UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

"Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação, via Jogos de Regras: em Busca de Relações"

Karina Perez Guimarães

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Karina Perez Guimarães e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 28/08/1998

Assinatura:

CAMPINAS

1998

DADE BC
CHAMADA:
T/UNICAMP
G947a
Ex.
MBO BC/35828
OC. 395/98
C D X
EÇO R$ 11,00
TA 14/12/98
CPD
CM-00118565-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

G947a

Guimarães, Karina Perez.
Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação, via jogos de regras : em busca de relações / Karina Perez Guimarães. -- Campinas, SP : [s.n.], 1998.

Orientador : Rosely Palermo Brenelli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Jogos - Regras e prática. 2. Abstração. 3. *Noção de multiplicação. I. Brenelli, Rosely Palermo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Psicologia Educacional, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da **Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli.**

Comissão Julgadora:

Márcia Regina F. de Brito

Aos meus pais" Morvan" e "Isabel"
que, além de amor, paciência e dedicação,
privilegiaram-me com o maior dos presentes:
a oportunidade de estudar...

Aos meus avós "Vó Maria" e "Vô Manoel".
(In memoriam)

A todas as crianças e professores,
razão principal deste estudo.

Das utopias

"Se as coisas são inatingíveis...ora
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos se não fora
A mágica presença das estrelas."

MÁRIO QUINTANA

AGRADECIMENTOS

Tecendo a manhã

Um galo sozinho não tece uma manhã;
Ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe esse grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito que um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galos,
para que a manhã desde uma teia tênue,
se vá tecendo, entre todos os galos.

2

E se encorpando em tela, entre todos
se erguendo tenda, onde entrem todos,
se entretendendo para todos, no toldo
(a manhã) que plana livre de armação.
A manhã, toldo de um tecido tão aéreo
que, tecido, se eleva por si: luz balão

João Cabral de Mello Neto

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, minha grande estima e sinceros agradecimentos a todas elas, em especial:

À querida **Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli,** pela competência, dedicação, carinho e amizade demonstrados, não só na orientação deste trabalho, mas desde os tempos da minha formação em Pedagogia.

Aos meus pais, **Morvan e Isabel,** às minhas irmãs **Érika e Cláudia,** e à tia **Joana,** pelo incentivo e carinho e por entenderem minhas ausências e minhas decisões.

Aos professores **Dr. Dirceu da Silva** e **Drª Márcia Regina F. de Britto**, pelas valiosas sugestões e contribuições ao trabalho no exame de qualificação.

Aos professores da Faculdade de Educação, pela inestimável contribuição durante minha formação acadêmica, em especial: **Drª. Orly Z. Mantovani de Assis, Dr. Sérgio Lorenzatto, Drª. Helena C. L. de Freitas, Dr. Fermino F. Sisto, Drª. Maria Teresa Coelho de Souza, Drª. Olinda Noronha, Dr. Sérgio Goldenberg, Dr. Luiz Carlos de Freitas** e **Dr. Ezequiel Theodoro da Silva.**

Ao professor **Dr. Charles Richard Lyndaker** que, percebendo meu grande interesse pela área de pesquisa na graduação, incentivou e orientou com muita segurança e dedicação meu trabalho de iniciação científica.

À amiga **Prof.a Drª. Maria Dalva da Silva Pagotto** que, apesar do pouco tempo de convivência, tem demonstrado muita amizade, carinho e incentivo, os quais muito me ajudaram na finalização deste estudo.

Ao amigo **Prof. Dr. Raul Aragão Martins,** pela amizade, atenção e sugestões que muito auxiliaram na organização final da pesquisa.

À amiga **Profª. Lenise M. R. Ortega,** pela amizade, carinho e sugestões, imprescindíveis na parte final deste trabalho.

Às amigas **Profª. Maria José Germano da Silva** e **Profª. Neide A. Nery Silvério,** que contribuem desde a pesquisa de iniciação científica, apoiando-me com muita competência e experiência, sempre com muito carinho e otimismo.

Às amigas **Gabriela, Lucimara, Eliane e Sandra,** pela amizade, apoio e carinho desde os tempos de graduação e que até hoje, mesmo distantes, se fazem presentes.

Às amigas **Érica, Lília, Adriana, Maria Eugênia, Juliana** e **Cristiane,** pelo incentivo, paciência, cuidado e carinho em todas as horas.

À querida amiga **Ana Rosa** que, ora com um olhar, ora com um sorriso, ora com uma lágrima, ou mesmo com um simples gesto, mas sempre com muito otimismo e carinho, me incentivou a continuar todas as vezes em que pensei desistir.

Às crianças muito especiais **Harissa, Bruna, Cibele, Pedro José** e à **Cíntia,** que já cresceu, por sempre colaborarem com muita alegria e entusiasmo para a realização de meus trabalhos práticos desde a faculdade.

A todos os alunos, professores, pais, funcionários e amigos da **Escola Ativa,** em especial às "mestras da prática"–**Silvia, Teresinha** e **Valéria**– que acreditaram na minha capacidade, incentivando-me e muito me ensinando no pouco, mas gratificante, tempo em que estive por lá.

À escola cooperativa Dr. Zerbini-Coopen, em especial à professora **Mirelle e seus alunos,** que participaram da pesquisa.

Aos funcionários da Pós-Graduação da UNICAMP pelo responsabilidade, atenção e carinho dedicados a mim neste período, em especial à **Marina** à **Nadir.**

Aos amigos **Mauro e Silvia,** pela imensa contribuição na confecção dos materiais e jogos utilizados na pesquisa.

À **Lógica, brinquedos educativos,** pela responsabilidade e competência demonstradas na parte da bibliografia e dos jogos, em especial a **Lourdes, Rosana, Ana Silvia** e **Érica.**

Ao **CNPq,** pelo apoio financeiro.

A **Deus,** por sempre iluminar meus caminhos.

Resumo

Os objetivos da presente pesquisa consistiram em verificar em que medida uma intervenção pedagógica, via jogos de regras, seria favorável à construção da noção de multiplicação em crianças e buscar relações entre abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação.

Foram estudados 17 sujeitos que compunham uma classe de terceira série do ensino fundamental de uma escola cooperativa em São José do Rio Preto.

Aplicou-se o pré-teste individualmente nos sujeitos, com o objetivo de avaliar o nível de abstração reflexiva e de construção da noção de multiplicação e divisão aritméticas. O pós-teste, composto pelas mesmas provas, consistiu em verificar a evolução dos sujeitos após serem submetidos a uma intervenção com jogos de regras realizada pelo professor e experimentador.

O pré-teste e o pós-teste foram constituídos pelas provas "Abstração Reflexiva: construção de múltiplos comuns" e "Multiplicação e Divisão Aritméticas." Foi incluído somente no pré-teste uma prova de Problemas e Operações de Multiplicação para verificar se estes conteúdos escolares eram conhecidos pelos sujeitos.

Organizaram-se seis sessões de intervenção com os jogos Pega-varetas e Argolas, os quais, previamente analisados, permitiram destacar situações-problema que envolviam multiplicação.

Durante a intervenção, os sujeitos foram organizados em quatro grupos escolhidos aleatoriamente.

A análise qualitativa dos dados permitiu verificar que os sujeitos apresentavam domínio dos conteúdos escolares que envolviam multiplicação. No que concerne às relações entre a construção da noção de multiplicação e abstração reflexiva, o nível IIA de abstração permite alcançar níveis mais complexos quanto a construção da multiplicação. Entretanto, esta última apresenta maior incidência nos sujeitos que apresentam níveis IIB e III na prova de Abstração Reflexiva.

Observou-se que dos 17 sujeitos estudados, 13 apresentaram evolução em pelo menos um dos aspectos estudados, seja na abstração reflexiva, seja na construção da noção de multiplicação.

Pode-se dizer, de acordo com os resultados obtidos, que a intervenção via jogos permitiu expressivas evoluções nos sujeitos quanto à construção da multiplicação, por ter engendrado perturbações e regulações compensatórias e desencadeando os processos de equilibração.

Abstract

The main aims of this work is verify how much an educational intervention through games would be useful to the construction of the multiplication notion in children and the establishment of relations between the reflexive abstraction and the construction of the multiplication notion.

Seventeen subjects were studied, they took part of a third grade elementary and cooperative school in São José do Rio Preto.

A pre-test was applied individually with the subjects for evaluating the reflexive abstraction level and the multiplication and division notions . A post-test composed by the same experiments verified the subjects' evaluation after a game intervention performed by the teacher and the researcher.

Both tests were constituted by reflexive abstraction: construction of common multiples and the arithmetic multiplication and division experiments. At the pre-test was included some solving problems and multiplication exercises in order to verify if these matters were known by the subjects.

Six intervention sections were performed using "Pega-varetas" and "Argolas" games which allowed to put in evidence problematic situations about multiplication.

During the intervention, the subjects were organized in four groups. These groups were chosen at random.

The data qualitative analysis allowed to verify that the subjects presented knowledge about the school contents that involved multiplication. Concerning to the relations between the construction of the multiplication notion and the reflexive abstraction, the IIA abstraction level reaches more complex levels about the multiplication construction. However, the latest one presents the biggest incidence at the students that presented levels IIB and III at the reflexive abstraction test.

From seventeen subjects studied, thirteen of them presented evolution in at least one of the studied aspects either the reflexive abstraction or the building of multiplication notion.

According to the results we may say that the intervention trough games allowed significant evolution at the multiplication construction. It performed compensatory disturbance and regulation contributing to the balance processes.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Lista de Figuras

Introdução

"A lua dilui-se lentamente
e um sol menino espreguiça
os braços translúcidos...
Frescos murmúrios de águas puras
que se abandonam aos declives.
Um par de asas dança na
atmosfera rosada.
Silêncio, meus amigos,
o dia vai nascer."

Clarice Lispector

As dificuldades que emergem do sistema educacional, muitas vezes caracterizadas pela insuficiente formação dos professores, a ineficácia da escola, as dificuldades de aprendizagem dos alunos, a desvinculação dos conteúdos da realidade, suscitam um grande desafio para os pesquisadores e educadores da área. Muito se tem estudado, analisado e pesquisado, buscando entender cada vez mais esta realidade e tentar superá-la.

Muitos autores (Kamii e DeVries, 1980/1990; Brenelli, 1986/1993/1996; Chateau, 1954/1987; Mantovanni de Assis, 1976/1979; Macedo, 1993; Petty e Passos, 1996, dentre outros) destacam em seus trabalhos a importância de se utilizar jogos de regras na escola como um meio de favorecer o desenvolvimento e a aprendizagem de crianças.

Segundo Vinh-Bang (apud Brenelli, 1996), há carências no processo pedagógico que necessitam ser remediadas quando os resultados escolares se apresentam insuficientes. O autor destaca a importância de uma intervenção *"a qual supõe a tomada de posição, a intenção de fazer com que o professor, o pedagogo ou o psicopedagogo, nela desempenhem um papel ativo"* (p.15). Esta intervenção poderia ocorrer no nível individual do aluno, no nível coletivo da classe no nível da escola.

Surge assim a idéia de realizar uma intervenção pedagógica em sala de aula com jogos, no nível coletivo da classe. Um trabalho desta natureza, no dizer de Souza (1996), procura:

> apresentar às crianças novos instrumentos, recursos que busquem auxiliá-las a pensar, para comparar as informações trazidas por instrumentos diferentes e planejar modos de utilização daqueles mais eficazes. (p. 125)

O papel da intervenção pedagógica é muito importante, segundo Piaget:

> ao tentar ensinar a uma criança uma determinada regra ou princípio geral deveríamos acompanhar tanto quanto possível o processo evolutivo de interiorização das ações. Isto significa que a criança deveria primeiramente trabalhar com o princípio num contexto o mais concreto e orientado possível para a ação; deveria poder manipular objetos por si mesma e 'ver' o princípio em funcionamento através de suas próprias ações. Assim, o princípio tornar-se-ia progressivamente mais interiorizado e esquemático, através da redução dos apoios perceptuais e motores, isto é, passando-se dos objetos para os símbolos dos objetos, da ação motora para a fala, etc. (apud Flavell, 1992, p. 83)

Para o presente estudo, escolheram-se dois jogos: Pega-varetas e Argolas, com o propósito de auxiliar crianças que freqüentam a terceira série do ensino fundamental na construção da noção de multiplicação e verificar se ocorrem avanços nos níveis de abstração reflexiva, uma vez que tais processos são responsáveis pela construção do conhecimento lógico-matemático.

Os subsídios teóricos que norteiam este trabalho encontram-se pautados na teoria de Piaget que compreende a aprendizagem subordinada ao desenvolvimento, sendo este último explicado por um processo de equilibração majorante, no qual o sujeito reage às perturbações por meio de regulações contínuas que melhoram as estruturas ou esquemas anteriores.

Outros aspectos importantes da teoria piagetiana, a serem destacados no presente trabalho, abordam os processos de abstração reflexiva e tomada de consciência que explicam a construção do conhecimento lógico-matemático.

Para o estudo da abstração reflexiva, escolheu-se um experimento de Piaget et al (1995) a respeito da construção de múltiplos comuns. O experimento engloba três situações, sendo que a terceira situação foi suprimida devido à idade das crianças. Na situação I, o problema consiste em montar duas coleções de fichas que tenham a mesma quantidade, pegando de duas em duas as fichas vermelhas e de três em três as verdes. A situação II consiste em montar duas torres de mesma altura, sendo que as peças azuis valem duas unidades, e as vermelhas, três unidades.

A construção de novas estratégias durante o jogo, por envolver conceituação, torna imprescindível a tomada de consciência. Em uma intervenção, por meio de jogos, é possível que o sujeito constate seus erros ou lacunas, desencadeando assim este processo de tomada de consciência.

Alguns aspectos sobre o ensino de Matemática e a multiplicação são considerados por serem temas de interesse neste trabalho.

O papel do jogo na escola e sua importância na área da Matemática são destacados, visto que o jogo é um meio de se tornar o ensino mais prazeroso e mais próximo da criança (Brenelli, 1986/1993; Macedo, 1993; Kamii e DeVries, 1980/1990, dentre outros), podendo esta compreender as noções matemáticas, em especial a noção de multiplicação, que foi favorecida pelos jogos escolhidos para o presente estudo.

Revisão Bibliográfica

"*O que sabemos é uma gota.*
O que ignoramos é um oceano."
Isaac Newton

A Matemática na escola

A escola preocupa-se em transmitir o maior número possível de conhecimentos, sem dar importância para o esquecimento posterior dos mesmos, e sim para o fato de tê-los visto um dia. Com isso, não se está tratando de qualidade do que é ensinado, mas sim, de quantidades.

O meio em que o homem vive deve ser considerado em toda ação educativa, com o propósito de adotar métodos e diretrizes que torne um sujeito atuante, ao invés de um mero objeto. A Educação deve permitir ao homem construir-se de forma autônoma, transformando o mundo e estabelecendo relações de reciprocidade com os outros homens. Piaget (1971) afirma que a Educação tem como objetivo:

> formar indivíduos capazes de autonomia intelectual e moral e respeitadores desta autonomia em outrem, em decorrência precisamente da regra de reciprocidade que a torna legítima para eles mesmos. (p.61)

O Direito à Educação não deve ser entendido somente como o direito de freqüentar escolas, mas sim como *"o direito de encontrar nessas escolas tudo aquilo que seja necessário à construção de um raciocínio pronto e de uma consciência moral desperta"* (ibid, p.61).

Piaget, em sua obra *Psicologia e Pedagogia* (1970), destaca que uma Educação que:

> prepara para a vida não consiste em substituir os esforços espontâneos pelos esforços feitos com ajuda, porque se a vida implica uma parte não negligenciável de trabalhos impostos ao lado de iniciativas mais livres, as disciplinas necessárias permanecem mais eficazes quando livremente aceitas sem este acordo interior. Os métodos ativos não levam, de forma alguma, a um individualismo anárquico, mas, principalmente quando se trata de uma combinação de trabalho individual e do trabalho por equipes, a uma educação da autodisciplina e do esforço voluntário. (p.75)

Os processos de ensino e de aprendizagem precisam ter caráter de abertura, possibilitando indagações, descobertas e, principalmente, o diálogo entre professor e aluno, no qual o professor não deve impor o seu próprio ponto de vista. Este trabalho diferenciado do professor implica uma boa formação, caso contrário não terá

> conhecimento suficiente da psicologia da criança" e pode "compreender mal as condutas espontâneas dos alunos e não chega a aproveitar-se do que considera insignificante e simples perda de tempo. (ibid, p.75)

Destaca Piaget (1989) que:

> Há, portanto um conjunto de realidades em geral pouco conhecidas do educador, mas no qual, com um melhor conhecimento psicológico, este educador poderá tirar grande proveito que facilitaria sua tarefa ao invés de complicá-la e que, sobretudo, favoreceria a eclosão de vocações criativas no lugar de fazer dos alunos simples receptores conformistas. (p.9)

Em relação à prática pedagógica, Piaget (1971) já levantava a questão da preparação dos professores, já que está intimamente ligada à organização dos programas e teorias sobre o que pode ser realizado. Piaget sugere uma formação universitária completa para que os professores resolvam o problema de sua valorização, formação moral e intelectual. Além disso, a Universidade deve contar com a união do ensino e da pesquisa, sendo as pesquisas realizadas por grupos de especialistas.

Dentre os fatores que intervêm no desenvolvimento cognitivo, as transmissões sociais e educativas constituem um deles. Piaget (ibid) cita o exemplo da aquisição da linguagem, sendo a transmissão social exterior garantia de sua continuidade. A lógica e a moral seguem o mesmo caminho. Neste sentido, Piaget destaca:

> A educação é, por conseguinte, não apenas uma formação, mas uma condição formadora necessária ao próprio desenvolvimento natural. Proclamar que toda pessoa humana tem o direito à educação não é pois unicamente sugerir, tal como o supõe a psicologia individualista tributária do senso comum, que todo indivíduo, garantido por sua natureza psicobiológica ao atingir um nível de desenvolvimento já elevado, possui além disso o direito de receber da sociedade a iniciação às tradições culturais e morais; é pelo contrário e muito mais profundamente, afirmar que o indivíduo não poderia adquirir suas estruturas mentais mais essenciais sem uma contribuição exterior, a exigir um certo meio social de formação, e que em todos os níveis (desde os mais elementares até os mais altos) o fator social ou educativo constitui uma condição do desenvolvimento. (p.39)

Neste sentido Kamii e DeVries (1990) levantam três objetivos para a Educação que visam a incentivar o processo construtivo, a seguir explicitados:

> 1) Em relação aos adultos, gostaríamos que as crianças desenvolvessem sua autonomia através de relações seguras nas quais o poder do adulto seja reduzido ao máximo possível. (p.20)
>
> 2) Em relação aos colegas, gostaríamos que as crianças desenvolvessem a capacidade de descentrar e coordenar diferentes pontos de vista. (p.24)
>
> 3) Em relação à aprendizagem, gostaríamos que as crianças fossem alertas, curiosas, críticas e confiantes na sua habilidade de resolver questões e de dizer o que honestamente pensam. Gostaríamos também que tivessem iniciativa, levantassem idéias, problemas e questões interessantes e colocassem as coisas em relação umas com as outras. (p.26)

Segundo as autoras:

> as interações com outras crianças são importantes por duas razões. Primeiro, porque o ponto de vista de uma outra criança é mais similar à visão de uma criança que o de um adulto. Segundo, porque uma grande parte da vida social da criança se passa com seus colegas e não com adultos. (ibid, p.25)

É neste sentido que o professor não deve dar as respostas prontas e que fogem da compreensão da criança, e sim permitir que se sintam confiantes para formular questões, encontrar soluções, construindo assim o conhecimento.

Piaget (1971) afirma que:

> conquistar por si mesmo um certo saber, com a realização de pesquisas livres, e por meio de um esforço espontâneo, levará a retê-lo muito mais, isso possibilitará sobretudo ao aluno a aquisição de um método que lhe será útil por toda a vida e aumentará permanentemente a sua curiosidade, sem o risco de estancá-lo, quando mais não seja, ao invés de deixar que a memória prevaleça sobre o raciocínio, ou submeter a inteligência a exercícios impostos de fora, aprenderá ele a fazer por si mesmo funcionar a sua razão e construirá livremente suas próprias noções. (p.62)

A hipótese de Piaget (ibid) é que as supostas aptidões diferenciadas estão centradas na capacidade do aluno de adaptação ao tipo de ensino que lhe é fornecido. Sendo assim, muitos fracassos escolares, destacando-se a Matemática, devem-se à passagem rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico) (p.17).

O autor (1973) acredita que a criança cria sozinha, de forma independente e espontânea, uma parte dos conceitos matemáticos, sendo que

> quando os adultos tentam impor, prematuramente, os conceitos matemáticos a uma criança, sua aprendizagem é apenas verbal; a verdadeira compreensão que tem deles só ocorre com o crescimento mental. (p. 320)

A Matemática elementar, área de interesse nesta pesquisa, é a área que apresenta maior número de dificuldades, são poucas as crianças que conseguem compreendê-la. Piaget (1971) chama a atenção para este fato:

> Chega-se por vezes a considerar a compreensão da Matemática elementar como o indício de uma aptidão especial, dessa ' bossa' para a Matemática cuja presença ou ausência se presumem possa então explicar os sucessos e os fracassos, sem que se procure investigar se estes últimos não poderiam talvez decorrer do próprio método clássico de ensino. (p.63)

Ao professor não basta somente ter conhecimentos da Matemática para conseguir ensiná-la, mas sim conhecer o desenvolvimento psicológico da inteligência matemática espontânea de seus alunos. Outro aspecto destacado por Piaget (1989) é a questão da linguagem do professor, que precisa se colocar na perspectiva concreta de seus alunos:

> o problema prático dificil a resolver é de enxertar as noções do tipo geral que o professor conhece na sua própria linguagem, nos casos particulares dessas

> mesmas noções, construídas e utilizadas pelas crianças, mas sem que elas sejam ainda para eles objeto de reflexão, nem fontes de generalização. (p.6)

Atento a este fato, independente do nível de desenvolvimento dos seus alunos, o professor pode seguir três princípios psicopedagógicos, como afirma Piaget (ibid):

> 1) a compreensão real de uma noção ou de uma teoria implica em sua reinvenção pelo sujeito;
> 2) em todos os níveis, o aluno é capaz de 'fazer' e de compreender emoções 'antes' que ele possa exprimi-los verbalmente, sendo os processos de tomada de consciência posteriores;
> 3) partir da representação ou modelos correspondente à lógica 'natural' do nível considerado dos alunos, e reservar a formalização para mais tarde, a título de coroamento e de sistematização das noções já adquiridas. (p.7-8)

Piaget (1971) levanta quatro pontos relevantes para a compreensão da Matemática:

1) Quando as crianças se deparam com problemas do seu interesse, partindo de uma situação concreta, sem tomarem conhecimento que são de Matemática, apresentam melhor compreensão, de forma inventiva. Piaget (ibid) ressalta:

> todo aluno normal é capaz de um bom raciocínio matemático desde que se apele para a sua atividade e se consiga assim remover as inibições afetivas que lhe conferem com bastante freqüência um sentimento de inferioridade nas aulas que versam sobre essa matéria. (p.65)

2) A lógica não está inerente à criança, é construída aos poucos por meio de suas atividades. As questões numéricas não têm significados antes da compreensão lógica.

3) As noções lógicas e matemáticas passam por um desenvolvimento real e espontâneo, independente dos conhecimentos verbais adquiridos na escola ou na família. Piaget destaca que deve

> ser realizado todo um ajustamento dos métodos didáticos aos dados psicológicos do desenvolvimento real, e pode-se aguardar, sob esse ponto de vista, uma considerável intensificação dos apelos à atividade autônoma da criança. (p.67)

4) A linguagem matemática precisa partir da ação real e concreta, somente assim pode-se chegar à abstração.

Muitos autores têm estudado as relações entre a teoria de Piaget e a Educação Matemática a fim de entenderem e propor possíveis caminhos para a dificuldade de professores e alunos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Mantovani de Assis (1976), preocupada com o fato de alunos mostrarem ter esquecido conceitos elementares que pareciam já ter assimilado, fez um estudo avaliando o desenvolvimento intelectual de crianças pré-escolares quando submetidas ao processo de "solicitação do meio".

A fim de comprovar a hipótese de que as crianças submetidas a este processo atingem o estágio operatório concreto com 6-7 anos de idade média nos países mais adiantados, selecionou um Grupo Experimental (G.E.) com 183 sujeitos e um Grupo Controle (G.C.) com 188 sujeitos freqüentadores de pré-escola. Verificou que, no G.E., 80,87% dos sujeitos atingiram o estágio operatório concreto, ao passo que no G.C. nenhum sujeito atingiu este estágio.

O processo de "solicitação do meio" foi criado por Mantovani de Assis (1976). Trata-se de um

> processo sistemático que consiste em colocar a criança em situações-problema que a conduzam a manipular um conjunto de objetos que, pela sua

> natureza (forma, tamanho e cor), deverão determinar a sua capacidade crescente de: a) conhecer suas propriedades físicas; b) estabelecer relações entre esses objetos, reuni-los em classe, dissociá-los (concluir, por exemplo, que uma bola amarela pertence ao mesmo tempo ao conjunto de objetos amarelos e ao conjunto das bolas); c) ordená-los, entendendo que, se um elemento 'A' de uma série é maior do que 'B' e 'B' é maior do que 'C', logo, 'A' é maior do que 'C'. Essas noções implicam a conservação da substância, a classificação e a seriação operatórias. (p.51)

As professoras foram preparadas no sentido de criarem situações para que as crianças pudessem explorar suas idéias e agir sobre os objetos. Sendo assim, este processo permitia à criança a passagem da ação à operação, já que partia da ação sobre os objetos visando a um "saber fazer" que, por meio da tomada de consciência, atinge o compreender[1].

Em se tratando da relação entre a aprendizagem matemática e o nível operatório, Moro (1983) fez um estudo analisando a construção do pensamento lógico pela criança. Foram estudados 25 sujeitos de primeira série do ensino fundamental. As provas referentes às noções de conservação de quantidades numéricas, quantificação de inclusão e seriação criadas por Piaget foram utilizadas, já que, segundo ele, são necessárias para a construção da idéia de número pela criança. Constatou-se que, segundo a teoria piagetiana, os sujeitos não estão preparados para iniciarem o cálculo numérico, visto que nas provas mostraram estar em situações evolutivas diferentes para cada noção.

---

[1] Inspirada em suas pesquisas sobre o desenvolvimento intelectual de crianças pré-escolares, Mantovani de Assis (1983) criou um *Programa de Educação Pré-Escolar-PROEPRE.* O PROEPRE é uma proposta de trabalho com fundamentação na teoria piagetiana, que visa ao desenvolvimento intelectual, social e afetivo da criança, tendo como base a atividade espontânea da criança e a criação de situações-problema que permitam a construção de operações concretas. Atualmente este programa tem sido ampliado para as séries do ensino fundamental e desenvolve-se por todo o País, sendo conhecido internacionalmente. O sucesso e a propagação das idéias de Piaget no Brasil devem-se, em grande parte, à professora Mantovani de Assis, pioneira em seus estudos e aplicação prática da teoria piagetiana. Todo este trabalho de pesquisa continua sendo desenvolvido pela professora e seus colaboradores no Laboratório de Psicologia Genética da Faculdade de Educação da UNICAMP.

Assim como Moro (ibid), Silva (1983) constatou em sua pesquisa que a maioria das crianças ingressantes no ensino fundamental não desenvolveram as estruturas mentais que lhes permitem lidar com as operações aritméticas. Para isso utilizou, em uma amostra de 100 crianças com idades entre 6 e 8 anos, testes de enumeração, seriação e conservação de número.

É necessário valorizar a pesquisa espontânea da criança ou do adolescente, permitindo que a verdade, ao invés de ser puramente transmitida, possa ser reinventada ou reconstruída pelo aluno. Isto não quer dizer que o professor perde suas funções, deixando os alunos livres para trabalhar, mas sim que o educador crie situações-problema úteis para a criança e proporcione reflexões. O professor tem o papel de estimulador, deixando de ser mero transmissor de coisas prontas. Para isso, o educador precisa manter-se bem informado quanto a sua especialidade, e ao desenvolvimento psicológico da inteligência da criança ou do adolescente.

Neste sentido, Folsom (1975), em seu estudo sobre o significado das operações, apontou a existência de um número muito grande de operações, símbolos e conceitos matemáticos introduzidos na escola fundamental. Para que a criança possa realmente compreender os conhecimentos da Matemática, é necessário desenvolver as representações por meio de experiências, atividades, jogos, problemas, antes de se começar a trabalhar com os símbolos (ibid).

Também Busquets e Grau (s/d) afirmam que:

> O aluno deve construir por si mesmo, tanto em nível conceitual como em nível de representação gráfica, as noções aritméticas, e nossa função deve ser a de propor situações adequadas que lhe permitam avançar em cada momento do processo. (p.4)

Neste aspecto insere-se a questão do erro. Segundo Piaget, um erro consciente é mais importante que um acerto casual, uma vez que, para sua superação, intervêm os processos de equilibração (apud, Brenelli, 1993).

Piaget acentua a importância da consciência do erro no processo de construção do conhecimento. Neste sentido, Moreno (1987) afirma que

> a criança tem o direito de equivocar-se porque os erros são necessários na construção intelectual, são tentativas de explicação e sem eles não se sabe o que não tem que fazer. (p.6)

O autor (ibid) afirma que a criança, diante do seu confronto com o problema, precisa sentir necessidade de chegar a sua solução antes que os adultos solucionem por ela. Sendo assim,

> pode criar, na matemática, suas próprias formas de operar já nos primeiros anos, partindo de ações de reunir e separar, de por em correspondência múltipla e de repartir, e depois de fazê-lo com objetos pode inventar formas de representá-lo graficamente e pode chegar a descobrir sistemas de cálculo. (p.7)

Estando ciente do papel do erro e das experiências para a construção do conhecimento, o educador pode propor situações em que as crianças possam verificar suas hipóteses, exercitando seu raciocínio em casos diferentes, sem substituir, entretanto sua verdade (Moreno, 1987).

Segundo Piaget (1971), a criança passa por fases que são caracterizadas por idéias que mais tarde serão consideradas erradas, mas que são necessárias para se chegar a soluções corretas. Isto pode ser conseguido pela combinação entre o raciocínio dedutivo e os dados da experiência.

Sastre e Moreno (1980) mostraram em seus estudos que a escola trata a aprendizagem da Matemática como sendo mera transmissão de um professor, sem se preocupar se existe um desenvolvimento intelectual adequado. Analisando crianças de primeira série, verificaram que a aritmética não pode ser compreendida, limitando-se à memorização sem compreensão. Esta situação faz com que as crianças não relacionem o fazer escolar com os problemas cotidianos, reduzindo as operações aritméticas à reprodução gráfica conforme solicitação da escola.

Rangel (1992) fez um estudo com crianças de primeira série, buscando proposições metodológicas e curriculares que possam respeitar os mecanismos de aprendizagem espontânea da Matemática e favorecer o desenvolvimento cognitivo e moral dos sujeitos.

O professor conhece pouco a respeito do desenvolvimento cognitivo e moral, apresentando também pouca compreensão do conhecimento matemático. O ensino da Matemática é tratado como se fosse um conhecimento social arbitrário, podendo ser transmitido *"pela apresentação de informações ao aluno com ilustrações e demonstrações dadas pelo professor, onde os erros são corrigidos e as respostas certas reforçadas"* (ibid, p.17).

O ensino da Matemática freqüentemente se volta para a aprendizagem superficial de regras e da linguagem de sinais operatórios, o que mostra maior preocupação com um saber fazer com êxito os exercícios sem se preocupar com a compreensão dos mesmos. Contrário a este sentido, a autora ressalta o papel do professor:

> os professores de matemática precisam mudar o foco de suas preocupações. Isto transcenderia o 'ser professor' para o 'ser educador matemático'. Esta dimensão através da ação que se efetiva nas trocas interindividuais, garantiria a construção, pelo sujeito, das operações da lógica simultaneamente à reinvenção do próprio conhecimento matemático. (ibid, p.57)

A Educação Matemática deve propiciar a ação reflexiva do sujeito nas trocas interindividuais e com o mundo. Rangel (ibid) destaca que:

> a educação matemática implica educação para o 'conhecimento', em superação à educação para o aprender a fazer; compromete-se, pois, com a

formação de sujeitos autônomos que valorizam as relações de solidariedade em oposição ao individualismo. (p.57-8)

A ocorrência e as atitudes em relação à Matemática foram estudadas por Gonçalez (1995). Procurou-se verificar a estabilidade destas atitudes pelos anos de profissão e nas séries iniciais e finais do curso de Magistério, investigando também os motivos que levaram aquelas pessoas a optarem pelo Magistério.

O autor levantou algumas questões que merecem destaque:

1) As atitudes dos professores em exercício e dos futuros professores em relação à Matemática tendem a ser negativas.

2) As pessoas optam pelo Magistério por não gostarem de Matemática.

3) Os grupos e subgrupos diferenciam-se com relação às atitudes em relação à Matemática.

Os sujeitos da pesquisa foram 295 alunos, com idades entre 18 e 20 anos, do curso de Magistério, e 203 professores do ensino fundamental. Os instrumentos utilizados foram uma adaptação da escala de atitudes com relação à Matemática e um questionário informativo. A escala é composta por 22 afirmações a respeito das razões pelas quais as pessoas gostam ou não de Matemática. O questionário foi utilizado para obtenção de dados complementares, na tentativa de encontrar tendências em relação à Matemática, sendo o questionário dos alunos diferente do questionário dos professores.

O autor concluiu que os professores possuem atitudes positivas, enquanto os alunos apresentam mais atitudes negativas, sendo poucas as alterações de atitudes nos professores com mais experiência. A opção pelo Magistério deve-se ao fato de existir uma predisposição das pessoas em lidar com as crianças.

Dentre os conteúdos ensinados na escola, a Matemática é a área que apresenta mais dificuldades. Em sua pesquisa, Souza (1988) mostrou este fato, destacando que os procedimentos dos professores não favorecem a formação de conceitos matemáticos. Concluiu que a forma como a Matemática é trabalhada nas escolas não apresenta relação com a vida da criança, já que se preocupa com memorização, treino e repetição. Por meio da perspectiva piagetiana, a autora analisou o ensino de Matemática na pré-escola, propondo algumas alternativas.

Neste sentido, o trabalho de Carraher et al (1982) chama a atenção para o fato de o desempenho dos alunos na escola ser inferior ao desempenho fora dela. Sendo assim, fez um estudo exploratório com cinco crianças e adolescentes com idades entre 9 e 15 anos, com escolaridade entre terceira e oitava séries do primeiro grau.

Para isso, aplica um teste informal e um teste formal. O teste informal constou de problemas verbais de Matemática que partiam do contexto em que viviam as crianças (transações comerciais). O experimentador propunha questões a fim de esclarecer os processos utilizados pelos sujeitos para chegarem às respostas. O teste formal englobou problemas relativos às operações aritméticas representadas no papel descontextualizado das experiências vividas pela amostra de sujeitos e problemas sob a forma escolar. Os resultados mostraram que há uma grande discrepância entre a performance nos diferentes contextos Os autores destacam que os sujeitos *"demonstram utilizar métodos de resolução de problemas que, embora totalmente corretos, não são aproveitados pela escola"* (p.85).

O trabalho de Losito (1996) investigou o desempenho de alunos no processo da construção operacional dos números naturais, suas implicações e relações referentes ao desenvolvimento cognitivo. Para isso foi estudado o desempenho de 36 alunos de quarta série ensino fundamental na solução de tarefas matemáticas, sendo 18 crianças pertencentes a uma escola com proposta construtivista e 18 crianças pertencentes a uma escola de proposta convencional.

O autor preocupou-se também em comparar os procedimentos usados pelos alunos da escola de orientação construtivista com os procedimentos dos alunos da outra escola, a fim de esclarecer as possibilidades da opção pelo construtivismo no ensino fundamental.

Dentre os aspectos analisados encontram-se a construção do número, a construção do sistema de numeração decimal, o reconhecimento do valor posicional do número, a aquisição da estrutura multiplicativa do sistema de numeração decimal, a operatoriedade aditiva e multiplicativa e os processos de pensamento em tarefas de contagem.

O estudo mostrou que a proposta de ensino construtivista favorece nos sujeitos a construção de estruturas multiplicativas, a operatoriedade e a noção de quantidade, visto que os sujeitos desta proposta apresentaram melhor desempenho que os sujeitos da escola de proposta convencional. Destaca que:

> o sistema de Numeração Decimal traz em sua estrutura a multiplicação e divisão, que são conteúdos importantes para o desenvolvimento da inteligência e precisam ser adequadamente abordados no contexto escolar, pois devem contribuir à formação de novas estruturas mentais, em estudos posteriores, que se entrelaçam num campo conceitual cada vez maior. (ibid, p.174)

Os estudos de Kamii (1992, 1994 e 1995) mostram-nos também a tendência de se ensinar Matemática como técnica nas escolas, enfatizando a explicação e exposição dos conteúdos pelo professor e a atenção e memorização dos alunos. O autor acredita que é preciso haver uma transformação, levando-se em consideração o desenvolvimento intelectual das crianças.

Os trabalhos analisados indicam que é preciso repensar o ensino da Matemática. Os professores deveriam propor mais desafios às crianças, permitindo que, por meio de suas experiências, descobertas, questões e representações, possam passar da ação à operação, construindo seus conhecimentos. Com isso, a Matemática deixaria de valorizar os procedimentos mecânicos que, do ponto de vista piagetiano, não garantem que houve realmente construção.

A multiplicação

A construção da noção de multiplicação tem sido estudada por pesquisadores na área de Educação Matemática, e os trabalhos piagetianos vêm colaborar também na compreensão sobre este tema.

O princípio da multiplicação é bem mais complexo que o da adição, embora a multiplicação aparente uma adição de adições que, no dizer de Piaget (1985), *"são sintetizadas numa composição simultânea ao invés de serem efetuadas sucessivamente"* (p.72).

A diferença importante entre multiplicação e adição está no fato de que, na multiplicação, as "partes" precisam ser iguais entre si e possuir o mesmo número de elementos. Já na adição simples, para se chegar ao todo, não é necessária a igualdade, nem das "partes", nem dos elementos (ibid). Sendo assim *"a multiplicação é, pois, mais complexa e comporta quantificações implícitas mais numerosas"* (p.73).

Tendo como objetivo estudar as etapas da formação da multiplicação no decorrer de suas diferenciações da adição, Piaget (ibid) propôs quatro situações envolvendo as variáveis de classes diferentes da multiplicação. As situações envolviam multiplicação, associatividade, associatividade comutativa e repetição de correspondências injetivas. Os materiais utilizados nestas situações englobam um carneiro C, um pato P e um punhado de grãos idênticos. Temos como dados de base: C come 3 grãos de uma vez (=1 pacote C) e P come 2 grãos de uma vez (=1 pacote P).

A situação I envolve multiplicação, onde o *"experimentador faz para C 4 pacotes de 3 grãos e pede-se ao sujeito que prepare para P a quantidade de grãos, levando em consideração o dado de base"* (p.73). Na situação II, trabalha-se a associatividade, sendo o dado de base: P e C comem três grãos de uma vez, *"o experimentador prepara para C 2 refeições de 4 pacotes e pede ao sujeito que prepare a quantidade necessária para comer só numa refeição"*. Ainda na situação II o experimentador

> prepara para C duas refeições de 4 pacotes e pede-se para a criança preparar para P outro tanto de grãos, arranjados igualmente em duas refeições. Após a constituição da coleção P pedimos à criança um julgamento concernente à igualdade das coleções C e P. A seguir os grãos de P são colocados num monte e pede-se à criança para preparar para P a quantidade necessária para uma única refeição a partir dos grãos desse monte. (p.73)

A situação III envolve associatividade comutativa, na qual

> o experimentador prepara para C duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada e pede-se à criança que prepare para outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial (p.73).

E a situação IV trabalha com repetição de correspondências injetivas:

> o experimentador e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), o outro um pacote P (=2 grãos), isso 6 vezes repetidas. As duas coleções são a seguir escondidas. Pede-se à criança que julgue se as duas coleções contêm um número igual de grãos, avalie numericamente a diferença entre as duas coleções. Este julgamento é generalizado a um número N (muito grande) não realizado de repetições da mesma ação. (p.73)

Estas situações englobam as variáveis de classes diferentes típicas da multiplicação: *"elemento"* = número de grãos por pacote, *"partes" ou continentes* = número de pacotes e *"todo"* = número de grãos em sua totalidade.

A partir daí, propõem-se níveis de evolução da noção de multiplicação. No nível IA, os sujeitos consideram uma variável por vez, não realizando ainda as multiplicações mais simples. Com isso ocorrem dois casos:

> a falta de coordenações, que conduziriam às relações continente/contido ou às compensações que seriam tornadas necessárias pelas variações dessas relações; e a pouca coerência e o número de contradições aos quais o sujeito não é sensível. (ibid, p.74)

O nível IB tem como progresso as tentativas de relacionar as variáveis e o início de relação de continente a conteúdo entre os pacotes p e os grãos g. A questão da compensação ainda não é resolvida, mas já há certas soluções exatas.

No nível IIA, os sujeitos conseguem fazer a relação fundamental de "continente" a "contido", mas ainda empiricamente. Adquire-se a associatividade dos comprimentos. O sujeito apresenta dificuldade na compreensão de que "*entre um 'todo' invariante formado pelos mesmos 'elementos' intercalam-se 'partes' variáveis que parecem comprometer a invariância desse todo*" (p.80). A partir do nível IIB, o sujeito consegue fazer antecipações dos continentes.

Os problemas de multiplicações numéricas elementares já são dominados pelo sujeito no nível IIIA, embora tenham dificuldade na situação III, devido ao fato de os pacotes serem ao mesmo tempo conteúdo e continente. Esta dificuldade é superada em IIIB.

Em seus estudos sobre a gênese do número, Piaget e Szeminska (1975), classificam as fases da multiplicação numérica. Na primeira fase a criança não chega à correspondência termo a termo, não efetuando assim a multiplicação numérica, apenas faz uma comparação global. Portanto, há ausência de correspondência exata e ausência de composição das relações de equivalência. As crianças ficam presas a uma avaliação arbitrária de aumento, não tendo consciência da duplicação.

Em uma segunda fase, o problema da duplicação é resolvido, embora não por meio da operação de multiplicação. A criança chega ao resultado por meio da própria correspondência que, aos poucos, torna-se múltipla.

A terceira fase é caracterizada pela composição correta das relações de equivalência e pela compreensão imediata da correspondência múltipla e sua generalização sob a forma de operações multiplicativas.

Os autores (ibid) afirmam que a composição qualitativa das classes constitui-se no plano operatório ao mesmo tempo da composição dos números:

> Não existe uma fase de multiplicação lógica e uma fase da multiplicação aritmética: no decurso de uma primeira fase, nenhuma dessas composições é possível; no decorrer da segunda, ambas se esboçam num plano intuitivo, mas sem conclusão operatória, no decurso da terceira, ambas se constituem em operações propriamente ditas. (p.299)

Estudando problemas multiplicativos, Morgado (1991) analisou a possível afinidade existente entre a solução destes problemas e a construção da representação mental, as estratégias e respostas, utilizando materiais concretos apropriados aos problemas. Para efeito de sua pesquisa, foram estudados 45 sujeitos da escola primária em Portugal, sendo 15 do segundo, 15 do terceiro, e 15 do quarto graus. Apresentaram-se às crianças quatro problemas multiplicativos de Vergnaud (1981). Os resultados mostraram que existe uma afinidade entre a representação mental correta e a solução correta, e que não há muita clareza na afinidade entre representação mental correta (ou incorreta) e as espécies de estratégias.

Em outro estudo, Morgado (1993) comparou a compreensão da multiplicação entre crianças inglesas e portuguesas. O autor levanta a hipótese de que a equivalência "um para muitos" é um esquema inicial que a aprendizagem pode construir para a compreensão da multiplicação.

Convém destacar que, enquanto em Portugal o ensino da multiplicação inicia-se mais cedo com a tabuada e problemas que exigem a multiplicação na ordem para praticar a tabuada, na Inglaterra há um incentivo para que as crianças utilizem seus próprios métodos e materiais concretos para resolverem os problemas, dando menos ênfase às tabuadas. Outra diferença é a lingüística: a tabuada é memorizada como "três vezes oito", sendo que "vezes" quer dizer a operação para as crianças portuguesas, ao passo que as crianças inglesas são levadas a pensar a respeito do que é "três oitos."

Para efeito deste estudo, foram pesquisadas 40 crianças portuguesas e 32 inglesas, com idades entre 8 e 9 anos que freqüentavam escola em cidades universitárias. Resolveram quatro problemas verbais de multiplicação, um de adição e um de subtração e quatro exercícios de cálculo, para verificar a compreensão das propriedades comutativas e distributivas.

Os resultados mostraram que não há influências significativas das diferenças educacionais entre Portugal e Inglaterra na resolução destes problemas.

Em seus estudos, Granell (1983), pesquisando os processos que levam à construção da noção de multiplicação e divisão aritméticas, mostrou as dificuldades que passam as crianças para descobrir o operador multiplicativo. Segundo o autor, a construção da noção de multiplicação exige um processo de abstração reflexiva (Piaget et al, 1995) em um nível mais complexo que o da adição, sendo a multiplicação mais dificilmente compreendida pelas crianças. Em seu trabalho, tem como objetivo estudar as dificuldades desta construção e as estratégias desenvolvidas pelas crianças para solucionarem estas dificuldades. Para isso foram propostas uma série de situações de complexidade crescente que envolviam noções de multiplicação e divisão aritméticas, destacando a compreensão da idéia de operador multiplicativo. Foi montada uma "tenda" que vendia vários objetos comestíveis, cada um continha seu preço que variava de uma a nove pesetas; havia uma caixa com moedas de uma peseta. Propunha-se à criança brincar de comprar e vender. O pesquisador colocava a quantidade de objetos do mesmo tipo, e a criança, o valor em dinheiro. Numa segunda situação, dava-se uma determinada quantidade de moedas à criança e pedia-se que ela dissesse quantos objetos de determinado tipo poderia comprar. Quando chegava a uma resposta correta, perguntava-se se havia algum outro objeto que poderia comprar sem faltar nem sobrar moedas, mas os objetos precisariam ser iguais.

Concluiu-se que os sujeitos passam por quatro condutas de evolução, tanto na construção da noção da multiplicação quanto na construção da noção de divisão aritmética. Em relação a multiplicação, na conduta I a criança não é capaz de estabelecer a correspondência múltipla, não se importando com a quantificação exata. A conduta II é caracterizada por uma correspondência múltipla de forma intuitiva, sem ter ainda a quantificação exata. O resultado correto é alcançado na conduta III, utilizando procedimentos aditivos mediante adições sucessivas, entretanto, sem nenhum tipo de antecipação das ações. Finalmente, na conduta IV, a criança chega a fazer antecipação do número de conjuntos, condição fundamental para a compreensão da multiplicação.

Em relação à noção de divisão aritmética, na conduta I a criança não admite a possibilidade de fazer diferentes composições com conjuntos equivalentes. Na conduta II, embora a criança tente operar com conjuntos equivalentes, ainda não há uma compensação exata entre o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo. O sujeito atinge a solução correta, mas por meio de tentativas e não de antecipações corretas. Esta antecipação das composições possíveis concretiza-se na conduta IV, na qual a criança toma consciência das relações de reciprocidade que se estabelecem entre as variáveis.

Para a escola chegar a auxiliar a criança a resolver seus problemas reais, precisa acompanhar o processo de conhecimento pelo qual passam as crianças. Quando a criança consegue fazer a operação inversa, pode-se dizer que tem a idéia construída de operador multiplicativo, podendo assim compreender a noção de multiplicação. Estes procedimentos de Granell foram utilizados na presente pesquisa para avaliar a construção da noção de multiplicação pelos sujeitos (detalhados no anexo 2).

Baseado nos estudos de Granell (1983), Saravali (1995) desenvolveu uma pesquisa sobre a psicogênese da noção de multiplicação. Foram estudados 25 sujeitos com idades entre 7 e 11 anos divididos em dois grupos. A amostra A era composta por cinco sujeitos de cada idade alcançando N=25, com os quais se verificaram os níveis de evolução da noção de multiplicação. A amostra B era composta por oito crianças que não tinham construído a idéia de operador multiplicativo e as relações de compensação entre multiplicando e multiplicador. Foram aplicados pré e pós-testes utilizando a prova de multiplicação e divisão aritméticas segundo os procedimentos de Granell (1983). A intervenção pedagógica baseada no processo de "solicitação do meio[2]" foi realizada utilizando atividades lógico-matemáticas e jogos (Pontos Coloridos, Tira e Põe, Jogo do Buraco).

Os resultados mostraram que a intervenção pedagógica foi eficaz na construção da noção de multiplicação aritmética pelos sujeitos que não a possuíam.

Taxa (1996) estudou os procedimentos encontrados na resolução de problemas verbais aritméticos. Analisa questões pertinentes à construção de uma correta representação mental e à resolução de problemas verbais de estrutura multiplicativa, considerando-se as abstrações e a utilização de material concreto.

Seu trabalho foi inspirado na pesquisa de Morgado (1993), sendo que os problemas envolvendo a estrutura multiplicativa foram escolhidos baseados na classificação de Vergnaud (1991), que considera duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

Foram estudadas 60 crianças de primeira a quarta série com idades entre 7 e 12 anos do ensino fundamental, divididos em três grupos (N=20 respectivamente): a) crianças que não aprenderam a multiplicação na escola, b) crianças que estavam aprendendo a multiplicação, c) crianças que já haviam aprendido multiplicação, segundo os professores. Nos pré e pós-testes foram aplicadas as provas piagetianas de conservação, classificação e seriação. A resolução dos problemas verbais aritméticos foi investigada por meio de sete problemas do tipo escolar, sendo quatro específicos de multiplicação e três de

---

[2] Desenvolvido por Mantovani de Assis (1976).

adição e subtração. Os problemas foram apresentados às crianças juntamente com material concreto correspondente.

Concluiu-se que existe uma evolução nas crianças em diferentes níveis de escolaridade ao resolver problemas, o que se deve ao fato da "*interação entre a estrutura conceitual do problema e a escolha de procedimentos que indicam maior abstração e flexibilidade do sujeito*" (ibid, p.171). É importante para a criança ter o contato oral com o problema e apoio do material concreto, possibilitando assim a construção das técnicas de cálculo.

O papel do professor é permitir que as crianças discutam o problema, mostrem seus procedimentos, troquem idéias. Deve também intervir, quando necessário, com questões que promovam o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

Neste sentido, Moreno (1987) ressalta:

> É necessário pensar e raciocinar para conhecer as causas, porque conhecer-se a si mesmo, as próprias reações, conhecer aos demais, saber quais são os seus problemas, como respondem à nossa maneira de agir, é tão ou mais importante que aprender matemática ou história. (p.10)

Em seus estudos voltados à Educação, privilegia a liberdade de escolha e, para tal, é necessário que o sujeito conheça as possibilidades existentes e possa inventar outras. Neste sentido, o autor define operar como:

> estabelecer relações entre os dados e acontecimentos que se sucedem à nossa volta, para obter uma coerência que se estenda, não só ao campo que chamamos de 'intelectual', mas também ao afetivo e social. (p.10)

Mulligan (1992) realizou um estudo longitudinal com 70 crianças, analisando as estratégias de solução para uma variedade de problemas de multiplicação e divisão. Mostrou que há três níveis de estratégias de solução:

modelo direto com contagem, modelo não direto com contagem, estratégias aditivas ou subtrativas, e uso de fatos conhecidos.

Kouba e Franklin (1992), em seus estudos sobre multiplicação e divisão, apontaram que a Matemática volta-se para o lado mecânico, ou seja, a identificação das operações e manipulação dos números, sem se preocupar com o entendimento das situações.

Segundo os autores, as crianças utilizam estratégias imaturas na resolução dos problemas, tais como:

> descubra os números e faça a operação que foi recentemente feita pela classe; apenas suponha, use o tamanho dos números ou algum outro 'truque' como uma 'palavra chave' para identificar a operação; teste todas as operações e escolha a resposta mais razoável; relacione a operação a uma resposta maior ou menor que os números no problema. (p.103-4)

Este comportamento imaturo persiste devido a três fatores: as situações matemáticas são estruturalmente simples e raramente refletem o dia-a-dia, o uso de recompensas ao invés do pensamento crítico, e o fato de as crianças terem uma interpretação limitada para a solução e representação das situações (ibid).

Diante desta realidade, torna-se necessário propiciar experiências ricas às crianças com grande diversidade de situações que envolvam multiplicação e divisão, avaliar os processos e respostas e não dar somente recompensa para uma resposta rápida. É necessário também auxiliar a criança a percorrer caminhos diferentes, partindo de seu próprio conhecimento.

Graeber (1992) fez um estudo de duas generalizações "multiplicação faz maior" e "divisão faz menor", no contexto de resolução de problemas que envolvem números racionais menores que um, apresentando atividades que auxiliam o aluno a construir o senso de multiplicação e divisão nestas situações.

A multiplicação e a divisão também foram analisadas por Maza (1991). O autor destacou diferentes formas de representação, sendo as representações internas de caráter psicológico e as representações externas ligadas às formas de ensino. Ressaltou a tendência dos professores em ensinarem palavras-chaves para solucionarem os problemas. Isto pode levar a criança à resposta correta, entretanto não garante que tenha compreensão.

Outro estudo, envolvendo problemas de multiplicação e divisão, foi realizado por Greer e Mohan (1986). Os autores constataram os insucessos das crianças de performance mais baixa quando solicitadas a resolverem problemas com os números do enunciado cobertos por uma tira de papel. Este fato mostrou as dificuldades das crianças em levar os conceitos matemáticos além da intuição.

Burns e Winson (1992) levantam que alunos do ensino fundamental, trabalhando com histórias sobre o uso do dinheiro e atividades com opinião e cálculos, podem aprender sobre estes temas. Propõem que se explore a relação entre adição e multiplicação por meio de jogos de computação que permitem verificar quando, como e porquê usar adição e multiplicação.

Como é objetivo da presente pesquisa fazer uso de jogos cujos conteúdos destacam a multiplicação, é preciso caracterizar sua importância no contexto educativo, já que esta idéia não é recente, remontando aos tempos da Grécia e Roma antigas (Brenelli, 1993).

Jogo e prática pedagógica

De acordo com o exposto anteriormente, as pesquisas têm mostrado que os conteúdos ensinados na escola não são aplicados à vida do aluno. É importante então que este quadro seja alterado. Dentre as várias alternativas, o jogo pode ser um meio eficiente.

Segundo Mizukami (1986), o jogo adquire importância fundamental em sua aplicação ao ensino. Tem por objetivo descobrir novas estratégias, e cada fase de desenvolvimento do ser humano é caracterizada por uma conformação única, especial, indo desde o jogo individual, o jogo simbólico, o jogo pré-social, ao jogo de regras (social).

Chateau (1987) ressaltou que "*o jogo representa para a criança o papel que o trabalho representa para o adulto*" (p.29). O jogo é para a criança um substituto do trabalho futuro.

O autor reconhece o jogo como uma atividade séria, na qual a criança aceita um código lúdico e passa a ter "*o jogo como um juramento feito a si mesmo, depois aos outros, de respeitar certas instruções, certas regras*" (p.125). O jogo, como atividade de grupo, tem caráter social, possibilitando o contato entre as crianças, solicitando que as diferentes opiniões sejam consideradas, permitindo a ultrapassagem do egocentrismo.

Brenelli (1996) também reconhece a importância da interação entre crianças:

> por ser troca entre iguais, favorece a cooperação, tal como ocorre no jogo de regras, que pode favorecer condições para que as descentrações ocorram a caminho das coordenações interindividuais, na medida em que haja um mínimo de entendimento mútuo (p.150).

A importância dos jogos na escola foi abordada na obra *Jogos em Grupo na Educação Infantil: Implicações da Teoria de Piaget*, na qual Kamii e DeVries (1990) mostraram como os jogos em grupo podem estar presentes no processo de ensino e de aprendizagem, possibilitando ao professor intervir, maximizando a aprendizagem de seus alunos. Para isso, apresentam uma análise dos jogos em grupos capazes de favorecer o pensamento, o desenvolvimento da cooperação e da autonomia. Destacam também que "*as crianças se tornam mais capazes de se descentrar e de coordenar pontos de vista quando estão em situações que requerem coordenação*" (p.34).

Em seus estudos sobre o Juízo Moral, Piaget (1994) ressalta que a capacidade de a criança participar de jogos em grupo aumenta conforme sua capacidade de se descentrar e coordenar diferentes pontos de vista. Segundo Piaget (ibid), o jogo de regras é uma atividade lúdica do ser socializado.

Possibilita à criança resolver situações-problema, utilizando um conjunto de regras. Piaget estudou o jogo de Bolinhas de Gude e suas variações. A partir daí, propôs uma classificação quanto à prática das regras e à consciência das regras para as crianças.

A prática das regras diz respeito à adaptação do indivíduo a elas, segundo a faixa etária e o desenvolvimento mental em que se encontra. São quatro os estágios que a criança passa na prática das regras. No primeiro estágio, as regras são motoras e individuais. O segundo estágio é considerado egocêntrico, não existe competição e nem preocupação com as regras. Por volta dos sete, oito anos aproximadamente, um terceiro estágio constitui o da Cooperação Nascente: neste está presente a competição, o controle mútuo e a unificação das regras. O último estágio é o da Codificação das Regras, cuja preocupação direciona-se à decodificação exaustiva das regras, controlando e assegurando antecipadamente todas as possíveis exceções. Esta última etapa coincide com o período das operações formais.

A consciência da regra diz respeito à interpretação que a criança faz perante a regra, ou seja, "*como a criança sente e interpreta, para si essas regras, percebe-se que ela as assimila inconscientemente ao conjunto das recomendações às quais é submetida*" (ibid, p.50). Desenvolve-se em três estágios. No primeiro estágio, a regra não é obrigatória, vai até o inicio do estágio egocêntrico. Já no segundo estágio, que vai do egocentrismo até a metade do estágio da cooperação, a regra é considerada sagrada e imutável. No terceiro estágio, o respeito é obrigatório, embora as regras possam ser mudadas, se houver consenso geral.

É importante conscientizar os pais e profissionais da Educação a respeito do papel do jogo na sala de aula, caso contrário continuam acreditando que é muito mais produtivo para seus filhos fazerem lições ao invés de ficarem 'brincando'. Neste sentido, Kamii e DeVries (1990) destacam que os "*os pais freqüentemente ficam mais satisfeitos quando seus filhos voltam com lições para* *casa como prova de trabalho e aprendizagem"*, sendo que para estes pais o jogo *"parece apenas destinado à diversão e recreação"* (p.31).

Petty e Passos (1996) acreditam que esta visão, na qual o jogo não é coisa séria, *"faz com que a criança encare o conhecimento dos adultos como algo muito difícil, complicado, quase inatingível"* (p.163). Os autores (ibid) ressaltam que o jogo precisa proporcionar uma situação interessante à criança. Atento a este fato, o professor deve observar dois casos em que o jogo pode ficar pouco interessante: *"se a tarefa proposta for muito difícil ou impossível de ser cumprida, ou for muito fácil, tornando-se, por isso, aborrecida e entediante"* (p.166). Sendo assim, o adulto

> é quem dá o 'tom' do desafio, adequando a atividade à criança. Deve-se cuidar para que esse tom seja mantido, evitando que o jogo se transforme em mais uma tarefa obrigatória. (p.166)

Defendem (ibid) a importância do uso de jogos de regras na escola:

> Por um lado trabalha com o interesse e a atenção, desafia o raciocínio e estimula uma postura ativa da criança. Por outro, representa uma real possibilidade de conhecer como pensa – por meio das estratégias adotadas – e quais as dificuldades que encontra – por meio dos erros cometidos para tentar atingir os objetivos do jogo. (p.174)

Petty e Passos (ibid) analisaram dois jogos, demonstrando as possibilidades de serem usados em sala de aula. O Ta-te-ti, que consiste em colocar três peças em linha, antes que o adversário o faça, auxilia a criança a *"adquirir disciplina em termos de organização, respeito às regras e ao outro"* (p.170). Deste modo, pode propiciar a criança lidar com limites, podendo transferir isto para outras situações (idem). O outro jogo é o Tangran, que objetiva construir uma figura de acordo com o modelo dado, usando as sete peças do jogo. Trata-se de um jogo que requer paciência e tempo, pois permite a construção de muitos modelos, exigindo do jogador não só o conhecimento das peças, mas também o domínio de sua geometria.

O uso de jogos pode ser muito útil no processo educacional. Kamii e DeVries (1990) observaram crianças jogando e destacaram, como critérios para um bom jogo

> propor alguma coisa interessante e desafiadora para as crianças resolverem; permitir que as crianças possam se auto-avaliar quanto a seu desempenho; permitir que todos os jogadores possam participar ativamente do começo ao fim do jogo. (p.5-6)

O conteúdo de um jogo deve ser compatível com as possibilidades da criança. Conhecer como ela raciocina e constrói conhecimento é imprescindível para o professor explorar as situações lúdicas, no sentido de favorecer o desenvolvimento da criança. Dessa maneira, observar e conversar com a criança faz-se necessário. A partir do momento em que as crianças manifestam interesse pelo jogo, criam outras maneiras de jogar (ibid, p.06), cabe, portanto, ao professor analisar o jogo e propor desafios que poderão ser desencadeados pela ação de jogar.

No jogo, a criança busca alcançar um determinado resultado, portanto, está interessada no que sua ação vai resultar. A criança deve ter clara sua ação para que possa avaliar seu desempenho:

> é preciso evitar qualquer situação de ambivalência para que, face a um resultado falho, a criança possa julgar onde errou e exercitar sua inteligência na resolução de problemas, construindo relações entre vários tipos de ação e vários tipos de reação de um objeto. (ibid, p.10)

O nível de desenvolvimento da criança também influencia sua participação no jogo. Esta participação engloba a atividade mental: *"o que importa é que o jogo proporcione um contexto estimulador da atividade mental da criança e sua capacidade de cooperação"* (ibid, p.12). O jogo de estratégia na escola deve ser permeado por jogos de azar, no sentido de favorecer também as crianças que apresentam dificuldades em construir estratégias (ibid).

Segundo Kamii e DeVries (1990) *"os jogos em grupo proporcionam muitas oportunidades para a elaboração de regras, observação de seus efeitos, modificações e comparações com diferentes procedimentos"* (p.40). O desenvolvimento da iniciativa ocorre na medida em que existe por parte da criança a responsabilidade de cumprir as regras e cuidar para que sejam cumpridas. Isto faz surgirem as sanções, permitindo o desenvolvimento da criatividade (ibid).

As crianças, algumas vezes, modificam as regras, o que significa estarem exercitando sua autonomia. O papel do professor nestes momentos é intervir de forma que encoraje o desenvolvimento da autonomia, permitindo à criança ter um autoconceito e auto-estima positivos. *"O aprendizado do cumprimento de regras por livre e espontânea vontade requer ao mesmo tempo desenvolvimento social, moral, emocional e cognitivo"* (ibid, p.282).

Os autores (ibid) chamam a atenção para a vantagem de jogos em grupo estimularem ações físicas e encorajarem a atividade mental. No jogo Pega-varetas, a criança começa a trabalhar com o raciocínio espacial a fim de obter uma vareta sem mexer as demais. Já no Jogo de Argolas a ação da criança deve ser relacionada com a ação do objeto, para que ela descubra o melhor jeito de acertar o alvo (ibid). Convém destacar aqui que estes dois jogos foram utilizados no trabalho de intervenção pedagógica da presente pesquisa, e suas análises encontram-se descritas detalhadamente na parte metodológica deste trabalho.

Os jogos em grupo permitem que a criança aprenda mais do que com lições e exercícios, pois, além da motivação em supervisionar os demais jogadores, a criança tem o *feedback* imediato dos colegas, o que é mais valioso para sua autonomia (Kamii e DeVries, 1990).

Na maioria das vezes, a competição é vista como algo negativo por provocar rivalidades e sentimento de fracasso. Entretanto, Kamii e DeVries (ibid) destacam que estes efeitos negativos ocorrem quando a competição é tratada de forma errônea, o que não deve nos impedir de perceber os efeitos positivos dos jogos que envolvem competição.

A competição presente nos jogos é diferente da competição na escola, já que a presença na escola é obrigatória e as regras são impostas pelos adultos. No jogo, a participação é livre, sendo a elaboração e o cumprimento das regras responsabilidade dos jogadores (ibid). Neste caso,

> o papel do professor nos jogos é (ou deveria ser) somente manter a atividade organizada, proteger os fracos dos mais agressivos e manter um ambiente favorável ao confronto e à troca de idéias entre os jogadores (ibid, p.279)

O professor deve lidar com a vitória como uma coisa normal, mostrando que o melhor é jogar para se divertir e não para ganhar. O fato de perder também precisa ser encarado naturalmente, permitindo à criança lidar com a derrota. Os autores (ibid) ainda destacam a dificuldade emocional de competir por parte de algumas crianças, sendo que elas não devem ser forçadas a jogar, caso não queiram competir. *"Forçá-las a situações, com as quais elas não possam lidar, apenas bloqueará o processo construtivo"* (p.284). O professor precisa ficar atento a este fato, podendo

> permitir que uma criança não participe de jogos competitivos, apenas assista a eles, se ela não puder lidar com a possibilidade de derrota . O professor também pode pedir ao grupo, antes do início do jogo, que decida se quer jogar para ganhar ou somente jogar sem ganhadores (sem competição). (p.285)

Em relação à competição, Macedo (1993) interpreta como pedir ao mesmo tempo a mesma coisa, ou seja, "*qualquer situação onde dois ou mais sujeitos querem ou necessitam ao mesmo tempo uma dada coisa, tal que por esses limites (só há uma coisa) alguns a terão e outros não*" (p.9). O problema está não na competição em si, mas no modo como reagimos a ela.

Outro aspecto importante dentro da competição é a habilidade pessoal ou competência para enfrentar o problema e solucioná-lo da melhor maneira (ibid). Sendo assim, há um desafio de ser melhor do que si mesmo, superar-se. O autor ressalta que:

> nesse sentido o outro de quem se ganha é apenas uma referência para si mesmo. Porque se sempre se ganha dele, esse outro não serve mais como referência; nesse caso, se procura um outro mais forte, uma situação mais forte para tê-la como um espelho de si mesmo, que recorde que tem muito mais para superar em si mesmo. Nesse sentido, quando se ganha , se ganha de si mesmo e quando se perde, se perde de si mesmo. Se alguém rouba e seu adversário não tem essa informação o jogo continua o mesmo para ele, que está perdendo todas as partidas. E quem rouba e por isso ganha, sem merecê-lo, sabe que seu jogo é outro. (ibid, p. 10-1)

Quanto à importância do jogo na escola, o autor (ibid) destaca que o jogo

> pode significar para a criança uma experiência fundamental de entrar na intimidade do conhecimento, da construção de respostas por um trabalho lúdico, simbólico e operatório integrados. Porque pode significar para a criança que conhecer é um jogo de investigação, por isso de produção de conhecimento, onde se pode ganhar, perder, tentar novamente, usar as coisas, ter esperanças, sofrer com paixão, conhecer com amor, amor pelo conhecimento e talvez de considerar as situações de aprendizagem de uma forma mais digna, mais filosófica, mais espiritual, superior. (p.16-7)

Kamii e DeVries (1980) acreditam que:

> a melhor maneira de lidar com a competição nos jogos em grupo é desenvolver desde o início uma atitude saudável e natural em relação à vitória ou à derrota, ao invés de evitar os jogos competitivos até que as crianças se tornem 'prontas' para eles, de alguma maneira misteriosa. (p.285)

Os jogos em grupo estimulam o desenvolvimento da autonomia, as interações interindividuais, constituindo um excelente meio para promover a socialização das crianças, e, além disso, permitem à criança desenvolver percepções, inteligência, sua tendência à experimentação e capacidade para agir de diferentes formas, construindo esquemas de procedimento.

Neste sentido, Brenelli (1996) afirma:

> A criança ao jogar, quando depara com uma situação-problema, gerada pelo jogo, e tenta resolvê-la a fim de alcançar seu objetivo (ganhar o jogo), cria procedimentos, organiza-os em formas de estratégias e avalia-os em função dos resultados obtidos, bons ou maus. (p.141)

Rabioglio (1995) também destacou esta importância do jogo na escola, propondo uma intervenção pedagógica com o jogo Pega-varetas. Em seu trabalho fez uma análise da relação jogo-escola, destacando a visão dos professores. Inicialmente foram dados cursos aos professores para prepará-los do ponto de vista metodológico. Posteriormente, foi elaborado um projeto de intervenção pedagógica com o jogo Pega-varetas. Os sujeitos da pesquisa foram adultos, professores e crianças de pré-escola e primeiras séries do ensino fundamental (4 a 9 anos). Com os adultos o jogo não foi alterado, mas com as crianças houve alterações na pontuação das varetas.

Concluiu-se que o jogo tem grande potencial didático, englobando cultura, interesse do aluno e conteúdos curriculares, possibilitando unir os conhecimentos do aluno com os conteúdos da escola.

A análise do Pega-varetas foi inspirada nos trabalhos desenvolvidos por Petty e Rabioglio, no Laboratório de Psicologia da USP, sofrendo algumas modificações a fim de serem adaptados à população que compôs este estudo.

O jogo de regras no contexto escolar é destaque do trabalho de Abreu (1993). Seu objetivo consistiu em analisar como as crianças constroem o sistema de resolução da Senha, considerando os níveis da compreensão para este jogo propostos por Piaget. Trata-se de um estudo microgenético, destacando as teorias implícitas às ações dos sujeitos em questão e as maneiras diversas que podem levar aos erros e à superação deles, destacando os procedimentos e estratégias dos sujeitos, possibilitando a prática psicopedagógica.

Foram estudadas 16 crianças de 5 a 11 anos de idade, de classe média e escola particular de São Paulo (SP). Foram selecionadas pela pesquisadora e professora, que utilizaram como critério o desenvolvimento cognitivo e características afetivas. Realizaram-se três sessões de seis partidas em dias diferentes, gravadas em vídeo ou áudio. O jogo utilizado foi o Super Senha. A pesquisadora utilizou o método clínico, valorizando a invenção e a descoberta.

Conclui-se que os jogos de regras podem ser de grande utilidade no contexto pedagógico, já que apresentam situações-problema significativas para os alunos que estão presentes no universo infantil. Além disso, o jogo traz consigo vários conteúdos das disciplinas escolares, dentre elas Matemática e Língua Portuguesa.

Estudando crianças pré-escolares, Costa (1991) pesquisou a importância dos jogos de regras para a construção das noções de conservação de correspondência termo a termo, substância e peso em crianças pré-escolares. Também analisou como pequenos grupos constroem a noção de conservação. Foram estudadas 60 crianças com idades entre 6 anos e 1 mês e 7 anos e 6 meses divididos nos grupos experimental e controle. O G.E. realizou pré e pós-testes com provas da noção de conservação e duas sessões de jogos de regras. O G.C. fez somente pré e pós-testes.

O autor concluiu que o jogo de regras foi significativo para a melhoria do desempenho do G.E., sendo o sexo e a idade não significantes para o desempenho do grupo. Sendo assim, os jogos de regras são interferências positivas para a construção da noção de conservação.

Barreto (1996) fez um estudo da interação social e do desenvolvimento cognitivo nas atividades livres no "playground" e nos jogos em grupo, destacando o jogo Dança das Cadeiras. Os sujeitos da pesquisa foram 30 crianças com idades entre 3 anos e 6 meses e 4 anos e 6 meses, divididos em dois grupos. Os dados foram coletados por meio de observação direta e analisados qualitativamente segundo os critérios da ação, representação e interação social. Foram observadas crianças no jogo Dança das Cadeiras e também em atividades livres no "playground", destacando os equipamentos e áreas utilizadas pelas crianças. O jogo foi aplicado sete vezes em cada turno, com crianças que quiseram participar.

Inicialmente, a professora propunha uma discussão sobre o jogo a respeito das regras. Após a discussão, a professora solicitava a organização do jogo, estimulando as crianças a terem sua própria organização e seguirem as regras do jogo. Durante o jogo, o papel da professora era estimular as crianças a darem seqüência à atividade. Na segunda etapa, não houve direcionamento da professora, sendo que as crianças escolhiam os equipamentos e áreas de preferência. Dentre os equipamentos do "playground", convém citar alguns: caixa de areia, gaiola, cavaletes, pneus, bolas cordas e materiais usados na areia.

O autor (ibid) concluiu que:

> o jogo de regras e as atividades livres no 'playground' estimularam as crianças, fazendo com que elas tivessem oportunidade de confrontar diferentes pontos de vista e tivessem de agir de acordo com as normas aceitas pelo grupo, estimulando a cooperação. (p.233)

Em relação aos aspectos cognitivos, destacou que estas atividades, tanto o jogo de regras como as atividades livres no "playground", propiciam desenvolvimento cognitivo das crianças, ou seja, permitem que explorem o ambiente, discutam e criem regras, adquiram conceitos e construam um quadro de referência relativo à experiência física e lógico-matemática.

Melo (1993) estudou a prática do jogo de regras nas aulas de Educação Física em crianças de primeira e segunda séries do ensino fundamental e suas implicações no desenvolvimento cognitivo, social e moral das crianças. Os sujeitos da pesquisa foram 135 crianças com idades entre 7 a 11 anos que freqüentavam primeira e segunda séries de uma escola municipal e de uma escola estadual. As observações foram feitas em grupos de número variável, sendo estes grupos dirigidos por professores habilitados durante as aulas de Educação Física. Também foram realizadas 17 entrevistas escolhidas por sorteio realizado entre os sujeitos, e observações de quatro sessões de recreio. Os dados mostraram que as relações sociais presentes nos jogos de regras nas aulas de Educação Física influenciam o desenvolvimento moral e intelectual dos sujeitos.

Villalon (1995) fez um estudo da evolução do conhecimento que as crianças possuem das regras do jogo e sua capacidade de operá-las. Os resultados mostraram que há uma evolução na capacidade da criança de operar as regras que no sentido de praticá-las, antes de serem capazes de formulá-las.

Lola (1995) destacou a importância de se considerar a questão que o problema propõe e usar técnica de jogos para ensinar os estudantes e, posteriormente, aplicarem as mesmas estratégias dos jogos para resolverem os problemas diferentes. Neste mesmo pressuposto, Goldstein (1994) fez uma revisão de jogos que podem ser adaptados a qualquer conteúdo, garantindo a participação dos alunos durante toda a atividade.

Jogo e Educação Matemática

Tendo conhecimento das pesquisas e trabalhos que apontam a importância do jogo na escola, convém destacar aqui os estudos que envolvem jogos e Educação Matemática. Muitos trabalhos mostraram que a Matemática pode ser compreendida de uma forma mais prazerosa, como por meio de jogos, idéia já defendida na época do renascimento, quando os jogos de cartas eram usados para desenvolver a Lógica e a Matemática (Brenelli, 1993).

O trabalho de Petty (1995), já citado anteriormente, analisou a importância e as contribuições dos jogos de regras segundo a teoria construtivista para a prática pedagógica, destacando a aquisição de conceitos matemáticos. Para isso utilizou os jogos Senha, Quatro Cores, Ta-te-ti e o Pega-varetas. Segundo o autor, a utilização de jogos de regras em sala de aula torna o ensino significativo para a criança, já que é extremamente interessante e envolvente. O professor deve utilizar o jogo como um recurso a mais na sala de aula para valorizar o processo de ensino e de aprendizagem.

O papel metodológico do jogo, destacando a aprendizagem da Matemática foi enfocado por Grando (1995). Este trabalho teve como objetivo verificar o papel metodológico do jogo no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, destacando concepções, relações e funções da utilização de jogos na respectiva área do conhecimento. Apresentou, inicialmente, uma visão crítica atual a respeito do ensino da Matemática. Neste sentido, o autor destacou o valor pedagógico do jogo. Dentre as suas possibilidades psicopedagógicas, Grando (ibid) destacou: competição, criatividade, raciocínio, desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, seriedade e aspecto sócio-cultural. Posteriormente, passou a destacar o jogo no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, tendo o jogo um papel de destaque para facilitar o processo de aprendizagem do aluno na medida em que proporciona situações-problema.

Em sua pesquisa, Grando (ibid) constatou o quadro caótico em que se encontra o ensino da Matemática. A quantidade de conteúdos em detrimento da qualidade e a metodologia utilizada não são úteis para o futuro do aluno. É preciso repensar as concepções e necessidades atuais, sendo o professor o agente transformador deste quadro buscando, em sua prática, alternativas para que a Matemática possa realmente compreendida pelos alunos. Para que isto ocorra, o professor necessita de formação sólida e aperfeiçoamento constante, repensando e avaliando freqüentemente sua prática. Outro ponto que merece destaque é a difícil linguagem matemática como fator agravante para a compreensão do aluno. No jogo, esta linguagem é apresentada de forma mais simples e próxima da criança.

Segundo o autor, os tipos de jogos pedagógicos mais importantes para o ensino da Matemática são os jogos de estratégia e/ou construção de conceitos, e os de exercício de conceitos matemáticos já adquiridos. Como exemplos, pode-se citar a criação e o desenvolvimento do jogo sobre o MERCOSUL, Torre de Hanói, Batalha Naval, dentre outros.

A intervenção psicopedagógica, por meio de jogos, foi utilizada em crianças com dificuldades de aprendizagem por Zaia (1996) em sua pesquisa para tese de doutorado. Este trabalho procura verificar os efeitos desta intervenção por meio do processo de "solicitação do meio[3]" na compreensão do conhecimento aritmético e no comportamento operatório de crianças com dificuldades de aprendizagem. Além disso, analisou os procedimentos que os sujeitos utilizavam para solucionar as dificuldades encontradas e os procedimentos da própria intervenção a fim de aperfeiçoá-los.

Os sujeitos da pesquisa foram oito crianças com idades de 10 a 13 anos que freqüentavam de segunda a quarta séries do ensino fundamental. Aplicou-se um pré-teste com as provas piagetianas para o Pensamento Operatório Concreto, a fim de avaliar o nível de desenvolvimento operatório que se encontravam. A intervenção psicopedagógica foi feita em 25 sessões de acordo com os princípios do processo de "solicitação do meio". Na intervenção foram utilizados jogos de regras, tais como: Jogo de Dados Tira e Põe, Jogo dos Bombons, Pegue Dez, Sempre Doze, Formar Figuras com Palitos, Jogo do Buraco, Kalah, Memobox, Cilada, Cara a Cara, Sacola Mágica, Jogo do Espelho, Torre de Papel; e atividades tais como: Xícaras e Pires, Construir Caminhos, Loja de Brinquedos, Organização e Comparação de Coleções e Subcoleções, Jarra e Copos, Coordenação de Duas Séries de Objetos, Flutuação dos Corpos, o Equilíbrio da Balança, o Choque das Bolas e a Transmissão Indireta do Impulso, para propiciar a construção da representação, a construção de conhecimentos físicos e lógico-matemáticos, a estruturação das noções de tempo, espaço e causalidade.

O autor organizou e aplicou os jogos e as atividades de acordo com seu objetivo principal. Sendo assim, para construção das estruturas lógicas elementares, dividiu da maneira abaixo explicitada:

1) Jogos e atividades que propiciam a construção da noção de conservação de quantidades contínuas e descontínuas e operações aritméticas: Kalah, Formar Figuras com Palitos, Xícaras e Pires, Construir Caminhos e Loja de Brinquedos.
2) Mecanismos Operatórios Aditivos: jogos que propiciam as transformações quantitativas aditivas: Forme Dez, Tira e Põe, Jogo dos Bombons, Pegue Dez.
3) Atividades e jogos que propiciam a construção da noção de classificação: Organização e Comparação de Coleções e Subcoleções, Jarra e Copos, Memobox, Cilada e Cara a Cara.
4) Atividades e Jogos que propiciam a construção da noção de Seriação: Coordenação de Duas Séries de Objetos.

Em relação à construção das estruturas infralógicas, ou seja, à construção das operações espaciais (relações topológicas, euclidianas e projetivas), o estabelecimento das relações causais e o conhecimento físico, foram usados os seguintes jogos e atividades: Sacola Mágica, Memobox, Jogo do Espelho, Torre

[3] Desenvolvido por Mantovani de Assis (1976).

de Papel, Flutuação dos Corpos, Equilíbrio da Balança, Choque das Bolas e a Transmissão Indireta do Impulso.

Conclui-se que a intervenção psicopedagógica permitiu aos sujeitos avançarem no desenvolvimento e a terem atitudes apoiadas no respeito mútuo e reciprocidade. Sendo assim, a intervenção psicopedagógica pode ser indicada para as crianças que possuem dificuldades de aprendizagem.

Brenelli (1986) realizou dois trabalhos a respeito de jogos de regras. Sua pesquisa teve como objetivo analisar as coordenações existentes entre os observáveis de um jogo (Jogo de Cores e Pontos do Quips) apresentado pelo experimentador e outro proposto pelo sujeito. A elaboração, execução e a prática das regras propostas pelo experimentador, e também a compreensão das noções implícitas na situação, são analisadas num contexto individual ou grupal. Foi verificada a influência idade, nível operatório e desempenho dos sujeitos em duas situações de jogos (proposto pelo sujeito e proposto pelo experimentador), sendo também considerado como os sujeitos jogavam num contexto individual e grupal.

Os sujeitos da pesquisa foram 39 crianças, com idades entre 5 anos e 10 meses a 9 anos e 10 meses, com escolaridade entre pré-primário até terceira série do ensino fundamental, de escola pública em Campinas. Os sujeitos foram classificados como conservadores, intermediários e não conservadores, divididos para participarem da situação individual (12 sujeitos) e da situação grupal (27 sujeitos), em grupos iguais e de diferentes níveis operatórios. A categorização dos sujeitos foi feita por meio das provas referentes à noção de conservação de quantidades discretas e contínuas. O perfil social dos sujeitos também foi considerado por meio de informações a respeito da escolaridade dos pais, renda familiar e número de pessoas.

Na aplicação do Quips foram propostas duas situações: um jogo proposto pelo experimentador e um jogo pelo sujeito. No jogo proposto pelo sujeito, o Quips foi utilizado numa situação em que os próprios sujeitos elaboravam e executavam as regras. Já no jogo proposto pelo experimentador, o Jogo de Cores e de Pontos, o objetivo era analisar o modo como a criança jogava, compreendia e explicava as relações existentes na situação.

No jogo proposto pelo sujeito, o experimentador apresenta o material do Quips aos sujeitos e pede para que inventem um jogo em que utilizem os dois dados, as fichas e as cartelas, o que implica em proporem as regras do jogo. No jogo proposto pelo experimentador, as regras do jogo foram propostas às crianças pelo experimentador conforme o próprio jogo. Eram destacadas, dentre outras situações-problema, as relativas às noções de conservação, seriação, classificação contidas no próprio jogo.

Segundo Brenelli (1986), *"o jogo proporciona trocas que podem causar perturbações que desencadeiam compensações e reequilibrações, favorecendo, por conseguinte, os processos de construção da inteligência"* (p.219).

Concluiu-se que os melhores desempenhos nos jogos estavam relacionados com a idade e o nível operatório. A situação grupal não apresentou diferenças estatísticas significativas, entretanto, numa análise qualitativa, puderam ser observadas mudanças, quer no desempenho, quer na compreensão das noções lógicas implícitas no jogo quando os sujeitos não conservadores interagiam com os de níveis intermediários e conservadores. O jogo de regras, segundo a autora, auxilia no desenvolvimento cognitivo e social da criança, podendo ser utilizado como um exercício de cooperação e operação.

Prosseguindo seus estudos (1993), a autora verificou a influência de uma intervenção pedagógica por meio de jogos no comportamento operatório e na compreensão do conhecimento aritmético de crianças com dificuldades de aprendizagem.

A hipótese levantada era que as crianças com dificuldades de aprendizagem, por meio de intervenção pedagógica, com os jogos Quilles e Cilada pudessem apresentar progressos no desempenho, nas provas operatórias e no conhecimento aritmético.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de terceira série do ensino fundamental de escolas públicas num total de 24, com idades entre 8 anos e 11 meses a 11 anos 10 meses, divididos em grupo controle e grupo experimental.

Foram realizados pré e pós-testes com as provas operatórias de conservação, inclusão e seriação e as provas de conhecimento aritmético abrangendo: noção de soma problemas de subtração, formalização de equações e multiplicação e divisão aritméticas valor posicional da numeração. A intervenção pedagógica foi realizada individualmente com os jogos Cilada e Quilles.

O jogo Cilada permite a montagem de diferentes quebra-cabeças. A intervenção pedagógica com este jogo possibilitava aos sujeitos descobrirem e inventarem meios mais eficazes para terem êxito no jogo. Com o material do jogo, a pesquisadora explorou a construção da noção de classificação, multiplicação de classes, a construção dos possíveis e do necessário e aspectos do conhecimento aritmético como valor posicional da numeração.

Outro jogo utilizado foi o Quilles, constituído por um tabuleiro com lugares marcados para colocar nove pinos de madeira e uma haste com uma bola presa por um barbante. Cabe ao jogador lançar a bola a fim de derrubar o maior número de pinos, marcando assim mais pontos. Há duas situações em que os sujeitos trabalharam, sendo a primeira composta por uma partida com cinco jogadas de um lance por vez, intercaladamente. Os pontos eram marcados após cada lance, o vencedor era apontado no final da partida. A segunda situação consistiu numa variação da regra, com mais de um lance, ou seja, o sujeito faria dois lances, sem voltar os pinos em pé. A questão era saber quantos pinos foram derrubados no segundo lance para obter o total de pinos derrubados. A intervenção com este jogo proporcionou trabalhar a compreensão do significado da operação de adição e da operação de subtração, envolvendo idéias de separar, comparar e igualar, seguidas de suas respectivas representações gráficas.

Concluiu-se que os sujeitos do grupo experimental, comparados ao grupo controle, tiveram um progresso significativo quanto à operatoriedade e à aquisição das noções aritméticas destacadas, comprovando a hipótese inicial.

Fundamentação Teórica

"Não se pode ensinar alguma coisa
a alguém, pode-se apenas auxiliar
a descobrir por si mesmo."
Galileu

O conhecimento, segundo Piaget (1976), é construído por meio das trocas do sujeito com o meio e, ao propor um trabalho de intervenção em sala de aula, via jogos, acredita-se possibilitar estas trocas, criando situações-problema que permitirão desencadear a atividade espontânea do sujeito, desafiando seu raciocínio.

Piaget explica a construção do conhecimento por meio da teoria da equilibração quando escreve sua obra *A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento*, tratada a seguir. Em seus estudos sobre estes processos, o autor destaca como idéia central que, independente dos fins almejados pela ação e pelo pensamento, o sujeito procura certas formas de equilíbrio. Estas formas são alcançadas provisoriamente, pois surgem novos problemas, possibilitando ao sujeito construir sobre as formas já existentes.

O processo de equilibração consiste então na passagem de estados de menor equilíbrio para outros estados de maior equilíbrio, qualitativamente diferentes graças às reequilibrações progressivas. Os desequilíbrios são responsáveis pelo desencadeamento dos processos, permitindo a passagem de um estado atual de equilíbrio para um melhor, por meio de reequilibrações, o que representa o progresso no desenvolvimento do conhecimento. Os desequilíbrios podem ser inerentes à constituição dos objetos ou das ações do sujeito, ou resultantes de conflitos momentâneos. Piaget destaca como aspecto otimista o fato de o sujeito buscar se reequilibrar e superar o desequilíbrio. Nesta perspectiva, o desequilíbrio tem papel fundamental na medida em que pode provocar o processo de reequilibrações, fazendo com que o sujeito busque sempre uma equilibração majorante.

Pode-se dizer que os desequilíbrios têm função motivacional uma vez que exigem do sujeito sair do estado atual do conhecimento em busca de direções novas por meio de compensações, ou seja, "*representam um papel de desencadeamento e sua fecundidade se mede pela possibilidade de superá-lo*" (p.19).

Os desequilíbrios, na vida cognitiva, resultam de uma compensação incompleta entre as afirmações e negações, o que, segundo Piaget, acaba por atrapalhar todas as formas de equilíbrio: entre sujeitos e objetos, entre os subsistemas, e entre os subsistemas e a totalidade. Na equilibração entre sujeito e objeto há uma assimilação dos objetos conforme os esquemas de ações do sujeito e também uma acomodação desses esquemas aos objetos. Na equilibração entre os subsistemas estão presentes as assimilações e acomodações recíprocas. E na equilibração entre os subsistemas e a totalidade ocorre o equilíbrio progressivo das diferenciações e integrações, pois há uma integração do todo com as partes, tendo a assimilação a função de integrar, enquanto a acomodação a de diferenciar.

No início, há predominância das afirmações sobre as negações, razão dos desequilíbrios tão freqüentes na vida da criança. As negações vão sendo pouco a pouco construídas por meio das regulações compensatórias até que alcançam uma correspondência exata entre as afirmações e negações, ou seja, a reversibilidade.

Piaget considera que as três formas de equilibração podem ocorrer de forma espontânea e intuitiva, por meio de tentativas sucessivas, retendo os êxitos e eliminando os insucessos.

As invariantes funcionais de organização e adaptação com seus pólos complementares, assimilação e acomodação, encontram-se presentes em todas as etapas de equilibração cognitiva. A assimilação consiste na incorporação de elementos exteriores a um esquema ou estrutura do sujeito. A acomodação consiste na necessidade de a assimilação considerar as particularidades dos elementos a assimilar, modificando o esquema. Sendo assim, é necessário existir um equilíbrio entre assimilação e acomodação para adaptação do sujeito ao meio. Este equilíbrio exige não somente as modificações das estruturas, mas também a sua conservação.

Segundo Piaget (1995), toda necessidade

> tende a incorporar as coisas e pessoas à atividade própria do sujeito, isto é 'assinalar' o mundo exterior às estruturas já construídas, e a reajustar estas últimas em função das transformações ocorridas, ou seja, 'acomodá-las' aos objetos externos (p.17).

O desenvolvimento das estruturas cognitivas é alcançado pela equilibração. Isto implica reversibilidade final das operações lógico-matemáticas. Sendo assim, é necessário um sistema de compensações de diferentes níveis para preparar a reversibilidade. Estas compensações não se dissociam de construções, sendo que toda construção nova se volta para compensações e é direcionada por suas exigências.

Nas contínuas interações do sujeito e meio ocorrem perturbações e, a tendência do sujeito é reagir a elas, ativando os mecanismos de regulação que podem atuar corrigindo (*feedback* negativo) ou reforçando (*feedback* positivo). Mesmo todas regulações sendo reações a perturbações, nem toda perturbação acarreta uma regulação. Isto ocorre nos casos em que a perturbação provoca uma repetição de ação, sem modificação, esperando ter mais êxito, ou quando o sujeito interessa-se por um aspecto imprevisto da perturbação, dando outra direção a sua atividade (Piaget, 1976).

Há duas classes de perturbações: as que se referem às resistências do objeto ou são obstáculos às assimilações recíprocas dos esquemas e as lacunas. A primeira classe de perturbação é responsável pelos insucessos ou erros e corresponde às regulações que compreendem o *feedback* negativo. As lacunas fazem parte da outra classe de perturbação e ocorrem quando uma ação não é concluída devido à falta de uma condição necessária, ou seja, há uma insuficiente alimentação de um esquema. São fontes de desequilíbrios e correspondem às regulações que compreendem o *feedback* positivo.

Tanto o *feedback* negativo, constituído por correções, quanto o positivo, constituído por reforços, precisam estar presentes para o funcionamento de um comportamento complexo, já que são constantemente complementares. Portanto, este dualismo dos *feedbacks* negativos e positivos só pode ser considerado dicotômico se for tratar de setores isoláveis. Existe, sim, uma dicotomia em relação aos comportamentos, que é entre as regulações que procuram conservar um estado e as que se encaminham para um estado que não foi atingido.

A regulação ocorre quando "*a repetição A' de uma ação A, é modificada pelos resultados desta, logo quando um efeito contrário dos resultados de A sobre seu novo desenvolvimento A'* "(ibid, p. 31). Toda regulação é uma reação a perturbação e possui dois processos: o proativo, que faz uma antecipação, e o retroativo, que conduz a uma correção ou a um reforço. A regulação pode se manifestar por uma correção (*feedback* negativo) ou por reforço (*feedback* positivo).

Piaget define dois tipos de regulações: as automáticas e as ativas.

> As regulações automáticas ocorrem no nível sensório-motor, nos casos das acomodações, implicando pouca variação dos meios. Já as regulações ativas conduzem o sujeito a mudar os meios ou a escolhê-los, no caso de existirem outros. As primeiras não acarretam tomada de consciência, entretanto as regulações ativas provocam-na, originando representações ou conceituações das ações materiais. (apud Brenelli, 1996, p.34)

As regulações são classificadas também quanto a sua hierarquia: regulações simples, regulações de regulações, auto-regulações; e quanto aos seus conteúdos: regulações de observáveis e de coordenações. Piaget destaca que

> regular o registro dos observáveis consiste em adaptar uma forma a um conteúdo material, ou assimilá-lo a um conceito. Durante o progresso do desenvolvimento, novas formas (estruturas) constroem-se sobre as de primeiro grau. Isso implica regulações de regulações e, posteriormente, a auto-organização com equilíbrio das diferenciações e das integrações (apud Brenelli, 1996, p.34)

Convém ressaltar que nem toda reação à perturbação gera uma regulação. Este fato ocorre quando um obstáculo desvia a finalidade e interrompe a ação ou quando há apenas a repetição da ação sem nenhuma modificação.

As regulações apresentam caráter construtivo, pois geram compensações responsáveis pela construção das estruturas. O fato descrito acima, de uma perturbação não engendrar uma regulação, ocasiona também uma não compensação, pois esta tem sua origem nas regulações.

Segundo Piaget (1976), "*compensação é uma ação de sentido contrário a um efeito dado, que tende, portanto, para o anular ou neutralizar*" (p.40). Neste sentido as regulações por *feedbacks* negativos têm o papel de instrumentos de correções, desencadeiam compensações: por "inversão", anulando a perturbação, e por "reciprocidade", provocando diferenciação do esquema para o acomodar ao elemento perturbador.

Já os *feedbacks* positivos estão ligados aos efeitos negativos e as suas compensações, trata-se das regulações ativas, pois alterar os meios implica reforço e correção, o reforço tende a preencher uma lacuna. Há casos em que uma regulação não consegue anular todas as perturbações ou preencher as lacunas. Então, surgem outras regulações com papel de correção e reforço: "regulação de regulações." Em relação a este processo, Piaget (apud Brenelli, 1996) destaca que

> as formas construídas anteriormente integram-se nas que se sucedem, a título de conteúdo. Isso acontece tanto em relação às formas ou operações que são aplicadas na leitura dos observáveis, quanto nos sistemas de coordenações ou composições operatórias que são atribuídas aos objetos. (p.36)

A majoração pode ser traduzida de dois modos, sendo que as melhorias são resultados do êxito das regulações compensadoras ou as novidades resultam do próprio mecanismo das regulações. Há um aumento na extensão do sistema, isto quer dizer que a extensão do esquema aumenta para poder assimilar e acomodar os elementos perturbadores.

A construção das negações é condição necessária ao equilíbrio e, no início, devido a sua "ausência", há muitos desequilíbrios. As negações são formadas pelas estruturas das regulações compensadoras, sendo que os *feedbacks* negativos anulam as perturbações ou as compensam por reciprocidade com as negações que comporta, e os *feedbacks* positivos compensam um "déficit", que é uma "negação da negação". A equilibração compreende a compensação exata das negações e afirmações. Os desequilíbrios iniciais possuem um predomínio das afirmações, já que o sujeito não pode construir as negações e estas vêm de fora.

Outro aspecto que merece destaque na teoria é que as noções de perturbação e compensação são relativas aos níveis em questão. Sendo assim, o que é perturbação em um nível, passa a ser variação interna em outro; a compensação por tentativas de anulação passa a ser transformação simétrica da variação em jogo. Diante disso, Piaget (1976) diferencia três tipos de comportamentos diferentes relacionados às modificações e compensações: condutas α, β, e γ (alfa, beta e gama). A conduta α surge quando, diante de um fato novo, o sujeito o ignora, deforma ou negligencia. Tais condutas são parcialmente compensadoras, o equilíbrio é muito instável e de campo restrito, há ausência de retroações e antecipações e o predomínio das afirmações. A conduta β integra no sistema o elemento perturbador surgido no exterior; há deslocamento do equilíbrio, segundo múltiplas formas. É superior à conduta α, porém, ainda parcialmente compensadora; ocorre uma reorganização da estrutura e construções de negações parciais. Na conduta γ as variações possíveis são antecipadas; a perturbação perde a característica de "perturbação" e passa a ser uma variação do próprio sistema. Há, portanto, a compensação completa; atingindo um equilíbrio móvel e estável e a correspondência entre afirmações e negações.

Para Piaget (ibid), o exemplo mais importante da equilibração majorante é a formação de operações, pois engloba as operações diretas e inversas, representando regulações perfeitas, tanto pela generalização das retroações, como pela compensação exata das afirmações e negações.

A equilibração cognitiva é a busca para um equilíbrio melhor, e ao mesmo tempo é um processo de ultrapassagem, englobando um processo de estabilização, sendo as construções e as compensações indissociáveis. A cada nova realização surgem novas possibilidades inexistentes nos níveis precedentes. Em relação a este aspecto da construção, o autor (ibid) ressalta que

> consiste na elaboração de operações que incidem nas precedentes, de relações de regulações, de regulações de regulações, etc., numa palavra, de formas que incidem nas formas anteriores e as englobam como conteúdo. (p.208)

Contudo, no dizer de Piaget (apud Brenelli, 1996, p.32*)*,

> as reequilibrações por reconstruções ultrapassam o nível anterior graças a uma reorganização com combinações novas de elementos que foram retirados do nível anterior.

Este mecanismo é denominado abstração reflexiva.

Piaget (1976) enuncia dois postulados importantes para a teoria da equilibração:

> 1° Todo esquema de assimilação tende a se alimentar, ou seja, incorporar os elementos que são exteriores e compatíveis com sua natureza.
> 2° Todo esquema de assimilação é obrigado a acomodar os elementos que assimila, ou seja, modificar-se de acordo com suas particularidades, sem perder a sua continuidade e os poderes de assimilação anteriores. (p.52)

A abstração reflexiva interfere na formação das regulações de regulações.

Em suas pesquisas sobre abstração reflexiva, Piaget et al (1995) ressaltam que, mesmo não tendo intenção pedagógica, os resultados são de grande importância para que os educadores tenham conhecimento destas reações de escolares, podendo ter mais êxito nos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos.

Segundo o autor (ibid) há dois tipos de abstrações: abstração empírica e abstração reflexiva. A abstração empírica "*se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc.*" (p.5). Continuando ainda, ressalta Piaget:

> este tipo de abstração não poderia consistir em simples leituras, pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumento de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.), oriundos de 'esquemas' [schèmes] sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito. (p.5)

A abstração empírica busca um conteúdo, e os esquemas são importantes na medida em que englobam formas que permitem captar o conteúdo. Piaget (ibid) destaca que, embora estes esquemas sejam necessários para a abstração empírica, "*ela não se refere a eles, mas busca atingir o dado que lhe é exterior, isto é, visa a um conteúdo em que os esquemas se limitam a enquadrar formas que possibilitarão captar tal conteúdo*" (p.5). Sendo assim, pode-se dizer que a abstração empírica consiste em tirar as informações dos objetos, dos quais somente são consideradas certas propriedades, que existem antes de qualquer constatação por parte do sujeito (ex. cor, peso), ou seja, as características dos observáveis.

A abstração reflexiva procede da coordenação das ações que o sujeito exerce sobre os objetos, difere da abstração empírica por centrar-se nas operações ou ações gerais do sujeito. Dois aspectos inseparáveis envolvem esta forma de abstração. Por um lado, o "reflexionamento" como projeção (no sentido de espelhar) sobre um patamar superior do que é retirado do nível inferior (por exemplo, da ação à representação). Por outro lado, uma "reflexão" enquanto ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior do que foi transferido do inferior. Piaget (ibid) define a abstração reflexiva como aquela que

> apóia-se sobre as formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.) para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc). (p.6)

A abstração "pseudo-empírica" é um caso particular de abstração reflexiva, pois o sujeito age sobre os objetos, e estes objetos são modificados e enriquecidos, a leitura é feita em cima de observáveis variáveis Piaget et al (1995) definem:

> Quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (p.ex., ao ordenar elementos de um conjunto), a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada 'pseudo-empírica' [pseudo-empirique]. (p.274)

A abstração refletida surge quando o sujeito é capaz de fazer coordenações, sem vê-las nos objetos, ou seja, *"é o resultado de uma abstração* *reflexionante [reflexiva], assim que se torna consciente, e isto, independente do seu nível"* (p.274).

As abstrações encontram-se presentes em todos os níveis de desenvolvimento. No período sensório-motor, a abstração empírica retira as informações dos objetos e das características materiais ou observáveis da ação, sendo que, para seu funcionamento são necessários esquemas assimiladores, e a abstração reflexiva retira as informações das coordenações dos esquemas, tendo por função elaborar os quadros assimiladores. Os dois tipos de abstrações caminham juntos, pois, para o refinamento e objetividade da abstração empírica é imprescindível a abstração reflexiva.

No patamar superior da representação, a abstração reflexiva engendra funções e operações, tendo como apoio as abstrações pseudo-empíricas. As reflexões, enquanto processo de abstração reflexiva, são mais elementares inicialmente e vão se tornando cada vez maiores. No caso da abstração refletida, esta pode ocorrer em outros níveis, mas é mais freqüente no nível formal.

Os reflexionamentos no sentido de projeção diferem quanto ao grau e natureza. O primeiro patamar parte das ações sucessivas e vai em direção a sua representação atual, ou seja, do sensório-motor ao início da conceituação (ibid). O segundo patamar busca reunir as representações num todo coordenado. Trata-se do patamar "*da reconstituição (com ou sem narrativa) da seqüência das ações, do ponto de partida ao seu término*" (ibid, p. 275). O terceiro patamar engloba as comparações, e "*a ação total assim reconstituída, é comparada a outras, análogas ou diferentes*" (p.275). A partir do quarto patamar há "*reflexões sobre as reflexões precedentes e chegando , finalmente, a vários graus de 'meta-reflexão' ou de pensamento reflexivo*" (p.275).

Num primeiro momento, a natureza dos reflexionamentos nada mais é do que "*um deslocamento dos observáveis em função de sua conceituação progressiva pela tomada de consciência, isto é, pela interiorização das ações*"(ibid, p.276). Piaget et al (1995) chama atenção para dois aspectos quando se trata de um sistema de conceitos: forma e conteúdo. Segundo o autor

> se o conteúdo pode consistir apenas em observáveis, revelando, pois, da abstração empírica, sua forma, que consiste em reunir objetos em um todo, apoiando-se sobre relações de equivalência, em função de suas qualidades comuns supõe a intervenção de uma abstração reflexionante : aquela que a partir da assimilação sensório-motora dos objetos em um esquema (sem consciência de sua extensão), permite passar à assimilação destes mesmos objetos entre si, o que é constitutivo do conceito enquanto classe. (p.276)

Nos patamares posteriores, a maior parte é da abstração enquanto reflexão, entretanto, a generalização possibilita o reflexionamento dos observáveis anteriores sobre patamares novos (ibid). Sendo assim, todo patamar novo traz uma diferença de grau e também uma diferença qualitativa, sendo a união da reflexão e do reflexionamento responsável não somente pela passagem de patamares, mas também pela formação deles.

Pode-se dizer então que se trata de um processo espiral, buscando formas cada vez mais ricas, ou seja, reconstruindo em um novo patamar a partir do que se tem no anterior. Isto quer dizer, segundo o autor:

> todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim referidos exigem a construção de novas formas devido a reflexão. Há, assim, pois, uma alternância ininterrupta de reflexionamentos→ reflexões → reflexionamentos; e (ou) de conteúdos→ formas→ conteúdos reelaborados→ novas formas, etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto. (ibid, p.277)

Neste sentido, o desenvolvimento da abstração reflexiva ocasiona a formação de novas formas em relação aos conteúdos, que podem dar origem à elaboração das estruturas lógico-matemáticas.

A abstração pseudo-empírica desempenha o papel de *"suporte e auxiliar das abstrações reflexionantes"* (ibid, p.277), ocorrendo nos níveis elementares e no operatório-concreto, no qual o sujeito *"para efetuar uma composição operatória e para julgar seus resultados, tem necessidade de vê-las inseridas em objetos"* (Piaget et al, 1995).

O papel da abstração refletida fica cada vez mais importante à medida que o pensamento vai perdendo a necessidade dos apoios concretos, chegando assim ao nível formal.

Piaget ressalta que esta evolução das abstrações pseudo-empíricas e refletidas é

> caracterizada por esta inversão de suas proporções, as primeiras, perdendo seu valor relativo (sem jamais desaparecer, mesmo no homem de ciência), as segundas contrariamente, aumentando o seu (sem que, por isso, estejam ausentes nos níveis elementares). (ibid, p.278)

O processo de abstração reflexiva ocorre em todos os níveis de desenvolvimento, apresentando uma evolução, mas permanecendo da mesma natureza (Piaget et al, 1995). Neste sentido, Castro (1996), destaca que:

> Por meio da abstração reflexiva (um dos motores do desenvolvimento cognitivo e um dos aspectos mais marcantes do processo de equilibração) manifesta-se a atividade do sujeito desde as etapas elementares do desenvolvimento, quando há apenas a passagem da ação à sua representação até os níveis superiores nos quais a reflexão se exerce sobre ela própria. As condições de atividade reflexiva não evoluindo, mas o processo é sempre da mesma natureza. Inclui uma progressiva conceptualização na passagem de uma atividade física a uma representação mental, distingue entre a forma e o conteúdo de um conceito, caracteriza a reconstituição da seqüência das ações, intervém no processo de comparação e culmina com forma de reflexão 'em segundo grau' e processos mais avançados de reorganização de esquemas nas atividades de criação e invenção. (p.24)

A função do professor deveria ser promover o potencial reflexivo do aluno, seja por meio de situações concretas, seja por situações hipotéticas em níveis mais elevados do desenvolvimento (ibid).

Embora reconheça que o processo de reflexão é pessoal e íntimo, Castro (ibid) destaca o papel das interações sociais:

> O incentivo à comunicação entre colegas, na escola , não significa ignorância do valor da reflexão pessoal, mas o reconhecimento de que a troca e a comunicação exigem esforços de tomada de consciência e de clareza de pensamento, que só podem ocorrer no decurso da reciprocidade e da cooperação intelectual. (p.25)

Coutinho (1988) enfoca o problema da abstração, destacando-a como relevante para a compreensão do processo de conhecimento humano. O autor usa como fundamento as contribuições da Filosofia e Psicologia, abrangendo os objetivos e métodos da Epistemologia Genética e as contribuições clássicas que vão de Aristóteles até Locke. Reconhece que o processo de abstração tem na Epistemologia Genética o enfoque mais integrado e completo.

O pensamento lógico tem como fonte as coordenações gerais da ação. Juntamente com as experiências lógico-matemáticas, o papel inicial das ações constitui preparação necessária para o desenvolvimento do espírito dedutivo, segundo Piaget (1989). Este fato deve-se a duas razões. Primeiro é que

> as operações mentais ou intelectuais, que intervêm nessas deduções ulteriores, derivam precisamente de ações: estas são ações interiorizadas e quando esta interiorização, com as coordenações que ela supõe, é suficiente, as experiências lógico-matemáticas, enquanto ações materiais são inúteis. (p.3)

Segundo, porque, com a interiorização das coordenações de ações e as experiências lógico-matemáticas, propicia-se a formação da abstração lógica e matemática, designada abstração reflexiva (ibid).

Estes pressupostos teóricos foram tratados até aqui a fim de compreender o porquê de uma intervenção com jogos de regras poderia favorecer processos cognitivos de crianças. Neste sentido a teoria da equilibração oferece-nos um referencial que pode explicar o por que o jogo desenvolve.

O jogo gera uma situação-problema que exige do sujeito compensação dos desafios e perturbações para obter um bom resultado (Brenelli, 1996). O conteúdo de um jogo geralmente é fácil de ser aprendido, já que os objetivos e resultados são claros ao sujeito, a dificuldade está em analisar os meios, aqueles mais eficazes conforme o objetivo desejado.

Na análise dos meios, os erros e lacunas podem ser percebidos, tornando possível a construção de estratégias novas. Mudar os meios significa realizar uma regulação ativa que envolve escolhas deliberadas e conscientes, possibilitando ao sujeito encontrar caminhos diferentes para alcançar seus objetivos, quando os anteriores se constituíram insuficientes.

A tomada de consciência para Piaget (1977) ocorre por meio de regulações ativas que envolvem reconstruções sucessivas. O autor ressalta que

> a tomada de consciência parte da periferia para o centro (objetivos e resultados), orienta-se para as regiões centrais da ação quando procura alcançar o mecanismo interno deste reconhecimento dos meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a experiência. (p.198)

A tomada de consciência supõe uma conceituação, contudo, antes implica coordenações realizadas no plano da ação material. Há necessidade de uma reconstrução para explicar as ligações materiais dos objetos que foram assimiladas pelas ações dos sujeitos. Os graus de consciência são dependentes de diferentes graus de integração. Piaget (ibid) afirma que *"o mecanismo da tomada* *de consciência é um processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação"* (p.204).

Estes aspectos referentes à tomada de consciência da ação foram descritos devido a sua relevância. A intervenção por meio de jogos procura favorecer as "tomadas de consciência", possibilitando a passagem da ação à compreensão.

A relação entre o fazer com êxito (no sentido de *réussir*) e compreender também devem ser considerados num trabalho de intervenção. Segundo Piaget (1978a),

> fazer é compreender em ação dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos. E compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação. (p.176)

A construção de procedimentos, a compreensão das relações que levam aos êxitos ou fracassos, ou seja, o êxito no jogo, deve-se à compreensão do mesmo (Brenelli, 1996)

Este fato que direciona a invenção de novos meios buscando êxito remete-nos à construção dos possíveis. Piaget (1985) destaca que *"o possível é essencialmente invenção e criação"* (p.08). O possível depende da equilibração, já que parte das vitórias sobre as resistências do real e de lacunas a serem preenchidas, sendo que uma variação suscita a existência de outra. É resultado de uma acomodação em busca de se atualizar e dependente de flexibilidade e solidez dos esquemas e resistência do real.

O contexto lúdico, possibilitando a invenção de novos procedimentos, permite a construção de possibilidades e de necessidades. Neste sentido, Brenelli (1996) ressalta que *"os possíveis dizem respeito aos diferentes meios de se alcançar o resultado, e a necessidade, à coerência e à integração dos meios em* *função dos resultados"* (p.39). Sendo assim, cada procedimento novo usado no jogo trata-se de uma criação.

A intervenção pedagógica com os jogos Pega-varetas e Jogo de Argolas tem como intenção permitir a construção de instrumentos de pensamento para a aprendizagem e apreender conteúdos referentes à noção de multiplicação.

Neste contexto, torna-se necessário conhecer as etapas de evolução do pensamento da criança. Como já foi dito o desenvolvimento mental, segundo Piaget (1995) procede por estágios que revelam construções autênticas e sucessivas; consistindo em uma descentralização do ponto de vista egocêntrico para colocá-lo em coordenação mais ampla de relações. Paralelamente ao desenvolvimento da inteligência, de maneira complementar e indissociável, a afetividade se desenvolve, sendo esta última responsável pela regulação de energia, orientando-se em libertar o eu para alcançar a reciprocidade e os valores de cooperação. Segundo Piaget (ibid), *"a tendência mais profunda de toda atividade humana é a marcha para o equilíbrio. E a razão - que exprime as formas deste equilíbrio - reúne nela a inteligência e a afetividade"* (p.70).

Do ponto de vista do equilíbrio, há uma diferença entre as estruturas variáveis, que são os estados de equilíbrios sucessivos, e o funcionamento constante, responsável pela passagem de um estado ao seguinte. Em se tratando do ponto de vista funcional, há funções comuns e constantes a todas as idades. As estruturas variáveis marcam as diferenças de um nível de conduta para outro (ibid).

As estruturas variáveis, segundo Piaget (ibid), *"são as formas de organização da atividade mental, sob um duplo aspecto: motor ou intelectual de uma parte, e afetivo, de outra, com suas duas dimensões, individual e social"* (p.13). O autor dividiu este desenvolvimento em quatro períodos: Sensório-motor, Pré-operatório, Operatório concreto e Operatório formal.

No período Sensório-motor, há um grande desenvolvimento mental que vai do nascimento à aquisição da linguagem. A criança conquista pela percepção e pelos movimentos o universo prático ao seu redor. O fato de não haver no início nenhuma diferenciação entre o eu e o mundo exterior faz com que tudo seja percebido por meio da própria atividade. A consciência só alcança um universo objetivo passando por um egocentrismo inconsciente e integral, com progressos da inteligência sensório-motora. As noções de objeto, espaço, causalidade e tempo são construídas neste período como categorias práticas.

A afetividade também passa por uma evolução, surgindo os primeiros medos, depois os sentimentos elementares de agradável, desagradável, prazer e dor, sucesso e fracasso. A criança passa pela objetivação dos sentimentos e começa a se preocupar com outras atividades sem ter o eu como único centro.

No período Pré-operatório concreto (2 a 7 anos aproximadamente) ocorre a interiorização dos esquemas construídos no período anterior, consistindo na representação das ações da criança. A inteligência prática passa a ser substituída pela inteligência representativa graças à função semiótica, possibilitando à criança libertar-se da realidade atual evocando simbolicamente objetos e acontecimentos. As condutas que manifestam a presença da função simbólica ou semiótica são: imitação diferida ou adiada, imagem mental, desenho, jogo simbólico e a linguagem.

A função semiótica permite a representação por meio da diferenciação entre significante e significado, indiferenciados no período anterior.

O aparecimento da linguagem modifica os aspectos afetivo e intelectual das condutas, a criança é capaz de reconstruir ações passadas (narrativas) e antecipar as futuras (representação verbal). Inicia-se a socialização da ação e o pensamento propriamente dito, que tem na intuição sua forma mais evoluída. No plano afetivo, ocorre o desenvolvimento de sentimentos interindividuais.

Piaget (1995) aponta algumas características do pensamento pré-operacional: egocentrismo, irreversibilidade, animismo, finalismo e artificialismo.

O egocentrismo pré-operacional caracteriza-se pela incapacidade da criança em coordenar os diferentes pontos de vista, não considerando que este é apenas um entre os demais. Isto quer dizer que não consegue se colocar no papel de outra pessoa.

A irreversibilidade consiste na incapacidade de se voltar ao estado inicial do pensamento, fazendo com que a criança entre em contradição, não conseguindo manter sua premissa inalterada enquanto raciocina.

O finalismo é a tendência em acreditar que tudo tem uma finalidade. As crianças acreditam não haver acaso na natureza e que tudo é feito para o homem e para a criança, sendo o ser humano o centro.

O animismo tende a conceber as coisas como vivas e com intenção, faz com que a criança acredite que tudo que realiza uma atividade é vivo. O animismo e o finalismo mostram uma confusão entre o mundo interior, o subjetivo, e o universo físico.

O artificialismo é a tendência em achar que as coisas foram construídas pelo homem ou por uma atividade divina. Há uma indiferenciação entre o psíquico, o físico e o egocentrismo intelectual, sendo que as leis naturais se confundem com as leis morais e o determinismo com a obrigação.

Em relação à afetividade, desenvolvem-se os primeiros sentimentos interindividuais ligados à socialização das ações: afeições, simpatias e antipatias; os sentimentos de autovalorização (sentimento de "inferioridade" ou de "superioridade"); e os interesses.

O sentimento unilateral de respeito perdura por este período, composto por afeição e temor. Conseqüentemente a moral é heterônoma, ou seja, depende da vontade exterior dos adultos. As regras são compreendidas de maneira rígida, sem alcançar, contudo, sua essência.

O papel do jogo é importante neste período, pois suscita o interesse ligado à motivação. A criança tem prazer em jogar e começa a respeitar as regras como sendo imutáveis. No entanto, a estrutura de jogo que prevalece é a simbólica (ibid).

A passagem do período Pré-operatório para o período Operatório-concreto se dá quando o pensamento intuitivo e irreversível alcança mobilidade, descentralização, coordenando-se em estruturas de conjunto, dando lugar às operações. As construções iniciadas no período anterior são complementadas por formas de organizações novas, alcançando um equilíbrio mais estável graças à reversibilidade. Trata-se do início das operações concretas ligadas à ação, que se estruturam logicamente. Inicia-se o período Operatório-concreto, no qual os estados e as transformações são compreendidas.

A criança torna-se capaz de colaborar efetivamente nos trabalhos em grupo, conseguindo cooperar e dissociar seu ponto de vista dos demais. As discussões são possíveis à medida que a criança é capaz de compreender o ponto de vista dos outros e defender o seu, a linguagem egocêntrica é abandonada em favor da necessidade de justificar logicamente suas idéias. A criança pensa antes de agir. No campo da afetividade desenvolve-se a moral de cooperação e autonomia pessoal.

Estes aspectos são extremamente importantes quando se propõe uma intervenção com jogos. Em se tratando de jogos em grupos, a criança se depara com pontos de vista diferentes do seu. Para obter êxito em suas jogadas, deverá refletir antes de fazê-las, tentando decidir qual será o melhor meio. Além disso, precisa estar atenta às jogadas das demais crianças, procurando verificar se estão respeitando as regras conforme foi combinado anteriormente. No final do jogo são capazes de refletir sobre os procedimentos utilizados que conduziram a resultados bons ou maus. Tudo isto graças ao fim do egocentrismo e ao início da reflexão (ibid).

Enquanto no período Pré-operatório o pensamento permanece intuitivo, não formando um sistema único que engloba os estados e transformações, no período Operatório concreto as situações se subordinam às transformações em si mesmas. A reversibilidade se completa e permite que as regulações precedentes se coordenem em estruturas de conjunto bem definidas. A assimilação egocêntrica se transforma em assimilação racional, e a realidade é estruturada pela razão.

A noção de operação é aplicada a várias realidades definidas: operações lógicas, aritméticas, geométricas, temporais, mecânicas, físicas. A operação, segundo Piaget (1995), é uma ação qualquer de origem motora, perceptivas ou intuitivas, sendo a matéria-prima da inteligência sensório-motora e da intuição. A ação se torna operação *"logo que duas ações do mesmo gênero possam compor uma terceira que pertença ainda a este gênero e desde que estas diversas ações possam ser invertidas"* (ibid, p.51).

A reversibilidade deste período se constitui por inversões e reciprocidades. Segundo Piaget, a série indefinida de números e as operações de soma, multiplicação e seus respectivos inversos, passam a ser acessíveis à criança nesta fase, pois *"o número é um composto de certas operações precedentes (classes e relações) e supõe, em conseqüência, sua construção prévia"* (ibid, p.52). O pensamento infantil, para se tornar lógico precisa de uma organização de sistemas de operações que obedeçam às seguintes leis de conjunto:

> 1°.Composição: duas operações de um conjunto podem-se compor entre si e dar ainda uma operação do conjunto (Exemplo: 1+1=2). 2°. Reversibilidade: toda operação pode ser invertida (Exemplo: +1 inverte-se em -1) 3°. A operação direta e seu inverso dão uma operação nula ou idêntica (Exemplo: +1-1=0). 4°. As operações podem-se associar entre si de todas as maneiras. (ibid, p.52)

Sendo assim, a passagem da intuição à lógica ocorre neste período, com a formação de grupos ou agrupamentos, o que quer dizer que *"as noções e relações não se podem concluir isoladamente, mas constituem organizações de conjuntos, nas quais todos os elementos são solidários e se equilibram entre si"* (Piaget, 1995, p.52).

Em relação à vida afetiva, surgem novos sentimentos morais e a organização da vontade; o respeito unilateral é substituído pelo respeito mútuo graças a cooperação, que é compreendida por Piaget como a capacidade de realizar operações interindividuais.

Quanto às regras, as crianças menores acreditam que são verdadeiras aquelas que sempre foram utilizadas pelos antepassados, criadas pelos mais velhos, não tendo valor as regras novas criadas por outra criança. Neste período (Operações concretas), porém, uma nova regra pode se tornar verdadeira se houver consenso ou comum acordo de todos. O respeito mútuo presente nas regras faz surgir os sentimentos morais de honestidade entre os jogadores, o companheirismo e a justiça.

Num trabalho de intervenção com jogos de regras deve-se considerar este aspecto como importante. As regras são respeitadas, já que resultaram do consenso entre os jogadores. O respeito mútuo e o sentimento de justiça são fundamentais para o desenvolvimento da autonomia. Para Kamii (1981),

> a essência da autonomia é que as crianças tornem-se aptas a tomar decisões por si mesmas. Mas a autonomia não é a mesma coisa que a liberdade completa. A autonomia significa levar em consideração os fatores relevantes para decidir agir da melhor forma para todos. Não pode haver moralidade, quando se considera apenas o próprio ponto de vista. Quando uma pessoa leva em consideração os pontos de vista das outras, não está mais livre para mentir, quebrar promessas e ser leviana. (texto mimeografado)

Além disso, os jogos em grupo permitem as discussões, podendo os sujeitos trocarem seus pontos de vista. Este aspecto é bastante importante à medida que a correção entre os colegas mostra-se mais eficaz do que a feita pelo professor. Kamii (1995) destaca que, "*de acordo com o construtivismo, as crianças aprendem modificando velhas idéias, e não acumulando informações novas de novos pedacinhos*" (p.118). Assim, o jogo pode ser entendido como um elemento propício para troca de idéias e coordenação de pontos de vista diferentes.

Contudo, neste período, as operações dependem diretamente dos objetos, portanto, são concretas. A criança não realiza operações baseadas em proposições, que se manifestam no período subseqüente do desenvolvimento cognitivo, designado por Operações formais, cujo conteúdo transformando-se em forma, possibilita o pensamento Hipotético-dedutivo.

Problema e Justificativa

> *"Ser capaz de colocar continuamente em questão suas próprias opiniões — esta é, para mim, a condição preliminar de qualquer inteligência."*
>
> *Ítalo Calvino*

De acordo com os aspectos teóricos destacados e as pesquisas apresentadas anteriormente, o problema da presente pesquisa pode ser assim delineado: "em que medida uma intervenção pedagógica em sala de aula, via jogos de regras, poderia favorecer a construção da noção de multiplicação em crianças que freqüentam a terceira série do ensino fundamental, e esta construção se apóia em que níveis de abstração reflexiva?"

Tal problema encontra justificativas na teoria piagetiana, a qual, além de analisar a construção do conhecimento lógico-matemático como resultante do processo de abstração reflexiva, responsável pela criação de novas formas, enfatiza também o papel dos desequilíbrios ou conflitos na construção do conhecimento.

A noção de multiplicação num contexto teórico piagetiano é caracterizada como um conhecimento de natureza lógico-matemática, o qual procede por abstrações reflexivas. Sendo o jogo um meio que possibilita desencadear tal processo por meio de situações-problema, capazes de gerar conflitos ou contradições, conduzindo a regulações que desempenham um papel necessário na equilibração ou reequilibração, acredita-se que a presente pesquisa poderá contribuir para esclarecer o papel do jogo numa situação de intervenção, tanto na construção de uma noção como nas possibilidades de desencadear o desenvolvimento do pensamento.

Objetivos

"Nenhum vento sopra a favor de quem não sabe para onde ir."

Sêneca

1) Verificar o desempenho dos sujeitos em relação à multiplicação em situações que mais se assemelham àquelas freqüentemente utilizadas na escola.

2) Avaliar o nível de construção da noção de multiplicação de crianças que freqüentam uma classe de terceira série do ensino fundamental.

3) Avaliar os níveis de abstração reflexiva destas crianças e sua relação com a construção da noção de multiplicação.

4) Verificar a construção da noção de multiplicação e os níveis de abstração reflexiva das crianças após serem submetidas a uma intervenção pedagógica com jogos.

5) Verificar se a aquisição da noção de multiplicação apóia-se em níveis mais evoluídos de abstração reflexiva.

Método

"Nós geralmente descobrimos o que é fazer percebendo aquilo que não devemos fazer. E provavelmente aquele que nunca cometeu um erro nunca fez uma descoberta."

Samuel Smiles

Sujeitos

Foram estudados 17 sujeitos que compunham uma classe de terceira série do ensino fundamental da Cooperativa de Ensino Dr. Zerbini / COOPEN, da cidade de São José do Rio Preto, com os quais se realizou uma intervenção pedagógica via jogos. Foram divididos em quatro grupos escolhidos aleatoriamente.

Materiais

⇨ *Prova Construção de Múltiplos Comuns (Abstração Reflexiva)*
(Piaget, 1995, p.30-42).

Na situação I foram utilizados os seguintes materiais: dois conjuntos de fichas de cartolina de cores vermelho e verde.

Na situação II foram utilizados os seguintes materiais: dois conjuntos de peças de madeira de cores e tamanhos diferentes, as azuis (A) valem duas unidades e as vermelhas (V) valem três unidades.

⇨ *Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas*
(Granell; 1983, p.129-147).

Para esta prova foram utilizados:

- nove diferentes minibrinquedos;
- nove cartões em cartolina, representando em cada um deles os numerais de um a nove;
- uma caixa contendo um conjunto de fichas;
- uma caixa contendo conjuntos dos diferentes minibrinquedos.

⇨ *Prova Escolar*

Para esta prova foram elaborados 5 problemas que envolviam multiplicação e divisão e 5 operações de multiplicação.

⇨ *Jogo Pega-varetas*

Conjunto de 41 varetas coloridas assim apresentadas:

14 varetas amarelas,

14 varetas vermelhas,

06 varetas verdes,

06 varetas azuis,

01 vareta preta.

⇨ *Jogo de Argolas*

Composto por nove hastes de madeira coloridas (verde, azul, vermelho, rosa, amarelo, branco, marrom, laranja e preto) fixadas numa base quadrada, indicando pontos que variam de um a nove; conjunto de argolas; conjunto de fichas confeccionadas em papel cartão com as respectivas cores das hastes.

Procedimento de Coleta de Dados

O procedimento de coleta de dados obedeceu a três fases:

Fase 1: Pré-teste

Fase 2: Intervenção Pedagógica

Fase 3: Pós-teste

Fase 1 / Pré-teste

O experimentador aplicou, individualmente, aos 17 sujeitos o pré-teste composto das provas a seguir.

- Para verificar o nível de abstração reflexiva foi utilizada a Prova de Construção de Múltiplos Comuns elaboradas por Piaget et al (1995, p.30-42). Os procedimentos encontram-se no anexo 1. É importante ressaltar que a situação III do experimento (rodas denteadas) foi suprimida. A razão desta opção deve-se ao fato de a situação ser muito complexa por se tratar de uma relação numérica que exprime variáveis cinemáticas, e o experimento constatou, segundo Piaget: *"um sentimento de surpresa ainda nos sujeitos de nível IIA"* (p.42). Somente no nível III (operações formais) os sujeitos bem compreenderam o problema proposto.
- Para verificar o nível de construção da noção de multiplicação foi utilizada a Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas inspiradas em Granell (1983, p.129-147). Os procedimentos encontram-se no anexo 2.
- Para verificar o desempenho dos sujeitos em situações semelhantes às situações escolares foi aplicada a Prova de Problemas e Operações de Multiplicação. (anexo 3).

Fase 2 / Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica foi realizada pela professora e pelo experimentador a toda a classe, durando cada sessão em média 60 minutos. Mediante sorteio, quatro grupos foram organizados: um grupo com cinco e três grupos com quatro sujeitos. Previamente, o experimentador trabalhou com a professora, explicando os procedimentos que seriam utilizados na intervenção, bem como os objetivos das situações-problema que seriam propostas.

Os jogos escolhidos foram o Pega-varetas e o Jogo de Argolas.

Para os jogos Pega-varetas e Argolas foram elaborados roteiros de atividades que foram propostos aos sujeitos; além de questões relacionadas aos jogos, que envolviam conteúdos de multiplicação. As atividades obedeceram às seguintes etapas:

A) aprendizagem do jogo;

B) conhecimento do material de cada jogo, o jogo em si onde o experimentador esteve atento aos procedimentos utilizados, representações gráficas e cálculos aritméticos.

Serão apresentadas, a seguir, as análises dos jogos que foram utilizados durante a intervenção.

Análise do jogo Pega-varetas e etapas de intervenção

O jogo Pega-varetas é um jogo chinês muito antigo, também conhecido como Mikado ou Xangai. Trata-se de um jogo que exige muita paciência, concentração e habilidade manual de seus participantes.

A análise utilizada nesta pesquisa foi retirada do trabalho feito pelo Laboratório de Psicopedagogia do Instituto de Psicologia da USP, coordenado pelo professor Lino de Macedo (LaPp). O LaPp desenvolve trabalhos didático-científicos relacionados a psicopedagogia, aprendizagem escolar, construtivismo e jogos de regras.

Este jogo é bastante conhecido pelas crianças e pode ser jogado a partir dos quatro-cinco anos de idade, sendo que as crianças desta faixa etária apresentam dificuldades em relação à espessura dos palitos. O LaPp (sem data) destaca que

> além do desenvolvimento psicomotor, de coordenação, motora manual, atenção e concentração, o Pega-Varetas coloca em movimento as idéias que as crianças têm sobre números, como realizam operações aritméticas e o que compreendem do sistema numérico decimal. (p.4)

Objetivo

O jogo tem como objetivo apanhar cada vareta sem mover qualquer outra. As varetas apresentam cores variadas, sendo que cada cor tem seu valor específico. Há uma única vareta preta denominada General ou Mikado, que é a mais poderosa, podendo ser usada por quem a possui para ajudar a apanhar qualquer outra vareta.

Regra

Um dos jogadores junta todas as varetas formando um maço, solta então o maço sobre uma superfície plana e lisa. Em seguida, vai pegando uma a uma sem que se movam as restantes. Para fazer isso, é preciso que o jogador observe a disposição e a relação entre as varetas, percebendo qual é a jogada que lhe garanta maior segurança e lhe seja mais valiosa. O jogador que fizer outra vareta mexer, deixa a que estava tentando pegar e é a vez de outro jogador.

Há variações nas regras para soltura e o resgate das varetas, variando conforme os diferentes fabricantes. No final da partida são contados os pontos, verificando assim o vencedor.

A versão do jogo utilizada é a brasileira que consiste em 41 varetas coloridas da seguinte maneira:

⇨ 14 amarelas que valem 5 pontos cada;

⇨ 14 vermelhas que valem 10 pontos cada;

⇨ 06 verdes que valem 15 pontos cada;

⇨ 06 azuis que valem 20 pontos cada;

⇨ 01 preta (General) que vale 50 pontos.

Estes valores convencionais são muito altos para as crianças operarem no início do primeiro grau. O LaPp propõe uma substituição destes valores, levando-se em conta que todos são múltiplos de cinco. Para se chegar a estes valores, sem alterar a hierarquia entre eles, divide-se cada número pelo Máximo Divisor Comum (5), obtendo os seguintes valores:

⇨ amarela = 01 ponto (5 : 5 = 1)

⇨ vermelha = 02 pontos (10 : 5 = 2)

⇨ verde = 03 pontos (15 :5 = 3)

⇨ azul = 04 pontos (20 : 5 = 4)

⇨ preta = 10 pontos (50: 5 = 10)

Na presente pesquisa, optou-se por esta modalidade de pontos porque os sujeitos que foram estudados freqüentam o ensino fundamental.

<u>Roteiro de intervenção com o jogo Pega varetas</u>

I) Aprendizagem do Jogo - Parte A

O objetivo desta etapa foi apresentar o jogo aos sujeitos, suas peças e regras, permitindo que aprendessem como se joga. Para a aprendizagem do jogo foram realizadas três partidas.

Nesta atividade o experimentador entregou as peças do jogo aos sujeitos, e perguntou sobre os conhecimentos que os sujeitos possuíam do jogo.

Questões: *"Vocês conhecem este jogo?"*

"Vocês já jogaram?" "Como é que se joga?"

"Quem ganha o jogo?"

A partir daí foram combinadas as regras do jogo.

O experimentador observava e registrava como cada sujeito jogava, deixando a contagem e o registro dos pontos espontâneos, sem nenhuma intervenção.

II) Intervenção pedagógica com o jogo Pega-varetas

A) Conhecimento lógico-matemático: classificação

O sujeito foi solicitado a classificar as varetas segundo um critério determinado por ele próprio, depois descobrir quantas varetas havia de cada cor; a seguir solicitava-lhe que representasse graficamente as peças do jogo.

Começava-se então a contagem dos pontos obtidos.

B) Operações aritméticas

A contagem de pontos consistiu em um momento muito rico para se trabalhar as operações. Esta situação propiciava à criança estabelecer relações entre suas varetas e as dos colegas. Os sujeitos eram solicitados a arrumar as varetas obtidas. A seguir, contar o número de pontos (observar o valor atribuído a cada vareta, se é unidade ou o valor combinado, segundo as regras) e, após a contagem, o experimentador colocava as questões: *"Como podemos fazer para não esquecermos quantos pontos fizemos?"*. Se as crianças não chegassem a realizar nenhuma forma de representação, o experimentador sugeria: *"E se a gente marcasse os pontos no papel?"* Assim se procedeu com todos os jogadores. Inicialmente, as crianças receberam papel e lápis coloridos para marcar seus pontos espontaneamente. O experimentador observava a forma de registro dos sujeitos. Em seguida, solicitava-lhes a comparação de seus registros, se era possível determinar o vencedor e como se fazia para tal.

A partir do momento em que as crianças apresentavam os registros, o experimentador sugeria como os pontos poderiam ser marcados usando a Matemática. O objetivo destas questões era permitir diferentes representações gráficas do jogo. Coube ao experimentador observar as formas de representação utilizadas, por exemplo desenhos, símbolos, e como procediam com a Matemática.

C) Relações de equivalência entre os valores das varetas

Esta situação teve como objetivo permitir à criança obter o mesmo número de pontos utilizando outras varetas de valores diferentes. Esta atividade solicitava a descoberta dos diferentes valores das varetas e suas possíveis equivalências.

O experimentador propunha as questões: *"Você conseguiu pegar três varetas amarelas e duas varetas azuis. Quantos pontos você fez?" "Como você faz?". "Será que você poderia fazer o mesmo número de pontos com outras varetas?"*

Se o sujeito dissesse sim, o experimentador solicitava ao sujeito que pegasse as varetas e as representasse no papel. Prosseguia-se o questionamento: *" Tem mais algum jeito?", "Tem um jeito melhor?" "Tem um jeito mais difícil?"*, até a criança considerar que não havia mais possibilidades.

Se o sujeito dissesse não, o experimentador continuava perguntando: *"Mas e se a gente pegasse outras varetas de outras cores, será que não conseguiríamos chegar ao mesmo número de pontos?"* Após todas estas questões, o sujeito era solicitado a reconstituir a sua ação, mostrando como fez e como poderia ser feito usando a Matemática.

Assim se procedeu com todos os jogadores, alterando o número de varetas e suas cores. Em seguida, era proposto à criança se havia uma maneira de se obter o mesmo valor de pontos pegando só uma cor de vareta. Solicitava-lhe então, que mostrasse o que fez com as varetas, primeiro em ação, depois em forma de representação.

D) Relações multiplicativas

Esta situação teve como objetivo permitir à criança entrar em contato com as relações multiplicativas e como a multiplicação era utilizada.

O experimentador colocava a seguinte situação: *"Vamos fazer de conta que estamos jogando e para cada duas varetas amarelas que eu pego, você pega uma verde. No final do jogo eu peguei seis varetas amarelas, quantas verdes você pegou? Como você sabe? E quantos pontos você fez? Por quê? Quem fez* *mais pontos?" "Qual foi a melhor jogada, quem jogou melhor? Por quê?" "Mostre-me como você fez."*

Assim, prosseguia o experimentador mudando os valores e o número de varetas.

III) Pega-varetas: parte B / troca de varetas

A) Relações multiplicativas

Era proposta após o término do jogo e a contagem dos pontos, uma situação de jogo que envolvia troca de varetas: "*Vocês podem trocar suas varetas entre si desde que após a troca fiquem com o mesmo valor de pontos.*"

Outras situações-problema eram colocadas: "*Você pegou uma vareta azul; por quais varetas você pode trocar ficando com os mesmos pontos, sem sobrar ou faltar pontos?" "Como você faz?" "Mostre-me como você fez." "Você pegou duas varetas vermelhas; quantos pontos fez?" "Se fosse trocar somente por varetas amarelas, com quantas amarelas você ficaria?"*

Análise do Jogo de Argolas e etapas de intervenção

O Jogo de Argolas é um jogo de alvo. Segundo Kamii e DeVries (1990), nestes jogos os jogadores têm os objetos como alvos, "*o que requer conhecimento o de como os objetos reagem sob diferentes ações" (derrubar, arremessar, empurrar, rolar, chutar e assoprar um objeto)* (p.50-1). Estas ações são muito importantes, pois permitem que a criança adquira o conhecimento físico e lógico-matemático, segundo Piaget.

Os jogos de alvos também trabalham a noção de espaço, pois fazem com que a criança tente direcionar um objeto em relação ao seu alvo. As autoras destacam que, "*depois de uma tentativa, as crianças relacionam suas expectativas com os resultados efetivamente obtidos. Assim, todos os jogos de* *alvo exigem abstração reflexiva, além de coordenação perceptiva-motora"* (ibid, p.56-7).

No Jogo de Argolas, a criança precisa avaliar a força e a direção do arremesso para atingir o alvo, sendo que uma distância maior exige mais força.

Objetivo

O Jogo de Argolas tem como objetivo acertar o alvo pela ação de arremessar argolas.

Regra

Os jogadores ficam atrás de uma linha demarcada no chão e arremessam argolas em direção ao alvo. Quando o jogador encaixa a argola, marca pontos, sendo que, em cada jogada, pode fazer vários arremessos.

Os alvos coloridos apresentam o valor de pontos conforme sua cor:

Alvo Verde: 01 ponto

Alvo Rosa: 02 pontos

Alvo Amarelo: 03 pontos

Alvo Azul: 04 pontos

Alvo Vermelho: 05 pontos

Alvo Preto: 06 pontos

Alvo Marrom: 07 pontos

Alvo Laranja: 08 pontos

Alvo Branco: 09 pontos

Os alvos foram introduzidos aos poucos em três situações, sendo que cada situação é utilizada em duas partidas:

Situação A: Alvos com valores 1, 2, 3 e 4;

Situação B: Alvos com valores de 1 a 4 mais os alvos 5, 6, 7, 8 e 9.

Roteiro de intervenção com o Jogo de Argolas

I) Aprendizagem do jogo

Esta situação teve como objetivo propiciar ao sujeito o conhecimento das peças que compunham o jogo: as hastes e seus respectivos valores, as argolas, as fichas e as regras. O experimentador mostrava as peças do jogo e perguntava:

"Vocês já viram este jogo?"

"Alguém sabe como se joga?"

"Quem ganha o jogo?"

Após combinarem as regras, o jogo começava. Três partidas foram propostas, sendo que, em cada partida, cada jogador arremessava cinco argolas. Após cada jogada, contava-se os pontos seguidos de registros espontâneos.

Exemplo: O sujeito acertou três argolas no alvo vermelho (cinco pontos), então, para cada argola ele deve pegar um montinho de cinco fichas vermelhas. O experimentador diz : *"Você conseguiu acertar três argolas no alvo vermelho, como você pode fazer para pegar as fichas vermelhas?" "Como você sabe? Mostre-me como você fez."* Assim se procedeu durante o jogo.

II) Intervenção pedagógica com o Jogo de Argolas

Apesar de o jogo possibilitar o conhecimento físico, dada à natureza do presente trabalho, o experimentador centrou a intervenção pedagógica nas questões relativas à aritmética, principalmente em relação à noção de multiplicação, implícitas nas atividades lúdicas.

A) Correspondência de um para muitos

O experimentador colocava situações a fim de permitir ao sujeito que realizasse correspondência entre as hastes e o respectivo valor das fichas (correspondência de um para muitos).

"Uma argola sua caiu na haste de número cinco; quantas fichinhas você pegaria para mostrar os pontos que tirou?"

Assim se procedeu com todas as hastes, seguidas de representação gráfica: *"Como você marcaria usando lápis e papel?"*

B) Correspondência muitos para muitos

Nesta atividade o sujeito era solicitado a fazer correspondência de muitos para muitos.

"Duas argolas caíram na haste que indica três pontos. Como você mostraria isso usando as fichinhas para dizer quantos pontos tirou?"

Após proceder até esgotarem todas hastes propunha-se: *"Mostre o que você fez usando lápis e papel."*

C) Operações aritméticas

Durante a contagem de pontos foram trabalhadas as operações aritméticas. Conforme os sujeitos foram acertando os alvos, o experimentador solicitava-lhes que contassem seus pontos e pegassem as fichas correspondentes.

"Você acertou uma argola no alvo de dois pontos e três argolas no alvo de três pontos. Quantos pontos você fez?" "Mostre-me como você fez." "Quantas vezes você tem que pegar as fichinhas para cada alvo?"

Com o objetivo de desenvolver noções multiplicativas colocava-se: *"De quantas maneiras eu consigo fazer doze pontos?"*

"Qual alvo você deve acertar para fazer 15 pontos?" "Quantas vezes é preciso acertar?" "Tem outros alvos que você poderia acertar e fazer 15 pontos?" "Quantas vezes é preciso acertar?"

O experimentador repetia o procedimento, alterando os valores seguidos de registros: *"Como poderíamos marcar os pontos usando lápis e papel? Como você faz?" E se a gente usasse a Matemática, como ficaria? Como você sabe?"*

Em seguida as formas de registro eram comparadas:

"Se você olhar o seu registro de pontos e o dos outros jogadores, você pode saber quem ganhou o jogo? Como você faz? Mostre-me como você fez?"

D) Relações multiplicativas

Esta situação teve como objetivo trabalhar a noção de multiplicação com questões mais elaboradas, envolvendo as variáveis da operação de multiplicação (multiplicando, multiplicador e produto). Situações colocadas pelo experimentador:

"Vamos fazer de conta que eu fiz quatro acertos no alvo de dois pontos. Quantos acertos você tem que fazer no alvo de quatro pontos, para conseguir marcar o mesmo número de pontos?"

(Sugeria-se ao sujeito que verificasse com as fichas, argolas e alvos). *"Se eu fizer duas jogadas e acertar três argolas no alvo de seis pontos em cada jogada, e você fizer três jogadas, quantas argolas tem que acertar em cada jogada no mesmo alvo marrom para fazer o mesmo número de pontos?"*

"Vamos supor que fizemos seis acertos cada um, sendo que cada vez que eu acertei o alvo de três pontos, você acertou o alvo de dois pontos. Então a cada três fichas correspondentes ao alvo de três pontos que eu pegar, você pega duas correspondentes ao alvo de dois pontos, e cada um esconde suas fichas." "Quem fez mais pontos? Como podemos descobrir?"

E) Noções do processo Inverso - Divisão

O objetivo desta situação foi trabalhar o processo inverso. A partir das fichas, a criança era solicitada a descobrir quantas vezes acertou e em quais alvos.

No momento em que as argolas não estivessem mais nos alvos, era proposto aos sujeitos que contassem somente com as fichas obtidas.

"Você tem 10 fichas azuis e quatro amarelas. Olhando suas fichas, você pode me dizer quantas vezes você acertou o alvo azul, e o amarelo? Como você faz?"

Colocava-se também:

"Vamos imaginar que as fichas tenham a mesma cor. Você acertou 20 fichas; que alvos você pode ter acertado? Mostre-me como você fez."

Fase 3: Pós-teste

Após a intervenção pedagógica o experimentador aplicou o pós-teste aos sujeitos (N=17) individualmente, utilizando as mesmas provas que fizeram parte do pré-teste, exceto a Prova de Problemas e Operações de Multiplicação.

Análise dos Resultados

> *"O que podemos experimentar de mais belo é o mistério. É a fonte de toda a arte e ciência verdadeiras que for alheio a esta emoção, aquele que não se detenha a admirar as coisas, sentindo-se repleto de surpresa, é como se estivesse morto: seu espírito e seus olhos são fechados."*
>
> *Albert Einstein*

Para atender os objetivos do presente estudo realizou-se uma análise qualitativa dos resultados.

Aplicou-se o pré-teste e o pós-teste com o objetivo de avaliar o nível de abstração reflexiva e da construção da noção de multiplicação e divisão aritméticas apresentados pelos sujeitos da pesquisa. O pós-teste teve por objetivo também verificar a evolução dos sujeitos após serem submetidos a uma intervenção com jogos de regras.

O pré-teste e o pós-teste foram compostos pelas provas: Abstração Reflexiva: Construção de Múltiplos Comuns (Piaget, 1977-1995) e Multiplicação e Divisão Aritméticas (Granell, 1983). Constou também do pré-teste uma Prova de Problemas e Operações de Multiplicação, cujo objetivo foi avaliar o conhecimento escolar que os sujeitos dispunham.

Em segundo lugar realizou-se uma breve análise da intervenção via jogos.

Prova I - Prova de Problemas e Operações de Multiplicação

Para verificar o desempenho dos sujeitos em relação à multiplicação em situações que mais se assemelhavam àquelas freqüentemente utilizadas nas escolas, foi elaborada uma prova composta por operações de multiplicação e problemas de enredo.

Contemplando cinco operações de multiplicação e cinco problemas de enredo que envolviam multiplicação e divisão, a prova foi aplicada coletivamente aos sujeitos (N=17) pela professora da sala. A professora procedeu lendo os problemas para a turma a fim de evitar dificuldades relativas à leitura e interpretação.

Para verificar o desempenho dos sujeitos em problemas e operações de multiplicação construíram-se as Tabelas 1 e 2.

A Tabela 1-"Desempenho nas Operações de Multiplicação", a seguir, indica os desempenhos dos sujeitos nas cinco operações que envolviam multiplicação. A letra C corresponde aos acertos, e a letra E, aos erros, variando a pontuação de 0 a 5.

Tabela 1-Desempenho nas Operações de Multiplicação

Sujeitos	1	2	3	4	5	Acertos	Erros
CAM (9; 1)[4]	C	C	C	C	C	5	-
DAN (9; 1)	C	E	C	E	C	3	2
DEB (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
ERI (9; 1)	C	C	C	C	C	5	-
FER (8; 9)	C	C	C	C	C	5	-
FLA (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
FLO (9; 0)	C	C	C	C	C	5	-
GAB (9;4)	C	C	C	C	C	5	-
INA (9; 5)	C	C	C	C	C	5	-
LUI (9; 6)	C	C	C	C	C	5	-
LUM (9; 8)	C	C	C	C	C	5	-
MAR (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
MAN (9;11)	C	C	C	C	C	5	-
MAT (10;2)	C	C	C	C	C	5	-
RAO (9;7)	C	C	C	E	C	4	1
ROD (9; 2)	C	C	C	E	C	4	1
ROM (9; 8)	C	C	C	C	C	5	-

Dos 17 sujeitos estudados, 14 apresentaram 100% de acertos, 2 acertaram 80%, e 1 sujeito apresentou 60% de acertos. Observando os erros, pode-se dizer

[4] (9; 1) corresponde à idade do sujeito, sendo o primeiro número referente aos anos e o segundo aos meses.

que estes se mostraram mais freqüentes nas operações 2 ou 4 (cf. Tabela 1) que envolviam multiplicação com reserva: os sujeitos ou negligenciavam, ou somavam de maneira incorreta os números correspondentes à reserva.

Nas resoluções de ROD (9; 2) apresentadas a seguir, pode-se observar um exemplo desse tipo de erro na quarta operação.

	3		6	
12	16	30	37	73
x4	x5	x5	x9	x3
48	80	150	301	219

Fig. 1-Resoluções Efetuadas por ROD nas Operações de Multiplicação

Na resolução da quarta operação, ROD (9; 2) somou de maneira incorreta o número correspondente à reserva. Entretanto, na segunda operação, também havia reserva, e o sujeito realizou a soma corretamente.

Nas resoluções de DAN (9;1), a seguir, pode-se observar um exemplo de negligência do número correspondente à reserva na operação 4 e um erro ao efetuar 5 x 6 na operação 2; entretanto, a soma correspondente à reserva foi efetuada corretamente.

	3		6	
12	16	30	37	73
x4	x5	x5	x9	x3
48	86	150	293	219

Fig. 2-Resoluções Efetuadas por DAN nos Operações de Multiplicação

Tais erros podem ser indicadores de que as operações em que se incluem reservas não se encontram totalmente constituídas no domínio da compreensão, ou sugerem, antes, um processo de construção da noção em nível da consciência. Contudo, um adequado desempenho geral é assegurado por outras operações que não incluem reserva.

Prosseguindo a avaliação do desempenho dos sujeitos em relação à multiplicação, foi construída a Tabela 2-"Desempenho nos Problemas de Enredo", indicando os desempenhos dos sujeitos nos 5 problemas de enredo. A letra C corresponde aos acertos e a letra E, aos erros, variando a pontuação de 0 a 5.

Tabela 2-Desempenho nos Problemas de Enredo

Sujeitos	1	2	3	4	5	Acertos	Erros
CAM (9; 1)	C	C	C	C	C	5	-
DAN (9; 1)	C	E	E	C	C	3	2
DEB (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
ERI (9; 1)	C	C	C	C	C	5	-
FER (8; 9)	C	C	C	C	C	5	-
FLA (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
FLO (9; 0)	C	C	C	C	C	5	-
GAB (9;4)	C	C	C	C	C	5	-
INA (9; 5)	C	C	C	C	C	5	-
LUI (9; 6)	C	C	C	C	C	5	-
LUM (9; 8)	C	C	C	C	C	5	-
MAR (9; 3)	C	C	C	C	C	5	-
MAN (9;11)	C	C	C	C	C	5	-
MAT (10;2)	C	E	E	C	C	3	2
RAO (9;7)	C	C	C	C	C	5	-
ROD (9; 2)	C	C	C	E	C	5	-
ROM (9; 8)	C	C	E	C	E	3	2

Dos 17 sujeitos da pesquisa, 14 apresentaram 100% de acertos e 4 acertaram 60% dos problemas.

Os erros apresentados pelos sujeitos encontram-se mais freqüentes nos problemas 2, 3 e 5. O problema 2 envolvia a operação de divisão, o problema 3 envolvia adição e multiplicação, e o problema 5 envolvia multiplicação.

Os sujeitos que apresentaram erros no problema 2 não realizaram a divisão, mas sim multiplicação, como pode ser observado no exemplo de DAN (9; 1) a seguir.

2) Com 28 balas, quantos saquinhos de 4 balas em cada um podemos formar?

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 112 \end{array}$$

R: Podem formar 112 balas

Fig. 3-Resolução Incorreta Efetuada por DAN nos Problemas de Enredo (Prob. 2)

Em relação ao problema três, dois sujeitos efetuaram somas e não multiplicação, conforme solicitava o enunciado. O exemplo de MAT (10; 2) a seguir, pode ilustrar este tipo de erro.

3) Para fazer, uma camisa, uma costureira necessita de 2 botões para os punhos e 7 botões para a frente. Nesta semana ela fez 10 camisas. Quantos botões ela utilizou?

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7+ \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ 10+ \\ \hline 19 \end{array}$$

R: Ela ultilizol 19 botões

Fig. 4-Resolução Incorreta Efetuada por MAT nos Problemas de Enredo (Problema 3)

Somente DAN (9; 1) apresentou erro no resultado da multiplicação ao efetuar 9 x 1, como pode ser observado a seguir.

3) Para fazer, uma camisa, uma costureira necessita de 2 botões para os punhos e 7 botões para a frente. Nesta semana ela fez 10 camisas. Quantos botões ela utilizou?

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 7 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times 9 \\ \hline 90 \end{array}$$

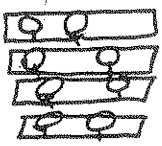
R: utilizou 10 botões

Fig. 5-Resolução Incorreta Efetuada por DAN nos Problemas de Enredo (Prob. 3)

Quanto aos procedimentos adotados pelos sujeitos que obtiveram 100% de acertos nos problemas, dois deles utilizaram desenhos (símbolos), para representar os conjuntos correspondentes aos números do problema como pode ser observado em DEB (9; 3) a seguir. Os demais, tal como ERI (9; 1) fizeram as operações diretamente.

Problemas

1) Em um quintal, foi organizado um canteiro com 4 fileiras de pés de alface. Em cada uma dessas fileiras, foram plantados 2 pés de alface. Quantos pés de alface havia no canteiro?



$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

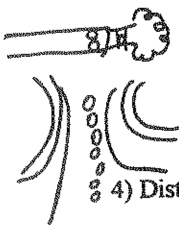
R: Havia no canteiro 8 pés de alface

2) Com 28 balas, quantos saquinhos de 4 balas em cada um podemos formar?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ -28 & 7 \\ \hline 00 & \end{array}$$

R: Podemos formar 7 saquinhos.

3) Para fazer, uma camisa, uma costureira necessita de 2 botões para os punhos e 7 botões para a frente. Nesta semana ela fez 10 camisas. Quantos botões ela utilizou?



$$\begin{array}{r} 7 \\ +2 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times 10 \\ \hline 90 \end{array}$$

R: Ela utilizou 90 botões

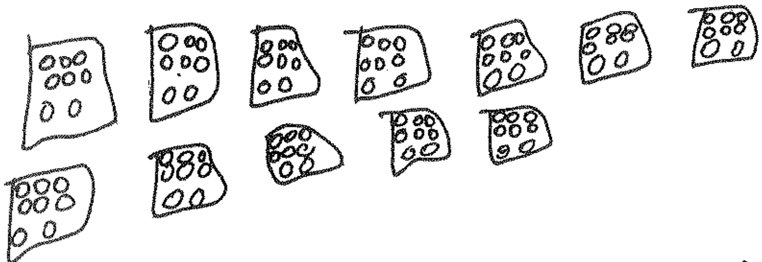
4) Distribuindo, igualmente, 28 balas para 7 crianças, quantas vai receber cada uma?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ -28 & 4 \\ \hline 00 & \end{array}$$

R: Cada criança vai receber 4 balas cada.

5) O álbum de figurinhas de Ari tem 12 páginas. Em cada página, cabem 8 figurinhas. Quantas figurinhas terá o álbum completo?

$$\begin{array}{r} {}^{1}12 \\ +8 \\ \hline 96 \end{array}$$



R: Tem 96 figurinhas no album completo.

Fig. 6 -Resoluções Efetuadas por DEB nos Problemas de Enredo

Problemas

1) Em um quintal, foi organizado um canteiro com 4 fileiras de pés de alface. Em cada uma dessas fileiras, foram plantados 2 pés de alface. Quantos pés de alface havia no canteiro?

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

R: havia 8 pés no canteiro

2) Com 28 balas, quantos saquinhos de 4 balas em cada um podemos formar?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \cline{2-2} 28 & 7 \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

R: Podera formar 7 saquinhos

3) Para fazer, uma camisa, uma costureira necessita de 2 botões para os punhos e 7 botões para a frente. Nesta semana ela fez 10 camisas. Quantos botões ela utilizou?

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 10 \\ \hline 90 \end{array}$$

R: Ela utilizou 90 botões

4) Distribuindo, igualmente, 28 balas para 7 crianças, quantas vai receber cada uma?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ \cline{2-2} 28 & 4 \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

R: Cada uma vai receber 4 balas

5) O álbum de figurinhas de Ari tem 12 páginas. Em cada página, cabem 8 figurinhas. Quantas figurinhas terá o álbum completo?

$$\begin{array}{r} {}^{1}12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \end{array}$$

R: cabem 96 fotografias

Fig. 7- Resoluções Efetuadas por ERI nos Problemas de Enredo

Para ilustrar o desempenho global dos sujeitos no que concerne à multiplicação, operações de multiplicação e problemas de enredo, construiu-se a Tabela 3, síntese dos desempenhos dos sujeitos em porcentagem.

Tabela 3-Desempenho Global nas Operações de Multiplicação e nos Problemas

SUJEITOS	PORCENTAGEM
CAM (9;1)	100%
DEB (9;3)	100%
ERI (9;1)	100%
FER (8;9)	100%
FLA (9;3)	100%
FLO (9;0)	100%
GAB (9;4)	100%
INA (9;5)	100%
LUI (9;6)	100%
LUM (9;8)	100%
MAR (9;3)	100%
MAN (9;11)	100%
RAO (9;7)	90%
ROD (9;2)	90%
ROM (9;8)	80%
MAT (10;2)	80%
DAN (9;1)	60%

Dos 17 sujeitos, 12 obtiveram 100% de acertos na Prova de Operações e Problemas que envolviam multiplicação, 2 sujeitos conseguiram 90% de acertos; 2 sujeitos 80%, e 1 sujeito alcançou 60% de acertos, conforme mostra a Tabela 3. Tais resultados indicam que os sujeitos mostraram desempenhos satisfatórios em ambas as situações da Prova I.

Esta avaliação permitiu verificar que os sujeitos do presente estudo apresentaram um certo domínio da operação de multiplicação tal como é ensinado pela escola. Entretanto, as pesquisas (já citadas anteriormente) de Carraher (1982), Rangel (1992), Sastre e Moreno (1980), Moro (1983), Piaget (1971), e outros, alertam para o fato de que resolver corretamente operações e problemas aritméticos não significa que tal conhecimento tenha alcançado um nível real de compreensão.

Em seus estudos, Kamii (1992/1994 e 1995) assinala a tendência das escolas em ensinar Matemática como técnica, valorizando a memorização em detrimento da compreensão.

Explica a autora que a escola coloca a Matemática como conhecimento social, valorizando técnicas específicas. Destaca em seus estudos a importância de o ensino estar voltado à construção do conhecimento lógico-matemático. Este conhecimento resulta da construção da criança, e o professor precisa ter como meta "*a abstração construtiva, em vez da observação, manipulação e representação de fatos observáveis*" (p.102).

Os algoritmos são utilizados na resolução das operações e problemas logo no início do ensino fundamental. Segundo Kamii (1997), este fato é prejudicial devido a três motivos, abaixo explicitados.

> 1) Os algoritmos forçam o aluno a desistir de seu raciocínio numérico.
>
> 2) Eles 'desensinam' o valor posicional e obstruem o desenvolvimento do senso numérico.
>
> 3) Tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel) e de outras pessoas. (p.55)

As crianças que não têm conhecimento dos algoritmos podem pensar e inventar seus próprios procedimentos, conforme seu raciocínio.

Em relação ao valor posicional, os algoritmos levam a criança a reforçar a tendência de pensar em cada coluna como sendo unidade.

O uso de algoritmos permite ao aluno chegar a respostas corretas, entretanto, não lhe dá confiança, pois o torna dependente de papel e lápis e da disposição espacial dos dígitos. O ideal seria que as crianças pudessem utilizar seus próprios meios de raciocínio e não memorização de regras sem nenhum sentido.

Baseando-se nestes estudos de Kamii, os desempenhos apresentados pelos sujeitos na Prova I informam que há um certo domínio da multiplicação, tal como é ensinada pela escola, contudo, este fato não permite afirmar se a compreensão da noção de multiplicação encontra-se presente. As oscilações entre acertos e erros nas operações com reserva parecem demonstrar este aspecto: ora somaram as reservas, ora as negligenciavam.

Para atender os objetivos do presente estudo, optou-se por fazer uma avaliação do nível de construção da noção de multiplicação nos sujeitos, realizando uma prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas inspirada em Granell (1983).

Prova II - Multiplicação e Divisão Aritméticas

O objetivo desta prova foi verificar em que nível se encontravam os sujeitos na construção das noções de multiplicação e divisão.

Para Granell (ibid), enquanto a criança realizar adições sucessivas dos conjuntos, isto não pode ser considerado uma multiplicação, já que ainda não foi descoberto o papel do "operador multiplicativo".

Destaca a autora:

> Enquanto que na soma podemos adicionar sucessivamente 2+2+2+2 e chegar a um resultado final sem levar em conta o número de vezes (número de operações) que se tenha realizado na ação de acrescentar, na multiplicação será necessário levar em conta o número de conjuntos equivalentes que se tem e este número de conjuntos equivalentes representa

> por sua vez o número de ações, de operações, realizadas; tem-se, portanto, um operador que nos indica o número de vezes que se repete um determinado conjunto e que se situa, pois, como uma variável de nível superior enquanto que representa o número de operações com conjuntos e não só com elementos. (p.133)

A compreensão da noção de multiplicação envolve simultaneamente a compreensão da divisão supondo a reversibilidade do pensamento que possibilita a coordenação das três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final. Isto porque há duas aquisições fundamentais para a compreensão da multiplicação: presença do operador multiplicativo que permite antecipar o número de conjuntos e a capacidade de realizar uma compensação exata entre o número de vezes ou de conjuntos, e o número de elementos de cada conjunto.

Considerando os estudos de Granell, optou-se por verificar como os sujeitos do presente estudo utilizavam estratégias para resolverem situações que envolviam multiplicação e divisão. Os procedimentos utilizados pelos sujeitos podem revelar o processo de construção dessas noções, que é diferente da habilidade de realizar operações de multiplicação e divisão por meio de mecanismos aprendidos por repetições sucessivas.

Para tal, sobre uma mesa foram dispostos nove tipos de minibrinquedos plásticos, sendo que cada uma tinha um cartão com seu respectivo preço, variando de um a nove. Também foram utilizadas duas caixas, sendo uma com várias fichas, que representavam moedas de um real, e outra contendo os diferentes minibrinquedos.

A partir daí foram propostas duas situações que envolviam compra e venda.

Convém destacar que os sujeitos em questão já tinham contato com o conteúdo da multiplicação e divisão na escola, como foi verificado na Prova de Operações e Problemas de Multiplicação.

Situação 1 / Noção de Multiplicação Aritmética

A situação 1 (cf. anexo 2) englobou a multiplicação aritmética tendo por objetivo verificar se o sujeito tinha a idéia do operador multiplicativo ou se apenas fazia antecipações.

Foi proposto à criança que constatasse os preços dos brinquedos e posteriormente uma brincadeira de comprar e vender, sendo o sujeito o comprador que possui as fichas (dinheiro). O experimentador (vendedor) pedia ao sujeito que colocasse o dinheiro necessário para comprar um dos objetos. Posteriormente, colocava-se uma quantidade qualquer deste mesmo objeto e perguntava: "*Para comprar estes objetos, quantas fichas você precisa?*" Repetia-se o procedimento por três vezes, variando-se os objetos e a quantidade deles.

Para avaliar os níveis de construção da noção de multiplicação, adotaram-se as quatro condutas propostas por Granell (1983), citadas a seguir.

* **Conduta I:** corresponde aos sujeitos que estabelecem correspondência termo a termo, igualando na resposta final o número de fichas ao número de objetos que poderiam ser comprados.

* **Conduta II:** corresponde aos sujeitos que aumentam em algumas unidades o resultado final devido a uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, não se importando com a quantificação exata ainda.

* **Conduta III:** corresponde aos sujeitos que chegam a um resultado correto por procedimentos aditivos mediante adições sucessivas, sem nenhuma antecipação do número de ações a fazer. Para isso, correspondem os conjuntos de fichas (preço dos objetos) a cada objeto a ser comprado (correspondendo "muitos para um" a cada elemento sucessivamente), chegando ao resultado final correto por meio de adições sucessivas.

* **Conduta de transição III para IV:** esta conduta foi incluída neste estudo pelo fato de terem sido encontrados sujeitos que, ao mesmo tempo, utilizavam

procedimentos aditivos e também antecipações, não pertencendo mais à conduta III e nem alcançando a IV ainda.

* **Conduta IV:** corresponde aos sujeitos cujos procedimentos mostram antecipação da quantidade de fichas que seriam necessárias, sem nenhuma verificação empírica, alcançando o resultado final mentalmente.

Baseando-se nestas condutas, construiu-se o Quadro I-"Noção de Multiplicação Aritmética - Situação 1" que caracteriza o desempenho dos sujeitos conforme os procedimentos adotados por eles no pré-teste e no pós-teste.

As respostas apresentadas pelos sujeitos no pré-teste e no pós-teste foram categorizadas segundo estas condutas e encontram-se organizadas no Quadro I a seguir:

Quadro I - Prova II / Noção de Multiplicação Aritmética - Situação 1

CONDUTAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
IV Soluções por antecipação do número de conjuntos	DEB (9;3) FLA (9;3) FLO (9;0) LUI (9;6) RAO (9;7) MAN (9;11)	DEB FLA FLO LUI RAO MAN GAB FER LUM MAR ROD ROM
TRANSIÇÃO III / IV Soluções por procedimentos aditivos e também por antecipações	GAB (9;4)	CAM
III Soluções por procedimentos aditivos	FER (8;9) LUM (9;8) MAR (9;3) ROD (9;2) ROM (9;8) CAM (9;1) DAN (9;1) ERI (9;1) INA (9;5) MAT (10;2)	DAN ERI INA MAT
II Soluções por consideração intuitiva da correspondência múltipla		
I Soluções por correspondência termo a termo		

Segundo o Quadro I: "Noção de Multiplicação Aritmética - Situação 1", tanto no pré como no pós-testes não foram encontradas respostas típicas das condutas I e II.

Os sujeitos apresentaram respostas, tanto no pré como no pós-testes; classificadas (cf. Quadro I) nas condutas III, transição e IV. Serão analisadas as condutas apresentadas no pré-teste.

Dos 17 sujeitos estudados, 10 apresentaram respostas no pré-teste, classificadas nas conduta III - solução por procedimentos aditivos, 1 sujeito apresentou respostas de transição, e 6 respostas classificadas na conduta IV - soluções por antecipação do número de conjuntos.

Vejamos alguns exemplos de procedimentos apresentados pelos sujeitos no pré-teste, classificados na conduta III, cujo resultado final é alcançado por meio de procedimentos aditivos de maneira empírica sem antecipação.

Conduta III - Soluções por procedimentos aditivos - pré-teste:

> FER (8;9): Após constatar o preço de cada objeto, o experimentador pergunta: Quanto de fichas você precisa para comprar um avião (9 reais)? – **"Nove."** E se você comprasse este tanto (3)? O sujeito faz três montes com nove fichas. Quanto? –**"Ah! Agora tem que contar."** Conta uma a uma as fichas e diz: –**"27."** E se você comprasse um apito? (4 reais) –**"4."** E se comprasse este tanto? (5 apitos) O sujeito conta os apitos e faz o mesmo procedimento anterior com as fichas. –**"20, porque 4 vezes 5."** E se você comprar um pião? (7 reais) –**"7."** E se você comprar este tanto? (2) –**"14, porque** 7+7."
>
> INA (9;5): Constata os preços dos brinquedos. Coloque para mim quanto de fichas você precisa para comprar uma bolsa? (3 reais) –**"3 reais."** E se fosse comprar este tanto? (4 bolsas) Pensa e diz: –**"12, porque cada bolsa custa 3, 3+3=6, +3=9, +3=12."** E se você comprar uma bola?(6 reais) Põe 6 fichas. E se fosse comprar este tanto? (5) Separa cinco grupos de seis fichas, conta as fichas e diz: –**"30, porque 5 bolinhas que custam 6 reais cada, 5x6=30."** E para comprar a pulseira? (2 reais) –**"2 reais."** Põe duas fichas. E para comprar este tanto? (3) –**"São 3, cada uma custa 2, 2+2=4+2=6. Então 6 reais."**

Os exemplos de FER (8; 9) e INA (9; 5) mostraram que estes sujeitos chegaram ao resultado correto utilizando-se, para isto, de adições sucessivas, separando as fichas em "montes" (conjuntos), ou seja, empiricamente.

Exemplos de Conduta de Transição III / IV - soluções por procedimentos aditivos, e por antecipação - pré-teste

Esta conduta foi incluída neste trabalho devido aos procedimentos adotados por 1 sujeito no pré-teste e outro no pós-teste. Revelam estes procedimentos certo grau de antecipação, contudo, apresentam também tateios empíricos e aditivos. Por estarem estes procedimentos a meio caminho da conduta III para a IV, optou-se por designar conduta de transição.

O exemplo de GAB (9; 4) ilustra esta conduta:

> GAB (9;4) Constata os preços dos objetos inicialmente. Coloque para mim quanto você precisa para comprar o jacaré (5 reais) –"**5 de 1, 5 fichas, pronto.**" Diz pegando as fichas. E para comprar este tanto? (5 jacarés) Pega dois jacarés e diz: –"**10**", mais dois e diz: –"**20**" e mais um: –"**25.**" Quanto você precisa para comprar um avião? (9 reais). –"**9 reais.**" Coloca nove fichas. E para comprar este tanto? (4) Diz separando os aviões: –"**9+9=18 e 18+18 dá 36.**" Quanto você precisa para comprar um pião? (7 reais). –"**7 reais, muito fácil!**" E para comprar este tanto? (3) –"**21.**" Por que? –"**Porque 7x3=21.** –"Põe 21 fichas contando de um em um.

Este exemplo mostra que GAB (9;4) resolveu por adições, entretanto, já fazia antecipações e utilizava-se da multiplicação ao mesmo tempo.

Conduta IV - Soluções por antecipações do número de conjuntos - pré-teste

No pré-teste, seis sujeitos (cf. Quadro I) resolveram a prova por procedimentos antecipatórios, chegando a resultados corretos. Tal procedimento não basta para a construção final da noção de multiplicação, dado que, segundo

Granell (1983), é necessário que o sujeito realize também diferentes composições de um todo por antecipação.

O exemplo a seguir mostra estes procedimentos.

> FLA (9;3) Coloque para mim quanto você precisa para comprar um apito. (4 reais) Coloca 4 fichas e diz: –"**4 reais**". E se fosse comprar este tanto? (3) –"**12, porque cada um vale 4 e 4x3 é 12.**" E se você comprar uma pulseira? (2 reais) –"**2 reais.**" E este tanto de pulseiras? (9) –"**18 reais.**" Por que? –"**Porque tem 9 pulseiras e elas valem 2 reais cada e 2x9=18.**" Quanto você precisa para comprar uma bola? (6 reais) –"**6 reais.**" E para comprar este tanto? (5 bolas) –"**30.**" Por que? –"**Porque 5x6=30.**"

O exemplo de FLA (9;3) ilustra a antecipação por meio da multiplicação, pois chega ao resultado correto mentalmente e, quando lhe é perguntado como sabe, responde utilizando a operação de multiplicação: –"**18 reais.**" Por quê? –"**Porque tem 9 pulseiras e elas valem 2 reais cada e 2x9=18.**"

Pós-teste

Os resultados do pós-teste revelam uma evolução de 7 sujeitos nesta prova. O Quadro I mostra que, os 10 sujeitos no pré-teste classificados na conduta III (soluções por procedimentos aditivos), encontraram-se no pós-teste: 1 sujeito na conduta de transição (soluções por antecipações e por procedimentos aditivos), 6 passaram a apresentar respostas típicas da conduta IV (soluções por antecipação do número de conjuntos), enquanto 4 permaneceram no mesmo nível. Os 6 sujeitos que no pré-teste se encontravam na conduta IV, permaneceram também no pós-teste, e 1 passou da conduta de transição para a conduta IV.

Vejamos o exemplo de INA (9; 5) que permaneceu na conduta III no pós-teste.

> INA (9;5) Para comprar o jacaré (5 reais), quanto você precisa? –"**5**". Pega 5 fichas. E se você fosse comprar este tanto de jacarés? (4) Conta os jacarés e pega vinte fichas. –"**20.**" Como você fez? –"**Porque o jacaré é 5 e**

> **5+5=10, +5 e +5 dá 20.**" Quanto você precisa para comprar um apito? (4). – "**4.**" Pões 4 fichas. E este tanto? (6) Conta os apitos. Pega 8 fichas, separa 2 apitos, –"**+4**", separa um apito, "**+4**" separa um apito e assim até separar todos os apitos. –"**24.**" Como você fez? –"**Porque cada apito custa 4, você vai somando 4+4+4+4+4+4 dá 24.**"

O exemplo a seguir ilustra a evolução de CAM (9;1) que, no pré-teste, utilizava procedimentos aditivos para solucionar as questões e, no pós-teste, embora ainda continuasse com procedimentos aditivos, passou a apresentar também antecipações; portanto, trata-se de um caso de transição.

> CAM (9;1) Coloque para mim quanto você precisa para comprar um jacaré. (5 reais) –"**5.**" Põe 5 fichas. E para comprar este tanto? (5) Pega dez fichas, –"**+10. Pronto já comprei 4, falta mais 1. Pronto 25.**" E se você fosse comprar um foguete? (8 reais) Pões 8 fichas e diz: –"**8 reais.**" E para comprar este tanto?(3) Pega fichas de três em três. –"**Prontíssimo, 24.**" Como você fez? Mostra de 3 em 3. Mas porque você fez assim? –"**Porque 3x8 é 24.**" E para comprar um apito? (4 reais) –"**Preciso disso.**" Põe 4 fichas. E para este tanto? (8) Vai contando de 4 em 4 separando os apitos: –"**4, 8, 12,**"... até 32. Pega as fichas de 2 em 2. –"**32, pronto.**" Como você fez? –"**4, 8, 4x2=8, 4x3=12, 4x4=16, 4x5=20, 4x6=24, 4x7=28, 4x8=32, pronto.**"

Para exemplificar a passagem de respostas categorizadas como transição para respostas típicas de conduta IV, será apresentado o protocolo de GAB (9; 4).

> GAB (9;4) Coloque para mim quanto você precisa para comprar o foguete. (8 reais) –"**A ficha vale um real, né?**" É, cada ficha vale um real. – "**Pronto, 8 fichas.**" Diz pegando 8 fichas. E se você fosse comprar este tanto de foguetes? (7). Conta os foguetes. –"**7, 8x7=56.**" Conta as fichas de uma em uma até 56. Quanto você precisa para comprar um pião? (7) – "**Quanto é o pião, é 7?**" Pega 7 fichas E para compras este tanto? (5) Conta os piões. –"**5, 7x5=35.**" Pega 35 fichas, contando de uma em uma. E para comprar um jacaré? (5 reais) –"**O jacaré é 5.**" Pega 5 fichas. E para comprar este tanto? (9) –"**É 5, né?**" Conta os jacarés: –"**9x5 é 45.**" Pega 45 fichas.

A evolução de GAB (9;4) no pós-teste consistiu em solucionar todas as situações propostas por antecipação.

A seguir o exemplo de FER (8;9) ilustra a evolução da conduta III para a conduta IV. A evolução de FER (8;9) consistiu em resolver as questões propostas pelo experimentador por meio de antecipações, ao contrário do pré-teste, em que utilizava procedimentos aditivos e verificação empírica.

> FER (8;9) Quanto você precisa para comprar um jacaré? (5 reais). –"**5 fichas, porque ele custa cinco reais.**" E este tanto? (4). –"**20.**" Conta de 5 em 5 as fichas. Como você sabe? –"**Porque são 4x5.**" Quanto você precisa para comprar um foguete? (8 reais). –"**8 reais.**" E para comprar este tanto? Pensa. –"**64.**" Separa montes de oito fichas. Conta as fichas. Como você sabe? –"**Por que 8x8 é 64.**" E para comprar o avião? (9 reais). –"**9 reais.**" E este tanto? (3). –"**27.**"Como você sabe? –"**Porque 9x3 é 27.**"

Na conduta IV, mais evoluída por revelar procedimentos antecipatórios, encontraram-se 6 sujeitos que permaneceram também nesta mesma categoria na ocasião do pós-teste. Por exemplo FLA (9; 3), a seguir:

> FLA (9;3) Quanto você precisa para comprar um pião? (7 reais). –"**7 fichas, porque ele custa 7 reais e cada ficha vale um.**" E para comprar este tanto? (4). –"**Ah! 28 reais.**" Como você sabe? –"**Porque cada custa 7 e eu quero 4, então 4x7=28.**" Pega as 28 fichas contando de uma em uma. E para comprar um foguete? (8 reais). –"**8, porque cada ficha vale um real e ele custa 8 reais.**" E para comprar este tanto? (6). Pensa. –"**48.**" Como você sabe? –"**Porque 8x6 é 48.**" Coloca 48 fichas contando de uma em uma. E para comprar um jacaré? (5 reais). –"**5, porque custa 5 reais.**" E este tanto? (3). –"**15 reais.**" Como você sabe? –"**Porque 3 x 5 é 15.**" Pega 15 fichas de uma em uma.

Situação 2 / Noção de Divisão Aritmética

Esta situação teve por objetivo verificar se os sujeitos eram capazes de compreender as diferentes formas de composição dentro de um mesmo conjunto. O sujeito deveria antecipar quais e quantos objetos poderiam ser comprados, dispondo de uma determinada quantidade de fichas ou dinheiro, sem que sobrassem ou faltassem fichas. O êxito nesta situação era alcançado pelos sujeitos que encontrassem os divisores comuns do todo, esgotando todas as possibilidades de compra.

O procedimento consistiu na mesma situação de compra e venda. O experimentador entregava ao sujeito uma certa quantidade de moedas (fichas) e perguntava quantos objetos de determinado preço poderiam ser comprados com aquelas moedas.. Assim que o sujeito chegava à solução correta, o experimentador perguntava se com a mesma quantidade de fichas ou moedas o sujeito poderia comprar algum outro objeto, sem que sobrasse ou faltasse dinheiro.

Os resultados obtidos foram categorizados de acordo com as condutas propostas por Granell (1983), citados abaixo.

* **Conduta I:** corresponde aos sujeitos que afirmam não poder comprar nenhuma outra coisa, ou somente objetos que custam um real, não admitindo a possibilidade de fazer diferentes composições com conjuntos equivalentes.

* **Conduta II:** o sujeito tenta operar com conjuntos equivalentes, mas ainda não existe uma compensação exata entre o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo. Há um início de tomada de consciência de que se comprar mais objetos tem que ser mais baratos e vice-versa, sem que se chegue a uma quantificação exata. O sujeito não percebe a necessidade de coordenação entre as três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final.

* **Conduta III:** o sujeito não é capaz de dar antecipações corretas, mas chega a uma solução por meio de tentativas que podem começar desde um tateio assistemático, compreendendo algumas propriedades, até um tateio sistemático, com todas as possibilidades de distribuição do todo.

* **Conduta de Transição III para IV:** foi incluída devido à existência de um sujeito que apresentou características tanto da conduta III como também da IV.

* **Conduta IV:** corresponde aos sujeitos que antecipam as possíveis composições do todo com os respectivos conjuntos equivalentes por meio de operações mentais, sem se basear em comprovações empíricas.

A partir destas condutas construiu-se o Quadro II: "Noção de Divisão Aritmética - Situação 2", ilustrando o desempenho dos sujeitos conforme os procedimentos adotados por eles, tanto no pré-teste quanto no pós-teste.

Quadro II - Noção de Divisão Aritmética / Situação 2

CONDUTAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
IV **Diferentes composições de um todo por antecipações**	GAB (9;4) → LUI (9;6) → RAO (9;7) →	GAB LUI RAO FER LUM MAN ROD
TRANSIÇÃO III / IV **Composições empíricas e também por antecipações**		DEB
III **Diferentes composições de um todo por tateios / empíricos**	FER (8;9) LUM (9;8) MAN (9;11) ROD (9;2) ROM (9;8) → ERI (9;1) → INA (9;5) → MAT (10;2) → MAR (9;3) → FLO (9;0) →	ROM ERI INA MAT MAR FLO CAM DAN FLA
II **Composições sem quantificação exata, início da tomada de consciência**		
I **Não admitem composições com conjuntos equivalentes**	DEB (9;3) CAM (9;1) DAN (9;1) FLA (9;3)	

Segundo o Quadro II - "Noção de Divisão Aritmética - Situação 2", tanto no pré-teste como no pós-teste, não foram encontradas respostas de conduta II- "Composições sem quantificação exata, início da tomada de consciência".

Os sujeitos apresentaram respostas, tanto no pré-teste como no pós-teste, classificadas (cf. Quadro II) nas condutas I, III e IV, e transição (III-IV) somente no pós-teste.

Dos 17 sujeitos (c.f. Quadro II), foram classificados na conduta I 4 sujeitos, cujas respostas revelaram a impossibilidade de comprar outros objetos senão aqueles que custavam um real. Alguns exemplos desta conduta no pré-teste serão apresentados a seguir.

> DEB (9;3) Agora você terá 15 fichas. Quantos jacarés (5 reais cada) daria para você comprar ? Após separar em montes de 3 as fichas, diz: –"**3.**" Tem alguma outra coisa que daria para você comprar sem que sobre ou falte dinheiro? –"**Dá, 7 pulseiras e 1 anel.**" Mas os objetos devem ser do mesmo tipo, tem alguma coisa? –"**Então não.**"
>
> CAM (9;1) Após ser interrogada sobre o número de jacarés que poderia comprar com 15 reais, separa as fichas em 3 montinhos de 5 fichas. –"**3 jacarés.**" Tem alguma outra coisa que você poderia comprar sem faltar, nem sobrar dinheiro? –"**15 anéis.**" Tem alguma outra coisa? –"**Não.**"

Como não foi encontrada nenhuma resposta categorizada na conduta II, será apresentada a seguir a conduta III.

Conduta III - Composições por tateios empíricos - pré-teste

Encontramos nesta conduta maior concentração de respostas apresentadas pelos sujeitos no pré-teste (N=10) (c.f. Quadro II). A novidade apresentada nesta conduta em relação às anteriores consiste em chegar a uma solução utilizando tateios. O sujeito empiricamente demonstra as possíveis composições do todo, como podem se visto nos exemplos de MAN (9;11) e MAT (10; 2)

MAN (9;11) Após ser interrogada sobre o número de jacarés que poderia comprar com 15 reais, separa as fichas em três montinhos de 5. –**"3x5=15, então daria para eu comprar 3 jacarés"**. Tem alguma outra coisa que daria para você comprar, sem que falte ou sobre dinheiro? Separa montes de 3. –**"A bolsa dá, 5 bolsas."** Tem alguma outra coisa? Vai tentando todos os brinquedos e falando que não dá, até que conclui: –**"Não, nadica."**

MAT (10;2) Após ser interrogado sobre o número de jacarés que poderia comprar com 15 reais: –**"3."** Como você sabe? Separa as fichas em 3 montes de 5 e põe um jacaré em cada monte, diz: –**"3 com 15."** Tem alguma outra coisa que você poderia comprar sem que sobre ou falte dinheiro? –**"Pulseira."** Quantas? –**"Custa 2."** Separa as pulseiras em montes de 2. –**"Não vai dar não, porque sobra 1."** Vai tentando 4, faz montes de 4 e diz: –**"Não. O anel dá para comprar."** Quantos anéis? Separa as fichas e conta: –**"15. Ah! Certinho 15 anéis."** Tem mais alguma outra coisa? –**"Ah! Deixa eu tentar o 8."** Tenta, separando as fichas. –**"Não dá, falta 1, 8 não dá. Vou tentar o 7, vai sobrar um, quer ver ?"** Diz enquanto tenta. Assim se prossegue também com o 6. –**"O 3!"** Separa de 3 em 3. –**"Dão 5 bolsas."** Tem alguma outra coisa? –**"Não."** Esgotando as composições possíveis e aquelas também impossíveis de serem exatas.

Conduta de Transição III para IV - Composições empíricas e por antecipações - pré-teste

No pré-teste nenhum sujeito apresentou condutas de transição.

Conduta IV - Composições por antecipações - pré-teste

Nesta conduta, 3 sujeitos no pré-teste (c.f. Quadro II) apresentaram as soluções por antecipações, estabelecendo as relações de reciprocidade entre as variáveis multiplicando, multiplicador e resultado final, sem necessitar de comprovações empíricas, como na Conduta III.

O exemplo de RAO, a seguir, ilustra este tipo de solução.

RAO (9;7) Com este dinheiro daria para você comprar quantos jacarés? –**"Dá para comprar 3."** Como você sabe? –**"Porque 3x5=15."** Tem alguma outra coisa que daria para você comprar sem sobrar, nem faltar dinheiro? –**"Daria 15 anéis."** Como você sabe? –**"Porque se isto custa 1**

> **real e esta ficha é equivalente a 1 real, então eu compraria sossegado 15.**" Tem alguma outra coisa? –"**Tem a bolsa, 5.**" Como você sabe? – "**Porque é a mesma coisa que o jacaré, é só inverter os fatores.**" Tem alguma outra coisa? –"**Tenho certeza que não.**"

Pós-teste

Pode-se observar (c.f. Quadro II) que, dos 17 sujeitos, 9 mantiveram, no pós-teste, respostas da mesma conduta apresentadas no pré-teste. Destes 9 sujeitos, 3 se encontravam no pré-teste na conduta IV, que é a mais evoluída. Destaca-se que 6 sujeitos permaneceram na conduta III e, embora não alcançassem a conduta IV, mostraram melhor sistematização nos procedimentos utilizados na ocasião do pós-teste tais como: deixavam de experimentar empiricamente a divisão do conjunto de moedas disponível com todos os objetos a comprar, as composições por tateios empíricos se centravam em apenas alguns objetos, esgotando as possibilidades de composições possíveis. Os demais sujeitos (N=8) evoluíram significamente em suas respostas, alcançando condutas mais complexas.

No pós-teste nenhum sujeito permaneceu na conduta I. Os sujeitos apresentaram respostas categorizadas a partir da conduta III.

Serão vistos alguns exemplos que marcam tais evoluções.

CAM (9; 1) que no pré-teste, não admitia composições com conjuntos equivalentes (conduta I) apresenta no pós-teste, por meio de procedimentos empíricos, todas as possíveis divisões do todo. Vejamos.

> CAM (9;1) Quantas bolsas (3 reais) daria para você comprar com este dinheiro? (12 reais) Agrupa as fichas de 3 em 3 e diz: –"**4.**" Tem alguma outra coisa que você poderia comprar sem faltar nem sobrar dinheiro? – "**Tem.**" Põe mais uma ficha em cada grupo: –"**3 do apito.**" Tem alguma outra coisa? Divide as fichas em dois grupos de 6. –"**2 bolinhas.**" Tem mais alguma coisa? –"**Não. Tem, 12 anéis ou 6 pulseiras**", dividindo as fichas de 2 em 2. –"**Agora chega, deu certo.**"

Como foi dito anteriormente, 6 sujeitos permanecerem na mesma conduta III (pré e pós-teste). O protocolo de MAT (10; 2) serve como exemplo.

> MAT (10;2) Quantas bolsas (3 reais) daria para você comprar com este dinheiro? (18 reais) Separa as fichas em grupos de 3. –"**6.**" Como você sabe? –"**Eu contei os meus dinheiros e esses negocinhos**" (grupos). Tem alguma outra coisa que daria para você comprar com este dinheiro sem sobrar nem faltar? –"**Espere aí, deixa eu ver.**" Agrupa as fichas em grupos de 6, juntando de 2 em 2 os grupos. –"**A bola.**" Quantas bolas? –"**3.**" Tem alguma outra coisa? –"**Espere aí, deixa eu ver.**" Separa em grupos de 8, constatando que sobram 2 e diz: –"**Não vai dar.**" Separa as fichas em grupos de 9: –"**Com 9 dá 2 aviões.**" Tem mais alguma coisa? –"**Espere aí.**" separa em grupos de 2 e diz: –"**9 pulseirinhas.**" Tem mais alguma coisa? – "**Tem esse jacaré (5 reais), deixa eu ver se dá.**" Vai separando antes de realizar a composição com 5 elementos conclui: –"**Não, vai sobrar.**" Tem mais alguma coisa? –"**Vai dar esse anel aqui (1 real), só que aquele apito não vai dar não.**" Divide as fichas de 1 em 1. –"**18 anéis.**" Tem mais alguma coisa? –"**Eu acho que não, pulseira eu já fiz né?**" Já. –"**Acabou.**"

Um exemplo de conduta de Transição (III para IV) - composições empíricas e por antecipações observou-se em DEB (9; 3), que demonstrou significativa evolução em suas respostas. No pré-teste não admitia composições com conjuntos equivalentes (conduta I), já no pós-teste alcança conduta de transição.

> DEB (9;3)) Quantas bolinhas (6 reais) daria para você comprar com este dinheiro? (18 reais) Separa as fichas em montinhos de 6. –"**3.**" Como você sabe? –"**Porque eu sei que a bolinha custa 6 reais, eu dividi em grupos e deu 3 grupos.**" Tem alguma outra coisa que daria para você comprar sem sobrar nem faltar dinheiro? –"**Tem, o avião.**" Divide as fichas em grupos de 9. –"**Daria para comprar 2 aviões, porque é a mesma coisa que eu fiz com a bolinha, 18 eu dividi por 2, aí deu 9.**" Tem alguma outra coisa? – "**Tem, dá para eu comprar 18 anéis. Dá para comprar 6 bolsas.**" (divide as fichas de 3 em 3). Tem alguma outra coisa? –"**Só isso dá para comprar.**"

A evolução de DEB consistiu em chegar a todas as composições possíveis, utilizando tateios, entretanto, seus tateios já mostraram um início de antecipação: –"**Daria para comprar 2 aviões, porque é a mesma coisa que eu fiz com a bolinha, 18 eu dividi por 2, aí deu 9**", pois tentou somente os divisores de 18, antecipando que era possível comprar e verificou a quantidade dividindo 18 fichas pelos seus divisores. Diferentemente de MAT (exemplo anterior da conduta III), cujas conclusões basearam-se ainda em dados empiricamente verificáveis.

Os sujeitos que evoluíram (N=4) (cf. Quadro II) em suas respostas de conduta III-composições empíricas (pré-teste) para conduta IV-composições antecipatórias no pós-teste demonstraram construção da idéia do operador multiplicativo, logo pode-se dizer que a noção de multiplicação alcança sua construção final. Por exemplo, MAN (9;11).

> MAN (9;11) Quantas bolsinhas (3 reais) daria para você comprar com este dinheiro? (12 reais). –"**4 bolsas, porque eu separei 4 grupinhos de 3.**" Tem alguma outra coisa que daria para você comprar sem sobrar nem faltar dinheiro? –"**A pulseira, 6 pulseiras porque eu posso separar em grupos de 2, 6 vezes.**" Tem mais alguma coisa? –"**Tem oa apito, 3, e a bolinha, 2, porque 12 dividido por 2 é igual a 6.**" Tem mais alguma coisa? –"**Não.**"

Em relação à Situação 2 - Noção de Divisão Aritmética - ocorreram progressos qualitativos significativos nos procedimentos adotados pelos sujeitos. Como foi exemplificado anteriormente, estes progressos consistiram em alcançar composições possíveis do todo por tateios empíricos por aqueles sujeitos que apresentaram no pré-teste respostas que não admitiam composições com conjuntos equivalentes e também evoluções nas respostas dos sujeitos que no pré-teste foram classificados na conduta III para conduta IV, alcançando respostas que demonstravam composições antecipatórias do todo. Entretanto, convém ressaltar que 9 sujeitos permaneceram na mesma conduta , sendo 6 deles na conduta III e 3 na conduta IV - procedimentos antecipatórios (cf. Quadro II).

Pode-se dizer que os progressos alcançados pelos sujeitos foram desencadeados pela intervenção pedagógica pela qual passaram, uma vez que esta envolvia situações-problema que ensejavam a operação multiplicativa, permitindo a eles experimentar e refletir sobre suas ações, analisar os procedimentos adotados, favorecendo a construção de níveis mais evoluídos da noção.

Prova III: Abstração Reflexiva Construção de Múltiplos Comuns

Esta prova teve por objetivo verificar os níveis de abstração reflexiva dos sujeitos do presente estudo.

Segundo Piaget (1975), a construção do conhecimento dá-se por meio de uma relação dialética entre sujeito e objeto, caracterizando uma interdependência em que a ação ou inter-ação constitui a matéria-prima. Neste processo dialético, tanto os sistemas de significação quanto os sistemas lógicos se constituem. Ambos resultantes do processo de assimilação e acomodação que alcançam adaptações e organizações mais complexas. Ocorre que nem todos sistemas de significação, constituídos por assimilação, que servem para interpretar os dados do meio, encontram-se organizados num sistema lógico. Por exemplo, as intuições interpretam os dados sem, contudo, alcançar uma coerência lógica.

Já os sistemas lógicos construídos pelos sujeitos supõem "formas" cujo princípio é a coerência e a não contradição. Estas novas formas ou estruturas lógicas são oriundas dos mecanismos de abstração reflexiva.

A abstração reflexiva é fonte responsável pela construção do conhecimento lógico-matemático, pois requer o estabelecimento de relações, apoiando-se nas coordenações das ações e operações do sujeito (Piaget, 1995). Portanto, o ensino da Matemática não pode ser pautado em transmissões verbais tal como o conhecimento social, por meio de aulas expositivas e explicações orais.

Zunino (1995) destaca que:

> se o enfoque pedagógico que é adotado leva as crianças a deixarem de lado seu raciocínio lógico quando lhes são ensinados conteúdos matemáticos, elas seguramente aprenderão adaptar-se às exigências da escola, porém não aprenderão matemática, porque não é possível aprender matemática renunciando a pensar. (p.190)

A fim de verificarmos o nível de abstração reflexiva em que se encontravam os sujeitos desta pesquisa, optou-se por aplicar a Prova "Construção dos Múltiplos Comuns" que indicaria como o sujeito, do ponto de vista das abstrações, constrói as relações de multiplicação. (cf. anexo I)

Os experimentos de Piaget consistem em propor ao sujeito duas tarefas distintas: montagem de duas coleções de totais iguais de fichas de cores diferentes (vermelha e verde), pegando duas a duas as vermelhas, e três a três as verdes, e montar duas torres de mesma altura com peças de cores diferentes que valem duas (azuis) e três (vermelhas) unidades. Após a realização de cada uma das tarefas, foi perguntado ao sujeito sobre a possibilidade de conseguir o mesmo resultado com coleções maiores ou menores, e torres maiores ou menores, respectivamente. Após o término das duas tarefas, perguntou-se ao sujeito se estas eram parecidas e por quê, a fim de averiguar a ocorrência de abstrações refletidas.

O objetivo da aplicação destas duas tarefas era verificar o nível de abstração reflexiva dos sujeitos no que concerne à construção de múltiplos comuns.

Conforme os dados obtidos por Piaget et al (1995) em sua pesquisa, foram categorizados diversos níveis de desempenho dos sujeitos, abaixo explicitados.

* **Nível IA:** os sujeitos não conseguem alcançar a igualdade e, quando o fazem, atribuem o fato a um golpe de sorte. Em especial na prova das fichas acreditam que só poderia ocorrer a igualdade se utilizassem da correspondência termo a termo.

* **Nível IB:** as mesmas reações de incompreensão estão presentes, no entanto, há um início de tomada de consciência (pegaram 2 e 3 fichas sem parar), ou seja, centram-se no resultado aditivo dos transportes, e o começo da compensação (menos peças grandes = mais peças pequenas).

* **Nível IIA:** os sujeitos admitem a possibilidade de igualdade, embora consigam obtê-la por meio de tentativas sucessivas.

* **Nível IIB:** o problema das fichas é resolvido rapidamente pelos sujeitos, demorando-se mais no problema das torres.

* **Nível III:** corresponde aos sujeitos que resolvem as tarefas pela relação entre as unidades, deixando de lado as compensações por tentativas.

As respostas apresentadas pelos sujeitos no pré e pós-testes foram categorizadas segundo estes níveis e encontram-se organizadas no Quadro III - "Construção de Múltiplos Comuns."

Quadro III - Construção de Múltiplos Comuns

NÍVEIS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
III Soluções antecipatórias das relações entre as unidades	FER (8;9) MAT (10;2) RAO (9;7)	FER MAT RAO DEB LUI MAN
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	DEB (9;3) LUI (9;6)	ROD CAM GAB INA MAR
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	MAN (9;11) ROD (9;2) CAM (9;1) GAB (9;4) INA (9;5) MAR (9;3) DAN (9;1) FLO (9;0) LUM (9;8) ROM (9;8) ERI (9;1) FLA (9;3)	DAN FLO LUM ROM ERI FLA
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes		
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções		

Segundo Piaget et al (1995), no nível I,

> há pois, manifestamente, incompreensão completa da multiplicação, que não é nem menos ainda uma adição de adições, mas uma simples sucessão de adições, o que não é a mesma coisa, devido à falta simultânea de um plano prévio e de uma síntese imediata. (p.41)

Conforme assinala o Quadro III - "Construção de Múltiplos Comuns", os sujeitos desta pesquisa apresentaram respostas a partir do nível IIA, quer no pré como no pós-teste. Assim, iniciaremos a análise a partir deste nível.

Nível IIA: Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas - pré-teste

Dos 17 sujeitos (cf. Quadro III) no pré-teste, 12 apresentaram soluções que puderam ser incluídas no nível IIA-Igualdade por meio de tentativas sucessivas.

Os sujeitos admitiam a possibilidade de igualdade, mas a alcançavam somente por tentativas sucessivas. Os exemplos a seguir ilustram soluções deste nível.

> MAN (9;1) Começa a prova das fichas alegando que tem que tentar para saber. Pega de 2 em 2 as vermelhas até obter 8 (4 vezes) e 2 vezes as verdes: –"**Dá 6.**" Pensa. Desmancha as vermelhas: –"**Espera aí.**" Põe 3 vezes 2 vermelhas e diz pronto. Daria para continuar? –"**Daria, mas eu não sei porquê.**" Com as torres começa colocando 2 peças azuis e 1 vermelha, mais 1 azul e 1 vermelha. –"**Pode ser assim?**" Está da mesma altura? –"**Está.**" Daria para conseguir a mesma altura com torres maiores ou menores? –"**Deixa eu ver.**" Coloca novamente 2 azuis, 1 vermelha, 1 azul e 1 vermelha. –"**Sempre vai dar, porque eu não sei explicar, eu estou mostrando.**" Você acha que estes jogos são parecidos? –"**São, porque tinha que ficar tudo igual.**" Tudo igual? –"**É, pôr fichas até dar igual e torres também igual.**"

> MAR (9;3) Primeiramente pega 3 verdes e 2 vermelhas, 2 vezes 3 verdes e 3 vezes 2 vermelhas, totalizando 9 verdes e 8 vermelhas. Conta as fichas e pega mais 3 verdes e 2 vezes 2 vermelhas, totalizando 12 em cada coleção.

> Conta as fichas e diz: –**"Pronto."** Tem o mesmo tanto? **"Tem."** Daria para continuar? –**"Não sei , tenho que tentar, acho que daria."** Tenta colocando 28 vermelhas e 27 verdes, conta e acrescenta mais 3 verdes e 2 vermelhas, conta e diz: –**"Deu igual."** Nas torres, começa colocando 2 vermelhas e 3 azuis. –**"Está da mesma altura."** Continua fazendo outra torre, põe 3 vermelhas e 4 azuis, mais 1 vermelha e 2 azuis e diz que estão da mesma altura. Daria para continuar fazendo torres maiores? –**"Eu tenho que ver . Daria."**
>
> LUM (9;8) Começa pelas fichas pegando de 3 em 3 as verdes por 14 vezes (42 fichas). Pega as vermelhas de 2 em 2 por 22 vezes (44 fichas) e dispõe entre as verdes. Conta as vermelhas de 2 em 2 e as verdes de 3 em 3, constatando que tem mais vermelhas. Tem um jeito de ficar o mesmo tanto? –**"Tem."** Como? –**"Tirando duas vermelhas".** Daria para conseguir coleções maiores ou menores que tivessem o mesmo tanto? –**"Acho que sim, tendo mais fichas."** Dá para saber quando isso vai acontecer? –**"Vai pondo de 3 em 3 ou 2 em 2 até fazer o tanto que você quer."** E com menos fichas, daria? –**"Não."** Nas torres começa colocando 2 vermelhas, desmancha e põe 8 azuis, desmancha novamente e diz: –**"Acho melhor começar pela vermelha."** Põe 2 vermelhas, 3 azuis, 2 vermelhas, 3 azuis, 2 vermelhas e 3 azuis. E constata que estão da mesma altura. Daria para continuar e ter torres da mesma altura? –**"Daria."** E torres menores? –**"Daria."** Como? –**"Tirava algumas vermelhas e algumas azuis."** Tira 2 vermelhas e 3 azuis. Ficou da mesma altura? –**"Ficou."** Quanto às semelhanças dos jogos: –**"Parecem um pouco porque as fichas são verdes e faz montinhos de 3 verdes, e nas torres faz 3 azuis e 2 vermelhas."**

Neste nível há a descoberta da compensação necessária, ou seja, como se pretende chegar à igualdade das coleções, e coloca-se de duas a duas as vermelhas e três a três as verdes, é preciso colocar um maior número de vezes as vermelhas.

Segundo Piaget et al (1995),

> procedendo ainda de maneira aditiva por adjunções, tentando novos "pacotes" ou "montes", estes sujeitos começam a compreender um princípio essencial da multiplicação: a relação inversa entre o multiplicador e o multiplicando, no caso de igualdade dos produtos. (p.37)

Em relação à comparação entre as duas provas, os sujeitos acreditavam que se pareciam devido à ação que realizavam nas duas.

Nível IIB: Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resoluções mais rápidas) - pré-teste

A diferença em IIB está no fato de existir uma resolução mais rápida na tarefa das fichas. O exemplo de DEB (9; 3), a seguir, ilustra este nível.

> DEB (9;3) Começa colocando 2 vezes 3 verdes e 3 vezes 2 vermelhas, alcançando a igualdade. Você conseguiria fazer isso com coleções maiores? –**"Conseguiria, põe mais 6 verdes (2 vezes montes de 3) vai dá 12 e aí mais 3 vezes 2 fichas, dá 12 de novo."** Nas torres, põe 1 vermelha, 1 azul, 2 azuis e diz: –**"Não dá assim porque a azul é menor."** Põe mais 1 vermelha e mais uma azul. –**"Deu."** Daria para conseguir isto novamente? – **"Daria, porque seria a mesma coisa 2 vermelhas e 3 azuis de novo."** Você acha que estes dois jogos são parecidos? –**"Sim, porque o das fichinhas são iguais e eu coloquei 3 de 3 e 3 do azul e 2 vermelho."**

Como se pode observar, DEB (9; 3) resolveu rapidamente o problema das fichas por tentativas. Nas torres demorou um pouco mais, alcançando a igualdade por tentativas sucessivas também. Na comparação das provas em IIB há comparações funcionais, buscando as abstrações refletidas.

Nível III: Soluções antecipatórias das relações entre as unidades - pré-teste

Desde o início os problemas foram resolvidos pelos sujeitos, por meio da relação entre as unidades, evitando-se as compensações por tentativas.

O exemplo de RAO (9; 7), a seguir, ilustra este nível.

> RAO (9;7): Começa pegando 3 vezes 2 fichas vermelhas. Dá risada. Pega 2 vezes 3 vermelhas. –**"Pronto 6 e 6."** Daria para continuar e conseguir coleções maiores? –**"Daria, deixa eu ver."** Põe mais 6 vermelhas e 6 verdes. –**"Deu."** Conta as duas coleções. Daria para continuar? –**"Dá"**. Dá para saber antes? –**"Dá, na tabuada do 2 tem 18 e o nove é o que a gente vai multiplicar, é a mesma coisa na verde só que eu coloco 6, acho que sim, aqui qualquer número par vai dar par e aqui no verde tem que dar**

um número par." Nas torres põe 2 vermelhas, 2 azuis e mais uma azul. Dá risada. –"**Tem que acabar os tocos (blocos de madeira)?**" Do jeito que você quiser, só tem que ter a mesma altura. Coloca mais 2 vermelhas e 3 azuis e diz: –"**Pronto.**" Daria para conseguir torres maiores ou menores? – "**Claro, porque cada 2 vermelhas é equivalente a 3 azuis, é só pegar 2 vermelho e 3 azul.**"

Neste nível as comparações são estruturais, ou seja, o sujeito compara a estrutura de suas ações nas duas tarefas, assinalando a relação de equivalência. Segundo Piaget (1995), "*como se vê, estas abstrações 'refletidas', enquanto tomada de consciência do resultado das abstrações reflexionantes, correspondem, nas suas etapas sucessivas, muito perto a estas últimas*" (p.40).

Pós-teste

Para exemplificar as soluções apresentadas no pós-teste, optou-se por citar os mesmos sujeitos que anteriormente serviram de exemplos no pré-teste. Acredita-se que este procedimento possibilitaria acompanhar os progressos por eles alcançados. Pode-se observar (cf. Quadro III) que, dos 17 sujeitos, 9 permaneceram no mesmo nível em que se encontravam no pré-teste. Destes 9, 3 apresentaram solução de nível III, mais complexa. Observa-se que, no pós-teste, 6 sujeitos também permaneceram apresentando soluções equivalentes ao nível IIA (tal como no pré-teste). Apresentaram mudanças de nível 8 sujeitos.

Como no pré-teste, não foram encontradas soluções de nível IA e IB.

Nível IIA - Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas - pós-teste

Será apresentado inicialmente o exemplo de LUM (9;8), cujas soluções permaneceram no pré-teste e pós-teste no mesmo nível IIA - Igualdade alcançada por meio de tentativas sucessivas.

No pós-teste este nível mostra os sujeitos que permaneceram nele. O exemplo de LUM (9;8), a seguir, ilustra estes casos.

LUM (9;8) Pega as fichas vermelhas e separa de 2 em 2 até acabar. – **"Sobrou uma."** Separa as verdes de 3 em 3. –**"Sobrou 1."** Tem o mesmo tanto? –**"Eu não contei."** Conta as vermelhas e as verdes. –**"O verde tem mais, 33 e o vermelho 32."** Mistura tudo e começa novamente. Repete o procedimento. Divide as verdes em grupos de 3 (10 grupos), separa as vermelhas em grupos de 2 até dar 30 (15 grupos). Tem o mesmo tanto? – **"Tem."** Dá para conseguir fazer coleções maiores ou menores? –**"Acho que sim."** Nas torres põe 2 azuis e 2 vermelhas, mais 1 azul, 2 azuis, 1 vermelha, 1 azul e 2 vermelhas. Estão da mesma altura? –**"Estão."** Dá para conseguir a mesma altura com torres maiores ou menores? –**"Dá."** Você sabe quando isso acontece? – **"É que essa (azul) é menor que essa (vermelha) e 1 e ½ da azul vale 1 inteira da vermelha."** Você acha que estes jogos são parecidos? –**"São, porque a gente pode montar o mesmo tanto com as fichas e a mesma altura com as torres.**

Nível IIB: Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas - pós-teste

Nesta categoria cinco sujeitos apresentaram evolução em suas soluções, passando do nível IIA para o IIB. O progresso alcançado constituiu em resolver o problema das fichas rapidamente. Isto significa que os sujeitos resolviam ainda por tentativas, mas agora mais rapidamente que o das torres, no qual ainda se demoravam mais.

O exemplo de MAR (9;3), a seguir, ilustra esta evolução.

MAR (9;3) Começa pelas fichas pegando 6 verdes e 6 vermelhas. – **"Pronto."** Tem o mesmo tanto? –**"Tem."** Daria para continuar? –**"Espera aí, deixa-me ver."** Pega mais 6 verdes e 6 vermelhas. –**"Pronto 12."** Dá para continuar? –**"Dá."** Dá para saber sem tentar? –**"Acho que sim."** Você sabe quando isso vai acontecer? –**"Só se eu tentar."** Tenta. –**"Pronto, 18 de cada e mais não dá."** Nas torres põe 2 vermelhas e 3 azuis, mais 1 vermelha, 1 azul, 1 vermelha e 2 azuis. Estão da mesma altura? –**"Estão."** Dá para fazer torres menores que tenham a mesma altura? –**"Dá."** Dá para saber como, antes de tentar? –**"Dá, tem que deixar 2 vermelhas e 3 azuis."** E torres maiores? Mostra novamente 4 vermelhas e 6 azuis. –**"Dá."** Dá para saber como antes de fazer? –**"Dá, tem que colocar 2 vermelhas e 3 azuis."** Você acha que estes jogos são parecidos? –**"São parecidos na conta dos dois."** Que conta? –**"Aqui (torre) eu te falei que tinha que colocar 3 azuis e 2 vermelhas e na ficha tinha que colocar de 2 em 2 e de 3 em 3."**

Enquanto no pré-teste MAR (9;3) conseguiu a igualdade das fichas com um maior número de tentativas, chegando nesta igualdade em 12 e 12, no pós-teste alcança a igualdade já em 6 fichas de cada conjunto. Nas torres, ainda continua utilizando mais tentativas, mas no momento em que compara as provas, faz comparações entre as ações que realizou nas torres e nas fichas: –"**Aqui (torre) eu te falei que tinha que colocar 3 azuis e 2 vermelhas e na ficha tinha que colocar de 2 em 2 e de 3 em 3.**"

Nível III: Soluções antecipatórias das relações entre as unidades - pós-teste

Neste nível encontram-se duas espécies de evoluções: uma, que indica a passagem de IIA para III, como é o caso de MAN (9;1), e outra que corresponde à passagem da solução de nível IIB para III.

No primeiro caso, MAN (9;1) evoluiu de soluções por meio de tentativas para soluções que estabeleciam relações antecipatórias entre as unidades.

> MAN (9;1) Na prova das fichas pega 4 vermelhas (2 vezes 2 vermelhas) e 3 verdes, mais 2 vermelhas e 3 verdes. –"**Pronto. Tem 6 aqui e 6 aqui.**" Dá para continuar? –"**Dá.**" Dá para saber antes? –"**Dá, vai dar 12 em cada lugar, sempre vai mais 6, mais 6.**" Nas torres põe 2 vermelhas e 3 azuis. –"**Pronto, dá para continuar, mais 3 da azul e 2 da vermelha.**" Estes jogos são parecidos? –"**São parecidos.**" O que você fez de parecido neles? –"**Tem que montar grupos iguais ali (nas fichas) e também tem que ser igual (torres).**"

O fato de MAN (9; 1)ter alcançado nível III partindo de IIA significa um salto qualitativo mais importante do que os sujeitos que passaram de IIA para IIB. Isto porque a mudança ocorrida nestes últimos referem-se mais à rapidez do procedimento que propriamente à constituição de um procedimento novo.

O exemplo de DEB (9; 3), a seguir, explica a passagem de soluções IIB no pré-teste para III no pós teste. Estas relações antecipatórias entre as unidades alcançadas pelos sujeitos no nível III podem ser caraterizadas como a descoberta dos múltiplos comuns, ou seja, se coloco duas vezes três fichas verdes, são necessárias três vezes duas fichas vermelhas, e, a cada duas peças vermelhas, é preciso colocar três peças azuis.

> DEB (9;3) Começa pelas fichas. –"**Pronto, peguei 3 verdes e mais 3 verdes, 2 vermelhas, mais 2 vermelhas, mais 2 vermelhas.**" Daria para continuar e conseguir o mesmo tanto com coleções maiores? –"**Dá.**" Dá para saber antes? –"**Dá, eu pego mais 6 vermelhas e mais 6 verdes, sempre dá para continuar deste jeito.**" Nas torres, põe 2 vermelhas e 3 azuis, sorri. Estão da mesma altura? –"**Estão.**" Dá para continuar. –"**Dá.**" Dá para saber antes? –"**Dá, põe mais 2 vermelhas e 3 azuis, daria para continuar sempre pondo 2 vermelhas e 3 azuis.**" Você acha que estes jogos são parecidos? –"**São diferentes porque isso é torre e isso é ficha.**" Tem alguma coisa que você fez de parecido? –"**Tem sempre que colocar coisas maiores e menores até ficar igual.**"

Por outro lado, também foram encontrados sujeitos que já no pré teste apresentavam solução por meio das relações antecipatórias entre as unidades, indicando que já dominavam estas relações e as mantiveram no pós-teste. O exemplo de RAO (9; 7), a seguir, ilustra este nível.

> RAO (9;7) Nas fichas, começa pegando 6 vermelhas e 6 verdes. "**6 nos dois.**" Dá para continuar? –"**Dá.**" Dá para saber antes quando isso vai acontecer? –"**Dá 12 e 12.**" Dá para continuar? "**Sim.**" Dá para saber antes? –"**Dá, 18.**" Dá para continuar? –"**Dá.**" Dá para saber antes? –"**Dá, indo de 6 em 6.**" Nas torres, começa dizendo: –"**Ah! Eu lembro disso.**" Põe 2 vermelhas e 3 azuis, torre 1 e torre 2. Continua, põe mais 2 vermelhas e 3 azuis. –"**É , podia ser mais baixa.**" Dá para continuar? –"**Dá.**" Dá para saber antes? –"**Dá, indo 3 azuis e 2 vermelhas.**" Você acha que estes jogos são parecidos? "**Um pouco.**" Em que são parecidos? –"**Tem que fazer tudo igual. Formar coisas iguais e do mesmo tamanho, só que um é menor que o outro**"

Estes progressos alcançados pelos sujeitos podem ter sido favorecidos pelas situações de jogo, uma vez que as resoluções das situações-problema ensejavam diferentes coordenações dos observáveis, por um lado, e por outro, de novos observáveis. Segundo Piaget (1995) as abstrações reflexivas são as responsáveis pelas coordenações. Desta forma, os "reflexionamentos" (projeção de um patamar a outro) e as "reflexões" puderam ser efetuadas. É compreendendo este duplo processo que se pode entender a evolução no nível da abstração reflexiva e a própria construção do conhecimento lógico-matemático, do qual a abstração é a fonte responsável.

Buscando relações entre as provas aplicadas, procurou-se observar no pré-teste a *Relação entre o Desempenho na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação e na Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas Segundo Granell.*

Para verificar a relação entre o desempenho global dos sujeitos na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação e os níveis de construção da noção de multiplicação foi elaborada a Tabela 4 a seguir.

Tabela 4 - Relação entre o Desempenho na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação e na Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas Segundo Granell (pré-teste)

SUJEITOS	Prova I: Problemas e Operações de Multiplicação / Porcentagem de acertos (global)	Prova II: Multiplicação e Divisão Aritméticas	
		Situação I	Situação 2
CAM (9;1)	100%	III	I
DEB (9;3)	100%	IV	1
ERI (9;1)	100%	III	III
FER (8;9)	100%	III	III
FLA (9;3)	100%	IV	I
FLO (9;0)	100%	IV	III
GAB (9;4)	100%	III-IV T	IV
INA (9;5)	100%	III	III
LUI (9;6)	100%	IV	IV
LUM (9;8)	100%	III	III
MAR (9;3)	100%	III	III
MAN (9;11)	100%	IV	III
RAO (9;7)	90%	IV	IV
ROD (9;2)	90%	III	III
ROM (9;8)	80%	III	III
MAT (10;2)	80%	III	III
DAN (9;1)	60%	III	I

Dos 17 sujeitos, 12 apresentaram 100% no desempenho global. Destes 12 sujeitos, 1 sujeito apresentou condutas IV e IV na Situação 1 e na Situação 2, respectivamente; 2 sujeitos apresentaram condutas IV e I; 5 sujeitos apresentaram condutas III e III; 1 sujeito apresentou transição da conduta III para IV na Situação 1 e conduta IV na Situação 2.

Dos 2 sujeitos que tiveram desempenho correspondente a 90%, um apresentou condutas III e III e o outro condutas IV e IV nas Situações 1 e 2, respectivamente.

Em relação aos sujeitos que acertaram 80%, ambos apresentaram condutas III nas duas Situações de prova.

O sujeito com desempenho igual a 60% obteve conduta III na Situação 1 e conduta I na Situação 2.

A partir destes dados, pode-se dizer que o desempenho dos sujeitos na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação não depende necessariamente do nível de evolução na construção da noção de multiplicação.

Segundo Granell (1983), o sujeito possui a noção do operador multiplicativo quando se encontra na conduta IV da Situação 2 - Divisão Aritmética, o que quer dizer resolve a prova por procedimentos antecipatórios, significando que a construção da noção, segundo Granell, de fato se constituiu. Portanto, a alta porcentagem de acertos na prova que se assemelha àquelas provas escolares, não assegura necessariamente que tais construções conceituais propriamente ditas estejam presentes, mas sim poderiam tratar-se de procedimentos mecânicos

Kamii (1997), baseada em Piaget, destaca que as crianças podem aprender os algoritmos sem este conhecimento estar apoiado em estruturas lógicas. Cabe ressaltar que não era objetivo do presente estudo verificar a compreensão conceitual da multiplicação, mas sim observar diferentes níveis de construção.

Estes dados foram observados somente no pré-teste devido ao bom desempenho dos sujeitos, mostrando alta porcentagem de acertos.

Relação entre o Desempenho Global na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação e Níveis de Abstração Reflexiva na Prova de Construção de Múltiplos Comuns (pré-teste)

A fim de verificar o nível de abstração das crianças e sua relação com o desempenho numa prova semelhante à escolar, foi construída a Tabela 5 a seguir.

Tabela 5: Relação entre o Desempenho Global na Prova de Problemas e Operações de Multiplicação e Níveis de Abstração Reflexiva na Prova de Construção de Múltiplos Comuns (pré-teste)

Porcentagem de acertos: prova escolar / Níveis de Abstração Reflexiva	100%	90%	80%	60%
III Soluções antecipatórias pela relação entre as unidades	FER (8;9)	RAO (9;7)	MAT (10;2)	
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	DEB (9;3) LUI (9;6)			
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	CAM (9;1) ERI (9;1) FLA (9;3) FLO (9;0) GAB (9;4) INA (9;5) LUM (9;8) MAR (9;3) MAN (9;4)	ROD (9;2)	ROM (9;8)	DAN (9;1)
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes				
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções				

Conforme mostra a Tabela 5, dos 12 sujeitos que acertaram 100% na prova de Problemas e Operações de Multiplicação, encontram-se nos seguintes níveis de abstração reflexiva: 1 sujeito no nível III, 9 sujeitos no nível IIA e 2 sujeitos no nível IIB. Dos 2 sujeitos que acertaram 90% , 1 está no nível III de abstração e outro no nível IIA. Dos 2 sujeitos que acertaram 80%, 1 se encontra no nível III e outro em IIA, e o sujeito que acertou 60% se encontra em IIA também.

Os dados deste estudo mostram que o nível de abstração, mais ou menos elevado, não determina a quantidade de acertos ou erros na resolução de problemas e operações de multiplicação. Este fato pode ser visto nos sujeitos que apresentaram 100% de acertos e se encontram no nível IIA de abstração, e sujeitos que tiveram 80% de acertos e se encontram no nível III de abstração.

Lopes (1997), estudando as relações entre o conhecimento aritmético de adição e subtração, e abstração reflexiva em crianças do ensino fundamental, também conclui que o bom desempenho não depende de um nível de abstração reflexiva mais evoluído, entretanto, para a compreensão, é necessário este nível de abstração superior. Segundo o autor (ibid), "*os processos que engendram as operações exigem, portanto, uma construção gradativa por parte do sujeito, sua real compreensão implica em abstrações reflexivas e não em memorização de técnicas*" (p.123).

Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação-Situação 1 - Multiplicação (pré-teste)

Para avaliar as relações entre a abstração reflexiva e a construção da noção de multiplicação na Situação 1- multiplicação no pré-teste foi construído o Quadro IV.

Quadro IV: Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação - Situação 1 - Multiplicação (pré-teste)

Condutas de multiplicação / Níveis de abstração reflexiva	IV S.[5] por antecipação do número de conjuntos	TRANSIÇÃO S. por procedimentos aditivos e por antecipações	III S. por procedimentos aditivos	II S. por consideração intuitiva da correspondência múltipla	I S. por correspondência termo a termo
III S. antecipatórias das relação entre as unidades	RAO (9;7)		MAT (10;2) FER (8;9)		
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	DEB (9;3) LUI (9;6)				
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	FLA (9;3) FLO (9;0) MAN (9;11)	GAB (9;4)	ROM (9;8) CAM (9;1) ERI (9;1) INA (9;5) LUM (9;8) MAR (9;3) DAN (9;1) ROD (9;2)		
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes					
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções					

O Quadro IV mostra a Situação 1 - Multiplicação da Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas e níveis de abstração reflexiva.

Somente um sujeito (RAO) encontra-se no nível de abstração e conduta mais elevados no pré-teste e este mesmo sujeito obteve 90% de acertos na prova

[5] S. = Soluções.

escolar. Segundo os procedimentos adotados por este sujeito, pode-se dizer que, já no pré-teste, ele possui a noção de multiplicação constituída.

Dos demais sujeitos que se encontram na conduta IV de multiplicação (N=5), 2 estão em IIB e 3 em IIA na abstração reflexiva. Tal fato significa que o nível IIA de abstração parece ser um ponto de evolução que subsidia a noção de multiplicação em um nível superior, pois procedimentos antecipatórios e as relações entre as unidades são efetuados.

É interessante notar que, mesmo estando no nível III de abstração, existem sujeitos (N=2) que pertencem à conduta III de multiplicação, pois ainda fazem uso de procedimentos aditivos. Ainda procedendo de maneira aditiva na multiplicação (conduta III) e por tentativas sucessivas na abstração reflexiva (nível IIA) encontram-se 8 sujeitos.

Segundo Granell (1983), a compreensão do operador multiplicativo, ou seja, da multiplicação, ocorre quando o sujeito tem o domínio das duas situações de multiplicação e divisão, isto é, da reversibilidade. Segundo Piaget (1995), a descoberta da compensação necessária que leva o sujeito à igualdade das coleções é possível a partir do nível IIA de abstração reflexiva. Entretanto, neste nível ainda o sujeito procede por meio de tentativas sucessivas.

Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação-Situação 1 - Multiplicação (pós-teste)

O Quadro V mostra a relação dos níveis de abstração reflexiva e a construção da noção de multiplicação (Situação 1) no pós-teste.

Quadro V: Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação-Situação 1 - Multiplicação (pós-teste)

Condutas de multiplicação / Níveis de abstração reflexiva	IV S.[6] por antecipação do número de conjuntos	TRANSIÇÃO S. por procedimentos aditivos e por antecipações	III S. por procedimentos aditivos	II S. por consideração intuitiva da correspondência múltipla	I S. por correspondência termo a termo
III S. antecipatórias das relação entre as unidades	RAO (9;7) DEB (9;3) LUI (9;6) FER (8;9) MAN (9;11)		MAT (10;2)		
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	GAB (9;4) MAR (9;3) ROD (9;2)	CAM (9;1)	INA (9;5)		
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	FLA (9;3) FLO (9;0) LUM (9;8) ROM (9;8)		ERI (9;1) DAN (9;1)		
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes					
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções					

O Quadro V mostra a evolução, tanto em termos de abstração quanto em relação à construção da noção de multiplicação.

Dos 17 sujeitos, 5 alcançaram um nível e conduta mais elevados, resolvendo as situações de prova pelo uso de antecipações e pela relação entre as unidades, o que revela um nível superior de construção da multiplicação. Dentre os7 sujeitos que também alcançaram a conduta IV, 3 se encontram em IIB e 4 em

IIA de abstração reflexiva. Em IIB encontra-se também 1 sujeito em transição de III para IV na multiplicação. Na conduta III de multiplicação há 4 sujeitos divididos da seguinte forma: 1 no nível III, 1 em IIB e 2 em IIA de abstração reflexiva.

Segundo Piaget et al (1995), por meio de abstrações reflexivas, a multiplicação se constrói partindo da adição. Este fato pode ser constatado nos sujeitos do presente estudo que partindo de procedimentos aditivos sucessivos chegam à multiplicação aritmética.

Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação - Situação 2 - divisão (pré-teste)

Para verificar a relação entre os níveis de abstração reflexiva e a construção da noção de multiplicação na Situação 2 (divisão) no pré-teste foi construído o Quadro VI.

[6] S. = Soluções.

Quadro VI: Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação - Situação 2 - Divisão (pré-teste)

Condutas de multiplicação / Níveis de abstração reflexiva	IV Diferentes composições de um todo por antecipações	TRANSIÇÃO Composições empíricas e por antecipações	III Diferentes composições de um todo por tateios empíricos	II Composições sem quantificação exata, início da tomada de consciência	I Não admitem composições com conjuntos equivalentes
III Soluções antecipatórias das relação entre as unidades	RAO (9;7)		MAT (10;2) FER (8;9)		
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	LUI (9;6)				DEB (9;3)
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	GAB (9;4)		MAN (9;11) FLO (9;0) ROM (9;8) ERI (9;1) INA (9;5) LUM (9;8) MAR (9;3) ROD (9;2)		CAM (9;1) FLA (9;3) DAN (9;1)
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes					
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções					

No Quadro VI pode-se notar que os sujeitos que se encontram na conduta IV (N=3), pertencem aos níveis III (N=1), IIB (N=1) e IIA (N=1).

O exemplo de RAO (9; 7), que se encontra na conduta IV, em ambas as situações e nível III de abstração reflexiva, ilustra que ele apresenta compreensão da noção de multiplicação.

Quando comparamos os Quadros IV e VI podemos dizer que as condutas de multiplicação (Situação 1) são mais evoluídas que as de divisão (Situação 2).

Conforme já foi dito anteriormente, o nível IIA de abstração reflexiva parece ser um nível que permite as composições por antecipações (conduta IV).

Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação - Situação II - Divisão (pós-teste)

O Quadro VII mostra a relação entre os níveis de abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação-Situação 2 (divisão) no pós-teste, após terem sido submetidas a uma intervenção pedagógica via jogos de regras.

Quadro VII: Relação entre os Níveis de Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação - Situação 2 - Divisão (pós-teste)

Condutas de multiplicação / Níveis de abstração reflexiva	IV Diferentes composições de um todo por antecipações	TRANSIÇÃO Composições empíricas e por antecipações	III Diferentes composições de um todo por tateios empíricos	II Composições sem quantificação exata, início da tomada de consciência	I Não admitem composições com conjuntos equivalentes.
III Soluções antecipatórias das relação entre as unidades	FER (8;9) LUI (9;6) MAN (9;11) RAO (9;7)	DEB (9;3)	MAT (10;2)		
IIB Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas (resolução mais rápida na tarefa das fichas)	GAB (9;4) ROD (9;2)		CAM (9;1) INA (9;5) MAR (9;3)		
IIA Igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas	LUM (9;8)		ROM (9;8) FLO (9;0) ERI (9;1) FLA (9;3) DAN (9;1))		
IB Reações de incompreensão, centração sobre o resultado aditivo dos transportes					
IA Reações de incompreensão de igualdade das coleções					

O Quadro VII vem concluir o quadro VI, pois para a construção da noção de multiplicação é necessário ter a idéia do operador multiplicativo, ou seja, conseguir realizar a multiplicação e a divisão.

Dos 17 sujeitos (cf. Quadro VII), 7 alcançaram conduta IV, sendo que 4 estão no nível III, 2 em IIB e 1 em IIA. Apenas um sujeito ficou em transição de III para conduta IV e no nível III de abstração. Na conduta III, encontram-se 9 sujeitos, sendo 1 pertencente ao nível III, 3 ao nível IIB e 5 ao nível IIA de abstração reflexiva.

Para alcançar conduta IV nas Situações 1 e 2, o nível IIA de abstração já é suficiente, mas não garante esta conduta. O exemplo de LUM (9; 8), que se encontra em IIA e conduta IV e os exemplos de ROM (9; 8), FLO (9; 0), ERI (9; 1), FLA (9; 3) e DAN (9; 1), que também estão em IIA na abstração, entretanto, não alcançaram conduta IV (cf. Quadro VII) ilustram este fato.

Pode-se dizer, a partir da análise dos resultados, que os sujeitos evoluíram pelo menos em um dos aspectos estudados, quer na abstração reflexiva, quer na construção da noção de multiplicação. Estes aspectos foram favorecidos pelas atividades desencadeadas nas situações lúdicas. Não que sejam os jogos por si, mas a ação de jogar, de refletir sobre as ações, de avaliar, de criar procedimentos, de descrever, de comparar, de inventar, de descobrir respostas e criar diferentes representações, que possibilitaram estas evoluções.

Os conteúdos relacionados à multiplicação estiveram presentes durante toda atividade lúdica. Não se ensinavam respostas durante a intervenção, problematizava-se, e os sujeitos buscavam soluções que poderiam ser corretas ou não. Como é característica do jogo, pode-se ganhar, perder, e tentar de novo. É este tentar de novo, de várias maneiras, discutindo com os parceiros, que permite engendrar construções e não somente apresentar respostas corretas.

Convém ressaltar que alguns sujeitos não apresentaram evoluções. Dos 4 sujeitos, 1 deles (RAO) já se encontrava nos níveis mais elevados em todas as provas, entretanto, este sujeito não foi excluído da análise uma vez que o trabalho foi realizado com todos os alunos da classe. Isto nos conduz a fazer algumas inferências: o número de intervenções (6) não ter sido suficiente para 3 sujeitos, necessitariam talvez de maior número; ou as situações-problema não permitiram que conflitos fossem engendrados; ou as condutas de compensação ficaram restritas às do tipo alfa, negligenciando ou anulando a perturbação. Nestes casos não se observam mudanças.

A seguir apresentaremos uma breve análise da intervenção com jogos.

Breve análise da intervenção pedagógica via jogos

Entre o pré e o pós-testes foi realizada a intervenção pedagógica com todos os alunos da classe (N=17), em seis sessões, segundo os procedimentos explicitados a partir da página 71.

Os sujeitos foram organizados em quatro grupos: um grupo composto por cinco e três compostos por quatro sujeitos, escolhidos aleatoriamente.

A intervenção centrou-se nos jogos Pega-varetas e Argolas, dos quais foram destacadas situações-problema relacionadas à construção da noção de multiplicação.

Intervenção Pedagógica com o jogo Pega-varetas

I) Aprendizagem do jogo-parte A

Para a aprendizagem do jogo realizaram-se três partidas. Inicialmente o experimentador apresentou o jogo aos sujeitos, indagando se já o conheciam e se sabiam como jogá-lo. Foi solicitado que combinassem as regras e iniciassem o jogo.

Os sujeitos já conheciam as regras do Pega-varetas, combinando entre si como iriam jogar. Quanto ao valor dos pontos das varetas, o experimentador colocou os valores na lousa, diferente dos valores do jogo original, a fim de obter uma pontuação mais baixa (cf. procedimento p. 72).

A ordem dos jogadores foi determinada por todos os grupos de maneira aleatória, adotando o critério "dois ou um". Este procedimento revela, quanto à construção de regras, um nível que pressupõe a presença da regra social, em que a escolha da ordem dos jogadores se realiza aleatoriamente e não mais de maneira intencional, tal como ocorre com a regra egocêntrica. Este aspecto manifesta o "estágio da cooperação nascente" no que concerne à prática das regras, há uma necessidade de respeito mútuo entre os jogadores. Neste estágio, de acordo com Piaget (1994), a cooperação é marcada quando a criança diferencia e coordena seu ponto de vista com os dos demais participantes do grupo, tornando-a capaz de uma relação de reciprocidade social.

A fim de determinar o vencedor, os sujeitos procederam contando os pontos obtidos por meio da adição: separavam cada vareta e adicionavam seu valor correspondente. Esta operação foi feita mentalmente pelos sujeitos, pois se tratavam de valores baixos e de poucas varetas obtidas. Cada um falava sua pontuação e assim designavam o vencedor da partida.

Vale destacar que, quanto à "consciência das regras", os sujeitos do presente estudo apresentaram condutas que revelam o terceiro estágio (cf. proposto por Piaget 1994), quando aceitaram alterações das regras segundo um consentimento mútuo. Ou seja, a regra não é mais compreendida como algo imposto, impossível de ser discutida ou modificada.

É importante ressaltar o papel do jogo de regras no desenvolvimento social, moral e intelectual das crianças. A interação social provocada pelo jogo possibilita que o respeito mútuo e a cooperação sejam instaladas, aspectos estes também responsáveis pela construção do pensamento operatório, na medida em que permitem descentrar e coordenar diferentes pontos de vista (Brenelli, 1996).

II) Intervenção pedagógica

A) Conhecimento lógico-matemático: classificação

Solicitou-se aos sujeitos que colocassem juntas as varetas que combinassem ou aquelas que pudessem ficar juntas, realizando classificações, e a seguir que fizessem uma representação gráfica da atividade.

Os sujeitos procederam classificando as varetas segundo o critério cor, destacando a quantidade dos pontos relativas a cada uma das varetas e suas respectivas cores. Esta atividade, por ser de natureza lógico-matemática, é importante na construção da noção de multiplicação.

Realizaram coleções não-figurais com as varetas e os registros variaram. Observaram-se representações em que as varetas eram desenhadas, acompanhadas dos registros dos valores dos pontos correspondentes, como se pode observar no exemplo de FER (8; 9) a seguir.

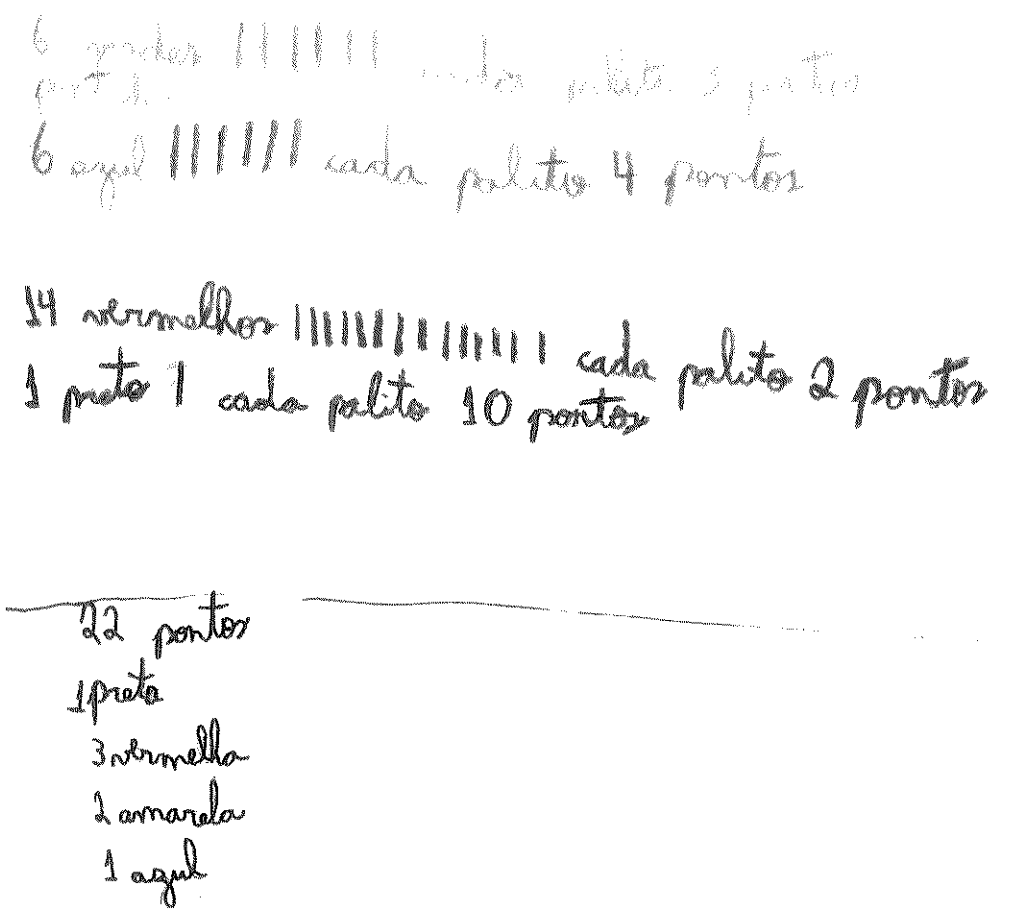


Fig. 8-Representação das Peças do Jogo Pega-varetas e seus Respectivos Valores Elaborada por FER

Outros sujeitos valeram-se de um símbolo para representar as varetas seguidas dos valores correspondentes como fez MAR (9; 3) a seguir:

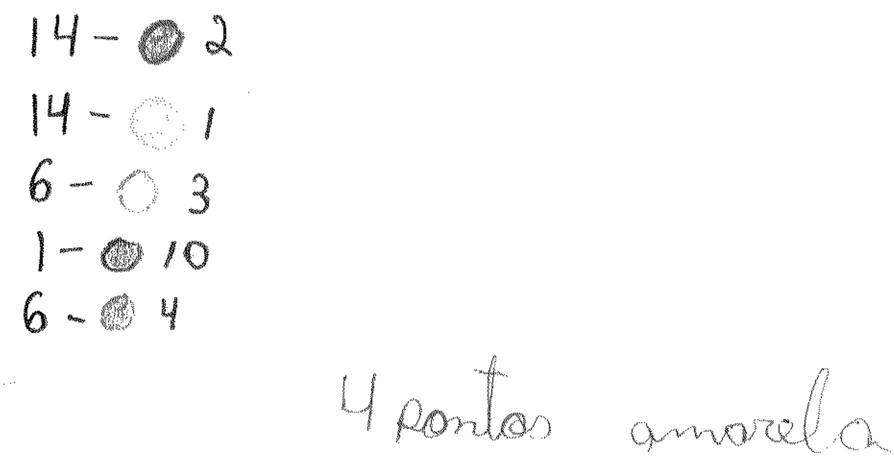


Fig. 9-Representação das Peças do Jogo Pega-varetas e seus Respectivos Valores Elaborada por MAR

Também se observaram sujeitos que escreviam a quantidade de varetas, a cor e os valores correspondentes, como por exemplo 14 varetas vermelhas que valem 2 pontos cada. De maneira geral, as representações nos registros continham informações necessárias e completas em relação aos observáveis do jogo: quantidade de varetas, cores e valores de cada cor.

Durante a prática das regras, observaram-se certas oscilações entre a regra egocêntrica e a regra social, o que marca a passagem ao estágio de "cooperação nascente"; quando as varetas mexiam uns apontavam: –**"mexeu"**, enquanto outros negavam esta ocorrência. Não obstante, procuravam resolver tal conflito mediante um consenso. Dentre outras, tais oportunidades permitiram aos sujeitos as coordenações interindividuais.

B) Operações aritméticas

Durante as partidas os sujeitos foram solicitados a contarem os pontos alcançados. O experimentador perguntava como seria possível fazer para que não esquecessem os pontos que tinham conseguido, alertando para a possibilidade de se utilizar papel e lápis. Os pontos eram registrados, e os sujeitos foram solicitados também a compararem os registros e determinarem o vencedor.

Diferentes tipos de registros espontâneos foram elaborados pelos sujeitos como em MAR (9; 3) e FER (8; 9) a seguir:

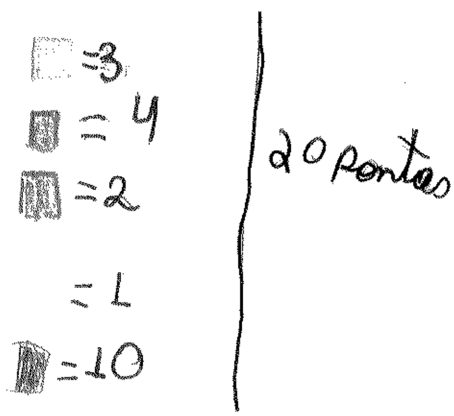


Fig. 10-Registro Espontâneo de MAR no Jogo Pega-varetas

O registro de MAR (9; 3), por meio de símbolos, mostra a ordem que pegou as varetas e quanto vale cada uma. A soma total de seus pontos foi feita mentalmente, anotando somente o valor final dos pontos obtidos.

Pontos
amarelo-1 pontos
vermelha-2 pontos
verde-3 pontos
azul-4 pontos
preto-10 pontos

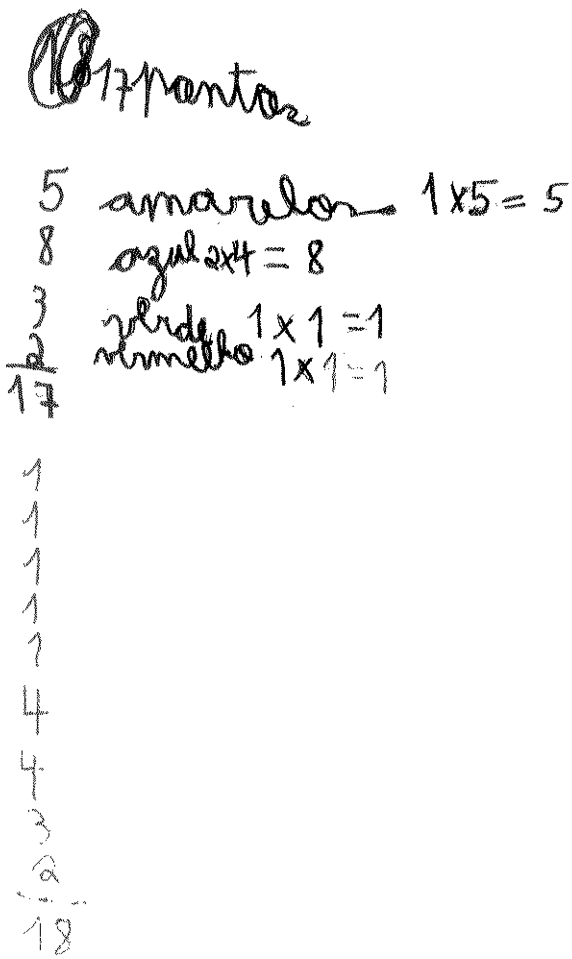
34

4 azul
4 amarelo
3 verde
2 vermelho

Fig. 11-Registro Espontâneo de FER no Jogo Pega-varetas

Já o protocolo de FER (8; 9) mostra os valores de cada cor de vareta e a quantidade que obteve de cada uma. O registro de FER (8; 9) mostra as cores escritas por extenso, ao contrário de MAR que utilizou símbolos para representar as cores.

Em seguida foi solicitado aos sujeitos que fizessem seus registros utilizando a Matemática. Por exemplo, FLO (9; 0).


17 pontos

5 amarelos 1x5 = 5
8 azul 2x4 = 8
3 verde 1x1 =1
2 vermelho 1x1=1
17

1
1
1
1
1
4
4
3
2
18

Fig. 12-Registro de FLO no Jogo Pega-varetas Utilizando a Matemática

O protocolo de FLO (9; 0) mostra que utiliza multiplicação nas cores quando considera cada uma individualmente, entretanto, quando vai somar o total da partida, volta a usar a adição e, apesar de já ter o resultado 1x5, coloca 1+1+1+1+1, assim procede com todas as varetas.

O exemplo de CAM (9; 1) a seguir, ilustra outro tipo de registro.

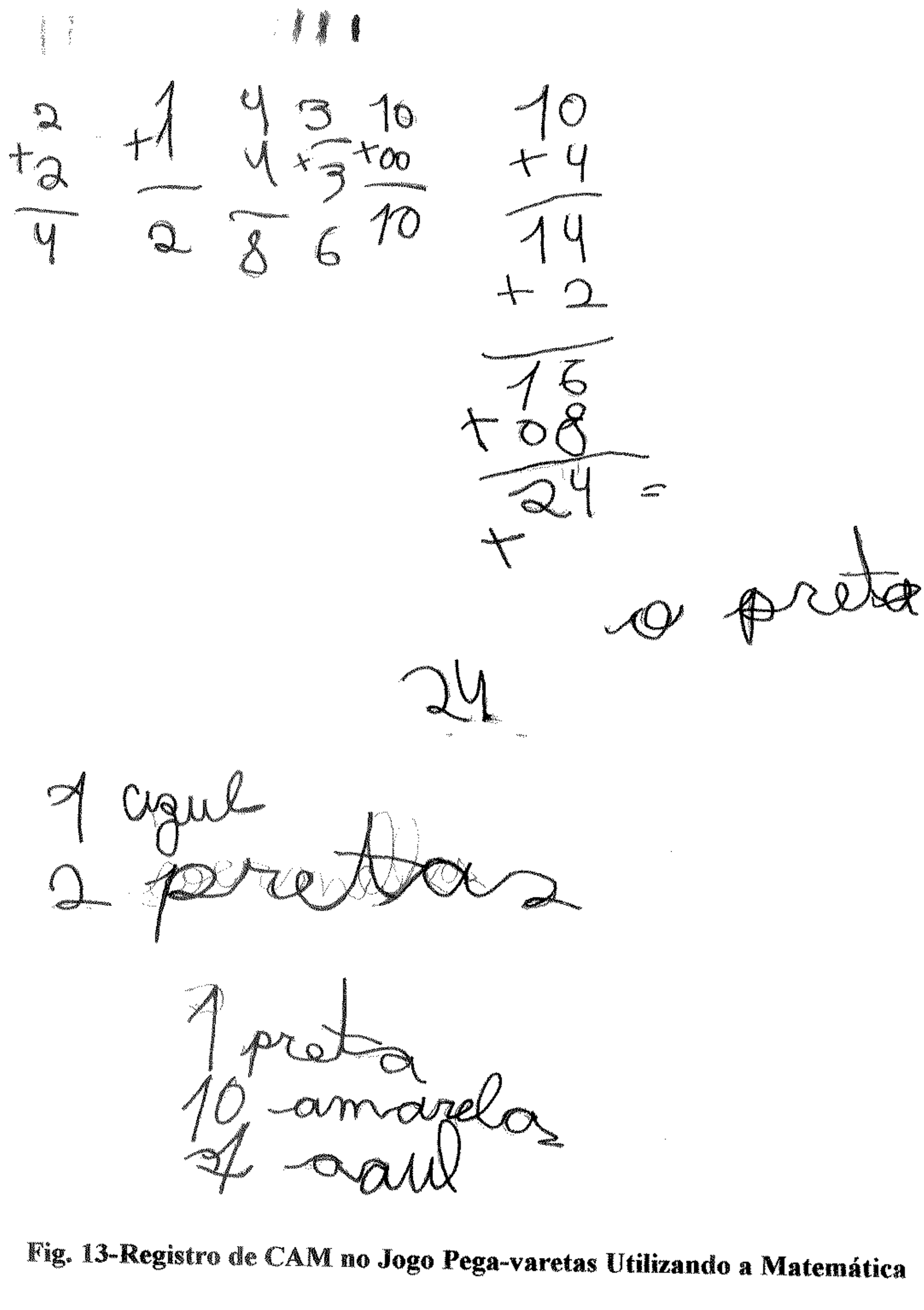


Fig. 13-Registro de CAM no Jogo Pega-varetas Utilizando a Matemática

CAM (9; 1) utiliza-se apenas da adição, começando por somar individualmente por cores e depois soma os resultados de cada cor, esquecendo-se de acrescentar três pontos correspondentes a uma vareta azul.

C) Relações de equivalência entre os valores das varetas

Nesta etapa, após os sujeitos contarem seus pontos, o experimentador solicitou que encontrassem outras maneiras de se obter o mesmo número de pontos com outras varetas. Pediu-se que representassem estas formas possíveis no papel. Foi solicitado também que verificassem a possibilidade de se obter o mesmo número de pontos, utilizando somente uma cor de vareta.

Os procedimentos adotados pelos sujeitos podem ser ilustrados nos exemplos a seguir.

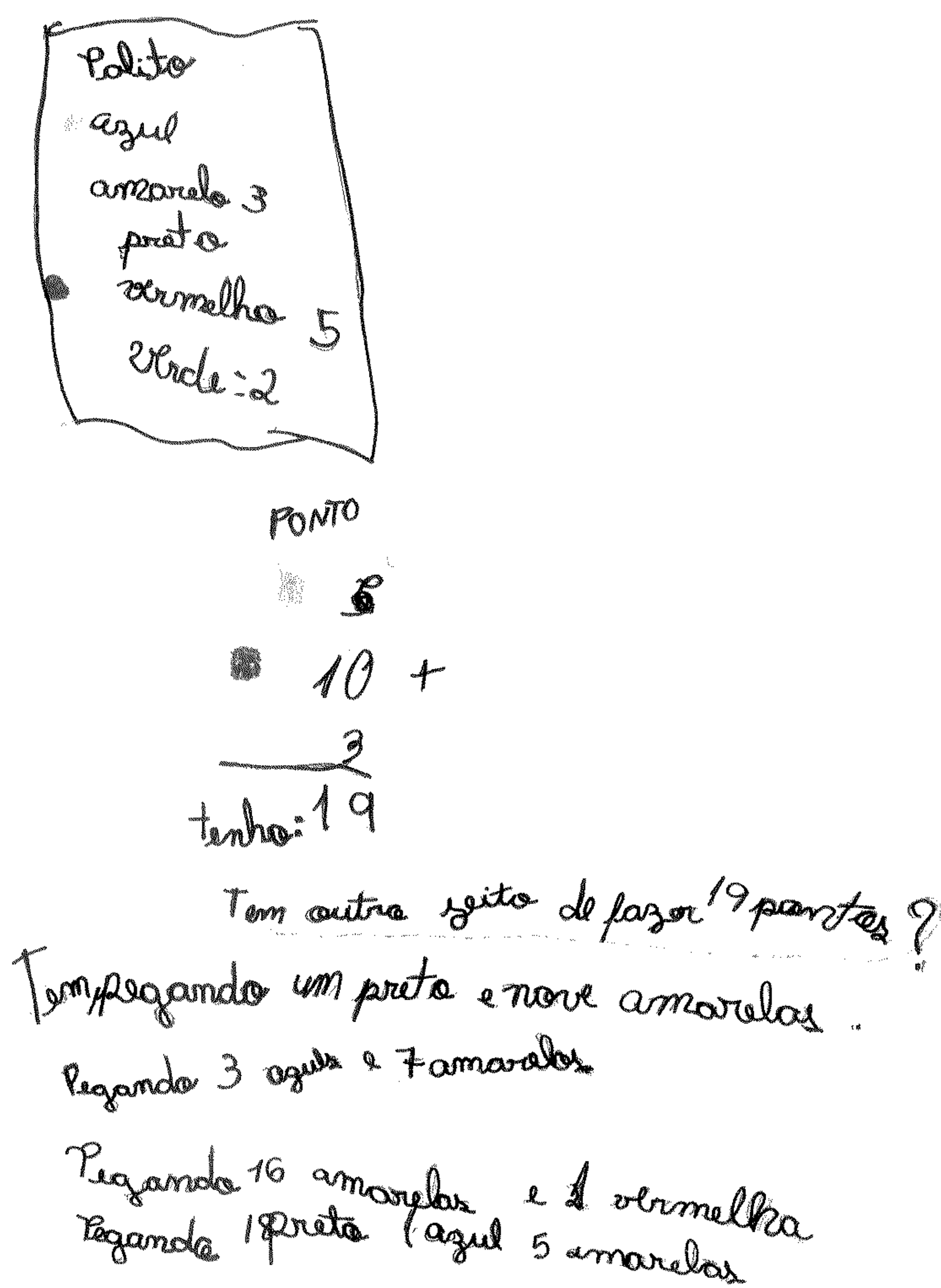


Fig. 14-Diferentes Composições do Todo Efetuadas por MAN no Jogo Pega-varetas

O número de pontos obtidos por MAN (9; 11) nesta partida (19 pontos) não permitiu que obtivesse o mesmo número de pontos somente com uma cor de varetas, pois 19 não é divisor de nenhum dos valores das varetas, a não ser da amarela (1 ponto). MAN (9; 11) resolveu a situação de três maneiras diferentes, mostrando diferentes composições do todo, mas não considerou a multiplicação em 19x1. Todas as suas resoluções foram escritas por extenso, sem usar o algoritmo.

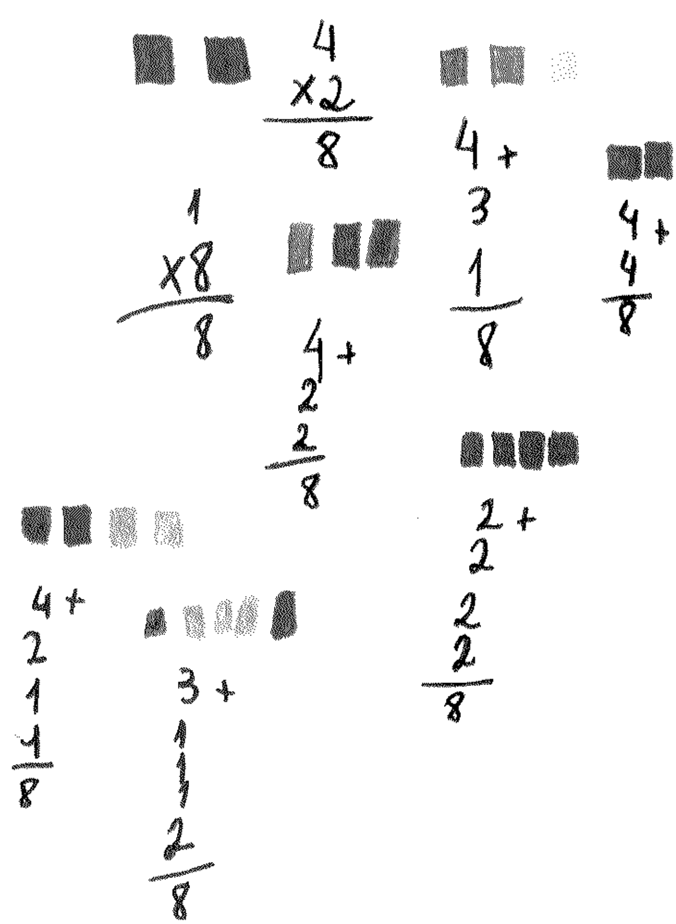


Fig. 15-Diferentes Composições do Todo Efetuadas por FLA no Jogo Pega-varetas

O número de pontos obtidos por FLA (9; 3) nesta partida (8 pontos) possibilitou diferentes composições, inclusive com varetas de mesma cor, mostrando as relações de equivalência entre os valores das varetas. No registro de FLA (9; 3) observa-se tanto multiplicação quanto adição nas diferentes composições do mesmo todo (8 pontos).

No geral, ao se trabalhar com jogos em sala de aula é importante que o professor ou, como no presente estudo, o experimentador, proponha situações que visem a solicitar determinadas construções nos alunos propiciadas pelo contexto lúdico. Como se observou, as atividades com o Pega-varetas possibilitaram aos sujeitos fazer uso da multiplicação e elaborar diferentes formas de chegar ao mesmo todo.

D) Relações Multiplicativas

As relações multiplicativas foram trabalhadas em diversos momentos do jogo. O experimentador questionava conforme as jogadas dos sujeitos. Na medida em que pegavam, por exemplo, uma vareta vermelha, o experimentador perguntava: *"Se a cada vareta vermelha (2 pontos cada) que você obtiver, seu amigo pegar duas amarelas (1 ponto cada), quem ganhará o jogo?"* E assim se procedeu ao longo do jogo, com questões que incitavam à multiplicação.

Os sujeitos procederam respondendo estas questões mentalmente, acertando os resultados na maioria das vezes. Estas situações propiciavam aos sujeitos fazerem relações multiplicativas, fundamentais para a construção da noção de multiplicação. E estas relações estavam diretamente ligadas à construção de múltiplos comuns.

III) Pega-varetas - Parte B / Troca de varetas

A) Relações Multiplicativas

Após o término das partidas foi proposto aos sujeitos que trocassem suas varetas entre si, desde que esta troca garantisse que ficassem com o mesmo valor de pontos.

Durante as trocas das varetas, o experimentador fazia questões que auxiliavam as equivalências como, por exemplo: Uma vareta azul (04 pontos) pode ser trocada por quais varetas para que fique o mesmo valor de pontos?" "Se você fosse trocar seus pontos apenas por varetas vermelhas (2 pontos cada), por quantas varetas daria para trocar?

Inicialmente os sujeitos mostraram-se um pouco resistentes à troca de varetas, principalmente aqueles que possuíam a vareta preta, pois todos queriam trocá-la. Aos poucos, começaram a trocar quando tomaram consciência de que o valor total não se alteraria. Em algumas partidas, a quantidade de varetas obtidas dificultava estas trocas, pois eram valores muito diferentes.

Estas situações provocaram perturbações, conforme apontado anteriormente com a vareta de cor preta (maior valor). Contudo, observou-se que, conforme as relações de equivalência que iam sendo compreendidas, pouco a pouco esta perturbação foi compensada.

Intervenção pedagógica com o Jogo de Argolas

I) Aprendizagem do Jogo

Para que os sujeitos conhecessem os materiais do jogo e as regras foram realizadas três partidas. Do mesmo modo do Pega-varetas, o Jogo de Argolas foi apresentado aos sujeitos pelo experimentador, solicitando a organização das regras e da partida: ordem dos jogadores e o término do jogo, a fim de esclarecer quem seria o vencedor.

Em cada partida, os sujeitos arremessaram 5 argolas e contaram os pontos obtidos, registrando de forma espontânea. O experimentador, a cada alvo acertado, indagava: *"Você acertou duas argolas no alvo azul, como pode fazer para pegar as fichas azuis?"* E assim se procedeu com todos os sujeitos conforme seus acertos.

Convém destacar que os alvos foram apresentados aos sujeitos aos poucos: inicialmente os alvos correspondentes aos valores de 1 a 5 e posteriormente acrescentaram-se os demais valores até o nove.

II) Intervenção pedagógica

A) Correspondência de um para muitos

Nesta etapa, o experimentador propôs questões que permitiram aos sujeitos estabelecer correspondência de um para muitos, ou seja, corresponder cada haste com o respectivo valor em fichas.

Esta atividade tem importância na construção da noção de multiplicação na medida em que possibilita ao sujeito relacionar cada cor da haste ao seu respectivo valor e quantidade de fichas, podendo perceber, por exemplo, que, apesar de a haste de 9 pontos ser mais difícil de acertar, somente um acerto vale por três acertos na haste de 3 pontos, ou ainda 9 acertos na haste de 1 ponto.

Após ter realizado este procedimento com todas as hastes, foi solicitado aos sujeitos que representassem estes procedimentos, utilizando lápis e papel.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos dos registros espontâneos. FLA (9; 3) e GAB (9; 4) ilustram dois tipos de procedimentos diferentes adotados pelos sujeitos.

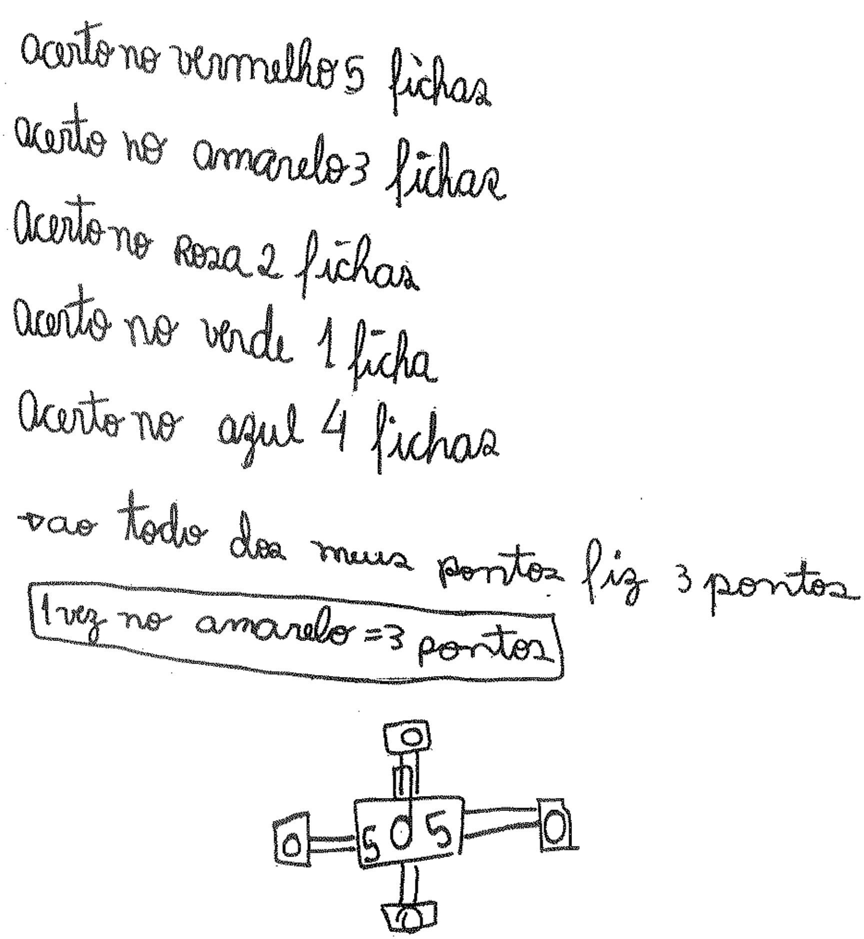


Fig. 16-Registro Espontâneo de FLA no Jogo de Argolas

Os procedimentos de FLA (9; 3) mostram a quantidade de fichas correspondente a cada alvo do jogo, a representação gráfica do jogo e o total de pontos obtidos nesta partida. Para seu registro, FLA (9; 3) utilizou-se apenas da escrita por extenso, sem utilizar-se de símbolos.

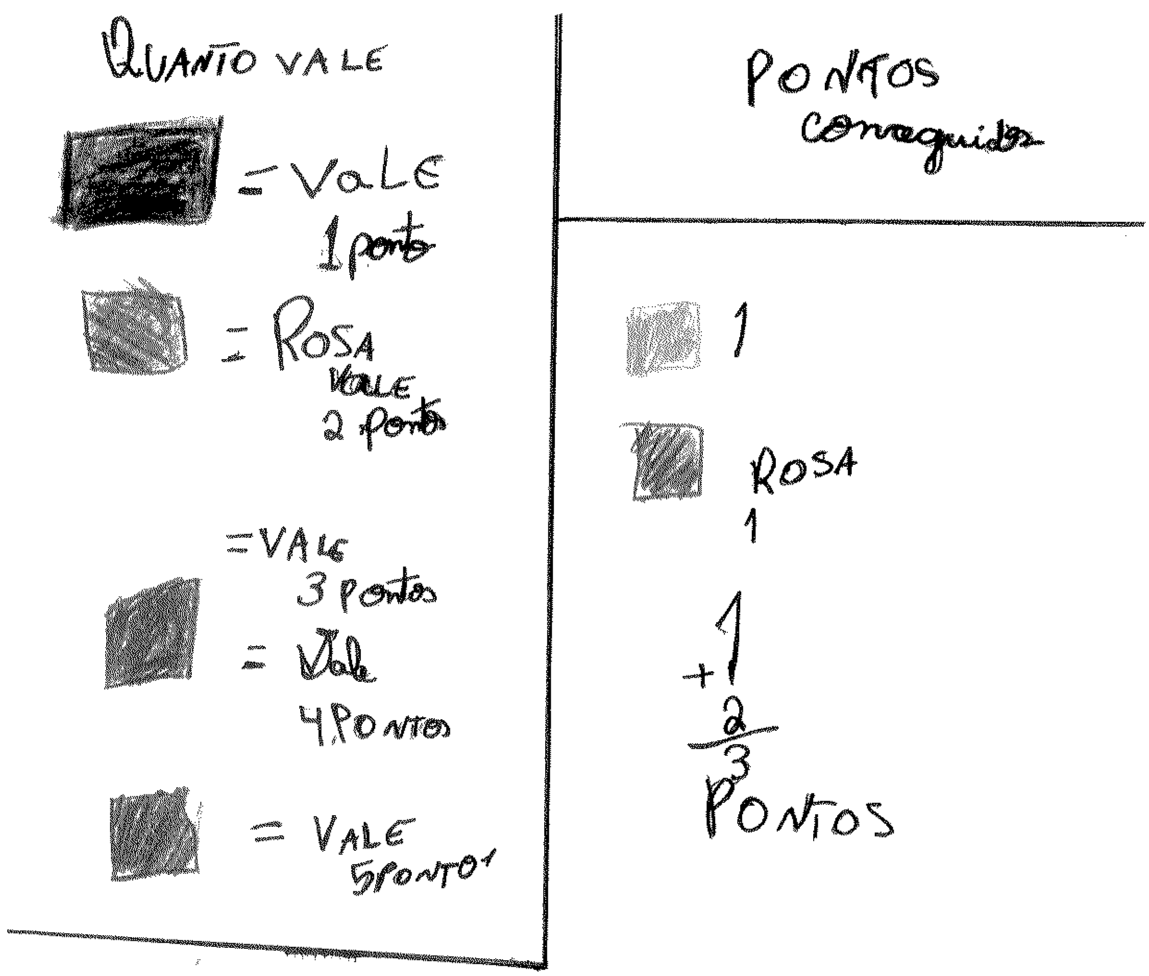


Fig. 17-Registro Espontâneo de GAB no Jogo de Argolas

Já o registro de GAB (9; 4) mostra a correspondência das cores dos alvos ao número de pontos, sem colocar o número de fichas como FLA (9; 3). Além disso, mostra seus acertos e a contagem de pontos da partida por meio da adição.

B) Correspondência de muitos para muitos

Durante as jogadas, conforme acertavam os alvos, o experimentador propunha questões que levavam os sujeitos a fazerem correspondência de muitos para muitos. Os sujeitos respondiam as questões e demonstravam seus procedimentos com as fichas.

Os procedimentos de ROD (9; 2), a seguir, servem como exemplo.

> ROD (9; 2): Após ter acertado duas argolas no alvo amarelo que vale 3 pontos, é questionado: Conte-me sua jogada. –**"Eu acertei duas vezes no amarelo, então peguei 6 fichas amarelas."** Como você sabe que são 6? – **"Porque 3+3 dá 6.**

Este procedimento permitia ao sujeito refletir sobre sua ação por meio da operação. Entretanto, apesar de sua fala mostrar a multiplicação –**"Eu acertei duas vezes no amarelo..."**- quando justificava utilizava-se ainda da adição: – **"Porque 3+3 dá 6."** Estas questões possibilitavam aos sujeitos depararem-se com situações que envolviam a multiplicação e, portanto, poderiam favorecer a construção desta noção.

C) Operações Aritméticas

As operações aritméticas foram trabalhadas durante a contagem de pontos. Conforme os sujeitos acertavam os alvos, o experimentador solicitava que contassem os pontos obtidos e pegassem as fichas correspondentes.

A seguir, alguns exemplos mostrando estes procedimentos.

> ERI (9; 1): (1.a jogada) Conte-me em que alvos você acertou.–**"Acertei 3 argolas no amarelo, 9 ao todo."** Como você sabe? – **"Porque 3+3+3 dá 9 ou 3x3 dá 9."**
> (2.a jogada) –**"Uma no vermelho e uma no amarelo."** Quantas fichas você precisa pegar? –"8" Como você sabe? –**"Porque 5+3=8, eu fiz 8 pontos."**

As mesmas questões foram feitas a todos os sujeitos, respeitando o número de pontos obtidos por eles.

Posteriormente foram propostas questões que pudessem propiciar a construção da noção de multiplicação.

O protocolo de ROD (9; 2) ilustra estas questões.

"De quantas maneiras você consegue fazer 12 pontos?"

1 _ verde $12 \times 1 = 12$ azul $4+4+4$ Preta $6+6$ amarela $3+3+3+3$ rosa $6 \times 2 = 12$

Fig. 18-Diferentes Composições do Todo (12 pontos) Efetuadas por ROD no Jogo de Argolas

"Qual alvo você deve acertar para fazer 15 pontos? Quantas vezes é preciso acertar?" (Foi solicitado que usasse lápis e papel).

2 - verde $15 \times 1 = 15$ amarela $5 \times 3 = 15$ vermelha $5+5+5=15$

Fig. 19-Diferentes Composições do Todo (15 pontos) Efetuadas por ROD no Jogo de Argolas

O registro de ROD (9; 2) ilustra os uso tanto da multiplicação como ainda da adição em alguns momentos, mostrando o quanto estas situações de intervenção favoreceram a construção da noção de multiplicação pelos sujeitos.

D) Relações Multiplicativas

Nesta situação foram propostas questões mais elaboradas, envolvendo as variáveis da operação de multiplicação (multiplicando, multiplicador e produto).

Os exemplos a seguir mostram estas questões.

"Vamos fazer de conta que eu fiz 4 acertos no alvo de 2 pontos. Quantos acertos você tem que fazer no alvo de 4 pontos para conseguir marcar o mesmo número de pontos?"

Os sujeitos mostraram como chegaram a solução utilizando as fichas, argolas e alvos.

4 acertos na rosa = 2 vezes no azul

Fig. 20-Relações Multiplicativas Efetuadas por ERI no Jogo de Argolas

2×O azul

Fig. 21-Relações Multiplicativas Efetuadas por MAN no Jogo de Argolas

Os procedimentos dos sujeitos mostraram o uso da multiplicação.

A seguir foi proposta aos sujeitos a seguinte questão: *"Se eu fizer 2 jogadas e acertar 3 argolas no alvo de 6 pontos em cada jogada e você fizer 3 jogadas, quantas argolas tem que acertar, em cada jogada, no mesmo alvo para fazer o mesmo número de pontos?"*

Os procedimentos de ERI (9; 1), a seguir, mostram como resolveram esta questão. Trata-se de uma questão mais complexa e muito semelhante aos experimentos da prova de abstração reflexiva sobre múltiplos comuns. Esta semelhança está no fato de que é necessário chegar ao mesmo valor de pontos, utilizando número de jogadas e alvos diferentes, mas que sejam múltiplos para se obter a igualdade de pontos, como no caso das fichas e das torres.

2 jogadas acertei 3 em cada 2×3= = 36 pontos

3 argolas

3×6 = 18

3×6 = 18

36

6 argola

36 | 3 = 12 (3, 06, 6, 0)

12 | 2 = 6 (12, 00)

Fig. 22-Relações Multiplicativas (mais complexas) Efetuadas por ERI no Jogo de Argolas

O protocolo de ERI (9; 1) mostra o uso da multiplicação para responder à primeira parte da questão e, posteriormente, a divisão para chegar ao resultado final. No entanto, apesar de ERI (9; 1) já utilizar a multiplicação, aqui, no caso do jogo, não chegou à construção final desta noção.

E) Noções de processo inverso-divisão

Após o final do jogo, esta etapa visava a trabalhar com o processo inverso. O sujeito deveria descobrir os alvos e a quantidade de vezes que acertou a partir de suas fichas.

A seguir, alguns procedimentos ilustram esta etapa.

> ERI (9; 1): 10 fichas vermelhas e 24 amarelas. Olhando para suas fichas, é possível perceber quantas vezes você acertou no alvo vermelho e no amarelo? –"**2 no vermelho, porque tem 10 e o vermelho vale 5 e 5+5 dá 10.**" E as amarelas? –"**Peraí, 24 dividido por 3 igual, 3x5 dá 15. Então não, 3x6 dá 18, 19, 20, 21. Não sei. Calma, vou formar grupo de 3.**" Conta os grupos. –"**8**"? "**É porque formei grupos de 3 e contei, deu 8 grupos.**"

Prosseguindo esta etapa é proposto ao sujeito que considere todas suas fichas como sendo da mesma cor e diga quais alvos e quantas vezes poderia ter acertado.

> MAN (9; 11): Se todas as fichas fossem da mesma cor, quantas teria ao todo? –"**Eu tenho 3 amarelas e 5 vermelhas, seria 8 ao todo.**" Que alvos você poderia ter acertado? –"**O verde, 8 vezes, porque o verde vale 1, 1+1+1+1+1+1+1+1 dá 8.**" Tem algum outro alvo? –"**Mas só pode acertar ele?**" É, de uma cor só. –"**O azul, 2 vezes.**" Como você sabe? –" **Porque o**

azul vale 4 pontos e 4+4 dá 8." Tem algum outro alvo? –**"O rosa."** Quantas vezes? –**"4 vezes.". O alvo rosa vale 2 e 2+2+2+2 é igual a 8."**

O procedimento de MAN (9; 11) revela tanto o uso da adição quanto da multiplicação

Pode-se dizer que a intervenção via jogos favoreceu, a grande parte dos sujeitos estudados, avançar na construção da noção de multiplicação, conforme indicaram os dados do pré-teste e pós-teste já citados anteriormente.

Discussão e Considerações Finais

"Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito... não somos o que deveríamos ser, não somos o que iremos ser. Mas, graças a Deus, não somos o que éramos."

Martin Luther King

Segundo a concepção piagetiana, a construção das estruturas que permitem ao ser humano conhecer, dá-se na contínua interação do sujeito com o meio, nas constantes trocas que partem de ações sensório motoras até trocas simbólicas cada vez mais complexas.

As estruturas sucessivas, que devem ser vistas tanto no plano social como no individual, resultam de um processo de equilibração que conduz de certos estados de equilíbrio a outros qualitativamente diferentes, em que existe uma multiplicidade de desequilíbrios e reequilibrações, sendo as abstrações reflexivas responsáveis pelas novas formas nas quais tem origem o conhecimento lógico-matemático. Resulta este último de coordenações de ações ou operações do sujeito.

Partindo desta concepção, o papel da escola, a fim de cumprir com seus objetivos, deveria apresentar desafios às crianças de forma a desencadear a construção do conhecimento lógico-matemático.

Priorizando estes aspectos, seria função da escola valorizar a construção do conhecimento por meio da ação da criança e não da transmissão. Sobretudo pautar-se, como diz Macedo (1994), em um ensino formalizante e não formalizado, em que as ações são valorizadas e não somente a linguagem, como um único meio de transmissão de informações. A este respeito afirma o autor:

> ao construtivismo interessam as ações do sujeito que conhece. Estas, organizadas enquanto esquemas de assimilação, possibilitam classificar,

> estabelecer relações, na ausência das quais aquilo que, por exemplo, se fala ou escreve perde seu sentido. Ou seja, o que importa é a ação de ler ou interpretar o texto e não apenas aquilo que, por ter se tornado linguagem, pôde ser transmitido por ele. (p.15)

Em geral, a Matemática é uma das disciplinas que mais apresenta dificuldade para a criança na escola. Piaget (1971) destaca a importância da Matemática ter como ponto de partida a ação real e concreta visando à abstração. Apresentar à criança problemas de seu interesse, partindo de situações concretas, abre maior possibilidade de compreender e inventar, ainda que não percebam que são problemas de Matemática.

Considerando estes pressupostos que valorizam o papel ativo do sujeito como construtor de seu conhecimento, e que valorizam o meio como solicitador desta construção, formulou-se o problema que norteou a presente pesquisa: em que medida uma intervenção pedagógica em sala de aula, via jogos de regras, poderia favorecer a construção da noção de multiplicação em crianças que freqüentam a terceira série do ensino fundamental e esta construção se apóia em que níveis de abstração reflexiva?

A análise qualitativa dos resultados apontou progressos dos sujeitos estudados, tanto no que concerne à construção da noção de multiplicação como aos níveis de abstração reflexiva.

Conforme os resultados obtidos, pode-se dizer que a construção da noção de multiplicação torna-se possível a partir do nível IIA de abstração reflexiva (igualdade nas coleções alcançada por meio de tentativas sucessivas). Quatro sujeitos que se encontravam neste nível apresentaram a conduta IV nas provas de multiplicação e divisão, indicando que a noção já se encontra constituída. Nos níveis IA e IB de abstração reflexiva não se encontrou nenhum sujeito, uma vez que caracteriza este nível uma total incompreensão da multiplicação (Piaget, 1995).

Constatou-se também que os sujeitos apresentaram um certo domínio da multiplicação da maneira como ela é ensinada pela escola. O índice de acertos na Prova "Problemas e Operações de Multiplicação" foi bastante significativo. Entretanto, estes resultados não garantem a construção da noção em níveis mais complexos (condutas IV nas situações de multiplicação e divisão). A conduta III da prova em relação a construção da noção de multiplicação (soluções por procedimentos aditivos - Situação1) mostrou-se suficiente para assegurar um bom desempenho dos sujeitos nestas tarefas escolares. A este respeito, segundo Granell (1983), fazer adições sucessivas não significa realizar multiplicações, mesmo sendo o resultado final igual porque o número de operações deixa de ser considerado. A coordenação das três variáveis–multiplicador, multiplicando e resultado final–são necessárias à compreensão da multiplicação.

Conforme Quadro II (p.104) Noção de Divisão Aritmética - Situação 2, 7 sujeitos alcançaram a construção da noção de multiplicação, ou seja, conduta IV- diferentes composições de um todo por antecipações. Segundo Granell (1983), estes sujeitos apresentam a idéia do operador multiplicativo, fundamental para a compreensão da multiplicação.

Destes sujeitos, 4 alcançaram nível III em abstração reflexiva, 2 obtiveram nível IIB e 1 sujeito IIA, comprovando o que já foi dito anteriormente, sendo IIA suficiente para a construção da noção de multiplicação.

Dos 6 sujeitos que apresentaram nível IIA de abstração reflexiva no pós-teste, apenas 1 chegou à construção final da multiplicação (conduta IV-situação 2-divisão), o que significa que esta construção, apesar de ser possível a partir de IIA, tem maior incidência em níveis mais elevados de abstração reflexiva (IIB e III).

Neste nível IIA há um início da compreensão do princípio essencial da multiplicação por envolver a relação inversa entre o multiplicador e o multiplicando. Os sujeitos deste nível iniciam uma compensação necessária, compreendendo que, se as fichas verdes são colocadas de três em três e as vermelhas de duas em duas, logo, para se obter a igualdade é necessário que se coloque mais vezes as fichas vermelhas.

No nível III, correspondente ao das abstrações refletidas, ou seja, à tomada de consciência de abstrações reflexivas anteriores, os sujeitos passam a fazer comparações estruturais entre os experimentos (fichas e torres). O exemplo de RAO (9;7) ilustra este nível ao concluir: –"**Um pouco parecidos, tem que fazer tudo igual, formar coisas iguais e do mesmo tamanho, só que um é menor que outro.**" Observa-se que o sujeito é capaz de explicitar uma regra comum quando compara as duas situações, deixando de recorrer às compensações por tentativas, resolvendo a situação-problema pela relação entre as unidades.

A análise qualitativa dos dados mostrou que 13 sujeitos apresentaram evolução em pelo menos um dos aspectos estudados. Esta evolução pode ter sido favorecida pela intervenção com jogos pela qual passaram os sujeitos da presente pesquisa.

Em relação aos quatro sujeitos que não apresentaram evolução, um deles já se encontrava desde o pré-teste nos níveis mais elevados em todas as provas. Pode-se inferir que o número de sessões de intervenção (seis) não tenha sido suficiente para estes sujeitos.

Brenelli (1993) fez um estudo com crianças que apresentavam dificuldades de aprendizagem, utilizando de 13 a 16 sessões de intervenção pedagógica, pois seu objetivo era intervir até que houvessem evolução. Como neste estudo, as sessões foram determinadas a priori, acredita-se que este número possa não ter sido suficiente para todos os sujeitos.

Os resultados obtidos neste estudo entre o pré-teste e o pós-teste podem ser explicados de acordo com as condutas α (alfa), β (beta) e γ (gama), propostas por Piaget (1976), em relação às compensações das perturbações.

Nas condutas de nível α (alfa) encontram-se os 3 sujeitos que não apresentaram evolução em nenhuma das provas no pós-teste. Nestes casos, pode-se hipotetizar que a reequilibração consistiu em neglicenciar a perturbação, anulando-a. Esta poderia ter sido, voltando-se a Piaget, *"forte, ou julgada* *implicitamente como tal pelo sujeito"* (ibid, p.65). Ou, então, a compensação foi obtida por simples modificação introduzida pelo sujeito sem ocasionar alteração no sistema. Desta maneira, a intervenção provocou uma pequena perturbação vizinha ao ponto do equilíbrio em que se encontrava o sujeito, de tal modo que nenhuma modificação foi observada.

Por outro lado, quanto aos sujeitos que apresentaram evolução, quer nas Provas de Multiplicação e Divisão Aritméticas, quer na Prova de Abstração Reflexiva (cf. indicam os Quadros I, II e III) pode-se hipotetizar que as compensações alcançadas caracterizam-se por condutas de nível β (beta) e γ (gama).

A conduta β (beta) integra a perturbação, porém, é parcialmente compensadora, provocando modificações parciais no sistema.

Assim se encontram os sujeitos que evoluíram de níveis menos complexos, sem, contudo, alcançarem níveis mais complexos. (nível III de Abstração Reflexiva e conduta IV de Divisão Aritmética, cf. observa-se nos Quadros I, II e III).

Os procedimentos empregados nas soluções envolveram tateios empíricos e níveis de transição, revelando compensações β (beta), parcialmente compensadoras, já que a reversibilidade que permite as antecipações ainda não estaria totalmente construída pelos sujeitos, a não ser na Prova de Multiplicação - Situação 1, que envolve antecipações no nível III, porém esta noção só se constitui quando o nível IV de divisão é atingido. Em outras palavras, considera-se reversibilidade completa somente quando o nível IV da Prova de Divisão é manifestado.

A conduta γ (gama) antecipa as variações possíveis, atingindo a compensação completa, sendo a perturbação uma variação do próprio sistema.

Pode-se inferir que os sujeitos que alcançaram no pós-teste níveil III de Abstração Reflexiva e conduta IV na Prova Divisão Aritmética apresentaram condutas γ, na medida em que revelam estes níveis mais complexos antecipações e reversibilidade completas.

Os sujeitos que, desde o pré-teste encontravam-se nestes níveis, permanecem apresentando também no pós-teste condutas tipo γ. (cf. Quadros I, II e III).

Se a intervenção permitiu evolução, acredita-se que dois fatores indispensáveis, segundo Piaget, para a construção do conhecimento estiveram presentes: a ação dos sujeitos sobre os objetos (jogos) e a interação entre os pares e entre estes e o experimentador ou a professora. Entretanto, convém destacar que estes fatores por si só não são suficientes deve ser considerado *"a equilibração entre eles e, conseqüentemente, uma equilibração interna das ações e de sua coordenação"* (Brenelli apud Piaget e Inhelder, 1975, p.176).

Conforme já foi explicitado anteriormente, pesquisas indicaram a preocupação da escola em ensinar Matemática como se esta fosse um conhecimento social arbitrário, valorizando memorização e mecanização de exercícios. A intervenção com jogos constitui um meio eficaz de solicitar a ação da criança que desencadeia os mecanismos responsáveis pela construção do conhecimento. Neste sentido, Brenelli (1996) ressalta duas razões que justificam a importância da intervenção pedagógica com jogos:

> A primeira é a de que os mecanismos subjacentes à ação, estudados por Piaget em todo o processo de equilibração estão presentes no jogar; deve-se a este fato o progresso dos sujeitos no desenvolvimento operatório e na aprendizagem de noções aritméticas. A segunda razão pode ser compreendida quando se analisa o papel do interesse na atividade do sujeito. (p.173)

As mudanças de nível na construção da noção de multiplicação podem ser explicadas pelos processos de equilibração e abstração reflexiva, quando novos níveis são construídos, já que esta última tem um papel fundamental na construção de novas formas.

Os conhecimentos de um patamar, projetados num patamar superior (pela projeção ou *réfléchissement),* e a reorganização destes elementos retirados anteriormente, por um processo de reflexão no patamar superior, permitiram novas formas, ou seja, novos níveis na construção da multiplicação puderam ser alcançados pelos sujeitos.

Estes processos puderam ser observados nos jogos durante as intervenções. Inicialmente os sujeitos utilizavam procedimentos baseados em tateios empíricos, sem se preocuparem em fazer antecipações. Posteriormente, passaram a antecipar suas jogadas, descobrindo que era preciso acertar menos vezes se os alvos fossem de valores maiores. No jogo de argolas, por exemplo, os sujeitos passaram a perceber que marcariam mais pontos acertando duas vezes no alvo de cinco pontos do que fazendo cinco acertos no alvo de um ponto, ou ainda obteria o mesmo número de pontos acertando cinco vezes no alvo de dois pontos.

Além de se trabalhar com os jogos a construção da multiplicação, também o conhecimento físico foi trabalhado. No momento em que, diante da falta de êxito quando os sujeitos "mexiam" as varetas ou não acertavam os alvos, as ações foram corrigidas por meio de regulações perceptivo-motoras.

Os progressos alcançados não se reduzem aos jogos propriamente, mas à ação de jogar, ou seja, à atividade provocada no sujeito durante a intervenção por meio das situações lúdicas.

Procuraram-se criar situações que partiam da ação à representação, desencadeando os processos constitutivos do conhecimento, voltados aos conteúdos da multiplicação.

Por exemplo, as situações lúdicas solicitavam correspondências de um para muitos, e de muitos para muitos, relações de equivalência, relações multiplicativas e diferentes composições do todo em que a divisão era necessária. Seguidas a estas situações, as representações gráficas eram realizadas.

Na medida em que os sujeitos eram solicitados a explicar suas ações e representações, possibilitava esta situação a tomada de consciência de seus erros, transformando-os em observáveis e desencadeava a busca de novos procedimentos a fim de melhorar suas jogadas e registros.

Um fato bastante relevante observado nas intervenções foi o interesse e prazer demonstrados pelos sujeitos durante as partidas. Buscavam soluções porque estavam interessados, ao contrário da escola em que a Matemática está desvinculada de suas necessidades. A este respeito, afirma Brenelli (1996): *"Evidentemente, as crianças têm interesse muito maior em resolver problemas aritméticos quando eles surgem de situações concretas e estão vinculados às suas reais necessidades"* (p.183).

Segundo a concepção piagetiana, a aprendizagem não é simplesmente uma mera cópia da realidade, mas sim uma construção. A intervenção com jogos permite esta construção. Coll e Solé (1998) afirmam:

> Para a concepção construtivista, aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender. Essa elaboração implica aproximar-se de tal objeto ou conteúdo com a finalidade de aprendê-lo; não se trata de uma aproximação vazia, a partir do nada, mas a partir das experiências, interesses e conhecimentos prévios que, presumivelmente, possam dar conta da novidade. (p.19-20)

Neste sentido, pode-se dizer que o jogo atende estes pontos quando usados adequadamente no contexto escolar.

Macedo (1997) destaca a função instrumental da escola, preocupada com os conhecimentos necessários às profissões dos futuros cidadãos, a qual é bastante teórica e abstrata para a criança. Por outro lado, o jogo como forma de tratar o conhecimento, pode ter sentido para o educando:

> Não se trata de ministrar os conteúdos escolares em forma de jogo. Isso pode ser interessante, mas nesse momento não é o que se está defendendo. Trata-se de analisar as relações pedagógicas como um jogo, em que os

> jogadores não têm consciência de que estão jogando, e de que fazem, muitas vezes, um mau jogo, contra o conhecimento. A escola propõe exercícios, mas lhe tira o sentido, o valor lúdico, o prazer funcional. (p.139-40)

Os resultados da presente investigação vêm juntar-se a outros que discutem e enfatizam a necessidade da escola em repensar o processo de ensino e de aprendizagem a que se propõe realizar. Como afirma Macedo (ibid):

> seria importante que se permitisse na escola que os meios, ao menos por algum tempo, fossem os próprios fins das tarefas; que se desse oportunidade às crianças e aos professores de serem criativos, para que tivessem prazer estético e conhecessem o gozo da construção do conhecimento. (p.140)

Bibliografia

ABREU, A.R. (1993). "O jogo de regras no contexto escolar: uma perspectiva construtivista." São Paulo, USP, Instituto de Psicologia (dissertação de mestrado).

BARRETO, M. L. (1996). "Interação social e desenvolvimento cognitivo: um estudo com crianças em jogos em grupo e atividades livres no 'playground'." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

BRENELLI, R.P. (1986). "Observáveis e coordenações em um jogo de regras: influência do nível operatório e interação social". Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

___________.(1993)."Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (tese de doutorado).

___________.(1996). *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e elementares*. Campinas, Papirus.

BUSQUETS, M. D. e GRAU, X. (s/d). "Inventar, descobrir...É possível em matemática." Trad. Lucila Diehl Tolaine Fini. Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (texto mimeografado).

BURNS, M. e WINSON, B. (1992). "Math standards in action." *Instructor*; v102, n3, p.28-9.

CARRAHER, T.N. et al. (1982). "Na vida dez, na escola zero." *Cadernos de Pesquisa.* São Paulo: n 42, p.79-86.

CASTRO, A. D. (1996). "Educação e epistemologia genética." *In*: SISTO, F.F. (org.) *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar.* Campinas, Papirus.

CHATEAU, J. (1987). *O jogo e a criança.* Trad. Guido de Almeida. São Paulo, Summus (Edição original: 1954).

COSTA, E.E.M. (1991). "O jogo com regras e a construção do pensamento operatório: um estudo com crianças pré-escolares." São Paulo, USP, Instituto de Psicologia (tese de doutorado).

COUTINHO, D.B. (1988). "Teoria da abstração e epistemologia da psicologia." São Paulo, USP, Instituto de Psicologia (tese de doutorado).

FLAVELL, J.H. (1992). *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.* São Paulo, Livraria Pioneira Editora.

FOLSOM, K. (1975). "Mathematics learning in early childhood." *In National Council of teachers of mathematics.*

GONÇALEZ, M. H. de C. (1995). "Atitudes (des) favoráveis com relação à matemática." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

GRAEBER, A. O. (1992) and TANENHAUS, E. (1992) *In* OWENS, D. T. (Ed.). "Research ideas for the classroom. Middle Grade Mathematics." N.C.T. New York: Maxwell Macmillan International, p.99-117.

GRANDO, R. C. (1995). "O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

GRANELL, C. G. (1983). "Processos cognoscitivos en el aprendizage de la multiplicación." *In* Montserrat Moreno y equipo del Imipae. *La pedagogia Operatória.* Barcelona: Laia Editorial.

GOLDSTEIN, M. (1994). "Sharing teaching ideas: a review game." *In: Mathematics teacher;* v 87, n5, p.336-37.

GREER, B. e MOHAN, S. (1986)."Tests for non conservation of multiplication and division." *In* G.LAPPAN e R.EVEN (eds). *Proceding of the Sth Annual Meeting of the North American Chapter Group for the Psychoology of Mathematics Education.* Michigan: State University, p.60-5.

KAMII, C. (1992). *A criança e o número: implicações da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos.* Trad. Regina A. de Assis. Campinas, Papirus (Edição original: 1982).

KAMII, C. e DeCLARK, G. (1992). *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget.* Trad.Elenisa Curt. Campinas, Papirus (Edição original:1985).

KAMII, C e LIVINGSTON, S.J. (1993). *Desvendando a aritmética; implicações na teoria de Piaget.* Trad. Marta Rabiogio e Camilo F. Ghorayeb. Campinas, Papirus.

____________.(1993). *Aritmética; novas perspectivas; implicações na teoria de Piaget.* Trad. Marcelo C.T. Lellis, Marta R., Jorge J. de Oliveira. Campinas, Papirus.

KAMII, C. e DeVRIES, R. (1990). *Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget.* Trad. Maria Célia Dias Carrasqueira. São Paulo, Trajetória Cultural (Edição original:1980).

KESSELRING, T. (1993). *Jean Piaget.* Trad. Antônio Estêvão Algayer e Fernando Becker. Petrópolis, Vozes.

KOUBA, V.L. e FRANKLIN, K. (1992). "Multiplication and division: sense making and meaning." *In* JERSEN, R.. J. *Research ideas for the classroom. Early Childhood mathematics.* NCTM. New York, MacMillan Publishing Company, p.103-26.

LOLA, M. (1995). "Teaching math. problem solving skills." *In Teaching Prek-8*, v.25, n6, p.24-5.

LOPES, S. V. de A. (1997). "Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

LOSITO, S. M. (1996). "Sistema de numeração decimal e o princípio multiplicativo: um estudo na quarta série do primeiro grau." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

MACEDO, L. (1992). "Para uma psicopedagogia construtivista." *In* ALENCAR, E.S. (org.) *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.* São Paulo, Cortez.

___________.(1993). "A importância dos jogos de regras para a construção do conhecimento na escola." São Paulo (texto mimeografado).

___________.(1994). *Ensaios construtivistas.* São Paulo, Casa do Psicólogo.

___________.(1997). *4 cores, senha e dominó.* São Paulo, Casa do Psicólogo.

MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (1976). "A solicitação do meio e a construção das estruturas lógicas elementares na criança". Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (tese de doutorado).

___________.(1979). *Uma nova metodologia em educação pré-escolar.* São Paulo: Pioneira (Série Caderno da Educação).

MAZA, C. (1991). "Multiplicar y dividir, a traves de la resolución de problemas." Madrid, Aprendijage Visor.

MELO, M. E. C. (1993). "A construção de regras no jogo infantil: um estudo em aulas de educação física da primeira e segunda série do primeiro grau." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

MIZUKAMI, M. G. N. (1986). *Ensino: as abordagens do processo.* São Paulo: EPU.

MORENO, M. et al. (1987). *La pedagogia operatoria: un enfoque constructivista de la educación.* Trad. Carmem Campoy Scriptori. Barcelona, Laia Editorial.

MORGADO, L. M de A. (1991). "Word problems. The construction of multiplicative structures." (s.t.)

MORGADO, L. M. de A. et al. (1993). "A comparison of the understanding of the multiplication among english and portuguese children." *In: Anais do 17th Psychological Mathematic Conference.*

MORO, M. L. F. (1983). "Iniciação em matemática e construções operatório-concreta; alguns fatos e suposições." *In Cadernos de Pesquisa.* São Paulo: n,45, p.20-4.

MULLIGAN, J. (1992). "Children's solution to multiplication and division word problems: a longitudinal study." *In Mathematics education research journal*; v.4, n1, p.24-41.

PETTY, A. L. S. (1995). "Ensaio sobre o valor pedagógico dos jogos de regras: uma perspectiva construtivista. São Paulo, USP, Instituto de Psicologia (dissertação de mestrado).

PETTY, A. L. S. e PASSOS, N. C. (1996). "Algumas reflexões sobre jogos de regras." *In* SISTO, F.F. (org.). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar.* Campinas, Papirus.

PIAGET, J. (1970). *Psicologia e pedagogia.* Trad. Dirceu A. Lindoso e Rosa M. R. da Silva. Rio de Janeiro/São Paulo, Forense (Edição original: 1969).

____________. (1971). *Para onde vai a educação ?* Trad. Ivette Braga. Rio de Janeiro, Livraria José Olympio (Edição Original: 1948).

____________. (1973). "Como as crianças formam conceitos matemáticos." *In* MORSE, W. e WINGO, G. (org.). *Leituras de Psicologia Educacional.* Trad. Duarte Moreira Leite. São Paulo, Companhia Editora Nacional (Edição original: 1953).

____________.(1976). *A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento.* Trad. Marion Merlone dos Santos Penna. Rio de Janeiro, Zahar (Edição original: 1975).

____________. (1977). *A tomada de consciência.* Trad. Edson Braga de Souza. São Paulo, Melhoramentos/Edusp (Edição original:1974).

____________. (1978a). *Fazer e Compreender.* Trad. Christina Larrondé de Paula Leite. São Paulo, Melhoramentos/Edusp (Edição original: 1974).

____________. (1978b). *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.* Trad. por Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica, 3ª ed.. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan (Edição original: 1964).

____________. (1985). *O possível e o necessário. 1:Evolução dos possíveis na criança.* Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre, Artes Médicas (Edição original: 1981).

____________. (1989). "Notas sobre o ensino de matemática." Trad. Corinta M. Geraldi *In* MANTOVANI DE ASSIS, O.Z. (Org.). *VI Encontro Nacional de Professores do PROEPRE,* Águas de Lindóia (texto mimeografado).

___________.(1994). *O juízo moral na criança*. Trad. por Elzon Lenardon, São Paulo: Summus (Edição original: 1932).

___________.(1995). *Seis estudos de psicologia*. Trad. Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro, Forense (Edição original: 1964).

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1974). *A psicologia da criança*. Trad. Octávio Mendes Cajado. São Paulo, Difusão Européia do Livro (Edição original: 1966).

___________.(1975). *A gênese das estruturas lógicas elementares*. Trad. Álvaro Cabral Rio de Janeiro, Zahar (Edição original: 1959).

PIAGET, J. et al. (1995b). *Abstração reflexionante. Relações lógico-elementares e ordem das relações espaciais*. Trad. Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Porto Alegre, Artes Médicas (Edição original: 1977).

PIAGET, J. E SZEMINSKA, A. (1975). *A gênese do número na criança*. Trad. Christiano M. Oiticica. Rio de Janeiro, Zahar (Edição original: 1941).

RABIOGLIO, M. B. (1995). "Jogar: um jeito de aprender: análise do pega-varetas e da relação jogo-escola." São Paulo, USP, Instituto de Psicologia. (dissertação de mestrado).

RANGEL, A. C. S. (1992). *Educação matemática e a construção do número pela criança. Uma experiência em diferentes contextos sócio-econômico*. Porto Alegre, Artes Médicas do Sul.

SARAVALI, E. G. (1995). "Influência da intervenção pedagógica na psicogênese da noção de multiplicação." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (texto mimeografado).

SASTRE, G. e MORENO, M. (1980). *Descubrimiento y construcción de conocimientos: uma experiência de pedagogia operatória.* Barcelona, Gedisa (Série Investigaciones en Psicologia y Educación).

SILVA F. S. (1983). "Operações lógico-matemáticas de crianças na primeira série do primeiro grau." *In Cadernos de Pesquisa.* São Paulo: n 44, p.63-74.

SOUZA, C.S. (1988). "Um, dois...feijão com arroz....Três, quatro...feijão no prato...A matemática na pré-escola." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (dissertação de mestrado).

SOUZA, M.T.C. (1996). "Intervenção psicopedagógica: como e o que planejar? *In* SISTO, F.F. (org.). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar.* Campinas, Papirus.

TAXA, F. de O. S. (1996). "Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação. (dissertação de mestrado).

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad; problems de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Trad. Luís O. Segura. México, Trillas.

ZAIA, L. L. (1996). "A solicitação do meio e a construção das estruturas operatórias em crianças com dificuldades de aprendizagem." Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação (tese de doutorado).

ZUNINO, D. L. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora.* Porto Alegre, Artes Médicas.

ANEXOS

ANEXO 1

Abstração Reflexiva

Prova I: Construção de Múltiplos Comuns

(Piaget, 1995, p.30-42)

Objetivo

Verificar nos sujeitos o nível de abstração reflexiva utilizando a prova "Construção de Múltiplos Comuns."

O experimento é composto por duas situações a seguir.

Situação 1

Descrição

Apresentam-se dois conjuntos de fichas de cores diferentes (vermelho e verde) e pede-se para a criança formar duas coleções iguais (de totais iguais), pegando duas a duas as fichas do primeiro conjunto (vermelho) e três a três, as do segundo conjunto (verde). Após o sujeito resolver o problema, pede-se para que explique o que fez, questionando se há possibilidade de se conseguir a mesma coisa com coleções maiores ou menores.

Procedimento

Inicialmente o experimentador apresenta o material ao sujeito, deixando que ele manipule livremente. Posteriormente, o experimentador propõe a questão: *"Nós temos aqui dois grupos de fichas, um grupo vermelho e outro verde. Eu gostaria que fizesse para mim duas coleções iguais, mas você tem que pegar duas a duas as fichas vermelhas e três a três as fichas verdes."* O sujeito monta as coleções, em seguida o experimentador pergunta onde há mais. Caso o sujeito não tenha feito as coleções iguais, o experimentador continua fazendo questões que o leve à solução correta: *"Se a gente quiser que tenha o mesmo tanto? Como isso acontece? Quantas vezes você pegou duas fichas e três fichas?"* Se o sujeito não conseguir chegar à solução correta, o experimentador pára por aí. Caso contrário, continua perguntando: *" A gente poderia continuar? E se a gente fizer por muito tempo isso, vai ter sempre o mesmo número dos dois lados? Tem certeza? A gente pode saber antecipadamente?"*

Situação 2:

Descrição

Apresentam-se à criança peças de duas cores diferentes, das quais umas valem duas unidades (azuis-A) e outras valem três unidades (vermelhas-V). Pede-se à criança para que construa torres da mesma altura. Após o sujeito resolver o problema, repete-se o procedimento anterior, ou seja, pede-se para que explique o que fez, questionando se há possibilidade de se conseguir a mesma coisa com coleções maiores ou menores.

Procedimento

Inicialmente o experimentador apresenta o material ao sujeito, deixando que ele manipule livremente as peças. Em seguida propõe-se o problema: *" Eu queria que você construísse para mim duas torres da mesma altura, sendo uma azul e outra vermelha."* O sujeito vai tentar construir as torres; pode-se não obter êxito imediato, pois tende a colocar o mesmo número de peças, desprezando seus tamanhos diferentes. O sujeito pode chegar à solução correta sem antecipá-la. Quando o sujeito chega às torres do mesmo tamanho, o experimentador prossegue perguntando: *"E a gente poderia fazer também duas torres iguais, mas que sejam maiores? Como isto acontece?"*

Após a aplicação das duas situações, pergunta-se aos sujeitos se estes jogos se parecem e por quê.

O experimentador faz as seguintes questões:

"Você acha que estes jogos são parecidos? Por quê? As fichas e as peças são parecidas? O que de parecido você fez nos jogos?

Esta etapa possibilitará averiguar se há ocorrência de abstrações refletidas. Piaget (ibid) caracteriza os seguintes níveis de abstração reflexiva na prova "Construção de Múltiplos Comuns."

Níveis

Nível I (4 a 6 anos, aproximadamente)

A criança apresenta dificuldades de compreender as questões. Para os sujeitos, a única possibilidade de se chegar à igualdade das duas coleções é por meio de correspondência termo a termo. Com isso, começam a deformar a referência do jogo das fichas, chegando por vezes a violar as regras do jogo.

A antecipação ou previsão não é admitida pelos sujeitos do nível IA, sendo que ficam surpresos quando, sem querer, chegam à igualdade. Este sucesso é atribuído a um golpe de sorte para o sujeito, que não vê a possibilidade de reconstruir esta equivalência. Fica assim excluída a possibilidade da generalização da igualdade possível de coleções maiores ou torres mais altas.

Em relação à tomada de consciência, o sujeito centra-se no fato de ter acrescentado duas fichas de um lado e três do outro, ou seja, *"eles se centram sobre o resultado aditivo destes transportes"* (ibid, p.34). Quanto ao número de transportes de fichas, ou seja, quantas vezes juntaram duas ou três, isto exige uma abstração mais profunda, do tipo refletida.

No experimento das torres surge um início de compensação, pois o sujeito percebe que é preciso: *"menos peças grandes=mais peças pequenas"*.

No nível IB, o sujeito apresenta as mesmas reações de incompreensão; entretanto, toma consciência do número de vezes em que ele apanhou 2 vermelhas e 3 verdes (fichas).

Nível II (7 a 10 anos, aproximadamente)

IIA (7 a 8 anos, aproximadamente)

Neste nível, o sujeito já vê a igualdade como possível, embora só consiga alcançá-la por tentativas sucessivas.

A questão das fichas tem um início de tomada de consciência, sendo o grande progresso deste nível a descoberta de uma compensação necessária.

Em relação às torres de peças, há também o princípio da compensação.

IIB (9-10 anos, aproximadamente)

O sujeito resolve rapidamente o problema das fichas, demorando-se mais no problema das torres.

Nível III

Tanto o problema das fichas quanto o das torres é resolvido desde o início pela relação entre as unidades, evitando assim as compensações por tentativas.

Em relação às comparações entre as duas situações feitas pelos sujeitos, pode-se dizer que se trata de abstrações refletidas. No estágio I, as comparações são referentes aos objetos materiais em questão. Já no nível IIA, as comparações estão voltadas para ação, destacando o objetivo e o relato do que se fez. Enquanto em I e IIA as comparações são funcionais, em IIB já são estruturais, buscando as abstrações refletidas. No estágio III, as correspondências estruturais também estão presentes. Piaget (ibid) diz que *"estas abstrações 'refletidas', enquanto tomadas de consciência do resultado das 'abstrações reflexivas', correspondem, nas suas etapas sucessivas, muito de perto a estas últimas"* (p.40).

Referência Bibliográfica

PIAGET, J. et al. (1995). *Abstração reflexionante. Relações Lógico-Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais.* Trad. Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre, Artes Médicas (Edição original 1977).

ANEXO 2

Prova II-Multiplicação e Divisão Aritmética

(GRANELL, 1983, p.129-147)

Objetivo

Estudar as dificuldades encontradas na construção das noções de multiplicação e divisão e as estratégias que as crianças desenvolvem para superarem estas dificuldades.

Descrição

Monta-se uma loja sobre a mesa, onde o experimentador dispõe nove tipos de minibrinquedos plásticos. Em cada brinquedo é colocado um cartão com o seu preço, variando de um a nove reais. Coloca-se uma caixa com várias fichas que representam moedas de um real e outra contendo os diferentes minibrinquedos.

Há duas situações que são propostas aos sujeitos que envolvem compra e venda.

Situação 1: Multiplicação Aritmética

Objetivo

Por meio desta situação é possível verificar se o sujeito apenas faz antecipações ou se tem a idéia do operador multiplicativo.

Procedimento

Depois que a criança constata o preço de cada objeto, é lhe proposto uma brincadeira de comprar e vender, sendo o sujeito o comprador que possui as fichas.

O vendedor, que é o experimentador, pede ao sujeito que coloque o dinheiro necessário para comprar um dos objetos (que custa três reais).

Posteriormente coloca quatro destes mesmo objeto e pergunta-se: "*Para comprar estes objetos, quanto você precisa?*" (A quantidade dos objetos não é mencionada pelo experimentador). Este procedimento é repetido por mais três vezes, variando-se os objeto e a quantidade deles.

Condutas

Conduta I

Corresponde aos sujeitos que consideram como resultado final um dos outros termos da operação, ou seja, só leva em consideração um dos dados, estabelecendo assim uma correspondência termo a termo entre o conjunto de partida e de chegada. A criança não é capaz de estabelecer a correspondência múltipla, e ainda não se importa com a quantificação exata.

Conduta II

O sujeito aumenta em algumas unidades o resultado final. Esta necessidade de aumento é uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, mas ainda não se importa com a quantificação exata.

Conduta III

A criança chega a um resultado correto, respeitando a correspondência múltipla. Para isso usa procedimentos aditivos mediante adições sucessivas, sem nenhuma antecipação do número de ações a fazer.

Conduta de Transição III para IV

Esta conduta foi incluída no presente trabalho pelo fato de terem sido encontrados sujeitos que, ao mesmo tempo, utilizavam procedimentos aditivos e também antecipações, não pertencendo mais à conduta III e nem alcançando ainda a conduta IV.

Conduta IV

Corresponde aos sujeitos que fazem antecipações, sem nenhuma verificação empírica.

Situação 2: Divisão Aritmética

Objetivo

Verificar a construção da compensação necessária entre as variáveis.

Procedimento

Na mesma situação de comprar e vender, o experimentador entrega ao sujeito uma certa quantidade de moedas (reais) e pergunta quantos objetos de determinado preço pode comprar com estas moedas.

Assim que o sujeito chega à solução correta, o experimentador pergunta se, com o mesmo dinheiro, o sujeito pode comprar algum outro objeto, sem que sobre e nem falte dinheiro.

Condutas

Conduta I

O sujeito afirma não poder comprar nenhuma outra coisa, ou somente objetos que custam um real. Isto quer dizer que as crianças não admitem a possibilidade de fazer diferentes composições com conjuntos equivalentes.

Conduta II

Neste nível, o sujeito tenta operar com conjuntos equivalentes, mas ainda não existe uma compensação exata entre o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo.

Há um início de tomada de consciência de que se comprar mais objetos tem que ser mais baratos e vice-versa, sem que se chegue a uma quantificação exata.

Não há a necessidade de coordenação entre as três variáveis - multiplicando, multiplicador e resultado final.

Conduta III

O sujeito não é capaz de dar antecipações corretas, chega a uma solução por meio de tentativas. Estas tentativas podem começar desde um tateio assistemático, compreendendo algumas propriedades, até um tateio sistemático com todas as possibilidades de distribuição do todo.

Conduta de Transição III para IV

Corresponde aos sujeitos que apresentaram características das condutas III e IV.

Conduta IV

As possíveis composições são antecipadas por operações mentais do sujeito, sem utilizar comprovação empírica.

Referência Bibliográfica:

GRANELL, C. G.(1983). "Processos cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación". *In*: Montserrat Moreno y equipo del Imipae. *La pedagogia operatória.* Barcelona, Laia Editorial, p. 129-47.