ERRATA

1) Na página 40, onde está escrito **comprovar** leia-se **indicar.**
2) Na página 43, onde está escrito **Isso vem demonstrar...** leia-se **Uma primeira hipótese...**
3) Na pádina 51, a sequência de pares de problemas do gráfico 1 onde está escrito **23, 22, 24, 21, 20, 13, 8, 19, 18, 4, 2, 7, 3, 16, 10, 11, 17, 1, 9, 5, 15, 12, 14 e 6** leia-se respectivamente os pares (Direto e Oposto) **3 e 31, 13 e 34, 23 e 6, 16 e 38, 40 e 10, 35 e 33, 17 e 28, 45 e 1, 30 e 29, 21 e 43, 24 e 4, 41 e 8, 32 e 14, 39 e 7, 9 e 42, 5 e 27, 26 e 15, 47 e 37, 44 e 46, 2 e 36, 20 e 11, 25 e 12, 22 e 18, 19 e 19**
4) Na página 52, tabela 31 onde está escrito **nº de questões** leia-se **nº de sujeitos.**

ANTONINO GIUSEPPE SPALLETTA

DESENVOLVIMENTO DAS HABILIDADES MATEMÁTICAS: UM ESTUDO SOBRE AS RELAÇÕES ENTRE O DESEMPENHO E A REVERSIBILIDADE DE PENSAMENTO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Antonino Giuseppe Spalletta e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 20/08/1998

Assinatura: Márcia Regina F. de Brito

UNICAMP/FE

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

Spalletta, Antonino Giuseppe.
Sp19d Desenvolvimento das habilidades : um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas / Antonino Giuseppe Spalletta. -- Campinas, SP : [s.n.], 1998.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

Krutetskii, V. A . (Vadim Andreevich). 2. Educação matemática. 3. Capacidade matemática. 4. Solução de problemas. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, na área de concentração: Educação Matemática à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da Profa. Dra. Márcia Regina F. de Brito.

Comissão Julgadora:

Para "Mama", com um carinho muito especial...

AGRADECIMENTOS ESPECIAIS:

À professora Dra. Márcia Britto;

Ao professor Dr. James Patrick Maher;

Ao professor Dr. César Jose Bonjuani Pagan;

Ao professor Dr. José Dias Sobrinho;

À CAPES, agência financiadora do presente estudo;

À Nadir, Marina, Ana e Carmo pela dedicação, amizade e competência profissional;

Aos amigos Maria de Lourdes Pinto de Ameida, Sidney Reinaldo da Silva, Tarsila Dieudonnèe, Viviane de Cássia Fernandes;

À minha mãe pela compreensão e paciência;

À minha irmã Carmem Lúcia;

À Deus pela sabedoria ...

RESUMO

O presente trabalho trata do componente de reversibilidade de pensamento na estrutura das habilidades, sendo baseado nos trabalhos desenvolvidos por Krutetiskii (1976) na década de cinquenta. Esse componente da estrutura da habilidade matemática escolhido por Krutetskii é considerado um ponto básico no processamento da informação matemática.

O objetivo foi analisar as relações entre o desempenho de estudantes universitários que cursavam a disciplina de Cálculo I na Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP e o desempenho destes alunos em problemas que avaliam a reversibilidade como um dos componentes da estrutura da habilidade matemática.

A pesquisa foi desenvolvida a partir da análise dos dados colhidos em uma amostra selecionada por conveniência, com um total de 91 sujeitos, sendo 29 estudantes do curso de Engenharia Elétrica matriculados no período noturno e 61 no diurno.

Foi aplicado um questionário contendo 20 questões elaboradas para atender as finalidades da presente investigação, além dos testes da série XVII da teoria de Krutetskii, contendo 48 problemas matemáticos sobre o componente da reversibilidade matemática.

A análise estatística dos dados mostrou que os sujeitos apresentaram um bom desempenho tanto na disciplina Cálculo I quanto nos problemas propostos por Krutetskii, evidenciando a reversibilidade como um dos componentes da habilidade matemática, comprovando a relação existente entre o desempenho apresentado na disciplina e nos problemas matemáticos.

ABSTRACT

This work is about the thought reversibility component in the structure of the abilities and it is based on Krutetskii works developed in the 50's. This mathematical ability structure component which was chosen by him is considered a basic point in the mathematical information process.

The purpose was to analyse the relation between the university students performance in "Calculation I ", a subject in the Eletric Engineering Course at UNICAMP, and these students performance in the problems which evaluate the reversibility as one of the mathematical ability structure components.

The research was developed from de analysis of the data which were collected from a convenient select sample, with 91 students of the Eletric Engineering Course, in total: 29 students enroled in the evening period and 61 in the day period.

It was given the students a questionnaire which contained 20 questions made to attend the proposal of the present investigation and also some tests from the series XVII of Krutetskii with 48 mathematical problems about the mathematical reversibility component.

The statistical analysis of the data showed that the students presented a good performance not only in the subject of " Calculation I " but also in the problems proposed by Krutetskii. This shows up the reversibility as one of the mathematical ability components, which proves.

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

ANEXOS

CAPÍTULO I

1.1 Introdução a área de investigação e determinação do problema

Cálculo é considerado básico para as disciplinas posteriores dos cursos de Engenharia e, embora tenha uma importância fundamental no currículo desses cursos ainda é preocupante o desempenho dos estudantes nesta disciplina.

Na relação entre a Psicologia Educacional e a Educação Matemática é importante fazer referências aos estudos desenvolvidos acerca das habilidades matemáticas básicas e da importância da preparação dos estudantes universitários a partir destas habilidades. Neste ponto a Psicologia e a Matemática se entrelaçam.

O presente estudo buscou identificar a **reversibilidade de pensamento,** que é de acordo com Krutetskii (1976), um dos componentes da estrutura da habilidade matemática. Tal componente é considerado um ponto básico no processamento da informação matemática. Entretanto, não parece existir um consenso a respeito dos componentes das habilidades básicas necessárias para a aprendizagem da Matemática e não é possível ainda, chegar a uma lista completa e aceita pela maioria dos pesquisadores da área.

Segundo Krutetskii (1976), a reversibilidade consiste em inverter corretamente uma associação e passar do resultado de um problema a seus enunciados. A reversibilidade não é uma simples inversão do processo de raciocínio, pois, em alguns casos, a mudança de direção não envolve os mesmo passos usados na ordem inversa. Isso significa que pode surgir a necessidade de se criar uma nova seqüência de passos que leve do resultado até o enunciado.

O componente da "reversibilidade" foi escolhido para o presente estudo, com a finalidade de categorizar os sujeitos em mais capazes, médios e menos capazes, considerando o nível de dificuldade, na solução dos problemas da série XVII, que faz parte de um conjunto de 26 provas elaboradas por Krutestkii, e ao mesmo tempo relacionando o desempenho (através das notas) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável e o desempenho nos problemas que buscam evidenciar a flexibilidade de pensamento.

Um estudo desenvolvido anteriormente a respeito das atitudes de estudantes universitários em relação ao Cálculo (Pacheco,1995) indica que as atitudes estão diretamente relacionadas ao desempenho. Além das relações com as atitudes o desempenho é possivelmente influenciado pela habilidade matemática dos estudantes.

Embora não tenha a pretensão de responder a todas as questões que possam ser colocadas sobre o assunto, este trabalho busca oferecer uma contribuição sobre a habilidade necessária para a aprendizagem do Cálculo, assim como a sistematização desta questão. O trabalho fornece uma interpretação entre outras possíveis, mas não esgota todas as possibilidades do tema.

1.2 Algumas considerações sobre a Matemática, o Cálculo e a habilidade matemática

A matemática, desde o advento da ciência moderna, tem sido a disciplina científica mais difundida e de virtudes mais exaltadas. Com Galileu, Descartes e Newton, a matemática passou a ser considerada a linguagem da ciência. Trata-se de uma linguagem especial. A sua aplicação às demais disciplinas garante-lhes rigor, sistematicidade e unicidade da expressão. Mas a matemática não é apenas instrumento de expressão das ciências, ela é sobretudo instrumento de descobertas. Neste sentido, é graças à matemática que é possível a criação de algoritmos para solucionar os mais diversos problemas, bem como a elaboração de modelos que permitem explicar fenômenos e prever ocorrências, objetivos fundamentais da ciência moderna. No campo tecnológico, o uso de cálculos matemáticos é também fundamental. Através desses cálculos produzem-se os mais refinados e/ou potentes aparelhos, maquinários, e assim por diante. Dessa forma, a matemática torna possível o desenvolvimento da ciência pura e aplicada.

É perante esse quadro que se destaca o ensino da matemática na Universidade. Ela é uma disciplina propedêutica, preparatória para todos os acadêmicos que desejam seguir carreiras ligadas às mais diversas engenharias, além do campo da ciência natural e também o da ciência humana. Somente poderão preencher os quadros reservados aos engenheiros aqueles que dominarem a linguagem matemática, aqueles que fizerem dela um instrumento indispensável para a formação profissional. Os analistas das tendências profissionais têm mostrado que o correto seria mesmo o jovem primeiro ingressar em uma disciplina básica como a matemática para depois se aperfeiçoar em uma área afim. As universidades teriam que repensar os seus currículos em função dessa nova tendência. O desenvolvimento das teorias matemáticas susceptíveis de aplicação tem-se agigantado ultimamente. Isso demandaria um tempo considerável para torná-las acessíveis aos novos engenheiros (Cohen, 1995).

Repensar o problema da formação técnica e instrumental do novo engenheiro será tão importante como repensar a alienação dos mesmos frente aos problemas políticos e ideológicos aos quais estão sujeitos (Kawamura,1981).

No entanto, parece-nos que o desafio de superar os problemas ligados ao primeiro aspecto tende a crescer na proporção inversa da dedicação ao último. Como o currículo universitário poderia conciliar os dois? Essas questões refletem uma discussão referente à idéia de que a matemática constitui-se num instrumento poderoso do ponto de vista técnico, mas tende a ser alienante enquanto elemento da formação do cidadão. Apesar da preocupação central do presente trabalho não se referir especificamente ao aspecto político da disciplina Cálculo na Universidade, tal problema não deixará de se constituir em um horizonte de análise no trabalho aqui proposto. Isso é importante, uma vez que a dimensão pedagógica jamais pode ser pensada desvinculada do problema da competência técnica e da participação política.

Apesar de sua importância, a matemática, na realidade, é uma ciência humana e em nada difere das outras ciências. Isto é amiúde esquecido, pois ela não depende de observações empíricas e, aparentemente, provém da força criadora do espírito humano. Entretanto , é uma ciência feita pelo homem e, portanto, humana.

A origem das matemáticas, assim como a de todas as ciências, é revelada em cada grande momento de reconstituição (historicamente, isso é visível do exterior) e em cada reconstituição (o movimento é perceptível do interior).

A recorrência propriamente histórica é apenas a conseqüência posterior deste movimento interior e original. O livro *Eléments d'histoire de Bourbaki, é* o reflexo nos espelhos dos *Eléments de Mathématiques*, projeção em uma diacronia do que de fato se passa no sistema, o desdobramento da gênese histórica. Tais promoções - a do cálculo infinitesimal, da teoria de grupos, dos conjuntos, das categorias - tem uma repercussão global no total do edifício e propagam-se de uma forma fulminante até suas bases primitivas, como se o último constituído pusesse em questão o conjunto dessa constituição (Bourbaki, 1966).

A origem das matemáticas está presente em todo o percurso da história. O retorno às condições originárias é histórico (recorrência), lógico (axiomático), transcendental (constituição).

Assim, para Gauss, o número era "simples produto de nosso espírito", e Dedekind explicava os números como "criações livres de nosso espírito"(apud Boyer,1993). Mas isto, segundo o filósofo Kant (1987), é um engano. O número depende do tempo, como forma de percepção a priori, sendo uma capacidade puramente receptiva e não espontaneamente criadora.

No entanto, segundo Heidegger (1987), precisamos ir mais longe. O tempo não é só a forma do sentido interior, mas é a estrutura fundamental da existência humana. O tempo não é só uma simples forma que nos cerca, mas penetra no mais profundo do ser e da sua essência. Isso é demonstrado também na matemática, não no sentido de que o pensamento matemático seja limitado ou tolhido pela temporalidade e pela limitação humana, mas ele se torna possível somente por meio dela. A necessidade de calcular é uma das principais razões dos seres humanos serem temporais e finitos. Um ser eterno e infinito não numera. Não precisa numerar, nem pode numerar. A ação de contar e calcular não teria sentido para tal ser.

As modernas máquinas calculadoras podem ajudar em algumas situações, porém sempre permanece o fato básico de que a capacidade humana é, no terreno matemático, não só finita, mas também "pequena", isto é, está contida dentro de determinados limites. Também este ponto desempenha um papel na técnica do pensamento matemático: os métodos de solução devem ser escolhidos de tal maneira que o trabalho de calcular fique dentro dos "pequenos" limites humanos.

Como resultado dessas considerações surge a determinação de que a finitude do homem está estreitamente ligada à estrutura da matemática. Ela é a condição da possibilidade de toda matemática. Isto significa que a matemática não é menos fundamental do que as outras ciências, uma coisa do homem e somente do homem. Nem Deus, nem os animais podem fazer matemática; isto é uma possibilidade de um ser intermediário: o homem.

O problema da origem da matemática é um problema indefinidamente resolvido e reposto pela matematicidade em geral, recorrida como temporalidade recorrente e teológica. É estudando a dinâmica do rio que se compreende a sedimentação e a existência de meandros esquecidos. A situação é a mesma que em astronomia, em que se espera indefinidamente do futuro as informações provenientes de territórios mais distantes.

Leibniz demonstrou receio de que a acumulação do saber conduziria tão fatalmente à barbárie quanto a ausência deste saber, ou seja, a quem serve sua acumulação ? (apud Boyer, 1993).

Para o autor, portanto, a ciência desmoronaria sob a sua própria proliferação. Isto é o mesmo que crer que os avanços progressivos dos conhecimentos são uma recuperação recomeçada da totalidade distributiva do saber anterior: processo acumulativo de uma enciclopédia, que formaria uma bola de neve sobre si mesma; isto é o mesmo que confiar nos modelos da história. Então, a história das matemáticas é uma história da teoria da teoria: a ciência da ciência substitui indefinidamente a própria ciência.

Dentro dessa trajetória, o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, considerado uma revolução dentro da matemática moderna, propiciou um elemento auxiliar para muitas outras ciências, pois: "*O Cálculo Diferencial e Integral trata de questões relacionadas com a medida da rapidez com que as coisas se movem, aumentam ou diminuem*" (Boyer,1993).

Fazendo uma retrospectiva histórica a respeito do surgimento do cálculo, percebe-se que, nos séculos XVI e XVII, Kepler, Galileu e Cavalieri empregaram métodos semelhantes para calcular áreas e volumes.

Os problemas envolvendo curvas e tangentes, foram estudados no início do século XVII, por Descartes (1596-1650) e por Fermat (1601-1665), entre outros. Foi apenas na segunda metade do século XVII, com os trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que as relações de interdependência entre esses dois processos foram plenamente conhecidas, surgindo então uma nova disciplina, o Cálculo Diferencial e Integral (Boyer,1993).

O primeiro trabalho de Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz, no ano de 1684, em uma espécie de periódico científico mensal, que fora fundado no decênio anterior, antecedendo assim as publicações de Newton (Boyer,1993).

O Cálculo Diferencial e Integral é considerado parte fundamental da análise da matemática, sendo através dele investigadas as propriedades das derivadas e diferenciais, os processos para obtê-las e a operação de integração, além de suas propriedades e métodos de obtenção primitivas. A finalidade é analisar, do ponto de vista matemático, os fenômenos de avaliação e crescimento através dos seus conceitos fundamentais:limites e derivada. O conceito de limites é considerado fundamental em todo o Cálculo Diferencial, pois é o conceito básico sobre o qual o Cálculo se apoia. Em Cálculo pode-se inferir o que está ou o que deveria estar acontecendo como função em certo ponto de seu domínio, conhecendo-se o que está acontecendo em outros pontos que dele se aproximam.

A definição formal de derivada é baseada nos conceitos de função e de limites e pode ser interpretada como o limite do quociente entre o acréscimo que sofre a função pelo acréscimo dado à variável, quando esse acréscimo tende a zero. Além disso foi da necessidade de calcular a área de figuras, cujos contornos não eram formados por segmentos de retas, que surgiu a noção de integral a partir dos matemáticos gregos .

Pode se verificar que existe uma correlação entre os conceitos fundamentais do Cálculo, ou seja, a integral como antiderivada, a Derivada como limite do quociente da variação de uma função e o conceito básico, que é inerente aos demais. Tais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são considerados fundamentais por auxiliarem a outras ciências. Assim, todos esses conceitos estão presentes no cotidiano, pois foi pela própria necessidade do homem que a matemática, a partir do século XVII, tomou outra conotação, levando ao desenvolvimento do Cálculo.

Nesse sentido o ensino de Cálculo I tem um campo bem amplo para pesquisas, nas quais as salas de aula das Universidades tornam-se espaços onde atuam professores e alunos desenvolvendo ou não habilidades matemáticas com o processo de ensino-aprendizagem. É importante ressaltar que, de acordo com Krutetskii (1976), as habilidades não são inatas, elas são desenvolvidas durante a vida do indivíduo. Habilidade não é algo pré-determinado. As habilidades são formadas e desenvolvidas através da instrução, da prática e do domínio de uma atividade.

Isso significa que todos os alunos têm potencialidades e todos, a priori, devem dominar o currículo do ensino básico ou superior.

Krutetskii (1976) afirma que a questão das habilidades estão intimamente ligadas às diferenças individuais. Caso todos os indivíduos tivessem todas as habilidades desenvolvidas em um mesmo nível, o problema das habilidades deixaria de existir.

Os sujeitos não apresentam suas habilidades desenvolvidas em níveis idênticos, nem tampouco, são absolutamente inaptas a desenvolvê-las: esta é a opinião básica da psicologia soviética. As pessoas são capazes de diferentes realizações em diferentes níveis.

O sucesso de um estudante em determinada disciplina não depende apenas de seus interesses e inclinações, mais também de suas habilidades. Apresentar elevadas realizações em determinadas áreas de conhecimento, sem a necessidade de despender esforço e tempo são algiumas das características que diferenciam sujeitos mais habilidosos de sujeitos menos habilidosos. Mesmo assim, sujeitos menos habilidosos são capazes de realizações:

todos têm pontencialidades e portanto podem aprender, mais essas pontencialidades são distintas.

Contudo, as habilidades não são estáticas, mas formadas e desenvolvidas durante o ensino, a prática e o domínio de atividades apropriadas. O desenvolvimento das habilidades não depende exclusivamente do método de ensino utilizado pelo professor, visto que sujeitos submetidos aos mesmos métodos de ensino e exercícios apresentam resultados distintos. Essa diferença é facilmente explicada através das diferenças individuais. Mas o desempenho insatisfatório não implica em habilidades pouco desenvolvidas.

Os métodos de ensino "perfeitos" não são capazes de suprimir as diferenças individuais. Não é posssível igualar todos os indivíduos em alto nível de desenvolvimento das habilidades. Todos podem ser habilidosos, mas cada um em determinada área, em um diferente nível. A escola tem papel fundamental no desenvolvimento máximo de todas as habilidades posssíveis, a fim de favorecer a orientação profissional futura de seus estudantes.

Paralelo ao estudo da matemática propriamente dita, no final do século passado e a primeira metade deste século, realizou-se o estudo das habilidades necessárias para o desenvolvimento e compreensão da matemática.

Krutetskii (1976), tratando da habilidade matemática, informa que os autores ocidentais fizeram várias tentativas no sentido de definir essa habilidade, mas até agora não foi fixada uma definição que satisfizesse a todos. Uma análise sobre a qual todos os pesquisadores concordam é a de que a habilidade matemática é distinta da habilidade escolar comum para dominar a informação matemática, reproduzindo-a e usando-a independentemente.

Krutetskii (1976) selecionou trabalhos de autores que buscavam definir a habilidade e dentre eles destaca-se W. Betz (1923) que definiu habilidade matemática como uma habilidade perceptual clara das conexões internas nas relações matemáticas e uma capacidade para pensar precisamente com conceitos matemáticos. Já A. Wenzl (1934), outro autor contemporâneo, definiu-a como a habilidade para estabelecer conexões significantes com o material matemático.

Seguindo em uma exposição cronológica, Krutetskii aponta o trabalho de A. M. Blackwell (1940), indicando que essa habilidade pode ser interpretada como habilidade para o pensamento seletivo, no domínio das relações quantitativas (pensamento quantitativo) e para o raciocínio dedutivo, além da habilidade para a aplicação de princípios gerais em casos particulares no domínio dos números, símbolos e formas geométricas.

Em 1941, W. Lietzmann tratou da habilidade como a capacidade para raciocinar em uma situação particular com o uso de símbolos da linguagem matemática. Já o psicólogo finlandês R. Meinander (1958) apresenta uma nova abordagem do assunto, uma compreensão ampla de habilidade matemática, falando deste conceito como uma qualidade complexa que inclui os fatores de inteligência, memória, interesse e vontade.

O psicólogo G. Révêsz (1952) em seu livro *Talent und Genie*, examina duas formas básicas de habilidades matemáticas: aplicativa (habilidade para encontrar relações matemáticas rapidamente, sem tentativas preliminares, e aplicar a informação apropriada em distâncias análogas) e produtiva (habilidade para revelar relações que não aparecem imediatamente a partir da informação disponível).

Pode-se então notar, pela revisão elaborada por Krutetskii (1976) que não existe um conceito fixo, definido sobre a habilidade matemática, mas sim noções a respeito dos componentes do conceito em questão, muitas delas divergentes.

Em sua dissertação de mestrado, em um capítulo onde resume a teoria de Krutetskii da estrutura das habilidades matemáticas, Neumann (1995 pp 69) mostrou que *"as habilidades são complexos de propriedades mentais que adequam a pessoa para um determinado tipo de atividade socialmente útil"* e que podem também ser consideradas como *"propriedades psicológicas da personalidade voltadas para a execução de um certo tipo de atividade e da qual depende a possibilidade de implementar uma atividade e o grau de sucesso"*.

Com a finalidade de detectar os componentes da habilidade matemática, Krutetskii (1976) realizou um estudo longitudinal, que lhe permitiu sugerir a existência de três estágios básicos na atividade mental durante a solução de problemas matemáticos:

1-Obtenção da informação matemática.

2-Processamento matemático da informação.

3-Retenção da informação matemática.

A cada um destes estágios corresponde um ou vários componentes da habilidade matemática. Neumann (1995) apresentou o modelo da estrutura da Habilidade Matemática proposto por Krutetskii (1976):

> *"1- Obtenção da informação matemática: refere-se à habilidade para formalizar a percepção do material matemático e para compreender a estrutura formal do problema.*
>
> *2- Processamento matemático da informação que se refere às seguintes habilidades:*
>
> *A: habilidade para pensar logicamente, na área das relações espaciais e quantitativas, números e símbolos alfabéticos e a habilidade para pensar em símbolos matemáticos.*
>
> *B: habilidade para generalizar de forma abrangente e rápida os conteúdos matemáticos, as relações e as operações.*
>
> *C: habilidade para resumir os processos matemáticos e os sistemas correspondentes de operações, além da habilidade para pensar através de estruturas reduzidas.*
>
> *D: flexibilidade dos processos mentais na atividade matemática.*
>
> *E: inclinação pela claridade, simplicidade, economia e racionalidade da solução.*
>
> *F: habilidade para uma rápida e livre reconstrução do processo mental (reversibilidade dos processos mentais no raciocínio matemático).*
>
> *3- Retenção da informação matemática: refere-se à existência de uma memória matemática (memória generalizada para relações matemáticas, tipos característicos, esquemas de argumentos e provas, métodos de resolução de problemas e princípios de abordagem).*
>
> *4- Componente geral sintético: refere-se à existência de um tipo de " mente matemática"* (Krutetskii, 1976, p. 350-351, trad. Newmann,1995).

A lista diz respeito ao sistema dos componentes da estrutura da habilidade matemática, sendo esta a base da presente pesquisa sobre a análise das habilidades matemáticas, subjacente à solução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral.

No presente trabalho, o enfoque foi dado no segundo estágio da atividade mental, referente ao processamento matemático da informação. Particularmente, a ênfase foi direcionada na habilidade para uma rápida e livre reconstrução do processo mental (reversibilidade dos processos mentais no raciocínio matemático), referente ao componente que Krutetskii definiu como: a habilidade para transpor um processo mental. Trata-se da habilidade para :

> *"reestruturar a composição de um processo mental, modificando-o de uma seqüência direta a uma oposta do pensamento. Como um caso particular, está a forma pela qual produzimos associações duplas. Percebemos, no ponto de vista matemático, as relações simétricas, as operações diretas e exatas ou contrárias e indiretas, os teoremas claros e os convergentes e a simples habilidade da leitura que são originariamente distintas. Porém a base psicológica interna de cada caso é uma reconstrução das instruções no processo mental, uma mutação que ocorre na seqüência das idéias e também o firmamento das duplas associações. Nosso teste implica num estudo, relativo à psicologia, de como é fácil ou difícil para um estudante modificar seu pensamento como uma sucessão clara e outra complicada e contrária, se ele é ou não capaz de fazer uma reconstrução complexa e radical num processo mental"* (Krutetskii, 1976, p. 143-144).

Com a finalidade de evidenciar essa reconstrução foram utilizados os problemas matemáticos da série XVII de Krutetskii, pois estes detectam dificuldades em mudar o sentido do raciocínio para interpretação dupla, clara e exata ou contrária e indireta:

> *"a respeito dos problemas de idéia contrária, supõe-se que sejam problemas onde se preserve a idéia e o tópico original, mas com o desconhecido tornando-se parte do assunto e com um ou mais elementos tornando-se desconhecidos"* (Krutetskii,1976, p. 143-144).

Para Krutetskii as circunstâncias nas quais estes problemas poderiam ser resolvidos ou esclarecidos seriam contingentes em primeiro lugar à aplicação imediata após um problema exato. Isso permite verificar que eles não são unicamente contrários, visto que são opostos somente quando comparados a problemas com duplo significado.

Na pesquisa de Krutetskii (1976) o problema era oferecido após a resolução de um caso exato, onde se observava a influência de cada tipo de problema direto ou oposto, numa seqüência de pensamentos. Para ele, era necessário saber e perceber que as idéias não se repetem pelo mesmo caminho com uma ordem e uma visão contrária, chamados pelo autor de teoremas convergentes e/ou diretos. Porém no presente estudo, pelo fato de ser desenvolvida tendo jovens como sujeitos, com maior grau de escolaridade e supostamente maior repertório de conhecimentos, pois já haviam cursado a disciplina de Cálculo I* e estavam cursando a de Cálculo II**, optou-se por aleatorizar os problemas.

Sendo a reversibilidade de pensamento um importante componente da habilidade matemática, aquela deveria ser trabalhada com a finalidade de desenvolver plenamente esta. Uma meta que deveria estar presente nas escolas seria desenvolver ao máximo as habilidades de um aluno, considerando como fator principal o desenvolvimento daquelas habilidades mais marcantes, visando sua orientação profissional futura.

A literatura mostra que vários autores buscaram estudar as habilidades matemáticas e seus componentes. De acordo com Gagné & Paradise (1962), é necessário ao professor ter

*Ementa : Intervalos e desigualdades, funções, limites, continuidade, derivada, diferencial, integral definida, cálculo de áreas e volumes, técnicas de integração.

**Ementa: Funções de várias variáveis,fórmula de Taylor-máximos e minimos, Integrais múltiplas, integrais de linha, teorema da divergência e Stokes.

sempre em mente que as habilidades intelectuais permitem ao indivíduo responder com símbolos ao seu ambiente. A linguagem, os números e outros tipos de símbolos representam os objetos reais do meio. As palavras "substituem os objetos". Também representam relações entre eles, tais como "em cima de", "atrás de", "dentro de". Os números representam a quantidade de elementos que existem no meio e são muitos os símbolos utilizados para representar relações entre estas quantidades (+ . =, e outros).

Outros tipos de símbolos são comumente usados para representar relações espaciais, tais como: linhas, flechas e círculos. Usando-os, o indivíduo comunica a outras pessoas certos aspectos da sua experiência. O emprego de símbolos é um dos recursos mais valiosos de que se vale a pessoa para recordar e pensar o mundo em que vive. É conveniente que se dê uma descrição ampla destas habilidades intelectuais. Que tipos de habilidades podem ser aprendidas e como são aprendidas?

Ainda segundo estes autores, o processamento mental tem diferentes níveis de complexidade que permitem classificar as habilidades intelectuais. Gagné & Paradise (1962) afirmam que na aprendizagem escolar, supõe-se que as capacidades mais simples são aprendidas previamente; de ordinário, esta suposição é correta. Se não o é, deve ensinar-se de modo que o aluno " coloque-se em dia" com relação às capacidades específicas que refletem estas formas simples de procedimento mental.

A capacidade de resolver problemas é, naturalmente, um dos objetivos primordiais da educação. Os alunos aprendem fatos, conceitos, princípios, os quais podem generalizar a outros problemas que tenham características formais similares. Isto pressupõe que um novo princípio foi adquirido ou talvez um novo conjunto de princípios. Ao resolver o problema, deve recordar-se de todos eles e isto significa que o indivíduo deve tê-los aprendido previamente.

Segundo Gagné (1970), a condição essencial que leva a esta maneira de aprender, em um acontecimento de solução de problemas, é a ausência de qualquer guia, seja em forma de comunicação verbal ou alguma outra.

Um tipo muito especial de capacidade intelectual, que além disso é de particular importância para a solução de problemas, recebe o nome de estratégia cognitiva. Para Gagné (1970) esta classe de capacidade recebe nome diferente porque, ainda quando pode ser catalogada como habilidade intelectual, tem certas características, muito particulares. O mais importante é que a estratégia cognitiva é uma habilidade internamente organizada que governa a própria conduta do educando. Em vários trabalhos de Bruner (1966) e de Gagné (1962) são descritas a operação e a importância da estratégia cognitiva.

Esta estratégia cognitiva, segundo Gagné (1968) é uma habilidade organizada internamente, que seleciona e orienta os processos internos que operam ao definir e resolver problemas complicados. Em outras palavras, é uma habilidade com a qual o educando governa o pensamento.

Geralmente, as condições favoráveis são as que dão oportunidade para o desenvolvimento e uso das estratégias cognitivas. Para Gagné (1970) isto quer dizer que, para aprender a pensar sobre um conceito, um princípio, ou para solucionar um problema, o estudante necessita que lhe seja dada oportunidade de fazê-lo.

Este tipo de capacidade aprendida pode intervir em qualquer matéria escolar. Numa mesma série, escrever composições envolve, freqüentemente, contextos definidos e princípios, mas parece não requerer nem a aprendizagem de discriminações, nem de conceitos concretos.

No que diz respeito às habilidades intelectuais, foram identificadas várias sub-classes: discriminações, conceitos concretos e definidos, princípios simples e princípios de ordem superior que podem ser aprendidos ao solucionar problemas. Cada um destes tipos representa uma classe diferente da execução e se apoia em diferentes conjuntos de condições internas e externas de aprendizagem (Gagné, 1970).

Centrando a questão especificamente no objeto do presente estudo, a disciplina de Cálculo I, Rosenbaun (1983) afirma que as repetições e notas baixas dos cursos universitários de Cálculo são extremamente altas, juntos somam 35% e chegam até a 60% nas Universidades maiores. Cálculo é a disciplina que seleciona os estudantes de matemática, sendo que mais da metade das graduações universitárias requerem cálculo como disciplina pré-requisito.

Estudantes que são selecionados para cursos de matemática avançada são aqueles que, durante o ensino médio, eram mais propensos que outros a serem rotulados como "estudantes de alta-capacidade". Isto é feito mesmo sem levar em consideração a atual competência.

Esse tipo de comentário mostra que o curso de Cálculo, no currículo, é um sinal de que o candidato a um determinado exame é membro de uma elite acadêmica, conferindo a este estudante prestígio e grande capacidade. Rosenbaun (1983) descreveu a importância desse sinal como se fosse uma concorrência entre os estudantes. Para o referido autor, a capacidade é um processo social, é o status social conferido aos indivíduos por seus concorrentes e superiores.

Diante de tudo isto, o problema da presente pesquisa ficou delimitado da seguinte forma: **Existe relação entre o desempenho de estudantes universitários, na disciplina de cálculo I da Faculdade de Engenharia Elétrica na Universidade Estadual de Campinas e o desempenho nos problemas propostos por Krutetskii que avaliam a reversibilidade como um dos componentes da estrutura das habilidades matemáticas?**

CAPÍTULO II

Revisão da literatura e alguns aspectos teóricos

A matemática assim como outras disciplinas da área de exatas é um exemplo do que Larkin (1981) chamou de domínio formal, ou seja, uma propriedade que envolve uma considerável quantia de conhecimentos semânticos, mas que é caracterizada por um conjunto de princípios logicamente suficientes para a solução de problemas.

De acordo com Simon (1958), a quantidade de propriedades de conhecimento adquirido, a maneira como esse conhecimento está organizado e a quantidade de conhecimento adicional são os princípios básicos para a resolução de problemas nessas disciplinas.

Os conceitos matemáticos tornam-se cada vez mais abstratos. Isto sugere uma fonte adicional de diferenças na habilidade matemática que pode ser processos cognitivos associados com o aprendizado crescente dos conceitos abstratos. Desta maneira, os processos cognitivos envolvidos na aquisição e uso alternativo de um sistema de símbolos podem ser outra fonte de diferenças na habilidade matemática.

No entanto, Hunt (1962) examinou a relação entre a habilidade verbal, que era medida pela realização de testes de aptidão verbal e três espécies de processos mecânicos envolvidos na manipulação dos símbolos na memória e a partir dos resultados, concluiu que a decodificação é um processo mecânico automático, que "parece estável e muitas vezes limita o processamento verbal". A relação entre a velocidade do processamento e a realização matemática parece ser atribuída à habilidade intelectual geral, sugerindo que o processo não contribui unicamente para a habilidade matemática.

Neste aspecto é a capacidade de conhecimento e os processos de capacidade dependentes que auxiliam a habilidade individual matemática. Embora seja esperado que os estudantes habilidosos adquiram maior conhecimento, estudos recentes admitem que estes estudantes organizam seus conhecimentos diferentemente dos estudantes ditos "normais".

Silver discute a existência de uma relação entre a preferência da estrutura matemática como similar à habilidade matemática. Krutetskii (1976) identificou um conjunto de componentes específicos nos quais ele analisa os elementos da estrutura da habilidade matemática.

No caso da matemática, em particular, é importante destacar as *"habilidades de formalização e percepção do material matemático para o avanço da estrutura formal dos problemas"*, nas quais incluem-se a *"habilidade para a rápida e ampla generalização do material matemático, relações e operações" e a "memória matemática"*(Krutetskii, 1976, p. 350-351).

O problema da habilidade está correlacionado com a temática das diferenças individuais, com a desigual distribuição dos talentos intelectuais ou do desenvolvimento dos mesmos. Assim, o caminho mais apropriado para estudar as habilidades seria comparando a performance daqueles que realizaram certas atividades com sucesso ou criatividade (os estudantes capazes) com aqueles que não conseguem realizar estas atividades (que são consequentemente denominados de "incapazes" ou "menos capazes").

Para tornar claro nos componentes da habilidade matemática é importante conhecer o que os alunos são capazes de realizar "matematicamente" e também determinar quais os traços psicológicos peculiares destes indivíduos , isto é, quais são as aptidões mentais disponíveis que podem ser verificadas.

A teoria cognitiva da instrução busca indicar como o conhecimento que surge é resultado da performance em sua aquisição e uso subseqüente. Recentemente, Anderson (1981) elaborou alguns princípios a respeito das relações entre o meio e a aquisição de conhecimento.

Especificamente, o uso da prova escrita como significado de instrução torna disponível o desenvolvimento de um conjunto de capacidades mentais que são geralmente uma série de desempenhos inteligentes. As capacidades mentais para ler as implicações lógicas na proposição dos problemas e, mais importante, a habilidade para criá-los são capacidades mentais de grande importância. Mas, por serem conjuntos especiais de habilidades, somente são apropriados a alguns tipos de testes. Existem autores que adotam a definição geral da habilidade matemática apresentada por um indivíduo. Tal definição é baseada no conceito de Mason (1979, p. 02) no qual *"habilidade matemática é a capacidade que é inferida a partir do desempenho em um teste matemático"*.

No mesmo sentido, Krutetskii (1976) enfatizou que, através da atividade matemática na solução de problemas, seria possível identificar as capacidades matemáticas. Ainda nessa direção, Dubinsky (1991) destaca a necessidade da discussão dessas capacidades matemáticas e o uso da abstração reflexiva no pensamento matemático avançado, que é o tipo de pensamento requerido para o Cálculo Diferencial e Integral.

A abstração reflexiva é um conceito introduzido por Piaget (1966) para descrever a construção de estruturas matemáticas lógicas durante o curso de desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Este autor, observa que a abstração reflexiva não tem nenhum começo absoluto, mas está presente desde o nascimento na coordenação de estruturas sensório-motoras, continuando a crescer através do desenvolvimento da matemática, sendo aperfeiçoada à medida que a história total do desenvolvimento da matemática, da antigüidade aos dias presentes, deve ser considerada como um exemplo de processo de abstração reflexiva.

Na maioria dos seus trabalhos, Piaget (1980) concentrou-se no desenvolvimento do conhecimento lógico matemático, trabalhando, com sujeitos cuja faixa etária não ultrapassou a adolescência. No entanto, como sugerido pelo próprio autor, esta mesma abordagem pode ser estendida aos tópicos mais avançados da matemática, inclusive em estudantes que trabalham conteúdos matemáticos que envolvem o pensamento humano complexo.

Parece ser possível não somente discutir e conjeturar, mas também fornecer evidências de que conceitos, tais como indução matemática, cálculos predicados e proposicionais, funções como processos e objetos, independência linear, espaços topológicos, dualidades de espaços vetoriais, dualidade de espaços vetoriais topológicos e mesmo os conceitos da teoria de categoria podem ser analisados em termos de extensões das mesmas noções que Piaget (1980, p. 89-97) costumava usar para descrever a construção de conceitos das crianças, tais como a aritmética, a proporção e a mensuração simples. Além disso, o investigador precisa fazer uso de seu *entendimento da matemática.* Juntos são suficientes para obter uma descrição de qualquer conceito, mas o resultado seria posterior e não se poderia esperar que tivesse qualquer relação na maneira como os estudantes procedem para construir o conceito.

No presente trabalho alguns aspectos de construção da abstração reflexiva são enfatizados, pois são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático durante a adolescência e além dela. A análise de um conceito matemático particular conduz ao que se chama de *decomposição genética* do conceito, ou seja, à descrição, baseada em dados empíricos, da matemática envolvida e aplicada em um assunto. Tal processo pode fazer as construções que levariam a um entendimento da matemática. A *abstração reflexiva* é estabelecida a partir daquilo que Piaget (1980, p. 20) chamou de *coordenações gerais de ações*. Como sua fonte é o sujeito, é completamente interna.

Vários exemplos de abstração reflexiva podem ser apontados. Um dos primeiros que podem ser mencionados é o exemplo de **seriação,** no qual a criança executa várias ações individuais para formar pares, triplos, e outros, e, a partir daí, interioriza e coordena as ações para formar uma ordem total (Piaget, 1972). Este tipo de abstração conduz a um modo muito diferente de generalização que é construtiva e resulta em "*novas sínteses por meio das quais as leis particulares adquirem novos significados*" (Piaget & Garcia, 1983, p. 209).

Um exemplo disto é o conceito do anel euclidiano que se caracteriza, certamente, como um caso de abstração e generalização. Ele deve ser considerado, contudo, para se derivar, de propriedades de um exemplo *simples*, as integrais. De acordo com Piaget (1985) a abstração empírica só é possível através da assimilação de esquemas que foram construídos pela abstração reflexiva.

A abstração empírica e pseudo-empírica traz o conhecimento dos objetos executando ações sobre esses objetos. A abstração reflexiva interioriza e coordena estas ações para formar novas ações e definitivamente novos objetos, os quais não são mais físicos, mas sim matemáticos, tais como uma função ou grupo.

A abstração pseudo-empírica ocorre da mesma forma, após as ações terem sido executadas no objeto. Diferente destes dois tipos, a abstração reflexiva, é muito mais complexa. Piaget (1985) atribuiu a ela o papel fundamental de ser responsável pelo desenvolvimento das estruturas cognitivas. Além disso considerou que a abstração reflexiva é o método pelo qual " *todas as estruturas lógico-matemáticas são derivadas; e que ela sozinha sustenta e vitaliza o imenso edifício da construção lógico-matemática*" (Piaget, 1980, p. 30).

O autor da psicogênese, em 1980, tentou explicar um número de conceitos matemáticos importantes em termos de construções que resultaram daquele processo psicológico. Considerou também que a construção da abstração reflexiva é mais importante que o aspecto da abstração. Esse tipo de construção é a essência do desenvolvimento matemático, e a combinação das estruturas formais é uma extensão natural do desenvolvimento do pensamento. A análise deste processo foi usada no tratamento da questão filosófica a respeito da natureza do pensamento matemático. O autor considerou, como parte de abstração reflexiva, a aparição da habilidade para usar símbolos, linguagem, figuras e imagens mentais, afirmando que a criança executa a abstração reflexiva para representar, ou seja, construir processos internos como meio de dar sentido ao fenômeno percebido. Este fenômeno é a chamada interiorização.

Quando um indivíduo aprende a aplicar um esquema existente para uma coleção de fenômenos mais amplos, significa que o esquema foi *generalizado*. Piaget (1985, p. 149-150) referiu-se a tudo isto como assimilação reprodutiva ou generalizada, chamada generalização extensional.

Uma vez que um processo existe internamente, é possível para o sujeito pensar em sua forma, isto é, como um meio de reconstruir um novo processo. Piaget & Garcia (1983) acreditavam que a abstração reflexiva era tão importante para a matemática avançada como era para o pensamento lógico das crianças. A abstração matemática seria a construção de objetos mentais e de ações mentais nestes objetos. Um esquema é, mais ou menos, uma coleção coerente de objetos e processos. Obviamente, estes esquemas devem estar interrelacionados em uma organização complexa e extensa.

Quando um conceito particular é isolado em pequenas parcelas destas estruturas complexas é possível descrever explicitamente possíveis relações entre os esquemas. A *decomposição genética* do conceito refere-se ao ato de isolar uma pequena parcela da estrutura geral complexa e descrever explicitamente as possíveis relações entre os esquemas. Isso é semelhante ao proposto por Krutetskii para evidenciar os componentes da habilidade matemática. Porém, não é fácil separar uma descrição de conhecimento matemático de sua construção, pois, conforme observado por Piaget (1975, p. 166), "*o problema do conhecimento, o chamado problema epistemológico não pode ser considerado separadamente do problema do desenvolvimento da inteligência*" .

Estes atos de reconhecer e solucionar problemas, de fazer novas perguntas e criar novos problemas são os meios pelos quais um sujeito constrói e amplia o conhecimento matemático. É neste momento que surge a abstração matemática.

Quando o sujeito é bem sucedido na solução de um problema entende-se que o conteúdo foi assimilado pelo esquema mental; por outro lado, quando em condições favoráveis, o sujeito não é bem sucedido, significa que seus esquemas podem estar acomodados e inativos para lidar com a nova exigência. Este é o aspecto construtivo da abstração reflexiva, a qual serve de suporte para a compreensão da aquisição de conteúdos matemáticos complexos, dentre eles, os solicitados na disciplina de Cálculo.

A construção de vários conceitos da matemática avançada poderia ser descrita em termos de cinco formas de construção do pensamento matemático avançado, envolvendo a abstração matemática, a saber: interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversão (Piaget, 1975).

Pode-se supor que a construção de todos os conceitos matemáticos seria descrita nestes termos, seguindo basicamente os mesmos passos. A discussão a respeito da construção dos conceitos é um meio alternativo de organizar os tipos de construção e os resultados destas construções que são os objetos e processos.

Os objetos englobam a faixa completa dos objetos matemáticos, incluindo os números, as variáveis, as funções, os espaços topológicos, as topologias, os grupos, os vetores, os espaços vetoriais, e outros, sendo cada um deles construído pelo indivíduo em algum momento de seu desenvolvimento cognitivo e a partir de suas experiências com a matemática.

A qualquer instante de tempo, há um número de ações que um sujeito pode usar para calcular com estes objetos. Estas ações vão além do cálculo numérico, cujo resultado é expresso em respostas numéricas. Primeiro, uma ação deve ser interiorizada, e isso significa que alguma construção interna é feita relacionada à ação. Uma ação interiorizada é conseqüência de um processo. A interiorização permite que se tenha consciência de uma ação, que se reflita sobre ela e seja possível combiná-la com outras ações. A idéia, que pode ser computada independentemente de qualquer espaço vetorial particular, é o processo que resulta da interiorização desta ação. Interiorizar ações é um meio de construir processos. Por exemplo, ao trabalhar com problemas sobre funções, se o processo é interiorizado, o aluno pode ser capaz de reverter esse processo e resolver problemas nos quais a função é dada. Caso ele deseje encontrar uma função cuja derivada é a função original, poderá fazê-lo. Encapsular ambos os processos de diferenciação e integração, ao ponto de tê-los como objetos de reflexão, parece ser um pré-requisito essencial para a compreensão do teorema fundamental do Cálculo.

Outro meio de fazer novos processos, a partir de outros existentes, é compor ou coordenar dois ou mais deles. Dubinsky (1991) afirma que além de usar processos para construir outros novos, também é possível refletir sobre eles, convertendo-os em um objeto.

Outra importante contribuição sobre este tema pode ser encontrada nos trabalhos de Vygotsky (1984) a respeito dos processos de construção informal, nos quais mostrou que as crianças podem, com freqüência, completar tarefas, quando trabalham, com o auxílio de outras pessoas e não independentemente. Além disso, esse autor mostrou que as habilidades mentais que as crianças demonstram, quando certas assistências estão no processo de tornarem-se internalizadas, ainda não estão maduras; estão amadurecendo. A distância entre o que a criança pode fazer trabalhando sozinha e o que ela pode acompanhar com ajuda foi nomeada "zona de desenvolvimento proximal". Vygotsky previu que a avaliação dessa regra deve fornecer informações predicativas excelentes sobre a performance futura da criança.

Se, como Vygotsky (1988) sugeriu, as funções psicológicas superiores têm origens sociais, os adultos e os indivíduos mais capacitados deveriam engajar-se em certos problemas. Primeiro, os adultos e os indivíduos mais capacitados deveriam ser capazes de expressar o conhecimento e as estratégias cognitivas envolvidas na solução de um problema. Esta externalização de aptidões pode tomar várias formas; por exemplo, contar à criança o que precisa ser feito, guiá-la através do problema, modelar estratégias apropriadas, e/ou modelar o procedimento enquanto se explica simultaneamente o caminho. Desta forma, é necessário identificar a maneira como um "expert" pensa que um problema poderia ser solucionado. Em segundo lugar, o especialista deveria ajudar a criança reduzindo a "carga" cognitiva, tomando para si a responsabilidade por algumas partes da tarefa, permitindo se concentrar em outros componentes. Através desse procedimento, os adultos estruturam a tarefa e a participação da criança, possibilitando que ela empregue suas aptidões com sucesso. Este exercício de aptidões, dentro da zona de desenvolvimento proximal facilita sua internalização. Além disso, tais interações de ensino/aprendizagem podem dar oportunidades para que o *expert* demonstre aptidões que ficam do lado de fora da zona de desenvolvimento proximal do aprendiz. Estas, com o tempo, tornar-se-ão aptidões que o aprendiz poderá praticar.

Outros autores, como Woods, Resnick e Groen (1975), descreveram o processo de ensino de um problema particular, envolvendo um modelo de estratégias de solução corretas e simplificando as exigências da tarefa com a finalidade de permitir que a criança desenvolva destreza. Foi sugerido que os professores fornecessem auxílio, de forma a permitir que a criança ou o novato resolvam um problema, executem uma tarefa ou alcancem um objetivo, sendo que estas tarefas estariam fora do alcance, em outras condições. Esta sustentação consiste, essencialmente, no ato do adulto controlar os elementos da tarefa que estão inicialmente além da capacidade do aprendiz, permitindo, dessa maneira, que ele se concentre completamente naqueles elementos que estão dentro de sua faixa de competência.

Nesta linha, pode-se destacar o trabalho de Edward L. Thorndike no início do século. Seu livro, *"A nova metodologia da Aritmética"*, publicado em 1922, representou a tentativa de aplicar a 'lei de efeito' à aquisição de conteúdos onde este autor descreveu a aplicação dessa lei à aprendizagem da aritmética. O pesquisador enfatizava que a aprendizagem era constituída essencialmente de conexões entre as situações (Thorndike, 1936).

Thorndike discutiu a respeito das várias propriedades gerais da aritmética, as quais deveriam ser compostas, por exemplo, pelo significado dos números, a natureza da nota decimal, a habilidade da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, e também a habilidade de aplicar vários conceitos e operações na solução de problemas.

Embora Thorndike reconhecesse a necessidade de uma teoria acerca das ligações, identificadas como constituintes do tópico da aritmética, não apresentou uma proposta sistemática sobre isso. Nas décadas seguintes ao estudo de Thorndike, os educadores matemáticos e os psicólogos estudaram, com cuidado e precisão, a dificuldade relativa dos diferentes tipos de problemas matemáticos.

Outro autor que buscou elaborar uma proposta a respeito do ensino foi Gagné (1968). Para esse autor a hierarquia do sistema de aprendizado deveria começar com o domínio das capacidades dos níveis inferiores e já dominadas, deveriam aumentar gradativamente. O autor supõe que as capacidades mais elementares são assimiladas juntamente com os tipos de aprendizagem elementares, formando uma hierarquia de aprendizagem.

Para Gagné (1968), um teste de estrutura mais complexa, envolvendo conceitos, princípios e a solução de problemas, deveria conduzir à descoberta de padrões generalizados de ordem superior, o chamado comportamento humano complexo.

É provável que a maneira usada para a construção de problemas que podem ser aplicados a um grande número de estudantes, seja inadequada ao acesso para os processos cognitivos individuais, como por exemplo, a habilidade de generalizar o conhecimento e aplicá-lo numa variabilidade de problemas desconhecidos. Uma deficiência que pode ser constatada nos problemas matemáticos disponíveis é a de que eles tendem a enfatizar conhecimentos de fatos e procedimentos e a excluir habilidades complexas envolvidas na avaliação, inovação e aplicação do conhecimento.

Uma das razões para o fracasso dos testes atualmente realizados para medir adequadamente o alto nível das habilidades cognitivas é o formato de múltipla escolha, que é quase sempre empregado, e torna difícil, senão impossível, a obtenção de comportamentos mais complexos do que escolher a correta ou a melhor opção. Desde que geralmente os estudantes queiram conseguir graus consideráveis e seus professores queiram que seus alunos façam o melhor, os problemas tendem a aumentar o tempo e o esforço gastos no ensino e na aprendizagem. Isso porque, nos problemas escolares; podem ser medidos os fracassos e pode ser representado o pleno alcance da concepção e das habilidades que devem ser ensinadas.

Resnick & Resnick (1985) introduziram parcialidades contra o ensino de habilidades que não podem ser medidas. Mais especificamente, se os problemas realizados primeiramente medem o conhecimento de fatos e enfatizam procedimentos elementares, há provavelmente uma tendência de redução de esforços da aprendizagem e do ensino das habilidades cognitivas mais complexas.

Esses autores comentam sobre o estado dos programas de problemas e se estes são apropriados para pensar na programação de problemas-testes de competência mínima, como um esforço de emancipar educacionalmente o último segmento capacitado da população escolar. Entretanto, por focalizar somente a performance mínima, o movimento de problemas de competência limitou rigorosamente seu potencial para elevar o padrão educacional.

Como Simon (1976) acentuaram, não há substituto para a posse de um conhecimento básico, se ele resolver um problema. Para alguns tipos de problemas, como em Engenharia, o conhecimento de base é muito amplo, como em certos tipos de quebra-cabeça. Muito pouco conhecimento é exigido. A função primária do conhecimento é, de acordo com Greeno (1974), ajudar, construindo na memória uma rede de relações, conectando as variáveis e os traços dados no problema com as variáveis e características da solução desejada. Uma informação antiga, é usada para modificar uma nova informação a fim de criar uma rede relacionada ou uma estrutura envolvendo os elementos do problema. Para Chase & Chi (1980, p. 11-12), todos os elementos componentes da solução de problemas são inter-relacionados no processo de aquisição de habilidades avançadas:

> " Parece que uma grande base de conhecimentos a longo prazo fundamenta a forma de habilidades em muitas variedades de domínio. Além disso, um componente muito importante da base do conhecimento é o sistema de conhecimento de modelos de ação fixa, que reduzem muito a carga de processamento. Esses modelos servem para uma ajuda na busca da memória para o curso de ação desejada, no baixo nível de representação da memória localizada, contendo propriedades estruturais e, no alto nível, as propriedades funcionais."

Confirmando esta teoria, Anderson e colaboradores (1981) elaboraram uma análise a respeito da aquisição da habilidade para resolver problemas, a qual envolve três estágios :

a) Estágio declarativo: durante o qual o aprendiz recebe instruções codificadas como coleções de fatos. A informação pode ser usada para gerar comportamento mas o acesso ao fato deve ser praticado para estar disponível.

b) O Estágio de Combinação (Compilação) de Conhecimentos: durante o qual a informação é convertida num conjunto de procedimentos levados a cabo sem nenhuma interpretação operativa (automaticamente).

c) O Estágio de Procedimento: durante o qual a atividade pode ser realizada com autonomia. Existe um incremento gradual na velocidade por causa da redução da carga da memória, tornando possível uma operação unitária em vez de uma operação parcelada.

A respeito das habilidades matemáticas, Krutetskii (1976) afirma que todo aluno é capaz de acompanhar, com maior ou menor sucesso, os trabalhos matemáticos realizados nas escolas. Esses alunos apresentam variados graus de esforço, sendo, portanto, capazes de adquirir conhecimentos e destrezas no âmbito curricular. Entretanto, deve ser lembrado que a ausência de conhecimento matemático ou "cegueira"matemática não existe, pelo menos entre as pessoas mentalmente sadias. A falta de capacidade matemática relativa manifesta-se através do fracasso na aprendizagem, ocorrido a despeito do zelo e do entusiasmo ao estudar matemática e apesar da competência dos mestres em ensiná-la. Um progresso fraco na aprendizagem não significa a evidência de falta de habilidade. Isso pode estar relacionado a problemas próprios do indivíduo, como por exemplo: preguiça, doença, e outros. Krutetskii (1976), em uma de suas pesquisas com professores, solicitou a esses que apontassem para os casos mais manifestos de falta de capacidade dos alunos. Os professores informaram que os alunos tentavam, trabalhavam assiduamente, mas não conseguiam uma especial distinção nos trabalhos com a matemática, embora possuíssem uma certa habilidade em outras áreas.

Uma pergunta feita freqüentemente é porque alguns são bons em matemática e outros não? Quais as características específicas do bom aluno em matemática e do mau aluno ? Nas pesquisas de Krutetskii (1976), são usados problemas para explorar os componentes hipotéticos da capacidade matemática, e os resultados são analisados com a finalidade de identificar traços psicológicos.

As características da capacidade matemática apresentam vários componentes, os quais usualmente incluem um fator numérico, um espacial, um verbal e outro fator de raciocínio. De acordo com Briars, (1983) estes fatores podem ser considerados habilidades de ordem reduzida. As pesquisas nessas áreas tendem a aperfeiçoar uma caracterização minuciosa das habilidades matemáticas.

Continuando o estudo da estrutura cognitiva Hunt (1978) descreveu a habilidade matemática em termos de processo cognitivo e da estrutura do conhecimento. As análises foram baseadas no modelo de processamento de informação. Tais modelos descrevem a estrutura cognitiva nos indivíduos como processadoras de informações. Esta visão sugere que as diferenças nas habilidades matemáticas podem ser relatadas em três componentes distintos do sistema processual. São estas: a habilidade básica do processo de informação, o conhecimento cognitivo, o conhecimento metacognitivo.

Portanto, segundo o autor a habilidade básica do processamento de informação envolve o processo cognitivo independentemente do conhecimento específico. Esse é o processo que opera a representação dos símbolos independentes dos referentes. Com relação aos diferentes trabalhos sobre as habilidades, Krutetskii (1976, p. 175-177) afirmou que:

> *"num conjunto substancial de pesquisas sobre habilidade matemática, somente um pequeno contingente delas são consideradas variações do processo cognitivo. Como resultado, em alguns pontos, a análise extrapola os estudos designados para examinar quaisquer formas de questões distintas e, em outro, pode-se meramente especular sobre uma fonte potencial de diferença sem base empírica.De fato, estas podem ser fontes importantes de diferenças individuais na habilidade matemática. De qualquer modo, suas relações com o processo cognitivo básico de interesse não estão claras aqui, pois não estão incluídas na análise."*

Concordando com esses aspectos, Hunt (1978) afirma que a teoria cognitiva do processamento de informação descreve as pessoas como entidades que manipulam mentalmente as informações, nas quais as informações usualmente tomam a forma de um símbolo estrutural .

Já Sternberg (1966) salienta que, se a atividade mental fosse devidamente estudada, seria necessário demonstrar a dependência funcional dos processos representados pelos diferentes blocos do sistema mental. Esse autor apresenta uma nova variável à sua metodologia para mostrar processos de independência no caso de um sistema aditivo singular: o tempo de reação. Nesta metodologia, o primeiro passo é a análise das operações cognitivas requeridas na execução de uma tarefa. Essa análise melhora o modelo da informação rudimentar, identificando um ou mais fatores associados a cada operação. Para estabelecer a independência desses processos é necessária a associação de cada um deles a um conjunto de fatores e um conjunto de fatores a um conjunto de sistemas. Este último consiste em dependências variáveis, as quais refletem a operação do processo correspondente e do processo único. Em outras palavras, para o modelo de um processo útil servir a quaisquer propósitos teóricos ou práticos, deve estar apto para especificar as características absorvidas e desenvolvidas em cada processo.

Hunt (1978) argumenta que, identificando o símbolo "a" como um estímulo significativo, não se pode depender apenas deste significado, desde que a decodificação seja requerida para estabelecer outros significados. O autor também distinguiu o funcionamento do processo que requer atenção daquele que não requer a atenção e, aparentemente, é inconsciente.

Calfee e Resnick (1976) enfatizam os aspectos diferentes do modelo comportamental e social. Mostram também que a psicologia cognitiva pode falar não sobre prognósticos e controles, mas sobre o entendimento.

As habilidades podem ser vistas com o aperfeiçoamento de demonstrações e sessões da prática repetitiva acompanhada pelo modelo apropriado. Uma habilidade mais complexa não pode ser mostrada por ensinar demonstrações diretas do modelo e fazer concessões de aprendizado com projetos confusos. A teoria de instrução tem natureza específica e projeta conseqüências de modificações de intervenções nas considerações de alterações curiosas.

Um autor que se dedicou a estudar as habilidades foi Carrol (1971) que, além de considerar a relação entre o conhecimento e a habilidade, levantou questões sobre a distinção lingüística entre competência e desempenho. A psicologia cognitiva contrasta com a teoria comportamental ao assumir que as intervenções mais explícitas sejam contrárias à proposta simbólica, tornando-a aplicável a uma larga faixa de problemas.

Para Ward, Frederiksen e Carlson (1980), o pesquisador deve identificar os componentes das habilidades e como eles interagem com outras habilidades no decorrer das atividades na solução de problemas.

A leitura ajuda o desenvolvimento da solução de problemas em quase todos os níveis de competência. Para um leitor iniciante, a tradução de combinações de letras, num confuso discurso, pode ser difícil, mas habilidades arquivadas, como: relacionar uma sentença com uma sentença procedente ou antecipada ao contexto da sentença seguinte, talvez sejam frutos de longos anos de experiências.

A teoria do processamento da leitura desenvolve a identificação de uma coleção de "funcionários", denominados componentes do processamento da informação, os quais, interagindo com outros, constituem o complexo desempenho na compreensão da leitura. Essas habilidades são concebidas como sendo automáticas para um leitor treinado, de forma que elas se tornam disponíveis na estrutura cognitiva, quando a situação desencadeia tal resposta. Para um leitor menos habilidoso, descobrir um antecedente de um pronome seria um problema complicado e poderia haver também uma falta de automatismo em alguns ou em todos os processos componentes da interpretação do texto.

A validade da "medição" dos processos componentes é estabelecida, mostrando que as mudanças nas atividades dificilmente produzem alterações no desempenho. O desempenho nos componentes são avaliados pela medida de latências nas respostas e, onde for apropriado, pela contagem dos erros.

Finalizando essa breve revisão sobre alguns estudos relacionados ao presente trabalho e as considerações teóricas subjacentes à questão da pesquisa, é importante destacar que os problemas aqui utilizados permitem inferir a existência do componente "reversibilidade". Pois, não é um teste de múltipla escolha que permitirá a identificação desse componente, mas problemas cuja solução evidenciem a abstração, a compreensão da proposição do problema através da leitura (habilidade verbal) e outros aspectos correlatos.

CAPÍTULO III

Procedimentos, materiais e métodos

3.1 SUJEITOS:

Os sujeitos do presente estudo foram noventa alunos do curso de Engenharia Elétrica da UNICAMP. Trata-se de uma amostra de conveniência para a qual foram escolhidas duas turmas: a primeira turma advinha do período noturno, composta por 29 sujeitos cursando a disciplina de Circuitos Elétricos, dos quais 26 são do sexo masculino e 03 do sexo feminino. A segunda turma, composta por 61 sujeitos cursando a mesma disciplina, sendo 56 do sexo masculino e 05 do sexo feminino, do período diurno.

Os sujeitos que estavam cursando as disciplinas de Circuitos Elétricos na Engenharia Elétrica e Cálculo II tinham como pré-requisito ter cursado a disciplina de Cálculo I.

3.2 INSTRUMENTOS:

Os instrumentos utilizados foram um questionário e um teste tipo lápis e papel contendo problemas da série XVII (teste de Reversibilidade) de Krutetskii.

O questionário constava de vinte questões, abertas e fechadas, com o objetivo de registrar dados pessoais para identificação dos alunos (anexo I).

Os testes foram extraídos da série XVII de Krutestkii, sendo os problemas referentes aos componente "reversibilidade" da habilidade matemática. O teste era composto de cinco (05) pares de problemas aritméticos, três (03) pares de problemas algébricos, dez (10) pares de exercícios algébricos e seis (06) pares de problemas envolvendo geometria.

Com o objetivo de avaliar previamente o instrumento realizou-se uma pré-experimentação em uma turma de licenciatura de alunos da área de Ciências Exatas da UNICAMP. Após a aplicação desta pré-experimentação, foram detectadas algumas inadequações em relação a tradução do texto dos problemas matemáticos da série XVII de Krutetskii, que foram adaptados para a realidade ocidental. Estas inadequações foram revistas de tal forma que os pares de problemas foram distribuídos aleatoriamente e não mais de forma sequencial, pois os sujeitos dessa pré-experimentação afirmaram que isso facilitava a solução.

3.3 PROCEDIMENTOS:

O questionário e os problemas matemáticos foram aplicados durante o período letivo na primeira semana de novembro de 1997, em horário de aula do período diurno e do período noturno.

Os sujeitos tiveram aproximadamente duas horas para responderem o questionário e resolverem os problemas matemáticos. Ao entregarem os instrumentos, era anotado em cada um o tempo gasto de resolução.

Os dados foram analisados usando o programa estatístico SPSS (Statistical Package for Social Science). A análise estatística utilizada no tratamento dos dados, descrita a seguir, foi dividida em duas fases. Num primeiro momento (primeira fase), a análise foi feita com todos os sujeitos e variáveis, buscando-se as relações entre elas. Na segunda fase, foram utilizados alguns critérios mais rigorosos no tratamento dos dados, como agrupamentos por categorias e seleção de problemas. Nessa análise dos dados, foram utilizadas diversas técnicas estatísticas, segundo a natureza dos dados e da hipótese a ser testada.

Com a finalidade de encontrar a existência ou não de associação (relação) entre as variáveis, como por exemplo entre Cálculo I e Cálculo II, ou desempenho no teste de Reversibilidade com Cálculo I e Cálculo II, foram utilizadas análises de correlação e regressão linear. Para analisar a relação entre as variáveis: expectativa em relação às disciplinas e período, utilizou-se o teste chi-quadrado. Para analisar a existência ou não de diferença no desempenho, tanto no teste, quanto nas diciplinas de Cálculo I e Cálculo II, por período, foi utilizado o teste t-student para avaliar a diferença de médias. Além disso, foram utilizadas procedimentos descritivos, tais como, média, mediana, desvio padrão, coeficiente de variação, entre outros.

Para analisar o desempenho no teste de reversibilidade foi utilizada a variável nota que é igual ao número de pares corretamente respondidos, (direto/oposto), multiplicado por 10 e dividido por 24, a fim de padronizar o desempenho na escala de zero a dez, ficando assim representado:

N11= número de pares (direto/oposto) corretamente respondidos onde N11 vai de 0 a

24 que é o número máximo de pares.

nota = 10 * N11 / 24

Ainda nessa perspectiva de análise global é importante ressaltar que se decidiu eliminar as cinco questões mais difíceis do teste, as de geometria, pois essas questões não foram respondidas, mesmo pelos sujeitos que tiveram melhor desempenho no teste (não conseguiram fazer ou deixaram a questão em branco.). Foram eliminados os alunos que deixaram mais da metade dos testes sem respostas, uma vez que esses sujeitos praticamente se recusaram a fazer o teste, mesmo sendo bons alunos na disciplinas de Cálculo I. Neste caso, o número máximo de questões passa a ser 19 e a nota padronizada é igual ao número de respostas corretas multiplicado por dez e dividido por dezenove, ficando assim pré determinado:

N12= número de pares (direto/oposto) corretamente respondidos onde N12 vai de 0 a 19 que é agora o número máximo de pares.

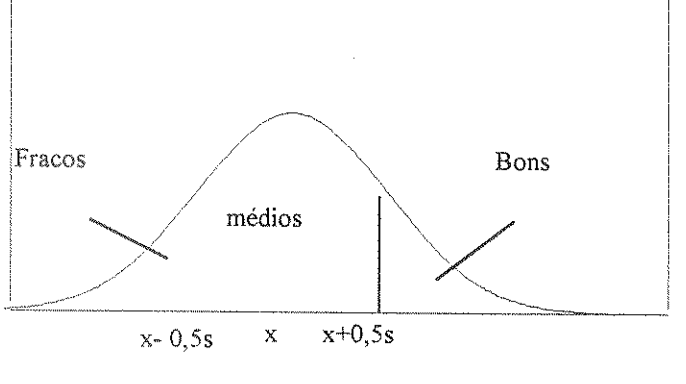
nota = 10 * N12 / 19

Os alunos foram categorizados em fracos, médios e bons, tanto no teste de krutetskii, quanto no desempenho em cálculo, seguindo o seguinte critério:

FRACO => valor menor que a média menos metade do desvio padrão

MÉDIO => valor em torno da média,ou seja, a média menos metade do desvio padrão e a média mais metade do desvio padrão.

BONS => valores acima da média mais metade do desvio padrão.



X = média

S = desvio padrão

3.4 VARIÁVEIS.

As váriaveis analisadas foram:

ANOING= Ano de Ingresso na UNICAMP.

GÊNERO= Sexo dos sujeitos da amostra, sendo M=masculino e F=feminino.

IDADE= Idade dos sujeitos.

PERÍODO= Período do curso.

CURTECNI= Realização ou não de curso técnico.

NREPROVA= Número de reprovações em Cálculo I.

FACIMAL= Facilidade em aprender Matemática no 2° grau.

PREFCONT= Conteúdos dos preferidos, apresentando facilidade em aprender matemática. gosta tendo facilidade em aprender Matemática.

RAZOAFAC= Razão da facilidade em aprender Matemática.

APLICONH= Aplicação dos conhecimentos de Cálculo às situações do cotidiano.

FACCONTA= Facilidade em aprender os conteúdos de Cálculo I.

FORMA2= Semelhança ou diferença entre a forma de estudo para a disciplina Cálculo I e a forma de estudo para a matemática no ensino médio.

SUFICONT= Suficiência ou não dos conteúdos abordados em Cálculo I.

FACCAL2= Facilidade em Cálculo.

EXPECTA= Expectativas em relação às notas.

HABITOS= Forma que você utiliza para resolver problemas.

ETAPAS= Etapas que você utiliza para resover problemas matemáticos.

PERCEPCA= Critério para atribuição de nota na disciplina de Cálculo I.

TEMPOGAS= Tempo gasto na resolução.

CAPÍTULO IV

Resultados e Análise dos Dados

Análise do Perfil dos Sujeitos Estudados

As tabelas a seguir exploram um perfil geral dos sujeitos, obtidos a partir do questionário com as variáveis: ano de ingresso, gênero, idade, período, curso técnico, número de reprovações, facilidade em aprender matemática, preferência por conteúdo, percepção (razão da facilidade para aprender matemática), aplicação dos conhecimentos de Cálculo às situações do cotidiano, facilidade para aprender os conteúdos de Cálculo I, hábito de estudo (a forma como o sujeito estudava Cálculo I é semelhante aquela como estudava matemática no ensino médio) , a suficiência dos conteúdos abordados em Cálculo I, facilidade em sua disciplina, expectativa de nota (as notas correspondiam aquelas que esperavam), a maneira de resolver problemas, etapas da resolução de problemas matemáticos, critério de atribuição de nota na disciplina de Cálculo I, e tempo gasto pelo estudante na resolução dos problemas de reversibilidade.

Tabela 1: Distribuição dos sujeitos por ano de ingresso na Universidade

Anoing	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Antes de 95	10	11.1
96	10	11.1
97	70	77.8
Total	90	100.0

Verificando a tabela 1 percebe-se que a maior parte dos estudantes ingressaram na UNICAMP em 97, portanto são calouros que cursaram Cálculo I no primeiro semestre e estavam cursando Cálculo II quando responderam o questionário. Por outro lado a quantidade de veteranos é relativamente baixa, o que indica que existe algum fator gerador de evasão ou de alto índice de competência no desempenho dos estudantes do curso de Engenharia Elétrica.

Na tabela 2, verifica-se que a maioria dos sujeitos é do gênero masculino, o que indica sua predominância nas áreas tecnológicas, concordando com estudos anteriores (Brito, 1996).

Tabela 2: Distribuição dos sujeitos por gênero

Gênero	N.º de alunos	Porcentagem %
Masculino	84	93.3
Feminino	6	6.7
Total	90	100.0

Tabela 3: Distribuição dos sujeitos por idade

IDADE	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Menor que 19	25	27.8
19 a 21	53	58.9
22 a 24	9	10.0
Maior que 24	3	3.3
Total	90	100.0

A tabela anterior mostra que a maioria dos sujeitos apresentam idade entre 19 e 21 anos, correspondendo ao perfil do estudante de Engenharia da UNICAMP, ou seja, que é aquele que termina o ensino médio e ingressa na Universidade.

Observa-se a existência de um percentual de estudantes que ingressaram na Faculdade de Engenharia Elétrica com menos de 19 anos. Pode-se inferir que se trata de alunos de bom desempenho Matemático no ensino médio.

Tabela 4: Distribuição dos sujeitos por período

PERÍODO	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Diurno	61	67.8
Noturno	29	32.2
Total	90	100.0

Na tabela 4 é observado que a maior parte dos sujeitos estudavam no período diurno. Isto vem a apresentar o modo como os estudantes de Engenharia estão agrupados e como estão formadas as turmas.

Tabela 5: Distribuição dos sujeitos que fizeram curso técnico

CURTECNI	N.º de alunos	Porcentagem%
SIM	37	41.1
NÃO	53	58.9
TOTAL	90	100.0

Verifica-se que a maioria dos sujeitos que ingressaram no curso de Engenharia Elétrica não fizeram curso técnico, portanto estavam preocupados com o seu ingresso na Universidade a fim de profissionalizar-se e depois ingressar no mercado de trabalho.

No entanto, um percentual menor de estudantes fez curso técnico, definindo um maior interesse na área de Ciências Exatas, buscando um conhecimento sistematizado a partir do ensino médio.

Tabela 6: Distribuição dos sujeitos por número de reprovações em Cálculo I

NREPROVA	N.º de alunos	Porcentagem%
Não respondeu	6	6.7
Nenhuma	75	83.3
Uma	7	7.8
Duas ou mais	2	2.2
Total	90	100.0

Na tabela 6, nota-se que a maior parte dos sujeitos não tiveram nenhuma reprovação na disciplina de Cálculo I da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP. O fato da maioria dos sujeitos não possuírem nenhuma reprovação é explicado pela boa média que conseguiram na prova de Matemática do vestibular da UNICAMP. Isso vem confirmar os dados demonstrados nas tabelas anteriores em relação ao perfil do aluno do curso de Engenharia Elétrica, onde a maioria não fez curso técnico, cursou o ensino médio preparando-se para ingressar na Universidade, estuda no período diurno e é jovem.

Tabela 7: Distribuição dos sujeitos por facilidade de aprendizagem de matemática no ensino médio.

FACIMAT	N.º de alunos	Porcentagem%
Sim	87	96.7
Não	3	3.3
Total	90	100.0

Nesta tabela verifica-se que a maioria dos sujeitos, na percepção dos mesmos, apresentaram facilidade em aprender matemática no ensino médio. Isto significa que o exame de seleção aprovou alunos que realmente estavam aptos a fazer uma Faculdade de Engenharia.

Tabela 8: Distribuição dos sujeitos por escolha de conteúdo matemático que tem facilidade em aprender.

PREFCONT	n.º de alunos	Porcentagem%
Não respondeu	50	55.6
Álgebra	5	5.6
Geometria	6	6.7
Aritmética	1	1.1
Álgebra e Geometria	20	22.2
Álgebra e Aritmética	5	5.6
Geometria e Aritmética	3	3.3
Total	90	100.0

A tabela demonstra que a maioria dos sujeitos não discriminou os conteúdos de matemática que têm facilidade em aprender. Na tabela anterior, os estudantes responderam quase que na totalidade que tinham facilidade em aprender esta disciplina, mas por que não conseguiram enunciar os conteúdos? Facilidade em todas as áreas, desinteresse em responder a questão, ou dificuldade em selecionar os conteúdos das diversas áreas da disciplina ?

Percebe-se ainda que entre os estudantes que responderam esta questão, os conteúdos de maior destaque foram Álgebra e Geometria.

Tabela 9: Distribuição dos sujeitos por razão da facilidade em aprender matemática.

RAZAOFAC	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	2	2.2
Gosta do conteúdo	58	64.4
Modo profº ensina	30	33.3
Total	90	100.0

A tabela 9 mostra que a maioria dos sujeitos apresentam o gosto pelo conteúdo como motivo de facilidade em aprender matemática. Isto demonstra que na percepção dos estudantes o processo ensino-aprendizagem está baseado, a priori, no conteúdo da disciplina e não na relação professor-aluno.

Tabela 10: Distribuição dos sujeitos por aplicação dos conhecimentos de Cálculo à situação do cotidiano.

APLICONH	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	10	11.1
Sim	45	50.0
Não	35	38.9
Total	90	100.0

Observa-se através dos dados explícitos na tabela que 50% dos sujeitos aplicam os conhecimentos de Cálculo no cotidiano. Percebe-se então que esses estudantes têm uma maior motivação em aprender Cálculo e apresentam maior autonomia em seus estudos, além de aprimorar seus conhecimentos. Isto se faz relevante, pois, um profissional da área de Engenharia projeta seus componentes, equipamentos e circuitos eletrônicos, através de fórmulas e cálculos matemáticos.

Uma minoria de alunos, ao contrário, não consegue fazer esta associação entre Cálculo I e a realidade que o cerca.

Tabela 11: Distribuição dos sujeitos por facilidade em aprender os conteúdos de Cálculo I.

FACCONTE	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	1	1.1
Sim	63	70.0
Não	26	28.9
Total	90	100.0

Observando a tabela 11 percebe-se que a maioria dos alunos apresentam facilidade em aprender os conteúdos de Cálculo I. Isso vem confirmar a veracidade dos dados demonstrados nas tabelas anteriores, nas quais a maioria dos estudantes apresentavam facilidade em aprender matemática, nenhuma reprovação em Cálculo I e o gosto pelo conteúdo ministrado na disciplina, além de saberem como aplicá-lo em seu cotidiano.

Tabela 12: Distribuição dos sujeitos pela opinião sobre a semelhança entre estudar Cálculo I e matemática no ensino médio.

FORMA 2	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	1	1.1
Sim	56	62.2
Não	33	36.7
Total	90	100.0

Nesta tabela, pôde-se observar que a maioria dos sujeitos informaram haver semelhança entre sua forma de estudar a disciplina de Cálculo I e a matemática ministrada no ensino médio. Pode-se inferir que esta maioria tem desenvolvido o hábito de estudo, conseguindo assim acompanhar com bom desempenho o conteúdo de Cálculo I, disciplina comum a todos que entram na área de ciências exatas.

Tabela 13: Distribuição dos sujeitos em relação à opinião sobre os conteúdos abordados em Cálculo I se são suficientes ou não.

SUFICONT	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	6	6.7
Sim	68	75.6
Não	16	17.8
Total	90	100.0

Na tabela 13, percebe-se que a maioria dos sujeitos acredita que os conteúdos abordados em Cálculo I são suficientes para a aplicação à área de Engenharia. Uma minoria observa que os conteúdos ministrados não são suficientes e não apresentam uma solução para o problema. Isso vem comprovar que esta amostra não consegue relacionar o conteúdo da disciplina com o cotidiano, conforme demonstrado na tabela 10.

Tabela 14: Distribuição dos sujeitos por facilidade em Cálculo.

FACCALC 2	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	2	2.2
Sim	62	68.9
Não	26	28.9
Total	90	100.0

Na tabela 14 observa-se que a maioria dos sujeitos declararam ter facilidade em Cálculo, confirmando os dados apresentados anteriormente.

Tabela 15: Distribuição dos sujeitos por expectativa das notas

EXPECTA	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	1	1.1
Sim	55	61.1
Não	34	37.8
Total	90	100.0

Observando a tabela, pode-se inferir, segundo a maior parte dos alunos, que as suas notas corresponderam às suas expectativas. Como a nota é uma medida de desempenho escolar, estes dados vêm confirmar o bom desempenho desses estudantes na disciplina e a valorização do hábito de estudo desenvolvido por eles.

Tabela 16: Distribuição dos sujeitos por forma que utiliza para resolver problemas

HÁBITOS	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Durante as aulas	21	23.3
Nas vésperas	19	21.1
Amigos	2	2.2
Outra maneira	4	4.4
1 e 2	16	17.8
Outras combinações	28	31.1
Total	90	100.0

Observando a tabela 16, verifica-se que a maioria dos sujeitos estudam durante as aulas com revisão em casa, às vésperas das avaliações, ou ainda uma combinação das duas possibilidades anteriores. Isso vem confirmar o bom desempenho, como também a facilidade em aprender a matemática.

Tabela 17: Distribuição dos sujeitos pelas etapas que utilizam para resolver problemas

ETAPAS	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	7	7.8
Leitura-entendimento-análise	59	65.6
Teorias conhec. e modelos	15	16.7
Depende do problema	3	3.3
Nenhuma das anteriores	2	2.2
Estabelecer caminhos	4	4.4
Total	90	100.0

A tabela 17 mostra que a maioria dos estudantes utilizam a etapa de leitura-entendimento e análise dos dados para solucionarem os problemas.

Tabela 18: Distribuição dos sujeitos por critério de atribuição de nota em Cálculo I

PERCEPCA	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	16	17.8
Provas	25	27.8
Provas + listas exercícios	7	7.8
Prova + projeto	25	27.8
Outros	17	18.9
Total	90	100.0

Os dados da tabela 18 demonstram que a maioria dos estudantes atribuem suas notas ao fator avaliação e também a projetos desenvolvidos no decorrer da disciplina.

Tabela 19: Distribuição dos sujeitos por tempo gasto para resolução

TEMPOGAS	N.º de alunos	Porcentagem(%)
Não respondeu	1	1.1
0h00' a 30'	4	4.4
31' a 1h00'	13	14.4
1h01' a 1h30'	49	54.4
1h31' a 2h00'	23	25.6
Total	90	100.0

Percebe-se, a partir da tabela 19 mostram que a maioria dos sujeitos demoraram entre uma e uma hora e meia para solucionar os problemas matemáticos e responder o questionário.

Diante do que foi constatado nas tabelas anteriores, com relação ao perfil dos estudantes, pode-se analisar que dos 90 sujeitos, 61 eram do período diurno e 29 do noturno. Para a análise, as variáveis sendo que as variáveis associadas com o período (diurno e noturno) foram: ano de ingresso, idade, expectativa, percepção e suficiência de conteúdos. Isso pode ser apreciado nas tabelas a seguir.

Tabela 20: Número de alunos e porcentagem por período e ano de ingresso.

Período	Ano de Ingresso			
	Antes 95	96	97	Total
Diurno	3 5%	6 10%	52 85%	61 100%
Noturno	7 20%	4 12%	18 68%	29 100%
Total	10 11.1%	10 11.1%	70 77,8%	90 100%

Analisando a tabela anterior, verifica-se que a maioria dos estudantes têm faixa etária entre 19 e 21 anos, independentemente do período em que estudam. Isso vem confirmar o perfil dos alunos do curso de Engenharia

Tabela 21: Número de alunos e porcentagem por período e faixa etária.

Idade					
Período	Menor que 19	Entre 19 a 21	Entre 22 a 24	Maior que 24	Total
Diurno	22 36%	37 60.6%	1 1.6%	1 1.6%	61 100%
Noturno	3 10.3%	16 55.1%	8 27.5%	2 6.89%	29 100%
Total	25 27,8%	53 58,9%	9 10%	3 3,3%	90 100.0%

Outra variável associada ao período é a expectativa dos sujeitos em relação às suas notas na disciplina de Cálculo I, como mostrado na tabela 22. Os alunos do diurno tendem a considerar que as suas notas correspondem a suas expectativas, enquanto que os do noturno não. Isso vem demonstrar que os estudantes do período diurno apresentam uma maior facilidade de aprendizagem na disciplina e os do noturno apresentam uma maior dificuldade. Uma outra hipótese a ser considerada é o hábito de estudo desenvolvido, relacionando-se diretamente ao bom desempenho na disciplina.

Tabela 22: Associação entre a expectativa em relação à nota e o período.

Período	Expectativas		
	Sim	Não	Total
Diurno	42 70%	18 30%	60 100%
Noturno	13 44.8%	16 55.1%	29 100%
Total	55 61.8%	34 38.2%	89 100%

A maioria dos estudantes do período diurno entendem como critério para atribuição de nota em Cálculo I provas e projetos elaborados no decorrer do semestre letivo nesta disciplina, enquanto que para os alunos do período noturno a atribuição das notas provém somente das provas.

Tabela 23: Distribuição dos alunos quanto a percepção dos critérios para atribuição de nota em Cálculo I por período.

Período	Percepção					
	NR	Provas	Provas + listas	Provas + projetos.	Outros	Total
Diurno	12 19.6%	15 24.5%	2 3.2%	22 36%	10 16.3%	61 100%
Noturno	4 13.7%	10 34.4%	5 17.2%	3 10.3%	7 24.1%	29 100%

Tabela 24: Distribuição dos sujeitos por suficiência de conteúdos por período.

Período	Suficiência de Conteúdos por Período			
	Não responderam	Sim	Não	Total
Diurno	4 6.55%	50 81.9%	7 11.4%	61 100%
Noturno	2 6.8%	18 62.0%	9 31.0%	29 100%
Total	6 6.6%	68 75.5%	16 17.7%	90 100%

Verifica-se, nesta tabela, que a maioria dos estudantes do período diurno e noturno acreditam que os conteúdos abordados na disciplina são suficientes para o curso de Engenharia Elétrica.

As outras variáveis : gênero, curso técnico, número de reprovações, facilidade em aprender matemática, preferência por conteúdo, razão da facilidade em aprender matemática, aplicação dos conhecimentos de Cálculo às situações do cotidiano, facilidade em aprender os conteúdos de Cálculo I, semelhança ou diferença entre a forma de estudo para a disciplina Cálculo I e a matemática no ensino médio, facilidade em Cálculo, forma utilizada para resolver problemas, etapas utilizadas para resolver problemas matemáticos, e tempo gasto na resolução, não se mostraram associadas ao período.

Concluindo, as variáveis associadas ao período demonstraram que os alunos do período diurno são, na maioria, calouros, possuem faixa etária entre 19 e 21, percebem a atribuição de suas notas advindas de provas e projetos, possuem expectativas positivas com relação ao conteúdo abordado na disciplina, considerando-os suficientes.

Os estudantes, tanto do diurno como do noturno, possuem faixa etária entre 19 e 21 anos, não vêem relação entre as expectativas que possuem da avaliação com as notas das provas que para eles são o principal instrumento de avaliação. Mas acreditam que o conteúdo ministrado é suficiente para o curso de Engenharia Elétrica.

Desempenho dos Alunos nas Disciplinas de Cálculos

Cálculo I

Para analisar o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I deve-se observar que, no semestre de realização da pesquisa, todos estavam cursando Cálculo II, tendo sido, portanto, aprovados em Cálculo I , já que esta disciplina é pré-requisito para Cálculo II.

Tabela 25a: Notas dos alunos na disciplina de Cálculo I por período

Estatística	Período		
	Diurno	Noturno	Geral
Média	7.29	5.86	6.85
Mediana	7.10	5.80	7.00
Mínimo	5.00	5.00	5.00
Máximo	10.00	8.00	10.0
Desvio Padrão	1.08	0.87	1.21
Coeficiente de Variação (%)	14.81	14.84	17.66
N.º de casos válidos	59	26	85

Pode-se inferir que a média dos estudantes do período diurno é maior do que a do período noturno. Isso confirma os dados das tabelas anteriores; nas quais a maioria dos alunos do período diurno apresentam expectativa positiva em relação à disciplina.

Tabela 25b: Diagrama de *ramo e folha* do desempenho dos alunos em Cálculo I, por período.

Nota	Geral	Diurno	Noturno
5	0000000000223347889	002388	0000000234479
6	0000001233555566889	00133556689	00002558
7	000000000001112234455566778899	000000000011223455566778899	014
8	00002233556	0002233556	0
9	0045	0045	
10	0	0	

Analisando o desempenho dos alunos por período, observa-se que os alunos do diurno tem um desempenho superior estatisticamente (teste t, em nível de significância de 1%) ao desempenho dos alunos do noturno.

Cálculo II

Como pode ser observado na tabela 26, o desempenho dos alunos do período diurno em Cálculo II é superior ao desempenho dos alunos do noturno, confirmando a análise dos dados demonstrados na tabela 25a.

Tabela 26a: Desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo II por período

Estatística	Período		
	Diurno	Noturno	Geral
Média	7.15	5.93	6.80
Mínimo	3.00	2.00	2.00
Máximo	10.0	8.20	10.0
Desvio Padrão	1.60	1.60	1.68
Coeficiente de Variação (%)	22.37	29.98	24.70
N.º de Casos Válidos	50	20	70

Deve-se considerar que as notas dos estudantes nesta disciplina são parciais, pois a pesquisa foi realizada durante o semestre letivo.

Tabela 26b: Diagrama de *ramo e folha* do desempenho dos alunos em Cálculo II por período

Nota	Geral	Diurno	Noturno
2	0		0
3	0	0	
4	004456	005	446
5	0000135555	355	0000155
6	0000000055788	0000000055788	
7	000000000002355555569	0000000025555	00035569
8	000002588	00000588	2
9	00345577	00345577	
10	0	0	

<u>Relação entre o Desempenho em Cálculo I e Cálculo II</u>

Na análise de regressão linear de Cálculo II em função de Cálculo I pode-se perceber que no período diurno existe uma relação linear entre o desempenho dos estudantes nas disciplinas, ao contrário do apresentado no período noturno.

Tabela 27: Análise de regressão de Cálculo II em função de Cálculo I.

Período	Intercepto	Coeficiente Linear	F	R2
Global	1.17 (0.2223)*	0.80 (0.0000)	34.11 (0.0000)	34.1%
Diurno	0.52 (0.6372)*	0.89 (0.0000)	29.97 (0.0000)	38.4%
Noturno	6.12 (0.00575)	0.06 (0.9000)*	0.016 (0.9000)*	0.1%

* Estatisticamente não significativa.

O valor entre parênteses refere-se àquele que deve ser comparado com o nível de significância de 0,05 (ou 5%). Valores menores significam que o parâmetro (intercepto ou coeficiente linear) é diferente de zero ou ainda que a relação linear (F) existe.

Quando o valor for menor que 0,05 (5%), afirma-se que é estatisticamente significativo.

Tabela 28a: Diagrama de ramo e folha do teste de Reversibilidade

NOTA	GERAL	DIURNO	NOTURNO
0	0000004488	00000488	04
1	22666	266	26
2	0055559999	09	0555599
3	333777777	3377777	37
4	111111115555555	11111555555	1115
5	0000000044444488888	0000448888	000044448
6	22226666666	22226666666	
7	000005555999	000055599	059

Para entender a tabela , deve-se ler a coluna 'nota' como sendo a unidade do conceito tirado pelo sujeito, chamada de ramo; as demais colunas (geral, diurno e noturno) são as folhas que correspondem aos décimos dessas notas, cada uma na sua respectiva linha. Por exemplo, na segunda linha, envolvendo a coluna nota e a coluna geral respectivamente se tem a unidade 1 e os décimos 22666, isto quer dizer que, no teste, dois sujeitos tiraram nota 1,2 e três sujeitos tiraram nota 1,6. No caso do noturno, pode-se observar que nenhum aluno obteve notas entre 6,0 e 6,9.

Tabela 28b: Desempenho dos alunos no teste de Reversibilidade

Estatística	Geral	Diurno	Noturno
Média	4.37	4.56	3.98
Mediana	4.60	4.58	4.17
Mínimo	0.00	0.00	0.00
Máximo	7.92	7.92	7.92
Desvio padrão	2.21	2.30	1.98
Coeficiente de variação (%)	50.57	50.43	49.74

Verificando os dados da tabela, pode-se notar que a média do desempenho dos alunos do período diurno no teste de Reversibilidade de Krutetskii foi maior do que a dos estudantes do período noturno, confirmando o perfil apresentado pelos sujeitos no decorrer da pesquisa.

Análise da Relação entre o Desempenho no teste de Reversibilidade e o Desempenho em Cálculo

Para analisar a relação entre o desempenho no teste de Reversibilidade e nas disciplinas de Cálculo I e II utilizou-se a análise de regressão com os seguintes resultados:

Tabela 29: Relação entre o desempenho em Cálculo I e o teste de Reversibilidade.

Período	Intercepto	Coeficiente linear	F	R2
Global	6.25 (0.0000)*	0.14 (0.0226)	5.38 (0.0226)	6.1%
Diurno	6.75 (0.0000)	0.12 (0.0519)	3.94 (0.0519)	6.5%
Noturno	5.76 (0.0000)	0.02 (0.8120)	0.058 (0.8120)	0.2%

*O valor entre parênteses refere-se ao p-valor que será comparado em nível de significância de 5%.

Tabela 30: Relação entre o desempenho em Cálculo II e o teste de Reversibilidade.

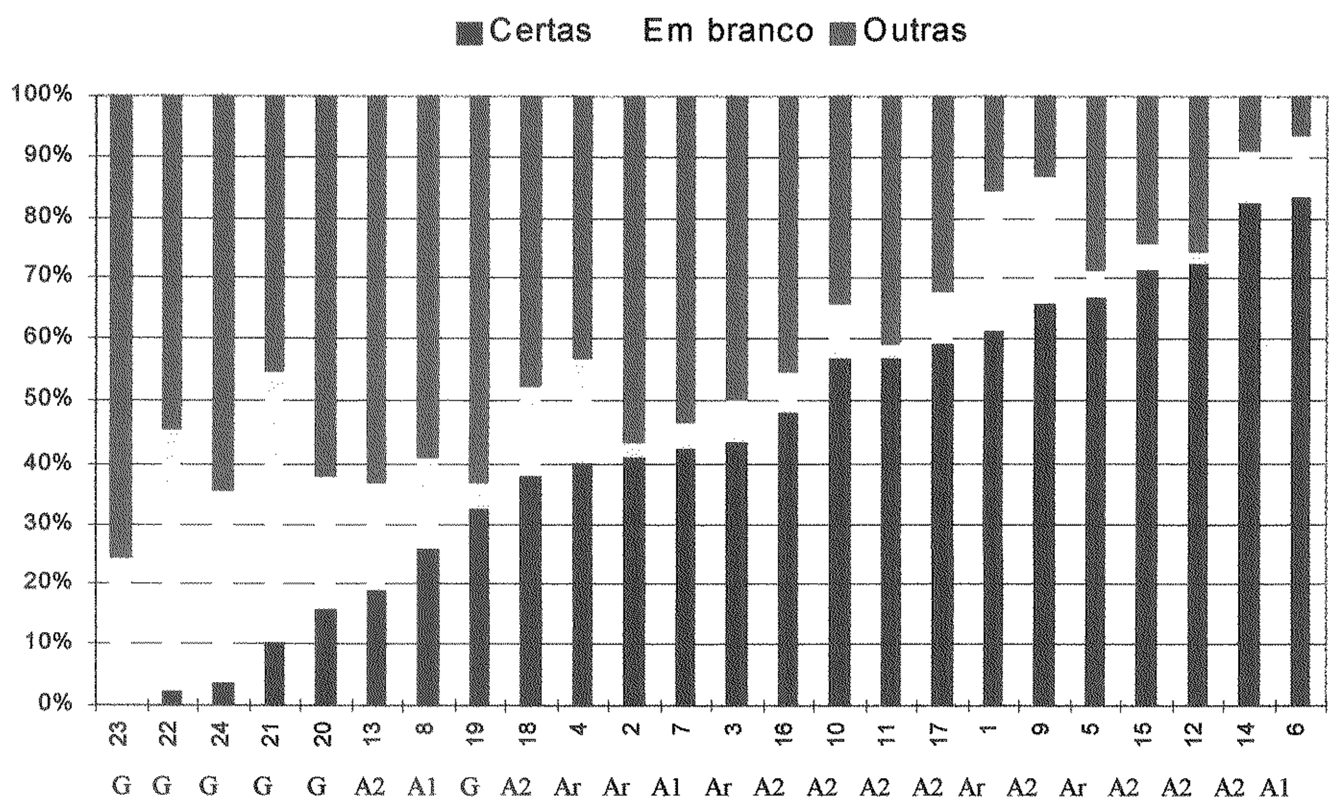
Período	Intercepto	Coeficiente linear	F	R2
Global	6.37 (0.0000)	0.09 (0.3401)	0.92 (0.3401)	1.3%
Diurno	6.76 (0.0000)	0.08 (0.4087)	0.69 (0.4087)	1.4%
Noturno	5.54 (0.0001)	0.08 (0.7163)	0.136 (0.7163)	0.7%

Em decorrência das análises estatísticas, conclui-se que não existe relação entre o desempenho no teste de Reversibilidade de Krutetskii e o desempenho nas disciplinas de Cálculo I e II. Entretanto, aqui devem ser feitas algumas observações em relação à interferência de dados espúrios, tais como, bons alunos em Cálculo não tiveram um bom desempenho no teste, ou vice-versa. Deve-se observar que alguns alunos praticamente deixaram a prova em branco, e muitos deles eram bons alunos em Cálculo, portanto a não realização da atividade não representa falta de conhecimento, mas sim, falta de engajamento na pesquisa. Isso certamente interfere em análise estatística.

Análise do teste de Reversibilidade

Em relação as questões propostas no texto observa-se que há uma diferença significativa nos acertos e erros por área de conhecimento da matemática. O gráfico 1 mostra o desempenho dos alunos por questão, ordenadas em ordem crescente segundo o grau de dificuldade.

Gráfico 1: Ordenação das questões do teste de Reversibilidade segundo seu grau de dificuldade



G - Geometria Ar - Aritmética A1 - Álgebra 1 A2 - Álgebra 2

Neste gráfico, as questões que apresentaram maior grau de dificuldade são as de geometria (23, 22, 24, 21, 20), pois apenas 10% dos alunos conseguiram respondê-las corretamente. Seguindo esta ordem, verifica-se, inclusive estatisticamente, que as questões de outras áreas, nas quais os alunos tiveram maior dificuldade foram as de álgebra1 (50,3% responderam corretamente os problemas), aritmética (50,4% responderam corretamente) e álgebra2 (56,7% responderam corretamente as equações).

Analisando o desempenho por área de conhecimento, verifica-se que as questões de geometria são as de maior dificuldade, conforme tabela e figura a seguir:

Tabela 31a: Número de sujeitos que responderam corretamente às questões por área de conhecimento.

Tipo	N.º de questões	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão	Porcentagem médio de acertos (%)
Algebra 2	10	17	74	51.1	16.6	56.7
Aritmética	5	36	60	45.4	11.2	50.4
Álgebra1	3	23	75	45.3	26.8	50.3
Geometria	6	0	29	9.5	10.9	10.5

Tabela 31b: Diagrama de ramo e folha do número de sujeitos que responderam corretamente às questões por área de conhecimento.

Nota	Aritmética	Álgebra1	Álgebra2	Geometria
0				0239
1			7	4
2		3		9
3	678	8	4	
4			3	
5	5		1139	
6	0		45	
7		5	4	

Tabela 31c: Análise de variância do número de pares (D,O) corretamente respondidos por área de conhecimento.

Média	Tipo	Geometria	Álgebra1	Aritmética	Álgebra2
9.5	Geometria				
45.3	Álgebra1	*			
45.4	Aritmética	*	=		
51.1	Álgebra2	*	=	=	

* Diferente em nível de 5% de significância

Verifica-se que a única área que apresenta diferença no teste de Reversibilidade em relação às outras foi a de geometria, segundo a análise estatística de variância.

Existiu uma uniformidade no número de pares (D,O) corretamente respondidos no teste de Reversibilidade nas áreas de Álgebra 1 (problemas), Aritmética e Álgebra 2 (equações). E como a tabela pode demonstrar, isto já não ocorreu na área de Geometria.

Conforme resultado da análise de variância, as questões de geometria foram aquelas que ofereceram um alto grau de dificuldade. A partir dessa informação foi analisado o desempenho dos melhores alunos (aqueles que acertaram o maior número de pares) nesses quesitos.

Tabela 32: Análise do Desempenho dos "melhores alunos" nas questões de geometria do teste de Reversibilidade.

Aluno*	Pares	Q 19	Q 20	Q 21	Q 22	Q 23	Q 24
1°	D	1	1	2	2	1	2
	O	1	1	0	0	2	2
2°	D	1	1	2	2	0	0
	O	1	1	2	0	0	0
3°	D	1	1	1	1	1	1
	O	1	1	1	1	2	2
4°	D	1	1	0	0	2	0
	O	1	2	0	0	0	2
5°	D	1	1	0	0	0	2
	O	2	0	0	0	0	0
6°	D	2	1	2	2	2	2
	O	2	1	2	2	2	2
7°	D	1	1	2	2	2	2
	O	1	1	0	0	1	1
8°	D	1	1	0	0	2	0
	O	1	2	0	0	0	0
9°	D	1	1	0	0	0	0
	O	2	0	0	0	0	0
10°	D	1	1	2	0	2	0
	O	1	1	2	0	0	2

1 - Errado
2 - Certo
0 - não respondeu

*Pode-se observar que até os "melhores alunos" não conseguiram resolver as questões de forma correta ou preferiram deixá-las em branco.

Análise do desempenho dos 10 sujeitos que apresentaram melhor aproveitamento na resolução dos problemas da área de Geometria do teste de Reversibilidade segundo Krutetskii.

Em decorrência deste fato, reprocessou-se toda a informação eliminando as questões da geometria (questões 20,21,22,23 e 24), com exceção da questão 19. Paralelamente a esta seleção decidiu-se também eliminar os alunos que deixaram 50% ou mais da prova em branco. A partir dessa modificação, é possível verificar relações entre o desempenho em Cálculo e o teste de Reversibilidade. A dificuldade em geometria tem sido apontada em alguns estudos realizados nos últimos anos (Pirola, 1995 e Pavanello, 1995) e os resultados no presente trabalho parecem apontar nesta direção.

Análise da Associação após Modificação - 2° Fase

Analisando o desempenho no teste verifica-se que a diferença por período é estatisticamente significativa, em nível de 2%.

Tabela 33: Desempenho, no teste de Reversibilidade por período

	Diurno	Noturno	Geral
Média	5.96	4.66	5.52
DP	2.46	2.12	2.41
Coeficiente de variação (%)	41.27	45.49	43.65
N.° de alunos	57	29	86

Após a retirada dos sujeitos não engajados na pesquisa, isto é, aqueles que se recusaram a resolver mais de 50% dos problemas matemáticos do teste de Reversibilidade e das questões 23,22,20,21 de geometria, analisou-se o desempenho no teste e foi verificado que este foi maior na turma do período diurno em relação à do noturno, confirmando os dados das tabelas anteriores que determinavam o perfil dos estudantes do curso de Engenharia Elétrica.

Análise do Perfil dos Estudantes segundo o Desempenho no teste de Reversibilidade

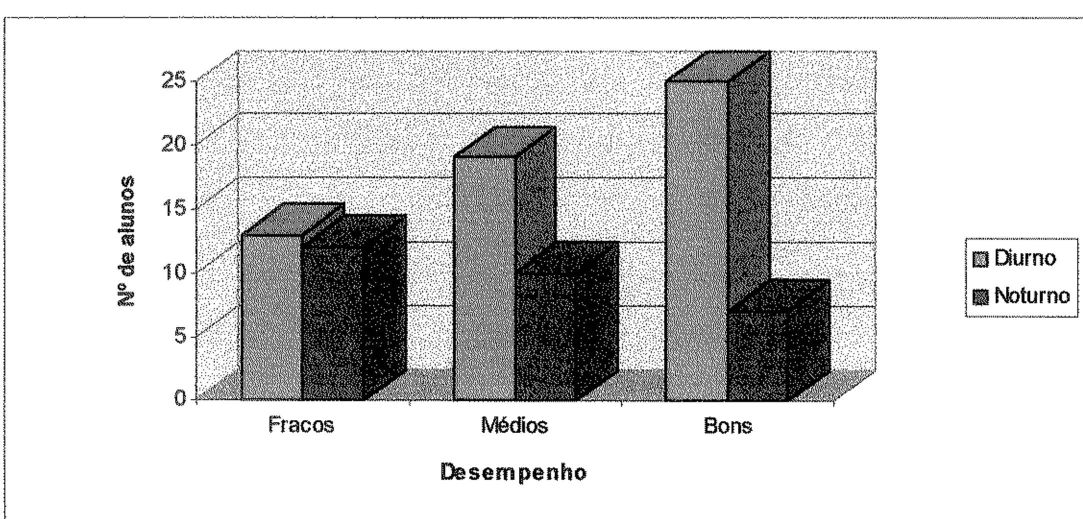
Os alunos foram agrupados em três categorias como sendo fracos, médios e bons, tanto no teste de Reversibilidade quanto em Cálculo I e Cálculo II.

Tabela 34: Distribuição de alunos por período segundo o desempenho no teste de Reversibilidade.

Categorias	Diurno		Noturno		Global	
	n.º	%	n.º	%	n.º	%
Fracos	13	22.8	12	41.4	25	29.1
Médios	19	33.3	10	34.5	29	33.7
Bons	25	43.9	7	24.1	32	37.2
Total	57	100.0	29	100	86	100

Verifica-se que há uma maior concentração de alunos categorizados como "bons" no período diurno e, no período noturno, há uma maior concentração de alunos categorizados como "fracos".

Gráfico 2: Distribuição de alunos por período segundo o desempenho no teste de Reversibilidade.



Observa-se que existe uma ligeira concentração de bons alunos no diurno, contra os alunos fracos no noturno.

Reprocessando as notas de Cálculo I e Cálculo II, após a retirada dos alunos que deixaram 50% da prova em branco, e categorizando-os em fracos, médios e bons, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 35: Notas de Cálculo I e Cálculo II

	Cálculo I	Cálculo II
Média DP	6.81 1.22	6.72 1.66
Fracos	notas menores que 6.20	notas menores que 5.89
Médios	notas entre 6.20 e 7.42	notas entre 5.89 e 7.55
Bons	notas maiores que 7.42	notas maiores que7.55

A tabela 35 demonstra as médias das notas de Cálculo I e II como também o critério adotado para categorizar os alunos em médios, bons e fracos nas disciplinas.

A tabela 36 e o gráfico 3 mostram a relação entre o desempenho no teste de Reversibilidade e nas disciplinas de Cálculo, apresentando um nível de significância de 5%.

Tabela 36: Associação entre o desempenho em Cálculo I e o teste de Reversibilidade

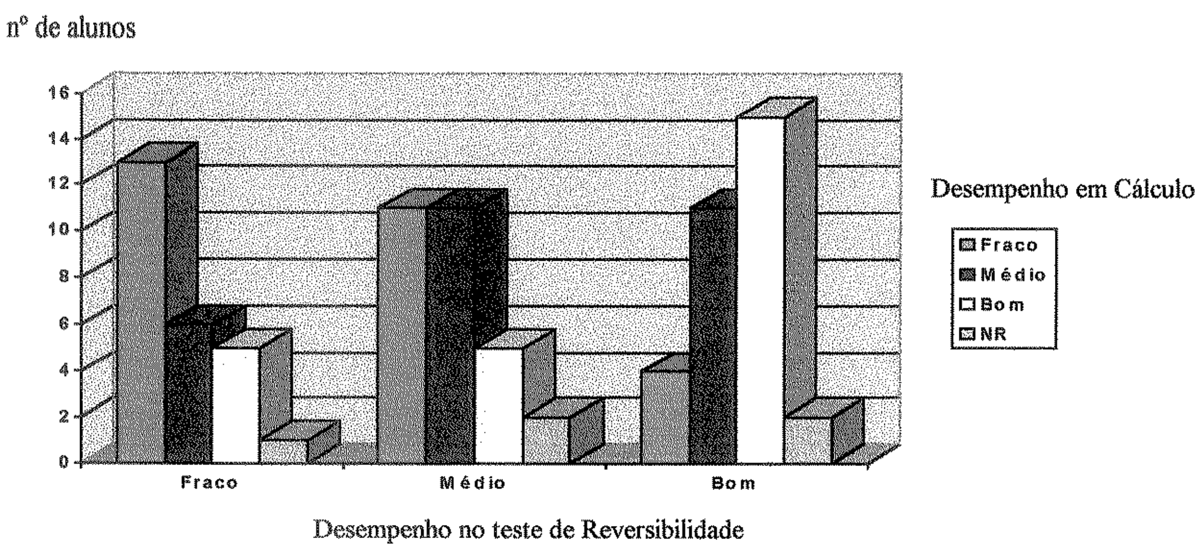
	Cálculo I				
Teste	Fracos	Médios	Bons	NR	Total
Fracos	13 52.0%	6 24.0%	5 20%	1 4.0%	25 100%
Médios	11 37.9%	11 37.9%	5 17.2%	2 6.9%	29 100%
Bons	4 12.5%	11 34.4%	15 46.9%	2 6.3%	32 100%
Total	28 32.6%	28 32.6%	25 29.11%	5 5.81%	86 100%

Esta tabela demonstra a associação entre Cálculo I e o teste de Reversibilidade de Krutetskii categorizada em fracos, médios e bons.

Na associação encontrada, verifica-se uma concentração de alunos categorizados como "fracos", tanto na disciplina de Cálculo I quanto no desempenho no teste de Reversibilidade da série XVII. Observa-se também que o mesmo percentual de estudantes categorizados como "fracos" e "médios" em Cálculo I corresponde ao desempenho estipulado como médio no teste de Reversibilidade.

Em contrapartida, tem-se a concentração de estudantes "bons" tanto em Cálculo I como no desempenho demonstrado no teste de Reversibilidade.

Gráfico 3: Desempenho no teste de Reversibilidade e em Cálculo I



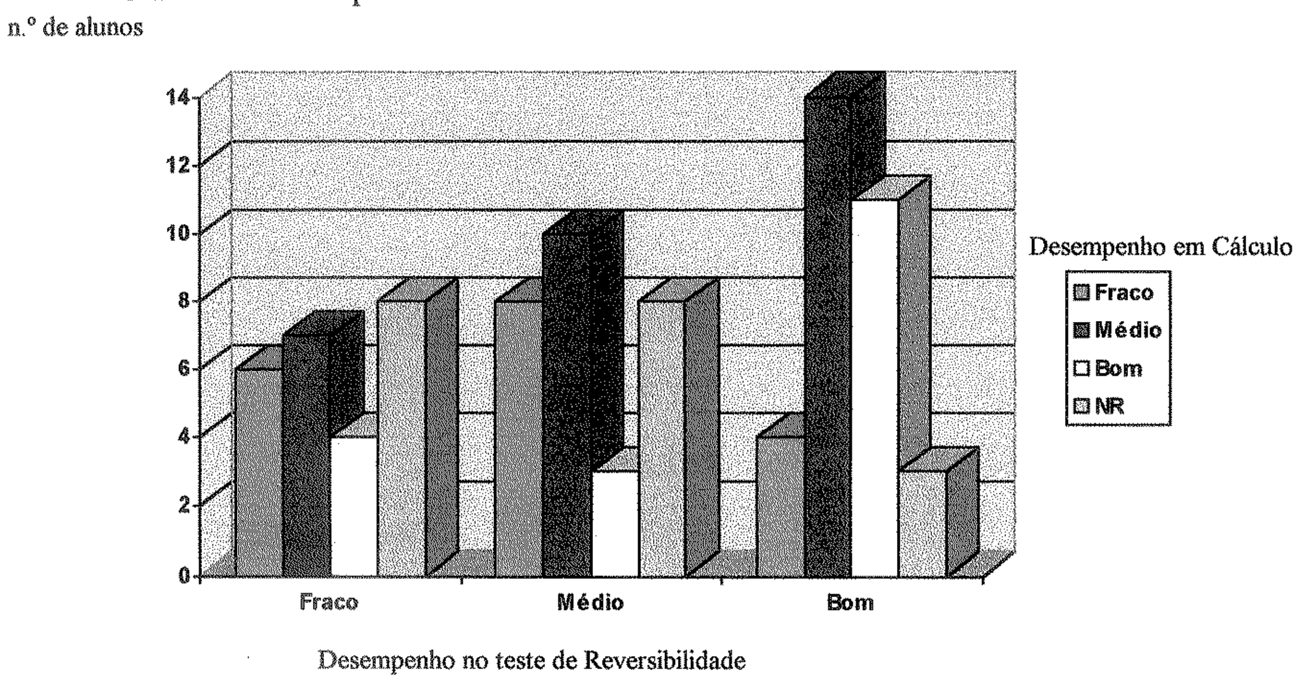
Os alunos que tiveram um desempenho fraco no teste de Reversibilidade tendem a ter um desempenho fraco em Cálculo I, sendo que o mesmo pode ser verificado para os desempenhos médios e para os desempenhos bons segundo o gráfico acima. Essa tendência leva a confirmar a hipótese, segundo a qual existe relação entre o desempenho no teste e na disciplina de Cálculo.

A tabela 37 e o gráfico 4 mostram a relação entre o desempenho no teste de Reversibilidade e em Cálculo II, apresentando um nível de significância de 10%.

Tabela 37: Associação entre o desempenho em Cálculo II e o teste de Reversibilidade.

	Cálculo II				
Teste	Fracos	Médios	Bons	NR	Total
Fracos	6 24.0%	7 28.0%	4 16.0%	8 32.0%	25 100%
Médios	8 27.6%	10 34.5%	3 10.3%	8 27.6%	29 100%
Bons	4 12.5%	14 43.8%	11 34.4%	3 9.4%	32 100%
Total	18 20.9%	31 36.0%	18 20.9%	19 22.1%	86 100%

Gráfico 4: Desempenho no teste de Reversibilidade e em Cálculo II



O gráfico 4 mostra a relação entre o desempenho dos alunos em Cálculo II (que cursavam na ocasião) e o desempenho no teste de Reversibilidade. Diferentemente de Cálculo I, não foram encontrados resultados significativos (P < = 0,10) embora pareça existir uma tendência à mesma relação encontrada para Cálculo I. Para isso, seriam necessários estudos complementares, tendo como sujeitos alunos aprovados e reprovados em Cálculo II.

Análise do componente Reversibilidade nos problemas matemáticos

Analisando os pares dos problemas resolvidos, buscou-se identificar o componente de reversibilidade caracterizando os sujeitos em três graus da habilidade matemática segundo Krutetskii, "mais capazes", "médios capazes" e "não capazes".

Buscou-se identificar o componente de Reversibilidade através da observação da solução dos problemas matemáticos resolvidos pelos estudantes e as seguintes características: a presença ou não de dificuldades em mudar a direção do pensamento, compreensão da matemática do problema e erros autocorrigidos (Neumann, 1995).

Apresentam-se a seguir três exemplos da resolução de problemas matemáticos de cada área presente no teste de Reversibilidade de Krutetskii, que são aritmética, álgebra 1 e álgebra 2 respectivamente.

• Exemplos dos problemas matemáticos aritméticos do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número três, categorizado como "mais capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

2. Uma mãe é três vezes mais velha que a filha; daqui a dez anos ela será somente duas vezes mais velha. Qual a idade da mãe ?

Fazendo as contas a idade da mãe e 30 anos

1

36. Um pai tem 35 anos e o filho tem 5 anos de idade. Quantos anos transcorrerão até que o pai seja três vezes mais velho que o filho ?

Fazendo as contas de cabeça. tem que passar dez anos

No exemplo acima, pode-se notar que o sujeito de número três, ao solucionar o problema dois e o problema trinta e seis (reverso) não apresentou dificuldade em mudar o curso ou a direção do pensamento, aplicando corretamente os procedimentos de solução. Isto significa que o estudante compreendeu a natureza do problema, caracterizando o que Krutetskii chamou de reversibilidade num sujeito "mais capaz".

•Exemplos dos problemas matemáticos aritméticos do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número sete, categorizado como "médio capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

A

2. Uma mãe é três vezes mais velha que a filha; daqui a dez anos ela será somente duas vezes mais velha. Qual a idade da mãe ?

	O	H	A
mãe		$3x$	$2.(x+10)$
filha		x	$x+10$

mãe = 30 anos

$$2(x+10)-3x=10$$
$$2x+20-3x=10$$
$$-x=-10$$
$$x=10$$

36. Um pai tem 35 anos e o filho tem 5 anos de idade. Quantos anos transcorrerão até que o pai seja três vezes mais velho que o filho ?

H	A
35	$3x$
5	x

10 anos

~~35.x~~

$$3x-35=x-5$$
$$2x=30$$
$$x=15$$

Analisando o par de problemas dois e trinta e seis (direto/ reverso) resolvidos pelo sujeito sete, observa-se erros autocorrigidos apresentando dificuldade em compreender a natureza do problema e dúvidas em aplicar os procedimentos corretos para solução dos mesmos. Essas dúvidas mostram a existência de hesitações em solucionar o problema na ordem inversa porém, não impedem que o sujeito chegue a uma solução correta. Tal fato leva a perceber que a inversão do pensamento não acontece de forma simultânea à solução dos problemas, diferentemente do que ocorre com o sujeito categorizado como mais capaz.

•Exemplos dos problemas matemáticos aritméticos da série XVII de Krutetskii para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número oitenta e seis, categorizado como "não capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

2. Uma mãe é três vezes mais velha que a filha; daqui a dez anos ela será somente duas vezes mais velha. Qual a idade da mãe ?

filha x
mãe $3x$

$3x + 10 = 2(x + 10)$

$3x + 10 = 2x + 20$

$x = 10$

Então a idade da mãe é 30 anos.

36. Um pai tem 35 anos e o filho tem 5 anos de idade. Quantos anos transcorrerão até que o pai seja três vezes mais velho que o filho ?

Observando a solução dos problemas dois e trinta e seis (direto/ reverso) feito pelo sujeito oitenta e seis, verifica-se dificuldade em compreender a relação lógica entre os pares de problemas direto/reverso. O sujeito apresenta a tendência em confundir os elementos comuns dos problemas e certa dificuldade em mudar o curso ou direção do pensamento, aplicando corretamente os procedimentos de solução. Sendo assim, o sujeito é caracterizado como não capaz, pois não apresenta o componente reversibilidade, não foi capaz de perceber a relação existente entre os problemas, resolvendo-os de forma independente.

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra1 do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizado pelo sujeito de número quarenta e oito, categorizado como "mais capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

17. De acordo com a programação, uma fábrica deveria produzir m peças em n dias. Excedendo a cota, ela fez r peças a mais, concluindo o trabalho t dias antes do esperado. Quantas peças, por dia, a fábrica fez a mais que o programado ?

m peças em n dias

$m + r$ peças em $n - t$ dias

$\dfrac{m}{n}$ peças por dia programad...

$\dfrac{m+r}{n-t}$ peças por dia realizad...

$\left(\dfrac{m+r}{n-t} - \dfrac{m}{n}\right)$ feitos a mais por dia

28. Uma fábrica deveria produzir a ferramentas em um dado período de tempo e, por isso, planejaram fazer b ferramentas por dia. Mas os operários excederam a cota e produziram n ferramentas, a mais que o planejado, por dia,. Quanto tempo antes do prazo final a fábrica completou o pedido?

bf/dia $\Rightarrow$ x dias a ferramentas

$b\,x = a \qquad x = a/b$

$n.(x - y) = a$

$nx - ny = a \qquad y = \left(\dfrac{na}{b} - a\right)/n$ dias a menos

Nota-se que o sujeito resolveu o problema dezessete elaborando um organograma de raciocínio para a interpretação do enunciado percebendo a relação direta/inversa de forma simultânea à solução.

Na resolução do problema vinte e oito o sujeito apresentou um procedimento diferenciado percebendo os elementos comuns ao problema. Conseguiu entender a relação existente entre o par de problemas, sendo categorizado como "mais capaz", segundo Krutetskii, pois apresentou uma maior facilidade na resolução destes.

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra 1 do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número quarenta e seis, categorizado como "médio capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

17. De acordo com a programação, uma fábrica deveria produzir m peças em n dias. Excedendo a cota, ela fez r peças a mais, concluindo o trabalho t dias antes do esperado. Quantas peças, por dia, a fábrica fez a mais que o programado ?

peça por dia: $\boxed{\frac{m}{n}}$

ite $\boxed{\frac{m+r}{n-t}}$, peças a mais $\frac{m+r}{n-t} - \frac{m}{n} = \frac{n(m+r) - m(n-t)}{n(n-t)} =$

$\frac{mn + nr - mn + mt}{n(n-t)} = \boxed{\frac{nr+mt}{n(n-t)}}$

28. Uma fábrica deveria produzir a ferramentas em um dado período de tempo e, por isso, planejaram fazer b ferramentas por dia. Mas os operários excederam a cota e produziram n ferramentas, a mais que o planejado, por dia,. Quanto tempo antes do prazo final a fábrica completou o pedido?

planejado: a ferramentas; b fer./dia $\therefore t_{PLA} = \frac{a}{b}$

duzido: $(b+n)$ fer. por dia $\therefore t_N = \frac{a}{b+n}$

$t_{PLA} - t_N = \frac{a}{b} - \frac{a}{(b+n)} = \frac{a(b+n) - ba}{b(b+n)} = \frac{ab + an - ab}{b(b+n)} = \boxed{\frac{an}{b(b+n)}}$

Observou-se que o sujeito interpretou os enunciados dos problemas através de um organograma matemático com procedimentos idênticos.

Nota-se também a presença de erros autocorrigidos nas resoluções dos dois problemas, demonstrando que a inversão não foi estabelecida de forma simultânea. O sujeito apresentou dúvidas na resolução e foi categorizado como "médio capaz" segundo Krutetskii.

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra1 do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número cinco, categorizado como "não capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

2

17. De acordo com a programação, uma fábrica deveria produzir m peças em n dias. Excedendo a cota, ela fez r peças a mais, concluindo o trabalho t dias antes do esperado. Quantas peças, por dia, a fábrica fez a mais que o programado ?

$$m + r \rightarrow n - t \qquad \frac{n(m+r)}{n-t} = x$$

$$x \Rightarrow n$$

$$\text{média em } n \text{ dias} = \frac{m+r}{n-t}$$

$$\frac{m+r}{n-t} - \frac{m}{n} = \frac{\cancel{mn} + rn - \cancel{mn} + mt}{n(n-t)} = \frac{rn + mt}{n(n-t)}$$

Por dia a fábrica fez $(rn + mt)/(n \cdot (n-t))$ peças a mais.

28. Uma fabrica deveria produzir a ferramentas em um dado periodo de tempo e, por isso, planejaram fazer b ferramentas por dia. Mas os operários excederam a cota e produziram n ferramentas, a mais que o planejado, por dia. Quanto tempo antes do prazo final a fábrica completou o pedido?

fizeram: 1 dia → $b + n$ ferramentas

planejado: 1 dia → b ferramentas

k dias → bt

t dias → bt ferramentos

$\cancel{t - k}$

$\cancel{k = \frac{bt}{b+n}}$

$$-k + t = \frac{-bt}{b+n} + t = \left(\frac{-b}{b+n} + 1\right) \cdot t$$

Verifica-se que o sujeito teve dúvidas com relação à resolução do problema dezessete, interpretando o enunciado com dificuldade e não conseguiu resolver o problema vinte e oito. Pode-se inferir então, que o sujeito não foi capaz de perceber os elementos comuns dos problemas e nem a relação inexistente entre eles.

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra2 da série XVII de Krutetskii para identificar o componente reversibilidade realizado pelo sujeito de número quarenta e cinco, categorizado como "mais capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

9. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$ $(3a^2 - m^2)$

42. $(2a^3 - n^4)^2 =$ $4a^6 - 4a^3n^4 + n^8$

Pode-se identificar que o sujeito teve facilidade em perceber a relação existente entre os problemas, resolvendo-os de maneira direta. Não apresentou dificuldade em mudar o sentido de raciocínio e sim uma facilidade em resolver o problema a partir da condição direta para a condição inversa, pois compreendeu a natureza do problema. Segundo Krutetskii, é categorizado como "mais capaz".

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra2 da série XVII de Krutetskii para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número oitenta e seis, categorizado como "médio capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

9. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$

$= (3a^2 - m^2)^2$

42. $(2a^3 - n^4)^2 =$

$4a^6 - 14a^3n^4 + n^8$

O sujeito ao resolver o problema nove encontrou uma certa dificuldade em perceber a estrutura da expressão algébrica, mostrando assim erros autocorrigidos. Já o problema quarenta e dois resolveu de forma direta. Neste caso, o treino na solução de problemas direto\inverso diminui a dificuldade desses sujeitos categorizados como "médios capazes"na inversão do pensamento, o que não acontece de forma simultânea durante a resolução dos problemas matemáticos, diferentemente do que ocorre com os sujeitos "mais capazes".

- Exemplos dos problemas matemáticos de álgebra2 do teste de Reversibilidade para identificar o componente reversibilidade realizados pelo sujeito de número três, categorizado como "não capaz" segundo a teoria de Krutetskii.

9. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$ $(3a^2 - m^2)^2$

42. $(2a^3 - n^4)^2 =$ $4a^6 - n^8$

CAPÍTULO V

Considerações Finais

Este estudo surgiu com a preocupação do desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo I, considerada básica para as demais dos cursos da área de Exatas da Universidade Estadual de Campinas.

É importante analisar o desempenho dos estudantes universitários na disciplina de Cálculo I porque este conteúdo é preparatório para todos aqueles que desejam seguir carreira na área de ciências exatas, no caso particular do problema desta pesquisa, a Engenharia Elétrica. A formação de bons engenheiros requisitados pelo constante progresso científico-tecnológico e mercado de trabalho concorrido, depende de um curso superior de qualidade. Somente poderão exercer a função de engenheiro aqueles que dominarem a linguagem matemática, aqueles que fizerem dela um instrumento indispensável para a formação do cidadão.

Apesar da preocupação central do presente trabalho não se referir especificamente ao aspecto político da disciplina Cálculo na UNICAMP, este estudo se faz relevante uma vez que a dimensão pedagógica jamais pode ser pensada desvinculada do problema da competência técnica e da participação política. Nesse sentido o ensino de Cálculo I tem um campo amplo para pesquisa no qual as salas de aula da universidade, tornam-se espaços onde atuam professores e alunos desenvolvendo ou não habilidades matemáticas.

O objetivo primordial do presente estudo é identificar o componente da Reversibilidade do pensamento da estrutura da habilidade matemática nos estudantes da Engenharia Elétrica, através da solução dos problemas da série XVII elaboradas por Krutetskii (1976). Estudar o componente Reversibilidade da estrutura da habilidade matemática significa inverter corretamente uma associação de problemas matemáticos dispostos em pares nas áreas de álgebra, aritmética e geometria, onde os sujeitos compreendendo a natureza do problema mudam seu pensamento durante a resolução destes no sentido direto/inverso e em alguns casos o caminho que ele percorre do enunciado ao resultado e vice-versa é diferente.

Para o pesquisador russo Krutetskii (1976) as habilidades são totalidades e os componentes não funcionam de forma isolada, somente com objetivo de pesquisa é que se pode estudar cada componente separadamente.

Krutetskii definiu habilidade como sendo traços psicológicos que interferem nos processos mentais. Para ele nem todos os traços psicológicos são habilidades e sim um conjunto composto por habilidades e condições psicológicas necessárias para a execução bem sucedida de uma atividade (Neumann, 1995). Deve-se salientar que não existe um consenso sobre uma lista completa das habilidades básicas necessárias para a aprendizagem da matemática e aceita pelos pesquisadores da área.

Evidenciando a flexibilidade do pensamento pelo desempenho dos alunos na resolução de problemas procurou-se estabelecer as relações entre o desempenho destes através da análise de Reversibilidade da habilidade matemática e o da disciplina de Cálculo I.

Para se identificar o componente de Reversibilidade nesta pesquisa foi necessário uma análise quantitativa e outra qualitativa.

Na análise qualitativa, o componente de Reversibilidade foi escolhido para o presente estudo com a finalidade de categorizar os sujeitos em mais capazes, médios e menos capazes, considerando o nível de dificuldade na solução dos problemas da série XVII e ao mesmo tempo relacionando o desempenho (através das notas) na disciplina de Cálculo I e o desempenho nos problemas do teste de Reversibilidade que buscam evidenciar a flexibilidade de pensamento. Dos vinte e quatro pares de problemas da série XVII foram selecionados nove sendo, três da área de aritmética, três de álgebra1 e três de álgebra2.

Analisando os exemplos de pares de problemas resolvidos pelos sujeitos, observou-se características através das quais se identificou o componente "Reversibilidade" e se possibilitou categorizar os sujeitos. Conforme análise realizada no capítulo IV, pode-se perceber as características comuns entre os estudantes que são a facilidade em perceber a relação direto/inverso existente entre os problemas, a compreensão da natureza do problema através da interpretação do enunciado, a apresentação de erros autocorrigidos e a resolução feita na maioria das vezes de forma direta.

Na primeira parte da análise dos resultados foi levantado um perfil geral dos sujeitos através das variáveis colhidas a partir da aplicação de um questionário.

Através da análise quantitativa foi levantado o perfil dos estudantes da faculdade de

Engenharia Elétrica que cursaram a disciplina de Cálculo I no primeiro semestre de 1997.

A amostra constou de noventa sujeitos sendo vinte e nove do período noturno e sessenta e um do período diurno.

O perfil levantado da amostra pela pesquisa demonstra que a maioria dos sujeitos é de calouros do sexo masculino apresentando a idade entre 19 e 21 anos, que não fizeram curso técnico e sim ensino médio. A maioria desses estudantes não foi reprovada nenhuma vez em Cálculo I apresentando facilidade na aprendizagem do conteúdo de matemática, preferindo as áreas de álgebra e geometria.

Eles atribuem a razão da facilidade em aprender matemática ao próprio conteúdo da disciplina, conseguindo aplicá-lo nas diferentes situações do cotidiano.

A maioria gosta de Cálculo I, acha que os conteúdos abordados são suficientes para o curso de Engenharia Elétrica e não vêem diferença na forma de estudar Cálculo I e a matemática do ensino médio. Também declaram que os conceitos adquiridos na disciplina correspondem as suas expectativas, resolvendo os problemas durante as aulas e estudando às vésperas das provas, lendo, entendendo e analisando o enunciado dos problemas matemáticos apresentados no decorrer da disciplina. Acreditam que o critério atribuído às suas notas advém na maioria das vezes de provas e projetos. Fazendo uma análise diferenciada entre as amostras do período diurno e noturno percebe-se que nas duas existem a predominância com faixa etária entre 19 e 21 anos e acreditam ser os conteúdos suficientes para o curso de Engenharia Elétrica. A maioria dos sujeitos do período diurno acreditam que as notas correspondem as suas expectativas ao contrário do período noturno, o mesmo ocorre com relação ao critério de atribuição da nota de Cálculo I. É importante notar que os sujeitos já haviam cursado Cálculo I e estavam cursando Cálculo II quando houve a aplicação do teste, portanto já desenvolveram uma certa experiência com relação à método de estudo.

Na análise do desempenho demonstrado pelos sujeitos com relação a disciplina de Cálculo I pode-se perceber a média dos alunos do período diurno é maior do que as apresentados pelos estudantes do período noturno. Em relação a análise dos resultados dos desempenhos dos estudantes em Cálculo I, Cálculo II e no teste de Reversibilidade foi feito em duas fases. Na primeira fase não foram encontradas relações entre as disciplinas e os problemas em que se pudesse concluir algo significativo. Analisando os motivos pelos quais não se encontrou alguma relação deparou-se em dois pontos importantes que causaram interferência na análise: um deles refere-se as questões de geometria que nenhum dos sujeitos resolveu ou errou, as quais foram retiradas, o outro ponto refere-se aos estudantes que não se engajaram na pesquisa, não por falta de conhecimento e portanto também foram retirados. A partir dessas duas correções buscou-se novamente relações, categorizando os sujeitos, com relação ao seu desempenho em bons, médios e fracos . A primeira encontrada foi a existência de uma certa concentração de estudantes da turma do diurno com melhor desempenho no teste de Reversibilidade. A segunda relação e a mais importante foi obtida no desempenho no teste e na disciplina de Cálculo I , medida pela nota, através da categorização.

Em resposta ao problema de pesquisa que se buscava a existência de relação entre o desempenho de estudantes universitários, na disciplina de Cálculo I da Faculdade de Engenharia Elétrica na Universidade Estadual de Campinas, e o desempenho nos problemas, propostos por Krutetskii, que avaliam a Reversibilidade como um dos componentes da estrutura das habilidades matemáticas pode-se dizer que a maioria dos alunos que tiveram um bom desempenho no teste também apresentaram bom desempenho na disciplina, assim como os sujeitos categorizados em médios tiveram um desempenho mediano na disciplina de Cálculo e na resolução dos problemas matemáticos, o mesmo acontecendo para os classificados como fracos.

Na análise da disciplina de Cálculo II e a relação do desempenho dos alunos nos testes de Reversibilidade, não se encontraram resultados significativos, embora no gráfico do desempenho entre a disciplina e o teste de Reversibilidade se verifica uma certa tendência na mesma direção a relação encontrada no Cálculo I. Para que este estudo se tornasse significativo, necessita-se de informações complementares das notas finais da disciplina.

Mesmo considerando as limitações do presente estudo, pode-se sugerir o uso desses problemas do teste de Reversibilidade como um instrumento de acompanhamento do curso de engenharia, a fim de se verificar até que ponto o processo de ensino-aprendizagem está voltado para o desenvolvimento da habilidade matemática: em particular a habilidade de reverter os processos mentais e ainda se o sucesso em uma disciplina básica como Cálculo pode repercutir na formação geral do engenheiro, decodificadas através do desempenho demonstrado na resolução dos testes de Reversibilidade propostos por Krutetskii.

Esta série de problemas com algumas adaptações, como por exemplo a redução do número de questões para que o teste não se torne muito extenso, possibilitaria a sua utilização como um instrumento de avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas nos estudantes da Faculdade de Engenharia Elétrica, com o objetivo de melhorar ainda mais, a qualidade de ensino.

Com isso, se houver uma melhora, uma maior eficácia na resolução de problemas matemáticos, haverá um desenvolvimento no mesmo ritmo da habilidade matemática.

É perante esse quadro, que se buscou um ponto de partida ao processo de reflexão relativo ao ensino da matemática na Universidade voltado para o desenvolvimento da habilidade, além de propiciar pesquisas complementares com a finalidade de elaboração e aperfeiçoamento de um instrumento para acompanhamento dos cursos de Engenharia, indispensável para a formação profissional.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, J. R., GREENO, J. G., KLINE, P. J. & NEVES, D. M. (1981). *Aquisition of problem-solving skill.* In J.P.ANDERSON,(Ed.), Cognitive skills and their aquisitions. Hillsdale,NJ:Erlbaum.

BETZ, W. (1923). *The problem of correlation in psycology:* On the correlation of mental abilities. Chapter 5 of *Ability: in mathematics.* Moscou: Russkaya Knizhka Press, p.478.

BOURBAKI, N. (1966). The architecture of mathematics. in *Elementes d'histoire.Translate from french..*

BOYER, K. (1993). *Tópicos da História da Matemática.*S.P.Editora Atual.

BRIARS, D. J. (1983). An Information-Processing Analysis of Mathematical Ability in Individual Differences in Cognition.(vários).New York. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. p.181.

BRITO, M.R.F. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação á matemática em estudantes de 1° e 2° graus.* Campinas, SP: Tese de Livre Docência, FE/UNICAMP.

BROWN, A. L. & FRENCH, L. (1978). The zone of proximal development:implications for intelligence testing in the year 2.000.*Intelligence.1*979; ver tambem VYGOTSKY,L.S.*Mind in society:the development of the child.*Journal of Genetic Pychology.

BRUNER, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.*Cambridge,Mass:Belknap Press of Harvard University.

CALFEE, R. C. & RESNICK, L. D. (1976). Org. David Klahr. *Sources of Dependency in Cognitive Processes in Cognitition And Instruction.* New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers. p.23 a 24.

CARROLL, J. B. (1971). Development of native language skills beyond the early yars. In C. E. Reed (ed.), *the learning of language.* New York: appleton-Century- Crofts.

CHASE, W.G. & CHI, M.T.H. (1980). *Cognitive Skill: Implications for spatial Skill in large-escale environments*, In J. Harley (Ed.). Cognition, social behavior, and the environment. Potomac. Mary-land: Lawrence Erlbaum Associetes.p.11 a 12.

COHEN, D. (1995). Crossroads in Mathematics: Standards for Introductory College Mathematics Beforew Calculus. *American Mathematical Association of Two-Year Colleges.*Memphis. september. p.3 a 20.

DUBINSKY, E. org David TALL. (1991). Reflective Abstration in Advanced Mathematical Thinking in Advanced Mathematical Thinking. Netherlands. Kluwer Academic Publishers. p.95 a 123.

GAGNÉ, R. M. & PARADISE, N. E. (1962). Abilities and learning sets en knowledge acquisition. *Psychological Monographs.*p.72.

GAGNÉ, R. M. & PARADISE, N. E. (1962). Abilities and learning sets en knowledge acquisition. Psychological Monographs. p. 78,80,81

GAGNÉ, R. M. (1962). The acquisition of knowledge.*Psychologgical Review. p. 355-365.*

GAGNÉ, R. M. (1968). Learning hierarchies.*Educational Psychology.* p.1-9.

GAGNÉ, R. M. (1970). *The conditions of learning.*New York:Holt, Rinehart & Winston.

GAUSS, Carl Friedrich. in BOYER. Carl B. (1993). *Tópicos da História da Matemática.* S.P. Editora Atual. p.61-62.

GREENO, J.G . (1974). *Process of learning and comprehension.*In L.W.gregg.Knowledge and cognition.Hilsdale,N.J.:Lawrance Eribaum Assoc.

HEIDEGGER, Martin. (1987). Coleção os Pensadores. S.P.Editora Abril.

HUNT, E. B. (1962). *Concept learning, an information processing problem.* New York: Academic press.

HUNT, E. (1978). Mechanics of verbal ability. *Psychological Review. 85* p.109 a 130.

KANT, Emmanuell. (1987). *Coleção os Pensadores.* S.P. Editora Abril.

KAWAMURA, Lili K.(1981). Engenheiro:Trabalho e Ideologia. S.P. Ática

KRUTETSKII,V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical abilities in School Children.* J. Teller. (transl), J Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), University of Chicago press,Chicago.p. 143, 144, 175, 177, 350 e 351.

LARKIN, J. H. (1981). Enriching formal Knowledge: A model for learning to solve textbook physics problem .in J.R.Anderson,*Cognitive skills and their acquisition.*Hillsdale,N.J.:Erlbaum.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm von, in BOYER. Carl. (1993). *Tópicos da História da Matemática.*S.P.Editora Atual.

LIETZMANN, W. (1941). *Mathematik in Erziehung un Unterricht.*Leipzig:Quelle & Meyer, p.638.

MASON, J. (1979). *Mathematical Abstraction as the result of a delicate shift of attention*, for the Learning of Mathematcs. 9. p.2.

MEINANDER, R. (1958) in WERDELIN, I. *The Mathematical ability: experimental and factorial studies.* Lund: gleerups,p.11

NEUMANN,V.J.(1995). *Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Steinberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii*, Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP. p.69.

NEWELL, A. (1972). *A theoretical exploration of mechanisms for coding the stimulus.* In A.W. Melton and E. Martin (Eds.), Coding processes in human memory. Washington: Winston.

NEWEL, A & SIMON, H.A. (1972). *Human problem solving.*Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.

PACHECO, E. R. (1995). *Um estudo de atitudes em relação ao Cálculo Diferencial e Integral, em estudantes universitários.* Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP.

PAVANELO, R.M.(1995). *Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas.* Campinas, SP: Dissertação de Mestrado, Campinas: UNICAMP.

PIAGET, J. (1966). *Comments on Mathematical Education.*in A. J. Howson,(ed.), Developments in Mathematical Education, Procedings of the Second International Congress in Education,Cambridge university Press,Cambridge. p. 203-208.

PIAGET, J. (1972). *Comments on Mathematical Education.*in A.J.Howson,(ed.), Developments in Mathematical Education, Procedings of the Second International Congress in Education,Cambridge university Press,Cambridge. p.37-38.

PIAGET, J. (1975). *J.Piaget's Theory,* in P.H.Neubauer, *the Processo of Child Developments.*Jason Aronson,New York. p.166

PIAGET, J. (1980). *Adaptation and Intelligence,*University of Chicago Press, Chicago. (original published 1974).p.89-97.

PIAGET, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures.*Harvard university Press, Cambridge M.A.(original published). p.149-150.

PIAGET, J. & GARCIA,R. (1983). *Psychogenèse et histoire des ciences.*Flammarion,Paris. p.209.

PIAGET, J. (1980). *Adaptation and Intelligence.*University of Chicago Press.Chicago.p. 20, 30 e 92.

PIAGET, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures.*Harvard university Press, Cambridge M.A.(original published). p.18-19.

PIAGET, J. (1985).*The Equilibration of Cognitive Structures.*Harvard university Press, Cambridge M.A.(original published).p. 140 e 143.

PIROLA, N.A. (1995). *Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulos e paralelograma em alunos de 1º grau.* Campinas, SP: Dissertação de Mestrado, Campinas: UNICAMP.

RESNICK, L. B. (1976), org David KLAHR, Task Analysis in Instructional Design: Some Cases from Mathematics in Cognition And Instruction, (coletânia de textos), New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.p.51 a 80.

RESNICK, D. P. , & RESNICK,L. B. (1985). *Standards, curriculum and performance: a historical and comparative perspective.* Educacional researcher, número 14, p. 5, p.5-20.

REVÊSZ, G. (1952). *Talent und Genie.*Berne: A. Francke.

__________. (1940). *The Indivisibility of mathematical talent.*Acta Psychologica, 5, p. 2 e3.

ROSENBAUN, D. A. (1983). Hierarchical control of rapid movement sequences. *Journal of Experimental Psychology:* Human Perception and Performance. p. 86-102.

SIMON, B. (1958). T*he English school and intelligence testing.*translated from English. Moscou:APN Press.

SIMON, H. A. (1976). *Neural Mechanisms of Learning and Memory.*in M.R.Rosenzweig and E.L.Bennet, *The Information-Storage System Called Human Memory.* New York:MIT Press.

STERNBERG, R.J. (1966). High-speed scanning: Mental process revealed by reaction time experiment.

THORNDIKE, E. L. (1922). The abilities involved in algebraic computation na in problem solving. *School and Society. p. 15.*

THORNDIKE, E. L. (1936). *Nova Metodologia da Aritmética.* Porto Alegre: Ed. Globo.

VYGOTSKY, L. S. (1984). *A formação social da mente.* S.P, Martins Fontes.

VYGOTSKY, L. S. (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem,* S.P. Ícone/EDUSP.

WARD, W.C., FREDERIKSEN, N., & CARLSON, S. (1980). *Construct validity of free-response and machine-scorable forms of a test.* Journal of Educational Measurement, nº 17, p.11-29

WENZL, A. (1934). *Theorie der Begabung.* Leipzig: Meiner, p.726

WOODS, S. S., RESNICK, L. B., & GROEN, G. J.(1975). Na experimental test of five process models for subtraction, *Journal of Educational Psychology,* 67, 17-21.

ANEXOS

ANEXO I

QUESTIONÁRIO

Prezado (a) aluno (a)

O presente instrumento faz parte de um projeto da linha de pesquisa Psicologia da Educação Matemática da área de concentração Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação da Profª. Drª. Márcia Regina F. de Brito.

Esta pesquisa tem como objetivo o Estudo do desenvolvimento das habilidades matemáticas no ensino na disciplina de Cálculo I da Universidade Estadual de Campinas.

Pedimos sua colaboração respondendo às questões a seguir, com a maior objetividade e sinceridade. Os dados fornecidos serão mantidos em sigilo acadêmico e os sujeitos não serão identificados.

Em respondendo o questionário você não precisa identificar-se, pois o objetivo da pesquisa é um estudo das soluções dos problemas matemáticos propostos.

Desde já, agradecemos sua contribuição e atenção porque serão de extrema importância para que os objetivos deste trabalho sejam atingidos.

Antonino Giuseppe Spalletta

RA 960106

Mestrando em Educação Matemática

Márcia Regina F. de Brito

Orientadora / F.E. da UNICAMP

1. Nome:

   R.A.:

2. Sexo: 1- ( ) masculino 2- ( ) feminino

3. Idade:

4. Curso:

5.Período: 1-( ) diurno 2-( ) noturno

6.Fez curso técnico : 1-( ) Sim 2-( ) Não

7. Quantas vezes foi reprovado em Cálculo I?

8. Quais as suas notas de aprovação ou reprovação na(s) disciplina(s)?

Cálculo I:

Cálculo II:

9-Você teve facilidade em aprender Matemática no 2° grau ?

( ) Sim. Por gostar de conteúdos, como:

( ) Sim. Devido ao modo como o professor ensinava

( ) Não. Por quê?

10-De que forma você estudava matemática? (pode assinalar mais de uma (1) resposta).

( ) Durante as aulas com revisão em casa.

( ) Nas vésperas da prova.

( ) Com os amigos em grupo.

( ) Aulas particulares

( ) Com outros livros

( ) Outra maneira. Especificar______________________________

11. Como você aplica os conhecimentos de cálculo às situações do cotidiano?

12. Você tem facilidades em aprender os conteúdos de Cálculo I?
( ) Sim. Por quê?

( ) Não. Por quê?

13a. A forma como você estuda Cálculo I é semelhante à forma como você estudava Matemática no 2° grau? O que é semelhante e o que mudou?

13b. Quais as etapas que você utiliza para resolver problemas matemáticos ?

14. Para você os conteúdos abordados em Cálculo I são suficientes ou não?
Por quê?

15. O que você entende por habilidades matemáticas? Dê um exemplo.

16.Qual o critério para atribuição de nota na disciplina de Cálculo I?

17. Você tem facilidade em cálculo?

1-( ) sim 2-( ) não

18. Suas notas correspondem àquelas que você espera?

1-( ) sim 2-( ) não

ANEXO II

SÉRIE XVII - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

1. Que parte de um circulo é um arco de 22° 30' ?

2. Uma mãe é três vezes mais velha que a filha; daqui a dez anos ela será somente duas vezes mais velha. Qual a idade da mãe ?

3. **Prove o teorema:** Uma reta perpendicular ao raio, no seu ponto final, é tangente ao círculo.

4. Em três minutos uma tora foi cortada em pedaços de meio metro de comprimento. Sabendo - se que cada corte demora um minuto para ser feito, quantos metros tinha a tora?

5. $(3x - 1/3y^3)^2 =$

6. **Prove o teorema:** O diâmetro traçado pelo ponto médio de uma corda que não passa através do centro do círculo é perpendicular a ele.

7. $(1/4p^3 + 1/2q^2)(1/4p^3 - 1/2q^2) =$

8. A distância entre dois ponto é y km. Dois trens partem de cada um deles em direção ao outro ponto, e se encontram em n horas. Um dos trens viajou com uma velocidade de 40 km/h. Qual foi a velocidade do segundo trem ?

9. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$

10. **Prove o teorema:** A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1800°. Quantos ângulos tem este polígono?

11. $9x^4 - 4y^2 =$

12. $(x^4 - y^n)^2 =$

13. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas são traçadas até uma linha reta a partir de um único ponto, então aquela que tiver maior projeção na linha reta é a maior.

14. Uma fábrica excedeu a cota prevista de produção em 2,5 % e produziu 54 máquinas operatrizes durante o período de fabricação. Qual era a produção originalmente planejada?

15. $-0.25y^2 + 1/9\,x^2 =$

16. Prove o teorema: Se duas linhas oblíquas, desenhadas a partir de um mesmo ponto em direção a uma linha reta, são iguais, então suas projeções serão iguais.

17. De acordo com a programação, uma fábrica deveria produzir *m* peças em *n* dias. Excedendo a cota, ela fez *r* peças a mais, concluindo o trabalho *t* dias antes do esperado. Quantas peças, por dia, a fábrica fez a mais que o programado ?

18. $(x + y).(x - y) =$

19. Quantos dias um operário precisaria trabalhar para ganhar b Reais, se ele ganha c Reais por dia ?Quanto um operário ganhará em d dias se ele ganha a Reais por dia?

20. $(2a^3 - 3b).(2a^3 + 3b) =$

21. Usando 740 folhas de papel foram confeccionadas 140 cadernetas grossas e 100 cadernetas finas. Quantas folhas de papel foram usadas, separadamente, para cada caderneta, considerando que as grossas recebiam uma folha a mais que as finas?

22. $(a - b)^2 =$

23. **Prove o teorema:** Um diâmetro perpendicular à corda divide a corda e seus arcos ao meio.

24. Uma serra corta um metro de madeira por minuto. Quantos minutos serão necessários para que sejam cortados 16 metros de madeira ?

25. $- 2xy + x^2 + y^2 =$

26. $(0,6\ m^n - \frac{1}{4}\ n^m) (0,6\ m^n + \frac{1}{4}\ n^m) =$

27. $16x^2 - 4xy^2 + 1/4y^4 =$

28. Uma fábrica deveria produzir *a* ferramentas em um dado período de tempo e, por isso, planejaram fazer *b* ferramentas por dia. Mas os operários excederam a cota e produziram *n* ferramentas, a mais que o planejado, por dia,. Quanto tempo antes do prazo final a fábrica completou o pedido?

29. $(a + b - c).(a - b + c) =$

30. $(x - y)^2 - 25y^8 =$

31. **Prove o teorema:** A reta tangente ao círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

32. Uma fábrica com um planejamento de produção de 1.280 máquinas-operatrizes, excedeu em 12,5% a produção prevista. Quantas máquinas a fábrica produziu ao todo?

33. $b^2 + (x - a)^2 - 2b(x - a) =$

34. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas são traçadas a partir de um único ponto em direção a uma linha reta, a linha oblíqua maior terá uma projeção maior na linha reta.

35. $(a - x + y)^2 =$

36. Um pai tem 35 anos e o filho tem 5 anos de idade. Quantos anos transcorrerão até que o pai seja três vezes mais velho que o filho ?

37. Foi colocada água em um tanque com capacidade de 80 litros, ocupando assim 2/5 de seu volume. Quantos litros de água foram colocados no tanque ?

38. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas traçadas em direção a uma linha reta, a partir de um único ponto, tem projeções iguais, então essas linhas são iguais.

39. $1/25m^4 - 4n^2m^6 =$

40. Calcule a soma dos ângulos internos de um heptágono convexo.

41. A distância entre as cidades A e B é x km. Exatamente no mesmo horário, parte um trem de cada estação em direção à outra. Um deles vai a uma velocidade de a km/h e o outro a b km/h. Quanto tempo levará para os dois trens se encontrarem ?

42. $(2a^3 - n^4)^2 =$

43. Usando 620 folhas de papel foram confeccionadas 200 cadernetas. As cadernetas grossas foram confeccionadas usando-se 5 folhas e meia e as finas usavam uma folha e meia. Quantas cadernetas de cada tipo foram produzidas ?

44. $a^2 - b^2 =$

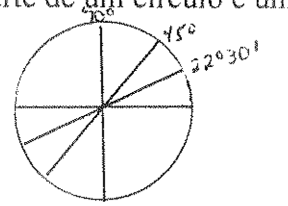
45. Quantos graus contem 1/24 de um ângulo reto ?

46. $a^2 - 2ab + b^2 =$

47. Dezesseis litros de água foram colocados em um tanque e essa quantidade encheu 2/5 do volume total do tanque. Qual o volume do tanque ?

SÉRIE XVII - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

1. Que parte de um círculo é um arco de 22° 30' ?



$\frac{1}{16}$

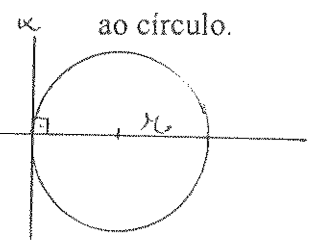
2. Uma mãe é três vezes mais velha que a filha; daqui a dez anos ela será somente duas vezes mais velha. Qual a idade da mãe ?

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 10 = 2 \cdot (y + 10) \end{cases}$$

$x = 30$

$y = 10$

3. **Prove o teorema:** Uma reta perpendicular ao raio, no seu ponto final, é tangente ao círculo.



Se α e r se cruzam em um único ponto e esse ponto pertence a circunferência pela definição de tangente essa reta é tangente a circunferência

4. Em três minutos uma tora foi cortada em pedaços de meio metro de comprimento. Sabendo - se que cada corte demora um minuto para ser feito, quantos metros tinha a tora?

1 minuto —▷ cada corte —▷ 0,5 m

3 minutos —▷ 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5 m

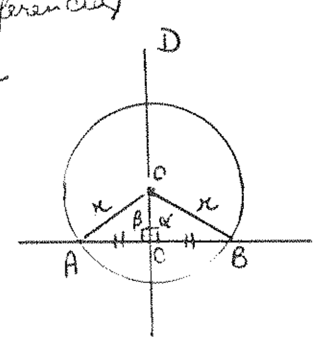
0,5 0,5 0,5 0,5

2 m

5. $(3x - 1/3y^3)^2 = 9x^2 - \frac{6}{3}xy^3 + \frac{1}{9}y^6 = 9x^2 - 2xy^3 + \frac{1}{9}y^6$

6. **Prove o teorema:** O diâmetro traçado pelo ponto médio de uma corda que não passa através do centro do círculo é perpendicular a ele.

Pela definição de circunferência $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raio da circunferência) e $\overline{AC} = \overline{BC}$ logo $A\hat{O}B$ é isósceles e como D é mediatriz de $\overline{AB}$ então o ângulo α e β são iguais



não 7. $(1/4p^3 + 1/2q^2)(1/4p^3 - 1/2q^2) = \frac{1}{16}p^6 - \frac{1}{8}p^3q^2 + \frac{1}{8}p^3q^2 - \frac{1}{4}q^4$

$\left(\frac{1}{16}p^6 - \frac{1}{4}q^4\right)$

8. A distância entre dois ponto é y km. Dois trens partem de cada um deles em direção ao outro ponto, e se encontram em n horas. Um dos trens viajou com uma velocidade de 40 km/h. Qual foi a velocidade do segundo trem ?

$A - a.t = B + b.t$

$A - 40.t = B + b.t$

$A - 40.n = B + b.n$

$A - B = b.n + 40n$

$A - B = n(b + 40)$

$\frac{A-B}{n} = b + 40$

$b = \frac{A-B}{n} - 40$

9. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 = 9a^4 - 3a^2m^2 - 3a^2m^2 + m^4 = 3a^2.(3a^2 - m^2) - m^2.(3a^2 - m$

$(3a^2 - m^2).(3a^2 - m^2) = (3a^2 - m^2)^2$

10. **Prove o teorema:** A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1800°. Quantos ângulos tem este polígono?

$x = \frac{1800^\circ}{150^\circ}$

$1800^\circ = (n-2).180^\circ$

$\frac{1800^\circ}{180} = n - 2$

$n = 12$

12 ângulos internos

$a_i = \frac{S_i}{n}$

$a_i = \frac{1800^\circ}{12}$

$a_i = 150^\circ \to$ medida de 1 ângulo

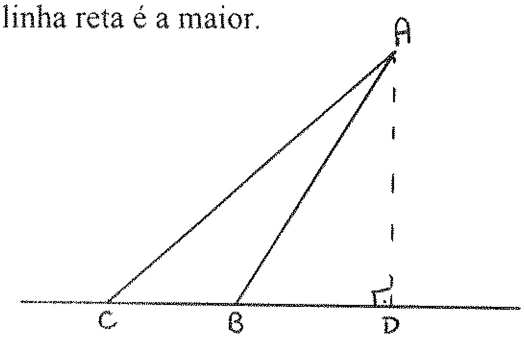
11. $9x^4 - 4y^2 = (3x^2 - 2y).(3x^2 + 2y) = 9x^4 - 6x^2y + 6yx^2 - 4y^2 = 3x^2.(3x^2 - 2y) + 2y.(3x^2$

$(3x^2 - 2y).(3x^2 + 2y)$

12. $(x^4 - y^n)^2 = (x^4 - y^n).(x^4 - y^n) = x^8 - x^4y^n - x^4y^n + y^{n^2} = x^8 - 2x^4y^n + y^{n^2}$

não

13. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas são traçadas até uma linha reta a partir de um único ponto, então aquela que tiver maior projeção na linha reta é a maior.



$\overline{CD} > \overline{BD}$ logo pelo Teorema de Pitágoras ($h^2 = c^2 + c^2$)

$\overline{AC} > \overline{AB}$

14. Uma fábrica excedeu a cota prevista de produção em 2,5 % e produziu 54 máquinas operatrizes durante o período de fabricação. Qual era a produção originalmente planejada?

$54 \rightarrow 102{,}5\%$

$x \rightarrow 100\%$

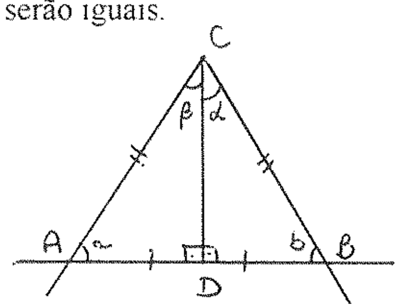
$x = 52{,}68$

15. $-0.25y^2 + 1/9\, x^2 = \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{25}{100}y^2\right) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{10}y\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{10}y\right) = \left(\frac{1}{3}x \cdot \frac{5}{10}y\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{10}y\right.$

$\frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{30}xy - \frac{5}{30}xy - \frac{25}{100}y^2 = \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{10}y\right) + \frac{5}{10}y \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{5y}{10}\right) =$

$\left(\frac{1}{3}x + \frac{5y}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{10}y\right)$

16. Prove o teorema: Se duas linhas oblíquas, desenhadas a partir de um mesmo ponto em direção a uma linha reta, são iguais, então suas projeções serão iguais.



$\Delta\, A\hat{D}C \equiv C\hat{D}B$ e $\overline{CD}$ é comum aos dois

logo $\overline{DB} = \overline{AD}$

17. De acordo com a programação, uma fábrica deveria produzir m peças em n dias. Excedendo a cota, ela fez r peças a mais, concluindo o trabalho t dias antes do esperado. Quantas peças, por dia, a fábrica fez a mais que o programado ?

m = cota tempo = n produção = $m + r$

tempo trabalhado = $n - t$

peças por dia = $\frac{m+r}{n-t}$

peças por dia esperado = $\frac{m}{n}$

peças excedentes por dia = $\frac{m+r}{n-t} - \frac{m}{n}$

18. $(x + y).(x - y) = x^2 - x.y + yx - y^2 = x^2 - y^2$

19. Quantos dias um operário precisaria trabalhar para ganhar *b* Reais, se ele ganha *c* Reais por dia ?Quanto um operário ganhará em *d* dias se ele ganha *a* Reais por dia?

$x . c = b$

$x = \frac{b}{c}$

20. $(2a^3 - 3b).(2a^3 + 3b) = 4a^6 + 6a^3b - 6a^3b - 9b^2 = (4a^6 - 9b^2)$

21. Usando 740 folhas de papel foram confeccionadas 140 cadernetas grossas e 100 cadernetas finas. Quantas folhas de papel foram usadas, separadamente, para cada caderneta, considerando que as grossas recebiam uma folha a mais que as finas?

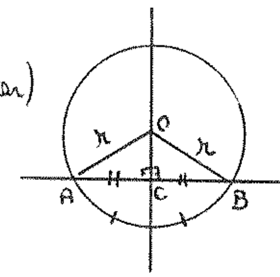
$740 = 140.(n+1) + 100.n$

$n = 2,5$

22. $(a - b)^2 = (a - b).(a - b) = a^2 - ba - ab + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$

SÉRIE XVII - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
PARTE II

23. **Prove o teorema:** Um diâmetro perpendicular à corda divide a corda e seus arcos ao meio. Pela definição de circunferência $\overline{OA} = OB$ (raio da circunferência) e existe ângulo reto ao se cruzarem (perpendicular) logo pelo LAL são triângulos congruentes $\overline{AC} = \overline{BC}$



24. Uma serra corta um metro de madeira por minuto. Quantos minutos serão necessários para que sejam cortados 16 metros de madeira ?

reverso

1m → 1 min

16m → x $x = 16$ m

25. $-2xy + x^2 + y^2 = x^2 - xy - xy + y^2 = x.(x-y) - y(x-y) = (x-y).(x-y) =$
$= (x-y)^2$

26. $(0{,}6\ m^n - \frac{1}{4} n^m)(0{,}6\ m^n + \frac{1}{4} n^m) = \frac{36}{100} m^{2n} + \frac{6}{40} m^n n^m - \frac{6}{40} n^m m^n - \frac{1}{16} n^{2m} =$

$\left(\frac{36}{100} m^{2n} - \frac{1}{16} n^{2m}\right)$

27. $16x^2 - 4xy^2 + 1/4y^4 = 16x^2 - 2xy^2 - 2xy^2 + \frac{1}{4}y^4 = 2x.(8x - y^2) - y^2.(2x - \frac{1}{4}y^2)$
$4x.(2x - \frac{1}{4}y^2) - y^2.(2x - \frac{1}{4}y^2) = (4x - y^2).(2x - \frac{1}{4}y^2) = (4x - y^2).(4x - y^2) =$
$= (4x - y^2)^2$

28. Uma fábrica deveria produzir *a* ferramentas em um dado período de tempo e, por isso, planejaram fazer *b* ferramentas por dia. Mas os operários excederam a cota e produziram *n* ferramentas, a mais que o planejado, por dia,. Quanto tempo antes do prazo final a fábrica completou o pedido?

a = cotas   b = ferramentas por dia

Produção: $a = b.t$

$a = (b+n).t1$

$t = \frac{a}{b}$. $t1 = \frac{a}{(b+n)}$

tempo antecipado = $t - t1$ ⟶ $\frac{a}{b} - \frac{a}{b+n}$

29. $(a + b - c).(a - b + c) = a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc - ac + bc - c^2$

$a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

30. $(x - y)^2 - 25y^8 = x^2 - 2xy + y^2 - 25y^8 = (y - x - 5y^4).(y - x + 5y^4)$

31. **Prove o teorema:** A reta tangente ao círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Se elas se cruzam não perpendicularmente ela cruzará a circunferência em mais de 1 (um) ponto.

32. Uma fábrica com um planejamento de produção de 1.280 máquinas-operatrizes, excedeu em 12,5% a produção prevista. Quantas máquinas a fábrica produziu ao todo?

1.280 ⟶ 100%

x ⟶ 112,5%

$x = 1.440$

33. $b^2 + (x - a)^2 - 2b(x - a) = b^2 + x^2 - 2ax + a^2 - 2bx + 2ba$

$a^2 + b^2 + x^2 - 2ax + 2ba - 2bx = a^2 + b^2 + x^2 - ax - ax + ba + ba - bx - bx$

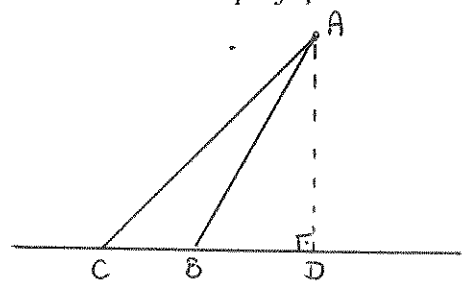
$(a - x + b).(a - x + b)$

$(a - x + b)^2$

34. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas são traçadas a partir de um único ponto em direção a uma linha reta, a linha oblíqua maior terá uma projeção maior na linha reta.

$\overline{AC} > \overline{AB}$ logo pelo teorema de Pitágoras $(h^2 = c^2 + c^2)$

$\overline{CD} > \overline{BD}$



35. $(a - x + y)^2 = (a - x + y).(a - x + y) = a^2 - ax + ay - ax + x^2 - xy + ay - xy + y^2 =$

$a^2 - 2ax + 2ay - 2xy + x^2 + y^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 2xy$

$a^2 + (x - y)^2 - 2a(x - y)$

36. Um pai tem 35 anos e o filho tem 5 anos de idade. Quantos anos transcorrerão até que o pai seja três vezes mais velho que o filho ?

Pai $= 35$

Filho $= 5$

$35 + n = 3.(5 + n)$

$n = 10$ anos

37. Foi colocada água em um tanque com capacidade de 80 litros, ocupando assim 2/5 de seu volume. Quantos litros de água foram colocados no tanque ?

$5/5 \rightarrow 80$

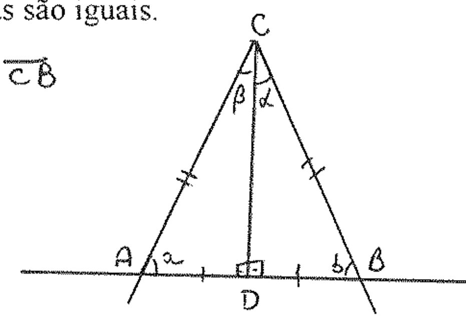
$2/5 \rightarrow x$

$x = 32$ litros

38. **Prove o teorema:** Se duas linhas oblíquas traçadas em direção a uma linha reta, a partir de um único ponto, tem projeções iguais, então essas linhas são iguais.

$\overline{AD} = \overline{DB}$ então $\alpha = \beta$ pelo caso LAA_o logo $\overline{AC} = \overline{CB}$

caso de congruência de triângulos



39. $1/25m^4 - 4n^2m^6 = \left(\frac{1}{5}m^2 - 2nm^3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}m^2 + 2nm^3\right) = \frac{1}{25}m^4 + \frac{2}{5}nm^5 - \frac{2}{5}nm^5 - 4n^2m^6$

$\frac{1}{25}m^4 - \frac{2}{5}nm^5 + \frac{2}{5}nm^5 - 4n^2m^6 = \frac{1}{5}m^2\cdot\left(\frac{1}{5}m^2 - 2nm^3\right) + 2nm^3\cdot\left(\frac{1}{5}m^2 - 2nm^3\right)$

$\left(\frac{1}{5}m^2 + 2nm^3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}m^2 - 2nm^3\right)$

40. Calcule a soma dos ângulos internos de um heptágono convexo.

heptágono $\rightarrow$ 7 lados $\therefore n = 7$

$Si = (n-2)\ 180°$

$Si = (7-2) . 180°$

$Si = 900°$

41. A distância entre as cidades A e B é x km. Exatamente no mesmo horário, parte um trem de cada estação em direção à outra. Um deles vai a uma velocidade de a km/h e o outro a b km/h. Quanto tempo levará para os dois trens se encontrarem ?

$A - a.t = B + b.t$

$A - B = t.(a+b)$

$t = \frac{A-B}{a+b}$

42. $(2a^3 - n^4)^2 = 4a^6 - 4a^3n^4 + n^8$

$(2a^3 - n^4).(2a^3 - n^4) = 4a^6 - 2a^3n^4 - 2a^3n^4 + n^8 = 4a^6 - 4a^3n^4 + n^8$

43. Usando 620 folhas de papel foram confeccionadas 200 cadernetas. As cadernetas grossas foram confeccionadas usando-se 5 folhas e meia e as finas usavam uma folha e meia. Quantas cadernetas de cada tipo foram produzidas ?

$200 = a + b$

$620 = 5{,}5a + 1{,}5 \cdot b$

$a = 80$

$b = 120$

44. $a^2 - b^2 = a^2 - ab + ba - b^2 = a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b)$

$(a+b) \cdot (a-b)$

45. Quantos graus contem 1/24 de um ângulo reto ?

$90^\circ : 24 = 3{,}75^\circ$

46. $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b) = (a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^2$

47. Dezesseis litros de água foram colocados em um tanque e essa quantidade encheu 2/5 do volume total do tanque. Qual o volume do tanque ?

$2/5 \longrightarrow 16$

$5/5 \longrightarrow x$

$x = 40$ litros