UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM PROCESSO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES VIVIDO POR ALUNOS JOVENS E ADULTOS EM SALA DE AULA: TRANSITANDO POR REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Patrícia Maria Almeida Sader Azevedo
Profa. Dra. Dione Lucchesi de Carvalho

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por **Patrícia Maria Almeida Sader Azevedo** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 30/10/2002

Assinatura:...

Comissão Julgadora:

____

____

____

2002

Catalogação na Publicação elaborada pela biblioteca da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecária: Rosemary Passos - CRB-8ª/5751

Az25p

Azevedo, Patrícia Maria Almeida Sader.
Um processo de ensino/aprendizagem de equações vivido por alunos jovens e adultos em sala de aula : transitando por registros de representações / Patrícia Maria Almeida Sader Azevedo. -- Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador : Dione Lucchesi de Carvalho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1.Educação matemática. 2. Educação do adolescente. 3. Educação de adultos. 4. Álgebra. 5. . Equações. 6. Ensino. 7. Aprendizagem. I. Carvalho, Dione Lucchesi de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

02-164-BFE

UNICAMP

Um processo de ensino/aprendizagem de equações vivido por alunos jovens e adultos em sala de aula: transitando por registros de representação.

Mestranda: Patrícia Maria Almeida Sader Azevedo

Orientadora: Profª Drª Dione Lucchesi de Carvalho

Área Temática: Educação Matemática

Grupo de Pesquisa: Cempem-Prapem

Faculdade de Educação

Universidade Estadual de Campinas

Outubro de 2002

Aos meus pais, Ana Maria e Luiz *(in memorian),* pelo exemplo de luta, força, coragem, serenidade, amizade e amor que, por suas atitudes, sempre me ensinaram. Agradeço e ofereço a vocês, com muito amor, este trabalho.

AGRADECIMENTOS

À Dione, por sua dedicação, pelo respeito a minha produção, pela competência e segurança que me transmitiu durante o desenvolvimento deste trabalho. E, sobretudo, pela compreensão em momentos delicados na minha vida pessoal, pelo tratamento sempre tão carinhoso, por sua amizade e companheirismo.

Aos professores Dario Fiorentini, Laurizete Ferragut Passos, Maria Ângela Miorim e Ana Cristina pela leitura minuciosa e crítica desta pesquisa, pelas valiosas contribuições por ocasião de Exame de Qualificação.

Ao Orlando Jóia, à coordenadora do supletivo do colégio Santa Cruz, e, em especial, ao professor e aos alunos da classe onde desenvolvi esta pesquisa, pelo interesse e respeito com que me receberam, pela colaboração e disponibilidade durante o desenvolvimento do trabalho de campo.

À Capes pelo apoio financeiro.

Aos meus amigos Débora, Liliana, Renata, Marcello e Wilton por acreditarem em mim e no trabalho, por me ouvirem e por transmitirem coragem, "força" e alegria.

Ao Pedro, meu filho, e à Beatriz, minha sobrinha, pelos momentos de alegria e aprendizado que me proporcionaram, durante a realização desta pesquisa.

À minha mãe, Ana Maria, pela tranquilidade que me proporcionou ao cuidar do Pedro (e de mim!) com todo carinho, durante a realização deste estudo, pelo exemplo que é para mim, pelo incentivo e motivação que me transmite. Pelo valor do conhecimento, que, junto com meu pai, ensinou. Por todo amor e atenção, sem os quais não teria realizado esta pesquisa.

À minha querida irmã, Luciana, minha grande amiga, pelo entusiasmo e alegria contagiantes, por me ouvir sempre, por acreditar no trabalho, pelos momentos de descontração e cumplicidade, compartilhando comigo muitos risos e lágrimas. Por todo amor e carinho, sem os quais jamais teria realizado este trabalho.

Ao Léo, meu marido, companheiro de lutas e alegrias, por compartilhar dos meus sonhos e anseios, vivendo comigo cada etapa da realização desta pesquisa. Por suas leituras críticas, por dividir seu conhecimento, pelo respeito por este trabalho, pelo exemplo que me passa de compromisso e competência profissional, por sua paciência e compreensão. E, sobretudo, por sua cumplicidade e amor.

SUMÁRIO

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo principal a investigação e a análise do processo de ensino/aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos transitando por diferentes registros de representação propostos pelo professor em sala de aula.

Para desenvolver a pesquisa, foi realizado um trabalho de campo numa classe composta por alunos jovens e adultos estudando equações. As aulas foram registradas em diário de campo e a maioria delas foi gravada em áudio.

O desenvolvimento do trabalho inclui a caracterização da escola, especialmente de sua perspectiva pedagógica. Em seguida, apresenta-se uma narrativa sobre a classe a dinâmica das aulas, bem como a participação do professor, dos alunos e da pesquisadora. Esta narrativa possibilitou uma análise inicial e perceber a emergência de duas categorias que denominamos "o sinal de igual" e "a incógnita".

Utilizando como principal referencial teórico o conceito de representação semiótica desenvolvido por Duval, foi possível perceber que o trânsito nos registros de representação instigado pelo professor favoreceu o processo de aprendizagem de equações no que se refere ao sinal de igual enquanto relacional, mas não foi suficiente para superar o sentido de incógnita como valor desconhecido.

Espera-se que os resultados dessa pesquisa sejam relevantes para o aprimoramento da prática pedagógica dos profissionais dedicados ao ensino de Matemática para jovens e adultos, pois traz reflexões sobre uma abordagem significativa de Álgebra elementar, não se restringindo exclusivamente à manipulação algébrica por ela mesma.

ABSTRACT

The main goal of this research is the investigation and analysis of the equation learning process by adult students when they pass by different representation records proposed by the teacher in the classroom.

In order to develop the study, a field research was conducted in a classroom of adult students being introduced to equations. The lessons were recorded in a field diary and the majority of them were audio recorded.

This text includes the characterization of the school and of its pedagogic proposal. A narrative about the lessons, the teacher, the students and the researcher participation is presented in the sequence. This narrative enabled the initial analysis, where two main categories were relevant: the "equals sign" and the "incognita".

The main theoretic reference used is the concept of semiotic representation proposed by Duval. The researcher was enabled to realize that the action of passing by different representation records, instigated by the teacher, favored the equation learning process concerning the equals sign as a relation, although it was not enough to surpass the incognita sense as the unknown value.

It is expected that the results of this research may help to improve the pedagogic practices of Mathematics teachers working with adults. It proposes a reasonable approach for elemental Algebra that does not restrict itself exclusively to Algebra manipulation per se.

INTRODUÇÃO

Chegada ao tema a partir da minha prática

Minha experiência como professora e algumas leituras fazem parte dos caminhos que percorri até chegar ao tema que foi investigado dando origem a esta dissertação: aspectos do processo de ensino/aprendizagem de Matemática de alunos jovens e adultos em sala de aula, tendo como maior preocupação a abordagem da Álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental.

A escolha pelo curso de Licenciatura em Matemática, na graduação, foi sempre motivada pelo papel social e formador que o professor exerce na sociedade. Porém, as primeiras disciplinas do curso, por serem mais técnicas, não evidenciavam essa função. Foi preciso procurá-la! Encontrada, então, nas disciplinas oferecidas pela Faculdade de Educação da Unicamp, o objetivo passou a ser terminar o curso e partir para a escola, desempenhar este papel que tanto me encanta.

Minha experiência como educadora tem sido bastante diversificada. Comecei como professora em duas classes de 5ª série em uma escola estadual na periferia de Paulínia/SP, depois em duas turmas de 8ª série em uma escola estadual de Campinas/SP, ainda enquanto aluna de graduação.

Realizei, entre 1993 e 1995, um trabalho de Iniciação Científica na Faculdade de Educação da Unicamp, orientada pelo Prof. Dr. Dario Fiorentini, intitulado "O que as pesquisas brasileiras investigam sobre a realidade de sala de aula do ensino de Matemática?". Este estudo foi fundamental para a minha formação, pois colocou-me em contato com procedimentos como levantamento bibliográfico, organização e classificação do material encontrado, reconhecimento dos diferentes formatos de investigação entre artigos, relatos de experiências, dissertações e teses, elaboração de relatório de pesquisa e apresentação oral em congresso.

O trabalho de Iniciação Científica permitiu-me ainda conhecer algumas abordagens dos conteúdos matemáticos em sala de aula, auxiliando minha prática pedagógica que estava se iniciando. Também possibilitou o contato com outras formas de pesquisa, não realizadas em sala de aula, que fizeram parte do material levantado, porém não analisado por não ser foco daquele estudo.

Concluído o curso de Licenciatura em Matemática, as experiências seguintes foram com duas classes de 7ª série, duas turmas de 8ª série como professora em duas escolas particulares em São Paulo/SP; o trabalho com duas turmas de alunos adultos, funcionários de um hospital particular católico estudando assuntos correspondentes aos 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental, também em São Paulo, que me conduziu ao tema da presente dissertação; e novamente como professora das quatro últimas séries do Ensino Fundamental em duas escolas particulares de São Paulo.

Passando por escolas e alunos tão diferentes quanto a classes sociais, a realidades e contextos, a tipos de instituições (públicas e privadas), a faixas-etárias, a modalidades de curso (regular e supletivo), a cidades, percebi o apelo social e formador, despertado de forma mais intensa no trabalho com os alunos adultos.

Frente a tantas diferenças em relação ao ensino regular, a prática pedagógica, no caso das aulas no hospital, passou a merecer uma análise criteriosa e uma busca por novos caminhos, com o objetivo de entrar em sintonia com os alunos, suas concepções e necessidades no processo ensino/aprendizagem, pois a educação de pessoas jovens a adultas

> *(...) não nos remete apenas a uma questão de especificidade etária, mas, primordialmente, a uma questão de especificidade cultural. (...) delimita um determinado grupo de pessoas relativamente homogêneo no interior da diversidade de grupos culturais da sociedade contemporânea. (...) Refletir sobre como esses jovens e adultos pensam e aprendem envolve, portanto, transitar por pelo menos três campos que contribuem para a definição de seu lugar social: a condição de "não-crianças", a*

condição de excluídos da escola e a condição de membros de determinados grupos culturais (Oliveira, 1999: 2-3).

Preocupações em despertar o interesse daqueles alunos geraram questionamento em relação a minha prática pedagógica. Desse modo, foram feitas tentativas de tornar as aulas mais dinâmicas, proporcionando a eles um ambiente interativo no qual passassem a atribuir mais significado aos conteúdos estudados. Porém, essas tentativas esbarraram em uma série de problemas: como realizar aulas com mais significado tendo que seguir uma apostila do Telecurso 1º grau? Como justificar a utilização de outros materiais para os alunos que solicitavam o uso da apostila? Quais são os conteúdos a serem selecionados para um curso supletivo? Existe um currículo a ser seguido nesses cursos? Como aproveitar o que já sabiam para resolver os problemas? Como evitar uma formação Matemática puramente utilitária e garantir uma formação adequada para esses alunos?

Neste processo, foi fundamental trocar experiências com outros professores para acalmar algumas ansiedades e orientar um possível caminho. Mas, como esperado, muitas das questões continuam sem respostas.

Começou aí a busca por uma bibliografia específica sobre o ensino da Matemática para alunos adultos em situação de aula que pudesse dar indicações, sugestões, orientações e encaminhamentos para as questões que me incomodavam e instigavam.

Tomando como base um projeto de investigação do Centro Ecumênico de Documentação e Informação (CEDI), realizado em 1990, que mapeou a produção existente sobre esse tema, foi possível perceber que, até aquele ano, havia poucos estudos tratando da Educação Matemática de jovens e adultos. Portanto, de acordo com Jóia é preciso

ressaltar (...) que a educação Matemática de jovens e adultos está a espera de adquirir corpo próprio, constituindo um campo de preocupações e problemas específicos. A título de exemplo, façamos a comparação entre o volume de produção sobre o ensino da Matemática e a que versa sobre o ensino da língua escrita. O que as separa são décadas de elaborações e propostas

> *que têm em suas origens as mais diversas influências, correntes de pensamento e referências teóricas* (Jóia, 1997: 31-32).

Não foi surpresa ter encontrado poucas pesquisas sobre esse tema. Na ocasião do estudo realizado em Iniciação Científica, nenhuma pesquisa entre as analisadas tratava da Educação Matemática de jovens e adultos.

Depois de ingressar no mestrado, realizei um levantamento bibliográfico versando sobre os temas mais amplos do que o que estou investigando, tendo como palavras-chave o ensino de Matemática e a educação de jovens e adultos. O objetivo foi verificar se o ensino da Álgebra e a pesquisa em sala de aula estão inseridos neste estado mais geral. O estudo do material encontrado permitiu compreender o contexto do ensino de Matemática para jovens e adultos, situando este tema na produção científica da Educação Matemática.

Realizei este levantamento junto a duas bibliotecas. A primeira foi da Ação Educativa, organização não-governamental, que assessora, faz pesquisas e informa sobre a educação de jovens e adultos. A outra fonte de dados foi a biblioteca da Fundação Carlos Chagas, instituição com 38 anos de trabalhos dedicados à seleção de pessoal, à pesquisa e avaliação educacional, cuja biblioteca é especializada em estudos educacionais. As listagens fornecidas pelas duas instituições praticamente se equivalem.

Encontrei 94 trabalhos entre artigos de periódicos, relatos de experiências, propostas curriculares, comunicações em evento, livros, dissertações e teses. Destes, foram selecionados 61 para breve descrição e categorização a partir do resumo fornecido. Identifiquei, então, características comuns entre os trabalhos selecionados e os reuni em três categorias de trabalhos de Educação de Jovens e Adultos: propostas curriculares, estudos que descrevem e analisam projetos de educação de jovens e adultos e investigações que relacionam o cotidiano do aluno ao cotidiano escolar.

À primeira categoria pertencem as orientações curriculares de algumas cidades e Estados, a maioria delas se restringe a apresentar uma grade curricular e algumas orientações didáticas (tarefas). Algumas dessas orientações descrevem os objetivos do curso supletivo e sua forma de avaliação. Foram encontradas propostas curriculares que abordam questões de cidadania, democracia (Município de Curitiba) e preocupações em adequar o programa às necessidades da população atendida (Estado do Maranhão). Também incluí nesta categoria estudos que descrevem e analisam propostas curriculares.

No decorrer do desenvolvimento desta dissertação, um importante documento foi publicado pelo Ministério da Educação. Trata-se da Proposta Curricular para o Segundo Segmento[1] do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos –EJA, recentemente publicada (Brasil, 2002).

A leitura deste documento permitiu-me reconhecer sua contribuição para a Educação de Jovens e Adultos, fornecendo diretrizes nacionais para as escolas que atendem a estes alunos, de acordo com o objetivo de *subsidiar o processo de reorientação curricular nas secretarias estaduais e municipais, bem como nas instituições que atendem ao público de EJA* (Brasil, 2002: 5). Porém, não foi realizada uma análise aprofundada desta proposta, pois a organização curricular não tem relação direta com o foco da minha pesquisa.

A segunda categoria estabelecida reúne trabalhos que descrevem e analisam projetos de educação de jovens e adultos, como iniciativas de universidades, de sindicatos, grupos de movimentos sociais, como por exemplo, do MST (Movimento dos Sem-Terra).

A discussão sobre os conhecimentos da prática na escola de jovens e adultos é um tema comum aos trabalhos da terceira categoria. As aplicações e limitações, as vantagens e desvantagens da "presença do cotidiano na escola" são avaliadas por estes estudos.

Alguns trabalhos pertencem a mais de uma categoria ou não se encaixam em nenhuma delas.

Frente às coincidências constatadas pelo levantamento bibliográfico inicial, recorri a duas outras fontes de dados: artigo que apresenta o estado da arte da investigação Matemática de jovens e adultos no Brasil (Jóia, 1997) e banco de dissertações e teses do Círculo de Estudo,

[1] Corresponde às quatro últimas séries do Ensino Fundamental.

Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Unicamp (Cempem).

O artigo de Jóia (1997) forneceu-me uma relação de pesquisas que tratam do ensino/aprendizagem da Matemática para jovens e adultos, organizadas em três grupos. No primeiro estão trabalhos que versam sobre os processos de aquisição de conhecimentos relacionados ao sistema de numeração e às quatro operações; o segundo reúne a produção da área de Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, tendo como principal foco as capacidades cognitivas dos adultos analfabetos ou pouco escolarizados; ao último grupo pertencem as pesquisas realizadas em sala de aula.

Ao consultar o banco de dissertações e teses do Cempem, procurei limitar minha busca às pesquisas que tiveram a sala de aula como fonte de informações, encontrando três estudos: Carvalho (1995), Monteiro (1998) e Abreu, D. M. B (1999).

Porém, constatei que o ensino/aprendizado da Álgebra em sala de aula de alunos jovens e adultos não apareceu como tema contemplado pelas pesquisas as quais tive acesso.

Entre o material bibliográfico, um artigo chamou minha atenção. Publicado no periódico Alfabetização e Cidadania, "Os registros matemáticos dos adultos" (Toledo, 1997) trata dos saberes que os alunos adultos já possuem, de como resgatá-los durante as aulas e de que forma encorajar os alunos a expressar seus raciocínios, principalmente no que se refere à aritmética. Na experiência como professora dos funcionários do hospital, foi possível confirmar que os adultos chegam *à escola dotados de mecanismos próprios para a resolução de problemas* (Toledo, 1997: 35).

Contudo, a Álgebra concebida por Kieran *como ramo da Matemática que trata da simbolização de relações numéricas gerais e estruturas matemáticas e de operar sobre elas (Kieran, 1992: 391),* despertou-me mais interesse do que a aritmética, já enquanto aluna e professora. Atribuo essa motivação, a duas razões: ter ministrado aulas sobre funções em duas classes de 8ª série ", durante a graduação para a disciplina "Prática de Ensino em Matemática e Estágio Supervisionado II"; e atuar mais nas duas últimas séries do Ensino Fundamental.

A concepção de Álgebra sugerida por Kieran (1992), da qual compartilho, parece encontrar elementos comuns na definição dada por Aleksandrov (1985):

> *A Álgebra é em essência a doutrina das operações matemáticas consideradas formalmente desde um ponto de vista geral, como abstração dos números concretos. Seus problemas estão relacionados fundamentalmente com as regras formais para transformações de expressões e com a solução de equações* (Aleksandrov, 1985: 62, tradução nossa do espanhol).

Quanto à minha prática pedagógica ao ensinar Álgebra, tenho procurado abordar os conteúdos de forma significativa, utilizando Álgebra geométrica e propondo a resolução de problemas. Tenho procurado evitar um ensino baseado na memorização de regras, de procedimentos e de algoritmos, buscando estimular

> *(...) a construção de estratégias para resolver problemas, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios* (Brasil, 2002: 11).

Com alunos adultos, a motivação não poderia ser diferente! A partir de situações de sala de aula levantei hipóteses a respeito da Álgebra: será que o reconhecimento pelos alunos de padrões numéricos (sequências)[2] fornece os primeiros indícios da possibilidade de um trabalho com atividades algébricas? Será que esses alunos, com pouca escolarização, já desenvolveram estratégias próprias para resolver problemas que envolvam uma atividade algébrica?

---

[2] O Prof. Antonio José Lopes Bigode propõe, em seu livro Matemática Atual - 7ª série (1994), atividades cujos objetivos são explorar regularidades, relações de dependência, expressão de relações e leis gerais através da linguagem algébrica. Tais atividades estão caracterizadas no manual do professor como motivadoras do ensino inicial da Álgebra.

Estas reflexões me levaram a questionar o papel da Matemática escolar na vida das pessoas e a repercussão disso perante a falta de escolarização de grande parte da população no Brasil.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais — 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1997: 46-47), a necessidade de estabelecer relações, compreender linguagens simbólicas e codificadas, sempre atribuindo significados para o que está sendo informado, são situações cada vez mais presentes e que exigem a realização dessas atividades no mundo de hoje. Está entre as atribuições do processo escolar, seja em cursos regulares ou supletivos, de ensino/aprendizagem de Matemática, desenvolver nos alunos habilidades e capacidades de realizar atividades algébricas, adequando

> *(...) o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana* (Brasil, 1997:46).

Oliveira atribui este papel à escola, uma vez que

> *(...) é nesta instituição que o indivíduo obtém um mapeamento geral dos focos básicos de interesse de nossa cultura, absorvendo, passo a passo, um conjunto de fatos e raciocínios que são incorporados, como "verdades", ao universo do senso comum* (Oliveira, 1987:20-21).

A Educação Matemática para os alunos adultos poderia cumprir esse papel, resgatando os conhecimentos algébricos que já possuem e aprimorando o que for necessário, tornando esses alunos aptos para compreender e interagir com a ciência moderna na qual a Álgebra vem ganhando espaço e importância. Concordo com Jóia que não basta reconhecer os conhecimentos prévios que os alunos adultos possuem, pois

> *(...) o principal desafio que se estabelece ao educador é descobrir as características desse conhecimento que o aluno traz consigo, as noções que lhe servem de base, os conceitos, os procedimentos utilizados. Mas ainda, para não permanecer*

> *apenas no encantamento, é necessário saber como propor situações de aprendizagem que permitam que o aluno expresse os conhecimentos matemáticos prévios; facilitem o exercício desses conhecimentos por parte dos alunos, explicitando nesse processo sua estrutura básica e lógica subjacente e estabeleçam formas de negociação entre conceitos, procedimentos, etc., que o aluno traz e aqueles que propõem o conhecimento escola* (Jóia, 1997: 31-32).

Entretanto, esta perspectiva de valorizar o conhecimento matemático já adquirido pelo jovem e adulto, relacionando-o ao conhecimento escolar, não é ressaltada no papel atribuído à atividade matemática pela Proposta Curricular para o Segundo Segmento do Ensino Fundamental de Educação de Jovens e Adultos:

> *Na educação de jovens e adultos, a atividade matemática deve integrar, de forma equilibrada, dois papéis indissociáveis:*
>
> *- formativo, voltado ao desenvolvimento de capacidades intelectuais para a estruturação do pensamento;*
>
> *- funcional, dirigido à aplicação dessas capacidades na vida prática e à resolução de problemas nas diferentes áreas de conhecimento* (Brasil, 2002: 12).

Os objetivos do ensino/aprendizado da Álgebra são definidos neste documento como expressar generalizações através de representações algébricas; interpretar gráficos e tabelas em linguagem algébrica e vice-versa; produzir diferentes escritas algébricas como expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, as inequações e os sistemas; estabelecer leis matemáticas que expressem relação de dependência. Parece que tal documento concede à

Álgebra um papel formativo. O aspecto funcional da Álgebra aparece na resolução de problemas (Brasil, 2202)[3].

Configuração do estudo

A pergunta e os objetivos deste estudo

A definição da Álgebra como grande campo do conhecimento matemático e a prática pedagógica com alunos jovens e adultos como objetos do meu estudo já apareciam no projeto de ingresso ao mestrado e fora suscitado em minha trajetória como professora e pesquisadora.

Mas, era necessário definir qual assunto dentro da Álgebra seria o foco da minha pesquisa. Esta delimitação se deu como consequência de um desejo de observar processos de ensino/aprendizagem que tratassem a Álgebra em sala de aula significativamente, não centrada exclusivamente na manipulação algébrica por ela mesma. Desta maneira, a questão de investigação até aquele momento era: de que forma as representações dos alunos adultos expressam os seus processos de aprendizagem da Álgebra?

Já na pergunta enunciada acima e que permaneceu em todo o processo de investigação, o conceito de representação assumido é aquele estabelecido por Duval (1993):

> *As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de sinais pertencentes a um sistema de representação que tem suas restrições próprias de significância e funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em linguagem natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são*

---

[3] A *Proposta Curricular para o Segundo Segmento do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos* (Brasil, 2002) pareceu-me ter orientação semelhante aos *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental* (Brasil, 1997). As mudanças que notei, em relação à Matemática, referem-se aparentemente à contextualização das tarefas propostas.

representações semióticas de sistemas semióticos diferentes (Duval, 1993: 39-40, tradução nossa).

Duval (1995) afirma que o estudo dos fenômenos relativos ao conhecimento não é possível sem recorrer à noção de representação, pois acredita que a atividade de representação é necessária para a mobilização de um conhecimento. Por isso, na Psicologia o conceito de representação faz-se fundamental para o estudo da aquisição dos conhecimentos.

Duval (1995) expõe três formas pelas quais o conceito de representação é abordado em Psicologia e que diferem quanto a natureza do fenômeno designado. A primeira, concebida como representação mental, aparece nos estudos de Piaget, entre 1924 e 1926, referindo-se a crenças e explicações das crianças sobre os fenômenos naturais e psíquicos, e em 1937, fazendo referência *"à noção de representação como evocação de objetos ausentes para caracterizar a novidade do último dos estágios da inteligência sensório-motora"* (Duval, 1995).

A segunda forma, representação interna ou computacional, diz respeito ao tratamento dado por um sistema de informações recebidas e transformadas em respostas adaptadas. Então, a descrição das informações através de símbolos, conhecidos pelo sistema utilizado e as regras de transformação para o interior do sistema são essenciais para gerar respostas. Desta forma, a idéia de representação tornou-se fundamental, pois baseia-se na codificação da informação.

A última forma de representação identificada por Duval (1995) é a semiótica. As representações semióticas se referem a um sistema particular de signos como a linguagem natural, a formal, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos. Esta concepção admite a idéia de conversão de uma representação em outra equivalente em outro sistema semiótico.

Alguns trabalhos que introduziram a noção de representação semiótica estudados por Duval (1995) consideraram a importância da forma com relação ao conteúdo representado, outros levaram em conta a diversidade das formas de representar conteúdos e outros se dedicaram à mudança de formas de representação por interesse de economia de tratamento.

Duval (1995) ressalta que se por um lado esses estudos avançam ao introduzirem o conceito de representação semiótica, por outro pecam por não revelarem seu papel na atividade cognitiva. Então, consideram que as representações semióticas substituem apenas a função de comunicação, desconsiderando as funções de tratamento de informações e de tomada de consciência. Além disso, consideram as representações semióticas apenas como suporte para as representações mentais o que implica na compreensão de um tema limitada à forma de representação utilizada, sem que se transite pelas diferentes formas de representar um mesmo objeto de estudo.

> *A proposição que forma a parte consequente dessa implicação é massivamente contradita por todas as observações que pode se fazer na aprendizagem de Matemática: mudar a forma de uma representação parece ser, para muitos alunos de diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e algumas vezes impossível* (Duval, 1995: 19, tradução nossa).

Considero que esta afirmação tenha algumas implicações no processo de ensino/aprendizagem da Álgebra, uma vez que abordagens que utilizam situações concretas não conduzem diretamente à simbolização de relações numéricas gerais, às estruturas matemáticas e às operações sobre elas.

Duas autoras, Kieran (1992) e Granell (1995), parecem reforçar minha hipótese. Para Kieran, enquanto o aluno não compreender uma expressão algébrica como um objeto matemático, permanecendo atrelado à representação concreta, a manipulação algébrica poderá ser alvo de conflito:

> *(...) a maioria dos livros didáticos de Álgebra apresenta uma fachada de abordagens processuais em sua introdução a objetos algébricos fornecendo alguns poucos exercícios envolvendo substituição em expressões algébricas e várias técnicas aritméticas para resolver equações algébricas – técnicas que permitem aos estudantes, em um sentido, evitar o simbolismo algébrico. Contudo, esta simulação desaparece rapidamente*

> *quando expressões algébricas devem ser simplificadas e equações resolvidas por métodos formais. (...) Até que o estudante seja capaz de conceber uma expressão algébrica como um objeto matemático, mais do que como um processo, a manipulação algébrica pode, de acordo com Tall, ser uma fonte de conflito* (Kieran, 1992: 392, tradução nossa).

Granell (1995) também acredita que o entendimento de situações concretas e o uso de processos intuitivos para resolvê-las não têm como consequência necessária a compreensão de formas abstratas de resolução

> *(...) a compreensão do significado de uma operação ou de uma transformação mediante o uso de procedimentos intuitivos e situações concretas não garante o acesso aos símbolos abstratos da aritmética e, sobretudo, da Álgebra* (Granell, 1995: 273).

A partir dos tipos de representação apresentados por Duval (1995), define-se dois conceitos fundamentais na sua obra: noésis e semiósis. Noésis trata da apreensão conceitual do objeto e semiósis da apreensão ou produção de uma representação semiótica. De acordo com o autor, não existe noésis sem semiósis, não sendo possível separar conteúdo representado das suas formas de representação.

Desta forma, a atividade de conversão entre as diversas maneiras de representar um tema em estudo torna-se fundamental, porém suscita dificuldades e chama a atenção para a função da produção de uma representação semiótica no funcionamento do pensamento e no desenvolvimento do conhecimento.

Duval (1995) se refere a uma classificação de signos disponíveis para se produzir uma representação semiótica, elaborada por Peirce: ícones, símbolos e índices, baseado na Lógica. Esta classificação contribuiu para fundamentar a semiótica, mas não contemplou as relações entre os sistemas semióticos e nem as atividades de conversão entre esses sistemas.

Os sistemas semióticos devem possibilitar a execução de três atividades cognitivas que pertencem a todas representações, embora nem todas ocorram ao mesmo tempo, como os códigos morse e de trânsito. As três atividades semióticas citadas são:

> *Primeira, constituir um traço ou montagem de traços perceptíveis, que sejam identificáveis como representação de qualquer coisa num sistema determinado. Em seguida, transformar as representações somente com regras próprias do sistema de modo a obter outras representações podendo constituir uma contribuição de conhecimento com relação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas num sistema em representações de um outro sistema, de tal forma que essas últimas permitam explicar outros significados relativos ao que é representado* (Duval, 1995: 21, tradução nossa).

Ao utilizar o termo significado, o texto de Duval provocou uma reflexão a respeito da natureza abstrata do conteúdo da Álgebra: seria sentido ou significado? Parece-me que esta natureza torna tênue a distinção entre sentido e significado. Porém, consideramos pertinente fazê-la como o faz Vygotsky (2000) a fim de procurar uma utilização adequada de cada um desses termos. Desta forma, o sentido é

> *um todo complexo, fluido e dinâmico, que tem várias zonas de estabilidade desigual. O significado é apenas uma das zonas de sentido, a mais estável e precisa* (Vygotsky, 2000: 181).

O aspecto dinâmico do sentido pode estar na produção de cada pessoa, dependendo da sua história, da sua experiência, do contexto no qual as representações estão sendo produzidas. E a o aspecto mais estável do significado de algum conteúdo pode ser verificado na sua aceitabilidade culturalmente e socialmente estabelecida até então.

Duval (1995) introduz mais um conceito: os registros de representação semiótica, que permitem a comunicação de uma idéia a um interlocutor e o tratamento de informações.

Comecei o trabalho de campo, ainda sem uma delimitação completa do tema, junto a uma classe onde os alunos jovens e adultos estavam iniciando o estudo da Álgebra com o tema "equações", abordadas através de diferentes registros de representação propostos pelo professor. Mesmo sem ter realizado leitura dos livros de Duval, parece que este professor concorda que

> *recorrer a diversos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que eles possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações* (Duval, 1993: 40, tradução nossa).

Desta forma, o trabalho de campo foi determinante na definição do tema desta pesquisa e fundamental para a reformulação da questão de investigação, que passou a ser:

O que acontece, em relação ao processo de aprendizagem de equações por jovens e adultos, quando o aluno transita por diferentes registros de representação?

Os registros de representação semiótica interferem no desenvolvimento de conhecimentos e aparecem como dificultadores na compreensão de textos, na aquisição dos tratamentos lógicos e matemáticos.

A diversificação de registros de representação semiótica é considerada por este autor como um desses dificultadores, já que as linguagens natural e simbólica não formam um mesmo registro.

Um outro empecilho é a diferenciação entre representante e representado, entre conteúdo e forma. Localiza-se aí a dificuldade em associar a representação usada a outras e integrá-la nos procedimentos de tratamento do tema em estudo.

Granell (1995) aponta duas tendências distintas presentes no ensino de Matemática que revelam a diferenciação entre conteúdo e forma como dificultadora do aprendizado. Uma delas tem como predominante os aspectos sintáticos baseando este ensino

> *muito mais na manipulação sintática de símbolos e regras do que no significado dos mesmos. (...) Vários trabalhos demonstraram que boa parte dos erros que os alunos cometem deve-se ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos* (Granell, 1995:264-265) .

A segunda tendência caracterizada pela autora tem como princípio priorizar os aspectos conceituais da Matemática, admitindo que os alunos manifestem procedimentos próprios de raciocínio, mesmo que não sejam formais, atribuindo uma função secundária à linguagem matemática.

Granell (1995) critica as duas tendências e propõe uma terceira, buscando a integração da abordagem sintática com a semântica para o ensino de Matemática. Ela concorda com Duval (1995) em sua afirmação de que não é possível separar conteúdo representado das suas formas de representação

> *A meu ver, saber matemática implica dominar os símbolos formais independente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações e problemas que assim o requeiram* (Granell, 1995: 274).

Ainda um terceiro dificultador da compreensão de textos, da aquisição dos tratamentos lógicos e matemáticos é sugerido por Duval (1995): a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

No estudo do desenvolvimento do conhecimento é necessário que considere esses três fenômenos relativos à produção de uma representação semiótica e às suas operações de conversão. Para tanto, Duval (1995) coloca duas condições:

> *(...) que se disponha ao menos de dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo, (...) e que eles possam converter*

> *espontaneamente de um sistema semiótico ao outro sem mesmo se observar as representações produzidas* (Duval, 1995: 36, tradução nossa).

Um alerta: quando uma das condições acima não é obedecida, o conteúdo estudado é confundido com sua forma, além de não ser possível reconhecê-lo em outras representações.

Tanto tratamento como conversão são transformações de representações dadas, porém o autor distingue uma da outra. Por tratamento, entende a transformação realizada com os mesmos registros e por conversão, a transformação que passa de um registro a outro, sendo muito importante a coordenação entre os diferentes registros e o tema em estudo.

No decorrer do meu estudo, o aporte teórico ajudou-me a compreender o que chamei, inicialmente, de trânsito nos diferentes registros das equações propostos pelo professor, definindo

> *A coordenação de diversos registros de representação semiótica parece fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos: é necessário que o objeto não seja confundido com suas representações e que eles possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações possíveis. (...)*
>
> *A conversão de uma representação é a transformação dessa representação em uma representação em outro registro, conservando a totalidade ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial* (Duval, 1993: 40-41, tradução nossa).

Três atividades cognitivas de representação são consideradas por Duval como inerentes à produção de uma representação. A primeira delas trata da formação de representações num registro semiótico particular, tendo como função expressar uma representação mental ou evocar um objeto real através da seleção de um conjunto de caracteres e determinações/decisões. As outras duas atividades fundamentais são os tratamentos, quando as transformações se realizam no interior do mesmo registro e as conversões, quando existe mudança de registros para que se efetue a transformação.

Essas atividades são, muitas vezes, chamadas de tarefas de produção e de compreensão. Mas, tal denominação contempla o papel de comunicação dessas atividades, porém deixa de fora regras de funcionamento próprias de cada uma delas.

As regras de funcionamento da formação de representações num registro semiótico particular, do tratamento e da conversão dependem dos sistemas semióticos utilizados para realizar as representações e independem do que se deseja comunicar. A formação de uma representação semiótica é, segundo o autor, a utilização de um ou mais signos como recurso para atualizar ou substituir a maneira como se vê determinado objeto.

Tais signos pertencem a um sistema semiótico já constituído e utilizados por outros, com excessão de idiossincrasias, como a língua materna, códigos icônicos de representação gráfica ou artística, linguagem formal, etc.

A articulação entre frases, imagens, esquemas, tabelas depende das possibilidades de estruturação oferecidas por cada sistema semiótico. Então, é necessário respeitar as regras próprias destes sistemas tanto em razão da comunicabilidade, quanto para permitir a utilização de meios de tratamento.

A definição da questão de investigação remeteu-me ao estabelecimento dos objetivos da minha pesquisa, sendo dois mais amplos e gerais e um terceiro mais centrado no tema do estudo.

O primeiro dos objetivos mais amplos e gerais refere-se a um anseio desta pesquisadora de poder oferecer contribuições para o fortalecimento da linha de pesquisa no Brasil, que tem como foco o jovem e o adulto em situação de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, uma vez que há

> *necessidade de constituir um campo próprio de preocupações na educação Matemática de jovens e adultos, um campo não fechado, aberto a influências, resultados, investigações e idéias, mas que tenha um foco de atenção: o jovem e o adulto em situação de aprendizagem, dos conteúdos matemáticos, com suas características, problemas e peculiaridades* (Jóia, 1997: 30).

O outro objetivo é repensar a minha prática pedagógica, assim como apontar reflexões que possam contribuir para o exercício da docência de outros professores de Matemática que lecionam para alunos jovens e adultos.

Finalmente, também estabeleci como objetivo mais central da minha pesquisa a investigação e a análise do processo de ensino/aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos transitando em diferentes registros de representação apresentados pelo professor em sala de aula.

O texto sobre a investigação

Esta dissertação apresenta uma introdução, que trata da chegada ao tema investigado, três capítulos e uma parte final destinada às conclusões e considerações. Na organização deste texto não estão previstos capítulos específicos para os procedimentos metodológicos e nem para o referencial teórico. A opção foi por apresentar tanto a metodologia utilizada quanto as discussões teóricas no corpo do texto, na medida em que fizeram-se necessárias.

No capítulo I, fiz uma descrição da escola onde desenvolvi o trabalho de campo, procurando expor suas perspectivas pedagógicas, identificadas através da consulta a documentos e da entrevista com o diretor O. Jóia. Também pertence ao capítulo I um relato sobre a classe onde realizei as observações, contando para isso com pesquisa em fichas cadastrais dos alunos e com uma entrevista que fiz com a coordenadora do ensino supletivo desta escola, naquele semestre. Ainda neste primeiro capítulo, faço a descrição do "clima" da sala de aula, uma apresentação do professor responsável pela classe e um relato da minha participação como pesquisadora na produção e registro das informações obtidas no trabalho de campo a serem analisadas. Jóia (1997), além de auxiliar na descrição pedagógica da escola, contribui também para situar essa dissertação no panorama da Educação Matemática.

A sequência das tarefas propostas pelo professor, na sala de aula foi abordada no capítulo II. Tarefas foram descritas de forma a incorporar ao texto fatos ocorridos nas aulas, relevantes ao tema desta pesquisa.

O capítulo III trata da análise de situações observadas na sala de aula, que explicitam aspectos abordados na pesquisa. Pretendo com estes "recortes" das aulas observadas descrever e ilustrar os diferentes registros de representação utilizados pelo professor no processo de ensino/aprendizagem de equações, procurando transmitir o clima de debates e embates que ele propiciava. Para isso, contei com duas entrevistas feitas com o professor, com anotações do diário de campo, gravações das aulas assistidas em áudio e documentos dos alunos como cadernos, fichas de tarefas e provas escritas. As categorias de análise, elaboradas a partir de uma detalhada narração e estudo minucioso do trabalho de campo aparecerão nestes "recortes" das aulas observadas. E articulando essa análise contei, principalmente, com o apoio teórico da representação semiótica, tendo como principais interlocutores Duval (1995) e Kieran (1992).

Na parte final, apresento algumas considerações que se pretendem uma pequena síntese e algumas conclusões, talvez arriscando sugestões para novas investigações.

CAPÍTULO I: O TRABALHO DE CAMPO

A escola

Primeira tentativa: errando o "alvo"!

Conforme mencionei anteriormente, os questionamentos a respeito dos processos de ensino/aprendizagem da Álgebra com alunos jovens e adultos se iniciaram a partir de reflexões sobre minha prática docente, tendo como alunos os funcionários de um hospital privado católico. Pretendia realizar nestas aulas o trabalho de campo da minha pesquisa, observando e analisando os procedimentos utilizados pelos meus alunos ao estudarem Álgebra.

Mas a grande evasão dos alunos impediu a realização dos meus planos. Avalio que as causas dessa evasão sejam de duas naturezas. Uma delas é referente a problemas internos da instituição. Com a perda da filantropia para instituições religiosas, o hospital passou a ter despesas maiores com impostos, o que interferiu na gratuidade do curso oferecido aos funcionários. Além disso, as chefias dos setores começaram a impor empecilhos à liberação dos funcionários para comparecerem às aulas, que aconteciam durante o expediente.

As outras causas da desistência dos estudos dizem respeito a problemas pessoais dos alunos como desmotivação, medo de fracassar mais uma vez, problemas financeiros (fazendo o aluno deixar de frequentar as aulas para fazer um trabalho extra naquele horário). Então, dos dezesseis funcionários que iniciaram o curso, apenas três continuavam comparecendo às aulas.

Desta forma, não foi possível desenvolver minha pesquisa naquele hospital.

Segunda tentativa

Tornou-se necessário procurar uma instituição onde eu pudesse observar os processos dos alunos jovens e adultos aprendendo Álgebra; logo, uma escola que fosse presencial, ou seja, exigisse a frequência dos alunos às aulas.

Mas, meu desejo de observar processos de ensino/aprendizagem que tratassem a Álgebra em sala de aula de forma significativa, não se restringindo exclusivamente à manipulação algébrica por ela mesma, conduziu-me à busca criteriosa por uma escola onde pudesse realizar meu estudo. Os processos que desejava estudar não ocorreriam num ensino que privilegiasse a transmissão mecânica dos procedimentos algébricos. Só estariam presentes em uma escola que oferecesse aos seus alunos oportunidades de revelar seus conhecimentos como "ponto de partida" para discussões, favorecendo a explicitação dos processos de aprendizagem das primeiras noções de Álgebra, negociando significados e propondo procedimentos escolares.

Acompanhando o desenvolvimento do meu estudo de forma bastante cuidadosa e atenciosa, a orientadora desta pesquisa sugeriu que eu avaliasse a possibilidade de desenvolvê-lo em uma instituição de ensino reconhecida no meio acadêmico em São Paulo/SP por sua excelente reputação. Especialmente por ter lecionado lá, ela sabia que a escola desenvolvia um trabalho sério e respeitoso com alunos jovens e adultos. Também previa a possibilidade de encontrar os processos de ensino/aprendizagem da Álgebra que pudessem atender ao meu anseio. Sugeriu, então que realizasse nesta instituição o trabalho de campo de minha investigação, o que realmente aconteceu.

Esta escola é particular católica. Atende, nos períodos diurno e vespertino, aos alunos da classe alta da cidade de São Paulo nos cursos de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio regular e, no período da noite, oferece estes dois últimos cursos desta vez supletivos para camadas desfavorecidas da população, principalmente para pessoas que trabalham na região oeste da cidade, onde a escola se localiza.

Mas, algo parecia estranho: uma instituição reconhecida por zelar pela educação da elite paulistana, oferecendo um curso supletivo? Os esclarecimentos a este aparente desacordo vieram de uma conversa[4] com o diretor do curso supletivo. Coincidentemente, este diretor é o professor Orlando Jóia, citado anteriormente neste texto como interlocutor desta pesquisa.

Segundo Jóia, foi uma discussão interna à Congregação religiosa que motivou a criação de um curso que pudesse acolher as pessoas carentes e sem escolarização. Tal discussão foi favorecida por um movimento de maior abertura da Igreja Católica às camadas mais pobres da população e movida por um "desconforto" por parte dos padres fundadores da escola, que pretendiam uma instituição que servisse à classe média, mas que acabou atendendo a elite:

> *Então, o colégio Santa Cruz, para abrir o supletivo, foi resultado de uma discussão muito grande no interior da Congregação. "Esta é uma escola confessional, uma ordem religiosa masculina católica, tem origem canadense.*
>
> *Mas, enfim, eles tinham um colégio já desde de* [19]*52. Um colégio que acabou se identificando como de classe média alta, da elite paulistana. E, os padres tinham, digamos assim, se a gente pudesse falar numa linguagem coloquial, os padres tinham um certo incômodo com isso. (...) Então, o que fazer? Uma escola católica que acaba atendendo às elites? Trata-se de colocar a questão, o clima da discussão no interior da Igreja católica favorecia, à época dos concílios, aqui se discute essa questão da opção da Igreja* (Entrevista com O. Jóia).

Várias iniciativas foram tomadas por parte da administração da escola a fim de colocar à disposição de pessoas mais pobres o que a instituição já havia construído, como o empréstimo do prédio para o funcionamento de uma escola estadual e o fornecimento de bolsas

---

[4] Esta foi uma entrevista semi-estruturada, realizada em 30/03/2000, cujo roteiro era: 1) A origem do supletivo nesta escola. 2) Principais idéias que fundamentam o projeto pedagógico. 3) A presença de alunos mais jovens neste supletivo a cada ano.

de estudos para alunos carentes. Tentativas e experiências como estas aconteceram até que o Estado começou a organizar o ensino para adultos.

> *No começo da década de 70, com a aprovação da lei 5692, decreto do ensino supletivo, aí eles encontraram uma, ..., uma brecha. Então, aqui, ..., aqui nós podemos fazer. É algo que nós sabemos fazer, nós temos a infra-estrutura, conhecimento, tal, então vamos fazer isso* (Entrevista com O. Jóia).

Neste momento, os padres desta Congregação encontraram uma opção para o que almejavam, pois já tinham infra-estrutura e, principalmente conhecimento e experiência pedagógica bem sucedida com o ensino regular.

Então, na confluência dos dois movimentos, da Igreja em se abrir mais para as camadas populares e do Estado em estruturar o ensino para adultos, há mais de 25 anos, é que se encontra a origem do ensino supletivo desta escola.

A partir daí, a equipe que assumiu a organização do curso optou por primar pela qualidade do ensino supletivo implantado naquela escola, com o objetivo de ajudar as pessoas que passassem por lá. Para isso, de acordo com o diretor, decidiram por um ensino

> *de qualidade e presencial. Não estavam preocupados com a quantidade, mas estavam preocupados com que servisse para as pessoas, que ajudasse as pessoas a se organizar um pouco melhor na vida. Essa era a idéia* (Entrevista com O. Jóia).

Características importantes deste curso supletivo derivaram desta idéia básica, tais como: ser altamente subsidiado, manter um corpo docente profissionalizado e qualificado e dar um tratamento adequado aos professores.

Buscando compreender melhor a perspectiva pedagógica, na qual se baseiam as práticas dos professores do supletivo desta escola, procurei conhecer o projeto pedagógico, revelado, principalmente, na entrevista com o diretor.

Quando perguntei a ele sobre o projeto pedagógico, logo de início, contou-me que nunca haviam conseguido sistematizá-lo, redigi-lo. Passou, então, a descrevê-lo a partir das idéias-chave que fundamentam o projeto: a qualidade do ensino, o conhecimento do desenvolvimento cognitivo do aluno, adequação da prática pedagógica aos alunos jovens e adultos, respeito ao entendimento da aquisição do conhecimento escolar como um processo e a compreensão da escola como lugar privilegiado para aprender e conviver.

Uma legítima preocupação com o aprendizado do jovem e do adulto e o esforço em garanti-lo estão contemplados no projeto pedagógico nas duas primeiras idéias-chave:

> *"Eu diria que o projeto pedagógico se pauta por algumas idéias-chave. A primeira é a idéia da qualidade. Se entende o curso aqui não como mera certificação.(...).* (Entrevista com O. Jóia).

Este curso supletivo recebe alunos que estão frequentando uma escola pela primeira vez e alunos que já tiveram acesso à escola, mas saíram dela por motivos sócio-econômicos. Então, para o diretor, o projeto pedagógico deve assumir as funções básicas da escola, além de desempenhar também a função de aceleração. E exemplifica:

> *Mas, realmente, para alguns é a primeira chance de escolaridade. O projeto pedagógico tem que dar conta de alfabetizar as pessoas, tem que dar conta de dotá-las daqueles instrumentos da cultura letrada que só a escola, nas condições atuais é a escola que predominantemente de forma intencional e organizada propicia. E, de quebra, digamos assim, pra aquelas pessoas que embora já tenham tido acesso à escola, elas saíram da escola. Então, a gente, sem querer, foi mais ou menos amarrado por uma função de aceleração também. Aquelas pessoas que entram nas séries iniciais do curso: empregada doméstica de 24 anos, 25 anos que nunca foi à escola, como você viu aí pelos corredores, pra ela isso é a escola. Aquele menino que eventualmente você viu na fase 8, que entrou aqui com 16, 17 anos e já tinha cursado até a 4ª série, 5ª série, 6ª série as*

circunstâncias são outras, né. Trata-se muito mais de voltar a escola. E o projeto pedagógico tem que dar conta disso. E dar conta disso tem uma série de implicações (Entrevista com O. Jóia).

A fim de considerar também diferentes expectativas dos alunos em relação à escola, os professores deste supletivo procuram adequar suas práticas às necessidades dos alunos, expressas ou não, fundamentando a perspectiva pedagógica deste curso:

A gente tem que estar de olho o tempo todo, reinventar uma prática pedagógica adequada ao nosso aluno. A gente não tinha isso nos livros, a gente não tem isso sistematizado... Mas então tratou-se ao longo desses 25 anos de praticamente inventar... inventar muito, de adaptar muito ao que já tinha, de transpor o que tinha já organizado e tentado pra outros cursos, outros segmentos. Acho que o projeto pedagógico se caracteriza por esta tentativa de ter uma identidade, uma autonomia muito grande. Acho que, eu diria que isso caracterizou, a preocupação do professorado aqui foi essa, o tempo todo tentando entender como é esse aluno e criando, ou tentando criar pelo menos instrumentos para dialogar com esse conhecimento prévio do aluno, com essa, esses significados que o aluno confere aos procedimentos escolares e aos procedimentos mais cotidianos. Então, acho que se tem caracterizado sempre por uma tentativa de estabelecer diálogo (Entrevista com O. Jóia).

A forma como esta escola concebe o ensino e a aprendizagem vieram ao encontro do que esta pesquisa necessitava e pretendia para seu desenvolvimento, pois

(...) entende como realmente um processo, progressivo de aquisição de habilidades escolares. Então, a gente não está tão preocupado em desenvolver todo o conteúdo que o sujeito precisaria para entrar no Ensino Médio. Que critérios o

> *professor utiliza prá , prá escolher os conteúdos? Os critérios deverão ser aqueles mais as características dos alunos, os interesses que eles têm, as necessidades que se colocam no processo de ensino e muito menos essa coisa de 'ah! não viu o conteúdo, vai precisar para fazer tal coisa'. Acho que essa tentativa de dialogar com o aluno real que a gente tem é a principal característica. A gente está mais preocupado em, aquilo que a gente conseguir desenvolver, desenvolver de uma maneira mais apropriada, de uma maneira mais compreensiva pro nosso aluno, de uma maneira mais significativa prá ele* (Entrevista com O. Jóia).

Na contramão das tendências atuais da educação para jovens e adultos, o último conceito básico do projeto pedagógico do supletivo desta escola é a valorização da presença do aluno nas aulas, visando tanto seu desenvolvimento cognitivo, quanto a convivência com seus pares:

> *a gente entende a escola como um espaço muito rico, então é pra aprender e é pra conviver. Então, pro adulto, especialmente pra esse adulto que tá num processo de integração no modo de vida urbano, um lugar de sociabilidade, ele encontra aqui um lugar de convivência. Você vê que as roupas têm um determinado estilo, um determinado nível de investimento. Então, acho que neste simples comportamento, que sozinho não significa nada, acho que está um pouco a concretização desta idéia da sociabilidade. O cara também vem aqui pra perguntar, pra conversar* (Entrevista com O. Jóia).

Minha conversa com o diretor foi essencial também para conhecer as pessoas que procuram este curso nesta escola, caracterizando, de maneira geral, seus alunos.

As turmas das séries iniciais são compostas por alunos migrantes vindos de contextos rurais, com idade em torno de 40 anos e ocupam funções que exigem baixa qualificação. Esses alunos frequentaram, anteriormente, a escola por pouco tempo e a descrevem como multisseriada, distante de onde moravam, precária nas condições e na qualidade do ensino. Em função do trabalho e da dificuldade de acesso, principalmente, deixaram de estudar.

Já nas turmas das séries finais, a média de idade dos alunos era 20 anos, a maioria migrante das regiões norte ou nordeste e um dos principais motivos do abandono do estudo por parte destas pessoas foi a reprovação ocorrida na vida escolar regular, contou-me o diretor.

Depois de compreender melhor as perspectivas pedagógicas da escola onde realizei meu trabalho de campo, consultei seu plano diretor. Através da leitura do capítulo destinado ao supletivo, pude verificar a organização das oito séries de um ano do Ensino Fundamental regular em onze fases de um semestre para este supletivo. Está definido neste documento o critério de dezesseis anos de idade para matrícula nas fases correspondentes ao Ensino Fundamental. No plano diretor ainda está estabelecida a carga horária semanal em dezesseis horas e quarenta minutos, sendo que na fase 8, quatro horas cabiam à Matemática, além dos critérios de aprovação, determinados por frequência mínima e menções de conceitos.

A classe

O critério fundamental de escolha da classe na qual se realizaria o trabalho de campo desta pesquisa foi a inserção, explícita pela primeira vez no planejamento de ensino, do tema Álgebra. Era a fase 8, que corresponde à 7ª série de ensino regular.

Os alunos

Com o objetivo de caracterizar os alunos que compunham, no segundo semestre de 1999, a fase 8, consultei, com autorização da coordenadora do supletivo, as fichas cadastrais arquivadas na secretaria do supletivo. As informações que encontrei foram idade, cidade e estado de nascimento, estado civil, atividade profissional, período sem estudar e ano de ingresso nesta escola.

Constatei que a classe era formada por vinte e cinco alunos matriculados e vinte e três frequentando as aulas efetivamente, sendo dezesseis mulheres e sete homens.

Foi possível observar, já nas primeiras vezes em que entrei na sala de aula, que era uma turma de alunos jovens, impressão confirmada pelos dados obtidos nas fichas consultadas: doze alunos com menos de vinte e cinco anos e uma aluna com mais de quarenta anos, estando de acordo com a tendência na educação de jovens e adultos, de atender alunos cada vez mais jovens:

> *É alarmante o aumento no número de jovens que procuram os cursos supletivos. Um sintoma disso é que, até a década de 80, falava-se em educação de adultos. Agora, todos os programas falam em educação de jovens e adultos. Trata-se de um numeroso contingente de pessoas que não conseguiram completar nem o antigo primário e sentem na pele rapidamente a diferença que isso faz para sobreviver. 'É um público que sai da escola pública com várias repetências e vai diretamente para os programas de adultos', explica Vera Mazagão Ribeiro, coordenadora da Ação Educativa* (Dias, 1998: 42).

Esta tendência tem sido notada no supletivo desta escola, provocando segundo seu diretor alterações na prática pedagógica dos professores:

> *A gente vê que a grande mudança foi em meados da década de 80. Até 84, é um curso de adultos, não tinha adolescentes. Mas, bem no meio de 84, bem no meio da década, começa a mudar rapidamente, foi muito rápido. Os professores daqui, nós todos tivemos uma grande dificuldade em nos adaptar, estávamos acostumados com uma clientela totalmente diferente e isso ocorreu muito rápido. O cara tava trabalhando a cinco, dez anos com uma coisa de outra natureza e aí foi realmente invasão total dos adolescentes* (Entrevista com O. Jóia).

Muitas das pessoas desta classe eram migrantes, sendo que treze vieram das regiões norte e nordeste e uma aluna do Estado de Minas Gerais. Havia sete alunos nascidos em São

Paulo capital ou grande São Paulo. A informação sobre cidade natal de duas alunas não foi localizada nas respectivas fichas cadastrais.

Entre as atividades profissionais dos alunos desta classe, os serviços domésticos representavam a ocupação de oito deles, quatro trabalhavam como auxiliares de escritório, dois eram vendedores, duas eram costureiras. Exercendo a função de porteiro havia um rapaz, de balconista em padaria também uma aluna e de secretária havia apenas uma outra. Não foi possível conhecer a atividade profissional de dois alunos.

O período que os alunos daquela fase 8 ficaram afastados do estudo variava de um semestre até mais de dez anos. Sete pessoas, que passaram mais tempo longe da escola, praticamente reiniciaram sua escolarização neste curso, partindo das fases iniciais. Doze alunos ingressaram nas fases 4 ou 5[5], pois eram alfabetizados e possuíam noções básicas de aritmética. Já os quatro alunos que ficaram menos tempo afastados dos estudos, passaram a frequentar este curso nas fases 6 ou 7[6].

O perfil desta classe mesclava as duas características destacadas pelo diretor em sua entrevista. Alguns alunos eram mais jovens, exerciam atividades urbanas e a passagem anterior pela escola era recente. Outros eram mais velhos, tinham uma escolarização anterior mais precária e ocorrida há mais tempo, exerciam atividades domésticas.

Uma característica marcante desses alunos era o envolvimento e a participação nas tarefas propostas em aula pelo professor. Apresentavam suas soluções para as atividades, discutiam sobre elas, faziam perguntas, ajudavam colegas a compreenderem soluções expostas na lousa, trabalhavam de forma cooperativa em duplas ou em pequenos grupos.

Considerando que meu objeto é o estudo do processo de aprendizagem de equações por jovens e adultos, quando transita por diferentes registros de representação, estando o aluno no cerne da investigação, pareceu-me necessário descrevê-los individualmente. Deste modo, farei

---

[5] As fases 4 e 5 correspondem ao final do 2º ciclo e início do 3º ciclo do Ensino Fundamental regular.

[6] As fases 6 e 7 correspondem à 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental regular, respectivamente.

um breve relato buscando revelar ao leitor cada um como estudante. Para tanto, baseei-me nas informações obtidas das fichas cadastrais já mencionadas, nas transcrições de entrevistas que realizei com os alunos, nos comentários do professor e na percepção que tive enquanto convivi com aquelas pessoas.

- ADE

ADE é uma mulher, estava com 25 anos e trabalhava como empregada doméstica. Migrante do Estado de Sergipe, onde estudou até a 4ª série. Reiniciou seus estudos no segundo semestre de 1997, no colégio Santa Cruz, na fase 5I.

ADE apresentava um envolvimento efetivo nas aulas de Matemática: gostava de expor suas soluções na lousa ou oralmente. Seu interesse era reconhecido pelo professor.

Ela era extrovertida e sempre bem humorada. Também revelava desejo de prosseguir os estudos, atribuindo a esta continuidade valor e importância.

- ALE

ALE, um homem, tinha 24 anos. Não foi possível conhecer sua atividade profissional. Paulistano, retomou seus estudos em 1998, no colégio Santa Cruz, na fase 6.

Ele gostava de participar das aulas, era empenhado em resolver as tarefas propostas, procurando sempre colegas que estivessem perto para discutir e trocar idéias.

ALE, torcedor fervoroso do Palmeiras, não comparecia às aulas nas noites em que havia jogo deste time. Por isso, teve sua atenção chamada pelo professor algumas vezes, preocupado com suas faltas.

Disse que *"Matemática é coisa pra gênio"*.

- APA

APA, uma mulher de 19 anos, trabalhava como balconista em uma padaria. Migrante do Estado da Bahia, reiniciou seus estudos no colégio Santa Cruz, em 1997, na fase 4.

APA gostava muito de expor suas soluções, chegando a ficar irritada quando o professor não a chamava para ir à lousa. Em uma das aulas, o professor esperou que um aluno terminasse de explicar sua solução para depois conceder à APA a palavra. Quando chegou a vez dela, negou-se a falar e dirigiu-se para o fundo da classe.

Ela apresentava atitudes típicas da fase da adolescência, questionando e testando regras da escola. Um exemplo disso, ocorreu na aula do dia 06 de outubro, quando APA entrou na sala de aula tomando chocolate quente e comendo. O professor retomou as regras, anteriormente discutidas, para um bom desenvolvimento dos estudos.

- ATE

ATE, um homem de 37 anos, exercia a profissão de vendedor. Migrante do Estado da Bahia, voltou a estudar em 1999 na fase 7 do colégio Santa Cruz.

Ele participava efetivamente das aulas, gostava sempre de expor suas soluções, identificava com facilidade os seus erros, quando ocorriam e sabia como corrigi-los. Instigava os colegas com novos problemas.

ATE tinha orgulho de sua profissão e sabia que ela lhe fornecia elementos para aplicar a Matemática: *"Trabalho com porcentagens o dia todo."*

- CLA

CLA, uma mulher, tinha 20 anos. Não foi possível conhecer sua atividade profissional. Migrante do Estado da Bahia, retomou seus estudos em 1998, no colégio Santa Cruz, na fase 5.

Gostava de participar das tarefas propostas pelo professor.

- CLE,

CLE, o aluno mais novo daquela classe, tinha 18 anos. Trabalhava como *office-boy*. Nascido em uma cidade do litoral do Estado de São Paulo, ficou apenas um semestre sem estudar. Voltou aos estudos no colégio Santa Cruz em 1998, na fase 5.

Ele gostava de apresentar soluções que fossem diferentes das escritas na lousa. Mostrava-se empenhado em resolver os problemas propostos por ATE.

CLE mostrou-se curioso em relação ao que eu fazia. No final da aula do dia seis de outubro, quando o gravador já estava desligado e o diálogo foi registrado no diário de campo, assim que encerramos nossa conversa.

CLE: - Você já é formada?

Patrícia: - Já. Fiz faculdade de Matemática.

E ele me questionou:

CLE: - Por que Matemática? Muitos não gostam; não que eu não goste...

Patrícia: - Gosto de Matemática e de lecionar.

CLE: - Mas você só pode dar aulas para crianças pequenininhas?

Expliquei a ele que poderia dar aulas para estudantes do Ensino Fundamental e Médio, regular ou não.

- EDN

EDN, um homem, tinha 20 anos. Trabalhava como ajudante de motorista em uma empresa. Migrante do Estado da Bahia, reiniciou seus estudos no colégio Santa Cruz, na fase 3, em 1995.

Não era um aluno muito participativo, poucas vezes manifestou vontade de ir à lousa ou de comentar suas soluções.

Durante o período em que acompanhei os alunos da fase 8, EDN foi o aluno com mais faltas.

- ERE

ERE, uma mulher de 36 anos, era costureira. Migrante do Estado da Bahia, teve seus estudos interrompidos por duas vezes. Na primeira vez, ficou nove anos anos sem estudar. Em 1987, no colégio Santa Cruz, voltou a estudar, na fase 2. Cursou até a fase 5I, em 1988, quando ocorreu a segunda parada. Dez anos se passaram, quando ERE conseguiu voltar a estudar, no mesmo colégio e na fase 5II.

ERE mostrou ser persistente e determinada quanto aos seus objetivos. Ela se envolvia nas tarefas propostas pelo professor e era participativa.

ERE desenvolveu afeição por mim, demonstrada em conversas.

- FRA

FRA, um homem de 30 anos, exercia a profissão de porteiro em prédio. Ele retomou seus estudos no colégio Santa Cruz, em no segundo semestre de 1997, na fase 4.

FRA era dedicado aos estudos, envolvendo-se sempre nas tarefas propostas pelo professor.

- IVO

IVO, uma mulher de 36 anos, trabalhava como empregada doméstica. Migrante do Estado de Pernambuco, retomou seus estudos na fase 5I do colégio Santa Cruz., em 1998.

Revelou, em conversas, estar determinada a concluir o Ensino Médio e fazer outros cursos.

- JAN

JAN, uma mulher de 22 anos, trabalhava como empregada doméstica. Nasceu no Estado da Bahia e em 1998, recomeçou seus estudos, na fase 2I do colégio Santa Cruz.

Ela gostava de fazer as tarefas propostas sempre com uma colega (CLA), gostava de discutir soluções.

JAN contou-me em uma conversa que sentia saudades de sua cidade natal. Mostrou-se melancólica e sentida ao lembrar de quando andava à cavalo por pastos na companhia do pai.

- JOE

JOE, um homem, tinha 25 anos e trabalhava em uma mesma empresa como motorista durante o dia e como segurança, no período da noite, depois das aulas. Migrante do Estado da Bahia, retomou seus estudos no colégio Santa Cruz, na fase 4, no segundo semestre de 1996.

Ele participava efetivamente das aulas, gostava sempre de expor suas soluções, identificava com facilidade os erros, quando ocorriam, sabia como corrigi-los e instigava os colegas com novos problemas.

JOE disse sobre a Matemática:

> *JOE: - Eu não tenho muita dificuldade em Matemática. O professor dá uma explicação e eu não tenho mais dificuldade, pego com bastante facilidade.*
>
> *A matemática, acho que é uma matéria que envolve muito o dia da gente, o dia da gente está praticamente baseado em cálculos.*

- LEA

LEA, uma mulher de 47 anos, paulistana, exercia a função de secretária em uma clínica médica. Em 1997, no colégio Santa Cruz, voltou a estudar na fase 4.

LEA reconhecia e corrigia com facilidade os erros que cometia ao resolver determinada atividade. Também gostava de expor e confirmar se era correta uma solução diferente da que já havia sido apresentada por outro colega.

- LOU

LOU, uma mulher, tinha 35 anos e era costureira. Migrante do Estado de Pernambuco, retomou seus estudos no colégio Santa Cruz, na fase 4, em 1997.

LOU expunha suas soluções somente quando solicitada pelo professor, mas sempre esclarecia suas dúvidas, fazendo perguntas ao professor.

- MAR

MAR, uma mulher, tinha 26 anos, era cozinheira e arrumadeira. Migrante do Estado da Bahia. Praticamente se escolarizou no colégio Santa Cruz, pois retomou seus estudos na fase I, em 1995.

Ela apresentava suas soluções somente quando solicitada pelo professor .

- QUI

QUI, uma mulher de 27 anos, trabalhava como empregada doméstica. Ela reiniciou seus estudos no colégio Santa Cruz em1998, na fase 5I.

QUI não ficava com dúvidas, sempre perguntava o que não entendia. Gostava de participar das discussões orais, mais do que expor suas soluções na lousa.

- RIT

RIT, uma mulher de 22 anos, paulistana, trabalhava como vendedora. Ela retomou seus estudos em 1997, neste colégio, na fase 4.

RIT não gostava muito de expor suas soluções, mas perguntava para o professor e para colegas que estivessem perto dela o que não entendia.

- ROM

ROM, um homem de 23 anos, trabalhava como copeiro e jardineiro. Migrante do Estado da Bahia. Praticamente se escolarizou no colégio Santa Cruz, pois retomou seus estudos na fase 2I, em 1996.

Entre os alunos da fase 8 em 1999, o aluno ROM pareceu-me apresentar mais dificuldades de compreensão em relação ao estudo das equações. Impressão compartilhada com a coordenadora do supletivo, em entrevista, quando esclareceu-me sobre tais dificuldades e contou-me um mais sobre este aluno:

> *Coordenadora: - Eu acho que ele tem pouca formalização, pouquíssima formalização. Ele é tímido, ele fala mal, ele tem dificuldade de se expressar, dificuldade de entender o que cê tá falando com ele. Acho que é mais mais*

uma questão social, né. São realidades diferentes que ele tem dificuldade de entender. A escola é um mundo muito diferente do dele.

Ele é jovem. Agora ele não é um aluno que tem dificuldade. A dificuldade dele se expressa em Matemática. Isso pra mim é claro. A dificuldade do ROM se expressa em Matemática. Em Ciências, também, ele não estabelece relações de causa e efeito. O por quê das coisas é muito difícil. Então, eu acho assim, por exemplo, na História que é um pouco fantasioso, na Literatura que tem o folclore, na Geografia que tem a construção dos espaços, maravilha. Mas, Matemática, é muito difícil. Eu acho que aí pinta essa dificuldade dele. O ROM vai estudar, ele vai tá inserido, digamos assim, nestes códigos urbanos, nessa forma de pensar tão diferente pra ele. Eu acho que ele precisa de tempo.

- SIL

SIL, uma mulher paulistana de 22 anos, exercia a profissão de empregada doméstica.

Ela praticamente se escolarizou no colégio Santa Cruz, pois retomou seus estudos na fase 2I, em 1996. Gostava de expor suas soluções .

A forma como vestia-se despertava atenção: gostava de usar roupas "de grife" e estava sempre muito bem arrumada.

- TEL

TEL, uma mulher, tinha 28 anos e trabalhava como auxiliar de escritório. Ela gostava de participar das tarefas propostas pelo professor .

- VER

VER, uma mulher de 25 anos, exercia a função de auxiliar de escritório. Migrante do Estado da Bahia, retomou seus estudos em 1997, na fase 3 do colégio Santa Cruz.

Assim como para SIL, importava-se muito com a maneira de vestir-se, usando roupas "de grife", sempre muito bem arrumada.

- VIL

VIL, uma mulher de 31 anos, trabalhava como empregada doméstica. Migrante do Estado de Minas Gerais, reiniciou seus estudos em 1998, neste colégio na fase 5II.

VIL participava pouco das discussões em sala de aula, mas se envolvia nas tarefas propostas com empenho.

- ZEN

ZEN, uma mulher, tinha 35 anos, era vendedora. Migrante do Estado de Alagoas, reiniciou seus estudos neste colégio em 1999, na fase 7.

Assim como VIL, participava pouco das discussões em sala de aula, mas se envolvia nas tarefas propostas com empenho.

Dois alunos, ATE e JOE, merecem destaque. Eles levavam problemas desafiadores e os propunham para os colegas. Tais problemas chegavam a eles através do grupo de pessoas ligadas ao ambiente de trabalho.

Escolhida a classe, houve necessidade de negociar com o professor a forma de sua participação no trabalho de campo desta pesquisa.

O professor e o clima na sala de aula

O contato pessoal que a orientadora desta pesquisa tinha com a escola permitiu uma escolha da classe baseada em conversas informais com os professores de Matemática. Sendo assim, esta escolha foi quase que concomitante com a aceitação *a priori* do professor em participar.

Para conhecer este professor, sua perspectiva pedagógica, sua percepção sobre os alunos e saber como ele via meu trabalho nas aulas de Álgebra, foram realizadas duas entrevistas semi-estruturadas, além de várias conversas informais antes e depois das aulas das quais participei. Porém, minha percepção de sua proposta pedagógica ocorreu de maneira a possibilitar a descrição que segue na análise do diário de campo e da transcrição das fitas gravadas em aula.

Na primeira entrevista, o professor informou que iniciaria Álgebra através do estudo das equações de primeiro grau: valores desconhecidos como quadradinho e depois como incógnita e atividades com balanças de dois pratos. Cabe aqui esclarecer que o professor utilizou o termo atividade, tanto para designar tarefas propostas por ele, quanto para as ações dos alunos sobre o que foi proposto. Procurei, ao longo do texto, discriminar esses dois conceitos, de acordo com Ponte (1997), porém respeitando e sendo fiel à fala e à escrita do professor:

> *A natureza das tarefas propostas pelo professor e das atividades realizadas pelos alunos constitui um fator decisivo na dinâmica da sala de aula de Matemática e, deste modo, no processo de ensino/aprendizagem. (...) A atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito ao aluno. Refere-se àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução d numerosos tipos de ação. Por outro lado, a tarefa constitui o objetivo de cada uma das ações em que a atividade desdobra (...). As tarefas são, na maior parte das vezes, propostas pelo professor* (Ponte, 1997: 73-74).

As atividades foram realizadas numa dinâmica de sala de aula desenvolvida com a seguinte rotina: atividades burocráticas, como controle de presença e informes da coordenação ou da direção; retomada das tarefas da aula anterior como correção de exercícios, devolução e comentários de provas, discussões de questões propostas em aulas passadas; proposta das tarefas da aula a serem desenvolvidas individualmente ou em pequenos grupos sob orientação do professor; comentários sobre as atividades. Ao final do estudo das equações naquela fase, o professor elaborou uma síntese a partir do desenvolvimento de todas as atividades relacionadas ao tema, incluindo duas provas escritas.

A relação baseada no diálogo entre alunos, entre professor e alunos, entre pesquisadora e alunos e entre professor e pesquisadora se manifestava nos diversos momentos de trabalho em sala. As atividades realizadas individualmente ou em pequenos grupos eram coordenadas pelo professor de modo a instigar a reflexão dos alunos sobre aspectos relevantes do tema, muitas vezes não explícitos na redação das questões.

As discussões em plenária, tanto referentes às soluções das atividades individuais ou em grupos quanto aos exercícios e questões de aulas anteriores eram promovidas de forma a ouvir os alunos. Esta atitude de "ouvir os alunos" se caracterizava por: favorecer a explicitação das diversas formas de resolução, permitir a busca da justificativa e reformulação das soluções imprecisas e provocar a exposição do que havia sido compreendido sobre a solução de um colega ou do registro proposto pelo professor.

Conforme já mencionado, havia dois alunos que propunham problemas desafiadores para os colegas. Certamente, isso acontecia por conhecerem a receptividade por parte do professor, que reservava a parte final de algumas aulas para esta atividade. Tais situações-problemas exploravam o raciocínio lógico-matemático, porém nem todas versavam sobre equações, o tema estudado naquelas aulas. Mesmo assim, o professor mantinha um "canal" aberto para esta prática. Ele ouvia a explicação do problema feita oralmente pelos dois alunos, elaborava na lousa um texto que correspondesse ao desafio proposto e solicitava aos alunos que pensassem sobre sua solução até a próxima aula Matemática. Estes desafios eram, portanto, corrigidos na lousa pelo professor com a participação efetiva dos alunos, principalmente do dois que propunham os problemas.

Durante o período em que realizei o trabalho de campo desta pesquisa, os alunos da fase 8 foram submetidos à duas avaliações individuais e escritas acerca do estudo das equações. Na aula de Matemática seguinte à realização da prova, o professor devolvia a avaliação à cada aluno, fazia comentários gerais, principalmente sobre os erros mais comuns, solicitava que os alunos fizessem a correção da mesma no caderno e conversava individualmente com os estudantes que haviam tido um mau desempenho na avaliação.

Prevista no encaminhamento da sequência das atividades sobre equações, revelada pelo professor na primeira entrevista, uma síntese final elaborada por ele, recuperando formas de solução e nomes utilizados, substituindo por algoritmos e termos formalmente estabelecidos. Foram feitas algumas formalizações sobre as equações a partir desta síntese, com a participação efetiva dos alunos em plenária.

A atuação do professor descrita aqui me permitiu a percepção do processo de aprendizagem dos alunos estudando equações. Além disso, a colaboração no trabalho de campo desta pesquisa, demonstrada tanto durante as aulas, quando chamava minha atenção para aspectos do processo de aprendizagem dos alunos, quanto na disponibilidade em conversar comigo sobre fatos ocorridos em aula e sobre o encaminhamento das atividades, foi fundamental para o desenvolvimento de minha análise.

A minha participação nas aulas

A forma da minha participação nas aulas foi combinada com o professor de Matemática da fase 8 durante a primeira entrevista que realizei com ele.

Acertamos que assistiria às aulas destinadas ao processo de ensino/aprendizagem de equações do primeiro grau na classe já descrita, registrando-as em diário de campo e gravando-as em áudio. A filmagem dessas aulas não foi autorizada pelo professor, não fazendo parte, portanto, das formas de registro das informações.

Participei de onze aulas, entre os meses de setembro e outubro do ano de 1999, totalizando dezoito horas. Essa aulas aconteciam às quartas-feiras, das 21h20 às 22h40 e às sextas-feiras, no horário de 19h00 às 21h00.

Na primeira vez em que compareci às aulas de Matemática da fase 8, entrei na classe e sentei em uma cadeira no fundo da sala. O professor já havia conversado com os alunos sobre a minha participação nas aulas naquele semestre. Então, ele retomou o assunto e me chamou para que eu me apresentasse. Falei sobre o trabalho de mestrado e consultei os alunos sobre a possibilidade de usar nas próximas aulas um gravador; não queria utilizá-lo sem o consentimento deles.

O desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem de equações dos alunos da fase 8, foi acompanhado por mim seguindo, quase sempre, a mesma rotina. A grande preocupação era anotar, de maneira mais fiel possível, no diário de campo, a forma de resolução dos alunos para cada atividade proposta pelo professor, escritas nos cadernos, nas folhas distribuídas pelo professor ou em lousa.

Quando a atividade proposta era realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, eu circulava entre os alunos procurando observar e registrar suas resoluções e fazendo questionamentos sobre elas.

A colaboração do professor foi importante, pois despertou minha atenção para aspectos do processo de estudo de equações dos alunos que foram considerados na análise desta pesquisa.

Procurei ainda anotar os comentários dos alunos durante as várias discussões promovidas pelo professor sobre o estudo das equações, ponto alto destas aulas.

Em uma das aulas da fase 8 em que compareci, o professor sentiu-se mal e precisou se ausentar. Os alunos ficaram fazendo uma nova tarefa. Poderia ter acontecido dos alunos transferirem para mim a função de professora daquela turma, também poderia ocorrer de um pesquisador assumir este papel. Mas, procurei manter a minha participação da mesma forma como vinha fazendo em outras aulas, mantendo a postura de sempre combinar antecipadamente com o professor como participaria das aulas. Desta forma, continuei acompanhando as resoluções de alguns alunos, gravando em áudio e anotando no diário de campo, fazendo questionamentos, sustentando a mesma postura frente aos alunos e seus trabalhos em sala de aula que vinha demonstrando até então.

Por razões pessoais, distanciei-me das informações produzidas no trabalho de campo por um semestre. Ao retomá-las, reuni o material obtido em cada aula, ou seja, as anotações no diário de campo, as transcrições das gravações em áudio, as folhas com tarefas distribuídas pelo professor, as cópias das avaliações resolvidas pelos estudantes[7]. Em seguida, transformei cada aula em narrativa, seguindo sempre a mesma estrutura: minha participação naquela aula, a sequência de atividades e a participação dos alunos. A elaboração dessas narrativas me possibilitou uma análise inicial, bem como o estabelecimento das categorias, contempladas no terceiro capítulo.

---

[7] Esta avaliações foram fotocopiadas com o consentimento dos alunos.

CAPÍTULO II: EM AÇÃO NA SALA DE AULA

A sequência das atividades

Para desenvolver o estudo das equações do 1º grau com os alunos em sala de aula, o professor se valeu de uma sequência de atividades, utilizando diferentes formas de registros de representação. Lembrando que, nesta pesquisa, representação está sendo compreendida a partir da definição de Duval (1993):

> *Há uma palavra ao mesmo tempo importante e marginal em Matemática, é a palavra* **representação.** *(...) Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor,... Até mesmo os traços e figuras representam objetos matemáticos: um ponto, um segmento, um círculo,... Vale dizer que os objetos matemáticos não devem jamais ser confundidos com a representação que alguém lhes faz. (...) A distinção entre um objeto e sua representação é então um ponto estratégico para a compreensão da Matemática. (...) Entretanto, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. Na realidade, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, ou em uma experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos reais ou físicos! É necessário, então, poder dar-lhes representantes. Além disso, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótica utilizado. (...) As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática* (Duval, 1993: 37-38, tradução nossa).

No desenvolvimento da sequência de atividades apresentada pelo professor, identifiquei três registros de representação das equações e uma etapa final destinada à formalizacão deste estudo.

Atividades com □

O primeiro tipo de atividade, realizada em 08/09/1999, solicitava que fossem descobertos os valores desconhecidos, representados por □. O professor escreveu-a na lousa e lembrou aos alunos de atividades verbais sobre valores desconhecidos com valores naturais que eles já haviam feito. Estariam, naquele dia, ampliando seus estudos para os números inteiros.

```
Atividade: complete os espaços em branco:
a)  □ + 10 = 37
b)  □ + 8 = 5
c)  18 + □ = 108
d)  □ + 15 - 4 = 53
e) 10 + 3 + □  = 73
```

Os alunos resolveram, individualmente, mas havia discussões entre colegas que sentavam perto.

Quando a maioria havia terminado, alguns alunos foram chamados para colocar a solução na lousa, explicando como pensaram para obter tais resultados. Outros, que não foram à lousa, também se pronunciaram, expondo oralmente uma resolução diferente da apresentada. Alguns alunos que não acertaram, identificaram seus erros, por exemplo, uma aluna que tentara usar regras de sinais da multiplicação e da divisão nas adições solicitadas nas resoluções.

Em seguida, o professor continuou a atividade, escrevendo outras equações na lousa e, segundo suas próprias palavras *"complicando aos poucos"*:

```
f) □  + 108 = 53

g) 4 + □ = - 3

h) □ - 7 = - 10

i) □ + 8 - 11 = - 13

j) □ + □ - 4 = 28
```

Após esperar algum tempo para que os alunos resolvessem esta outra parte da atividade, o professor iniciou a discussão sobre a resolução destas equações, da mesma forma que fizera com as anteriores.

Alguns aspectos importantes do estudo das equações já apareceram nas discussões sobre esta atividade como a utilização das operações inversas para encontrar valores desconhecidos e como expressar este raciocínio:

> *ATE: - É só fazer a operação inversa para achar o resultado. Fazendo uma você faz o resto.*

Um aluno descobriu 32 em j) □ + □ - 4 = 28, colocando em um só quadradinho, revelando confundir o número desconhecido com o seu dobro, escrevendo: □ + 32 - 4 = 28

O professor enfrentou este engano, solicitando que fosse distribuído igualmente o valor encontrado nos dois quadradinhos.

Atividades com representação literal

O segundo tipo de atividade foi introduzido na aula do dia 10/09/1999, em que cheguei uns dez minutos atrasada. Em razão do meu atraso naquele dia, perdi a explicação inicial do professor a respeito da passagem do □ para o x, nas equações. No decorrer da aula não foi possível esclarecer como ela fora enunciada, pois os alunos estavam realmente envolvidos com a atividade, solicitando a atenção do professor e a minha. Logo que terminou a aula, fui perguntar ao professor como foi anunciada a passagem do □ para o x, quando nos dirigíamos para a sala dos professores, com o gravador desligado. Ele me disse que explicara aos alunos que havia substituído o quadradinho pelo x nas tarefas que envolviam valores desconhecidos e que as outras formalizações aconteceriam em outro momento.

Esta atividade foi proposta em uma folha manuscrita e fotocopiada, chamada pelo professor de ficha e resolvida em duplas ou trios de alunos:

Encontre o valor desconhecido, representado por x, em cada igualdade de modo a torná-la verdadeira:

a) $x + 12 = 29$	e) $16 - x + 14 = 26$	i) $7 + x - 9 = 2 - 4$
b) $14 + x = 57$	f) $12 + x - 8 = 4 + 2$	j) $3 + 2 + x = 3 + 2 + 12$
c) $3 + x + 5 = 27$	g) $6 + x = 16 + 12$	k) $17 + 5 - 2 = x + 15$
d) $14 - x = 6$	h) $22 + 4 - x = 15 - 3$	l) $19 + 2 = x - 27$

O professor comentou a atividade, antes que os alunos começassem a realizá-la, chamando atenção para o sinal de igual nas primeiras equações:

> *Professor: - Uma conta, sinal de igual e resultado.*

O professor interrompeu os trabalhos em duplas antes que os alunos iniciassem a equação do item f) dando início à discussão das anteriores. Alguns alunos foram à lousa, resolveram as equações da mesma forma como haviam feito no caderno e, a pedido do professor, explicaram como haviam pensado.

Estas equações resolvidas na lousa foram utilizadas pelo professor para ressaltar a importância de destacar a resposta final, sublinhando, por exemplo. Ele circulou os resultados e um aluno sugeriu um retângulo em volta da resposta

Dando continuidade à aula, o professor promoveu um debate, questionando a classe sobre o que mudava nas equações a partir do item f):

> *Professor: - Até o item e), era uma conta e um resultado. Chegando no item f) muda um pouquinho, né? Muda o quê?*

APA: - Não é mais uma conta e um resultado. São duas contas.

Professor: - ... igualdade, o resultado desta conta é o mesmo que o da outra conta.

ALE: - Vai dar o resultado desta outra conta.

O professor foi resolvendo f) 12 + x – 8 = 4 + 2 com a participação da classe:

APA: - Resolvi 4 + 2 que deu 6.

Professor: - Ela começou pelo lado que dá para fazer a conta toda. (...). Consigo saber o resultado. Essa dica é boa, né? Começar pelo pedaço que dá pra fazer a conta toda.

ATE: - Pode acrescentar um número para dar o resultado da última conta?

Professor: - Pode acrescentar ou diminuir.

ATE: - Tem que dar o resultado da última conta.

Professor: - É porque da última conta a gente já sabe.

Os alunos reuniram-se em pequenos grupos novamente e continuaram a fazer a atividade. Acompanhei as discussões e resoluções de alguns deles, atenta aos aspectos do estudo das equações que emergiam. As soluções desta segunda parte da atividade foram apresentadas em lousa por alguns alunos e discutidas na aula seguinte, 15/09/1999.

A outra atividade proposta, também em 15/09/199, pelo professor para o estudo de equações foi a problematização das atividades anteriores fazendo os alunos pensarem sobre a linguagem algébrica registrada de duas formas diferentes, sendo que uma é a formal e que permite um tratamento mais geral (Duval, 1993). O professor escreveu na lousa

12 + n = 3 + 20

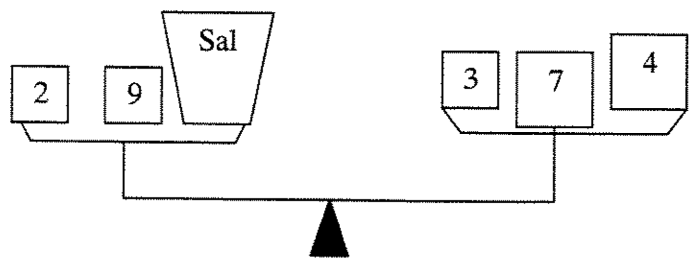
questionando se esta era a mesma atividade da ficha, referindo-se às equações a partir do item (f) e da atividade do □:

FRA: - Pode ser quadradinho, x, n qualquer letra, que o jeito de fazer é sempre parecido.

Professor: - Qualquer representação que eu coloque aqui, a forma de estar trabalhando é essa.

Atividades de balanças

Na mesma aula, em que instigou os alunos a refletirem sobre a linguagem algébrica, ainda em 15/09/1999, o professor disse que iria fazer mais uma variação, lembrando das balanças de dois pratos usadas antigamente. Ele desenhou uma balança deste tipo na lousa, questionando a classe sobre as informações possíveis de serem extraídas dela e solicitando aos alunos que descobrissem quanto pesava o saco de sal:



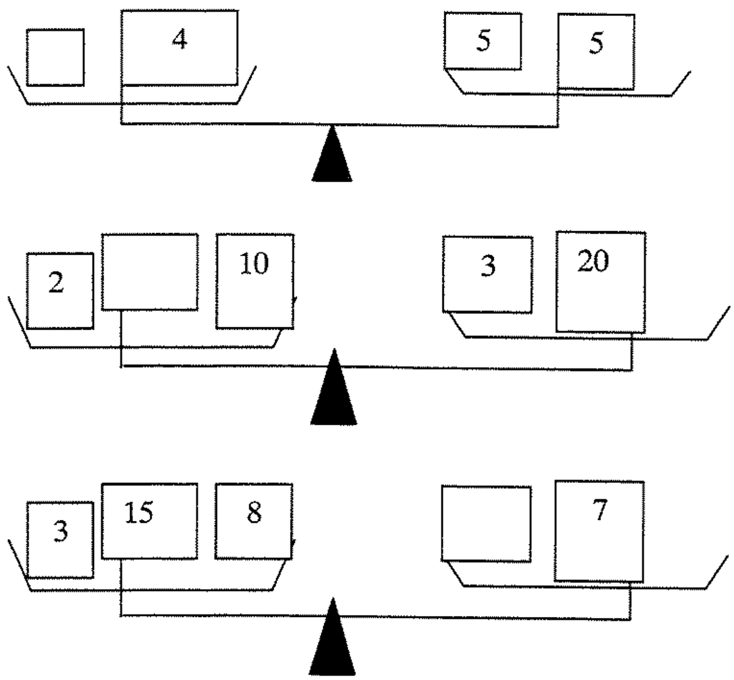
Então, muitos alunos respondem imediatamente que o saco de sal pesava 3. Mesmo assim, o professor explicou que era preciso saber o peso em cada lado para descobrir quanto faltava[8], qual era o peso do saco de sal e que não acrescentassem e nem tirassem pesos das balanças, que elas já estavam equilibradas. Os alunos perguntaram onde deveriam colocar o resultado e obtiveram a seguinte resposta :

Professor: - Encontrem um jeito de representar.

---

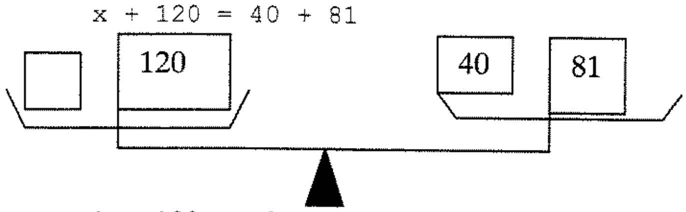
[8] Provavelmente a intenção do professor era destacar as operações necessárias para resolver formalmente uma equação. No caso dessa balança, havia a possibilidade de resolver comparando os dois pratos e verificando que 2 + 9 e 7 + 4 têm como soma 11.

Uma nova ficha foi distribuída para cada aluno, contendo balanças como a descrita acima, na qual, deveriam encontrar os valores desconhecidos, de modo que as balanças permanecessem equilibradas. As três primeiras balanças eram:



Passado algum tempo, o professor solicitou que os alunos apresentassem suas resoluções na lousa. A solução apresentada por ATE possibilitou ao professor sugerir aos alunos uma formalização. Ele resolveu a balança, escrevendo:

x + 120 = 40 + 81



1 + 120 = 121

A partir desta solução, o professor solicitou:

Professor: - Transformem as três primeiras balanças em sentenças deste tipo (referindo-se à equação representando a incógnita por x).

A importância conferida pelo professor ao manejo da linguagem algébrica na resolução de equações emergiu, quando instigou seus alunos a utilizá-la (Duval, 1993). O comentário geral entre os alunos era de que a atividade de balança havia sido fácil. Na parte final desta aula, o professor retomou o problema–desafio, proposto pelo aluno JOE, no decorrer das atividades, elaborando por escrito o texto naquele momento e solicitando que o resolvessem até a aula seguinte:

"Temos 6 bolas idênticas. Mas, uma delas pesa mais que as outras. Com apenas 2 pesagens, queremos descobrir qual é a bola mais pesada. Indique sua solução."

Nos próximos dois dias em que aconteceriam aulas da Matemática naquela classe, eu não estive presente, porque as atividades que foram realizadas não tinham relação com o foco do meu estudo. Em 17/09/1999, foi realizada uma revisão sobre números inteiros relativos e, em 22/09/1999, uma prova escrita sobre este tema.

Portanto, a solução do desafio proposto por JOE foi retomada e discutida na aula do dia 25/09/1999. Ocorreu um debate entre os alunos, que ficaram agitados, falaram todos ao mesmo tempo:

Professor: - Quem conseguiu resolver?

Classe: - Eu, eu!!

O professor precisou reorganizar a classe e começou comentando uma das soluções propostas:

Professor: - Se fosse pesar uma por uma, usaria a balança mais de duas vezes. Então, esta solução não pode. Quem conseguiu fazer?

Muitos alunos disseram que conseguiram resolver. O professor chamou um deles para descrever a solução que deu para o problema. Enquanto o aluno explicava, o professor desenhava na lousa as balanças que correspondiam às etapas desta resposta:

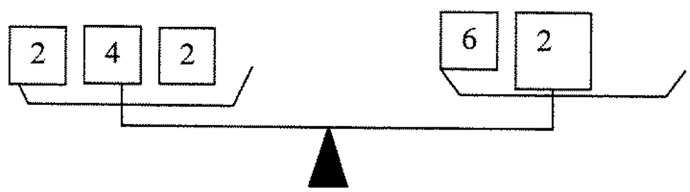
ATE: - Duas bolas em cada bacia. Se a balança ficar em equilíbrio, a mais pesada vai estar nas outras duas. Tira aquelas da balança e pesa as outras *duas. Mas, se na primeira pesagem a balança desequilibrar, tira aquelas, pega as do prato mais baixo, mais pesado e pesa cada uma.*

Professor: - A balança pode equilibrar ou desequilibrar.

Um outro aluno, CLE, expôs sua solução para este desafio:

CLE: - Três bolinhas em cada lado, um lado mais pesado que o outro. Descarta as do prato mais alto, mais leve. Na segunda tentativa, tira uma das bolinhas do prato mais baixo e pesa as outras duas. Se a balança equilibrar, a mais pesada é a que está fora. E se a balança desequilibrar, a que estiver no prato mais baixo é a mais pesada.

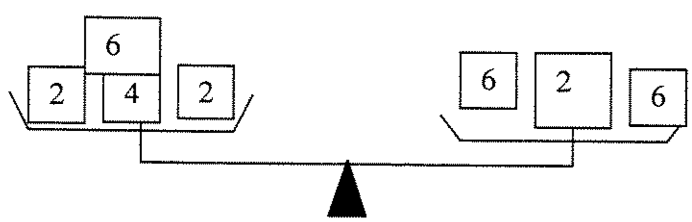
Em seguida, o professor retomou a ficha da atividade com balanças, da aula anterior, através de um debate, deflagrado por ele. Desta vez, a discussão girava em torno de acrescentar e retirar pesos dos pratos:



Professor: - Esta balança está equilibrada?

Classe: - Está.

O professor acrescentou 6 em um dos pratos da balança e os alunos, questionados sobre a permanência do equilíbrio, concordaram que deveria ser acrescentado 6 no outro prato também, ficando assim a balança:



Professor: - Este é um princípio muito usado, de colocar os mesmos pesos dos dois lados.

ATE: - Pode tirar 2 e 4 de um lado e 6 do outro.

TEL: - Acrescentar dos lados os mesmos pesos, também vale tirar os mesmos pesos dos dois lados, a mesma quantidade.

Professor: - É um princípio que vamos estar utilizando quando estamos pensando em balanças para resolver valor desconhecido.

Estes comentários me fizeram pensar sobre o início de uma síntese por parte destes alunos, uma generalização do procedimento chamado, posteriormente, pelo professor de cancelamento.

Apareceu, durante este debate a comparação entre tirar pesos dos dois pratos com o cancelamento utilizado para encontrar a fração equivalente.

Professor: - O peso de um lado é equivalente ao peso do outro lado. (...) trabalham com equivalência porque o total aqui é igual ao total do outro lado.

Encerrada a discussão desta atividade, o professor propôs que a classe se organizasse em duplas. Cada par de alunos deveria elaborar três balanças e resolvê-las no caderno. Também deveriam copiá-las em uma folha à parte para que o professor entregasse para outra dupla resolver. Isso foi feito na aula seguinte, em 1º de outubro de 1999.

Cabe aqui comentar que o uso de balanças para o ensino de equações já foi criticado por alguns autores, entre eles Filloy & Rojano (1984, 1985a, 1985b), citados por Kieran (1992), Neves (1995) e Gimenez & Lins (1997).

Os primeiros pesquisaram *a efetividade de modelos concretos para o ensino de procedimentos formais de resolução de equações* (Kieran, 1992: 401, tradução nossa), principalmente através de uma abordagem geométrica e fazendo uso do modelo da balança em alguns de seus estudos. Kieran não apresenta a forma como a balança foi utilizada nesta pesquisa, porém expõe como conclusão, que *o uso de os modelos concretos não aumentou* *significativamente a habilidade dos estudantes de trabalhar em um nível simbólico com equações* (Kieran, 1992: 401, tradução nossa).

Neves (1995) comenta que o uso do modelo de balanças equilibradas para facilitar a compreensão dos primeiros procedimentos de resolução de equações tem sido frequente. Mas, é categórico, ao apontar as limitações deste modelo:

> *(...) esse modelo de balanças equilibradas não é adequado para lidar com qualquer situação envolvendo igualdade entre números conhecidos e desconhecidos. Durante o processo de resolução de muitas equações pode ser necessário conceber grandezas negativas. Em um modelo de balanças não haveria significado que não fosse artificial para a idéia de tirar 10 gramas de um prato de balança contendo apenas 5 gramas* (Neves, 1995:111).

Em sua dissertação, Neves defende que as equações devem ser trabalhadas de forma que se mantenha preservada sua natureza algébrica, através dos métodos de resolução de equações e a partir da idéia de equivalência entre as operações envolvidas. E ainda, considera aceitável iniciar o estudo das equações por *modelos físicos*, porém acredita na necessidade de alunos e professores alcançarem o modelo algébrico formal.

Os autores Gimenez & Lins (1997) citam em seu livro um estudo realizado por duas pesquisadoras inglesas, K. Hart e A. Sinkinson., sobre o que *acontecia quando crianças passavam de atividades "concretas" para outras formais, mas relativas ao mesmo conteúdo,* sendo um deles equações. Elas concluíram, segundo Gimenez & Lins (1997), que os alunos consideravam o material concreto útil, mas não enxergavam sua relação com o que haviam feito nas atividades formais. As pesquisadoras sugeriram a necessidade de um material intermediário entre as duas atividades.

Porém, Gimenez & Lins (1997), interpretaram tais resultados de outra forma:

> *Acreditamos que a sugestão que fica é a de que talvez não haja mesmo ligação entre o que aconteceu no trabalho com o "concreto" e o que aconteceu no trabalho com o "formal";*

talvez sejam atividades distintas, com seus resultados localizados (Gimenez & Lins,1997: 108).

O paradoxo aparente está na criança dominar a resolução de equações tanto fazendo uso do modelo das balanças quanto do modelo formal, porém de não ser capaz de estabelecer a relação entre estas duas atividades. E justificam este paradoxo, afirmando que no uso de *balanças para o pensamento algébrico há rupturas, e não "abstração" ou "passagem"*, já que as atividades com balanças estão pertencem a um contexto *mais familiar* e o modelo formal, a um contexto *não-familiar* até então para os alunos. Como consequência, a maioria dos alunos se confunde sem saber se deve continuar pensando a partir dos significados produzidos em relação a uma balança ou se deve pensar de forma generalizada como no modelo formal (Gimenez & Lins,1997: 121- 135)[9].

As críticas apresentam como pontos comuns a análise do uso de balanças para o ensino de equações com crianças e a advertência para o não estabelecimento, por parte dos alunos, da relação entre as operações realizadas nas balanças e as realizadas formalmente. Consegui identificar argumentos diferentes em cada um destes estudos para justificar esta advertência. Para Neves (1995), tal relação não era estabelecida em função da limitação do modelo físico. No estudo de K. Hart e A. Sinkinson (citado em Gimenez & Lins 1997), a relação entre atividades concretas e atividades formais não ocorria por falta de um material que intermediasse as duas atividades. E para Gimenez & Lins (1997) a dificuldade de estabelecer a relação desejada estava nos diferentes contextos em que se encontram as atividades com balanças e as atividade formais, sendo um mais familiar que o outro.

Além de críticas, encontrei também autores que acreditam que a utilização de balanças de dois pratos possa contribuir de forma positiva para o processo de ensino/aprendizagem de equações. Entre eles, Shoecraft (1989:37), verificou *transição fácil do entendimento concreto para o conceitual*, baseando-se em experiência com crianças.

---

[9] As afirmações destes autores são baseadas na teoria dos campos semânticos. Para maiores esclarecimentos, ver o artigo Lins, 1994 e o livro Gimenez & Lins, 1997.

A utilização de balanças de dois pratos aparece como sugestão de atividade para o processo de ensino/aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos na proposta curricular. Neste documento, recentemente publicado pelo Ministério da Educação, esta atividade tem o propósito de *fazer uma analogia entre o funcionamento da balança de dois pratos e os processos de resolução de equações* (Brasil, 2002: 55).

Acredito que o professor tenha *feito um esforço constante e consciente para que os alunos* associassem *os aspectos semânticos e sintáticos das operações e transformações matemáticas* (Granell, 1995: 277) ao fazer uso das balanças de dois pratos como recurso para o ensino/aprendizagem de equações com seus alunos. Os diferentes registros de representação de uma equação estudados nas aulas, bem como o trânsito nos registros revelam preocupação e cuidado do professor com a superação desse modelo.

Como professora e pesquisadora, concebo a atividade com balanças como um recurso a ser utilizado no ensino/aprendizagem de equações, desde que inserida entre outras abordagens que enfoquem outros aspectos deste tema.

Transitando nos registros

As tarefas foram apresentadas de maneira tal que, à medida que uma nova forma de registrar as equações era abordada, os alunos eram instigados a relacionar com a anterior, mesmo que percebida na resolução de um colega. Um exemplo deste fato já foi mencionado quando o professor solicitou aos alunos que representassem cada balança da ficha por uma expressão utilizando x no lugar da incógnita.

Outro exemplo, onde aparece uma provocação para transitar nestes dois registros é:

Resolução do professor, em correção na lousa:

$$\underbrace{3x + 12} = \underbrace{18}$$

$$3x = 6$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ -\ 12 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

O transitar entre os registros pode ser entendido como uma conversão, já que:

> *conversão de uma representação é a transformação dessa representação em uma representação em outro registro, conservando a totalidade ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (o registro da representação a converter)* (Duval, 1993: 42, tradução nossa).

Uma parte do vocabulário próprio da Álgebra

Finalizando a sequência de atividade propostas para o estudo das equações, o professor sinalizou que, no próximo semestre, iriam retomar os estudos com balanças, que não havia sido esgotado:

> *Professor: - Depois, na fase 9, vamos retomar balanças e problemas que usam esta sistemática.*

Através de uma retrospectiva dos estudos feitos nos últimos dois meses, o professor envolveu os alunos em outras discussões que apontavam para sínteses importantes na direção da formalização das equações. Seu principal argumento para fazer a síntese foi a consulta a livros didáticos de Matemática, que lhes seria proposta a partir do próximo semestre, levando os alunos a encontrarem termos e procedimentos que, até então, não haviam sido usados nas aulas de Matemática[10].

O interesse em conhecer os procedimentos formalmente aceitos já havia sido manifestado por uma aluna em aula anterior, sugerindo ao professor que explicasse "o seu jeito

---

[10] Vale observar que nem o professor da fase 8, nem os outros professores de Matemática do ensino supletivo daquela escola adotavam livros didáticos. Mas, ensinavam seus alunos a consultá-los, pesquisando temas estudados em aulas, atividades e problemas sobre eles, principalmente nas fases correspondentes às séries finais do Ensino Fundamental.

de fazer", argumentando que, o que aparecia durante as correções em lousa era o "jeito dos alunos" resolverem. Diante desta solicitação, o professor resolveu a equação:

$$4x + 9 = 2x + 17:$$

$$\overset{2x}{\cancel{4x}} + \cancel{9} = \cancel{2x} + \overset{8}{\cancel{17}}$$

$$x = 4$$

Um aluno se pronunciou, dizendo que o professor queria verificar a capacidade dos alunos e aprender com eles através das soluções que eles apresentassem.

O professor fez, então, uma primeira síntese do tema equações, partindo das atividades feitas em aulas , sempre incentivando a participação dos alunos.

> *Professor: - Trabalhamos com o valor desconhecido (usando quadradinhos), depois expressões com x, balanças. E, acabada a primeira atividade de balança, depois a gente transformou em expressão que tinha o valor desconhecido x, né?*
>
> *ADE: - É, tem alguma coisa a ver...*
>
> *Professor: - Têm. O que têm a ver?*
>
> *Classe: (Falam todos juntos)*
>
> *Professor: - No lugar do quadradinho, representado como o x, né?*
>
> *FRA: - É também...*
>
> *Professor: - O valor desconhecido tem alguma coisa a ver com balança e sua interpretação?*
>
> *Classe: (Falam todos juntos)*
>
> *Professor: - Então, na verdade o que está escrito na balança, é o que esta escrito na primeira expressão. Nesse caso é a mesma coisa.*
>
> *CLE: - É. Eu acho que é.*
>
> *Professor: - Isso. Nós vamos formalizar isso...*
>
> *CLE: - Legal.*

Foi nesta aula, destinada às formalizações, que o professor falou pela primeira vez em equações:

JOE: - Qual é a idéia?

Professor: - A idéia é a mesma. Bom, esse estudo que a gente está fazendo, eu uso esse tipo de linguagem. Eu começo a trabalhar com x, valor desconhecido. Mas, é o que os matemáticos chamam de equações.

TEL: - Equações?

Professor: - Então, a resolução das equações, na realidade, tem a função de determinar qual é aquele valor que eu não conheço. O valor do x, né?

Um aluno interessou-se em saber como a atividade com balanças estava inserida neste tema. O professor justificou a utilização deste registro pela noção de equilíbrio que transmite, relacionando-a função do sinal de igual nas equações:

CLE: - E a balança?

Professor: - A balança. O que precisava acontecer na balança?

ADE: - Equilíbrio, claro.

Professor: - Ah, então a balança tem que ter equilíbrio, né?

ADE: - Claro.

Professor: - Esse equilíbrio está representado pelo igual. Esse igual aqui está dizendo que o que eu tenho desse lado...

APA: - E tenho que ter do outro do igual.

Professor: - Igual. Igualdade. Então, a equação, na verdade, é uma expressão matemática aí, que trabalha com a igualdade. Eu sempre tenho alguma coisa desse lado igual a alguma coisa do outro lado, né ? Então, eu poderia estar pensando que a balança é uma forma de fazer a minha equação, peso desse lado é igual ao outro peso.

Classe: (Falam todos juntos)

Professor: - Então, essa idéia de equação aí, tem a ver com a idéia de igualdade. O que a gente vem fazendo aí, para estar resolvendo, seja o valor desconhecido, seja a balança ou seja equação, tudo isso trabalha com a idéia de igualdade. Quer dizer, sempre estará tirando o mesmo peso dos dois lados, está sempre pensando no valor desse lado aqui, igual ao valor outro lado aqui. Então, igualdade é um dos nomes que aparecem mesmo.

A nomenclatura própria da Álgebra também foi abordada pelo professor, retomando os termos utilizados em sala de aula, durante as atividades:

Professor: - A gente estava falando, por enquanto, na balança, em lado direito ficar igual ao lado esquerdo. Pegando livros aí também, você vai ver que aparecem outros nomes.

FRA: - Ah, tá.

Professor: - Na verdade as equações têm dois membros. Mas, vamos resolver como sempre, independente de toda essa nomenclatura.

ALE: - Nomenguatura?

Professor: - Nomenclatura são todos esses nomes que vão aparecendo aí. Eu pego alguma coisa que eu não conheço e começo a dar nomes para essas coisas. Eu não vou ficar falando nomes, não vou ficar cobrando aqueles nomes, né?

ALE: - Nomenclatura.

Um aluno, ALE, comenta, com tom de brincadeira que o professor estava falando difícil naquela aula.

Professor: - Vocês vão perceber, assim... A linguagem, no livro é um pouco diferente da linguagem que a gente vem usando no encaminhamento do trabalho. A linguagem vai dando um encaminhamento para o trabalho.

Pareceu-me que o professor reconhece a importância da linguagem como inerente ao estudo das equações, concordando com Aleksandrov (1985):

Mas a forma era indispensável: a abstração dos números concretos e a formulação de regras gerais necessitavam do correspondente método de expressão: era essencial ter algum meio de denotar números arbitrários e operações com eles. O simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da Álgebra (Aleksandrov:1985, 63, tradução do espanhol nossa).

Em seguida, o professor relacionou o estudo das equações, realizado até aquele momento nas suas aulas, com a abordagem usualmente encontrada em livros didáticos de Matemática:

Professor: - Então na verdade, a gente foi construindo essa resolução, né? Nós vamos começar a ter contatos mais sistemáticos com os livros. Mas assim, o que está escrito lá e o que a gente está assistindo é a mesma coisa, né? Só que de uma forma mais técnica.

Uma aluna tinha em mãos um livro didático de Matemática e mostrou ao professor alguns problemas que poderiam ser resolvidos através da resolução de uma equação.

Apostamos que as informações a serem produzidas a partir do trabalho de campo, desenvolvido com este professor, na fase 8 desta escola, possibilitariam a investigação sobre o processo de ensino/aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos.

Nossa aposta foi vencedora. A abordagem que o professor deu ao tema revelou alguns cuidados, mesmo que não explicitados verbalmente, com os processos mais amplos de ensino/aprendizagem da Álgebra. Podemos perceber tais cuidados nas discussões desenvolvidas em sala de aula, nas quais os alunos foram instigados a: pensar sobre princípios gerais de resolução de equações, transitar em pelo menos três registros de representação – linguagem natural, representação por "diagramas" e a linguagem algébrica – parece que o professor se propôs a lidar com o paradoxo enunciado por Duval:

Estamos frente ao que podemos chamar de paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão de objetos matemáticos não pode ser mais que uma apreensão conceitual;

> *de outro, é somente através das representações semióticas que uma atividade sobre os objetos matemáticos é possível. Esse paradoxo pode constituir um verdadeiro círculo para a aprendizagem. (...) A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, fora de toda representação semiótica, torna a confusão quase inevitável. E, inversamente, como as pessoas podem adquirir a maestria no tratamento matemáticos necessariamente ligados às representações semióticas se elas ainda não têm uma apreensão conceitual dos objetos representados? Esse paradoxo é ainda mais forte quando identifica-se a atividade matemática e a atividade conceitual e que consideram-se as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas* (Duval, 1993: 38, tradução nossa).

Conta do próximo capítulo a análise propriamente dita, desenvolvida a partir de um recorte das informações produzidas, contextualizadas nas narrativas desenvolvidas nesse capítulo.

CAPÍTULO III: A ANÁLISE

A elaboração das categorias de análise

As narrações elaboradas tanto para retomar as informações produzidas no trabalho de campo quanto para caracterizar/configurar a dinâmica da sala de aula permitiram-me perceber a emergência de categorias que auxiliaram na organização da análise.

As categorias tratam do processo de mudança na compreensão (noésis) de alguns conceitos de equação, provocadas pelo trânsito por diferentes registros de representação (semiósis), ao longo do estudo desenvolvido em sala de aula. Ressaltando novamente que noésis trata da apreensão conceitual, semiósis trata da produção de uma representação semiótica do conceito e que, desta forma, são inseparáveis (Duval, 1993: 39- 40).

A primeira categoria aborda o processo de apreensão conceitual de igualdade, voltado ao significado de equação, pelos alunos à medida que transitavam, instigados pelo professor, por diferentes representações. Alguns estudos sobre o ensino/aprendizagem da Álgebra, como por exemplo, a dissertação de Pinto (1997), os artigos do livro "As idéias da Álgebra" (1995), bem como o artigo de Fiorentini, D. et alii (1993) têm salientado a relevância da discussão sobre os diferentes sentidos e significados do sinal de igual e dos termos algébricos e de uma abordagem adequada à manipulação simbólica. Estes aspectos também já apareceram na análise inicial que realizei ao elaborar as narrações.

A segunda categoria do processo de compreensão de incógnita, transitando de uma representação que Granel (1995) denomina "icônica", para uma representação algébrica formal voltando para uma outra representação icônica – que denominaremos com Duval (1993) de "diagramas didáticos" – e convertendo-se em linguagem algébrica formal novamente nas equações.

A terceira categoria está mais diretamente relacionada à questão de investigação: o que acontece em relação ao processo de aprendizagem de equações por jovens e adultos quando o aluno transita em diferentes registros de representação? A abordagem dada pelo professor para o ensino de equações possibilitou a produção de um material rico sobre o trânsito em pelo menos três registros de representação: a linguagem natural, a representação icônica (Granell:1995) ou diagramas didáticos e a linguagem algébrica. Esta categoria estará contemplada nas duas categorias anteriores, fazendo dos conceitos principais da equação, igualdade e incógnita, "estradas" para a ocorrência do trânsito nos registros de representação, ou seja, perpassará toda a análise.

Pela natureza das categorias, a análise está diretamente relacionada à sequência de tarefas apresentadas pelo professor.

A análise foi, fundamentalmente, baseada em recortes e realizada à luz das idéias referentes à representação semiótica defendidas por Duval (1993, 1995).

O sinal de igual

O professor iniciou o ensino de equações com uma tarefa sobre valores desconhecidos em expressões representados por □ que, em seguida, foi substituído por uma representação formal de incógnita x, recorreu a um desenho da balança de dois pratos e retornou para a representação formal. Durante o desenvolvimento desta sequência de atividades, os sentidos de igualdade expressos pelos alunos foi se modificando, aproximando-se do seu significado em equações.

A primeira tarefa, realizada em 08/09/1999, da forma como foi apresentada, parece não romper com a compreensão de que o sinal de igual anuncia um resultado, de que *o lado direito deveria indicar a resposta* (Kieran, 1992: 398). Porém, alguns aspectos importantes do estudo das equações apareceram nestas discussões iniciais sobre esta atividade como a utilização das operações inversas para encontrar valores desconhecidos e como expressar este raciocínio:

> *ATE: - É só fazer a operação inversa para achar o resultado. Fazendo uma você faz o resto.*

O aluno estava se referindo à solução que apresentou na lousa:

```
b) □ + 8 = 5
 _ 8
   5
   3
5 - 8 = - 3
```

A compreensão do sinal de igual como anunciando um resultado permanece até o início da próxima tarefa, quando o □ foi substituído por uma representação formal de incógnita, o x. Esta tarefa, proposta em uma folha (ficha), distribuída pelo professor. Em 10/09/1999, os alunos deveriam encontrar o valor desconhecido, representado por x, em cada igualdade de modo a torná-la verdadeira. Ao comentar esta tarefa, o professor chamou a atenção dos alunos para as cinco primeiras equações, dizendo:

Professor: - Uma conta, sinal de igual e resultado.

O professor reforça, com esta afirmação, o significado do sinal de igual como aquele símbolo que anuncia um resultado. Entretanto, três alunos parecem retomar a idéia de ATE sobre a utilidade da operação inversa para a resolução de equações, circundando a solução ou apresentando-a na forma x = a (onde a é o valor da incógnita), esta última incentivada pelo professor.

Às vezes, os indícios da utilização das operações inversas foram percebidos pelas explicações orais dos alunos gravadas em áudio, às vezes, por operações, na vertical, escritas na lousa e registradas no diário de campo. Tais resoluções serão apresentadas e analisadas a seguir:

(solução de FRA)

```
a) x + 12 = 29
17 + 12 = 29
```

FRA: - Fiz 29 menos 12.

(solução de APA)

```
c) 3 + x + 5 = 27
3 + 19 + 5 = 27
```

APA: - Fiz 3 mais 5, 8. E 27 menos 8, que é 19.

As explicações orais enunciadas por FRA e APA indicam a utilização da operação inversa no cálculo mental.

(solução de ALE)

```
b) 14 + x = 57
           43

   _57
    14
    --
    43
```

ALE, por explicar sua solução via uma subtração na vertical, parece recorrer a seus conhecimentos aritméticos anteriores. Nas soluções apresentadas por outros alunos, este recorrer também parece estar presente ao confirmarem seus cálculos, nem sempre corretos.

Duas alunas, QUI e APA, buscam com cálculo mental a solução da equação.

(solução de QUI)

```
 d) 14 - x = 6
             8
  _ 14
     8
   ---
     6
```

A subtração feita por QUI somente confirma a solução que ela já havia encontrado.

(solução de APA)

```
e)  16 - x + 14 = 26
    16 - 12 + 14 = 26

_ 16
  12
----
+ 4
 14
 --
 18 = 26
```

APA achou 12 como valor de x com auxílio do cálculo mental. Ao tentar confirmar, com operações na vertical esse resultado que viria à direita de sinal de igual, não encontrou 26 e sim 18. Escreve, então a expressão incorreta 18 = 26. Sua colega, CLA, interfere e corrige oralmente seus cálculos:

> *CLA: - Ela confundiu. Fez 16 menos 4 igual a 12. E colocou 12 no lugar de 4. Confundiu.*

O professor interfere, mantendo o registro da aluna e indicando formalmente a solução errônea de APA, fazendo:

$16 - 4 + 14 = 26$
$x = 12$

Parece que o significado do sinal de igual anunciando um resultado começa a ser questionado. Ou seja, não é adequado qualquer resultado, há necessidade de comparar os dois membros da equação e manter a igualdade.

Depois de discutir as cinco primeiras equações, através de soluções apresentadas pelos alunos em lousa e explicadas oralmente por eles, o professor promoveu um debate, questionando a classe sobre o que mudava nas equações a partir do item f):

> *APA: - Não é mais uma conta e um resultado. São duas contas.*
>
> *QUI: - Que têm resultados iguais.*
>
> *Professor: - Igualdade. O resultado desta conta é o mesmo que o da outra conta.*
>
> *ALE: - Vai dar o resultado desta outra conta.*
>
> *APA: - Faz 4 mais 2, que dá 6.*

Seguindo a sugestão de APA, o professor resolve a equação

f) $12 + x - 8 = 4 + 2$,

começando pelo segundo membro e comentando:

> *Professor: - Deste lado dá pra saber o resultado.*

O professor escreveu:

```
      4 + 2 = 6
f) 12 + x - 8 = 4 + 2
   12 +  2 - 8 = 6
```

Com esta apresentação, usando o mesmo tipo de registro dos alunos, o professor não instiga a reflexão sobre o sinal de igual representando a igualdade. Terminada a discussão sobre a equação f), o professor aguardou um tempo para que os alunos resolvessem as próximas equações. Em seguida, alguns estudantes apresentaram suas soluções na lousa.

CLA indica a permanência da igualdade com a substituição de seu valor numérico.

(solução de CLA)

```
g) 6 + x = 16 + 12
   6 + 22 = 16 + 12
```

Para encontrar o valor da incógnita, parece que CLA utilizou-se do cálculo mental.

(solução de JOE)

```
i) 7 + x - 9 = 2 - 4
   7 + 0 - 9     - 2

_ 9
  7
- 2
```

Percebe-se que JOE resolveu mentalmente a subtração do segundo membro, fez a outra na vertical e desconsiderou o sinal de igual.

(solução de ALE)

```
j) 3 + 2 + x = 3 + 2 + 12
         12
        + 3                 12
          2                 +3
          5                  2
                            17
```

ALE transformou cada membro da equação em operações na vertical. Provavelmente, ele encontrou o valor da incógnita utilizando cálculo mental e o indicou abaixo de onde estava escrito o x. Parece que ALE considerou a disposição espacial, sem usar o sinal de igual para indicar o resultado.

Podemos considerar que esta forma de solução, fazendo operações inversas na vertical, recorrendo a conhecimentos aritméticos anteriores, se aproxima do que Kieran (1992) denomina "desfazer". A autora expõe suas críticas:

> *embora (...) pareça mais próxima dos métodos de resolver problemas usados em Aritmética, é claramente limitada a equações tendo uma ocorrência do termo incógnito em uma de poucas e restritas posições, e infelizmente parece antes encorajar o aluno a continuar a evitar o simbolismo algébrico do que lidar com a equação como um objeto estrutural* (Kieran, 1992: 401).

Ainda nesta tarefa, outra forma de representação aparece nas equações

```
k) 17 + 5 - 2 = x + 15
l) 19 + 2 = x - 27
```

demonstrando que o professor estava atento para

> *ampliar a noção do sinal de igual para incluir operações múltiplas em ambos os lados, fornecendo base para a construção posterior de sentido para equações algébricas tendo operações múltiplas em ambos os lados. Se essa extensão não fosse feita primeiro, a idéia de que o resultado está sempre no lado direito do igual acompanharia o estudante até o estudo de equações algébricas* (Kieran, 1992: 399, tradução nossa).

Na resolução apresentada na lousa por APA há indícios da reelaboração do sentido de igualdade representado pelo sinal de igual.

(solução de APA)

```
k) 17 + 5 - 2 = x + 15
   17 + 5 - 2 = x + 15 = 20
   17 + 5 - 2 = 20
   x = 5
```

A aluna APA fez $17 + 5 - 2 = x + 15 = 20$, ao invés de fazer $20 = x + 15$, que seria a solução formalmente correta. Ela desconsiderou que uma equação tem apenas dois membros e somente uma igualdade, escrevendo três igualdades. O aluno JOE discute a solução apresentada por APA, questionando as três igualdades.

JOE: - São contas diferentes com resultados iguais.

O próprio colega JOE esclarece, revelando seu sentido de equações equivalentes, apesar de não dispor de um vocabulário técnico.

A partir desse momento do curso, parece que o professor pretende atribuir outro significado ao sinal de igual, proporcionando uma outra forma de compreendê-lo. Desta forma, o professor prepara seus alunos para o estudo formal das equações, fornecendo a eles, o que Kieran considera como

> *um dos requisitos para gerar e interpretar adequadamente representações estruturais tais como equações é a concepção do caráter simétrico e transitivo da igualdade – às vezes referido como a "equivalência esquerda-direita" do sinal de igual* (Kieran, 1992: 398, tradução nossa).

A fim de estabelecer significado ao sinal de igual, a representação de uma equação sofre alterações: operações no segundo membro e expressões algébricas em ambos os membros. O significado do sinal de igual como relacional, como um sinal de comparação entre duas expressões e de equivalência (Shoecraft, 1989: 36), vai sendo elaborada a partir das alterações sofridas pela representação de uma equação, aparecendo tanto na solução quanto na observação de alguns dos alunos.

Ainda neste dia, 08/09/1999, ao finalizar a tarefa, o professor instiga a classe, comparando a tarefa do □ e esta, provocando reflexões acerca da incógnita. Este aspecto será analisado na próxima seção deste capítulo.

Seguindo a sequência de tarefas apresentadas pelo professor, a balança de dois pratos é utilizada como diagrama didático (Duval, 1993) no ensino de equações, buscando outro sentido do sinal de igual relacionado ao equilíbrio físico.

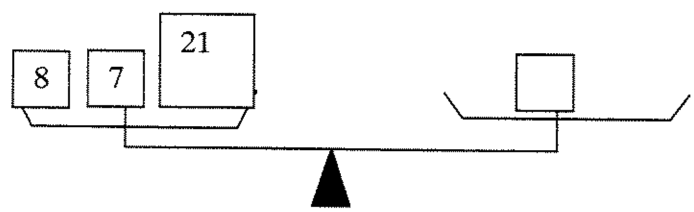
Quando o professor apresentou a tarefa, no dia 15/09/1999, solicitou aos alunos que pensassem nas balanças de dois pratos, que eram muito diferentes das atuais. Da fala de uma aluna, surgiu a noção de equilíbrio que a balança permite, quando têm pesos iguais em cada um dos pratos, afirmando:

ADE: - Pratos retos e iguais.

ADE indica com as mãos que "retos e iguais" referem-se à mesma altura.

Também aparece o sinal de igual utilizado por um aluno, ALE, já na primeira balança da atividade, apresentada em uma ficha[11], em discussão e exposição em lousa:

ALE: - Somei o que tem do lado direito e o que tem do lado esquerdo. Depois, subtraí direito do esquerdo.



E registrou:

8 7 21 = □

Depois, fez:

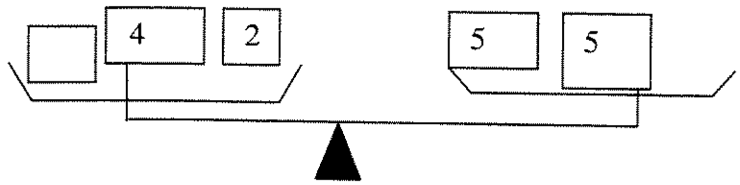
$8 + 7 + 21 = \boxed{36}$

O professor comentou o uso do sinal de igual, que anunciava o resultado da adição que ALE havia feito e também o equilíbrio, lembrado pelos alunos, entre os dois lados da balança.

Nas resoluções das tarefas desta ficha RIT substituiu o sinal de igual pelo símbolo de implicação.

---

[11] Estas fichas, depois de resolvidas por cada aluno, foram fotocopiadas com o consentimento dos mesmos.

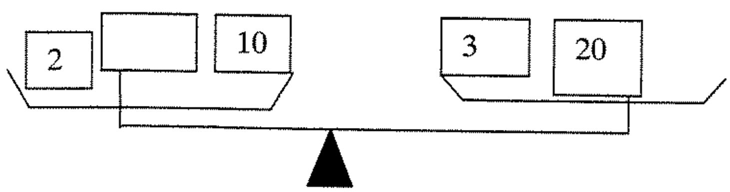


5 + 5 = 10
4 + 4 = 8
8 + 2 = 10
x + 4 + 2 → 5 + 5

Este símbolo (→) apareceu somente neste caso. Não foi possível saber se RIT o utilizou tendo conhecimento de que se trata de um símbolo matemático ou se ela quis criar um símbolo próprio para o seu registro. Isso, provavelmente, se resolveu com o transitar nos diferentes registros, pois o símbolo de implicação não apareceu ao resolver as balanças da sua segunda prova escrita, dando lugar ao sinal de igual.

O sinal de igual para indicar o peso total de cada prato foi utilizado por duas alunas, VER e JAN, ao resolverem a atividade do dia 15/09/1999. A solução de VER para uma das balanças foi:

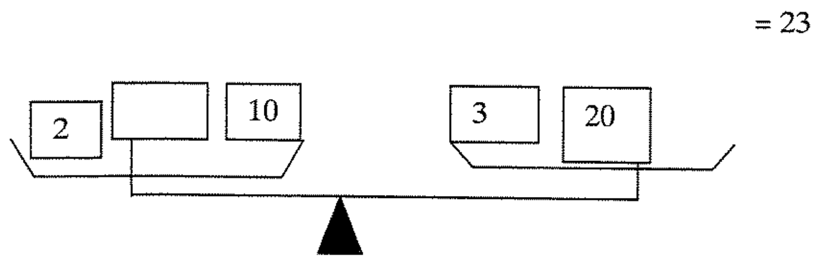
= 23 = 23



11
2 + x + 10 3 + 20

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{12} \\ 11 \end{array}$$

A solução de JAN para uma das balanças foi:



2 + x + 10 = 3 + 20 = 23

11

Parece que, no caso destas duas alunas, houve uma inadequação do diagrama didático. Porém, as duas resoluções apresentadas mostram diferenças. Enquanto VER coloca o sinal de igual nos dois pratos, JAN o faz em apenas um prato, aquele que não contém o peso desconhecido. Outra diferença ocorreu ao converterem da representação de balança para a formal. A aluna VER omite o sinal de igual entre um membro e outro da equação. E a aluna JAN, embora tenha utilizado o sinal de igual, desconsiderou que uma equação tem apenas dois membros e uma igualdade somente, equívoco já apresentado por sua colega APA em uma aula anterior.

Na solução das balanças o sinal de igual também aparece para indicar o valor da incógnita, quer esta seja representada pelo valor de x, quer seja representada pelo "peso" desconhecido da balança.

Na aula do dia 01/10/1999, o professor retomou para a representação formal de equação. Solicitou aos alunos que resolvessem as sete equações escritas na lousa.

Atividade: determine o valor de x:

a)14 + x + 20 = 14 + 35

b) 2x = 120

c) 2x + 1 = 15

d) x + x + 4 = 12

e) x + 1,5 + 4,2 = 6,7

f) 2,8 + x + 4 = 9,32

O professor não estava se sentindo bem e precisou se ausentar. Antes, alertou os alunos à respeito das novidades que a atividade trazia e também sobre a responsabilidade de estarem trabalhando em classe sem a sua presença:

> *Professor:- Essas equações têm algumas novidades que a gente ainda não viu. Então, a idéia, qual é? Vão pegar e vão tentar resolver do jeito que vocês acham que dá para encaminhar a solução, tá? Tem muita novidade, coisas do tipo 2 X, então, tente encaminhar do jeito que você achar mais razoável e daí na próxima aula estaremos discutindo. Não consegui chegar até o final do período hoje, então, eu vou estar indo embora agora. Eu queria que vocês trabalhassem um pouquinho com isso daqui. O pessoal tem maturidade suficiente para tocar aí sem problemas.*

A classe continuou realizando a atividade deixada pelo professor. Alguns alunos reuniram-se em duplas, outros em trios, outros em grupos maiores e alguns preferiram fazer a atividade sozinhos.

Na aula seguinte, dia 06/10/1999, essas equações foram resolvidos na lousa por alguns alunos e discutidas. Nestas soluções se evidenciou o significado do sinal de igual como indicando uma igualdade, apesar dos procedimentos, que podemos chamar de aritméticos, utilizados. Como exemplo, escolhi a solução de EDI para a primeira equação:

```
a) 14 + x + 20 = 14 + 35
         +14          +14         _49
          20           35          34
          34           49          15          x = 15
```

O sinal de igual é utilizado por EDI também para indicar o valor da incógnita.

Ao longo do desenvolvimento das atividades, o sentido do sinal de igual foi sendo reelaborado pelos alunos. Nas atividades iniciais o sinal de igual apareceu para anunciar um resultado determinado por operações inversas e pela recorrência a conhecimentos aritméticos anteriores. Nos diagramas didáticos das balanças, o sinal de igual foi utilizado para indicar um resultado numérico das adições dos pesos presentes nos pratos. A substituição do x pelo seu valor numérico foi confirmada por uma igualdade de expressões, indicada pelo sinal de igual.

Quando JOE discutiu a solução de APA (10/09/1999), revelou uma reelaboração do sentido do sinal de igual, como comparação e relação de equivalência entre duas expressões. Finalmente, ao apresentar o valor da incógnita como x = a (onde a é o valor da incógnita), o sinal de igual indicou o sentido que os alunos estavam elaborando de incógnita como valor numérico desconhecido.

Estes sentidos, produzidos pelos alunos, foram valorizados pelo professor. Ao mesmo tempo, ele procurou, com as tarefas propostas, aproximá-los do significado do sinal de igual na equação como representando uma igualdade.

A incógnita

Na sequência de tarefas elaboradas pelo professor, a incógnita foi representada por três símbolos: □, x e o peso em branco nos pratos das balanças.

Nas tarefas nas quais a incógnita era representada por □, alguns alunos, ao apresentarem suas soluções na lousa, escreveram os valores no interior do mesmo ou no lugar que este símbolo ocupava na expressão.

Um exemplo importante é a resolução apresentada por APA em 08/09/1999. A equação a ser resolvida era:

$\square + \square - 4 = 28$

A solução inicialmente apresentada por APA foi:

$32 + 32 - 4 = 28$

E justificada por :

$28 + 4 = 32 : 2$

Com a intervenção do professor, sugerindo que fosse feita uma "distribuição", APA corrigiu:

$16 + 16 - 4 = 28$

Esta solução foi destacada, pois indica o sentido que os alunos tinham de incógnita como valor numérico desconhecido, não passível operação.

Este sentido permanece na resolução da ficha distribuída no dia 10/09/1999, conforme aparece na fala do professor quando explica as mudanças que haveriam a partir da equação f) e da própria resolução que ele fez na lousa:

```
f) 12 + x - 8 = 4 + 2
   12 + 2 - 8 = 6
```

Ou seja, ao manter o registro dos alunos, escrevendo o valor da incógnita na própria equação, o professor, de certa forma reforça seu sentido de valor desconhecido. Na solução apresentada por JAN também há indícios deste fato.

(solução de JAN)

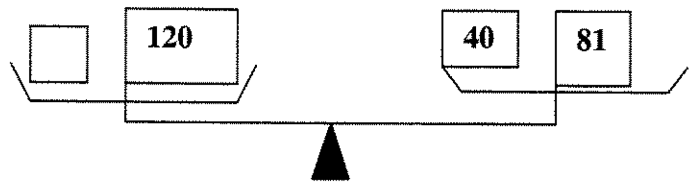
```
1) 19 + 2 = x - 27
            48
   19 + 2 = 21

  + 21
    27
    --
    48
```

JAN resolveu o primeiro membro da equação representando a adição na horizontal e outra adição que era a operação inversa foi representada na vertical. Ela não julgou necessário indicar que aquele 48 escrito à direita era o valor de x. Provavelmente, ela avaliou que, encontrado o valor desconhecido, está concluída a resolução da equação.

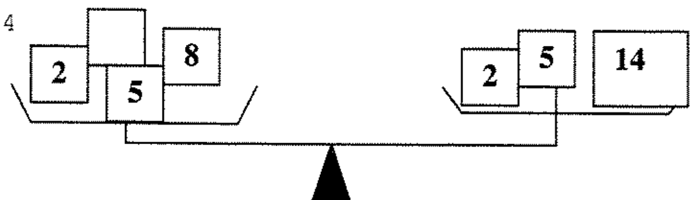
A representação da balança de dois pratos, foi utilizada pelo professor com o objetivo de possibilitar/favorecer o enfrentamento da manipulação dos símbolos algébricos por parte dos alunos, através de um diagrama didático (Duval, 1993). Talvez tivesse presente que o sentido do sinal de igual, como "pesa tanto quanto" não contempla seu significado algébrico, de sinal relacional. Um primeiro passo rumo ao enfrentamento da manipulação dos símbolos foi dado com a tentativa de conversão de um registro de representação da balança para um registro de representação formal, já utilizado. Esta conversão foi apresentada por um dos alunos, o ATE, ao resolver duas balanças da ficha distribuída em 15/09/1999:

x + 120 = 40 + 81
1 + 120 = 121
x = 1



Ele também resolveu da mesma forma a próxima balança da ficha:

2 + 5 + 8 + x = 2 + 5 + 14
15 + 6 = 21
x = 6



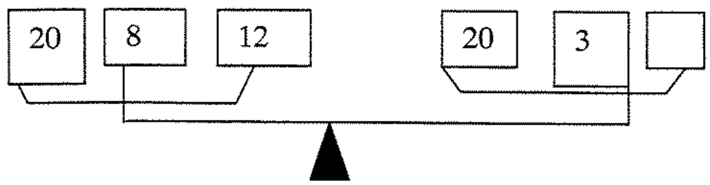
ATE substituiu o peso desconhecido por x, considerando a disposição espacial dos pesos na balança. O sinal de igual foi usado para indicar o resultado de adições escritas na horizontal e também para indicar o valor da incógnita representada por x.

O aluno ATE parece ter conseguido coordenar os diferentes registros com o tema em estudo, obtendo sucesso na conversão que fez.

> *Se a conceitualização implica uma coordenação de registros de representação, a principal aposta de aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automação de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas ela deve também ser a coordenação de diferentes registros de representação necessariamente mobilizados por esses tratamentos ou por essa compreensão. A coordenação de registros aparece como a condição fundamental para todas as aprendizagens básicas, pelo menos nos domínios onde os únicos dados são representações semióticas: a matemática e o francês* [a língua natural, o português, neste caso] (Duval, 1993: 54, tradução nossa).

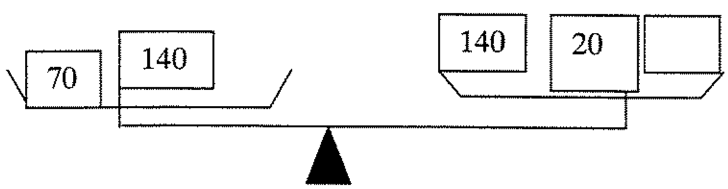
Diante desta conversão feita por ATE, o professor solicitou aos alunos que representassem as três primeiras balanças daquela ficha na representação formal, sugerida pelo colega. Porém, ao resolverem as outras balanças daquela ficha, a utilização da representação formal da equação não apareceu, como se pode verificar nos exemplos apresentados a seguir, extraídos do diário de campo.

(solução de JOE)



$$\begin{array}{r} 20 \\ +8 \\ \underline{+12} \\ 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ \underline{-23} \end{array} \qquad \square = 17$$

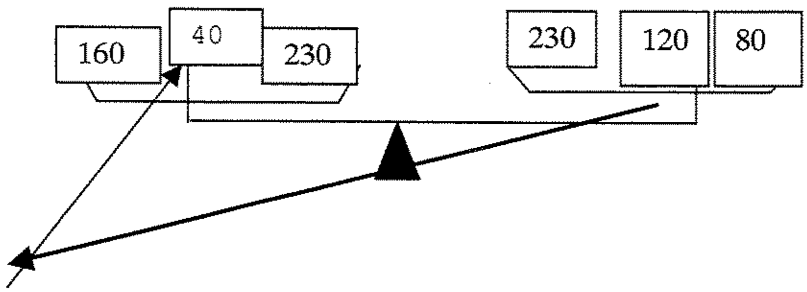
(solução de CLA)



$$\begin{array}{r} 210 \\ -\ \underline{160} \\ 50 \end{array}$$

Analisando a resolução desta ficha, foi possível verificar que o próprio ATE não se utilizou da representação formal, indicando que, como seus colegas, estava preocupado em encontrar o valor do peso desconhecido e não em operar com uma incógnita.

(solução de ATE)




```
_ 430
  390
   40
```

A tarefa proposta no dia 01/10/1999 e desenvolvida pelos alunos no dia seis, não permitia aos alunos ignorar a incógnita. Porém, as resoluções apresentadas na lousa por alguns deles não indicam que tenham operado com a incógnita, mas sim que tenham indicado o valor que ela assumia na equação.

(solução de CLE)

```
          X
f)  2,8 + 2,52 + 4 = 9,32
2,8 + 4 = 6,8
9,32 - 6,8 = 2,52
```

Ele não reescreveu a equação e sim uma expressão numérica, indicando o número que era o valor da incógnita.

(solução de ADE)

```
    60
b) 2x = 120

120  |2
      60

 60
x 2
120
```

(solução de QUI)

```
   4   4
d) x + x + 4 = 12
```

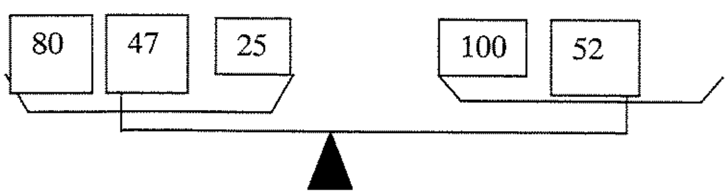
Tanto ADE quanto QUI indicaram o valor da incógnita acima do símbolo x.

(solução de CLA)

```
e)  x + 1,5 + 4,2 = 6,7
   1x + 1,5 + 4,2 = 6,7
1,5          6,7
+          -
4,2          5,7
----         ---
 5,7         1,0
```

O registro de CLA é semelhante aos de ADE e QUI, entretanto, ao colocar o valor 1 à esquerda do símbolo x, ela compromete a representação do seu resultado. O fato da equação escrita pela aluna ser equivalente à equação a ser resolvida tornou o registro de CLA dúbio e, se considerarmos só a resposta formal, a aluna não teria encontrado o valor da incógnita.

Um outro aluno, ROM, ao resolver as tarefas relativas à balança do dia 15/09/1999, representou sua solução da seguinte forma:




```
80 + x 47 + 25 + 100 + 52
```

ROM escreve o valor encontrado para o peso desconhecido à direita do símbolo x, além de não colocar o sinal de igual, comprometendo sua representação. Estava somente fazendo uma atividade de encontrar o valor numérico desconhecido, sem se preocupar com o significado de sua representação formal.

(solução de JOE)

```
c) 2x + 1 = 15
15           14  |2
-1            0   7
--
14           1x = 7
```

Este pode ser considerado como o registro do valor da incógnita mais generalizado apresentado nesta atividade, indicando até a correspondência entre 1x e x.

As discussões desta atividade, usuais nas aulas de Matemática que constituíram o trabalho de campo da pesquisa, foram propícias para retomar questões anteriores bem como para suscitar, pela primeira vez, a questão das equações equivalentes.

O aluno CLE sugeriu que a equação

d) $x + x + 4 = 12$

fosse escrita como

$2x + 4 = 12$

O professor disse que eram equações equivalentes. Parecia estar implícito nesta fala do professor que equações obtidas umas das outras, por cálculos algébricos, são equivalentes.

Novas tentativas de suscitar a utilização da equivalência em resolução de equações, ou seja, operações com a incógnita foram feitas quando da resolução conjunta, entre professor e alunos, de outras duas equações.

Solução conjunta de professor e alunos:

$2x + 3x = 20$

ATE e JOE: - Cada x vale 4 e acabou!

ATE explicou e o professor escreveu:

$5x = 20$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Solução conjunta de professor e alunos:

$2x + 3x + 2x = 14$

$7x = 14$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 7 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \qquad x = 2$$

Entretanto, estas tentativas não foram suficientes para os alunos utilizarem a equivalência de equações em suas resoluções, indicando até o registro errôneo da manipulação simbólica, como a solução de ROM:

```
j) 5x + 3x = 40
   5x + 3x =
    5    5
                  40 |_8
                       5
5x = 25 + 3x = 15
```

As expressões escritas por ROM não representam equações equivalentes, pois além de desconsiderar que uma equação tem apenas dois membros e uma igualdade, as expressões não são equivalentes.

Outro indício de que os alunos não se sentiam estimulados a trabalhar com equações equivalentes é a utilização de tal equivalência por uma única aluna, CLA, na solução de apenas duas das quatro equações propostas na primeira prova escrita.

(soluções de CLA)

```
a) 3x + 12 = 18                     18          6 |3
x = 2              3x = 6           -           0  2
      6 + 12 = 18                   12
                                    06


b) 2x + 3x = 120
x = 24                       120  |_5
5x = 120                     20    24
                              0
```

CLA escreveu as equações equivalentes depois de já ter indicado o valor da incógnita. Parece não as ter utilizado para a solução da equação.

Outra pista deste fato aparece na sua solução apresentada pela própria aluna para a equação d):

```
d) 2x + 10 = x + 14             _  14
    x = 4                          10
   2x + 10 = 18                    04
   4 + 14 = 18
```

A equação 2x + 10 = 18, na qual o valor da incógnita foi substituído em um dos membros, não é equivalente a 2x + 10 = x + 14, embora admitam o mesmo conjunto verdade. Outra evidência é que CLA não manteve este procedimento na resolução das questões da segunda prova.

Este significado de incógnita como um valor numérico a ser determinado e não passível de operação parece ter permanecido em todas as atividades relativas à equação que os alunos desenvolveram. Um outro exemplo é apresentado na primeira prova, quando a aluna VER encontrou valores diferentes para a incógnita x em uma das equações.

(solução de VER)

$2x + 3x = 12$
$x = 3 \quad x = 2$

Parece que VER inverteu as posições entre incógnita e seus coeficientes.

As análises realizadas apontam para a necessidade de utilizar a representação formal para que seja possível avançar nos estudos das equações, ou seja, representações icônicas não garantem a abstração e generalização necessárias para o aprendizado da Álgebra. Conforme nos aponta Granell (1995: 270), não ocorre que os alunos *primeiro desenhem e em seguida, por necessidade de abstração e convencionalização, passem a usar letras, números ou símbolos matemáticos,* ou seja, não há linearidade nesse caminho de abstração.

Durante o desenvolvimento das atividades, a incógnita foi representada por □, por x e por pesos desconhecidos nos pratos das balanças, porém sempre com o sentido de valor numérico a ser encontrado. Ao resolverem as balanças, os alunos substituíram o peso desconhecido por x somente quando solicitados pelo professor. Mas, nas soluções seguintes o x desapareceu! A incógnita não foi utilizada nas operações, ou seja, a elaboração de equações equivalentes não ocorreu, elas não foram utilizadas como procedimentos para resolver a equação.

Considerações finais

Esta pesquisa teve como objetivo principal analisar os processos de ensino/aprendizagem de equações por alunos jovens e adultos transitando em diferentes registros de representação apresentados pelo professor em sala de aula. Ela foi norteada pela seguinte questão:

O que acontece, em relação ao processo de aprendizagem de equações por jovens e adultos, quando o aluno transita por diferentes registros de representação?

Foi possível perceber que o trânsito pelas diferentes registros de representação permitiu que aos sentidos produzidos pelos alunos sobre o sinal de igual fosse acrescentado o significado de sinal de igual como relacional, indicativo de igualdade. Mas, nesta abordagem, o sentido de incógnita como valor numérico a ser determinado permaneceu.

Talvez, isso possa ter acontecido pelo fato do próprio professor priorizar o significado da igualdade e focalizar menos o significado da incógnita referindo-se a ela sempre como valor desconhecido. Há indícios explícitos na fala do professor na aula considerada por ele mesmo como síntese:

> *Professor: - Então, a equação, na verdade, ela é uma expressão matemática aí, que trabalha com a igualdade. (...) Trabalhamos com o valor desconhecido...*

Estas considerações parecem confirmar a afirmação de Ponte:

> *A condução do discurso na sala de aula é parte importante do papel do professor. Cabe-lhe colocar questões e propor tarefas que facilitam, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno. (...) A condução do discurso impõe ao professor constantes decisões – o que deve ser aprofundado, quando se deve introduzir notações matemáticas e linguagem matemática, quando deve fornecer informação, quando deve deixar os alunos lutarem com uma dada dificuldade, etc* (Ponte, 1997: 84).

Considerando que esta se constituiu em uma primeira abordagem de equações, poderíamos avaliar este fato como irrelevante. Entretanto, há necessidade de estar atento para que um estudo posterior que envolva o conceito de variável não seja comprometido pelo fato dos alunos não terem elaborado o significado de incógnita como operável. Acredito que deva estar entre os objetivos, além de valorizar estes sentidos, chegar ao conceito matemático historicamente estabelecido e socialmente aceito, ao significado. Talvez investigações que pudessem acompanhar estes alunos por um tempo maior indicassem com mais clareza caminhos didáticos para o ensino de Álgebra elementar.

Depois de responder à questão de investigação desta pesquisa, considero oportuno fazer alguns esclarecimentos sobre a dissertação.

O primeiro deles trata das limitações e restrições da principal teoria que serviu como referência para o meu estudo. Ao desenvolver sua teoria da representação semiótica, Duval não se referiu à situação real de sala de aula, o trabalho empírico de suas pesquisas foram desenvolvidos com grupos de alunos para os quais foram propostas tarefas, em ambientes não escolares. Além disso, a referência do autor (Duval, 1995) a diagramas como sistemas de representação não diz respeito aos desenhos – como de "balanças" utilizados pelo professor, nem às representações icônicas mencionadas por Granel (1995), são referentes aos diagramas tradicionais da Lógica.

Portanto, a aproximação desta teoria da sala de aula foi realizada por mim, em parceria com a orientadora da dissertação. Desta forma, o leitor não deve buscar nas idéias defendidas por Duval uma aplicação direta para as situações de sala de aula, mas sim fundamentos/conceitos da representação semiótica que tornem possíveis compreender e analisar o que é produzido em sala de aula.

Ainda sobre o referencial teórico, devo esclarecer que optei por não dedicar um capítulo da dissertação para apresentá-lo. A mesma opção se deu para a metodologia do estudo. Uma das motivações para tais escolhas foi a preocupação em tornar a leitura mais "fluida", procurando dialogar com a teoria quando fosse preciso e explicitar o caminho percorrido na medida em que aparecia no decorrer da elaboração da dissertação.

Considero importante reafirmar minha crença em ter como fonte de informação para a pesquisa a sala de aula, a fim de obter uma maior aproximação da realidade do processo de ensino/aprendizagem de Matemática. Esta crença foi determinante na escolha da metodologia da pesquisa.

Este estudo trouxe contribuições para a minha prática profissional enquanto docente. As reflexões sobre as atividades desenvolvidas naquela sala de aula, subsidiadas teoricamente, foram possibilitadas pelas leituras sobre o tema e pelas discussões com a orientadora. Desta forma, a minha prática pedagógica, sobretudo ao ensinar equações, está sendo reformulada. Espero ainda contribuir com as reflexões aqui apresentadas para o desenvolvimento de outros profissionais atuantes na Educação Matemática de jovens e adultos.

Acredito que esta pesquisa possa ter contribuído para mostrar alunos aprendendo Matemática, tendo suas especificidades de adultos consideradas e respeitadas no processo educacional. Isto foi evidenciado na entrevista com o diretor, no tratamento dado pelo professor através dos diálogos e das atividades realizadas. Creio também ter evidenciado neste estudo a prática de um profissional especializado, com formação matemática (e não polivalente, com formação em Pedagogia, Ciências Sociais, ou outras), propondo tarefas que, apesar das limitações, pudessem ajudar na compreensão dos principais conceitos de equação.

Desta forma, espero ter contribuído com a linha de pesquisa em Educação Matemática de Jovens e Adultos, uma vez que esta dissertação explora um tema pouco abordado, o ensino de Álgebra.

BIBLIOGRAFIA

ABREU, Dulce Maria Britto. **O Conhecimento numérico de jovens e adultos alfabetizandos na (re) criação do conceito de número**. Campinas : 1999. Dissert. (mestr.) – FE/UNICAMP.

ALEKSANDROV, A. D, et alii. **La Matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid : Alianza Editorial, 1985.

TOLEDO, Maria Elena R. O. Os Registros matemáticos dos adultos. **Alfabetização e Cidadania**, São Paulo, nº 6, p. 35-41, dez. 1997.

CARVALHO, Dione Lucchesi. **Conhecimento matemático na educação de jovens e adultos**. Santiago : UNESCO, 1997. p.65-76: O Conhecimento da prática e o conhecimento matemático escolar desde a perspectiva de sala de aula.

________. **A Interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar**. Campinas : 1995. Tese (dout.) - FE/UNICAMP.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo : Cortez, 1988.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation, compréhension et apprentissage. In: **Sémiosis et pensée humaine**. Suisse : Peter Lang, 1995. p. 15-37.

________. **Registres de reprèsentation sèmiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. In: ANNALES de didactique et de sciences cognitives. Strasbourg : ULP/IREM, 1993. v. 5, p.37-65.

DIAS, Carlos. Aos que não vão ler esta reportagem. **Educação**, São Paulo, v. 25, nº 210, p. 34-44, out. 1998.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Ângela. Algumas concepções de educação algébrica: fundamentos para repensar o ensino da matemática elementar. In: EPEM, 2. **Anais** Bauru, 1993.

FIORENTINI, Dario; SADER, Patrícia. **O Que as pesquisas brasileiras investigam sobre a realidade de sala de aula do ensino de matemática?** Campinas, 1994. Relatório de Conclusão de Iniciação Científica. FE/UNICAMP.

FIORENTINI, Dario et alii. Contribuições para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v..4, n° 10, p. 78-91, mar. 1993.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira. O Ensino de matemática e a educação básica de jovens e adultos. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v. 5, n° 27, p. 29-37, nov./dez. 1999.

FREITAS, Maria Virgínia de. **Jovens e adultos no ensino supletivo**: diversidade de experiências. São Paulo : 1995. Dissert. (mestr.) - FE/USP.

GRANELL, Carmen Gómez. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana, (orgs.). **Além da alfabetização**. São Paulo : Ática, 1995. Tradução: Stella Oliveira.

GUZMÁN, Ismenia. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 1, n° 1, p.5-22, 1998.

HOUSE, Peggy A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As Idéias da álgebra**. São Paulo : Atual, 1995.

INFANTE, Maria Izabel. O Analfabetismo funcional na América Latina: algumas características a partir de uma pesquisa regional. In: ENCONTRO LATINO-AMERICANO SOBRE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS, Olinda, 1994. **Anais.** Brasília: INEP, 1994. p.220-246.

JÓIA, Orlando. **Conhecimento matemático na educação de jovens e adultos.** Santiago: UNESCO, 1997. p. 27-34: Quatro perguntas sobre a educação matemática de jovens e adultos.

KIERAN, Carolyn. A Aprendizagem e o ensino da álgebra escolar. In: GROUWS, D.A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Quebec, 1992.

LINS, Rômulo Campos. O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**. Blumenau, 1994.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas : Papirus, 1997.

LOPES, Antonio José. **Matemática atual:** 7ª série. São Paulo : Atual, 1994.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo : EPU, 1986.

MILTON, Ken. Getting the teaching of algebra right. **The Australian Mathematics Teacher**, v. 44, nº 2, p. 5- 8, 1988.

__________. Fostering algebraic thinking in children. **The Australian Mathematics Teacher**, v. 45, nº 4, p.14-16, 1989.

MIGUEL, Antônio, et alii. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, v.3, nº 7, p.39-54, 1992.

MONTEIRO, Alexandrina. **O Ensino de matemática para adultos através da modelagem matemática.** Rio Claro : 1992. Dissert. (mest.) - IGCE/UNESP.

________. **Etnomatemática**: as possibilidades pedagógicas num curso de alfabetização para trabalhadores rurais. Campinas : 1998. Tese (dout.) - FE-UNICAMP.

NEVES, Paulo Sérgio de O. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra**. São Paulo : 1995. Dissert. (mest.) - FE-USP.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. O Inteligente e o "estudado": alfabetização, escolarização e competência entre adultos de baixa renda. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 13, nº 2, p.15-26, 1987.

PAIVA, V. P. **Educação popular e educação de adultos**: contribuição à história da educação brasileira. São Paulo : Loyola, 1973. p.165-306.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília : MEC, 1997.

________. **Proposta Curricular Nacional para EJA:** 1º segmento. Brasília : MEC, 2002.

PINTO, Renata Anastácio. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra:** o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula. Campinas : 1997. Dissert. (mestr.) - FE/UNICAMP.

PONTE, J. P. A Dinâmica da aula de Matemática. In: PONTE, J. P., (coord.). **Didática da Matemática**. Lisboa : Ministério da Educação, 1997. p. 71-95.

SHOECRAFT, Paul. "Equals" means "is the same as". **Arithmetic Teacher**, v. 36, nº 8, p. 36-40, 1989.

SIRGADO, Angel Pino. O Conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel na explicação do psiquismo humano. **Cadernos Cedes**, Campinas, nº 24, p.38- 51, 2000.

SOARES, José Leôncio Gomes. Processos de inclusão/exclusão na educação de jovens e adultos. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v.5, nº 30, p.25-34, 1999.

SOUSA, Eliane Reame; DINIZ, Maria I. S. Álgebra: das variáveis às equações e funções. **CAEM-IME/USP**, São Paulo, nº 5, 1996

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo : Atual, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo : Martins Fontes, 2000

WOERLE, Nilse H. **Números racionais no Ensino Fundamental**: múltiplas representações. São Paulo : 1999. Dissert. (mestr.) - PUC.