UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental

Shiderlene Vieira de Almeida Lopes

CAMPINAS

1997

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA
DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

L881r

Lopes, Shiderlene Vieira de Almeida
Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em criança do ensino fundamental / Shiderlene Vieira de Almeida Lopes. -- Campinas, SP : [s.n.], 1997.

Orientador : Rosely Palermo Brenelli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Piaget, Jean, 1896-1980. 2. Aritmética. 3. Ensino de primeiro grau. I. Brenelli, Rosely Palermo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental

Shiderlene Vieira de Almeida Lopes

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Shiderlene Vieira de Almeida Lopes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 30/06/1997

Assinatura: [signature]

Orientadora

CAMPINAS

1997

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Psicologia Educacional, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da **Prof^a. Dr^a. Rosely Palermo Brenelli**.

Comissão Julgadora:

Maria Thereza C. Souza

Márcia Regina F. de Brito

Roselys Brunelli

"... Para Elci, Olimpio e Sergio ..."

"O mais nobre emprego da mente humana é o estudo das obras de Seu Criador" - A Vós Confio-Ordem Rosacruz

AGRADECIMENTOS

À querida orientadora **Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli** pelo carinho, competência e dedicação demonstrados na realização deste trabalho.

Ao querido marido Sergio pela valiosa ajuda no trabalho de digitação desta tese. Pela compreensão e incentivo demonstrados ao longo dos anos que estamos juntos.

Aos professores: Dr. Fermino F. Sisto, Drª. Marcia Regina F. de Britto e Drª. Orly Z. Mantovani de Assis pelas sugestões oferecidas.

À Profª. Drª. Solange Franci Yaegashi que me incentivou a fazer o curso de mestrado em Psicologia Educacional na UNICAMP.

Aos professores e alunos da Escola Estadual Presidente Pedrosa, em Curitiba.

Às amigas Lia, Maristela e aos queridos primos Edson e Sonia pela gentil hospedagem em Campinas.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este estudo teve como objetivo verificar até que ponto crianças, pertencentes à segunda e terceira séries do ensino fundamental (N=12), se diferenciavam quanto ao desempenho e a compreensão em situações que envolviam operações de adição e subtração.

As avaliações referentes ao desempenho e à compreensao contaram com as seguintes situações: resolução escrita e mental das operações, resolução de problemas de adição e subtração, prova da noção das operações e análise dos procedimentos de resolução das operações. Neste estudo, o desempenho foi analisado sob o ponto de vista da obtenção de êxito ao passo que a compreensão foi analisada com relação à capacidade do sujeito em explicar os procedimentos empregados nas resoluções das operações.

A prova de "Inversão das Operações Aritméticas", organizada e descrita por Jean Piaget (1977/1995a), foi utilizada para verificar o nível de abstração reflexiva dos sujeitos desta pesquisa. Foram verificados três diferentes níveis de abstração entre os sujeitos: nível IB, IIA e IIB.

Nas situações que envolviam apenas o uso do algoritmo não se verificou diferenças entre os sujeitos, entretanto, nas situações que exigiam compreensão emergiram diferenças significativas.

Observou-se que os sujeitos não sabiam explicar, com o uso de fichas, os processos envolvidos na resolução das operações: empréstimos e reagrupamentos. Tal compreensão só foi possível para os sujeitos que possuiam um nível de abstração mais evoluído (N=2). Os demais sujeitos (N=10) "sabiam" solucionar operações de adição e subtração, contudo, não foram capazes de demonstrar, por meio da ação material, uma compreensão sobre tais conteúdos.

De acordo com os resultados obtidos concluiu-se que um bom desempenho não depende de um nível de abstração reflexiva mais evoluído, porém, a compreensão dos conteúdos em questão só se manifesta quando acompanhada de um nível de abstração superior.

ABSTRACT

The aim of this work is verify how different can be the achievement and the comprehension of first and second graders in primary Brazilian schools in face of addition and subtraction operations.

The evaluation tests concerning to the achievement and comprehension are measured by the following situations: mental and writing computation of operations, resolution of problems of addition and subtraction, notions of operations and analysis of the procedures involved in the solution of the operations. In this study, the achievement is analyzed considering if children can get the right answers to the problems, by the other hand the comprehension is analyzed by the capacity of children to explain the procedures involved in the operations solution.

The test of reflexive abstraction organized and described by Jean Piaget (1977/1995a), is applied to verify the different levels of children reflexive abstraction. It is verified three different levels: IB, IIA, IIB.

In situations that involve only the conventional use of algorithms we do not identify differences between children, however in situations where the comprehension is necessary, dramatic differences in the children's behavior is detected.

In this study we are able to verify that the majority of children do not know how explain, using chips, the processes involved in the resolution of the operations: regrouping and two column subtraction. That comprehension is possible only to children that are in a higher abstraction level (N=2). All others (N=10) know how perform the correct answer to addition and subtraction operations, but they are not able to show, using chips, a comprehension of those contents.

Based on the results of this work we can conclude that a good achievement can not be related to a higher reflexive abstraction level, however the com-

prehension about the contents only appears when children get a higher abstraction level.

SUMÁRIO

Pag.

LISTA DE FIGURAS

Pag.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

Pag.

1

Introdução

Do ponto de vista piagetiano, o conhecimento se dá a partir das constantes interações do sujeito com seu meio externo e por isso não é concebido como sendo uma simples cópia da realidade, ao contrário: *"conhecer o objeto é agir sobre ele. Conhecer é modificar, é transformar o objeto e entender os processos desta transformação"* (Piaget; 1964, P. 176).

Com base nos pressupostos teóricos piagetianos, que explicam a construção do conhecimento, muito se tem discutido sobre suas possíveis implicações pedagógicas. Embora não exista um "modelo pedagógico piagetiano" (Ramozzi-Chiarottino; 1980), e este não era o seu objetivo primordial, são inúmeros os trabalhos desenvolvidos que objetivam aplicar esta teoria no contexto educacional.

As implicações pedagógicas baseadas no construtivismo de Jean Piaget emergem à medida que seus estudos visam a explicar como o sujeito, a partir da interação com seu meio, é capaz de construir gradativamente estruturas de conhecimento cada vez mais ricas e melhor elaboradas.

Neste sentido, as palavras do próprio autor expressam o objetivo que deveria se reservar à educação: *"o ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender; aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola"* (Piaget; 1972/1975, P. 353).

A prática educacional deve, portanto, privilegiar um aluno ativo, construtor do seu próprio conhecimento, visando a *"formar a inteligência mais do* *que mobiliar a memória"* (Piaget; 1969/1972, P. 52).

No contexto da Educação Matemática, foco de interesse deste trabalho, as contribuições da teoria piagetiana são consideráveis. Assinala-se consideráveis pelo fato conceber o desenvolvimento como sendo uma *"construção espontânea e gradual das estruturas lógico-matemáticas"* (Piaget; 1973, P. 219). Tecendo algumas considerações sobre a Educação Matemática, Piaget salienta que é um grave erro limitar o ensino desta disciplina somente ao plano da linguagem, em detrimento das ações dos sujeitos, uma vez que estas são indispensáveis para sua compreensão.

Assim sendo, a Educação Matemática ao invés de *"converter os alunos em meros receptores conformistas"* (ibid.; P. 220), deve privilegiar as ações do sujeito, as relações que este pode criar à medida que interage com seu meio.

Os constantes fracassos quanto à Educação Matemática *"decorrem essencialmente do fato de se principiar pela linguagem (acompanhada de desenhos, de ações fictícias ou narradas, etc.) ao invés de o fazer pela ação real e material"* (Piaget; 1972/1994, P. 59).

Cabe aos programas pedagógicos organizarem situações que levem o aluno a investigar, a experimentar e não apenas a ouvir e a repetir sinais e técnicas que muitas vezes são destituídos totalmente de significado para ele. Um conteúdo só é significativo e compreendido pelo aluno à medida que este possa inseri-lo num sistema de relações, ou seja, assimilá-lo a outros conhecimentos previamente construídos. *"O que não podemos assimilar a qualquer esquema prévio carece totalmente de significado para nós"* (Coll; 1988, P. 149).

Mantovani de Assis (1976) ressalta que para aprender conceitos matemáticos elementares bem como as operações aritméticas fundamentais, o sujeito precisa estar de posse de estruturas as quais possibilitem a construção de tais conhecimentos. Caso contrário, estes não ultrapassarão o nível da memorização. Piaget (1979/1983) reforça esta idéia assinalando que a criança, em alguns anos, *"reconstrói* *espontaneamente as operações e estruturas básicas de natureza lógico-matemática, fora das quais não compreenderia nada do que se lhe ensinará na escola"* (P. 41).

As operações fundamentais de adição e subtração, por exemplo, são trabalhadas logo nas séries iniciais do ensino fundamental. Entretanto, estas só serão compreendidas pelos alunos se eles estiverem de posse de estruturas operatórias, as quais possibilitam uma real compreensão acerca de tais conteúdos. Isto se explica pelo fato de que o sujeito, a nível operatório, é capaz de fazer implicações lógicas, de organizar logicamente suas ações e assim pensar simultaneamente sobre os estados e as transformações de uma dada situação, não se atendo somente a seus aspectos figurativos.

Adicionar e subtrair com compreensão requer um laboriosa construção, pois há que se entender sobre: reagrupamentos, empréstimos, valor posicional da numeração e relação parte-todo. Esta construção, por sua vez, só é possível por meio do mecanismo de abstração reflexiva, o qual se apóia nas coordenações das ações e operações dos sujeitos.

Todavia, Coll (1988) chama a atenção para o fato de que, *"no sentido estrito, o aluno pode também aprender estes conteúdos sem lhes atribuir qualquer significado; é o que acontece quando aprende de uma forma puramente memorística e é capaz de repeti-los ou de utilizá-los mecanicamente sem entender em absoluto o que está dizendo ou fazendo"* (P. 148).

Uma das preocupações deste estudo, com relação à adição e subtração, centra-se em verificar se os sujeitos compreendem o que fazem quando solucionam tais operações ou se apenas fazem uso de uma resolução mecânica, puramente memorística e destituída de significado.

Neste sentido, são apresentadas aos sujeitos situações-problema que envolvem as operações de adição e subtração. Tais situações visam a avaliar o desempenho dos sujeitos, num primeiro momento, verificando se estes são capazes de resolver as operações de forma escrita e mental, sem avaliar a compreensão. Num segundo momento, avaliar, por meio de procedimentos, se os sujeitos são capazes de explicar e demonstrar pela ação material sua compreensão a respeito das referidas operações.

Além da avaliação concernente ao conhecimento aritmético de adição e subtração, são verificados também os níveis de abstração reflexiva dos sujeitos nas provas de inversão das operações aritméticas. Isto porque, do ponto de vista construtivista, tais conteúdos são construídos por meio do mecanismo de abstração reflexiva, sendo esta, a fonte do conhecimento lógico-matemático.

Desta forma, o que se pretende verificar é até que ponto as crianças, apresentando diferentes níveis de abstração reflexiva, se diferenciam quanto ao desempenho e à compreensão em situações que envolvam operações de adição e subtração.

Para alcançar os propósitos do presente estudo será apresentado um recorte da teoria piagetiana, o qual possibilitará a compreensão a respeito do conhecimento aritmético de adição e subtração estar apoiado num processo construtivo por meio de abstrações reflexivas.

2

Pressupostos Teóricos

Do ponto de vista da teoria piagetiana, e diferentemente de outros posicionamentos teóricos, o desenvolvimento não é visto como um acúmulo de sucessivas aprendizagens. Ao contrário, o desenvolvimento das estruturas do conhecimento explica e determina o processo de aprendizagem. O desenvolvimento é visto como um processo espontâneo e temporal e a aprendizagem como sendo "provocada"; provocada por situações, por exemplo, um professor. *"Em geral, é provocada como o oposto de espontâneo. Ademais, é um processo limitado a uma só estrutura ou a um só problema"* (Piaget; 1964, P. 176).

A aprendizagem é, neste sentido, subordinada ao desenvolvimento espontâneo das estruturas do conhecimento e é este desenvolvimento espontâneo *"que constitui a condição preliminar evidente e necessária para o desenvolvimento escolar"* (Piaget; 1972/1975, P. 340). Isto porque, para que o sujeito possa compreender os conteúdos que são trabalhados no contexto escolar, ele precisa estar de posse de estruturas que permitam esta compreensão, ou seja, é preciso que o sujeito disponha de instrumentos cognitivos que lhe possibilitem a assimilação de novos conhecimentos.

Ao discutir a aprendizagem, Piaget (1974) distingue a aprendizagem *lato sensu* e *stricto sensu*. A primeira refere-se à aprendizagem das estruturas lógicas, e comporta os mecanismos internos do processo de equilibração. A segunda se baseia em experiências físicas, fornecendo ao indivíduo somente a constatação dos fatos. Apesar desta distinção, para o autor a aprendizagem *"não depende somente dos dados fornecidos pela experiência externa mas, igualmente, de um recurso às condições de organização interna"*.

A aprendizagem *stricto sensu* refere-se, portanto, à compreensão imediata dos fatos em virtude da experiência, ao passo que a aprendizagem *lato sensu* *"é a união das aprendizagens stricto sensu e dos processos de equilibração"* (ibid.; P. 54), comportando, assim, uma compreensão gradual. Portanto, uma aprendizagem só é significativa ao sujeito se esta recorrer aos processos de auto-regulação interna, levando o sujeito a reagir às perturbações que lhes são impostas a partir de suas interações com seu meio físico e social - *"no sentido mais amplo, a aprendizagem é um processo adaptativo se desenvolvendo no tempo"* (ibid.; P. 40).

Os trabalhos de Smedslund (1961) sobre a conservação do peso tinham como objetivo fazer com que as crianças adquirissem esta conservação utilizando-se de uma balança. Por meio da constação dos dados, evidenciados pelo fato de se verificar o peso dos objetos na balança, alguns sujeitos admitiram a igualdade dos pesos, contudo, não obtiveram progressos em relação à transitividade, resistindo a esta noção.

Isto reforça a idéia de que a aprendizagem das estruturas lógicas não se dá por uma leitura pura e simples dos dados externos, por uma cópia figurativa. Ao contrário, faz-se necessário a intervenção de processos de organização interna. Os estímulos externos tornam-se significativos *"apenas à medida em que há uma estrutura a qual permite sua assimilação, uma estrutura a qual possa integrar este estímulo"* (Piaget; 1964, P. 182).

Ressaltando os pressupostos piagetianos, Inhelder, Sinclair e Bovet (1974/1977), promoveram situações que privilegiavam a capacidade do sujeito em compensar as perturbações impostas pelo meio, ou seja, de superar os conflitos e contradições impostos pelas situações de aprendizagem, favorecendo, assim, a construção de novas noções. As situações de aprendizagem levavam sempre em consideração a idéia de que *"para que um novo instrumento lógico se construa, é preciso sempre instrumentos lógicos preliminares"* (Piaget; 1972/1975, P. 343).

Diante disso, Castorina et al. (1984/1988) e Coll destacam que a escola deveria considerar o estágio de desenvolvimento em que se encontram os alunos, para só então elaborar os conteúdos a serem trabalhados; conteúdos que, desta forma, seriam passíveis de assimilação por parte dos alunos. Neste sentido, afirma Coll (ibid.): *"a educação terá como meta contribuir para que os alunos progridam através dos sucessivos estágios ou níveis que configuram o desenvolvimento"* (P. 133).

Considerando as premissas que foram apresentadas acerca da relação entre a questão do desenvolvimento e da aprendizagem, constata-se que a aprendizagem dos conteúdos matemáticos de adição e subtração só é possível à medida que o indivíduo já esteja de posse de estruturas lógicas que a possibilitem. Tais conteúdos são trabalhados nas séries iniciais do ensino fundamental, período que abrange dos 7 aos 8 anos de idade, em média.

Teoricamente, nesta fase de seu desenvolvimento, a criança encontra-se no período das operações concretas. Este período, obviamente, não pode ser definido em termos de idade cronológica, pois, esta pode variar de indivíduo para indivíduo, podendo haver atrasos e avanços devido a muitas variáveis: experiências passadas, cultura em que vive. As pesquisas de Mantovani de Assis (1976) relatam que as crianças brasileiras apresentam um atraso com relação à construção das estruturas operatórias, e isto vem explicar os fracassos destas nas atividades propostas no contexto escolar.

O período das operações concretas é caracterizado pela capacidade de "operar". Operar significa orientar suas ações no âmbito da reversibilidade. De acordo com Piaget (1966/1994a), *"as operações consistem, assim, em transformações reversíveis, podendo essa reversibilidade consistir em inversões ou em reciprocidade"* (P. 82).

O sujeito operatório é aquele capaz de organizar logicamente suas ações, relacionando e organizando todas as variáveis possíveis de uma dada situação em um todo. Há, portanto, uma lógica subjacente às ações do sujeito, fazendo com que estas últimas sejam coordenadas sobre os termos de seus estados e transformações.

O que difere uma conduta pré-operatória de uma operatória é exatamente o fato desta última ser conservadora, ou seja, *"após uma transformação alguma coisa se conserva. No estágio pré-operatório, toda transformação é concebida como uma modificação dos dados ao mesmo tempo, sem que nada permaneça ou se conserve invariável"* (Mantovani de Assis; 1976, P. 18).

Convém ressaltar que, no período operatório concreto, a lógica que guia as ações do sujeito não está pautada, ainda, sobre enunciados verbais, mas sim sobre objetos manipuláveis (Piaget; 1972/1975).

Diante de tal concepção, pode-se considerar que as persistentes dificuldades dos alunos em aprender matemática consistem no fato de que o trabalho pedagógico, desenvolvido pelos educadores, parte do pressuposto que a matemática é uma disciplina que pode ser assimilada por uma simples transmissão verbal, por uma simples constatação acerca da realidade externa. Entretanto, o desenvolvimento das estruturas lógico-matemáticas requer uma construção gradativa e não uma mera cópia da realidade.

"A verdadeira causa dos fracassos da educação formal, diz Piaget, decorre essencialmente do fato de se principiar pela linguagem (acompanhada de desenhos, de ações fictícias ou narradas, etc.) ao invés de o fazer pela ação real e material" (Piaget apud Ramozzi-Chiarottino; 1980, P. 97).

De acordo com a teoria piagetiana, a criança é construtora do seu próprio conhecimento e esta construção depende da constante interação do indivíduo com seu meio exterior. *"É necessário que os conhecimentos que a criança adquire sejam construídos por ela mesma, em relação direta com as operações que é capaz de fazer sobre a realidade; com as relações que está em condições de captar, compôr e transformar; com os conceitos que constrói progressivamente"* (Vergnaud; 1985/1991, P. 9).

O desenvolvimento gradativo das estruturas da inteligência é explicado pela teoria piagetiana através de um processo de equilibração. Estas estruturas não se encontram pré-formadas no indivíduo, elas se constroem à medida que este interage com seu meio.

Neste processo, não se pode deixar de ressaltar o papel fundamental das assimilações e acomodações; as assimilações como sendo a incorporação de coisas e pessoas à atividade do sujeito e as acomodações como sendo o reajuste desta última em função das transformações ocorridas (Piaget; 1964/1995). É, portanto, a partir destas invariantes funcionais que os sujeitos se adaptam ao seu meio. Neste sentido, Piaget (1975/1976) argumenta que o conhecimento se dá pela capacidade do indivíduo em se adaptar ao seu ambiente, ou seja, pela sua capacidade de reagir às perturbações impostas pelo meio.

À medida que compensa as perturbações exteriores, o indivíduo aprimora cada vez mais suas estruturas de conhecimento, atingindo um novo equilíbrio, um novo patamar, sem contudo, desprezar os equilíbrios anteriormente alcançados.

Segundo Piaget (ibid.), as perturbações impostas pelo meio apresentam-se quanto à sua variedade sob duas formas: resistências do objeto e lacunas.

A resistência do objeto aparece como um obstáculo às assimilações, algo que se opõe, e são as causas de fracassos ou de erros. O *feedback* negativo - correção da ação - é um dos mecanismos da regulação que intervém nesta variedade de perturbação.

As lacunas *"se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema"* (ibid.; P. 25), é a ausência de um objeto para concluir uma ação ou é a carência de um conhecimento anterior e que é necessário. O *feedback* positivo - reforço da ação - é um dos mecanismos da regulação que intervém nesta variedade de perturbação.

As regulações são, portanto, reações a estes tipos de perturbações.

Entretanto, convém ressaltar que nem toda perturbação acarreta uma regulação. Não se fala em regulações à medida que a perturbação provoca apenas uma repetição da ação, sem nenhuma modificação desta, ou ainda, quando leva a um cessar da mesma.

Segundo Piaget (apud Brenelli; 1993), as regulações comportam compensações e, desta forma, assumem um caráter construtivo das estruturas do conhecimento. Portanto, *"se uma perturbação não produz uma regulação, consequentemente não haverá compensação"* (P. 29).

Considerando que as regulações podem levar a compensações, ações no sentido contrário à perturbação que tendem a anulá-la ou neutralizá-la, logo, as regulações por *feedbacks* negativos desempenham um papel na qualidade de instrumentos de correção.

De acordo com Piaget (1975/1976), geralmente, as regulações por *feedbacks* negativos, conduzem a compensações que comportam duas classes distintas: *"as compensações por 'inversão', que consistem na anulação da perturbação, e as compensações por 'reciprocidade', que diferenciam o esquema para acomodá-lo ao elemento inicialmente perturbador"* (P. 31). As regulações por *feedbacks positivos* também conduzem a compensações, exceto em casos nos quais há reforço do erro.

Este progresso lento e gradativo das estruturas do conhecimento explicado pelas leis da equilibração, tem sua fonte nos desequilíbrios gerados a partir das trocas do indivíduo com o seu meio exterior. Os desequilíbrios assumem um caráter motivacional e *"obrigam um sujeito a ultrapassar seu estado atual e a procurar o que quer que seja em direções novas"* (ibid.; P. 18).

A equilibração, portanto, conduz à construção de estruturas cada vez mais complexas e melhor elaboradas que compreendem desde as organizações práticas até as hipotético-dedutivas. *"O desenvolvimento é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior"* (Piaget; 1964/1995, P. 13).

Considerando que o desenvolvimento das estruturas do conhecimento caminha no sentido de uma equilibração progressiva, *"a equilibração sendo a compensação por reação do sujeito às perturbações exteriores, compensação que atinge a reversibilidade operatória no fim desse desenvolvimento"* (Piaget; 1972/1975, P. 352-53), cabe ao educador organizar um ambiente escolar favorável, onde o aluno possa estabelecer trocas com seu meio, compensando as possíveis perturbações que possam ocorrer no percurso destas "trocas". É papel do professor criar situações nas quais os alunos possam pesquisar, observar e estruturar suas próprias ações.

A construção das estruturas cognitivas por meio de um processo de equilibração foi explicitado, pois considera-se que estes pressupostos teóricos são de extrema importância para justificar a premissa de que o conhecimento aritmético de adição e subtração não é adquirido por uma transmissão verbal, mas, que se trata eminentemente, de uma construção gradativa das estruturas operatórias que possibilitam tal conhecimento.

Entretanto, para elaborar uma prática educacional voltada a privilegiar a construção dos conhecimentos lógicos, e não sua internalização por meio de regras e símbolos, faz-se necessário distinguir outros aspectos da teoria piagetiana.

Piaget (apud Kamii; 1991) estabelece uma distinção acerca de três tipos de conhecimento: conhecimento físico, conhecimento social e conhecimento lógico-matemático.

Quando constatamos a cor de um objeto, seu peso, sua forma, etc., estamos fazendo tais constatações a partir da realidade externa, são fatos que podem ser observados nos objetos e trata-se, portanto, de um conhecimento físico, que ocorre por meio de abstrações empíricas. As abstrações empíricas apóiam-se nas informações materiais dos objetos, em suas características físicas (Piaget; 1977/1995a). *"A experiência sobre o objeto conduzindo a uma abstração a partir do objeto, assim é a experiência física, que é propriamente uma descoberta das propriedades das coisas"* (Piaget; 1973/1978, P. 36).

O conhecimento social refere-se às convenções criadas socialmente. Um exemplo bem interessante sobre o conhecimento social é o de crianças, até mesmo muito novas, conseguirem contar de 1 a 10. Muitos acreditam que só porque elas recitam os números, já têm construído este conceito. Contudo, este tipo de conhecimento não deve ser confundido com o conhecimento lógico-matemático, uma vez que este não se apóia em símbolos e convenções. Desta maneira, recitar os números de 1 a 10 trata-se de um conhecimento social.

Diferentemente dos anteriores, o conhecimento lógico-matemático tem sua fonte nas relações que o indivíduo pode criar. Por exemplo, quando dois objetos são comparados quanto ao seu peso ou tamanho, ou até mesmo quando as diferenças entre eles são estabelecidas. Para haver esta diferença, é preciso estabelecer uma relação. Esta diferença não está no objeto em si, mas é fruto da relação que se estabelece entre este objeto e um outro qualquer. O sujeito *"faz abstração de determinadas propriedades, partindo das próprias ações e não a partir do objeto"* (Piaget; 1973/1978, P. 36). Esta relação que engendra o conhecimento lógico-matemático, apóia-se nas abstrações reflexivas.

De acordo com Piaget (1977/1995a), a abstração reflexiva é fonte do conhecimento lógico-matemático porque pressupõe o estabelecimento de relações e porque apóia-se nas coordenações das ações ou operações dos sujeitos.

A abstração reflexiva é constante durante todos os períodos de desenvolvimento, intervindo em toda e qualquer construção do conhecimento. Convém destacar que nos níveis das organizações práticas (sensório-motoras), este tipo de abstração consiste na coordenação dos esquemas. Tal mecanismo também intervém no momento em que há representação por meio de imagens; a criança pode evocar objetos e situações ausentes.

A nível das operações concretas, a abstração reflexiva apresenta-se sob as coordenações das ações do sujeito, ações já interiorizadas e reversíveis, ou seja, operações. Embora a abstração reflexiva, durante este período, já admita a coordenação de operações, esta, contudo, ainda é obtida por meio de manipulações dos objetos. Isto não significa que se trata de uma abstração empírica. Ao contrário, o sujeito utiliza-se de objetos manipuláveis, entretanto, as informações são abstraídas a partir das coordenações das ações sobre os mesmos. Este tipo de abstração é denominada por Piaget (ibid.) de abstração pseudo-empírica, a qual não deixa de ser um caso particular de abstração reflexiva.

Esta premissa ressalta a importância de o professor, nas séries iniciais do ensino fundamental, organizar sua prática docente a partir de materiais concretos, deixando o uso exclusivo de sinais para níveis posteriores, respeitando, assim, o curso do desenvolvimento do próprio aluno.

"O matemático não acostumado à psicologia pode, por outro lado, temer que todo exercício concreto seja um obstáculo à abstração, ao passo que o psicólogo está habituado a distinguir cuidadosamente a abstração a partir dos objetos (fonte de experiência física, estranha à matemática) e a abstração a partir das ações, fonte da dedução e da abstração matemática" (Piaget; 1969/1972, P. 48).

Coll, apoiado em Piaget, ressalta que a experiência física não é suficiente para a aquisição das estruturas operatórias, visto que se necessita da *"intervenção de uma atividade lógico-matemática baseada na coordenação dos esquemas e ações e não somente na leitura das propriedades físicas dos objetos"* (P. 129).

O mecanismo próprio da abstração reflexiva comporta dois aspectos solidários e inseparáveis (Piaget; 1977/1995a). Por um lado, uma projeção (réfléchissement) sobre um novo plano daquilo que foi retirado do plano anterior. Por outro, uma reorganização, comportando uma reconstrução (reflexion) dos elementos transferidos do plano inferior para um novo patamar. Ambos constituem o progresso das estruturas lógico-matemáticas, uma vez que abrem novos caminhos para a elaboração de estruturas cada vez mais ricas e complexas. *"Daí resultam novas combinações que podem conduzir à construção de novas operações montadas sobre as precedentes, o que constitui a marcha habitual do progresso matemático (exemplo na criança: uma* *reunião de somas engendra uma multiplicação)"* (Piaget; 1979/1983, P. 42).

Este progresso, próprio da abstração reflexiva, pode ser entendido por meio do equilíbrio gradual entre as diferenciações e as integrações. Este equilíbrio é explicado por Piaget (1977/1995a) da seguinte forma: *"a abstração consiste, por si mesma, com efeito, numa diferenciação, porquanto uma característica para transferí-la, e uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração a novas totalidades"* (P. 284).

Portanto, o "reflexionamento" e a "reflexão", que engendram o mecanismo de abstração reflexiva, são responsáveis pela formação de novidades, e mais, caracteriza o próprio processo de desenvolvimento gradual das estruturas do conhecimento. A abstração reflexiva é, assim, a fonte da construção do conhecimento lógico-matemático.

O estudo realizado por Piaget (Inversão das Operações Aritméticas, 1977/1995a) teve como objetivo analisar, sob o ponto de vista das abstrações, as relações de inversão que caracterizam as operações aritméticas. Para tanto, foram propostas a execução de três diferentes tarefas: montagem do cogumelo; montagem do cubo e problemas de cálculo ($n' = 2(n + 3) + 5$).

A montagem do cogumelo foi solicitada porque requer uma atenção especial do sujeito com relação à ordem necessária tanto para sua construção, quanto para sua demolição. E é exatamente as questões relativas à ordem e sua necessidade, levada em consideração pelos sujeitos, que justifica o desenvolvimento e análise desta tarefa específica.

A montagem de um cubo, utilizando-se de oito cubos menores, objetivou chamar a atenção dos sujeitos para uma ordem não necessária a sua construção, diferentemente da montagem do cogumelo. A comparação feita entre estas duas construções requer que o sujeito faça reflexões com relação à ordem necessária e não necessária das mesmas.

Os problemas de cálculo foram propostos porque exigem que o sujeito, a partir de uma atividade que lhe recorde um jogo, seja capaz de inverter as operações aritméticas e manter a sua ordem quando desta inversão, para só então obter o êxito. Esta prova específica, de descobrir n a partir de n', requer sua explicação pela inversão necessária das operações propostas. O sujeito precisa refletir acerca da necessidade desta inversão das operações e desta forma, abstrair as relações existentes entre a montagem do cogumelo e do cubo, ou seja, de uma ordem necessária (cogumelo) e desnecessária (cubo).

Piaget (1977/1995a) categorizou seus sujeitos em diversos níveis de abstração reflexiva: IA, IB, IIA, IIB e III. As condutas características de cada um destes níveis descritos e encontrados pelo autor, servirão de base para o cumprimento de um dos objetivos propostos nesta pesquisa, que consiste em identificar os diferentes níveis de abstração dos sujeitos na prova de inversão das operações aritméticas.

Todos os aspectos explicitados acerca da teoria piagetiana, fundamenta ainda mais a idéia de que a aprendizagem dos conteúdos de adição e subtração não se resume a uma simples interiorização e desta forma, são cada vez constantes as pesquisas que destacam a necessidade de se repensar em como a matemática deveria ser trabalhada pelos educadores.

3

Levantamento Bibliográfico

No contexto da Educação Matemática, as pesquisas se destacam à medida que enfatizam a necessidade de se repensar as bases pedagógicas para o ensino desta disciplina.

Pesquisas de cunho construtivista ressaltam a importância de o aluno construir seu próprio conhecimento, uma vez que partem do pressuposto de que o ensino da matemática não se dá por memorização de técnicas.

Discutindo sobre as perspectivas construtivistas da aprendizagem da matemática, Wheatley (1991) argumenta que a abstração reflexiva é a base para tal aprendizagem, neste sentido *"a matemática é efetivamente aprendida apenas por experimentação, questionamentos, reflexões, descobertas, invenções e discussões"* (P. 13).

Pesquisas referentes às operações de adição e subtração, organizadas e selecionadas para este trabalho, inserem-se na mesma premissa enfatizada por Wheatley (ibid.), pois discutem sobre a importância de se compreender questões que são pertinentes à resolução e ao entendimento de situações-problema que requerem o uso de tais operações.

Sastre (1980), em pesquisa desenvolvida na Espanha, verificou que as operações de adição, já "aprendidas" e bem trabalhadas no âmbito escolar, não são reconhecidas pelo sujeito como uma atividade possível de se realizar fora de sala de aula. A noção implícita a esta operação - "reunir", "juntar" - não é compreendida pelo sujeito. O significado da adição se restringe apenas à descrição do algoritmo, tal como: "somar é fazer $2+2=4$", possível apenas de ser efetuado em sala de aula.

Sastre (ibid.) concluiu que o sujeito, mesmo sendo capaz de solucionar as operações propostas no contexto escolar, não consegue estabelecer relações entre este conteúdo apresentado na escola com atividades concretas, realizadas num contexto prático, a partir das ações do próprio sujeito (reunião de objetos).

Kamii e Lewis (1991), em pesquisa realizada com crianças de segunda série de escolas dos Estados Unidos, obtiveram resultados relevantes em relação à utilização de práticas pedagógicas baseadas no construtivismo. Os sujeitos pertencentes a esta pesquisa haviam sido instruídos em dois programas pedagógicos diferentes. O primeiro grupo fazia parte de uma instrução que Kamii denominou como sendo "tradicional"; com base no ensino de técnicas, algoritmos e exercícios. O segundo grupo fazia parte de um programa "construtivista" de ensino, com instrução baseada na utilização de jogos e situações cotidianas, em que os sujeitos eram encorajados a inventar seus próprios procedimentos para a resolução de operações.

Os dois grupos foram avaliados em situações que envolviam: valor posicional, resolução de operações, problemas de enredo e resolução mental de operações. As situações-problema apresentadas exigiam diferentes tipos de soluções; situações que podiam ser resolvidas mediante a utilização de uma técnica específica e situações que exigiam a compreensão dos sujeitos em relação aos processos matemáticos envolvidos nos problemas.

Constatou-se que nas situações que exigiam apenas a utilização de uma determinada técnica, o primeiro grupo de sujeitos, instruídos de maneira tradicional, teve um ótimo desempenho, sugerindo até que este processo de ensino-aprendizagem fosse mais efetivo do que o construtivismo, uma vez que os sujeitos integrantes desta proposta obtiveram resultados iguais ou levemente inferiores. Porém, quando os sujeitos foram avaliados em situações que exigiam a compreensão acerca dos processos envolvidos nos problemas, os resultados dos sujeitos instruídos de forma tradicional, foram bem inferiores àqueles obtidos com os sujeitos inseridos em uma proposta construtivista.

A análise dos dados coletados por Kamii e Lewis (1991) concluiu que os sujeitos pertencentes a uma proposta de ensino tradicional utilizam-se apenas de regras que lhes são ensinadas; não possuem compreensão sobre as operações, resolvendo-as somente de forma mecânica; não inventam novos procedimentos para solucioná-las. Em contrapartida, o grupo construtivista demonstrou saber solucionar as situações propostas e também compreender, por meio de procedimentos por eles construídos, aquilo que estão fazendo.

Com relação aos diferentes procedimentos inventados pelos próprios sujeitos para solucionar operações de adição e subtração, Madell (1985), mediante pesquisa realizada nos Estados Unidos, verificou que *"as crianças não apenas podem mas deveriam criar seus próprios procedimentos"* (P. 20).

Quando encorajados a inventar seus próprios procedimentos de resolução de operações, os sujeitos iniciam seus cálculos da esquerda para direita, somando e diminuindo primeiro a coluna da esquerda e depois a da direita, diferente da forma como os cálculos são realizados convencionalmente. Para solucionar a operação $53 - 24$, por exemplo, foram identificados os seguintes procedimentos:

$50 - 20 = 30$

$30 - 4 = 26$

$26 + 3 = 29$

$50 - 20 = 30$

$4 - 3 = 1$

$30 - 1 = 29$

A partir dos dados Madell concluiu que *"sem uma instrução explícita no uso de algoritmos, os sujeitos podem desenvolver procedimentos bem sofisticados"* (ibid.; P. 22), não se prendendo apenas à memorização de regras para solucionar problemas de adição e subtração.

Kamii et al. (1993) também confirmaram a hipótese de que os sujeitos são capazes de inventar seus próprios procedimentos para solucionar operações de adição e subtração, à medida que são encorajados a pensar e a discutir seus pontos de vista com a classe. Argumentaram que, quando inventam seus procedimentos, os sujeitos são capazes de entender os processos matemáticos que envolvem as operações, não se restringindo apenas ao uso de algoritmos.

Para a resolução da operação $18 + 17$, Kamii at al. (ibid.) identificaram três procedimentos diferentes, inventados pelas próprias crianças. Assim como os resultados obtidos por Madell (1985), os sujeitos também começam a solucionar a operação da esquerda para a direita:

$10 + 10 = 20$

$7 + 7 = 14$

$14 + 1 = 15$

$20 + 10 = 30$

$30 + 5 = 35$

Kamii at al. (ibid.) concluiram que a vantagem de se incentivar as crianças a inventarem seus próprios procedimentos se faz por três motivos: *"as crianças não têm que renunciar aos seus próprios pensamentos; seu entendimento sobre o valor posicional é enriquecido ao invés de se enfraquecer pelo uso do algoritmo; as crianças desenvolvem um melhor senso numérico"* (P. 201).

Com relação aos diferentes procedimentos que os sujeitos são capazes de construir, Vergnaud (1979), discutindo acerca da complexidade da aquisição de conceitos matemáticos, esboçou sua opinião com as seguintes palavras: *"para uma mesma tarefa, mesmo problema ou mesma situação, os alunos oferecerão uma variedade de procedimentos. Não há apenas uma maneira de conseguir a resposta certa, não há apenas uma resposta errada e não há apenas uma forma de se obter a mesma resposta errada. Estes diferentes procedimentos, certo ou errado, não são* *equivalentes do ponto de vista cognitivo"* (P. 266).

Wearne e Hiebert (1994) verificaram que, mesmo quando os sujeitos apresentam um mesmo resultado, correto ou incorreto, para uma determinada operação, suas explicações e sua compreensão podem variar consideravelmente quando são solicitados a explicar sobre o que fizeram.

Tomaram parte na pesquisa desenvolvida por Wearne e Hiebert (ibid.), dois sujeitos de segunda série de turmas diferentes. O primeiro sujeito recebia uma instrução voltada para a prática de muitos exercícios, sem um contexto significativo; o segundo aplicava grande parte das aulas de matemática na invenção de procedimentos e em discussões com o grupo. Solicitou-se que resolvessem um problema básico de adição: *"Na cantina da escola há 347 sorvetes em uma caixa e 48 sorvetes em uma outra caixa. Quantos sorvetes há nas duas caixas?"*

Ambos obtiveram a resposta correta, porém, quando se pediu para explicar o que haviam feito, constatou-se duas formas diferentes de explicação. O primeiro explicou por meio da descrição do algoritmo, assim como sua professora havia explicado. Em contrapartida, na explicação do segundo, evidenciou-se que este compreendia o valor posicional da numeração e tinha uma forma própria para explicar, sem se ater à descrição do algoritmo.

Dois anos mais tarde, os mesmos sujeitos foram submetidos a uma nova investigação. Agora, na resolução de um problema envolvendo a adição de números decimais. O primeiro sujeito errou o problema, desconsiderou a existência da vírgula e o resolveu como uma simples adição de números inteiros, descrevendo o algoritmo. O segundo sujeito obteve a resposta correta, alinhando os números de forma exata e, em sua explicação, constatou-se que compreendia o que estava fazendo.

Wearne e Hiebert (1994) argumentaram que o ponto principal deste trabalho não consistiu no fato de um sujeito ter obtido a resposta correta em duas situações e o outro só em uma. O que se concluiu foi a importância de o sujeito ter compreensão sobre o que está fazendo, sobre os processos que envolvem as operações as quais foi solicitado resolver.

O primeiro sujeito *"dependia das instruções do professor para saber o que fazer e não parecia entender muito bem acerca do procedimento. O segundo, por outro lado, dependia do seu próprio conhecimento sobre como as quantidades podem ser combinadas.(...) Para o primeiro, a matemática está começando a parecer como uma série de regras que são difíceis de lembrar e aplicar quando um problema um pouquinho diferente é introduzido. Para o segundo, matemática é resolver problemas de uma maneira que faça sentido"* (ibid.; P. 272-3).

Damm (1994), com base nas pesquisas realizadas por Vergnaud com relação aos problemas de adição e subtração, comprovou que os sujeitos têm muita dificuldade em passar do enunciado verbal dos problemas para os seus cálculos numéricos. O maior número de erros constatados foram nos problemas que apresentavam, em seu enunciado, verbos antônimos aos da operação necessária à sua resolução, ou como afirmou Damm: *"existe uma correspondência direta e espontânea por parte do aluno entre o sentido do verbo 'ganhar ' e da operação + e do verbo 'perder' e da operação −"* (ibid.; P. 8).

A pesquisa realizada por Damm (ibid.) verificou que os sujeitos não tomam conhecimento de todos os dados que são pertinentes ao cálculo numérico dos problemas e desta forma não obtêm êxito. Contudo, sua proposta de trabalho centrou-se em amenizar estas dificuldades. Com a apresentação de esquemas e ilustrações, os quais visavam a chamar a atenção dos sujeitos para os estados e as transformações ocorridas nos problemas, Damm verificou um aumento significativo quanto ao número de acertos dos sujeitos nos problemas propostos, concluindo que: *"a compreensão de um enunciado de problema consiste na seleção dos dados pertinentes para a resolução e na organização destes dados"* (ibid.; P. 15).

Ainda com relação aos problemas aditivos, Busquets Prat (1994) verificou o quão é difícil para as crianças formularem problemas escritos a partir de simples operações de adição com diferentes níveis de complexidade, ou seja, cada operação tinha a incógnita situada em diferentes termos.

$4 + 5 =$

$4? = 6$

$? + 3 = 5$

Busquets Prat (ibid.) identificou que os sujeitos sabiam das respostas correspondentes a cada operação proposta, contudo, nenhum dos sujeitos avaliados conseguiu elaborar, nas três situações, o enunciado dos problemas que expressariam a operação numérica dada. A autora salientou que tais situações requerem que o sujeito *"organize a informação que ocasiona a expressão matemática oferecida"* (ibid.; P. 26) e mesmo sabendo resolver as operações, os sujeitos não conseguem organizar os dados para saber que pergunta precisa elaborar para que o enunciado de seu problema tenha sentido.

Como forma de remediar estas dificuldades, Busquets Prat (ibid.) propôs que as práticas educacionais deveriam voltar-se para a compreensão e não para a resolução de problemas estereotipados, os quais podem ser resolvidos por uma aplicação mecânica de uma dada operação. Além disso, ressaltou a importância de incentivar os alunos a formularem perguntas, a formularem problemas e não apenas darem respostas, pois como explicitou um de seus sujeitos: -**"Caramba! É mais difícil perguntar que responder."**

Franch (1983), em um estudo realizado com 120 sujeitos entre 7 e 9 anos, buscou analisar o conhecimento aparente e o conhecimento real que as crianças apresentavam em relação ao valor posicional da numeração. Denominou-se conhecimento aparente porque "aparentemente" os sujeitos pareciam compreender o valor posicional da numeração, uma vez que resolviam corretamente operações que engendravam reagrupamentos e empréstimos.

As situações que requeriam a resolução escrita de operações de adição e subtração e a leitura de diferentes quantidades foram facilmente solucionadas pelos sujeitos, sugerindo uma compreensão sobre o valor posicional da numeração. Entretanto, Franch (ibid.) verificou que a obtenção do êxito nestas duas situações não era indício de um real entendimento sobre o valor posicional. Quando solicitou que os sujeitos representassem, por meio de desenhos, o valor de cada quantidade dos números que haviam lido, uma minoria (N=4) conseguiu demonstrar o valor relativo às dezenas e unidades. Muitos desenharam os elementos que correspondiam aos valores absolutos das dezenas e unidades; por exemplo, fizeram três flores para representar o 30 (dezenas) e uma flor para representar o 1 (unidade).

Franch (ibid.) concluiu que embora os sujeitos soubessem resolver operações com empréstimos e reagrupamentos e apesar de serem capazes de ler corretamente os números, estes, em sua maioria, não compreendiam o valor posicional da numeração.

Zunino (1995), também em uma pesquisa sobre o valor posicional da numeração, avaliou o significado que os sujeitos atribuiam ao "vai 1" da operação de adição e ao "empresta 1" da operação de subtração. Foram solicitadas as resoluções de operações de adição e subtração a crianças de terceira série do ensino fundamental, em seguida, o experimentador fez perguntas referentes aos reagrupamentos e empréstimos.

Os dados apresentados por Zunino (ibid.) relataram que os sujeitos não possuiam dificuldades para solucionar as operações, entretanto não sabiam explicar os empréstimos e nem os reagrupamentos que realizavam em suas soluções. O "vai 1" e o "empresta 1" são entendidos como sendo apenas uma unidade e não dez, ou uma dezena. Os sujeitos argumentaram que se não fizessem desta forma, a conta "iria dar errada".

Os sujeitos, concluiu Zunino (ibid.), foram capazes de solucionar as operações, contudo, não tinham compreensão acerca dos procedimentos que utilizavam.

Baroody e Standifer enfatizaram que existem diferentes abordagens quanto ao ensino da matemática. Do ponto de vista tradicional, parte-se do pressuposto que a instrução direta é a forma mais eficaz de se ensinar matemática. Suas práticas baseiam-se na memorização de fatos e procedimentos. Muitos fracassam pelo fato de não memorizarem o que lhes é ensinado.

Todavia, muito se tem discutido sobre novas perspectivas para o ensino da matemática. Neste contexto, Baroody e Standifer (ibid.) salientaram a importância de se aproveitar, no âmbito escolar, as experiências matemáticas que os alunos trazem para a sala de aula. As crianças constroem gradativamente seu conhecimento aritmético e por isso deveriam ser encorajadas a raciocinar, a fazer uso de suas experiências cotidianas. *"Uma variedade de situações de adição e subtração existem no mundo real"* (P. 75).

O uso de materiais concretos deveria ser incentivado. Os sinais formais utilizados para a resolução de operações poderiam ser introduzidos à medida que o sujeito fosse capaz de relacioná-los com suas próprias ações, com seus conhecimentos informais. O ensino privilegiaria a compreensão e não a memorização.

"Tradicionalmente, a matemática tem sido uma 'matéria silenciosa', com crianças quietas, ouvindo o professor ou completando folhas de atividades. Esta pesquisa sugere que, para promover a compreensão aritmética e o raciocínio, as crianças precisam ser ativas, (...) trocar idéias e estratégias, e defender seus procedimentos e respostas." (ibid.; P. 99).

As pesquisas explicitadas comprovaram a importância de o aluno construir seu próprio conhecimento. As interações do indivíduo com seu meio, interações as quais fundamentam o desenvolvimento gradual das estruturas do conhecimento, poderiam ser promovidas em sala de aula, local onde se deveria desconsiderar a memorização de técnicas e privilegiar um aluno ativo. Pois, como afirma Piaget: *"existe uma diferença entre aprender um resultado e formar um instrumento intelectual, formar uma lógica, necessária à construção de tal resultado"* (Piaget; 1972/1975, P. 342).

As pesquisas apresentadas e os fundamentos teóricos destacados permitiram delinear o problema e os objetivos que orientam a presente pesquisa.

4

Objetivos e Problema

Objetivos:

- avaliar o desempenho aritmético de crianças que frequentam a 2ª e 3ª séries do 1º grau, em situações-problema que envolvam operações de adição e subtração;
- analisar os procedimentos utilizados pelas crianças na resolução das situações-problema apresentadas;
- verificar o nível de evolução da abstração reflexiva destas crianças na solução de problemas que envolvem a inversão das operações aritméticas;
- comparar o desempenho e os procedimentos empregados pelos sujeitos na solução de problemas de adição e subtração, com os níveis alcançados de abstração reflexiva nos problemas de inversão das operações aritméticas.

Identificação do Problema

A teoria piagetiana tem exercido influência considerável no âmbito educacional. Embora seu objetivo não tenha sido voltado à elaboração de práticas pedagógicas, pesquisadores baseiam-se em seus pressupostos teóricos e merecem destaque pelo fato de enfatizarem a importância de o aluno construir seu próprio conhecimento.

A idéia de se considerar *"o desenvolvimento mental como uma construção contínua"* (Piaget; 1964/1995b, P. 14) e o conhecimento como resultante das constantes interações entre o sujeito e seu meio externo, contrapõe-se às metodologias de ensino baseadas, única e exclusivamente, na memorização de técnicas, nas quais os conteúdos devem ser interiorizados pelos alunos em meio aos discursos do professor.

Como afirma Kamii (1985/1988), *"os pontos principais que podem ser retirados da teoria piagetiana em si mesma são diretos. Eles dizem respeito à natureza do conhecimento lógico-matemático, de como este conhecimento é construído pela criança, através da abstração reflexiva a partir da interação ativa com o meio físico e social"* (P. 15).

Para Piaget (1977/1995a), a abstração reflexiva *"apóia-se sobre as coordenações das ações dos sujeitos"* e não nas informações que o sujeito retira dos objetos em si mesmos. A abstração reflexiva, portanto, supõe o estabelecimento de relações e não somente a abstração das características materiais da ação nos objetos.

A construção do conhecimento lógico-matemático não se dá por interiorização direta de informações impostas pelo meio exterior, mas sim, pelo mecanismo de abstração reflexiva que comporta a construção gradual deste conhecimento.

Sendo o conhecimento aritmético pautado fundamentalmente nas abstrações reflexivas, por conseguinte, a aprendizagem de técnicas não seria significativa o bastante para engendrar uma construção, mas apenas uma memorização. Partindo destas concepções, o problema da presente pesquisa pode ser assim delineado:

> *Em qual nível de evolução da abstração reflexiva encontram-se apoiados o desempenho e a compreensão de sujeitos que frequentam a 2ª e 3ª séries do 1º grau, quando submetidos a situações que envolvem operações de adição e subtração?*

Inspirados nas pesquisas de Piaget a respeito da abstração reflexiva (1977/1995a), mais particularmente no experimento da inversão das operações aritméticas, procurar-se-á identificar os níveis de abstração reflexiva alcançados pelos sujeitos nas tarefas propostas e estabelecer a relação destes níveis com o desempenho e a compreensão de situações que envolvam problemas de adição e subtração.

O interesse por tal estudo, dentre outros, foi motivado pelo fato de Piaget admitir que: *"ainda que nossos trabalhos não tenham nenhuma intenção pedagógica, parece difícil deixar de salientar o fato de que o conhecimento das reações de escolares, descritas nesta obra, possa ser de alguma utilidade para os educadores"* (ibid.; P. 7).

5

Metodologia

5.1 Sujeitos

Participaram desta pesquisa 12 sujeitos (N=12), alunos que frequentavam a Escola Estadual Presidente Pedrosa localizada na zona urbana de Curitiba. Primeiramente realizou-se uma visita à Escola a fim de explicar ao orientador educacional a natureza do trabalho a ser desenvolvido e obter permissão para o mesmo.

Para compôr a amostra foram sorteadas duas salas de aula: uma com alunos de 2ª série e outra com alunos de 3ª série. Diante dos respectivos professores, o pesquisador informou-lhes sobre a pesquisa , procedendo a um sorteio dos alunos que iriam participar do estudo. Além disso, foram acertados os horários em que os sujeitos estariam ausentes da sala de aula, sem que sofressem qualquer prejuízo.

A amostra, conforme indica o Quadro I (P. 30), foi constituída por 6 sujeitos que frequentavam a 2ª série e por 6 sujeitos que frequentavam a 3ª série do ensino fundamental.

5.2 Materiais

5.2.1 Provas de Conhecimento Aritmético

Resolução das operações de adição e subtração Uma folha de atividade contendo 20 operações, das quais 10 são de adição e 10 de subtração (Anexo I).

Quadro I - Descrição dos Sujeitos				
Escola	Nome	Idade	Sexo	Série
ESCOLA ESTADUAL PRES. PEDROSA	CAR	9;2	F	3ª série
	MEI	9;1	F	
	DAN	9;10	M	
	REN	9;8	F	
	LEA	10;11	M	
	NAI	8;11	F	
	RAP	8;9	M	2ª série
	DJE	8;5	F	
	JUL	9;1	F	
	ALV	8;6	M	
	ARI	8;3	F	
	HER	8;0	M	

Resolução dos problemas de adição e subtração Uma folha de atividade contendo 4 problemas de adição (Anexo II); uma folha de atividade contendo 6 problemas de subtração (Anexo III).

Noção das operações de adição e subtração Mini-brinquedos; uma caixa pequena.

Valor posicional da numeração Uma folha de atividade contendo 3 operações de adição escritas na forma vertical e com colunas desalinhadas (Anexo IV).

Resolução mental de operações Uma folha de atividade contendo 3 operações de adição e 3 operações de subtração escritas de forma horizontal (Anexo V).

Procedimento de resolução das operações de adição e subtração Seis cartões de 10cm por 15cm contendo as seguintes operações escritas em cada um deles: $16+17$, $27+15$, $12+19$, $53-24$, $37-29$ e $42-18$ (Anexo VI); doze cartões de 7cm por 12cm com os seguintes números escritos em cada um deles: 16, 17, 27, 15, 12, 19, 53, 24, 37, 29, 42 e 18 (Anexo VI); 100 fichas de papel cartão.

5.2.2 Provas de Inversão das Operações Aritméticas

Montagem da árvore Uma haste vertical de madeira servindo de base e sete pedaços de madeira de tamanhos variados, os quais encaixados em ordem devem formar uma árvore [1], (Anexo VII).

Montagem do cubo Oito cubos de tamanhos iguais.

[1]No texto original é utilizado "montagem do cogumelo", contudo, optou-se por utilizar "montagem da árvore" por fazer parte do vocabulário corrente dos sujeitos estudados.

Problemas de cálculo Folhas de papel, lápis, pacotes de papel, quadrados de cartolina.

Para registro de todas as entrevistas utilizou-se gravador e fitas cassete.

5.3 Procedimento de Coleta de Dados

A coleta de dados foi realizada durante todo o mês de novembro de 1996. O experimentador desenvolveu o trabalho com os sujeitos de 3ª série no período da manhã e com os de 2ª série no período da tarde, obedecendo aos horários propostos pelos respectivos professores. As provas de "Conhecimento Aritmético" e as de "Inversão de Operações Aritméticas" foram aplicadas pelo experimentador com cada sujeito individualmente, perfazendo um total de onze sessões de aproximadamente 30 minutos.

Embora a descrição do material utilizado e os procedimentos a seguir sejam apresentados de forma ordenada, vale salientar que as atividades propostas aos sujeitos não foram desenvolvidas seguindo a mesma ordem. Ou seja, o experimentador intercalou os exercícios propostos de forma que a folhas de atividades contivessem tanto situações de adição, quanto de subtração.

Além de intercalar as situações que envolviam adição e subtração, o experimentador também seguiu uma ordem diferenciada quando da aplicação das situações para cada grupo de sujeitos, 2ª e 3ª séries. Iniciou-se o primeiro grupo com "noção de adição" e o segundo com "noção de subtração".

5.3.1 Provas de Conhecimento Aritmético

As provas de conhecimento aritmético utilizadas no presente estudo foram inspiradas nas pesquisas de Kamii (1991), Madell (1985), Vergnaud (1985/1991), Sastre (1980) e adaptadas de acordo com as necessidades do trabalho em questão.

Objetivos:

- verificar o desempenho dos sujeitos na resolução de situações-problema de adição e subtração;
- analisar os procedimentos empregados, a fim de verificar como os sujeitos compreendem as situações propostas que engendram reagrupamentos, valor posicional da numeração, empréstimos e relação parte-todo.

Resolução das operações de adição e subtração Os sujeitos foram solicitados a resolver, de forma escrita, dez operações de adição e dez operações de subtração contidas em duas folhas de atividades (cf. Anexo I). As operações foram efetuadas pelos sujeitos em duas sessões distintas. Na primeira, resolveram dez operações: cinco de adição e cinco de subtração. As restantes foram resolvidas em uma segunda sessão. Não houve qualquer tipo de intervenção por parte do experimentador, este apenas solicitou a resolução das operações sem tecer qualquer comentário.

Resolução dos problemas de adição e subtração Foram propostos aos sujeitos quatro problemas de adição (cf. Anexo II) e seis de subtração (cf. Anexo III) apresentados em diferentes sessões no decorrer da coleta de dados. Em uma mesma folha de atividade, havia tanto problemas de adição quanto de subtração.

Para resolução completa dos problemas, os sujeitos necessitaram de 5 sessões. A intervenção do experimentador se restringiu à leitura, juntamente com os sujeitos, de cada enunciado proposto nos problemas.

Noção das operações de adição e subtração Na prova da noção de adição, o experimentador distribuiu sobre a mesa uma série de mini-brinquedos (carrinhos, flores, vasinhos, pratos, xícaras, etc.) e deu início à prova dizendo:

Preste atenção no que eu vou fazer com estes brinquedos, para depois você explicar o que eu fiz.

O experimentador, primeiramente, entregou três objetos ao sujeito, em seguida, mais dois e perguntou:

O que eu fiz?

Os sujeitos respondiam a esta questão de forma a descrever a ação do experimentador, quantificando os objetos que lhes foram entregues. Quando necessário, o experimentador repetia sua ação, variando os objetos e sua quantidade, até que o sujeito fosse capaz de descrever corretamente a ação efetuada pelo experimentador.

Na prova da noção de subtração procedeu-se da mesma maneira, a única variação existente consistiu no fato de o experimentador apresentar, dentro de uma pequena caixa, cinco objetos, retirando, em seguida, dois deles. Como na prova da noção de adição, o experimentador variou os objetos e seu número até que o sujeito fosse capaz de descrever a ação efetuada por ele.

Após a descrição das ações realizadas pelo experimentador, deu-se início à entrevista propriamente dita. Foram colocadas as seguintes questões[2]:

O que foi feito agora (com os objetos) tem alguma coisa de parecido com o que você faz na classe?

[2]As questões desenvolvidas nesta entrevista foram retiradas do trabalho realizado por Sastre (1980), entretanto, foram utilizadas apenas algumas de suas perguntas, aquelas consideradas pertinentes ao presente estudo.

O que fizemos é parecido com uma adição/subtração?

O que é uma adição/subtração?

As entrevistas foram gravadas em duas sessões.

Valor posicional da numeração A avaliação reservada ao valor posicional da numeração consistiu em apresentar ao sujeito três operações de adição escritas na forma vertical, contudo, em colunas desalinhadas (cf. Anexo IV).

Primeiramente, o experimentador solicitou ao sujeito a leitura dos números de cada parcela da adição, a seguir, a resolução da operação de forma escrita.

Quando o sujeito considerava a unidade com valor de dezena, o experimentador colocava a seguinte questão:

Esta operação é assim mesmo ou há alguma coisa de diferente das que você costuma fazer?

Quando o sujeito admitia qualquer diferença o experimentador questionava:

Como você faria, do seu jeito, esta operação?

Duas sessões foram necessárias para as situações a respeito do valor posicional da numeração.

Resolução mental de operações Foram apresentadas aos sujeitos seis operações escritas na forma horizontal, sendo três de adição e três de subtração (cf. Anexo V).

Solicitava-se ao sujeito a resolução mental de cada operação, a explicação do resultado e a seguir era colocada a questão:

Como você fez esta operação?

Após o sujeito explicar o procedimento utilizado, cabia-lhe resolver de forma escrita (na vertical) as operações.

Para tal, três sessões foram necessárias, incluindo em cada sessão, uma operação de adição e uma de subtração.

Procedimento de resolução das operações de adição e subtração Foram propostas seis operações, das quais três eram de adição e três de subtração. As adições envolviam reagrupamentos e as subtrações empréstimos (Anexo VI). Em ambas o procedimento do experimentador não variou. Três sessões foram utilizadas, contando cada vez com uma operação de adição e uma de subtração.

Era apresentado ao sujeito um cartão contendo uma operação escrita na forma vertical, solicitando que realizasse mentalmente a operação. Após a resolução, perguntava-se:

Como você fez esta operação?

Uma vez dada a explicação do procedimento usado para solucionar a operação, o experimentador mostrava um cartão contendo o primeiro termo da operação e solicitava ao sujeito que contasse, com as fichas de papel, o número de fichas correspondente àquele número existente no cartão.

Em seguida, um outro cartão era apresentado com o segundo termo da operação, e o experimentador solicitava a contagem das fichas correspondentes.

Tendo contado o número de fichas correspondente a cada cartão, sugeriu-se ao sujeito que fizesse uso das fichas, já contadas, para explicar como havia resolvido a operação.

Você contou as fichas com cada número da operação que fez, como você explicaria esta operação usando as fichas?

Como você faria esta operação com as fichas que acabou de contar?

A cada ação efetuada pelo sujeito, o experimentador solicitava justificativas do procedimento utilizado. Foram realizadas perguntas do tipo:

Sobraram fichas? Por quê?

Todas as fichas que você contou foram utilizadas? Por quê?

As fichas que você colocou no resultado são suficientes? Só estas fichas são suficientes para representar o resultado da sua conta?

As três sessões que envolveram estas atividades foram intercaladas com as demais.

5.3.2 Provas de Inversão das Operações Aritméticas

Os procedimentos das provas de inversão das operações aritméticas foram retiradas do trabalho de Piaget (1977/1995a). Os níveis de evolução da abstração reflexiva, categorizados pelo autor, encontram-se organizados no Anexo VIII.

Objetivo:

- verificar a evolução dos níveis de abstração reflexiva dos sujeitos.

Foi solicitado ao sujeito a execução de três tarefas distintas; a primeira consistiu na montagem de uma árvore sobre uma haste de madeira (cf. Anexo VII); a segunda referiu-se a construção de um grande cubo utilizando-se de 8 cubos menores; a terceira tarefa consistiu na apresentação de um problema de cálculo ($n' = 2(n+3)+5$).

Convém, portanto, passar à análise detalhada de cada uma das tarefas.

Montagem da árvore Apresentava-se ao sujeito 7 pedaços de madeira em desordem perguntando:

> *O que se pode fazer quando organizamos estes pedaços de madeira sobre esta haste?*

Quando o sujeito apresentava algum tipo de dificuldade para a montagem, o experimentador iniciava a construção da árvore a fim de lhe facilitar a tarefa. Ao finalizar, o experimentador formulava questões referentes à ordem necessária para a montagem correta da árvore:

> *A que é preciso prestar atenção, quando montamos a árvore?*
>
> *O que há de importante quando a montamos?*
>
> *Como fazemos para construí-la?*

Em seguida, pedia-se ao sujeito que desmontasse a árvore, organizando os pedaços na ordem em que esta ia sendo desmontada. Perguntava-se, então, sobre a nova ordem, solicitando comparações entre a ordem de construção e a de demolição.

Quando desmontamos a árvore, o que acontece?

Quando a gente desmancha e quando a gente constrói, há qualquer coisa de semelhante?

Os pedaços não estão no mesmo lugar?

Montagem do cubo Apresentou-se ao sujeito 8 pequenos cubos perguntando:

É possível construir um cubo maior utilizando estes cubos pequenos?

Como você construiria um cubo maior usando estes cubos pequenos? Você pode me mostrar?

Após a sujeito ter construído um cubo maior, utilizando-se dos 8 cubos menores, repetia-se as questões relativas à ordem.

A que é preciso prestar atenção quando montamos o cubo?

O que há de importante quando o montamos? Você observa onde coloca os pedaços?

Como fazemos para construí-lo?

O experimentador pedia para que o sujeito desmontasse o cubo grande e propunha questões relativas a ordem de construção e de demolição.

Quando desmontamos o cubo o que acontece?

Quando a gente desmancha e quando a gente constrói, há qualquer coisa de semelhante?

Há qualquer coisa de semelhante quando você constrói o cubo e quando você constrói a árvore? Por quê?

Problemas de cálculo Nesta tarefa Piaget (1977/1995a) introduziu dois procedimentos; um mais complexo porque parte de números, outro menos, porque os números são substituídos por cartões.

O procedimento mais simples aplicado no trabalho de Piaget (ibid.) e também utilizado neste estudo (para apenas um dos sujeitos estudados) consistiu em apresentar ao sujeito pequenos quadrados de cartolina e o experimentador, virando-se de costas, solicitava-lhe que colocasse, dentro de um pacote de papel, a quantidade que desejasse de quadrados. Em seguida, solicitava-lhe que acrescentasse mais 3 quadrados em seu pacote e, enfim, que acrescentasse mais 5 quadrados. Cabia ao sujeito contar o total de fichas de seu pacote e anunciar o resultado ao experimentador. Conhecendo o total de fichas o experimentador propunha as questões:

Eu posso descobrir a quantidade de quadrados que você colocou na primeira vez dentro do seu pacote?

Como eu posso descobrir a quantidade que você colocou dentro do pacote? Como você faria para descobrir?

Você me ajudou quando me disse o total de quadrados que havia dentro do pacote?

O procedimento que se iniciava com números e não fichas foi o mais utilizado. Consistiu em pedir ao sujeito para registrar, sobre uma folha, um determinado número (n) de dois algarismos e que o contornasse com um círculo, em seguida o sujeito deveria, por escrito, acrescentar $+3$ a este número ($n+3$), dobrar o número que possuia ($2(n+3)$) e por último, juntar $+5$ ao número. Desta forma, o sujeito obtinha, ao final, o seguinte resultado: $n' = 2(n+3)+5$. Feito isso, o experimentador colocou questões a respeito da necessidade de se conhecer o resultado n' para reencontrar n, tais como:

Posso saber o número que você colocou no círculo?

Posso saber o número que você pensou, sem saber do resultado? Ajudou-me saber do resultado de sua operação?

O experimentador relembrando a construção da árvore questionou:

Há alguma coisa de semelhante entre estas operações que fizemos aqui e a montagem que fizemos com a árvore? É parecido ou é diferente?

Com os números, a gente pode fazer as operações em qualquer ordem?

Para descobrir o número que você escreveu, eu posso começar por qualquer operação?

Vale destacar que, diferentemente das provas de conhecimento aritmético, as tarefas a respeito da abstração reflexiva foram apresentadas segundo a ordem que estão descritas, sendo desenvolvidas em uma única sessão.

6

Análise dos Resultados

6.1 Provas de Conhecimento Aritmético

O termo "Aritmética" é definido, segundo a conceituação do dicionário [1], como sendo a *"Ciência dos Números; arte de calcular; parte da Matemática que estuda as propriedades dos números e as operações que com eles se podem efetuar"*.

Entre as "operações que se podem efetuar com os números", temos a adição e a subtração, estas fazem parte das operações aritméticas fundamentais; além destas temos também a multiplicação e a divisão, contudo, estas últimas não foram colocadas em questão neste trabalho.

A avaliação proposta neste estudo referiu-se, especificamente, às operações aritméticas de adição e subtração, as quais são trabalhadas logo nas séries iniciais do ensino fundamental.

Os cálculos utilizados nas operações em questão, para os adultos parecem fáceis, entretanto, calcular é mesmo uma arte e requer a compreensão de inúmeros conceitos, os quais exigem uma construção gradual por parte da criança. As operações exigem um entendimento acerca do número, do valor posicional da numeração, dos reagrupamentos, dos empréstimos e da relação parte-todo.

Inúmeras são as propostas metodológicas, no contexto escolar, que visam a ensinar de forma satisfatória tais conteúdos. Muitos educadores têm-se respal-

[1]HOLLANDA, Aurélio Buarque de. Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Editora Nacional; Rio de Janeiro, 1987.

dado no uso de materiais concretos no intuito de tornar o processo de aprendizagem mais eficaz. Todavia, a análise realizada neste trabalho não recaiu sobre a metodologia em si utilizada pelos educadores, mas sim sobre o conhecimento aritmético que as crianças têm nas operações específicas de adição e subtração.

O objetivo principal desta etapa do presente estudo foi de se fazer uma avaliação, em termos de desempenho e compreensão, do conhecimento aritmético dos sujeitos nas operações já citadas. Neste contexto, as situações apresentadas, nesta fase de nossa verificação, foram organizadas de forma a privilegiar ora o aspecto compreensão, ora o aspecto desempenho.

A avaliação do desempenho nas situações que envolviam adição e subtração, serviu para verificar se os sujeitos eram capazes ou não de solucionar corretamente as atividades propostas.

A avaliação da compreensão dos sujeitos acerca dos conteúdos em questão, consistiu em verificar se estes tinham conhecimento dos processos envolvidos nas operações, demonstrando-os por meio dos procedimentos.

Parte dos sujeitos da amostra, como já explicitado no Quadro I (P. 30), estavam frequentando a 2ª série (N=6) e outra parte a 3ª série do 1º grau (N=6). Portanto, todos eles já haviam aprendido no contexto escolar os conteúdos de adição e subtração, tornando-se, assim, possível tal avaliação.

6.1.1 Resolução das Operações de Adição e Subtração

Logo nas séries iniciais do ensino fundamental, os alunos são solicitados a resolver operações e problemas que envolvem tanto a adição quanto a subtração. Por conseguinte, tomam conhecimento de inúmeros sinais e regras que convencionalmente são utilizados para a solução das situações trabalhadas em sala de aula.

O uso do algoritmo é muito comum na resolução das operações e muito se tem argumentado sobre os efeitos nocivos da utilização deste nas séries iniciais (Kamii; 1995), entretanto, independente do uso do algoritmo ou não, o objetivo desta fase do trabalho consistiu exclusivamente em constatar se os sujeitos eram capazes de resolver operações de adição e subtração.

Nesta avaliação, os sujeitos que participaram da pesquisa, não foram questionados quanto ao procedimento empregado para resolução das operações. Estando o resultado correto ou incorreto, o experimentador não fez nenhuma menção acerca dos resultados obtidos pelos sujeitos.

O objetivo da situação era o de averiguar se os sujeitos, tendo já aprendido os conteúdos de adição e subtração em sala de aula, eram capazes de resolver as operações, independente da forma pela qual resolviam e se estas resoluções eram dotadas de significado ou não para eles: dotadas de significado no sentido de compreender os processos envolvidos, contrário ao uso mecânico de técnicas.

Esta etapa concernente a avaliação do desempenho consistiu, tanto para adição quanto para a subtração, na apresentação de 20 operações as quais foram resolvidas pelos sujeitos de forma escrita. Foram propostas 10 operações de adição e 10 de subtração (cf. Anexo I).

Das 10 operações de adição apresentadas aos sujeitos, 5 delas envolviam reagrupamentos ("vai 1"); as outras 5 exigiam apenas a adição das parcelas sem a necessidade de reagrupar dezenas e/ou centenas.

Os resultados obtidos na resolução das operações de adição são significativos uma vez que todos os sujeitos foram capazes de solucionar corretamente todas as operações propostas. Todos os sujeitos, independente de suas séries ou idades, puderam resolver de forma correta mesmo as operações que engendravam reagrupamentos.

A Tabela I (P. 46) ilustra os resultados obtidos nas operações de adição, indicando os sujeitos, suas respectivas séries e o número de acertos correspondentes a cada operação efetuada. Os números de 1 a 10 existentes na tabela correspondem a cada operação efetuada pelo sujeito, uma vez que foram propostas 10 operações. A letra "c" indica de forma precisa a operação que foi resolvida com êxito pelo sujeito; a letra "e" indica qual operação foi realizada de forma incorreta, neste caso não se utilizou deste símbolo pois todos obtiveram êxito em todas as operações.

I - Desempenho nas Operações de Adição													
Série	Sujeito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Acertos	Erros
3ª	CAR(9;2)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	MEI(9;1)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	DAN(9;10)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	REN(9;8)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	LEA(10;11)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	NAI(8;11)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
2ª	JUL(9;1)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	DJE(8;5)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	ALV(8;6)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	ARI(8;3)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	RAP(8;9)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	HER(8;0)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-

Tabela 6.1 - Desempenho nas Operações de Adição

A Figura 6.1 (P. 47) apresenta as resoluções efetuadas por ARI (8;3/2ª série) nas operações de adição.

Analisando os dados podemos afirmar que os sujeitos sabem resolver corretamente operações de adição, independente do seu grau de dificuldade. São capazes de efetuar os reagrupamentos e dar as respostas corretas.

As operações de subtração também foram apresentadas de forma di-

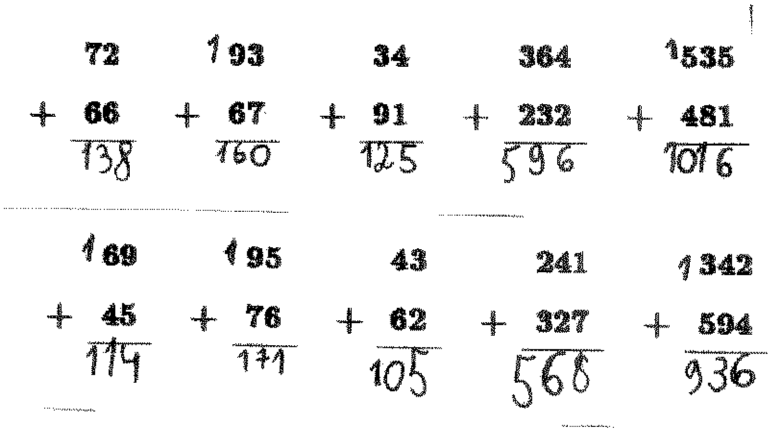


Fig. 6.1 - Resoluções Efetuadas por ARI nas Operações de Adição.

versificada (cf. Anexo I), sendo que 8 delas exigiam o empréstimo de dezena e/ou centena ("empresta 1"), e as outras 2 apenas solicitavam a subtração simples, sem a necessidade de empréstimos.

Nas operações de subtração emergiram algumas diferenças que necessitam ser evidenciadas. A Tabela II (P. 48) apresenta os resultados obtidos nas operações de subtração, mostrando os sujeitos, suas respectivas séries e o número de acertos e erros correspondentes a cada operação efetuada. Os números de 1 a 10 existentes na tabela correspondem a cada operação efetuada; a letra "c" indica a operação resolvida com êxito pelo sujeito. A letra "e" indica que operação foi realizada de forma incorreta.

Dos 12 sujeitos da amostra, 6 obtiveram êxito em todos os resultados; estes efetuaram os empréstimos quando necessários à resolução das operações e resolveram corretamente todas as situações. Na Figura 6.2 (P. 48), tem-se a apresentação das resoluções feitas por LEA (10;11/3ª série) para as operações de subtração.

Dentre os demais sujeitos, dois tiveram apenas um erro e dois erraram em duas operações. A falta de êxito em uma ou duas situações não pode ser considerada preocupante, contudo, convém ressaltar a origem dos erros destes

II - Desempenho nas Operações de Subtração													
Série	Sujeito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Acertos	Erros
3ª	CAR(9;2)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	MEI(9;1)	c	c	e	c	c	c	c	c	c	e	8	2
	DAN(9;10)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	REN(9;8)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	LEA(10;11)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	NAI(8;11)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
2ª	JUL(9;1)	c	c	c	c	c	c	c	e	e	c	8	2
	DJE(8;5)	c	c	c	c	c	c	c	e	c	c	9	1
	ALV(9;2)	c	c	c	c	c	c	e	c	c	c	9	1
	ARI(8;3)	e	c	e	e	e	e	e	c	e	e	2	8
	RAP(8;9)	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	10	-
	HER(8;0)	c	e	c	c	e	c	c	e	c	e	6	4

Tabela 6.2 - Desempenho nas Operações de Subtração

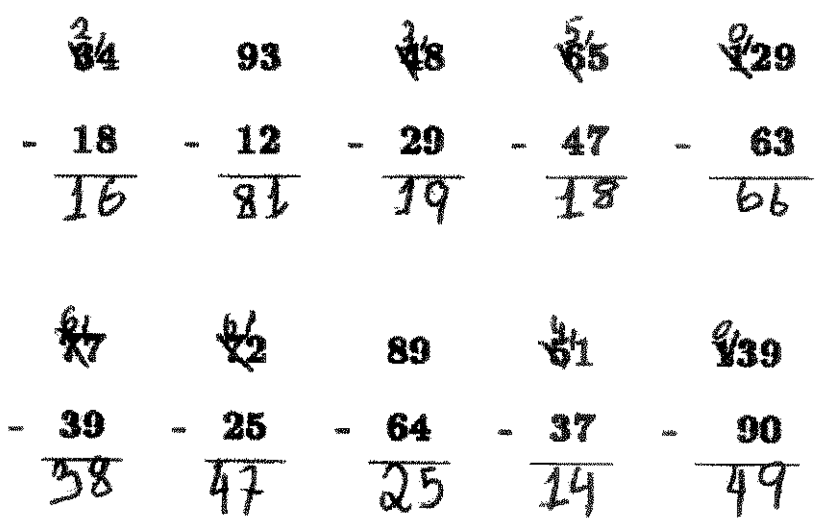


Fig. 6.2 - Resoluções Efetuadas por LEA nas Operações de Subtração.

quatro sujeitos. Tais sujeitos parecem dominar os passos a serem seguidos quando da resolução de uma subtração, isto é, sabem identificar quando o procedimento de "emprestar" deve ser executado, porém, seus erros sugerem que eles têm utilizado o processo de "contar para ver quantos faltam". Isto significa que ao emprestar uma dezena e/ou centena, eles procedem de forma a contar "quantos números faltam" para chegar ao minuendo. E é nesta contagem que aparecem os erros; falta um número para chegar ao resultado correto ou o resultado correto é acrescido de mais um, trata-se, portanto, de uma imprecisão numérica. Este tipo de resolução pode ser verificada com ALV (8;6/2ª série), DJE (8;5/2ª série), JUL (9;1/2ª série) e MEI (9;1/3ª série) respectivamente na Figura 6.3 (P. 49).

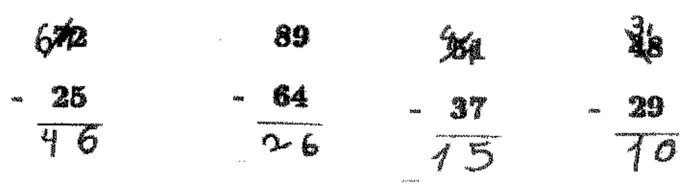


Fig. 6.3 - Resoluções Incorretas Efetuadas por ALV, DJE, JUL e MEI nas Operações de Subtração.

Os dois sujeitos restantes da amostra requerem uma atenção especial. HER (8;0/2ª série) errou 4 das 10 operações propostas (cf. Figura 6.4; P. 50), e uma incidência ainda maior de erros foi verificada em ARI (8;3/2ª série), o qual acertou apenas 2 operações, perfazendo um total de oito erros (cf. Figura 6.5; P. 50).

As resoluções de HER são significativas porque o sujeito, em alguns casos, realiza os empréstimos necessários à subtração obtendo êxito em sua resposta, entretanto evidencia-se uma confusão do mesmo em relação às operações que exigem ou não o empréstimo. O sujeito "sabe" que precisa "emprestar", mas não sabe discernir quando o fazer. Convém salientar que quando o experimentador repassou a folha de atividades contendo as operações a serem resolvidas, o sujeito, antes de ini-

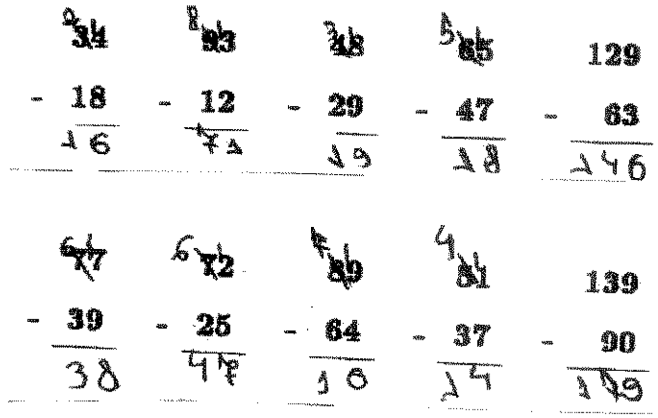


Fig. 6.4 - Resoluções Efetuadas por HER nas Operações de Subtração.

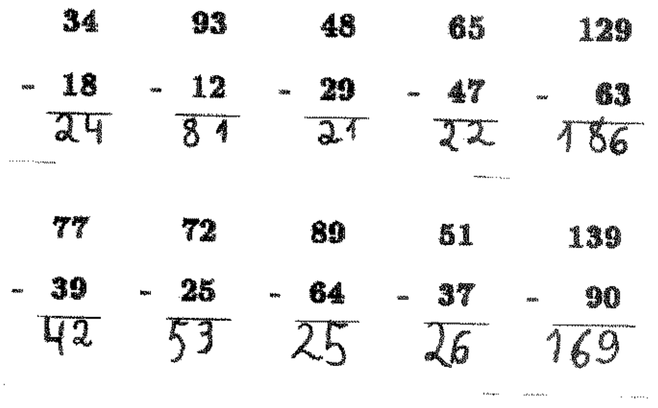


Fig. 6.5 - Resoluções Efetuadas por ARI nas Operações de Subtração.

ciar as operações de subtração, perguntou: **"é de emprestar?"** O experimentador, sem responder à questão, sugeriu que ele deveria fazer do jeito dele, do jeito que ele sabia fazer.

Nota-se que nos casos onde não realiza os empréstimos, os erros de HER são similares aos de ARI.

Os erros de ARI consistem na ausência dos empréstimos necessários à subtração dos termos da operação. O sujeito obtem sua resposta subtraindo o número menor do maior. Este procedimento seria correto caso se considerasse o valor e a posição de cada número da operação. Entretanto, ARI desconsidera a posição dos números, uma vez que se utiliza sempre do número maior, esteja este em qualquer termo (minuendo ou subtraendo), para subtrair o número menor.

Os resultados demonstram, com excessão de ARI (8;3/2ª série) e HER (8;0/2ª série), que os sujeitos conhecem os passos que necessitam seguir para solucionar operações de subtração, uma vez que realizam os empréstimos exigidos e reconhecem quando da sua necessidade ou não. Os erros implicam apenas em imprecisões numéricas.

Para ilustrar o desempenho global dos sujeitos nas operações de adição e subtração, construiu-se a Tabela III (P. 52).

Segundo indica a Tabela III, o desempenho alcançado pelos sujeitos na resolução das operações é significativo. Seis, dos doze sujeitos pertencentes à amostra, obtiveram 100% de êxito, acertaram todas as operações propostas; quatro sujeitos alcançaram um desempenho entre 90% e 95%, que pode ser considerado como excelente. Apenas dois sujeitos obtiveram desempenho inferior a 90%; ARI com 60% de êxito e HER com 80%. O desempenho alcaçado por ARI e HER é inferior em relação aos demais sujeitos, todavia não se trata de um índice insatisfatório.

Pode-se dizer que os sujeitos estudados "sabem" resolver operações de

III - Desempenho nas Operações de Adição e Subtração		
Série	Sujeito	Porcentagem
3ª	CAR(9;2)	100 %
	MEI(9;1)	90 %
	DAN(9;10)	100 %
	REN(9;8)	100 %
	LEA(10;11)	100 %
	NAI(8;11)	100 %
2ª	JUL(9;1)	90 %
	DJE(8;5)	95 %
	ALV(8;6)	95 %
	ARI(8;3)	60 %
	RAP(8;9)	100 %
	HER(8;0)	80 %

Tabela 6.3 - Desempenho nas Operações de Adição e Subtração

adição e subtração e as fazem muito bem [2]. Eles efetuam os reagrupamentos (adição), os empréstimos (subtração) e acertam as respostas. Independente do procedimento que utilizam, as respostas escritas estão corretas.

6.1.2 Resolução dos Problemas de Adição e Subtração

Os problemas propostos de adição e subtração tiveram como objetivo avaliar os sujeitos quanto ao seu desempenho. Assim como na resolução das operações, esta avaliação não visou à análise dos procedimentos. Solicitou-se aos sujeitos apenas que solucionassem os problemas de forma escrita. Independentemente de suas respostas, nenhum questionamento foi proposto pelo experimentador.

Os problemas apresentados aos sujeitos foram baseados nas pesquisas de Vergnaud (1985/1991). Embora exigissem apenas uma operação de adição ou subtração, os problemas apresentavam níveis de complexidade diferentes. Ou seja, a cada categoria de problemas mudava-se seus dados e seus questionamentos. Para Vergnaud (ibid) os problemas devem ser analisados sob o ponto de vista dos *estados* e das *transformações*. *"Estados são medidas associadas a números positivos (tem) (...) transformações são uma relação entre dois estados sucessivos e que são associados aos números positivos ou negativos (ganha, perde)"* (Vergnaud apud Damm; 1994).

Os problemas de adição apresentados enquadram-se em duas categorias (cf. Anexo II):

> **Categoria A** - $E_I \rightarrow T \rightarrow E_F(?)$: esta categoria engendra os problemas que apresentam, em seu enunciado, uma informação referente ao seu estado inicial ($\mathbf{E_I}$ - "Tinha 6 maçãs."); uma informação referente à transformação ocorrida($\mathbf{T}$ - "Ganhei 4."); o questionamento é feito acerca do estado final ($\mathbf{E_F}$ - "Quantas tenho agora?).

[2] Com excessão de HER e ARI para a subtração.

Categoria B - $(?)E_I \rightarrow T \rightarrow E_F$: nesta categoria de problemas encontram-se os que apresentam uma informação referente à transformação ocorrida (**T** - "Gastei 12 reais na feira."); uma informação referente ao estado final ($\mathbf{E_F}$ - "Agora tenho 5 reais."); o questionamento refere-se ao estado inicial do problema ($\mathbf{E_I}$ - "Quanto tinha antes de ir a feira?").

As resoluções apresentadas pelos sujeitos para estas duas categorias de problemas (A e B), encontram-se reunidas na Tabela IV (P. 54). São apresentados os números de acertos (A) e erros (E). Os números 1 e 2 referem-se a cada problema proposto num total de dois para cada categoria (cf. Anexo II).

IV - Desempenho nos Problemas de Adição											
Cat.A – $\mathbf{E_I \rightarrow T \rightarrow E_F(?)}$						**Cat.B** – $\mathbf{(?)E_I \rightarrow T \rightarrow E_F}$					
Série	Sujeito	1	2	A	E	Série	Sujeito	1	2	A	E
3ª	CAR(9;2)	c	c	2	-	3ª	CAR(9;2)	c	c	2	-
	MEI(9;1)	c	c	2	-		MEI(9;1)	c	c	2	-
	DAN(9;10)	c	c	2	-		DAN(9;10)	c	c	2	-
	REN(9;8)	c	c	2	-		REN(9;8)	e	c	1	1
	LEA(10;11)	c	c	2	-		LEA(10;11)	e	e	-	2
	NAI(8;11)	c	c	2	-		NAI(8;11)	c	c	2	-
2ª	JUL(9;1)	c	e	1	1	2ª	JUL(9;1)	e	c	1	1
	DJE(8;5)	c	c	2	-		DJE(8;5)	c	c	2	-
	ALV(8;6)	c	c	2	-		ALV(8;6)	e	e	-	2
	ARI(8;3)	c	c	2	-		ARI(8;3)	c	c	2	-
	RAP(8;9)	c	c	2	-		RAP(8;9)	c	c	2	-
	HER(8;0)	c	c	2	-		HER(8;0)	e	c	1	1

Tabela 6.4 - Desempenho nos Problemas de Adição

Na categoria **A**, onze dos doze sujeitos acertaram todos os problemas propostos. Apenas JUL (9;12/2ª) errou um dos dois problemas apresentados, conforme pode ser observado na Figura 6.6 (P. 55).

No mês de novembro entraram 3 novos alunos em nossa classe. Antes haviam 39 alunos. Quantos alunos têm agora?

$$\begin{array}{r} 39 \\ -3 \\ \hline 36 \end{array}$$

R: Foram 36 alunos.

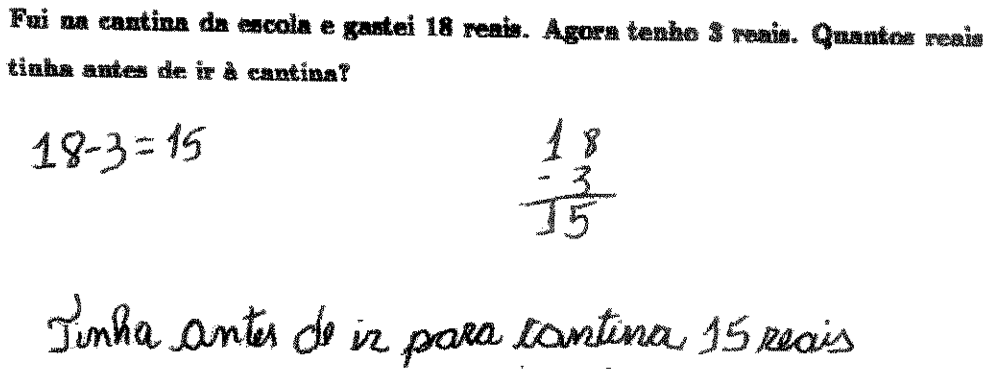
Fig. 6.6 - Resolução Incorreta Efetuada por JUL nos Problemas de Adição - Categoria A.

Na categoria **B** os índices de acertos diminuiram. Sete dos doze sujeitos da amostra obtiveram êxito total na resolução dos problemas; três sujeitos erraram um dos problemas e dois sujeitos não acertaram nenhum deles.

Os erros cometidos pelos sujeitos na resolução de problemas da categoria **B** centram-se no fato de se fazer uma subtração ao invés de uma adição. Os sujeitos subtraem da transformação (T) o estado final (E_F) e assim obtêm a resposta. O fato de o resultado do problema (E_I) ser um número menor que a própria transformação (T), é indiferente aos sujeitos, eles efetuam o problema sem perceber a contradição, como pode ser visto no exemplo de LEA (10;11/3ª série) apresentado na Figura 6.7 (P. 56).

Importante salientar que ALV (8;6/2ª série) não obteve êxito em nenhum dos problemas desta categoria, contudo, seus erros diferenciaram-se dos demais. ALV fez problemas de multiplicação ao invés de efetuar as adições, conforme pode ser observado na Figura 6.8 (P. 56). ALV multiplica a transformação (T) pelo estado final (E_F) do problema.

Os problemas de subtração enquadram-se em três diferentes categorias **A**, **B** e **C** (cf. Anexo III):



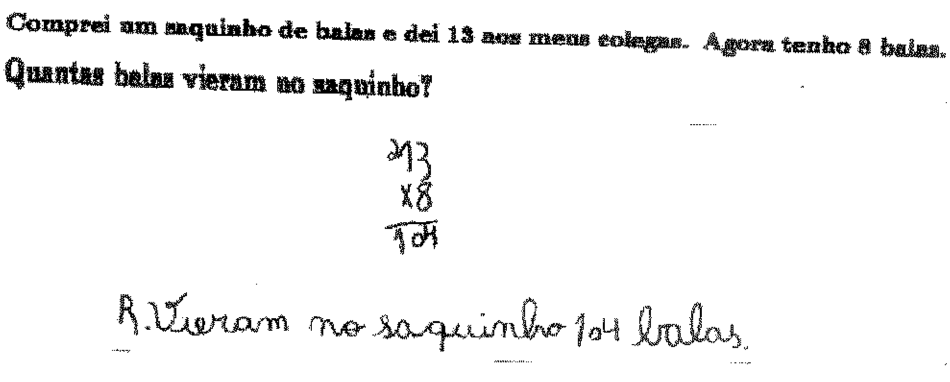
Fui na cantina da escola e gastei 18 reais. Agora tenho 3 reais. Quantos reais tinha antes de ir à cantina?

18-3=15

$$\begin{array}{r} 18 \\ -\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

Tinha antes de ir para cantina 15 reais

Fig. 6.7 - Resolução Incorreta Efetuada por LEA nos Problemas de Adição - Categoria B.



Comprei um saquinho de balas e dei 13 aos meus colegas. Agora tenho 8 balas. Quantas balas vieram no saquinho?

$$\begin{array}{r} {}^{2}13 \\ \times 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

R. Vieram no saquinho 104 balas.

Fig. 6.8 - Resolução Incorreta Efetuada por ALV nos Problemas de Adição - Categoria B.

Categoria A - $E_I \rightarrow T \rightarrow E_F(?)$: esta categoria comporta problemas que apresentam, em seu enunciado, uma informação referente ao seu estado inicial (**E_I** - "Tinha 10 figurinhas."); uma informação referente à transformação ocorrida (**T** - "Perdi 6."); o questionamento é feito acerca do estado final (**E_F** - "Quantas tenho agora?).

Categoria B - $(?)E_I \rightarrow T \rightarrow E_F$: nesta categoria de problemas encontram-se os que apresentam uma informação referente à transformação ocorrida (**T** - "Ganhei 5 figurinhas no jogo."); uma informação referente ao estado final (**E_F** - "Tenho agora 13 figurinhas."); o questionamento refere-se ao estado inicial do problema (**E_I** - "Quantas figurinhas tinha antes de jogar?").

Categoria C - $E_I \rightarrow T(?) \rightarrow E_F$: os problemas desta categoria apresentam, em seu enunciado, uma informação que se refere ao estado inicial (**E_I** - "Comecei a jogar com 8 figurinhas."); uma informação referente ao estado final (**E_F** - "Ganhei uma partida e agora tenho 14 figurinhas."); o ponto a ser questionado no problema abrange a transformação (T) ocorrida (" O que aconteceu durante o jogo?").

As resoluções dos problemas de subtração encontram-se organizadas nas Tabelas V (P. 58) e VI (P 59). Estas tabelas, assim como no caso dos problemas de adição, apresentam o índice de acertos (A) e erros (E) de cada sujeito e em cada problema específico. Cada categoria constou de dois problemas, daí os números 1 e 2, os quais correspondem ao problema proposto (cf. Anexo III). As letras "c" e "e" correspondem às respostas corretas e incorretas respectivamente.

Os problemas referentes à categoria **A** não demonstram ser de grande dificuldade para os sujeitos, visto que apenas JUL (9;1/2ª série - Figura 6.9, P. 60) não obteve êxito em uma das situções propostas. Os demais sujeitos apresentaram êxito total nas resoluções.

Afirmar que estes problemas não demonstram ser de grande dificuldade para os sujeitos implica em se fazer considerações sobre a relação parte-todo

V - Desempenho nos Problemas de Subtração

Cat. A - $\mathbf{E_I} \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{E_F}(?)$

Série	Sujeito	1	2	A	E
3ª	CAR(9;2)	c	c	2	-
	MEI(9;1)	c	c	2	-
	DAN(9;10)	c	c	2	-
	REN(9;8)	c	c	2	-
	LEA(10;11)	c	c	2	-
	NAI(8;11)	c	c	2	-
2ª	JUL(9;1)	c	e	1	1
	DJE(8;5)	c	c	2	-
	ALV(8;6)	c	c	2	-
	ARI(8;3)	c	c	2	-
	RAP(8;9)	c	c	2	-
	HER(8;0)	c	c	2	-

Cat. B - $(?)\mathbf{E_I} \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{E_F}$

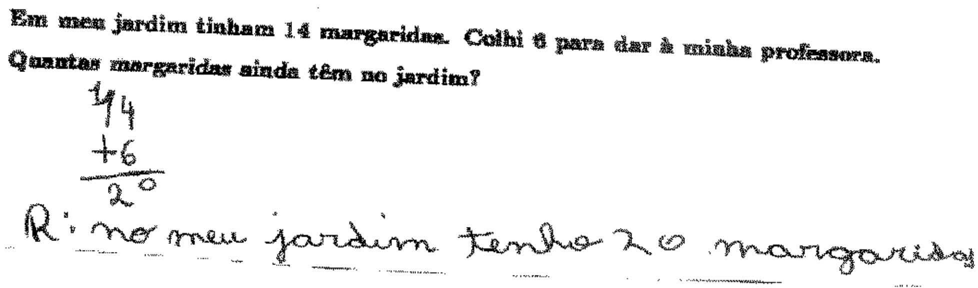
Série	Sujeito	1	2	A	E
3ª	CAR(9;2)	c	c	2	-
	MEI(9;1)	e	e	-	2
	DAN(9;10)	c	c	2	-
	REN(9;8)	c	c	2	-
	LEA(10;11)	e	c	1	1
	NAI(8;11)	e	c	1	1
2ª	JUL(9;1)	c	c	2	-
	DJE(8;5)	c	c	2	-
	ALV(8;6)	c	c	2	-
	ARI(8;3)	e	c	1	1
	RAP(8;9)	c	c	2	-
	HER(8;0)	c	c	2	-

Tabela 6.5 - Desempenho nos Problemas de Subtração

VI - Desempenho nos Problemas de Subtração					
Cat. C - $\mathbf{E_I} \rightarrow \mathbf{T}(?) \rightarrow \mathbf{E_F}$					
Série	Sujeito	1	2	Acertos	Erros
3ª	CAR(9;2)	c	c	2	-
	MEI(9;1)	c	e	1	1
	DAN(9;10)	c	c	2	-
	REN(9;8)	c	c	2	-
	LEA(10;11)	e	e	-	2
	NAI(8;11)	e	e	-	2
2ª	JUL(9;1)	e	c	1	1
	DJE(8;5)	c	c	2	-
	ALV(8;6)	c	c	2	-
	ARI(8;3)	e	c	1	1
	RAP(8;9)	c	c	2	-
	HER(8;0)	e	e	-	2

Tabela 6.6 - Desempenho nos Problemas de Subtração

estabelecida pelo sujeito em suas resoluções. Isto é, esta categoria de problemas requer a remoção de uma parte sobre um todo. Como explica Kamii (1985/1988), o sujeito alcança a resposta *"...pensando primeiro sobre o todo e depois sobre cada parte, e isso pode ser feito por atos sucessivos em vez de simultâneos"* (P. 153).



Em meu jardim tinham 14 margaridas. Colhi 6 para dar à minha professora. Quantas margaridas ainda têm no jardim?

$$\begin{array}{r} 14 \\ +6 \\ \hline 20 \end{array}$$

R: no meu jardim tenho 20 margaridas

Fig. 6.9 - Resolução Incorreta Efetuada por JUL nos Problemas de Subtração - Categoria A.

A categoria **B** dos problemas propostos apresenta um índice maior de respostas incorretas. Dos doze sujeitos da amostra, oito efetuaram corretamente os problemas; três erraram pelo menos uma das situações e um sujeito não obteve êxito em nenhum dos problemas. Os erros cometidos nesta categoria de problemas, sem excessões, consistem no fato de os sujeitos efetuarem uma adição ao invés de uma subtração. A resposta ser maior que o estado final (E_F), dado no enunciado do problema, não constitui uma contradição ao sujeito. Eles o resolvem sem se ater a esta variável.

Os erros cometidos pelos sujeitos nos problemas de subtração da categoria **B** podem ser observados na Figura 6.10 (P. 61) na resolução de NAI (8;11/3ª série).

A terceira e última categoria **C** foi a que obteve maior número de respostas incorretas dentre todas as categorias já expostas. Dos doze sujeitos da

Acabo de ganhar no jogo 5 bolinhas de gude. Tenho agora 13 bolinhas. Quantas bolinhas tinha antes de jogar?

$$\begin{array}{r} 13 \\ +5 \\ \hline 18 \end{array}$$

R: Tinha 18 bolinhas de gude.

Fig. 6.10 - Resolução Incorreta Efetuada por NAI nos Problemas de Subtração - Categoria B.

amostra, seis alcançaram êxito em todos os problemas; três erraram pelo menos um dos problemas e três não solucionaram corretamente nenhuma das situações.

Os erros encontrados nesta categoria, sem excessão, persistem na realização de uma adição ao invés de uma subtração, como na categoria anterior (**B**). O fato da resposta ser maior do que o estado final E_F do problema não requer a atenção dos sujeitos. As resoluções apresentadas por HER (8;0/2ª série) ilustram este tipo de erro o qual pode ser observado na Figura 6.11 (P. 61).

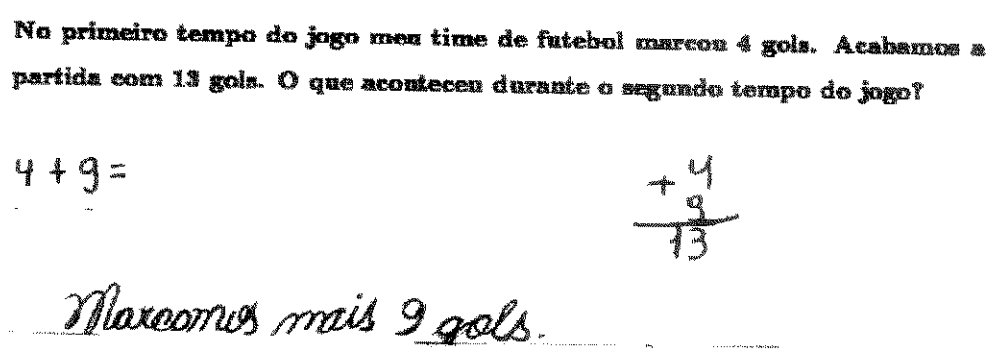
Comecei a jogar com 8 bolinhas de gude. Acabo de ganhar uma partida e agora tenho 14. O que aconteceu durante o jogo?

$$\begin{array}{r} 14 \\ +8 \\ \hline 22 \end{array}$$

Aconteceu no jogo que eu agora de tem 22 bolinhas.

Fig. 6.11 - Resolução Incorreta Efetuada por HER nos Problemas de Subtração - Categoria C.

Convém ressaltar que, dentre as resoluções corretas efetuadas pelos sujeitos, uma delas chama a atenção, visto que o sujeito realizou uma adição e obteve a resposta desejada. A Figura 6.12 (P. 62), ilustra a resolução efetuada por DAN (9;10/3ª série).


No primeiro tempo do jogo meu time de futebol marcou 4 gols. Acabamos a partida com 13 gols. O que aconteceu durante o segundo tempo do jogo?

4 + 9 =

$$\begin{array}{r} +\ 4 \\ 9 \\ \hline 13 \end{array}$$

Marcamos mais 9 gols.

Fig. 6.12 - Resolução Efetuada por DAN nos Problemas de Subtração - Categoria C.

O procedimento de DAN consistiu em igualar o estado inicial E_I ao estado E_F, encontrando assim, a transformação (T) do problema. Embora utilizasse o procedimento de igualar para encontrar a resposta, sua representação não poderia ser efetuada sob o ponto de vista convencional, uma vez que o sujeito não tinha conhecimento acerca da transformação (T) ocorrida no problema.

As categorias B e C dos problemas de subtração tiveram um maior número de respostas incorretas que em relação à categoria A. Isto porque estas categorias de problemas exigem que o sujeito pense simultaneamente sobre as partes e o todo. Ou seja, a resolução destes tipos de problema implica em encontrar a diferença entre a parte e o todo, daí a necessidade de se pensar nos dados simultaneamente e não em fatos sucessivos.

Considerando os dados obtidos, observou-se que, tanto para a adição quanto para a subtração, a primeira categoria de problemas - **A:** $\mathbf{E_I \rightarrow T \rightarrow E_F(?)}$

- foi a que obteve o maior índice de acertos. Esta categoria não constitui uma dificuldade para os sujeitos, uma vez que os dados deste tipo de problema são bem direcionados, ou seja, as *transformações* são apresentadas nos termos "ganhar", "subir" para adição e "perder", "colher" para a subtração, verbos que facilmente se associam à adição e à subtração respectivamente e assim os sujeitos as fazem. Se é "ganhar" é de mais, se é "perder" é de menos.

O mesmo não ocorre com as demais categorias - **B**: $(?)\mathbf{E_I} \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{E_F}$ e **C**: $\mathbf{E_I} \rightarrow (?)\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{E_F}$ - as quais tiveram um índice maior de erros.

Os dados dos problemas destas categorias não evidenciam prontamente a operação a ser efetuada. Isto porque os verbos de tipo "ganhar" e "perder" não são associáveis à adição e subtração respectivamente. Há problema, por exemplo, cujo enunciado fala em "ganhar", embora exija uma subtração para sua resolução. Muda-se, na realidade, o questionamento do problema. Há que se fazer uma coordenação dos dados existentes para só então identificar o tipo de operação que deve ser efetuada, adição ou subtração.

Como explica Zunino (1995): *"É possível que a utilização de 'problemas-padrão', na escola, leve algumas crianças a centrar-se em certas 'chaves' incluídas reiteradamente nos enunciados, deixando de lado a estrutura global dos problemas"* (P. 77-8).

Neste sentido, pode-se refletir e avaliar a dificuldade que os alunos enfrentam, quando se insere nos problemas situações diferentes daquelas que convencionalmente se acostumaram a resolver. Este fato, segundo os resultados obtidos, revela um aumento considerável de erros.

No dizer de Vergnaud (1985/1991), as dificuldades residem no fato de o sujeito não prestar atenção nos problemas em termos de seus *estados* e *transformações*. A passagem do enunciado verbal para o cálculo numérico requer uma organização dos dados que são apresentados. Faz-se necessário apreendê-los e organizá-los de forma a encontrar a solução do problema. É preciso selecionar os dados e informações que são pertinentes à resolução.

6.1.3 Noção das Operações de Adição e Subtração

Tendo em vista que um dos objetivos deste trabalho abrange uma avaliação acerca da compreensão dos sujeitos no tocante aos conteúdos de adição e subtração, considerou-se significativo realizar um estudo sobre a noção que estes possuíam em relação a tais conteúdos.

Como pudemos constatar, no item reservado à avaliação do desempenho nas operações de adição e subtração, os sujeitos integrantes desta pesquisa sabem resolver as operações. O desempenho, de um modo geral, foi excelente, visto que a maioria dos sujeitos apresentaram um índice superior a 90%.

Considerando que a construção do conhecimento lógico matemático se dá a partir das ações que o sujeito realiza sobre os objetos, nossa preocupação foi de identificar até que ponto os sujeitos eram capazes de estabelecer relações entre as operações efetuadas rotineiramente no contexto escolar e as ações materiais de reunir/tirar objetos. "Reunir" porque a noção de adição implica na reunião de objetos, e "tirar" porque a noção de subtração implica na ação de tirar objetos.

Descrição das ações de reunir/tirar objetos

Na primeira etapa desta avaliação, o experimentador apresentou aos sujeitos uma coleção de mini-brinquedos. Solicitou-se aos sujeitos que prestassem atenção nas ações do experimentador para depois explicarem o que ele havia feito. No caso da adição, o experimentador entregou ao sujeito 3 mini-brinquedos, em seguida mais dois, e perguntou: *"O que eu fiz?"*. Para a subtração, o experimentador entregou ao sujeito uma caixinha contendo 5 mini-brinquedos e retirou 3 deles, em seguida, repetiu-se a pergunta anterior. A entrevista só tinha continuidade se o sujeito fosse capaz de descrever e quantificar o que o experimentador havia feito com os objetos.

Todos os sujeitos foram capazes de explicar o que o experimentador havia realizado com os mini-brinquedos, contudo, para alguns, foi necessário repetir o procedimento de 2 a 4 vezes, variando o número de objetos em cada repetição.

O Quadro II (P. 66) apresenta as respostas dos sujeitos quanto às descrições das ações já num primeiro procedimento ou após repeti-lo. As respostas das ações de reunir (adição) e ações de tirar (subtração) são ilustradas em um mesmo quadro.

Como podemos observar no Quadro II, no tocante às ações de reunir objetos, quatro sujeitos foram capazes de descrever a ação logo após o procedimento do experimentador e para oito sujeitos houve repetição do mesmo. Exemplos:

> CAR (9;2/3ª série): Descreveu a ação logo após observar o procedimento do experimentador: - **"Você me deu 3 brinquedos mais 2 brinquedos e eu fiquei com 5 brinquedos."**
>
> NAI (8;11/3ª série): O experimentador precisou repetir uma vez o procedimento, variando os objetos e seu número: O que eu estou fazendo? - **"Está dando brinquedos."** Estou só dando brinquedos? - **"É."** Repetiu-se o procedimento. O que eu fiz? - **"Você me deu 2 flores mais 4 homens."**

Nas ações de tirar objetos, seis sujeitos foram capazes de descrever a ação do experimentador imediatamente após seu procedimento, havendo a necessidade de repetição do mesmo para seis sujeitos. Exemplos:

> DJE (8;5/2ª série): Descrição logo após observação: O que eu fiz? - **"Você dividiu os brinquedos entre nós, você ficou com 3 e deu 2 para mim."**
>
> ARI (8;3/2ª série): Houve repetição do procedimento: O que eu fiz? - **"Você diminuiu os brinquedos que você tem."** Como assim? - **"Diminuindo."** Repetição da ação variando o número de objetos: O que eu fiz? - **"Você tinha 7 e me deu 2."**

Quadro II - Descrição das Ações - Reunir/Tirar		
	Adição (Reunir)	Subtração (Tirar)
Sujeitos que descreveram corretamente, a partir do primeiro procedimento	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª JUL:9;1/2ª DJE:8;5/2ª ALV:8;6/2ª RAP:8;9/2ª
Sujeitos que descreveram corretamente, após repetição do procedimento	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª NAI:8;11/3ª JUL:9;1/2ª ALV:8;6/2ª ARI:8;3/2ª HER:8;0/2ª	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª NAI:8;11/3ª ARI:8;3/2ª HER:8;0/2ª

Relações entre as operações de adição e subtração e as ações de reunir/tirar

A segunda etapa desta entrevista consistiu em verificar se os sujeitos estabeleciam alguma relação entre as ações de reunir/tirar objetos com as operações de adição e subtração. Portanto, após o sujeito ter descrito o procedimento realizado pelo experimentador com os mini-brinquedos, foram formuladas as seguintes questões: "O que foi feito agora com os brinquedos, tem alguma coisa de parecido com o que você faz na sala de aula?" "O que fizemos com os brinquedos, é parecido com uma adição[3]/subtração?"

Duas categorias foram construídas para classificar os sujeitos quanto às suas respostas (De acordo com Brenelli; 1993):

Categoria A - sujeitos que respondiam às duas questões, reconhecendo a operação em apenas uma delas;

Categoria B - sujeitos que respondiam às duas questões, reconhecendo a operação nas duas questões.

O Quadro III (P. 68) apresenta as categorias **A** e **B** e a classificação dos sujeitos em cada uma delas. São categorizados os sujeitos tanto nos dados referentes à adição quanto à subtração.

Dos doze sujeitos pertencentes à pesquisa, seis reconheceram as ações de reunir com algo parecido a que se faz em sala de aula e com a operação de adição; os outros seis sujeitos reconheceram as semelhanças em apenas uma das questões. Exemplos:

DJE (8;5/2ª série): Reconheceu a operação nas duas questões: Isto que eu fiz, tem alguma coisa de parecido com o que você faz na sala

[3]O experimentador utilizou o termo adição ao invés de soma porque os sujeitos estavam familiarizados com esta expressão.

Quadro III - Relações entre as Operações de Adição e Subtração e as Ações de Reunir/Tirar		
	Adição	Subtração
Categoria B Sujeitos que respondiam as 2 questões, reconhecendo a operação nas 2 questões	CAR:9;2/3ª	
		MEI:9;2/3ª
	REN:9;8/3ª	REN:9;8/3ª
	NAI:8;11/3ª	
		JUL:9;1/2ª
	DJE:8;5/2ª	DJE:8;5/2ª
	ALV:8;6/2ª	ALV:8;6/2ª
		ARI:8;3/2ª
	RAP:8;9/2ª	RAP:8;9/2ª
Categoria A Sujeitos que respondiam as 2 questões, reconhecendo a operação em apenas 1 delas		CAR:9;2/3ª
	MEI:9;1/3ª	
	DAN:9;10/3ª	DAN:9;10/3ª
	LEA:10;11/3ª	LEA:10;11/3ª
		NAI:8;11/3ª
	JUL:9;1/2ª	
	ARI:8;3/2ª	
	HER:8;0/2ª	HER:8;0/2ª

de aula? - **"Tem."** O quê? - **"Conta de dividir."** Por que com a conta de dividir? - **"Por exemplo, se eu divido 1999 por 2, eu estou dividindo um monte de brinquedos que você tem e divido por dois montinhos."** Só com a conta de dividir que é parecido isto que eu fiz? - **"Com a conta de adição."** Como assim? - **"Porque primeiro você colocou 3 e daí mais 2 formou 5."** Isto que a gente faz com os brinquedos, é parecido com uma adição? - **"É."** Por quê? - **"Porque a gente juntou os brinquedos."**

ARI (8;5/2ª série): Reconheceu a operação em apenas uma das questões: Isto que eu faço com os brinquedos, tem alguma de parecido com o que você faz na sala de aula? - **"Não."** Por que não? - **"Tem, as plantas que a professora desenha no quadro."** Entre os brinquedos havia algumas flores. Tem mais alguma coisa de parecido? - **"Não."** Tem certeza que não há mais nada de parecido? - **"Bom, este daqui é quando a servente leva lanche."** O sujeito apontou para os pratinhos de brinquedo. O que a gente faz com os brinquedos, é parecido com a adição? - **"É"**. Por quê? - **"Porque na adição faz 3+2, e aqui tem 3+2."** O sujeito apontou para os brinquedos.

Sete dos doze sujeitos pertencentes à amostra reconheceram as ações de tirar objetos a algo parecido com o que fazem em sala e com a operação de subtração; cinco sujeitos apontaram alguma semelhança em apenas uma destas questões. Exemplos:

ALV (8;6/2ª série): Reconheceu a operação nas duas questões: Isto que você fez, tem alguma coisa de parecido com o que você faz na sala de aula? - **"Tem."** Com o quê? - **"Com conta de menos."** Isto que eu fiz com os brinquedos é parecido com uma subtração? - **"É, então, você tem 5 e você dá 2, aí você faz a conta de menos para saber qual a outra quantia."**

LEA (10;11/3ª série): Reconheceu a operação em apenas uma das questões: Isto que nós fizemos é parecido com o que você faz na sala de aula? - **"Não."** Por que você acha isso? - **"Eu não gosto de ficar emprestando as minhas coisas para os outros."** Isto é parecido com uma subtração? - **"É."** Por quê? - **"Porque você está tirando e dando para mim, está diminuindo."**

Dois sujeitos que haviam estabelecido semelhança para apenas uma questão no caso da operação de adição, conseguiram estabelecer relações nas duas questões propostas na ocasião da subtração. Exemplo:

JUL (9;1/2ª série): Reconhece a operação de subtração nas duas questões: Isto que fizemos agora, tem alguma coisa de parecido com o que você faz na sala de aula? - **"Não."** Não tem nada de parecido? - **"Só quando a gente faz conta, vamos supor, aí a gente faz 5, daí na conta de menos e daí a gente reparte."** Isto que nós fizemos com os brinquedos é parecido com uma subtração? - **"É."** Por que é parecido? - **"Porque é tipo fazer conta."**

Significado da operação de adição e subtração

Avaliar o significado que os sujeitos atribuem à adição e subtração também foi um dos objetivos desta pesquisa. Resolver as operações, aplicando suas regras e utilizando seus signos matemáticos, não assegura a compreensão do seu significado. Voltado para este objetivo, o experimentador colocou aos sujeitos as seguintes questões: "O que é uma adição/subtração?"

As respostas apresentadas pelos sujeitos, reunidas no Quadro IV, foram classificadas em três categorias (De acordo com Brenelli; 1993):

Categoria A - Explicação da operação de adição/subtração de forma imprecisa;

Categoria B - Explicação descritiva dos termos das operações de adição/subtração;

Categoria C - Explicação com compreensão do significado das operações.

Como podemos observar no Quadro IV (P. 71), dos doze sujeitos da amostra, apenas um apresentou explicação imprecisa tanto para adição quanto para subtração - Categoria A:

HER (8;0/2ª série): Resposta para a subtração: O que é uma subtração? O sujeito não disse nada por alguns instantes. O experimentador repetiu a questão: O que é uma conta de menos? - **"Conta de menos é..."** O que é? - **"Conta de menos é.... eu não sei."** Resposta para a adição: O que é uma adição? - **"São as contas."** Que contas? - **"As contas que a gente faz."**

Quadro IV - Significado da Adição e Subtração		
	Adição	Subtração
Categoria C Explicação com compreensão do significado da operação	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª DJE:8;5/2ª	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª NAI:8;11/3ª RAP:8;9/2ª
Categoria B Explicação descritiva	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª NAI:8;11/3ª JUL:9;1/2ª ALV:8;6/2ª ARI:8;3/2ª RAP:8;9/2ª	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª DJE:8;5/2ª ALV:8;6/2ª ARI:8;3/2ª
Categoria A Explicação imprecisa	HER:8;0/2ª	HER:8;0/2ª

Na Categoria B, que reúne as explicações descritivas, enquadram-se oito sujeitos para a operação de adição e sete para a operação de subtração. Alguns exemplos desta categoria podem ser observados a seguir:

> ALV (8;6/2ª série): O que é uma adição? - **"Você tem 50, e você quer saber quanto é 50 mais 100, dai você coloca a conta de mais."** Como assim? - **"Você tem uma soma e você quer saber quanto, ai você soma os dois resultados."**

> ARI (8;3/2ª série): O que é uma adição? - **"Adição é conta de mais."**

> JUL (9;1/2ª série): O que é uma subtração? - **"Subtração é menos, daí eu tenho 5 brinquedos, se eu quiser repartir 3 para uma colega minha, se eu der 3 para ela daí eu fico com 2."**

> MEI (9;1/3ª série): O que é uma subtração? - **"São as contas de menos."**

Observa-se que a maioria das respostas dos sujeitos, N=8 e N=7, respectivamente à adição e subtração, centraram-se nesta categoria, ou seja, a explicação voltou-se para a descrição.

Conforme o Quadro IV, três sujeitos foram capazes de explicar a adição e quatro a subtração, demonstrando compreender seus respectivos significados: juntar e tirar (Categoria C). Exemplos:

> REN (9;8/3ª série): O que é uma adição? - **"É somar, é juntar."**

> DJE (8;5/2ª série): O que é uma operação de adição? - **"É você juntar."**

> CAR (9;2/3ª série): O que é uma subtração? - **"É diminuir, é tirar um certo número de outro."**

RAP (8;9/2ª série) e NAI (8;11/3ª série) que definiram a operação de adição de forma descritiva, explicaram a subtração com compreensão do significado.

RAP: O que é uma subtração? - **"É tirar."**

NAI: O que é uma subtração? - **"É tirar."**

Os resultados obtidos na avaliação concernente à noção de adição e subtração revelam que a maioria dos sujeitos apenas descrevem as operações, não possuindo compreensão acerca do real significado destas. Embora os sujeitos sejam capazes de resolver graficamente as operações, como podemos verificar no item reservado à avaliação do desempenho nas operações, estes, em sua maioria, conseguem definir adição e subtração somente em termos descritivos. Além de suas definições restringirem-se apenas aos aspectos de descrição das operações, verificou-se também que os sujeitos possuem dificuldade para identificar a semelhança entre as ações materiais de reunir/tirar e as operações em questão. Isto porque o significado de reunir/tirar não se mostra nos objetos em si, nos fatos observáveis, mas sim nas coordenações que se estabelecem a partir da ação material, pois como afirma REN (9;8/3ª série):

> Adição - **"É parecido com adição porque nós estamos juntando."** Subtração - **"É parecido porque quando a gente está tirando, a gente está fazendo uma subtração."**

6.1.4 Valor Posicional da Numeração

Entender o valor posicional significa ter construída a idéia de que: *"cada algarismo que forma um numeral de dois algarismos indica quantidades que são determinadas pelo lugar ou posição na qual aparecem"* (Kamii; 1988, P. 90). Ou seja, é ter compreensão de que o "1" do "16", por exemplo, significa 10 porque o "1" está no lugar reservado às dezenas.

Neste sentido, partimos do pressuposto de que entender este enunciado é fundamental para que o sujeito possa solucionar as operações de adição e subtração, uma vez que as operações exigem reagrupamentos e empréstimos, respectivamente, com base no valor numérico decimal.

Assim, a prova reservada à avaliação do valor posicional consistiu em solicitar ao sujeito que resolvesse três operações de adição apresentadas com colunas desalinhadas, isto é, a unidade, existente na primeira parcela da adição, era colocada na casa das dezenas (cf. Anexo IV).

Em primeiro lugar, pediu-se ao sujeito que lesse cada termo integrante da operação. Feita a leitura o experimentador solicitou a resolução escrita da mesma e após o sujeito ter efetuado a operação o experimentador perguntou: "Esta operação é assim mesmo? Este é o resultado correto?"

Quanto à leitura dos termos da operação, todos os sujeitos efetuaram-na corretamente. HER (8;0/2ª série) assim disse: **Quatro, trinta e cinco e vinte e quatro.** Da mesma forma que HER, todos os demais sujeitos leram sem dificuldades todas as operações. Lendo, portanto, o algarismo referente à unidade como unidade (Ex: quatro).

As diferenças em relação a esta prova emergem quando é solicitado ao sujeito que resolva a operação, ou seja, a unidade passa a ser resolvida como dezena apenas pelo fato de se encontrar no lugar desta. O número 4, por exemplo, foi resolvido como sendo 40.

A Figura 6.13 (P. 75), ilustra as resoluções desenvolvidas por MEI (9;1/3ª série), o qual considera todas as unidades com valor de dezena.

Assim como MEI, mais sete sujeitos resolveram as operações considerando a unidade como dezena. Apenas DJE (8;5/2ª série) resolveu as duas primeiras situações considerando a unidade com valor de unidade; os demais sujeitos, ALV (8;5/2ª série), ARI (8;3/2ª série) e RAP (8;9/2ª série) resolveram somente a última situação solicitada considerando o valor da unidade. Na Figura 6.14 (P. 75), são apresentadas as resoluções de DJE e ALV.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 35 \\ +\ 24 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ +\ 10 \\ \hline 32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 22 \\ +\ 11 \\ \hline 93 \end{array}$$

Fig. 6.13 - Valor Posicional: Resoluções de MEI.

$$\begin{array}{r} 4 \\ {}^{1}35 \\ +\ 24 \\ \hline 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ +\ 10 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 22 \\ +\ 11 \\ \hline 39 \end{array}$$

Fig. 6.14 - Valor Posicional: Resoluções de DJE e ALV.

Embora um número significativo dos sujeitos tenha resolvido as operações considerando a unidade com valor de dezena, na ocasião das perguntas levantadas pelo experimentador, sete sujeitos justificaram seus resultados, seja pelo acréscimo do zero à unidade, seja pela troca de posição da unidade para a casa das unidades. Os outros cinco sujeitos restantes não justificaram suas soluções, deixando-as da forma como haviam feito.

A Tabela VII (P. 77) apresenta os tipos de resoluções dos sujeitos nas três operações solicitadas. A primeira coluna indica o número de vezes que o sujeito efetuou a soma das unidades com valores de unidades; a segunda indica o número de vezes que foram somadas as unidades com valores de dezenas. O sinal positivo (+), que aparece ao lado de cada número da segunda coluna (Unidade com Valor de Dezena), é relativo aos sujeitos que justificaram as respostas encontradas: acrescentaram o 0 zero à unidade ou inverteram sua posição.

O exemplo de CAR (9;2/3ª série), apresentado na Figura 6.15 (P. 76), mostra as soluções das operações considerando a unidade com valor de dezena, entretanto, com o acréscimo do 0 à unidade para justificar as respostas.

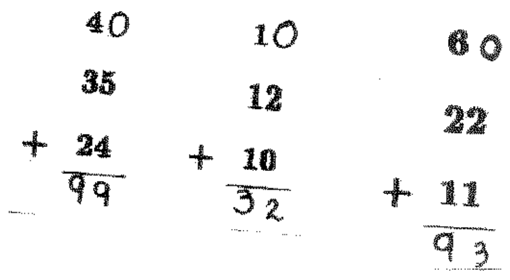


Fig. 6.15 - Valor Posicional: Resoluções de CAR.

Na Figura 6.16 (P. 77), observa-se as resoluções de DAN(9;10/3ª série) o qual resolve as operações da mesma forma que CAR, contudo, ao invés de fazer o acréscimo do 0, ele inverte a posição da unidade, passando-a para a casa das unidades.

VII - Valor Posicional da Numeração			
Série	Sujeito	Unidade com Valor de Unidade	Unidade com Valor de Dezena
3ª	CAR(9;2)	–	3^+
	MEI(9;1)	–	3^+
	DAN(9;10)	–	3^+
	REN(9;8)	–	3
	LEA(10;11)	–	3
	NAI(8;11)	–	3
2ª	JUL(9;1)	–	3^+
	DJE(8;5)	2	1^+
	ALV(8;6)	1	2^+
	ARI(8;3)	1	2
	RAP(8;9)	1	2^+
	HER(8;0)	–	3

Tabela 6.7 - Valor Posicional da Numeração

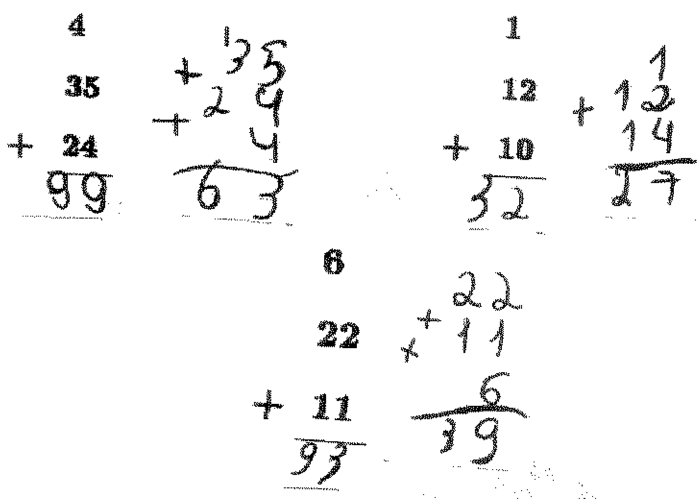


Fig. 6.16 - Valor Posicional: Resoluções de DAN.

Um estudo realizado por Zunino (1995) revelou que as crianças possuem muita dificuldade para entender o valor posicional, sobretudo acerca do papel ocupado pelo 0, quando este acompanha outros números. Suas pesquisas revelaram que as crianças das séries iniciais não compreendem que *" o que o 0 marca, quando faz parte de um número de dois ou mais algarismos, é que o lugar no qual está posicionado está vazio, que não há nenhum elemento que corresponda a esta potência da base"* (P. 124). Neste sentido, o fato de acrescentar o 0 à unidade ou até mesmo o de inverter sua posição não é indicativo de um real entendimento acerca do valor posicional, uma vez que os sujeitos podem estar apenas reproduzindo o algoritmo aprendido no contexto escolar, pois como afirmou JUL (9;1/2ª série): - **"Esta conta está errada porque a professora não passa no quadro assim"**. Após fazer esta afirmação JUL inverteu a posição da unidade para a casa das unidades.

A partir dos dados coletados constatou-se que apenas quatro sujeitos resolveram a unidade com valor de unidade, entretanto, não o fizeram em todas as operações propostas. Todos, de certa forma, resolveram a unidade existente na casa das dezenas como sendo dezena, embora a tivessem lido como unidade.

Os sujeitos, invariavelmente, agem de forma a considerar que, se um número está no lugar da dezena, logo, ele é uma dezena. O fato de tê-lo lido com seu valor real de unidade e da inexistência de um 0, por exemplo, não requer a atenção dos sujeitos. Eles se atêm aos aspectos figurativos da operação. Efetuar a operação $4 + 35 + 24$ e encontrar o resultado 99 é indiferente a muitos sujeitos, pode não ser lógico, entretanto, eles resolveram as operações de forma a considerar *"unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena"*.

6.1.5 Resolução Mental de Operações

Kamii (1994/1995) afirma que um dos efeitos nocivos do uso do algoritmo é o de tornar a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos da operação e, sobretudo, da necessidade de lápis e papel para solucioná-la.

Neste sentido, o objetivo desta etapa do presente trabalho versou em verificar se os sujeitos eram capazes de solucionar mentalmente operações de adição e subtração.

Foram propostas aos sujeitos seis operações, sendo três de adição e três de subtração apresentadas de forma horizontal (cf. Anexo V). O motivo de se trabalhar com as operações na forma horizontal é o de identificar se os sujeitos respeitam o valor posicional, ou seja, se eles somam e subtraem as dezenas e as unidades mentalmente de forma ordenada, respeitando o valor assumido por cada algarismo. As operações foram trabalhadas com os sujeitos em sessões diferentes, num total de três. A cada sessão foi solicitada a resolução de uma operação de adição e uma de subtração.

O primeiro passo consistiu em solicitar ao sujeito a resolução mental de cada operação e o anúncio de seus resultados, em seguida, pediu-se a resolução escrita.

A Tabela VIII (P. 80) reúne os resultados obtidos na resolução mental das operações de adição e subtração. São apresentados os números de acertos (A) e de erros (E) tanto para as operações de adição quanto de subtração. Os números de 1 a 3 são referentes a cada operação realizada. A letra "c" diz respeito à reposta correta e a letra "e" à incorreta.

Quanto à resolução mental, pode-se observar que em relação à subtração todos os sujeitos, com excessão de HER (8;0/2ª série) que errou em uma situação, solucionaram corretamente as operações propostas. Convém ressaltar que as operações de subtração apresentadas aos sujeitos não envolviam empréstimos e os números eram relativamente baixos.

As operações de adição envolviam reagrupamentos e os números não eram tão baixos. Nota-se, porém, na mesma tabela (VIII), que há uma incidência maior de erros. Dos doze sujeitos da amostra, apenas três obtiveram êxito na re-

VIII - Resolução Mental das Operações de Adição e Subtração													
Adição							Subtração						
Série	Sujeito	1	2	3	A	E	Série	Sujeito	1	2	3	A	E
3ª	CAR(9;2)	c	c	c	3	-	3ª	CAR(9;2)	c	c	c	3	-
	MEI(9;2)	c	e	c	2	1		MEI(9;1)	c	c	c	3	-
	DAN(9;10)	c	c	c	3	-		DAN(9;10)	c	c	c	3	-
	REN(9;8)	c	e	e	1	2		REN(9;8)	c	c	c	3	-
	LEA(10;11)	e	c	c	2	1		LEA(10;11)	c	c	c	3	-
	NAI(8;11)	c	e	c	2	1		NAI(8;11)	c	c	c	3	-
2ª	JUL(9;1)	c	e	c	2	1	2ª	JUL(9;1)	c	c	c	3	-
	DJE(8;5)	e	e	c	1	2		DJE(8;5)	c	c	c	3	-
	ALV(8;6)	c	e	c	2	1		ALV(8;6)	c	c	c	3	-
	ARI(8;3)	c	c	c	3	-		ARI(9;2)	c	c	c	3	-
	RAP(8;9)	c	e	c	2	1		RAP(8;9)	c	c	c	3	-
	HER(8;0)	e	e	e	-	3		HER(8;0)	c	e	e	1	2

Tabela 6.8 - Resolução Mental nas Operações de Adição e Subtração

solução mental em todas as situações; HER (8;0/2ª série) errou em todas as operações e os demais sujeitos ficaram em uma margem de erros entre 1 e 2.

Os erros cometidos pelos sujeitos, quando da resolução mental das operações de adição, são caracterizados pelo fato de os sujeitos ignorarem o valor posicional dos algarismos, a unidade, por exemplo, é somada junto com as dezenas. Este fato vem ao encontro de dados obtidos na avaliação do valor posicional (colunas desalinhadas), na qual todos os sujeitos também somaram as unidades com valor de dezena. Além disso, os erros também aparecem porque os sujeitos esquecem de somar, junto às dezenas, o "vai 1", não obtendo, assim, o êxito nas resoluções.

A Figura 6.17 (P. 81), apresenta as respostas de NAI (8;11/3ª série), REN (9;8/3ª série) e HER (8;0/2ª série) as quais exemplificam os erros por negligenciarem o valor posicional da numeração e por desconsiderarem a necessidade de somar o "vai 1".

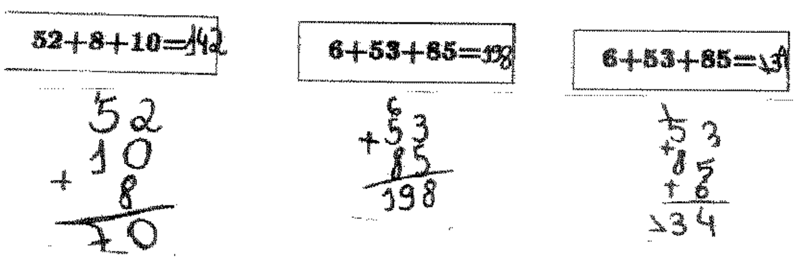


Fig. 6.17 - Resolução Mental: Erros de NAI, REN e HER.

Embora o número de erros possa ser considerado significativo para o caso da resolução mental, observou-se que o mesmo não acontece com a resolução escrita, a qual apresenta uma incidência de erros consideravelmente menor.

A Tabela IX (P. 82) reúne os resultados obtidos nas respostas escritas para as operações de adição e subtração. São apresentados os números de acertos (A) e de erros (E) tanto para as operações de adição quanto de subtração. Os números de 1 a 3 são referentes a cada operação realizada. A letra "c" diz respeito à reposta correta e a letra "e" à incorreta.

IX - Resolução Escrita das Operações de Adição e Subtração													
Adição							Subtração						
Série	Sujeito	1	2	3	A	E	Série	Sujeito	1	2	3	A	E
3ª	CAR(9;2)	c	c	c	3	-	3ª	CAR(9;2)	c	c	c	3	-
	MEI(9;1)	c	c	c	3	-		MEI(9;1)	c	c	c	3	-
	DAN(9;10)	c	c	c	3	-		DAN(9;10)	c	c	c	3	-
	REN(9;8)	c	c	c	3	-		REN(9;8)	c	c	c	3	-
	LEA(10;11)	c	c	c	3	-		LEA(10;11)	c	c	c	3	-
	NAI(8;11)	c	e	c	2	1		NAI(8;11)	c	c	c	3	-
2ª	JUL(9;1)	c	c	c	3	-	2ª	JUL(9;1)	c	c	c	3	-
	DJE(8;5)	e	c	c	2	1		DJE(8;5)	c	c	c	3	-
	ALV(8;6)	c	e	c	2	1		ALV(8;6)	c	c	c	3	-
	ARI(8;3)	c	c	c	3	-		ARI(8;3)	c	c	c	3	-
	RAP(8;9)	c	c	c	3	-		RAP(8;9)	c	c	c	3	-
	HER(8;0)	e	e	c	1	2		HER(8;0)	c	e	e	1	2

Tabela 6.9 - Resolução Escrita nas Operações de Adição e Subtração

Quanto à adição, observa-se que oito sujeitos acertaram todas as soluções escritas e somente quatro não obtiveram êxito em pelo menos uma das operações.

Com relação às resoluções escritas para as operações de subtração, nota-se que o número de êxito é ainda mais significativo, uma vez que apenas HER (8;0/2ª série) não efetuou corretamente as operações. Os demais sujeitos apresentaram êxito nas três situações.

Os resultados alcançados nas resoluções escritas, em que o número de êxito é grande, não entram em contradição com os dados coletados nas resoluções da prova de desempenho em adição e subtração, na qual a obtenção do êxito também é bastante significativa.

Os dados obtidos quanto às resoluções mentais e escritas confirmam uma maior dificuldade, por parte dos sujeitos, em resolver mentalmente as operações. Esta dificuldade é explicada pelo fato dos sujeitos, na maioria das vezes, pensarem em cada coluna como se fossem unidades, desconsiderando o valor posicional da numeração. Os resultados alcançados nesta etapa da avaliação são similares aos obtidos por Kamii (1994/1995), os quais também explicitam índices de erros significativos em relação às resoluções mentais.

Kamii (ibid.) ressalta que além das crianças considerarem cada coluna como se tratando de unidades isoladas, os dados sugerem uma certa dependência, por parte dos sujeitos, quanto ao uso de lápis e papel para suas resoluções. Daí possuírem maiores dificuldades nos raciocínios mentais.

6.1.6 Procedimento de Resolução das Operações de Adição e Subtração

A análise dos procedimentos empregados para solucionar operações de adição e subtração teve o objetivo de verificar a compreensão do sujeito em relação aos processos que envolviam tais operações, ou seja, compreensão em torno dos reagrupamentos e empréstimos. Isto é, se os sujeitos eram capazes de explicar, por meio de ações materiais, o que usualmente resolviam de forma escrita.

A avaliação dos procedimentos constou de três sessões com cada sujeito. Solicitou-se, em cada sessão, a resolução mental com devida explicação de uma operação de adição e de uma subtração, num total de seis operações[4].

O experimentador entregou ao sujeito um cartão contendo uma operação escrita e solicitou sua resolução mental. A seguir perguntou como o sujeito

[4]Foram aplicadas três operações de adição e três de subtração, entretanto, nossa análise recairá apenas sobre uma das três situações de cada operação proposta.

havia feito para chegar àquela resposta, independente de estar certa ou errada. Dada a explicação do procedimento empregado, o experimentador solicitou ao sujeito que mostrasse por meio de fichas de papel cartão o procedimento utilizado (cf. Anexo VI).

Todos os doze sujeitos foram capazes de explicar, oralmente, como haviam desenvolvido a operação. Porém, diante das explicações dadas pelos sujeitos, verificou-se que nenhum deles apresentou procedimentos que ultrapassassem a descrição do algoritmo.

Para as operações ($27+15=$ e $42-18=$), DJE (8;5/2ª série) e CAR (9;2/3ª série) assim explicitaram:

> DJE: Como você fez esta operação? - **"Eu somei 7 com mais 5. Daí deu 12, aí foi 1 para a casa das dezenas, aí tinha 2+1, aí como foi 1 para a casa das dezenas eu somei 2+1+1, deu 4."**

> CAR: Como você fez esta operação? - **"Primeiro eu emprestei 1 do 4 porque de 2 não dava para tirar 8. Fiquei com 12. 12 tira 8 ficam 4. Depois aqui ficou valendo 3, 3 tira 1 ficam 2, 24."**

Apesar das respostas centrarem-se na descrição do algoritmo, pode-se observar diferenças qualitativas nos procedimentos utilizados nas situações propostas com as fichas.

Os resultados obtidos permitiram organizar os procedimentos utilizados pelos sujeitos em três categorias:

Categoria A - Indiferenciação entre dezenas e unidades;

Categoria B - Diferenciação parcial entre dezenas e unidades;

Categoria C - Diferenciação entre dezenas e unidades;

O Quadro V (P. 86) indica os procedimentos empregados pelos sujeitos na resolução das operações de adição e subtração.

Categoria A: Esta categoria A é caracterizada por uma indiferenciação entre as unidades e as dezenas. Os sujeitos usam as fichas para representar o algoritmo. As dezenas são equiparadas às unidades, uma dezena equivale a uma ficha e uma unidade equivale a uma ficha. As fichas são utilizadas para ilustrar o arranjo espacial dos dígitos da operação. As formas de representação observadas nesta categoria se aproximam mais de um desenho do algoritmo que de uma representação dos reais valores numéricos dos algarismos da operação.

HER (8;0/2ª série) para representar a operação 27 + 15, utiliza-se de apenas quatro fichas para compôr sua representação. Isto é, o número 2 é representado por uma ficha, o número 7 por mais uma ficha e assim sucessivamente, como pode ser visto na Figura (7.1 - P. 128).

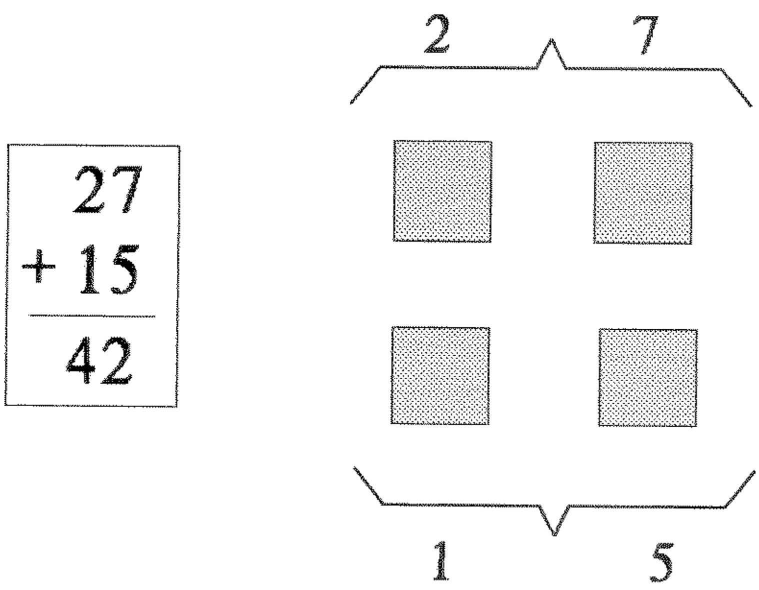


Fig. 6.18 - Representação de HER para Operação de Adição.

ARI (8;3/2ª série) para a mesma adição 27 + 15 também procede de forma a representar os algarismos em termos unitários. A representação de ARI é

Quadro V - Procedimento de Resolução das Operações de Adição e Subtração		
	Adição	Subtração
Categoria C Diferenciação entre Dezenas e Unidades	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª
Categoria B Diferenciação Parcial entre Dezenas e Unidades	NAI:8;11/3ª DJE:8;5/2ª ALV:8;6/2ª RAP:8;9/2ª	NAI:8;11/3ª DJE:8;5/2ª ALV:8;6/2ª RAP:8;9/2ª
Categoria A Indiferenciação entre Dezenas e Unidades	DAN:9;10/3ª MEI:9;1/3ª JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª LEA:10;11/3ª HER:8;0/2ª	DAN:9;10/3ª MEI:9;1/3ª JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª LEA:10;11/3ª HER:8;0/2ª

organizada segundo mostra a Figura (6.19 - P. 87).

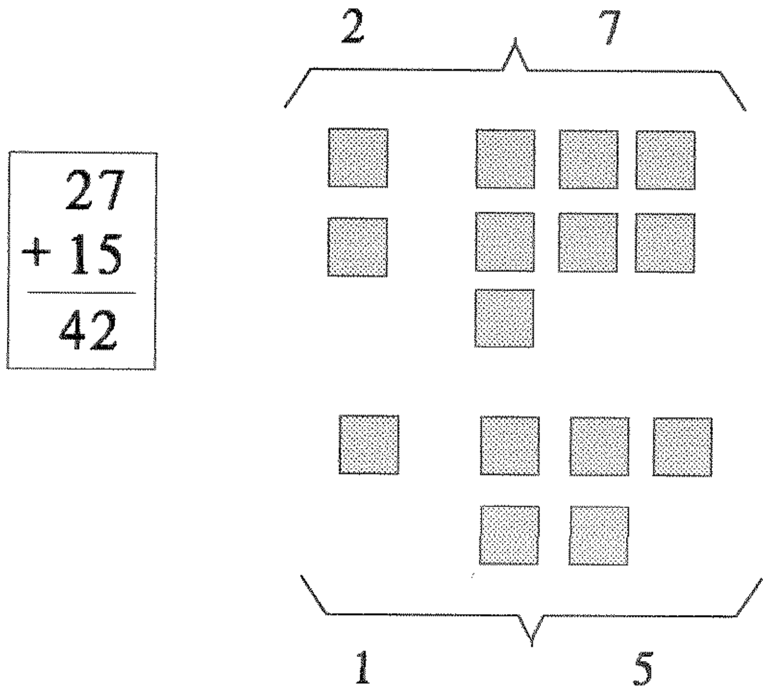


Fig. 6.19 - Representação de ARI para a Operação de Adição.

Nas condutas explicitadas por HER e ARI observa-se que o valor dos números são desconsiderados, uma vez que 27 fichas, por exemplo, não são apresentadas com seu valor absoluto. Os sujeitos se contentam em representar o número 27 com duas fichas, para o caso de HER, e duas fichas mais sete fichas, para o caso de ARI.

O procedimento de HER, mostrado na Figura 6.20 (P. 88), ilustra a categoria A (Indiferenciação entre Dezenas e Unidades). Para melhor compreensão transcreveu-se sua representação e seu protocolo.

> HER - Operação 27 + 15: Como você fez esta operação? - **"Eu fiz 7+5 daí deu 12. Aí foi 1 lá em cima . Aí eu comecei do 1 e fui para o outro 1, depois contei o 2."** Questionamentos após a contagem das fichas: Como você faz esta operação com as fichas? - **"Eu pego as fichas e faço a conta."** Como você faz a conta ? Faça para mim. O sujeito pegou o monte de 27 fichas e foi dispondo sobre a mesa 1 ficha para representar cada numeral da operação, incluindo o resultado. Colocou 1 ficha para representar o 2 , outra para o 7. Abaixo destas colocou mais 2, representando

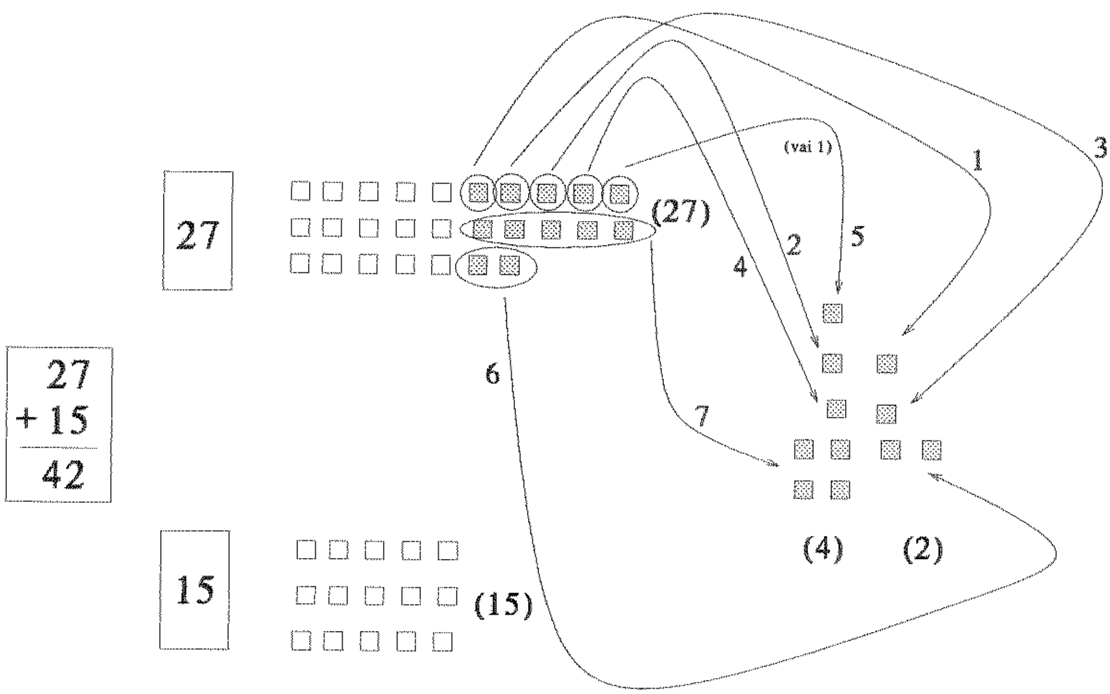


Fig. 6.20 - Representação do Procedimento Empregado por HER na Operação de Adição - Categoria A.

o 1 e o 5. Abaixo de todas colocou 4 fichas do lado esquerdo e 2 do lado direito, representando o resultado. Em cima da ficha que representava o 2, ele colocou mais 1 ficha representando o "vai um". Me mostre o resultado da sua conta. - **"É este. 42."** E estas fichas que sobraram, elas não fazem parte da conta? - **"O resto das fichas eu deixo aí."** Você não precisa usar? -**"Não."** Mas aqui você não contou 27 e depois 15 fichas? - **"Contei."** Por que você não usa estas que você contou? - **"Eu só preciso destas para fazer."** O sujeito apontou para a representação que havia feito. Onde está o resultado 42? O sujeito apontou para 4 fichas com mais 2 fichas. É só assim que se faz a conta? - **"É."**

Na representação feita por HER cada numeral da operação equivale a uma ficha. O reagrupamento "vai 1" foi demonstrado também com apenas uma ficha. O resultado 42 é representado por 4 fichas e 2 fichas.

O procedimento empregado por HER nas operações de subtração ilustra esta categoria A (Indiferenciação entre Dezenas e Unidades), como podemos verificar na Figura 6.21 (P. 89) e em seu protocolo.

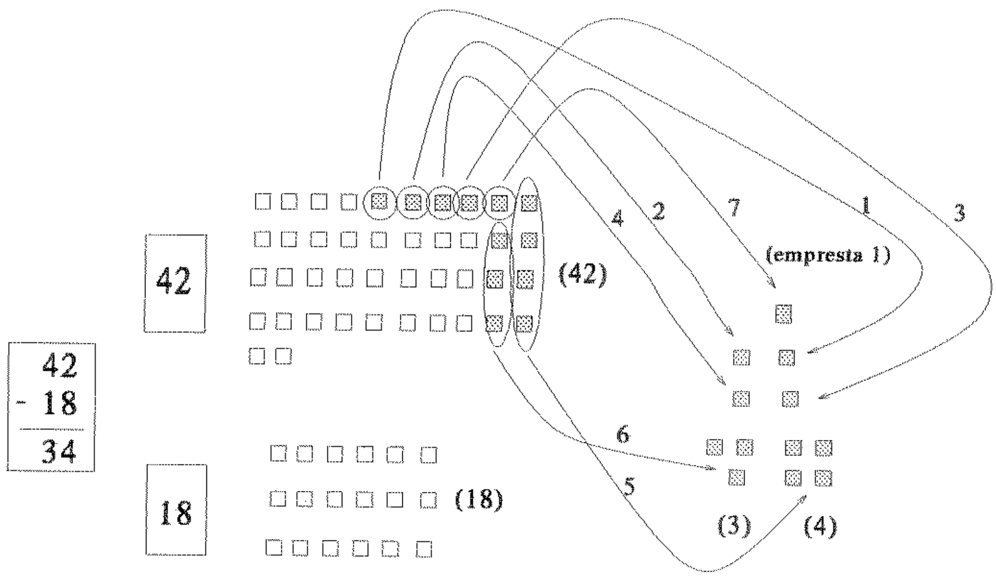


Fig. 6.21 - Representação do Procedimento Empregado por HER na Operação de Subtração - Categoria A.

HER - Operação 42 – 18: Como você fez esta operação? - **"2 não dá para tirar 8, aí eu tenho que emprestar. Fica 12. Aí**

dá....." Quanto dá 12-8? O sujeito contou nos dedos para encontrar o resultado. - **"4. Aqui, 4 tira 1, dá 3."** Questionamentos após a contagem das fichas: Como você faz a conta com as fichas? - **"Faço 42-18."** Como você faz isto com as fichas? Olha, aqui você contou 42 fichas e aqui 18, como você usa estas fichas que você contou para fazer esta continha? - **"Eu uso as fichas para fazer a continha."** Como você faz isto? Me mostre. O sujeito pegou o monte de 42 fichas e foi dispondo sobre a mesa 1 ficha para representar cada numeral da operação, incluindo o resultado. Colocou 1 ficha para representar o 4 , outra para o 2. Abaixo destas colocou mais 2, representando o 1 e o 8. Abaixo de todas colocou 4 fichas do lado direito e 3 do lado esquerdo, representando o resultado. Em cima da ficha que representava o 2, ele colocou mais 1 ficha representando o "empresta um". Qual é o resultado da sua conta, me mostra. O sujeito apontou para as três fichas e para as quatro fichas que havia contado. Este é o resultado da sua conta? - **"É."** E estas fichas que estão aqui, elas sobraram? - **"É."** Por que elas estão sobrando? O sujeito não respondeu. Por que você não usa todas as fichas? - **"Não precisa."** Por que não precisa? - **"Porque a conta está aqui."** Aqui onde? O sujeito apontou para a representação que havia formado. - **"Aqui."** É só com estas fichas que você faz sua conta? - **"É."** Por que você só usa estas aqui? - **"As outras não fazem parte da conta."** Por que elas não fazem parte da conta? - **"A gente não precisa usar."**

Nota-se pelo esquema de HER que não há diferenciação entre dezenas e unidades. As fichas representam o arranjo espacial da operação. Convém ressaltar que HER não obteve êxito na resolução mental desta subtração e o erro persistiu em sua representação. O resultado 34 é demonstrado por 3 fichas e 4 fichas. Assim como no caso da adição, HER não consegue explicar o que fazer com as fichas que sobraram.

O fato de sobrar fichas não consiste em um conflito para o sujeito, ele se contenta em arranjar espacialmente as fichas que julga necessário para representar a operação e seu devido resultado.

Assim como HER, outros três sujeitos não estabeleceram diferença entre dezenas e unidades, quando da elaboração de seus procedimentos. Entretanto, de certa forma, avaçam um pouco à medida que representam as dezenas com o número de fichas correspondentes ao seu valor, mas ainda, em termos unitários.

A utilização do "material dourado" para o ensino do valor numérico decimal pode vir a explicar o fato de os sujeitos procederem de forma a utilizar apenas unidades para representação das dezenas, pois neste material, uma dezena é representada por uma "barra", visivelmente separada por dez unidades, entretanto, apenas uma barra. Este fato conduz a refletir que, embora as crianças saibam realizar os reagrupamentos de base 10 por meio deste material, não significa que estas tenham realmente compreendido o valor numérico decimal, elas podem apenas estar fazendo uso de mais uma técnica transmitida pelo professor.

Neste sentido, os sujeitos desta Categoria A realizam uma representação figurativa da operação e resolvem cada numeral desta como sendo unidade, eles negligenciam o valor posicional da numeração, duas fichas e quatro fichas, por exemplo, são suficientes para quantificar o resultado 24.

Categoria B: Os sujeitos da Categoria B - Diferenciação Parcial entre Dezenas e Unidades - diferem qualitativamente da Categoria A por apresentarem uma diferenciação parcial entre dezenas e unidades, uma vez que o valor de cada parcela é representado pelo seu número correspondente de fichas, assim como seu resultado. Os sujeitos não mais se contentam com uma representação puramente figurativa do algoritmo.

Para representar a operação $27+15$, por exemplo, ALV (8;6/2ª série) o faz utilizando o número total de fichas contadas, assim como se pode observar na Figura (6.22 - P. 92).

Embora a representação da operação seja feita com o número total de fichas contadas, a dificuldade dos sujeitos desta categoria persiste no que concerne aos empréstimos e reagrupamentos; a centração permanece nas unidades e não nas dezenas.

Na Figura 6.23 (P. 93), observa-se os procedimentos relativos a Categoria B com a representação efetuada por ALV (8;6/2ª série) e seu protocolo.

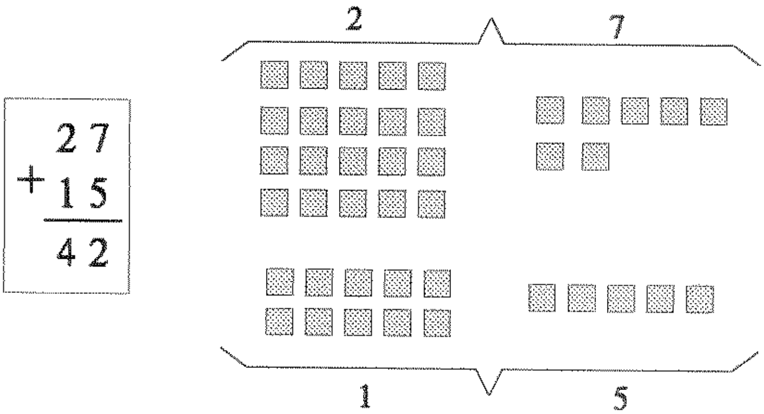


Fig. 6.22 - Representação de ALV para a Operação de Adição.

ALV - Operação 27 + 15: Como você fez esta operação? - **"É que 7+5 é 12. Daí aqui sobra 2 vai 1 para cima. Daí, 2+1 é 3 mais 1 é 4.** Questionamentos após o sujeito ter contado as fichas correspondentes a cada número da operação: Como você faria esta operação, usando as fichas que você contou? O sujeito pegou o monte de 27 fichas e separou 20 e 7. E agora, o que você está fazendo ? - **"Colocando mais 15."** O sujeito também separou 10 fichas e 5 fichas. - **"7+5 que dá 12..."** O que você está fazendo? - **"Deu 12."** E agora, o que você faz? - **"O 1 eu subo para cima lá junto com o 2, daí 2+1 é 3, +1 é 4."** Como você faz isto? - **"2+1, 3, +1, 4."** O sujeito pegou 2 fichas do monte de 20, mais 1 ficha do monte de 10 e juntou com 1 ficha do monte do 12. Me explica melhor; você tinha lá 12. Lá não era o 12 da conta? - **"Era."** E daí? - **"12, que aqui dá 12, daí o 12 não dá para colocar aqui os dois números, aí sobe para cima 1 e aqui fica 2."** Aqui você tem 12, este 12 você tinha feito 7+5, e daí o que você faz agora? - **" Daí aqui não dá para colocar o 12, daí aqui deixo 2 e 1 sobe."** Como você mostra: deixar o 2 e subir o 1 com os 12 que você tem? - **" Deixo 2 embaixo e subo 1 em cima."** O sujeito deixou 2 fichas e subiu 1 ficha para a casa das dezenas. E depois, o que você faz? - **" Daí eu somo 2+1 que dá 3, +1 que dá 4."** Então me mostre. - **"2+1 igual a 3, +1, 4."** O sujeito juntou 2 fichas mais 1 e depois mais 1 ficha. Você faz 2+1, e +1 que tinha aí, é isso? - **"É."** Me mostra agora o resultado de sua operação. O sujeito contou 42 fichas do monte reserva. E o resto das fichas, o que você faz com elas? - **"O resto das fichas, eu coloquei.... daí que lá dá 2, daí só 2+1 é 3, +1 é 4. Daí eu coloco o resultado."** Para o resultado você usa tudo? - **"É."** Mas por que que aqui você só coloca 4 fichas, estas aqui não fazem parte da conta? - **"Fazem."** Por que você não usa? Se você fosse usar todas elas, como você faria? O sujeito não soube responder.

Como pode ser visto na Figura 6.23 (P. 93), ALV separa as unidades das dezenas (20 - 7 e 10 - 5) e até chega a juntar as unidades (7+5). Contudo, ao obter

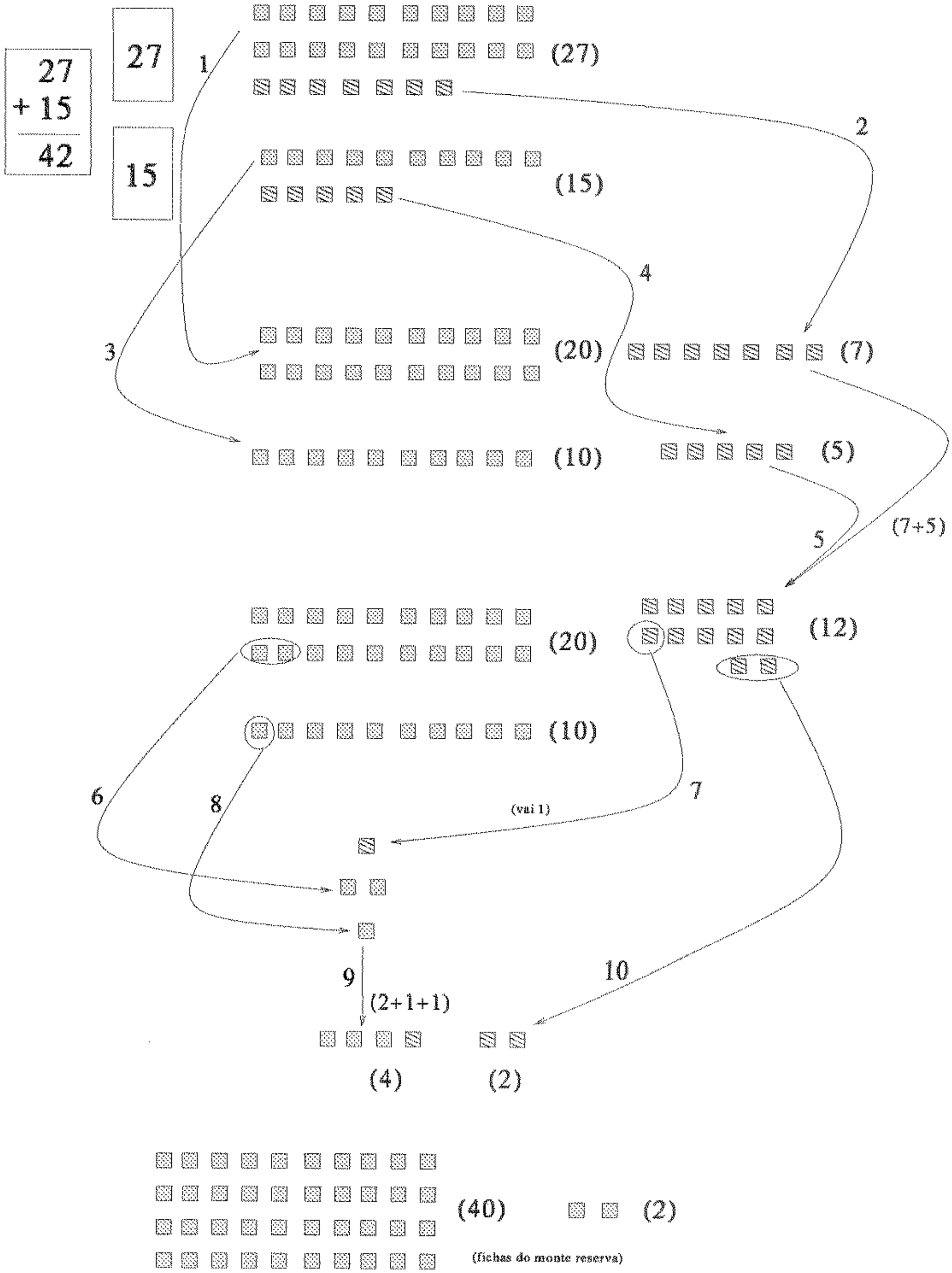


Fig. 6.23 - Representação do Procedimento Empregado por ALV na Operação de Adição - Categoria B.

o resultado da soma das unidades, o "vai um" é representado por apenas uma ficha e não dez. Assim como esta dezena "que foi", as outras restantes também são somadas em termos de unidade. O que deveria ser 10+20+10 fichas acaba resumindo-se em 1+2+1 fichas. O sujeito, então, apresenta o resultado de quatro fichas mais duas fichas ao invés de quarenta e duas, semelhante aos resultados classificados na Categoria A. Contudo, é interessante destacar que, quando o experimentador solicitou ao sujeito que mostrasse o resultado de sua operação, ALV, ignorando toda a sua representação, contou 42 fichas do monte reserva existente em cima da mesa, acrescentando-as a fim de cumprir o resultado. ALV, assim como os outros sujeitos deste nível, representa o resultado total com todas as fichas. Neste caso, ALV retirou do monte reserva, mas os outros sujeitos desfazem a representação anterior e mostram todas as fichas contadas para demonstrar o resultado, corrigindo o erro e apresentando o número equivalente de fichas.

Parece que nestes casos há uma tomada de consciência parcial. Ou seja, uma regulação em função da contradição que se tornou observável no final da atividade, desencadeada pela questão proposta pelo experimentador.

O procedimento efetuado por ALV para a operação de subtração é demonstrado na Figura 6.24 (P. 95), juntamente com seu protocolo.

> ALV - Operação 42−18: Como você fez esta operação ALV? - **"Aqui 2 não dá para tirar 8, aqui risca o 4, aqui fica 3, aqui 12 tira 8, sobra 4, daí de 3 tira 1, sobram 2."** Questionamentos após contagem das fichas correspondentes a cada número da operação: Como você faria esta conta usando as fichinhas que você contou? O sujeito separou 2 fichas do 42 e 8 fichas do 18. Ficou com 40 à esquerda e 2 à direita, embaixo destas fichas dispôs 10 à esquerda e 8 à direita. Em seguida o sujeito tirou 1 ficha do monte de 40 e passou para o monte de 2, constatou que possuia apenas 3 fichas e que precisaria retirar deste monte 8 fichas e que esta ação era impossível. Como você continua a operação? - **"A gente tem que de novo contar as fichinhas."** Você tem quantas fichinhas? - **"3."** Dá para tirar 8? - **"Não."** O que você tem que fazer? - **"Tem que emprestar mais."** Por que mais? - **"Porque de lá não dá para tirar."** O sujeito pegou uma a uma as fichas do monte de 40 fichas até completar 12. Quantas fichas nós temos aqui? - **"12."** Quantas eu tenho que tirar de 12? - **"8."** O sujeito retirou 8 fichas do monte de 12. E agora, o que você tem que fazer? - **"Agora pego 20 e formo o resultado."** O sujeito retirou 20 fichas do monte de 30 fichas para representar o resultado.

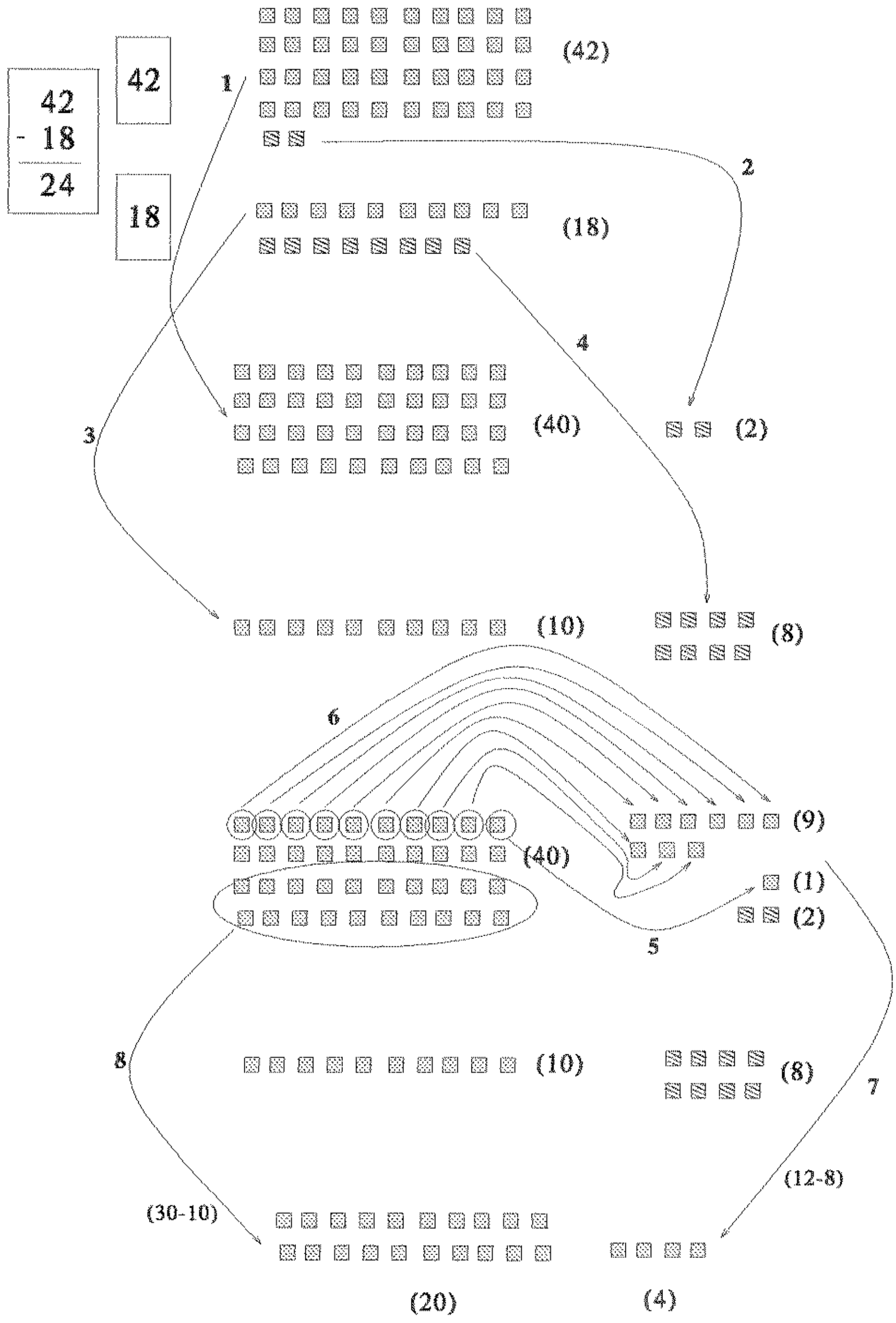


Fig. 6.24 - Representação do Procedimento Empregado por ALV na Operação de Subtração - Categoria B.

Como pode se observar, no procedimento relativo à subtração, também é feita a separação das unidades em relação às dezenas. O "empresta um" é representado, de início, por uma ficha, contudo diante da impossibilidade de se efetuar a subtração, o sujeito empresta dez fichas, mas estas são contadas uma a uma até completar o número de fichas exigido para fazer a subtração.

O resultado, assim como no procedimento da adição, também é demonstrado pelo seu número exato de fichas, neste caso, vinte e quatro fichas. Note que ALV, agora, retira as fichas do resultado das próprias fichas já contadas, não mais usando fichas do monte reserva. Convém ressaltar que ele não explicitou que estava fazendo $30 - 10$, só argumentou que precisava de 20 fichas para completar o resultado.

Note que neste procedimento ALV não representou as dezenas em termos unitários, ao contrário, passou direto para a representação do resultado de sua operação.

Todos os outros sujeitos se assemelharam aos procedimentos de ALV.

Os sujeitos desta Categoria B parecem ter uma diferenciação parcial entre as unidades e as dezenas. Afirmamos parcial pelo fato de ainda considerarem as dezenas com valor de unidade. Entretanto, o "emprestar um" já provoca uma contradição levando o sujeito a emprestar mais fichas para poder efetuar a subtração. Sem contar que o resultado também já não é mais feito em termos unitários para as dezenas, ele é representado pelo número de fichas correspondentes ao seu valor. O "vai um" ainda continua sendo considerado como uma ficha e não dez.

Categoria C: Na Categoria C - Diferenciação entre Dezenas e Unidades - encontram-se reunidos dois sujeitos os quais apresentaram procedimentos de diferenciação entre dezenas e unidades. Neste sentido, as resoluções, tanto para a adição quanto para a subtração, são apresentadas considerando o número de fichas correspondentes ao valor numérico de cada termo das operações. Os reagrupamentos e os empréstimos são facilmente resolvidos, sendo representados por dez unidades.

O procedimento empregado por CAR (9;2/3ª série) para a operação de adição é apresentado na Figura 6.25 (P. 97), seguido de seu protocolo.

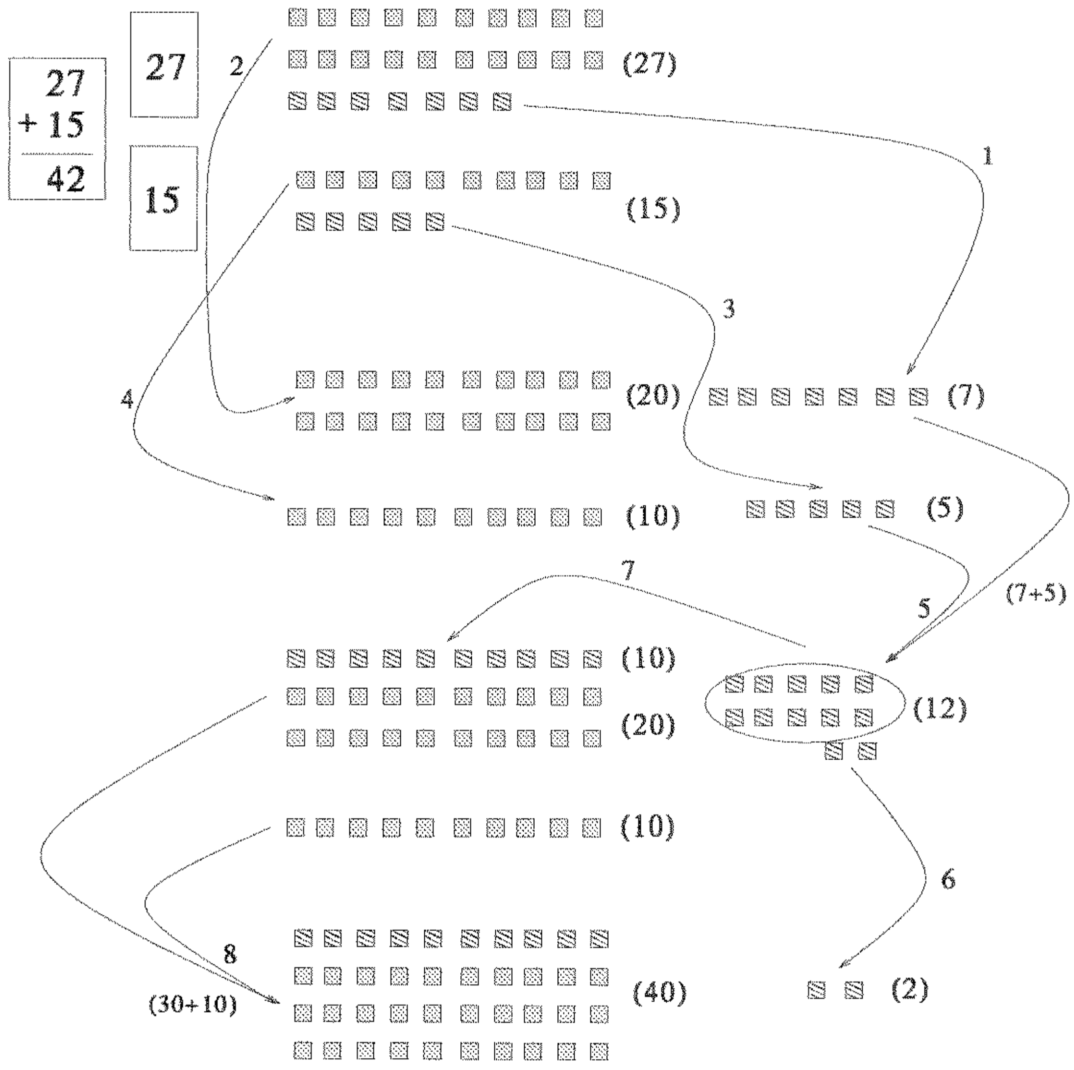


Fig. 6.25 - Representação do Procedimento Empregado por CAR na Operação de Adição - Categoria C.

CAR - Operação 27 + 15: Como você fez esta operação? - **"Eu fiz 7+5 que deram 12. 12, fica 2 e sobe 1. 2+1 é igual a 3, com mais 1 que foi 4. Ao todo 42."** Questionamentos após a contagem das fichas: Como você resolve esta operação com as fichas que você contou? - **"Bom, aqui eu tenho 27 fichas e aqui 15 fichas."** E o que você faz? - **"Eu separo 20 aqui e 7 aqui. Pego o 15 deixo 10 aqui e 5 aqui.** O sujeito foi falando e separando as fichas assim como descreveu. E agora? - **"Eu junto 7 com 5. Juntando 7+5....dá 12.** O sujeito juntou as fichas. O que você faz agora? - **"Tenho 12, eu pego 2 e deixo aqui. Aí estas 10 fichas que sobraram eu pego e junto."** Junta com o que? - **"Eu junto com este monte e este."** O sujeito indicou que juntaria com os dois outros montes de 20 e 10. E quanto vai dar todos estes 3 montes juntos? - **"Ao todo vão dar 40."** O sujeito juntou 10+20+10. - **"42."** O sujeito juntou todos as fichas e anunciou o resultado sem precisar se certificar de quantas fichas havia nos montes.

A partir do procedimento empregado por CAR observa-se que , primeiramente, há separação das unidades. Em seguida, são efetuadas as adições das unidades. O "vai um" é representado prontamente por 10 fichas e o resultado é anunciado com seu número correspondente de fichas. Note que CAR não possui dificuldade em explicar, por meio da ação material, os procedimentos desenvolvidos nas operações que realiza.

O procedimento reservado á subtração é apresentado segundo o exemplo de CAR e encontra-se na Figura 6.26 (P. 99), juntamente com seu protocolo.

CAR - Operação 42−18: Como você fez esta operação? - **"Primeiro eu emprestei 1 do 4 porque de 2 não dava para tirar 8. Fiquei com 12. 12 tira 8 ficam 4. Depois aqui ficou valendo 3, 3 tira 1 ficam 2. 24."** Questionamentos após a contagem das fichas: Como você faz esta operação usando as fichas que você contou? - **"Aqui eu também separo. 42, coloco 2 aqui. Aí eu separo também o 18, coloco 8 para cá."** O sujeito separou 2 do 42 e 8 do 18. E qual é o próximo passo? - **"O próximo passo é emprestar porque eu só tenho 2 e não dá para tirar 8."** De onde você tem que emprestar? - **"Daqui."** O sujeito apontou para o monte do 40. O que você está fazendo? - **"Eu estou passando 10 fichas para o 2."** O sujeito contou 10 fichas e colocou junto as 2 fichas. Quantas fichas ficaram aqui? O experimentador se referiu ao monte de 30. - **"Aqui sobraram...30 fichas."** E agora o que você faz? - **"De 12 eu faço menos 8, que dão 4."** O sujeito retirou 8 fichas do monte de 12. E qual é o próximo passo? Acabou a conta? - **"Não. Eu tenho que tirar aqui. Eu pego este monte e tiro 10, que vão ficar 20."** O sujeito pegou o monte de 30 fichas e retirou 10 fichas. Quanto deu tua conta? - **"24."** E onde está o 24? - **"Aqui, 20 e 4."** O sujeito apontou para as 24 fichas.

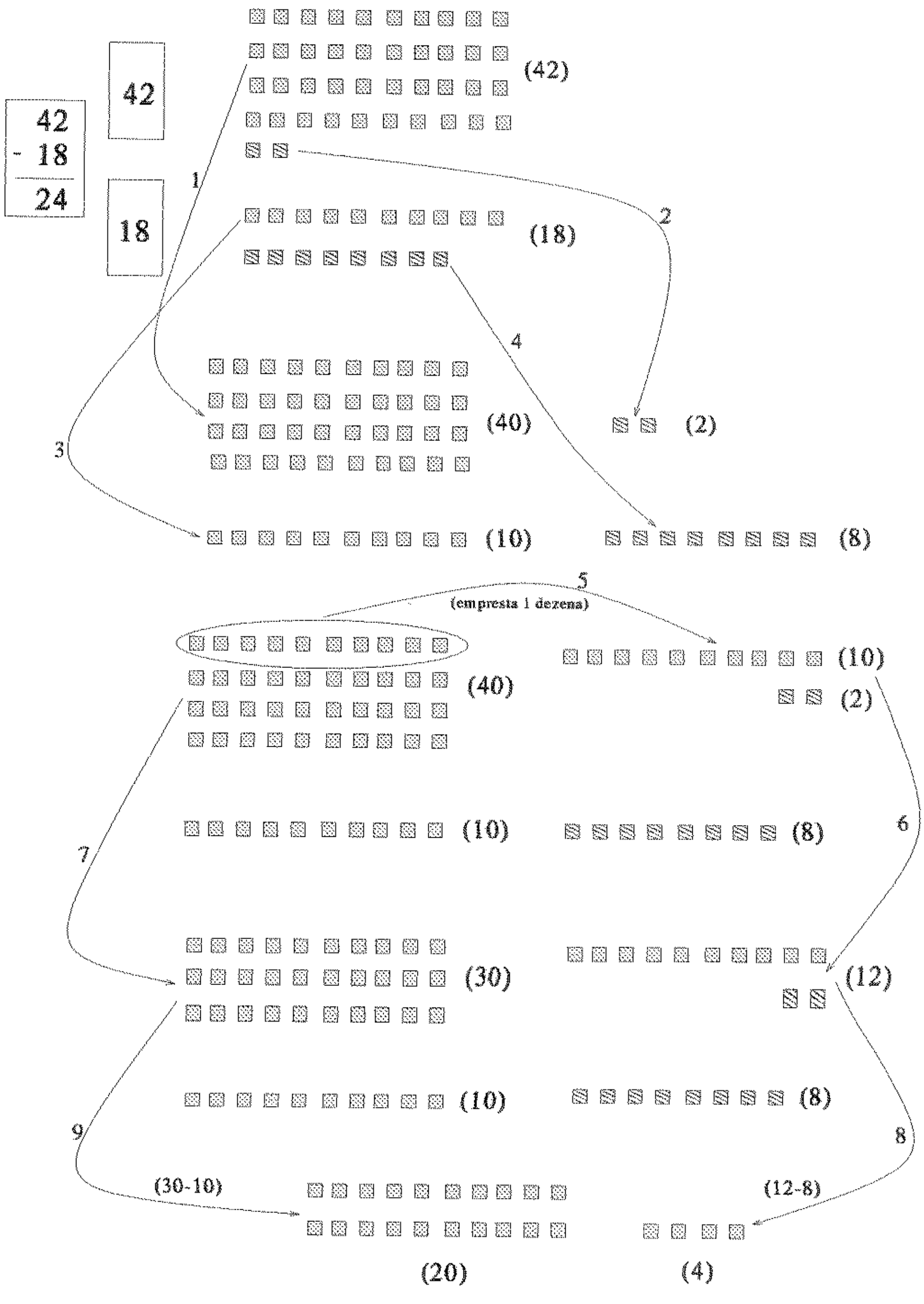


Fig. 6.26 - Representação do Procedimento Empregado por CAR na Operação de Subtração - Categoria C.

Assim como no caso das operações de adição, CAR também separa as unidades para as subtrações. De imediato empresta dez fichas para efetuar a subtração e seu resultado é representado por seu valor correspondente de fichas.

Os sujeitos desta Categoria C - Diferenciação entre Dezenas e Unidades - procedem considerando o sistema numérico decimal, compreendendo que se empresta dez fichas e se eleva dez fichas. Nas resoluções consideram, simultaneamente, as unidades e as dezenas.

As três categorias de procedimentos revelam diferenças qualitativas quanto à compreensão dos sujeitos a respeito dos processos envolvidos nas operações de adição e subtração. Diferenças que até então não haviam sido explicitamente demonstradas nas outras provas destinadas à avaliação do conhecimento aritmético. Isto indica que o êxito no desempenho nem sempre vem acompanhado de uma real compreensão. Observa-se que a compreensão dos processos envolvidos na adição e subtração resulta de uma construção gradativa, desenvolvida por meio de abstração reflexiva e não de memorização de técnicas.

6.2 Provas de Inversão das Operações Aritméticas

A abstração reflexiva é fonte do conhecimento lógico-matemático, uma vez que apóia-se nas coordenações das ações e operações do sujeito e pressupõe o estabelecimento de relações.

A prova da inversão das operações aritméticas analisa, sob o ponto de vista das abstrações, como o sujeito, gradativamente, elabora as relações de inversão que caracterizam as operações de adição e subtração, e multiplicação e divisão.

Neste sentido, o experimento proposto por Piaget (1977/1995), consiste em solicitar ao sujeito a execução de três tarefas distintas: montagem do cogumelo, que para efeito desta pesquisa denominou-se montagem de uma árvore, montagem do cubo e problemas de cálculo.

O objetivo da execução de tais tarefas não recai em seu conteúdo em si, mas na forma que engendra as ações do sujeito em tal execução, ou seja: a) na abstração de uma ordem necessária à construção da árvore, bem como de sua ordem inversa quando da sua demolição; b) de uma ausência de ordem tanto para a construção quanto para a demolição do cubo; c) da abstração de uma ordem necessária (direta e inversa) em uma sequência de operações.

Piaget (ibid.), segundo os dados obtidos em sua pesquisa, categorizou os sujeitos em diversos níveis (cf. Anexo VIII), a saber: Nível IA, IB, IIA, IIB e III.

Os doze sujeitos pertencentes a este estudo puderam ser categorizados conforme apresenta o Quadro VI (P. 102).

Embora nenhum dos sujeitos deste estudo tenha sido enquadrado no nível IA, vale salientar que neste nível o sujeito realiza empilhamentos quaisquer para a montagem da árvore, não seguindo a ordem necessária para sua construção. A ausência de ordem na construção do cubo também não é atingida neste nível.

No nível IB encontram-se seis sujeitos. Na prova destinada à montagem da árvore estes sujeitos admitem uma ordem necessária tanto para sua construção quanto para sua demolição, mas ainda negligenciam o fato de haver semelhança operatória entre as duas ordens de sucessão (montar e desmontar); o desmontar é apenas visto como uma ação qualitativamente diferente.

A ordem necessária à construção da árvore é concedida na medida que o sujeito "lê" sobre os objetos o resultado do encadeamento serial. Como explica Piaget (1977/1995): *" a leitura pseudo-empírica da ordem é fornecida perceptivamente(...)"*. Neste sentido, o sujeito é capaz de descrever verbalmente sobre a ordem necessária à construção da árvore bem como quando da sua demolição.

O exemplo de MEI (9;1/3ª série) a seguir ilustra as condutas que

Quadro VI - Níveis de Abstração Reflexiva na Inversão das Operações Aritméticas

Série	Sujeito	IA	IB	IIA	IIB	III
3ª série	CAR(9;2)				X	
	MEI(9;1)		X			
	DAN(9;10)		X			
	REN(9;8)				X	
	LEA(10;11)		X			
	NAI(8;11)			X		
2ª série	JUL(9;1)		X			
	DJE(8;5)			X		
	ALV(8;6)			X		
	ARI(8;3)		X			
	RAP(8;9)			X		
	HER(8;0)		X			
Total		-	6	4	2	-

caracterizam o nível IB.

Montagem da árvore: O experimentador entregou aleatoriamente à MEI as peças que compõe a árvore solicitando-lhe sua montagem. Ao terminar a montagem o experimentador perguntou:

> O que você montou? - **"Uma árvore."** No que você presta atenção quando monta esta árvore? - **" Eu tenho que ver os tamanhos iguais para eu ir montando ela e fazendo."** Como você vai fazendo para construir esta árvore? - **"A gente tem que ver a peça certa para montar certo a árvore."** Como você vai fazendo para montar esta árvore? - **"Eu vou pegando as peças e vou vendo as primeiras e daí dá para montar."** Após a demolição da árvore: Quando a gente desmonta o que acontece? - **"Daí não fica mais árvore."** Tem alguma coisa de parecido quando você monta e quando você desmonta? - **"Aqui está montada, mas aqui não."** Para você montar e desmontar, você pode começar por qualquer peça? - **"Não."** Por que não? - **"Porque eu tenho que ver a peça certa para eu montar."** Quando eu desmonto, eu posso começar por qualquer peça? - **"Começa."** Quando ela está montada eu posso começar por uma peça lá debaixo? - **"Não, você começa pela de cima e vai tirando."**

Diante das respostas apresentadas por MEI é possível observar seus argumentos quanto à necessidade da ordem em relação à construção e demolição da árvore. Para a construção da árvore assim afirma: - **"A gente tem que ver a peça certa para montar certo a árvore."** - **"Eu vou pegando as peças e vou vendo as primeiras e daí dá para montar."** Com relação à demolição MEI quando questionado sobre a possibilidade de começar por qualquer peça assim argumenta: - **"Não, você começa pela de cima e vai tirando."**

MEI admite que quando se desmonta a árvore, há a necessidade de uma ordem nesta ação. Entretanto, para os sujeitos deste nível, não há ainda uma semelhança operatória entre as ações de montar e desmontar. Assim argumenta MEI: - **"Aqui está montada, mas aqui não."** Esta ausência de semelhança operatória é explicada pela falta de reversibilidade, isto é, a ordem direta e inversa não são semelhantes *"no sentido $A \rightarrow X$ e a ordem $X \rightarrow A$"*. A falta de reversibilidade leva o sujeito a admitir que as ações - construir e demolir - são qualitativamente diferentes, não possuindo nenhum ponto em comum entre ambas. Quando se desmonta a árvore MEI explica: - **"Daí não fica mais árvore."**

No nível IB, a ausência obrigatória de ordem para a montagem do cubo é facilmente percebida. Os sujeitos admitem a construção do cubo sem a necessidade de uma ordem, ou seja, sem a necessidade de pôr uma peça determinada.

Montagem do cubo: O experimentador entrega a MEI oito cubos solicitando-lhe a montagem de um cubo maior usando todos eles. Após a construção do cubo o experimentador questionou:

> No que você presta atenção quando monta este cubo? - **"Eu tenho que pôr quatro peças embaixo, depois quatro peças em cima."** Quando você está montando o cubo, você presta atenção onde coloca os cubos? Você pode pôr qualquer um quando monta? - **"Posso."** Por quê? - **"Porque as peças são iguais, então eu posso colocar 4 embaixo e 4 em cima. "** Após a demolição do cubo: Quando a gente desmonta o cubo, eu começo por qualquer peça? - **"Começa."** Por quê? - **"Porque aqui tem quatro, daí aqui tem mais quatro em cima, aí você pode tirar esta aqui, esta ou esta e pronto."** Quando a gente desmonta o que acontece? - **"Daí não fica mais um cubo, ficam os bem pequenininhos."** Quando a gente desmonta o cubo e quando a gente desmonta a árvore, é diferente ou é igual? - **"É diferente."** Por quê? - **"Porque estes aqui é um quadrado e ali é uma árvore."** o que mais tem de diferente? - **"Estes aqui não são colocados naquele lugar, estes vão direto assim no chão."** O sujeito se referia ao fato de que a árvore é montada sobre uma haste.

No protocolo de MEI pode se observar que a ausência de ordem para a construção do cubo é admitida uma vez que responde as perguntas relativas à esta questão da seguinte forma: Quando você está montando o cubo, você presta atenção onde coloca os cubos? Você pode pôr qualquer um quando monta? - **"Posso."** Por quê? - **"Porque as peças são iguais, então eu posso colocar 4 embaixo e 4 em cima. "**

A comparação apresentada por MEI com relação à construção da árvore e à construção do cubo recai sobre o conteúdo de suas ações, a semelhança estabelecida restringi-se ao conteúdo das tarefas em si: Quando a gente desmonta o cubo e quando a gente desmonta a árvore, é diferente ou é igual? - **"É diferente."** Por quê? - **"Porque estes aqui é um quadrado e ali é uma árvore."**

Este tipo de conduta, comparações sobre o conteúdo negligenciando a forma das ações no que diz respeito à construção da árvore e do cubo, caracteriza os sujeitos do nível IB.

Quanto aos problemas de cálculo, os sujeitos do nível IB não vêem a possibilidade de retornar de n' a n procedendo por operações inversas. A ordem inversa para as operações não é admitida.

Problemas de cálculo: O experimentador solicitou a MEI que pensasse em um número de dois algarismos (n), em seguida que acrescentasse 3 a este número (n+3). O passo seguinte foi de efetuar o resultado desta operação vezes 2 (2(n+3)) e por último acrescentar 5 a este resultado (2(n+3)+5). Realizado este procedimento o experimentador prosseguiu da seguinte maneira:

> Quanto deu ? - **"É 67."** Você pensou no número 28. Está certo? - **"Está."** Como você acha que eu descobri o número que você pensou? - **"Por causa que eu falei 67, aí você foi somando tudo para ver se dava 67."** Eu preciso saber do resultado? - **"Precisa."** Por quê? - **"Porque senão não ia conseguir fazer. "** Como eu faço para descobrir o número que você pensou? - **" Você faz 28+3, dá 31, aí faz 31x2, dá 62 e daí faz 62+5."** Mas eu sei do número 28 para fazer +3, x2 e +5? E então como eu faço? - **"Você pensa em um número, pega o 26, faz as contas aí não dá. Aí pensa no 28 e daí dá certo."** Então eu penso em um número qualquer e vou fazendo as contas até dar certo? - **"É."** Eu preciso saber do resultado para descobrir? - **"Tem que saber senão não dá para saber que número tem que chegar."** Isto que você fez tem alguma coisa de parecido com a montagem da árvore? - **"Não."** E com os cubos há alguma coisa de parecido? - **"Tem."** O quê? - **É que no cubo eu também estou somando, eu somo quatro em cima mais quatro embaixo para poder dar o cubo grande. A gente monta e soma."**

A partir do protocolo de MEI pode-se observar que a necessidade de conhecer o resultado ($n' = 67$) para descobrir o número oculto ($n = 28$) é admitida.

Contudo, esta necessidade advem do fato de que é preciso conhecer o resultado para que se possa saber em que número chegar, procedendo por operações diretas $(28 + 3, 31.2, 62 + 5)$ e não inversas, pois assim explicita MEI: - **"Você pensa em um número, pega o 26, faz as contas aí não dá. Aí pensa no 28 e daí dá certo."** Então eu penso em um número qualquer e vou fazendo as contas até dar certo? - **"É."** Eu preciso saber do resultado para descobrir? - **"Tem que saber senão não dá para saber que número tem que chegar."**

As relações estabelecidas pelos sujeitos do nível IB nas três provas, estão apoiadas também nos conteúdos e não na forma das ações (abstração da ordem). Quando a gente desmonta o cubo e quando a gente desmonta a árvore, é diferente ou é igual? - **"É diferente."** Por quê? - **"Porque estes aqui é um quadrado e ali é uma árvore."** Isto que você fez tem alguma coisa de parecido com a montagem da árvore? - **"Não."** E com os cubos há alguma coisa de parecido? - **"Tem."** O quê? - **É que no cubo eu também estou somando, eu somo quatro em cima mais quatro embaixo para poder dar o cubo grande. A gente monta e soma."**

Pode-se dizer que as condutas de nível IB decorrem de regulações intuitivas e não operatórias, as quais implicam na reversibilidade e por conseguinte se constroem segundo o mecanismo de abstração reflexiva. As condutas de MEI nas três provas (construção da árvore, construção do cubo e problemas de cálculo) revelam uma centração nos estados em oposição às transformações. A leitura pseudo-empírica da ordem é fornecida perceptivamente, fundamentada nos conteúdos das ações negligenciando sua forma.

Quatro sujeitos pertencentes a este estudo atingiram o nível IIA. Nas provas de construção da árvore e construção do cubo, os sujeitos deste nível admitem, assim como no nível IB, para a primeira o caráter obrigatório da ordem direta e inversa e na segunda a ausência de ordem.

O sujeitos incluídos no nível IIA se diferenciam do nível anterior pelo fato de admitirem a necessidade de se conhecer n' para retornar a n, procedendo por operações inversas, contudo, não conservam a ordem das operações ao invertê-las. Tal questão pode ser observada no protocolo de NAI (8;11/3ª série):

Problemas de cálculo:

> Qual foi o resultado? - **"59."** Eu consigo adivinhar o número que você pensou? O sujeito não respondeu. O número que você pensou foi 24. Acertei? - **"Acertou."** Como você acha que descobri o número que você pensou? - **"É que você fez 59-5, -2 e -3.** Por que 59-5, -2 e -3? - **"Porque aí o resultado vai dar 24."** Eu preciso saber do resultado para descobrir o número que você pensou? - **"Precisa senão você não descobre."** Por que eu não descubro? - **"Porque fazendo 59-5, -2, -3 vai dar o número que eu pensei."** Eu posso começar por qualquer uma das operações para achar o resultado? - **"O certo seria o 59 ficar por último."** Como assim? - **"Aqui você faz 59-...** O sujeito não terminou de responder. Mas eu posso começar por qualquer operação? - **"Pode. Pode fazer -2, -5."** Isto que nós fizemos, tem alguma coisa de parecido com a montagem da árvore? - **"Tem."** O quê? - **"Pôr ela em ordem."** E com os cubos, tem alguma coisa de parecido? - **"Não."** Por que não? - **"Porque os cubos pode colocar em qualquer ordem."**

A partir da análise das respostas de NAI, pode-se observar que o tipo de comparação feita pelos sujeitos deste nível, para as três tarefas executadas, recai sobre a forma das ações e não sobre seus conteúdos. Em relação à construção da árvore NAI admite semelhança entre as ações e assim argumenta: - **"Pôr ela em ordem."** Com a construção do cubo NAI não vê nenhum tipo de semelhança com os problemas de cálculo: - **"Porque os cubos pode colocar em qualquer ordem."**

NAI ressalta que é essencial saber do resultado ($N = 59$) para descobrir o número por ele pensado e assim proceder por operações inversas: - **"Porque fazendo 59-5, -2, -3 vai dar o número que eu pensei."** Contudo, observa-se que NAI, assim como os outros sujeitos deste nível IIA, não inverte a multiplicação. Ao invés de efetuar uma divisão, eles fazem uma nova subtração. A inversão da multiplicação é, nesta caso, uma subtração.

A ausência da inversão da multiplicação é explicada por Piaget da seguinte forma: *"...a multiplicação é uma composição operatória mais difícil de se apropriar, sendo já uma operação de patamar superior, efetuada sobre as operações aditivas elementares"* (P. 51). Portanto, o fato de não inverter a multiplicação pode ser um indício de que o sujeito não tenha, ainda, construído o conceito que engendra tal operação.

Embora NAI proceda por operações inversas como forma de retornar de n' para n, ele não mantem a ordem quando desta inversão, afirmando: - **"Pode fazer -2, -5."** Os sujeitos deste nível IIA diferem dos sujeitos do nível posterior, IIB, pelo fato de não conservarem a ordem na inversão das operações. A ordem precisa ser mantida uma vez que as operações não são comutativas e, se a ordem de inversão for negligenciada, não será possível descobrir o número oculto.

Assim, os sujeitos do nível IIB avançam em relação ao nível IIA à medida que conservam a ordem quando da inversão das operações.

Dois sujeitos pertencentes a este estudo atingiram o nível IIB e os argumentos que caracterizam suas condutas podem ser observados a partir do protocolo de CAR (9;2/3ª série):

Problemas de cálculo:

> Quanto deu? - **"Deu 75."** Eu consigo descobrir o número que você pensou? O sujeito ficou pensativo e nada respondeu. O número que você pensou foi 32. Acertei? - **"Acertou."** Como você acha que eu adivinhei o número que você havia pensado? - **"Você fez 75-5, deu 70; aí menos, não, 70:2, 35; aí 35-3 32."** O sujeito foi seguindo com o dedo as operações que havia feito no papel. Me ajudou saber do resultado da sua conta? - **"Ajudou."** Por quê? - **"Porque sem o resultado você não conseguiria fazer as contas para chegar no mesmo número."** Como eu descubro o número que você pensou? - **Posso tentar?"** O sujeito realizou no papel as operações inversas que já havia descrito. - **"Faço 75-5, vai dá 70, divididos por 2 ... 35; menos 3 ...32."** Eu posso fazer estas operações em qualquer ordem? - **"Não."** Por que não? - **"Porque se você, aqui diminuiu, se você , é, não tem como, você não sabe que aqui deu 35, não sabe que aqui deu 70. Se você soubesse aí você faria 70-35, 5+75, aí ficaria tudo**

em desordem e não daria 32." Quando da comparação das três tarefas efetuadas o sujeito argumentou: - **"É parecido com a árvore. Porque aqui se você começar por qualquer operação não vai dar o resultado, e aqui se você começar por qualquer peça não vai dar a árvore. O cubo você pode montar por qualquer peça, começar por qualquer peça, sempre vai dar um cubo grande, claro. Aqui você tem que começar pela peça certa e aqui pela operação. Aqui começa por uma determinada peça e aqui por uma determinada operação."**

Pelos argumentos apresentados por CAR é possível se observar que além de o sujeito inverter todas as operações, no sentido $n' \longrightarrow n$, ele mantem a ordem desta inversão e assim explica: - **"...não tem como (...), ficaria tudo em desordem e não daria 32."** Evidentemente o sujeito não utiliza os termos matemáticos (operações não são comutativas) para expressar a necessidade de se conservar a ordem das operações. Contudo, para CAR, tem que se inverter na sua devida ordem.

Embora todos os aspectos já estejam bem compreendidos desde este nível IIB, o sujeito ainda não é capaz de antecipar dedutivamente o caminho de n' $\longrightarrow n$, ou seja, ele não consegue fazer uma previsão do método que se precisa seguir para encontrar o número oculto. O sujeito só explicita esta possibilidade bem como o método a ser seguido, a partir do sucesso alcançado pelo experimentador quando este descobre n. CAR, por exemplo, não responde à questão relacionada à possibilidade de se encontrar n.

Há que ressaltar, que ainda neste nível, o sujeito necessita de uma abstração pseudo-empírica, *"...quer dizer, a reflexão sobre objetos reais ou sobre um exemplo particular que, ainda que inteiramente construído por operações de um sujeito, dá lugar a constatações como se se tratasse de uma leitura física"* (Piaget, 1977/1995, P. 52).

Diferentemente deste nível IIB, os sujeitos do nível seguinte, III, são capazes de reconstituir dedutivamente o caminho de n' a n, isto é, ao nível das operações hipotético-dedutivas o sujeito é capaz de, no abstrato, prever o método que deve ser aplicado para chegar a n, antes mesmo de se certificar do sucesso do experimentador. Nenhum dos sujeitos deste estudo alcançou este nível.

A partir dos dados coletados verifica-se que, nas provas referentes à inversão das operações, os sujeitos atingiram três níveis diferentes - IB, IIA e IIB.

As condutas que caracterizam cada um destes níveis já foram explicitadas, todavia, faz-se necessário explicar em que medida estes diferentes níveis têm implicações quanto as provas de conhecimento aritmético de adição e subtração, também já apresentadas neste estudo.

A primeira etapa das provas de conhecimento aritmético consistiu na resolução escrita de operações de adição e subtração. O desempenho global dos sujeitos foram organizados em termos percentuais e são apresentados no Quadro VII (P. 111), que também demonstra os níveis de abstração alcançados pelos sujeitos.

Como se pode observar, embora tenham todos os sujeitos atingido níveis distintos nas provas de abstração, de IA a IIB, seus êxitos quanto as operações de adição e subtração não confirmam esta diferenciação. Todos, com excessão de ARI, tiveram um desempenho bastante significativo e equiparado, o que já não ocorre com os níveis de abstração.

Tudo indica que os diferentes níveis de abstração não intervêm nas possibilidades de êxitos nas operações quando só o desempenho, em detrimento à compreensão, é avaliado.

Quanto aos problemas de adição, para fins de se estabelecer as devidas relações com os níveis de abstração dos sujeitos, foram organizados em três categorias.

Categoria A: Ausência de acertos em uma das duas categorias de problemas de adição; encontram-se organizados os sujeitos que erraram todos os problemas que pertenciam à uma mesma categoria.

Quadro VII - Níveis de Abstração e Desempenho nas Operações de Adição/Subtração		
Níveis de Abstração	Sujeitos	Desempenho nas Operações
III		
IIB	CAR(9;2/3ª)	100%
	REN(9;8/3ª)	100%
IIA	NAI(8;11/3ª)	100%
	DJE(8;5/2ª)	95%
	RAP(8;9/2ª)	100%
	ALV(8;6/2ª)	95%
IB	LEA(10;11/3ª)	100%
	DAN(9;10/3ª)	100%
	MEI(9;1/3ª)	90%
	JUL(9;1/2ª)	90%
	HER(8;0/2ª)	80%
	ARI(8;3/2ª)	60%
IA		

Categoria B: Acertos parciais; encontram-se os sujeitos que apresentaram pelo menos um acerto em cada uma das duas categorias dos problemas de adição.

Categoria C: Acertos totais; encontram-se os sujeitos que obtiveram êxito em todos os problemas das duas categorias.

O Quadro VIII (P. 112), apresenta a relação destas categorias com os níveis de abstração alcançados pelos sujeitos.

Quadro VIII - Níveis de Abstração e Problemas de Adição

Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B	Categoria C
III			
IIB		REN:9;8/3ª	CAR:9;2/3ª
IIA	ALV:8;6/2ª		NAI:8;11/3ª DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª
IB	LEA:10;11/3ª	JUL:9;1/2ª HER:8;0/2ª	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª ARI:8;3/2ª
IA			

O nível de abstração dos sujeitos não influenciou diretamente nas possibilidades de êxito nos problemas de adição, pois sete sujeitos (N=7) encontram-se na categoria C (acertos totais); três (N=3) na categoria B (acertos parciais) e dois (N=2) na categoria A. Os níveis de abstração dos sete sujeitos da categoria C, variaram de IB, IIA e IIB, não havendo, portanto, uma relação entre melhor desempenho e nível mais evoluído de abstração.

Tais categorias de problemas não consistem em grandes dificuldades para os sujeitos, uma vez que estes pedem, em seu enunciado, os estados finais (E_F) e iniciais (E_I) e não suas transformações. Busquets Prat (1995) explica que *"as relações que com maior facilidade se constróem são aquelas que, partindo de uma quantidade inicial de elementos, se deve averiguar a quantidade total como resultado final da transformação realizada"*.

O maior número de erros verificados nos problemas de adição diz respeito aqueles que trazem, em seu enunciado, palavras que sugerem uma solução, neste caso, as palavras "gastei" e "dei". Os enunciados dos problemas apresentam tais expressões, contudo, para resolvê-los faz-se necessário efetuar uma adição. A relação feita pelos sujeitos, destas palavras-chave com as soluções dos problemas, como afirma Zunino (1995), é indicativo de que os sujeitos deixam de analisar a estrutura global dos problemas para centrarem-se em determinadas "pistas" que os levem às respostas corretas.

Estas condições podem explicar a não influência dos níveis de abstração no desempenho dos sujeitos.

Os problemas de subtração também obedecem as mesmas categorias organizadas para os problemas de adição, a saber:

Categoria A: Ausência de acertos em uma das três categorias dos problemas de subtração; encontram-se organizados os sujeitos que erraram todos os problemas que pertenciam à uma mesma categoria.

Categoria B: Acertos parciais; encontram-se os sujeitos que apresentaram pelo menos um acerto em cada uma das três categorias dos problemas de subtração.

Categoria C: Acertos totais; encontram-se os sujeitos que obtiveram êxito em todos os problemas das três categorias.

O Quadro IX (P. 114) relaciona tais categorias com os níveis de abstração reflexiva dos sujeitos.

Quadro IX - Níveis de Abstração e Problemas de Subtração			
Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B	Categoria C
III			
IIB			CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª
IIA	NAI:8;11/3ª		DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª ALV:8;6/2ª
IB	MEI:9;1/3ª LEA:10;11/3ª HER:8;0/2ª	JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª	DAN:9;10/3ª
IA			

Como pode-se observar há uma concentração de sujeitos dos níveis IIA e IIB na categoria C, ao passo que os sujeitos do nível IB preenchem as categorias A e B. O nível de abstração, segundo os dados obtidos, parece influenciar nas resoluções efetuadas pelos sujeitos.

Convém salientar que os problemas de subtração questionam, em seus enunciados, ora o estados iniciais (E_I), ora o estados finais (E_F) e ora as transformações (T) ocorridas.

Os problemas que questionam a respeito do seus estados finais (E_F) são facilmente solucionados. Isto se explica pelo fato de serem problemas que requerem a remoção de uma parte sobre um todo, podendo serem feitos em atos sucessivos.

As outras duas categorias de problemas, que questionam acerca de seus estados iniciais (E_I) e transformações (T), apresentam uma maior dificuldade sendo solucionados, com êxito total, pelos sujeitos de nível IIA e IIB de abstração, apenas com excessão de NAI e DAN.

NAI encontra-se no nível IIA de abstração, entretanto atingiu somente a categoria A em suas resoluções. O erros de NAI ocorreram naqueles problemas os quais apresentavam, em seu enunciado, palavras que se associam às adições, como por exemplo, "ganhar". DAN, ao contrário de NAI, emcontra-se no nível IB de abstração e atingiu a categoria C em suas respostas. Todavia as resoluções de DAN, mesmo se tratando de problemas de subtração, consistiram na realização de operações de adição. DAN procedeu, como explica Vergnaud (apud Busquets Prat; 1995), por cálculos de "complemento", ou seja, contando de um em um até chegar ao resultado que se tem; a incógnita passa a ser um dado conhecido do problema.

Neste sentido, podemos afirmar que tais problemas exigem um nível maior de abstração por parte dos sujeitos, uma vez que necessitam de uma coordenação dos dados apresentados, isto é, compreender os problemas sob o ponto de vista de seus estados e transformações para só então chegar aos seus cálculos numéricos; coordenar os dados no sentido de apreender as variáveis apresentadas e organizá-las de uma forma lógica para, então, se obter o êxito.

O significado que os sujeitos atribuem às operações de adição e subtração também foi verificado neste estudo. Os Quadros X e XI (P. 116 e P. 117), demonstram os tipos de respostas dadas pelos sujeitos juntamente com seus níveis de abstração.

As respostas foram organizadas em três categorias:

Categoria A: Explicação imprecisa para as operações.

Categoria B: Explicação descritiva para as operações.

Categoria C: Explicação com compreensão do significado das operações.

Quadro X - Níveis de Abstração e Significado da Adição			
Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B	Categoria C
III			
IIB			CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª
IIA		NAI:8;11/3ª RAP:8;9/2ª ALV:8;6/2ª	DJE:8;5/2ª
IB	HER:8;0/2ª	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª	
IA			

Observando os Quadros X e XI pode-se verificar que os sujeitos do nível IB de abstração encontram-se entre as categorias A e B, explicação imprecisa e descritiva, respectivamente. Ao passo que os sujeitos do nível IIA oscilam entre as categorias B e C em suas explicações. Os sujeitos do nível IIB aparecem na categoria C.

Quadro XI - Níveis de Abstração e Significado da Subtração			
Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B	Categoria C
III			
IIB			CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª
IIA		DJE:8;5/2ª ALV:8;6/2ª	NAI:8;11/3ª RAP:8;9/2ª
IB	HER:8;0/2ª	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª	
IA			

Conforme os dados obtidos é possível afirmar que os níveis de abstração reflexiva influenciam na elaboração dos significados atribuídos pelos sujeitos às operações de adição e subtração.

A explicação com compreensão do significado das operações, efetuada pelos sujeitos de nível IIB e alguns de nível IIA, corresponde a um processo de abstração reflexiva que permite o sujeito abstrair uma regra geral aplicada às ações. Ou seja, permite "retirar" das ações práticas uma lei comum: juntar (adição) e tirar (subtração). Há, portanto, a coordenação dos dados de uma determinada situação.

Em contrapartida, a abstração desta regra geral não é realizada, ainda, pelos sujeitos de nível IB, os quais atribuem um significado descritivo ou impreciso às operações. Isto porque centram-se no conteúdo de suas ações, em outras palavras, suas explicações não ultrapassam o nível de descrição da ação em si.

Diferentemente dos resultados obtidos quanto ao significado atribuído às operações, a avaliação do valor posicional da numeração (colunas desalinhadas) revela que, nesta atividade, o nível de abstração dos sujeitos não interferiu em suas possibilidades de resolução.

As respostas dos sujeitos foram divididas em duas categorias:

Categoria A: Unidade com valor de dezena; encontram-se os sujeitos que resolveram as unidades, apresentadas de forma desalinhada, como sendo dezenas em todas as situações propostas.

Categoria B: Unidade com valor de unidade; encontram-se os sujeitos que resolveram as unidades com seu real valor em pelo menos uma das situações propostas.

Como pode ser verificado no Quadro XII (P. 119), mesmo os sujeitos de nível de abstração superior não obtiveram êxito nesta atividade. Resultados similares foram encontrados por Kamii (1991); 79% de seus sujeitos solucionaram a situação proposta da mesma forma que os sujeitos deste estudo, ou seja, desconsiderando o valor posicional.

Quadro XII - Níveis de Abstração e Valor Posicional

Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B
III		
IIB	CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª	
IIA	NAI:8;11/3ª	DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª ALV:8;6/2ª
IB	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª HER:8;0/2ª	ARI:8;3/2ª
IA		

A ausência de êxito para muitos sujeitos nesta atividade é explicada pelo fato destes centrarem-se na representação espacial dos dígitos da operação. Os sujeitos resolvem as operações pela forma convencional que lhes foi ensinada. Isto leva-nos a refletir quanto a inadequação de um ensino voltado apenas para modelos estáticos, os quais acabam por impedir os sujeitos de solucionarem determinadas situações mesmo os que, durante todas as provas de conhecimento aritmético, obtiveram uma melhor performance, assim como CAR e REN.

A avaliação referente á resolução mental das operações e suas relações com os níveis de abstração reflexiva dos sujeitos é apresentada no Quadro XIII (P. 120). As respostas dadas pelos sujeitos foram organizadas em duas categorias:

Categoria A: Acertos parciais; encontram-se os sujeitos que não obtiveram êxito em todas as operações propostas.

Categoria B: Acertos totais; encontram-se os sujeitos que resolveram corretamente todas as operações propostas.

XIII - Níveis de Abstração e Resolução Mental

Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B
III		
IIB	REN:9;8/3ª	CAR:9;2/3ª
IIA	NAI:8;11/3ª DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª ALV:8;6/2ª	
IB	MEI:9;1/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª HER:8;0/2ª	DAN:9;10/3ª ARI:8;3/2ª
IA		

No Quadro XIII pode-se observar que os sujeitos de níveis de abstração superiores (IIA e IIB) aparecem em desvantagem com relação aos sujeitos do nível IB, visto que dois destes atingiram a categoria B. Apenas CAR, do nível IIB, encontra-se na categoria B.

Os erros cometidos pelos sujeitos consistem em negligenciar o valor posicional da numeração. Na operação, apresentada ao sujeito na forma horizontal, as unidades são somadas como sendo dezenas. Além deste, outro erro é bastante comum: o fato de o sujeito esquecer de adicionar o "vai 1".

Embora o número de erros seja considerável e comum a quase todos os sujeitos (N=9), convém salientar que o mesmo não ocorre quanto às resoluções escritas, nas quais os êxitos são bem mais significativos.

O nível de abstração, portanto, não influenciou no desempenho dos sujeitos nesta atividade. Todos os sujeitos, independente de seus níveis, obtiveram êxitos parciais ou totais; observando uma melhor performance nos sujeitos com níveis de abstração inferiores. Assim, pode-se salientar que o nível de abstração não intervém no desempenho dos sujeitos.

Entretanto, quando a atividade visa avaliar a compreensão dos sujeitos quanto aos processos envolvidos nas operações, o nível de abstração mostra-se fundamental em suas possibilidades de êxito.

A partir da avaliação dos procedimentos de resolução empregados pelos sujeitos nas operações de adição e subtração, foi possível organizar três diferentes categorias:

Categoria A: Indiferenciação entre dezenas e unidades.

Categoria B: Diferenciação parcial entre dezenas e unidades.

Categoria C: Diferenciação entre dezenas e unidades.

O Quadro XIV (P. 122), apresenta o nível de abstração dos sujeitos juntamente com as categorias alcançadas por cada um.

Quadro XIV - Níveis de Abstração e Procedimento de Resolução das Operações de Adição/Subtração			
Níveis de Abstração	Categoria A	Categoria B	Categoria C
III			
IIB			CAR:9;2/3ª REN:9;8/3ª
IIA		NAI:8;11/3ª DJE:8;5/2ª RAP:8;9/2ª ALV:8;6/2ª	
IB	MEI:9;1/3ª DAN:9;10/3ª LEA:10;11/3ª JUL:9;1/2ª ARI:8;3/2ª HER:8;0/2ª		
IA			

Os dados demonstram a intervenção dos níveis de abstração nos procedimentos empregados pelos sujeitos. Os sujeitos de nível IB (N=6) encontram-se na categoria A; sujeitos de nível IIA (N=4) na categoria B e sujeitos de nível IIB (N=2) na categoria C.

Os procedimentos apresentados pelos sujeitos, por meio da ação material, revelaram que a compreensão dos processos envolvidos nas operações de adição e subtração requer um nível de abstração mais evoluído. Isto porque não basta apenas transpôr a representação do algoritmo para a ação realizada sobre os objetos, ou seja, fazer somente uma cópia figurativa da operação; há que se organizar logicamente esta ação, para que se possa, por meio desta, abstrair as leis gerais que regem a resolução destas (empréstimos, reagrupamentos, relação parte-todo).

Os processos que engendram as operações exigem, portanto, uma construção gradativa por parte do sujeito, sua real compreensão implica em abstrações reflexivas e não em memorização de técnicas.

7

Discussões e Considerações Finais

A teoria piagetiana é passível de implicações pedagógicas à medida que explica a elaboração gradual das estruturas do conhecimento . Sob este ponto de vista, o conhecimento é construído gradativamente, a partir de constantes interações estabelecidas pelo sujeito com o seu meio exterior. O sujeito é, assim, construtor do seu próprio saber.

Partindo desta premissa, é possível se refletir sobre a importância da escola, em sua prática pedagógica, promover situações nas quais se privilegiem a elaboração do "saber" por parte do sujeito.

Entretanto, o que se observa no contexto educacional, mais especificamente nas aulas de matemática, é uma constante preocupação por parte do professor em fazer com que o aluno "aprenda matemática" a todo custo, muitas vezes sem observar se esta "aprendizagem" está sendo significativa ou não para o sujeito. Geralmente, a aprendizagem da matamática não passa de uma mera internalização de técnicas, regras e sinais convencionais destituídos de qualquer significado para os sujeitos.

Do ponto de vista construtivista, uma aprendizagem é significativa à medida que o sujeito possa integrar novos conhecimentos a conhecimentos previamente contruídos. Coll (1988) ressalta que "... *o que não podemos assimilar a qualquer esquema prévio, carece totalmente de significado para nós.*" (P. 149).

Neste sentido, evidencia-se a importância de o sujeito ser capaz de compreender e assimilar todo e qualquer conteúdo que é trabalhado no contexto escolar, e não somente ser eficaz na memorização e produção de respostas.

O conhecimento aritmético de adição e subtração não é algo que se adquira por memorização de regras, mas sim, é contruído gradativamente por meio do mecanismo de abstração reflexiva. Este mecanismo é fundamental na construção deste conhecimento, uma vez que pressupõe o estabelecimento de relações e a coordenação de ações e operações dos sujeitos.

Desta forma, a problemática deste estudo centrou-se em verificar, até que ponto sujeitos em diferentes níveis de abstração reflexiva se diferenciavam quanto ao desempenho e à compreensão em situações que envolviam operações de adição e subtração.

De acordo com os resultados obtidos nas avaliações desenvolvidas nesta pesquisa, pode-se afirmar que um bom desempenho não depende de um nível de abstração reflexiva mais evoluído, contudo, a compreensão acerca dos conteúdos em questão só se manifesta quando acompanhada de um nível de abstração superior.

Vale ressaltar que neste estudo o desempenho foi analisado sob o ponto de vista da obtenção de êxito, da produção de resposta correta; ao passo que a compreensão foi analisada em relação à capacidade do sujeito em explicar os procedimentos empregados nas resoluções das operações de adição e subtração. Os procedimentos envolvem processos que dizem respeito aos reagrupamentos, empréstimos e valor posicional da numeração.

Segundo os dados coletados, já explicitados neste trabalho, verifica-se que os sujeitos "sabem"resolver as operações de adição e subtração, visto que o índice de acertos é significativo. Em suas resoluções escritas, bem como em suas explicações orais, evidencia-se que estes reconhecem os passos que se precisa seguir para a obtenção do êxito. ALV (8;6/2^{a} série), por exemplo, assim descreve sua conduta para a operação $42 - 18$: —"**Aqui 2 não dá para tirar 8, aqui risca o 4, aqui ficam 3, aqui 12 tiram 8, sobram 4, daí de 3 tira 1, sobram 2.**"

A memorização do algoritmo é explícita nas palavras utilizadas por ALV. No entanto, ao explicar os procedimentos que emprega nas operações, por meio de fichas, ALV apresenta uma confusão entre unidades e dezenas. O "vai um" é ainda representado por uma ficha e não dez. Isto significa o quanto seu conhecimento encontra-se apoiado apenas no uso mecânico do algoritmo e não no seu real significado.

Nas situações que exigiam apenas o uso do algoritmo (Quadro VII - P. 111), não se verificou diferenças entre os sujeitos, observando-se, em alguns casos, uma melhor performance dos sujeitos com níveis de abstração menos evoluido. O nível de abstração reflexiva não interferiu em suas possibilidades de respostas, o que permite afirmar que os "fatos de adição e subtração" aprendidos pelos sujeitos não implicam em uma construção. Trata-se, pois, de uma aprendizagem *stricto sensu*, baseada apenas na constatação dos fatos da realidade externa, não comportando os mecanismos internos do processo de equilibração, os quais requerem um desenvolvimento gradual. O sujeito é capaz de se utilizar de um procedimento que lhe é transmitido, no entanto sem compreender o que está fazendo. *"É possível aprender um sistema convencional, mas não saber para que ele serve"* (Piaget apud Bryant e Nunes; 1996/1997, P. 228).

Apenas dois sujeitos deste estudo, CAR e REN foram capazes de expressar, a partir de suas próprias ações, os procedimentos de resolução das operações de adição e subtração manifestando compreender o significado do algoritmo. Os demais sujeitos aplicam o algoritmo aprendido sem se equivocar, embora não demonstram compreendê-lo (cf. Quadro XIV - P. 122).

A este respeito Zunino (1995) ressalta que, *"enquanto continuarmos ensinando procedimentos mecânicos sem criar as condições que permitam aos alunos descobrirem os fundamentos desses mecanismos, enquanto não favorecermos a utilização das estratégias que as próprias crianças possam elaborar para resolver e representar as operações, teremos que continuar aceitando que as contas sejam interpretadas como truques inventados por um mágico, como entidades que obedecem* *a regras próprias, independentes das ações de 'agregar' e 'tirar'* (P. 63-4). As ações que os sujeitos realizam com as fichas não traduzem os mecanismos que aprenderam para resolverem as operações. É como se os sinais e números escritos nas operações pertencessem a um contexto totalmente desvinculado da ação material (Hughes apud Zunino; 1995).

Obviamente que não se pretende criticar e negligenciar o uso formal de sinais na resolução das operações, considera-se que estes necessitam, sem dúvida, fazer parte do conhecimento construído pelo sujeito, desde que venham acompanhados de sua devida compreensão.

Schliemann et al. (1992/1995) salienta que "*após a descoberta e compreensão da lógica da situação por parte da criança é que a representação formal matemática deverá ser desenvolvida. Neste processo, a criança adotará, com ajuda da professora as representações e convenções formais e simbólicas para representar algo que já compreende e não como símbolos vazios e convenções arbitrárias*"(P. 115).

Todavia, verifica-se que a maioria dos sujeitos deste estudo não compreende o conjunto de sinais que utilizam. As operações que realizam, demostrando grande habilidade com o uso de suas convenções formais, são definidas por eles apenas em seus termos descritivos e até mesmo imprecisos, conforme pode ser observado nos Quadros X (P. 116) e XI (P. 117). A regra geral implícita nas operações de adição e subtração "reunir" e "tirar" respectivamente, não é abstraída por todos os sujeitos, exceto por aqueles que já possuem um nível de abtração mais evoluído. Isto porque esta lhes permite "retirar" de suas ações uma lei, uma regra geral, que só está presente nas coordenações das ações dos sujeitos e não nos objetos em si. Logo, memorizar não implica compreender.

Da mesma forma que não conseguem explicar os significados das operações de adição e subtração, também não são capazes de explicar, por meio da ação material, os processos implícitos nas operações que realizam tão bem de forma escrita (cf. Quadro XIV - P. 122).

Parte dos sujeitos deste estudo (N=6) não têm construído ao nível da compreensão o sistema numérico decimal, não compreendem os empréstimos e reagrupamentos, e no entanto resolvem corretamente as operações (cf. Quadro VII - P. 111). Os procedimentos destes sujeitos, explicados a partir das ações realizadas com as fichas, recaem sobre uma representação figurativa do algoritmo; eles pensam em cada algarismo como sendo quantidades isoladas. Os sujeitos fazem uma "cópia" figurativa, uma imagem estática da operação.

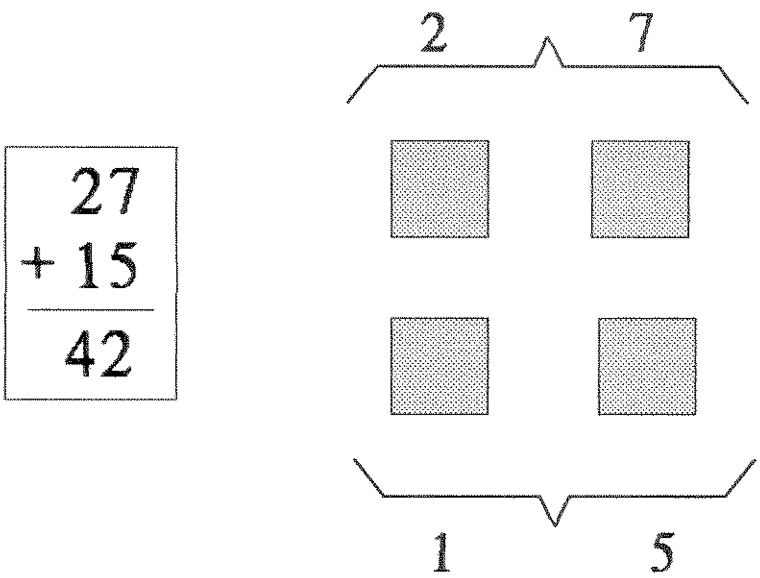


Fig. 7.1 - Representação de HER para Operação de Adição.

Como pode-se observar, o conhecimento de HER centra-se na "fotografia" do algoritmo, deixando claro o quanto a figuratividade impera sobre a operatividade.

Os empréstimos e reagrupamentos, processos necessários à subtração e adição, também são explicados de forma incorreta, isto porque não são compreendidos significativamente pelos sujeitos da pesquisa. Embora sejam resolvidos com eficiência no cálculo escrito e mental, são demonstrados, com as fichas, com valores de unidades e não de dezenas (cf. Figura 6.20 - P. 88 e Figura 6.21 - P. 89). Tal compreensão só foi verificada nos sujeitos que apresentavam nível IIB quanto à abstração reflexiva. Este fato vem assinalar o quanto estes processos encontram-se envolvidos na **compreensão**[1] da aritmética e não simples memorizações.

Kamii (1994/1995) explica que a criança constrói o sistema numérico decimal com base, primeiramente, num sistema de unidades. Quando pensa em um número, 24, por exemplo, pensa, na realidade, em 24 unidades e não em duas dezenas e quatro unidades. As dezenas, por sua vez, são construídas a partir desta noção preliminar à medida que o sujeito, gradativamente e por meio da abstração reflexiva, torna-se capaz de pensar simultaneamente no número 24 como sendo duas dezenas e quatro unidades, sem, de forma alguma, perder o sistema de unidades ao construir o sistema de dezenas. Assim também deve ser para as centenas.

A autora ressalta ainda a negligência do ensino tradicional quando este *"...parte do pressuposto de que idéias como 'uma dezena' e 'uma centena' podem ser simplesmente adquiridas por abstração empírica. O conhecimento lógico-matemático, porém, só pode ser construído por abstração reflexiva (construtiva), com base em relações previamente construídas pelo sujeito"* (ibid.; P. 29).

Quatro sujeitos deste estudo (cf. Quadro XIV - P. 122) demonstram compreender parcialmente o sistema numérico decimal. Afirma-se parcialmente pelo fato de ultrapassarem, em seus procedimentos, uma representação puramente figurativa do algoritmo, não se contentando em efetuar somente uma "cópia" figurativa da operação. Estes sujeitos avançam no sentido de representar as dezenas com seus valores relativos e não mais em termos unitários. O resultado 33, por exemplo, é representado por trinta e três fichas, trinta para as dezenas e três para as unidades.

Os empréstimos e reagrupamentos, num primeiro momento, são representados com valores de unidade. O "empresta 1" não significa emprestar uma dezena e sim uma unidade. Todavia, os sujeitos percebem a contradição, e diante da impossibilidade de continuar seu procedimento, retomam sua ação, corrigindo o erro e emprestando dez fichas, uma a uma. Os sujeitos corrigem seu procedimento em função da contradição que se tornou observável no decorrer de suas ações (cf.

[1] Grifo do autor

Figura 6.24 - P. 95).

Este tipo de contradição não se faz presente com os dois únicos sujeitos que conseguem, de imediato, explicar todo o processo da operação. Estes demonstram, com suas ações, compreender o sistema numérico decimal, os empréstimos e os reagrupamentos, pensando simultaneamente sobre unidades e dezenas. Estes sujeitos não se centram nos aspectos puramente figurativos, ao contrário, eles organizam suas ações de forma a considerá-las sobre seus estados e transformações. Vale ressaltar que os níveis de abstração destes sujeitos foram também mais evoluídos que os níveis dos demais, nível IIB (cf. Quadro XIV - P. 122).

Diferenças qualitativas também foram verificadas quanto aos problemas de adição e subtração que comportavam níveis de complexidade diferenciados (cf. Quadro VIII (P. 112) e IX (P. 114). Em alguns casos, o nível de abstração reflexiva dos sujeitos interferiu nas possibilidades de êxito, principalmente nos problemas que envolviam subtração (cf. Quadro IX - P. 114). Tais problemas exigiam pensar simultaneamente sobre os estados e as transformações ocorridas e só foram possíveis de ser solucionados por sujeitos com níveis de abstração mais evoluídos.

Convém salientar que mesmo os sujeitos com níveis de abstração superiores, não conseguiram obter êxito em todos os problemas propostos. Entretanto, verifica-se que seus erros aparecem naqueles problemas em que, em seu enunciado, sugere uma operação para sua resolução: "ganhar", "perder". Para estes casos explica Zunino (1995): *"é possível que a utilização de problemas-padrão, na escola, leve algumas crianças a centrar-se em certas 'chaves' incluídas reiteradamente nos enunciados, deixando de lado a estrutura global do problema"* (P. 77-8). As crianças acabam por prestar atenção nas palavras que sugerem um determinado tipo de operação, desconsiderando os dados que efetivamente são pertinentes à resolução. Ou seja, negligenciam as possibilidades que seus instrumentos cognitivos permitem, em favor de palavras-chave que continuadamente lhes são impostas pela vida escolar.

Assim como Zunino, Kamii (1994/1995) também faz menção aos efeitos prejudiciais que o uso mecânico do algoritmo é capaz de produzir nas crianças. A autora explica que a instrução prematura dos algoritmos pode ser nociva pelos seguintes motivos: *"os algortimos forçam o aluno a desistir de seu raciocínio numérico; eles "desensinam" o valor posicional e obstruem o desenvolvimento do senso numérico; tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel) e de outras pessoas"* (P. 55).

De acordo com Macedo (1994), estes aspectos podem ser explicados pelo fato de a escola repassar à sua clientela um ensino formalizado, valorizando a transmissão em detrimento da construção. Os conteúdos são transmitidos de maneira "pronta e acabada", formalizada e não formalizante. Do ponto de vista construtivista *"... o conhecimento só pode ser visto como um 'tornar-se' e não como um 'ser'."* (P. 17). Assim, prossegue o autor, *"só a ação espontânea do sujeito, ou apenas nele desencadeada, tem sentido na perspectiva construtivista"* (P. 19).

Transmitir um conhecimento "pronto" às crianças não lhes dá a oportunidade de construi-lo. A cada vez que se ensina aos sujeitos um conteúdo, um procedimento formalizado, não lhes cabe entendê-los, mas apenas memorizá-los e utilizá-los quando lhes for solicitado. Como afirma Coll (1985): *" qualquer intenção do professor em transmitir um conhecimento estruturado está condenado ao fracasso ou a produzir uma aprendizagem puramente repetitiva"* (P. 102). Neste sentido, a presente pesquisa pôde confirmar os nocivos efeitos resultantes desta concepção de ensino. Demonstrando sobretudo, que o conhecimento aritmético se apóia em abstrações reflexivas quando dele se exige seu verdadeiro sentido: a compreensão. Sem compreensão não se tem conhecimento e sim memorização de conteúdos, incapazes de serem generalizados à outras situações.

A escola deveria ajudar as crianças a formalizarem o seu conhecimento. Neste caso, suas exigências deveriam recair sobre *"a demonstração, reconstituição e transformação de algo já sabido"* (Macedo; 1994, P. 16). Em contrapartida, as exigências de um ensino formalizado recaem sobre um *"modelo ou padrão, graças ao qual reproduz-se algo dentro de certas condições, repetindo um resultado esperado* *ou exigido"* (ibid.; P. 16).

Os resultados deste estudo vem se reunir a inúmeros outros, pois há tempos que o construtivismo piagetiano aponta a necessidade de o contexto escolar promover um processo de ensino-aprendizagem voltado a desencadear as ações do sujeito, para que este possa, gradativamente, elaborar estruturas de conhecimento cada vez mais ricas. Ou por que não, como afirma Macedo (1993): *"transformar a escola em um espaço onde crianças, professores, qual filósofos, pudessem pensar, pudessem recuperar a possibilidade de um pensar com razão?"* (Texto mimeo.; P. 14). Ou seja, uma escola que, parafraseando Macedo, permitisse que as crianças e professores experimentassem o prazer da criação e conhecessem a alegria do conhecimento, **a alegria da construção do conhecimento.**[2]

[2]Grifo do autor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRENELLI, R. P. (1993). *Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem.* Campinas, SP. (Tese de doutorado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas).

BUSQUET PRAT, D. (1995). *Os problemas não formulados.* In: Construtivismo e Educação. XII Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Tecnicópias Gráfica e Editora Ltda.

CASTORINA, J. A. FERNÁNDES S., LENZI A. (1988). *A psicologia genética e os processos de aprendizagem.* In: CASTORINA, J. A. e col. (**org.**). *Psicologia genética: Aspectos metodológicos e implicações pedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas. (Edição original: 1984)

COLL, C. (1985). *Ação, interação e construção do conhecimento em situações educativas.* In: COLL, C. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.*

COLL, C. (1988). *Significado e sentido na aprendizagem escolar: Reflexões em torno do conceito de aprendizagem significativa.* In: COLL, C. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.*

COLL, C. MARTI, E. *Aprendizaje y desarrollo: La concepcion genetico-cognitiva del aprendizaje.*

DAMM, R. F. (1994). *Aprendizagem dos problemas aditivos e compreensão de texto.* Águas de São Pedro: INEP - Série Documentos, nº4: pp.01-18.

FRANCH, X. G. (1983). *La serie numérica: reconstruir para generalizar.* In: MORENO, M. (**org.**). *La pedagogia operatória.* Barcelona: Editorial Laia y Equipo del IMIPAE.

INHELDER, B. BOVET, M. SINCLAIR, H. (1977). *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* São Paulo: Saraiva Editores. (Edição original: 1974).

KAMII, C. e DeCLARK, G. (1988). *Reinventando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget.* Campinas, SP: Papirus. (Edição original: 1985).

KAMII, C. e LEWIS, B. (1991). Achievement tests in primary mathematics: Perpetuating lower-order thinking. *Arithmetic Teacher, nº 9*: pp.04-09.

KAMII, C. LEWIS, B. e LIVINGSTON, S. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher, nº 4*: pp.200-03.

KAMII, C. e LIVINGSTON, S. J. (1995). *Desvendando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget.* Campinas, SP: Papirus. (Edição original: 1994).

MACEDO, Lino de (1993). *A importância dos jogos de regras para a construção do conhecimento na escola.* Texto mimeografado. Universidade de São Paulo: Instituto de Psicologia.

MACEDO, Lino de (1994). *Ensaios construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo. (Edição original: 1994).

MADELL, R. (1985). Children's natural processes. *Arithmetic Teacher, nº 32*: pp.20-22.

MANTOVANI de ASSIS, O. (1976). *A solicitação do meio e a construção das estruturas lógicas elementares na criança.* Campinas, SP. (Tese de doutorado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas).

NUNES, T. e BRYANT, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas. (Edição original: 1996).

PIAGET, J. (1964). Development and Learning. *Journal of Research in Science Teaching, nº 2*: pp. 176-86.

PIAGET, J. (1972). *Psicologia e Pedagogia.* São Paulo: Editora Forense. (Edição original: 1969).

PIAGET, J. (1973). *Observaciones sobre la educacion matematica*. In: Developments in Mathematical Education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education: pp. 79-87. (Edição original: 1973).

PIAGET, J. (1974). *Aprendizagem e conhecimento*. In: PIAGET, J. e GRECO, P. *Aprendizagem e conhecimento*. Rio de Janeiro: Editora Freitas Bastos.

PIAGET, J. (1975) *Problemas de psicologia genética*. In: Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural. (Edição original: 1972).

PIAGET, J. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas. O problema central do desenvolvimento*. Rio de Janeiro: Zahar. (Edição original: 1975).

PIAGET, J. (1978). *Psicologia e epistemologia: Por uma teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Forense Universitária. (Edição original: 1973).

PIAGET, J. (1983). *Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico*. In: PIATELLI-PALMIERI, M. **org.**. *Teorias da linguagem e teorias da aprendizagem: O debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky*. São Paulo: Cultrix. (Edição original: 1979).

PIAGET, J. (1994a). *A psicologia da criança*. São Paulo: Bertrand Brasil. (Edição original: 1966).

PIAGET, J. (1994b). *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: José Olympio. (Edição original: 1972).

PIAGET, J. (1995a). *Abstração reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas. (Edição original: 1977).

PIAGET, J. (1995b). *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária. (Edição original: 1964).

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. (1980). *A teoria de Jean Piaget e a educação*. In: PENTEADO, W. M. A. (**org.**).*Psicologia e ensino*. São Paulo: Papelivros. (Edição original: 1980).

SASTRE, G. e MORENO, M. (1980). *Descubrimiento y construcción de conocimientos: Una experiencia de pedagogia operatoria.* Barcelona: Gedisa. (Edição original: 1980)

SCHLIEMANN, A. D. et al. (1995). *Da compreensão do sistema decimal à construção de algorítmos.* In: ALENCAR, E. S. (**org.**).*Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.* São Paulo: Cortez. (Edição original: 1992).

SMEDSLUND, J. (1961). The acquisition of conservation of substance and weight in children. *Scandinavian Journal of Psychology, nº 2 e 3*: pp. 11-77.

STANDIFER, D. J. e BAROODY, A. J. *Addition and Subtraction in the primary grades.* Chapter 4: pp. 72-102.

VERGNAUD, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics, nº 10*: pp. 263-74.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas. (Edição original: 1985).

WEARNE, D. e HIEBERT, J. (1994). Place value and addition and subtraction. *Arithmetic Teacher, nº 5*: pp.272-74.

ZUNINO, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas. (Edição original: 1995).

APÊNDICE A

A.1 Anexo I

Resolva as operações:

$$\begin{array}{rrrrr} 72 & 93 & 34 & 364 & 535 \\ +\ \underline{66} & +\ \underline{67} & +\ \underline{91} & +\ \underline{232} & +\ \underline{481} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 69 & 95 & 43 & 241 & 342 \\ +\ \underline{45} & +\ \underline{76} & +\ \underline{62} & +\ \underline{327} & +\ \underline{594} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 34 & 93 & 48 & 65 & 129 \\ -\ \underline{18} & -\ \underline{12} & -\ \underline{29} & -\ \underline{47} & -\ \underline{63} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 77 & 72 & 89 & 51 & 139 \\ -\ \underline{39} & -\ \underline{25} & -\ \underline{64} & -\ \underline{37} & -\ \underline{90} \end{array}$$

A.2 Anexo II

Resolva os problemas:

1) Numa parada de ônibus sobem 6 pessoas. No ônibus já haviam 4 pessoas. Quantas pessoas têm agora?

2) No mês de novembro entraram 3 novos alunos em nossa classe. Antes haviam 39 alunos. Quantos alunos têm agora?

3) Fui à cantina da escola e gastei 18 reais. Agora tenho 3 reais. Quantos reais tinha antes de ir à cantina?

4) Comprei um saquinho de balas e dei 13 aos meus colegas. Agora tenho 8 balas. Quantas balas vieram no saquinho?

A.3 Anexo III

Resolva os problemas:

1) Para brincar com meus colegas levei 13 bolinhas de gude. Durante o jogo perdi 4 bolinhas. Quantas bolinhas tenho agora?

2) Em meu jardim tinham 14 margaridas. Colhi 6 para dar à minha professora. Quantas margaridas ainda têm no jardim?

3) Acabo de ganhar no jogo 5 bolinhas de gude. Tenho agora 13 bolinhas. Quantas bolinhas tinha antes de jogar?

4) Acabo de ganhar 7 figurinhas. Agora fiquei com 16 figurinhas. Quantas figurinhas eu tinha?

5) Comecei a jogar com 8 bolinhas de gude. Acabo de jogar uma partida e agora tenho 14. O que aconteceu durante o jogo?

6) No primeiro tempo do jogo meu time de futebol marcou 4 gols. Acabamos a partida com 13 gols. O que aconteceu durante o segundo tempo do jogo?

A.4 Anexo IV

Leia os números e depois resolva a operação:

$$\begin{array}{r} \mathbf{4} \\ \mathbf{35} \\ + \ \mathbf{24} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{1} \\ \mathbf{12} \\ + \ \mathbf{10} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{6} \\ \mathbf{22} \\ + \ \mathbf{11} \\ \hline \end{array}$$

A.5 Anexo V

Resolva a operação mentalmente e depois a resolva no papel:

$\boxed{\mathbf{6+53+85=}}$

$\boxed{\mathbf{52+8+10=}}$

$\boxed{\mathbf{25+13+4=}}$

$\boxed{\mathbf{17\text{-}12=}}$

$\boxed{\mathbf{58\text{-}41=}}$

$\boxed{\mathbf{15\text{-}11=}}$

A.6 Anexo VI

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 15 \\ \hline \end{array}$$

27

15

$$\boxed{\begin{array}{r} 42 \\ -\ \underline{18} \end{array}}$$

$\boxed{42}$ $\boxed{18}$

A.7 Anexo VII

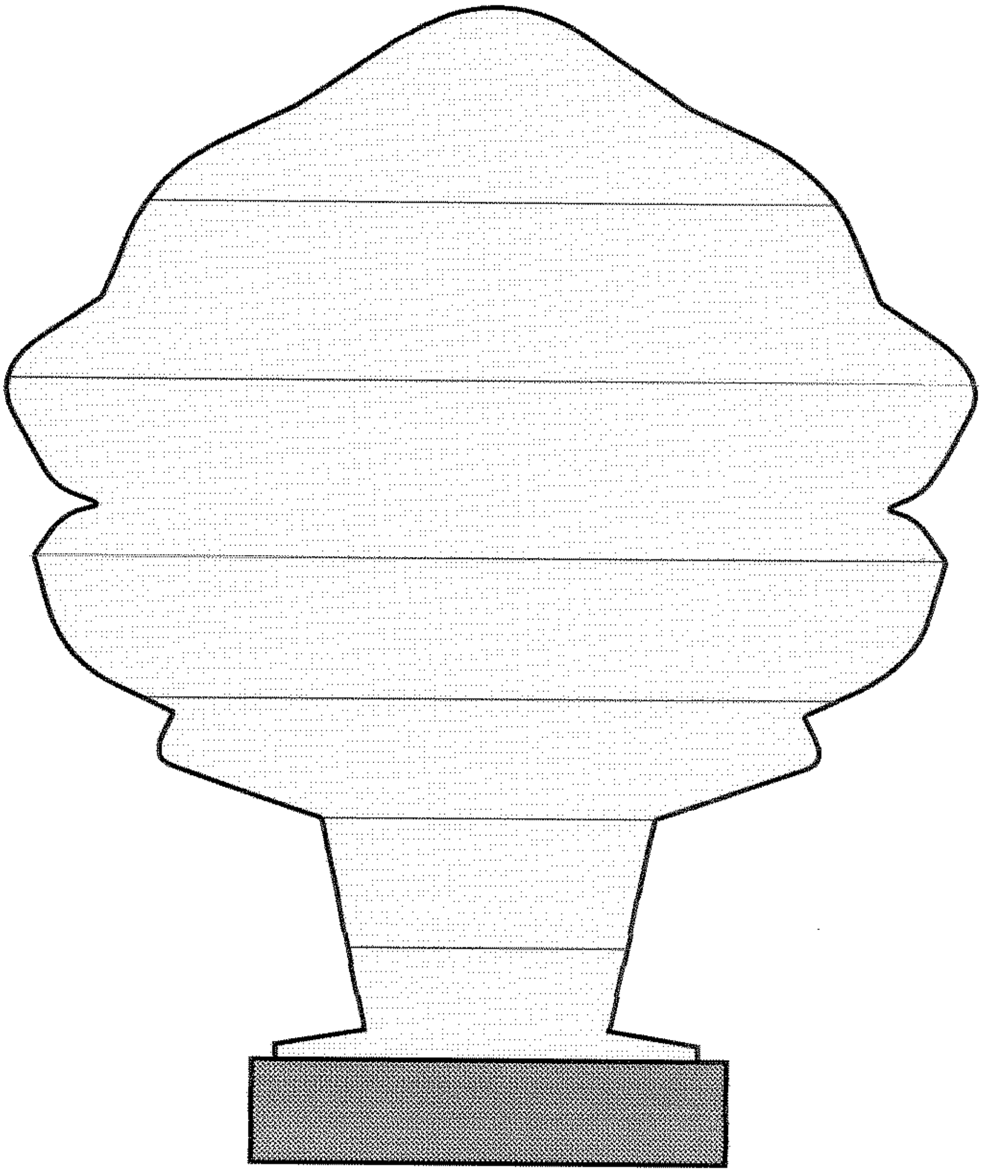


Fig. A.1 - Representação Esquemática da Árvore.

A.8 Anexo VIII

Piaget (1977/1995) fez uma classificação dos sujeitos em diferentes estágios em função das respostas obtidas nas provas propostas.

Estágio I

Nível IA Contentam-se com empilhamentos quaisquer para a montagem da árvore; concentram-se nas cores e tamanhos das peças e não nas áreas de secção; não percebem a diferença entre a montagem da árvore (ordem necessária) e a montagem do cubo (ordem desnecessária).

Nível IB Têm consciência da ordem necessária à montagem da árvore, bem quando de sua inversão quando demolida; admitem não haver uma ordem necessária para a montagem do cubo; quanto aos problemas de cálculo, não vêem a possibilidade de voltar de n' a n; acreditam não ser necessário saber do número terminal n'.

Estágio II

Nível IIA Admitem que para encontrar n, necessariamente, precisa-se saber de n' e proceder por operações inversas, contudo, não conseguem, ainda, perceber que é preciso conservar a ordem ao inverter as operações.

Nível IIB Há compreensão de uma ordem necessária, contudo, não são capazes, ainda, de antecipar dedutivamente o caminho de n' para n.

Estágio III

Há antecipação da reconstituição dedutiva de n, e não mais somente reconstituição após constatação do sucesso.