.

17b

FIGURA 17– Confronto da página 138 da obra de Marin (17a), com a obra da página 349 da obra de FIC (17b).
FONTE: Exemplar (17a) pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos; exemplar (17b) pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

[18] Ver Apêndice 2.

Após analisar as representações gráficas das equações equações do primeiro grau, encontramos as representações dos principais tópicos relativos ao trinômio do segundo grau.


250 ELEMENTOS DE ALGEBRA

Faça-se $x=+1$, e o valor do trinomio torna-se $y=0$. Marque-se ainda o ponto B, situado em OX, e tendo por coordenadas $x=1$ e $y=0$.

Faça-se $x=+2$, d'onde $y=-1$, e marque-se o ponto C, tendo por coordenadas $x=2$ e $y=-1$.

Faça-se ainda $x=3$, d'onde $y=0$, e marque-se o ponto B' tendo por coordenadas $x=3$ e $y=0$.

Para $x=4$, acha-se $y=+3$, o que dá o ponto A.

Para $x=+5$, » $y=+8$

Para $x=-1$, » $y=+8$

e assim por diante.

443. Reunindo os differentes pontos A, B, C, B', A'... por um traço continuo, obtem-se uma curva cujos dois ramos são infinitos, e que representa as variações do trinomio proposto.

Esta curva mostra:

1.° Que o trinomio annulla-se para $x=1$ e $x=3$; 1 e 3 são, com effeito, as raizes do trinomio x^2-4x+3;

2.° Que o trinomio fica positivo para qualquer valor de x, maior que 3 e menor que 1. Sabe-se, com effeito, que o trinomio conserva o signal do seu primeiro termo para qualquer valor de x, não comprehendido entre as duas raizes (n° 247);

3.° Que o trinomio é negativo para $x=2$ e em geral para qualquer valor de x maior que 1, porém menor que 3. Sabe-se, com effeito, que o trinomio toma um signal contrario ao do primeiro termo para qualquer valor de x, comprehendido entre as duas raizes;

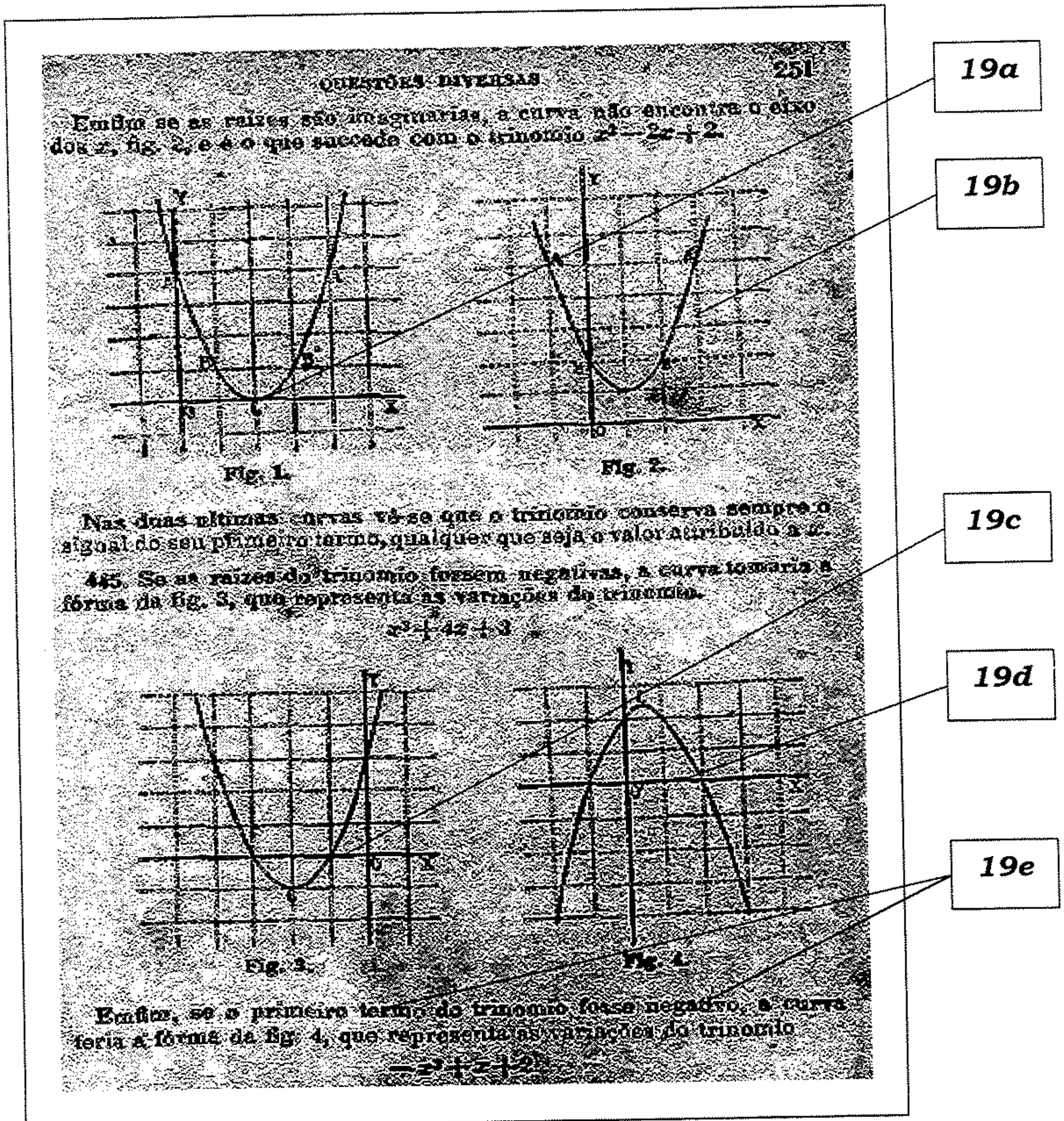
4.° Que o valor minimo do trinomio corresponde a $x=2$;

5.° Emfim vê-se que para valores de x tomados á distancia igual de CD, o trinomio toma tambem valores iguaes (n° 251).

FIGURA 18– Parte da pág. 250 da obra *Elementos de Álgebra - FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Encontramos por exemplo, explicações passo a passo (18a), para a obtenção dos principais pontos da curva (18b), o significado gráfico das raízes (18c), a os intervalos de variação do x para que o trinômio assuma valores positivos ou negativos (18d e 18e); em outras palavras, o autor estuda o significado gráfico das inequações do tipo $y > 0$ e $y < 0$ e ainda estabelece o ponto de mínimo(18f), bem como, o eixo de simetria(18g).

Ao que parece, o autor preocupou-se em construir o gráfico para em seguida, observando a parábola tirar as conclusões sobre o significado de cada ponto em sua análise gráfica.


QUESTÕES DIVERSAS 251

Emfim se as raizes são imaginarias, a curva não encontra o eixo dos x, fig. 2, e é o que succede com o trinomio x^2-2x+2.

Fig. 1. Fig. 2.

Nas duas ultimas curvas vê-se que o trinomio conserva sempre o signal do seu primeiro termo, qualquer que seja o valor attribuido a x.

445. Se as raizes do trinomio fossem negativas, a curva tomaria a fórma da fig. 3, que representa as variações do trinomio

$$x^2+4x+3.$$

Fig. 3. Fig. 4.

Emfim, se o primeiro termo do trinomio fosse negativo, a curva teria a fórma da fig. 4, que representa as variações do trinomio

$$-x^2+x+2.$$

FIGURA19 – Parte da pág. 251, *Elementos de Álgebra-FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Logo na seqüência de sua exposição sobre a parábola, encontramos uma página onde são feitos os quatro gráficos, com exemplificações dos tipos de raízes possíveis – raiz dupla (19a), raízes imaginárias (19b), raízes reais e distintas negativas ou não (19c e 19d), além fazer a associação do primeiro termo do trinômio com a concavidade da parábola (19e).

Na páginas seguintes, é feita uma representação gráfica elaborada (FIG 20), a da funções racional $y = \dfrac{4x - x^2 + 1}{x^2 + 1}$, proposta como exercício e precedida de uma discussão algébrica, além de encontrarmos na seqüência a construção do gráfico da função $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ também propostas como exercício[19].

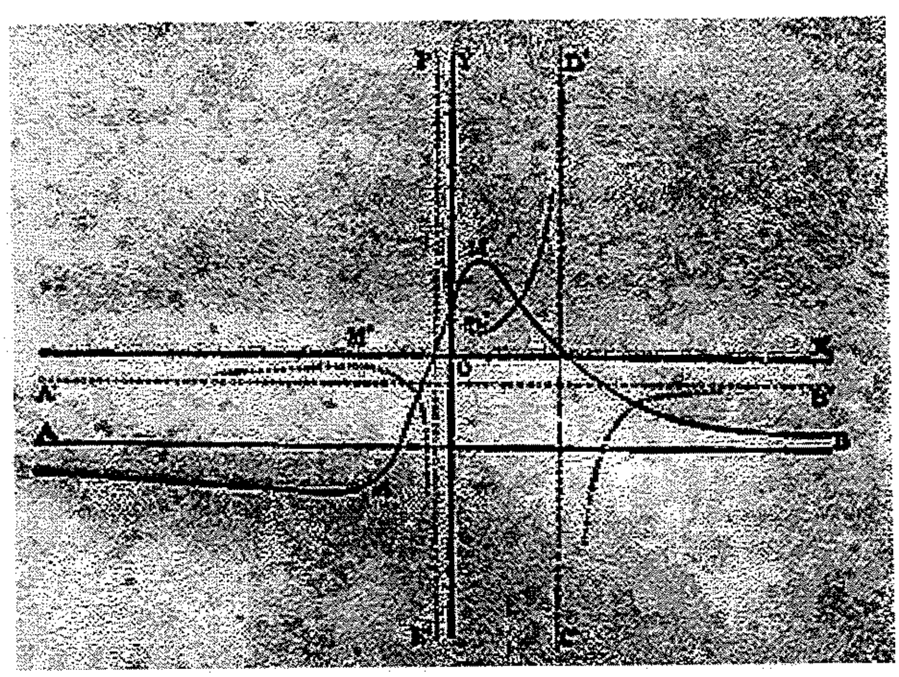


FIGURA 20– Gráfico da função $y = \dfrac{4x - x^2 + 1}{x^2 + 1}$ encontrada na página 255 da obra *Elementos de Álgebra - FIC-* 1875/84
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Outra coleção importante para a constituição das representações gráficas na matemática escolar brasileira é a coleção F.T.D., também originada pelas mãos de religiosos franceses. Tal coleção é devida aos freis da Congregação Marista, editada a partir de 1897. VALENTE (1997, p 181).

Temos também em VALENTE (1997, p 181) uma constatação importante que pode nos dar indícios da influência e profusão desses livros em nosso meio escolar no início deste século:

> *Em 1902, a Editora F.T.D. (Frère Théphane Durand) é aberta no Rio de Janeiro.* ***A editora veio suprir a demanda de livros europeus pelos novos colégio católicos criados no Brasil.*** *Os próprios maristas, donos da editora, fundam suas escolas. (...)* ***Os didáticos da Coleção F.T.D. foram utilizadas (sic) como já dissemos em escolas católicas e, ao que parece, generalizaram seu uso por demais liceus provinciais, escolas normais e preparatórios etc..*** *(os grifos são nossos)*

Assim confirmada a importância de tal coleção didática, passaremos a análise do livro *Algebra Elementar*, impresso no ano de 1921, que também compunha a coleção.

A estrutura presente nessa obra, em termos de discussão e análise algébrica, é muito parecida à encontrada nos *Elementos de Álgebra – FIC*, mantendo praticamente as mesmas características.

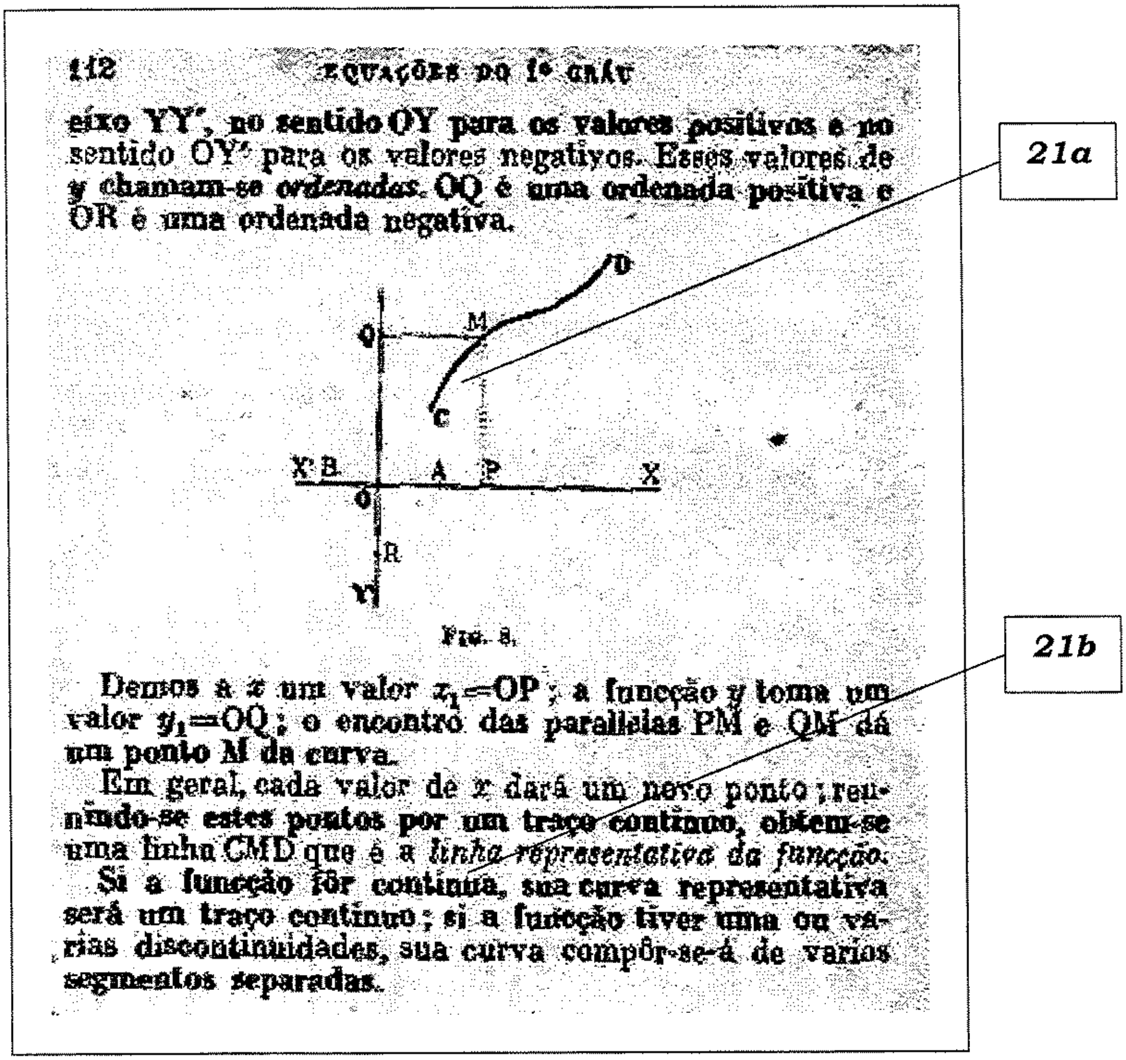
Entretanto, a representação gráfica no livro da coleção FTD, é ao nosso ver, mais rica que a feita nos Elementos de Álgebra – FIC, tanto em variedade como em quantidade. Ao que parece, há uma evolução no uso de gráficos para a discussão e análise algébrica e, por conseqüência, na análise gráfica.

Dada a grande variedade, optamos por apresentar os pontos que mais chamaram a atenção na análise da obra Algebra Elementar[20].

---

[19] Ver Apêndice 2.
[20] Ver Apêndice 2.

Uma diferença interessante, em relação às obras apresentada até então, é que a determinação dos pontos no plano, não é cuidadosamente trabalhada (21a), e uma curva já é apresentada em associação direta com o conceito de função e outros conceitos como continuidade(21b).



112 EQUAÇÕES DO 1º GRAU

eixo YY', no sentido OY para os valores positivos e no sentido OY' para os valores negativos. Esses valores de y chamam-se *ordenadas*. OQ é uma ordenada positiva e OR é uma ordenada negativa.

Fig. 8.

Demos a x um valor x_1=OP; a funcção y toma um valor y_1=OQ; o encontro das parallelas PM e QM dá um ponto M da curva.

Em geral, cada valor de x dará um novo ponto; reunindo-se estes pontos por um traço continuo, obtem-se uma linha CMD que é a *linha representativa da funcção*.

Si a funcção fôr continua, sua curva representativa será um traço continuo; si a funcção tiver uma ou varias discontinuidades, sua curva compôr-se-á de varios segmentos separadas.

FIGURA 21– Parte da pág. 112 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Na seqüência, a determinação do gráfico da função de primeiro grau é trabalhado de forma axiomática por meio do enunciado/demonstração de um teorema e seu reciproco. (22a e 22b)

22a

114 FUNCÇÕES DO 1º GRAU

186. Theorema. — *Toda funcção do 1º grau, y=ax+b, representa uma linha recta.*

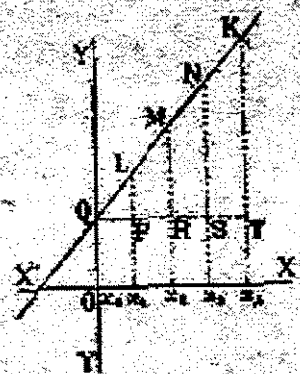


Fig. 9.

Com effeito; sejam $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$,... varios valores de x; os valores correspondentes de y são:

$$y_0=b,\ y_1=a+b,\ y_2=2a+b,\ y_3=3a+b,...$$

e temos sempre:

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=...$$

22a

ou (fig. 9): $\frac{PL}{QP}=\frac{RM}{QR}=\frac{SN}{QS}=...$

E' este um dos caracteres distinctivos de uma recta.

187. Reciproca. — *Uma linha recta tem por equação uma funcção do 1º grau entre x e y.*

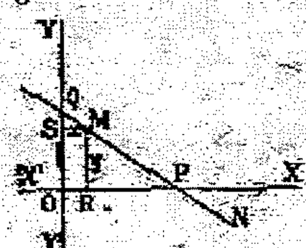


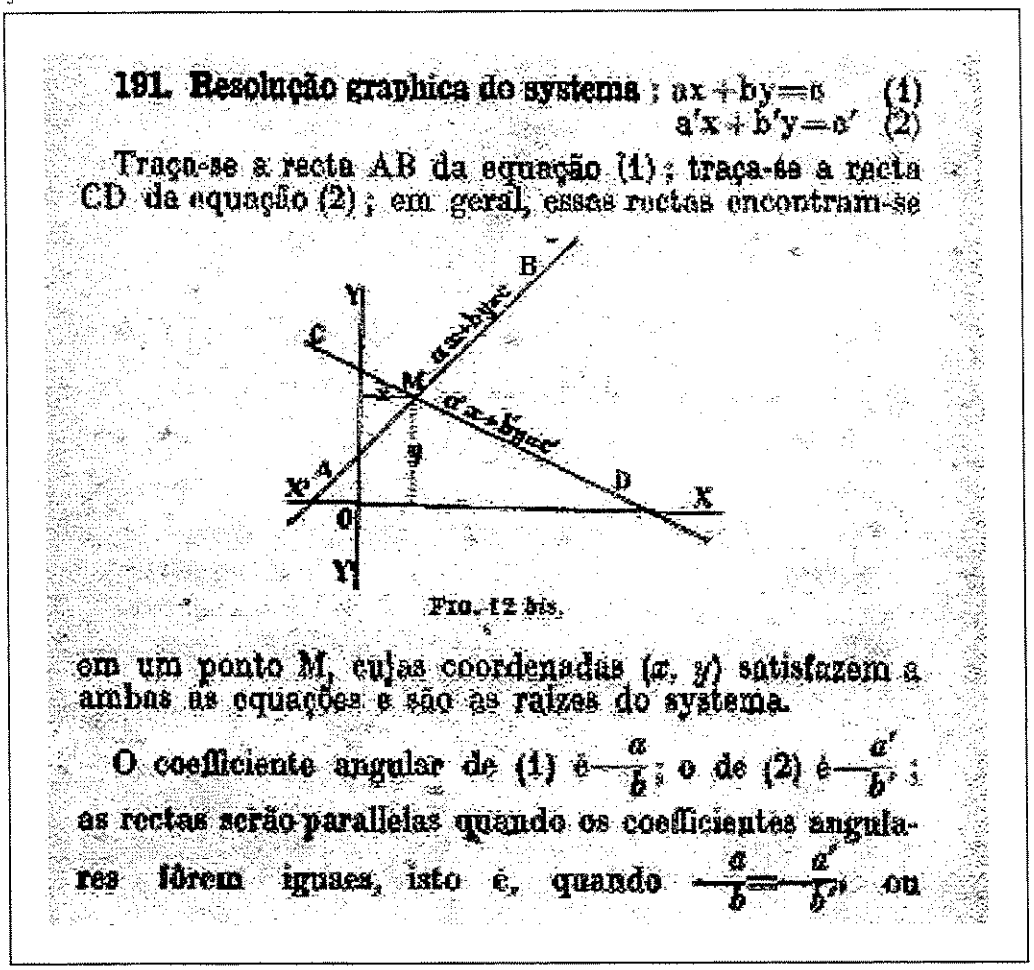
Fig. 10.

Seja a linha recta qualquer MN (fig. 10) que corta os eixos em P e Q de modo tal que OP=c e OQ=d, para

FIGURA 22– Página 114 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Como percebemos, é usado de forma clara o termo *funcção do 1º grau* (22a). A partir das representações iniciais, o autor procura fazer alguns gráficos e análises, apoiado no coeficiente angular[21] da reta.

A atenção é centrada no coeficiente angular, ao que parece, pelo fato do autor usá-lo posteriormente nas representações gráficas das soluções de dos sistemas lineares, constituindo assim um diferencial em relação as obras anteriores.



191. Resolução graphica do systema: $ax + by = c$ (1)
$a'x + b'y = c'$ (2)

Traça-se a recta AB da equação (1); traça-se a recta CD da equação (2); em geral, essas rectas encontram-se

Fig. 12 bis.

em um ponto M, cujas coordenadas (x, y) satisfazem a ambas as equações e são as raizes do systema.

O coefficiente angular de (1) é $-\frac{a}{b}$; o de (2) é $-\frac{a'}{b'}$; as rectas serão parallelas quando os coefficientes angulares fôrem iguaes, isto é, quando $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, ou

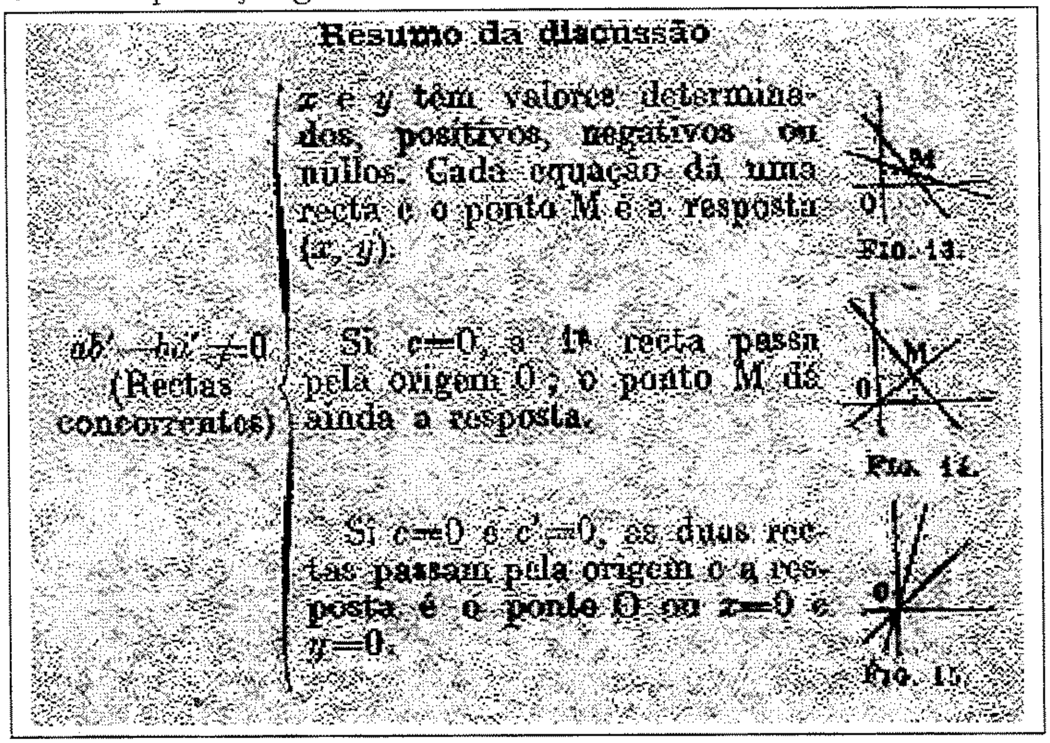
FIGURA 23A– Resolução gráfica de sistemas, na página 117 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

O autor não pára numa simples resolução gráfica de um sistema; vai além, discute outras possibilidades de interpretação gráfica,

---

21 Ver Apêndice 2.

conforme as possíveis soluções que um sistema apresenta, e elabora um longo quadro resumindo a discussão de sistema, acompanhada sempre de sua interpretação gráfica[22].


Resumo da discussão

$ab'-ba' \neq 0$ (Rectas concorrentes)

x e y têm valores determinados, positivos, negativos ou nullos. Cada equação dá uma recta e o ponto M é a resposta (x, y).

FIG. 13.

Si $c=0$, a 1ª recta passa pela origem O; o ponto M dá ainda a resposta.

FIG. 14.

Si $c=0$ e $c'=0$, as duas rectas passam pela origem e a resposta é o ponto O ou $x=0$ e $y=0$.

FIG. 15.

FIGURA 23B– Resumo da discussão gráfica de sistemas, na página 119 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

A diversidade dos gráficos apresentados nessa obra é tamanha que na página 129, encontramos a representação gráfica do sistema inequações $\begin{cases} 2x-3y>4 \\ 4x+y>12 \end{cases}$. Tudo indica que, essa representação é feita apenas como um exemplo, pois é a única do gênero em todo o livro. Ao que parece, tal representação pode ser considerada como um avanço qualitativo pois, é possível supor, que entender os pontos de um semi-plano por meio de uma desigualdade analítica requer um maior avanço de recursos gráficos.

---

[22] Para maiores detalhes, ver Apêndice 2.

207. Representação graphica. — Construamos a recta $2x-3y=4$ (1); as coordenadas na origem são $a=4/2=2$ e $b=-4/3$.

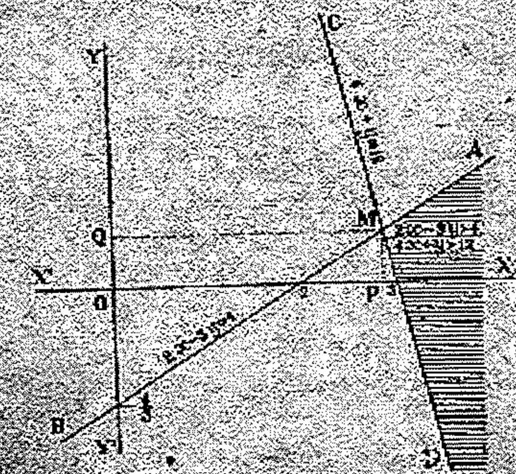


FIG. 28.

Unindo esses pontos, temos a recta AB. E' facil verificar, notando-se que $-3y$ tem o signal —, que todo ponto do plano abaixo de AB dá: $2x-3y>4$ e todo ponto do plano acima de AB dá $2x-3y<4$.

Construamos tambem a recta $4x+y=12$; as coordenadas na origem são $a'=3$ e $b'=12$; unindo esses pontos, temos a recta CD. Por causa dos signaes positivos de $4x$ e de y, é facil verificar que para todo ponto do plano acima de CD, temos $4x+y>12$ e abaixo de CD, temos $4x+y<12$.

As desigualdades $2x-3y>4$ e $4x+y>12$ serão, pois, verificadas para qualquer ponto do plano comprehendido no angulo AMD. Conservam-se apenas os valores inteiros de x e de y, porque o problema rejeita os valores fraccionarios.

Os pontos do angulo CMB verificam o systema $2x-3y<4$ e $4x+y<12$.

Os pontos do angulo CMA verificam o systema $2x-3y<4$ e $4x+y>12$.

Os pontos do angulo BMD verificam o systema $2x-3y>4$ e $4x+y<12$.

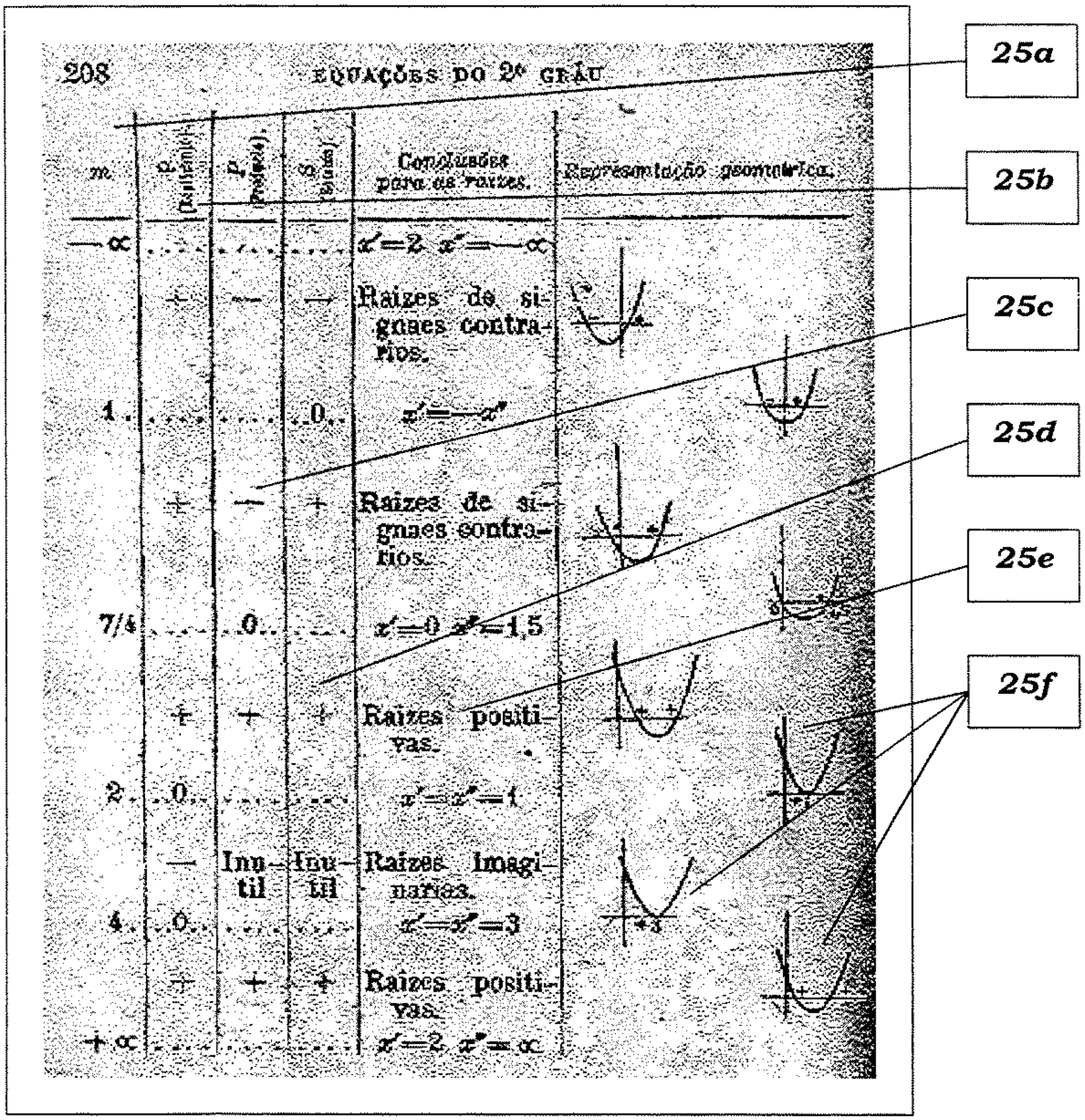
O ponto M dá a raiz das equações $2x-3y=4$ e $4x+y=12$. Suas coordenadas são $x=20/7=OP$ e $y=4/7=OQ$.

FIGURA 24– Representação gráfica do sistema $\begin{cases} 2x-3y>4 \\ 4x+y>12 \end{cases}$ na página 129 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921

FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

A prática de construir resumos gerias envolvendo os vários casos da solução de um sistema, equação algébrica, entre outros, é um recurso bastante usado por esse autor.

Temos nesse livro, um indício do quanto a representação gráfica esta associada as interpretações analítico-numéricas na álgebra.


208 EQUAÇÕES DO 2º GRÁU

m	R	P	S	Conclusões para as raizes	Representação geométrica
$-\infty$				$x'=2$ $x''=-\infty$	
	+	−	−	Raizes de signaes contrarios.	
1			0	$x'=-x''$	
	+	−	+	Raizes de signaes contrarios.	
7/4		0		$x'=0$ $x''=1,5$	
	+	+	+	Raizes positivas.	
2	0			$x'=x''=1$	
	−	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.	
4	0			$x'=x''=3$	
	+	+	+	Raizes positivas.	
$+\infty$				$x'=2$, $x''=\infty$	

FIGURA 25– Parte da página 208 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Temos um exemplo significativo na página 208, onde é feita a discussão da equação $x^2-2(m-1)x+4m-7=0$ numa tabela tal que as colunas trazem ordenadamente o parâmetro m (25a), o discriminante(25b), o produto das raízes(25c), a soma das raízes(25d), uma conclusão para as raízes (25e), e a representação gráfico/geométrica da discussão em cada linha(25f).

Em nossa análise a discussão da equações por via algébrica, seguida de interpretações gráficas, parece ser uma das características marcantes desta obra[23].

Procurando reconhecer a riqueza deste livro, pudemos também encontrar uma representação gráfico algébrica da função exponencial, feita após o estudo analítico.

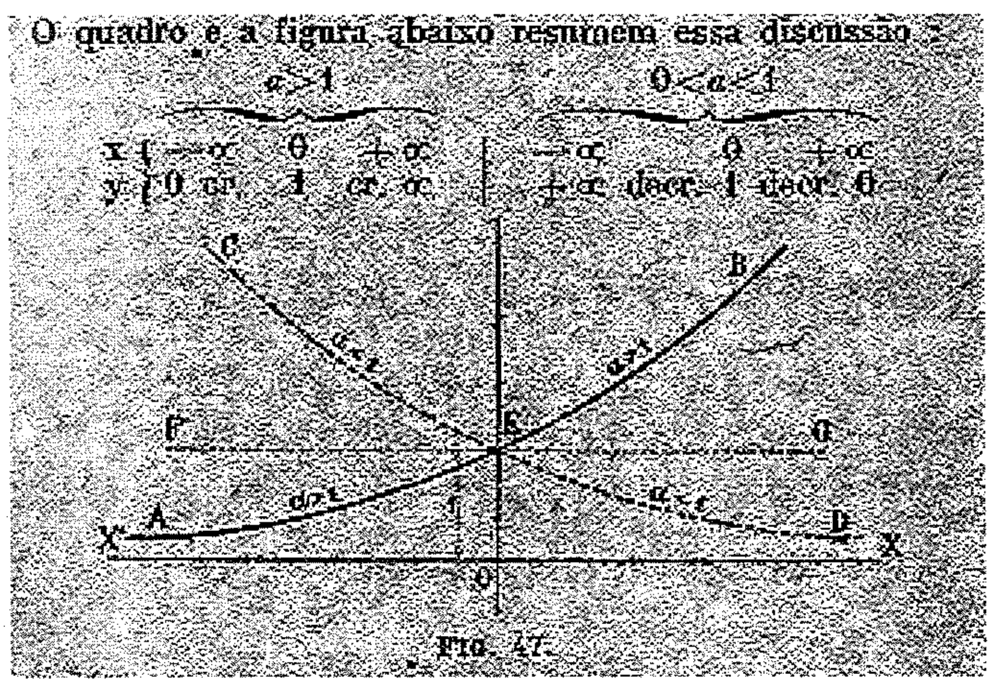


FIGURA 26– Gráfico da função exponencial, na página 309 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

---

23 Ver Apêndice 2.

Como já foi exposto, encontramos nos *Elementos de Álgebra – FIC*, o gráfico de uma função racional, proposto como exercício. Na *Álgebra Elementar da coleção F.T.D.* os gráficos representando funções racionais aparecem de forma mais sistematizada, a partir de um preâmbulo versando assíntotas.

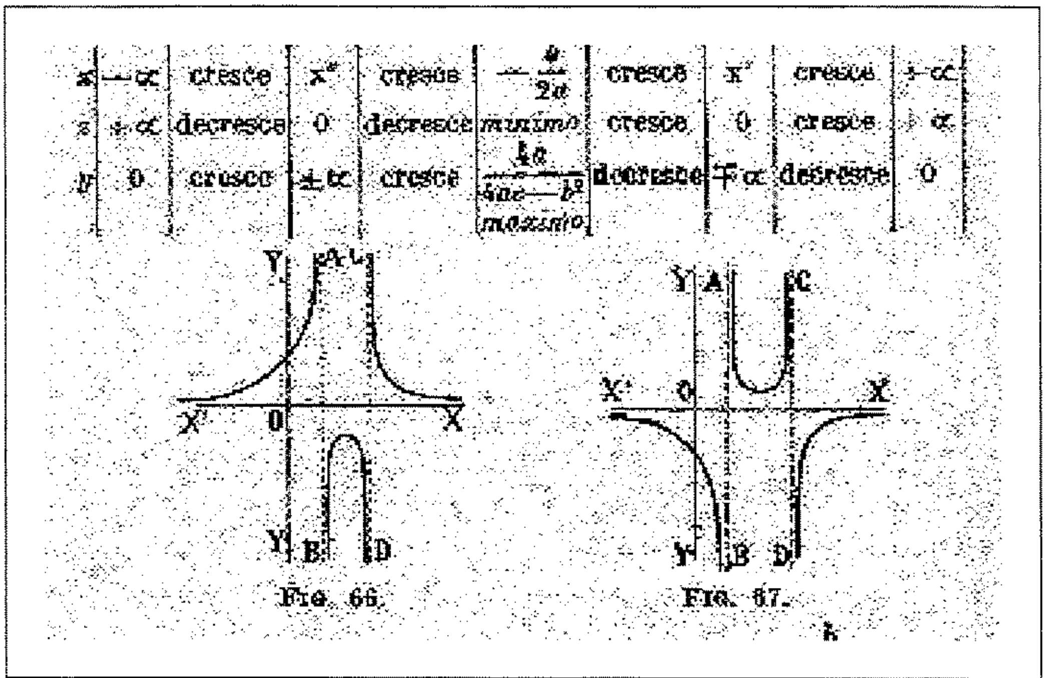
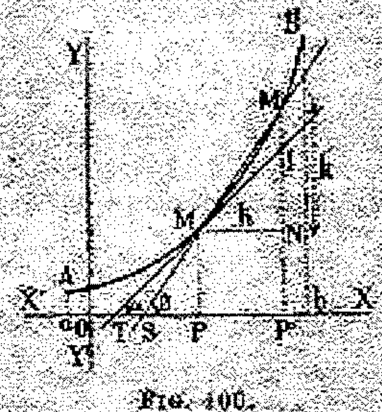


FIGURA 27– Parte da discussão da função $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ na página 362, da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Devemos nos lembrar de que embora o livro possua um número considerável de gráficos, quando comparado aos similares do mesmo período, a análise e trabalho exclusivamente algébricos são o ponto marcante da obra. Entretanto, como foi proposto, vale explorar ainda mais algumas das representações gráficas presentes. Assim, temos a seguir, dois gráficos usados na elaboração dos rudimentos do cálculo[24].

[24] Ver Apêndice 2



558. Valor geometrico da derivada. — Seja a funcção $y=f(x)$; construamos a curva AMB que a representa graphicamente. Supponhamos que a funcção é real e continua no intervallo AMB (fig. 100).

Consideremos nessa curva um ponto M de coordenadas x_0 e y_0 ou $f(x_0)$ e um ponto vizinho M' de coordenadas x_0+h e y_0+k ou $f(x_0+h)$, ambos os pontos no intervallo AB.

Tracemos MN parallela ao eixo dos x e a secante MM'; a figura mostra que:

Fig. 100.

$$M'N=f(x_0+h)-f(x_0)=k;\ MN=(x_0+h)-x_0=h.$$

O triangulo rectangulo MNM' dá:

$$\frac{M'N}{MN}=\frac{k}{h}=tg\ \widehat{NMM'}=tg\,\beta.$$

Quando h tende para 0, o ponto M' se aproxima de M até confundir-se com elle e a secante MM' tende para uma posição limite TI, que é, por definição, a tangente á curva AB no ponto M.

ALGEBRA ELEM. (C. Sup.) 26

FIGURA 28– Interpretação geométrica da derivada, na página 401 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* – 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Neste sentido, temos, além do trabalho gráfico, envolvendo derivadas, principalmente para a discussão das tangentes à curva e sua relação com os valores extremos da função, o gráfico que traz a interpretação geométrica da integral.

Mas a funcção que tem por derivada $x^{\frac{1}{2}}$, é $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; portanto:

$$\frac{S}{2}=\int_0^x \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}=\frac{2}{3}xy.$$

Como a area OMP vale $\frac{2}{3}$ x.MP, vê-se que a area

S ou MOM', terá por valor $\frac{2}{3}$ x.MM'.

2º *Avaliar a superficie limitada pela curva* $y=x^3-6x^2+11x-6$, *o eixo dos* x *e duas ordenadas correspondendo ás abscissas*: 1º x=0 *e* x=1; 2º x=1 *e* x=2; 3º x=2 *e* x=4.

Essa curva é representada na figura junta (108); note-se que ella corta o eixo dos x em $B(x=1)$, $C(x=2)$ e $D(x=3)$.

A 1ª area pedida é OAB e é dada pela integral definida:

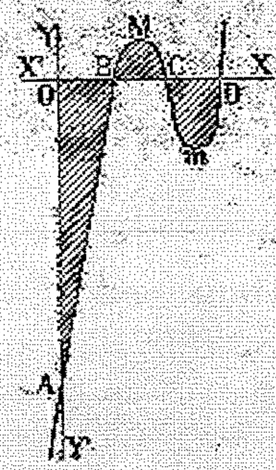
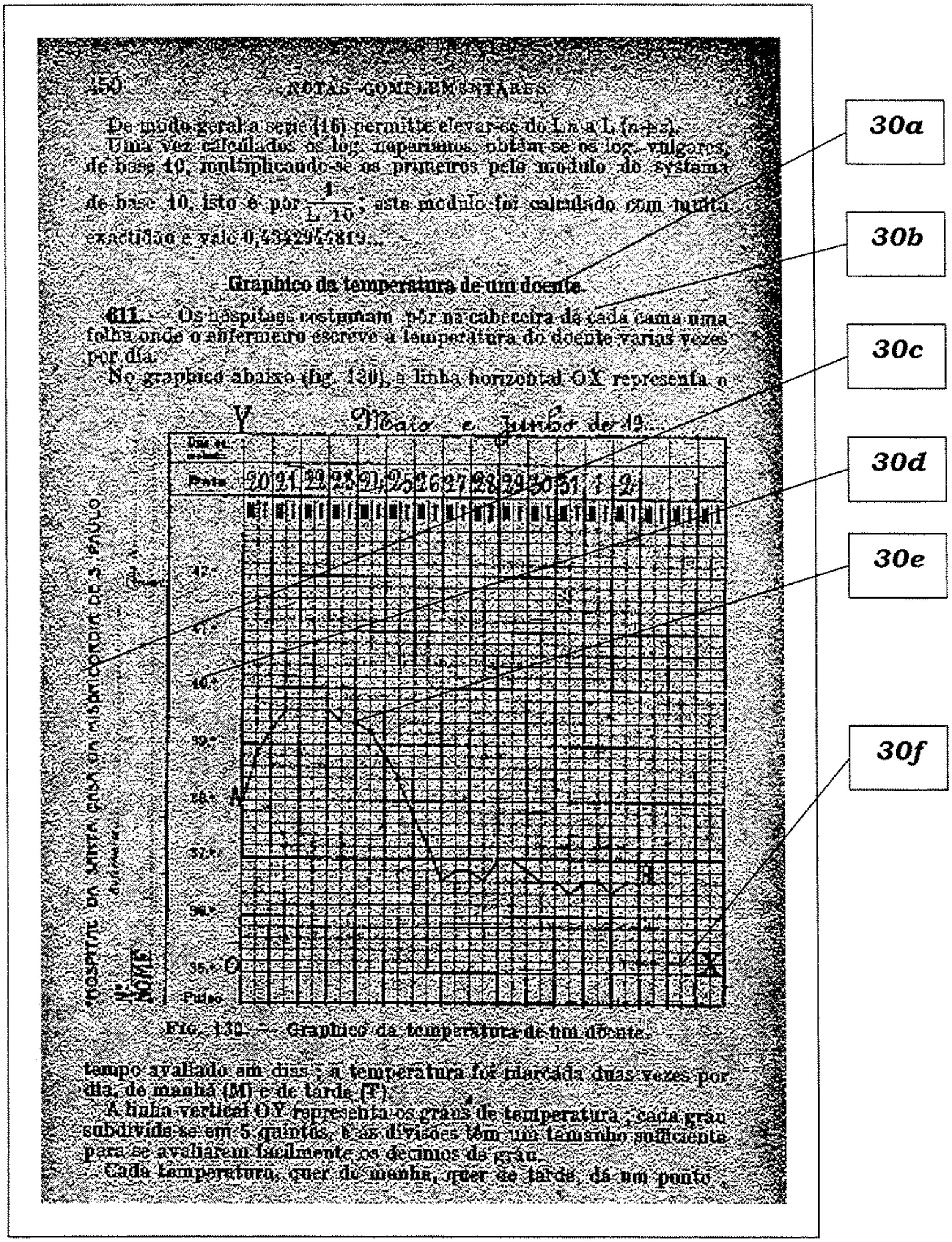


FIG. 108.

FIGURA 29– Interpretação geométrica da integral definida, na página 419 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* – 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Na investigação dos aspectos gráficos na obra *Álgebra Elementar de – FTD* – 1921, o último gráfico contemplado por nossa análise é o da temperatura de um doente, que varia no decorrer das horas. Tal gráfico, a exemplo do gráfico do movimento de um trem[25], ao que parece, serviu de inspiração para outros autores, pois encontramos representações parecidas ou simplesmente a citação das situações-problema que originam tais gráficos, em outros manuais didáticos.



450 NOTAS COMPLEMENTARES

De modo geral a serie (16) permitte elevar-se do L a a L (a+z).

Uma vez calculados os log. neperianos, obtêm-se os log. vulgares, de base 10, multiplicando-se os primeiros pelo modulo do systema de base 10, isto é por $\frac{1}{L\ 10}$; este modulo foi calculado com muita exactidão e vale 0,434294481...

Graphico da temperatura de um doente.

611. — Os hospitaes costumam pôr na cabeceira de cada cama uma folha onde o enfermeiro escreve a temperatura do doente varias vezes por dia.

No graphico abaixo (fig. 130), a linha horizontal OX representa o

Fig. 130. — Graphico da temperatura de um doente.

tempo avaliado em dias; a temperatura foi marcada duas vezes por dia, de manhã (M) e de tarde (T).

A linha vertical OY representa os graus de temperatura; cada grau subdivide-se em 5 quintos, e as divisões têm um tamanho sufficiente para se avaliarem facilmente os decimos de grau.

Cada temperatura, quer de manhã, quer de tarde, dá um ponto,

FIGURA 30– Parte da pág. 450 da obra *Álgebra Elementar de – FTD* - 1921
FONTE: Exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

---

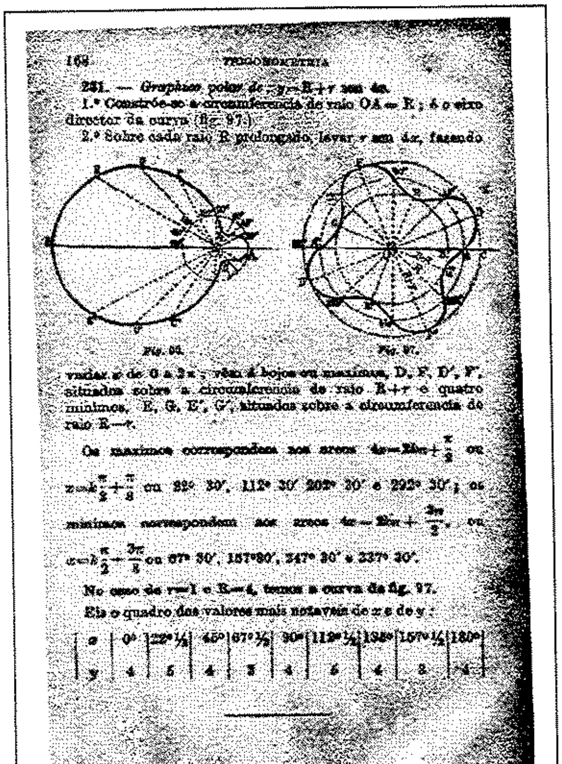
[25] Ver Apêndice 2.

O gráfico da temperatura do doente (30a), presente numa das últimas páginas do livro, é apresentado no livro com a descrição da situação-problema envolvida(30b), o autor cuida em reproduzir ao máximo uma situação cotidiana (30c), onde representa a temperatura de uma pessoa (30d), eixo y, por meio de uma curva (30e), em correspondência direta com o passar dos dias (30f).

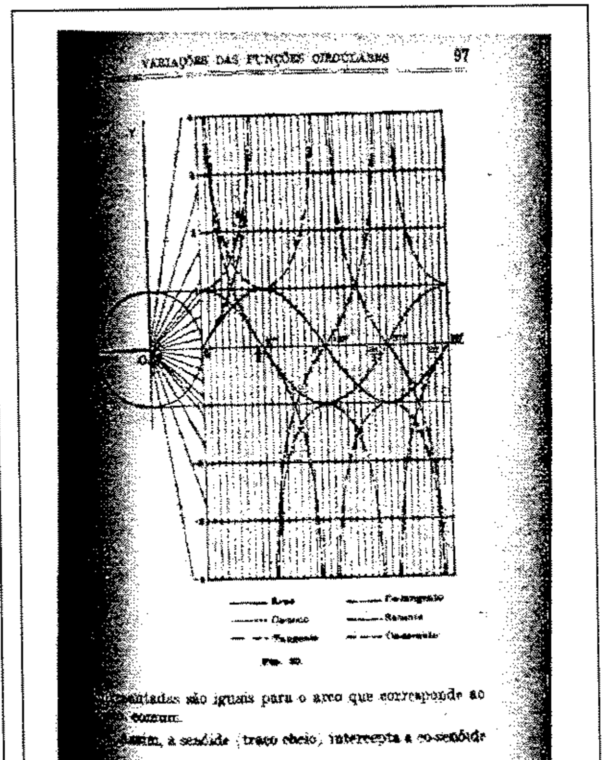
Encontramos aqui, a sugestão da aplicabilidade dos gráficos em situações reais e de modo bastante sutil, um juízo de valor, expressos nas palavras do autor:

> *Os graphicos empregam-se em **numerosissimos** casos: para representar as altura barometricas, os grâus de humidade, a temperatura solar media em cada dia, as cotações do cambio em relação ao tempo, a solubilidade de um sal, a força elastica de um vapor em relação á temperatura, etc. (página 452) (o grifo é nosso)*

Analisamos inúmeras outras obras sob a sigla F.T.D., aspectos interessantes foram revelados nessas análises, como, por exemplo, os gráficos com coordenadas polares presentes em *Trigonomeria Elementar,* de 1928, e os gráficos das funções trigonométricas, apresentados em uma página resumo no livro *Trigonometria Plana e Esférica,* de 1955, assinada pelo Irmão Isidoro Pedro.



31a



31b

FIGURA 31a– Gráfico de funções trigonométricas na forma polar, *Trigonometria Elementar,* 1928, página 168 – F.T.D.
FIGURA 31b- Gráfico de funções trigonométricas, *Trigonometria Plana e Esférica,* 1955, página 97 - F.T.D.
FONTE: Exemplares pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

No decorrer desse trabalho pudemos perceber a riqueza da obras F.I.C. e F.T.D., e, ao que parece, essa riqueza marcou época, tanto nos livros analisados em outros períodos, como nos relatos verbais dos professores que nos auxiliaram na localização e nos lembraram fatos interessantes quanto sua história.

O uso e a influência dessas coleções pode ter começado a perder sua força no final da década de 30, ao que parece, em função de outros livros que, cada vez mais se difundiam em grande escala, como por exemplo, os publicados por Roxo e Stávale, mas devemos estar atentos a que sua influência ainda será sentida por muito tempo. Nesse sentido, quando se observa a obra de autores das décadas seguintes, podemos encontrar alguns indícios sutis, tanto no estilo, e por vezes, numa escrita parecida com a feita nas representações gráficas, feitas nos livros de FIC e FTD. Ainda mais, tivemos a oportunidade de analisar um livro da coleção FTD, publicado em 1965, que, se não foi usado ou adotado por algum professor ou escola da época, ao menos serviu de estudo-inspiração para algum aluno ou professor.

4. Representações gráficas nos Anos 30: Euclides Roxo

Como já salientamos, no panorama histórico nacional, a Revolução de 1930, marca o final de um modelo politico estagnado, a República Velha, sinalizando um novo período de organização do Estado. A década de 30 situa-se num campo de importantes mudanças sociais, políticas e de ordem econômica. No início desse período, o Brasil presencia a ascensão ao governo de Getúlio Vargas, apoiado por representantes de diferentes camadas e classes sociais, inclusive por membros oligárquicos da Velha República. Num panorama de crises econômico-financeiras nos primeiros anos da década, o processo de contradições ideológicas, frente aos compromissos assumidos com os representantes dos diversos segmentos sociais é acompanhado por uma crescente intervenção estatal, que desencadeia o golpe em 1937 que institui o Estado Novo.

Nesse período de conturbadas mudanças sociais temos um período rico no campo das discussões culturais. Temos na descrição de WEREBE(1996, p. 49), uma interessante caracterização do início dos anos trinta:

> *O período que se seguiu à revolução foi bastante fecundo em debates em torno de idéias sociais, literárias, políticas, científicas e educacionais. Correntes filosóficas, literárias, artisticas, forma divulgadas no país (cubismo, primitivismo, surrealismo) atingindo*

> *apenas um público restrito de intelectuais. Mas, de qualquer forma, os efeitos da Revolução de 30 foram notáveis na literatura, nas artes em geral, na música, no teatro, no cinema, no rádio. Um, grande impulso foi dado a musica popular, ...*

Nesse sentido, no que diz respeito ao ensino, WEREBE (1996, p. 50), ainda esclarece que:

> *O governo provisório crio o Ministério da Educação e Saúde, cuja frente foi colocado um dos líderes da Revolução de 1930, Francisco Campos. Já no ano seguinte, o ministro empreendeu uma reforma, regulamentando a universidade (que deveria ser constituída por três instituições de ensino superior – Direito, Medicina e Engenharia ou, no lugar de uma delas, uma Faculdade de Educação, Ciências e Letras) e* ***reorganizando o ensino secundário*** *(que passou a compreender um ciclo básico de cinco anos e um complementar de dois anos).*
> ***Centrada no ensino secundário****, essa reforma nada fez pela educação popular. (os grifos são nossos)*

É nesse ambiente propício a reflexões e mudanças que encontramos a atuação do professor Euclides Roxo na elaboração de alguns livros didáticos de matemática com diferenças perceptíveis em relação aos manuais didáticos, até aqui analisados. Nesse sentido, vale esclarecer que em nossa pesquisa de campo, pudemos encontrar livros de Euclides Roxo, editados em períodos[26] posteriores, escritos exclusivamente pelo autor ou em parceria de outros autores.

Analisaremos a seguir, a obra *Curso de Matemática Elementar*[27], de 1930, onde poderemos perceber que a abordagem gráfica dada por este professor para desenvolver os temas relativos às funções matemáticas é uma marca do livro de Euclides Roxo e a exposição gráfica, voltada muitas vezes para situações cotidianas, pode ser

---

[26] Tivemos a oportunidade de encontrar livros de Roxo editados no final da década de 40, assinalando uma atuação de 20 anos na publicação de livros didáticos.

[27] Ver apêndice 3.

entendida como um dos traços fundamentais da obra de Roxo[28], no tratamento didático das funções.

Em nossa investigação, o livro de Roxo se revela muito importante, pois é a primeira obra onde encontramos a representação gráfica na apresentação e introdução do conceito de funções.

— 139 —

(a temperatura) é uma **funcção** da outra (o tempo). (1) O *thermometro registrador* (apparelho que se encontra nos gabinetes de Physica e de Geographia) e que se vê na fig. 85, tem um estylete que traça, sobre uma folha

32a

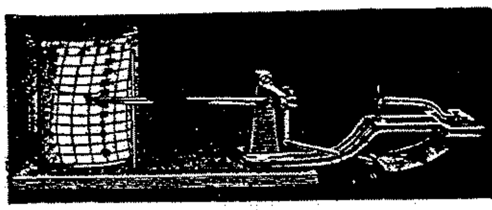


Fig. 85

de papel quadriculado (2), (presa a um tambor que gyra como o ponteiro das horas de um relogio), um *graphico* das temperaturas. A curva assim desenhada (fig. 86) é a representação intuitiva da dependencia funccional. Para se obter, por meio dessa curva, a temperatura que reinou, num dado instante, basta procurar, no eixo das abscissas, o ponto representativo desse instante e traçar a parallela (no nosso caso um arco de circulo de mesmo raio que o das quadriculas) ao eixo das ordenadas até á curva;

32b

32c

32d

(1) A palavra "funcção" é empregada nesse mesmo sentido de dependencia, embora muitas vezes imprecisa, na linguagem corrente. Assim, diz-se: o progresso de um paiz é funcção da actividade de seus filhos; o grau de approvação de um estudante é funcção do esforço por elle dispendido durante o anno.

(2) Apenas o systema de rectas é substituido por arcos de circulo.

32e

FIGURA 32 – Pág. 139, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

28 Ver no apêndice 3, o índice do livro.

Expondo a ilustração de um *thermometro registrador* (32a), Roxo explica como um gráfico da temperatura pode ser obtido em função do tempo decorrido (32b). Ao que parece, Roxo tenta expor o conceito de função, com ênfase no caráter intuitivo de tal conceito (32c). Logo em seguida, o autor elucida como o leitor deve proceder para a leitura do gráfico e, consequentemente, para obtenção da temperatura no decorrer do tempo (32d). Entendemos tal exposição como um certo diferencial em relação aos outros livros didáticos analisado pois a representação gráfica é feita logo na introdução do conceito de função e associada a uma situação de ordem prática. Nesse sentido, na mesma pagina do livro, Roxo procura transmitir a idéia de função associada a outras situações cotidianas (32e) e nas páginas seguintes, o autor expões outras situações experimentais onde é usada a leitura gráfica.

Outro exemplo, analogo ao que vimos acima, é o da pressão atmospherica, em um dado lugar, que, como a

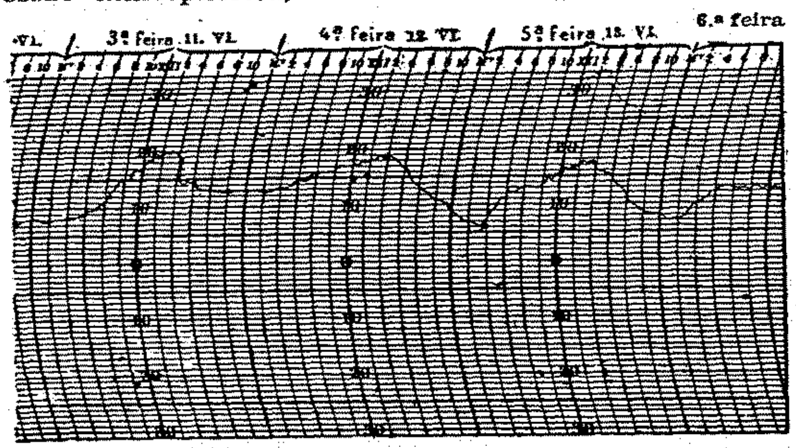


Fig. 86

temperatura, é uma funcção do tempo, cuja representação graphica pode ser tambem traçada por um apparelho muito conhecido (o *barometro registrador*). A fig. 87 representa a curva das pressões barometricas, tomadas em certo logar, entre as 8 e as 24 horas de certo dia.

FIGURA 33 – Curva traçada por um barômetro registrador, página 140, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Como exemplo, citamos ainda o gráfico da temperatura de uma barra de ferro em função do tempo decorrido. Neste caso, Roxo utiliza-se do gráfico para estabelecer os conceitos iniciais, como variável independente (tempo) e variável dependente (temperatura).

reinado. Por isso, diz-se que o tempo é a variavel inde-

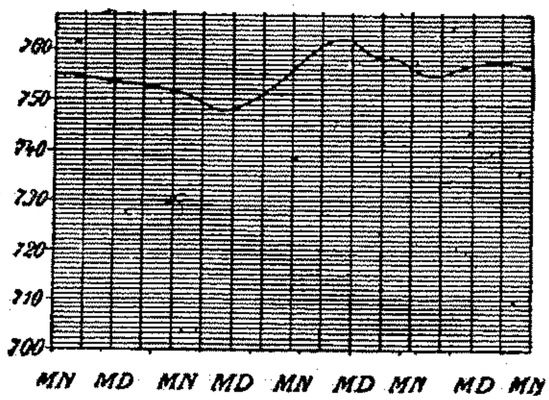


Fig. 87

pendente e a temperatura a variavel dependente. Qual é, no segundo exemplo, a variavel independente?

FIGURA 34 – Curva da temperatura de uma barra de ferro, página 141, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Assim, Roxo introduz ao leitor os conceitos básicos de função, uma abordagem gráfica, relacionada a fatos cotidianos, na maior parte das vezes ligados a experimentos, situações ou fenômenos físicos.

Vale analisar alguns dos problemas apresentados por Roxo, na seqüência de sua exposição.

35a

35b

35c

35d

35e

35f

35g

— 148 —

Escolha escalas convenientes para as profundidades e as temperaturas e trace a representação graphica da funcção. Qual é a variavel independente? Qual deve ser a temperatura a 850 m de profundidade? e a 1900 m?

19. O salario por hora importa em: *a*) 700 réis; *b*) 1$500; *c*) 3 mil réis. Qual a expressão que dá o salario total em funcção do tempo de trabalho? Represente graphicamente a funcção, em cada caso, e tire dahi o salario devido por:

a) 18; *b*) $10\frac{1}{4}$; *c*) $17\frac{3}{4}$ horas de trabalho.

20. Trace um circulo de 5 cm. de raio (com centro na intersecção de dois traços fortes do papel millimetrado); trace um systema de cordas parallelas. Represente graphicamente a variação do comprimento das cordas em funcção da distancia ao centro.

21. Trace um raio e prolongue-o uns 10 cm. além da circumferencia. De pontos tomados, de ½ cm., ½ cm., sobre o prolongamento do raio, trace tangentes á circumferencia, bem como as cordas de contacto. Represente graphicamente, em funcção da distancia dos pontos tomados sobre o prolonga-

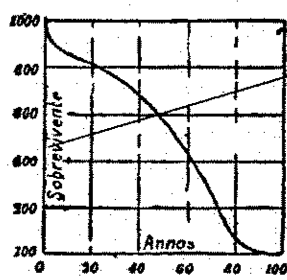


Fig. 88

mento do raio á extremidade do mesmo: *a*) os comprimentos das tangentes; *b*) os comprimentos das cordas de contacto.

22. A fig. 88 representa a mortalidade dos homens, isto é, o numero dos que, dentre 1000 nascidos ao mesmo

FIGURA 35 – Pág. 148, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Na página 148, o problema 19, procura trabalhar a discussão algébrica e gráfica do salário que varia de acordo com o número de horas trabalhadas (35a), sendo que é cobrado do aluno, a construção do gráfico bem como a leitura de tal gráfico após sua construção(35b). O problema 20, na mesma página, traz a associação das funções com problemas da geometria plana (35c), neste caso também é requisitada a construção do gráfico pelo aluno (35d). Na seqüência, o problema 21 se aproxima do problema 20, pois também é exigida a construção gráfica a partir de uma situação geométrica (35e). Já o problema 22, traz um gráfico que relaciona o da mortalidade masculina (35f), a cada 1000 homens nascidos, no decorrer dos anos (35g). E é proposto ao final do problema, no início da página 149, uma leitura livre dos dados gráficos apresentados.

Parece natural, reconhecer a variedade de problemas com abordagem, tanto algébrica quanto gráfica, trabalhados por Roxo, no seu *Curso de Matemática Elementar* e neste sentido, encontramos várias tabelas usadas, de certa forma, para auxiliar o estudo gráfico e consequentemente complementar e enriquecer o de funções.

23. A agua ferve em temperatura cada vez mais alta, quando sujeita a pressões maiores que a pressão atmospherica commum. Assim:

Sob uma pressão de :	Uma temperatura de :	Sob uma pressão de :	Uma temperatura de :
1 atmosphera	100°,0	8 atmospheras	170°,8
2 atmospheras	120°,6	9 "	175°,8
3 "	133°,9	10 "	180°,3
4 "	144°,0	20 "	213°,0
5 "	152°,2	30 "	236°,2
6 "	159°,2	40 "	252°,5
7 "	165°,3	50 "	265°,9

Represente, de accordo com essa tabella, a temperatura de ebulição como funcção da pressão. Na representação graphica, é vantajoso tomar como ponto origem não 0°, mas 100°.

FIGURA 36A– Tabela da temperatura de ebulição da água para diferentes pressões, página 149, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Ao que parece, Roxo procura conceituar funções partindo de uma abordagem gráfico algébrica intuitiva, estudando em seguida as definições de uma maneira um pouco mais formal[29], para discutir a função do primeiro grau, seu gráfico e alguns aspectos interessantes de tal gráfico, como por exemplo, a inclinação da reta, valendo-se da idéia de proporcionalidade.

Resumindo as conclusões a que acima chegámos, podemos, pois, dizer:

Uma funcção, cujo valor é proporcional á variavel independente, é sempre representada graphicamente por

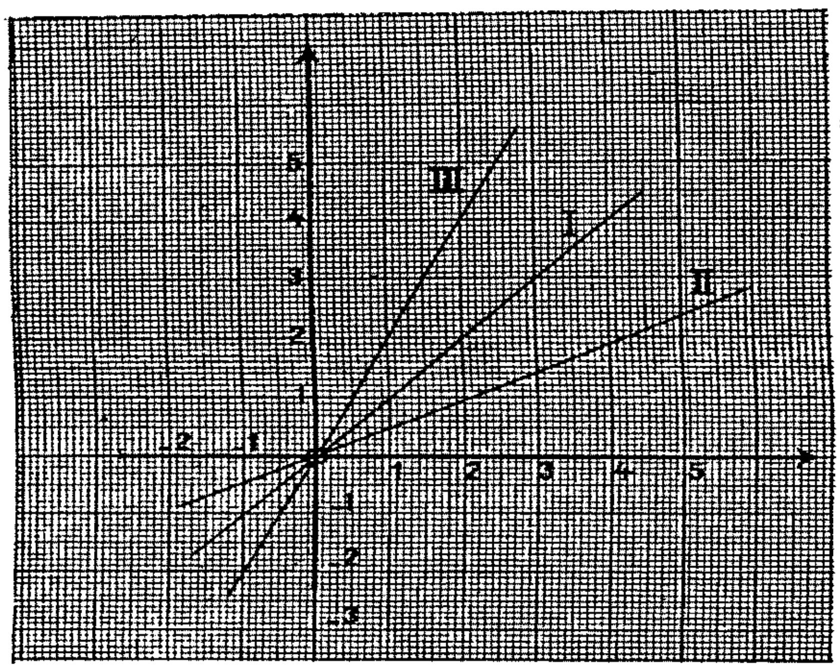


Fig. 90

uma recta que passa pelo ponto origem dos eixos coordenados, ascendente ou descendente, conforme o factor de proporcionalidade fôr positivo ou negativo. O valor abso-

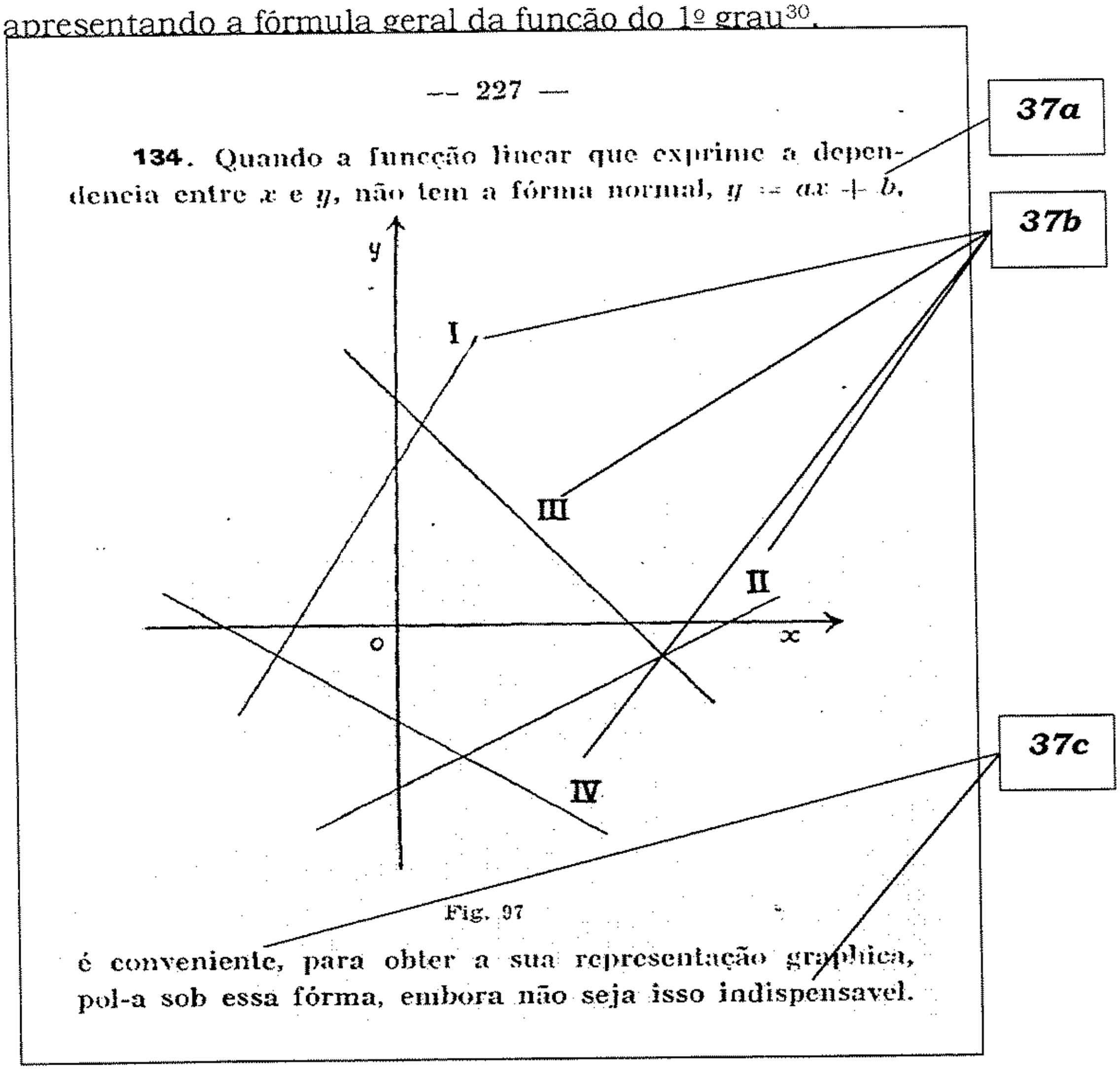
FIGURA 36B– Gráfico de funções lineares, página 158, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

---

29 Ver a reprodução das páginas 151 e 153 no Apêndice 3.

Uma análise mais detalhada deste livro, nos ajuda a perceber, que o autor tenta colocar a cada explicação o gráfico correspondente. Roxo representa ainda o gráfico da função hiperbólica, encerrando ao que parece a primeira etapa de sua exposição sobre funções.

Continua sua exposição sobre o tema, buscando, então, generalizar algumas de suas afirmações sobre funções lineares apresentando a fórmula geral da função do 1º grau[30].


— 227 —

134. Quando a funcção linear que exprime a dependencia entre x e y, não tem a fórma normal, $y = ax + b$,

Fig. 97

é conveniente, para obter a sua representação graphica, pol-a sob essa fórma, embora não seja isso indispensavel.

FIGURA 37 – Parte da pág.158, *Curso de Matemática Elementar, Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

---

[30] Ver Apêndice 3.

Encontramos então, um gráfico que parece buscar a representação geral da função afim (37a), buscando apresentar as possíveis representações para tal função (37b), bem como, a sugestão para que o aluno coloque uma expressão que relacione as variáveis x e y na forma $y = ax + b$ (37c).

Queremos novamente enfatizar, que esta obra tem muitos exemplos de situações cotidianas interpretadas por modelo matemáticos simples. Neste sentido, a relação com conceitos físicos elementares, como a velocidade e posição de um móvel, em função do tempo é explorada por Roxo[31].

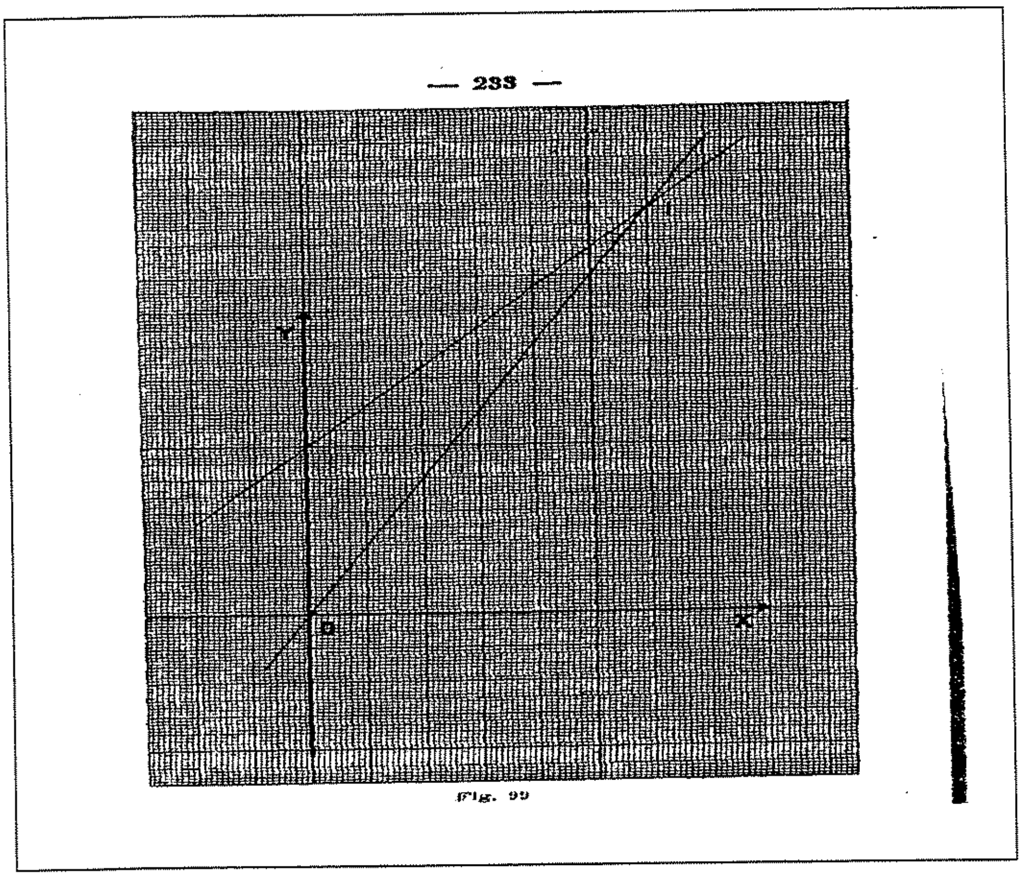


FIGURA 38 – Gráfico da posição de dois trens, página 158, *Curso de Matemática Elementar, Euclides Roxo, 1930.*
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

31 Ver Apêndice 3.

Nessa perspectiva, apresentamos o último gráfico desta etapa de análise, onde o autor faz a representação da posição de dois trens em função do tempo percorrido, onde o ponto de encontro de duas retas traçadas no gráfico cartesiano é a representação gráfica da posição de encontro dos trens em correspondência com o instante do encontro.

Como observamos em inúmeros gráficos e exercícios propostos por Roxo, é feito e sugerido o uso do papel milimetrado, um outro diferencial em relação a maioria das obras do mesmo período. Para aqueles que defendem o uso de variados recursos tipográficos, tal livro pode, de certa forma, representar um avanço qualitativo na didática da exposição e abordagem gráfica.

Com efeito, a postura de Roxo perante o ensino de funções pode ser melhor entendida, se analisarmos algumas de suas reflexões sobre o ensino da matemática, defendidas no livro *A Matemática na Educação Secundária*, publicado em 1937. Podemos buscar alguns indícios da divulgação do livro de 1937, se atentarmos para o fato de ter sido editado, pela Companhia Editora Nacional que tinha representantes comerciais em São Paulo, Rio de Janeiro, Recife e Porto Alegre. Vale lembrar, que naquela década, no que se refere à possível influência que a obra de Roxo possa ter atingido, na ocasião da edição da *A Matemática na Educação Secundária*, no frontispício da obra seu nome é subscrito pelos dizeres: *Catedratico de Matemática do Colégio Pedro II, Professor-Chefe de Matemática do Instituto de Educação do Rio de Janeiro.*

Tal livro como o próprio Roxo esclarece, na introdução:

> *O presente volume é a simples apresentação de muitas opiniões abalisadas sobre as quetões mais relevantes e de ordem mais geral, relativas aos ensino da matemática. Procurando indicar e caracterizar as principais tendências e diretivas do movimento de reforma, abeiramos apenas os problemas mais gerais e os pontos mais caracteristicos, da escola nova no dizente à matemática, deixando propositadamente de lado tudo que se refira à metodologia e à didática propriamente dita.* ROXO (1937, p. 7)

Vale esclarecer que Euclides Roxo se posiciona como organizador-mediador dos muitos discursos a respeito da concepção/ensino da matemática, apoiando-se para a divulgação de tais idéias, no discurso de muitos matemáticos e psicólogos famosos. Nesse sentido, mais uma vez podemos perceber a influência daquilo que era desenvolvido e debatido nos círculos culturais estrangeiros, principalmente o europeu do início do século:

> *De fato, um movimento renovador do ensino de matemática começou a delinear-se em fins do século passado, na Alemanha e na Inglaterra, para logo se extender a todos os principais paizes do globo.*
> *Desse largo movimento, t6em participado não apenas professores e psicólogos, mas também, e, principalmente, matemáticos Ilustres comoFELIX KLEIN, HENRI POINCARÉ, LAISANT, TANNERY, DARBOUX, BOREL, SYLVESTER, DAVID SMITH, YOUNG, GINO LORIA.*
> *Esses grandes espiritos sentiram que o ponto de vista estreito e fechado, em que geralmente se mantinham os professores secundarios de seus paizes, apegados ao sentido classico do ensino não mais se coadunava com o papel que a ciencia matemática, graças aos seus modernos desenvolvimentos, deve ter no progresso material e cultural dos tempos que correm. ROXO (1937, p. 6)*

Detenhamo-nos agora, em algumas das afirmações que Euclides Roxo faz a respeito do ensino de funções, por meio de intervenções reflexivas feitas pelo autor no discurso dos cientistas citados, ao ainda, por meio de sínteses elaboradas ao final de cada capítulo de sua obra.

Sob o ponto de vista axiológico, podemos, perceber o papel de destaque que o ensino de funções assume no ensino de matemática, na concepção de Roxo. Para tanto, vale recorrer às afirmações sobre o ensino de função encontradas, em uma das conclusões elaboradas pelo autor em sua coletânea de 1937:

> *1 – A noção de função deve ser adotada como* ***idéia axial no ensino da matemática****, capaz de estabelecer um* ***élo unificador*** *dos varios assuntos tratados na escóla secundaria e de modo a ser a* ***alma do corpo em que se organiza toda a matéria****.*
> *2 – Além da aptidão para ligar os varios assuntos em um todo, a educação do pensamento funcional merece ser feita na escola secundaria, não só tendo em vista as* ***exigencias praticas e culturais da vida moderna****, como pela sua aptidão para constituir um meio* ***altamente*** *educativo do pensamento logico e um* ***verdadeiro método de estudo.*** (...)
> *3 – A idéia de função vem ainda dar ao ensino da matemática secundaria* ***mais vida e mais interesse****, permitindo não só tratar de questões de maior realidade para o aluno, como* ***estabelecer conexões*** *a outras materias mais concrétas. (...)*
> *6 – Começando pela simples e vaga idéia de dependencia, passar-se-á depois á de relacionalidade e à de funcionalidade, apresentadas sob o* ***triplice aspecto (tabèlar, gráfico e algebrico)****, evitando-se de começo as definições formais e as demonstrações rigorosas. ROXO(1937, p. 194) (os grifos são nossos)*

Podemos ainda, buscar indícios do papel de destaque que o ensino das representações gráficas de funções assume no ensino de matemática, na concepção de Roxo, por meio da análise das seguintes afirmações, que esclarecem a postura e organização didática adotada do livro de 1930, analisado anteriormente:

> *Klein aconselhava a que* ***se partisse do traçado de graficos ou "curvas empiricas"****, passando-se* ***em seguida as equações do 1º grau muito simples, depois as outras das formas*** $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$*. A teoria das equações algébricas e a trigometria (sic) fornecem ocasião para se estudarem funções* ***gradativamente*** *mais complicadas, bem como as curvas que as representam. No mesmo sentido* ***operam os exemplos tirados das aplicações, principalmente da fisica,*** *donde resulta a idéia de que uma função pode também ser dada empiricamente. Nas series superiores poder-se-á, então, dessas concepções, já tornadas familiares ao aluno, fazer sair as noções gerais do calculo diferencial e integral. ROXO (1937, p. 183). (os grifos são nossos)*

Dadas as afirmações conforme tivemos acima, parece natural, localizar ainda, a posição que as representações gráficas representavam num aspecto mais amplo para o ensino da matemática. Nesse sentido, temos a descrição dos objetivos práticos, elaborados pelo comitê francês e assim apresentados por ROXO (1937, p 124)

> *Capacidade para compreender e interpretar corrètamente as representações gráficas de varias especies, tais como hoje abundam em discussões populares e problemas cientificos, sociais , industriais e politicos. Tanto para representação de dados estatisticos, que se tornam cada vez mais importantes na consideração de nossos problemas diários, como para a compreensão das varias especies de dependencia de uma quantidade variavel em relação a outra.*

Percebemos, então, que nesta proposta educacional, a representação gráfica começa assumir um importante papel no ensino de matemática com abordagens que vão além do aspecto a funcional até aqui discutidas.

Naturalmente o tema do ensino de funções e das representações gráficas nos remete a várias reflexões sobre o seu verdadeiro papel no ensino. Parece claro, o quão importante era esse papel, sob a ótica de Euclides Roxo e alguns de seus contemporâneos.

Neste sentido, devemos lembrar que a década de 30 é marcada pela presença de outros autores de muita influência como Jacomo Stávale, cujos manuais didáticos foram editados por mais de 20 anos. Entretanto, dada a vasta bibliografia disponível, bem como, a dificuldade de delimitar os anos em que tais obras foram efetivamente usadas, características naturais de uma pesquisa desta natureza, a análise das obras nacionais publicadas a partir dos anos 30, teve de ser delimitada pela escolha de um único livro, para cada década.

Nesta perspectiva, queremos salientar que as escolhas feitas buscaram contemplar mais o aspecto da diversidade de obras disponíveis no mercado editorial, do que o caráter de efetiva adoção ou uso de tais livros nas escolas durante períodos em questão.

Há, porém, o fato de que algumas das obras escolhidas também representem livros de relativo sucesso editorial[32]. De qualquer forma, os livros analisados nas épocas mais recentes podem ser encontrados em sebos[33] e quando possível, indicamos a localização de alguns deles.

5. Representações gráficas nos Anos 40: Algacyr Munhoz Maeder

Como sabemos, a década de 40 é marcada por importantes fatos na política nacional e mundial, como a derrubada de Getúlio Vargas, assinalando o fim da ditadura e do Estado Novo em 1945, ano que marca também, no panorama mundial, o fim da 2ª Guerra Mundial, iniciada em 1939. Ao final do conflito bélico, emerge a necessidade da reconstrução da Europa, arrasada pela guerra, sendo que seu panorama político-geográfico fica dividido em dois grandes blocos, o socialista ao oriente e o capitalista ao ocidente.

A União Soviética intervém na reconstrução do bloco oriental. Os Estados Unidos participa por meio da ajuda financeira da reconstrução ocidental. As tensões que permaneceram entre os dois blocos mundiais se acentuaram caracterizando, a partir de então, a chamada "Guerra Fria".

---

[32] Um exemplo neste sentido, é a coleção *Aulas de Matemática*, de *Gelson Iezzi e outros*, publicada em 1979 e escolhida para representar os anos 80 em nossa análise.

[33] Acreditamos também, que a presença de alguns livros em sebos, pode de certa forma, ajudar na evidência da adoção de tais livros nas escolas da época.

O Brasil, na segunda metade da década de 40, tem a liderança política nas mãos de um presidente de origem militar - Eurico Dutra - eleito pelo voto popular. Dutra implanta por meio de medidas econômicas, voltadas ao interesse liberal capitalista, uma política de menor intervenção estatal, favorecendo o crescimento industrial.

Parece claro que nessa década, o país viveu um período conturbado que oscilou entre a política repressiva de Vargas e a liberal de Dutra. Os reflexos dessa oscilação também podem ser sentidos no campo científico/cultural.

No campo do ensino da matemática, podemos perceber que os livros didáticos são escritos sob influência dos períodos anteriores e ao que tudo indica, os temas necessários para a compreensão do conceito de funções ganham, de uma forma ou de outra, um espaço definitivo no currículo da matemática escolar brasileira.

Nessa perspectiva, analisamos a seguir, o livro *Lições de Matemática*, de Algacyr Munhoz Maeder, em sua 9ª edição, datada de 1940, publicado pela Editora Melhoramentos[34], onde tentaremos assinalar alguns aspectos que nos chamaram a atenção na apresentação da representação gráfica de funções.

O livro de Maeder apresenta um fato curioso: a capa traz como ilustração um gráfico polar, usado em Estatística para representar séries temporais cíclicas.

---

[34] Ver o frontispício no Apêndice 4.

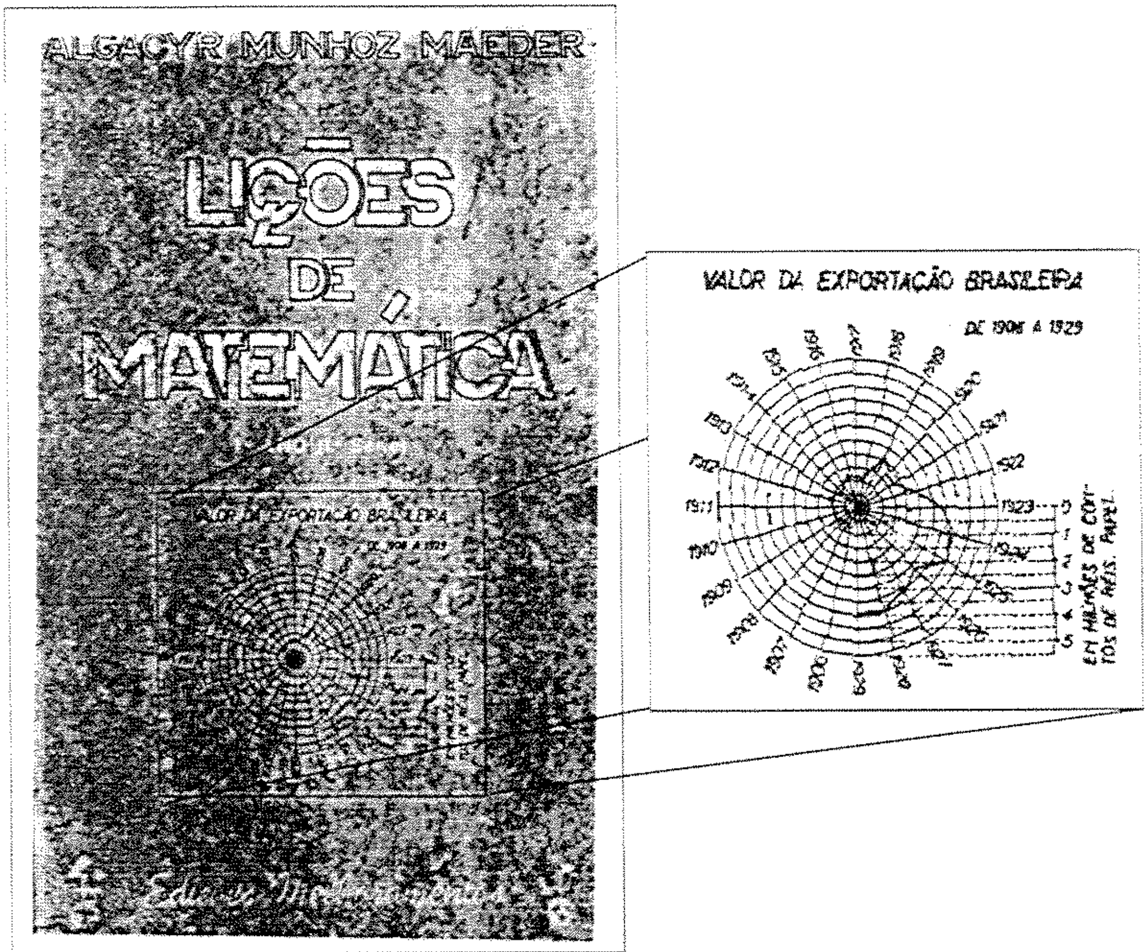


FIGURA 39– Gráfico Polar na Capa do livro *Lições de Matemática*, de Algacyr Munhoz Maeder, 1940.
FONTE: *Lições de Matemática*, Algacyr M. Maeder, Ed. Melhoramentos.

A 9ª edição traz o prefácio escrito pelo autor em sua 7ª edição. O autor faz nesse prefácio a apresentação dos tópicos a serem desenvolvidos, expondo também, a maneira pela qual pretende desenvolver o conceito de função:

> *No capítulo seguinte, além de estudarmos elementarmente os eixos coordenados, desenvolvemos a* ***representação gráfica de variações sucessivas de grandeza*** *dos dados geográficos, estatísticos e meteorológicos por nós considerados e todos atinentes ao nosso País, procurando assim formar* ***intuitivamente*** *no espírito do estudante a noção primeira de função. MAEDER (1940, p. IV) (os grifos são nossos)*

Parece natural reconhecer que para esse autor a representação gráfica assume papel auxiliador na formação dos primeiros conceitos de função por parte dos alunos. É válido, esclarecer que é o 1º livro de uma série, dirigido aos alunos num nível que hoje corresponde à 5ª série do ensino fundamental.

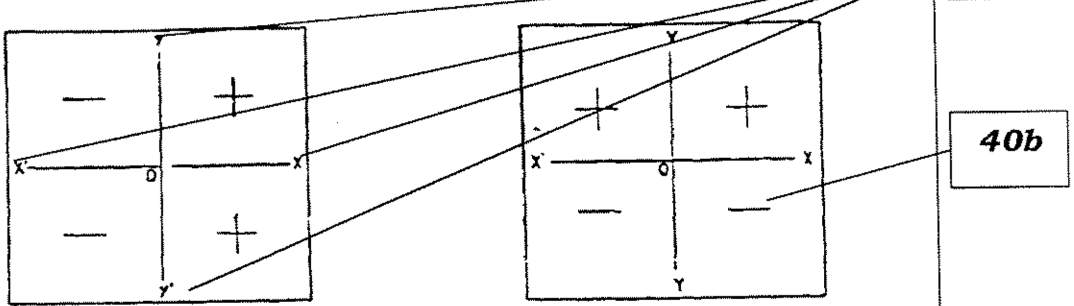
Quando se observa a postura do autor no que diz respeito às representações gráficas, confirmamos as afirmações encontradas no prefácio. As representações gráficas são encontradas num dos últimos capítulos e é interessante observar o tratamento cuidadoso, dado pelo autor, nas questões referentes a localização e determinação dos pontos no plano.

É interessante notar que ao trabalhar os eixos coordenados, o autor faz questão de representar cada eixo com duas orientações, a positiva representada pelas letras X ou Y, conforme o caso, e a negativa representada pelas leras X' e Y' (40a).

Maeder sustenta em sua exposição o conceito de quadrantes e tenta deixar claro quais são as variações de sinais em cada quadrante (40b), além de exemplificar algumas possibilidades quanto aos sinais das coordenadas dos pontos nos respectivos quadrantes (40c e 40d).

LIÇÕES DE MATEMÁTICA 315

40a



As ordenadas, por sua vez se distinguem pela situação relativa do ponto em relação ao eixo XX'. Assim, são *positivas* as ordenadas acima do eixo horizontal ou dos XX', e *negativas* as abaixo dêsse eixo.

E' isso que esquematicamente exprimem as figuras acima.

De posse de tais noções podemos agora representar qualquer ponto, e definí-lo com precisão em relação aos eixos coordenados.

486. **Determinação dum ponto.** — Considerados os eixos coordenados, vejamos como designar um ponto segundo a posição que êle ocupe relativamente aos eixos.

Sejam os pontos M, M', M" e M'''. O ponto M está no primeiro quadrante. As suas coordenadas são positivas, porque êle está acima do eixo dos XX' e à direita do eixo dos YY'. Medindo a sua distância aos eixos, pela unidade m, vemos que êle está a 4 unidades de XX' e a 3 unidades de YY'. E como êsses valores, por convenção são positivos, representâmo-lo assim

$$M \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

40c

ou $$M(+3, +4)$$

ou, simplesmente $$M(3; 4).$$

O ponto M' está no 2.º quadrante. A sua abcissa é negativa, a sua ordenada é positiva. Os valores das coordenadas são: $x = -4$ e $y = +5$.

40d

Representâmo-lo

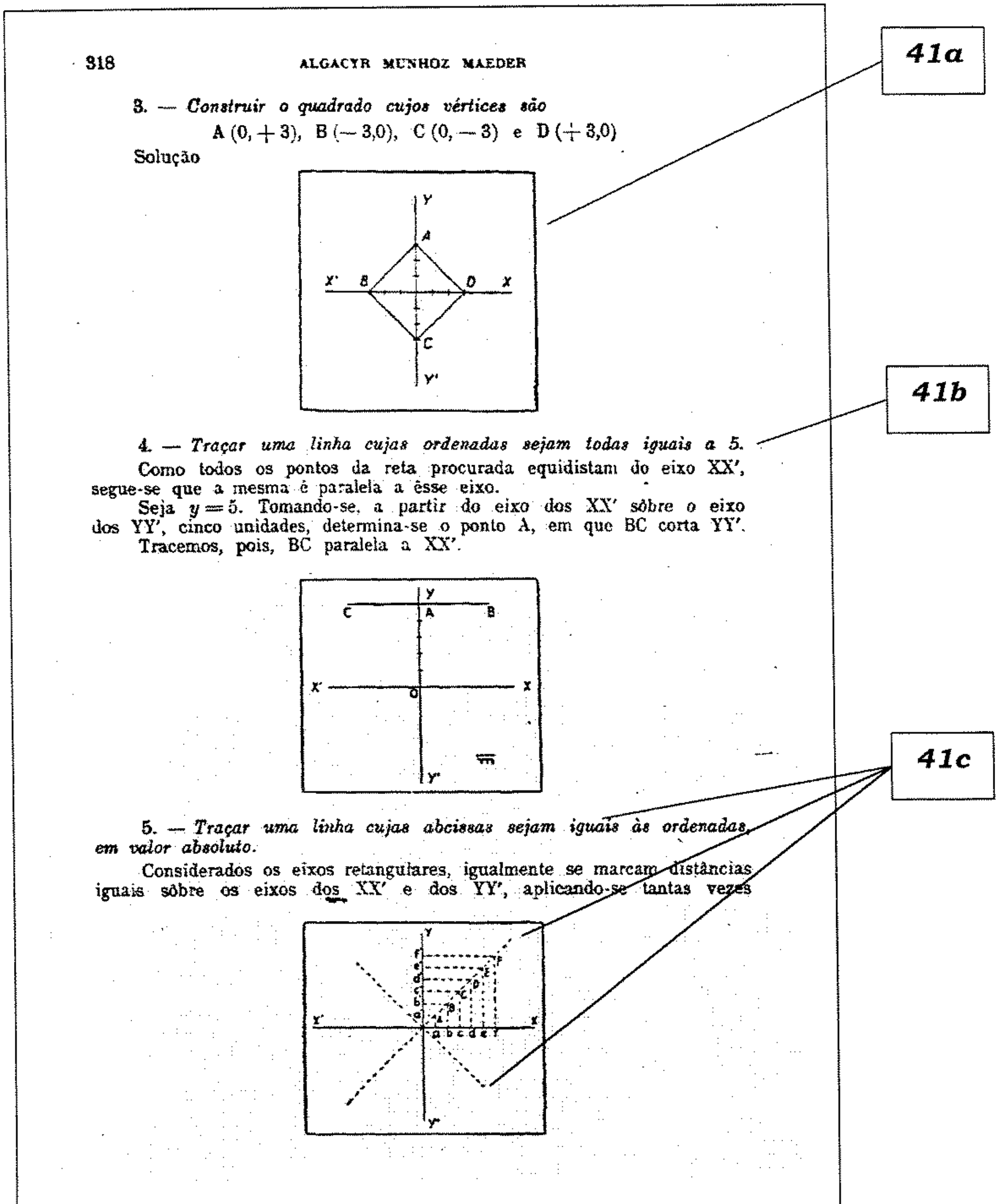
$$M' \begin{cases} x = -4 \\ y = +5 \end{cases}$$

ou $$M'(-4; +5),$$

ou $$M'(-4; 5)$$

FIGURA 40– Página 315,*Lições de Matemática*, Algacyr M. Maeder, 1940.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Na seqüência, dentre os exercícios propostos para esclarecer os conceitos relativos à localização dos pontos, encontramos alguns onde é explorada a idéia de formação de figuras geométricas a partir dos pontos no plano cartesiano (41a).



318 ALGACYR MUNHOZ MAEDER

3. — *Construir o quadrado cujos vértices são*
A (0, + 3), B (— 3,0), C (0, — 3) e D (+ 3,0)
Solução

4. — *Traçar uma linha cujas ordenadas sejam todas iguais a 5.*
Como todos os pontos da reta procurada equidistam do eixo XX', segue-se que a mesma é paralela a êsse eixo.
Seja $y = 5$. Tomando-se, a partir do eixo dos XX' sôbre o eixo dos YY', cinco unidades, determina-se o ponto A, em que BC corta YY'.
Tracemos, pois, BC paralela a XX'.

5. — *Traçar uma linha cujas abcissas sejam iguais às ordenadas, em valor absoluto.*
Considerados os eixos retangulares, igualmente se marcam distâncias iguais sôbre os eixos dos XX' e dos YY', aplicando-se tantas vezes

FIGURA 41 – Página 315,*Lições de Matemática*, Algacyr M. Maeder, 1940.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Maeder também explora em seus exercícios o traçado de retas paralelas aos eixos coordenados (41b), bem como as propriedades das coordenadas dos pontos pertencentes às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

Confirmando aquilo que expôs em seu prefácio, o autor explora a aplicação de alguns gráficos relacionados a situações cotidiana[35].

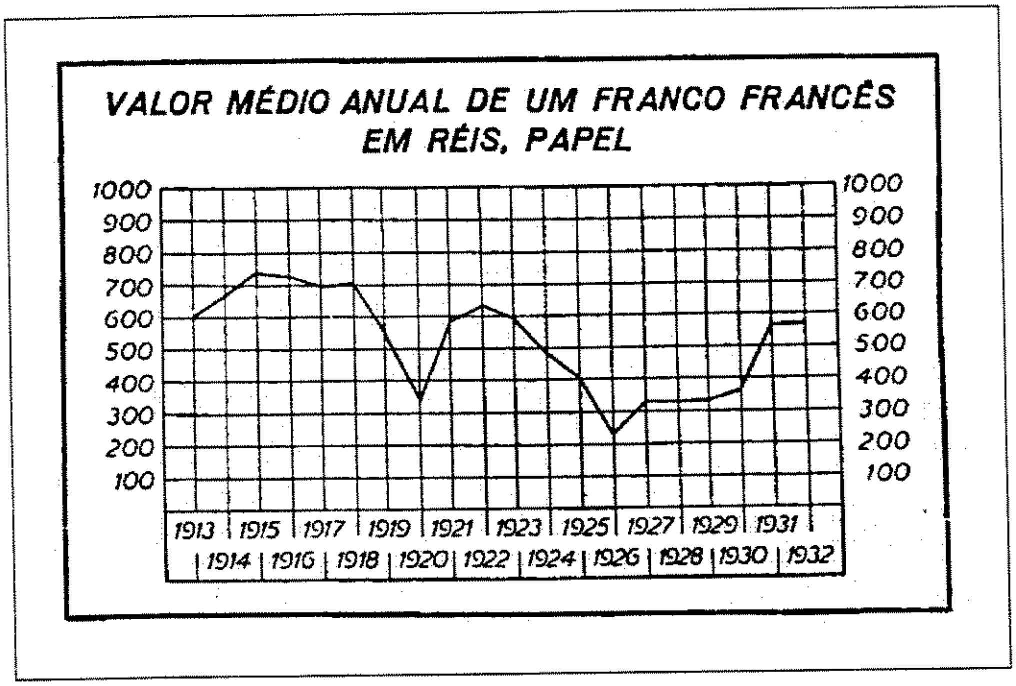


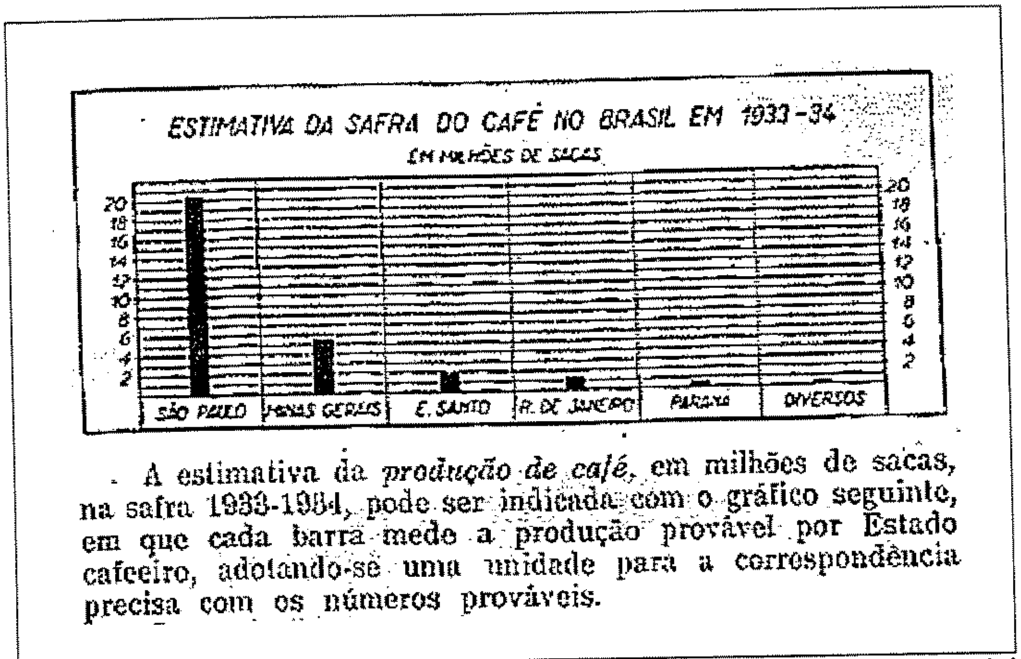
FIGURA 42 – Página 315,*Lições de Matemática*, Algacyr M. Maeder, 1940.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Então, parece claro que no trabalho de Maeder há uma certa valorização da representação gráfica com aspecto funcional associado a questões estatísticas, o que pode ser indicado como um dos diferenciais em relação à obra de Roxo analisada em nosso texto.

---

[35] Ver no Apêndice 4 outros gráficos com conotação prática, inclusive o gráfico da temperatura do doente, desenvolvido no livro da coleção F.T.D. analisados neste trabalho.

Na figura seguinte apresentamos outro gráfico cuja abordagem é claramente voltada às questões de ordem estatística.



A estimativa da *produção de café*, em milhões de sacas, na safra 1933-1934, pode ser indicada com o gráfico seguinte, em que cada barra mede a produção provável por Estado cafeeiro, adotando-se uma unidade para a correspondência precisa com os números prováveis.

FIGURA 43 – Gráfico Estatístico na página 324,*Lições de Matemática*, Algacyr M. Maeder, 1940.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

De um modo geral, além do tratamento estatístico dado aos gráficos, lembramos que a exposição detalhada dos conceitos relativos a determinação/localização de pontos no plano cartesiano são características que diferem o trabalho de Maeder do trabalho de Roxo.

Parece natural tentar investigar se há mudanças ou diferenças na postura assumida pelos escritores em relação à exposição dos conteúdos para diferentes séries escolares. Podemos também tentar investigar quais a possíveis mudanças na escrita do autor com o passar dos anos.

Analisando as obras de Maeder, pudemos perceber mudanças na exposição didática do autor em obras de diferentes períodos, ou ainda, de diferentes séries de ensino.

Assim, expomos a seguir outras representações gráficas desenvolvidas por Maeder no livro *Curso de Matemática*[36], publicado em 1946. Esclarecemos que as diferenças apresentadas a seguir cumprem apenas o papel de exemplificar e enriquecer nosso texto, pois o livro de 1946 é dirigido aos alunos que cursavam o 1º ano do ciclo colegial, eqüivalendo hoje à 1ª série do ensino médio.

Antes porém de refletirmos sobre as representações encontradas no livro de 1946, devemos lembrar que no ano de 1942, ocorreu a reforma do ensino secundário, sendo o Ministro Gustavo Capanema um dos seus idealizadores. ROMANELLI (1980, p. 157), interpreta o texto da Lei Orgânica do Ensino Secundário promulgada em 9 de abril de 1942 nas seguintes palavras:

> *Em síntese, a julgar pelo texto da lei, o ensino secundário deveria:*
> *a) proporcionar cultura geral e humanística;*
> *b) alimentar uma ideologia política definida em termos do patriotismo e nacionalismo de caráter fascista;*
> *c) proporcionar condições para ingresso no curso superior;*
> *d) possibilitar a formação de lideranças.*

ROMANELLI (1980, p. 158) após analisar a distribuição das disciplinas, esclarece ainda, o caráter que o curso secundário passava a assumir:

> *Era indisfarçável, como se vê, o caráter de cultura geral e humanística dos currículos, mesmo no curso chamado científico. Além disso, sobressaíam, nos dois níveis, uma preocupação excessivamente enciclopédica e ausência de distinção substancial entre os dois cursos: o clássico e o científico. Finalmente, o currículo não era diversificado, nem sequer quanto aos níveis, sendo praticamente as mesmas as disciplinas em quase todas as séries.*

---

36 Ver frontispício no Apêndice 4.

Tais colocações podem, de certa forma, melhor contextualizar a breve análise que faremos a seguir, bem como ajudar na análise que faremos nas etapas seguintes.

Então, voltando nossas atenções ao *Curso de Matemática*, de 1946, entendemos pela palavras de Maeder, como estava estruturada o seu texto:

> *Seguindo rigorosamente o programa oficial vigente, reunimos no presente volume, tôda a matéria que se deve ventilar nos curso clássicos e científico, cujos programas se distinguem apenas em poucos pontos, isto é, no curso científico, são exigidos mais alguns dêles.*
>
> *A matéria consta de três partes distintas: Aritmética teórica, Álgebra e Geometria dedutiva, as quais, como é mister, são aqui tratadas em partes nitidamente separadas. MAEDER,(1946, prefácio)*

Pela análise geral do texto de Maeder, percebemos que as representações gráficas são apresentadas desvinculadas das situações práticas. Notamos a preocupação do autor em desenvolver apenas, os gráficos de funções elementares como $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ .e $y = \frac{1}{x^2}$.

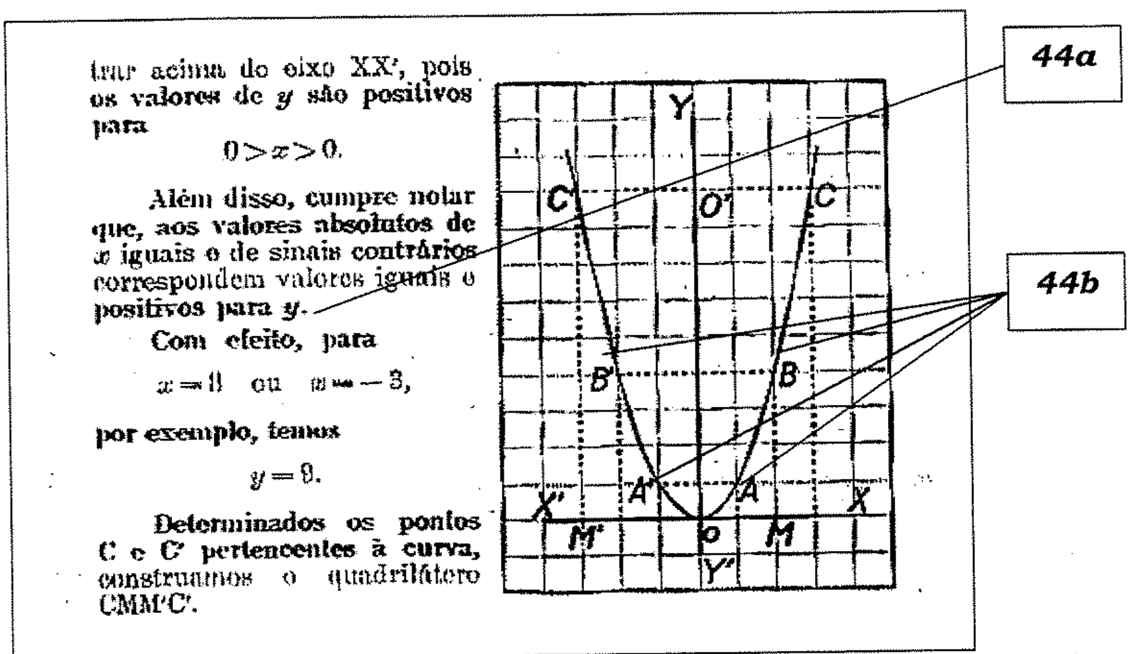


FIGURA44 – Parte da página 245, *Curso de Matemática*, Maeder, 1946.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Tanto na construção da parábola $y = x^2$, como no traçado das curvas das funções $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$.e $y = \frac{1}{x^2}$, Maeder trabalha centrado na questão da simetria dos pontos. Para a função $y = x^2$ (44a e 44b) e $y = \frac{1}{x^2}$, simetria em relação ao eixo y, para a função $y = x^3$ da simetria em relação a origem dos eixos[37], e para a função $y = \frac{1}{x}$, simetria em relação a bissetriz dos quadrantes pares. Ao que parece, o autor trata desses gráficos elementares para no final generalizar qual a forma do gráfico da funções potência, $y = x^m$, hiperbólica, $y = \frac{1}{x^m}$, de acordo com os possíveis valores naturais de *m*.

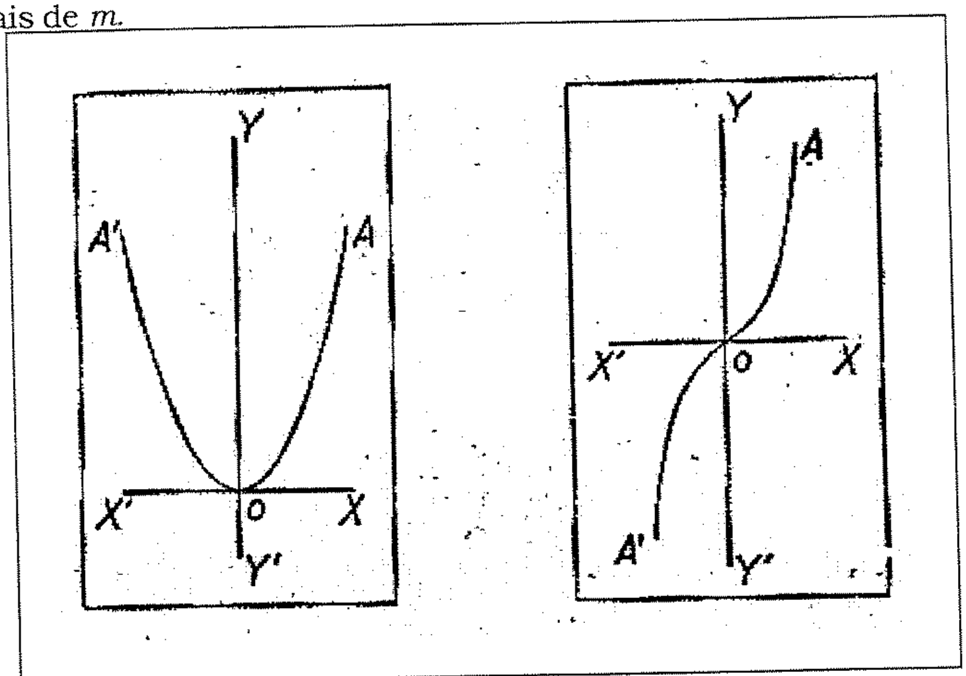


FIGURA 45 – Gráfico das funções $y = x^2$ e $y = x^3$, página 248, *Curso de Matemática*, Algacyr M. Maeder, 1946.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

37 Ver apêndice 4.

Podemos dizer que esta obra difere da analisada anteriormente pois temos um trabalho gráfico voltado para a generalização de curvas clássicas, em detrimento das possíveis aplicações e representações gráficas voltadas para situações cotidianas.

6. Representações Gráficas nos Anos 50: Thales Mello Carvalho

Na primeira metade dos anos 50, o Brasil foi marcado pela volta de Vargas ao poder o que significou a retomada de projetos de desenvolvimento, direcionados principalmente para os setores da indústria de base. Com o retorno de Vargas, configurou-se novamente no campo econômico, uma política nacionalista e de intervenção estatal. Os conflitos de interesses e entre a oposição e o governo, aliado às tensões sociais e pressões dos representantes dos setores liberais da economia, de certa forma, culminaram no episódio do suicídio de Vargas em 1954.

No campo político, foram conturbados os dois anos que precederam à posse, em 1956, de Juscelino Kubitschek. No governo de Kubitschek são acentuados o crescimento da economia e o desenvolvimento industrial brasileiro, incitado pelos moldes e influência da política norte-americana.

A década de 50 é marcada no campo da educação pelo aumento do número de escolas, bem como, pelo crescimento do ensino secundário suprindo as necessidades da classe média neste segmento da educação. Entretanto, se levarmos em conta a pequena queda percentual do analfabetismo associada a fatores como o crescimento populacional e a concentração da população nas cidades, podemos, de certa forma, afirmar que o ensino voltado para as classes sociais menos favorecidas, foi deficitário nessa década.

Ao que parece, a abordagem das representações gráficas no ensino secundário da segunda metade da década de 40 era feita com um enfoque menos voltado às aplicações práticas e mais voltada a cultura geral e enciclopédica, o que pode ser verificado, de certa forma, pela análise do livro *Curso de Matemática*, publicado em 1946 por Maeder, além de ser considerado o caráter enciclopédico dos currículos determinados pela Reforma Capanema, de 1942.

Como sabemos, a Reforma Capanema subdividiu o curso secundário em duas opções curriculares denominadas Curso Clássico e Curso Científico. Nesse sentido, buscaremos entender nessa e na próxima etapa, como se dava a abordagem das representações gráficas de funções nesse novo ambiente de ensino.

Para a análise da representação gráfica de funções na década de 50 escolhemos o livro *Matemática – Terceiro Ano Colegial* – de Thales Mello Carvalho[38], em sua 4ª edição, de 1954[39].

O primeiro fato interessante que pudemos perceber na exposição de Carvalho é o cuidado em definir função de maneira unívoca:

> *Sejam* x *e* y *duas variáveis reais. Se a cada valor do domínio de* x *se pode fazer corresponder, por um processo qualquer,* ***um e apenas um*** *valor do domínio* y, *diz-se que* y é função real unívoca *ou* uniforme *de* x. CARVALHO (1954, p. 32). (os grifos são nossos)

Outras preocupações do autor situam-se na questão do domínio e da classificação das funções.

---

38 Ver frontispício no Apêndice 5.

39 Analisamos também, do mesmos autor, o livro *Matemática - Primeiro Ano Colegial – 14ª Edição – 1957* – e encontramos apenas 5 páginas contendo gráficos – em especial, das funções exponenciais e logarítmicas.

Para representação gráfica o autor se vale de uma breve explicação a respeito da determinação dos pontos, fazendo logo em seguida representação gráfica da função de variável inteira, $y = 2x$ (FIG 46a), da função de variáveis reais $y = x^2$ (FIG 46b) e da função de Dirichlet(FIG 46c).

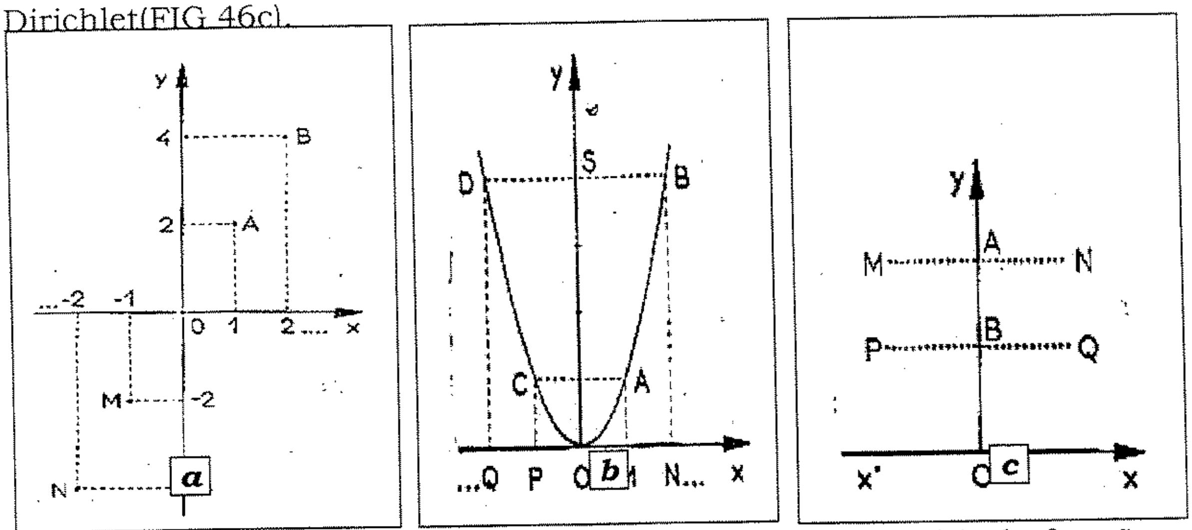


FIGURA 46 – Gráficos da função de variável inteira, $y = 2x$ (a), da função de real $y = x^2$ (b) e da função de Dirichlet (c), da páginas 37 e 38, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Parece claro, que a abordagem adotada pelo autor privilegia conceitos voltados para o ensino superior. Isso poderá ser verificado em quase toda a obra de Carvalho.

Na seqüência encontramos representações gráficas desenvolvidas para auxiliar nas explicações a respeito de limites[40].

Estudando o limite da função $f(x) = 2x - 2$, para $x \to 3$, o autor usa a representação gráfica tentando esclarecer os argumentos algébricos desenvolvidos. Notamos, que a leitura da representação gráfica deve ser feita de maneira ampla, pois o aluno deve investigar o comportamento da função no eixo y, com $4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$ (47a), com a ajuda da explicação de Carvalho que utiliza figura como um argumento retórico(47b), estabelecendo

---

[40] Ver Apêndice 5.

também, a investigação dos possíveis valores de x no intervalo real, $3 - \delta < x < 3 + \delta$ (47c).

Os resultados (7) e (8) mostram que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}, 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, se verifica a condição (6).

Em conclusão, podemos dizer que, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número positivo δ, tal que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, se verifica a condição (6). Êste resultado torna-se mais compreensível à luz da fig. 10, onde a reta AB é a representação gráfica da função (4).

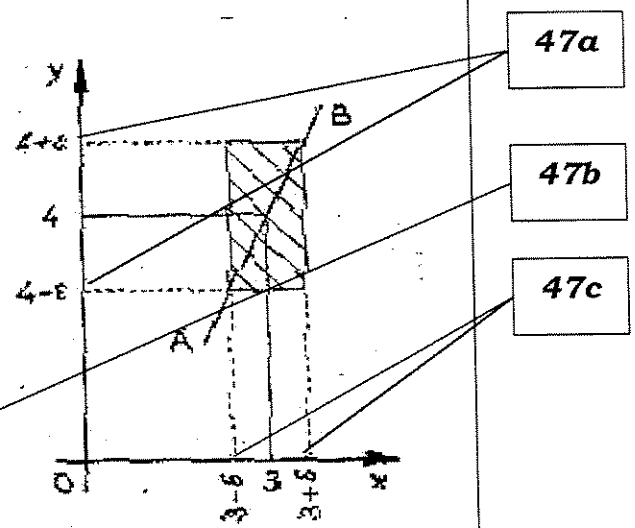


FIG. 10

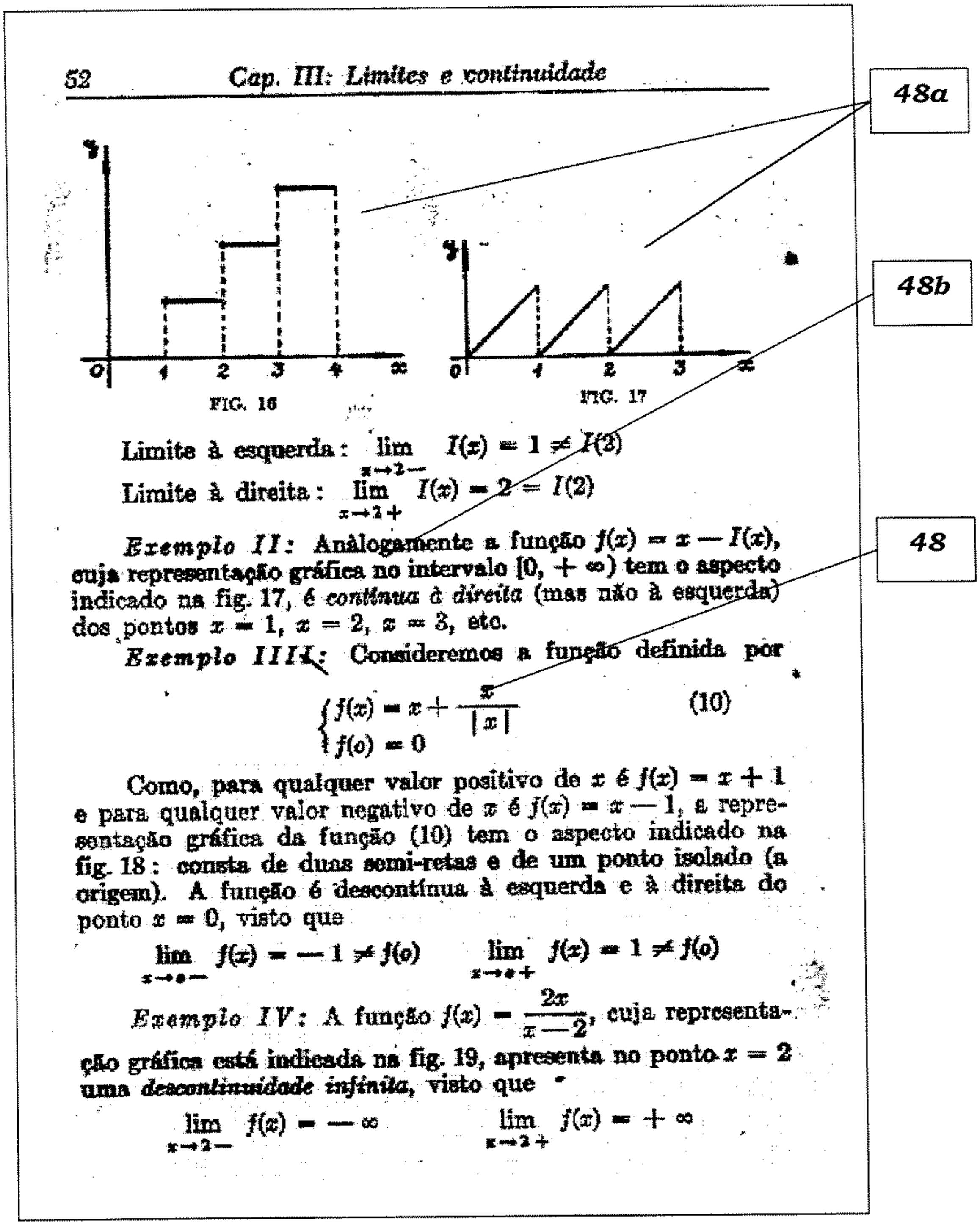
Por êle vê-se que, para qualquer valor de x do intervalo considerado, o ponto correspondente do gráfico da função está situado no retângulo tracejado, isto é, verifica-se a condição (6).

FIGURA 47 – Parte da página 45, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Carvalho ainda investiga a questão da continuidade de funções, esboçando na página 52 os gráficos de funções contínuas por partes (48a), explora a continuidade da função nas vizinhanças os pontos de descontinuidade (48b), além de propor (48c) e representar graficamente na página 53, funções bastante interessantes, como

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x}{|x|} \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ e } f(x) = \frac{2x}{x-2}.$$ [41]

[41] Ver Apêndice 5



52 *Cap. III: Limites e continuidade*

FIG. 16

FIG. 17

Limite à esquerda: $\lim_{x \to 2-} I(x) = 1 \neq I(2)$

Limite à direita: $\lim_{x \to 2+} I(x) = 2 = I(2)$

Exemplo II: Anàlogamente a função $f(x) = x - I(x)$, cuja representação gráfica no intervalo $[0, +\infty)$ tem o aspecto indicado na fig. 17, *é contínua à direita* (mas não à esquerda) dos pontos $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc.

Exemplo III: Consideremos a função definida por

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x}{|x|} \\ f(o) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Como, para qualquer valor positivo de x é $f(x) = x + 1$ e para qualquer valor negativo de x é $f(x) = x - 1$, a representação gráfica da função (10) tem o aspecto indicado na fig. 18: consta de duas semi-retas e de um ponto isolado (a origem). A função é descontínua à esquerda e à direita do ponto $x = 0$, visto que

$$\lim_{x \to o-} f(x) = -1 \neq f(o) \qquad \lim_{x \to o+} f(x) = 1 \neq f(o)$$

Exemplo IV: A função $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, cuja representação gráfica está indicada na fig. 19, apresenta no ponto $x = 2$ uma *descontinuidade infinita*, visto que

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+} f(x) = +\infty$$

FIGURA 48 – Página 52, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.

FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Como observamos, as representações gráficas estão presentes nos exemplos desenvolvidos pelo autor, mas vale esclarecer que o autor opta também pelas representações gráficas no enunciado das definições , teoremas ou generalizações.

Na figura 49 podemos observar o aspecto de generalidade que o autor dá à representação gráfica ao estudar a unicidade dos limites.

6. Unicidade do limite. Se uma função (unívoca) tem um limite num ponto a, êsse limite é *único*, ou, em outras palavras, uma função (unívoca) não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto a. Vejamos, de um modo intuitivo, essa propriedade, habitualmente designada por *teorema da unicidade do limite*.

De fato, uma função $f(x)$ não poderia ter dois limites distintos L e L' num ponto $x = a$ (fig. 20), porque, escolhido convenientemente um ε positivo tal que, os intervalos $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ e $[L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ (intervalos AB e CD, respectivamente) não tivessem pontos comuns, não haveria a possibilidade de, num entôrno do ponto a, os pontos representativos de *todos* os valores da função estarem simultâneamente naqueles intervalos.

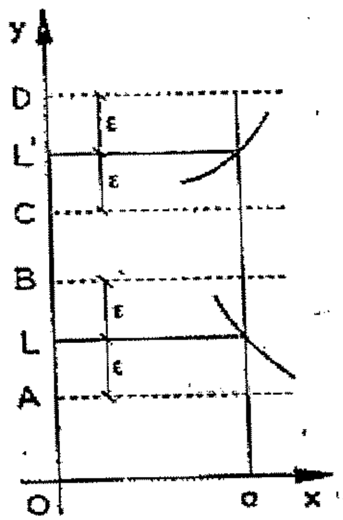


FIG. 20

FIGURA 49 – Representação gráfica da unicidade dos limites, página 53, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Então, parece claro, que as representações gráficas na obra de Carvalho são feitas para auxiliar o desenvolvimento da teoria bem como para esclarecer/convencer o leitor sobre a validade dos argumentos expostos.

O papel retórico da representação gráfica pode ser melhor percebido na enunciação/apresentação de alguns teoremas.

Podemos observar pelo desenvolvimento de alguns tópicos, que Carvalho, ao que parece, vale-se das representações gráficas para a validação de algumas propriedades consideradas intuitivas, usando tais representações como ferramentas de cunho retórico.

Cap. III: Limites e continuidade 67

23. Teorema da existência do zero. *Se uma função é contínua no intervalo (fechado) $[a, b]$ e se nos extremos dêsse intervalo assume valores de sinais contrários, existe pelo menos um ponto interior dêsse intervalo no qual a função é nula.*

Esta propriedade é intuitiva, pois, sendo a representação gráfica da função no intervalo $[a, b]$ uma linha AB (fig. 23), esta não poderá unir dois pontos A e B situados em semiplanos diferentes determinados pelo eixo Ox sem atravessar êste eixo (*)

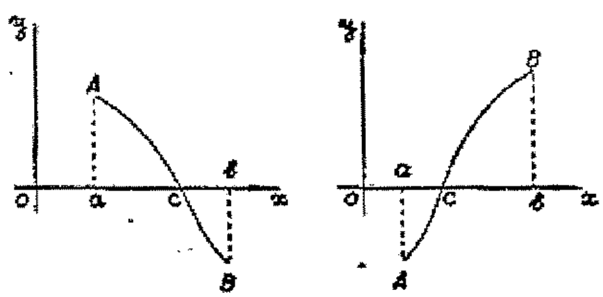


FIG. 23

Do teorema da existência do zero, resulta imediatamente o seguinte:

Uma função contínua num intervalo (fechado) $[a, b]$ assume nêsse intervalo, pelo menos uma vez, qualquer valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$.

FIGURA 50 – Representação gráfica do teorema da existência do zero, página 67, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos

Como boa parte dos autores de livros daquela época, Carvalho desenvolve, na seqüência, os principais conceitos a respeito das derivadas valendo-se das representações gráfica para interpretar o significado geométrico das derivadas, explorar a questão da derivabilidade e continuidade, bem como, estudar os máximos e mínimos de uma função.[42]

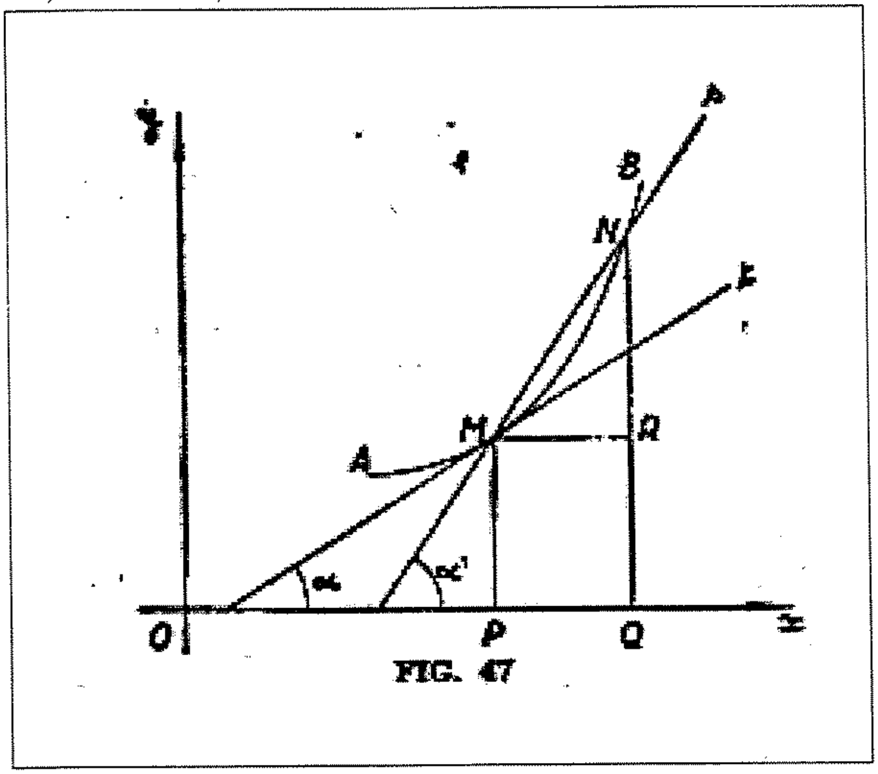


FIGURA 51 – Representação gráfica do teorema da existência do zero, página 67, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares- Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos.

Vale lembrar que, embora existam várias representações gráficas nessa obra, a discussão algébrica é o que predomina no discurso do autor, que se vale de uma linguagem bastante formal.

Embora a obra de Carvalho seja desenvolvida usando notação e conceitos bastante modernos, ainda é perceptível, de certa forma, a influência sutil dos textos das coleções F.I.C. e F.T.D.. Tal influência pode ser revelada na discussão das funções racionais, bem como na construção de seus gráficos, por meio da derivada.

---

[42] Ver Apêndice 5.

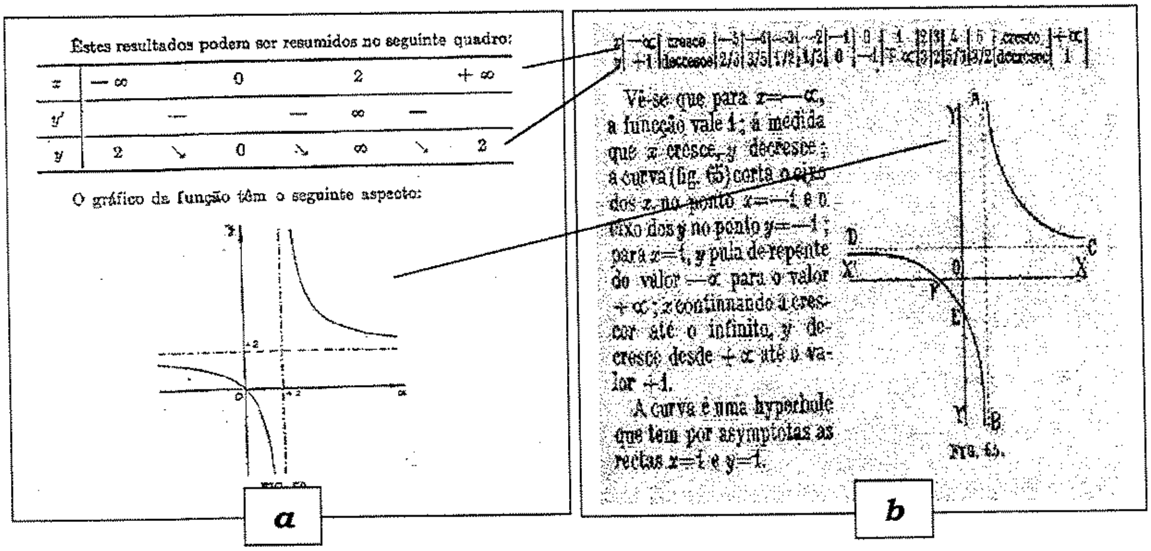


FIGURA 52 – Comparação entre as representações gráficas das obras *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954, página 173 (52a), e *Álgebra Elementar de – FTD* – 1921, página 361 (52b).
FONTE:(52a) Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos, e (52b) e exemplar pertencente ao Prof. José C. Putnoki.

Enfim, sempre que necessário para seu estudo analítico, o autor explora as representações gráficas, o que ocorre também quando o autor quer demonstrar o cálculo da integral como limite de uma soma.

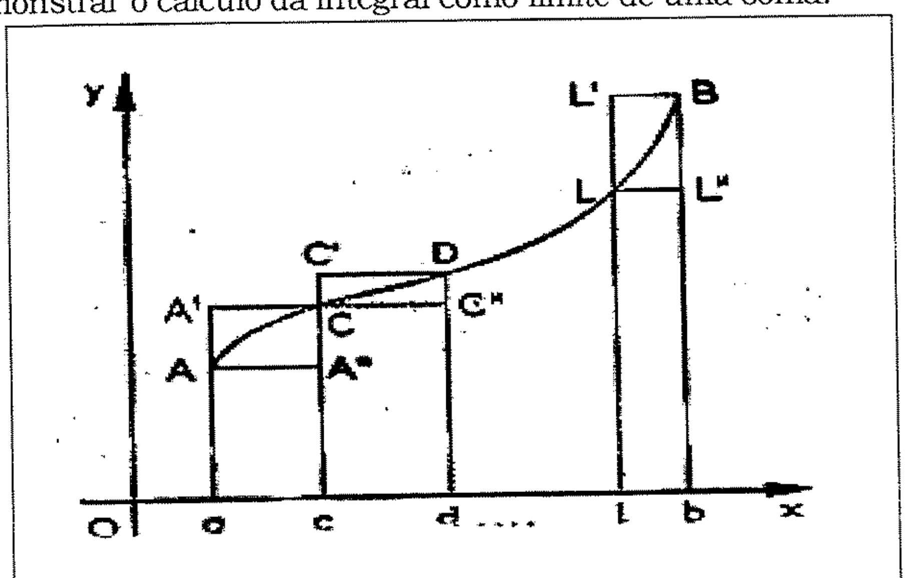


FIGURA 53 – Representação gráfica do teorema da existência do zero, página 67, *Matemática*, 3º ano colegial – Thales MelloCarvalho, 1954.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares- Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos.

Como pudemos perceber, tal livro vai ao encontro das metas propostas pela reforma de 1942, ou seja, prepara o aluno do nível secundário para o ingresso na faculdade, onde terá contato maior com assuntos relativos ao Cálculo. Assim, não é de se estranhar a grande atenção que o autor dá para os conceitos fundamentais do Cálculo, trabalhando os limites, derivadas e integrais. Notamos que houve, por parte de Carvalho a preocupação em representar graficamente a maioria dos conceitos desenvolvidos em seu texto. Parece natural então, supor que os gráficos neste caso, assumiram um papel auxiliar no desenvolvimento didático das principais idéias desenvolvidas pelo autor.

CAPÍTULO 4

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES APÓS 1960

> *Então se você trabalha, por exemplo com conceitos de Física, ou conceito de Química, uma reação química na presença de luz. A velocidade dessa reação na presença de luz ou na ausência de luz, o que acontece com o gráfico? Você ler, você interpretar isso, eu acho importante. Eu acho importante sim; quanto mais, os exercícios mais próximos da realidade deles, melhor!*
>
> *Profª Eliana Maria Zanuni.*

> *Ter noção de plano, você pega um aluno que vai mexer num micro, por exemplo, num software de edição gráfica, um Corel Draw, Page Maker ou qualquer coisa parecida, se ele não tem noção de plano cartesiano ele não faz nada! Ele não faz nada! Entendeu? Até ele perceber ali, movimentação do ângulo no plano, do ponto, da reta; dos desenhos que ele faz, localização de cada um deles. Ele vai sofrer pra 'caramba'. Se ele tiver noção de plano cartesiano, ele está lá na frente! Deixou todos os outros que não sabem matemática para trás; eu acredito que o caminho é esse!*
>
> *Prof. Marcos Fernando Silveira Orlando*

1. Representações Gráficas nos Anos 60: Manoel Jairo Bezerra

No Brasil, os anos 60 são marcados por profundas mudanças políticas e embora o país tenha obtido um considerável crescimento econômico, tal crescimento foi acompanhado do aprofundamento das desigualdades regionais e sociais. Aumento do custo de vida, altas taxas de inflação, queda do Produto Interno Bruto, são simples exemplos dos inúmeros fatores que contribuíram para o agravar as tensões sociais seguidas de conturbações civis. Frente a esse quadro de instabilidade social é realizado em 1964 o Golpe Civil-Militar, tomando posse, como primeiro presidente da ditadura militar o General Humberto de Alencar Castelo Branco. O governo de Castelo Branco e os governos militares seguintes, com os poderes centralizados no Executivo, estabeleceram metas para a retomada do crescimento econômico.

Em WEREBE (1994, p. 75) encontramos a caracterização do período de ditadura militar instaurada na década de 60:

> *Ao invés de uma pretendida revolução de esquerda, o que ocorreu foi um golpe militar de direita, em 31 de março de 1964, dando início a uma fase negra de nossa história, com a instituição de uma ditadura que durou 21 anos e que pôs um termo às liberdades democráticas, estabelecendo no país um regime de violenta repressão em arbitrariedades.*

No campo científico-cultural um dos reflexos percebidos durante os anos de ditadura militar foi a êxodo de intelectuais e cientistas e segundo WEREBE (1994, p. 79):

> *Os prejuízos causados à ciência e à cultura brasileira pelo êxodo de grande número de cientistas e intelectuais, em virtude das perseguições políticas do regime, foram indiscutivelmente enormes. Para um país como o Brasil essa perda constituiu um desperdício inestimável.*

Vale ressaltar que um dos principais países para onde migraram os cientistas brasileiros, foi os Estados Unidos. WEREBE (1994).

Desde o final da década de 50, por ocasião da corrida espacial-armamentista, é percebida a desvantagem tecnológica norte-americana em relação à soviética. A necessidade urgente da formação de novos cientistas remete os Estados Unidos a uma ampla discussão do ensino das ciências e da matemática.

As discussões sobre os novos caminhos para o ensino da matemática caracterizariam na década de 60 o conhecido "Movimento da Matemática Moderna". Uma caracterização mais precisa desse movimento, bem como seus reflexos no ensino brasileiro, podem ser encontradas em MIORIM (1995, p. 6):

> *Essa proposta de "modernização" que seria reforçada por estudos psicológicos contemporâneos, especialmente pelos de Jean Piaget, viria a ser implantada na maior parte dos países[2] e alteraria radicalmente a fisionomia de nossas escolas.*
>
> *No ensino brasileiro, essas idéias modernistas iriam aos poucos sendo introduzidas; particularmente por meio dos cursos oferecidos pelos recém criados Grupos de Estudos de Ensino de Matemática[3] e pela publicação de livros didáticos que seguiam a moderna orientação; e desencadeariam, já a partir da década de 60, um processo de implantação da matemática moderna nas escolas brasileiras.*

Para entendermos melhor as dimensões assumidas pelo Movimento da Matemática Moderna recorremos novamente as observações feitas por MIORIM (1995, p.6):

> *Em nenhum outro momento, o ensino de matemática seria tão discutido, divulgado e comentado como naquele período. Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos "aprendiam" a matemática moderna.*

São as dimensões assumidas pelo movimento da matemática moderna que nos remete a discutir neste capítulo, como se configurou o ensino das representações gráfica após os anos 60.

Primeiramente vale lembrar, que por meio da Matemática Moderna, tentou-se estruturar a disposição didática dos conteúdos matemáticos, pressupondo primeiramente a abordagem dos assuntos mais simples para, na seqüência, serem apresentados os mais complicados. Em outras palavras, a exposição das matérias deveria seguir uma estrutura de apresentação cartesiana, onde os temas eram dispostos numa seqüência de elaboração/complexidade crescente. De certa forma, cada tópico estudado estava relacionados aos anteriores, porém, possuiam identidade própria em sua unidade temática.

Poderemos perceber a seguir que a representação gráfica de funções praticamente manteve as mesmas características de desenvolvimento/exposição em relação à década anterior - pelo menos no livro escolhido para nossa análise. Na verdade, podemos dizer que no livro escolhido para a década de 60 houve um ligeiro retrocesso quantitativo na apresentação das representações gráficas. É fato, que mudanças mais significativas poderão ser percebidas nos livros das décadas de 70, 80 e 90, analisados nas próximas etapas.

Analisamos o livro *Curso de Matemática* de Manoel Jairo Bezerra, em sua 5ª edição, 1961, como o representante da década de 60[1], editado pela Companhia Editora Nacional – São Paulo.

O livro de Bezerra, traz em único volume, todo o conteúdo a ser desenvolvido nos Cursos Clássicos e Científicos.

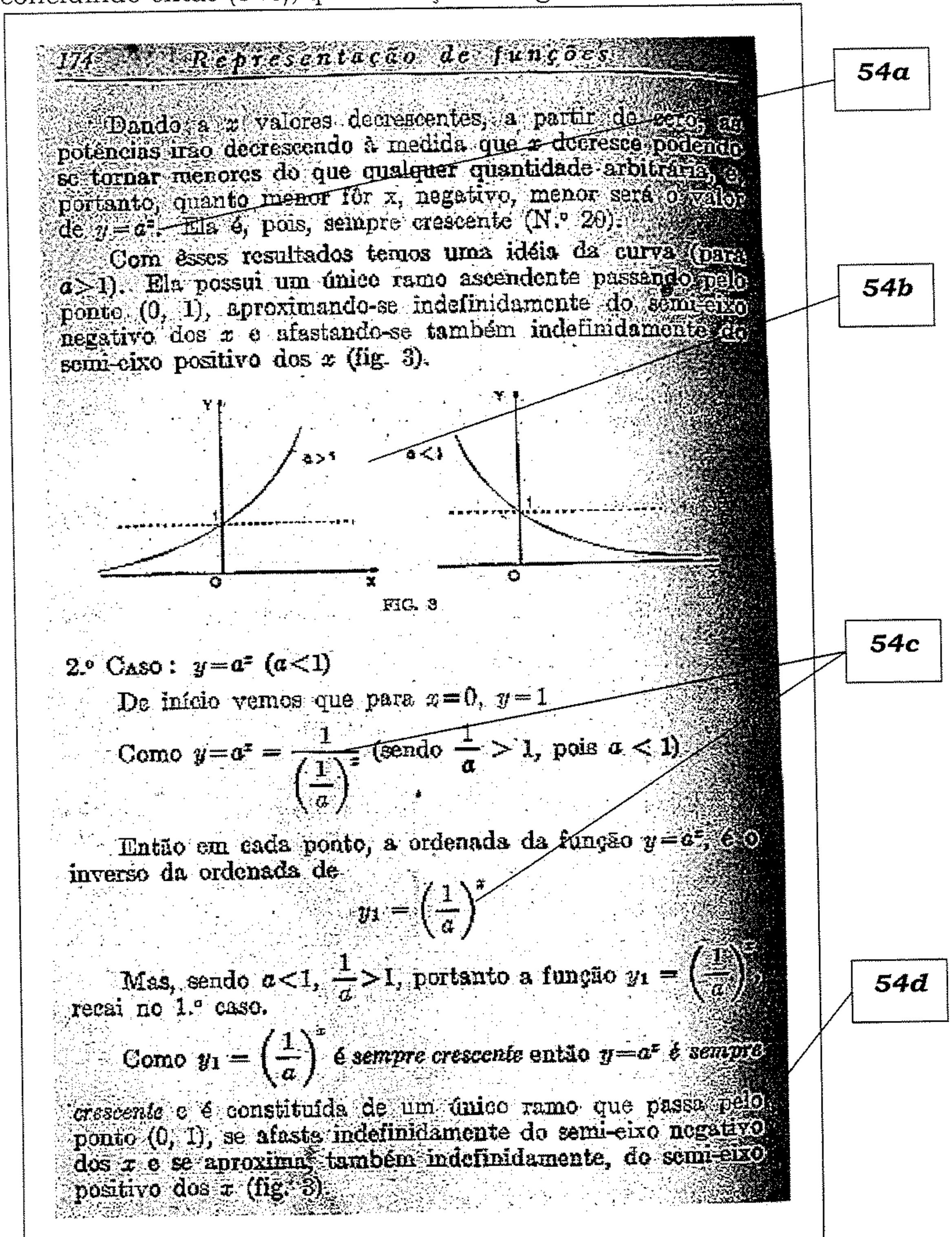
Neste livro, as representações gráficas aparecem em um número inferior ao verificado no livro analisado para a década de 50, bem como por meio de uma apresentação mais simplificada que a desenvolvida por Carvalho.

Ao que parece, toda obra é escrita de maneira resumida e é interessante notar que as primeiras representações gráficas aparecem no conteúdo a ser desenvolvido na Álgebra do 3º ano. Tratam-se das representações gráficas da função exponencial $y = a^x$ (54a), onde Bezerra, discute o crescimento da função, caso $a>0$, e o traçado da curva caracterizando a assintota ao eixo x, para valores negativos de x (54b). Na discussão do caso onde $0<a<1$, o autor procura associar a

---

[1] Tivemos também a oportunidade de analisar os livros *Matemática, curso moderno, para os ginásios, 1º volume,* 10ª edição, 1968, e o livro *Matemática para a segunda série ginasial,* 96ª edição, 1963, ambos de *Osvaldo Sangiorgi*, e não encontramos sequer, uma única representação gráfica.

discussão ao primeiro caso tomando para *base* o inverso de a concluindo então (54c), qual o traçado do gráficos da função (54d).



174 Representação de funções

Dando a x valores decrescentes, a partir de zero, as potências irão decrescendo à medida que x decresce podendo se tornar menores do que qualquer quantidade arbitrária, e, portanto, quanto menor fôr x, negativo, menor será o valor de $y=a^x$. Ela é, pois, sempre crescente (N.º 20).

Com êsses resultados temos uma idéia da curva (para $a>1$). Ela possui um único ramo ascendente passando pelo ponto (0, 1), aproximando-se indefinidamente do semi-eixo negativo dos x e afastando-se também indefinidamente do semi-eixo positivo dos x (fig. 3).

FIG. 3

2.º Caso: $y=a^x$ $(a<1)$

De início vemos que para $x=0$, $y=1$

Como $y=a^x=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$ (sendo $\dfrac{1}{a}>1$, pois $a<1$)

Então em cada ponto, a ordenada da função $y=a^x$, é o inverso da ordenada de

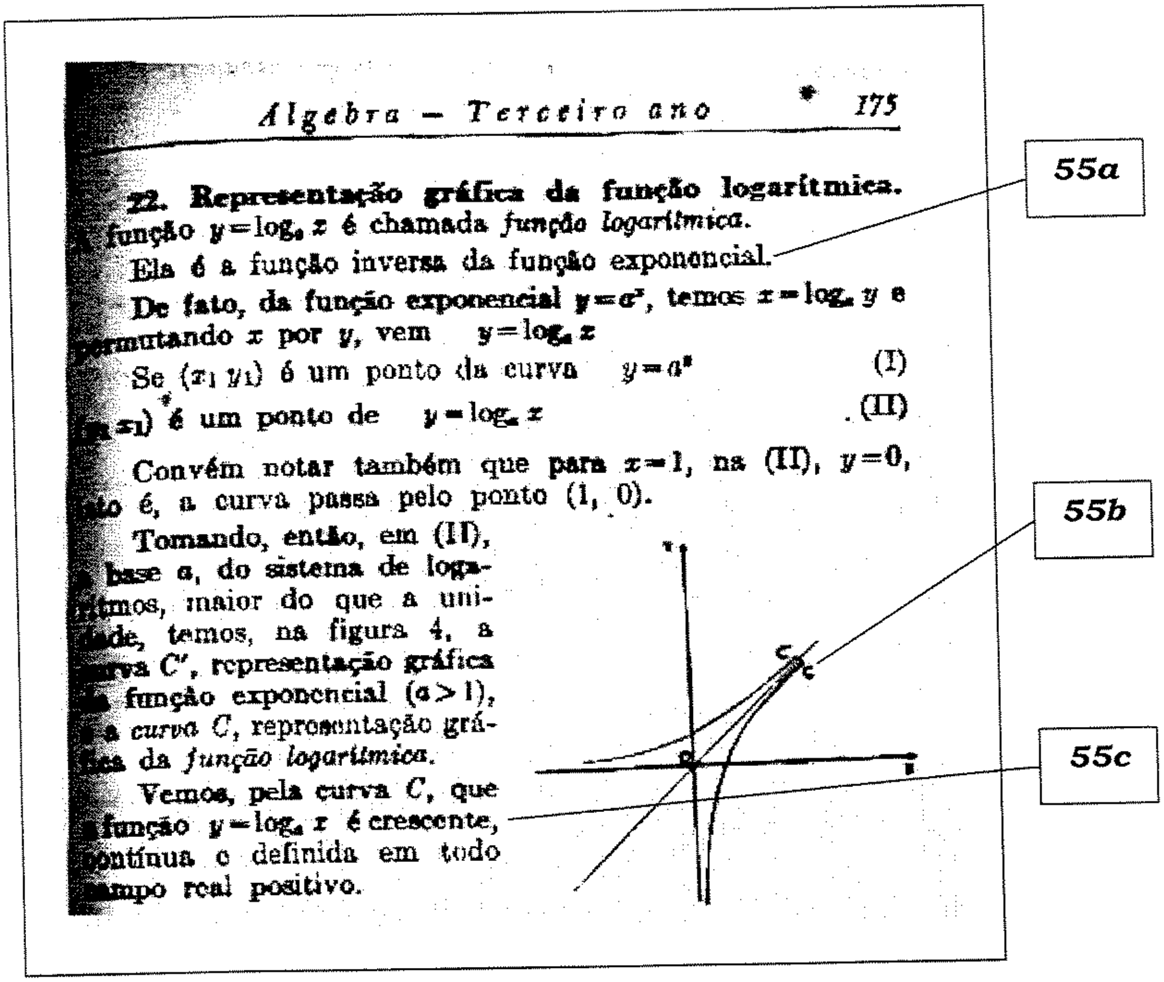
$$y_1=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Mas, sendo $a<1$, $\dfrac{1}{a}>1$, portanto a função $y_1=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ recai no 1.º caso.

Como $y_1=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ *é sempre crescente* então $y=a^x$ *é sempre crescente* e é constituída de um único ramo que passa pelo ponto (0, 1), se afasta indefinidamente do semi-eixo negativo dos x e se aproxima também indefinidamente, do semi-eixo positivo dos x (fig. 3).

FIGURA 54 – Gráficos da função exponencial.
FONTE: Página 174, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Na seqüência, partindo do fato que a função logarítmica é a inversa da função exponencial (55a), o autor procura expor seu gráfico (55b) e discutir de maneira resumida o crescimento/decrescimento da função(55c).



Álgebra — Terceiro ano 175

22. Representação gráfica da função logarítmica. função $y=\log_a x$ é chamada *função logarítmica*.

Ela é a função inversa da função exponencial.

De fato, da função exponencial $y=a^x$, temos $x=\log_a y$ e rmutando x por y, vem $y=\log_a x$

Se $(x_1\ y_1)$ é um ponto da curva $y=a^x$ (I)

$x_1)$ é um ponto de $y=\log_a x$ (II)

Convém notar também que para $x=1$, na (II), $y=0$, to é, a curva passa pelo ponto (1, 0).

Tomando, então, em (II), base a, do sistema de logaritmos, maior do que a unidade, temos, na figura 4, a rva C', representação gráfica função exponencial $(a>1)$, a *curva* C, representação gráfica da *função logarítmica*.

Vemos, pela curva C, que função $y=\log_a x$ é crescente, ntínua e definida em todo mpo real positivo.

FIGURA 55 – Gráfico da função logarítmica.
FONTE: Página 175, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Logo após a exposição do gráfico da função logarítmica, Bezerra faz a exposição dos gráficos das principais funções trigonométricas, tecendo considerações sobre a maneira de se construir a curva da função $y = sen\, x$. Para o traçado das demais curvas trigonométricas, o autor se limita a esclarecer que os procedimentos para a construção de tais gráficos são análogos aos realizados para $y = sen\,x$.

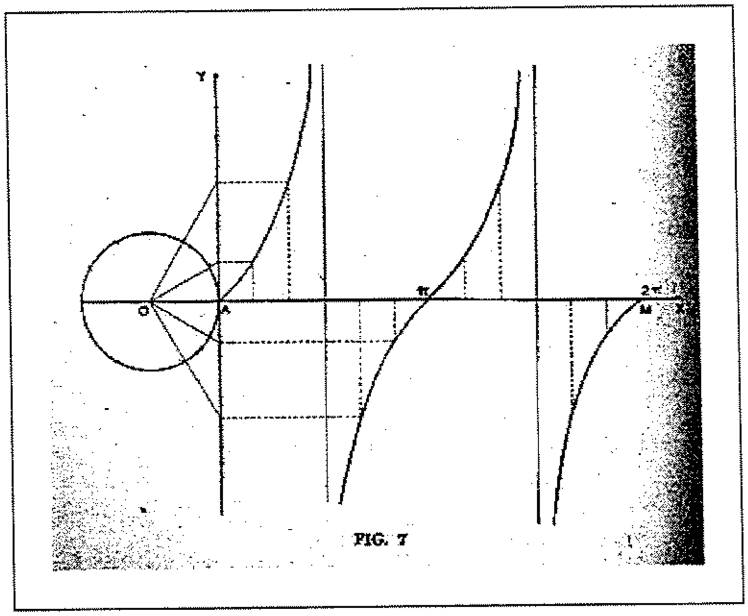


FIGURA 56 – Gráfico da função tangente.
FONTE: Página 176, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Ao final do capítulo são propostos exercícios, sendo que é exigida a construção de um único gráfico onde se pode recorrer às idéias desenvolvidas para as curvas expostas anteriormente, trata-se da construção do gráfico da função $y = e^{-2x^2}$, explorando assim, conceitos relativos à função exponencial. Os demais gráficos exigidos, dizem respeito a funções elementares.

Ao que parece, as preocupações estão voltadas a explorar o caráter de crescimento/decrescimento das funções para alguns intervalos do domínio da função.

Então, o autor prossegue com o estudo de limites, onde não são esboçados gráficos, diferente daquilo que foi feito por Carvalho. Na seqüência estuda e faz uma representação do significado gráfico da derivada e do diferencial.

As preocupações com a questão do crescimento e decrescimento, novamente são notadas, pois o autor discute tais conceitos representando graficamente o comportamento da função usando as representação gráfica das derivadas. Este tipo de representação, não foi encontrada em Carvalho.

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS DERIVADAS AO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

44. Funções crescentes e decrescentes. Já vimos as definições de funções crescente e decrescentes em um intervalo.

Vejamos agora, as representações geométricas de uma função *crescente* (fig. 12 e de uma função *decrescente* (fig. 13),

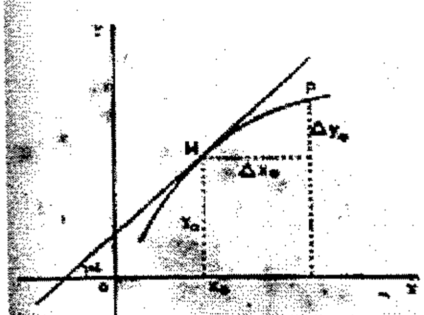


FIG. 12

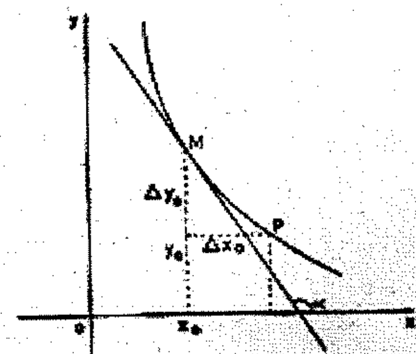


FIG. 13

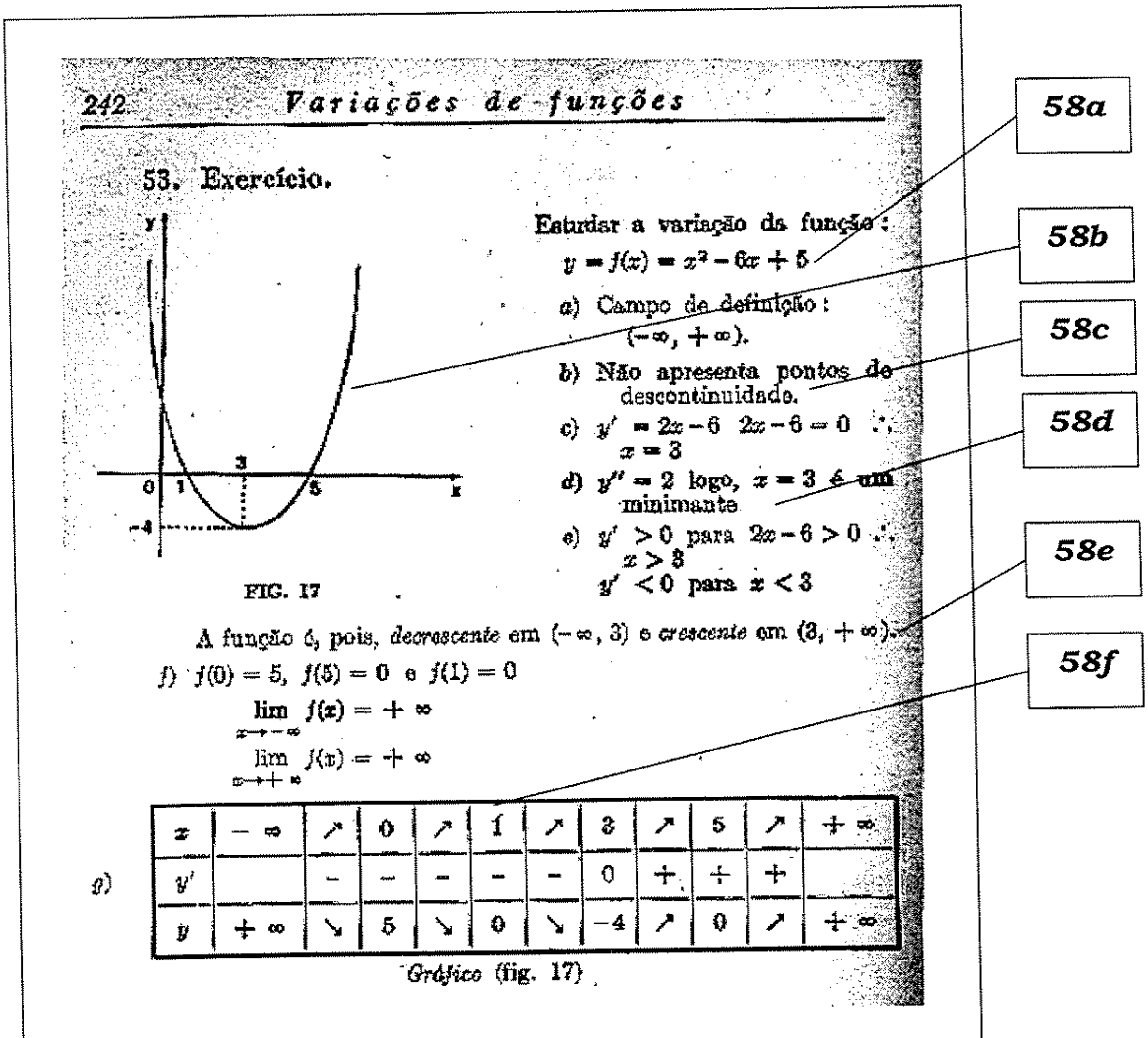
examinando, também, a inclinação dessas curvas representativas.

Seja uma função $y=f(x)$ definida em (a, b) e sejam M e P, de abcissas x_0 e $x=x_0+\Delta x_0$, dois pontos de sua curva representativa.

I) Na figura 12, todo ponto P, à direita de M $[x_0, f(x_0)]$ tem sua abcissa $x>x_0$, pois $\Delta x_0 \geq 0$, e também sua

FIGURA 57 – Interpretação gráfica da derivada no estudo da variação de uma função.
FONTE: Página 176, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Após a exposição dos conceitos relativos à variação das funções, Bezerra expõe a discussão da função $y = x^2 - 6x + 5$ (58a), representando seu gráfico ao lado da análise algébrica (58b). Na discussão entre outras coisas, procura trabalhar a continuidade da função (58c), o ponto de mínimo (58d), os intervalos de crescimento/decrescimento (58e), resumindo ao final os principais resultados em uma tabela (58f).



242 *Variações de funções*

53. Exercício.

Estudar a variação da função:
$y = f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) Campo de definição: $(-\infty, +\infty)$.

b) Não apresenta pontos de descontinuidade.

c) $y' = 2x - 6 \quad 2x - 6 = 0 \therefore x = 3$

d) $y'' = 2$ logo, $x = 3$ é um minimante

e) $y' > 0$ para $2x - 6 > 0 \therefore x > 3$
$y' < 0$ para $x < 3$

FIG. 17

A função é, pois, *decrescente* em $(-\infty, 3)$ e *crescente* em $(3, +\infty)$.

f) $f(0) = 5$, $f(5) = 0$ e $f(1) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

g)

x	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	3	↗	5	↗	$+\infty$
y'		−	−	−	−	−	0	+	+	+	
y	$+\infty$	↘	5	↘	0	↘	−4	↗	0	↗	$+\infty$

Gráfico (fig. 17)

FIGURA 58 – Estudo da variação da função $y = x^2 - 6x + 5$.
FONTE: Página 242, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Ao que parece, a abordagem dada aos conceitos desenvolvidos nesse livro, quando comparada a do livro de Carvalho, mostra-se mais simples e objetiva. Nesse sentido, Bezerra procura trabalhar algebricamente os principais tópicos envolvendo integrais. As últimas representações gráficas de funções, presentes nessa obra, são feitas para o cálculo/discussão de integrais definidas. Novamente, as funções exploradas são elementares. A figura 59 traz nos gráficos a indicação geométrica das integrais $\int_0^4 x^2 dx$ e $\int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx$, respectivamente.

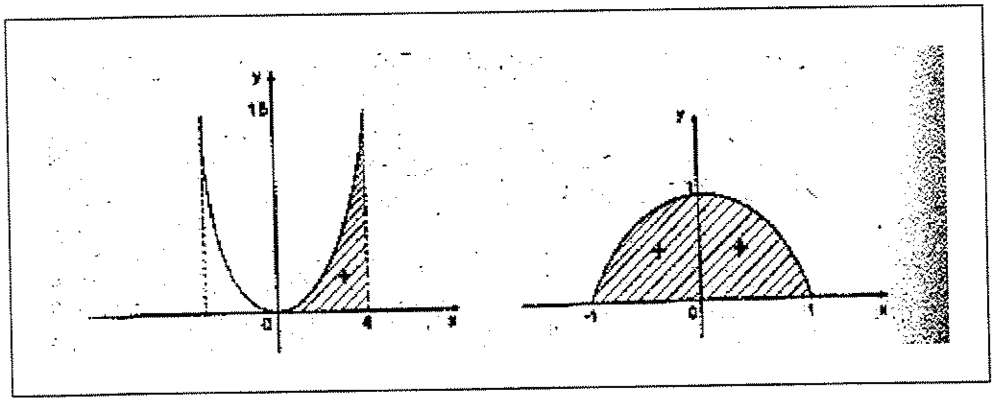


FIGURA 59 – Representação gráfica das integrais $\int_0^4 x^2 dx$ e $\int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx$.

FONTE: Página 260, *Curso de Matemática – Manoel Jairo Bezerra* - 1961.

Como pudemos perceber, no livro de Bezerra, são feitas apenas as representações gráficas essenciais. Discussões gráficas mais detalhadas/elaboradas ou ainda, aplicadas a situações cotidianas são inexistentes. Em relação aos livros das décadas anteriores podemos, de certa forma, afirmar que houve um retrocesso com relação à quantidade de representações gráficas apresentadas. Com relação à década anterior os gráficos apresentados, bem como os exemplos, procuraram abordar as derivadas e integrais de maneira mais simples buscando, talvez, um nível de complexidade mais acessível para o estudo dos alunos.

2. Representações Gráficas nos Anos 70: Boulos e Watanabe

No panorama mundial, durante a década de 70, no contexto da guerra fria as tensões diminuíram pois ocorreram acordos bilaterais entre Estados Unidos e União Soviética. Tais acordos, de certo modo, vieram em resposta às preocupações mundiais com relação à possível ocorrência de uma Guerra Nuclear.

Os Estados Unidos mantinham uma postura de supremacia sobre os países subdesenvolvidos, sendo notada sua interferência em vários conflitos militares, como os do Vietnã, e civis, como o da derrubada do presidente chileno Salvador Allende e na instauração da ditadura militar de Augusto Pinochet. A intervenção norte-americana no financiamento de outras ditaduras foi uma constante em países latino-americanos.

No Brasil os primeiros anos da década de 70 sob o governo do General Emílio Garrastazu Medici foram os mais repressivos de todos os governos militares. Os meios de comunicação sofreram censura prévia e passaram a ser controlados pelos DOI-CODI (Destacamento de Operações e Informações – Centro de Operações de Defesa Interna), o que gerou um clima de terror e insegurança.

Os orgãos de publicidade do governo Medici difundiam um clima de ufanismo que, de certa forma, era apoiado por alguns segmentos da classe média. Entretanto, parte da classe intelectual do país manifestava seu repúdio a situação vigente, sofrendo, consequentemente, duras represálias.

Se por um lado o modelo econômico adotado proporcionou elevadas taxas de crescimento da economia, por outro a taxa da mortalidade se elevou, as condições de saneamento básico para as camada menos favorecidas eram péssimas e o número de menores abandonados chegou a 10 milhões no final da década.

Nesse período vigorava o acordo MEC-USAID, pelo qual o Ministério Brasileiro da Educação e Cultura se associava a um programa norte-americano de ajuda aos países pobres, o que proporcionou a interferência direta dos Estados Unidos na estrutura educacional brasileira.

O final da década de 70 é marcado pelo governo de Ernesto Geisel com o início de um processo político de lenta abertura democrática, além de ser notória a séria crise da economia nacional.

Como salientamos na etapa anterior, o Movimento da Matemática Moderna começava a mostrar o seu alcance mundial a partir dos anos 60. Nesse sentido, buscamos em MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM (1992, p.39) o importante esclarecimento de como oscilava o ensino em relação a prioridade de se trabalhar a álgebra e/ou a geometria nas escolas:

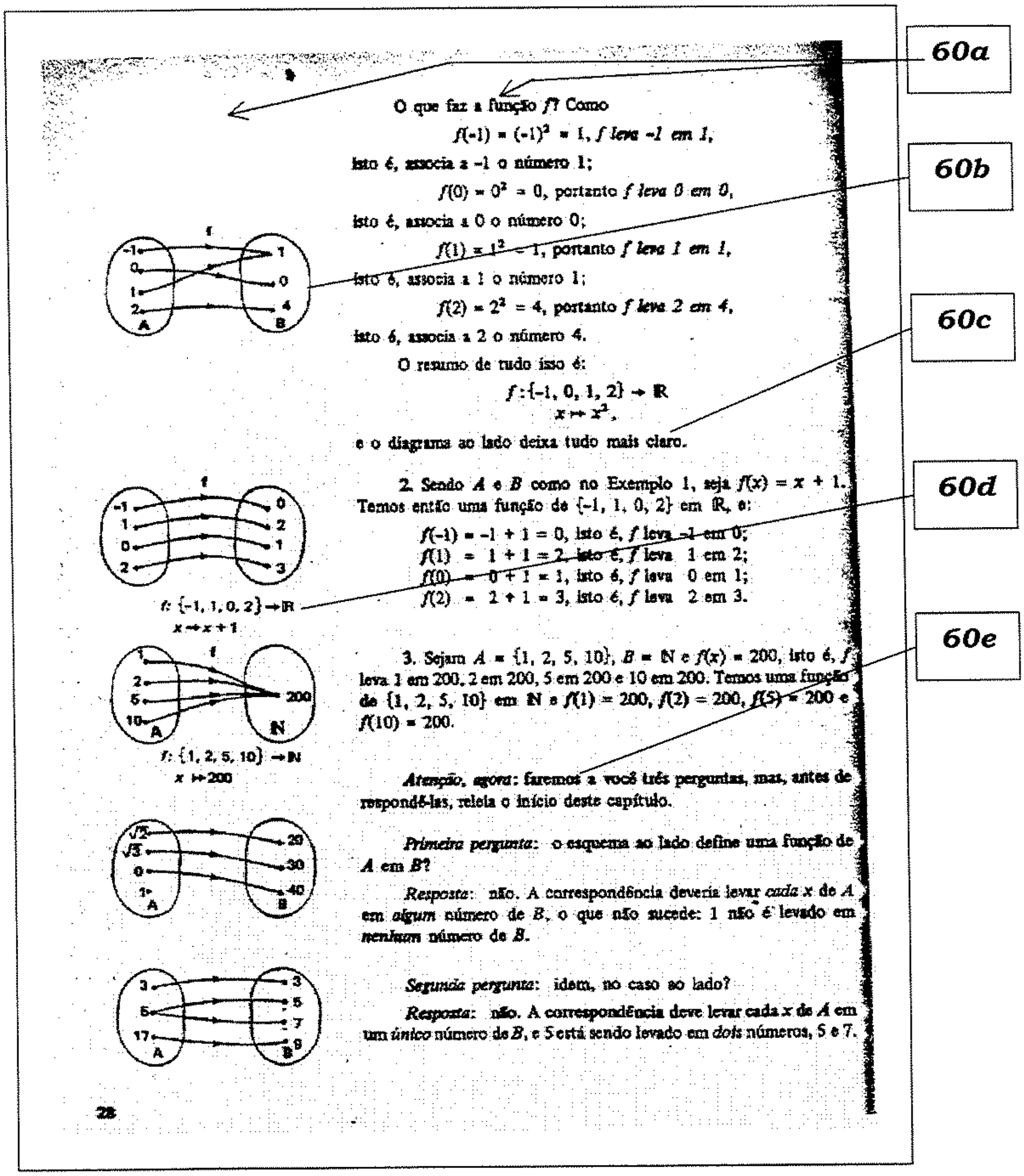
> *Queremos, na verdade, revelar a existência de uma atitude oscilatória e maniqueísta em relação a esses dois campos fundamentais da Matemática que, infelizmente, parecem direcionar os estudos, as reflexões e os debates sobre o ensino da Matemática Elementar , pelo menos* ***a partir da década de 70, quando as primeiras ressonâncias do chamado movimento da matemática moderna se fizeram sentir no interior de nossas escolas.*** *(o grifo é nosso)*

Lembramos que durante o Movimento da Matemática Moderna foram introduzidos no currículo, assuntos com supostas qualidades de auxílio na unificação e estruturação dos três campos da matemática escolar - a aritmética, a álgebra e a geometria. São exemplos desses assuntos a teoria de conjuntos, o estudo das estruturas algébricas, entre outros. MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM (1992, p.45).

Vamos agora, analisar o livro *Matemática - 2º Grau - Volume 1,* de Paulo Boulos e Renate Watanabe, na sua 3ª edição, 1979. Por se tratar da 3ª edição do livro, acreditamos que tal livro tenha sido usado na segunda metade da década de 70.

Uma análise geral do livro, revela uma surpreendente evolução qualitativa e quantitativa na apresentação dos gráficos, se comparado ao livro analisado para a década de 60.

A primeira característica interessante a ser notada na obra de Boulos e Watanabe é a distribuição do texto em duas colunas (60a), uma coluna maior onde são desenvolvidos as principais partes da argumentação e uma outra menor onde são apresentados comentários



O que faz a função f? Como

$$f(-1) = (-1)^2 = 1, \ f \textit{ leva } -1 \textit{ em } 1,$$

isto é, associa a -1 o número 1;

$$f(0) = 0^2 = 0, \text{ portanto } f \textit{ leva } 0 \textit{ em } 0,$$

isto é, associa a 0 o número 0;

$$f(1) = 1^2 = 1, \text{ portanto } f \textit{ leva } 1 \textit{ em } 1,$$

isto é, associa a 1 o número 1;

$$f(2) = 2^2 = 4, \text{ portanto } f \textit{ leva } 2 \textit{ em } 4,$$

isto é, associa a 2 o número 4.

O resumo de tudo isso é:

$$f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2,$$

e o diagrama ao lado deixa tudo mais claro.

2. Sendo A e B como no Exemplo 1, seja $f(x) = x + 1$. Temos então uma função de $\{-1, 1, 0, 2\}$ em $\mathbb{R}$, e:

$f(-1) = -1 + 1 = 0$, isto é, f leva -1 em 0;
$f(1) = 1 + 1 = 2$, isto é, f leva 1 em 2;
$f(0) = 0 + 1 = 1$, isto é, f leva 0 em 1;
$f(2) = 2 + 1 = 3$, isto é, f leva 2 em 3.

$f: \{-1, 1, 0, 2\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x + 1$

3. Sejam $A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \mathbb{N}$ e $f(x) = 200$, isto é, f leva 1 em 200, 2 em 200, 5 em 200 e 10 em 200. Temos uma função de $\{1, 2, 5, 10\}$ em $\mathbb{N}$ e $f(1) = 200$, $f(2) = 200$, $f(5) = 200$ e $f(10) = 200$.

$f: \{1, 2, 5, 10\} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto 200$

Atenção, agora: faremos a você três perguntas, mas, antes de respondê-las, releia o início deste capítulo.

Primeira pergunta: o esquema ao lado define uma função de A em B?

Resposta: não. A correspondência deveria levar *cada* x de A em *algum* número de B, o que não sucede: 1 não é levado em *nenhum* número de B.

Segunda pergunta: idem, no caso ao lado?

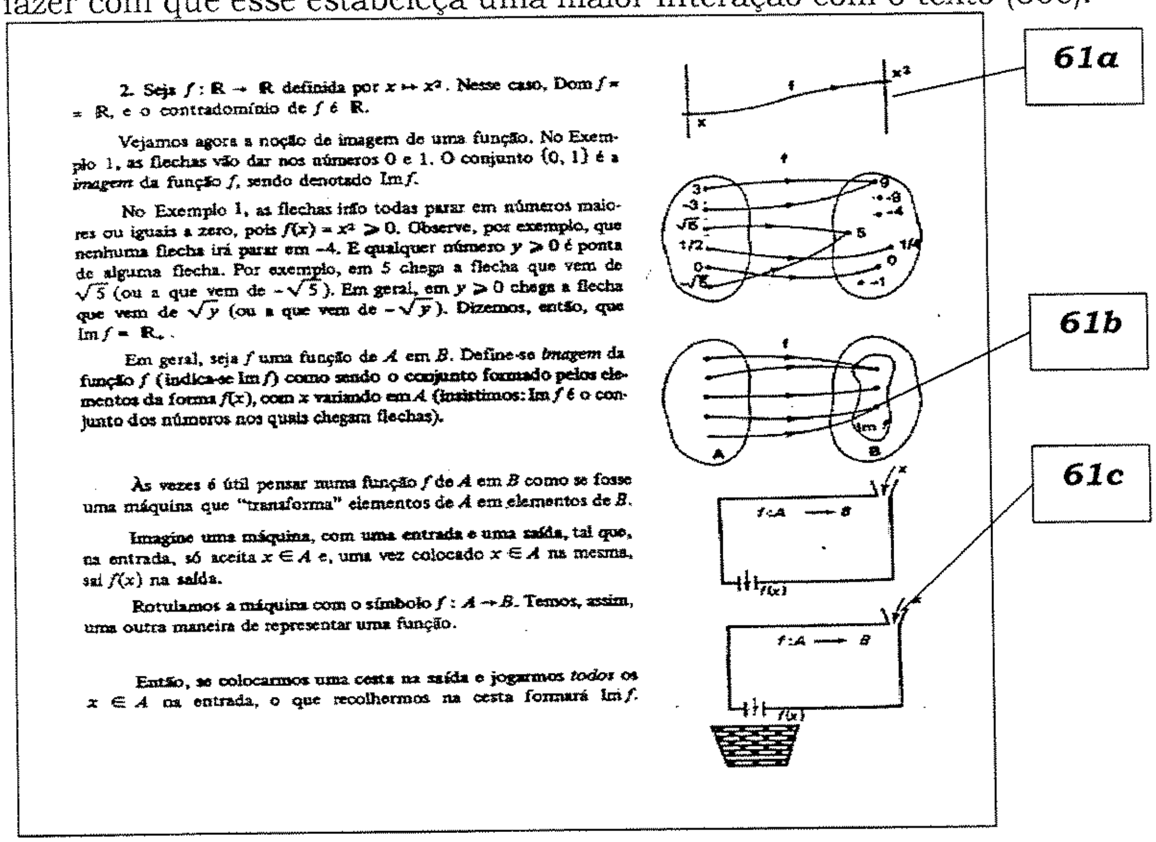
Resposta: não. A correspondência deve levar cada x de A em um *único* número de B, e 5 está sendo levado em *dois* números, 5 e 7.

28

FIGURA 60 – Pág. 28 do livro *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares- Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos.

pertinentes, esquemas e, principalmente, representações gráficas. As representações gráficas e os comentários gerais, feitos na coluna menor dizem respeito aos temas desenvolvidos na coluna maior. Tal organização gráfica permitiu, ao que parece, um grande aproveitamento do espaço para trabalhar simultaneamente os conceitos com um grande número de possíveis interpretações gráficas.

Notamos também o constate uso da representação de funções por meio de diagramas e flechas (60b). Podemos perceber ao longo do texto, afirmações de caráter axiomático por parte dos autores (60c), uma constante preocupação em se desenvolver conceitos como Domínio, Contra-Domínio, Imagem, à luz da definição moderna de função (60d). além de fazerem perguntas dirigidas ao leitor, tentando ao que parece, fazer com que esse estabeleça uma maior interação com o texto (60e).



2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto x^2$. Nesse caso, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$, e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

Vejamos agora a noção de imagem de uma função. No Exemplo 1, as flechas vão dar nos números 0 e 1. O conjunto $\{0, 1\}$ é a *imagem* da função f, sendo denotado $\text{Im} f$.

No Exemplo 1, as flechas irão todas parar em números maiores ou iguais a zero, pois $f(x) = x^2 \geqslant 0$. Observe, por exemplo, que nenhuma flecha irá parar em -4. E qualquer número $y \geqslant 0$ é ponta de alguma flecha. Por exemplo, em 5 chega a flecha que vem de $\sqrt{5}$ (ou a que vem de $-\sqrt{5}$). Em geral, em $y \geqslant 0$ chega a flecha que vem de $\sqrt{y}$ (ou a que vem de $-\sqrt{y}$). Dizemos, então, que $\text{Im} f = \mathbb{R}_+$.

Em geral, seja f uma função de A em B. Define-se *imagem* da função f (indica-se $\text{Im} f$) como sendo o conjunto formado pelos elementos da forma $f(x)$, com x variando em A (insistimos: $\text{Im} f$ é o conjunto dos números nos quais chegam flechas).

Às vezes é útil pensar numa função f de A em B como se fosse uma máquina que "transforma" elementos de A em elementos de B.

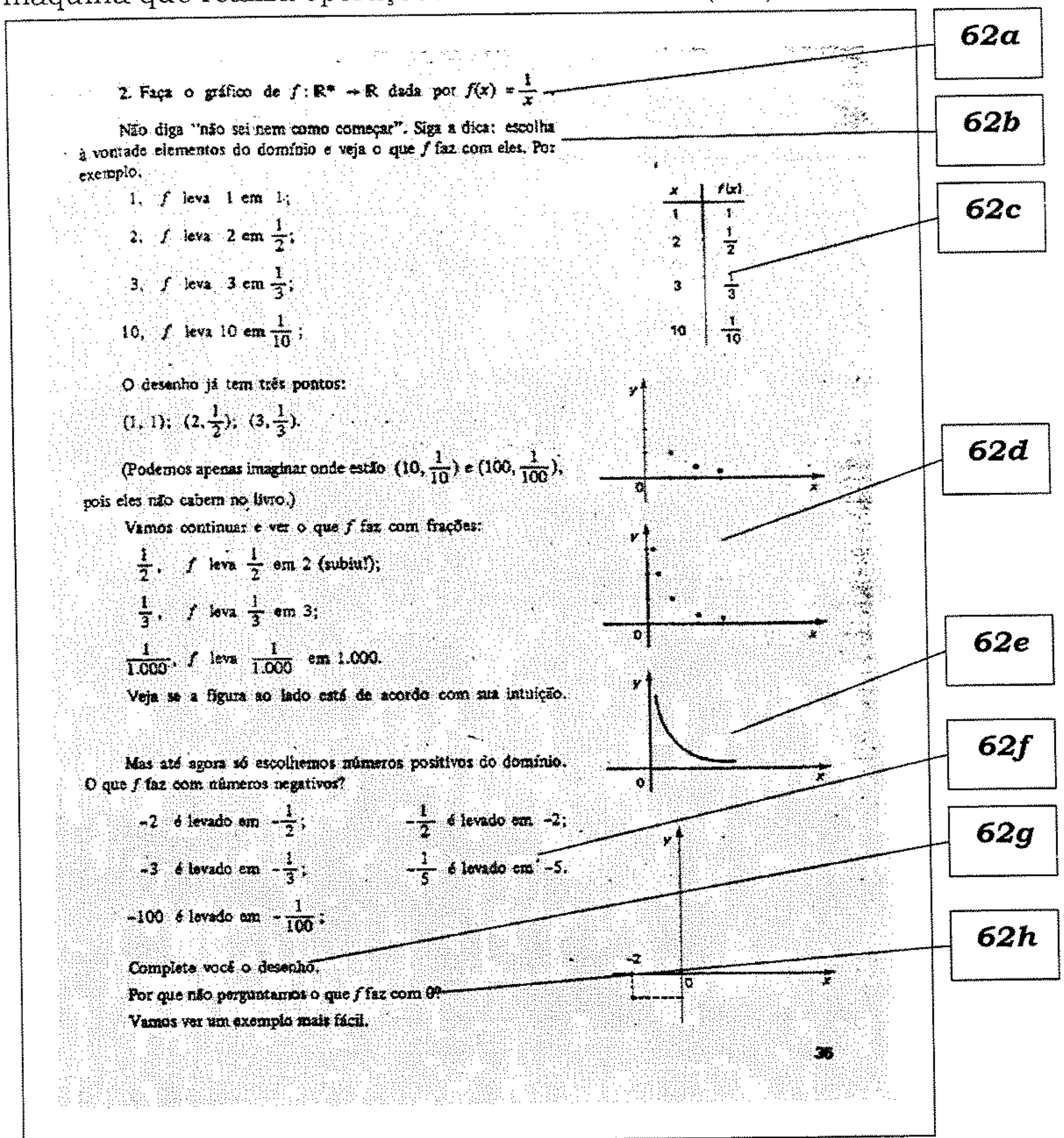
Imagine uma máquina, com uma entrada e uma saída, tal que, na entrada, só aceita $x \in A$ e, uma vez colocado $x \in A$ na mesma, sai $f(x)$ na saída.

Rotulamos a máquina com o símbolo $f: A \to B$. Temos, assim, uma outra maneira de representar uma função.

Então, se colocarmos uma cesta na saída e jogarmos *todos* os $x \in A$ na entrada, o que recolhermos na cesta formará $\text{Im} f$.

FIGURA 61 – Parte da pág. 31, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares- Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC – USP – São Carlos.

Algumas representações gráficas interessantes, diferentes dos gráficos cartesianos, podem ser encontradas no texto. Encontramos, por exemplo, a representação do Domínio e Contra-Domínio como retas de números reais (61a), Imagem caracterizada como subconjunto do Domínio (61b), e a representação de uma função, por uma espécie de máquina que realiza operações sobre os números(61c).



2. Faça o gráfico de $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$

Não diga "não sei nem como começar". Siga a dica: escolha à vontade elementos do domínio e veja o que f faz com eles. Por exemplo,

1, f leva 1 em 1;

2, f leva 2 em $\frac{1}{2}$;

3, f leva 3 em $\frac{1}{3}$;

10, f leva 10 em $\frac{1}{10}$;

O desenho já tem três pontos:

$(1, 1)$; $(2, \frac{1}{2})$; $(3, \frac{1}{3})$.

(Podemos apenas imaginar onde estão $(10, \frac{1}{10})$ e $(100, \frac{1}{100})$, pois eles não cabem no livro.)

Vamos continuar e ver o que f faz com frações:

$\frac{1}{2}$, f leva $\frac{1}{2}$ em 2 (subiu!);

$\frac{1}{3}$, f leva $\frac{1}{3}$ em 3;

$\frac{1}{1.000}$, f leva $\frac{1}{1.000}$ em 1.000.

Veja se a figura ao lado está de acordo com sua intuição.

Mas até agora só escolhemos números positivos do domínio. O que f faz com números negativos?

-2 é levado em $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ é levado em -2;

-3 é levado em $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{5}$ é levado em -5.

-100 é levado em $-\frac{1}{100}$;

Complete você o desenho.

Por que não perguntamos o que f faz com 0?

Vamos ver um exemplo mais fácil.

35

FIGURA 62 –Página 35, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC–USP – São Carlos.

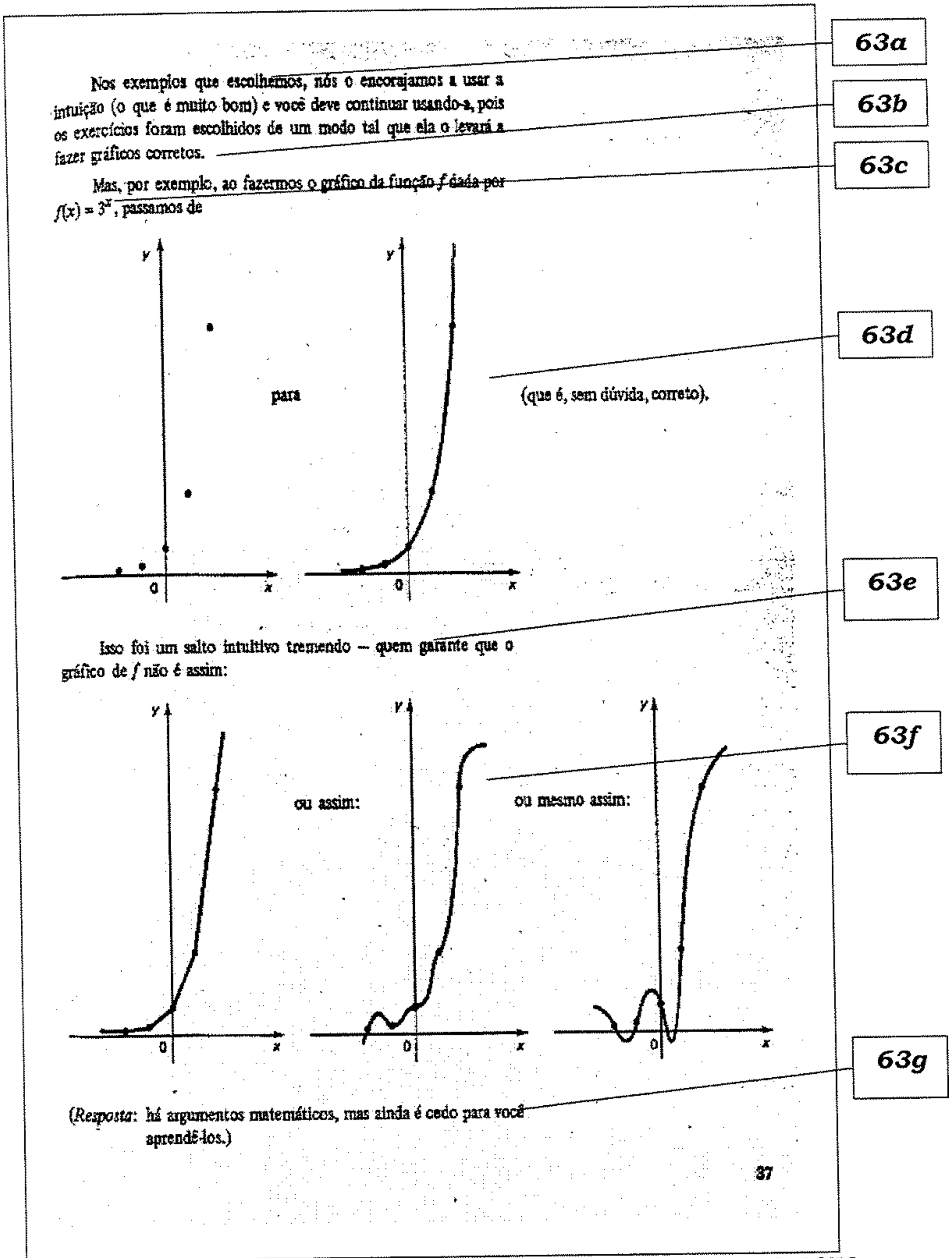
Podemos notar também, que na apresentação da construção dos gráficos, os autores preocupam-se em detalhar os passos para a construção. Por exemplo, para o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ (62a), primeiramente os autores incentivam o leitor a tentar construir tal gráfico(62b), em seguida, constroem uma tabela a partir de valores positivos atribuídos a x (62c), para, na seqüência, esboçar os pontos, em etapas (62d), e finalmente traçar um dos ramos da hipérbole(62e). Concluem o exemplo iniciando o cálculo dos pontos para valores negativos de x convidando o aluno a completar o gráfico(62f) e (62g), além de indagarem sobre a ausência do cálculo para $x=0$ (62h).

Ao que parece, os autores tentam explorar ao máximo aspectos importantes na construção de cada gráfico.

Em outra das construções analisadas (FIG 63), podemos perceber a tentativa dos autores em estabelecer o diálogo com o leitor, no sentido de incentivá-lo a usar a intuição, além dos próprios autores se posicionarem em relação a essa conduta (63a). Na verdade, parecem, preocupados em ajudar o leitor, a construir gráficos de maneira correta (63b), valendo-se também de recursos intuitivos.

Assim, usam a construção do gráfico da função $y = 3^x$ (63c), explorando a intuição, apresentando o gráfico correto (63d), mas seguem indagando se não haveria outras possibilidades para o traçado do mesmo gráfico (63e), desenhando em seguida, outros traçados pelos mesmos pontos usados no gráfico original(63f).

Ao final da discussão dessa construção gráfica, os próprios autores respondem à indagação afirmando que existem *argumentos matemáticos,* que garantem tal construção, mas *ainda é cedo* para o leitor aprendê-los (63g).



Nos exemplos que escolhemos, nós o encorajamos a usar a intuição (o que é muito bom) e você deve continuar usando-a, pois os exercícios foram escolhidos de um modo tal que ela o levará a fazer gráficos corretos.

Mas, por exemplo, ao fazermos o gráfico da função f dada por $f(x) = 3^x$, passamos de

para

(que é, sem dúvida, correto).

Isso foi um salto intuitivo tremendo — quem garante que o gráfico de f não é assim:

ou assim:

ou mesmo assim:

(*Resposta*: há argumentos matemáticos, mas ainda é cedo para você aprendê-los.)

37

FIGURA 63 –Página 37, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed., 1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC–USP – São Carlos.

Como pudemos notar o texto é estruturado de maneira bastante rica e encontramos muitas outras interpretações/indicações gráficas com o intuito de facilitar a leitura/interpretação gráfica. Como salientamos, a preocupação de deixar claro quais são os Domínios e Imagens de várias funções transparece em todo o texto e o mesmo ocorre com as representações do Domínio e Imagem nos eixos cartesianos(FIG 64).

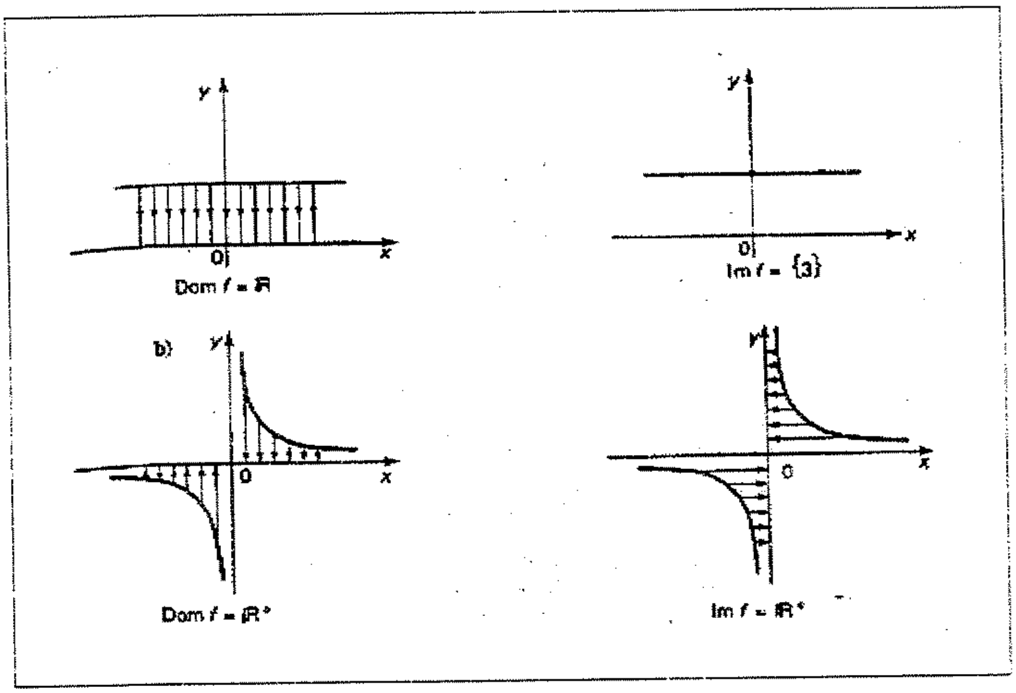
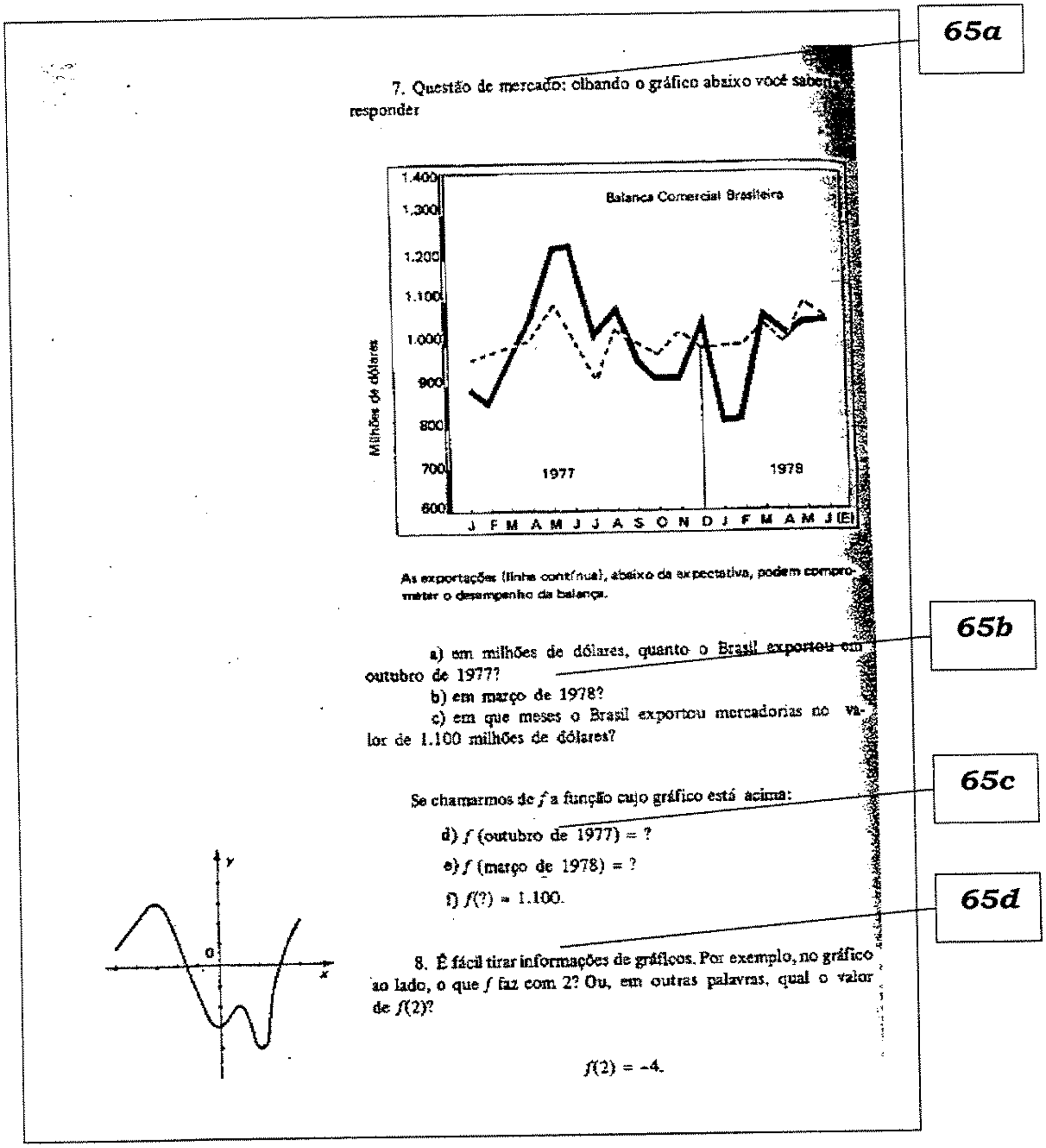


FIGURA 64 –Parte da pág. 39, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC–USP – São Carlos.

Como pudemos observar, a distribuição dos gráficos no texto não é feita somente na coluna menor ocupando muitas vezes a coluna maior (FIG 62) e, às vezes, toda a página. (FIG 64)

Se nos livros de Carvalho e Bezerra, as representações gráficas aplicadas a situações práticas foram inexistentes, no livro de Boulos e Watanabe elas reaparecem.

Analisando uma dessas representações, percebemos que ela está inserida num exercício para leitura e análise gráfica de uma situação do mercado econômico(65a).



7. Questão de mercado: olhando o gráfico abaixo você saberá responder

As exportações (linha contínua), abaixo da expectativa, podem comprometer o desempenho da balança.

a) em milhões de dólares, quanto o Brasil exportou em outubro de 1977?

b) em março de 1978?

c) em que meses o Brasil exportou mercadorias no valor de 1.100 milhões de dólares?

Se chamarmos de f a função cujo gráfico está acima:

d) f (outubro de 1977) = ?

e) f (março de 1978) = ?

f) $f(?) = 1.100$.

8. É fácil tirar informações de gráficos. Por exemplo, no gráfico ao lado, o que f faz com 2? Ou, em outras palavras, qual o valor de $f(2)$?

$$f(2) = -4.$$

FIGURA 65 –Página 40, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC–USP – São Carlos.

Nessa atividade, os autores tentam explorar a leitura do gráfico em dois blocos de perguntas. Enquanto o primeiro bloco traz perguntas escritas de forma convencional (65b), o segundo bloco tenta adaptar o estilo de escrita das perguntas do primeiro bloco a uma linguagem funcional (65c).

Os autores tentam convencer o leitor de que *É fácil tirar informações de gráficos* (65d). Mas se recorrermos às considerações feitas no Capítulo 1 de nossa dissertação, percebemos que tal afirmação, à luz dos estudos atuais, assume um caráter retórico, já que os processos mentais de leitura/interpretação de gráficos não são simples e merecem muitas pesquisas e profundas análises de investigação.

Analisando o livro de maneira geral, encontramos ainda outras representações gráficas, bastante interessantes, para os vários tipos de funções trabalhadas no ensino médio.

Como exemplo da diversidade das representações gráficas encontradas nessa obra, vale mostrar ainda, a representação feita no estudo de progressões aritméticas.

Observe que o gráfico das duas progressões é um conjunto de pontos colineares. Isso não surpreende, pois lembrando que

$$a_n = a_1 + (n-1)r = r \cdot n + (a_1 - r),$$

vemos que n e a_n estão ligados por uma expressão do tipo

$$a_n = A \cdot n + B,$$

onde A e B representam, respectivamente, as constantes r e $a_1 - r$. [Talvez aqui a notação $f(n) = A \cdot n + B$ deixe mais claro o que estamos dizendo.] Você deve lembrar que sentenças desse tipo caracterizam a função afim, cujo gráfico é uma reta. Na verdade, o domínio da função afim é $\mathbb{R}$, enquanto que o domínio de uma P.A. é uma parte de $\mathbb{N}^*$. Por isso, a representação gráfica da P.A. não é uma reta, mas sim um conjunto de pontos colineares.

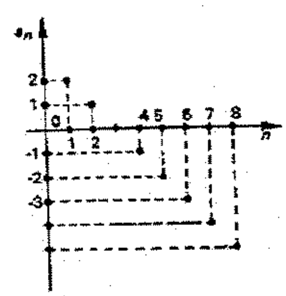


FIGURA 66 –Página 83, *Matemática*, Boulos e Watanabe, 3ª ed.,1979.
FONTE: Exemplar pertencente a coleção de livros do professor Odelar Leite Linhares - Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC–USP – São Carlos.

Parece natural, afirmar que no livro de Boulos e Watanabe as representação gráfica caminha intimamente associada ao estudo de funções, cumprindo assim, um papel importante para o seu ensino e, em relação aos períodos anteriores, a abordagem gráfica apresenta um salto quantitativo e qualitativo na elaboração geral dos conceitos funcionais.

3. Representações Gráficas nos Anos 80: Iezzi e Outros

No panorama mundial, o início da década foi caracterizado pelo acirramento nas relações entre os EUA e URSS. Um indicador dessas tensões são as várias sanções econômicas decretadas pelo presidente norte-americano Ronald Reagan à URSS, além da retomada da corrida armamentista. Aliado às lideranças capitalistas mundiais, o governo Reagan, de características neoliberais, marcou nos EUA um período de considerável desenvolvimento interno, enquanto que a URSS passava por grandes dificuldades econômicas. Ao final da década, devido às pressões européias, houve uma distensão das relações EUA-URSS. A União Soviética, sob liderança de Mikhail Gobatchev, atravessou um período de reformas político-econômicas, que de certa forma, resultaram no fim do socialismo real e da Guerra Fria, celebrado com a simbólica queda do muro de Berlim em 1989.

No Brasil durante a 1ª metade da década de 80 o então presidente General João Baptista Figueiredo continuou a política de seu antecessor, num movimento de abertura gradual do regime militar. O país atravessa um período de grande crise, grande ação sindical e grandes mudanças no panorama político.

Muitos são os fatos marcantes da década: com a Lei de Anistia, os presos políticos eram libertados e os exilados podiam retornar ao país; ao invés do bipartidarismo se restabeleceu o pluripartidarismo; trabalhadores e estudantes uniram-se em prol da obtenção de eleições diretas para presidência da república no movimento Diretas Já.

Tancredo Neves foi o último presidente eleito indiretamente, ao término do período militar, mas dado o seu falecimento antes da posse, a presidência da república foi assumida pelo vice-presidente José Sarney, marcando o início da nova república.

No governo de Sarney, o país presenciou na cúpula do governo várias crises ministeriais, atravessou um período de grandes turbulências na economia, o que pode ser verificado pelo recordes de taxas inflacionárias seguido de vários planos de ajuste econômico. Entretanto, o governo pode ser lembrado como um governo de transição democrática, que convocou uma assembléia constituinte, promulgou uma nova constituição e legalizou partidos políticos de quaisquer tendências. Apesar de representar um período de insucesso no âmbito econômico, podemos dizer que foram anos decisivos para a transição política.

Vale lembrar que em 1989 as primeiras eleições diretas para presidência da república, desde 1960, foram realizadas e Fernando Collor de Mello venceu Luis Inácio Lula da Silva no 2º Turno.

Ao que parece, a década de 80 representa um período de transição e abertura de novos horizontes no cenário nacional. Nesta perspectiva, permitimo-nos traçar um paralelo com respeito ao ensino da matemática nas escolas, ou seja, a década de 80 pode ter representado também, um período de transição para o ensino da matemática escolar brasileira. Com efeito, ao traçar a contextualização histórica da década de 70, vimos que, a partir daquele período, no Brasil foram sentidos fortes reflexos do Movimento da Matemática Moderna, para o ensino da matemática.

Parece natural supor, que sob o forte discurso daqueles que propunham tal movimento, apresentam-se as chances de serem cometidos excessos. Por outro lado os opositores do Movimento da

Matemática Moderna apresentam críticas bastante severas e bem elaboradas. A contestação ganha força e assinala ó início de superação do movimento e para um melhor esclarecimento desse processo, recorremos a MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM (1992, p.49):

> *O movimento modernista não conseguiu dar conta da crise em que se encontrava o ensino da matemática. Muitos pelo contrário, essa crise tomaria outras características [...]*
> *Para melhor explicar esse momento histórico convém assinalar que o movimento modernista acabou se tornando difuso e diversificado em função das formas diferenciadas pelas quais foi assimilado pelos diferentes países e, dentro de cada país, pelos vários grupos que se formaram com o propósito de operacionalizá-lo.*

Ainda mais, conforme esclarece MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM (1992, p.49), no caso brasileiro:

> *... o ensino da matemática com o movimento modernista acaba, aos poucos, adquirindo um caráter eclético devido à interferência e coexistência de "forças" de naturezas diversas [...] Não tardariam, porém, a aparecer, a partir do final da década de 70, tentativas de superação dessa situação, geralmente restritas a correções de distorções e excessos cometidos ao longo da trajetória do movimento modernista..*

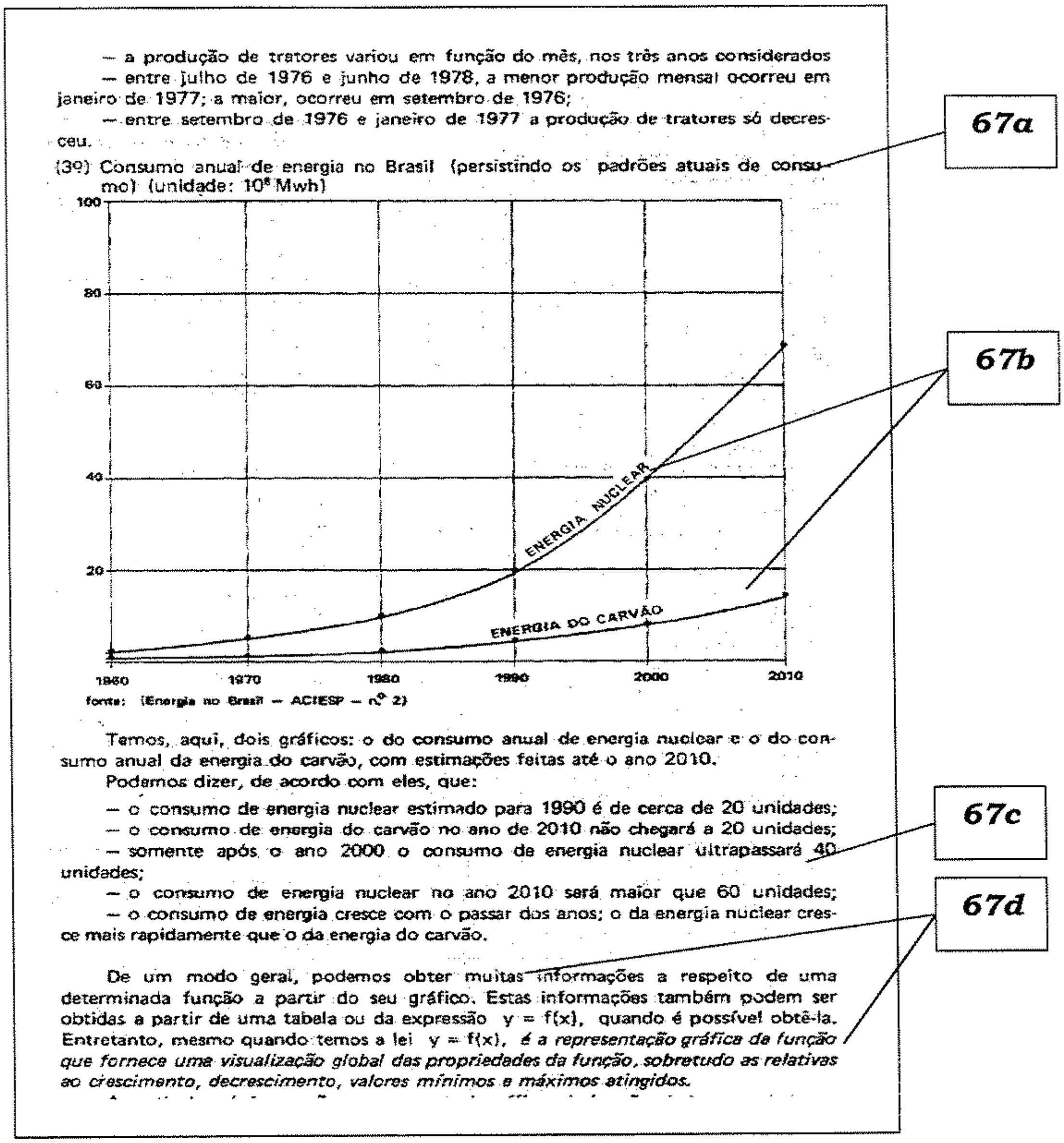
Considerando o exposto, nos sentimos mais inteirados a respeito de alguns fatos do processo de reelaboração do ensino da matemática, para analisarmos de maneira mais confortável as representações gráficas no livro *Aulas de Matemática – Volume 1,* de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Antonio dos Santos Machado, Luiz Roberto da Silveira Castro, em sua primeira edição de 1979. Vale lembrar que a estrutura apresentada para o desenvolvimento de alguns conteúdos em tal livro, segundo nossa análise, serviu de base, para a reelaboração e reedição de outros títulos assinados em conjunto pelos mesmos autores. Ao que parece, que tais livros alcançaram relativo sucesso editorial e podem ser encontrados ainda nos anos 90.

Nesse sentido, queremos salientar que em termos gerais as representações gráficas de funções, bem como muitos outros assuntos, apresentam uma certa estabilidade na maneira de serem apresentadas e exploradas nos livros didáticos nas décadas de 80 e 90. Ao reunirmos as várias abordagens das representações gráficas nos diferentes livros por nós analisados das décadas de 80 e 90 percebemos uma gama de opções para o seu ensino. Na verdade, as diferenças ocorrem mais na mudança de autores, do que no passar dos anos.

Assim, pretendemos por meio da análise do livro de Iezzi e Outros, bem como nos textos das duas últimas etapas, apresentar algumas das muitas representações gráficas encontradas nos livros desses últimos 20 anos.

O volume analisado do livro de Iezzi e Outros era dirigido aos alunos que ingressavam na 1ª série do 2º grau.

Os autores iniciam a abordagem gráfica quando estão introduzindo as noções básicas de funções. Para tanto, as primeiras representações gráficas apresentadas se referem a situações aplicadas à realidade (67a). Um dos gráficos expostos, traduz por meio de duas curvas sobrepostas o consumo de energia nuclear e de energia do carvão com o decorrer dos anos(67b). Os autores intervém em seguida por meio de uma breve análise dos dados (67c) e de uma explicação a respeito da associação dos gráficos com as funções (67d).



— a produção de tratores variou em função do mês, nos três anos considerados
— entre julho de 1976 e junho de 1978, a menor produção mensal ocorreu em janeiro de 1977; a maior, ocorreu em setembro de 1976;
— entre setembro de 1976 e janeiro de 1977 a produção de tratores só decresceu.

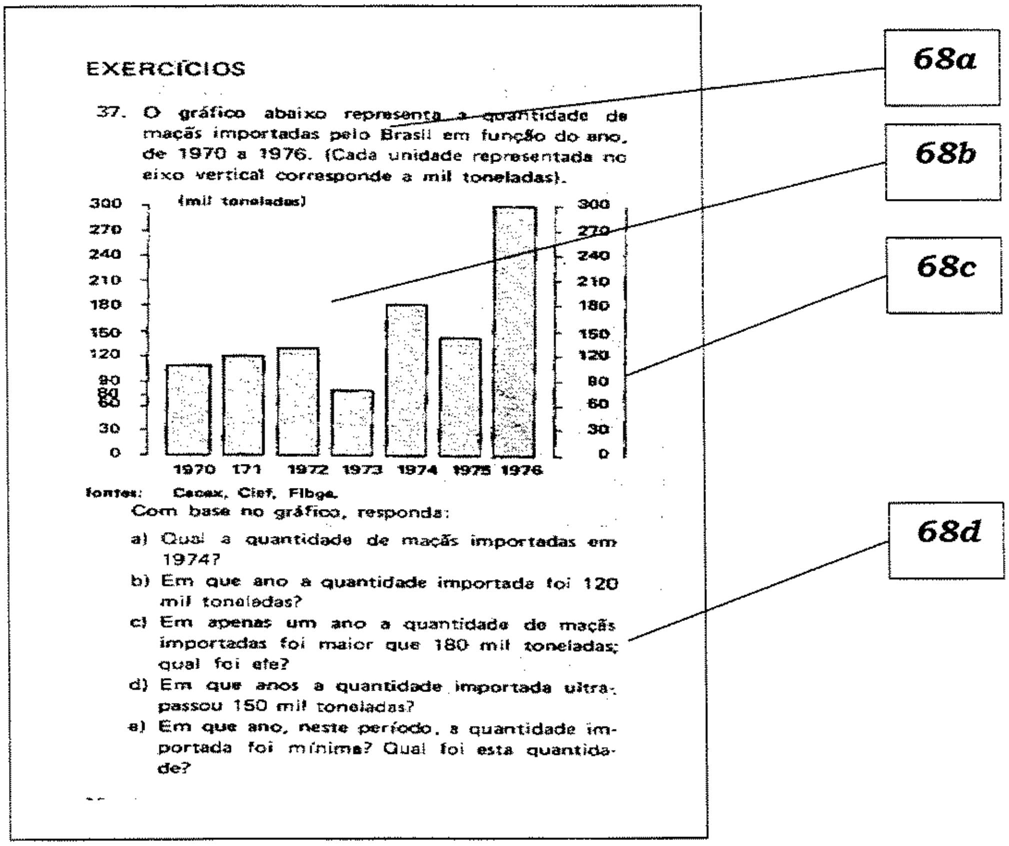
(3º) Consumo anual de energia no Brasil (persistindo os padrões atuais de consumo) (unidade: 10^6 Mwh)

Temos, aqui, dois gráficos: o do consumo anual de energia nuclear e o do consumo anual da energia do carvão, com estimações feitas até o ano 2010.
Podemos dizer, de acordo com eles, que:
— o consumo de energia nuclear estimado para 1990 é de cerca de 20 unidades;
— o consumo de energia do carvão no ano de 2010 não chegará a 20 unidades;
— somente após o ano 2000 o consumo de energia nuclear ultrapassará 40 unidades;
— o consumo de energia nuclear no ano 2010 será maior que 60 unidades;
— o consumo de energia cresce com o passar dos anos; o da energia nuclear cresce mais rapidamente que o da energia do carvão.

De um modo geral, podemos obter muitas informações a respeito de uma determinada função a partir do seu gráfico. Estas informações também podem ser obtidas a partir de uma tabela ou da expressão $y = f(x)$, quando é possível obtê-la. Entretanto, mesmo quando temos a lei $y = f(x)$, *é a representação gráfica da função que fornece uma visualização global das propriedades da função, sobretudo as relativas ao crescimento, decrescimento, valores mínimos e máximos atingidos.*

FIGURA 67 –Representação gráfica do consumo de energia.
FONTE: Página 43, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros – 1979

Na seqüência os autores propõe um série de atividades com representações gráficas voltadas a situações reais (68a). A primeira traz um gráfico estatístico (68b). Há a preocupação por parte dos autores para que os gráficos destinados a uma leitura/construção numérica tenham recursos tipográficos, como reticulados ou eixos cartesianos auxiliares (68c), para



EXERCÍCIOS

37. O gráfico abaixo representa a quantidade de maçãs importadas pelo Brasil em função do ano, de 1970 a 1976. (Cada unidade representada no eixo vertical corresponde a mil toneladas).

fontes: Cacex, Cief, Fibge.

Com base no gráfico, responda:

a) Qual a quantidade de maçãs importadas em 1974?

b) Em que ano a quantidade importada foi 120 mil toneladas?

c) Em apenas um ano a quantidade de maçãs importadas foi maior que 180 mil toneladas; qual foi ele?

d) Em que anos a quantidade importada ultrapassou 150 mil toneladas?

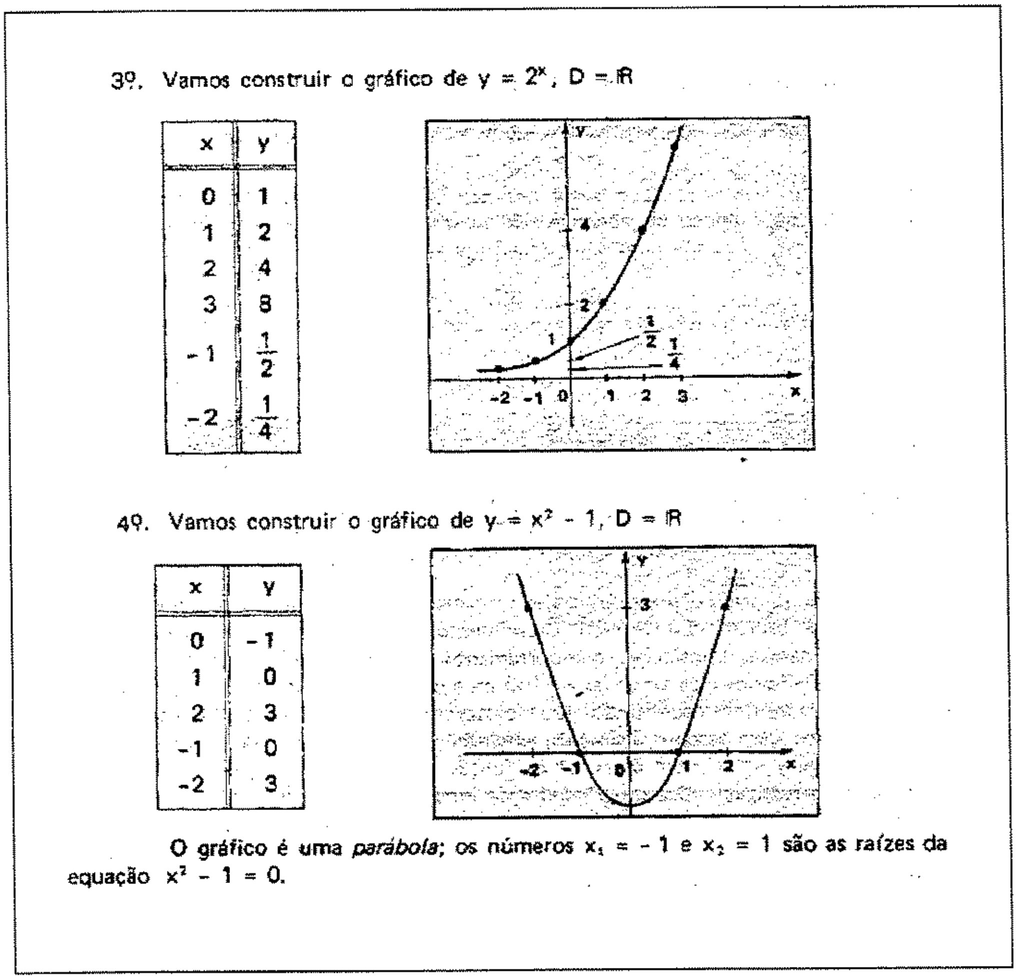
e) Em que ano, neste período, a quantidade importada foi mínima? Qual foi esta quantidade?

FIGURA 68 – Exercício com gráfico estatístico.
FONTE: Página 44, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros - 1979

facilitar as visualizações. Ao que parece, os autores tentam explorar ao máximo a interpretação dos gráficos expostos por meio de inúmeras perguntas (68d).

Para esses gráficos apresentados inicialmente, surgem duas abordagens básicas: uma voltada ao traçado/construção de curvas, outra voltada a interpretação de gráficos com perfil estatístico.

Na seqüência dos tópicos, são feitas considerações gerais sobre os gráficos das funções e em seguida traçados alguns gráficos elementares, sempre associados às funções elementares.



3º. Vamos construir o gráfico de $y = 2^x$, $D = \mathbb{R}$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

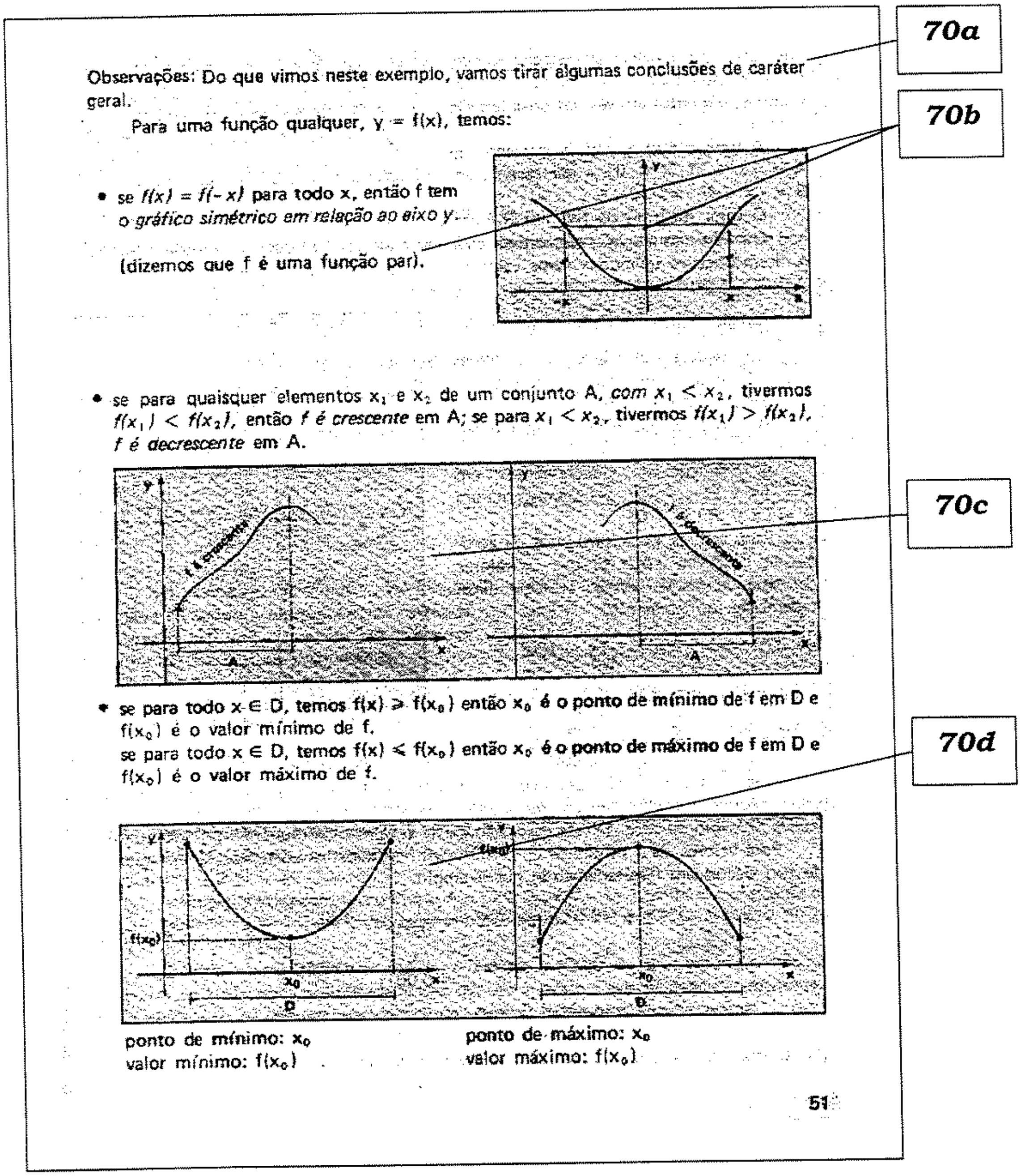
4º. Vamos construir o gráfico de $y = x^2 - 1$, $D = \mathbb{R}$

x	y
0	-1
1	0
2	3
-1	0
-2	3

O gráfico é uma *parábola*; os números $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ são as raízes da equação $x^2 - 1 = 0$.

FIGURA 69 – Gráficos da funções $y = 2^x$ e $y = x^2 - 1$.
FONTE: Página 49, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros - 1979

Nessa obra, os gráficos são muito usados como recurso para a introdução de conceitos mais gerais a respeito de funções. Nestes casos, os autores dispõe os gráficos em quadros onde a abordagem é feita de maneira genérica (70a). Conceitos envolvendo a paridade de funções (70b), seu crescimento ou decrescimento(70c), seus pontos de máximo ou mínimo(70d), são exemplos de alguns dos temas representados graficamente pelos autores.


70a

70b

70c

70d

Observações: Do que vimos neste exemplo, vamos tirar algumas conclusões de caráter geral.

Para uma função qualquer, $y = f(x)$, temos:

- se $f(x) = f(-x)$ para todo x, então f tem o *gráfico simétrico em relação ao eixo y*. (dizemos que f é uma função par).

- se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de um conjunto A, *com* $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$, então *f é crescente* em A; se para $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$, *f é decrescente* em A.

- se para todo $x \in D$, temos $f(x) \geq f(x_0)$ então x_0 **é o ponto de mínimo** de f em D e $f(x_0)$ é o valor mínimo de f.
  se para todo $x \in D$, temos $f(x) \leq f(x_0)$ então x_0 **é o ponto de máximo** de f em D e $f(x_0)$ é o valor máximo de f.

ponto de mínimo: x_0
valor mínimo: $f(x_0)$

ponto de máximo: x_0
valor máximo: $f(x_0)$

51

FIGURA 70 – Paridade, crescimento/decrescimento, máximos/mínimos de funções via gráfico.
FONTE: Página 51, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros - 1979

Neste primeiro volume, o estudo da variação das funções de 1º e 2º graus, são abordados graficamente e, consequentemente o estudo de inequações tem uma abordagem gráfica.

e) Estudo do Sinal da Função do 1º Grau

Estudar o sinal da função $y = f(x)$ significa determinar os valores de x para os quais y é positivo e os valores de x para os quais y é negativo.

Para estudarmos o sinal da função do 1º grau determinamos primeiramente o valor de x que anula $f(x) = ax + b$. Este valor, chamado zero da função, é a abscissa do ponto de intersecção da reta $y = ax + b$ com o eixo Ox.

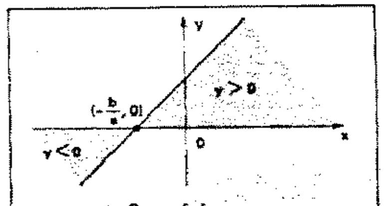
$$f(x) = ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

No caso de f ser crescente $(a > 0)$, temos:

$x > -\frac{b}{a} \rightarrow y > 0$

$x = -\frac{b}{a} \rightarrow y = 0$

$x < -\frac{b}{a} \rightarrow y < 0$



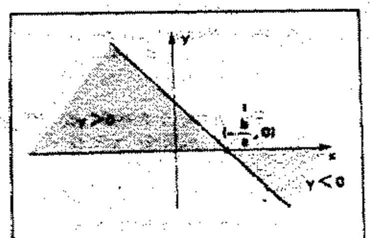
$a > 0 \rightarrow$ f é crescente

No caso de f ser decrescente $(a < 0)$, temos:

$x > -\frac{b}{a} \rightarrow y < 0$

$x = -\frac{b}{a} \rightarrow y = 0$

$x < -\frac{b}{a} \rightarrow y > 0$



$a < 0 \rightarrow$ f é decrescente

FIGURA 71 – Estudo do sinal da função de 1º grau via gráfico.
FONTE: Página 62, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros - 1979

Além dos gráficos das funções de 1º e 2º graus, os autores exploram gráficos da função modular e das funções trigonométricas. Os gráficos da função modular, não foram encontrados no livro de Boulos e Watanabe, enquanto que na obra de Iezzi e Outros, podemos encontrar vários exemplos onde são construídos os gráficos que exploram o conceito de módulo (72a).

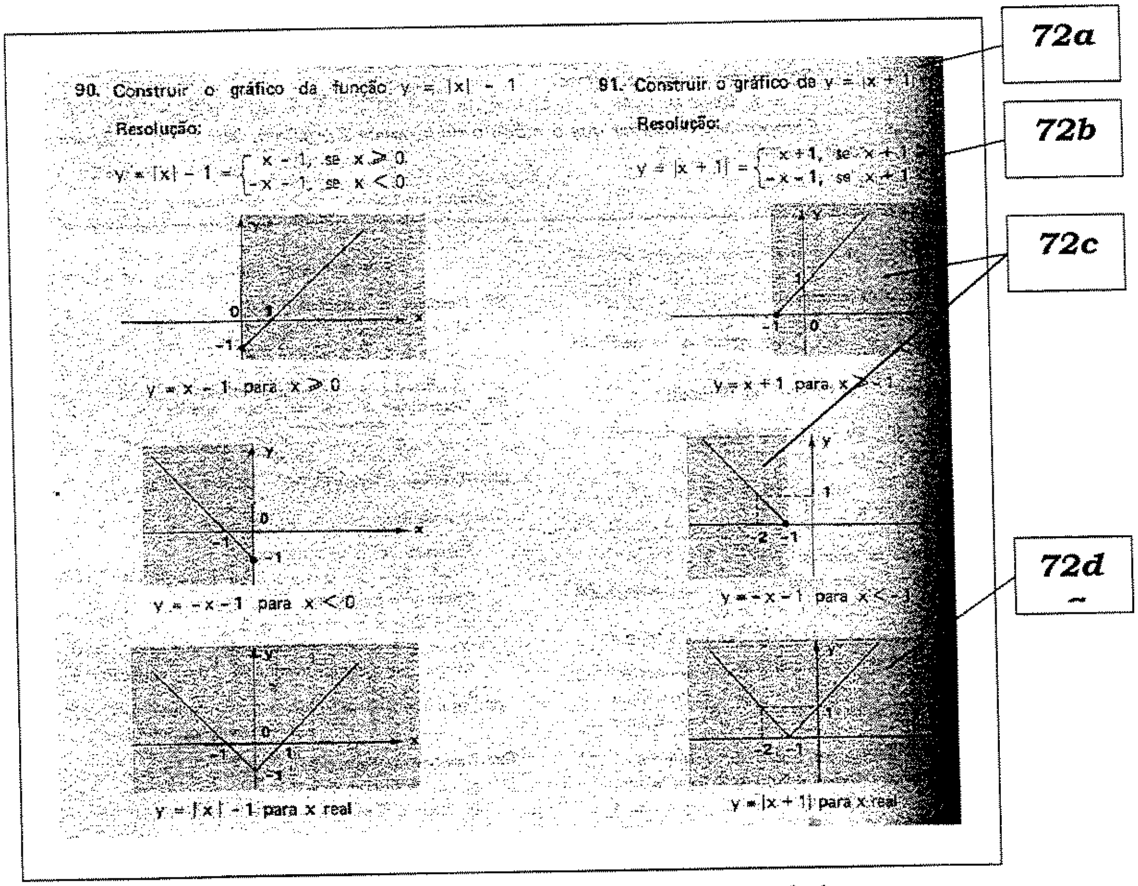


FIGURA 72 – Exercício com gráficos de funções modulares.
FONTE: Página 76, *Aulas de Matemática* – Iezzi e Outros - 1979

De um modo geral, para a construção dos gráficos que envolvem módulos, as expressões são analisadas em duas partes(72b), considerando os valores que tornam a parte interna do módulo positiva ou negativa. Em seguida, são traçados os gráficos correspondentes de cada situação (72c), e então, pela união dos gráficos é obtido o gráfico final(72d)

Pela analise geral do texto podemos afirmar que os conceitos algébricos sobre funções assumiram o papel central das exposições e ao que parece, coube aos gráficos um papel subsidiários nessa abordagem. Entretanto, para cada tema abordando funções a representação gráfica esteve presente.

4. Representações Gráficas nos Anos 90: Bongiovanni e Outros

No panorama mundial, a década de 90 caracteriza-se pela derrubada definitiva do socialismo, quando, em 1991, a União Soviética desintegra-se e torna-se a CEI (Comunidade do Estados Independentes). Mikhail Gorbatchev renuncia e em seu lugar assume Boris Yeltsin. Nesse período, George Bush é o presidente norte-americano e sob respaldo da ONU, comanda contra o Iraque a guerra do Golfo. Essa guerra destacou-se pela alta tecnologia bélica e por sua transmissão via satélite quase ininterrupta. Assim, mesmo num contexto multipolar os Estados Unidos conseguiram ratificar que ainda são a nação hegemônica, de grande poderio econômico, bélico e tecnológico.

A globalização, que tinha no socialismo soviético das décadas anteriores os principais entraves para sua realização, agora é concretizada e estimula a criação de blocos econômicos como o NAFTA, a UE, e o bloco do Pacífico, o que acentuou as diferenças dos hemisférios norte e sul, uma vez que 60 % do capital mundial concentra-se no países do hemisfério norte.

No Brasil, as promessas de campanha eleitoral de Fernando Collor de Mello, como um governo de austeridade, corte nos gastos públicos, fim de privilégios, entre outras, não se realizam. A equipe econômica do governo implantou um plano de ajuste que ficou conhecido como Plano Collor e que estabelecia entre outras medidas: o bloqueio por 18 meses de praticamente todos os depósitos bancários do país, o congelamento de preços e salários, e a extinção de várias empresas estatais.

Foi um período de instabilidade econômica e política, principalmente após denúncias de corrupção. O congresso nacional instaurou uma CPI (Comissão Parlamentar de Inquérito) para investigar as denúncias contra Paulo César Farias e suas ligações com o presidente Fernando Collor; iniciou-se um processo de impeachment, apoiado pelas massas populares. O congresso impõe ao presidente o afastamento de suas funções administrativas. Collor não resistiu às pressões e renunciou, sendo que o vice-presidente Itamar Franco assumiu o cargo de Presidente da República.

Durante o governo de Itamar Franco foi instituído o Plano Real pelo ministro Fernando Henrique Cardoso, com o intuito de reduzir a inflação e estabilizar a economia. O sucesso do plano econômico, garante a Fernando Henrique Cardoso a vitória nas eleições presidenciais de 1994. No governo de Fernando Henrique destacam-se as privatizações, a reforma da constituição, a continuidade do plano real, os conflitos agrários, entre outros. Fernando Henrique foi reeleito em 1998 apesar da recessão econômica e do elevado índice de desemprego em que o país se encontrava.

No ano de 1998, sob o ministério de Paulo Renato Souza são editados os novos Parâmetros Curriculares Nacionais, apontando as novas direções do ensino fundamental. Refletiremos sobre os possíveis reflexos dessa nova proposta, para o ensino das representações gráficas, na próxima etapa.

Como pontuamos na etapa anterior, as representações gráficas que aqui serão apresentadas, procurarão ilustrar algumas das múltiplas abordagens possíveis para o ensino de funções e da própria representação gráfica.

De certa forma, parece natural afirmar que cada período da história possibilita, a sua forma, a criação inventiva de representações gráficas. Também parece natural, afirmar que algumas das representações gráficas que foram se apresentando no decorrer da história do ensino da matemática escolar brasileira se mantiveram ao longo dos anos e se apresentam até hoje; outras porém, caíram em desuso; outras ainda, caíram em desuso mas ressurgiram em períodos posteriores. Então, é possível reconhecer que o processo de criação, estabelecimento e permanência de um tipo de representação gráfica no ensino é bastante dinâmico.

Nessa perspectiva, no processo pelo qual se mostram as representações gráficas, parece valido afirmar que a cada período, a variedade de representações gráficas disponíveis, em uso ou não, aumenta.

Neste sentido, procuraremos analisar algumas representações gráficas num livro dessa década, que ao nosso ver, mesclam muitos dos aspectos até aqui analisados.

Para tanto, escolhemos o livro *Matemática e Vida* de Vicenzo Bongiovanni, Olímpio Rudinin Vissoto Leite e José Luiz Tavares Laureano, em sua 3ª edição, 1995.

Notamos nesse livro, que os autores optaram, a exemplo do livro analisado na etapa anterior, introduzir as representações gráficas por meio de situações do cotidiano. Entretanto, as representações não são vinculadas a conceituação de função. Assim, temos neste caso as representações gráficas estudadas de forma independente.

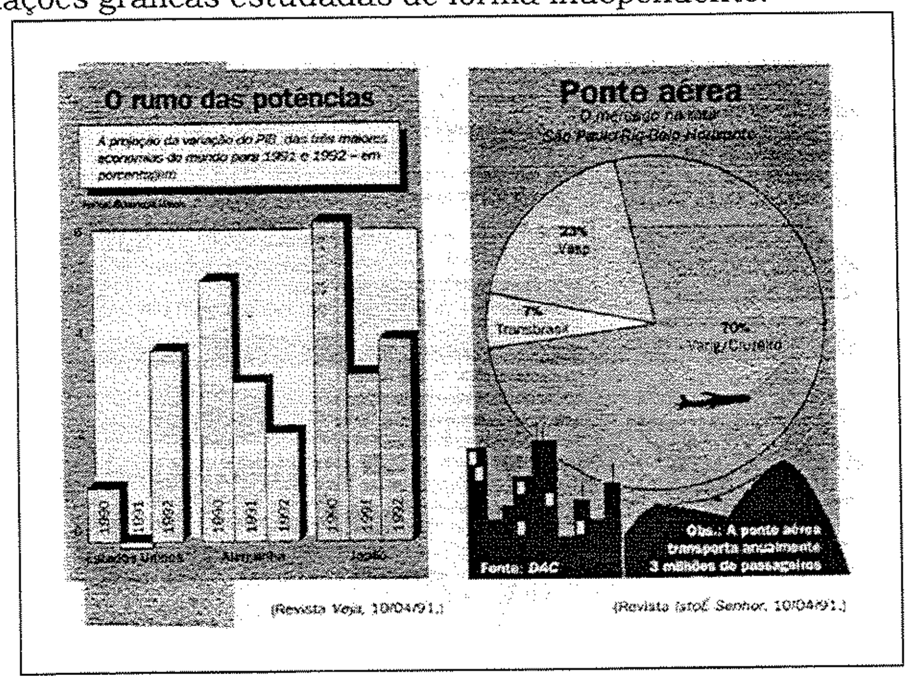
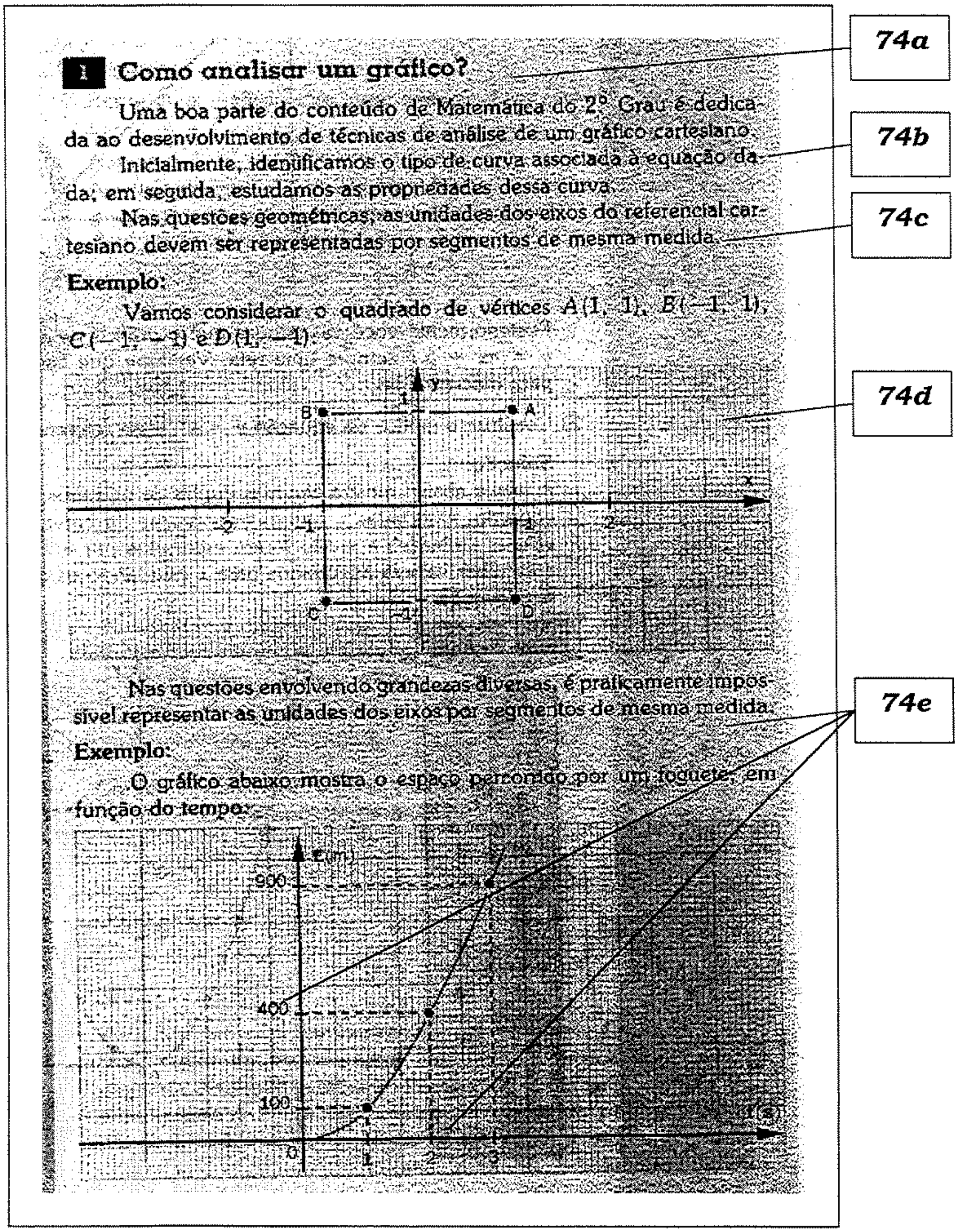


FIGURA 73 – Representações gráficas estatísticas.
FONTE: Página 48, *Matemática e Vida* – Bongiovanni e Outros – 1995.

Os autores esclarecem em seguida, os procedimentos básicos para a determinação de pontos e construção de gráficos cartesianos e uma



1 Como analisar um gráfico?

Uma boa parte do conteúdo de Matemática do 2º Grau é dedicada ao desenvolvimento de técnicas de análise de um gráfico cartesiano.

Inicialmente, identificamos o tipo de curva associada à equação dada; em seguida, estudamos as propriedades dessa curva.

Nas questões geométricas, as unidades dos eixos do referencial cartesiano devem ser representadas por segmentos de mesma medida.

Exemplo:

Vamos considerar o quadrado de vértices $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$ e $D(1, -1)$:

Nas questões envolvendo grandezas diversas, é praticamente impossível representar as unidades dos eixos por segmentos de mesma medida.

Exemplo:

O gráfico abaixo mostra o espaço percorrido por um foguete, em função do tempo:

FIGURA 74 – Como analisar um gráfico.
FONTE: Página 58, *Matemática e Vida* – Bongiovanni e Outros – 1995.

vez que já foram expostos tais conceitos, tentam estabelecer as ferramentas mínimas para se realizar uma análise gráfica (74a). Expõem de maneira muito sucinta os procedimentos gerais para o traçado e análise de um gráfico a partir de uma equação algébrica dada (74b), fazem considerações sobre gráficos cartesianos envolvendo figuras geométricas (74c) dando um exemplo (74d), além de abordarem a questão das diferentes escalas para os eixos x e y (74e).

Pela análise da ordem em que os conteúdos são apresentados neste livro, podemos dizer que os autores se propuseram a fazer nas unidades iniciais uma apresentação dos aspectos gráficos mais gerais, interromperam tal apresentação, para desenvolver outros assuntos que não envolviam gráficos, voltaram a abordar questões gráficas com a apresentação de noções básicas de geometria analítica, para só então, introduzir o conceito de função e voltar a desenvolver as representações gráficas.

Ao que parece, o desenvolvimento de alguns tópicos relativos à geometria analítica, como a caracterização da parábola e seus elementos, visam favorecer a abordagem, ao final do livro, de algumas funções, como a função de 2º grau.

Para a construção da parábola, após a caracterização da mesma como um lugar geométrico os autores enfatizam a nomenclatura dos principais elementos (75a), exemplificam a construção de uma parábola assinalando entre outros elementos o eixo de simetria(75b), o foco(75c), o vértice(75d), a diretriz(75e), bem como alguns dos pontos pertencentes a tal parábola.

Apoiadas na definição geométrica de parábola(75f), as fórmulas de distância são aplicadas e então(75g), é obtida a equação da parábola(75h). Finalizando a exposição da construção, são feitas considerações a respeito da generalização da equação da parábola(75i).

Vale notar, que a parábola e os principais gráficos traçados no livro são feitos sobre o papel milimetrado.

Nomenclatura dos elementos da parábola

A reta *d* é a *diretriz*, o ponto *F* é o *foco*, o ponto *V* é o *vértice* e a reta *t* é o *eixo de simetria* (note que *t* é perpendicular a *d* e passa por *F*).

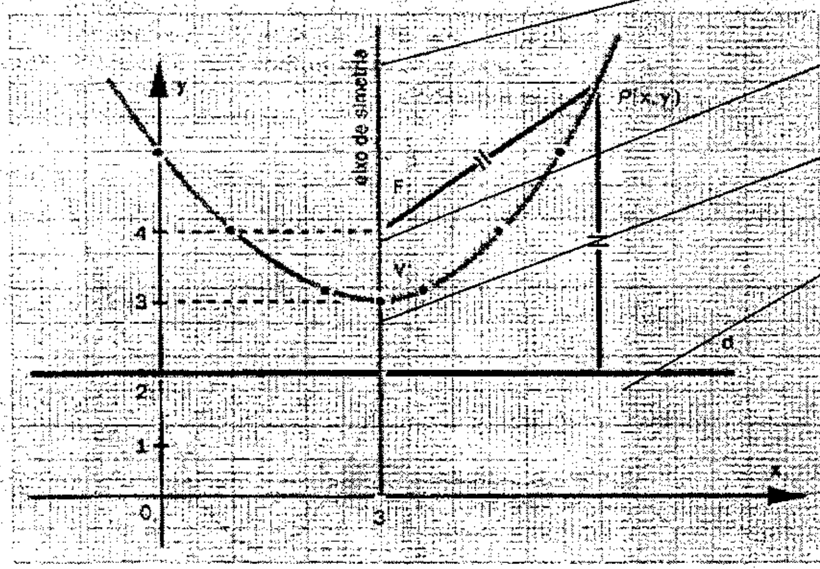
75a

Equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y

Exemplo:

Obter a equação da parábola de foco $F(3, 4)$ e diretriz $y = 2$.

Solução:



75b

75c

75d

75e

Considere um ponto $P(x, y)$ que se movimenta sobre a parábola. Ao percorrê-la, a abscissa e a ordenada de P variam. A distância de P ao foco F é *sempre igual* à distância de P à diretriz d.

75f

Observe na figura que a distância de P à diretriz d é $y - 2$; a distância de P ao foco F é dada pela fórmula $d(P, F) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$

75g

Logo, $\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = y - 2$. Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (y - 2)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{21}{4}$$

75h

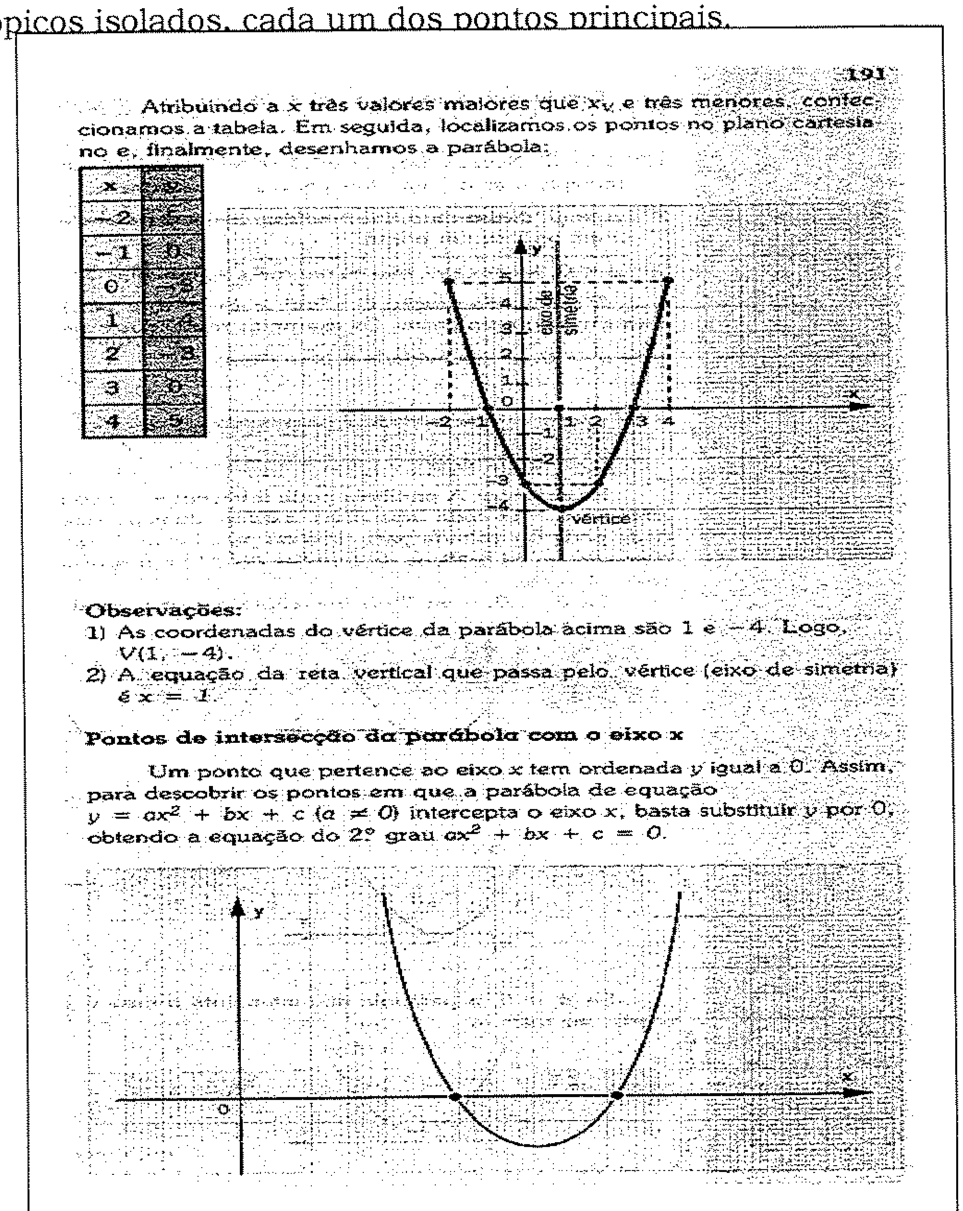
Repetindo esse procedimento para um foco F e uma diretriz d, quaisquer, obtemos a equação $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Reciprocamente, prova-se que qualquer equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, representa sempre uma parábola.

75i

FIGURA 75– Construção da parábola, segundo a geometria analítica.
FONTE: Página 145, *Matemática e Vida* – Bongiovanni e Outros – 1995

Ao terminar os estudos relativos à geometria analítica, os autores iniciam o estudo das funções. É interessante notar a maneira pela qual é apresentada a parábola, agora associada às funções de 2º grau. Ao que parece, de maneira similar a desenvolvida por Iezzi e Outros, os autores propuseram-se a traçar o gráfico de uma parábola apoiados em uma tabela, assinalando graficamente os principais pontos, envolvidos nas construção. Em seguida os autores começaram a discutir em tópicos isolados, cada um dos pontos principais.


191

Atribuindo a x três valores maiores que x_V e três menores, confeccionamos a tabela. Em seguida, localizamos os pontos no plano cartesiano e, finalmente, desenhamos a parábola:

x	y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

Observações:

1) As coordenadas do vértice da parábola acima são 1 e −4. Logo, $V(1, -4)$.
2) A equação da reta vertical que passa pelo vértice (eixo de simetria) é $x = 1$.

Pontos de intersecção da parábola com o eixo x

Um ponto que pertence ao eixo x tem ordenada y igual a 0. Assim, para descobrir os pontos em que a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ intercepta o eixo x, basta substituir y por 0, obtendo a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

FIGURA 76– Construção da parábola a partir da função do 2º Grau.
FONTE: Página 191, *Matemática e Vida* – Bongiovanni e Outros – 1995

Encontramos nesse livro a abordagem dos principais assuntos relativos às funções e as respectivas representações gráficas associadas. Ao final de cada capítulo, encontramos também um número considerável de exercícios, dentre os quais, muitos exigiam manipulações gráficas.

Nesse sentido, encontramos atividades exigindo a interpretação de representações gráficas feitas partir de funções definidas por várias sentenças. Na verdade, alguns gráficos apresentados, possuíam em cada parte dos seu traçado a expressão algébrica que definia a relação de dependência entre x e y (77a), outros gráficos não traziam essas expressões(77b), cabendo ao leitor, determiná-las.

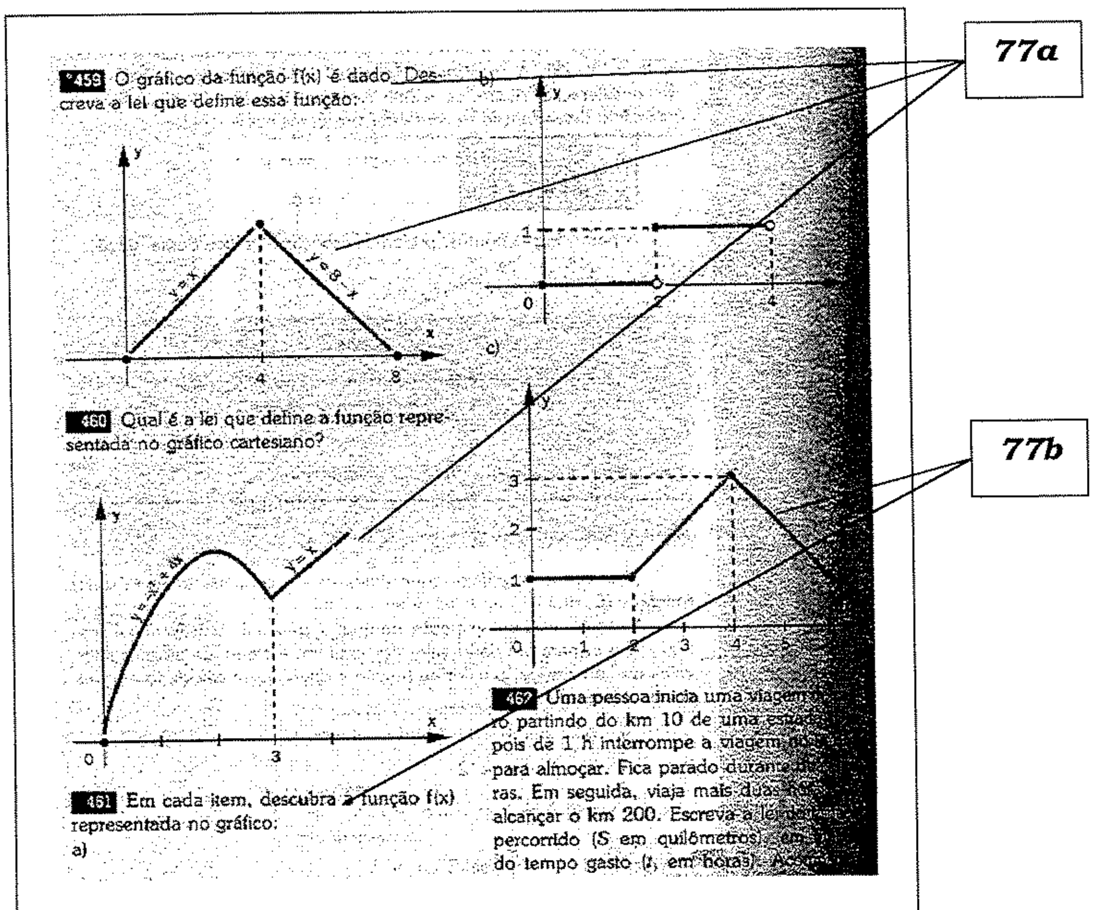


FIGURA 77– Exercícios envolvendo gráficos de funções definidas por partes.
FONTE: Página 191, *Matemática e Vida* – Bongiovanni e Outros – 1995

De um modo geral, as atividades citadas exigiam que o aluno partisse do gráfico esboçado, para em seguida fornecer a relação de dependência, composta pelas expressões algébricas. Outras atividades, exigiam ainda do leitor a construção de gráficos a partir das funções definidas por várias expressões matemáticas.

Enfim, essa obra apresenta uma quantia considerável de gráficos associados às funções, bem como, inseridos ou cobrados nos exercícios. Ao que parece, a inserção dos tópicos relativos à geometria analítica, antes mesmo de se discutir os assuntos relativos às funções, buscou fornecer ao aluno, ferramentas para um desenvolvimento de atividades mais ricas que exploravam os gráficos na seqüência do livro.

5. Propostas alternativas, perspectivas e outras reflexões

Detenhamo-nos agora nas características de algumas propostas alternativas, além de refletirmos sobre algumas perspectivas para o ensino das representações gráficas nos próximos anos.

Como pudemos perceber, durante nossa incursão histórica, as abordagens dadas ao ensino das representações gráficas variou ao longo dos anos. Em certos períodos as mudanças das representações gráficas nos livros textos foram significativas e se considerarmos as várias formas com as quais elas se apresentaram, podemos afirmar que são múltiplas as abordagens possíveis para o seu ensino.

Nessa perspectiva, como exemplo e buscando enriquecer nosso texto, contemplaremos de maneira breve, três propostas que visam complementar o ensino das representações gráficas. Na verdade, em nosso texto denominamos tais propostas como *alternativas*, entretanto tais abordagens vem surgindo, ao que parece, ao longo dos anos de maneira isolada em alguns livros didáticos, videos ou softwares. Os exemplos que apresentamos a seguir, representam o esforço de alguns professores em reunir de maneira mais sistemática algumas dessas representações gráficas na forma de livros paradidáticos, ou ainda, em materiais de apoio para os professores.

O primeiro livro que apresentamos é o paradidático *Em Busca das Coordenadas*, de Ernesto Rosa Neto, em sua 4ª edição, 1991, pertencente a série *A Descoberta da Matemática* publicada pela Editora Ática. A exemplo dos outros títulos dessa série, tendo como pano de fundo uma história de ficção/aventura destinada ao público infanto-juvenil, o autor discorre a respeito das representações gráficas.

Os personagens criados por Rosa Neto participam de uma viagem espacial onde são necessários conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas de navegação espacial.

Em nossa análise notamos a preocupação do autor em apresentar alguns conceitos matemáticos de maneira casual, na intenção de torná-los agradáveis ao leitor.

Nesse paradidático a história acontece em clima de aventura, onde um computador (78a) assume o papel de processar as coordenadas cartesianas fornecidas pelos personagens e apresentar, após o processamento dos dados, a representação gráfica (78b) impressa além de uma análise prévia dos dados (78c).

Os personagens também devem interpretar os gráficos e informações dadas pelo computador, além de verificar possíveis erros cometidos na inserção dos dados no computador.

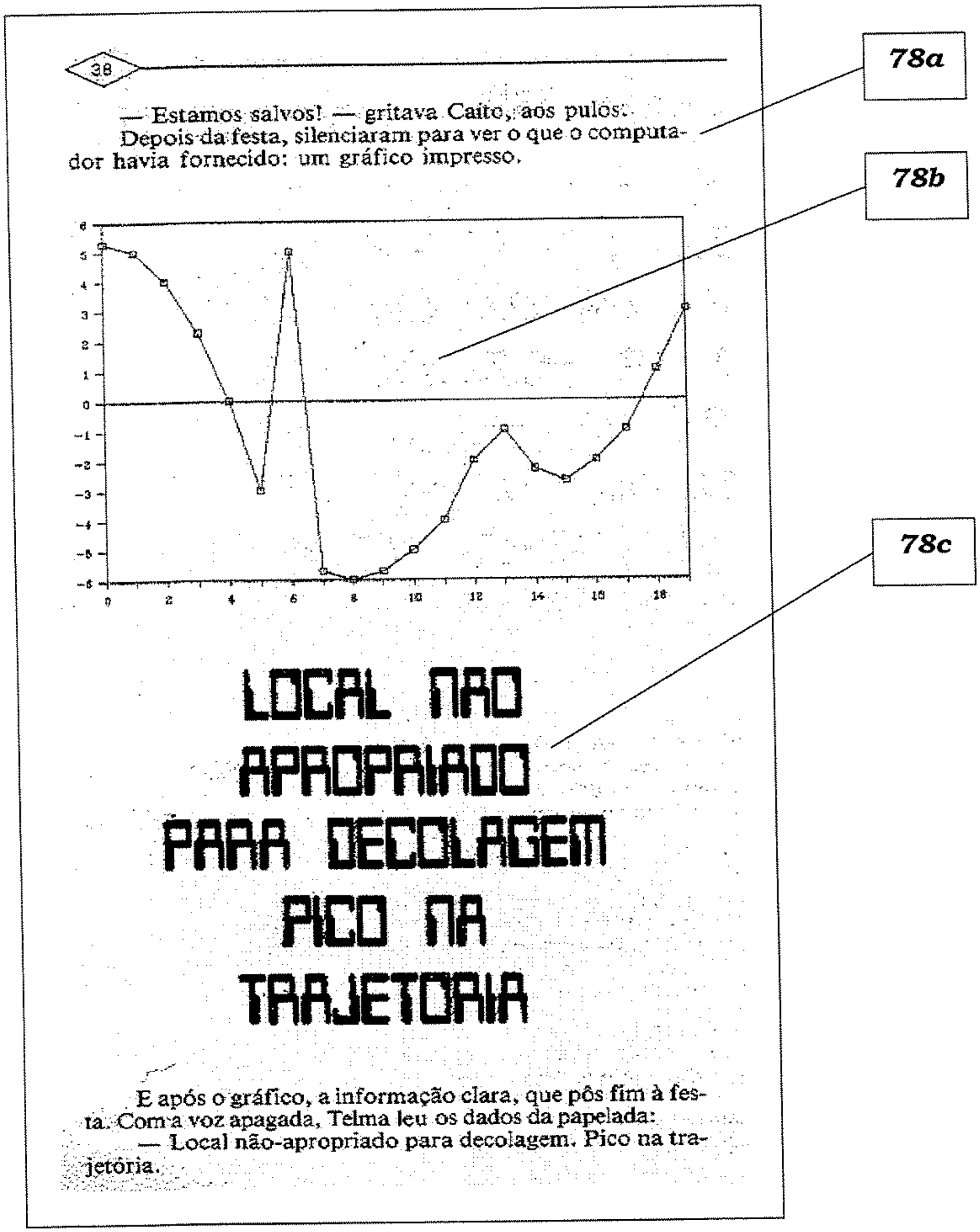
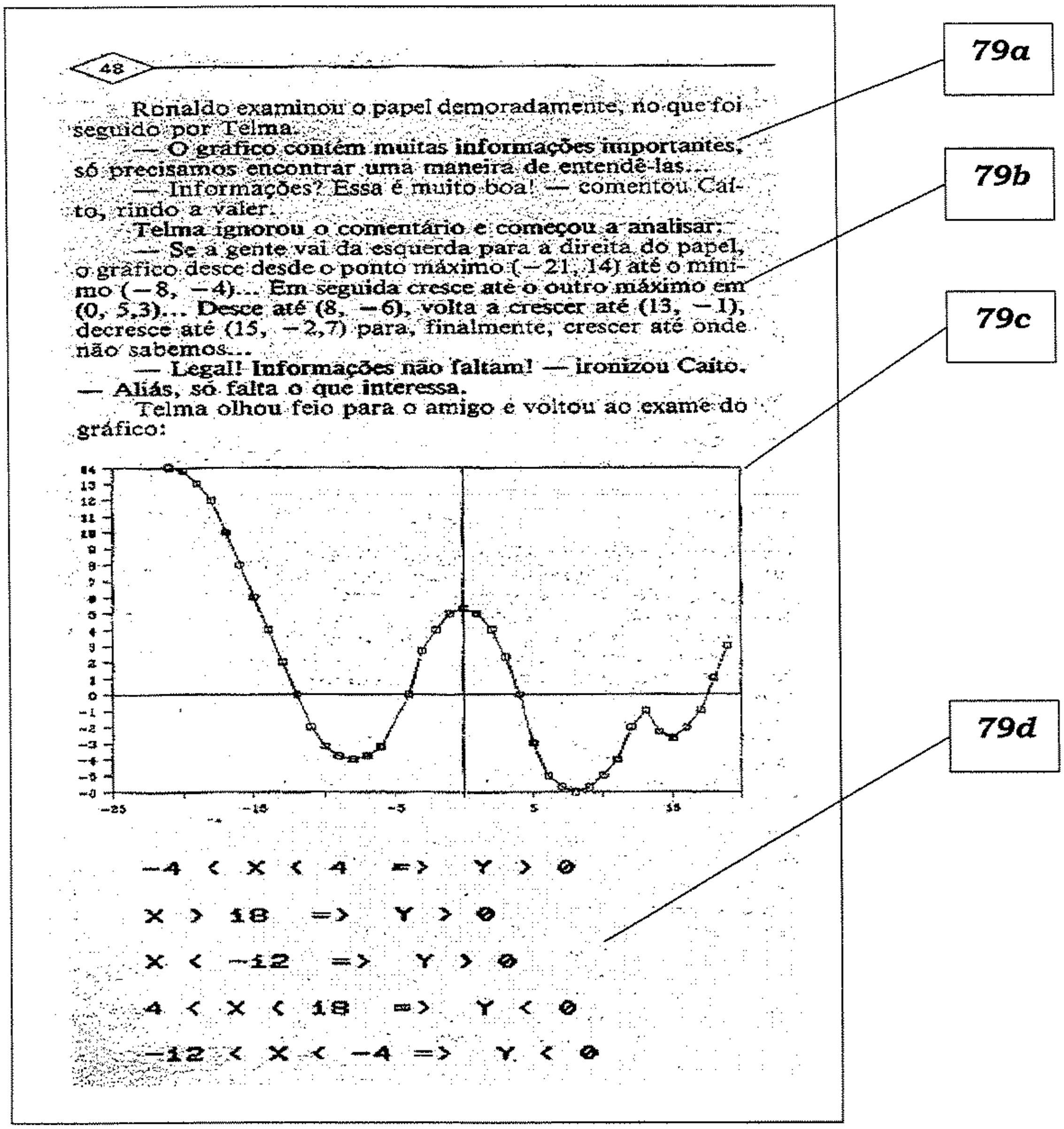


FIGURA 78– Representação gráfica em uma história de ficção de um livro paradidático, da série *A Descoberta da Matemática* da Editora Ática. FONTE– Pág. 38, *Em Busca das Coordenadas,* Ernesto Rosa Neto, 1991.

O autor se vale da fala dos personagens para expor opiniões de caráter axiológico (79a), bem como, para descrever alguns passos para a determinação/interpretação das coordenadas cartesianas (79b). Assim, por meio da interpretação simultânea das coordenadas dos pontos e do gráfico (79c), os personagens de Rosa Neto desenvolvem em sua história, alguns conceitos relativos à representação gráfica (79d).


48

Ronaldo examinou o papel demoradamente, no que foi seguido por Telma.

— O gráfico contém muitas informações importantes, só precisamos encontrar uma maneira de entendê-las...

— Informações? Essa é muito boa! — comentou Caito, rindo a valer.

Telma ignorou o comentário e começou a analisar:

— Se a gente vai da esquerda para a direita do papel, o gráfico desce desde o ponto máximo (−21, 14) até o mínimo (−8, −4)... Em seguida cresce até o outro máximo em (0, 5,3)... Desce até (8, −6), volta a crescer até (13, −1), decresce até (15, −2,7) para, finalmente, crescer até onde não sabemos...

— Legal! Informações não faltam! — ironizou Caito. — Aliás, só falta o que interessa.

Telma olhou feio para o amigo e voltou ao exame do gráfico:

FIGURA 79– Representação gráfica em uma história de ficção de um livro paradidático, da série *A Descoberta da Matemática* da Editora Ática. FONTE– Pág. 48, *Em Busca das Coordenadas*, Ernesto Rosa Neto, 1991.

Numa análise mais geral da obra pudemos perceber que as atenções são voltadas para a construção/análise dos gráficos associando-se, ao final do texto, os gráfico obtidos às funções elementares.

Outra proposta interessante, por nós analisada, é o texto *Funções Elementares – 100 situações-problema de matemática)* de Vera Clotilde Carneiro, pertencente a Nova Série Livro-Texto, publicado em 1993 pela Editora de Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O livro *Funções Elementares* é voltado principalmente aos professores do ensino médio e aos graduandos na licenciatura em matemática. Encontramos algumas das características gerais da obra nas palavras da autora:

> *O estudo das funções elementares é de extrema importância no segundo grau. Esse é o momento de introduzir, de forma intuitiva, algumas das noções básicas do Cálculo. Relações de dependência funcional entre variáveis, análise qualitativa e interpretação de gráficos, pontos críticos, modelagem, noções de limites e taxas de variação são conceitos que, em geral, surgem de forma mágica nos primeiros semestres dos cursos universitários e podem aparecer naturalmente em situações de Matemática Secundária.* CARNEIRO(1993, p.10)

Nessa proposta, a autora recorre aos gráficos em muitos dos problemas propostos, reservando um dos capítulos iniciais para a introdução/discussão das várias representações gráficas. Numa análise geral dos temas abordados no texto de Carneiro, percebemos que há predominância dos assuntos relativos à economia, aos fenômenos físicos e às questões biológico/ambientais.

Escolhemos como exemplo, dois gráficos abordando as questões no campo da Biologia, já que tais representações foram pouco comuns nos livros analisados até então.

Com relação ao gráfico da figura 80, a autora propõe que o leitor identifique as grandezas envolvidas, indique o domínio de variação, verifique se o gráfico representa uma função e se há algum padrão de regularidade.

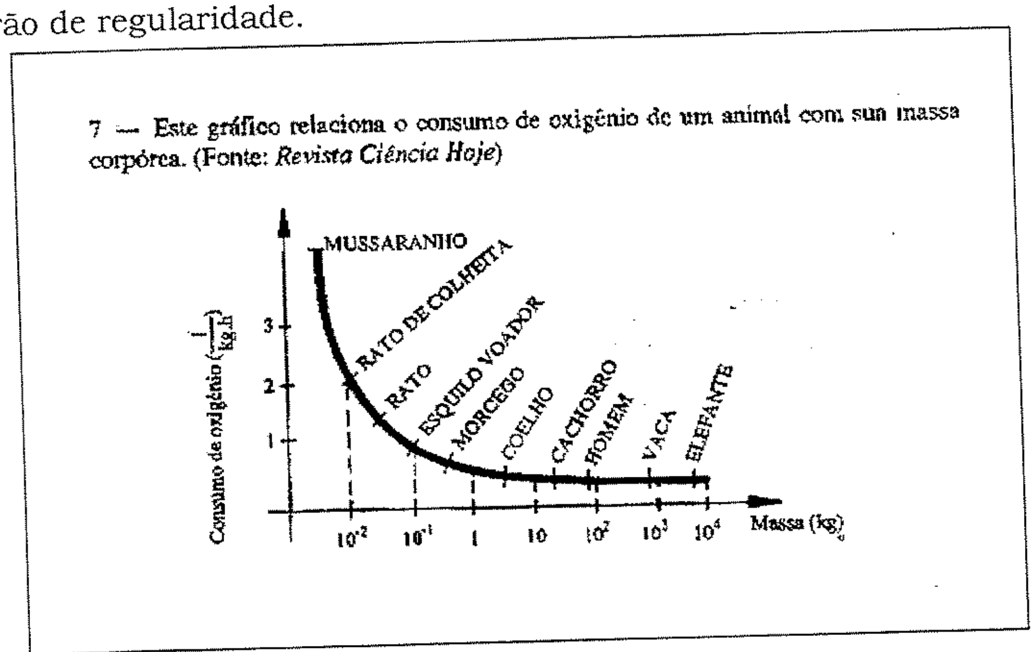


FIGURA 80– Representação do consumo do oxigênio de um animal em função de sua massa corpórea.
FONTE– Página 19, *Funções Elementares – 100 situações-problema de matemática,* Vera Clotilde Carneiro, 1993.

No trabalho dessa autora percebemos a intenção de familiarizar o leitor aos modelos matemáticos elementares aplicados às respectivas situações práticas. As funções lineares, quadráticas, hiperbólicas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, bem como seus respectivos gráficos, dão base aos modelos matemáticos desenvolvidos para a resolução/discussão das situações-problema.

Outra representação gráfica interessante (Figura 81) propõe ao leitor a associação do gráfico, que representa uma situação ambiental, a um modelo matemático envolvendo funções trigonométricas.

7 — O nível de um rio e a pesca comercial durante o ano foram representados pelos seguintes gráficos. O nível do rio é visto na curva contínua e os valores da pesca são representados no gráfico de barras. O modelo senoidal é uma boa aproximação para esses gráficos.

a) Dê a equação para o nível do rio, em metros, em função do tempo em meses do ano e use-a para estimar o nível do rio nos meses de janeiro e maio. Faça um novo gráfico para esta função e compare-o com o original. Verifique os erros de aproximação para esta função e compare-o com o original. Verifique os erros de aproximação cometidos.

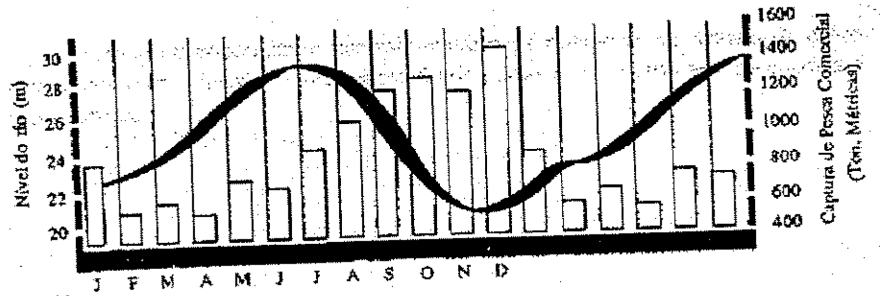
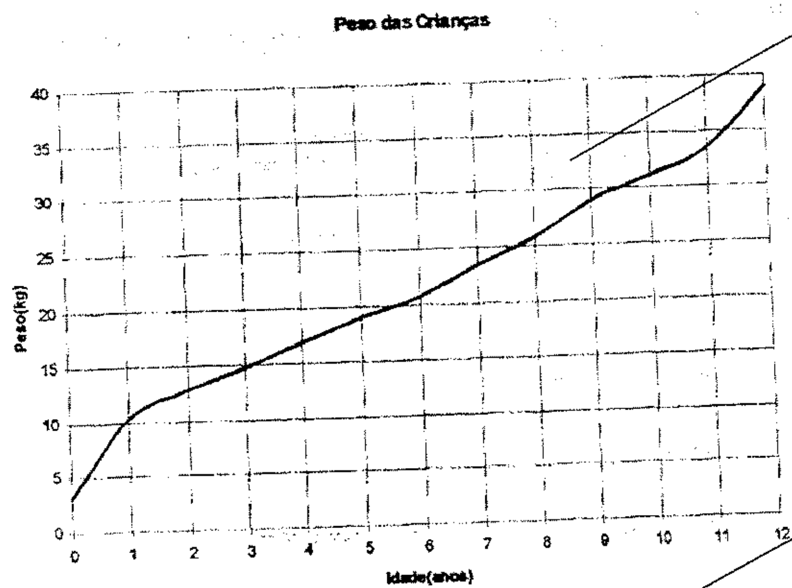


FIGURA 81– Representação gráfica do nível de um rio em função dos meses do ano.
FONTE– Página 71, *Funções Elementares – 100 situações-problema de matemática*, Vera Clotilde Carneiro, 1993.

A última obra a ser apresentada é uma elaboração coordenada pela professora Lúcia A. A. Tinoco e que envolveu a participação de professores de 5ª a 8ª séries, professores e alunos de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro no Projeto Fundão Matemática. O livro *Construindo o Conceito de Função no 1º Grau*, de 1996, apresenta atividades voltadas a auxiliar na apresentação/desenvolvimento do conceito de função com alunos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental.

Um exemplo das atividades propostas nesse livro é o problema que discute o peso das crianças em função dos anos de idade. Os dados são fornecidos em uma tabela onde é feita a distinção entre o peso das meninas e dos meninos. O gráfico apresentado (82a) diz respeito ao peso dos meninos. Em seguida são feitas inúmeras perguntas que devem ser respondidas consultando tabela e/ou gráfico (82b). Uma das perguntas confronta a precisão obtida pela apresentação da tabela com a obtida via gráfico (82c).

82a



82b

I) Use a tabela e o gráfico para responder as perguntas abaixo.

1) Qual seria o peso de um menino,
a) com 1 ano?
b) aos 3 anos?

82c

2) Com que idade as meninas pesam mais do que os meninos?

82d

3) Verifique entre que idades, no periodo de 1 ano, os meninos aumentam mais o peso?

4) Entre que valores estaria o peso de um menino aos seis anos e meio? onde você pode ter informação mais precisa, na tabela ou no gráfico?

5) Quanto um menino pesaria com 1 ano e 4 meses? e com 09 meses?

6) O peso de um menino aos 10 anos é igual à média aritmética dos seus pesos aos 9 e aos 11 anos?

7) E aos 12 meses, o peso de um menino é igual à média aritmética dos seus pesos com 0 e 2 anos?

8) De 4 para 5 anos, de quanto aumenta o peso de um menino?

FIGURA 82– Representação gráfica do peso dos meninos em função de suas idades.
FONTE– Página 24, *Construindo o Conceito de Função no 1º Grau* - Lúcia A. A. Tinoco (Organizadora) – 1996 – Projeto Fundão Matemática - UFRJ

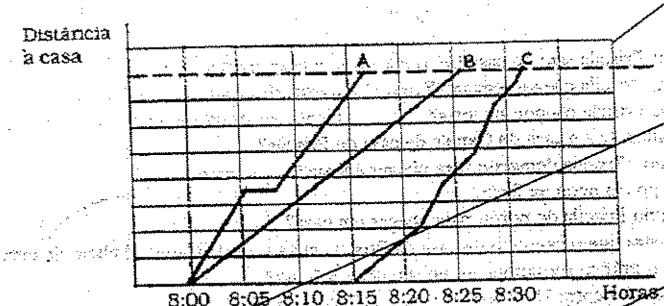
Explorando a situação-problema, é questionado qual o peso de um menino que tem 1 ano e 4 meses, ou ainda, o peso de um menino que tem 9 meses de idade (82d), e ao que parece, tais perguntas induzem a leitura do gráfico para uma estimativa, já que estes valores não são fornecidos na tabela. É cobrada também, a construção do gráfico a partir dos dados relativos às meninas.

83a

O Caminho para a Academia (Abrantes, P.e outros, 1991)

A Solange, O Bruno e o Miguel moram no mesmo prédio e frequentam a mesma academia. Todos eles percorrem o mesmo caminho na ida para a academia, só que não partem todos ao mesmo tempo nem utilizam os mesmos meios para lá chegar. Repare nestes gráficos.

83b



83c

Faça corresponder a cada um deles a situação que melhor os descreve sabendo-se que : a Solange foi a pé para a academia; o Miguel foi de bicicleta ; o Bruno saiu tarde de casa e teve de correr parte do caminho.

83d

a) Explique a razão das tuas escolhas.

b) Qual poderá ter sido a causa da existência , no gráfico A, de um pequeno nível por volta das 8:05 horas?

FIGURA 83– Representação gráfica das distâncias percorridas por três crianças em função do tempo.
FONTE– Página 29, *Construindo o Conceito de Função no 1º Grau* - Lúcia A. A. Tinoco (Organizadora) – 1996 – Projeto Fundão Matemática - UFRJ

Em outro exemplo de situação-problema desenvolvida nesse livro, é proposta a interpretação de um gráfico que traz as curvas representativas das distâncias de três crianças em relação ao prédio onde moram à medida que caminham em direção a uma academia (83a).

São dadas algumas informações que complementam as expostas no gráfico (83b). Ao aluno cabe associar cada curva a uma das crianças, justificando a associação (83c), além de justificar/interpretar a presença, em uma das curvas, de uma parte paralela ao eixo da horas(83d).

Percebemos em todo livro a intenção de se propor problemas diferentes dos encontrados nos livros didáticos, além de se tentar explorar ao máximo algumas situações-problema por meio de um grande número de perguntas.

Enfim, em nosso relato histórico nos esforçamos para apresentar um grande número de abordagens gráficas que, ao nosso ver, fazem parte da história da representação gráfica de funções. Nossa opção pela exposição de um grande número de situações onde a representação gráfica foi abordada no ensino da matemática buscou, entre outras coisas, caracterizar suas múltiplas possibilidades e abordagens didáticas.

Iniciamos o estudo histórico discutindo o que a nosso ver representou sua gênese na antigüidade, por volta do século III a.C, e encerramos nossa análise com os livros da última década do nosso século.

Parece natural, após nossa incursão histórica, o desejo de fazer conjecturas a respeito do ensino/desenvolvimento das representações gráficas nos livros didáticos para os próximos anos. Entretanto, achamos mais interessante buscar no texto dos Parâmetro Curriculares Nacionais (PCN), as menções com respeito às representações gráficas no currículo da matemática da escola fundamental.

Como se sabe, os PCN propõem amplos objetivos para o ensino fundamental, assim, poderíamos de certa forma, associar o ensino da matemática, como um dos componentes auxiliadores no cumprimento das metas propostas. No mesmo sentido, as representações gráficas, entendidas como uma das maneiras de expressão do pensamento matemático, auxiliariam na realização daquilo que é proposto nos PCN.

Nessa perspectiva, recorrendo ao texto de introdução dos PCN para melhor situar nosso discurso e destacar o papel atribuído as representações gráficas, podemos encontrar o seguinte:

> *Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de:*
> *(...)*
> • *utilizar diferentes linguagens – verbal, musical,* ***matemática, gráfica****, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação; ...*
> Introdução aos PCN - 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental – (1998, p 55) (os grifos são nossos)

Nessa perspectiva, o texto dos PCN para o ensino de Matemática nos 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental traz como um dos objetivos do ensino à matemática, no 3º Ciclo, o desenvolvimento:

> • *Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:*
> *(...)*
> ** traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;*
> *(...)*
> • *Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:*
> ** coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, ...* PCN - 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental – (1998, p 64 e 65)

De maneira parecida à proposta para o 3º Ciclo, encontramos a representação gráfica assumindo um papel importante nos objetivos para o 4º Ciclo:

• Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
(...)
** representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional;*
(...)
• Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
** construir tabelas de freqüência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos.* PCN - 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental – (1998, p 82)

Desta forma, podemos perceber que a representação gráfica além de sua abordagem associada à álgebra, tem um enfoque bastante voltado para a linguagem estatística.

Ainda nos PCN encontramos a valorização das novas tecnologias, com destaque especial ao computador com suas múltiplas possibilidades de uso no ensino, sendo uma delas, a representação gráfica.

No campo do ensino da matemática, para os próximos anos, parece natural supor o uso/desenvolvimento da representação gráfica de funções associado aos recursos computacionais. Parece natural, também esperar que as representações gráficas sejam trabalhadas de maneira ampla, com um enfoque estatístico das relações matemáticas que emergem do cotidiano.

Durante o processo de investigação histórica e análise das fontes de pesquisa, pudemos elaborar algumas considerações e avaliar alguns aspectos das representações gráficas. Cremos que as principais considerações foram expostas neste texto. Naturalmente, no processo de pesquisa, outras questões interessantes emergiram na análise dos dados.

Nesse sentido, com cuidado para não ser simplista demais, ou tendencioso, considero aqui, algumas perguntas que, naturalmente, já encaminham respostas, pois desde que as pergunta são formuladas elas contém em si mesmas uma orientação:

Teriam aparecido representações gráficas com aspecto funcional, sob influência dos trabalhos de Oresme, na obra dos jesuítas, em especial na obra de Clavio? E se apareceram, tais representações estiveram presentes, mesmo que incidentalmente, no Brasil Colônia, caracterizando assim as primeiras representações gráficas apresentadas no Brasil?

Quais os fatores que deteminaram o aparecimento das representações gráficas nos livros de álgebra? Foi um autor ou quem sabe, o eventual processo de sofisticação da álgebra e de seu campo de atuação abarcando os conteúdos relativos a representação gráfica?

A que se deve a ausência das representações gráficas em algumas obras que versavam a álgebra elementar no final do século XIX e início do século XX? Seria esta ausência um reflexo da concepção de alguns autores da época, que por vezes associavam a álgebra como uma *extensão / generalização* da aritmética? Pode ser que estas foram introduzidas nas experiências pedagógicas destes autores e então abandonadas por motivos que impedissem tais práticas. Se isso ocorreu, quais seriam tais motivos?

Na história do ensino das representações gráficas, qual a importância do uso do papel milimetrado, que verificamos ter sido usado nos livros da década de 30 e no livro da década de 90?

A que se deve a diminuição das representações gráficas percebida em alguns livros das décadas de 50 e 60?

Qual foi a influência da Movimento da Matemática Moderna na apresentação das representações gráficas nos livros da década de 70 e 80? Quais os traços desse movimento que podem ainda ser sentidos nos livros da década de 90?

Quais será o real papel que o computador assumirá nos próximos anos para o ensino das representações gráficas?

Essas perguntas caracterizam de certa forma algumas possibilidades de investigação histórica voltada às representações gráficas e que propomos para possíveis reflexões e análises futuras.

Nesse sentido, outros esforços como o de investigar a influência da obra de professores notáveis, que atuaram na primeira metade do século, na elaboração dos livros didáticos nacionais, a partir da análise dos livros didáticos de autores como Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, Jacomo Stávale, Alagcyr Munhos Maeder, entre outros; ou ainda, estudar mais atentamente as contribuições e o desenvolvimento das representações gráficas em associação com a história do desenvolvimento/ensino de funções, podem se mostrar como abordagens investigativas bastante ricas e interessantes.

CONCLUSÃO

A investigação histórica apresentada nesse texto procurou identificar os principais fatores responsáveis pela constituição das representações gráficas no processo da história da matemática. Nesse sentido, essa procura nos remeteu a investigar as principais contribuições relativas à representação gráfica produzidas pela humanidade no campo da Matemática.

Durante nossa reconstituição histórica alguns homens se destacaram no processo de elaboração/organização/transmissão dos principais conceitos matemáticos que ao longo dos anos culminaram em representações gráficas elaboradas.

Nesse sentido, queremos pontuar alguns fatos significativos que exploramos em uma história das representações gráficas de funções.

Nessa perspectiva, podemos apontar para Apolônio de Perga, que no rico panorama científico-cultural da Grécia Antiga desenvolve elaborados sistemas de coordenadas, no estudo das secções cônicas. O trabalho de Apolônio se perpetua na história da matemática e sua riqueza é revivida por grandes matemáticos de períodos posteriores.

Nicole Oresme é outra figura ilustre de nossa história das representações gráficas, pois na Idade Média desenvolveu representações gráficas com aspecto funcional ao estudar os movimentos dos corpos, apoiado nas teoria das proporções.

Descartes e Fermat, lançando mão de recursos algébricos mais sofisticados, com suas contribuições permitiram que a geometria analítica e as representações gráficas de funções se desenvolvessem em bases mais sólidas e consistentes.

Inúmeros matemáticos nos períodos posteriores contribuíram para a consolidação, sofisticação e início do ensino sistemático da geometria analítica e representações gráficas de funções.

No Brasil do final do século XIX e início do século XX as primeiras representações gráficas começam a ser ensinadas e desenvolvidas nos livros didáticos – apoiados basicamente nos textos usados na França.

A partir de 1930 podemos contemplar as contribuições e a maneira com a qual as representações gráficas são exploradas e desenvolvidas pelos autores de livros didáticos nacionais. Num movimento contínuo, tais autores e muitos outros não contemplados em nossa análise, possibilitaram a presença rica e definitiva das representações gráficas no ensino da matemática escolar brasileira.

Pelo que foi exposto em nossa história das representações gráficas de funções tentamos deixar claro que a constituição e ensino dessas representações gráficas, no processo da história da matemática e de seu ensino escolar, deve-se a muitos homens, que à sua maneira contribuíram, para tal realização. O papel assumido pelas representações gráficas no ensino de funções variou durante os anos; oscilando entre a mera citação formal e o centro das atenções em algumas abordagens de cunho teórico ou prático. Entretanto, é indiscutível a riqueza e a variedade das formas assumidas pela representação gráfica ao longo da nossa história escolar contribuindo, de uma maneira ou outra, para um ensino mais significativo da matemática no decorrer dos anos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, F. *A cultura brasileira.* Rio de Janeiro, SP, IBGE, 1943.

AZEVEDO, F. *As ciências no Brasil.* São Paulo, SP, Melhoramentos, 1955.

BARON, M.E. & BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo.* Brasília, Editora da UnB, 1985. 1v. 63p.

BERGERON, J. & HERSCOVICS, N. *Levels in the Understanding of Functions Concept,.* Procedings of Workshop of functions, Enschede, Holanda, 1982.

BISHOP, A. J. *Spatial Abilities and Mathematics Education – A Review.* Educational Studies in Mathematics, v.11, n.3, p. 257-269, 1980.

BISHOP, A. J. *Space na geometry.* In: LESH, R., LANDAW, M. (Eds.). *Aquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press, cap. 6, p. 175-203, 1983.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* [A History of Mathematics] Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo, E. Blücher, 1996. 496 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental – *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática,* Brasília, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental – *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais,* Brasília, 1998. 174p.

DUVAL, R. *As representações gráficas*: funcionamento e condições de sua aprendizagem Trad. Osmar Shawarz e Sílvia D. A. Machado PUC-SP. *IREM,* Strasbourg, (s.n), 1994. (Original francês) (não paginado).

ESPINOSA, F. H. Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa, *Educación Matemática,* México, v.7, n.1, p.63-??, abr. 1995.

EULER, L., *Introduction to Analysis of the Infinite.* Trad. John D. Blanton, New York: Springer-Verlag,1988 (Trad. de Introductio in analysin infinitorum , 1748)

EVES, H. *História da Geometria.* [Historical Topics for the Mathematics Classroom] Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1992. 77p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, 3).

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* [An Introduction to the History of Mathematics] Hygino H. Domingues. 2.ed. Campinas, SP, Editora da UNICAMP, 1997. 843 p.

FERREIRA, V. G. G. Conceito de Função Matemática Explorado de Forma Dinâmica, *Educação Matemática em Revista,* n. 6, ano 5, p.3-8, 1998.

F.J. *Éléments de Trigonométrie e Exercíses de Trigonométrie*, Paris, Edicion Jacques Gabay, 1997 (Fac símile)

GARCIADIEGO, A. R. História de las ideas matemáticas, *Mathesis*, México, v. 12, n.1, p.3-113, feb. 1996. (Original espanhol)

GRATTAN-GUINESS, I. Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical eduaction. *J. Math. Educ. Technol.* 4: p. 421-453, 1973.

GUILMIN, A. *Cours Complet d'Algèbre Élémentaire.* 14.ed Paris, Alpholse Picard, Libraire - 1880

HARIKI, S. *Analysis of Mathematical Discourse: Multiple Perspectives.* Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Univesidade of Southampton, 1992. (Original inglês)

KATZ, V. J. *A History of Mathematics.* New York, HarperCollins College Publishers, 1992. p. 395

KLINE, M. *Mathematical though from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press, 1972.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações.* Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores, *Zetetiké*, CEMPEM – FE/UNICAMP, Campinas. v.5, n.8, p. 73-105, Jul./Dez. 1997.

MIGUEL, A., FIORENTINI D. & MIORIM, M.A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?, *Pro-Posições,* FE/UNICAMP, Campinas. v.3, n.1(7), p. 39-54, Mar, 1992.

MIORIM, M. A. *O Ensino da Matemática: Evolução e Modernização,* Tese de Doutorado, FE-UNICAMP, Campinas, 1995. 204p.

ROCHA, F. *Teorias Sobre a História.* Braga (Portugal): Faculdade de Filosofia, 1982. 381 p.

ROMANELLI, O. O. *História da Educação no Brasil,* Petrópolis, RJ, Vozes, 1978. 267 p.

ROXO, E. *A Matemática na Educação Secundária,* São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1937. 286 p.

SILVA, C. M. S. O Desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte, *Bol. Soc. Paran. Mat.* Curitiba, v.14, n.1/2, p.51-77, 1993.

STRUIK, D.J. *História Concisa das Matemáticas.* [A Concise History of Mathematics] João C. S. Guerreiro. Lisboa, Gradiva, 1989. 360p.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930),* Tese de Doutorado, FEUSP, São Paulo, 1997. 204p.

WEREBE, M. J. G. *Grandezas e Misérias do Ensino no Brasil: 30 anos depois.* São Paulo, SP, Atual, 1994. 304 p.

LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

BEZERRA, M. J. *Curso de Matemática.* 5 ed. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1961.

BONGIOVANNI, D., VISSOTO, E. & LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida: 2ª Grau - Volume 1-* 3 ed. São Paulo, Editora Ática, 1995.

BOULOS, P. & WATANABE, R. *Matemática - 2º Grau - Volume 1,* 3 ed. Editora Nacional, 1979.

CARNEIRO, V. C. *Funções Elementares – 100 situações-problema de matemática.* Porto Alegre, Editora da Universidade/UFRGS, 1993. (Nova série livro-texto; 23.)

CARVALHO, T. M. *Matemática para o terceiro ano colegial.* 4ed. São Paulo, Edições Melhoramentos, 1954

F.I.C. - *Elementos de Álgebra - revistos e adaptados a instrucção secundária do Brazil pelo Dr. Eugênio de Barros Raja Gabaglia,* Rio de Janeiro, H-Garnier Livreiro-Editor. (A data de publicação do original em francês varia de 1875 a 1884)

F.T.D. - *Algebra Elementar.* Rio de Janeiro, Livraria Paulo Azevedo & Cª, 1921

F.T.D. - *Trigonometria Elementar.* São Paulo, Livraria Paulo Azevedo & Cª, 1928

F.T.D. - *Trigonometria Plana e Esférica.* São Paulo, Livraria Francisco Alves – Editora Paulo de Azevedo LTDA, 1955

IEZZI, G. et al. *Aulas de Matemática – Volume 1.* São Paulo, Atual, 1979.

MAEDER, A. M. *Lições de Matemática – 1º Ano (1ª Série).* 9ed. São Paulo, Edições Melhoramentos, 1940

MAEDER, A. M. *Curso de Matemática – 1º Livro (Ciclo Colegieal).* São Paulo, Edições Melhoramentos, 1946

MARIN, A. P. Elementos de Algebra. 5 ed. São Paulo, Escolas Proffissionaes do Lyceu Coração de Jesus, 1923

ROSA NETO, E. *Em Busca das Coordenadas – Série A Descoberta da Matemática.* 4ed. São Paulo, Ática, 1991.

ROXO, E.M.G. *Curso de Matemática Elementar,* Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1930

SERRASQUEIRO, J.A. *Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinia.* 3ed. Coimbra, Livraria central de J. Diogo Pires – Editor, 1891

TINOCO, L. A. A. *Construindo o Conceito de Função no 1º Grau.* Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES. Rio de Janeiro, 1996.

APÊNDICE 1

Recortes de partes do livro *Trigonometria Rectilinea*, de José Adelino Serrasqueiro, de 1891.

INDICE

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

LIVRO PRIMEIRO

Relações trigonometricas - Formulas trigonometricas

CAPITULO I

Relações trigonometricas

Pag.

CAPITULO II

Formulas trigonometricas

LIVRO SEGUNDO

Taboas trigonometricas

CAPITULO I

Construcção, disposição e uso das taboas

CAPITULO II

Applicações das taboas

LIVRO TERCEIRO

Resolução dos triangulos. Theoremas fundamentaes

CAPITULO I

Theoremas relativos á resolução dos triangulos

CAPITULO II

Resolução dos triangulos

LIVRO SEGUNDO

Taboas trigonometricas

CAPITULO I

Construcção, disposição e uso das taboas

CAPITULO II

Applicações das taboas

LIVRO TERCEIRO

Resolução dos triangulos. Theoremas fundamentaes

CAPITULO I

Theoremas relativos à resolução dos triangulos

CAPITULO II

Resolução dos triangulos

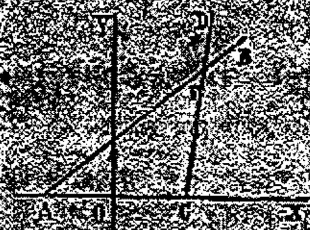
NOÇÕES DE GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS Á

LINHA RECTA E AO CIRCULO

Esta equação mostra que, *o coefficiente angular de uma recta, que passa por dois pontos dados, é a relação da differença das ordenadas dos dois pontos para a differença das suas abscissas.*

17. *Achar o angulo de duas rectas dadas.* Sejam



$$y=ax+b,\quad y=a'x+b'$$

as equações das duas rectas dadas CD e AB: seja V o angulo das duas rectas e α e α' os angulos DCx e BAx que ellas fazem com o eixo dos x. Temos

$$\alpha=\alpha'+V, \text{ d'onde } V=\alpha-\alpha',$$

e

$$\operatorname{tang} V=\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\alpha'}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'}\ldots\ldots(a).$$

Posto isto, se os eixos forem rectangulares, é

$$a=\operatorname{tang}\alpha,\quad a'=\operatorname{tang}\alpha',$$

e então a formula, que dá o angulo das duas rectas, é

$$\operatorname{tang} V=\frac{a-a'}{1+aa'}\ldots\ldots\ldots\ldots(b).$$

Se for $a=a'$, é $\operatorname{tang} V=0$, e $V=0$: logo as duas rectas são parallelas; e portanto; *para duas rectas serem parallelas, é necessario que os coefficientes angulares sejam eguaes.*

Se for $1+aa'=0$, é $\operatorname{tang} V=\infty$, e $V=90°$: logo as duas rectas são perpendiculares; e como de

$$1+aa'=0,\quad \text{se tira}\quad a'=-\frac{1}{a},$$

segue-se que: *para duas rectas serem perpendiculares é necessario que os coefficientes angulares sejam reciprocos e de signaes contrarios.*

Supponhamos, em segundo logar, que os eixos são obliquos

Recortes de partes do livro *Algebra Elementar,* de José Adelino Serrasqueiro, de 1927.

CURSO DE MATHEMATICA ELEMENTAR

TRATADO

DE

ALGEBRA ELEMENTAR

COMPOSTO SEGUNDO

O

PROGRAMMA OFFICIAL

PARA O ENSINO D'ESTA SCIENCIA NOS LYCEUS

POR

José Adelino Serrasqueiro

BACHAREL FORMADO EM PHILOSOPHIA PELA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
PROFESSOR DE MATHEMATICA NO LYCEU CENTRAL DE COIMBRA
SOCIO EFFECTIVO DO INSTITUTO DA MESMA CIDADE

OBRA APPROVADA PELO CONSELHO SUPERIOR DE INSTRUCÇÃO PUBLICA

15.ª EDIÇÃO

COIMBRA
LIVRARIA CENTRAL DE J. DIOGO PIRES — SUCCESSORAS

1927

ÍNDICE

LIVRO PRIMEIRO

Calculo algebrico

CAPITULO I

Noções preliminares

CAPITULO II

Calculo algebrico das expressões inteiras

CAPITULO III

Fracções algebricas

CAPITULO IV

Potencias e raizes dos monomios. Calculo dos radicaes. Calculo das quantidades imaginarias

CAPITULO V

Quadrado e raiz quadrada dos polynomios. Calculo dos expoentes negativos e fraccionarios

LIVRO SEGUNDO

Equações e desegualdades do primeiro grau

CAPITULO I

Equações e problemas do primeiro grau a uma incognita

CAPITULO II

Equações e problemas do primeiro grau a muitas incognitas

CAPITULO II

Equações reductiveis ao segundo grau. Equações simultaneas do segundo grau

LIVRO QUARTO

Potencias e raizes dos polynomios. Fracções continuas. Logarithmos

CAPITULO I

Potencias e raizes dos polynomios

CAPITULO II

Fracções continuas

CAPITULO III

Theoria dos logarithmos

CAPITULO IV

Applicações dos logarithmos

LIVRO QUINTO

Determinações. Sua applicação à resolução e discussão das equações do primeiro grau

CAPITULO I

Theoria elementar dos determinantes

CAPITULO II

Applicação das determinantes á resolução e discussão de um systema de equações do primeiro grau

Frontispício do livro *Elementos de Álgebra* de Cristiano Benedito Ottoni, de 1882.

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

COMPILADOS POR

C. B. Ottoni.

COMPENDIO ADOPTADO

PELOS ESTABELECIMENTOS DE INSTRUCÇÃO SUPERIOR E SECUNDARIA

DO IMPERIO DO BRAZIL

QUINTA EDIÇÃO CORRECTA E AUGMENTADA

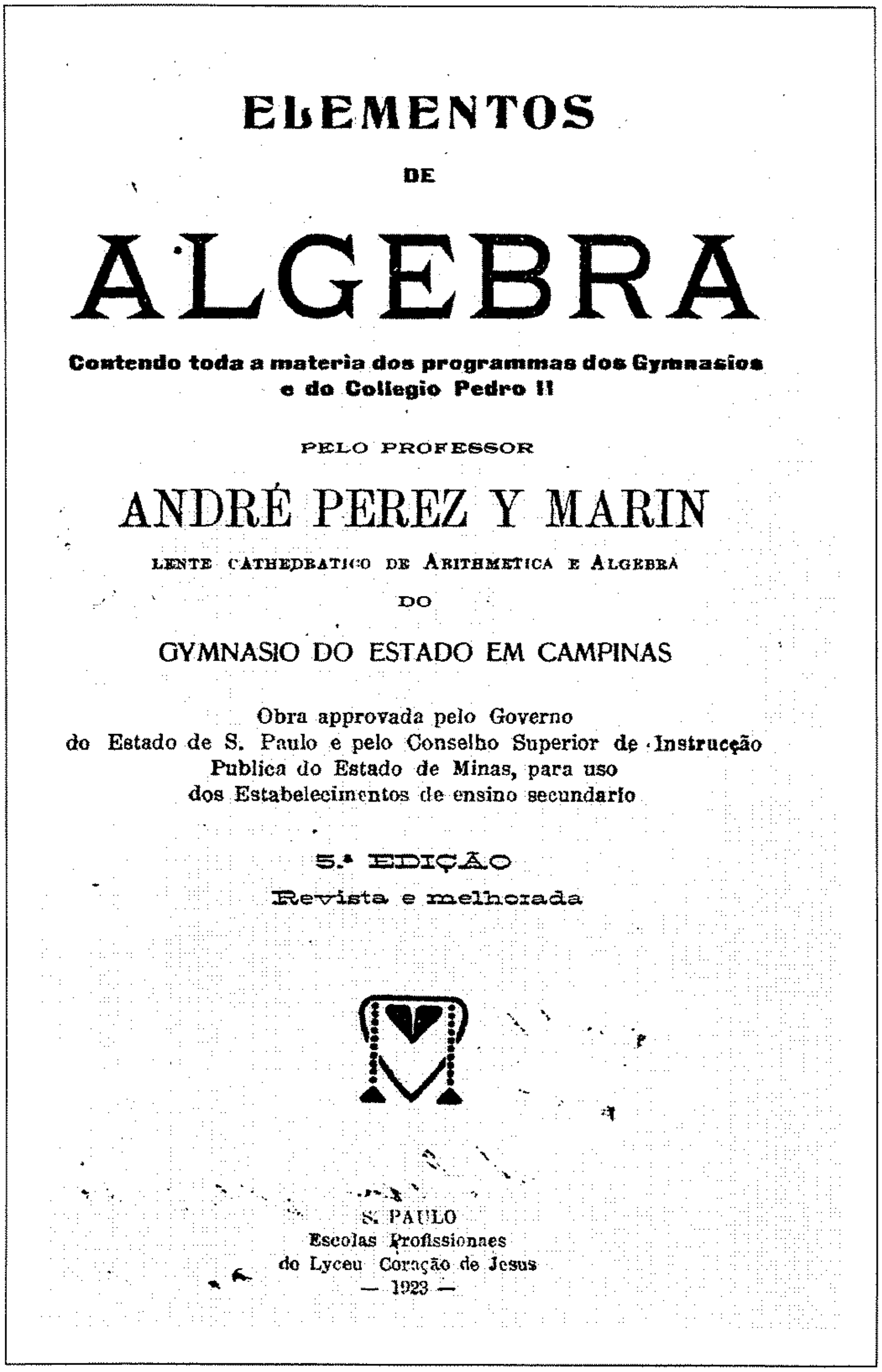
RIO DE JANEIRO

EDITORES

ALVES & C. — 46, Rua de Gonçalves Dias, 48 | H. LAEMMERT & C. — 66, Rua do Ouvidor, 66

1882

Frontispício do livro *Elementos de Álgebra* de André Perez e Marin, de 1923.



ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

Contendo toda a materia dos programmas dos Gymnasios e do Collegio Pedro II

PELO PROFESSOR

ANDRÉ PEREZ Y MARIN

LENTE CATHEDRATICO DE ARITHMETICA E ALGEBRA

DO

GYMNASIO DO ESTADO EM CAMPINAS

Obra approvada pelo Governo
do Estado de S. Paulo e pelo Conselho Superior de Instrucção
Publica do Estado de Minas, para uso
dos Estabelecimentos de ensino secundario

5.ª EDIÇÃO

Revista e melhorada

S. PAULO
Escolas Profissionaes
do Lyceu Coração de Jesus
— 1923 —

Recortes de partes do livro *Elementos de Álgebra* de André Perez e Marin, de 1923.

PARECER DO CONSELHO SUPERIOR

— DE —

Instrucção Publica do Estado

— DE —

Minas Geraes

Parecer N.º 30

O Conselho Superior de Instrucção Publica resolve approvar, para uso dos estabelecimentos de Instrucção secundaria do Estado, o livro denominado ***Elementos de Algebra,*** de Perez y Marin, por ser um trabalho de valor incontestavel e um curso completo e methodico dessa sciencia, sem ter, como as obras congeneres, o grande defeito da prolixidade.

Bello Horizonte, 9 de Outubro de 1909.

Valladares Ribeiro — Helena Penna — A. Joviano — Aurelio Pires

Todos os exemplares desta edição serão numerados e assignados pelo autor, considerando-se clandestino o exemplar que carecer deste requisito.

N.º 2681

A. Perez y Marin

Exemplo: *Representar graphicamente a equação*

$$4x = 5y \text{ ou } \frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$$

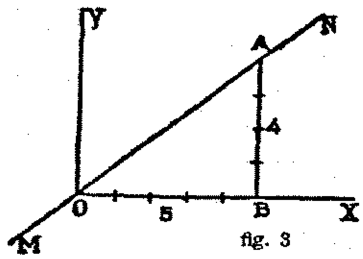


fig. 3

Toma-se sobre OX (fig. 3) um comprimento OB egual a 5 unidades, e sobre BA, parallela a OY, um comprimento egual a 4 unidades.

A recta MN representa a equação proposta.

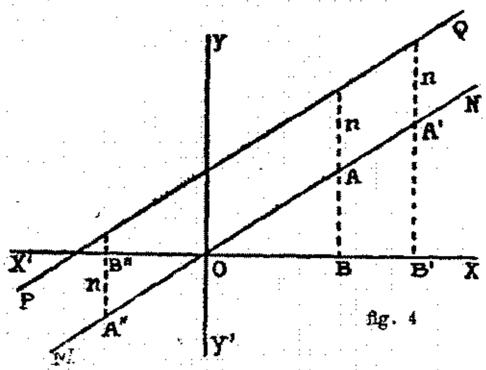


fig. 4

2.º caso. Supponhamos agora que na equação $y = mx + n$ o valor de n não seja nullo. Comparando esta equação com a precedente $y = mx$, é facil ver que as ordenadas correspondentes á mesma abscissa x differem constantemente do mesmo comprimento n. Portanto, basta representar primeiro a equação $y = mx$, conforme já ficou exposto, e augmentar ou diminuir as ordenadas do valor de n, conforme n é positivo ou negativo. Na figura 4, si MN representa a equação $y = mx$, PQ representa a equação $y = mx + n$.

Conclue se, pois, que uma equação do primeiro grau a duas incognitas é sempre representada graphicamente por uma linha recta.

Constróe-se esta recta facilmente, determinando os dois pontos em que ella corta os eixos. Para isto, basta fazer na equação proposta $x = 0$, e o valor de y dá o ponto em que a recta corta o eixo dos Y; faz-se tambem $y = 0$, e o valor de x dá o ponto em que a recta corta o eixo dos X.

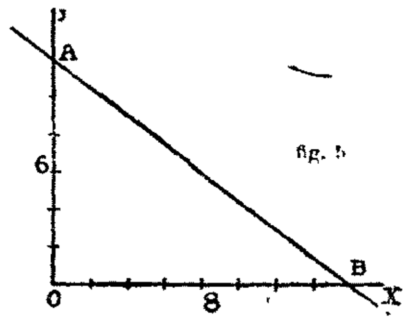


fig. 5

EXEMPLO: *Construir a representação graphica da equação* $3x+4y= = 24$ (fig. 5).

Fazendo $y=0$, acha-se $x=\frac{24}{3}=8$.

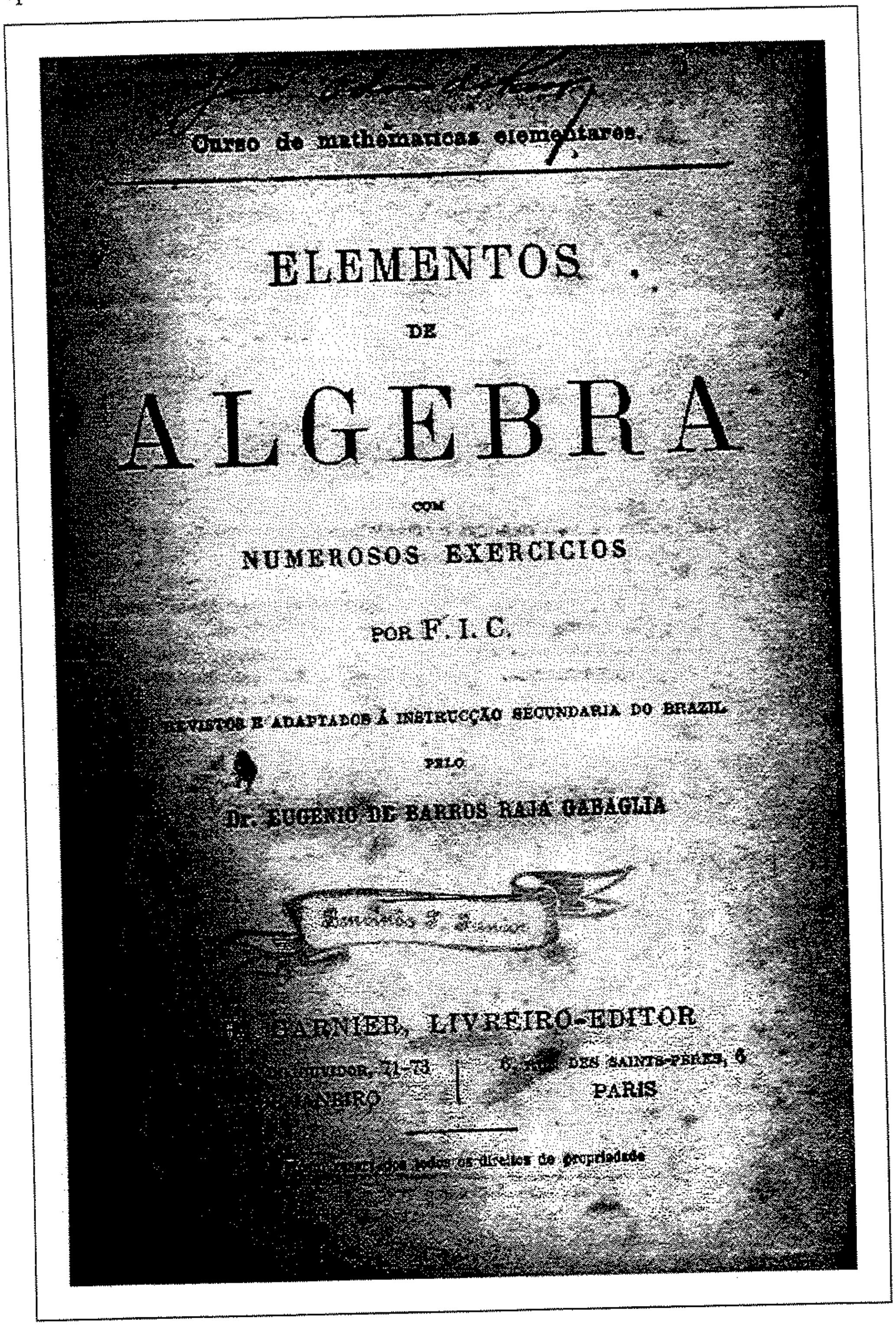
Fazendo $x=0$, acha-se $y=\frac{24}{4}=6$.

Toma-se no eixo OX o comprimento $OB=8$, e no eixo OY o comprimento $OA=6$; a recta AB é a solução do problema. Si for uma equação do 1.º grau a uma incognita, como $ax=b$, donde $x=\frac{b}{a}$, sua representação geometrica será uma recta cujos pontos têm a mesma abscissa $\frac{b}{a}$, e portanto parallela ao eixo dos Y. Analogamente, a representação graphica da equação $ay=b$ é uma parallela ao eixo dos X, cujos pontos têm a mesma ordenada $\frac{b}{a}$. Finalmente, a representação graphica de $x=0$ é o eixo dos Y, e a de $y=0$ é o eixo dos X.

117. Graphico da temperatura e do movimento de um trem de estrada de ferro. — Para representar a variação da temperatura durante um certo tempo por um graphico, forma-se primeiro uma tabella das temperaturas observadas a intervallos de tempo eguaes, por exemplo de hora em hora ou de duas em duas

APÊNDICE 2

Frontispício do livro *Elementos de Álgebra – F.I.C.* 1875/1884



Curso de mathematicas elementares.

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

COM

NUMEROSOS EXERCICIOS

POR F. I. C.

[illegible]VISTOS E ADAPTADOS Á INSTRUCÇÃO SECUNDARIA DO BRAZIL

PELO

Dr. EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA

[illegible] ARNIER, LIVREIRO-EDITOR

[illegible] OUVIDOR, 71-73 | 6, [illegible] DES SAINTS-PÈRES, 6

[illegible] JANEIRO | PARIS

[illegible] todos os direitos de propriedade

Recortes de partes do livro *Elementos de Álgebra – F.I.C.* 1875/1884

mento Ox igual a 3 vezes a unidade adoptada, e em OY, no sen[illegible] dos valores positivos, um comprimento igual a 2 vezes a unidade; as parallelas xP [illegible] aos eixos cortam-se n'um ponto P, que é o ponto pedido.

Com effeito, os pontos da recta yP são os unicos que têm uma ordenada igual a 2, e os pontos de xP são os unicos que têm uma abscissa igual a 3; e como estas rectas só se cortam n'um ponto, segue-se que esse ponto P é o unico que satisfaz ás condições dadas.

II. *Determinar as posições de um ponto cujas coordenadas são* $x=2$ e $y=3$.

Marca-se em OX e á esquerda do ponto O, um comprimento Ox igual a 2 e em Oy, acima do ponto O, um comprimento igual a 3. As parallelas xP, 3P aos eixos, cortam-se n'um ponto P, que é o ponto pedido.

Vê-se que a posição d'um ponto, cujas coordenadas são $x=-2$ e $y=-2$, está em Q, e que a d'um pon[illegible] cujas coordenadas são $x=4$ e $y=-2$, acha-se em R.

Representação graphica d'uma equação do 1.º grão

135. Uma equação do primeiro grão a uma incognita póde se[illegible] reduzir-se á forma

$$ax=b, \text{ d'onde } x=\frac{a}{b}$$

ou, representando $\frac{b}{a}$ por uma quantidade unica m,

$$x=m$$

na qual m é uma quantidade conhecida, positiva ou negativa, [illegible] ou fraccionaria, monomio ou polynomio, ou mesmo nulla, [illegible]

Esta equação, $x=m$, representa uma recta, cujos pontos [illegible] por abscissa m: é pois uma parallela ao eixo dos y.

Para construil-a marca-se em OX, á direita ou á esquerda [illegible] O, segundo m for positivo ou negativo, um comprimento [illegible] valor absoluto á m, e por este ponto traça-se AB ou A'B' [illegible] mente ao eixo dos y. Todos os pontos das rectas AB e A'B' [illegible] effeito como abscissas $+m$ ou $-m$.

Uma equação tal como

$$y=+b$$

representa uma recta CD, parallela ao eixo dos x (fig. [illegible]

As equações

$$y=0, \text{ e } x=0$$

representam, uma o eixo dos x, a outra o eixo dos y.

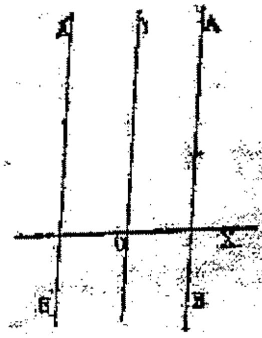


Fig. 1.

Fig. 2.

As rectas AB (fig. 1) e CD (fig. 2) são os logares geometricos, representados pelas equações

$$x=m \text{ e } y=b$$

436. Uma equação do primeiro gráo, a duas incognitas, póde sempre reduzir-se á fórma

$$ax+by=c$$

na qual a, b, c, são quantidades conhecidas.

Esta equação resolvida em relação a uma das incognitas, y por exemplo dá:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}.$$

Substituindo $-\frac{a}{b}$ por m e $\frac{c}{b}$ por n, tem-se:

$$y=mx+n$$

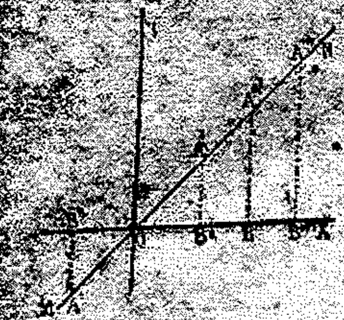
437. Supponha-se primeiramente o caso em que n é nullo; então a equação tem a fórma:

$$y=mx \text{ ou } \frac{y}{x}=m.$$

Se m é positivo, x e y terão o mesmo signal.

Dê-se a x um valor qualquer positivo, por exemplo $x=$OB; trace-se BA parallela a OY e tome-se no eixo dos y, ou antes em BA, um comprimento $y=$BA tal que se tenha $\frac{\text{AB}}{\text{OB}}=m$; A é um ponto do logar procurado.

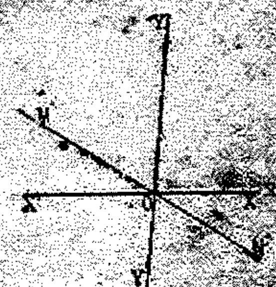
Dê-se ainda a x um valor qualquer negativo, $x = -OB'$; tire-se $B'A'$ parallela ao eixo dos y e nessa recta tome-se um comprimento negativo $y = -B'A'$, tal que se obtenha $\frac{-A'B'}{-OB'} = m$; A' é tambem um ponto do logar.



Sejam ainda A'' e A'''... outros pontos construidos do mesmo modo, ter-se-ha

$$m = \frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A''B''}{OB''} = \frac{A'''B'''}{OB'''}$$

Os triangulos AOB, $A'OB'$, $A''OB''$, $A'''OB'''$... são portanto semelhantes por terem em B, B', B''... um angulo igual comprehendido entre lados proporcionaes; portanto os angulos AOB, $A'OB'$, $A''OB''$, $A'''OB'''$... são iguaes, e resulta que os pontos A, A', A'', A'''... pertencem á recta MN que passa pela origem.



Se m fosse negativo, x e y teriam signaes contrarios, e o logar seria uma recta MN, passando pela origem e nos angulos $X'OY$ e XOY'.

Assim o logar geometrico representado por uma equação do primeiro gráo da fórma

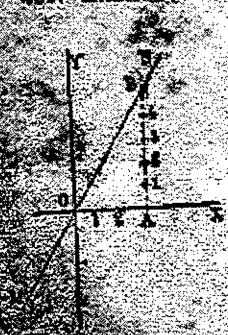
$$y = mx$$

é uma recta passando pela origem O.

Para construir esse logar, basta determinar um ponto qualquer e traçar a recta que passa por esse ponto e pela origem.

438. Exemplo. *Construir o logar representado por*

$$5y = 8x \text{ ou } \frac{x}{y} = \frac{5}{8}$$



Tome-se no eixo dos x um comprimento OA igual a 8 unidades; trace-se BA parallela ao eixo dos y e igual a 5 unidades; reuna-se o ponto B ao ponto O pela recta MN.

Esta recta é o logar pedido.

439. Supponha-se agora o caso em que na equação

$$y = mx + n$$

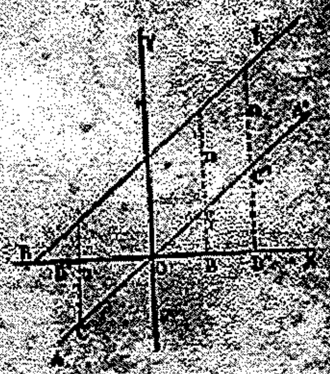
n não é nulla.

Comparando-se esta equação com a precedente,

$$y = mx$$

vemos que as ordenadas y, correspondentes a uma mesma abscissa x, differem constantemente d'um comprimento n.

Logo que esteja construido o logar representado pela equação $y=mx$, obter-se-ha o logar representado por $y=mx+n$, augmentando ou diminuindo, segundo o signal de n, todas as ordenadas do valor absoluto de n.



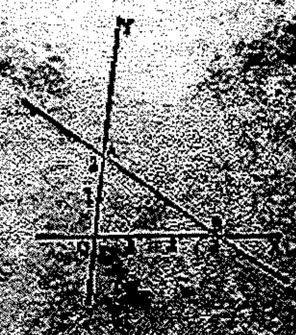
Se AA' representa a equação $y=mx$, BB' representará a equação :

$$y=mx+n.$$

440. Assim, o logar geometrico representado por uma equação do primeiro grão a duas incognitas é uma linha recta.

Para construir esta recta, basta conhecer dois dos seus pontos, e os que se escolhem com preferencia são os pontos em que ella corta os eixos.

441. Para achar os pontos em que uma recta corta os eixos, faz-se, na sua equação, $x=0$; o valor correspondente de y dá o ponto em que a recta encontra o eixo dos y; fazendo-se $y=0$, o valor correspondente de x dá o ponto em que a recta corta o eixo dos x.



EXEMPLO : *Construir a recta representada pela equação*

$$4x+6y=12$$

Se n'esta equação faz-se $x=0$, acha-se $y=2$

E se se faz $y=0$, acha-se $x=3$

AB é a recta pedida.

Representação graphica do trinomio do 2.º grão

442. Considere-se um trinomio do segundo grão

$$x^2-4x+3$$

Chamemos y o seu valor, e procuremos representar por uma curva as variações d'este trinomio, quando se dá a x valores arbitrarios.

Façamos :

$$y=x^2-4x+3$$

Sendo $x=0$, acha-se como valor do trinomio $y=+3$. Tome-se pois sobre OY o valor positivo 3, e marque-se o ponto A.

441. Exemplo I. Construir a curva que representa a funcção seguinte

$$y=\frac{4x-2x^2+1}{x^2+1}\quad \text{ou}\quad x^2(2+y)-4x-1+y=0.$$

Achámos, problema XI, nº 229, que os valores de y seriam reaes só no caso em que tivessemos $-(y^2+y-6)\geqq 0$, e as raizes do trinomio fossem 2 e -3; portanto y não poderá tomar senão valores comprehendidos entre 2 e -3; 2 será o maximo e -3 o minimo, e a curva representativa da funcção terá todos seus pontos situados entre as parallelas $y=2$ e $y=-3$.

Antes de construir a curva, procure-se primeiramente se ella tem asymptotas, quer verticaes, quer horizontaes (*Geom.*). Para as asymptotas verticaes, a ordenada do ponto de contacto será infinita. Mas o valor de y não póde ser infinito salvo se o denominador da funcção for zero; estabeleça-se pois:

$$x^2+1=0,\ \text{d'onde}\ x=\pm\sqrt{-1}.$$

Os valores de x sendo imaginarios, a curva não tem asymptotas verticaes.

As asymptotas horizontaes correspondem a $x=\infty$; este valor posto em vez de x na funcção dá $y=\frac{\infty}{\infty}$.

Mas póde-se pôr o valor de y sob a fórma

$$y=\frac{\frac{4x}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{4}{x}-2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Então, se se faz $x=\infty$, os termos $\frac{4}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tornam-se 0, e acha-se $y=-2$.

Assim a recta AB tendo por ordenada $y=-2$ é a asymptota horizontal.

Se na funcção $y=\frac{4x-2x^2+1}{x^2+1}$ se fizer successivamente $x=0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$, etc., acham-se para y valores que permittem construir a curva.

Os pontos em que a curva encontra os eixos, obtém-se fazendo successivamente na equação $x=0$ e $y=0$.

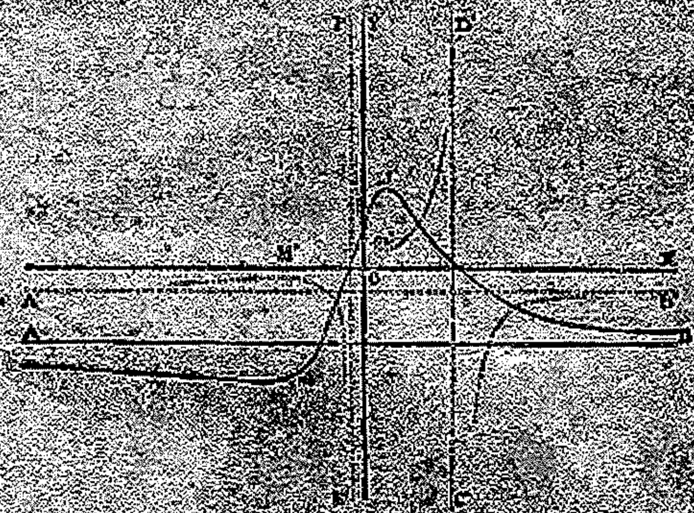
Para fazermos melhor idéa da fórma da curva resolva-se o inverso da funcção proposta e estabeleça-se:

$$y=\frac{x^2+1}{4x-2x^2+1},\quad \text{ou}\quad (1+2y)x^2-4yx+1-y=0$$

As condições de realidade para os valores de x são expressas por

$$6y^2-y-1\geqq 0$$

As raizes deste trinomio sendo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, vê-se que são precisamente as inversas das raizes da funcção proposta, e estas raizes são dadas tambem para $x=\frac{1}{2}$ e $x=-2$; somente o *maximo corresponde ao minimo e reciprocamente*. A curva não terá valor algum comprehendido entre $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$.



As asymptotas horizontaes obtêm-se fazendo na funcção $x=\infty$, d'onde $y=-\frac{1}{2}$; quanto ás asymptotas verticaes, obtêm-se annullando o denominador. Estabelece-se pois

$$4x-2x^2+1=0, \text{ d'onde } x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}.$$

Assim A'B' é a asymptota horizontal, ao passo que C'D', e E'F' são as asymptotas verticaes.

Fazendo $x=0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$... na funcção $y=\frac{x^2+1}{4x-2x^2+1}$ acham-se para y valores que permittem construir a curva. Traçamos em ponteado esta curva e as suas asymptotas.

Emfim podemos procurar os pontos communs ás duas curvas. Os pontos communs têm evidentemente a mesma ordenada e a mesma abscissa.

Primeiramente note-se que, qualquer funcção de y tem por inverso $\frac{1}{y}$; tem-se portanto

$$y=\frac{1}{y}, \text{ donde } y^2=1,$$

$$y=\pm 1$$

fazendo $x=\infty$, d'onde $y=1$, e a recta EF tendo por ordenada 1 é uma asymptota.

Se na funcção $y=\frac{x^2+2x-9}{x^2-4}$ se faz successivamente $x=0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...$ achar-se-hão para y valores que permittem construir a curva.

Para ter a curva representativa da funcção inversa estabelece-se:

$$y=\frac{x^2-4}{x^2+2x-9} \text{ ou } (1-y)x^2-2xy-4+9y=0$$

A equação de condição para que os valores de x sejam reaes é $10y^2-13y+4>0$; o maximo é $\frac{1}{2}$ e o minimo $\frac{4}{5}$, correspondente a $x=1$ e $x=4$.

As asymptotas verticaes são $x=-1\pm\sqrt{10}$, e a asymptota horizontal é $y=1$.

Os pontos de encontro das duas curvas são:

$$y=\pm 1 \text{ e } x=\frac{5}{2}, \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{27}}{2}$$

449. Exercicio III. *Construir a curva que representa a funcção*

$$y=x^3-3x^2-x+3.$$

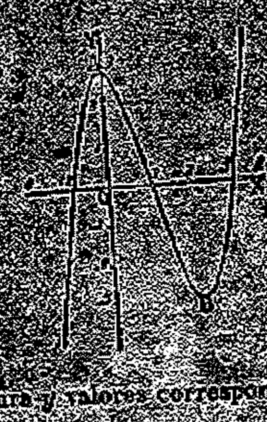
Póde-se escrever esta funcção sob a fórma

$$y=x^3\left(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)$$

Para $x=\pm\infty$, têm-se $y=\pm\infty$, porque os termos $-\frac{3}{x}, -\frac{1}{x^2}, \frac{3}{x^3}$ tornam-se 0 e resta apenas no segundo membro x^3.

Assim quando x cresce indefinidamente, y cresce tambem e tende para o infinito, e não para uma grandeza determinada; portanto não ha asymptotas horizontaes.

Igualmente para $y=\pm\infty$, x vale tambem $\pm\infty$, e não ha asymptotas verticaes.



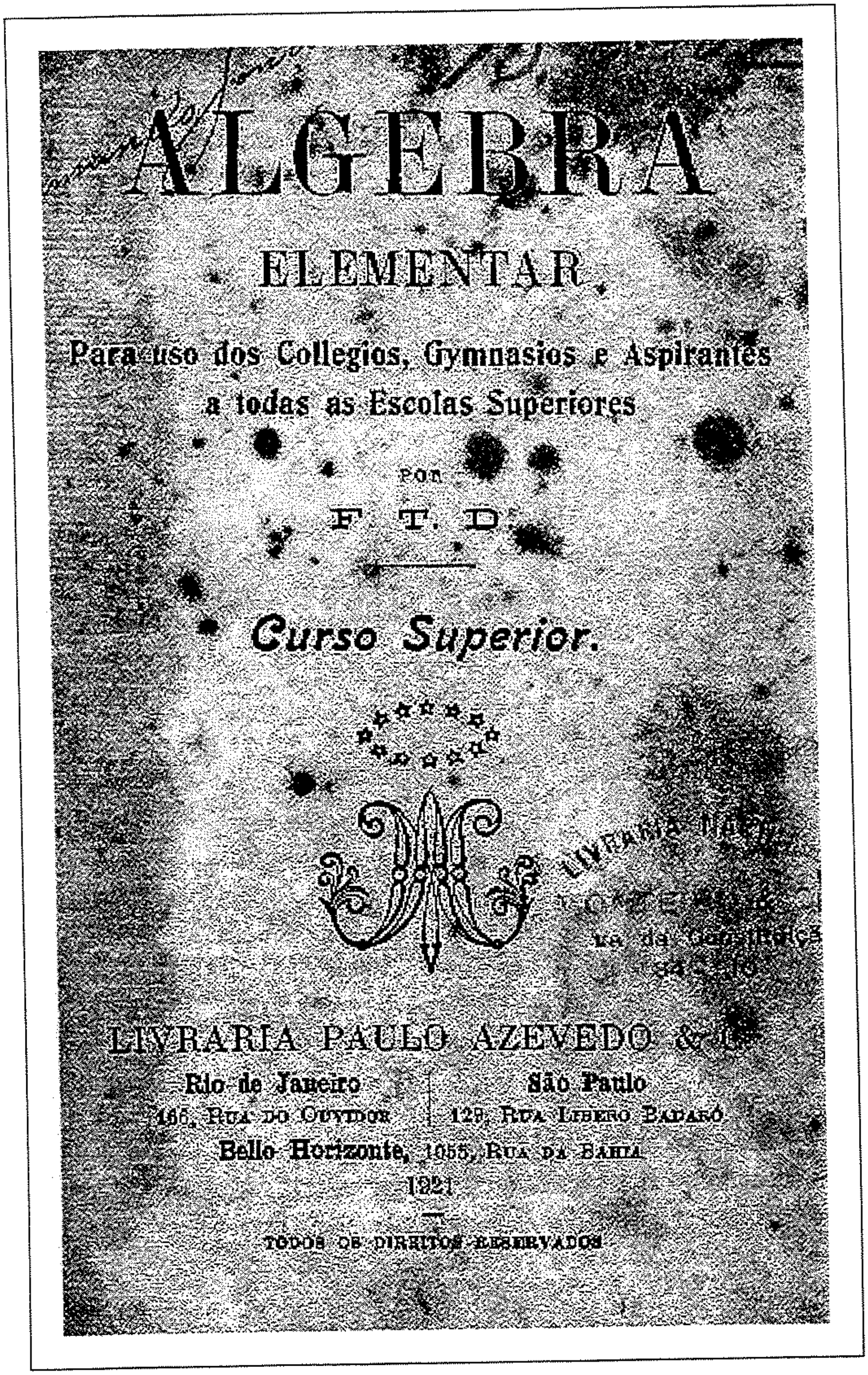
Para obter os pontos em que a curva encontra o eixo dos x, faça-se $x=0$, então ter-se-ha:

$$x^3-3x^2-x+3=0$$
$$x(x^2-1)-3(x^2-1)=0$$
$$(x-3)(x^2-1)=0$$

O primeiro membro annullando-se para $x=3$ e $x=\pm 1$, a curva corta o eixo dos x em tres pontos.

Dando a x differentes valores, obtem-se para y valores correspondentes.

Frontispício do livro *Álgebra Elementar* – *F.T.D.* 1921



ÁLGEBRA

ELEMENTAR

Para uso dos Collegios, Gymnasios e Aspirantes a todas as Escolas Superiores

POR

F. T. D.

Curso Superior.

LIVRARIA PAULO AZEVEDO & C.

Rio de Janeiro — 166, Rua do Ouvidor | São Paulo — 129, Rua Libero Badaró

Bello Horizonte, 1055, Rua da Bahia

1921

Recortes de partes do livro *Álgebra Elementar* – *F.T.D.* 1921

um ponto qualquer M da recta, de coordenadas x e y, os triangulos semelhantes MRP e QOP darão sempre

$$\frac{RM}{OQ}=\frac{RP}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{d}=\frac{c-x}{c}, \qquad (1)$$

equação do 1º gráu entre x e y, á qual se póde dar a forma mais symetrica:

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1. \qquad (2)$$

188. Nota. — O eixo dos x tem por equação $y=0$;
o eixo dos y tem por equação $x=0$;
uma parallela a OX tem por equação $y=b$ ou $y-b=0$;
uma parallela a OY tem por equação $x=b$ ou $x-b=0$.

189. Coefficiente angular. — Na recta qualquer de equação $y=ax+b$ (fig. 11), seja α o angulo MQR; temos: $tg\alpha=\frac{MR}{QR}=\frac{PM-OQ}{QR}=\frac{y-b}{x}=a$.

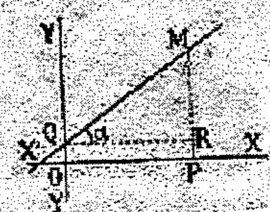


Fig. 11.

A constante a chama-se *coefficiente angular* da recta; vale a tg do angulo α que a recta faz com o eixo dos x.

190. Dada a equação $y=ax+b$, construir a recta correspondente. — Basta procurar dois pontos quaesquer (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e unil-os por uma recta.

A *abscissa na origem* $\left(x=-\frac{b}{a},\ y=0\right)$ e a *ordenada na origem* $(x=0,\ y=b)$, são dois pontos muito commodos e muito empregados.

Quando a equação tem a fórma $\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1$, $x=c$ é a abscissa na origem e $y=d$ é a ordenada na origem. Le-

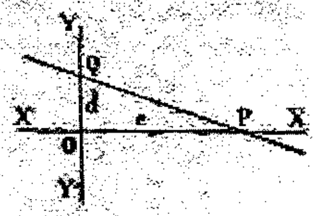


FIG. 12.

vam-se $OP=c$, $OQ=d$ e unem-se PQ para se obter a recta procurada (fig. 12).

191. Resolução graphica do systema:

$$ax+by=c \quad (1)$$
$$a'x+b'y=c' \quad (2)$$

Traça-se a recta AB da equação (1); traça-se a recta CD da equação (2); em geral, essas rectas encontram-se

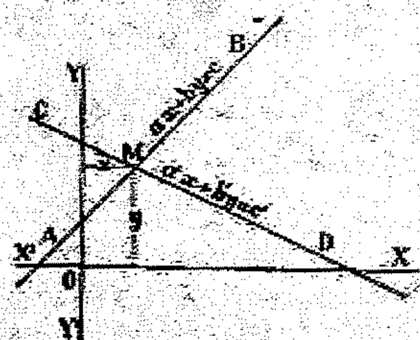


FIG. 12 bis.

em um ponto M, cujas coordenadas (x, y) satisfazem a ambas as equações e são as raizes do systema.

O coefficiente angular de (1) é $-\frac{a}{b}$; o de (2) é $-\frac{a'}{b'}$; as rectas serão parallelas quando os coefficientes angulares fôrem iguaes, isto é, quando $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, ou

$ab'-a'b=0$; as rectas, então, não se encontram, o ponto não existe e o systema (1) e (2) é impossivel.

A recta (1) encontra os eixos em $x'=\frac{c}{a}$ e $y'=\frac{c}{b}$; a recta (2) os encontra em $x''=\frac{c'}{a'}$ e $y''=\frac{c'}{b'}$; as rectas se confundem quando estes pontos se confundem 2 a 2, isto é, quando $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ e $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ ou $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. Então, as rectas (1) e (2) se encontram sempre, o ponto M está em qualquer parte da recta commum, e o systema (1) e (2) é indeterminado.

§ III. — Discussão do systema de 2 equações do 1º gráu a 2 incognitas.

192. Um systema de 2 equações do 1º gráu a 2 incognitas póde sempre reduzir-se á fórma :

$$ax+by=c, \qquad (1)$$
$$a'x+b'y=c'. \qquad (2)$$

Empreguemos o methodo de reducção, imaginemos $b\neq 0$ e $b'\neq 0$, multipliquemos (1) por b' e (2) por $-b$ e sommemos membro a membro, vem :

$$x(ab'-ba')=cb'-bc'. \qquad (3)$$

Si $ab'-ba'\neq 0$, teremos : $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$. (4)

Imaginemos tambem $a\neq 0$ e $a'\neq 0$, multipliquemos (1) por $-a'$ e (2) por a e sommemos membro a membro, vem :

$$y(ab'-ba')=ac-ca'.$$

Si $ab'-ba'\neq 0$, teremos : $y=\frac{ac-ca'}{ab'-ba'}$. (5)

193. Discussão. — Quando $ab'-ba'\neq 0$ as equações (4) e (5) são equivalentes ás equações (1) e (2) e dão para x e y valores determinados, positivos, negativos ou nullos que são as raizes do systema (1) e (2).

Quando $ab'-ba'=0$, as raizes (4) e (5) não se pódem obter, porque não se póde dividir uma quantidade por um divisor nullo. Mas a equação (3) dá, neste caso, $cb'-bc'=0$ e o systema (1) e (2) póde ser substituido pelo seguinte :

$$ax+by=c \qquad (1')$$
$$cb'-bc'=0 \qquad (2')$$

Póde haver então 2 casos : 1º $cb'-bc'\neq 0$; 2º $cb'-bc'=0$.

1º $ab'-ba'=0$ e $cb'-bc'\neq 0$. — A equação (2) que se reduz então a $cb'-bc'=0$ exprime uma *impossibilidade* com a 2ª condição $cb'-bc'\neq 0$. As equações (1') e (2') não têm solução, são *incompativeis*.

E' facil verificar directamente que o systema exprime então um absurdo. Com effeito, temos neste caso :

$ab'-ba'=0$, donde : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k$;

e $cb'-bc'\neq 0$, donde : $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$;

façamos então $\frac{c}{c'}=l$, com a condição $l\neq k$.

Teremos então $a=a'k$, $b=b'k$ e $c=c'l$; esses valores substituidos em (1) dão :

$$a'kx+b'ky=c'l, \text{ ou } a'x+b'y=c'\frac{l}{k}$$

O systema de equações (1) e (2) vem a ser :

$$a'x+b'y=c'\frac{l}{k},$$
$$a'x+b'y=c',$$

systema *absurdo, incompativel*, porque uma mesma quantidade não póde ser igual a duas quantidades differentes $c'\frac{l}{k}$ e c'.

2º $ab'-ba'=0$ e $cb'-bc'=0$. — Neste caso, o systema (1') e (2') é ainda equivalente ao systema (1) e (2). A equação $cb'-bc'=0$ exprime uma identidade, sempre verificada, sejam quaes fôrem os valores de x e y. O systema

(1') e (2') se reduz então á unica equação (1') entre 2 incognitas ; e, portanto, indeterminado e admitte uma infinidade de soluções.

E' facil verificar directamente que as equações (1) e (2) são identicas e se confundem numa só.

Com effeito, temos, neste caso :

$$ab'-ba'=0 \text{ ; donde vem } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k,$$

$$\text{e } cb'-bc'=0 \text{ ; donde vem } \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k.$$

Donde temos : $a=a'k$, $b=b'k$ e $c=c'k$.

Substituindo esses valores em (1), essa equação dá :

$$a'kx+b'ky=c'k.$$

O systema (1) e (2) é substituido pelo seguinte :

$$k(a'x+b'y)=c'k,$$
$$a'x+b'y=c',$$

onde se vê que a 1ª equação não é sinão a 2ª multiplicada por k; ha, pois, uma só equação distincta entre duas incognitas, a qual se verifica para uma infinidade de valores de x e y.

Resumo da discussão

$ab'-ba' \neq 0$ (Rectas concorrentes)

- x e y têm valores determinados, positivos, negativos ou nullos. Cada equação dá uma recta e o ponto M é a resposta (x, y).

FIG. 13.

- Si $c=0$, a 1ª recta passa pela origem O ; o ponto M dá ainda a resposta.

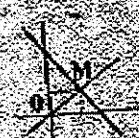
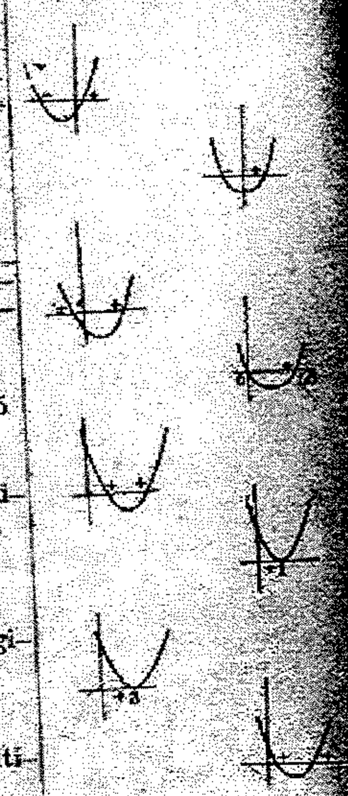


FIG. 14.

- Si $c=0$ e $c'=0$, as duas rectas passam pela origem e a resposta é o ponto O ou $x=0$ e $y=0$.

FIG. 15.

m	ρ (Realizante)	P (Producto)	S (Somma)	Conclusões para as raizes	Representação geometrica.
$-\infty$	.....	.....	.....	$x'=2\ \ x''=-\infty$	
	+	—	—	Raizes de signaes contrarios.	
1	.....	.....	..0..	$x'=-x''$	
	+	—	+	Raizes de signaes contrarios.	
7/4	.....	.0..	.....	$x'=0\ \ x''=1,5$	
	+	+	+	Raizes positivas.	
2	..0..	.....	.....	$x'=x''=1$	
	—	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.	
4	..0..	.....	.....	$x'=x''=3$	
	+	+	+	Raizes positivas.	
$+\infty$	.....	.....	.....	$x'=2\ \ x''=\infty$	



2º *Discutir a natureza e as raizes da equação* $mx^2-(1-m)x+m-1=0$, *na qual* m *varia desde* $-\infty$ *até* $+\infty$.

Temos :

Realizante : $\rho=-3m^2+2m+1=-3(m-1)\left(m+\frac{1}{3}\right)$;

Producto : $P=\frac{m-1}{m}$;

Somma : $S=\frac{1-m}{m}$.

Podemos formar o quadro abaixo que nos dará todos os valores possiveis para as raizes :

m	p	P	S	Conclusões
$-\infty$				
	$-$	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.
$-\frac{1}{3}$	0	$+$	$-$	$x' = x'' = -3$
	$+$	$+$	$-$	Raizes ambas negativas.
0	$+$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$x' = \pm\infty$ $x'' = -1$
	$+$	$-$	$+$	Raizes de signaes contrarios.
1	0	0	0	$x' = x'' = 0$
	$-$	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.
$+\infty$				

Representação geometrica.

3ª *Na equação* $(69+4m)x^2 - 45(9-m)x + 25(4-m) = 0$ *indicar a natureza e os signaes das raizes quando* m *varia desde* $-\infty$ *até* $+\infty$.

Temos :

Realizante : $p = m^2 + 2m - 15 = (m-3)(m+5)$;

Producto das raizes : $P = \dfrac{25(4-m)}{69+4m}$;

Somma das raizes : $S = \dfrac{45(9-m)}{69+4m}$.

Podemos agora formar o quadro abaixo que dá todos os detalhes possiveis a respeito da natureza e dos signaes das raizes :

m	ρ	P	S	Conclusões
$-\infty$				$x'=\frac{5}{4}$, $x''=-5$
	$+$	$-$	$-$	Raizes de signaes contrarios.
$-\frac{69}{4}$		$\mp\infty$	$\mp\infty$	$x'=\mp\infty$, $x''=\frac{85}{69}$
	$+$	$+$	$+$	Raizes ambas positivas.
-5	0			$x'=x''=\frac{15}{7}$
	$-$	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.
3	0			$x'=x''=\frac{5}{9}$
	$+$	$+$	$+$	Raizes ambas positivas.
4		0		$x'=0$, $x''=\frac{15}{17}$
	$+$	$-$	$+$	Raizes de signaes contrarios.
9			0	$x'=-x''=\frac{5\sqrt{21}}{21}$

Interpretação geometrica.

m	*ρ*	*P*	*S*	Conclusões	Interpretação geometrica
	+	—	—	Raizes de signaes contrarios.	
$+\infty$				$x' = \frac{5}{4}$ $x'' = -5$	

Calculemos a equação dada no caso de $m = \pm \infty$. Para isto, dividamos todos os termos dessa equação por m e temos:

$$\left(\frac{69}{m}+4\right)x^2-15\left(\frac{9}{m}-1\right)x+25\left(\frac{4}{m}-1\right)=0.$$

Fazendo $m = \pm \infty$, essa equação vem a ser $4x^2+15x-25=0$, cujas raizes são $x' = \frac{5}{4}$ e $x'' = -5$.

Pelos quadros precedentes, vê-se que, em resumo, podemos encontrar 4 casos differentes, em semelhantes discussão de equações; são os seguintes:

m	*ρ*	*P*	*S*	Conclusões	Interpretação geometrica
	—	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.	
	+	—	Inutil	Raizes de signaes contrarios.	
	+	+	+	Raizes ambas positivas.	
	+	+	—	Raizes ambas negativas.	

Os ramos da curva representativa dirigem-se para cima quando o coefficiente de x^2 é positivo e para baixo no caso contrario.

4º *Na equação* $(m-1)x^2-2(7-m)x+3(m-3)=0$, *em que* m *varia de* $-\infty$ *até* $+\infty$, *indicar a posição das raizes em relação aos numeros* -1 *e* $+1$.

Em geral, um numero qualquer α está comprehendido entre as raizes de um trinomio $f(x)$ quando a, o coefficiente de x^2 no trinomio, e $f(\alpha)$ têm signaes contrarios, isto é, quando $a\,f(\alpha)<0$.

Si $af(\alpha)>0$, o numero α é exterior ás raizes, menor do que a menor raiz, ou maior do que a maior raiz. Para distinguir entre estes dois casos, basta comparar α com a semi-somma das raizes, $\frac{S}{2}$; si $\alpha<\frac{S}{2}$, α é menor do que a menor raiz; si $\alpha>\frac{S}{2}$, α é maior do que a maior raiz.

— Appliquemos estas notas á equação precedente.

Temos:

Realizante: $\rho=-2(m^2-m+20)=-2(m+5)(m-4)$;

Substituição de -1: $af(-1)=2(m-1)(m+2)$;

Substituição de $+1$: $af(+1)=6(m-1)(m-4)$;

Semi-somma: $\frac{S}{2}=\frac{7-m}{m-1}$

Podemos agora formar o quadro abaixo que indicará a posição dos numeros -1 e $+1$ em relação a x' e x'':

m	ρ	$af(-1)$	$af(1)$	*Conclusões.*	*Interpretação geomet.*
$-\infty$					
	—	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias.	
-5	0	+	+	$x'=x''=-2$; $x'=x''<-1<1$	
	+	+	+	$x'<\frac{S}{2}<x''<-1<1$	

m	ρ	$af(-1)$	$af(1)$	Conclusões	Interpretação geomet.
-2	$+$	0	$+$	$x'=-1,\ x''=-5\ ;\ x''<x'<1$	
	$+$	$-$	$+$	$x''<-1<x'<1$	
1		0	0	$x'=+\infty\ ;\ x''=-\frac{1}{2}\ ;\ x''<-1<x'<1$	
	$+$	$+$	$-$	$-1<x''<1<x'$	
4	0	$+$	0	$x''=x'=1\ ;\ -1<x''=x'=1$	
$+\infty$	$-$	Inutil	Inutil	Raizes imaginarias	

E' de notar que quando $f(\alpha)=0$, α é raiz do trinomio.

Neste exemplo, como temos, para $m=-2$, $f(-1)=0$ segue-se que -1 é então raiz; tambem, para $m=4$, $f(1)=0$, vê-se que 1 é então raiz.

5º *Dada a equação* $x^2-2mx+(1-m^2)=0$, *determinar os limites que deve ter* m, *para que as raizes estejam comprehendidas entre* -2 *e* $+4$.

Do mesmo modo que no problema precedente, temos:

Realizante: $\rho=m^2+1-m^2=1$, sempre positivo; as raizes são sempre reaes.

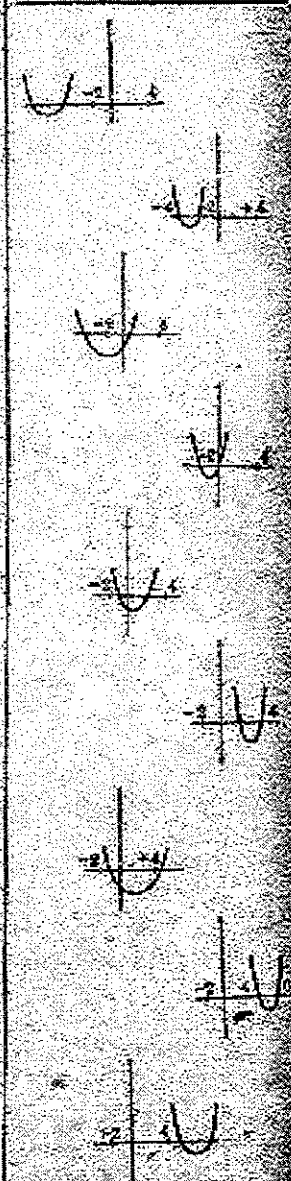
Substituição de -2: $af(-2)=m^2+4m+3=(m+3)(m+1)$.

Substituição de $+4$: $af(4)=m^2-8m+15=(m-3)(m-5)$.

Semi-somma das raizes: $\frac{S}{2}=m$.

Podemos agora formar o quadro seguinte onde veremos as posições respectivas das raizes e dos numeros -2 e 4.

m	p	$af(-2)$	$af(4)$	Conclusões.	Interpretação geometrica.
$-\infty$					
	$+$	$+$	$+$	$x'' < \frac{S}{2} < x' < -2 < 4$	
-3		0		$x''=-4,\ x'=-2\ ;\ x'' < x' < 4$	
	$+$	$-$	$+$	$x'' < -2 < x' < 4$	
-1		0		$x''=-2,\ x'=0\ ;\ x'' < x' < 4$	
	$+$	$+$	$+$	$-2 < x'' < \frac{S}{2} < x' < 4$	
3			0	$x''=2,\ x'=4\ ;\ -2 < x'' < x'$	
	$+$	$+$	$-$	$-2 < x'' < 4 < x'$	
5			0	$x''=4,\ x'=6\ ;\ -2 < x'' < x'$	
	$+$	$+$	$+$	$-2 < 4 < x'' < x'$	
$+\infty$					



2º Seja $0<a<1$.

Nesse caso, podemos escrever $a=\frac{1}{a'}$, em que a' é uma quantidade superior a 1; e a funcção será $y=\frac{1}{a'^x}$. Essa funcção é sempre positiva e decrescente á medida que x cresce.

Para $x=-\infty$, temos: $y=\lim\frac{1}{a'^{-\infty}}=\lim a'^{\infty}=\infty$.

Para $x=0$, temos: $y=a'^0=1$.

Para $x=+\infty$, temos: $y=\lim\frac{1}{a'^{+\infty}}=\lim\frac{1}{\infty}=0$.

Como no 1º caso, cada valor de y apresenta-se apenas uma vez, pois que y decresce sempre com x.

Quando x varia de $-\infty$ até 0, y decresce de $+\infty$ até 1; quando x cresce de 0 até $+\infty$, y decresce de 1 até 0.

O quadro e a figura abaixo resumem essa discussão.

	$a>1$					$0<a<1$				
x	$-\infty$		0		$+\infty$	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	cr.	1	cr.	∞	$+\infty$	decr.	1	decr.	0

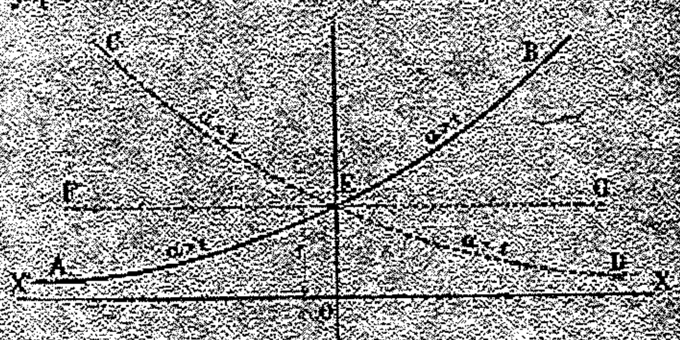


FIG. 47.

422. Derivada da funcção exponencial (Ver nº 556). — Seja a funcção $y=a^x$; demos a x o accrescimo h e designemos por k o accrescimo correspondente de y; teremos

$$k=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1);$$

a derivada y' é o limite da razão $\frac{k}{h}$ ou o limite da quantidade $a^x\left(\frac{a^h-1}{h}\right)$ para $h=0$,

$$y'=\lim\frac{a^x(a^h-1)}{h}. \qquad (1)$$

A funcção tem, pois, um maximo, $\frac{4ac-b^2}{4a}$, o qual corresponde a $x=-\frac{b}{2a}$.

O quadro abaixo resume estes resultados :

$a<0$	x	$-\infty$	cresce	$-\frac{b}{2a}$	cresce	$+\infty$
	y	$-\infty$	cresce	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *Maximo*	decresce	$-\infty$

504. Nota. — *O trinomio tem valores iguaes quando x toma valores equidistantes de* $\frac{-b}{2a}$.

Com effeito, sejam $x=\frac{-b}{2a}\pm n$, dois valores equidistantes de $\frac{-b}{2a}$. Substituamos esses 2 valores em (1), temos nos dois casos :

$$y=a\left(n^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right),$$

isto é, o mesmo valor.

505. Curva figurativa. — 1° Caso : $a>0$. — Neste caso, o trinomio tem um minimo. Sobre OX, tomemos OB′ igual $-\frac{b}{2a}$; no ponto B′, tracemos a perpendicular B′B″ : é um eixo de symetria da curva. Sobre esta perpendicular, levemos o valor do minimo $\frac{4ac-b^2}{4a}$. A curva se compõe de 2 ramos infinitos BA e BC, symetricos em relação a BB″.

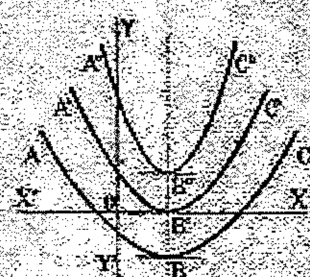


Fig. 53.

Quando as raizes do trinomio ax^2+bx+c são reaes e desiguaes, temos a curva ABC; quando são iguaes, a curva A′B′C′ e quando são imaginarias, a curva A″B″C″ (fig. 53).

2º Caso: $a<0$. — Neste caso, o trinomio tem um maximo. Sobre OX, tomemos $OB'=-\frac{b}{2a}$ e tracemos a perpendicular $B'B''$; essa perpendicular será um eixo de symetria da curva. Nella levemos o valor do maximo $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

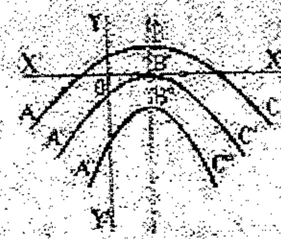


FIG. 54.

A curva se compõe de 2 ramos infinitos, AB e BC, symetricos em relação a BB''. Quando as raizes do trinomio são reaes e desiguaes, temos a curva ABC; quando são iguaes, a curva $A'B'C'$ e quando são imaginarias, a curva $A''B''C''$ (fig. 54).

505. Theorema. — *A curva figurativa do trinomio* $y=ax^2+bx+c$, *é uma parabola, na qual o eixo é a recta* $B'B$ $\left(OB'=-\frac{b}{2a}\right)$ *e o parametro vale* $\frac{1}{2a}$.

Com effeito, consideremos a curva da fig. 55 que representa o trinomio para $a>0$, quando suas raizes são reaes e desiguaes.

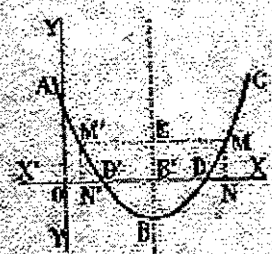


FIG. 55.

Uma propriedade caracteristica da parabola é que, para um ponto qualquer da curva, a razão $\frac{\overline{EM}^2}{BE}$ é constante e igual ao dobro do parametro. (Geom. e. sup., nº 682).

Calculemos EM e BE em funcção de a, b e c, coefficientes do trinomio.

Notemos primeiro que $ON=x$, $NM=y$, $OB'=\frac{-b}{2a}$, $B'B=\frac{4ac-b^2}{4a}$ e, afinal, $BB'=-\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Temos, portanto:

$$EM=ON-OB'=x-\left(-\frac{b}{2a}\right)=x+\frac{b}{2a}. \quad (1)$$

Subtrahindo membro a membro, vem :

$$k = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)}.$$

Póde-se escolher h positivo, de modo que os dois factores x e $x+h$ tenham o mesmo signal ; então, o accrescimo k é negativo e a funcção decresce. Portanto, quando x varia de $-\infty$ até $+\infty$, a funcção y decresce, salvo para $x=0$ em que é discontinua.

Quando x é infinitamente grande em valor absoluto, a funcção tem um valor muito pequeno e tão vizinho de 0 como se quizer. Si x varia de $-\infty$ até 0, y decresce e tende para $-\infty$; si x varia de 0 até $+\infty$, y decresce desde $+\infty$ até 0.

A funcção pula de repente de $-\infty$ a $+\infty$ quando x passa pelo valor 0.

O quadro abaixo resume estes resultados :

x	$-\infty$	cresce	0	cresce	$+\infty$
y	0	decresce	$\mp\infty$	decresce	0

Para $x = \pm\infty$, a funcção é nulla ; diz-se que o eixo dos x é *asymptota* á curva representativa da funcção.

Como $y=\infty$ para $x=0$, diz-se que o eixo dos y é tambem asymptota á curva da funcção.

A curva figurativa (fig. 59) é uma *hyperbole equilátera*, cujas asymptotas são os eixos das coordenadas. A origem é centro da curva : com effeito, trocando-se x em $-x$, y muda-se em $-y$; os pontos da curva M e M′ que têm por coordenadas (x, y) e $(-x, -y)$ são symetricos em relação á origem ; essa origem é portanto centro da curva.

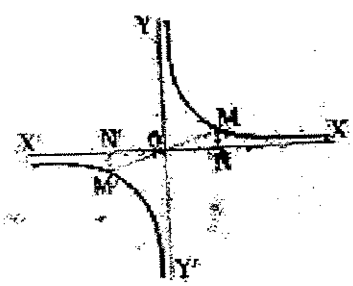


Fig. 59.

§ V. — Asymptotas.

509. Definição. — Uma recta é *asymptota* a um ramo de curva si a distancia de um ponto da curva a essa recta tende para 0 quando o ponto se afasta até o infinito na curva.

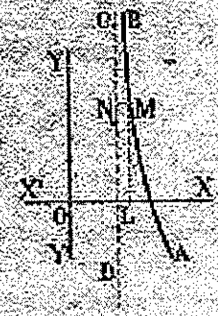


FIG. 60.

Ha curvas para as quaes rectas parallelas ao eixo das y ou ao eixo dos x são asymptotas.

Uma recta vertical CD (fig. 60) é asymptota á curva AB si a distancia MN tende para 0 quando M se afasta até o infinito sobre a curva, isto é, quando LM$=y$ tende para o infinito.

Uma recta horizontal CD (fig. 61) é asymptota á curva AB si LM$=y$ tende para um limite determinado (LN, na figura) quando x tende para $\pm\infty$; neste caso, a differença MN entre a ordenada da recta (LN) e a ordenada da curva (LM) tende para 0 quando x tende para o infinito.

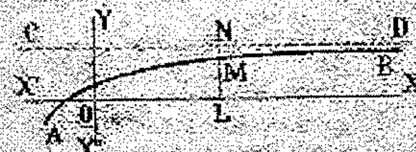


FIG. 61.

Uma obliqua EF (fig. 62) é asymptota á curva AB si para um mesmo valor de x, a differença MN entre as ordenadas da curva e da recta (LM e LN) tende para 0 quando x tende para o infinito.

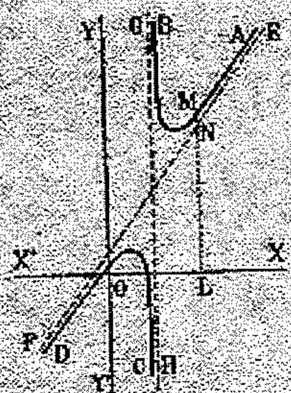


FIG. 62.

510. *Achar as asymptotas horizontaes*. — Seja a curva dada pela equação $y=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$; procura-se o limite de y para $x=\pm\infty$.

Exemplo: A curva $y=\dfrac{8x^2-3x+2}{4x^2+4x+5}$ tem por asymptota horizontal $y=2$.

Com effeito, a equação póde escrever-se dividindo todos os termos por x^2:

$$y=\frac{8-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}},$$

Si fizermos $x=\pm\infty$ na funcção $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ vê-se que $y=0$; logo, o eixo dos x é asymptota á curva.

Si a fôr positivo, z é minimo para $x=\dfrac{-b}{2a}$; a funcção y terá um maximo para o mesmo valor de x, pois z e y são duas funcções inversas uma de outra. Temos o quadro abaixo e a curva junta (fig. 66):

x	$-\infty$	cresce	x''	cresce	$-\dfrac{b}{2a}$	cresce	x'	cresce	$+\infty$
z	$+\infty$	decresce	0	decresce	*minimo*	cresce	0	cresce	∞
y	0	cresce	$\pm\infty$	cresce	$\dfrac{4a}{4ac-b^2}$ *maximo*	decresce	$\mp\infty$	decresce	0

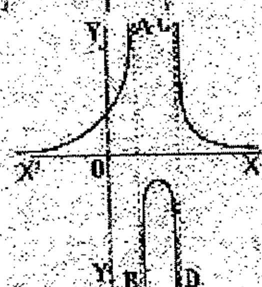


FIG. 66.

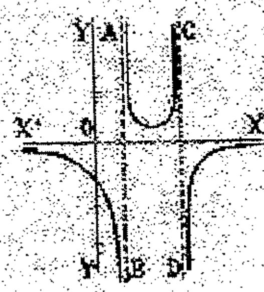


FIG. 67.

Si a fôr negativo, z é maximo para $x=-\dfrac{b}{2a}$; a funcção y passa por um minimo para o mesmo valor de x. Temos o quadro seguinte e a figura fig. 67:

x	$-\infty$	cresce	x''	cresce	$-\dfrac{b}{2a}$	cresce	x'	cresce	$+\infty$
z	$-\infty$	cresce	0	cresce	*maximo*	decresce	0	decresce	$-\infty$
y	0	decresce	$\mp\infty$	decresce	$\dfrac{4a}{4ac-b^2}$ *minimo*	cresce	$\pm\infty$	cresce	0

2º CASO: $b^2-4ac=0$.

A funcção tem ainda uma asymptota vertical $x=x'$, sendo x' a raiz commum do trinomio $z=0$. Admitte tambem o eixo dos x como asymptota, pois $y=0$ para $x=\pm\infty$.

Como a equação $z=0$ tem raizes iguaes, o trinomio z possue sempre o signal do 1º termo.

4º *Calcular a derivada de $y=x^m$, m sendo inteiro e positivo.* Demos a x o accrescimo h e seja k o accrescimo correspondente de y; teremos:

$$y+k=(x+h)^m; \qquad \text{já tinhamos}: y=x^m.$$

Subtrahindo membro a membro, vem:

$$k=(x+h)^m-x^m.$$

Mas o binomio $(x+h)^m-x^m$ é divisivel por $(x+h)-x$; effectuando essa divisão temos:

$$k=(x+h-x)[(x+h)^{m-1}+x(x+h)^{m-2}+x^2(x+h)^{m-3}+\ldots+x^{m-1}];$$

donde vem:

$$\frac{k}{h}=(x+h)^{m-1}+x(x+h)^{m-2}+x^2(x+h)^{m-3}+\ldots+x^{m-1}.$$

Para $h=0$, o limite da razão $\frac{k}{h}$ é:

$$\lim\frac{k}{h}=x^{m-1}+x^{m-1}+x^{m-1}+\ldots+x^{m-1}.$$

E' facil vêr que ha m vezes o termo x^{m-1};

logo:

$$y'=mx^{m-1}.$$

Portanto, *a derivada de x^m obtem-se passando o expoente m para coefficiente e diminuindo o expoente de 1 unidade.*

558. Valor geometrico da derivada. — Seja a funcção $y=f(x)$; construamos a curva AMB que a representa graphicamente. Supponhamos que a funcção é real e continua no intervallo AMB (fig. 100).

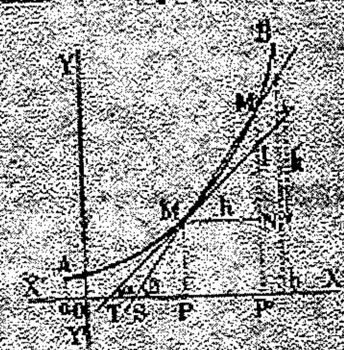


Fig. 100.

Consideremos nessa curva um ponto M de coordenadas x_0 e y_0 ou $f(x_0)$ e um ponto vizinho M' de coordenadas x_0+h e y_0+k ou $f(x_0+h)$, ambos os pontos no intervallo AB.

Tracemos MN parallela ao eixo dos x e a secante MM'; a figura mostra que:

$$M'N=f(x_0+h)-f(x_0)=k; \quad MN=(x_0+h)-x_0=h.$$

O triangulo rectangulo MNM' dá:

$$\frac{M'N}{MN}=\frac{k}{h}=tg\ \widehat{NMM'}=tg\,\beta.$$

Quando h tende para 0, o ponto M' se aproxima de M até confundir-se com elle e a secante MM' tende para uma posição limite TI, que é, por definição, a tangente á curva AB no ponto M.

Mas a funcção que tem por derivada $x^{\frac{1}{2}}$, é $^2/_3\, x^{\frac{3}{2}}$, ou $^2/_3\, x\sqrt{x}$; portanto:

$$\frac{S}{2}=\int_0^x \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}=\frac{2}{3}\,xy.$$

Como a area OMP vale $\frac{2}{3}\,x.\mathrm{MP}$, vê-se que a area

S ou MOM', terá por valor $\frac{2}{3}\,x.\mathrm{MM}'$.

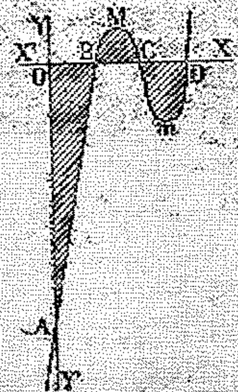


FIG. 108.

2º *Avaliar a superficie limitada pela curva* $y=x^3-6x^2+11x-6$, *o eixo dos* x *e duas ordenadas correspondendo ás abscissas*: 1º $x=0$ e $x=1$; 2º $x=1$ e $x=2$; 3º $x=2$ e $x=3$.

Essa curva é representada na figura junta (108); nota-se que ella corta o eixo dos x em B($x=1$), C($x=2$) e D ($x=3$).

A 1ª area pedida é OAB e é dada pela integral definida:

$$S_1=\int_0^1 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^1=-2\frac{1}{4}.$$

A 2ª area pedida é BMC e é dada pela integral definida:

$$S_2=\int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_1^2=\frac{1}{4}$$

A 3ª area pedida é CmD e é dada pela integral definida:

$$S_3=\int_2^3 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_2^3=-\frac{1}{4}.$$

3º A cycloide é a curva gerada por um ponto de uma circumferencia quando esta rola, sem escorregar, sobre uma recta fixa (fig. 109).

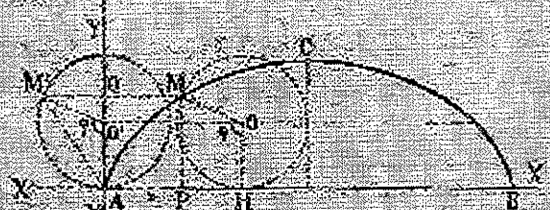


FIG. 109.

Tomando-se a recta para eixo dos x e para origem um dos pontos A

Mudando-se x em $-x$, y vem a ser $-y$; logo a funcção é symetrica em relação ao ponto de origem O; e bastará estudar a curva desde 0 até $+\infty$.

A funcção annulla-se para $x=0$ e $x=2$; torna-se infinita para $x=\sqrt{6}$; nos 3 casos, y muda de signal.

A derivada de $\frac{u}{v}$ é $\frac{u'v-uv'}{v^2}$; aqui:

$$u'=3x^2-4 \quad \text{e} \quad v'=2x \text{; portanto:}$$

$$y'=\frac{x^4-14x^2+24}{(x^2-6)^2}=\frac{(x^2-2)(x^2-12)}{(x^2-6)^2}$$

A derivada y' torna-se infinita, sem mudar de signal, para $x=\sqrt{6}$; annulla-se e muda de signaes para $x=\sqrt{2}$ e $x=2\sqrt{3}$. O signal da derivada é o de seu numerador, pois que o denominador é um quadrado.

Temos pois o quadro seguinte:

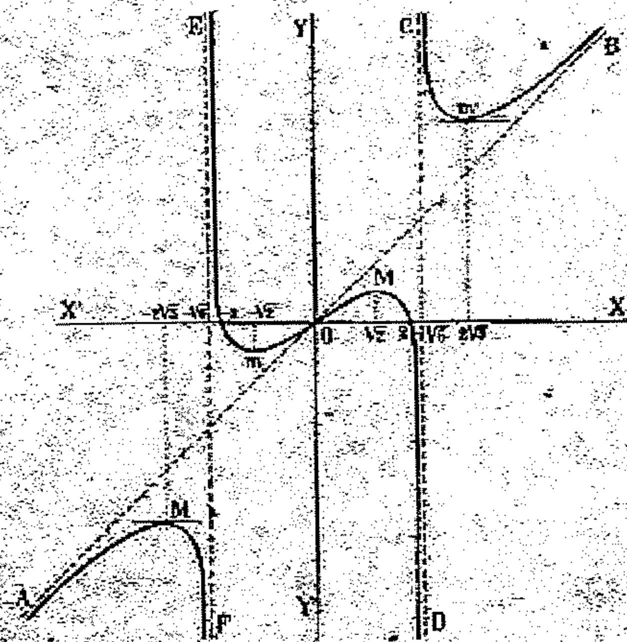


Fig. 129.

x	0		$\sqrt{2}$		2		$\sqrt{6}$		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	0	cresce	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Maximo	decr.	0	decr.	$\mp\infty$	decr.	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ Minimo	cresce	$+\infty$

De modo geral a serie (16) permitte elevar-se do L a a L $(a+h)$.

Uma vez calculados os log. neperianos, obtêm-se os log. vulgares, de base 10, multiplicando-se os primeiros pelo modulo do systema de base 10, isto é por $\frac{1}{L\ 10}$; este modulo foi calculado com muita exactidão e vale 0,4342944819...

Graphico da temperatura de um doente

611. — Os hospitaes costumam pôr na cabeceira de cada cama uma folha onde o enfermeiro escreve a temperatura do doente varias vezes por dia.

No graphico abaixo (fig. 130), a linha horizontal OX representa o

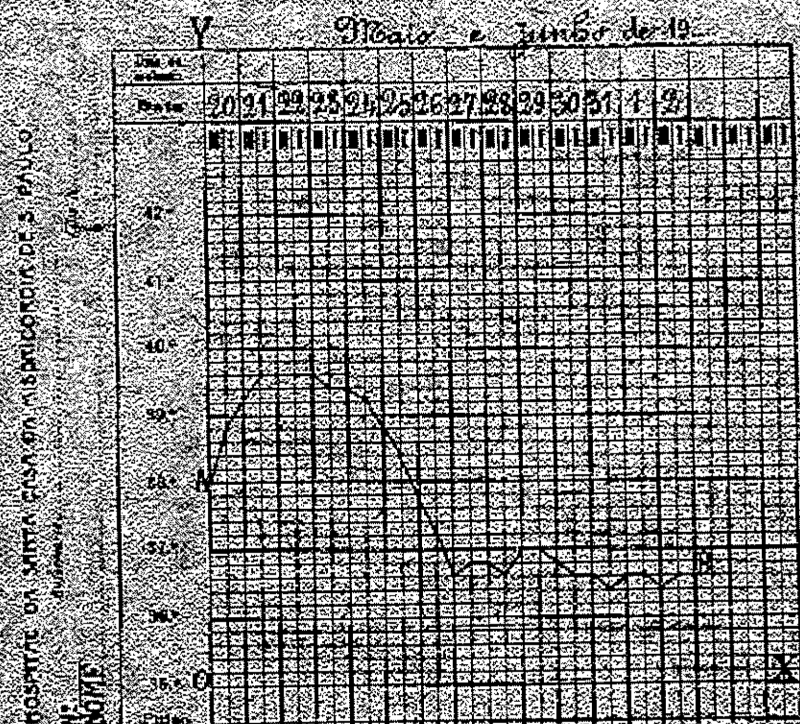


Fig. 130. — Graphico da temperatura de um doente.

tempo avaliado em dias; a temperatura foi marcada duas vezes por dia, de manhã (M) e de tarde (T).

A linha vertical OY representa os gráus de temperatura; cada grau subdivide-se em 5 quintos, e as divisões têm um tamanho sufficiente para se avaliarem facilmente os decimos de grau.

Cada temperatura, quer de manhã, quer de tarde, dá um ponto reunindo-se estes pontos por um traço continuo, obtem-se a curva AB, que é o *graphico da temperatura do doente*.

Quando chega perto do doente, o medico examina este graphico e logo reconhece a marcha da doença, qual é o effeito dos remedios, em que estado se acha o doente.

O graphico acima é o de um doente que entrou no hospital a 20 de maio com a temperatura de 38° da manhã e 38°,8 de tarde; a 21, teve 39°,2 e 39°,6; a 22, permaneceu todo o dia com 39°,6; começou a melhorar a 23, com 39°,5 e 39°,4; a 24, accentuou-se a melhora com 39°,4 e 39°,2; a 25, teve 38°,8 e 38°,4; a 26, teve 37°,9 e 37°,3; no dia 27 cessou a febre, pois que a temperatura, pouco variavel, sempre se manteve abaixo da normal, 37°.

A 2 de junho, o doente sahiu do hospital.

Os graphicos empregam-se em numerosissimos casos: para representar as alturas barometricas, os graus de humidade, a temperatura solar media de cada dia, as cotações do cambio em relação ao tempo; a solubilidade de um sal, a força elastica de um vapor em relação à temperatura, etc.

Graphico do movimento de um trem.

612. As estradas de ferro empregam graphicos para representar o movimento dos trens nas suas linhas.

No graphico abaixo (fig. 131), temos o trafego entre Ribeirão Pires e Santos desde as 6 horas da manhã até as 12 h e meia.

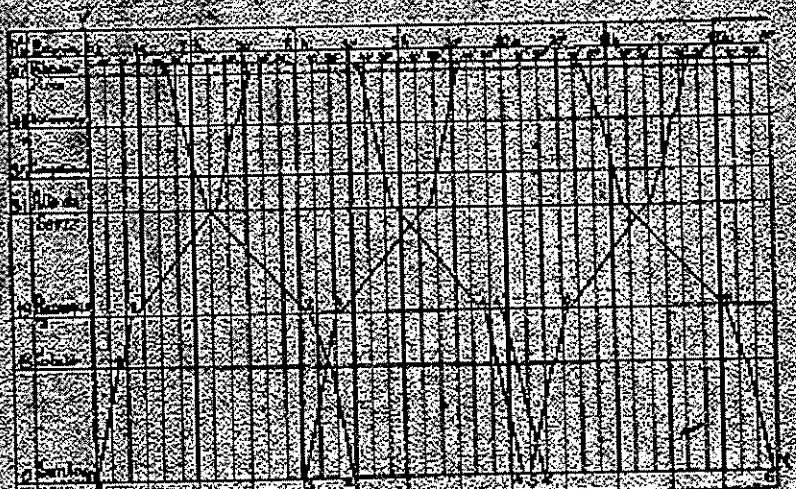


Fig. 131. — Graphico dos trens 1, 3, 5, 2, 4, 4ª e 6 entre Ribeirão Pires e Santos.

As distancias são contadas desde Santos, que serve de origem, e são levadas no eixo vertical OY; os tempos são levados no eixo horizontal OX.

Vemos 3 trens, a saber: 2, 4 e 6 que descem de Ribeirão Pires a Santos; o trem 4 desdobra-se em Piassaguera e dá 4 e 4' com 12 minutos de intervallo.

Vemos igualmente 3 trens: 1, 3 e 5 que sobem de Santos.

O trem 2 parte de Ribeirão ás 6 h. 46, para alguns instantes no Rio Grande ás 6 h. 57, no Campo Grande ás 7 h. 01, no Alto da Serra ás 7 h. 07, em Piassaguera ás 8 h. 05, em Cubatão ás 8 h. 15 e chega em Santos ás 8 h. 28.

O trem 4 parte de Ribeirão ás 8 h. 38, passa no Rio Grande e no Campo Grande sem parar, para alguns instantes no Alto da Serra ás 8 h. 56, em Piassaguera ás 9 h. 46, passa em Cubatão sem parar e chega em Santos ás 10 h. 07.

O trem 2 cruza-se com o trem 1 no Alto da Serra; o trem 2 desce logo que o trem 1 acaba de subir.

Quando o graphico é menos inclinado, como entre Piassaguera e o Alto da Serra, é que os trens andam neste trecho menos depressa que no resto do trajecto.

Dois graphicos parallelos, como 4 e 4' representam trens de igual velocidade.

APÊNDICE 3

Frontispício do livro *Curso de Matemática Elementar – Euclides Roxo - 1930*

CURSO

DE

MATHEMATICA ELEMENTAR

PELO

ENGENHEIRO CIVIL

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo

Bacharel laureado pelo Collegio Pedro II

Professor cathedratico de Mathematica do mesmo Collegio

De accordo com os programmas actuaes do Collegio Pedro II

VOLUME II

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO | BELLO HORIZONTE

49-A, Rua Libero Badaró | Rua da Bahia, 1052

1930

Páginas livro *Curso de Matemática Elementar – Euclides Roxo - 1930*

INDICE

N. 2.300 — Officinas Graphicas da Livraria Francisco Alves

EXERCICIOS

1. De que depende o preço de 8 duzias de ovos?

2. Numa corrida de automoveis, sobre uma distancia fixa, de que depende o tempo do vencedor?

3. Um automovel viaja de uma cidade a outra, com a velocidade média de 70 km:hora. De que depende o tempo gasto na viagem?

4. Um homem precisa fechar um terreno rectangular. De que depende o numero de tijolos a gastar?

5. De que depende o peso de 20 litros de um liquido?

6. Um homem empresta dez contos de réis. De que depende o juro total que elle vae receber?

7. De que depende o perimetro de um triangulo equilatero?

8. De que depende o comprimento de uma circumferencia?

9. De que depende o peso de uma certa extensão de fio de arame?

10. De que depende a quantidade dagua consumida por uma locomotiva?

87. Funcção. — A experiencia nos ensina que a temperatura, em um determinado logar, modifica-se de um momento para outro, isto é, varia com o tempo, ou, em outras palavras ainda, a grandeza variavel, que é a temperatura, depende do tempo. Ambas as grandezas, tempo e temperatura, modificam-se, mas entre ellas subsiste permanentemente uma relação associativa tal, que a cada instante corresponde uma dada temperatura. Uma tal ligação entre duas grandezas variaveis é o que se chama uma **relação funccional**. Diz-se tambem que uma das grandezas

Com essa igualdade funccional é possivel, para cada valor da variavel independente x, calcular o valor correspondente da variavel dependente y.

Para maior commodidade, pode haver conveniencia de reunir uma serie de pares de valores calculados, em forma de tabella, como a que se segue:

$x=$	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$y=$	-15	-13,5	-12	-10,5	-9	-7,5	-6	-4,5	-3	-1,5	0	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15

Uma tabella como essa, naturalmente só abrange um trecho muito limitado da escala de valores da variavel independente, além de que é sempre incompleta. Assim, não se encontram ahi os valores da funcção para $x=20$, ou para $x = -2{,}7$, para $x = 0{,}8$, etc.

Para esses casos, em que a tabella falha, ha que recorrer á igualdade funccional, da qual se pode obter tudo que se desejar.

Para determinar de que modo y varia com x, começamos por dar á variavel independente x, o valor 1: y toma, em consequencia, o valor 3. Si fizermos agora x crescer até quadruplicar, isto é, até 4, y torna-se igual a 12, isto é, y tambem quadruplica.

Pela tabella, vê-se, ainda, claramente, que a duplicação, a triplicação, etc., do valor de x acarreta a duplicação, a triplicação, etc., dos valores de y.

Nota-se ahi a existencia de uma propriedade fundamental da funcção: *uma variação de x produz em y uma variação na mesma razão.*

95. Essa propriedade, como é facil de vêr, resulta da propria igualdade funccional. Sejam, com effeito, dois valores

98. Representação graphica. — Tomemos os valores correspondentes de x e y, reunidos na tabella do § **94**, respectivamente, como abscissas e ordenadas; obtemos assim uma quantidade de pontos que pertencem á curva

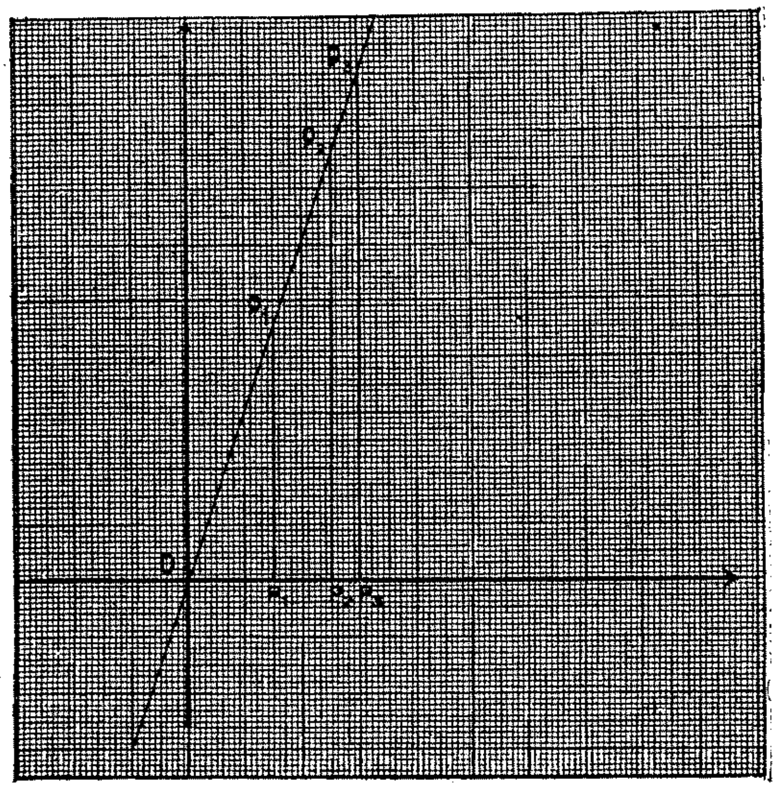


Fig. 89

da funcção (fig. 89). Esta não fica, com isso, perfeitamente determinada, visto como a serie de pontos ainda é muito incompleta.

Poderiamos, com auxilio da igualdade funccional, calcular mais valores intermediarios e, desse modo, inter-

11. a) $y = x + 3/4$; b) $y = 1/2x + 2/3$; c) $y = 2{,}5x + 0{,}5$; d) $y = -2/5x - 1/2$.

12. Quaes as particularidades que se notam nas rectas representativas das seguintes funcções ?

$y = 6$; $y = 0{,}4$; $y = 0$; $y = 3x$; $y = -0{,}8x$; $y = -1/3x$.

13. Em que é que se assemelham as funcções cujas rectas representativas:

a) são parallelas entre si; b) passam pelo mesmo ponto do eixo das ordenadas ?

133. Fórma normal da funcção linear. — Todas as funcções estudadas nos exercicios precedentes entram no typo geral

$$\mathbf{y = ax + b}$$

que é a **fórma normal** de todas as funcções lineares, isto é, daquellas que são representadas graphicamente por uma recta. De accordo com o que vimos no § **132,** a indica a inclinação da recta sobre o eixo das abscissas e, por isso, se chama **coefficiente angular** ou **parametro angular** da recta; b representa a distancia, á origem, contada sobre o eixo das abscissas e chama-se **coefficiente linear** ou **parametro linear.**

Ao resolver os exs. **7** a **11** do § **132**, notámos que a recta póde occupar, de um modo geral, quatro posições diversas, em relação aos dois eixos, e, conforme os signaes de **a** e **b,** indicados no seguinte quadro e na fig. 97:

Recta I: a e b positivos;
" II: a positivo e b negativo;
" III: a negativo e b positivo;
" IV: a e b negativos.

A intersecção de duas rectas representativas de dois movimentos uniformes corresponde a um momento em que os dois moveis estão no mesmo logar. Que indica, então, a abscissa do ponto de intersecção? e a ordenada desse ponto?

PROBLEMAS

137. I. — De uma estação O partiu um trem de carga com a velocidade de 35km.: hora; quando elle se acha a 50 km. de O parte, no mesmo sentido, sobre uma linha parallela, um trem expresso com a velocidade de 60km. hora.

Quanto tempo levará o expresso para alcançar o de carga e a que distancia de O se dará o alcance?

(1) Seja x o *tempo* decorrido desde a partida do expresso até ao momento do encontro.

(2) O tempo t, a velocidade v e a distancia d, para cada um dos dois trens, será, pois:

12 ds$\times$30$\times$8

para o trem expresso $\begin{cases} t = x \\ v = 60 \\ d = 60x. \end{cases}$

para o trem de carga $\begin{cases} t = x \\ v = 35 \\ d = 35x + 50, \end{cases}$ visto como este trem já havia percorrido 50km. antes da partida do expresso, que é a origem da contagem do tempo, t.

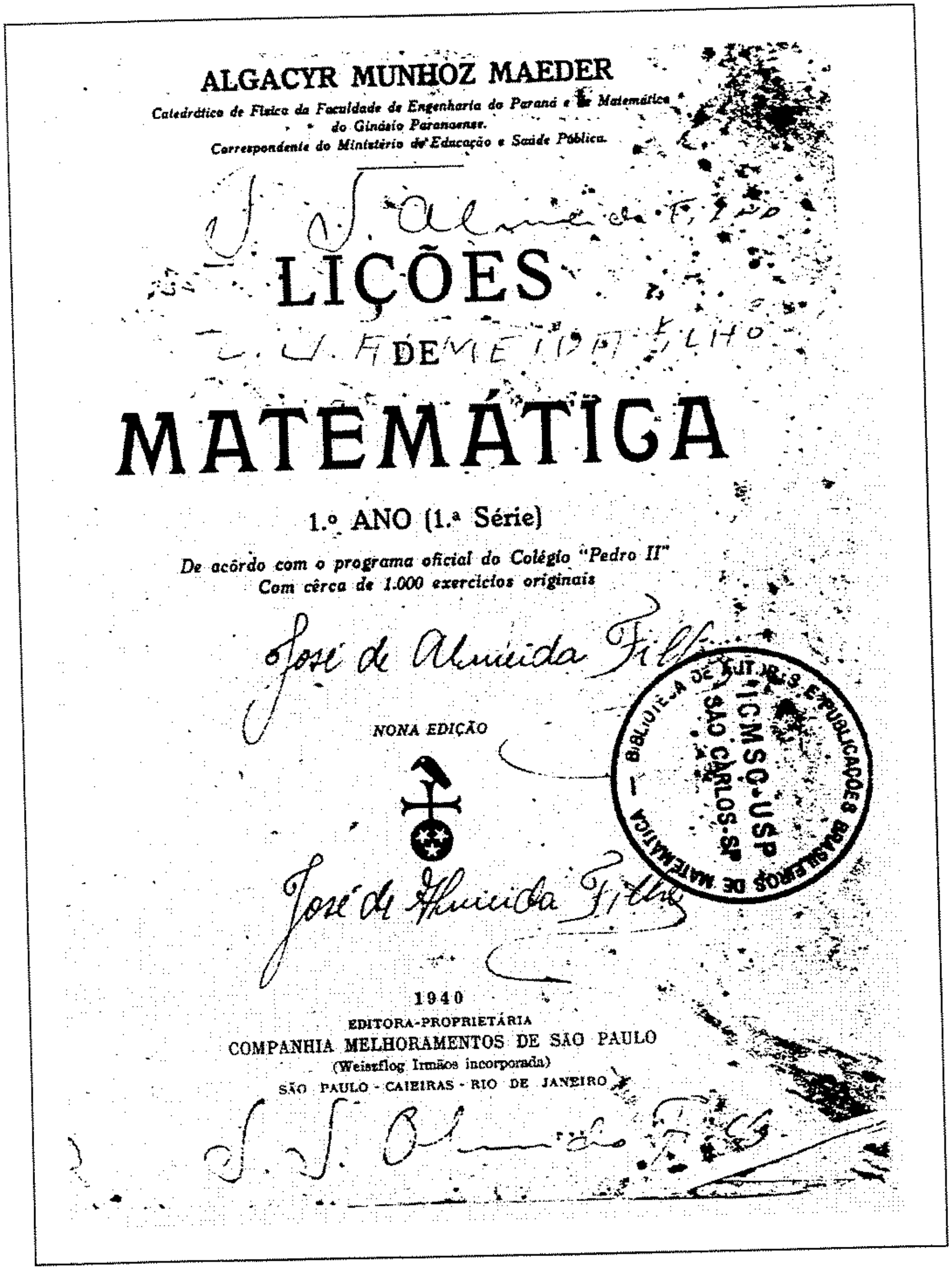
Como a distancia de O ao ponto de encontro é a mesma para os dois trens, temos a equação

$$60x = 35x + 50$$

que, resolvida, dá $x = 2$.

APÊNDICE 4

Frontispício do livro *Lições de Matemática – 1º Ano (1ª Série)* - Algacyr Munhoz Maeder, 1940.



ALGACYR MUNHOZ MAEDER

Catedrático de Física da Faculdade de Engenharia do Paraná e de Matemática do Ginásio Paranaense.
Correspondente do Ministério da Educação e Saúde Pública.

LIÇÕES DE MATEMÁTICA

1.º ANO (1.ª Série)

De acôrdo com o programa oficial do Colégio "Pedro II"
Com cêrca de 1.000 exercícios originais

José de Almeida Filho

NONA EDIÇÃO

José de Almeida Filho

1940

EDITORA-PROPRIETÁRIA
COMPANHIA MELHORAMENTOS DE SÃO PAULO
(Weiszflog Irmãos incorporada)
SÃO PAULO - CAIEIRAS - RIO DE JANEIRO

Partes do livro *Lições de Matemática – 1º Ano (1ª Série)* - Algacyr Munhoz Maeder, 1940, Edições Melhoramentos.

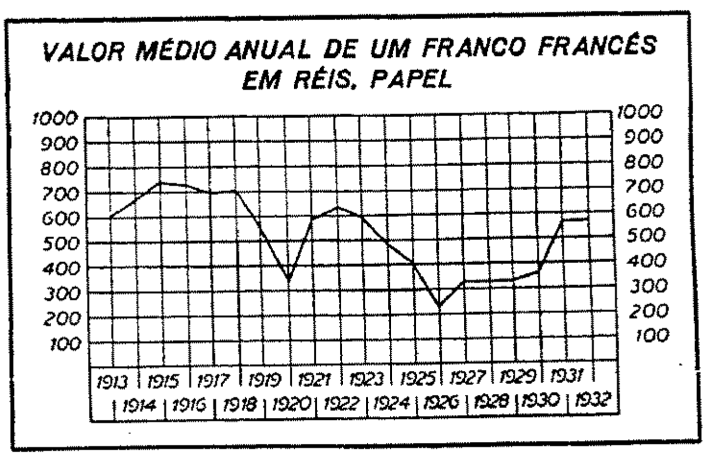
Em certos anuários de propaganda, encontram-se exemplos interessantes, que bem revelam o progresso no uso dos gráficos e que são complemento necessário ao conhecimento dos resultados oferecidos pelos recenseamentos.

O emprêgo de figuras as mais diversas, guardando sempre uma correlação com a realidade, serve ao esclarecimento de inúmeros fenômenos.

Por meio de cubos, círculos, quadrados, caricaturas, etc. consegue-se dar ao estudante uma idéia precisa de variação ou diferenciação entre os elementos considerados.

492. **Exemplos.** — 1.º Vejamos, agora, como se representa, com os eixos coordenados, uma variação qualquer.

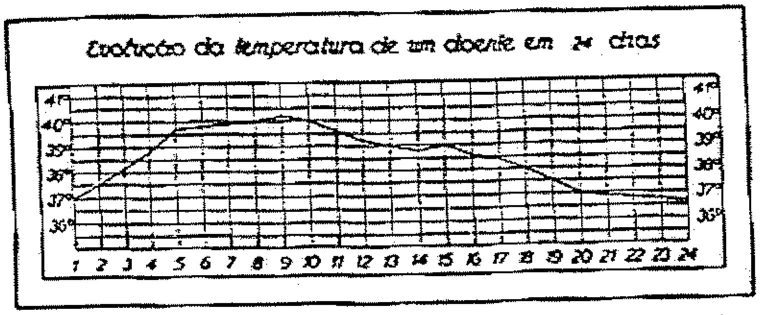
Afim de facilitar o trabalho, tomemos um papel quadriculado e consideremos como unidade cada uma de suas divisões, o que nos permite medir com mais rapidez as frações da unidade. Sejam os valores médios anuais de um franco francês em réis, papel:



1913 - $600; 1914 - $668; 1915 - $737; 1916 - $723;
1917 - $694; 1918 - $703; 1919 - $555; 1920 - $335;
1921 - $588; 1922 - $632; 1923 - $597; 1924 - $483;
1925 - $402; 1926 - $229; 1927 - $332; 1928 - $332;
1929 - $332; 1930 - $363; 1931 - $565; 1932 - $569.

E com isso vamos compor o gráfico.

A função tempo exprimamos pelas abcissas. Marquemos, para tal efeito, ao pé das linhas verticais do papel



39°; 38°,8; 39°; 38°,6; 38°,4; 38°; 37°,5; 37°; 36°,9; 36°,8; 36°,7; 36°,6.

Sôbre o papel quadriculado marquemos, como abcissas, os dias, e, como ordenadas, a partir da horizontal, que será a linha de referência 36°, marquemos cada divisão com 0°,5 registando apenas os números inteiros de graus 37°, 38°, 39°, 40 e 41°.

Correspondendo a cada dia, tomemos o número de divisões equivalentes aos graus da febre e frações deles para que se determinem os pontos da curva. Ligados êstes, temos a curva da febre do doente, tomada a temperatura sempre pela manhã.

Poderíamos não só fazer um gráfico mais complexo com as temperaturas de 6 e 18 horas de cada dia, assim também o da temperatura média diária do doente, aplicando o termômetro quatro vezes ao dia, para a determinação da média de cada dia, etc.

3.° Onde, porém, os gráficos têm tido notável emprêgo é no registo dos fenômenos meteorológicos. E' bem regular o número de aparelhos que servem à feitura de gráficos por processos mecânicos. Assim, há barômetros registadores, pluviômetros totalizadores, mareógrafos, sismógrafos, etc.

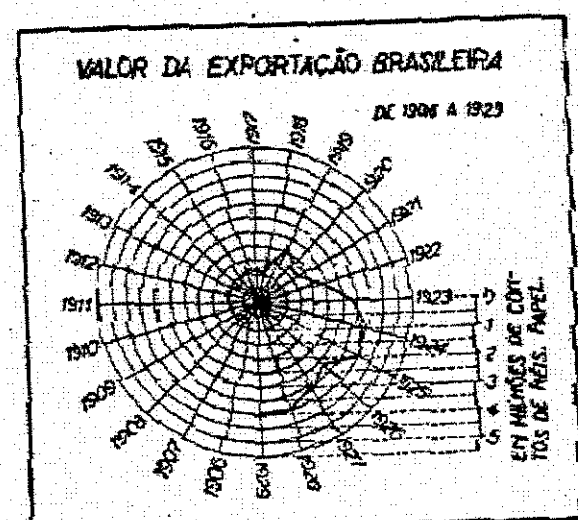
Além disso, com o recurso de dados colhidos não só na observação da fôrça dos ventos, como na de temperaturas diárias, humidade do ar, quantidade de chuva, etc., são feitos pelas repartições de serviços meteorológicos gráficos interessantes, que orientam o público nos *processus* pelos quais decorrem os fenômenos meteorológicos, servindo à agricultura, à aviação, aos transportes em geral, etc.

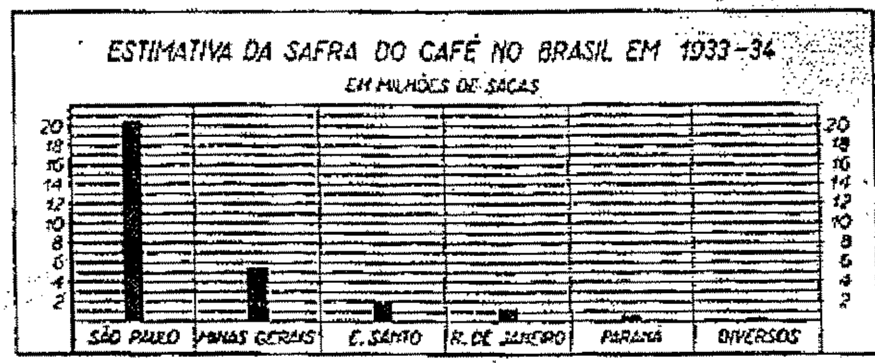
Vamos compor um gráfico de temperatura, para a cidade de Belo Horizonte, abrangendo de 1914 a 1921, com as

de metade do número total de pés de café do Brasil, Minas tem mais de um sexto e assim por diante. As áreas dos setores revelam, *de modo claro*, a diferença existente entre as lavouras consideradas.

Outro tipo de gráfico, de interessante efeito, é o que segue, no qual se representa o valor da exportação brasileira em milhões de contos de réis. A unidade tomada é de *meio milhão de contos*. Faz-se a variação segundo o raio dos círculos concêntricos, aumentando-se o raio dos círculos de meia unidade, que é o segmento correspondente a *meio milhão de contos*.

E conhecidos os dados numéricos, obtem-se o valor da exportação por ano servindo-se da marcação feita sôbre os



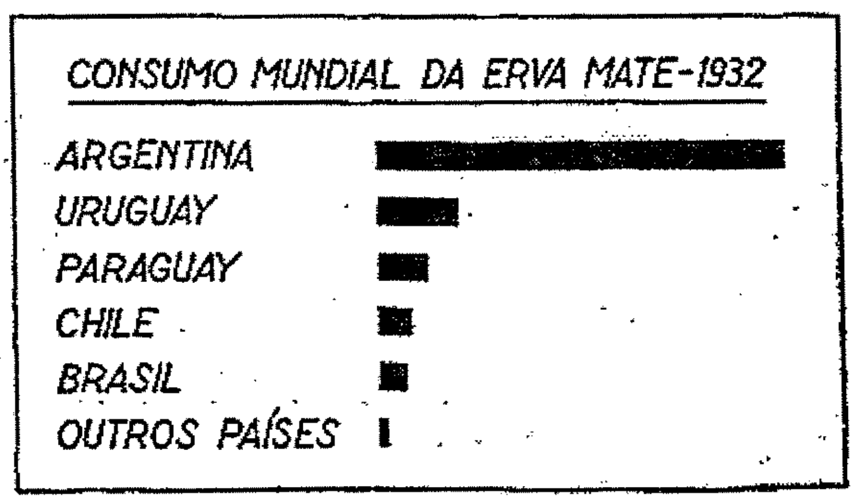


A estimativa da *produção de café*, em milhões de sacas, na safra 1933-1934, pode ser indicada com o gráfico seguinte, em que cada barra mede a produção provável por Estado cafeeiro, adotando-se uma unidade para a correspondência precisa com os números prováveis.

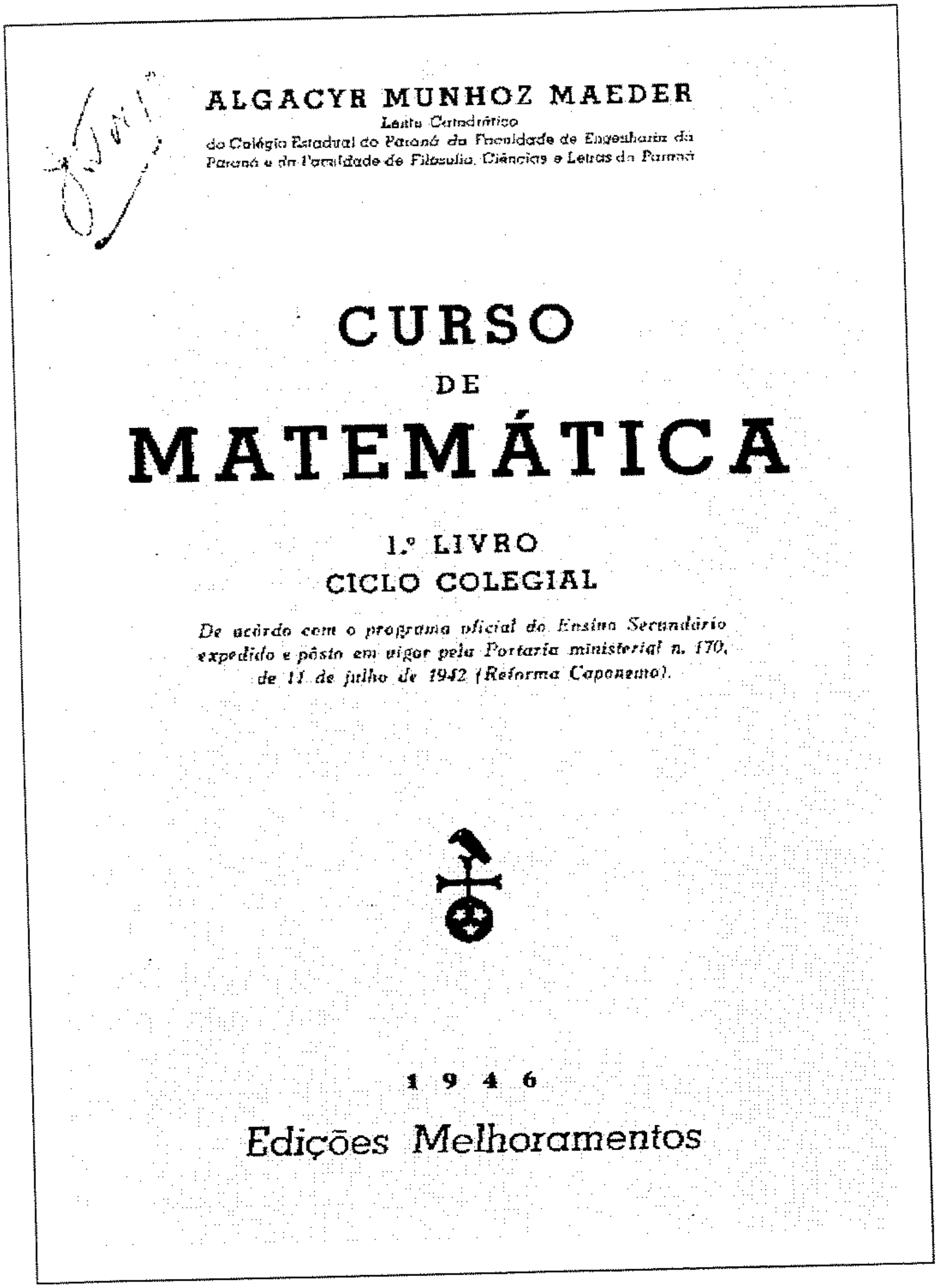
Como facilmente se compreenderá, o gráfico[1] tem as barras correspondentes aos números: 20.500.000 sacas, para São Paulo; 5.500.000 sacas para Minas Gerais; 1.800.000 sacas para o Espírito Santo; 1.200.000 sacas para o Estado do Rio de Janeiro; 500.000 sacas para o Paraná; e 380.000 sacas para os outros Estados produtores.

O gráfico permite, à simples inspeção, verificar que São Paulo produzirá mais de metade da safra; que Minas produzirá pouco mais de um quarto de São Paulo, etc.

A *erva-mate* é a principal produção do Estado do Paraná. Mas, Santa Catarina, Rio Grande do Sul e Mato Grosso



Frontispício do livro *Curso de Matemática – 1º Livro (Ciclo Colegial)* - Algacyr Munhoz Maeder, 1946.



ALGACYR MUNHOZ MAEDER

Livre Catedrático
do Colégio Estadual do Paraná da Faculdade de Engenharia do
Paraná e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná

CURSO
DE
MATEMÁTICA

1.º LIVRO
CICLO COLEGIAL

De acôrdo com o programa oficial do Ensino Secundário expedido e pôsto em vigor pela Portaria ministerial n. 170, de 11 de julho de 1942 (Reforma Capanema).

1 9 4 6

Edições Melhoramentos

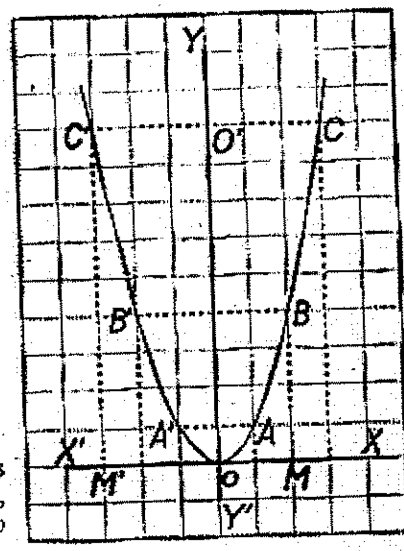
Partes do livro *Curso de Matemática – 1º Livro (Ciclo Colegial)* - Algacyr Munhoz Maeder, 1946.

Desde logo, verificamos que a curva passa pela origem das coordenadas, uma vez que, para

$$x = 0, \quad y = 0,$$

e bem assim que todos os seus pontos se devem encontrar acima do eixo XX′, pois os valores de y são positivos para

$$0 > x > 0.$$



Além disso, cumpre notar que, aos valores absolutos de x iguais e de sinais contrários correspondem valores iguais e positivos para y.

Com efeito, para

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3,$$

por exemplo, temos

$$y = 9.$$

Determinados os pontos C e C′ pertencentes à curva, construímos o quadrilátero CMM′C′.

Notando que êsse quadrilátero é retângulo, temos

$$CO' = C'O'.$$

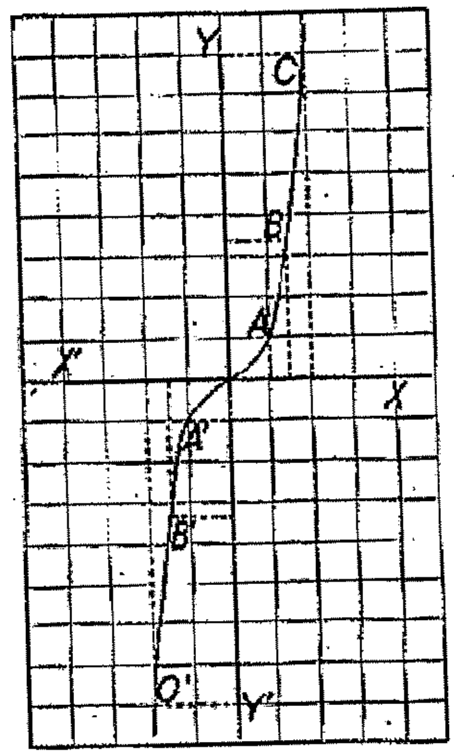
Dessarte, os pontos C e C′ são simétricos em relação ao eixo OY. E, como essa simetria persiste em relação aos pontos considerados nas mesmas condições, segue-se que OY **é um eixo de simetria da curva em questão.**

Feitas essas observações, fixemos mais alguns pontos da curva, dados pelas suas coordenadas.

Para isso, atribuamos valores particulares à variável x e calculemos os valores correspondentes para y.

valores de x	−3	−2	−1	0	1	2	3
valores de y	9	4	1	0	1	4	9

Representando, relativamente aos eixos coordenados, os pontos A, B, C..., definidos pelos valores acima, e ligando-os por traço contínuo, obtemos o gráfico da função dada.



271. Função $y = x^m$. — Ao considerar, de modo geral, as funções do tipo

$$y = x^m,$$

dois casos se devem distinguir, de vez que o expoente m pode ser número par ou ímpar.

I. Sendo m número par, os valores de y são sempre positivos, tanto para $x > 0$ como para $x < 0$.

Conseqüentemente, todos os pontos pertencentes à curva representativa dessa função se encontram situados acima do eixo XX'.

Por outro lado, fàcilmente se verifica que a curva passa

APÊNDICE 5

Frontispício do livro *Matemática – Terceiro Ano Colegial* – Thales MelloCarvalho, 1954.

THALES MELLO CARVALHO

Catedrático da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas da Universidade do Brasil e do Instituto de Educação do Distrito Federal

MATEMÁTICA

para o

TERCEIRO ANO COLEGIAL

4.ª EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO

Partes do livro *Matemática – Terceiro Ano Colegial* – Thales MelloCarvalho, 1954.

Vejamos como caracterizar, com mais rigor, o limite (5).

Consideremos o valor absoluto da diferença entre o limite 4 e a função $f(x)$, isto é, $|4 - (2x - 2)|$ ou $|6 - 2x|$ e determinemos para que valores de x se tem

$$|4 - f(x)| = |6 - 2x| < \varepsilon \qquad (6)$$

sendo ε um número positivo, arbitràriamente escolhido.

1) Se $x < 3$, deve-se ter

$$6 - 2x < \varepsilon \quad \text{donde} \quad x > 3 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

2) Se $x > 3$, deve-se ter

$$2x - 6 < \varepsilon \quad \text{donde} \quad x < 3 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (8)$$

Os resultados (7) e (8) mostram que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}, 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, se verifica a condição (6).

Em conclusão, podemos dizer que, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número positivo δ, tal que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, se verifica a condição (6). Êste resultado torna-se mais compreensível à luz da fig. 10, onde a reta AB é a representação gráfica da função (4).

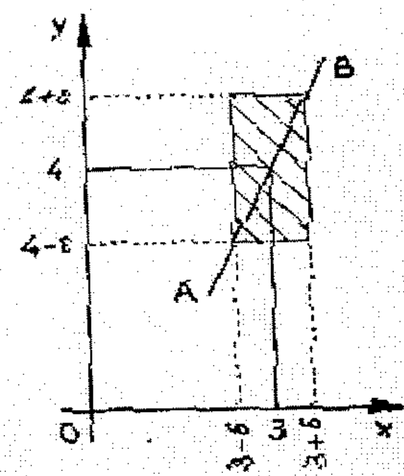


FIG. 10

Por êle vê-se que, para qualquer valor de x do intervalo considerado, o ponto correspondente do gráfico da função está situado no retângulo tracejado, isto é, verifica-se a condição (6).

O exemplo dado esclarece a seguinte

DEFINIÇÃO: *Diz-se que uma função $f(x)$ tem um limite finito L quando x tem um limite finito a e escreve-se*

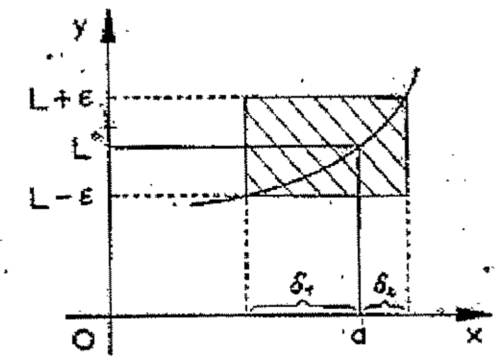


FIG. 11

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, *se, escolhido arbitràriamente um número positivo* ε, *existe um número positivo* δ *tal que, para todo valor de* x *do intervalo* $(a - \delta,\ a + \delta)$, *excluído (no máximo) o ponto* $x = a$, *se tenha* $|L - f(x)| < \varepsilon$ (*).

Em geral, a condição $|L - f(x)| < \varepsilon$ do enunciado anterior é verificada para os valores de x situados num intervalo $(a - \delta_1,\ a + \delta_2)$, sendo δ_1 e δ_2 positivos e $\delta_1 \neq \delta_2$, como sugere a fig. 11. Toma-se, então, para valor de δ na definição anterior, o menor dos números positivos δ_1 e δ_2.

Observe-se que é indiferente escrever $|L - f(x)| < \varepsilon$ ou $|f(x) - L| < \varepsilon$, visto que se consideram *valores absolutos* no primeiro membro.

3. Generalização. Vimos no **n.º 2** a definição do limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ quando a e L são finitos.

Vejamos, agora, como caracterizá-lo se um, pelo menos, dos números a e L é infinito. Para isso consideremos os casos seguintes.

Primeiro caso: *O limite da variável é infinito.*

Diz-se que uma função $f(x)$ tem um limite finito L quando x tende para $+\infty$ e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número N, tal que, para $x > N$ se tenha $|L - f(x)| < \varepsilon$.

(*) A hipótese de « x pertencer ao intervalo $(a - \delta,\ a + \delta)$ e ser diferente de a » é, também, indicado por « $x \neq a$ e tal que $|x - a| < \delta$ ». Quando estudarmos mais adiante a continuidade esclareceremos a razão porque pode ser excluído o ponto a da condição do enunciado.

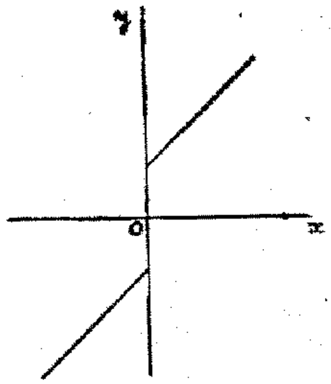


FIG. 18

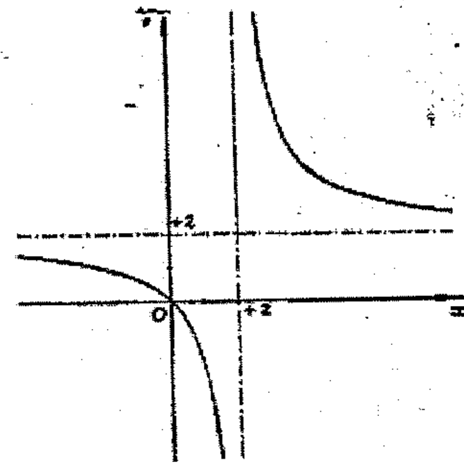


FIG. 19

Observe-se que a função não é *definida* no ponto $x = 2$ e, portanto, não satisfaz à primeira das condições de continuidade (n.° 5).

6. Unicidade do limite. Se uma função (unívoca) tem um limite num ponto a, êsse limite é *único*, ou, em outras palavras, uma função (unívoca) não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto a. Vejamos, de um modo intuitivo, essa propriedade, habitualmente designada por *teorema da unicidade do limite*.

De fato, uma função $f(x)$ não poderia ter dois limites distintos L e L' num ponto $x = a$ (fig. 20), porque, escolhido convenientemente um ε positivo tal que, os intervalos $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ e $[L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ (intervalos AB e CD, respectivamente) não tivessem pontos comuns, não haveria a possibilidade de, num entôrno do ponto a, os pontos representativos de *todos* os valores da função estarem simultâneamente naqueles intervalos.

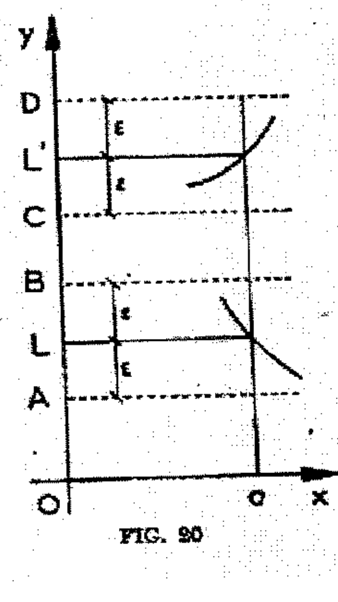


FIG. 20

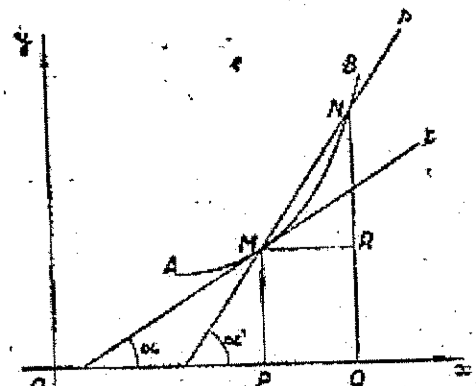


FIG. 47

Tirando pelo ponto M a paralela MR ao eixo das abcissas e a secante s que passa pelos pontos M e N, formamos o triângulo retângulo MRN, cujos catetos MR e NR são, respectivamente, Δx_0 e Δy_0.

Seja α' o ângulo do eixo das abcissas com a secante s.

Podemos, então, escrever para o triângulo retângulo MRN a seguinte relação

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{RN}{MR} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \qquad (6)$$

Como a função é, por hipótese, derivável no ponto M, quando Δx_0 tender para zero, a razão incremental (6) terá para limite a derivada $\dfrac{dy_0}{dx_0}$. Por outro lado, Δx_0 tendendo para zero, o ponto N aproximar-se-á indefinidamente de M de modo que a secante s tenderá para uma posição limite t, que, como sabemos da Geometria, é a tangente à curva no ponto M. O ângulo α' tenderá, então, para o ângulo α do eixo das abcissas com a tangente t. Podemos, portanto, escrever

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{dy_0}{dx_0} \qquad (7)$$

Como $tg\alpha$ é o coeficiente angular da reta t (**Cap. IV, n.° 8**), podemos concluir:

A derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto de seu campo de definição é o coeficiente angular da tangente à curva nesse ponto.

Observemos que, se t fôr paralela ao eixo oy, o resultado anterior ainda subsistirá, aceitando-se a extensão da noção de derivada ao caso do limite (7) ser infinito (n.° 1).

6. Interpretação cinemática da derivada. Suponhamos que um ponto se mova num determinado sentido sôbre

5. Caracterização dos extremantes de uma função. O princípio geral que permite selecionar quais as raízes da equação (8) que são maximantes ou minimantes de $f(x)$ envolve a consideração das derivadas sucessivas de $f(x)$, exigindo sua demonstração conhecimentos além das possibilidades dêste compêndio.

Para as aplicações mais freqüentes pode ser utilizado o seguinte teorema, cuja demonstração omitiremos: (*)

Se $f(x)$ admite derivada única e finita em todo o intervalo $[a, b]$ e se num ponto x_0 interior dêste se tem $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$ então a função terá um máximo em x_0 se $f''(x_0) < 0$ e um mínimo se $f''(x_0) > 0$.

Façamos um *raciocínio intuitivo* para esclarecer o teorema anterior. Seja M um ponto de máximo de $f(x)$, no qual, como vimos, a tangente é paralela ao eixo $\overrightarrow{ox}$.

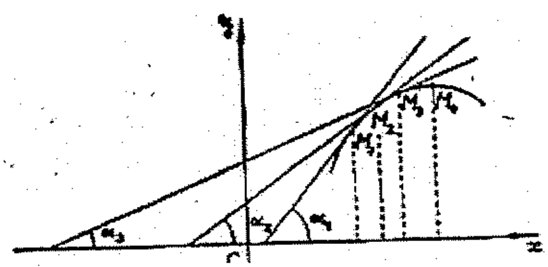


FIG. 52

Consideremos, num entôrno suficientemente pequeno à esquerda de M, uma sucessão de pontos M_1, M_2, M_3 ... (fig. 52), tendo para limite M. Sejam, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, respectivamente, os ângulos das tangentes à curva nos pontos M_1, M_2, M_3, ... com o semi-eixo positivo das abcissas.

Observemos, então, que a sucessão $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ vai *decrescendo* e tem para limite zero, enquanto a sucessão M_1, M_2, M_3, ... tem para limite M. Então, a sucessão

$$\operatorname{tg}\alpha_1, \quad \operatorname{tg}\alpha_2, \quad \operatorname{tg}\alpha_3, \ldots$$

(*) Essa demonstração exigiria igualmente conhecimentos que ultrapassam o objetivo dêste curso.