UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO
ÁREA TEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO E AS RELAÇÕES COM O DESEMPENHO ESCOLAR E AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E À GEOMETRIA

ODALÉA APARECIDA VIANA

Campinas, 2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

O COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO E AS RELAÇÕES COM O DESEMPENHO ESCOLAR E AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E À GEOMETRIA

ODALÉA APARECIDA VIANA

Orientadora: MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Odaléa Aparecida Viana e aprovada pela Comissão Julgadora.

01/08/2005

Assinatura: Márcia Regina F. de Brito
Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

Márcia Regina F. de Brito

Irene Maurício Cazorla

2005

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca da Faculdade de Educação/UNICAMP

Viana, Odaléa Aparecida
V654c O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria / Odaléa Aparecida Viana. – Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Psicologia da educação. 2. Matemática. 3. Geometria – Estudo e ensino. 4. Capacidade matemática. 5. Raciocínio (Psicologia). 6. Educação matemática. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

05-103

Keywords: Pscyhology of mathematics education; Geometry teaching; Mathematical abilities; Spatial sense
Área de concentração: Educação matemática
Titulação: Doutor em Educação
Banca examinadora : Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito.
Prof. Dra Irene Maurício Cazorla
Prof. Dr. Wagner Bandeira Andriola
Profa. Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão
Profa. Dra. Rosely Palermo Brenelli
Data da defesa: 08/08/2005

RESUMO

Considerando a influência de fatores cognitivos e afetivos no desempenho escolar em geometria, este trabalho teve como objetivos analisar o componente espacial da habilidade matemática e verificar a existência de relações entre este componente, o raciocínio espacial, as atitudes em relação à matemática e à geometria e o desempenho escolar. Foram sujeitos 177 alunos de ensino médio de uma escola particular, tendo sido aplicadas duas provas tipo lápis e papel, um teste psicológico de raciocínio espacial e duas escalas de atitudes em relação à matemática e geometria. A análise fatorial das operações do componente espacial da habilidade matemática (contagem de cubos, formação e identificação de polígonos no espaço, secção, planificação, projeção e revolução) indicou a existência de um único fator, o que comprova que a prova avaliou a habilidade geral dos sujeitos em lidar com conceitos geométricos espaciais trabalhados no ensino médio, com base nas tarefas propostas. As atitudes em relação à matemática estavam relacionadas com as atitudes em relação à geometria. O desempenho em geometria estava relacionado com o raciocínio espacial, com o componente espacial da habilidade matemática e com as atitudes em relação à geometria. O trabalho faz referência aos processos de formação, inspeção e transformação de imagens mentais evidenciados nas fases de obtenção e de processamento da informação geométrica de problemas. As representações pictóricas externas demonstradas na solução de problemas geométricos com estrutura espacial foram classificadas de acordo com a funcionalidade, coerência e detalhamento, sendo que os dados mostraram que sujeitos mais habilidosos elaboram representações parciais e coerentes e não as utilizavam com a função de assistência perceptual.

Psicologia da educação matemática; ensino de geometria; habilidade matemática; raciocínio espacial; habilidade visual.

ABSTRACT

In considering the influence of cognitive and affective factors in academic achievement of geometry, the objectives of this work were to analyze the spatial component of mathematical ability and to verify the existence of relations among this component, the spatial sense, the attitudes toward Mathematics and Geometry and the academic performance. The subjects of this research were 177 students, from three grades of a particular school from Mogi das Cruzes – SP. Two questionnaires with pencil and paper, one spatial sense test and two attitudes scales toward mathematics and geometry were applied. The factorial analysis of spatial component operations of mathematics ability (counting of cubes, formation and identification of polygon in space, section, planning, projection and rotation) indicated the existence of one factor. It proved that the test evaluated the general ability to deal with geometric concepts that are taught in the secondary school, taking into account the proposed tasks. The attitudes toward Mathematics were related to the attitudes toward geometry. The geometry performance was related to the spatial sense, to the spatial component of mathematical ability and to the attitudes toward mathematics and geometry. This work made reference to the formation, inspection and transformation of visual mental images, whose processes were evidenced in the phases of acquisition and processing of problems geometrical information. The external graphical representations that were evidenced in the solution of geometry problems with the spatial structure were classified according to the function, coherence and detailing, and the dates indicated that the most talented students made partial and coherent representations and did not utilize them as perceptual assistance.

Psychology of Mathematics Education; geometry teaching; mathematical abilities; spatial sense.

AGRADECIMENTOS

À professora Dr.ª Márcia Regina Ferreira de Brito pela orientação, pelas incansáveis leituras e correções, pelo incentivo dado e pelos exemplos de competência e profissionalismo demonstrados em todos os momentos.

Aos membros da banca de qualificação Profª Drª Cristina Maranhão e Profª Drª Rosely Brenelli pelas críticas e sugestões dadas.

Aos professores do Curso de Doutorado pelas aulas que foram fundamentais na formação teórica.

Ao Prof. Dr. Ricardo Primi pela autorização da aplicação de um dos instrumentos.

Aos professores, colegas e amigos do PSIEM – grupo de pesquisa Psicologia da Educação Matemática – que muito colaboram nas etapas deste trabalho.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação, pelo bom atendimento.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

À direção e à coordenação do Colégio Bandeirantes de Mogi das Cruzes que permitiram a aplicação dos instrumentos.

Aos alunos do colégio que, de maneira tão carinhosa e responsável, se empenharam em responder as questões propostas.

Aos familiares e amigos pelo incentivo recebido.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO xiv

CAPÍTULO I : A HABILIDADE ESPACIAL NO CONTEXTO ESCOLAR 1

CAPÍTULO II : ASPECTOS RELACIONADOS À HABILIDADE ESPACIAL E À HABILIDADE MATEMÁTICA NA TEORIA DE KRUTETSKII 9

CAPÍTULO III : INTELIGÊNCIA E HABILIDADE ESPACIAL 17

CAPÍTULO IV : A PERCEPÇÃO 29

CAPÍTULO V : A REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO E AS IMAGENS MENTAIS 39

CAPÍTULO VI : A TEORIA COMPUTACIONAL DE KOSSLYN 47

CAPÍTULO VII : AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E À GEOMETRIA 66

CAPÍTULO VIII: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 75

CAPÍTULO IX : MÉTODO 111

CAPÍTULO X : AS VARIÁVEIS ENVOLVIDAS: UMA ANÁLISE QUANTITATIVA 119

CAPÍTULO XI : O COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE QUALITATIVA 171

CAPÍTULO XII : AS REPRESENTAÇÕES PICTÓRICAS EXTERNAS: UMA ANÁLISE QUALITATIVA 203

CAPÍTULO XIII: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 231

CONSIDERAÇÕES FINAIS 240

REFERÊNCIAS 246

ANEXO 1- I_1 : Questionário informativo 266
ANEXO 2- I_2 : Prova CEHM 267
ANEXO 3- I_4 : Escala de atitudes em relação à Matemática 276
ANEXO 4- I_5 : Escala de atitudes em relação à Geometria 277
ANEXO 5- I_6 : Questões de vestibulares 278

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 10.1. Distribuição dos alunos por série 119
Tabela 10.2. Distribuição dos alunos por área de conhecimento 120
Tabela 10.3. Distribuição dos alunos de acordo com a importância atribuída ao conhecimento em geometria.. 120
Tabela 10.4. Distribuição dos alunos de acordo com o que mais gostam e menos gostam em geometria 121
Tabela 10.5. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo de geometria 122
Tabela 10.6. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo para a prova de geometria 122
Tabela 10.7. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo para a prova de geometria por área pretendida...................... 123
Tabela 10.8. Distribuição dos alunos por disciplina que mais estudam......... 124
Tabela 10.9. Qual a importância da escola na sua vida? 124
Tabela 10.10. Distribuição dos valores da EARM e da EARG........................ 125
Tabela 10.11. Distribuição dos valores da EARM por grupos 127
Tabela 10.12. Distribuição dos valores da EARG por grupos 130
Tabela 10.13. Correlação entre as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à Geometria (EARG).. 131
Tabela 10.14. Estatísticas descritivas do desempenho no teste RE(Raciocínio espacial).. 133
Tabela 10.15. Distribuição dos valores da pontuação no teste RE (raciocínio Espacial) por grupos 136
Tabela 10.16. Correlações entre o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à geometria (EARG).. 137
Tabela 10.17. Correlações entre o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à geometria (EARG) por série 137
Tabela 10.18. Distribuição dos sujeitos de acordo com os acertos e erros na contagem de cubos.. 138
Tabela 10.19. Polígonos formados no cubo e distribuição dos sujeitos quanto ao acerto na formação e identificação de polígonos no espaço 141
Tabela 10.20. Exemplos de secções possíveis e distribuição dos sujeitos pelo número de secções obtidas... 142
Tabela 10.21. Distribuição dos sujeitos quanto aos acertos nas secções do sólido 143
Tabela 10.22. Distribuição dos sujeitos quanto aos acertos nas secções do sólido 144

Tabela 10.23. Planificações corretas e distribuição dos sujeitos quanto aos acertos e erros por figura 145
Tabela 10.24. Projeções corretas e distribuição dos sujeitos quanto aos acertos por sólido e por face de projeção.............................. 148
Tabela 10.25. Projeções corretas do cubo e distribuição dos sujeitos quanto aos acertos e erros por face 149
Tabela 10.26. Projeção correta do cubo e distribuição dos sujeitos quanto aos acertos e erros 149
Tabela 10.27. Distribuição dos acertos e erros por sólido e a respectiva figura plana geradora 150
Tabela 10.28. Distribuição dos sujeitos por figura geradora de sólido 152
Tabela 10.29. Estatísticas da Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM).. 153
Tabela 10.30. Estatísticas da Prova padronizada do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM).. 154
Tabela 10.31. Autovalores da matriz de correlação da Prova CEHM............. 155
Tabela 10.32. Carga fatorial das partes da Prova CEHM............................. 155
Tabela 10.33. Estatísticas da Prova CEHM por série 156
Tabela 10.34. Distribuição do desempenho na Prova CEHM por grupos 158
Tabela 10.35. Correlações entre o desempenho na prova CEHM com o desempenho no teste RE e as atitudes em relação à Matemática e à geometria.. 159
Tabela 10.36. Correlações entre o desempenho na prova CEHM com o desempenho no teste RE e as atitudes em relação à Matemática e à Geometria por série.. 159
Tabela 10.37. Estatística das Notas por disciplina e da Nota Geral.............. 162
Tabela 10.38. Distribuição dos valores da nota de geometria por grupos 163
Tabela 10.39. Correlações entre as notas escolares.................................... 163
Tabela 10.40. Correlações entre o Raciocínio Espacial (RE) e as Notas....... 164
Tabela 10.41. Correlações entre o Raciocínio Espacial (RE) e as Nota em Geometria por série.. 164
Tabela 10.42. Correlações entre o desempenho na prova CEHM e as notas em Matemática e em geometria.. 165
Tabela 10.43. Correlações entre o desempenho na prova CEHM com as notas em Matemática e em Geometria por série............... 166
Tabela 10.44. Correlações entre a nota em Matemática e as atitudes em relação à Matemática (EARM) por série............................... 167
Tabela 10.45. Correlações entre a nota em Geometria e as atitudes em relação à Geometria (EARG) por série.............................. 165
Tabela 11.1. Sujeitos considerados como mais habilidosos e menos habilidosos de acordo com o gênero, série, desempenho na prova CEHM e pontuação no teste de RE.............................. 171
Tabela 11.2. Variáveis relativas aos sujeitos mais habilidosos...................... 200
Tabela 11.3. Variáveis relativas aos sujeitos menos habilidosos.................. 201

Tabela 12.1.	Classificação dos problemas geométricos quanto à forma de apresentação das informações, quanto à estrutura conceitual requerida para sua solução e quanto à habilidade espacial envolvida	206
Tabela 12.2.	Classificação dos problemas de exames vestibulares do instrumento utilizado na pesquisa	206
Tabela 12.3.	Resumo dos critérios estabelecidos para análise das representações pictóricas externas	218
Tabela 12.4.	Sujeitos selecionados para a etapa do estudo e algumas variáveis	219

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Relações a serem investigadas na pesquisa	xi
Figura 1.1.	Questões de livros didáticos	6
Figura 2.1.	Estrutura de prontidão para uma determinada atividade	9
Figura 2.2.	Figura e descrição do raciocínio em problemas de geometria	13
Figura 4.1.	Exemplos de uma estrutura organizada	32
Figura 4.2.	Objeto formado por setores, com duas organizações possíveis	33
Figura 4.3.	"Dadas *r // s*, determinar o valor de x"	34
Figura 4.4.	"Quais as figuras podem ser vistas?"	35
Figura 4.5.	Figuras geométricas na estrutura I(a) e na estrutura II(b)	35
Figura 4.6.	"Calcular o volume da pirâmide regular de base triangular"	36
Figura 4.7.	"Calcular a área hachurada em função de r"	37
Figura 4.8.	Calcular os ângulos formados pelas retas r e s	37
Figura 5.1.	Duas retas paralelas cortadas por duas transversais	42
Figura 6.1.	Pirâmides	49
Figura 6.2.	Esboço de paralelepípedo	50
Figura 6.3.	Triângulos	51
Figura 6.4.	Paralelepípedos	51
Figura 6.5.	Triângulos	52
Figura 6.6.	Retângulos	52
Figura 6.7.	O modelo de Kosslyn	52
Figura 6.8.	Retas r e s	60
Figura 6.9.	Ladrilhamento e o detalhe dos ângulos	61
Figura 8.1.	Quais polígonos à direita são rotações do polígono à esquerda?	76
Figura 8.2.	Calcular a medida do ângulo indicado	82
Figura 8.3.	Problema com informações por meio de desenhos	82
Figura 8.4.	Representações fracas	91
Figura 8.5.	Representações intermediárias	91

Figura 8.6. Representações boas 92
Figura 8.7. São dados a figura tridimensional (A), a direção da projeção (B) 96
Figura 8.8. Tipos de representação de objetos tridimensionais 97
Figura 8.9. Fases intermediárias em projeções ortográficas 100
Figura 9.1. Prova de raciocínio espacial (RE) da BPR-5 113
Figura 10.1. Histograma das Atitudes em relação à Matemática 126
Figura 10.2. Atitudes em relação à matemática pela à autopercepção do desempenho 126
Figura 10.3. Atitudes em relação à matemática pela escolha da futura área profissional 127
Figura 10.4. Histograma das atitudes em relação à Geometria(EARG) 128
Figura 10.5. Atitudes em relação à Geometria por gênero 128
Figura 10.6. Atitudes em relação à Geometria por série 129
Figura 10.7. Atitudes em relação à Geometria por área de conhecimento 129
Figura 10.8. Atitudes em relação à geometria pela auto-percepção do desempenho 130
Figura 10.9. Relação entre as Atitudes em relação à Matemática e à Geometria 132
Figura 10.10. Histograma do desempenho no teste Raciocínio Espacial 133
Figura 10.11. Raciocínio espacial por gênero 134
Figura 10.12. Raciocínio espacial pelo gostar de fazer o teste 135
Figura 10.13. Raciocínio espacial pela auto-avaliação 135
Figura 10.14. Histograma do desempenho na Prova CEHM 156
Figura 10.15. Desempenho na Prova CEHM por gênero 157
Figura 10.16. Desempenho na Prova CEHM por série 157
Figura 10.17. Relações entre CEHM e EARG por série 161
Figura 10.18. Relações entre a nota em Geometria e Raciocínio Espacial (RE) por série 165
Figura 10.19. Relações entre o desempenho na prova do Componenete Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) e a nota em geometria por série 167
Figura 10.20. Relações entre a nota em Geometria e as atitudes em relação à Geometria (EARG) por série 169
Figura 10.21. Relações entre as variáveis estudadas 170
Figura 11.1. Sólido e a fórmula para contagem utilizada por sujeitos mais habilidosos 172
Figura 11.2. Estratégias de contagem por camadas, utilizadas por sujeitos mais habilidosos 172
Figura 11.3. Estratégias de contagem por adição ou complementação de blocos, utilizadas por sujeitos mais habilidosos 173
Figura 11.4. Estratégias de contagem de cubos e de faces utilizadas por sujeitos menos habilidosos 174
Figura 11.5. Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes corretos dados por sujeitos mais habilidosos 176

Figura 11.6.	Polígono formado no cubo, suas medidas e o nome correto dado por sujeitos mais habilidosos	177
Figura 11.7.	Polígono formado no cubo, suas medidas e o nome correto dado por sujeitos habilidosos	177
Figura 11.8.	Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes corretos dados pelos sujeitos mais habilidosos	178
Figura 11.9.	Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes dados pelos sujeitos menos habilidosos	179
Figura 11.10.	Secções obtidas pelos sujeitos mais habilidosos	181
Figura 11.11.	Secções obtidas pelos sujeitos mais habilidosos	182
Figura 11.12.	Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos	183
Figura 11.13.	Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos	183
Figura 11.14.	Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos	184
Figura 11.15.	Planificações de prismas feitas por sujeitos mais habilidosos	185
Figura 11.16.	Planificações da pirâmide e do tronco de pirâmide feitas por sujeitos mais habilidosos	186
Figura 11.17.	Planificações do paralelepípedo oblíquo: correta (à esquerda) e incorretas (no centro e à direita) feitas pelos sujeitos mais habilidosos	186
Figura 11.18.	Planificações dos corpos redondos feitas por sujeitos mais habilidosos	187
Figura 11.19.	Planificações dos sólidos compostos feitas por sujeitos mais habilidosos	188
Figura 11.20.	As planificações do paralelepípedo feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) nº de faces errado; (2) medidas erradas; (3) faces em perspectivas; (4) representação global	189
Figura 11.21.	As planificações de prismas feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) nº de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura	190
Figura 11.22.	As planificações de prismas e pirâmides feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) nº de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura	191
Figura 11.23.	As planificações de poliedros feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) nº de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura	192
Figura 11.24.	As planificações de corpos redondos feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) superfície lateral errada e/ou círculos não tangentes; (2) figura dada em perspectiva	193
Figura 11.25.	Desenhos das projeções feitas por sujeitos mais habilidosos	194
Figura 11.26.	Desenhos das projeções feitas por sujeitos menos habilidosos	195
Figura 11.27.	Identificação do sólido de revolução com a figura plana geradora feita pelos sujeitos mais habilidosos	196

Figura 11.28.	Desenhos de figuras planas geradoras de sólidos geométricos feitos pelos sujeitos mais habilidosos	197
Figura 11.29.	Identificação do sólido de revolução com a figura plana geradora feita pelos sujeitos menos habilidosos	198
Figura 11.30.	Desenhos de figuras planas geradoras de sólidos geométricos feitos por um sujeito menos habilidosos	200
Figura 12.1.	Exemplos de problemas quanto à forma de apresentação das informações (a) verbal; (b) pictórica e (c) mista	204
Figura 12.2.	Exemplos de problemas quanto à estrutura conceitual requerida: (a) aritmética; (b) algébrica; (c) geométrica; (d) espacial; (e) mista	205
Figura 12.3.	Representações pictóricas externas como referência conceitual espacial	211
Figura 12.4.	Representações pictóricas externas com a função de assistência perceptual no processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem	212
Figura 12.5.	Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial	213
Figura 12.6.	Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à transformação de imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial	214
Figura 12.7.	Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de referência conceitual plana	214
Figura 12.8.	Representações pictóricas externas com a função de referência conceitual: coerente (a) e não coerentes (b) e (c) para o quarto problema	215
Figura 12.9.	Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de nova referência conceitual espacial: coerente (a) e não-coerente (b) para o quinto problema	215
Figura 12.10.	Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à transformação de imagem com a função de nova referência conceitual espacial: coerente (a) e não-coerentes (b) e (c) para o sexto problema	216
Figura 12.11.	Representações pictóricas externas (a) parcial e (b) completa, para o quinto problema	217

Figura 12.12. Representações pictóricas externas de sujeitos menos habilidosos para o primeiro problema.. 220
Figura 12.13. Soluções apresentadas por sujeitos menos habilidosos para o segundo problema.. 220

Figura 12.14. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos menos habilidosos para o quarto problema........... 221
Figura 12.15. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o primeiro problema........... 222
Figura 12.16. Soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o segundo problema.. 222
Figura 12.17. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o sétimo problema............. 223
Figura 12.18. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o quinto problema............... 223
Figura 12.19. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por dois sujeitos mais habilidosos: completas e não-coerentes (VAG, acima) e parciais e coerentes (VIT, abaixo) para o sexto problema.. 225
Figura 12.20. Soluções e representações apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o oitavo problema... 226

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1.1. Exemplos de questões de vestibulares 7
Quadro 5.1. Representações de triângulo retângulo escaleno 40
Quadro 6.1. Processos cognitivos envolvidos na formação e inspeção de imagens... 63

INTRODUÇÃO

Se não fosse a capacidade humana de representar mentalmente o espaço, certamente nenhum objeto físico teria sido projetado, nem fabricado ou manufaturado, e certamente nenhuma tecnologia teria sido desenvolvida. A imaginação visual permite ao homem formar imagens mentais a partir da percepção direta ou não, manter essas imagens, manipulá-las mentalmente, transformando-as, para, por fim, representá-las externamente.

O entendimento dos processos relativos à formação e à manipulação de imagens mentais e das diferenças individuais quanto à capacidade de raciocinar com elementos espaciais há muito tem fascinado os psicólogos e, mais recentemente, vários pesquisadores da área de educação matemática.

A geometria escolar, que tem como objetivo o estudo das formas dos objetos e de suas relações, parece, por exigência da sua própria natureza representativa, ajudar a desenvolver a habilidade de formar e manipular imagens mentais. Essa habilidade também é chamada de habilidade visual, de habilidade espacial ou de raciocínio espacial.

Apesar de existirem várias sugestões de métodos de ensino de geometria que parecem estar comprometidas com o desenvolvimento desse raciocínio, muitas pesquisas mostraram que alunos do ensino básico têm dificuldades para responder perguntas sobre geometria, tanto aquelas que se referem aos conceitos quanto as que exigem habilidades geométricas visuais. Os resultados de vários trabalhos[1] sugerem que o ensino de geometria em várias escolas continua ainda bastante deficitário.

---

[1] Alguns desses trabalhos foram realizados no grupo de pesquisas PSIEM – Psicologia da Educação Matemática – da Faculdade de Educação da UNICAMP. Destacam-se os trabalhos de Oliveira, 1998; Pirola, 1995; Pirola, 2000; Rezi, 2001; Viana,2000.

Por outro lado, verifica-se que muitas escolas da rede particular de ensino têm incluído geometria como disciplina em sua grade curricular[2] e, dessa forma, ajudam a romper com um ensino de matemática que priorizou, nas últimas décadas, a álgebra em detrimento da geometria. Esses currículos visam principalmente adaptar o conteúdo de matemática ao que é exigido nos exames vestibulares e também no ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, em que grande parte das questões refere-se à geometria. Acrescenta-se que a clientela das escolas particulares visa especialmente aos cursos superiores mais concorridos e isso requer do vestibulando um bom desempenho em todas as provas, independente do curso escolhido.

Nessas escolas, ao contrário do que acontece nas escolas públicas do estado de São Paulo, o conteúdo de geometria é trabalhado como uma disciplina independente da matemática e é diluído no ensino básico em um período de sete anos, desde a quinta série do ensino fundamental até a terceira do ensino médio. O conteúdo abrange geometria plana, geometria espacial e desenho geométrico.

A experiência como docente dessa disciplina mostrou que vários dos conteúdos abordados nem sempre eram plenamente entendidos pelos alunos. O fraco desempenho de muitos alunos do ensino médio deve-se a uma série de fatores e entre eles destaca-se a formação inadequada ou incorreta de certos conceitos geométricos. Alguns não tinham construído os conceitos básicos da geometria plana no ensino fundamental e isso influenciava na aprendizagem da geometria espacial no ensino médio. Outros tinham dificuldade em efetuar cálculos matemáticos (sejam aritméticos ou algébricos) quando solucionavam problemas geométricos. Mas, além disso, considerou-se a possibilidade de que as habilidades espaciais também influenciavam no desempenho desses estudantes.

---

2 De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996), os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum (estudo obrigatório da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política) e uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. Nas escolas particulares, a disciplina geometria compõe a parte diversificada.

Muitos alunos da 1ª série do ensino médio pareciam não ter desenvolvido a habilidade para girar mentalmente figuras geométricas planas, comprometendo, assim, o entendimento do conceito de congruência e de semelhança de polígonos. Outros, da 2ª série, afirmavam que não conseguiam formar uma imagem mental tridimensional de retas e planos, indispensável para entender os postulados de geometria de posição. Outros ainda, da 3ª série, demonstravam que não eram capazes de imaginar as secções em sólidos, ou o rebatimento de faces de um poliedro, conforme apontou Viana (2000), ou os sólidos gerados a partir da revolução de figuras planas em torno de um eixo. Ficava, então, comprometido o entendimento de vários conceitos e também das soluções de problemas que necessitam dessas habilidades. Acrescenta-se que várias questões constantes nos exames vestibulares parecem requerer esse tipo de raciocínio.

O raciocínio espacial dos alunos e a sua influência no desempenho escolar foram, portanto, questões investigadas nesse trabalho. Krutetskii (1976), quando investigou a estrutura da habilidade matemática de alunos, conseguiu isolar um fator que influenciava na solução de problemas que requeriam a formação de imagens mentais visuais. Esse fator, chamado de componente espacial, foi definido como sendo uma habilidade para lidar com conceitos espaciais e foi identificado nas tarefas de rotação mental de figuras geométricas, de planificação de figuras tridimensionais, de contagem de cubos em arranjos, de secção e projeção de sólidos etc. Dessa forma, considerou-se que o componente espacial da habilidade matemática poderia influenciar no desempenho nas provas cujas questões requisitassem essas operações mentais.

Embora os estudos sobre as representações visuais sejam antigos e algumas teorias tentem explicar o processo de formação das imagens mentais (Kosslyn,1983,1995), considerou-se que havia a necessidade de conhecer um pouco mais a formação, a manipulação e a externalização de imagens mentais que são requeridas na solução de problemas geométricos apresentados no ensino médio (e nos vestibulares). Optou-se por embasar a busca desse conhecimento na teoria de Krutetskii (1976), que já indicava diferenças individuais quanto ao modo de resolver questões matemáticas, nos estudos de Bishop (1983, 1990) e de Gorgorió (1998), que trataram das diferenças como função das características da tarefa, e nas pesquisas de Cox (1999), que tinham como objetivo entender o efeito da imagem mental e de suas representações externas na solução de problemas.

Pretendeu-se, neste trabalho, investigar diferenças nas representações externas pictóricas correspondentes às imagens mentais que os alunos formavam e manipulavam durante o processo de solução dos problemas geométricos do ensino médio. As questões escolhidas fizeram parte de exames vestibulares recentes e envolviam conceitos de geometria espacial.

Neste estudo, foi chamado de **componente espacial da habilidade matemática** o conjunto de habilidades envolvendo a percepção, a formação e a manipulação de imagens mentais relativas às figuras espaciais que são estudadas no ensino médio. Pretendeu-se obter um melhor entendimento desse componente da habilidade matemática analisando o desempenho de alunos em tarefas que requeriam as operações relativas à contagem de cubos em um arranjo, à formação e identificação de polígonos no espaço, à secção de sólidos, à planificação, à projeção e à formação de sólidos de revolução. Pretendeu-se buscar relações entre essas habilidades e as formas de representação externa das imagens mentais utilizadas na solução de algumas questões de vestibulares que envolvem figuras tridimensionais. Além disso, pretendeu-se verificar relações entre o desempenho na prova do componente espacial e o desempenho em um teste psicológico, elaborado para medir o raciocínio espacial. O presente trabalho também buscou analisar possíveis relações entre essas variáveis e o desempenho escolar em matemática e em geometria.

Não se restringindo às influências dos aspectos cognitvos ou metacognitivos no rendimento escolar, considerou-se a dimensão afetiva na construção do conhecimento e no desempenho dos alunos. Como afirmou Brito (2002-a), fatores afetivos e emocionais influenciam na profundidade do entendimento construído e na qualidade e quantidade do material aprendido e posteriormente recordado.

A experiência como docente mostrou que vários alunos demonstram apatia e até descontentamento durante as aulas de geometria, principalmente quando as atividades propostas pelo professor tornavam-se mais complexas. Por outro lado, foi possível constatar que muitos alunos apreciavam mais as tarefas que, em vez de cálculos, exigiam uma certa habilidade para manipular mentalmente as figuras. Verificou-se também que muitas vezes as atitudes dos alunos em relação à geometria pareciam ser diferentes das atitudes em relação à matemática. Alguns alunos pareciam gostar de matemática, mas não revelavam o mesmo sentimento em relação à geometria. O contrário também foi percebido, ou seja, alunos que, não gostando de matemática, apresentavam uma atitude positiva em relação à geometria.

Este fato sugeriu que se fizesse uma comparação das atitudes de alunos do ensino médio em relação à matemática e à geometria. A partir da revisão da literatura na área, optou-se pela utilização de uma escala de atitudes em relação à matemática (Brito, 1998) e outra escala de atitudes em relação à geometria (Viana&Brito, 2004). Pretendeu-se, também, verificar as relações entre as atitudes e o componente espacial da habilidade matemática, considerando também que todos esses fatores pareciam influenciar no desempenho escolar dos alunos.

A partir disso, foram colocadas as seguintes questões iniciais de pesquisa:

- **Como se relacionam as operações mentais referentes ao componente espacial da habilidade matemática (contagem de cubos, formação e identificação de polígonos no espaço, secções, planificação, projeção, formação de sólidos de revolução)?**
- **Existe relação entre o desempenho dos alunos em teste psicológico que avalia o raciocínio espacial e o desempenho na prova que avalia o componente espacial da habilidade matemática?**
- **Que tipos de representações externas são utilizados pelos alunos para solucionar questões de geometria espacial retiradas dos exames vestibulares?**

- **Existem relações entre as atitudes dos alunos em relação à geometria, as atitudes em relação à matemática, o desempenho no teste de raciocínio espacial, o desempenho na prova do componente espacial e o desempenho escolar nessas disciplinas?**

A Figura 1 ilustra as relações a serem pesquisadas.

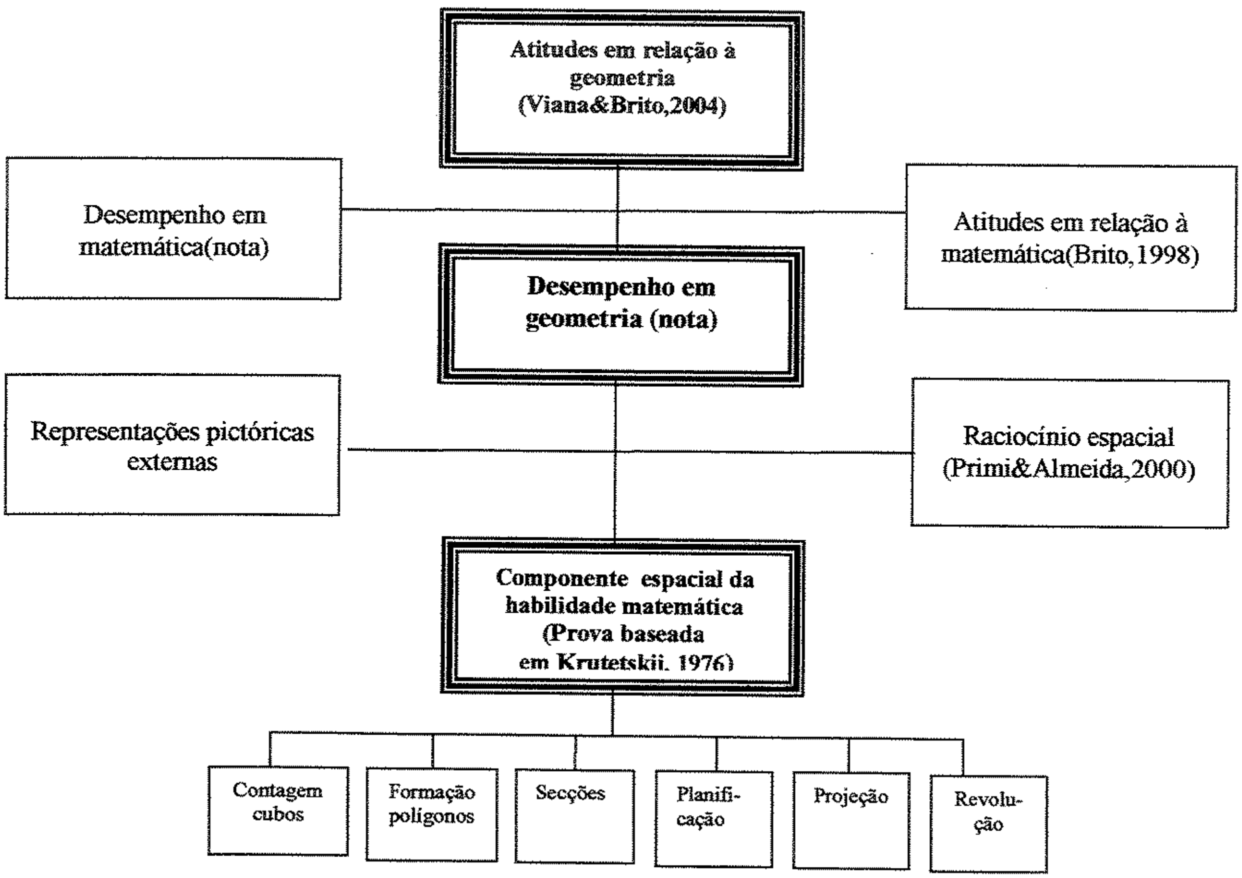


Figura 1. Relações investigadas na pesquisa.

CAPÍTULO I

A HABILIDADE ESPACIAL NO CONTEXTO ESCOLAR

A geometria escolar do ensino básico compreende o estudo das formas dos objetos do espaço físico, das relações e das transformações que foram formalizados em um sistema matemático axiomático, construído para representá-las. Já o raciocínio espacial consiste em uma série de processos cognitivos pelos quais representações mentais para os objetos, relações e transformações são construídas e manipuladas (Clements & Batista,1992).

É possível dar várias dimensões[1] ao ensino da geometria (Usiskin, 1994) e, dependendo do enfoque dado, pode-se afirmar que geometria e raciocínio espacial estão fortemente relacionados.

Desde o final da década de oitenta, podem ser verificadas algumas tendências no ensino da matemática, como evidenciar o processo de construção do conhecimento, colocar ênfase na solução de problemas e contextualizar os conteúdos.

Em 1989, o *Nacional Council of Teachers of Mathematics* – NCTM – dos Estados Unidos já sugeria que o ensino de geometria fosse iniciado, a partir das primeiras séries, com atividades que permitissem às crianças descrever, modelar, desenhar, comparar e classificar figuras planas e espaciais; reconhecer e apreciar a geometria no mundo; explorar transformações de figuras geométricas; representar e resolver problemas usando modelos geométricos.

Em 1991, a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática elaborada pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas do Estado de São Paulo (CENP) também sugeria um ensino de geometria que levasse o aluno a construir os conceitos a partir da manipulação de objetos, do reconhecimento e exploração

[1] Usiskin (1994) considerou quatro dimensões: (1) geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras; (2) geometria como estudo do mundo real, físico, (3) geometria como veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual ou física e (4) geometria como exemplo de sistema matemático.

de formas e da caracterização de propriedades. A finalização desse processo seria a sistematização dessas propriedades.

Em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais, divulgados pela Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto, sugeriram para o primeiro ciclo, correspondente às duas primeiras séries, que as crianças tivessem experiências sobre os objetos do espaço (observação das formas geométricas presentes nos elementos naturais, comparação de objetos do espaço físico, reconhecimento de objetos esféricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos, percepção de semelhanças e diferenças entre formas, representação de formas geométricas, transformações como reflexões, translações, rotações).

Como pode ser verificado, os documentos citados sugerem uma dimensão para o ensino da geometria que parece favorecer o desenvolvimento de habilidades espaciais dos alunos, desde as séries iniciais.

Gardner (1983) argumentou que a habilidade espacial é uma das várias capacidades intelectuais humanas consideradas como autônomas, sendo que o raciocínio espacial é essencial para o pensamento científico e é usado para representar e manipular a informação usada no entendimento e na solução de problemas.

No ensino médio, a habilidade espacial é importante não apenas na área de matemática, mas também em outras disciplinas. É comum, por exemplo, os livros didáticos de biologia apresentarem desenhos representando secções planas de formas tridimensionais como células, órgãos da anatomia humana e partes de vegetais. A interpretação dessas secções para entendimento da estrutura interna daquelas formas requer habilidade espacial. Assim também acontece nas aulas de física, quando é preciso imaginar os movimentos de partículas eletricamente carregadas dentro de campos magnéticos tridimensionais. Também nessa disciplina, muitos problemas relativos à mecânica ou à ótica exigem habilidades para a formação de imagens mentais visuais e para representação pictórica dessas imagens.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Brasil, 1999) confirmam a importância das habilidades de visualização na construção de modelos para interpretação de questões de matemática e de outras áreas do conhecimento: *"... perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física"* (p.257).

Ainda no ensino médio, os cursos de formação de professores para as séries iniciais do ensino fundamental preparam o aluno para futuramente trabalhar a geometria espacial com as crianças. Espera-se que o professor dessas séries saiba classificar sólidos geométricos, interpretar informações visuais, elaborar materiais pedagógicos e para isso ele deve ter desenvolvido habilidades espaciais mínimas, como, por exemplo, planificar as figuras geométricas tridimensionais mais comuns. No entanto, Viana (2000) constatou que muitos alunos desses cursos não conseguiam esboçar corretamente as planificações de paralelepípedos, pirâmides, prismas, cilindros e cones, nem pareciam imaginar secções nesses sólidos. Com isso, considerou-se que há necessidade de desenvolver essas habilidades tendo em vista o trabalho sugerido pelos PCNs.

Nos cursos de nível superior da área de ciências exatas, é comum o aluno ter dificuldade para resolver problemas nas disciplinas de geometria analítica e geometria descritiva. As dificuldades não se referem apenas ao cálculo em si, mas às representações geométricas que devem ser feitas e que requerem habilidades espaciais (Balomenos; Mundy & Dick, 1994).

Nos cursos de engenharia e arquitetura, objetos de três dimensões são representados por desenhos padronizados de duas dimensões. Três visões ortogonais são desenhadas diretamente a partir do topo (cima), da frente e do lado, de modo a permitir detalhes da estrutura física a ser representada. Esse procedimento é conhecido como projeção ortográfica e requer um processo de rotação mental de imagens, que está associado à habilidade espacial (Pillay, 1994).

Para um melhor entendimento da relação entre essa habilidade e a aprendizagem matemática, Bishop (1983) destacou dois componentes da habilidade espacial: o primeiro é a habilidade de interpretar informações na forma de figuras e isto envolve entendimento da representação visual e do vocabulário. O segundo é a habilidade para processos visuais envolvendo manipulação de representações visuais e imagens e transformação de relações abstratas em representações visuais.

De acordo com Krutetskii (1976), a capacidade de transformar relações abstratas da matemática em representações visuais, durante a solução de problemas matemáticos, é característica de sujeitos classificados como indivíduos com "mente geométrica". Sujeitos com esse tipo de "mente matemática" voltada para a geometria teriam habilidade para pensar logicamente na área de relações espaciais e geralmente obtêm êxito na solução de problemas matemáticos utilizando esquemas gráficos. Além disso, conseguiriam "ver mentalmente" figuras e relações, e teriam um bom desenvolvimento dos conceitos espaciais.

A teoria de Krutetskii (1976) não descreveu a natureza das habilidades espaciais de forma isolada, pois tratou da habilidade matemática na sua totalidade. Apontou que os alunos habilidosos incluídos no tipo geométrico são marcados por um alto desenvolvimento de conceitos espaciais, resolvem mentalmente, de maneira rápida e acurada, os problemas mais complexos, manipulando as imagens mentais sem necessidade de representá-las através de desenho.

Várias pesquisas enfatizaram a importância do raciocínio espacial em geometria (Yakimanskaya, 1971, citado por Clements&Batista,1992; Hershkowitz, 1989) e em outros assuntos da matemática, como solução de problemas (Lean&Clements,1981) e representação do conceito e operações com fração (Clements&del Campo, 1989). Outros autores (Hershkowithz, 1989; Johnson, 1987; Kosslyn, 1983; Stigler, 1990; e Tartre, 1990 e Yakimanskaya, 1971, citados por Clements e Batista, 1992) realçaram a importância do raciocínio espacial e da formação de imagens na aprendizagem não especificamente da geometria, mas em outras áreas do conhecimento.

Autores como Davis (1986) e Battista e Clements (1996) descreveram algumas construções cognitivas necessárias para a realização de tarefas simples, entre elas podem ser citadas: a composição de figuras para determinar a área de um polígono num geoplano; a rotação, translação e composição de figuras para se formar um quadrado a partir de dois triângulos e a contagem de cubos para se determinar o volume de paralelepípedos. Esses exemplos mostram que há vários conceitos e tarefas em matemática que dependem de habilidades espaciais.

Rezi (2001), baseada no modelo de Van Hiele (1986), verificou que o raciocínio espacial estava relacionado com o nível de pensamento em geometria. Foi verificado que os alunos que demonstraram um nível mais alto de conceituação também demonstraram ter habilidade espacial. O mesmo trabalho também apontou que a percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais (dois dos componentes da habilidade matemática, estudados por Krutetskii, 1976) também se relacionavam com o raciocínio espacial.

As relações entre habilidade espacial e desempenho em matemática também foram amplamente investigadas. Podem ser citados os estudos de Battista (1994), Fennema e Sherman (1977, 1978, 1985) Guay e McDaniel (1977), Witkin, Dyk, Faterson, Goodenouhg e Karp (1962), que encontraram correlação positiva entre raciocínio espacial e desempenho matemático.

O estudo de Fennema e Tartre (1985) apontou que o desempenho em soluções de problemas parece não ser afetado pela habilidade espacial. Alunos com alta habilidade espacial e baixa habilidade verbal interpretaram os problemas com figuras de um modo melhor, mas não se saíram melhor na resolução desses problemas do que os alunos com baixa habilidade espacial e alta habilidade verbal.

Realmente, a habilidade verbal é necessária para possibilitar a compreensão da estrutura matemática do problema (Brito, Fini & Neumann, 1994), e parece que alunos que processam a informação usando o raciocínio verbal se saem melhor que aqueles que usam o raciocínio espacial (Lean&Clements, 1981). Foram encontradas evidências de que o uso de imagens em certos conceitos matemáticos poderia prejudicar o entendimento. Assim, na solução de problemas, o aluno ficaria preso a um tipo de representação e não conseguiria resolvê-lo, conforme apontou o estudo de Hershkowitz (1989).

Através de uma meta-análise dos trabalhos que foram produzidos nas últimas décadas, Friedman (1995) encontrou correlação mais forte entre habilidade verbal e desempenho matemático que entre habilidade espacial e desempenho matemático. Um exemplo é a pesquisa de Brown e Wheatley (1989) que encontrou alunos com baixa habilidade espacial e bom desempenho em matemática. No entanto, esses mesmos alunos ao demonstrarem seu entendimento sobre multiplicação e divisão, fizeram menos relações do que os alunos com alta habilidade espacial. Já em outro estudo (Tartre,1990), alunos com alta habilidade em orientação espacial foram mais hábeis em solucionar problemas não geométricos que aqueles com baixa habilidade em orientação espacial.

Vários estudos indicaram que a habilidade espacial pôde ser melhorada através de treino, principalmente quando os alunos tiveram oportunidade de manipular figuras (Batista, Weatley e Talma, 1982; Bishop, 1980; Del Grande, 1986).

Vale acrescentar que alguns livros didáticos, ao propor certas questões de geometria, parecem sugerir o desenvolvimento de habilidades espaciais. Não é raro encontrar em livros as questões exemplificadas na Figura 1.1.

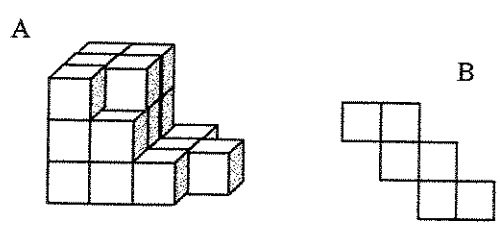
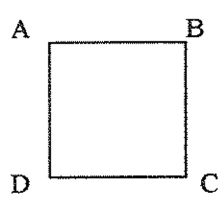
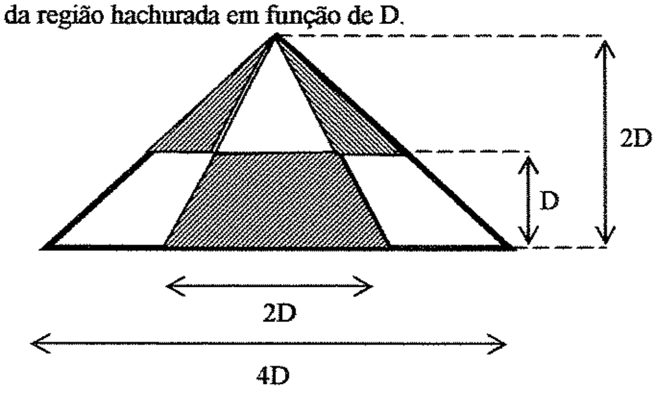


Figura 1.1. Questões de livros didáticos: A: "*Quantos cubos formam esse sólido?*"
B: "*Essa figura pode ser a planificação de um cubo?*"

Devido à relação entre raciocínio espacial e transformações geométricas, existe uma forte hipótese de que o trabalho com as transformações (rotação, translação, simetria) possa melhorar o aprendizado em geometria. Um trabalho com transformação de figuras pode fazer o ensino de geometria mais atrativo, as atividades mais dinâmicas, e talvez proporcionar um desenvolvimento da habilidade espacial (Del Grande, 1986; Lopes & Nasser, 1997; Nasser & Sant'anna,1995).

Portanto, não está clara a relação entre o raciocínio espacial e o desempenho em matemática e em geometria, embora existam motivos para se afirmar que a habilidade espacial é importante para a construção de conceitos e para a solução de problemas geométricos.

As questões de geometria presentes nos vestibulares envolvem geometria plana e espacial e às vezes aparecem combinadas com geometria analítica e com funções. Para resolver muitas delas, supõe-se que o aluno deva criar imagens mentais e realizar transformações com razoável nível de dificuldade. O quadro 1.1 apresenta dois exemplos de questões de vestibular. Para resolver a primeira questão o aluno deveria formar as imagens mentais do cubo, do ponto médio, dos planos ABI e CDI e do ângulo α para poder estabelecer a relação pedida. Já a segunda questão apresenta secções a partir das quais o aluno deveria formar as imagens dos cones e do plano para estabelecer as diferenças entre os volumes.

Questão 1: O quadrado ABCD é face de um cubo e I é o centro da face oposta. Sendo α o ângulo entre os planos ABI e CDI calcule tg $\frac{\alpha}{2}$ 	Questão 2: A figura a seguir é a secção de dois cones retos cortados por um plano paralelo às bases. Calcular o volume da região hachurada em função de D. 

Quadro 1.1. Exemplos de questões de vestibulares.

A habilidade espacial para formar, manipular e representar imagens mentais parece influenciar a interpretação de um problema geométrico e a utilização de estratégias de solução. Assim, parece influenciar a aprendizagem e o desempenho dos alunos em matemática e em geometria. O presente trabalho tratou, portanto, de estudar algumas dessas influências para se obter um melhor entendimento do componente espacial da habilidade matemática.

CAPÍTULO II

ASPECTOS RELACIONADOS À HABILIDADE ESPACIAL E À HABILIDADE MATEMÁTICA NA TEORIA DE KRUTETSKII

Não existem dúvidas de que no ambiente escolar as diferenças de rendimento em matemática podem ser atribuídas a um grande número de fatores. No entanto, o bom desempenho dos alunos em tarefas matemáticas pode ser influenciado por certas características individuais que foram estudadas pelo psicólogo russo Vadim Andreevich Krutetskii em um amplo programa de pesquisa realizado de 1955 a 1966 tendo como sujeitos crianças escolarizadas. A chamada prontidão para uma atividade foi descrita por Krutetskii (1976) como uma estrutura que envolve as habilidades do sujeito e um conjunto de condições psicológicas que permitem a ele ter sucesso na execução de uma atividade ou tarefa. Essa estrutura é mostrada na Figura 2.1.

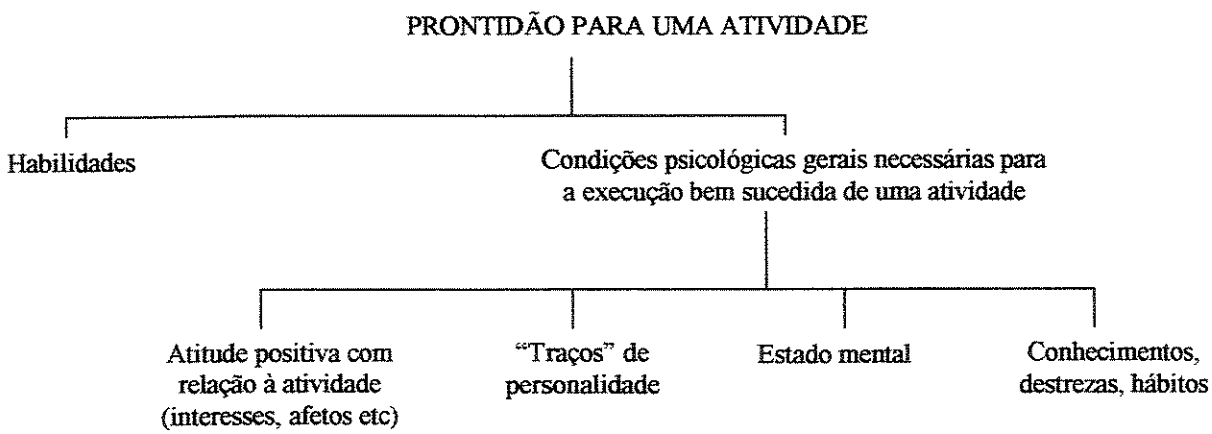


Figura 2.1. Estrutura de prontidão para uma determinada atividade (baseada em Krutetskii, 1976 e Neumann, 1995.

Portanto, assim como afirmou Neumann (1995), dentro do contexto das variáveis mentais, as habilidades seriam condições necessárias, mas não suficientes, para a execução de uma determinada atividade com sucesso. No caso específico, a habilidade matemática influenciaria o sucesso nessa disciplina em âmbito escolar e implicaria em aspectos como rapidez, facilidade e meticulosidade no domínio dos conhecimentos, destrezas e hábitos, próprios da matemática.

O autor postula que os conhecimentos, hábitos e destrezas estão mais relacionados às características da atividade e podem ser adquiridos, enquanto as habilidades podem ser desenvolvidas e estão ligadas aos traços psicológicos da pessoa. Enquanto são adquiridos os conhecimentos, hábitos e destrezas, as habilidades são desenvolvidas. Mas, por outro lado, são as habilidades, junto com outras condições, que irão permitir que os conhecimentos, hábitos e destrezas sejam adquiridos com mais facilidade e fluidez (Neumann, 1995).

De acordo com Krutetskii (1976), a habilidade não é algo potencial, mas também não é inata; no entanto, existem certos traços de personalidade, certas inclinações, que podem explicar como um indivíduo habilidoso se diferencia dos demais, mesmo quando todos estejam sob condições aparentemente iguais de aprendizagem.

Embora as habilidades possam estar em constante desenvolvimento, existe certa estabilidade nas mesmas. Elas só são evidenciadas quando o indivíduo está na atividade específica (a habilidade matemática emerge da atividade matemática). O sucesso em algumas atividades pode depender de um conjunto ou uma combinação de habilidades, podendo a deficiência de uma delas ser compensada pela eficácia de outra (Neumann, 1995).

Krutetskii (1976) fez suas pesquisas com estudantes de escolas de Moscou, aplicando provas compostas por séries de problemas matemáticos cujos resultados eram analisados quantitativamente. Além disso, realizou estudos qualitativos e longitudinais com crianças talentosas em matemática, estudou as biografias de matemáticos famosos, analisou respostas de professores de matemática e fez uma ampla revisão da literatura sobre a habilidade matemática. Todos esses dados foram utilizados na construção das séries de problemas usados na pesquisa.

Conseguiu, então, identificar quatro componentes básicos da habilidade matemática correspondentes aos processos cognitivos do sujeito durante a solução dos problemas matemáticos propostos. Estes componentes estão intimamente relacionados, influenciam-se mutuamente e formam em conjunto um único sistema que caracteriza a habilidade matemática escolar.

O primeiro componente surge no primeiro estágio da atividade mental, chamado de "obtenção da informação matemática". Refere-se à habilidade para perceber e formalizar o material matemático; o aluno entenderia a proposição do problema e a estrutura matemática do mesmo.

O estágio seguinte refere-se ao "processamento da informação matemática" e envolve os seguintes componentes: a) *habilidade para pensar logicamente na área das relações espaciais e quantitativas, números e símbolos alfabéticos e a habilidade para pensar em símbolos matemáticos; b)habilidade para generalizar de forma abrangente e rápida os conteúdos matemáticos, as relações e as operações. c) habilidade para "resumir" os processos matemáticos e os sistemas correspondentes de operações, além da habilidade para pensar através de estruturas reduzidas; d) flexibilidade dos processos mentais na atividade matemática; e) inclinação pela claridade, simplicidade, economia e racionalidade da solução; f) habilidade para uma rápida e livre reconstrução do processo mental (reversibilidade dos processos mentais no raciocínio matemático*) (Krutetskii,1976, p.350).

A "retenção da informação matemática" é um outro componente que se refere à existência de uma memória matemática, isto é, memória generalizada para relações matemáticas, esquemas de argumentos e provas, métodos de resolução de problemas e princípios de abordar os problemas.

Por fim, o autor apontou a existência de um quarto fator, chamado de "componente geral sintético", ligado à existência de um tipo de "mente" matemática.

Com relação ao último fator, os estudos de caso realizados por Krutetskii (1976) permitiram diferenciar os processos cognitivos utilizados na solução de problemas matemáticos (aritméticos, algébricos e geométricos). O autor avaliou o quanto um aluno conta com imagens visuais na solução de problemas, isto é, se ele se esforça para visualizar relações matemáticas e se ele tem a necessidade de uma interpretação visual para os problemas matemáticos mais abstratos. Esses processos foram chamados de viso-pictóricos. Além disso, seu estudo avaliou quão bem desenvolvidos estavam os conceitos geométricos espaciais dos alunos, a habilidade para visualizar ("ver mentalmente", usando as palavras do autor) a posição de um sólido no espaço e as posições de suas partes e a capacidade de inter-relacionar sólidos, figuras, planos e linhas.

Os resultados do estudo permitiram ao autor estabelecer duas proposições: (1) os dois componentes (a habilidade de visualizar relações matemáticas abstratas e a habilidade para conceitos geométricos espaciais) não são componentes necessários da estrutura das habilidades matemáticas. A presença ou ausência desses componentes (mais precisamente, sua potência ou debilidade) não determina o grau da genialidade matemática, mas determina seu tipo. (2) a habilidade de visualizar relações matemáticas abstratas e a habilidade para conceitos geométricos espaciais mostraram ter uma alta correlação nos experimentos realizados.

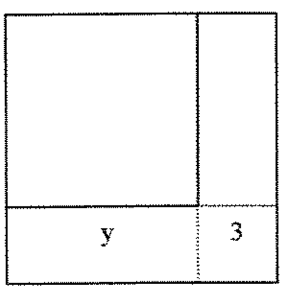
Krutetskii (1976) analisou os processos de solução de problemas de acordo com a correlação entre os componentes lógico-verbal (processos analíticos, que não utilizavam figuras e esquemas) e viso-pictórico (processos que utilizavam figuras e esquemas). Esses componentes demonstraram diferentes possibilidades estruturais da habilidade matemática, isto é, diferentes tipos de "mente matemática".

Foi possível isolar um tipo analítico ("mente analítica" ou um tipo de mente voltada à abstração); um tipo geométrico ("mente geométrica" ou pictórica) e um tipo harmônico (abstrato e pictórico). O autor advertiu que os limites entre esses diferentes tipos de mente não são inteiramente claros e definidos.

Segundo o autor, o pensamento dos alunos classificados no tipo geométrico é caracterizado por um componente viso-pictórico muito bem desenvolvido. Esses alunos sentem a necessidade de interpretar visualmente uma relação matemática abstrata e demonstram grande habilidade nessa tarefa, como se as figuras pudessem, quase sempre, substituir a lógica para eles. Indivíduos desse grupo persistem na tentativa de operar com esquemas visuais mesmo quando um problema é facilmente solucionado por outros esquemas. Quando não obtêm êxito através dos suportes visuais criados, ou dos diagramas elaborados para solucionar problemas, esses indivíduos têm dificuldade de operar com esquemas abstratos.

O problema: "cada lado de um quadrado foi aumentado de 3cm; portanto, sua área foi aumentada em 39 cm^2. Encontre a medida do lado do quadrado resultante" poderia ser resolvido através da equação $(x + 3)^2 - x^2 = 39$, sendo essa uma solução analítica. Mas, na pesquisa de Krutetskii (1976), a maioria dos representantes do tipo geométrico resolveram o problema utilizando um desenho e o raciocínio mostrados na Figura 2.2.

Diferentes destes, os representantes do tipo analítico não sentem necessidade de suporte visual para resolver problemas, mesmo quando as relações matemáticas dadas sugerem esquemas pictóricos. Eles resolvem operações relativas à análise de conceitos mais facilmente do que operações relativas à análise de esquemas geométricos ou desenhos. Ao recordar os dados do enunciado de problemas, sentem mais facilidade em verbalizar as informações do que representá-las graficamente.



- "Se aumentou 3 de cada lado, então esse quadradinho mede 9 cm^2. Esses dois retângulos medem juntos 30 cm^2; então cada um mede 15 cm^2; se aqui mede 15 cm então y vale 5 cm. O lado do quadrado era 5cm e o resultante mede 8 cm."

Figura 2.2. Figura e descrição do raciocínio em problema de geometria (Baseado em Krutetskii, 1976)

Os indivíduos do tipo geométrico são marcados por um alto desenvolvimento de conceitos espaciais. As questões mais complexas podem ser elaboradas de modo rápido e acurado em suas mentes, sem haver necessidade de fazer desenhos de figuras.

Perguntas do tipo: "Dado um quadrado, ligue os pontos médios de cada um dos seus lados. Qual é a figura obtida? A área da figura obtida representa que parte da área do quadrado dado?"; ou "Um hexágono regular é rotacionado, sendo um dos lados o eixo de rotação. Qual é o sólido obtido?" são respondidas rapidamente sem o uso de representações gráficas, permitindo inferir que os sujeitos imaginaram e manipularam mentalmente as figuras. O mesmo não ocorre com os sujeitos do tipo analítico, que sentem mais dificuldade em visualizar tais figuras.

Um outro exemplo pode ilustrar a diferença entre os sujeitos do tipo geométrico e os do tipo analítico. Um triângulo retângulo girando em torno de um cateto é facilmente identificado como um cone, por um sujeito do tipo geométrico, como se este formasse a imagem imediatamente. Já um sujeito do tipo analítico faz a seguinte análise dos pontos do triângulo: o vértice do ângulo reto não gira, pois pertence ao eixo; o vértice de um ângulo agudo gira definindo um círculo; a hipotenusa define o semi-espaço. O sujeito conclui, então, que se trata de um cone[1].

Considerando que a habilidade para generalizar material matemático é um dos componentes da habilidade matemática e que alunos habilidosos exibem memória para generalização, Krutetskii (1976) questionou se o fato dos representantes do tipo geométrico tenderem a utilizar modelos viso-pictóricos nos processos de solução de problemas não seria um obstáculo para a generalização em matemática.

O autor admitiu que os esquemas gráficos realmente poderiam, em certa medida, atrapalhar o processo, mas ponderou que esses esquemas usados pelos alunos eram uma síntese única do "concreto" e do "abstrato". A expressão gráfica das relações matemáticas é abstrata e generalizada. Um esquema gráfico é precisamente uma forma abstrata de visualização e uma certa generalização da imagem visual. Tal imagem visual generalizada não poderia impedir pensamento generalizado. Os alunos do tipo geométrico sentem uma necessidade de

[1] Essa análise foi feita por um sujeito de pesquisa de Krutetskii (1976).

interpretar o problema num plano geral, mas para eles esse plano geral ainda é apoiado por tais imagens.

Tudo o que foi dito refere-se também à memória dos alunos do tipo geométrico que memorizam material pictórico de maneira mais rápida, fácil e permanente. Mesmo quando precisam memorizar um material lógico-verbal, eles tentam juntar uma imagem visual para reter a informação na memória. A memorização de material matemático carrega uma característica visualmente generalizada: eles memorizam não apenas o desenho geométrico, mas um esquema generalizado dele. "*A memória espacial dos geométricos não é uma memória visual; eles não se lembram da imagem ótica do desenho; eles lembram apenas da posição das linhas, das superfícies ou de suas partes*" (Krutetskii, 1976, p.326).

Nos alunos classificados no tipo harmônico há um relativo equilíbrio entre os componentes lógico-verbal e viso-pictórico. Os conceitos espaciais são bem desenvolvidos, são hábeis em suas interpretações visuais de relações abstratas, mas seus esquemas visuais estão subordinados às análises lógico-verbais. Eles obtêm êxito tanto utilizando procedimentos analíticos como pictóricos na solução de problemas. Mesmo quando operam com imagens visuais, percebem que o conteúdo da generalização não é preso a casos particulares; portanto, apresentam a capacidade de generalização, que é um componente básico da habilidade matemática

Os resultados dos estudos de Krutetskii facilitam o entendimento sobre a maneira como os estilos cognitivos influenciam nos processos de solução dos problemas matemáticos. Os alunos habilidosos resolveram a maioria dos problemas propostos ou por um processo mais analítico ou mais geométrico. Os alunos com mente do tipo geométrico tiveram a vantagem de solucionar mais rapidamente as questões que necessitavam da habilidade visual, no entanto, alguns falharam nas tarefas que exigiam uma análise mais lógica.

Para estudar a estrutura das habilidades matemáticas, o autor utilizou séries de problemas. O que se pode notar nos chamados testes geométricos de Krutetskii é que, exceto aqueles da série XXV (problemas relacionados a conceitos espaciais), em cujos enunciados é solicitado aos alunos que formem e manipulem as imagens, as suas soluções dependem mais dos processos aritméticos e algébricos que procedimentos geométricos. Isto é, os processos de solução, em geral, parecem não necessitar de manipulação mental de figuras. As representações mentais que são requeridas referem-se aos conceitos na sua forma mais simples e, portanto, poucos alunos precisariam fazer uma representação mais complexa para encaminhar uma estratégia adequada.

Questões mais complexas de geometria espacial também não estão presentes nas séries de problemas propostos pelo autor (convém esclarecer que os problemas eram, segundo o autor, mais adequados para alunos de uma faixa etária que eqüivaleria aos nossos alunos de sexta e sétima série). Os problemas comuns ao ensino médio envolvem questionamentos do tipo: "a maior geratriz de um cone mede 10 cm e faz um ângulo de 60º com um diâmetro da base; calcule o volume do cone". Questões deste tipo não estão presentes nas séries de problemas usados por Krutetskii (1976), pois envolvem conceitos de trigonometria, que não são tratados no ensino fundamental.

Assim, o presente estudo teve como um dos objetivos compreender como os alunos do ensino médio se diferenciavam quanto à forma de solucionar as questões de geometria presentes nos exames vestibulares. Foram buscados elementos que evidenciassem as maneiras de utilizar as representações externas pictóricas das imagens mentais que eram formadas e manipuladas durante a solução de problemas.

Além disso, buscou-se relacionar o desempenho em tarefas geométricas com outras variáveis, dentre elas as atitudes em relação à matemática e à geometria. De acordo com Krutetskii (1976), o sucesso nas tarefas depende, além da habilidade do sujeito, de outras variáveis tais como atitudes positivas em relação à atividade, interesse e esforço. A relação entre a carga afetiva e o empenho cognitivo nas tarefas de geometria foi considerada como uma das variáveis que afetariam o desempenho escolar.

CAPÍTULO III

INTELIGÊNCIA E HABILIDADE ESPACIAL

De acordo com a psicologia cognitiva, a inteligência reflete não só o conhecimento que uma pessoa tem do mundo, mas também um conjunto básico e geral de habilidades para processar a informação, sendo que essas habilidades não dependem, necessariamente, do seu conteúdo. Certos procedimentos em tarefas com elementos espaciais exigem um modo de pensar que parece não depender muito de conhecimentos anteriores específicos. Como afirmaram Cooper e Regan (1982), esse tipo de raciocínio parece ser representativo do pensamento de pessoas consideradas inteligentes.

Segundo Gardner (1983), a habilidade espacial é a capacidade de formar modelos do mundo físico através de representações visuais mentais e de operar utilizando esses modelos. Essa habilidade seria um tipo de inteligência verificada em indivíduos com capacidade de perceber o mundo com precisão; de realizar transformações sobre uma percepção inicial; de ser hábil em recriar formas não apenas valendo de sua experiência visual, mas mesmo na ausência de estímulos físicos. A inteligência espacial, assim como a lógico-matemática, a lingüística, a musical, a corporal-cinestésica, a interpessoal e a intrapessoal, faz parte da chamada Teoria das Inteligências Múltiplas de Howard Gardner, que é mais uma tentativa de explicar o que caracteriza o comportamento de uma pessoa inteligente.

É possível considerar a habilidade espacial como um tipo de inteligência; ou avaliá-la como um fator da inteligência geral; ou ainda ter a preocupação de analisar essa capacidade em termos dos processos envolvidos em tarefas espaciais. Isso vai depender da concepção que se adota para a inteligência.

Foram muitos os estudos desenvolvidos durante o século XX para explicar e medir a inteligência. Sternberg (2000) cita cinco abordagens teóricas: os modelos analítico-fatoriais, o processamento da informação, o modelo biológico, a abordagem contextual e os modelos integrativos, como a sua teoria triádica (ou triárquica) da inteligência. Algumas dessas concepções serão brevemente resumidas a seguir.

Os modelos analítico-fatoriais

Nessa linha teórica estão os estudos que tentaram definir a inteligência como uma estrutura, procurando identificar os traços naturais unitários constituintes da inteligência humana. O principal objetivo desses estudos era identificar e definir a estrutura de organização desses traços. Utilizavam um método estatístico chamado de análise fatorial que se baseia em estudos de covariância e correlação e que visa separar a inteligência em fatores os quais seriam as variáveis latentes, ou seja, as fontes das diferenças individuais no desempenho dos testes psicométricos.

Um dos principais representantes desse enfoque é Spearman (1927) que concluiu que a inteligência pode ser compreendida em função de um único fator geral *"g"*. Outros fatores específicos observados estariam todos permeados por esse fator geral. Nessa concepção, a habilidade espacial de um indivíduo seria dependente da sua inteligência geral, ou da sua "energia mental" (Sternberg, 2000).

Para Thurstone (1938), citado por Sternberg (2000), a inteligência é explicada por sete fatores chamados de capacidades mentais primárias: a compreensão verbal, a fluência verbal, o raciocínio indutivo, a capacidade para lidar com cálculos numéricos e resolução de problemas matemáticos simples, a memória, a rapidez perceptiva e a visualização espacial. Esta última podia ser medida por testes que exigiam a rotação mental de figuras, e pode ser entendida como habilidade espacial.

O modelo *SOI* (da estrutura do intelecto) de Guilford (1967, 1982) citado por Sternberg (2000), explica a inteligência a partir da combinação de três dimensões: as *operações* (cognição, memória, produção divergente, produção convergente, avaliação); os *produtos* (unidades, classes, relações, sistemas, transformações, deduções) e os *conteúdos* (simbólico, semântico, comportamental, auditivo, visual). Nessa perspectiva, parece que a habilidade espacial de um indivíduo seria explicada em termos do conteúdo visual, dos produtos referentes a relações e transformações e das operações mentais relativas à cognição e memória.

A inteligência geral, para Cattell (1971), compreenderia dois sub-fatores principais: a capacidade fluida e a cristalizada. A inteligência fluida é relacionada com a capacidade do indivíduo de raciocinar em situações novas que praticamente não necessitam de um conhecimento anterior. É manifestada nas atividades que requerem o relacionamento de idéias, a indução de conceitos abstratos, a elaboração de implicações etc. A inteligência cristalizada está ligada aos conhecimentos que foram adquiridos em determinada cultura, sendo que a experiência é determinante nas tomadas de decisão e raciocínio.

Horn e Noll (1997), citados por Primi (1998), expandiram o número de habilidades da teoria anterior e propuseram o modelo Gf-Gc (Teoria da Inteligência Fluida e Cristalizada). O fator denominado processamento visual (Gv) é descrito como a habilidade de perceber e processar mentalmente representações visuais. São exemplos de tarefas específicas a visualização, a orientação espacial, a velocidade, o planejamento espacial, a flexibilidade adaptativa figural, a estimativa de comprimentos, a fluência figural e a imaginação – ilusão.

Analisando os dados sobre inteligência obtidos entre 1927 e 1987, Carroll (1993), propôs um modelo hierárquico de três extratos, no qual os extratos representam níveis de generalidade das habilidades. O extrato I refere-se aos fatores mais específicos das habilidades, resultantes de escores de testes, por exemplo, de raciocínio indutivo, de compreensão de leitura, de memória etc. No estrato II, os fatores de segunda ordem são mais abrangentes e se associam ao raciocínio (inteligência fluida), à linguagem (inteligência cristalizada), à memória e aprendizagem, à percepção auditiva, à percepção visual, à recuperação de idéias e a velocidade do processamento cognitivo. Esses fatores de segunda ordem relacionam-se entre si dando origem ao terceiro extrato, semelhante ao fator g de

Spearman (1927). A ordem em que aparecem os fatores indica o grau de associação com o fator geral, isto é, a inteligência fluida é a mais próxima do fator g e a velocidade de processamento cognitivo a mais distante. Nesse modelo, a percepção visual é conceituada como um fator de segunda ordem e é definida como a habilidade de gerar, reter e manipular imagens mentais abstratas.

Pode-se conceber a habilidade espacial como parte da estrutura da inteligência, conforme indicaram os estudos citados. Mas, considera-se importante conhecer quais os processos utilizados por um sujeito quando se depara com tarefas que requerem raciocínio espacial.

Os modelos baseados no processamento da informação

Os psicólogos do processamento da informação tentam explicar como as pessoas manipulam mentalmente o conhecimento. A idéia central dessa abordagem cognitiva é que entre a apresentação de um estímulo e a emissão da resposta existe uma seqüência de estágios de processamento da informação em que se manifestam as diferenças individuais (Martinez Arias, 1991).

Para explicar a inteligência, essa linha teórica se preocupa em identificar, descrever e classificar os processos que subjazem o comportamento inteligente. Também fazem parte dessa abordagem os estudos sobre as formas de acessar e disponibilizar as estratégias que se manifestam na execução de tarefas e os efeitos dos estilos cognitivos nessas estratégias. Incluem-se ainda os estudos sobre o conhecimento e sua representação.

Os processos mais estudados e que constituem o núcleo do comportamento inteligente são aqueles utilizados na percepção, na aprendizagem, na memória, na atenção, no raciocínio e na solução de problemas.

Segundo Sternberg (1982), existem formas de categorizar os processos cognitivos. Uma possibilidade é classificá-los em processos executivos e não executivos, ou cognitivos e metacognitivos. Outra maneira é distinguir os processos que intervêm na aprendizagem dos processos que atuam na execução de algo que já foi aprendido. Uma terceira possibilidade é fazer a distinção entre os processos controlados (uma combinação em série de processos que necessitam do controle do sujeito) e os automatizados (uma combinação em paralelo de processos já automatizados pela prática).

Duas grandes linhas de investigação podem ser citadas: a que tenta explicar a inteligência a partir de processos *bottom-up* em tarefas simples, e a abordagem dos componentes cognitivos, em tarefas complexas, em que se evidenciam os processos *top-dow*.

No primeiro caso, as pesquisas têm por objetivo identificar os processos básicos usados na execução de tarefas simples, em laboratório, e utilizam as técnicas para medir a rapidez (tempo de reação ou inspeção) e simulações por computador etc. São feitas análises de correlação entre os desempenhos nestas tarefas e as pontuações nos testes de inteligência. Essa linha de pesquisa é chamada de enfoque das correlações cognitivas, sendo representados por Posner e Mitchell (1967), Hunt, Frost e Lunneborg (1973), Hunt (1978), Jensen (1979), Keating e Bobbitt (1978) Jackson e McClelland (1979), Nettelbeck (1987), Eysenck (1987), citados por Sternberg (1982, 2000).

No segundo caso, as pesquisas tratam de tarefas mais complexas; em especial tentam analisar os elementos que compõem os testes de inteligência. Através do método chamado análise componencial, tenta-se compreender os processos inteligentes desmembrando-os em unidades processuais mais simples (Pellegrino&Glaser, 1979; Goldman&Pellegrino, 1984; Sternberg, 1977, citados por Primi, 1998).

Os componentes, segundo Sternberg (1982), são processos elementares que operam sobre as representações internas de objetos e símbolos. Podem ser classificados por sua função e pelo nível de generalidade de sua aplicação.

Quanto à função, existem vários tipos: os metacomponentes, os componentes de execução de tarefas, os de aquisição de conhecimentos e destrezas, os de transferência, os de generalização e os de retenção.

Os metacomponentes do pensamento são os responsáveis pelo planejamento e tomada de decisões de um indivíduo quando resolve problemas. São os metacomponentes que permitem ao sujeito reconhecer a existência e a natureza de um problema, bem como a necessidade de resolvê-lo; selecionar e combinar componentes de ordem inferior para realizar a tarefa; representar a informação; designar os recursos da atenção; controlar a execução da tarefa, conhecer os resultados; avaliar os resultados e atuar sobre o conhecimento.

Os componentes de desempenho levam à execução das estratégias de solução do problema; são executados de acordo com exigência da tarefa e em geral classificam-se em processos de codificação, comparação, combinação, decisão e resposta.

Os componentes de aquisição de conhecimento permitem ao sujeito aprender novos conhecimentos, organizá-los e armazená-los na memória. Envolvem os processos relativos à operação de selecionar as informações relevantes de outras menos importantes; de codificar tais informações e relacionar com as que estão armazenadas na memória, podendo, assim, modificar as estruturas de conhecimento já existentes.

Existem ainda os componentes de transferência e generalização, mais ligados aos processos de automatização e também os componentes de retenção, que permitem recuperar a informação armazenada na memória.

Quanto ao nível de generalidade e aplicação, os componentes se classificam em: componentes mais gerais (que intervêm em todas as tarefas de um determinado universo), de classe (mais restrito a um subconjunto de tarefas) e específicos (pois são restritos a tarefas concretas).

Os trabalhos de Sternberg sobre análise componencial formaram a teoria componencial da inteligência. Buscando integrar os componentes cognitivos do processamento da informação com a influência do contexto e com os aspectos da adaptação do indivíduo ao meio, o autor propôs a teoria triárquica da inteligência.

A teoria triádica da inteligência

Sternberg (2000) define a inteligência como a capacidade para aprender a partir da experiência e de usar processos metacognitivos para melhorar a aprendizagem. Ë também a capacidade para adaptar-se ao ambiente dentro de diferentes contextos sociais e culturais.

Segundo a sua teoria triárquica (ou triádica), existem três aspectos os quais tratam da relação da inteligência (a) com o mundo interno da pessoa (b) com a experiência, e (c) com o mundo externo. Esses aspectos são estudados, respectivamente, pela subteoria componencial, subteoria experiencial e subteoria contextual.

A subteoria componencial explica como o indivíduo pensa analiticamente quando tenta solucionar problemas usando estratégias que manipulam os elementos de um problema. Explica também como se estabelecem as relações entre os elementos da informação nova e as informações que uma pessoa já possui, sendo isso o que permite a ela aprender. A análise componencial, resumida nas páginas anteriores, forneceu algumas informações sobre a maneira como os processos são identificados e analisados.

Embora a subteoria dos componentes tente explicar como acontece o processamento da informação, ela não considera a experiência do indivíduo nesse processo. Parece haver diferenças entre processar uma informação nova, em uma tarefa em que a pessoa é considerada novata, e entre processar uma informação em uma tarefa em que ela é considerada *expert*. A *expertise,* ou competência, é alcançada quando o sujeito possui experiência em realizar uma determinada tarefa. Assim, a subteoria experiencial estuda duas competências importantes: aquela que é demonstrada mediante uma tarefa nova e aquela relativa à automatização do processamento da informação.

A subteoria contextual tenta explicar como as interações do indivíduo com o ambiente afetam a sua capacidade cognitiva e como ele usa a inteligência para se adaptar ao mundo em que vive. Para Sternberg (2000), a inteligência compreende capacidades analíticas, criativas e práticas. No pensamento analítico, o indivíduo tenta resolver problemas conhecidos; no pensamento criativo, tenta resolver novos tipos de problemas que exijam que ele pondere o problema e seus elementos em uma nova maneira (por exemplo, inventar, planejar); no pensamento prático, tenta resolver problemas aplicando o que ele conhece sobre os contextos cotidianos.

A teoria não define uma pessoa inteligente como aquela que necessariamente se destaca em todos os aspectos da inteligência, pois pondera que algumas pessoas podem ser mais inteligentes diante de problemas acadêmicos abstratos, enquanto que outras podem ser mais inteligentes ao resolver problemas práticos concretos. Pondera, ainda, que uma pessoa inteligente é aquela que conhece e capitaliza suas próprias forças, compensando ou atenuando as suas fraquezas.

Nessa perspectiva, a habilidade espacial pode ser entendida como a capacidade de realizar tarefas desde as mais simples, nas quais são utilizados os processos relativos à percepção, até as tarefas mais complexas que requerem o uso de representações visuais mentais. Essa capacidade pode ser analisada em termos de componentes de desempenho, como os processos de codificação, comparação, combinação, decisão e resposta. Quanto ao nível de generalidade e aplicação, os componentes utilizados nas tarefas de habilidade espacial podem ser classificados como os de classe (quando relativos a um subconjunto de tarefas) e específicos (quando restritos a tarefas mais concretas). Podem ser considerados também os metacomponentes. Assim, uma pessoa habilidosa além de ser capaz de gerar, reter e manipular imagens visuais abstratas, também consegue gerenciar a execução dos processos básicos envolvidos na atividade. Dessa forma, pode codificar situações-problemas de origem visual, inferir resultados, planejar e monitorar o processo de solução, aplicar os resultados em outras situações, dar respostas e justificá-las.

Ainda assim, as diferenças relativas à experiência devem ser consideradas quando se interpreta a habilidade espacial. Um *expert* em geometria poderia realizar as tarefas espaciais com maior eficiência do que um novato. Os conteúdos escolares e os métodos de ensino-aprendizagem apresentam uma importância especial nesse enfoque. Portanto, deve-se levar em consideração o contexto em que a habilidade espacial pode ser desenvolvida.

A habilidade espacial e seus processos

Parece haver consenso entre os psicólogos de que a habilidade espacial refere-se à capacidade do indivíduo em lidar com representações mentais visuais. No entanto, a revisão da literatura mostrou que os autores utilizam termos como habilidade, raciocínio, aptidão, percepção, visualização e representação com vários significados. Verificou-se também que há algumas descrições quanto aos sub-componentes da habilidade e que existem críticas quanto à forma de avaliar as competências dos indivíduos nessa área.

Na definição de habilidade espacial dois aspectos podem ser considerados: a percepção e a representação mental.

O termo percepção diz respeito ao processo de transformar e interpretar a informação adquirida do meio ambiente através dos órgãos sensoriais e é um dos sub-componentes da habilidade espacial, conforme apontaram Linn e Peterson (1985).

Del Grande (1984) utilizou a expressão percepção espacial como a faculdade de reconhecer e discriminar estímulos no espaço e também interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores. A percepção espacial envolveria várias aptidões espaciais. Baseado nos estudos de Frosting e Horne (1964) e Hoffer (1977), o autor descreveu sete aptidões espaciais: *coordenação visual-motora, percepção de figuras em campos, constância da percepção ou constância de forma e tamanho, percepção da posição no espaço, percepção de relações espaciais, discriminação visual e memória visual.*

Mais do que a capacidade de perceber formas, a habilidade espacial está ligada à manipulação mental das representações dessas formas.

Lohman (1979) identificou dois sub-componentes básicos da habilidade espacial: visualização (processo de percepção, codificação e manipulação mental de formas espaciais) e orientação espacial (ou relações espaciais). A visualização espacial, que se refere à habilidade de manipular mentalmente representações visuais de objetos, foi tratada por Guilford (1969) como sendo um fator relativo à transformação figural. Testes elaborados para medir esse fator solicitavam que o sujeito imaginasse um objeto submetido a uma transformação - uma rotação, por exemplo. Era apresentado um conjunto de figuras, no qual estava a figura que mostrava o resultado da transformação, e o sujeito deveria selecioná-la. A orientação espacial refere-se à habilidade de determinar relações espaciais relativas ao próprio corpo e era avaliada nos testes que solicitavam, por exemplo, que o sujeito antecipasse qual seria a sua visão de uma dada paisagem caso ele estivesse na cabine de um avião.

Lohman (1979) argumentou que, na prática, é difícil distinguir esses sub-componentes, pois eles estariam inter-relacionados.

McGee (1979) também destacou dois grandes componentes da habilidade espacial, verificáveis principalmente em tarefas espaciais: a orientação espacial, ou seja, o entendimento de relações entre as posições dos objetos no espaço relacionando com a própria posição do sujeito; e a visualização espacial, definida como a compreensão e execução de movimentos imaginários de objetos em duas ou três dimensões.

Já Guay e McDanie (1977) afirmaram que a essência da autêntica habilidade espacial é a formação e a transformação de imagens visuais como organizações totais. Criticaram, assim, os chamados testes de raciocínio espacial, pois estes poderiam ser feitos usando processos analíticos e dessa forma não seriam boas medidas para habilidade espacial. Os resultados de suas pesquisas trouxeram evidências que diferentes grupos de indivíduos usavam diferentes processos em tarefas de habilidade espacial. Alguns representavam problemas visualmente, outros os representavam verbalmente, outros ainda utilizavam recursos como marcas em papel, manipulação de objetos, movimentos do corpo etc e isso descrevia, para os autores, outras habilidades que seriam distintas da habilidade espacial.

Lea (1990) definiu a habilidade espacial como um complexo conjunto de destrezas intercaladas, como memória visual, visualização, orientação. Para se ter uma boa memória visual seria preciso ter uma habilidade para reter, recordar e manipular informações relativas às figuras e relações espaciais. A visualização dependeria de como se percebe, retém e reconhece uma configuração organizada como um todo. A orientação seria uma habilidade para manipular uma figura, transformá-la mentalmente movimentando-a ou deformando-a e relacionar as partes de um todo ou os objetos entre si.

Embora Friedman (1995) também faça referência a duas formas de raciocínio espacial - a orientação e a visualização - suas definições estão mais ligadas às estratégias de solução das tarefas. A orientação estaria relacionada à movimentação mental de objetos como um todo (como é a rotação mental) e a visualização envolveria raciocínio sobre as partes do objeto.

Primi e Almeida (2000) descreveram que o raciocínio espacial seria avaliado pela capacidade de visualização, isto é, de criar representações mentais visuais e de manipulá-las transformando-as em novas representações.

Segundo a maioria dos autores citados, existe distinção entre a percepção e a representação dos objetos e ainda entre as operações mentais de movimentar um objeto globalmente ou de raciocinar sobre as partes do mesmo. Os estudos apontam também diferenças entre a habilidade de relacionar as posições dos objetos no espaço com a própria posição do sujeito e a habilidade de executar movimentos imaginários com objetos. No presente trabalho, foram buscados elementos para uma melhor compreensão da habilidade do aluno em trabalhar com as figuras geométricas que são estudadas no ensino médio. Como as figuras são, em si, representações conceituais das formas (a maioria delas sendo tridimensionais), para trabalhar com elas o aluno tem que ter habilidade para criar as representações mentais das formas, manter essas imagens, inspecionar, acrescentar, modificar, relacionar com outras formas, e essas operações tanto são feitas com a figura global como com as partes da mesma. Não foram consideradas, neste trabalho, as habilidades relativas à posição do sujeito em relação aos objetos.

As habilidades estudadas no presente trabalho foram consideradas como integrantes do componente espacial da habilidade matemática, conforme visto em Krutetskii (1976).

Além disso, foram buscadas relações entre esse componente e o raciocínio espacial, conforme definição de Primi e Almeida (2000). Os autores validaram uma bateria de testes para avaliar a inteligência, sendo que o presente estudo analisou apenas os resultados referentes ao teste de raciocínio espacial. Foram investigadas, ainda, as relações entre o desempenho nesse teste e outras variáveis consideradas importantes para o entendimento da habilidade espacial de alunos do ensino médio, entre elas o desempenho escolar em Matemática e em Geometria.

CAPÍTULO IV

A PERCEPÇÃO

Se fossem solicitadas a dar exemplos de percepção, algumas pessoas provavelmente fariam referência aos órgãos dos sentidos: "perceber o cheiro...", "perceber o calor...", "perceber as cores...". Outras tenderiam a enfocar a interpretação de uma informação: "perceber a semelhança entre ...", "perceber como está o ambiente..." , "perceber que existe diferença entre...", "perceber que a resposta está errada...", "perceber como deve ser feito..."

Embora também se possa falar da percepção auditiva, olfativa, do tato ou do paladar, a percepção visual é a mais estudada em psicologia, segundo Sternberg (2000). A percepção visual pode ser definida como algo ligado aos sistemas sensoriais usados para captar os estímulos ambientais, mas também como algo relacionado aos processos de aprendizagem. Assim, concorda-se com Eysenk e Keane (1994) e Sternberg (2000) quando afirmam que a percepção é um conjunto de processos utilizados para reconhecer, organizar, transformar e interpretar as informações adquiridas do meio ambiente através dos órgãos sensoriais.

Mesmo visualizando imagens bidimensionais, nossa mente é capaz de interpretar o espaço tridimensional, ou seja, avaliar profundidade, tamanhos, distâncias, movimentos, alteração e constância da forma e outras relações entre os objetos do mundo físico. A complexidade dos processos de percepção já fascinava os grandes filósofos e tem sido objeto de estudo dos psicólogos há muito tempo.

Um dos temas estudados pela psicologia cognitiva para entender a percepção visual é o reconhecimento de padrões, que envolve a identificação de estímulos bidimensionais e tridimensionais do meio ambiente. Considerando que o reconhecimento das informações presentes no ambiente externo depende tanto do próprio estímulo como do conhecimento do sujeito, os estudos acabaram por delinear duas correntes teóricas da percepção. A primeira delas se preocupa mais com o processamento impelido pelo estímulo e a segunda corrente estuda o processamento dependente das experiências anteriores e das informações do contexto.

A corrente teórica que estuda a percepção direta, pretende compreender como o sujeito percebe os objetos a partir dos processos *botton-up*, isto é, processos dependentes dos estímulos, para gradualmente entender como se dão os processos de nível superior.

Segundo Gibson (1979), citado por Eysenck (1994) e Sternberg (2000), a percepção não depende tanto de processos de nível superior, pois os indícios usados para perceber os objetos e as relações espaciais são inerentes ao próprio estímulo. Os primeiros estudos de Gibson tiveram origem na Segunda Guerra Mundial ocasionados pela necessidade de elaborar filmes de treinamento de pilotos nas manobras para decolar e pousar. Os estímulos sensoriais foram estudados a partir de uma *matriz óptica* que poderia conter informações sobre a forma, localização e orientação espacial dos objetos. Os gradientes de textura, os padrões de fluxo óptico e a disponibilidade foram três conceitos desenvolvidos para explicar não só como os pilotos utilizavam as informações ópticas para suas manobras, mas também para tentar explicar como as pessoas conseguem reconhecer o mundo a sua volta.

Muitas pesquisas em psicologia procuraram entender como os indivíduos identificavam os estímulos visuais para reconhecer objetos. Segundo a teoria do modelo, um objeto seria reconhecido se fosse comparado a um gabarito já armazenado na memória.

Outra teoria, a do protótipo, propôs que na memória não existiriam modelos rígidos, mas sim protótipos, ou seja, formas abstratas que representariam o elemento básico de um conjunto de estímulos. Na construção de um protótipo, por exemplo, o indivíduo combinaria formas geométricas simples para formar grupos estruturados e usaria esses protótipos para reconhecer um objeto. Mesmo que o protótipo sofresse algumas modificações, o sujeito ainda reconheceria o objeto. Pesquisas envolvendo construção de protótipos podem ser verificadas em Franks e Bransford (1971), e Posner, Goldsmith e Welton (1967) e Posner e Keele (1968), citados por Sternberg (2000)

Para a teoria dos atributos (Gibson, 1969, Neisser, 1968, citados por Eysenck,1994), o reconhecimento visual de padrões baseava-se nos atributos ou elementos do padrão visual. De acordo com essa teoria, para reconhecer padrões o sujeito começaria extraindo características do estímulo apresentado, sendo que essas características seriam então combinadas e comparadas às informações armazenadas na memória. Essa teoria tem várias limitações, entre elas está o fato de que não leva em consideração as relações entre os atributos, nem o papel desempenhado pelo contexto onde o estímulo está situado, nem as expectativas do sujeito no reconhecimento dos padrões. Ela não se aplica, portanto, a estímulos mais complexos.

A teoria dos atributos contrastou com a teoria da Gestalt[1] pois esta última propunha que o reconhecimento de padrões baseava-se no formato geral do estímulo visual, e não sobre os atributos que o compõem. Nessa perspectiva, a principal unidade de análise, na percepção, é o todo, que não é a soma das partes.

A chamada lei de Prägnanz gestáltica afirma que as pessoas tendem a perceber arranjos visuais de modo que seus elementos são organizados com mais simplicidade em uma forma estável e coerente. Os princípios básicos da lei são a proximidade (tendência para arranjar objetos próximos), de similaridade (tendência para arranjar objetos parecidos), continuidade (tendência para perceber formas suavemente harmônicas e contínuas), acabamento (tendência para completar objetos), simetria (tendência para perceber objetos simétricos em relação a um eixo) e figura-fundo (tendência para perceber algumas figuras num campo visual como proeminentes e as outras como pano de fundo).

[1] Gestalt pode significar "todo", "configuração", "forma", "organização". Essa teoria foi proposta nos anos 20 por um grupo de psicólogos alemães, entre eles Koffka, Wertheimer e Köhler, e criticava tanto a introspecção como os princípios do associacionismo empirista presentes no behaviorismo. A teoria explica a aprendizagem por compreensão (em oposição à aprendizagem mnemônica) e o papel do *insight* na solução de problemas (Köhler,1980).

Segundo a teoria da Gestalt, o conhecimento anterior de uma forma não influencia no reconhecimento imediato dessa forma quando esta aparece em uma outra estrutura organizada. A organização forma entidades maiores, sendo que as partes parecem ficar destruídas para se obter a formação do todo. Assim, por exemplo, na figura 4.1, mesmo conhecendo a forma do numeral 4, esta não é facilmente visível no primeiro desenho , mas é visível no segundo desenho. Isso aconteceria porque o primeiro desenho forma uma estrutura organizada, ao contrário do segundo, que não é um todo organizado.

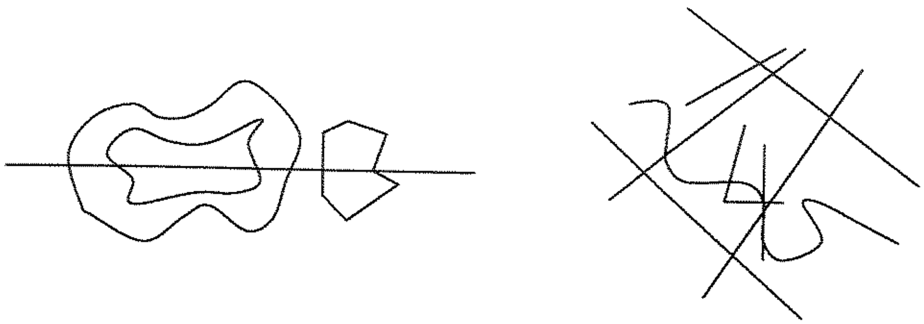


Figura 4.1. Exemplos de uma estrutura organizada (desenho à esquerda) e de uma configuração não organizada (desenho à direita). Baseado em Köhler (1980)

Köhler (1980), um dos teóricos da Gestalt, embora dê tanta importância à organização total, reconhece que os próprios princípios de organização dizem respeito tanto ao isolamento das partes quanto ao seu caráter unitário. Por isso, não nega a importância da análise (processo capaz de salientar alguns conteúdos e suprimir outros) e afirma que esse processo pode dar origem a uma mudança de organização. Assim, por exemplo, pondo em evidência certos membros em um campo, pode-se intencionalmente mantê-los juntos e favorecer uma espécie particular de unificação. A figura 4.2. é um exemplo dessa alteração de organização do modelo, na qual é possível verificar os três setores estreitos (com ângulos agudos), ou os três mais largos (com ângulos obtusos).

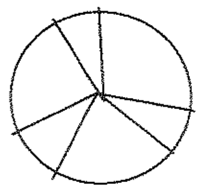


Figura 4.2. Objeto formado por setores, com duas organizações possíveis. Baseado em Köhler (1980).

Assim, segundo a teoria, o exame prolongado de qualquer objeto visual pode levar à mudança de sua organização.

Vários pesquisadores deram continuidade aos estudos sobre a percepção a partir dos processos desencadeados pelo estímulo, como é o caso de Hubel e Wiesel (1962), Weitsstein e Harris (1974), e Navov (1977), citados por Eysenck (1994), seja considerando que as partes são percebidas antes do todo, seja considerando a influência do todo na percepção das partes.

Mas há os estudos que focalizam os processos mentais de níveis superiores que influenciam nos processos perceptivos, sendo assim delineada a chamada percepção indireta ou construtiva.

Os processos chamados de *top-dow* são aqueles que dependem do conhecimento, das experiências do sujeito e de fatores contextuais. Nessa perspectiva, a percepção é entendida como um processo que não depende apenas do *input* sensorial, mas que a elaboração de inferências sobre o estímulo tem a influência das hipóteses e expectativas do sujeito e do seu conhecimento anterior. Pesquisas nessa linha podem ser verificadas em Palmer (1975), Ittelson e Cantril (1954), Bruner e Postman (1949), citados por Eysenck (1994).

A percepção em geometria

O reconhecimento de figuras geométricas parece não estar ligado apenas aos processos perceptuais, mas, principalmente, ao nível de formação de conceitos em geometria. De acordo com Van Hiele[2] (1976), no Nível 1 o indivíduo

---

[2] Esta teoria foi desenvolvida na década de cinqüenta por Pierre Van Hiele e afirma que o aluno alcança níveis de pensamento enquanto aprende conceitos em geometria. Os níveis são: reconhecimento, análise de

perceberia os conceitos geométricos como entidades totais, não veria componentes ou atributos, sendo que a aparência física seria determinante para reconhecer figuras e não suas partes ou propriedades. Nota-se que, nessa descrição, a idéia de percepção se aproxima da definição da Gestalt, ou seja, as formas seriam percebidas como um todo e não pelos componentes ou atributos. Sendo assim, um triângulo seria reconhecido por sua aparência total, em um primeiro momento, para só depois de uma análise suas partes serem percebidas (lados, ângulos, vértices etc). Apenas no Nível 2 o indivíduo estaria apto a iniciar as análises das propriedades das figuras e, assim, ser capaz de perceber, por exemplo, um losango através do atributo quatro lados congruentes. Nesse nível, o reconhecimento seria melhor explicado pela teoria dos atributos.

Quando um problema de geometria é apresentado, a percepção visual parece ser um dos primeiros processos utilizados para encaminhar as estratégias de solução. Para resolver o problema cujo enunciado está na figura 4.3, o aluno deve perceber o material apresentado. A figura é formada por três retas, mas, se ele não tiver aprendido os conceitos de paralelismo e de reta transversal, não perceberá os oito ângulos com os quais deverá fazer as inferências necessárias para resolver o problema.

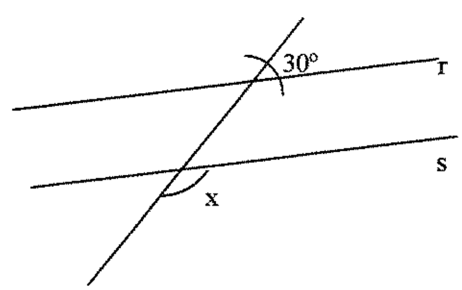


Figura 4.3. "Dadas r // s, determinar o valor de x".

propriedades, organização, dedução e rigor. No PSIEM (Unicamp) podem ser encontrados trabalhos utilizando essa teoria, como em Pirola(1995), Rezi (2001), Viana (2000).

Krutetskii (1976), no seu trabalho sobre os componentes da habilidade matemática, estudou a percepção para explicar como os alunos interpretam um problema. O autor avaliou a percepção geométrica[3], definida como o isolamento de elementos geométricos e figuras a partir de uma figura-fundo, usando uma série de problemas com elementos interpenetrantes que tinham como base os trabalhos anteriores de Yakimanskaya (1961) e Zhuravlev (1940), citados por Krutetskii (1976). Utilizando esses problemas, o autor investigou alguns elementos da chamada percepção analítico-sintética de figuras geométricas, em particular a habilidade em distinguir e avaliar os elementos interpenetrantes de figuras geométricas a partir de vários pontos de vista, e de isolar os elementos de figuras de uma figura-fundo. A figura 4.4 mostra um problema que consta dessa série.

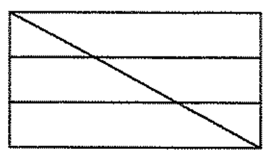
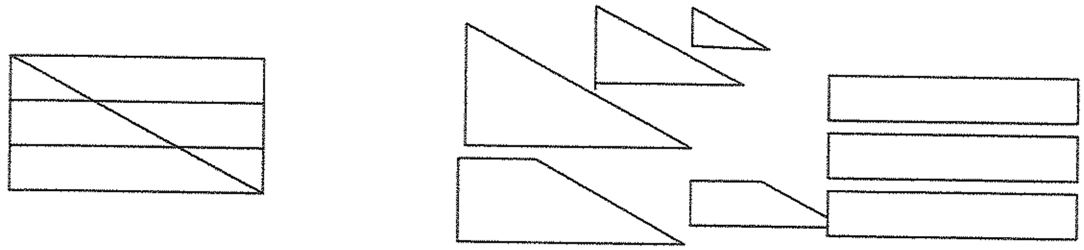


Figura 4.4. "Quais figuras podem ser vistas?

Utilizando a idéia de organização da teoria da Gestalt, parece realmente que perceber retângulos, triângulos e trapézios na estrutura I da figura 4.5 é mais difícil do que fazer o mesmo na estrutura II. Isto se explicaria pela forma de organização das duas estruturas.

[3] A percepção de figuras geométricas foi estudada por Rezi (2001) com 201 alunos concluintes do ensino médio encontrando-se um desempenho médio foi de 4,9 (numa escala de zero a dez). A autora concluiu que a percepção de figuras requeria o nível visual de formação de conceitos geométricos (de acordo com a teoria de Van Hiele, 1986).



(a)Estrutura I (b)Estrutura II

Figura 4.5. Figuras geométricas na estrutura I (a) e na estrutura II (b)

Alguns princípios da teoria gestáltica ajudam a explicar certos processos perceptivos em tarefas de geometria.

Voltando à estrutura I da figura 4.5, podem ser percebidos retângulos, triângulos e trapézios, mas parece difícil perceber essas figuras ao mesmo tempo. Segundo o "princípio da figura-fundo", a percepção coloca em primeiro plano uma figura, deixando as outras em um plano de fundo. O mesmo acontece na figura 4.6, que é um exemplo de questão em geometria espacial. A questão apresenta o desenho de um cubo e solicita o cálculo do volume da pirâmide de base triangular. Nesse caso, a percepção da pirâmide só parece ser possível quando se coloca o cubo num "plano" de fundo.

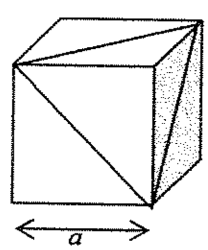


Figura 4.6. "Calcular o volume da pirâmide regular de base triangular, sabendo-se que o cubo tem aresta *a*".

Na questão da figura 4.7, parece que é o "princípio da similaridade" - que faz com que objetos que estão mais próximos sejam percebidos como um grupo – aquele que leva o aluno a iniciar a estratégia de solução a partir dos três círculos.

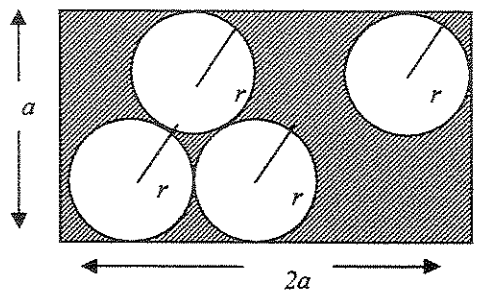


Figura 4.7. "Calcular a área hachurada em função de *r*".

Já na figura 4.8, em vez de perceber oito ângulos, parece ser mais fácil perceber apenas as três retas concorrentes duas a duas. Talvez isso se deva ao "princípio da continuidade". Mas, a aprendizagem de procedimentos de solução de problemas em geometria pode levar o aluno a utilizar o "princípio do acabamento", ou seja, a traçar o prolongamento da reta *t*, na intenção de identificar os ângulos do triângulo assim formado.

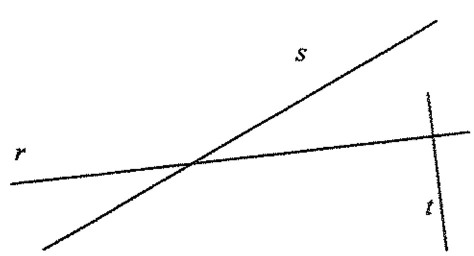


Figura 4.8. Calcular os ângulos formados pelas retas *r* e *s*, sabendo-se que *t* é perpendicular a *s* e forma ângulo de 30° com *s*.

No entanto, quando se trata de uma questão mais complexa de geometria espacial, não parece ser necessária apenas a percepção para o entendimento do problema, mas também a formação de representações mentais visuais do conhecimento, ou seja, de imagens mentais.

Assim, a percepção da pirâmide no cubo da figura 4.6 estaria apoiada em relações resultantes de experiências anteriores com pirâmides de base triangular e com possíveis movimentos para identificar a base. O cálculo do volume da pirâmide implicaria na determinação da altura da mesma, e tal procedimento seria difícil de ser realizado se o aluno não se apoiasse em imagens visuais mentais da situação.

Portanto, os estudos da Psicologia Cognitiva ajudam no entendimento dos processos relativos à percepção, sendo que a habilidade para perceber figuras interpenetradas foi considerada como componente da habilidade matemática.

CAPÍTULO V

A REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO E AS IMAGENS MENTAIS

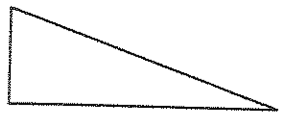
Um grande desafio para os psicólogos cognitivos é entender como as pessoas representam o conhecimento, isto é, como se processam as atividades cognitivas na manipulação do conhecimento representado mentalmente.

De acordo com Sternberg (2000), o conhecimento de um indivíduo pode ser classificado como declarativo ou de procedimento. O conhecimento declarativo é um corpo organizado de informações sobre objetos, idéias ou eventos e que pode ser expresso em palavras ou em outros símbolos. Já o conhecimento de procedimentos está mais ligado ao modo de realizar os passos de procedimentos para desempenhar ações. Enquanto o conhecimento declarativo responde ao "saber o quê" (a forma, a estrutura), o conhecimento de procedimentos responde ao "saber como" (os processos). No entanto, as duas formas de conhecimento podem interagir na maioria das tarefas que as pessoas executam.

No caso da geometria, o conhecimento sobre o triângulo retângulo escaleno e sobre a relação existente entre seus lados é um exemplo de conhecimento declarativo. A resolução de um problema simples para calcular um dos lados desse triângulo, sendo dois deles conhecidos, envolveria o conhecimento de procedimentos.

O conhecimento declarativo e o de procedimentos podem ser representados externamente através de figuras (relativamente análogas ao objeto do mundo real) ou de palavras (simbólicas). No exemplo anterior, o conceito de triângulo retângulo escaleno poderia ser representado por uma figura ou com palavras.(Tabela 5.1)

Quadro 5.1. Representações de triângulo retângulo escaleno

Triângulo retângulo escaleno	
Figura 	Palavras : Triângulo que possui um ângulo reto e três lados de medidas diferentes.

Embora não explícitas, várias relações entre as partes do triângulo podem estar representadas pela figura e pelas palavras. Essas relações também fazem parte do conhecimento declarativo, e muitas vezes são difíceis de serem representadas por desenho. Por exemplo, como seria representar por desenhos as seguintes relações: o maior lado deve se opor ao maior ângulo, a soma das medidas dos lados menores deve ser maior que a medida do maior lado, o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos lados menores etc? Por outro lado, seria difícil representar por palavras o conhecimento do procedimento de construção do triângulo com régua e compasso, e improvável que se consiga descrever o que é uma reta.

Tanto figuras como palavras são formas externas de representação do conhecimento. Mas é possível representar o conhecimento de forma interna, ou seja, mentalmente. Por exemplo, pode-se ter um conhecimento sobre o que são planos paralelos e representá-lo apenas através de uma imagem mental.

As representações mentais são as maneiras pelas quais o indivíduo torna presentes no pensamento alguns aspectos do meio ambiente, sejam externos ou pertencentes ao seu próprio mundo imaginário. Assim como as externas, as representações mentais também podem ser classificadas em dois grandes grupos: as representações analógicas e as simbólicas. As analógicas tendem a ser imagens (visuais, auditivas, olfativas, tácteis ou cinéticas) enquanto que as simbólicas são semelhantes à linguagem.

Para Clements e Batista (1992), imagens são percepções internas, representações totais de objetos ou cenas que são similares aos seus referentes. Para Sternberg (2000), imagens são representações mentais das coisas (objetos, eventos, ambientes etc) que presentemente não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais. As imagens mentais podem envolver representações mentais em qualquer modalidade dos sentidos (audição, visão, paladar...) embora possam também representar coisas que jamais haviam sido observadas antes pelos sentidos.

De acordo com Sternberg (2000), é antigo o interesse dos psicólogos em estudar as imagens mentais. Aristóteles já afirmava que é impossível pensar sem as imagens. Hume dizia que a percepção e a imagem mental forçavam caminho para o pensamento e a consciência.

No século XIX, James (1890) discordava que as imagens mentais eram cópias de sensações experienciadas, afirmando que as imagens podiam ser formadas sem a experiência direta com o objeto. Wilhelm Wundt (1832-1920) e Edward Titchener (1867-1927), citados por Sternberg (2000), utilizavam o método da introspecção para estudar as imagens mentais. Perky, citado por Kosslyn (1992), em 1910 já estudava, em laboratório, as interferências da percepção na formação de imagens.

No entanto, uma outra linha de pesquisa na psicologia começou, no início do século XX, a tratar do pensamento sem imagens. Era a chamada era do behaviorismo que estudava o comportamento e não os processos mentais do indivíduo. Nesse período de cerca de cinqüenta anos as imagens mentais não foram estudadas.

Tão logo se começou a desvendar a "caixa preta" existente entre o "estímulo" e a "resposta", as representações mentais voltaram a ser pesquisadas. Contribuíram para o interesse nessas questões os trabalhos de Chomsky (1959; 1965; 1972), citado por Sternberg (2000), sobre lingüística e também os progressos feitos na inteligência artificial. A maioria das pesquisas em psicologia tem estudado a imagem mental visual que é a representação mental do conhecimento visual. Há várias hipóteses sobre como ela é formada.

Uma delas é chamada de hipótese da codificação dupla (ou código dual), sustentada por autores como Allan Paivio (Paivio, 1969). Para este autor, as representações mentais são códigos que podem ser analógicos para os estímulos físicos (representações analógicas) e simbólicos para palavras (representações proposicionais), existindo, portanto, dois sistemas básicos distintos de codificação da informação. Em outras palavras, algumas informações podem ser representadas mentalmente de forma análoga ao objeto percebido, por exemplo, a representação mental do rosto de uma pessoa, a de uma circunferência e a de um cubo. Outras precisam de palavras ou símbolos para serem representadas mentalmente, por exemplo, o conceito do número 5, o conceito de razão[1] ou a relação de Pitágoras[2]. Através da experiência do indivíduo, este pode codificar informações e armazená-las em uma forma ou em outra, embora possam existir imagens em que estejam envolvidas informações armazenadas tanto no código analógico como no verbal simbólico. Por exemplo, pode-se pedir para uma pessoa evocar duas imagens: uma foto do presidente brasileiro Médici, e uma figura formada por duas retas paralelas cortadas por duas retas transversais (Figura 3).

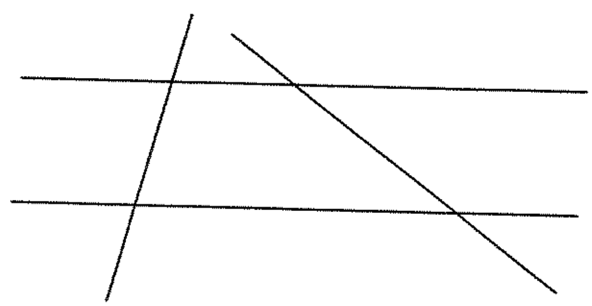


Figura 5.1. Duas retas paralelas cortadas por duas retas transversais

Evidentemente que as informações simbólicas contidas nessas representações dependem da experiência do sujeito: no primeiro caso, a imagem do presidente Médici pode ser apenas analógica se ela não representar, para o sujeito, a história do regime militar no Brasil. Da mesma forma, a figura 5.1 pode ser uma imagem análoga à descrição de duas retas paralelas e duas retas transversais na qual não estejam armazenadas outras informações como ângulos

[1] Dados dois números reais a e b , $b \neq 0$, chama-se *razão* entre a e b ao quociente a/b.

[2] A relação de Pitágoras refere-se ao triângulo retângulo: o quadrado da medida da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (b e c), normalmente simbolizada por $a^2 = b^2 + c^2$.

(opostos pelo vértice, colaterais internos e externos, alternos internos e externos), sobre segmentos proporcionais, sobre trapézios, sobre triângulos semelhantes etc.

As propostas básicas da teoria de Paivio foram resumidas por Eysenck (1994, p. 185) e são reproduzidas a seguir:

- *"Dois sistemas básicos, independentes, mas interconectados, de codificação ou simbolização estão subjacentes à cognição humana: um sistema verbal e um sistema não-verbal.*
- *ambos os sistemas são especializados na codificação, organização, armazenação e recuperação de tipos distintos de informação;*
- *o sistema não-verbal (ou imagens) é especializado no processamento de objetos e eventos não-verbais (isto é, o processamento de informações espaciais e de sincronicidade), e assim atua em tarefas como a análise de cenas e geração de imagens mentais;*
- *o sistema verbal é especializado em lidar com informações lingüísticas e, em sua maior parte, está comprometido com o processamento da linguagem; por causa da natureza da linguagem, ele é especializado no processamento seqüencial;*
- *ambos os sistemas são divididos mais ainda em vários subsistemas sensório-motores (visual, auditivo, tátil)*
- *ambos os sistemas têm unidades representativas básicas: 'logogens' para o sistema verbal e 'imagos' para o sistema não-verbal;*
- *os dois sistemas simbólicos estão interconectados por ligações de referência entre os logogens e imagos."* (Eysenck, 1994, p. 185, baseado em Paivio, 1986).

Algumas experiências (Paivio,1969; Brooks, 1968) que sustentam essa teoria são relativas às diferenças individuais quanto à representação mental. O desempenho de sujeitos em tarefas que exigiam a manipulação de imagens mentais mostrou que a capacidade para formar imagens mentais não parece estar ligada à capacidade verbal. Tal resultado sugere que o sistema cognitivo envolvido na manipulação de representações imaginárias (sistema não-verbal) difere do sistema cognitivo envolvido na manipulação de representações simbólicas (sistema verbal).

Outra hipótese sobre as representações é chamada de hipótese proposicional e é sustentada por outros autores como Anderson (1990) e Bower (1990). Eles sugerem que as representações não são codificadas e armazenadas na forma de imagens, mas sim em formas abstratas que se assemelham às proposições.

Uma proposição é o significado subjacente a uma relação particular entre conceitos, segundo Sternberg (2000). Por exemplo, segundo a hipótese proposicional, o conhecimento sobre triângulo retângulo (Tabela 5.1) não seria representado mentalmente nem na forma de figura nem na forma de palavras, mas sim na forma de proposições. As representações mentais de proposições estão em uma forma que é intrínseca ao cérebro humano e que não podem ser representadas externamente, conforme destacou esse autor:

> *"a forma proposicional de representação mental não está nas palavras, nem nas imagens, mas certamente, em uma forma abstrata de representar os significados subjacentes do conhecimento. Assim, uma proposição para uma frase não conservaria as propriedades acústicas ou visuais das palavras e uma proposição para uma figura não guardaria a forma perceptiva exata da mesma"* (Stenrberg, 2000, p.157).

Ainda de acordo com essa teoria, as imagens não são análogas aos elementos físicos e, portanto, não são diretamente manipuláveis, mas é usado um código analógico que representa similarmente todas as propriedades físicas de uma determinada imagem.

Outros autores, como Finke, Pinker e Farah (1989), discordaram da hipótese proposicional e afirmaram que a imaginação mental pode ser manipulada diretamente. Isso ocorre, por exemplo, quando duas imagens distintas são combinadas para formar uma imagem mental completamente diferente.

Mais preocupada com a natureza das imagens e não com a distinção entre códigos (verbais e não-verbais), os teóricos da equivalência funcional (Farah, 1988; Finke, 1999; Jolicoeur e Kosslyn, 1985; Rumelhaart e Normaan, 1988 além de Shepard e Meltzler, 1971, citados por Stenberg, 2000), admitem que, embora a imaginação visual não seja idêntica à percepção visual, elas são funcionalmente equivalentes. O processo mental que está por trás da formação de uma imagem seria similar àquele que está por trás da percepção de objetos ou figuras. Uma imagem seria uma representação coerente de uma cena ou um objeto de acordo com um ponto de vista. A imagem estaria aparentemente sujeita a transformações mentais contínuas, como rotação, na qual estágios intermediários corresponderiam a visões intermediárias de um objeto atual submetido a transformações. Imagens não representariam apenas objetos, mas as relações entre as partes que compõem o objeto e também a relação entre objetos.

Para girar uma figura com a mão, levar-se-ia um pouco mais de tempo se o ângulo de rotação fosse maior. Aconteceria essa diferença de tempo para girar uma figura mentalmente? Estudos realizados por Cooper e Shepard (1973) e Shepard e Meltzer (1971) apontaram para a existência de uma forte relação entre ângulo de rotação de dois desenhos e o tempo necessário para o sujeito decidir se os dois estímulos apresentados representavam o mesmo desenho ou se uma das imagens era refletida. Os resultados mostraram um aumento linear no tempo de reação como uma função linear do ângulo de rotação entre os dois objetos apresentados. No estudo desenvolvido por Cooper e Shepard (1973) eram apresentadas imagens da letra **R** apenas giradas ou giradas e invertidas, segundo ângulos que variavam de 0º a 360º. Foi verificado que quanto mais a figura era girada da posição padrão, mais tempo os indivíduos precisavam para tomar uma decisão. Os resultados encontrados puderam ser generalizados para outras figuras, dígitos e formas semelhantes a blocos (Cooper & Shepard, 1973; Shepard & Meltzer, 1971) e forneceram evidências pata sustentar a teoria da equivalência funcional.

Kosslyn (1994) fez uma síntese das teorias sobre a representação mental, considerando que a forma proposicional e a forma de imagens influenciam a maneira de representar o conhecimento, mas não propôs dois sistemas de representação (um sistema verbal e um sistema não-verbal). Em vez disso, propôs um sistema que explica a formação de imagens baseado em processos de codificação e memória. O autor forneceu um modelo para explicar, do ponto de vista neurológico, como o organismo processa as informações visuais através de certas áreas do cérebro e de suas conexões.

De acordo com Sternberg (2000), existem várias reinterpretações dos resultados das teorias que tentam explicar como as pessoas representam o conhecimento, e isso sugere que o debate continuará existindo.

No presente trabalho, considerou-se importante compreender como os alunos se diferenciavam quanto ao conhecimento em geometria, especificamente o conhecimento de procedimentos relacionados a conceitos espaciais. Este conhecimento deve estar relacionado à percepção visual, já que é importante interpretar os desenhos que constam nos livros, apostilas, lousas e questões de vestibulares. O conhecimento de procedimentos em geometria também está relacionado com a representação mental dessas figuras, uma vez que as estratégias de solução de muitos problemas devem ser encaminhadas a partir da formação dessas imagens.

A habilidade de perceber as formas e manipular as imagens mentais foi definida como habilidade espacial, amplamente estudada pelos autores que tratam da inteligência. No contexto escolar, essa habilidade foi estudada por Krutetskii (1976) como sendo um componente da habilidade matemática.

Sendo assim, o presente trabalho tentou buscar uma maior compreensão dos processos que subjazem a formação e manipulação de imagens mentais que são requeridas nas tarefas de geometria. Optou-se pela teoria de Kosslyn (1995) que defendeu a hipótese que a imagem mental visual e a percepção compartilham mecanismos comuns. Para o autor, a identificação de objetos e a representação mental do conhecimento visual envolvem processos de nível superior que contam com informações a respeito das propriedades dos objetos e acontecimentos que estão armazenadas na memória.

CAPÍTULO VI

A TEORIA COMPUTACIONAL DE KOSSLYN

Steven Kosslyn, no livro "Image and Brain: The Resolution of the Imagery Debate" (Kosslyn, 1995), defendeu a hipótese de que a imagem mental visual e a percepção compartilham mecanismos comuns. Esse autor, a partir da abordagem cognitiva e de acordo com o processamento da informação, elaborou um modelo que integra os processos de reconhecimento e identificação de objetos com os processos de formação e manipulação de imagens mentais visuais.

Em uma série de estudos (Kosslyn,1975; Kosslyn, 1978; Kosslyn, Cave, Provost e VonGierke, 1988; Kosslyn e Pomerantz,1977) foram utilizadas técnicas específicas de pesquisa psicobiológica elaboradas para possibilitar o estudo das relações entre o desempenho cognitivo e as estruturas cerebrais. Entre essas técnicas, destacam-se os estudos de caso de pacientes com lesão cerebral, as técnicas *in vivo* executadas em cérebros de macacos e as técnicas *in vivo* baseadas na glicose radioativa (tipo de tomografia). Além dessas técnicas, foram feitos outros experimentos para avaliar o comportamento.

Esse autor argumentou que é muito mais fácil entender a percepção visual que a formação de imagem, sendo que as pesquisas desenvolvidas por ele mostraram que os mecanismos de identificação de objetos estão subordinados ao processo de formação de imagens. Kosslyn (1995) utilizou o conhecimento sobre os processos da visão e as propriedades computacionais da percepção para formar o seu modelo de formação da imagem.

A percepção é o conjunto de processos através dos quais as sensações recebidas são reconhecidas, organizadas e entendidas. A percepção visual vem sendo estudada desde décadas atrás pelos psicólogos cognitivos, sendo que os processos visuais de nível inferior, os mais simples, são melhor entendidos que os processos de níveis superior, estes mais complexos. Os processos de nível inferior são dirigidos apenas por estímulos sensoriais; as operações envolvidas estão ligadas a propriedades específicas do estímulo, como cor, forma, orientação. Já o processamento visual mais complexo conta com informações a respeito das propriedades dos objetos e acontecimentos que estão armazenadas na memória. Os processos que produzem e manipulam imagens mentais visuais utilizam mecanismos complexos de nível superior. Parece, no entanto, que os processos complexos influenciam todo o processamento do estímulo visual, tendo efeito forte e persuasivo na percepção como um todo.

A percepção e a identificação de objetos

Uma questão clássica incluída no estudo da percepção é o problema do reconhecimento e identificação de objetos. Kosslyn (1995) diferenciou entre reconhecimento e identificação de objetos. O reconhecimento envolve processos de percepção de nível inferior. Já a identificação implica um conhecimento muito maior do que a percepção em si, pois para uma pessoa identificar um objeto, ela precisa ativar outras informações que estão armazenadas na memória. Por exemplo, quando se identifica uma maçã, o indivíduo sabe que ela possui sementes no interior, sabe onde encontrá-la e assim por diante. No caso da geometria, quando o aluno identifica a figura de um trapézio, pode-se inferir que ele conhece as propriedades dessa figura. No presente trabalho buscou-se, juntamente com a descrição da teoria de Kosslyn (1995), apontar exemplos em geometria, visando um melhor entendimento a respeito da maneira como o aluno reconhece e identifica figuras geométricas.

De acordo com Kosslyn (1995), a identificação de objetos envolve cinco classes de habilidades:

1) Habilidade de reconhecer diferentes localizações (posições e distâncias)

Uma pessoa pode, na maioria das vezes, identificar um objeto mesmo quando a imagem visual do estímulo aparece sob ângulos diferentes do qual o objeto foi visto anteriormente. Esses ângulos variam quando os objetos são vistos de diferentes distâncias e quando eles se apresentam de tamanhos variados.

Além disso, independente do lugar onde a imagem visual do estímulo é projetada na retina, o objeto pode ser identificado. Pode-se supor, portanto, que um aluno poderia identificar a figura de um cubo, sendo ele pequeno ou grande, na posição apoiado horizontalmente numa face ou em outra posição.

2) Habilidade de generalizar

Segundo o autor, a generalização faz parte da habilidade de identificar objetos. Assim, pode-se identificar uma série de novas formas como correspondentes a um tipo dado de objeto. Essa generalização sobre variações de figura ocorre em várias circunstâncias:

- identificação de objetos a partir de diferentes pontos de vista. É possível identificar um carro de frente, de trás e de lado, ou seja, na maioria das vezes um objeto pode ser identificado mesmo que ele projete diferentes imagens e mesmo quando diferentes partes e características são visíveis.
- Identificação de objetos quando as formas de suas partes se alteram. O sujeito pode-se, por exemplo, identificar cadeiras grandes, de brinquedo, com estofamento, com linhas retas ou curvas etc.
- Identificação de objetos quando variam as relações espaciais entre as partes. É possível, por exemplo, identificar uma pessoa como sendo o indivíduo X estando ela em pé, sentada, deitada, pulando etc.
- Identificação de objetos que contém ou não partes características opcionais, pode-se identificar uma cadeira com ou sem braços, um rosto com barba etc.

Essa habilidade permitiria ao aluno identificar pirâmides em várias posições, com bases diferentes, com proporções diferentes entre bases e altura, com faces coloridas ou não etc (Figura 6.1).

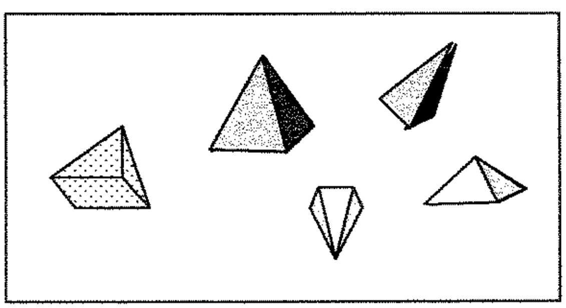


Figura 6.1. Pirâmides

3) Habilidade de identificar objetos em condições não ideais.

Mesmo em condições desfavoráveis, na maioria das vezes as pessoas conseguem identificar os objetos:

- Identificação de objetos quando eles estão parcialmente ocultos. Objetos dentro de uma mala de viagem podem ser identificados mesmo quando partes deles estão escondidas embaixo de outras.
- Identificação de objetos quando a imagem é prejudicada. Uma pessoa pode, muitas vezes, identificar objetos mesmo quando a luminosidade é fraca, pode identificar objetos em desenhos mesmo quando os esboços não estão completos e quando a textura do objeto é eliminada em uma figura.
- Identificação de objetos que estão muito próximos. Os objetos têm ângulos adequados para serem vistos com exatidão. Se muito próximos, apenas uma porção deles pode ser vista claramente; nesse caso, então, é preciso fazer muitos movimentos com os olhos para examiná-los totalmente.

O esboço de desenho de um paralelepípedo seria um exemplo de identificação de figuras geométricas feita através dessa habilidade. (Figura 6.2).

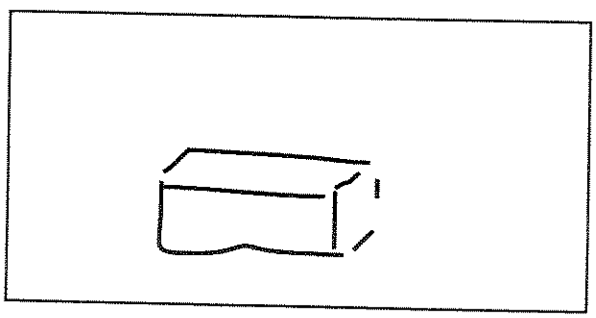


Figura 6.2. Esboço de um paralelepípedo.

4) Habilidade de identificar casos específicos

Nem sempre é suficiente generalizar, também é preciso registrar as diferenças entre os exemplos de um objeto:

- Identificação de objetos específicos. Uma pessoa pode identificar o seu carro em um estacionamento. O sistema visual tanto pode ignorar variações que são irrelevantes para a identificação de um objeto como membro de uma classe, como pode fazer com que essas variações se tornem relevantes.

- Identificação de relações espaciais específicas. Uma pessoa pode identificar se o seu livro foi colocado em outro lugar na estante. Essa habilidade implica que a pessoa associou informação sobre formas e localizações na memória.

Essa habilidade permitiria ao aluno identificar um triângulo equilátero entre outros ou verificar se um dado paralelepípedo é semelhante a uma caixa de sapatos. (Figuras 6.3 e 6.4).

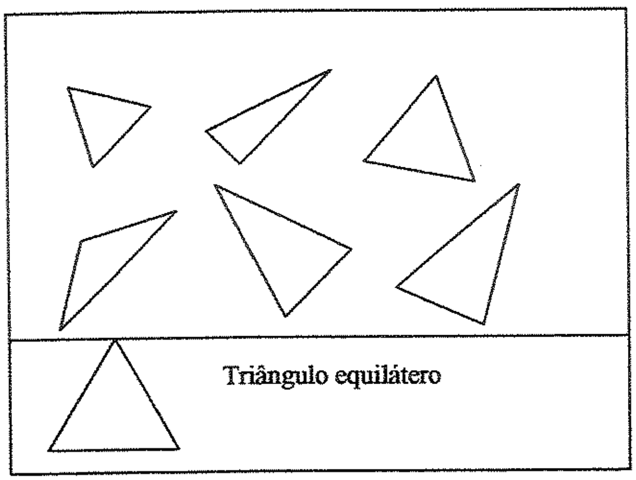


Figura 6.3. Triângulos

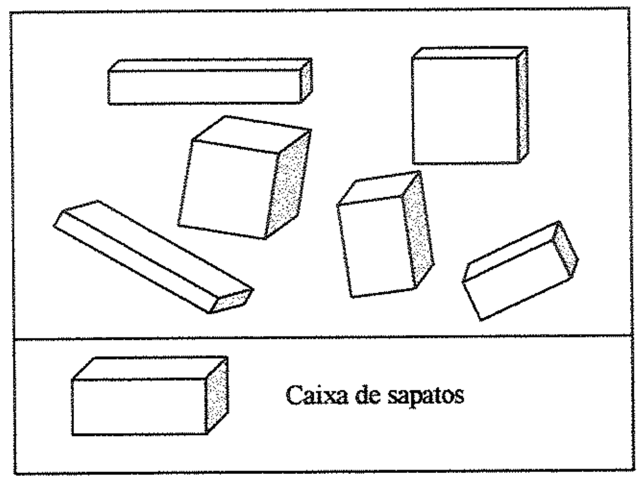


Figura 6.4. Paralelepípedos

5) Habilidade de identificar objetos e cenas

Raramente um objeto é visto isoladamente; quase sempre é visto em um contexto onde aparece uma variedade de estímulos:

- Identificação múltipla de objetos em uma única fixação. Pesquisas mostram que o contexto afeta a identificação quando cenas são apresentadas rapidamente; isto indica que o sujeito identifica o contexto tão bem quanto o objeto em si. O sistema visual automaticamente identifica mais que um objeto reflexivamente.

Um exemplo dessa habilidade seria identificar os triângulos existentes na Figura 6.5 e os retângulos na Figura 6.6.

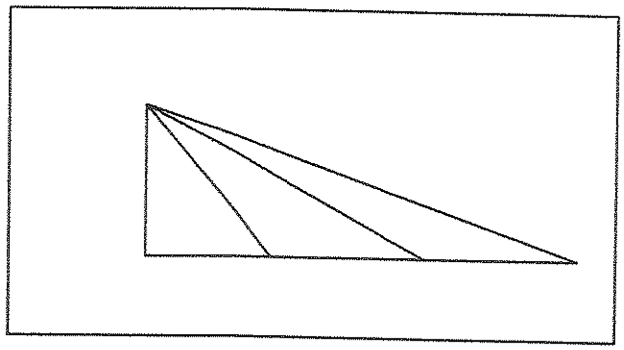


Figura 6.5. Triângulos

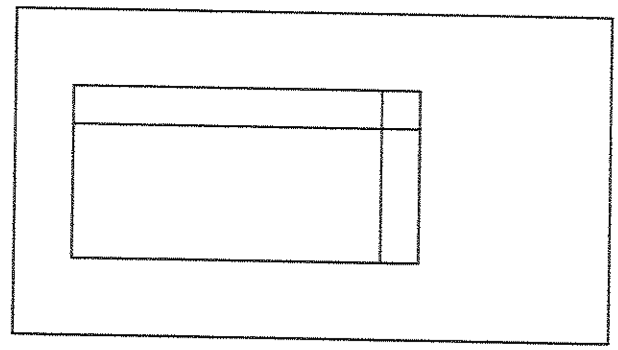


Figura 6.6. Retângulos

O modelo computacional de Kosslyn para percepção

Kosslyn (1995) elaborou um modelo para explicar, com base em aspectos neurológicos, como o organismo processa as informações visuais através de certas áreas do cérebro e de suas conexões. A figura 6.7. mostra o modelo segundo o qual certas propriedades do cérebro atuam no processo visual de nível superior – usado na identificação de objetos.

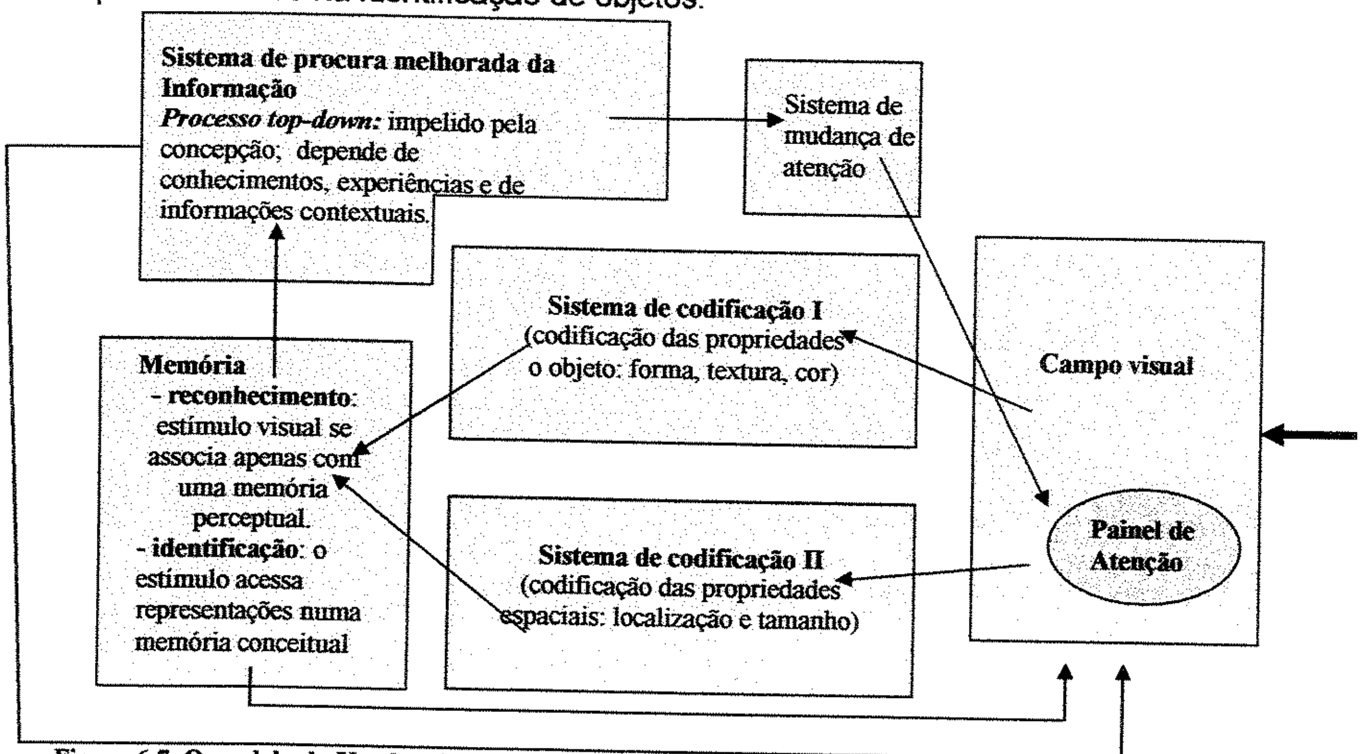


Figura 6.7. O modelo de Kosslyn (adaptado de Kosslyn, 1995)

O autor advertiu que não é fácil explicar os componentes que atuam na percepção de nível superior (esta ocorre quando objetos são identificados). A complexidade dos sistemas que atuam na percepção justifica a dificuldade de se programar um computador para ver, apesar dos avanços obtidos pelos pesquisadores em IA – Inteligência Artificial.

O modelo proposto por Kosslyn (1995) indicou a existência de sete sub-sistemas usados para explicar a arquitetura inata que permitiria ao homem reconhecer o mundo através da visão. O modelo deve ser lido da direita para a esquerda e de acordo com a figura, os estímulos sobre os olhos produzem uma configuração da atividade em um conjunto de áreas visuais organizadas na região cerebral chamada de lobo occipital. Essas áreas agrupam-se dentro de uma única estrutura funcional denominada de campo visual.

O painel de atenção seleciona, no campo visual, um conjunto de pontos para processamento detalhado. É o que acontece quando se quer identificar um determinado objeto em um contexto ou uma determinada parte de um objeto. O conteúdo desse painel é então enviado para dois sistemas maiores para posterior processamento.

A codificação das propriedades e a codificação das relações espaciais são processadas em dois sistemas distintos: o sistema de codificação I e o sistema de codificação II. Por exemplo, quando os contornos dos objetos a serem identificados não estão nítidos, quando partes dos objetos são omitidas, quando partes do objeto aparecem desconectadas ou embaralhadas, então esses dois sistemas de codificação ajudam a organizar o estímulo. O sistema de codificação I é um conjunto de áreas do cérebro localizadas a partir do lobo occipital até o lobo temporal inferior. As células dessa área respondem especificamente a propriedades do objeto como forma, textura, cor. Já o sistema de codificação II corresponde a um grupo de áreas cerebrais localizadas do lobo occipital superior para o lobo parietal e permite processar propriedades espaciais como localização e tamanho dos objetos.

No reconhecimento de objetos o estímulo visual se associa apenas com uma representação na memória perceptual. Para identificação, o estímulo acessa representações armazenadas na memória conceitual e assim a pessoa pode ter acesso ao conhecimento mais amplo do objeto. Os dois sistemas de codificação I e II, ajudam a organizar o estímulo que permite acessar a memória associativa.

Na memória associativa, que é um sistema parcialmente localizado nos lobos temporal superior e posterior, as respostas dos dois sistemas são associadas à informação armazenada. Essa informação pode ser simples associação entre representações como ser mais conceptual e abstrata; se a informação acessada foi apropriada, então o objeto é identificado.

Em muitas circunstâncias, o estímulo não se associa muito bem à memória visual e o objeto não é reconhecido de imediato. É preciso, então, que novas informações sejam coletadas e que a pessoa procure ativamente, em um processo chamado de *top-down.* Este é um processamento impelido pelo conceito (diferentemente do processo *bottom-up* que é impelido pelo estímulo), isto é, depende de conhecimentos, de experiências e de informações contextuais. O sistema responsável por tal processamento é denominado de procura melhorada da informação, e existem evidências que o córtex pré-frontal dorso lateral tenha papel importante no processo.

Em uma pesquisa *top-down* o indivíduo não acessa apenas a informação armazenada, mas também inicia mecanismos que mudam a atenção para localizar uma determinada parte informativa ou característica do objeto. Para realizar essa mudança de atenção a pessoa faz movimentos com o corpo, cabeça, olhos para localizar um ponto específico, muda o painel de atenção, testa as suas hipóteses e dá preferência à representação da propriedade procurada. Então, a parte é focalizada, as representações dos objetos e das propriedades espaciais são organizadas e levadas pelos sistemas de codificação I e II para serem registradas na memória associativa e podem ser suficientes para a identificação dos objetos. Acrescenta-se que nessa pesquisa entram em jogo as expectativas do sujeito, suas crenças e a influência do contexto. Se a identificação dos objetos ainda não acontecer, novo ciclo se inicia, usando uma representação diferente para conduzir a procura.

O modelo de Kosslyn para imagem mental visual

Uma imagem mental visual é um tipo de ativação do campo visual que não é causada por estímulo sensorial imediato. No entanto, os componentes do modelo de Kosslyn para percepção possuem as mesmas propriedades quando eles são usados para inspecionar um objeto que é visualizado mentalmente em vez de percebido.

Kosslyn (1995) ilustrou esse fato, dando o exemplo segundo o qual sujeitos indagados se as orelhas do cachorro Snoopy eram pontudas, responderam "visualizando" o cachorro e "olhando" para as orelhas. Da mesma maneira, se for perguntado a um aluno se uma reta r paralela a um plano α será paralela a todas as outras retas desse plano α, é bem provável que ele "olhe" para a imagem e então responda a questão.

No primeiro exemplo, a forma das orelhas é associada a formas armazenadas na memória e são codificadas pelo sistema de codificação I, enquanto tamanho e localização são codificados pelo sistema de codificação II. No segundo exemplo, as relações entre os planos e retas parecem ser codificadas pelo sistema de codificação II. Esse tipo de atividade é evocado no campo visual, pouco importando se foi evocado por estímulos visuais (percepção) ou da memória (imagem).

No entanto, o autor advertiu que o sistema não tem exatamente as mesmas propriedades em relação à percepção e à imagem e citou três diferenças importantes.

A primeira diferença é que a imagem mental desaparece, esvanece rapidamente, ao contrário dos perceptos, isto é, das representações baseadas no estímulo visual enquanto o objeto é percebido. É preciso esforço para manter a imagem mental e talvez seja por isso que muitas vezes os alunos têm dificuldades em responder as questões acerca de geometria de posição.[1]

---

[1] Exemplo: é verdadeira ou falsa a afirmação: "se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer outra reta desse plano" ?

A segunda diferença é que as imagens mentais são criadas a partir de informações armazenadas na memória, sendo que não é o mundo externo que dita o conteúdo das imagens, pois estas podem ter uma variedade muito grande e podem não ter semelhança alguma com as representações dos estímulos visuais. Como exemplo, é possível para um aluno imaginar uma pirâmide de base estrelada, mesmo que nunca tenha visto essa figura.

Uma terceira diferença seria a possibilidade de transformação das imagens mentais, pois elas podem distender, girar, ganhar movimentos etc, o que não acontece com os perceptos. Seria difícil ter a percepção de um cone a partir da rotação de um segmento em torno de um eixo, mas é perfeitamente possível formar essa imagem mental.

As imagens são formadas a partir do campo visual do mesmo modo que as representações para os perceptos e esse argumento explica o fato da imagem desbotar tão rapidamente. Ao receber os estímulos, o campo visual é mapeado pela retina e a pessoa usa a representação dos perceptos para não ter que ficar com os olhos parados. Se a cada movimento do olho a representação desaparecesse por total, seria impossível a qualquer um ler, andar em lugares movimentados, dirigir etc. No entanto, se essas representações persistissem haveria sobreposição e acúmulo de impulsos, o que traria conseqüências desastrosas óbvias. Embora as imagens desapareçam tão rapidamente, na maioria das vezes elas demoram certo tempo para serem formadas.

A formação e a manutenção das imagens

De acordo com Kosslyn (1995), se uma pessoa planeja acampar e na véspera está preocupada com a bagagem necessária para a atividade, poderia lembrar, ao deitar, dos objetos que seriam utilizados. Assim, imagens mentais de cada objeto necessário, tais como barraca, sacos de dormir, roupas etc, ajudariam a pessoa a recordá-los quando fosse arrumar as malas. Ela poderia também imaginá-los dentro da mala, arranjá-los, manipulando suas posições de modo a ter mais espaço livre para colocar outras coisas. Quando enfim todos os acertos de posições fossem feitas, a pessoa poderia memorizar essa configuração até a manhã seguinte, quando então passaria a realizar as ações antecipadas pelas imagens.

Esse exemplo mostra como uma tarefa de imaginação envolve quatro classes de habilidades: geração ou formação de imagens (formação de imagens para cada objeto necessário e para a mala arrumada); inspeção de imagem (observação da maneira como os objetos vão ficar dispostos na mala); manutenção da imagem (retenção das imagens de cada objeto considerado) e a transformação de imagens (movimentação mental dos objetos entre si).

Esse exemplo mostra também o papel da imagem no raciocínio (antecipando as operações) e na aprendizagem (memorizando o resultado final e possivelmente induzindo alguns princípios gerais, como as formas que deveriam ser colocadas nos cantos da mala).

A formação ou geração das imagens

De acordo com a teoria proposta por Kosslyn (1995) devem ser consideradas cinco formas gerais de geração de imagens.

No primeiro caso, pode-se ver um objeto ou cena e reter a sua imagem. A informação armazenada poderá depois ser ativada e a imagem formada. No entanto, mesmo esse processo de ativação pode ser complexo, pois a pessoa pode ter visto partes separadas de uma cena e então uma série de representações distintas estaria armazenada. Seria, então uma segunda maneira de gerar imagens: o processo se caracteriza pela integração dessas representações na cena total. Uma outra maneira de imaginar é ativar imagens separadas numa combinação nova; os objetos já seriam familiares, porém ou as situações ou os arranjos seriam inéditos. É possível imaginar uma esfera inscrita em um cubo, mesmo que representação desses dois sólidos em conjunto nunca tendo sido formada a partir da percepção. Uma quarta maneira é formar imagens nunca vistas antes; pode-se imaginar uma cena que não esteja baseada em imagens armazenadas, nem em arranjos, nem em objetos separados. Por fim, embora a maioria das imagens seja formada a partir da memória, é possível imaginar através da atenção e isto não requer ativação da memória visual. Por exemplo, pode-se observar os ladrilhos coloridos dispostos no piso e então formar a imagem de uma letra ou outra forma qualquer,

Na geometria, parece fácil formar a imagem mental de um cubo se ele já foi visto anteriormente: basta ativar a informação armazenada na memória. No entanto, a pessoa pode ter visto apenas parte do objeto ou objetos muito próximos uns dos outros, difíceis de serem distinguidos. Precisaria, então, fixar os olhos muitas vezes e armazenar representações separadas ou distintas que deveriam ser integradas para a formação da imagem.

A imagem gerada a partir de informações armazenadas na memória requer os mesmos mecanismos que são usados pelo sistema de codificação quando codifica partes ou características durante a pesquisa *top-down.* As imagens podem ser formadas a partir de várias representações codificadas previamente. São acessadas as representações na memória associativa e, no subsistema chamado de **ativação de padrões,** é ativada uma imagem padrão associada com o objeto. O sistema da busca da informação melhorada acessa a localização de uma parte ou característica a ser imaginada na memória associativa e o sistema de mudança de atenção focaliza novo painel de atenção. Assim, imagens mais complexas podem ser formadas no campo visual.

Nota-se que é possível ativar uma representação no subsistema de ativação de modelo exemplar ou em um modelo categórico (ou proposicional). Por exemplo, pode-se formar a imagem de um cachorro qualquer ou de um cachorro específico. Assim, ao imaginar uma pirâmide, um aluno que só tenha conhecido uma pirâmide reta de base quadrada, provavelmente ativaria um único modelo exemplar, pois essa representação corresponderia ao conceito na memória associativa. Já um professor de geometria teria codificado mais exemplares de pirâmides e feito distinção mais requintada entre eles e assim ativaria um modelo categórico (ou proposicional, mais genérico, que contém informações sobre as propriedades do objeto e como elas se relacionam - arestas e faces visíveis, arestas pontilhadas, faces sombreadas, altura - além da categoria de tamanho aproximado e das categorias supra-ordenadas do objeto – poliedro não regular) e poderia, por coincidência, ativar a mesma pirâmide reta de base quadrada.

Para gerar múltiplas partes de uma imagem, podem ser usados os subsistemas que organizam as representações de relações espaciais categóricas (que indicam classes de posições, de tamanhos e de orientações - vertical, diagonal, horizontal) ou as representações de relações espaciais coordenadas (que indicam propriedades espaciais métricas e relativas a um sistema de coordenadas). Em outras situações também pode ser usado o subsistema que organiza as relações de movimento, quando a movimentação da imagem se faz necessária para melhor ativar um modelo exemplar ou um modelo categórico na memória associativa.

Uma imagem mais complexa muitas vezes precisa de partes de alta resolução que são acrescentadas à imagem global por processos que competem ao subsistema de procura de propriedades. Esse subsistema é mais complexo e é caracterizado pelas mesmas funções anteriormente citadas: organização de representações de relações espaciais e de movimentos e acessa as representações que são usadas pelo sistema de mudança de atenção para mudar o painel de atenção. A função mapeamento da imagem é então alterada para formar a nova parte na imagem global.

Kosslyn distingue os dois tipos de imagem: aquela que é formada diretamente a partir de representações armazenadas na memória e aquela imagem que é formada a partir do controle da atenção. Nesse último caso, atua um subsistema chamado de controle da atenção baseado no estímulo, que é usado apenas quando a imagem é formada a partir da percepção. Esse subsistema ajuda a pessoa a distinguir a imagem que é gerada a partir da percepção do percepto em si. Nas tarefas de raciocínio espacial, parece que o sujeito utilizada esse subsistema para poder formar as imagens e manipulá-las convenientemente.

As propriedades do campo visual imaginário

O campo visual imaginário funciona como espaço, preservando as relações espaciais dos objetos representados. Por exemplo, sejam as imagens de vários cubos empilhados e dispostos em cima de uma mesa. Essas imagens mentais preservam as mesmas relações (em frente, atrás, em cima, em baixo, perto, longe) que a representação perceptual dos objetos.

O campo visual tem uma extensão limitada. Assim, as imagens mentais que se movimentam podem ficar fora desse meio. O ponto de intersecção das retas *r* e *s* da figura 6.8, por exemplo, poderia estar fora do campo visual imaginário.

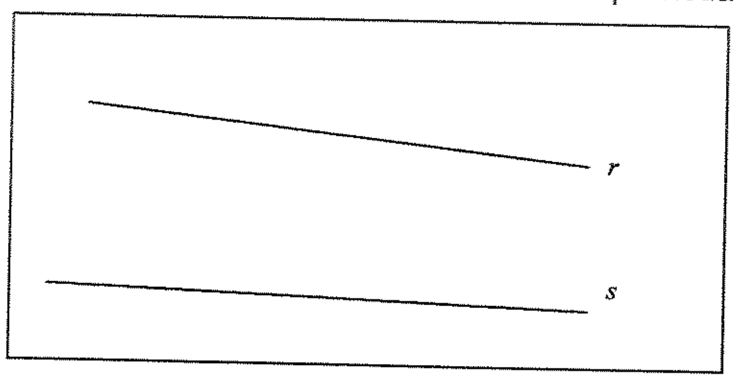


Figura 6.8. Retas *r* e *s*

Assim como no campo visual, a área de maior resolução do campo espacial imaginário está no seu centro: a imagem começa a esvanecer a partir do centro. O meio espacial tem também uma granularidade que determina o que pode e o que não pode ser representado claramente. Assim, parece mais fácil ver os detalhes das imagens mentais maiores, pois podem ficar obscuros os detalhes de imagens 'pequenas'. Um exemplo dessas duas propriedades talvez seja a imagem mental da vista aérea de uma cidade. Parece que haveria uma concentração de imagens melhor definidas em um ponto central. Seria, também, quase impossível ver os detalhes dos telhados das casas nessa representação mental. No caso da geometria, esses princípios parecem de difícil utilização na explicação da imagem mental, uma vez que, em geral, as figuras geométricas não são percebidas em um campo muito amplo.

Se uma pessoa estiver muito próxima a uma enorme estante de livros, mesmo que movimente a cabeça e os olhos, ela não poderá perceber a estante inteira nem representar essa imagem; da mesma maneira, não poderá ter uma imagem mental de uma estante a partir da imagem de um livro. Ou seja, o campo visual da imagem mental tem a mesma propriedade que tem para o percepto; os objetos só podem ser percebidos e imaginados sob ângulo adequado.

O painel de atenção desempenha um importante papel quando a imagem deve ser inspecionada para se detalhar partes ou propriedades. Como exemplo, pode-se formar a imagem de um ladrilhamento feito de hexágonos e então fixar-se nos ângulos formados pelo encontro das linhas retas: o painel de atenção deverá ser mudado de forma a inspecionar esse detalhe (figura 6.9).

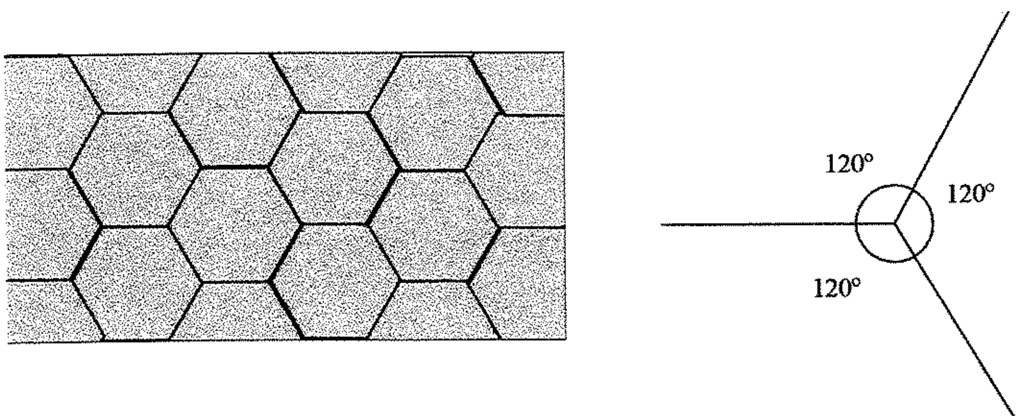


Figura 6.9. Ladrilhamento e o detalhe dos ângulos

A inspeção e a transformação das imagens

Muitas vezes é preciso inspecionar a imagem que foi formada. Para responder se uma caneca é mais alta que larga, é preciso que um estímulo seja enviado aos sistemas de codificação I e II e pouco importa se essa atividade resultou de estímulos imediatos vindos dos olhos (percepção) ou da informação que estava armazenada na memória.

Freqüentemente, os mecanismos subjacentes à inspeção e à transformação de imagens atuam juntos. Quando se considera o exemplo de decidir se o comprimento da cauda de um gato é igual ao comprimento da sua perna, parece haver a necessidade de girar a imagem do gato de forma a ser visto lateralmente e a de esticar o comprimento das partes que devem ser comparadas. Estariam envolvidos, nessa tarefa, os processos relativos à formação, à rotação e à transformação de partes distintas da imagem do gato.

Os processos relativos à inspeção e transformação são: *esquadrinhar; procurar; traçar panoramas; dar 'zoon' e rotacionar.*

Alguns desses processos podem ser utilizados para explicar como são usadas as imagens mentais quando as pessoas se deparam com tarefas de geometria. O quadro 6.1 ilustra algumas solicitações possíveis de serem feitas a um sujeito e os processos necessários para atendê-las.

Considerações sobre a teoria

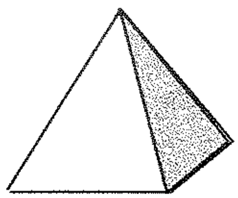
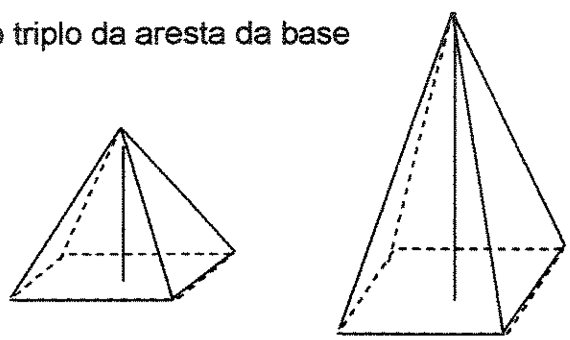
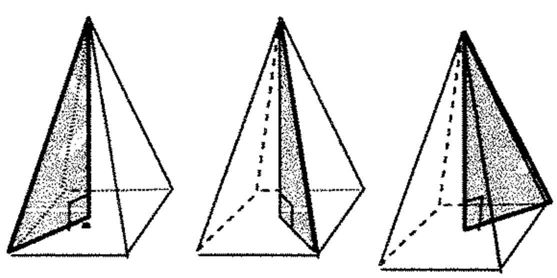
Foram encontrados muitos artigos[2] recentes de Kosslyn e colaboradores que tratam de questões importantes de sua teoria, o que mostra que vários pesquisadores continuam investigando como as regiões do cérebro são responsáveis pela formação e manipulação de imagens mentais.

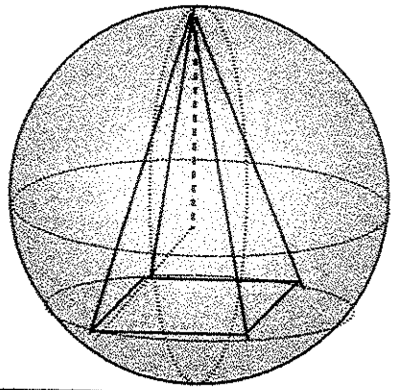
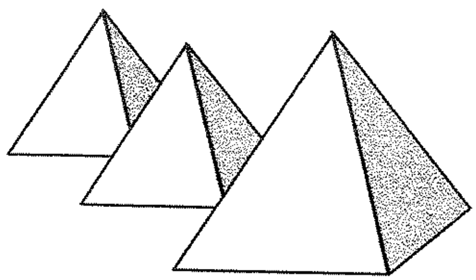
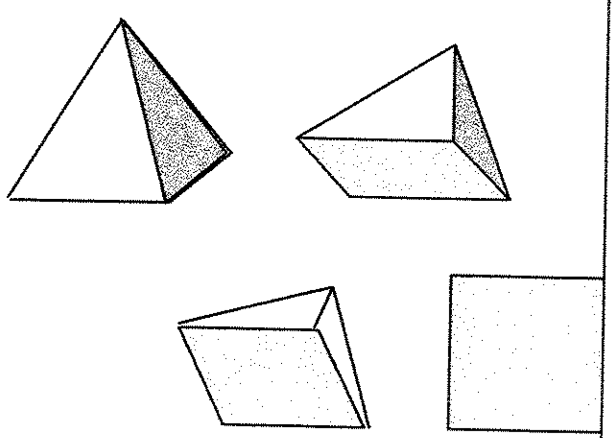
A hipótese teórica de Kosslyn fornece elementos para interpretar a formação e inspeção das imagens em tarefas de geometria. O entendimento dos processos básicos descritos pelo autor pode ajudar a explicar o componente espacial da habilidade matemática e algumas das possíveis diferenças nas representações externas que os alunos utilizam quando solucionam problemas geométricos

---

[2] Entre muitos, destacam-se os artigos mais atuais: Ganis,G; Thompson,W.L; Kosslyn,S.M.(2004); Hooven, C.K;.Chabris,C.F; Ellison,P.T; Kosslyn,S.M.(2004); Kosslyn,S.M; Thompson,W.L(2003); Laeng,B; Zarrinpar,A; Kosslyn,S.M.(2003); Mast,F.W; Kosslyn,S.M.(2002); Mast,F.W; Ganis,G; Christie,S; Kosslyn,S.M.(2003); Vieilledent,S; Kosslyn, S.M; Berthoz,A; Giraudo,M.D.(2003); Wraga, M; Thompson, W.L; Alpert,N.M; Kosslyn,S.M.(2003).

Quadro 6.1. Processos cognitivos envolvidos na formação e inspeção da imagem

Solicitações	Processo geral	Processo específico
Pense em uma pirâmide regular de base quadrada 	Gerar imagem	Gerar imagem exemplar
Pense em uma pirâmide cuja altura meça o triplo da aresta da base 	Transformar imagem	Esquadrinhar
Pense nos triângulos retângulos internos cujas hipotenusas sejam as arestas laterais da pirâmide 	Inspecionar imagem	Procurar

Inscreva a pirâmide numa esfera 	Transformar imagem	Traçar um panorama
Amplie-a na razão k = 2 	Transformar imagem	Zoom
Faça uma rotação dessa pirâmide de modo a tornar visível apenas a face que é quadrada 	Transformar imagem	Rotacionar

Considerou-se que o desempenho dos alunos nas provas de geometria poderia ser influenciado pelos processos de formação e inspeção de imagens. Considerou-se também que fatores ligados aos aspectos afetivos poderiam influenciar o desempenho escolar. Diferenças de comportamento são facilmente verificadas em sala de aula quando se observam alunos que demonstram descontentamento ao trabalhar com tarefas de geometria, enquanto outros persistem em buscar soluções para as questões mais complexas. O comportamento desses alunos pode ser influenciado pelas atitudes em relação à Matemática e, em particular, em relação à Geometria.

CAPÍTULO VII

AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E À GEOMETRIA

Não são apenas os aspectos cognitivos ou metacognitivos que devem ser considerados quando se analisa a aprendizagem e o desempenho dos alunos em matemática, em geometria ou em qualquer conteúdo escolar. Além dos aspectos da experiência que possam parecer essencialmente racionais, há que se considerar a dimensão afetiva na construção do conhecimento, pois a emoção e a cognição coexistem em um mesmo indivíduo e interferem plenamente em sua vida mental e em seu comportamento (Loss, Falcão & Alcioly-Régnier, 2001).

Como afirmou Brito (2002 a), os fatores afetivos e emocionais influenciam na profundidade do entendimento construído e na qualidade e quantidade do material aprendido e posteriormente recordado.

Embora não pareça existir dúvida de que as atitudes têm influência nos processos cognitivos que conduzem a aprendizagem de qualquer tipo de conteúdo educacional, seja referente a conceitos ou a procedimentos (Coll,1998), verifica-se que no Brasil são recentes os estudos ligados ao ensino e à avaliação das atitudes dos alunos em relação às disciplinas escolares.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997 consta que um dos objetivos gerais do ensino fundamental é tornar o aluno capaz de desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades para agir com perseverança na busca de conhecimento. Neles também consta que uma das finalidades do ensino de matemática é levar o aluno a sentir-se seguro da própria capacidade de construir conceitos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções (Brasil, 1997).

O mesmo documento classifica os conteúdos do ensino fundamental em conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Na relação dos conteúdos atitudinais, aparecem expressões relacionadas ao desenvolvimento de atitudes favoráveis para a aprendizagem de matemática; à confiança na própria capacidade de resolver problemas; à curiosidade e interesse por conhecer, interpretar e produzir; à apreciação da organização, ordem, precisão, correção e limpeza na elaboração e apresentação dos trabalhos; às idéias de perseverança, esforço e disciplina na busca de resultados; aos conceitos de segurança na defesa de seus argumentos e de valorização da importância e utilidade dos conteúdos. Pode ser constatado que, em vários trechos do documento, o significado de atitude aparece relacionado a comportamentos motivados para aprender e realizar tarefas.

Como afirmou Brito (1996), muitas vezes o termo atitude é usado como sinônimo de comportamento, confundindo-se atitude com o evento observável. Sendo o comportamento originado a partir da motivação, tem-se que as atitudes são fatores componentes desta origem. Atitudes não podem ser diretamente observadas, mas podem ser inferidas pelas respostas avaliativas observadas. Respostas avaliativas são aquelas que expressam aprovação ou desaprovação, ser favorável ou não, gostar ou não, aproximar ou evitar, atração ou aversão, ou reações similares.

Para Eagly e Chaiken (1993), uma atitude é uma tendência psicológica que pode ser expressa quando um indivíduo avalia alguma coisa com certo grau de aprovação (demonstrando ser favorável a ela) ou de desaprovação (demonstrando ser desfavorável a ela). Segundo os autores, um indivíduo não tem uma atitude em relação a um objeto até que ele possa responder de forma avaliativa a esse objeto, seja em uma base afetiva, cognitiva ou comportamental. Se essa tendência de resposta se estabilizar, então o individuo terá formado uma atitude em relação ao objeto. Uma representação mental da atitude pode ser armazenada na memória e assim ela pode ser ativada pela presença do objeto ou de situações relacionadas a ele.

Para Brito (1996), atitude é uma *"disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do* *indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor"* (Brito, 1996, p.11).

A atitude é aprendida e é sempre referente a um determinado objeto. No caso deste trabalho, são dois os objetos em relação aos quais pretende-se investigar as atitudes: a matemática e a geometria.

Ela também tem uma característica unidimensional e bipolar, e isto se refere ao sentimento de prazer ou desprazer que o objeto provoca, e este sentimento pode ter maior ou menor intensidade. Na verdade, a atitude tem apenas uma direção, e pode assumir um dos dois sentidos: positivo ou negativo.

As experiências diretas ou indiretas da pessoa com o objeto influenciam o desenvolvimento de atitudes mais ou menos favoráveis em relação a ele. As experiências dos alunos com a matemática escolar dizem respeito aos diversos conteúdos aprendidos, à maneira como foram desenvolvidos, aos métodos do professor, aos acontecimentos que ocasionaram satisfação ou desconsolo, às formas de avaliação, aos colegas, aos pais, à dinâmica da sala de aula, à cultura da escola, enfim, a uma série de fatores que acabam ajudando a determinar uma atitude mais positiva ou mais negativa do aluno em relação a essa disciplina. Atitudes negativas em relação à matemática podem levar os alunos a comportamentos que vão desde um insucesso temporário até uma completa aversão pela disciplina, conforme apontou Brito (2002 b).

O componente afetivo de uma atitude, segundo Brito (1996) e Eagly e Chaiken (1993), refere-se às emoções de um indivíduo frente a um objeto, quando este é percebido como agradável ou desagradável e representa apenas um tipo de experiência das quais são formadas as atitudes.

Já o componente cognitivo está ligado às informações, aos conceitos, às idéias que o sujeito tem a respeito do objeto de atitude. Essas idéias são freqüentemente chamadas de crenças e são entendidas como respostas avaliativas dadas pelo sujeito quando associa o objeto a algumas de suas características. Segundo Rokeach (1972), citado por Silva (2000 a), uma crença é descritiva quando o seu conteúdo classificar ou identificar o objeto como verdadeiro ou falso, correto ou incorreto; é avaliativa quando pode avaliar o conteúdo como bom ou ruim; é prescritiva quando pode defender um certo percurso de ação ou certo estado de existência como desejável ou indesejável. No entanto, Eagly e Chaiken (1993) afirmam que todas as crenças são, em algum grau, avaliativas.

O componente comportamental refere-se às manifestações de uma pessoa em relação ao objeto, e estas podem ser observadas diretamente. Podem ser consideradas também as intenções do sujeito em realizar as ações, mesmo que elas não sejam executadas (Eagly e Chaiken, 1993). Segundo Klausmeier (1977), as atitudes aprendidas influenciam o comportamento das pessoas que acabam se aproximando ou evitando os pensamentos e as ações em relação ao objeto. Portanto, as atitudes diferem do comportamento, pois este é a manifestação de um estado interno do indivíduo e as atitudes são componentes desse estado. Um aluno com atitudes positivas em relação à matemática poderá demonstrar um comportamento motivado para resolver problemas, por exemplo. Já um aluno com atitudes negativas poderá se recusar a pensar sobre um problema ou até poderá se engajar em tarefas apenas para receber alguma recompensa. Assim, como afirmou Guilford (1954) citado por Brito (1996), as atitudes estão relacionadas à motivação, e isto representa o componente comportamental das atitudes.

Não se pode imaginar alguém aprendendo algo sem estar com um mínimo de interesse na atividade. A motivação pode ser entendida como um fator psicológico que explica como o indivíduo é levado a executar uma atividade qualquer, não apenas iniciando a ação, mas persistindo nela, sem interromper ou mudar o seu curso. A motivação está ligada, entre outros fatores, ao valor atribuído à tarefa e à expectativa em poder realizá-la. (Pintrich e De Groot, 1990).

Uma pessoa poderia estar motivada a iniciar ou manter uma atividade se desse valor a essa atividade. Na escola, um aluno intrinsicamente motivado se empenharia nas tarefas por considerá-las interessantes, por sentir satisfação em realizá-las e por ter oportunidade de desenvolver suas habilidades. Segundo Ryan e Deci (2000), são elementos principais da motivação intrínseca a auto-determinação e a competência; já autores como Csikszentmihalyi e Nakamura (1992), citados por Guimarães (2001), destacam os sentimentos positivos de pessoas envolvidas nas atividades. Em contraste, estaria extrinsicamente motivado, por exemplo, o aluno que esperasse ganhar uma recompensa ao final de uma atividade (uma nota ou um prêmio).

O valor atribuído à atividade também pode influenciar o estabelecimento de metas com certa estabilidade (Weiner, 1985). Assim, um aluno que tenha estabelecido o aprender como meta quer melhorar seus conhecimentos e habilidades, enquanto outro aluno que estabeleceu o desempenho como meta pode estar mais preocupado em parecer como inteligente ou de evitar parecer incapaz.

As crenças que um indivíduo possui acerca de sua eficácia em realizar uma tarefa fazem parte do componente motivacional expectativa, conforme indicaram os estudos de Bandura (1986). Uma baixa crença de auto-eficácia, conforme apontou o estudo de Neves (2002), impede o aluno de iniciar a atividade, assim como também o auto-conceito ou a auto-percepção da competência podem influenciar na realização das tarefas escolares. As experiências de sucesso e fracasso (suas e de seus colegas), as avaliações e incentivos verbais feitos pelos professores e os estados fisiológicos percebidos pelo aluno são fatores que influenciam a crença de auto-eficácia e, como conseqüência, a sua motivação na escola.

As crenças, os valores e as opiniões são muitas vezes confundidos com as atitudes. Para Shirley, Koballa e Simpson (1988), citados por Brito (1996), as crenças estão mais próximas dos componentes cognitivos e as atitudes mais próximas do componente afetivo. Já a opinião é mais afetiva do que a crença e é mais cognitiva do que a atitude.

Klausmeier (1977) diferenciou gosto, atitudes e valores usando a estabilidade como critério. Gosto estaria ligado a algo específico, os valores seriam mais gerais, mais amplos, e abarcariam áreas maiores de experiências, e as atitudes estariam situadas entre os dois. É possível que uma pessoa varie o seu gosto por determinado objeto, menos freqüente seria a mudança de atitudes em relação a ele e, bem menos provável, que os valores da pessoa adulta sejam modificados.

Segundo Eagly e Chaiken (1993), as pessoas freqüentemente localizam suas atitudes dentro de aspectos mais amplos, como as ideologias, que são princípios gerais ou temas que proporcionam uma organização para quadros de atitudes. Os valores parecem ser um dos princípios ou temas que geram tal organização em cujo contexto surgem as atitudes. Assim, valores e outros fatores ideológicos podem fundamentar as atitudes que cientistas sociais denominam simbólicas, contrastando com as atitudes presumivelmente baseadas no interesse pessoal.

O valor faz parte do sistema de crenças de um indivíduo, conforme apontou Rokeach (1972), citado por Silva (2000 a). Com relação à matemática, parece que, de uma forma geral, os alunos reconhecem o valor que essa disciplina tem na vida das pessoas. Em termos de representação social[1], é possível, como fez Silva (2000 b), caracterizar a valorização da matemática em três esferas: uma relativa à utilização na vida (seja no cotidiano das pessoas, seja na atuação profissional), uma relativa ao desempenho escolar individual e a outra ao desenvolvimento do raciocínio. Não há como negar a importância da matemática na sociedade atual, seja na sua utilização em aspectos práticos das atividades do dia-a-dia, seja ao considerá-la como ferramenta para outras ciências. Mas, além dessa esfera de valorização, é interessante notar a importância atribuída ao rendimento escolar em matemática, conforme encontrado em Silva (2000-b). No seu estudo, o desempenho teve relação com o fato de gostar ou não dessa disciplina e também com as marcas positivas ou negativas deixadas por ela. Além disso, o bom desempenho nessa área do conhecimento foi reconhecido como característica de pessoas inteligentes. Os alunos também valorizaram a matemática enquanto propiciadora do desenvolvimento do raciocínio lógico, sendo

---

[1] Representação social é um conjunto organizado de julgamentos, de atitudes e de informações que um determinado grupo social elabora a respeito de um dado objeto. Elas resultam de processo de apropriação da realidade externa e da reconstrução dessa realidade em um sistema simbólico. Grande parte dos estudos sobre representações sociais faz referência ao trabalho de Moscovici (1978) e existem vários trabalhos feitos na área da Psicologia Social e da Educação, alguns relativos à matemática (Abreu,1995; Borja, 1996; Oliveira,1997; Passos, 1995; Santos,1989; Silva, 2000-b).

este um fator reconhecido como importante para a aprendizagem de qualquer conteúdo.

As crenças em relação à matemática *per se* e em relação à auto-competência do indivíduo em lidar com ela além da importância atribuída a esse ramo do conhecimento são conceitos que podem ou não estar diretamente ligados ao gosto pela matemática. É possível encontrar alunos que, apesar de valorizarem a matemática, não gostam muito desta disciplina. Podem existir alunos que gostem da matemática embora não tenham alta crença de auto-eficácia na capacidade de resolução de problemas. Ainda que as atitudes tenham mais estabilidade do que o gostar, estudos mostram que elas podem sofrer modificações no decorrer das séries escolares, conforme apontou Koballa (1998), citado por Silva (2000 a), sendo influenciadas pelos conteúdos ou pelos métodos dos professores.

Vários estudos brasileiros[2] trataram das atitudes dos alunos em relação à matemática. Uma das maneiras de medir as atitudes é utilizar a escala de Aiken (1961) e Aiken e Dreger (1963) citados por Brito (1998), que *trata apenas das atitudes em relação à matemática em si, evitando proposições referentes aos sentimentos dos alunos quanto à atuação do professor, aos tipos de atividades propostos, etc* (Brito, 1998,p.113).

Brito (1998) adaptou e validou uma escala para medir as atitudes em relação à matemática e uma das justificativas para a sua utilização foi que ela permitiria ao professor verificar as atitudes de seus alunos no início do período letivo e, reaplicando o instrumento após a intervenção, verificar se ocorreu mudança nas atitudes em relação a essa disciplina. O uso da escala também ajudaria a verificar eficácia de métodos de ensino, sendo que ela pode ser aplicada a um grande número de estudantes.

---

[2] Muitos desses estudos foram realizados no grupo de pesquisa PSIEM (Psicologia da Educação Matemática) da Faculdade de Educação da Unicamp, e tratam das atitudes dos alunos em relação à matemática (Brito, 1994, 1995, 1996a, 1996b, 1996c, 1996d, 1998; Gonçalez & Brito ,2001, Gonçalez & Brito,1996; Gonçalez, 1995; Jesus, 1999; Jesus&Fini, 2001; Moron, 1998; Moron e Brito (1997) Silva,2001; Utsumi ,2000) e à estatística (Cazorla, 2002; Silva, 2000;Vendramini, 2000).

A escala validada por Brito (1998) trata das atitudes enquanto um fenômeno unidimensional, mas existem autores que defendem o uso de escalas multidimensionais para medir as atitudes ou a ansiedade matemática (Fennema&Sherman, 1976; Michaels&Forsyth, 1977 Richardson&Suinn, 1972; Sandman,1980; citados por Brito, 1998).

Como afirmou Brito (1996), as atitudes desenvolvem-se ao longo dos anos escolares e estão relacionadas a aspectos pontuais como o professor, o ambiente da sala de aula, o método utilizado, a auto-percepção do desempenho etc. Portanto, são vários os aspectos que influenciam as atitudes em relação à matemática, mas quando se trata de medir as atitudes, eles devem ser isolados (e não ignorados). Concorda-se com a autora quando esta afirmou que o fenômeno atitude é unidimensional e uma escala deve medir a direção do sentimento do sujeito com relação à disciplina, e não os sentimentos mais ligados ao professor ou aos métodos de ensino.

Mais uma vez concorda-se com a autora quando esta afirmou que a disciplina matemática é complexa e envolve grande quantidade de temas, exigindo diferentes habilidades do aluno. Quando se toma a geometria como um tema específico da matemática, pode-se supor que existam habilidades específicas que influenciem o gosto por este conteúdo.

Nas escolas públicas estaduais, a geometria é trabalhada como um assunto da matemática e é, em muitos casos, deixada pelos professores para ser tratada ao final do período letivo. Como os alunos enfrentam muitas dificuldades com a aritmética e a álgebra, o conteúdo referente à geometria acaba não sendo trabalhado. Assim, não é raro encontrar alunos do ensino médio que nunca estudaram geometria, conforme apontou Viana (2000), e futuros professores de Matemática com muitas dificuldades nessa área (Pirola, 2000; Pavanello e Andrade, 2002).

Já em grande parte das escolares particulares, a geometria aparece na grade curricular como uma disciplina independente. Nesse contexto, a geometria tem carga horária estabelecida pela escola, professores específicos (muitas vezes o professor de geometria não ensina matemática), aulas específicas (às vezes em salas e carteiras apropriadas), provas, notas em boletins etc. Além de possuir essa especificidade oferecida pela escola, a geometria parece requerer, para seu aprendizado, certas habilidades específicas, dentre elas a habilidade espacial. Experiências com métodos pouco adequados para o ensino desta disciplina, sucessivos fracassos ao desempenhar tarefas que exigem habilidade espacial e baixa crença de auto-eficácia na capacidade de resolução de problemas geométricos são fatores que podem influenciar nas atitudes em relação à geometria.

A revisão de literatura que pôde ser feita não encontrou estudos tratando das atitudes em relação à geometria nem enquanto disciplina específica, nem enquanto conteúdo específico, mas existiam indícios de que os fatores citados poderiam contribuir para que as atitudes em relação à geometria se desenvolvessem de forma diferente das atitudes em relação à matemática.

O presente estudo teve como objetivo buscar relações entre as atitudes em relação à matemática e à geometria, visto que a experiência tem mostrado que vários alunos demonstram sentimentos distintos em relação a essas disciplinas. Buscou-se relacionar as atitudes com os aspectos relativos às habilidades espaciais e também com o desempenho escolar em geometria, sendo que este último parecia ser influenciado pelas variáveis citadas.

CAPÍTULO VIII

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As relações entre habilidade espacial, gênero e rendimento em matemática

A relação entre habilidade espacial e rendimento em matemática tem sido amplamente investigada, sendo que muitas pesquisas sugeriram que a correlação entre estas duas variáveis pode ser específica para o gênero feminino (Becker, 1978 e Weinwer,1984, citados por Friedman, 1995) e outras pesquisas apontaram o mesmo para o gênero masculino (Connor&Serbin 1985, citados por Friedman, 1995).

Tartre (1990), citado por Friedman (1995), por exemplo, concluiu que uma maior habilidade espacial não contribuía para maior desempenho matemático para homens, mas parecia ser um fator importante para mulheres. Shermam (1967) encontrou que a carência de desenvolvimento da habilidade espacial em mulheres poderia causar coincidente carência em outras áreas cognitivas, incluindo habilidade matemática. Enquanto a autora sugeriu que esse resultado estaria ligado a aspectos culturais - pois as mulheres seriam mais incentivadas a atividades verbais que espaciais e mecânicas - outros autores acreditam que é possível que estruturas genéticas inatas produzam maior diferença de habilidade espacial em homens.

Assim, quando há muita evidência em um tópico, e quando tal evidência não é uniforme, uma meta-análise pode determinar tendências gerais e achar variáveis de estudo que explicam a ausência da uniformidade. Com o objetivo de avaliar a força das correlações entre matemática-verbal e matemática-espacial, Friedman (1995) pesquisou 75 trabalhos, entre artigos, teses e dissertações entre 1950 e 1990. Os resultados apontaram que não há evidência convincente que habilidade espacial esteja fortemente correlacionada com rendimento em matemática. Houve influência do tipo de teste espacial (rotação ou visualização) e do fator idade. Foi encontrada correlação verbal-matemática mais forte que correlação espacial-matemática para ambos sexos, sendo que a diferença às vezes parece maior para jovens mulheres.

O autor concluiu que ainda não estava claro como habilidades verbais e espaciais influenciam no rendimento em matemática, pois os resultados eram imprecisos.

A rotação mental de figuras: a transformação de imagens, as diferenças de gênero e a questão cultural

As pesquisas sobre rotação mental podem ser classificadas em três grupos: no primeiro, a questão central dos estudos refere-se ao debate entre imagens proposicionais ou pictóricas; no segundo, são evidenciadas as diferenças de gênero; e no terceiro discute-se a influência de outras variáveis no desempenho de testes.

Admitindo-se que o reconhecimento de figuras congruentes em diferentes orientações envolve alguma forma de transformação mental, pode-se indagar se a imagem que é transformada é proposicional ou pictórica. Por exemplo, para reconhecer duas rotações diferentes de um polígono como congruentes (Figura 8.1), a atividade mental do aluno envolveria uma série de proposições (as propriedades de cada polígono) ou seria uma rotação mental da figura global?

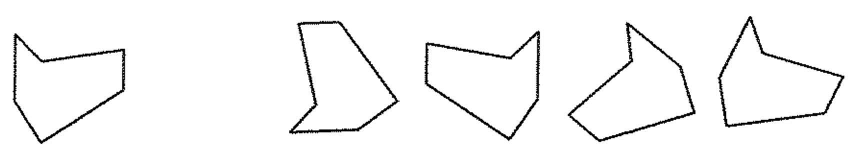


Figura 8.1.Quais polígonos à direita são rotações do polígono à esquerda?

Orton (1997) pesquisou se os alunos reconheceriam duas rotações de uma figura baseados em uma série de proposições ou se girariam a figura mentalmente para igualar à outra. Sua pesquisa foi feita com 300 alunos de 9 a 16 anos. Cada aluno respondeu a um teste com 4 questões de rotação de figuras bidimensionais.

Foram encontrados três estágios de desenvolvimento em termos dos itens de reconhecimento de padrões.

Estágio 1: Nesse estágio o aluno executa as tarefas baseado num modelo de referência; reconhece cópia da figura; descobre figuras interpenetrantes; combina figuras; reconhece reflexão no eixo vertical; reconhece rotação e reflexão em figuras simples.

Estágio 2: Ainda com base em um modelo, o aluno descobre figuras interpenetrantes; combina figura simples em diferentes orientações; realiza rotação e reflexão com figuras mais complexas.

Estagio 3: Sem um modelo, o aluno descobre figuras interpenetradas em composições mais complexas, realiza rotações e reflexões.

As entrevistas individuais mostraram que os sujeitos com freqüência reconheciam padrões, mas careciam de um vocabulário para explicar completamente o que eles percebiam. As questões que envolviam reflexão no eixo vertical foram mais fáceis do que as que envolviam reflexão diagonal. O ângulo de rotação e a complexidade da figura foram importantes fatores adicionais, mas não ficou claro, pelas respostas dos alunos, que tipo de transformação mental aconteceu. O autor afirmou que existiu considerável evidência de que os estudantes tenham se baseado em um modelo de referência, ou seja, que as transformações foram feitas globalmente e, assim, as imagens puderam ser chamadas de pictóricas.

A mesma questão foi levantada por Mcleay e Piggins (1996) utilizando manipulação mental de representações de nós (de cordas) como uma estrutura deformável. Foram sujeitos 21 pessoas com idades entre 11 e 59 anos, com acuidade visual normal. Foi aplicada uma tarefa com 8 questões nas quais era apresentada uma figura com um par de nós em cordas. Os sujeitos tinham que responder se os desenhos eram de um mesmo nó, apenas deformado, ou não. O tempo de resposta foi menor quando os pares não eram do mesmo nó; esse tempo foi maior quando os sujeitos fizeram rotação mental da figura; a simetria de algumas figuras facilitou as respostas. Os autores verificaram que os sujeitos utilizavam estratégias diferentes para decidir se um par de figuras representava ou não o mesmo nó: alguns realizavam rotação mental da figura como um todo e outros atentavam para as partes componentes da figura e movimentavam apenas essas partes. Com isso, os autores identificaram diferenças individuais na manipulação mental de imagens.

Um melhor desempenho dos homens em tarefas que exigiam habilidade espacial foi encontrado em vários trabalhos (Linn & Petersen, 1985; Voyer, Voyer, & Bryden, 1995) sendo que alguns indicaram as características biológicas como explicativas dessas diferenças (Hooven, C.K; Chabris, C.F; Ellison, P.T& Kosslyn,S.M,2000).

Maccoby e Jacklin (1974), citados por Delgado e Prieto (1997), em sua clássica revisão da literatura cientifica, indicaram que o gênero tinha pouca influência na pontuação de testes de raciocínio espacial. No entanto outras pesquisas (Linn&Petersen, 1985; Vandenberg & Kuse, 1978) mostraram que existiam diferenças de gênero mais acentuadas quando os testes eram formados por tarefas de rotação mental em vez de tarefas de visualização espacial e de percepção espacial.

Um exemplo mais recente é o estudo de Delgado e Prieto (1997) que analisou diferenças de gênero em habilidade espacial. Dois testes psicométricos medindo Rotação Mental e Visualização foram aplicados numa representativa amostra de 309 homens e 390 mulheres em seu ultimo ano de escola secundária, com média de idade de 18,3 anos. Foram encontradas relações entre gênero e rotação mental, gênero e visualização e rotação mental e visualização. Mas, quando foram formados subgrupos de sujeitos pertencentes ao primeiro e terceiro quartil, diferenças de gênero foram somente encontradas para os grupos de escores mais altos, isto é, selecionando os alunos com desempenho mais alto, encontrou-se que os homens se saíram melhor que as mulheres e essa diferença foi bem mais acentuada em rotação mental do que em visualização espacial. Para os de baixo desempenho não houve diferenças em rotação mental ou visualização espacial. Os autores sugerem que diferenças de gênero podem surgir de fatores sociais e culturais e que poderiam ser investigados caminhos para dar às mulheres acesso a experiências que treinem sua capacidade visual.

A diferença de gênero quanto à habilidade espacial tem sido explicada por vários autores, sendo que a meta-análise de Baenninger e Newcombe (1989) mostrou que a performance em tarefas espaciais estava relacionada positivamente com a participação de sujeitos em atividades de treino espacial.

Nessa linha de pesquisa, Voyer, Nolan e Voyer(2000) investigaram 344 estudantes de psicologia (198 mulheres e 146 homens), com idades de 18 a 43 anos, com o objetivo de testar a hipótese que fatores ambientais afetavam as diferenças de gênero na performance em tarefas espaciais apenas quando os testes usados eram suscetíveis à influência de tais fatores. Os sujeitos foram submetidos a um teste de rotação mental (MRT), e outro que avalia o nível de água (WLT), e responderam a um questionário sobre qual era sua preferência por brinquedos e por esportes. Os resultados revelaram que os homens superaram as mulheres em ambos os testes, mas sujeitos que tinham preferência por brinquedos que exigiam raciocínio espacial tiveram melhor desempenho que aqueles que não tinham essa preferência. No teste do nível da água houve diferença significativa de gênero apenas com participantes com a preferência de brinquedos não espaciais. Ao contrário, os homens tiveram melhor desempenho em ambos os testes (MRT e WLT) apenas em sujeitos com preferência por esportes espaciais. Os autores concluíram que a preferência por brinquedos, jogos e esportes na infância pode influenciar na habilidade espacial dos adultos e que a performance em testes de raciocínio espacial pode ser afetado por esses fatores. Sugerem que trabalhos futuros possam estabelecer relações casuais entre as variáveis.

Nunez, Corti e Retschitzki (1998) realizaram um estudo sobre o desempenho de testes de rotação mental marcado por diferenças culturais. Três questões motivaram os autores: primeiro eles queriam saber se encontrariam o mesmo tipo de fenômeno descrito nos clássicos estudos feitos nos EUA, isto é, se encontrariam uma relação linear entre ângulo de rotação e tempo de reação, com uma simetria axial a 180º, onde RTs (tempo de reação) alcançaram máximo valor. A segunda questão dizia respeito ao tempo necessário para reação; pensavam que essa variável poderia ser influenciada pela experiência com a mídia eletrônica, especialmente jogos eletrônicos nos quais é essencial ter reações rápidas ao estímulo apresentado nas telas. Assim, esperavam que o tempo gasto pelas crianças da Costa do Marfim (onde tais mídias são relativamente pouco disponíveis) seria maior do que o tempo gasto pelas crianças da Suíça (onde as mídias são muito comuns). Finalmente, queriam estudar a influência do desenvolvimento no tempo de reação, alegando que foram feitos muitos estudos clássicos sobre rotação mental com sujeitos adultos, mas apenas poucos artigos relataram resultados com crianças (Lejeune, 1994; Lejeune e Decker,1994; Marmor,1975, citados por Nunez, Corti e Retschitzki, 1998). Esses estudos mostraram que o tempo utilizado pelas crianças foi muito maior que o tempo utilizado pelos adultos e que era razoável esperar uma diminuição contínua com a idade. Foram sujeitos 151 crianças, sendo 72 da Costa do Marfim (36 meninos e 36 meninas) e 79 de Matran, Suíça (38 meninos e 41 meninas). Os sujeitos da Suíça formaram quatro grupos de idades (8,9,10,12 anos) e os sujeitos da Costa do Marfim três grupos (9,11 e 13). Os autores afirmaram que, para conhecer melhor o mecanismo existente por trás da rotação mental, seria necessário estudar respostas incorretas com mais profundidade.

Uma coleção de 44 cartões foi apresentada seqüencialmente para cada sujeito, sendo que cada cartaz continha um par de figuras. Ao serem indagados se o desenho correspondia a uma rotação verdadeira ou não, os sujeitos deveriam pressionar um botão indicando "sim" ou "não" tão rápido quanto pudessem.

Comparando o tempo gasto pelos sujeitos de ambos os países, os autores encontraram uma similaridade nas curvas do RTs nos dois países, mas a média dos RTs foi muito maior para sujeitos da Costa do Marfim que para sujeitos da Suíça. Muitos fatores poderiam explicar essa diferença e um deles se relaciona com a questão da relevância cultural que é dada à rapidez da resposta. Uma cultura valoriza o desempenho rápido, enquanto que na outra cultura isso não acontece, e tal fato poderia ter afetado o resultado das crianças. Além disso, os sujeitos suíços estariam mais familiarizados com computadores e dispositivos eletrônicos como videogames. Os autores observaram que apenas no grupo suíço o RTs diminuiu com a idade e esse resultado pode ter sido influenciado pela expectativa dos sujeitos suíços em realizar as tarefas melhor e mais rapidamente, enquanto que tal característica não era encontrada nos sujeitos da Costa do Marfim. Os autores relataram que as salas de aula neste país são heterogêneas quanto às idades dos alunos, não existindo a relação entre desempenho e idade.

As estratégias de solução de problemas geométricos

De acordo com Lester (1983), as pesquisas sobre solução de problemas matemáticos em geral se concentram em três questões básicas: (1) o que o indivíduo faz, corretamente ou incorretamente, eficientemente ou ineficientemente; (2) o que o indivíduo deveria fazer e (3) como os indivíduos poderiam avançar no processo de solução de problemas.

A revisão da literatura que pôde ser feita identificou alguns tipos de estratégias usadas pelos estudantes e também algumas dificuldades que eles encontram quando solucionam tarefas geométricas.

Bishop (1983), ao estudar a habilidade espacial para a geometria, enfocou o processo de aprendizagem escolar e considerou duas habilidades diferentes: a habilidade de interpretação da informação figural (IIF) e a habilidade de processamento visual (PV).

A primeira se refere à interpretação das informações que estão presentes na própria figura. Interpretar o problema enunciado na Figura 8.2 talvez fosse um exemplo dessa habilidade, pois tanto as informações como a pergunta do problema aparecem na forma de desenho. Ao aluno caberia interpretar o desenho, concluir que se tratam de dois ângulos suplementares e calcular a medida pedida (180º-30º=150º).

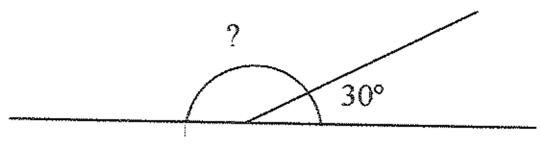


Figura 8.2. Calcular a medida do ângulo indicado.

Já a habilidade do processamento visual (PV) permite a representação de uma informação não figural em termos visuais. Relaciona-se também com a capacidade de manipular mentalmente as imagens visuais. Essa habilidade contribuiria para resolver um problema cuja informação fosse dada tanto em termos verbais, como por meio de desenhos. Um possível exemplo, em termos verbais, seria o enunciado: "calcule o volume do sólido obtido pela rotação de um quadrado com 4 cm de lado, em torno de um eixo que coincide com um de seus lados". O mesmo problema poderia apresentar as informações por meio de desenhos. (Figura 8.3). Nas duas situações, o aluno deveria formar a imagem do cilindro de raio 4cm e altura 4cm, podendo então calcular seu volume (igual a 64π cm^3).

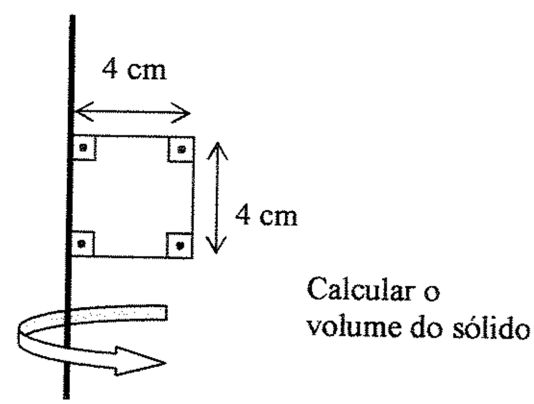


Figura 8.3. Problema com informações por meio de desenhos.

O estudo de Gorgorió (1998) ampliou o conceito de habilidade do processamento visual (PV) para habilidade do processamento espacial (PE) indicando que o sujeito não usa apenas processos visuais para solucionar problemas. Assim, o autor definiu habilidade de processamento espacial (PE) como sendo a habilidade para realizar combinações de operações mentais necessárias para solucionar uma tarefa espacial. Isso inclui não apenas a habilidade de formar imagens de objetos espaciais, relações e transformações e representá-las visualmente, mas também a habilidade de representá-las verbalmente. Além disso, inclui não apenas a habilidade de manipular as imagens visuais de fatos espaciais, mas também a habilidade de solucionar as tarefas usando processos que não são somente visuais.

O autor apresentou uma análise do funcionamento e da eficácia de diferentes tipos de estratégias usadas por alunos na solução de problemas de rotação mental. Seu estudo tratou dessas diferenças como função das características da tarefa e não como características individuais. O autor advertiu que há duas maneiras diferentes de observar as várias habilidades matemáticas de uma pessoa. Uma das maneiras é considerar o nível de realização em uma tarefa dada, que tenha algumas características pré- determinadas. A segunda maneira é considerar os traços, as características cognitivas individuais que facilitam os processos de solução daqueles testes.

Foram sujeitos da pesquisa vinte e quatro estudantes de doze a dezesseis anos que foram solicitados a executar nove tarefas geométricas que requeriam rotação mental de figuras planas e espaciais. Os dados qualitativos foram obtidos através de entrevistas clínicas. O objetivo principal da pesquisa foi investigar como as características da tarefa influenciam as estratégias dos estudantes e se havia uma relação entre o desempenho e as estratégias usadas durante o processo de solução. Além disso, foram comparadas as estratégias e o desempenho de meninos e meninas de diferentes faixas etárias.

Uma estratégia de processamento foi caracterizada como visual quando, a partir da explicação e observação do aluno, podia ser inferido que o sujeito havia usado imagens visuais como uma parte essencial do método de solução. Uma estratégia não visual era aquela na qual o sujeito deixava explicito que estava usando um argumento e que não havia contado com imagens visuais ao resolver a tarefa. As estratégias de abordagem foram caracterizadas como global ou parcial de acordo com o foco de atenção da estratégia mental acerca do objeto geométrico. Considerava-se que o estudante estava usando a abordagem global quando a estratégia cognitiva era focada no objeto considerado como um todo; a abordagem era tida como parcial quando a estratégia cognitiva era focada em apenas algumas partes do objeto.

A ação requerida, isto é, a ação a ser feita pelo sujeito com objetivo de resolver a tarefa, foi classificada em dois tipos: ação relativa à interpretação e ação relativa à construção. A ação requerida foi considerada de interpretação quando o estudante teve que obter significado ou obter informação de um objeto ou de uma representação. Uma tarefa era considerada de interpretação quando ela exigia que o estudante reagisse diante de uma ação geométrica apresentada como acabada. Por exemplo, itens de múltipla escolha, nos quais o sujeito era solicitado a selecionar o desenho que representasse o resultado de uma certa transformação geométrica, eram consideradas tarefas de interpretação. Já a ação requerida foi considerada como de construção quando o estudante necessitava produzir um novo objeto, construindo-o ou representando-o. Por exemplo, dado o objeto inicial, o estudante era solicitado a chegar ao objeto final, o que exigia que ele executasse mentalmente a ação geométrica para gerar o novo objeto.

Os dados mostraram que nas estratégias de processamento visuais os sujeitos imaginaram um modelo real para comparar desenhos falsos. Entre as estratégias não visuais foram destacadas as estratégias geométricas, nas quais foram usados fatos relacionados a propriedades de rotações de 180º, simetria, e congruência. As distinções entre as estratégias de processamento visuais e não visuais foram obtidas dependendo das características da tarefa. A ocorrência de um dos tipos de estratégias de processamento dependeu da complexidade da tarefa e da ação requerida. Quando a ação requerida era de interpretação, os sujeitos tenderam a usar estratégias de processamento visuais quando o objeto usado era simples e não visuais quando o mesmo era complexo. Quando a ação requerida era de construção e o objeto era complexo, os sujeitos tenderam a usar as estratégias de processamento visuais; quando o objeto era simples, os sujeitos tenderam a usar as estratégias não visuais de processamento.

Foi verificado que as características da tarefa influenciaram as estratégias, sendo evidenciados o contexto (tendo ou não um significado real), a formulação da tarefa, a ação requerida, a similaridade entre objetos envolvidos na tarefa e sua complexidade. O autor concluiu que a elaboração das estratégias pareceu ser mais influenciada pelas características da tarefa que por habilidades espaciais ou estilos cognitivos. Assim, a pesquisa demonstrou que a elaboração de estratégias é útil para explicar os processos de solução dos alunos em tarefas de geometria.

O autor acrescentou que eram necessárias mais pesquisas que estudassem a evidência que estratégias visuais e não visuais são distintas e que essa diferença tem significância teórica e prática.

A representação externa na solução de problemas em geometria

Os problemas de geometria encontrados nos livros didáticos e nas questões de vestibulares em geral trazem a informação apresentada na forma verbal, numérica, algébrica e/ou pictórica. Na maioria dos casos, as soluções pedidas devem ser apresentadas na forma numérica e/ou algébrica e em poucas situações é solicitada uma solução pictórica, a menos que a questão seja específica de construção geométrica com régua e compasso[1].

Para resolver um problema de geometria o aluno pode ou não usar uma representação externa. Essa representação externa pode ser um algoritmo de cálculo aritmético, uma equação, uma expressão algébrica, um desenho, um diagrama ou outra forma qualquer gráfica que traduza o seu raciocínio.

Levando-se em consideração a interpretação e a solução do problema, duas questões podem ser levantadas. Uma diz respeito aos processos cognitivos envolvidos na interpretação que o aluno faz da representação que é apresentada em um problema. A outra é sobre os processos envolvidos na construção das suas próprias representações externas, sendo estas utilizadas para encaminhar

---

[1] Alguns vestibulares incluem questões de construção com régua e compasso, como é o caso da 2ª fase da FUVEST para a área de exatas.

seu raciocínio na solução[2]. Estudos mais recentes tratam de explorar as questões relacionadas às diferenças entre seleção, construção e uso das próprias representações externas de uma pessoa e o uso de representações já apresentadas em um problema (Cox, 1999).

Nas aulas de geometria, a experiência tem mostrado que o aluno produz representações externas pictóricas muitas vezes influenciado pelas representações que o professor costuma externalizar na lousa enquanto soluciona os problemas para a classe. Dificilmente suas representações são valorizadas enquanto instrumento de análise dos processos cognitivos envolvidos na solução do problema.

As representações externas podem ser produzidas para comunicação com os outros ou para uso exclusivamente privativo. As representações socializadas necessitam ser mais ricamente detalhadas, enquanto as de uso próprio podem ser menos elaboradas, sendo apenas parcialmente externalizadas. Como foi verificado por Zhang (1977), a construção da representação externa bem elaborada para uso próprio só é feita se o custo associado com o processo de externalização for mais importante, para o sujeito, do que os benefícios do uso da representação. Não é por acaso, então, a dificuldade em analisar as representações externas de um aluno nas situações normais de sala de aula - seja em exercícios, seja em provas – já que elas são construídas para uso próprio e podem não ser precisas ou de fácil interpretação.

Propriedades das representações externas

De acordo com Cox (1999), pode-se afirmar que representações externas são instrumentos de ajuda úteis para o raciocínio porque elas possuem efeitos perceptuais que podem ser explorados. As representações pictóricas

[2] Há vários estudos envolvendo tanto a primeira (Mayer, 1976; Newstead, 1989, Zhan, 1997) como a segunda questão (Schwartz, 1971, Greene, 1989, Cox, 1997 citados por Cox, 1999).

provavelmente envolvem um componente viso-espacial que faz parte da memória de trabalho[3]; elas precisam ser capazes de representar a informação do problema e também podem facilitar a mudança de um modo de raciocínio (Koedinger e Anderson, 1990, citados por Cox, 1999). Segundo Cox (1996) existem dois tipos de mudança das representações que por sua vez afetam as linhas de raciocínio. Uma mudança é chamada de "sensata", quando há seleção e exploração das propriedades mais expressivas de cada representação. Uma mudança de representação é chamada de "sofrível", quando o sujeito abandona a construção errada ou mal construída e tenta alguma coisa diferente.

Autores como Anderson e Helstrup (1993) e também Reisberg (1987), citado por Cox (1999), investigaram o efeito da imagem mental, com ou sem um desenho que atuasse como suporte dessa imagem, na solução de problemas. Usaram o termo "colaboração do perceptual" para descrever qual seria o efeito facilitador das representações pictóricas sobre a síntese de novas figuras a partir de figuras mais simples. Eles concluíram que parece que é a imagem mental a fonte inicial da descoberta e da síntese que o sujeito faz, mas o desenho parece ser útil na produção e refinamento do modelo. Em outras palavras, o processo de externalização pode facilitar a solução de problemas, pois ajuda a refinar e distinguir as imagens mentais ambíguas e facilita a transferência das informações complexas entre subsistemas cognitivos, coisa que talvez não fosse possível internamente.

Cox (1999) estudou as representações que os sujeitos usaram na solução de problemas, tendo como base os estudos feitos anteriormente por ele e seus colaboradores (Cox e Brna, 1995; Cox, Stenning e Oberlander, 1995; e Cox, 1996, citados por Cox, 1999). A análise dos dados dessas pesquisas mostrou que os sujeitos diferiam na maneira de externalizar seu raciocínio. Alguns sujeitos produziam representações parciais, as quais pareciam funcionar principalmente

---

[3] A memória de trabalho (ou memória ativa) é o conhecimento ativado disponível para o processamento cognitivo. De acordo com os teóricos da perspectiva não – tradicional de memória, a memória de trabalho é aquela parte da memória de longo prazo que abrange todo o conhecimento de fatos e de procedimentos que tenha sido recentemente ativado na memória, inclusive a breve e transitória memória de curto prazo e seus conteúdos. (Sternberg, 2000).

como ajuda de memória; outros sujeitos construíam representações bastante compreensíveis e pareciam se comprometer com o modelo de raciocínio no qual elas tinham função central.

A externalização de representações pode ajudar na solução de problemas porque pode reordenar a informação e planejar um limite de modelos possíveis, fazendo com que tornem explícitas as informações que estão ausentes ou implícitas.

Cox (1999) resumiu algumas ações que podem ser melhoradas mediante a construção de representações externas:

- Traduzir e transformar informação de um tipo de representação para outro
- Explorar componentes viso-espaciais da memória de trabalho
- Reordenar informação em caminhos úteis
- Direcionar atenção para partes que não têm solução num problema
- Organizar informações espacialmente
- Manter a linha de raciocínio em um problema
- Fornecer assistência perceptual
- Transferir informação entre subsistemas cognitivos
- Alterar o que é recordado
- Facilitar a dedução do movimento (animação mental)
- Mudar o modo de raciocínio do sujeito
- Refinar e tornar as imagens mentais não ambíguas

O autor concluiu que embora os recursos tecnológicos possam fornecer imagens variadas e sofisticadas (como representações tridimensionais com animação na tela do computador), o estudante, na maioria das vezes, ainda conta com lápis e papel para externalizar suas representações. Ele precisa ter habilidade para interpretar aquelas representações, para construir as suas próprias, para desenvolver e comunicar suas idéias. Com o objetivo de conhecer melhor essa habilidade, o autor sugere que sejam feitos mais estudos sobre as formas de representação externas usadas por alunos na solução de problemas.

A contagem de cubos: o estudo de Battista (1996)

Uma tarefa aparentemente simples de contar o número de cubos em um arranjo pode contar com diferentes estratégias. Battista (1996) forneceu uma descrição teórica das estratégias de solução e dos erros cometidos por alunos quando são solicitados a enumerar os cubos em arranjos tridimensionais.

O estudo de Battista (1996) teve como sujeitos 123 alunos do ensino médio que foram solicitados a descrever os processos utilizados na contagem dos cubos. A partir dos resultados, os alunos foram agrupados nas seguintes categorias:

Categoria A: o aluno conceituou a coleção de cubos como camadas, realizando os seguintes processos:

1.Multiplicando camadas: o aluno calculou ou contou o número de cubos em uma camada (vertical ou horizontal) e multiplicou pelo número de camadas

2.Somando camadas: o aluno calculou o número de cubos em uma camada (vertical ou horizontal) e usou adição ou pulou contagem para obter o total.

3.Contagem de sub-unidades das camadas: a contagem do aluno foi organizada em camadas, mas ele não organizou a contagem, contou unidades de cubos que estavam perto, que estavam ao lado e pulou algumas unidades.

Categoria B. O aluno conceituou a coleção de cubos como espaço-cheio, mas não utilizou camadas:

1.coluna/fileira: o aluno contou o número de cubos em uma fileira ou coluna e, apontando para sucessivas linhas ou colunas, contou para obter o total.

2.contando sub-unidades de colunas ou fileiras: a contagem foi organizada por colunas ou fileiras, mas o aluno contou por grupo de unidades.

3.Contagem sistemática: o aluno contou cubos sistematicamente, tentando contar os cubos internos e externos (contou os cubos em todas as faces de fora, e então tentou determinar quantos havia no centro).

4.Contagem não sistematizada; o aluno contou cubos ao acaso, freqüentemente omitindo ou dobrando a contagem de cubos, mas claramente tentou calcular o interior do cubo

Categoria C. O aluno conceituou a coleção de cubos em termos de suas faces:

1. Contagem de subgrupos de cubos visíveis
2. Contagem de todos os cubos de fora
3. Contagem de cubos exteriores
4. Contagem dos cubos frontais exteriormente
5. Contagem de cubos de fora, mas não organizados por faces.

Categoria D. O aluno usou a fórmula LxCxA.

Os autores definiram a estruturação espacial como o ato mental de construir a organização de objetos, considerando que esse conceito é importante para o entendimento das estratégias que os alunos usam para enumerar cubos tridimensionais. O processo de estruturação espacial incluiria o estabelecimento de unidades, o estabelecimento de relações entre unidades e o reconhecimento de um subgrupo de objetos (se for repetido) como um gerador da coleção toda. O indivíduo, portanto, não "leria" uma estrutura a partir de objetos, mas, em vez disso, criaria uma estrutura como um resultado de suas ações mentais envolvendo os objetos.

A estruturação espacial, baseada na ação, é consistente com a teoria Piagetiana que postulou que a reconstrução de figuras como imagens visuais não é apenas uma questão de isolar várias qualidades perceptuais, não é uma questão de extrair figuras a partir de objetos sem agitação. Baseado nesta teoria, Battista (1996) considerou que a reconstrução de figuras repousava sobre processos ativos de colocar em relações e, portanto, implicava que a abstração era baseada nas ações do indivíduo e acontecia sobre coordenações graduais refletidas.

A planificação de figuras espaciais e o desenvolvimento do espaço representativo

Em uma pesquisa anterior (Viana, 2000) com 377 alunos do curso CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério), foram analisados os desenhos de planificação das figuras espaciais mais comuns, como cubo, pirâmide, prisma, cilindro e cone. Foi possível analisar o avanço na qualidade das representações dos alunos do grupo estudado com base nos estágios observados por Piaget e Inhelder (1993) ao propor tarefa parecida aos seus sujeitos.

Os desenhos foram classificados em três categorias: representações fracas, intermediárias e boas. As figuras 8.4, 8.5 e 8.6 ilustram as três categorias citadas para algumas figuras.

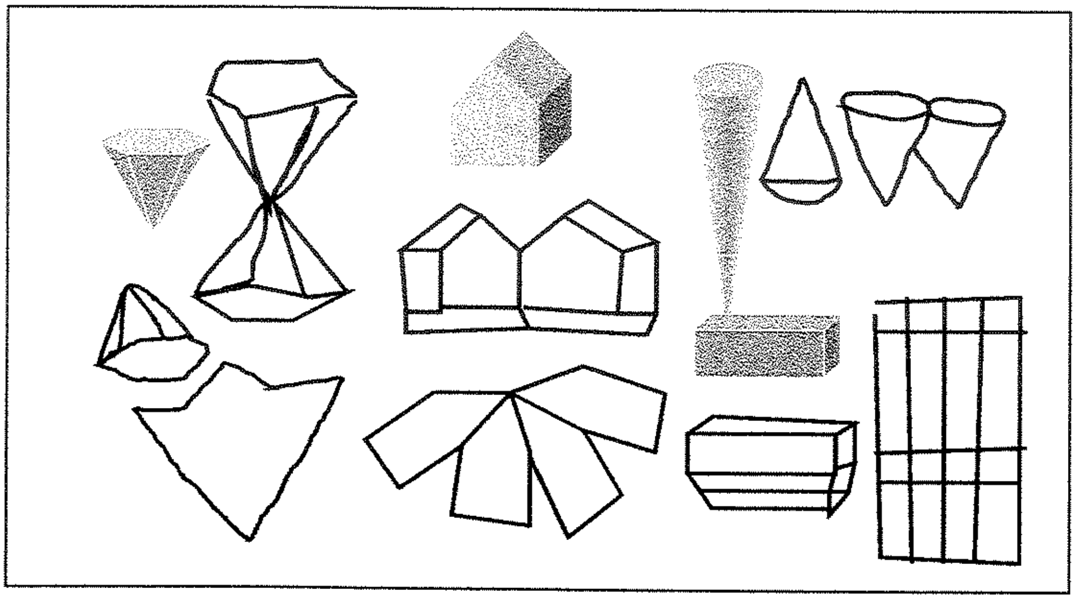


Figura 8.4. Representações fracas

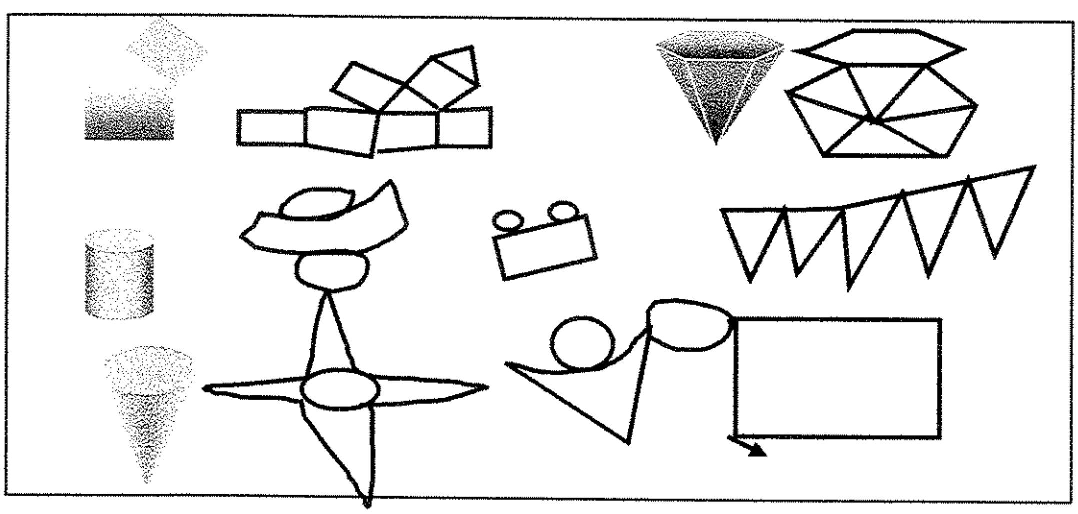


Figura 8.5. Representações regulares.

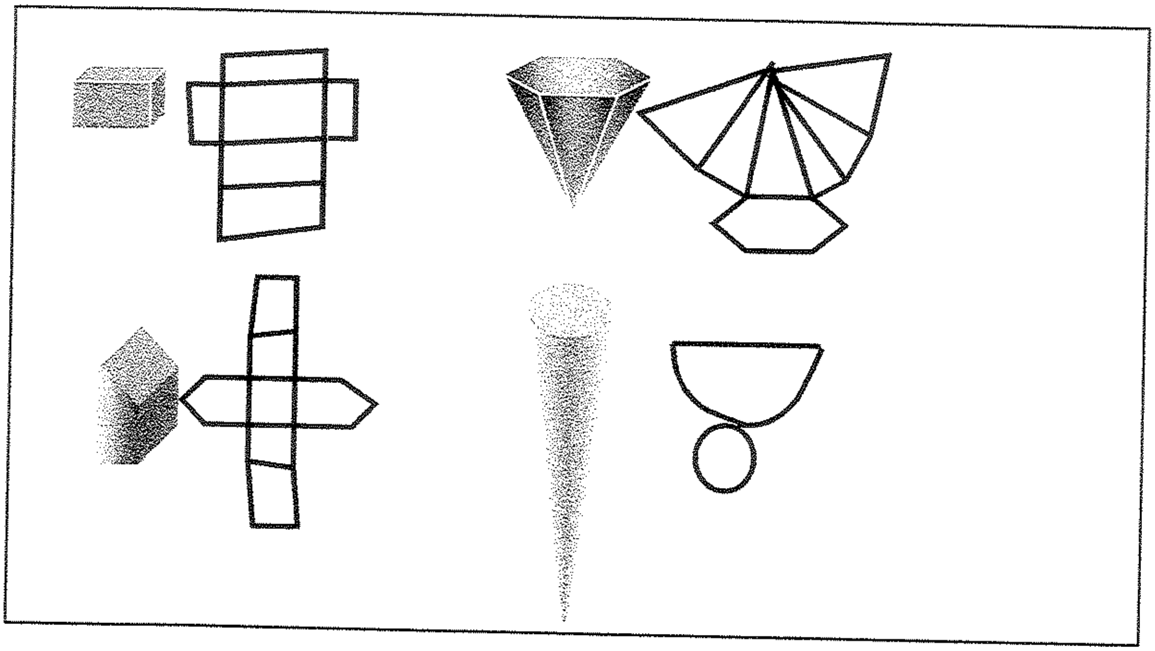


Figura 8.6. Representações boas.

Na primeira categoria foram classificados os desenhos dos alunos que pareciam confundir o desenho da figura total, em perspectiva, com o desenho das faces (no caso dos poliedros) ou das superfícies (no caso do cilindro e cone). Três situações puderam ser verificadas: o aluno manteve a imagem da figura tridimensional na representação, representou dois ou três pontos de vista apenas ou não teve controle sobre os diversos pontos de vista do objeto e exagerou no número de faces. Assim, as representações fracas corresponderiam ao estágio definido por Piaget como aquele onde estaria presente uma indiferenciação parcial dos pontos de vista. O "procedimento gráfico da mistura dos pontos de vista", conforme definido por Piaget e Inhelder (1993) seria ainda uma representação topológica, visando o objeto em si mesmo, sem coordenação euclidiana ou projetiva.

Na segunda categoria, as faces dos poliedros foram desenhadas, porém eram representadas de forma não organizada, ou incompleta, ou com erros acentuados de formas e medidas. As superfícies laterais dos cilindros e cones pareciam ter sido percebidas, mas o aluno não conseguia decidir quais as formas convenientes, isto é, retângulo e setor, respectivamente. As representações intermediárias pareciam corresponder ao início do estágio caracterizado pela compreensão progressiva da operação de desenvolvimento (para o cilindro e cone) e de rebatimento (para os poliedros). O sujeito, além de figurar a ação de desdobrar – como um esboço do próprio movimento – começou a coordenar os pontos de vista.

Esse início de coordenação dos pontos de vista foi marcado por dois tipos de reação que puderam ser observados. No caso do cilindro e do cone, o primeiro tipo – uma forma mais estática – seria a representação de uma ou mais fases descontínuas do desenvolvimento, sem previsão, em seu conjunto, do resultado das ações, como se o sujeito não pudesse segui-las em pensamento. No caso dos poliedros esse primeiro tipo foi verificado quando o aluno fez o rebatimento incompleto de algumas faces.

O segundo tipo de relações – mais dinâmico – consistiu em representar o desenvolvimento do cilindro ou cone por uma única figura, mas de forma incompleta, como se a ação de desdobramento permanecesse inacabada. No caso dos poliedros, algumas faces apareceram ainda em perspectiva, como se a figura estivesse entreaberta.

Na terceira categoria, mesmo apresentando algumas falhas, as planificações foram esboçadas corretamente.

No trabalho foi discutido que a percepção de figuras geométricas espaciais é sempre relativa a um ponto de vista, enquanto que a representação implica na necessidade da tomada de consciência, da diferenciação e coordenação desse ponto de vista com outros.

Segundo Piaget e Inhelder (1993) a representação chamada de projetiva – que foi observada nas planificações – não sendo um simples decalque da percepção correspondente, supõe a intervenção de ações propriamente ditas. As imagens dessas ações constituem a imitação interiorizada e, quando a regulação completa das ações atinge o nível das composições reversíveis, então as representações podem ser chamadas de projetivas operatórias. As ações interiorizadas dizem respeito não somente ao objeto ou ao deslocamento, mas são relativas ao próprio sujeito e consistem em ligar uns aos outros os diversos pontos de vista e fazê-los corresponder a esse ponto de vista único que é o plano da planificação.

Os desenhos dos alunos classificados nas duas primeiras categorias sugeriram que os sujeitos estavam em um processo de transição entre a ação e a operação. A imagem parecia não antecipar as ações, pois estas não estariam coordenadas entre si e, portanto, não seriam operações. A operação é um sistema de ações coordenadas entre si de modo transitivo e reversível. No caso da planificação, a representação teria caráter operatório se fosse resultado de uma coordenação de conjunto dos múltiplos pontos de vista projetivos possíveis sobre o objeto em questão e, correlativamente, uma estruturação euclidiana do espaço segundo um sistema de coordenadas.

Os desenhos da terceira categoria pareciam indicar a natureza operatória das relações projetivas.

Os resultados finais da pesquisa mostraram que houve dificuldades diferenciadas em cada figura. O paralelepípedo foi planificado corretamente por 53% dos alunos, o cilindro por 17%, o prisma e a pirâmide por 14% e apenas 6% dos alunos planificaram o cone. Concluiu-se que faltaram experiências anteriores com as formas geométricas espaciais que deveriam ser objeto de estudo das primeiras séries do ensino fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997).

Outra pesquisa realizada com alunos de curso de formação de professores foi o trabalho de Cohen (2003) sobre planificação de figuras. Foram sujeitos 43 alunos de escola de formação de professores e 78 professores de escola de educação infantil, tendo sido aplicado um instrumento que solicitava a planificação de cilindros e cones. O instrumento foi aplicado em dois momentos: antes e depois da manipulação de objetos na forma de cilindro e cone. Os erros encontrados nos desenhos de planificação puderam ser classificados em cinco tipos: (1) confusão entre o desenho em perspectiva e a planificação; (2) alinhamento do círculo e a superfície lateral; (3) erro na superfície lateral; (4) erro na posição das partes e (5) outros erros. Após a manipulação com o material, obteve uma significativa diminuição nos erros. Apesar de adultos, os sujeitos fizeram desenhos semelhantes àqueles feitos por crianças no período operatório concreto, segundo Piaget. A autora concluiu que os desenhos sugeriam que muitos sujeitos não representavam mentalmente o espaço projetivo naquelas situações, pois faltaram experiências concretas com o material.

Tomando como referencial a teoria piajetiana do desenvolvimento cognitivo, vários estudos brasileiros ajudaram a diferenciar as relações topológicas, projetivas e euclidianas necessárias para a criança construir o espaço representativo.

Dentre eles destaca-se o trabalho de Kobayashi (2003), que analisou as representações espaciais geométricas infanto-juvenis de quinze alunos de duas escolas públicas, com idades entre sete e doze anos. As situações propostas foram denominadas como geometria vivida (percursos conhecidos e espaços interiores à escola) e geometria axiomática (entes geométricos: ponto, reta, formas planas e tridimensionais). Foram encontradas as mesmas características nas representações dos sujeitos, tanto as que se referiam à geometria vivida como a axiomática. O grupo mais jovem utilizou predominantemente as relações topológicas. O grupo intermediário mostrou o uso sistemático das relações projetivas e euclidianas, embora tenha apresentado dificuldades em coordenar os pontos de vista. Já o grupo de maior faixa etária utilizou adequadamente as relações projetivas e euclidianas, tanto nas representações dos percursos e espaços conhecidos como nas representações dos entes geométricos. A pesquisadora realça a necessidade do professor conhecer o desenvolvimento cognitivo dos seus alunos em relação à construção do espaço representativo para assim desenvolver uma prática pedagógica mais eficiente.

A projeção de figuras

Numa tarefa de projeção, é necessário fornecer ao sujeito três informações: uma figura tridimensional, um plano e uma direção para a projeção. O sujeito deve imaginar o contorno da projeção, isto é, a sombra produzida no plano pela luz que corre naquela direção em volta do objeto opaco. O limite entre as linhas que interceptam o objeto e as linhas que não o fazem define a superfície que deverá ser representada no plano da projeção. Figura 8.7).

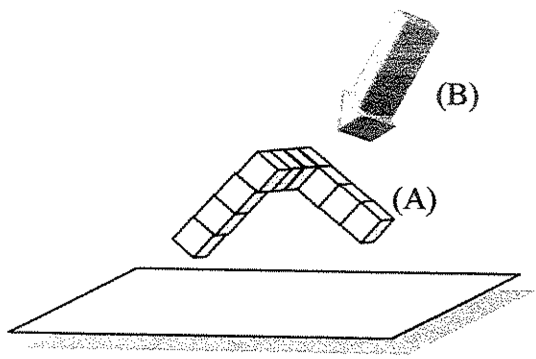


Figura 8.7. São dados a figura tridimensional (A), a direção da projeção (B) e o plano (C) e pede-se o desenho da projeção no plano.

Pani e seus colaboradores (1996) investigaram porque, em algumas circunstâncias, as pessoas prontamente "vêem" uma solução e em outras é tão difícil imaginar a projeção.

Foram sujeitos 20 estudantes universitários que responderam a tarefas que requeriam transformações projetivas. Foram fornecidos dois tipos de objetos (figuras de Shepard[4] e poliedros regulares) com três tipos de orientação (alinhado, parcialmente oblíquo, completamente oblíquo) e planos no qual deveriam ser desenhadas distintas sombras (projeções).

Os autores encontraram que, para uma base retilínea, a imaginação de transformações projetivas foi completamente bem sucedida quando os objetos

[4] Essas figuras formadas por cubinhos foram usadas nos estudos clássicos sobre rotação mental na década de setenta (Shepard e Meltzer, 1971)

foram alinhados com a direção da projeção. Quando o objeto foi tomado mais oblíquo que a projeção, o desempenho foi pior. Quando o objeto foi moderadamente alinhado com a projeção, o desempenho dependeu da orientação do objeto e da orientação da projeção do meio. Sugere-se que a imaginação da projeção e da rotação é um tipo de solução de problema no qual as estruturas espaciais são organizadas em relação às propriedades dadas inicialmente dos objetos e transformações. Quando há alinhamento entre os vários componentes estruturais, o processo de imaginação funciona eficientemente. Sem tal alinhamento, pessoas não - especialistas freqüentemente não conseguem formar as imagens mentais das projeções.

Estratégias e processos cognitivos empregados na aprendizagem de representações espaciais e a teoria da carga cognitiva

Pesquisas recentes tentaram explicar quais os processos mentais requeridos na construção de significados a partir de informações gráficas. Nas tarefas nas quais era fornecido ao sujeito um desenho ortográfico, ele necessitava decodificar a informação a partir de três visões, sintetizar e construir uma representação mental tridimensional do objeto. Quando era fornecido um desenho isométrico, isto é, um desenho em perspectiva tridimensional, sendo que certos elementos do objeto estavam obscuros, o sujeito precisava inspecionar a imagem para entender a natureza do objeto (Just e Carpenter, 1985; Carpenter e Just, 1986; Keenan e Moore, 1979, citados por Pillay, 1998). A figura 8.8. ilustra os dois casos.

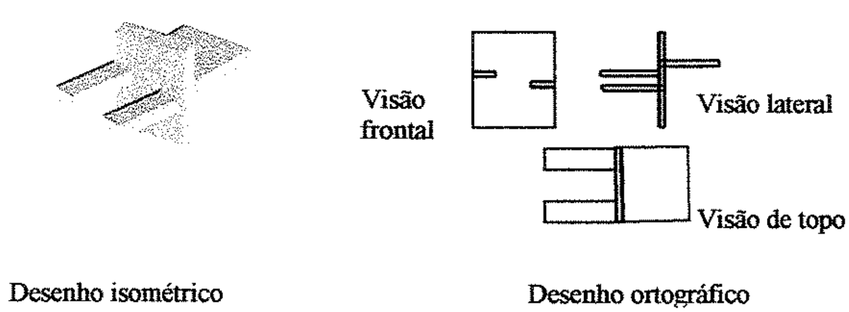


Figura 8.8. Tipos de representação de objetos tridimensionais.

O efeito da carga cognitiva em tarefas está presente em alguns estudos que trataram das relações entre aprendizagem e solução de problemas. Sweller (1993) e Haldford (1993), citados por Pillay (1998), argumentaram que, dependendo da tarefa, a carga cognitiva imposta pela informação poderia esgotar os recursos cognitivos do sujeito de tal modo a impedi-lo de fazer conexões com o conhecimento existente e de desenvolver esquemas necessários para aprendizagem. Haldford (1993), citado por Pillay (1998), definiu recursos cognitivos como a habilidade cognitiva do sujeito para lidar com a tarefa, e carga cognitiva como a demanda feita por uma tarefa quanto ao esforço mental individual para a conclusão bem sucedida daquela tarefa. Na instrução, a carga cognitiva poderia incorrer ou pela complexidade inerente do problema ou pelo formato da instrução.

Chandler e Sweler (1992), citados por Pillay (1998), encontraram que formatos instrucionais nos quais a informação era apresentada como uma combinação de texto e diagrama exigiram que os estudantes dividissem sua atenção entre duas fontes de informação e integrassem-nas para então prosseguir com a tarefa dada. Essa atividade de integração não era essencial para a aprendizagem de como resolver a tarefa, mas era necessária para compreensão do problema. Assim, recursos cognitivos eram dirigidos para o processo de integração e não ficavam disponíveis para aprendizagem da tarefa. Halford (1993) citado por Pillay (1998), usando duas tarefas de solução de problemas matemáticos encontrou que vários elementos de uma tarefa (tais como número de informações, número de passos e etapas do problema), que deviam ser mantidos na memória enquanto outros aspectos da tarefa eram atendidos, também impuseram cargas adicionais que afetaram a aprendizagem.

Diferentes formatos instrucionais afetam diferentes demandas cognitivas. Sweller (1988) argumentou que a maneira como os recursos cognitivos eram concentrados e usados durante a aprendizagem influenciava os resultados da aprendizagem. A atenção precisava ser direcionada para a aprendizagem de conceitos essenciais e não para processos suplementares irrelevantes tais como pesquisa, integração ou reorganização. Assim, de acordo com o autor, a conceitos essenciais e não para processos suplementares irrelevantes tais como pesquisa, integração ou reorganização. Assim, de acordo com o autor, a capacidade cognitiva de todo indivíduo é limitada e para facilitar que recursos suficientes sejam disponíveis para aprendizagem, as demandas cognitivas suplementares precisariam ser reduzidas.

De acordo com Cooper (1988) citado por Pillay (1998), o entendimento de representações tridimensionais envolve atividades cognitivas complexas tais como a integração da informação a partir de variadas fontes, construção de significados de elementos obscuros na informação gráfica, construção e manutenção de representações tridimensionais dos componentes do objeto completo, recuperação ou resgate de esquemas relevantes, decodificação e construção da informação a partir de uma representação espacial dada e finalmente, transformações dessas representações. Essas atividades são aplicadas dependendo da informação dada e do conhecimento anterior do sujeito. Há três processos pelos quais é possível entender uma informação espacial: a) pode-se recuperar uma representação mental prévia e modificá-la; b) construir uma representação completamente nova; c) decodificar uma representação externa em uma representação interna. Esses processos podem ser usados individualmente ou em combinações.

Pillay (1994) investigou os efeitos da carga cognitiva na aprendizagem de desenhos ortográficos tendo como sujeitos trinta e nove alunos com idade média de quinze anos. Três experimentos foram utilizados para verificar os efeitos de três tipos de material na aprendizagem de projeção ortográfica. Foram analisados o tempo gasto e o número de erros dos sujeitos nas tarefas propostas. Os resultados mostraram que os sujeitos melhoravam sua performance quando não tinham necessidade de construir representações mentais tridimensionais de estágios intermediários na trajetória que transformava desenhos ortográficos em uma representação em perspectiva. Isso significa que, ao se reduzir a carga cognitiva adicional, recursos cognitivos eram liberados para a aprendizagem.

Em trabalho mais recente, Pillay (1998) investigou o efeito de quatro formas de instrução nos resultados da aprendizagem e nas estratégias usadas por indivíduos em tarefas de montagem de peças. A hipótese era que os materiais que davam instrução de maneira a impor menos cargas suplementares cognitivas facilitariam um aumento do aprendizado. Quarenta estudantes secundários tinham que aprender a montar peças de metal de formatos variados (utilizando também porcas e parafusos) e tiveram quatro tipos de instrução: desenhos ortográficos, desenhos isométricos, modelos físicos e desenhos isométricos e modelos juntos. Os resultados forneceram evidências para sugerir que a atividade a partir de modelos físicos causou a menor parcela de carga cognitiva comparada com os grupos de desenhos isométricos e ortográficos. Os estudantes do grupo dos modelos levaram menos tempo, completaram mais corretamente os modelos, fizeram menos olhadas adicionais, gastaram menos tempo estudando a instrução e cometeram menos erros.

O autor sugeriu que seria necessária uma mudança no ensino de desenho, principalmente nas áreas técnicas nas quais os alunos precisam entender as projeções ortográficas. Os materiais que dão instrução nessas áreas poderiam ser modificados, incluindo desenhos de imagens intermediárias entre a passagem da terceira para a segunda dimensão e vice-versa (Figura 8.9). Também poderiam ser utilizados modelos físicos e simulações tri-dimensionais em computador de maneira a ajudar os alunos a formar representações mentais que auxiliassem na aprendizagem.

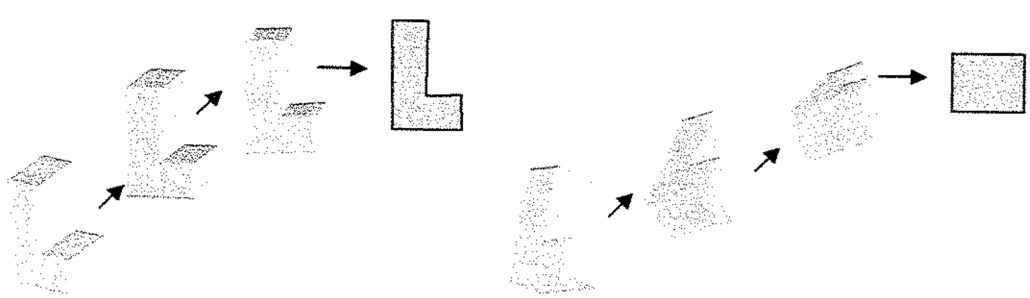


Figura 8.9. Fases intermediárias em projeções ortográficas

As pesquisas sobre as atitudes em relação à matemática

As atitudes em relação à matemática foram estudadas por vários pesquisadores do grupo PSIEM – Psicologia da Educação Matemática da Unicamp, sendo que alguns desses trabalhos são descritos a seguir.

A adaptação e a validação da escala de atitudes de Aiken (1961) e Aiken e Dreger (1963) foram feitas por Brito (1996), realizando uma pesquisa com 2007 alunos de escolas públicas da terceira série do ensino fundamental até a terceira série do ensino médio. A escala era composta de vinte afirmações, sendo dez positivas e dez negativas, com quatro possibilidades de resposta, tendo sido encontrado um coeficiente de credibilidade de 0,9494. A média das atitudes foi 52,51 com desvio padrão de 13,23, sendo que os alunos do sexo masculino tiveram atitudes mais positivas que as meninas e foram encontradas atitudes mais positivas em alunos das terceiras e quartas séries do ensino fundamental. A matemática foi escolhida por 23,5% como a principal disciplina que os alunos mais gostavam, e por 20,1% como a principal disciplina que os alunos menos gostavam.

A mesma escala foi usada por Moron (1998) que pesquisou 402 professoras de Educação Infantil de uma cidade paulista. Foi encontrado um coeficiente alfa de Cronbach de 0,9498 e uma média das atitudes 60,5 e desvio padrão de 8,6, indicando que muitas professoras tinham atitudes positivas em relação à matemática. Embora a experiência tenha mostrado que é comum ouvir que a escolha do magistério está influenciada pelo fato desse curso não exigir muitos conhecimentos de matemática, a pesquisa de Moron não mostra essa tendência. As professoras pesquisadas atribuíram a escolha da profissão em primeiro lugar ao gosto de lecionar; o fato de não gostar de matemática foi a última opção delas. As professoras que alegaram gostar de matemática afirmaram ter tido boas experiências enquanto alunas e também se percebiam como boas professoras, enquanto que as professoras com atitudes negativas não se percebiam como boas professoras de matemática. No geral, todas as professoras entrevistadas demonstraram esforço em realizar um trabalho de modo a permitir o desenvolvimento em seus alunos de atitudes positivas em relação à matemática.

Com o objetivo de investigar se o uso de jogos em sala de aula influenciava o desempenho e as atitudes em relação à matemática, Jesus (1999) realizou uma pesquisa experimental com 104 alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, com idades entre 11 e 13 anos, matriculados em escolas públicas do Estado de São Paulo. Dos 104 alunos, 53 formaram um *grupo experimental* enquanto que os outros 51 formaram um *grupo de controle*. Foram utilizados como instrumentos no pré e pós-teste, uma escala de atitudes e uma prova de matemática. O *grupo experimental* foi submetido a uma intervenção com jogos nas aulas de Matemática. Após a intervenção todos os alunos foram submetidos novamente aos testes e os resultados mostraram que existiu diferença significativa de desempenho entre os grupos *experimental e controle*. Também foi verificada uma diferença significativa nos resultados dos grupos experimental e controle quanto à pontuação na escala de atitudes, indicando que os jogos podem ser recursos interessantes para melhorar as atitudes em relação à Matemática.

Verificar a influência das atitudes de pais de alunos em relação à matemática foi um dos objetivos do trabalho de Gonçalez (2000). A autora estudou também as relações entre as atitudes dos alunos em relação à matemática e o desempenho escolar e verificou o nível de confiança dos alunos. Os sujeitos foram 121 alunos das 3ª, 4ª e 8ª séries do ensino fundamental e seus pais, tendo sido aplicados três escalas de atitudes, questionários e atas de notas. Os resultados mostraram que os pais exerciam pouca influência nas atitudes de seus filhos. O nível de confiança estava relacionado com o desempenho. Não foram encontradas diferenças significativas por gênero nas atitudes e no desempenho por gênero. A autora aponta para a importância de pais e professores incentivarem as crianças para participar de atividades matemáticas com o objetivo de favorecer a formação de atitudes positivas em relação à matemática.

A relação entre escolha profissional e as atitudes em relação à matemática foi investigada por Araújo (1999), tendo como sujeitos da pesquisa 145 alunos do ensino médio e 233 do ensino superior. A autora encontrou que os sujeitos da área de ciências exatas, na maioria homens, tiveram desempenho melhor e atitudes mais favoráveis em relação à matemática e concluiu que as atitudes podem influenciar na escolha profissional.

Outro trabalho que investigou as atitudes em relação à matemática foi a tese de Utsumi (2000). Tendo como sujeitos 256 alunos de sexta a oitava séries do ensino fundamental da rede estadual, o trabalho mostrou que as variáveis série, reprovações, hábitos de estudo, compreensão de problemas matemáticos e autopercepção do desempenho estavam relacionados com as atitudes em relação à matemática. A partir da revisão da literatura, a autora levantou os seguintes aspectos acerca das atitudes: (a) existem fatores, não cognitivos, que podem afetar o desempenho em tarefas escolares; (b) existem diferenças de atitudes relacionadas a gênero, sendo que, em geral, as meninas apresentam atitudes mais negativas em relação à matemática; (c) as atitudes dos professores em relação à matemática podem influenciar a atitude e o desempenho dos alunos; (d) as atitudes em relação à matemática podem ser modificadas com programas adequados de intervenção. A pesquisa também analisa componentes da habilidade matemática e alerta para trabalhos que possam melhorar o ensino da álgebra e também favorecer a formação de atitudes mais favoráveis à Matemática.

No grupo PSIEM também foram estudadas as atitudes em relação à Estatística. De acordo com Cazorla; Silva; Vendramini e Brito (1999), existem, em outros países, estudos sobre a influência das atitudes em relação à Estatística no desempenho de alunos do ensino superior, mas, no Brasil, esses estudos são recentes. As autoras adaptaram e validaram uma escala de atitudes em relação à Estatística. Foram aplicados uma escala e um questionário a 1154 alunos universitários que tinham Estatística como disciplina em seus cursos de graduação, de diferentes áreas (exatas, humanas e saúde) de duas universidades particulares. Foi encontrado um coeficiente de Cronbach igual a 0,95 sugerindo uma alta consistência interna da escala. A análise mostrou que um fator respondia por 51,5% da variância, indicando a unidimensionalidade da escala e os resultados sugeriram que a escala era adequada para medir as atitudes em relação à Estatística. Não houve diferenças por gênero, mas houve diferença significativa por área de conhecimento, sendo que os alunos da área de Humanas apresentaram atitudes significativamente mais negativas do que as atitudes dos alunos das áreas de Saúde e Exatas, que não apresentaram diferenças. As autoras alertaram sobre a importância das atitudes na formação do aluno universitário, e sugeriram que os professores dessa disciplina não se limitassem a cuidar apenas dos aspectos cognitivos, mas também dos aspectos afetivos, com possibilidades de desenvolver a sua prática pedagógica com objetivo de formar o usuário de Estatística.

Silva (2000 a) utilizou a escala de atitudes em relação à estatística para verificar as relações entre o desempenho nesta disciplina e as atitudes. Foram sujeitos 60 alunos e 67 alunas que haviam se matriculado em alguma disciplina de matemática do primeiro ano de graduação. Foram encontrados um coeficiente de confiabilidade de 0,94 e uma correlação positiva e significativa entre as atitudes em relação à matemática e a nota final na disciplina. Também foi encontrada correlação entre as atitudes e a habilidade numérica tanto para homens como para mulheres. As impressões que os alunos tinham sobre seus professores de matemática também influenciaram as atitudes.

Também utilizando a mesma escala de atitudes em relação à estatística, Cazorla (2002) investigou os fatores que interferiram na leitura de gráficos estatísticos tendo como base a teoria das habilidades matemáticas e a teoria da compreensão gráfica. Foram sujeitos 814 estudantes universitários que estavam cursando disciplinas de estatística. Encontrou-se uma correção bastante fraca entre as atitudes em relação à estatística e o desempenho em estatística, sendo essa relação considerada contraditória. Isso poderia ser explicado pelo nível de exigência, isto é, quanto menor a exigência menos tumultuada seria a relação com a disciplina. No entanto, a correlação entre as atitudes em relação à matemática e à estatística foi moderada, o que indica a influência da matemática na formação das atitudes em relação à estatística.

O trabalho de Viana e Brito (2004) teve por objetivo adaptar e validar uma escala de atitudes em relação à geometria, verificar a existência de relações entre as atitudes em relação à geometria e as variáveis escola, gênero, série e autopercepção do desempenho e comparar as atitudes em relação à matemática com as atitudes em relação à geometria. Foram aplicadas duas escalas em 423 alunos do ensino médio de três escolas particulares e uma escola da rede estadual paulista. A análise fatorial estatística para a escala em relação à Geometria confirmou sua característica unidimensional. As atitudes diferiram por escola e pela autopercepção do desempenho, mas não diferiam por gênero nem por série. As atitudes em relação à Matemática e à Geometria estavam relacionadas *(r=0,609,p=0,01)*. Considerou-se que a escala pode ser um instrumento interessante para o professor avaliar as atitudes dos alunos antes e após um determinado período de aulas, verificar se houve mudanças e avaliar seu trabalho pedagógico.

As pesquisas sobre as habilidades matemáticas de Krutetskii

Há uma variedade de trabalhos do grupo Psicologia da Educação Matemática - PSIEM que têm suporte na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii (1976). Alguns exploraram componentes da habilidade matemática e relacionaram com a solução de problemas aritméticos, algébricos ou geométricos, outros relacionaram habilidade com atitudes em relação à matemática e à estatística, com o desempenho escolar, com a escolha profissional etc.

As relações entre o conceito de automatismo da teoria triádica da inteligência de Sternberg e o conceito de pensamento resumido da teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii foram estudadas por Neumann (1995).

A automatização do processamento da informação (Sternberg,1990, citado por Neumann, 1995) é parte da inteligência geral; é um processo não controlado, de nível inferior, que não utiliza os recursos de memória e de atenção seletiva do sujeito e que se realiza de forma automática, permitindo uma seqüência rápida e fluida das atividades durante a solução de problemas.

Já a habilidade para pensar de forma resumida é específica das habilidades matemáticas de Krutetskii (1976); é uma forma abreviada de raciocínio de alto nível e permite uma seqüência rápida e fluida de atividades durante a solução de problemas matemáticos.

Neumann (1995) teve como objetivo verificar se esses conceitos se referiam a um mesmo fenômeno ou se eram fenômenos distintos. Foram selecionados 69 alunos da Licenciatura da Faculdade de Educação da Unicamp, de vários cursos. Os sujeitos foram submetidos a uma prova de Raciocínio Verbal do Teste de Aptidões Específicas (DAT), um teste de raciocínio matemático baseado na teoria de Krutetskii, três testes para avaliar a habilidade para automatizar o processamento de informações (API) e testes para avaliar a capacidade para pensar em estruturas abreviadas (PEA). Foi utilizada a análise fatorial estatística, sendo extraídos três fatores: um fator de automatismo, um fator verbal e um fator matemático. O autor concluiu que os dois conceitos analisados se referiam a conceitos distintos.

Um outro componente da habilidade matemática, a reversibilidade do pensamento, foi estudado por Spalleta (1998), que selecionou, para amostra, 91 alunos do curso de Engenharia Elétrica da Unicamp. Os sujeitos foram submetidos a um questionário e um teste composto por 24 pares de problemas matemáticos, apresentados aleatoriamente na ordem direta e na ordem inversa, da série XVII de Krutetskii. Foi encontrada correlação positiva entre os resultados nesse teste de reversibilidade e as notas na disciplina de Cálculo, indicando que os alunos com bom desempenho na disciplina tiveram um desempenho satisfatório no teste de reversibilidade.

O conceito de habilidade matemática de Krutetskii foi utilizado por Oliveira (1998) para embasar seu trabalho sobre habilidades espaciais. A autora identificou e analisou a percepção espacial envolvida nos procedimentos utilizados para solução de problemas de discriminação e composição de figuras geométricas. Foram sujeitos da pesquisa nove estudantes do ensino fundamental, distribuídos em três grupos, conforme os instrumentos oferecidos para a solução dos problemas: apenas peças do Tangram em papel cartão, apenas o sistema computacional Tegran ou ambos os instrumentos, sendo que as sessões foram gravadas e filmadas. O trabalho de Del Grande (1990) sobre habilidade espacial foi utilizado para estabelecer as categorias de análise referentes à percepção espacial. A análise dos dados mostrou que nas atividades de discriminação o tempo gasto foi menor e o número de acertos foi maior enquanto que na atividade que envolvia composição de figuras (talvez pelo fato de tal atividade envolver muitas transformações como translação, rotação e reflexão) o tempo gasto foi maior e os sujeitos necessitaram de um maior número de intervenções da pesquisadora. A autora concluiu que as atividades de discriminação e composição de figuras planas envolvem uma grande variedade de componentes da habilidade espacial e alerta para a possibilidade de se provocar situações didáticas com o objetivo de desenvolver tal habilidade.

Alguns componentes da habilidade matemática devem influenciar a solução de problemas aritméticos em estudantes do Ensino Médio. Alves (1999) teve o objetivo de verificar os componentes: habilidade para perceber relações e fatos concretos no problema e habilidade para formar generalizações, investigando o desempenho de 53 alunos concluintes do Ensino Médio de uma escola particular e uma pública. Entre outros resultados, a autora encontrou que os sujeitos tiveram maior dificuldade no primeiro estágio da solução de problemas, que é a obtenção da informação matemática a partir do enunciado verbal. Verificou também que a solução de problemas deve estar relacionada com outros componentes da habilidade matemática, pois não foram encontradas relações entre os componentes estudados e a solução dos problemas aritméticos propostos.

Vendramini (2000) teve por objetivo estudar as relações entre a habilidade matemática, as atitudes em relação à estatística e a aprendizagem de conceitos estatísticos. A pesquisa foi feita com 319 alunos de diversos cursos de graduação de uma universidade particular, tendo sido aplicados questionário informativo, escala de atitudes em relação à estatística, teste estatístico e teste matemático baseado em Krutetskii (1976) para avaliar a obtenção da informação matemática. Foram encontradas correlações positivas entre as variáveis analisadas, sendo sugeridas estratégias de ensino que ajudem no desenvolvimento das habilidades e que propiciem atitudes mais positivas em relação à estatística.

Pirola (2000) estudou a solução de problemas geométricos de 124 alunos dos cursos de Habilitação Específica para o Magistério e de 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Foi aplicada uma prova contendo dez problemas que foram baseados nos problemas das séries de Krutetskii (1976), com informações completas, incompletas e supérfluas. Essas questões avaliariam o primeiro estágio da solução de problemas que é a obtenção da informação matemática. Os sujeitos do curso de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente do que os sujeitos do curso de magistério. Os problemas que apresentaram maior dificuldade foram aqueles com informações incompletas e os com informações supérfluas. O autor considerou que o baixo desempenho mostrava a necessidade de que programas de educação continuada fossem desenvolvidos de modo a contemplar os aspectos metodológicos relacionados ao ensino e à aprendizagem de conceitos e princípios utilizados em problemas de geometria.

Vários componentes da habilidade matemática, como percepção, generalização, flexibilidade do pensamento, reversibilidade dos processos mentais, encurtamento do raciocínio, compreensão, raciocínio e lógica, memória matemática e tipo de habilidade matemática foram investigados por Utsumi (2000). A partir de uma amostra de 256 alunos de 6ª a 8ª séries, foram selecionados os sujeitos mais capazes; a análise dos protocolos mostrou que estes não eram capazes de solucionar os problemas algébricos propostos, sendo que as soluções poderiam evidenciar a habilidade matemática desses sujeitos.

A revisão bibliográfica que pôde ser feita apontou trabalhos que levantaram questões que de alguma forma se relacionam com os objetivos do presente estudo, sendo estas resumidas a seguir:

1) Não há clareza de como habilidades espaciais influenciam no rendimento em matemática.

2) Nas tarefas que medem raciocínio espacial, em especial as de rotação mental, tem-se que os sujeitos podem usar imagens proposicionais ou pictóricas.

3) Há evidências de diferenças de gênero em tarefas de rotação mental e discute-se se um melhor desempenho seria um fator biológico ou cultural.

4) Podem ser analisados os tipos de estratégias (visuais e não visuais) usadas por alunos na solução de problemas de rotação mental como função do grau de complexidade da tarefa e da ação requerida (interpretação ou construção).

5) A externalização de representações pode ajudar na solução de problemas porque pode reordenar a informação e planejar um limite de modelos possíveis, fazendo com que se tornem explícitas as informações que estão ausentes ou implícitas.

6) Para contar cubos num arranjo, o aluno estabelece estratégias que estão apoiadas na sua estruturação espacial, isto é, no ato mental de construir a organização de objetos. O processo de estruturação espacial inclui o estabelecimento de unidades, o estabelecimento de relações entre unidades e o reconhecimento de um subgrupo de objetos (se for repetido) como um gerador da coleção toda.

7) Os desenhos de planificação das figuras espaciais podem ser classificados em três categorias: representações fracas, intermediárias e boas, e estas são explicadas pela construção das relações espaciais do sujeito: topológicas (quando vê o objeto globalmente) e projetivas (quando coordena os pontos de vista).

8) A imaginação da projeção e da rotação é um tipo de solução de problema no qual as estruturas espaciais são organizadas em relação às propriedades dadas inicialmente dos objetos e transformações: quando há

alinhamento entre os vários componentes estruturais, o processo de imaginação funciona eficientemente; sem tal alinhamento, pessoas não - especialistas freqüentemente não conseguem formar as imagens mentais das projeções.

9) Dependendo da tarefa, a carga cognitiva imposta pela informação espacial pode esgotar os recursos cognitivos do sujeito de modo a prejudicar a aprendizagem, principalmente quando não se contam com objetos físicos, mas apenas com desenhos isométricos e ortográficos.

10) Alguns componentes da habilidade matemática puderam ser pesquisados em trabalhos recentes: não existe relação entre o conceito de automatismo da teoria triádica da inteligência de Sternberg e o conceito de pensamento resumido da teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii; a reversibilidade do pensamento se relaciona positivamente com as notas em Cálculo; as atividades de discriminação e composição de figuras planas envolvem uma grande variedade de componentes da habilidade espacial; há uma grande dificuldade dos alunos no primeiro estágio da solução de problemas, que é a obtenção da informação matemática a partir do enunciado verbal; a habilidade de obter a informação matemática está relacionada com o desempenho em estatística.

11) A escala de atitudes em relação à Matemática foi aplicada a um grande número de sujeitos, tendo sido feitas adaptações para as atitudes em relação à Estatística e à Geometria. As atitudes em relação à matemática estão relacionadas com a auto-percepção do desempenho, com o desempenho escolar, com métodos de ensino e com a escolha profissional.

CAPÍTULO IX

MÉTODO

Objetivos da pesquisa:

1º) Analisar o componente espacial da habilidade matemática.

2º) Verificar a existência de relação entre o desempenho na prova do componente espacial e o desempenho no teste de raciocínio espacial.

3º) Analisar as representações externas utilizadas na solução de problemas relativos à geometria espacial.

4º) Verificar a existência de relações entre as variáveis: as atitudes em relação à geometria e à matemática, o desempenho escolar, o desempenho na prova do componente espacial e o desempenho no teste de raciocínio espacial.

Sujeitos

Foram sujeitos do estudo 177 estudantes do Ensino Médio, de uma escola particular da cidade de Mogi das Cruzes, SP.

Foram escolhidas as séries do Ensino Médio pois nestas é trabalhado, de modo mais especifico, o conteúdo de geometria espacial. Na escola pesquisada, geometria é uma disciplina na grade curricular, independente da Matemática. Assim, por já terem estudado geometria nos anos anteriores à data da coleta de dados, considerou-se que os alunos dessa escola teriam mantido experiências suficientes para desenvolver atitudes em relação a essa disciplina. Tratou-se de uma amostra de conveniência.

Instrumentos

Foram os seguintes instrumentos:

I_1 : Questionário Informativo

I_2 : CEHM - Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática

I_3 : RE - Teste de raciocínio espacial BPR-5 (Primi e Almeida, 2000 a)

I_4 : EARM - Escala de atitudes em relação à matemática (Brito, 1996)

I_5 : EARG - Escala de atitudes em relação à geometria (Brito e Viana, 2001)

I_6 : Prova contendo questões de vestibulares

A descrição de cada instrumento é dada a seguir, sendo que os mesmos estão em anexo.[1]

I_1 : Questionário Informativo

Este foi formado por questões relativas à identificação dos sujeitos (série, turma, gênero, idade, procedência) e outras informações sobre a vida escolar (continuidade dos estudos e hábitos de estudo).

I_2 : CEHM - Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática

Esta prova foi formada por questões inspiradas na série XXV de problemas elaborados por Krutetskii (1976). Os problemas desta série versavam sobre geometria plana e espacial e tinham como objetivo verificar se os alunos, num primeiro momento, conseguiriam responder as questões sem fazer os desenhos,

[1] O instrumento I_3 não está anexado, pois trata-se de um teste psicológico.

isto é, apenas formando e manipulando imagens mentais relativas ao enunciado. Para este trabalho, foram selecionados apenas os problemas que se referiam à geometria espacial. Em seguida, foi feita uma análise das operações envolvidas em cada questão. Optou-se, então, por escolher as figuras geométricas mais estudadas no ensino médio: os poliedros (cubos, prismas, pirâmides, troncos de pirâmides) e os corpos redondos (cilindros, cones, troncos de cones e esferas).

Dessa forma, foi possível elaborar as seguintes questões:

- Contagem de cubos em arranjos

Foram apresentados cinco desenhos de arranjos formados por cubinhos, em perspectivas e em várias posições. O aluno era solicitado a contar os cubinhos utilizados em cada sólido. A percepção dos desenhos permitia reconhecer de imediato alguns cubinhos; em outros, era necessário imaginar aqueles que estariam ocultos.

- Formação de polígonos no interior de um cubo.

Foi apresentado o desenho em perspectiva de um cubo com os oito vértices nomeados de A a H. A seguir, eram apresentadas seqüências de três ou quatro vértices para que o aluno identificasse o polígono resultante da união desses pontos. Em algumas situações, o aluno deveria identificar o ponto médio de uma aresta do cubo e utilizar esse ponto como vértice do polígono a ser nomeado. Acrescenta-se que era fornecida uma lista de nomes de polígonos possíveis de serem identificados no interior do cubo. O objetivo desta questão era verificar se o sujeito identificaria as propriedades fundamentais de triângulos e quadriláteros, como congruência de lados e de ângulos, paralelismo e perpendicularismo etc, numa representação em perspectiva. A obtenção das fórmulas da diagonal do cubo e do paralelepípedo, assim como a solução de questões complexas de exames vestibulares, parecem depender da identificação das propriedades citadas

- Secção em sólidos geométricos

Foi apresentada a secção quadrada de um cubo a partir de um plano paralelo à base, sendo mostrados os desenhos do cubo e do plano em perspectiva. A seguir, foram apresentados em perspectiva os desenhos de figuras que geralmente são estudadas no ensino médio e o aluno era solicitado a desenhar três secções possíveis para cada sólido, resultantes das intersecções destes com planos imaginados, em qualquer posição. Nos livros de ensino médio podem ser encontradas as secções relativas à obtenção dos troncos de pirâmide e cone, mas, muitas vezes, são propostos problemas complexos que exigem o reconhecimento de secções em formas compostas.

- Planificação de figuras espaciais.

Foram apresentados o desenho de um cubo em perspectiva, o desenho de uma planificação e a explicação de que este último seria um possível "molde" em cartolina. A seguir, o aluno era solicitado a desenhar uma planificação para cada figura apresentada. Optou-se por apresentar figuras estudadas no ensino médio, acrescentadas por algumas composições de figuras. A planificação de figuras espaciais foi considerada uma operação importante a ser avaliada, pois boa parte das questões de geometria métrica do ensino médio solicita o cálculo da área da base, das superfícies lateral e total de poliedros (prismas e pirâmides), bem como o cálculo da superfície total de cilindros, cones e troncos.

- Projeções ortogonais de figuras espaciais

Na primeira questão desta parte, um sólido formado por cubinhos (inspirado nos desenhos de Shepard, 1978) foi desenhado dentro de um cubo que tinha os respectivos vértices nomeados de A a H. Ao lado, apresentou-se uma face lateral do cubo vista de frente, com o desenho da projeção ortogonal do sólido sobre esta face. O aluno foi solicitado a desenhar outras projeções do mesmo sólido sobre outras faces indicadas do cubo. A segunda questão era semelhante, com uma variação do sólido formado por cubinhos. Na terceira, era apresentado, em vez do sólido formado por cubinhos, um outro cubo interno com a base paralela ao cubo maior. Na quarta questão, o cubo interno era apresentado numa posição que indicava que dois de seus vértices opostos formariam uma reta perpendicular ao plano da base do cubo maior e passando pelo ponto médio da base. O aluno era novamente solicitado, nestas duas últimas questões, a desenhar a projeção ortogonal sobre as faces indicadas.

- Rotação de figuras planas em torno de um eixo (sólidos de revolução)

Uma figura geométrica plana foi desenhada ao lado de um segmento vertical que representava um eixo de rotação. O aluno era solicitado a girar mentalmente a figura em torno deste eixo e formar a imagem de um sólido. Foram apresentados doze destes desenhos nomeados de A a M e também doze sólidos; o aluno era solicitado a associar cada sólido com a possível figura plana geradora do mesmo. Convém acrescentar que os sólidos foram apresentados em posições variadas, isto é, além de formar a imagem do sólido de revolução, o aluno deveria identificá-lo, mesmo em posição diferente daquela de origem. Além disso, nem todos os sólidos apresentados eram de revolução, isto é, alguns não tinham figura plana correspondente. Outra questão finalizava a operação de revolução: foram apresentados quatro sólidos de revolução e o aluno era solicitado a desenhar, ao lado de um eixo, a figura plana geradora de cada sólido.

Este instrumento foi pré-testado com 31 alunos da terceira série do ensino médio de uma escola particular da cidade de Suzano, SP, tendo sido feitas algumas alterações nas questões.

I$_3$: RE - Teste de raciocínio espacial BPR-5 (Primi e Almeida, 2000 a)

O teste RE (Raciocínio Espacial) é uma das provas da BPR- 5. Esta bateria de testes foi elaborada e validada por Primi e Almeida (2000-a), e é composta por cinco subtestes: Raciocínio Abstrato (RA), Raciocínio Verbal (RV), Raciocínio Numérico (RN), Raciocínio Espacial (RE) e Raciocínio Mecânico (RM).

Foi aplicado apenas o subteste Raciocínio Espacial que é composto por 20 itens que mostram séries de cubos tridimensionais em diferentes posições indicando movimento (Figura 9.1). Os movimentos podem ser constantes, por exemplo, sempre para a direita, ou alternados, por exemplo, para a esquerda e para cima. Por meio da análise de diferentes faces o sujeito deveria descobrir o cubo que se seguiria se o movimento descoberto fosse aplicado ao último cubo da série.

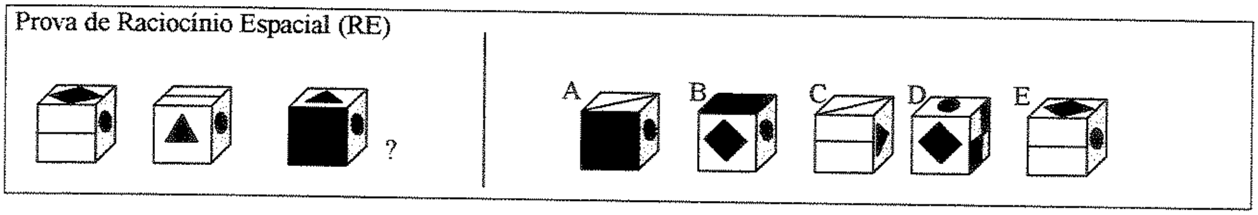


Figura 9.1. Prova de Raciocínio espacial (RE) da BPR-5 (Baseado em Primi, 2000-a)

I_4 : EARM - Escala de atitudes em relação à matemática (Brito, 1996)

A EARM (escala de atitudes em relação à matemática), do tipo Likert (Aiken e Dreger, 1961; Aiken, 1963), foi traduzida, adaptada e validade por (Brito, 1994, 1995). Trata-se de uma escala de quatro pontos formada por vinte afirmações que tentam expressar o sentimento que cada sujeito possui em relação à matemática, sendo dez afirmações positivas e dez afirmações negativas. Além dessas vinte, foi incluída uma última afirmação com o objetivo de avaliar a autopercepção do desempenho em matemática.

I_5 : EARG - Escala de atitudes em relação à geometria (Brito e Viana, 2001)

A EARG (escala de atitudes em relação à geometria) foi validada por Viana e Brito (2004). Trata-se de uma escala com quatro itens formada por vinte afirmações que são muito semelhantes às da escala de atitudes em relação à matemática, sendo dez afirmações positivas e dez negativas. Além dessas afirmações, foram acrescentadas mais três proposições, duas delas expressando o sentimento em relação à solução de problemas de geometria e uma outra expressando a autopercepção do desempenho (Anexo 3).

Nas duas escalas, os sujeitos foram solicitados a escolher, para cada afirmação, uma das quatro alternativas: discordo totalmente, discordo, concordo, concordo totalmente. Para cada item escolhido foi atribuído um número de pontos de 1 a 4. Para afirmações positivas, a ordem de atribuição dos valores foi 1, 2, 3 e 4. Para afirmações negativas, a ordem foi inversa, ou seja, 4, 3, 2 e 1. Os pontos foram somados para cada sujeito, sendo que este número total poderia variar de 20 (atitudes negativas) até 80 (atitudes positivas).

I_6 : Prova contendo questões de vestibulares

As questões de vestibulares (I_6) são aquelas que fizeram parte dos exames da FUVEST, UNICAMP, VUNESP e ITA nos últimos quatro anos e que requeriam conhecimentos de geometria espacial. Foram selecionadas oito questões que permitiam a representação externa de imagens mentais de figuras espaciais (Anexo 4).

Procedimentos

O desempenho escolar em Matemática e em Geometria foi dado pelas notas bimestrais do ano de 2003 que foram fornecidas pela secretaria da escola, com autorização da direção.

Os instrumentos foram aplicados no mês de abril de 2003 pela pesquisadora durante as aulas normais, com autorização dos respectivos professores e da direção da escola. A ordem de aplicação foi: I_1, I_4, I_5, I_2, I_3 e I_6.

I_2 foi o instrumento que requereu maior tempo para execução, cerca de duas aulas seguidas. Foi feita uma análise quantitativa com os dados referentes a todos os sujeitos. Para a análise qualitativa, foram selecionados dez sujeitos com melhor desempenho e onze sujeitos com pior desempenho nesta prova.

I_3 foi aplicado segundo as instruções do manual de aplicação da Bateria de Provas de Raciocínio - BPR-5 (Primi e Almeida, 2000). Sua aplicação foi autorizada pelo autor.

I_1 e I_4 foram aplicados em um dia e I_5 foi aplicado em outro dia, para não haver interferência das respostas nas duas escalas.

I_6 foi aplicado apenas aos alunos da terceira série, pois, sendo questões de exames vestibulares, exigiam o conteúdo de geometria referente às três séries do ensino médio. Para a análise qualitativa das representações pictóricas externas utilizadas na solução das questões, foram selecionados apenas os sujeitos com melhor e com pior desempenho na prova do componente espacial da habilidade matemática.

A análise estatística dos dados utilizou o teste t-Student para comparar as médias das variáveis por gênero, o teste F para comparar as médias das variáveis por série, auto-percepção do desempenho e área pretendida. A análise de correlação e regressão foi utilizada para estudar a relação entre as variáveis quantitativas e a análise fatorial para estudar o componente espacial da habilidade matemática. Foi utilizado o pacote estatístico SPSS (Statistical Package for Social Science) e o nível de significância adotado foi de 5%.

CAPÍTULO X

AS VARIÁVEIS ENVOLVIDAS: UMA ANÁLISE QUANTITATIVA

CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS

Foram sujeitos da pesquisa 177 alunos das primeiras, segundas e terceiras séries do Ensino Médio de uma escola particular de Mogi das Cruzes, SP, sendo 52% do sexo feminino e 48% do masculino. As idades variavam entre 14 e 18 anos, com média 15,8 e desvio padrão 0,95. A distribuição dos alunos por série é mostrada na Tabela 10.1.

Tabela 10.1. Distribuição dos alunos por série.

Série	Nº de sujeitos	%
1ª	71	40,1
2ª	52	29,4
3ª	54	30,5
Total	**177**	**100,0**

Ao serem indagados sobre a futura profissão, verificou-se que havia um grande número de opções e que muitos ainda não tinham escolhido nenhum curso superior. No entanto, a área de conhecimento na qual estava inserida futura profissão parecia estar definida por vários alunos, conforme mostram a Tabela 2 e a Tabela 3. Convém acrescentar que muitos alunos não estavam presentes no dia da aplicação desse questionário, sendo que as porcentagens foram calculadas tomando por base os sujeitos que responderam às perguntas.

Tabela 10.2. Distribuição dos alunos por área de conhecimento

Área de conhecimento (Ciências)	Nº de sujeitos	%	Cursos mais pretendidos (Nº de sujeitos)
Biológicas	50	34,2	Medicina (21) Veterinária (5)
Humanas	50	34,2	Direito (13) Jornalismo(13)
Exatas	34	23,4	Engenharia (20) Computação (9)
Não sabem	12	8,2	
Total	**146**	**100,0**	
Não responderam	31		
Total geral	**177**		

Menos de 30% dos sujeitos acharam que o conhecimento em Geometria seria importante para a sua futura atuação profissional, conforme mostra a Tabela 10.3.

Tabela 10.3. Distribuição dos alunos de acordo com a importância atribuída ao conhecimento em geometria na futura atuação profissional.

Importância	Nº de sujeitos	%
Muito importante	21	14,4
Importante	27	18,5
Pouco importante	43	29,5
Não será importante	45	30,8
Não sabe	10	6,8
Total	**146**	**100,0**

O grau de importância atribuído ao conhecimento geométrico está relacionado com a área de opção profissional. Assim, alunos que escolheram a área de ciências Exatas tenderam a responder que esse conhecimento é importante, enquanto que os alunos que optaram por Humanas e Biológicas tenderam a atribuir pouca ou nenhuma importância ao conhecimento em geometria [$\chi^2(6, N = 120) = 62{,}188$; $p=0{,}000$].

Os sujeitos foram solicitados a completar as frases: "o que eu mais gosto em geometria é...", e "o que eu menos gosto de geometria é..." e pôde-se verificar uma grande variedade de respostas, conforme mostra a tabela 10.4.

Tabela 10.4. Distribuição dos alunos de acordo com o que mais gostam e menos gostam em geometria

O que eu mais gosto em geometria é...	Nº de sujeitos	O que eu menos gosto em geometria é...	Nº de sujeitos
Construção, desenhos	47	Cálculos	43
Geometria plana	30	Geometria plana	19
Geometria espacial	15	Geometria espacial	17
Cálculos	14	Construção, desenhos	17
Raciocínio, resolver problemas	10	Decorar fórmulas e nomes	7

Em resposta à questão que solicitava a indicação do que mais gostavam, os alunos que optaram pela área de Humanas apontaram os desenhos e as construções geométricas; os alunos de Biológicas, além disso, indicaram geometria plana e os de Exatas se distribuíram nas categorias construção, cálculos e geometria plana. Tanto os alunos de Humanas como os de Biológicas afirmaram não gostar de cálculos. Nas Exatas, alguns não gostavam de construção e muitos disseram que não gostavam de decorar fórmulas e nomes.

Embora o curso freqüentado pelos sujeitos tenha uma estrutura de avaliação que parece exigir dedicação contínua aos estudos, verificou-se que a maioria dos alunos não tinha o hábito de estudar geometria, conforme mostra a Tabela 10.5. Acrescenta-se que esta tendência foi verificada nas três áreas de atuação profissional pretendida.

Tabela 10.5. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo de geometria.

Estuda geometria normalmente?	Nº de sujeitos	%
Não estudo	109	74,7
Estudo até 30 min/semana	18	12,3
Estudo 1 hora/semana	10	6,8
Estudo entre 1 e 2 horas/semana	6	4,1
Estudo mais de 2 horas/semana	3	2,1
Total	**146**	**100,0**

O sistema de provas da escola pesquisada é bastante rígido. Os alunos têm seis aulas por dia, sendo que a primeira aula de terça-feira, a primeira de quinta e a primeira de sexta feira são reservadas para as provas. Nesse horário, os alunos têm salas e carteiras especialmente determinadas para a realização das provas, sendo que estas são aplicadas por funcionários da escola. Ao término da primeira aula, os alunos voltam às suas salas normais para as aulas do dia.

Às vésperas da prova, parece que a preocupação com os estudos aumenta, conforme mostra a Tabela 10.6. Essa preocupação se mantém nas áreas de opção de curso superior, embora se possa notar que vários alunos de Exatas alegaram não estudar antes das provas de geometria, conforme mostra a Tabela 10.7.

Tabela 10.6. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo para a prova de geometria.

Estuda para a prova de geometria?	Nº de sujeitos	%
Estudo até 30 min	31	21,2
Estudo 1 hora	37	25,3
Entre 1 e 2 horas	33	22,6
Estudo Mais de 2 horas	26	17,8
Não estudo	19	13,0
Total	**146**	**100,0**

Tabela 10.7. Distribuição dos alunos de acordo com o tempo de estudo para a prova de geometria por área pretendida.

Estuda para a prova de geometria?	Exatas		Humanas		Biológicas		Não respondeu	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
Estudo até 30 min	7	20,6	10	20,0	11	22,0	3	25,0
Estudo 1 hora	6	17,6	12	24,0	15	30,0	4	33,3
Entre 1 e 2 horas	7	20,6	14	28,0	10	20,0	2	16,7
Estudo mais de 2 h	4	11,8	11	22,0	9	18,0	2	16,7
Não estudo	10	29,4	3	6,0	5	10,0	1	8,3
Total	**34**	**100,0**	**50**	**100,0**	**50**	**100,0**	**12**	**100,0**

Embora os dados tenham revelado, de um modo geral, uma certa preocupação em estudar para a prova, entre os que escolheram Exatas estava a maior porcentagem de sujeitos que afirmaram não estudar para a prova, ao contrário do que aconteceu com os alunos de Humanas, já que nesse grupo apenas 6% admitiram não estudar. A opção de não estudar para a prova foi alterada de acordo com as séries, isto é, 11,3%, 5,8% e 14,8% dos alunos das 1ª, 2ª e 3ª séries, respectivamente, admitiram não estudar para as provas. No total, 17 alunos (15 homens e 2 mulheres) declararam não estudar de jeito nenhum, nem mesmo antes da prova. Foi encontrado que as meninas tendiam a estudar mais do que os meninos ($\chi^2(4, N = 146) = 21{,}034$; p=0,000).

Geometria não era a disciplina que os sujeitos mais estudavam. A tabela 10.8 mostra que Matemática e Física foram as disciplinas mais citadas entre aquelas que eles mais estudavam.

Tabela 10.8. Distribuição dos sujeitos por disciplina que mais estudam.

Disciplina	Nº de sujeitos	%
Matemática	54	37,0
Física	30	20,5
História	16	11,0
Biologia	11	7,5
Química	8	5,5
Geografia	6	4,1
Português	4	2,7
Geometria	3	2,1
Gramática	3	2,1
Inglês	2	1,4
Literatura	1	0,7
Não responderam	8	5,4
Total	**146**	**100,0**

Os sujeitos foram solicitados a dar um número de zero a dez que expressasse o grau de importância da escola em sua vida, sendo 0="atualmente não tem nenhuma importância na minha vida" e 10="atualmente é a coisa mais importante na minha vida". Os resultados são mostrados na Tabela 10.9. Conforme pode ser verificado, os sujeitos atribuíram números elevados para representar a importância da escola em suas vidas.

Tabela 10.9. Qual a importância da escola na sua vida?
(0=nenhuma importância; 10=coisa mais importante)

Série	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
1ª	66	0	10	8,18	2,29
2ª	38	5	10	8,32	1,25
3ª	42	5	10	8,60	1,34
Total	**8,34**	**0**	**10**	**8,34**	**1,79**

AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E À GEOMETRIA

Os sujeitos foram solicitados a responder as duas escalas: a EARM (matemática) e a EARG (geometria), em dois dias consecutivos, nessa ordem, na sala de aula, na presença do professor que estava ministrando a aula.

Alguns dados gerais sobre as atitudes dos sujeitos em relação à matemática e à geometria estão mostrados na Tabela 10.10.

Tabela 10. 10. Distribuição dos valores da EARM e da EARG

		Atitudes Matemática (EARM)	Atitudes geometria (EARG)
Nº de sujeitos		163	161
Média		51,17	52,62
Desvio padrão		13,12	11,21
Moda		56,00	56,00
Assimetria		-0,305	-0,329
Kurtose		-0,279	0,083
Mínimo		20	20
Máximo		80	77
Percentis	**5**	26,20	31,10
	25	43,00	45,00
	50	52,00	53,00
	75	60,00	60,00
	95	70,80	69,90

Atitudes em relação à matemática

A distribuição de freqüência da pontuação na EARM não apresentou normalidade (K-S(423) = 0,075, *p*=0,031), conforme mostra a figura 10.1.

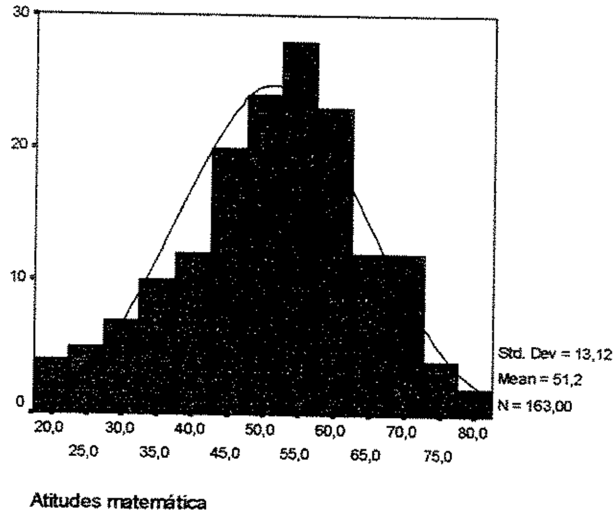


Figura 10.1. Histograma das Atitudes em relação à Matemática.

Embora a média das atitudes dos meninos tenha sido maior que a das meninas, o *Teste-t* indicou que a diferença não foi significativa ($t_{(161)}$= 1, 434, *p* = 0,154). Assim também, embora a 2ª série tenha apresentado média de atitudes ligeiramente mais alta, a Análise de Variância indicou que as atitudes não diferem quanto à série ($F_{2,160)}$ = 0,720, *p*=0,489).

Houve relação entre a autopercepção do desempenho e as atitudes em relação à matemática. Assim, sujeitos que se percebiam com desempenho mais baixo tiveram atitudes mais negativas que sujeitos que se percebiam com melhor desempenho $F_{(3,159)}$ =24,925, *p* = 0,000), conforme mostra a Figura 10.2.

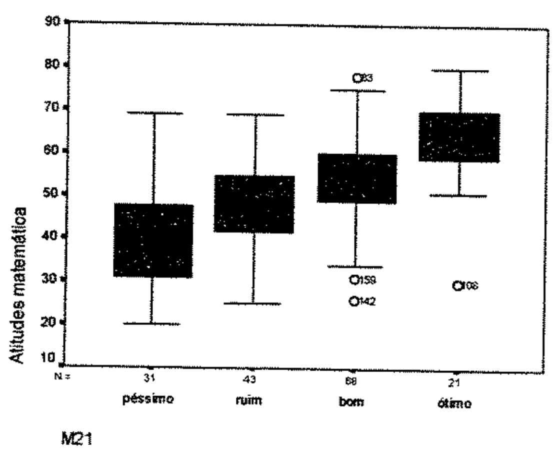


Figura 10.2. Atitudes em relação à Matemática pela auto-percepção do desempenho.

As atitudes estão relacionadas com a escolha da futura área de conhecimento, sendo que os alunos de Exatas têm atitudes mais positivas que os alunos que optaram por Humanas e Biológicas ($F_{(3,129)}$ = 7,405, p =0,000), conforme Figura 10.3.

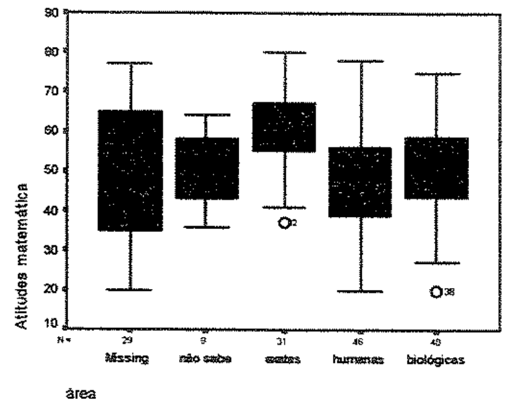


Figura 10. 3. Atitudes em relação à Matemática pela escolha da futura área de conhecimento.

A Tabela 10.11 mostra os principais resultados.

Tabela 10.11. Distribuição dos valores da EARM por grupos

Variáveis	Grupos	N	Média	Des.padrão	Estatística
Gênero	Masculino	76	52,74	11,44	$t_{(161)}$= 1, 434,
	Feminino	87	49,79	14,35	p = 0,154
Série	1ª	66	51,12	12,05	$F_{2,160)}$ = 0,720,
	2ª	48	52,81	11,54	p = 0,489
	3ª	49	49,61	15,77	
Área profissional	Exatas	31	59,48(*)	9,78	$F_{(3,129)}$ = 7,405
	Humanas	46	47,04(*)	12,39	p = 0,000
	Biológicas	48	51,08(*)	11,72	
	Não sabe	9	50,78(*)	9,63	
Auto-percepção do desempenho	Péssimo	31	40,36(*)	13,81	$F_{(3,159)}$ =24,925
	Ruim	43	46,88(*)	10,64	p = 0,000
	Bom	68	54,73(*)	9,06	
	Ótimo	21	64,33(*)	12,84	
Total		**167**	**14,86**	**3,42**	

(*) diferem estatisticamente ao nível de 0,05.

Atitudes em relação à geometria

A distribuição de freqüência da pontuação na EARG apresentou normalidade (K-S(161)=0,064, *p*=0,200), sendo apresentada na Figura 10.4.

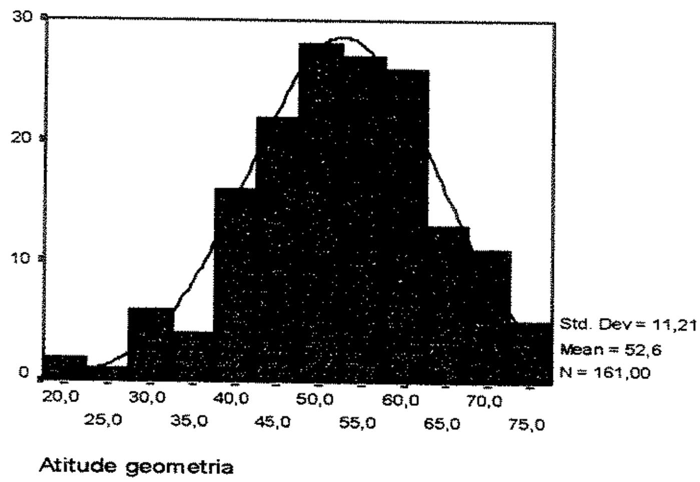


Figura 10.4. Histograma das atitudes em relação à Geometria(EARG)

Ao contrário do que aconteceu com as atitudes em relação à matemática, as atitudes em relação à geometria diferiram por gênero, sendo a média dos meninos maior que a média das meninas ($t_{(161)}$= 2,218, *p*=0,028), conforme mostra a Figura 10.5.

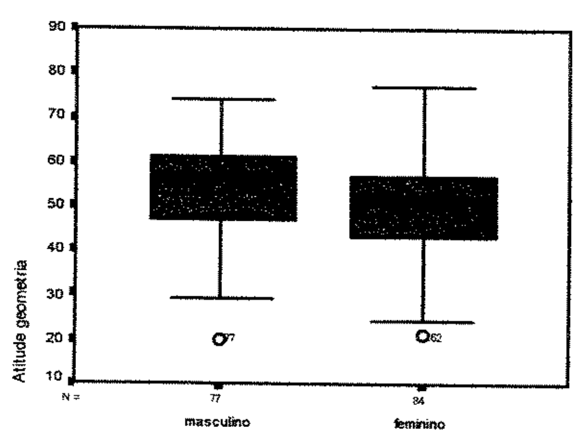


Figura 10.5. Atitudes em relação à Geometria por gênero.

As atitudes também diferiram por série, sendo que sujeitos da 1ª série apresentaram atitudes mais positivas que os sujeitos da 2ª e 3ª série.($F_{(2,158)}$= 5,287, p=0,006), conforme mostra a Figura 10.6.

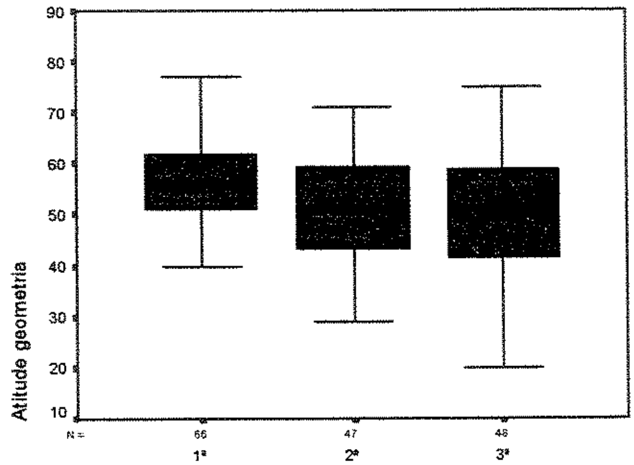


Figura 10.6. Atitudes em relação à Geometria por série

Assim como aconteceu com a Matemática, as atitudes em relação à Geometria estavam relacionadas com a área de conhecimento da futura profissão. Alunos de Exatas tinham atitudes mais positivas do que alunos de Humanas e Biológicas ($F_{(3,130)}$ = 5,385, p=0,002), conforme mostra a Figura 10.7.

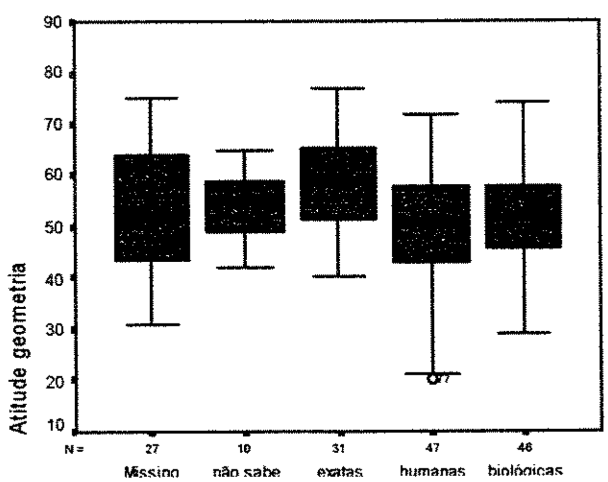


Figura 10.7. Atitudes em relação à Geometria por área de conhecimento.

Houve relação entre a autopercepção do desempenho e as atitudes em relação à geometria. Assim, alunos que se percebiam com desempenho mais baixo tinham atitudes mais negativas, enquanto que alunos que se percebiam com melhor desempenho tinham atitudes mais favoráveis à geometria. ($F_{(3,159)}$ = 24,925, p = 0,000). A Figura 10.8 e a Tabela 10.12 mostram os resultados.

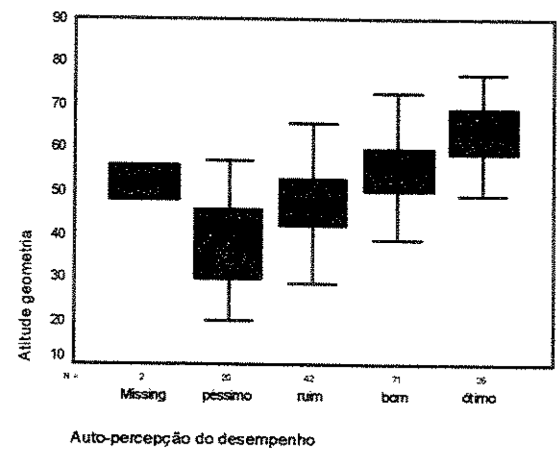


Figura 10.8 . Atitudes em relação à geometria pela auto-percepção do desempenho.

Tabela 10.12. Distribuição dos valores da EARG por grupos

Variáveis independentes	Grupos	N	Média	Desvio padrão	Estatística
Gênero	Masculino	77	54,64(*)	10,34	$t_{(159)}$= 2,218
	Feminino	84	50,76(*)	11,70	p=0,028
Série	1ª	66	55,82(**)	9,12	$F_{(2,158)}$= 5,287
	2ª	47	51,49	10,60	p=0,006
	3ª	48	49,31(**)	13,25	
Área	Exatas	31	58,81(**)	9,14	$F_{(3,130)}$ = 5,385
	Humanas	47	49,43(**)	12,10	p=0,002
	Biológicas	46	51,24(**)	9,98	
Auto-percepção do desempenho	Péssimo	31	40,36(**)	13,81	
	Ruim	43	46,88(**)	10,64	$F_{(3,159)}$ =24,925
	Bom	68	54,73(**)	9,06	p=0,000
	Ótimo	21	64,33(**)	12,84	

(*) diferem estatisticamente ao nível de 0,05. (**) diferem estatisticamente ao nível de 0,01

Análise das atitudes em relação à matemática e à geometria

Com o objetivo de verificar a existência ou não de correlações entre as atitudes em relação à matemática e em relação à geometria, foi feita a análise de correlação, sendo calculado o coeficiente de correlação de Pearson (r = 0,615, p = 0,01). Tal valor indicou uma correlação positiva com intensidade entre moderada e forte entre as escalas. Isso mostrou que, dentro do grupo analisado, os sujeitos que tinham as atitudes mais negativas em relação à matemática também tendiam a ter as atitudes mais negativas em relação à geometria. Os alunos com atitudes mais positivas em relação à matemática também tendiam a ter as atitudes mais positivas em relação à geometria. Essa tendência se manteve nas três séries, conforme mostra a Tabela 10.13.

Tabela 10.13. Correlação entre as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à Geometria (EARG) por série.

Série	Correlação entre EARM e EARG		
1ª	N=62	$r = 0{,}612^{**}$	$p = 0{,}000$
2ª	N=46	$r = 0{,}649^{**}$	$p = 0{,}000$
3ª	N=47	$r = 0{,}628^{**}$	$p = 0{,}000$
Geral	**N=153**	$\mathbf{r = 0{,}615^{**}}$	$\mathbf{p = 0{,}000}$

** A correlação é significante ao nível de 0.01

A análise de regressão mostrou que as atitudes podiam ser relacionadas através da equação:

$$\mathbf{G = 0{,}546*M + 24{,}542}$$
$$F_{(1,153)} = 93{,}168 \quad p=0{,}000$$

sendo **G** as atitudes em relação à geometria, ou seja, a pontuação na escala EARG (geometria) e **M** as atitudes em relação à matemática, ou seja, a pontuação na escala EARM (matemática). O valor encontrado R^2 =0,38, indicou que 38% da variação das atitudes em relação à geometria poderia ser explicada pela variação das atitudes em relação à matemática e que 62% dessa variação poderia ser explicada por outros fatores. A análise de regressão mostrou que sujeitos com baixa pontuação na EARM (matemática), ou seja, com atitudes negativas, tenderam a ter pontuação ligeiramente mais alta em relação à geometria. Por outro lado, sujeitos com alta pontuação nas atitudes em relação à matemática tenderam a ter atitudes ligeiramente mais negativas em relação à geometria. A Figura 10.9 ilustra os resultados encontrados.

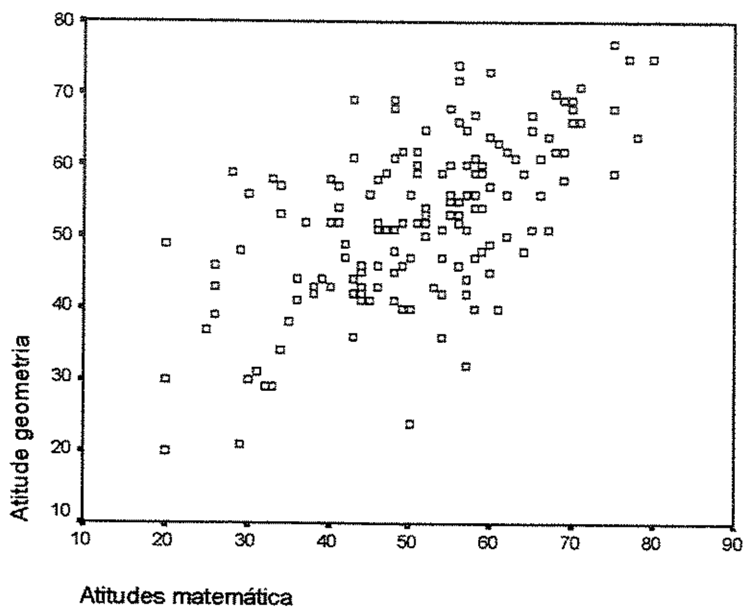


Figura 10.9. Relação entre as Atitudes em relação à Matemática e à Geometria.

DESEMPENHO NO TESTE DE RACIOCÍNIO ESPACIAL (RE)

O teste foi aplicado pela pesquisadora durante uma das aulas, na presença do professor da sala. A aplicação seguiu a orientação prevista no Manual Prático de Aplicação, Avaliação e Interpretação da BPR-5 (Primi & Almeida, 2000). O teste era formado por vinte questões, sendo atribuído 1,0 ponto para cada questão respondida corretamente. O desempenho de cada sujeito foi medido pela soma dos pontos obtidos. Os resultados gerais e por série são mostrados na Tabela 10.14. A distribuição de freqüências do desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) não apresentou normalidade (K-S(167)=0,130, *p*=0,000) e a Figura 10.10 ilustra o desempenho dos sujeitos

Tabela 10.14. Estatísticas Descritivas do desempenho no teste RE (Raciocínio Espacial)

		1ª série (n= 67)	2ª série (n=47)	3ª série (n=53)	Total (n=167)
Média		14,52	15,74	14,45	14,84
Desvio padrão		3,28	3,24	3,64	3,41
Moda		16	16	12	16
Assimetria		-1,176	-0,802	-0,018	-0,623
Kurtose		2,073	-0,082	-0.957	0,210
Mínimo		2	8	6	2
Máximo		19	20	20	20
Percentis	**5**	8,40	9,00	8,70	9,00
	25	13,00	14,00	12,00	12,00
	50	15,00	16,00	14,00	15,00
	75	17,00	18,00	18,00	17,00
	95	19,00	20,00	20,00	20,00

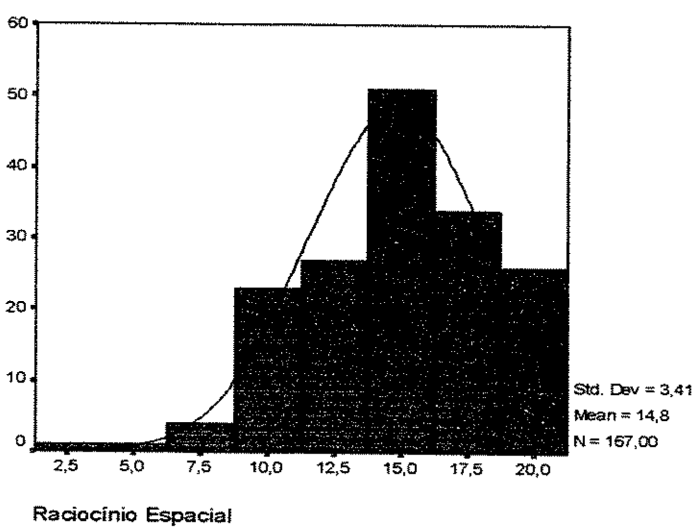


Figura 10.10. Histograma do desempenho no teste Raciocínio Espacial.

Os testes estatísticos apontaram algumas diferenças por grupos. Os meninos tiveram um desempenho melhor do que as meninas, sendo significativa a diferença entre as médias ($t_{(165)}$= 2,709, p=0,007) e este resultado é ilustrado na Figura 10.11.

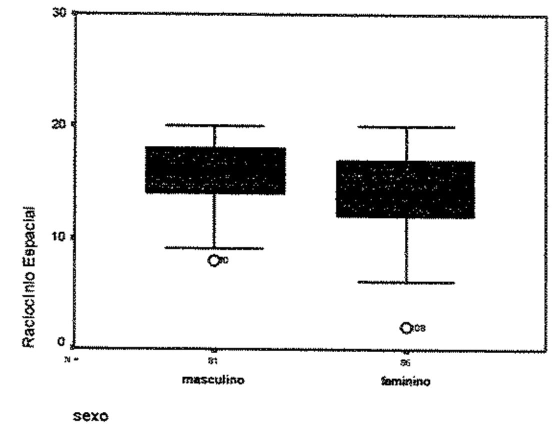


Figura 10.11. Raciocínio espacial por gênero.

Não foram significativas as diferenças de desempenho quanto à série, embora a 2ª série tenha tido média mais alta do que as outras.

Os alunos que pretender cursar a área de Exatas tiveram um desempenho ligeiramente melhor do que os outros, mas a diferença não foi significativa.

Ao término da aplicação, o aluno foi solicitado a responder se ele havia gostado de fazer o teste. Os alunos que afirmaram ter gostado de fazer o teste tiveram um desempenho melhor do que outros.Também foi solicitado ao aluno que fizesse uma auto-avaliação do desempenho naquele teste. Os alunos que afirmaram ter tido um bom desempenho realmente se saíram melhor do que os que afirmaram ter um baixo desempenho. Essas diferenças foram significativas e são ilustradas pela Figura 10.12 e Figura 10.13.

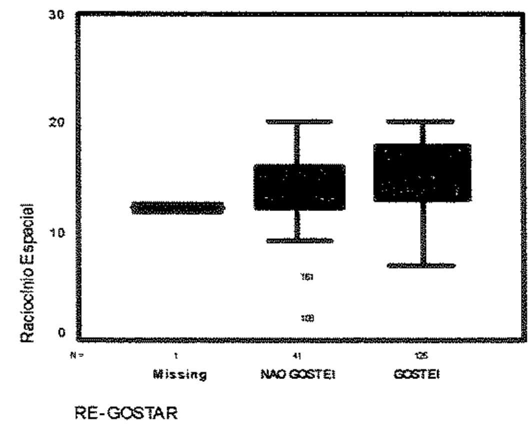


Figura 10.12. Raciocínio espacial pelo gostar de fazer o teste.

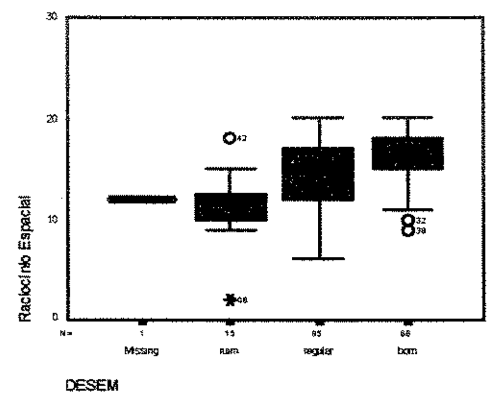


Figura 10.13. Raciocínio espacial pela auto-avaliação.

A tabela 10.15 mostra os resultados citados.

Tabela 10.15. Distribuição dos valores da pontuação no teste RE (Raciocínio Espacial) por grupos.

Variáveis	Grupos	N	Média	D.padrão	Estatística
Gênero	Masculino	81	15,57(*)	3,05	$t_{(165)}= 2{,}709$
	Feminino	86	14,16(*)	3,61	$p=0{,}007$
Série	1ª	67	14,52	3,28	$F_{(2,160)} = 2{,}318$
	2ª	47	15,74	3,24	$P=0{,}102$
	3ª	53	14,45	3,64	
Área	Exatas	33	15,94	2,82	$F_{(3,135)} = 1{,}493$
	Humanas	48	14,56	3,70	$P=0{,}219$
	Biológicas	47	14,57	2,97	
	Não sabe	11	15,09	3,08	
Gostar do teste	Gostei	125	15,28(*)	3,26	$t_{(164)}= 2{,}813$
	Não gostei	42	13,59(*)	3,60	$p=0{,}006$
Auto-avaliação	Ruim	15	11,27(*)	3,51	$F_{(2,160)}$
	Regular	85	14,51(*)	3,42	$=15{,}748$
	Bom	66	16,14(*)	2,65	$P=0{,}000$
Total		**167**	**14,86**	**3,42**	

(*) diferem estatisticamente ao nível 0,001

RELAÇÕES ENTRE O DESEMPENHO NO TESTE DE RACIOCÍNIO ESPACIAL E AS ATITUDES

Com o objetivo de verificar a existência ou não de relações entre as atitudes em relação à matemática e à geometria e o desempenho no teste de Raciocínio Espacial, foi feita a análise de correlação, sendo calculado o coeficiente de correlação de Pearson, conforme mostra a Tabela 10.16.

Tabela 10.16. Correlações entre o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à Geometria (EARG)

Variáveis	Atitudes/Matemática (EARM)	Atitudes/Geometria (EARG)
Raciocínio Espacial (RE)	r = 0, 266(*) p = 0,01 n=157	r = 0, 309(*) p = 0,01 n=153

(*) a correlação é significante ao nível de 0,01.

Verificou-se uma correlação fraca, porém altamente significativa, entre as variáveis Raciocínio Espacial e Atitudes em relação à Matemática, e uma correlação um pouco maior entre o Raciocínio Espacial e as atitudes em relação à Geometria.

Quando se buscou verificar se essas correlações se mantinham nas três séries, observou-se uma relação interessante. As correlações entre o desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática (EARM) tendem a ser fracas nas três séries, embora significativa na 1ª série. No entanto, as correlações entre desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Geometria (EARG) são distintas nas três séries, tendo sido encontrada uma correlação moderada e significativa na terceira série. Essa correlação mais forte na 3ª série pode ser devida ao assunto que é estudado com mais profundidade nessa série, ou seja, a geometria espacial, que parece requerer raciocínio espacial. A tabela 10.17 mostra os resultados.

Tabela 10.17. Correlações entre o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática (EARM) e à Geometria (EARG) por série

Variáveis	Atitudes Matemática (EARM)			Atitudes Geometria (EARG)		
	1ª série n=64	2ª série n=44	3ª série n=49	1ª série n=62	2ª série n=43	3ª série n=48
Raciocínio Espacial (RE)	r = 0, 261(*) p = 0,037	r = 0, 201, p = 0,190	r = 0, 281, p = 0,051	r = 0, 183, p = 0,155	r = 0, 284, p = 0,065	r = 0, 513(*), p = 0,001

(*) a correlação é significante ao nível de 0,01.

DESEMPENHO NA PROVA DO COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA (CEHM)

A Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) era formada por 75 itens que compunham cinco partes: contagem de cubos (Cubos), formação de polígonos em cubos (Polígonos), secção de sólidos (Secção), planificação de figuras espaciais (Planificação), projeção de faces (Projeção) e formação de sólidos de revolução (Revolução), cada uma referindo-se a um suposto fator da habilidade espacial para geometria.

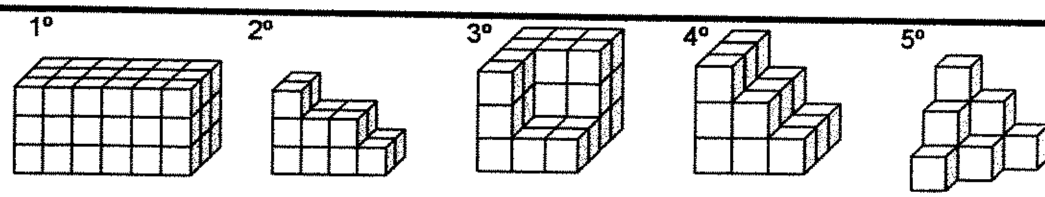
Será feita a análise do desempenho por partes e depois será analisado o desempenho geral .

ANÁLISE DO DESEMPENHO NA PROVA CEHM POR PARTES :

A contagem de cubos

Essa operação consiste em determinar o número de cubinhos que compõem um sólido. Alguns cubos apresentam uma, duas ou três faces visíveis, enquanto que outros cubos não possuem nenhuma face visível e os resultados são mostrados na Tabela 10.18.

Tabela 10.18. Distribuição dos sujeitos de acordo com os acertos e erros na contagem de cubos[1]

	1º		2º		3º		4º		5º	
Sólido										
	(54)		(16)		(28)		(18)		(10)	
	Nºde sujeitos	%	Nºde sujeitos	%	Nºde sujeitos	%	Nºde sujeitos	%	Nºde sujeitos	%
Acertaram	126	81,3	141	91,0	117	75,5	140	90,3	112	72,3
Erraram	29	18,7	14	9,0	38	24,5	15	9,7	43	27,7
Total	**155**	**100,0**	**155**	**100,0**	**155**	**100,0**	**155**	**100,0**	**155**	**100,0**

[1] Entre parênteses está o número correto de cubinhos

Verifica-se que o 2º e o 3º sólido obtiveram a maior porcentagem de acertos, e não o 1º, como era esperado. Na verdade, esperava-se que, para obter a resposta correta do 1º sólido, os alunos utilizassem a operação 6x3x3=54. No entanto, vários alunos não devem ter realizado essa operação.

Essa tarefa, embora seja aparentemente simples, pode contar com diferentes estratégias de solução, conforme apontou Battista (1996). Uma das categorias organizadas pelo autor, está aquela que descreve como o sujeito conceitua a coleção de cubos como se fossem camadas. Para obter o resultado, o sujeito calcula ou conta o número de cubos em uma camada (vertical ou horizontal) e multiplica pelo número de camadas. Em outras situações, é contado o número de cubos em uma camada (vertical ou horizontal) e é usada a adição. E ainda existe a contagem de sub-unidades das camadas, ou seja, o sujeito não organiza a contagem nas camadas.

No caso dos sujeitos dessa pesquisa que erraram o 1º, 2º e 4º sólido, é possível sugerir que eles tenham usado as estratégias descritas anteriormente, porém de forma desorganizada, fato que levou a encontrar um resultado errado.

Para realizar a contagem dos cubos no 3º e no 5º sólido, é possível que os sujeitos tenham usado as estratégias descritas por Battista (1996). Os sujeitos podem ter representado a coleção de cubos como espaço-cheio, sem utilizar camadas, ou seja, contando o número de cubos em fileiras ou colunas. Outras estratégias podem ter sido usadas, como contar grupos de unidades, contar cubos internos e externos, ou contagem não sistematizada. Parece que essas estratégias são as mais difíceis de serem organizadas, uma vez que os 3º e 5º sólidos apresentaram maior número de respostas erradas.

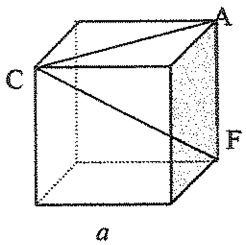
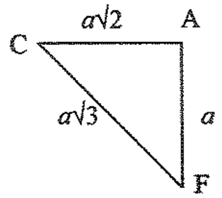
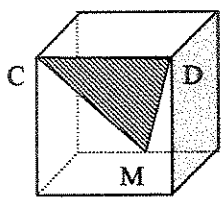
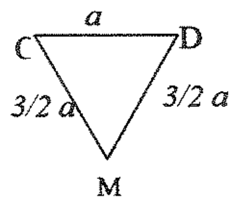
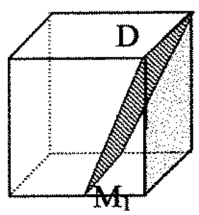
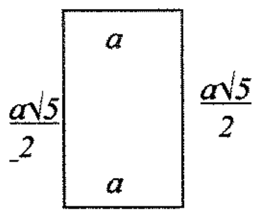
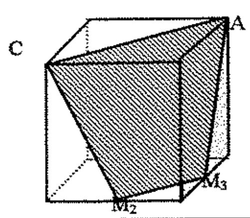
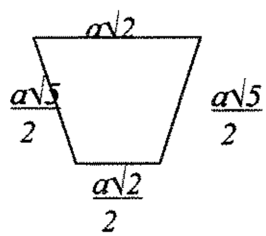
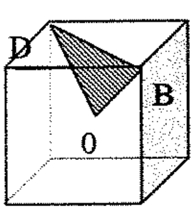
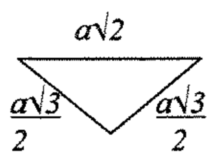
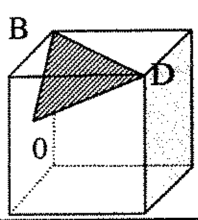
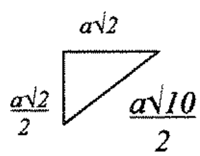
A formação e a identificação de polígonos no espaço

Uma outra questão solicitava que o sujeito escrevesse o nome do polígono obtido ao ligar pontos pertencentes a um cubo. Os pontos eram vértices do cubo, pontos médios de arestas, centro de faces ou centro do cubo. Assim, dado o cubo de vértices ABCDEFG da Figura , os sujeitos deveriam identificar os polígonos. Ao ligar os vértices, os polígonos estão contidos em planos relativos às faces do cubo. O aluno poderia obter a resposta certa apenas girando mentalmente a figura e comparando as medidas dos lados. Mas poderia também calcular as medidas dos lados em função da medida da aresta do cubo.

Foram calculadas as medidas dos lados dos polígonos solicitados em função da aresta do cubo *a,* sendo que essas medidas são mostradas na Tabela 10.19. Esta tabela mostra também que apenas seis alunos conseguiram identificar o triângulo AFC como retângulo e escaleno. A maioria dos sujeitos identificou como escaleno, mas omitiu a palavra retângulo. O mesmo aconteceu com o último triângulo que foi identificado apenas por escaleno. A identificação do ângulo reto em perspectiva pareceu ser uma tarefa difícil para os sujeitos, já que 65,2% deles não conseguiram identificar o retângulo DAM_1M_2. Acrescenta-se que todos os sujeitos que erraram essa questão identificaram o paralelogramo[1]. Parece, então, que a comparação das medidas dos segmentos em perspectivas é mais fácil do que a identificação de ângulos retos em perspectiva.

[1] Nota-se que o retângulo também é um paralelogramo, mas, no caso da tarefa, o aluno deveria identificar o nome que melhor representava a figura, sendo retângulo a resposta correta.

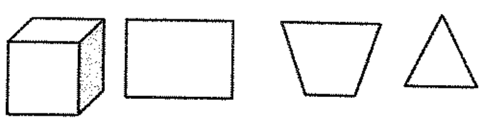
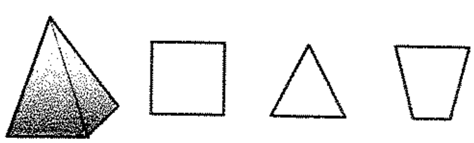
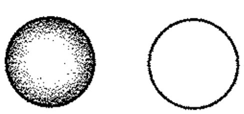
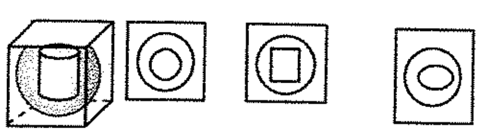
Tabela 10.19. Polígonos formados no cubo e distribuição dos alunos quanto ao acerto na formação e identificação de polígonos no espaço (N=155)

<table>
<tr><th rowspan="2">Polígono solicitado</th><th rowspan="2">Polígono com as medidas dos lados</th><th rowspan="2">Resposta correta</th><th colspan="2">Acertaram</th><th colspan="2">Acertaram em parte</th><th colspan="2">Erraram</th></tr>
<tr><th>NºSuj</th><th>%</th><th>Nºsuj</th><th>%</th><th>Nºsuj</th><th>%</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>Triângulo retângulo escaleno</td><td>6</td><td>3,9</td><td>92</td><td>59,4</td><td>57</td><td>36,8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>Triângulo isósceles</td><td>104</td><td>58,8</td><td>1</td><td>0,6</td><td>50</td><td>32,3</td></tr>
<tr><td>A 
</td><td>
</td><td>Retângulo</td><td>54</td><td>34,8</td><td>0</td><td>0,0</td><td>101</td><td>65,2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>Trapézio</td><td>31</td><td>20,0</td><td>0</td><td>0,0</td><td>124</td><td>80,0</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>Triângulo isósceles</td><td>66</td><td>42,6</td><td>3</td><td>1,9</td><td>86</td><td>55,5</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>Triângulo retângulo escaleno</td><td>10</td><td>6,4</td><td>90</td><td>58,1</td><td>55</td><td>35,5</td></tr>
</table>

A secção de sólidos

Outra questão que mostrou ser bastante complexa para os sujeitos foi a secção de sólidos geométricos. Mesmo a secção do cubo, a figura mais simples, apresentou dificuldades para eles. A Tabela 10.20 mostra as secções possíveis para cada sólido e a freqüência das pontuações dos sujeitos. O valor 0 representa nenhuma secção correta, e os valores 1, 2 e 3 representa uma, duas ou três secções corretas. Acrescenta-se que a esfera só possui uma secção e os sujeitos que desenharam outras figuras além do círculo tiveram pontuação zero nesse item.

Tabela 10.20. Exemplos de secções possíveis e distribuição de sujeitos pelo número de secções obtidas. (N=155)

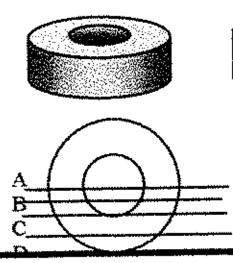
Sólidos e as secções possíveis	0 secção		1 secção		2 secções		3 secções	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
	22	14,1	72	46,5	50	32,3	11	7,1
	7	4,5	40	25,8	86	55,5	22	14,2
	15	9,7	34	21,9	70	45,2	36	23,2
	14	9,0	40	25,8	79	51,0	22	14,2
	46	29,9	108	70,1	-	-	-	-
	60	39,0	58	37,7	25	16,2	11	7,1

Foram realçadas, na tabela, as cédulas com as maiores freqüências. Pode-se verificar que a maioria dos sujeitos não conseguiu desenhar as três secções possíveis. Nota-se também que a última figura da tabela, isto é, formada pela inscrição de um cilindro e uma esfera num cubo apresentou a maior dificuldade. Quanto ao cubo, nota-se que não se considerou o quadrado como secção, uma vez que este foi apresentado como exemplo.

Nota-se ainda, em todos os casos, que as secções corretas foram obtidas pela secção dos planos horizontal e vertical. O plano inclinado pareceu mais difícil de ser imaginado e de ser representada a secção.

Nas duas questões seguintes, solicitava-se que o aluno desenhasse as secções obtidas por planos que apresentavam uma certa seqüência. As tabelas 10.21 e 10.22 mostram as secções corretas e a distribuição dos sujeitos pelos acertos em cada item.

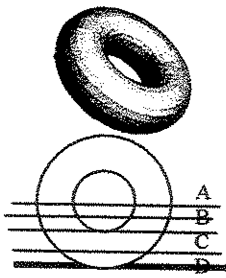
Tabela 10.21. Distribuição dos sujeitos quanto aos acertos nas secções do sólido

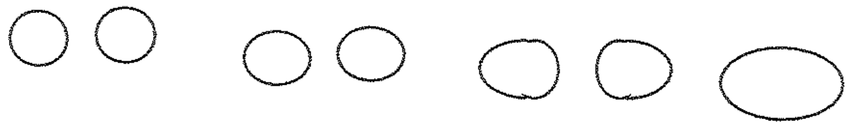


	A		B		C		D	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
Acertaram	52	33,7	45	29,2	35	22,7	43	27,9
Erraram	102	66,2	109	70,8	119	77,3	111	72,1
Total	154	100,0	154	100,0	154	100,0	154	100,0

O sólido em questão pode ser entendido como sendo um cilindro do qual foi retirado um cilindro interno. Apesar de se tratar de um sólido redondo, as secções solicitadas são retangulares. Foi verificado, no entanto, que a maioria dos sujeitos desenhou secções circulares ou elípticas.

Tabela 10.22. Distribuição dos sujeitos quanto aos acertos nas secções do sólido





	A		B		C		D	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
Acertaram	40	26,0	23	14,9	2	1,3	32	21,4
Erraram	114	74,0	131	85,1	152	98,7	121	78,6
Total	154	100,0	154	100,0	154	100,0	154	100,0

A tabela mostra que essa questão parece ter sido muito complexa para os sujeitos. Representar a secção formada pelo plano C foi mais difícil que a secção formada pelo plano D. A seqüência das secções e a continuidade delas parecem difíceis de serem representadas mentalmente.

A planificação de figuras

Foi solicitado aos sujeitos que fizessem o desenho da planificação de uma figura geométrica tridimensional, sendo esta apresentada em perspectiva. Analisando os desenhos dos alunos, percebe-se que a maioria não utilizou instrumentos de desenho geométrico, ou seja, régua e compasso. Por esse motivo, não se avaliou a exatidão de medidas, nem a retidão dos segmentos, ou a perfeição do círculo. A verificação dos diferentes desenhos baseou-se nas representações consideradas necessárias para se desenhar uma planificação correta, dada uma figura espacial.

A Tabela 10.23 mostra uma planificação correta e a distribuição dos sujeitos nos acertos e erros por figura.

Tabela 10.23. Planificações corretas e distribuição dos sujeitos quantos aos acertos e erros por figura (N=166)

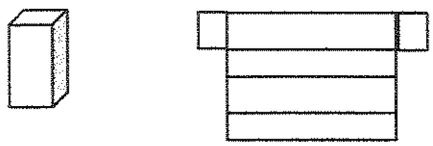
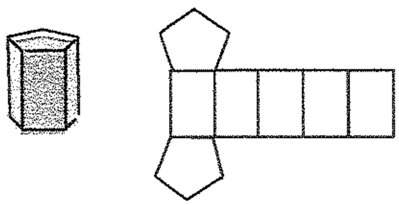
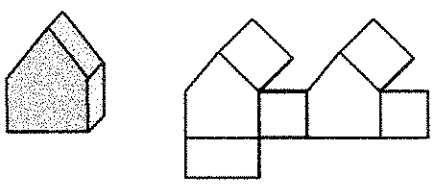
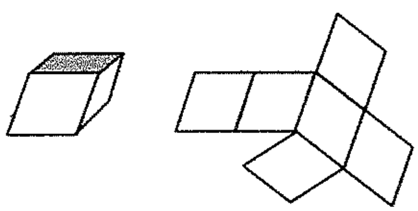
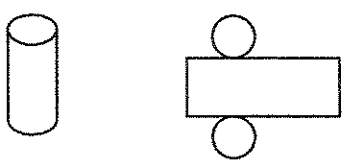
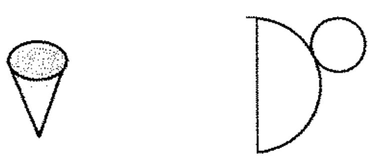
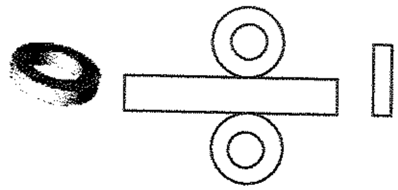
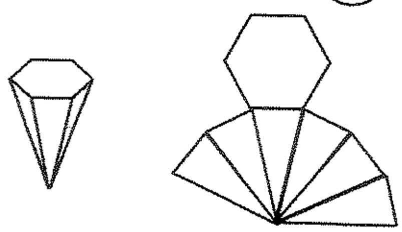
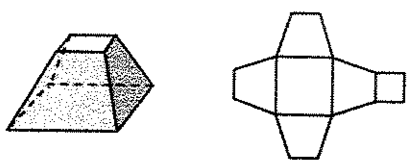
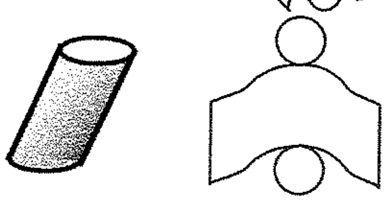
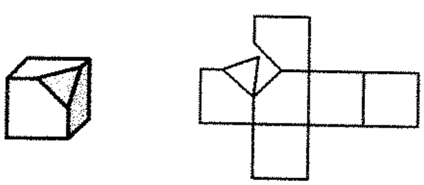
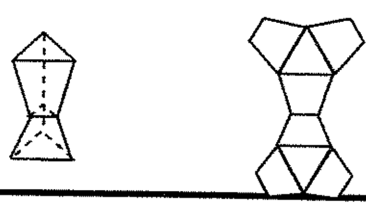
Figura e a planificação	Erraram		Acertaram em parte		Acertaram	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
	14	8,4	15	9,0	138	82,6
	19	11,4	22	13,2	126	75,4
	34	20,4	41	24,6	92	55,1
	42	24,1	121	72,5	4	2,4
	49	29,5	53	31,0	64	38,6
	139	83,7	15	9,0	12	7,2

Tabela 10.23. Planificações corretas e distribuição dos sujeitos quantos aos acertos e erros por figura (continuação) (N =166)

Figura e a planificação	Erraram		Acertaram em parte		Acertaram	
	Nºsuj	%	Nºsuj	%	Nºsuj	%
	122	73,5	29	175	15	9,0
	24	14,5	42	25,3	100	60,2
	35	21,1	28	16,9	103	62,2
	125	75,3	24	14,5	17	10,2
	159	95,8	3	1,8	4	2,4
	70	42,2	64	38,5	1	19,3
	134	80,7	18	10,8	14	8,4

Verifica-se, pela tabela, que os corpos redondos apresentaram grande dificuldade aos alunos. Os poliedros simples não apresentaram dificuldade para a maioria dos sujeitos, mas muitos não acertaram a planificação do paralelepípedo oblíquo, nem a do cubo com corte, nem a composição de dois troncos de cones.

A projeção de figuras

A habilidade de representar projeções de figuras alinhadas com a direção da projeção foi avaliada por quatro questões. As duas primeiras tratavam de sólidos formados por cubinhos com bases paralelas ao plano de projeção e com as arestas paralelas ao quadrado-base da projeção. A terceira questão, tratava de um cubo com base paralela ao plano de projeção, mas com arestas não paralelas ao quadrado-base da projeção. A quarta questão pedia a projeção de um cubo não alinhado à direção da projeção, e esta disposição da figura levou a uma pequena porcentagem de acertos, conforme mostram a Tabela 10.24, Tabela 10.25 e Tabela10.26.

Os resultados estão de acordo com a investigação de Pani e seus colaboradores (1996) que encontraram que, para uma base retilínea, a imaginação de transformações projetivas é melhor sucedida quando os objetos estão alinhados com a direção da projeção. Quando o objeto é tomado mais oblíquo que a projeção, o desempenho é pior. Sugere-se que a imaginação da projeção e da rotação é um tipo de solução de problema no qual as estruturas espaciais são organizadas em relação às propriedades dadas inicialmente dos objetos e transformações. Quando há alinhamento entre os vários componentes estruturais, o processo de imaginação funciona de forma mais eficiente. Sem tal alinhamento, é mais difícil formar as imagens mentais das projeções.

Tabela 10.24. Projeções corretas e distribuição dos sujeitos quantos aos acertos e erros por sólido e por face de projeção (N =166)

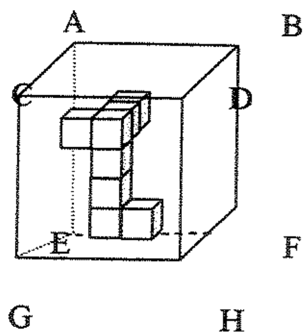
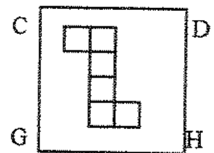
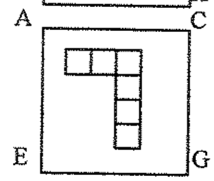
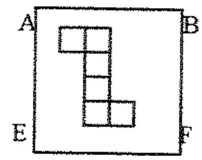
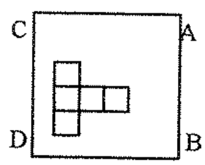
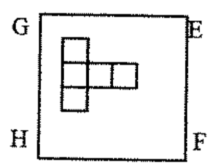
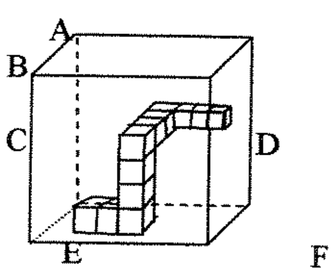
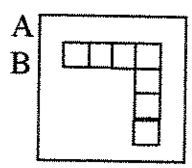
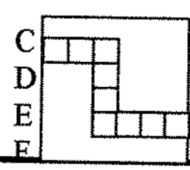
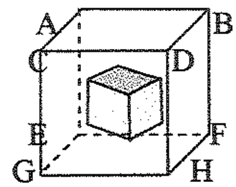
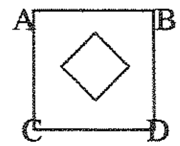
Sólidos e suas projeções		Erraram		Acertaram	
		Nºsuj	%	Nºsuj	%
		25	15,3	138	84,7
		47	28,8	116	71,2
		112	68,7	51	31,3
		130	79,8	33	20,2
		133	81,6	30	18,4
		73	44,8	90	55,2
		103	63,2	60	36,8

Tabela 10.25. Projeções corretas do cubo e distribuição dos sujeitos quantos aos acertos e erros por face (N =163)

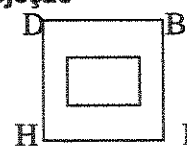
Cubo



Projeção



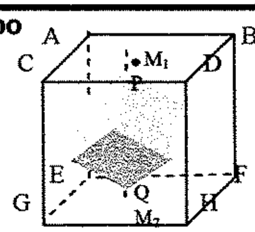
Projeção



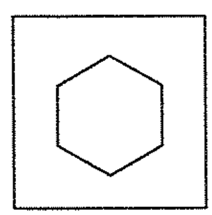
	Nº de sujeitos	%	Nº de sujeitos	%
Acertaram	63	38,6	13	8,0
Acertaram em parte	33	20,2	3	1,8
Erraram	67	41,1	147	90,2
Total	**163**	**100,0**	**163**	**100,0**

Tabela 10.26. Projeção correta do cubo e distribuição dos sujeitos quantos aos acertos e erros (N =166)

Cubo



Projeção



	Nº de sujeitos	%
Acertaram	6	3,7
Acertara em parte	2	1,2
Erraram	155	95,1
Total	**163**	**100,0**

A formação de sólidos de revolução

Para formar um sólido de revolução é necessário realizar uma rotação mental da figura plana em torno de um eixo dado. Essa rotação pode ser chamada de revolução e deve ser feita num espaço de três dimensões. Para chegar ao sólido, deve-se formar uma imagem mental do espaço limitado pela figura plana durante a revolução. Para avaliar essa capacidade, solicitou-se aos sujeitos que associassem a figura plana geradora ao sólido que seria resultante de sua revolução em torno de um eixo dado. Os resultados são mostrados na Tabela 10.27.

Tabela 10.27. Distribuição dos acertos e erros por sólido obtido e a respectiva figura plana geradora

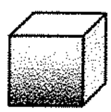
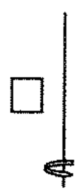
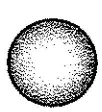
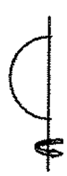
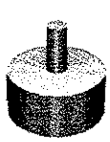
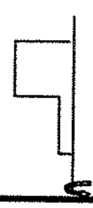
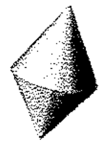
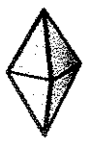
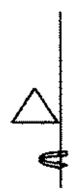
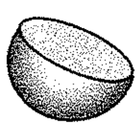
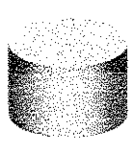
Sólido obtido	Figura plana geradora	Acertaram		Erraram	
		Nº de sujeitos	%	Nº de sujeitos	%
		131	80,9	31	19,1
		118	72,8	44	27,2
	(nenhuma)	100	61,7	62	38,3
		66	40,7	96	59,3
		96	59,3	66	40,7
		106	65,4	56	34,6

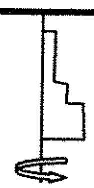
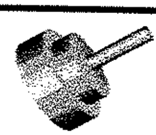
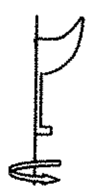
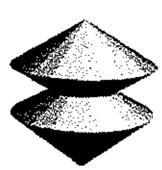
Tabela 10.27. Distribuição dos sujeitos por sólido e a respectiva figura plana geradora (continuação)

Sólido obtido	Figura plana geradora	Acertaram		Erraram	
		Nº de sujeitos	%	Nº de sujeitos	%
		91	56,2	71	43,8
	(Nenhuma)	78	48,1	84	51,9
		78	48,1	84	51,9
		81	50,0	81	50,0
		129	79,6	33	20,4
	(nenhuma)	69	42,6	93	57,4

Observando a tabela, verifica-se que, dos doze sólidos apresentados, sete foram associados corretamente à figura plana geradora do mesmo, embora as porcentagens de acertos não sejam muito maiores que as porcentagens de erros. É interessante observar o número de sujeitos que erraram a questão cujo sólido apresentado não tinha nenhuma figura plana que pudesse ser associada a ele. Parece que alguns sujeitos formavam a imagem mental e, na tentativa de representá-la externamente, associavam a figura que melhor se parecia com essa imagem, mesmo quando o sólido em questão era um poliedro – que jamais seria obtido por uma revolução.

Uma última questão solicitava que o sujeito fizesse o desenho da figura plana que seria geradora de um sólido apresentado a ele, sendo que o eixo de rotação foi apresentado na vertical. A tabela 10.28 mostra a figura correta para cada sólido e os acertos e erros dos sujeitos nessa questão.

Tabela 10. 28.Distribuição dos sujeitos por figura geradora de sólido

Figura plana correta	Sólido obtido	Acertaram		Acertaram em parte		Erraram	
		Nº de sujeitos	%	Nº de sujeitos	%	Nº de sujeitos	%
		88	54,3	2	1,2	72	44,4
		73	45,1	7	4,3	82	50,6
		71	43,8	19	11,7	72	44,4
		69	42,6	24	14,8	69	42,6

ANÁLISE DO DESEMPENHO GERAL NA PROVA CEHM

A cada item da prova foi atribuído o valor de 1,0 ponto, sendo que o desempenho dos sujeitos em cada parte foi avaliado considerando o número de pontos obtido. A soma total dos pontos indicou o desempenho de cada sujeito na prova. A Tabela 10.29 mostra as estatísticas para cada uma das partes.

Tabela 10.29. Estatísticas da Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM)

Partes	N	Nº total de pontos	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
1ª:Cubos	155	5,00	4,11	1,26	0,00	5,00
2ª:Polígonos	155	7,00	3,32	1,59	0,00	7,00
3ª:Secção	154	24,00	10,04	4,83	0,00	23,00
4ª:Planificação	165	13,00	5,75	2,54	0,00	12,50
5ª:Projeção	163	10,00	3,82	2,37	0,00	10,00
6ª:Revolução	162	16,00	9,07	4,70	0,00	16,00
Prova	**148**	**75,00**	**36,08**	**12,62**	**2,50**	**73,50**

Para comparar melhor o desempenho dos alunos em cada parte e no total da prova, optou-se por padronizar os resultados. Assim, cada pontuação obtida foi dividida pelo número total de questões na referida parte e a seguir multiplicado por 100. A Tabela 10.30 mostra os resultados já padronizados. Pode-se verificar que a média mais alta recaiu na primeira parte e a mais baixa na quinta parte, o que sugere que a contagem de cubos e a projeção são, respectivamente a mais simples e a mais complexa das operações mentais referentes à habilidade espacial dos sujeitos.

Tabela 10.30. Estatísticas da Prova Padronizada do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM)

Partes	N	Nº total de pontos	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
1ª:Contagem de Cubos	155	100,00	81,13	25,25	0,00	100,00
2ª:Form e Identificação de Polígonos	155	100,00	47,46	22,74	0,00	100,00
3ª:Secção	154	100,00	41,86	20,13	0,00	95,83
4ª:Planificação	165	100,00	44,24	19,52	0,00	96,15
5ª:Projeção	163	100,00	38,16	23,67	0,00	100,00
6ª:Revolução	162	100,00	56,71	29,34	0,00	100,00
Prova	**148**	**100,00**	**48,11**	**16,83**	**3,33**	**98,00**

Foi feita a análise fatorial com o objetivo de resumir as variáveis originais, isto é, as seis partes da prova, em um número menor de fatores. O coeficiente para o teste de esfericidade de Bartlett foi de 210,137, com p=0,000, o que permite concluir que a matriz de correlação das variáveis é adequada para o uso da análise fatorial.

A adequação da amostra total e a adequação da amostra para cada fator foram avaliadas pelo teste KMO (Kaiser-Meyer-Olkin), cujo coeficiente foi de 0,827, o que, segundo Pereira (1999) citado por Cazorla (2001) pode ser considerado uma boa adequação dos dados para a análise fatorial.

A análise dos autovalores da matriz de correlação mostrou a existência de apenas um fator com valor maior que 1 (2,851) e que foi responsável por 47,524% da variância total, conforme mostra a Tabela 10.31.

Tabela 10.31. Autovalores da matriz de correlação da Prova CEHM

Fator	Autovalor	Variância explicada	
		%Simples	%Acumulada
1	2,851	47,524	47,524
2	0,859	14,324	61,847
3	0,739	12,318	74,166
4	0,609	10,153	84,319
5	0,561	9,349	93,668
6	0,380	6,332	100,000

Apenas um componente foi extraído, conforme mostra a Tabela 10.32. Isto indica que a Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática avaliou apenas um componente.

Tabela 10.32. Carga fatorial das partes da Prova CEHM

Partes	Carga Fatorial
Planificação	0,818
Secção	0,753
Projeção	0,731
Revolução	0,695
Formação e Identificação de Polígonos	0,608
Contagem de Cubos	0,477

A estatística da Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática por série é mostrada na Tabela 10.33.

Tabela 10.33. Estatísticas da Prova CEHM por série.

		1ª série (n= 64)	2ª série (n=45)	3ª série (n=39)	Total (n=148)
Média		32,47	37,54	40,32	36,08
Desvio padrão		11,76	12,96	12,23	12,62
Moda		36,00	29,50	39,50	36,00
Assimetria		0,084	-0,145	0,144	0,051
Kurtose		-0,277	-0,592	1,349	-0,074
Mínimo		2,5	11,00	11,50	2,5
Máximo		62,00	65,00	73,50	73,5
Percentis	**5**	15,12	13,10	15,00	14,72
	25	23,62	29,75	34,00	27,25
	50	32,50	36,50	40,00	36,00
	75	42,25	47,75	46,00	45,00
	95	52,37	56,55	67,50	52,41

A distribuição do desempenho na Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) apresentou normalidade (K-S(148) = 0,046, p=0,200) e é mostrada na Figura 10. 14.

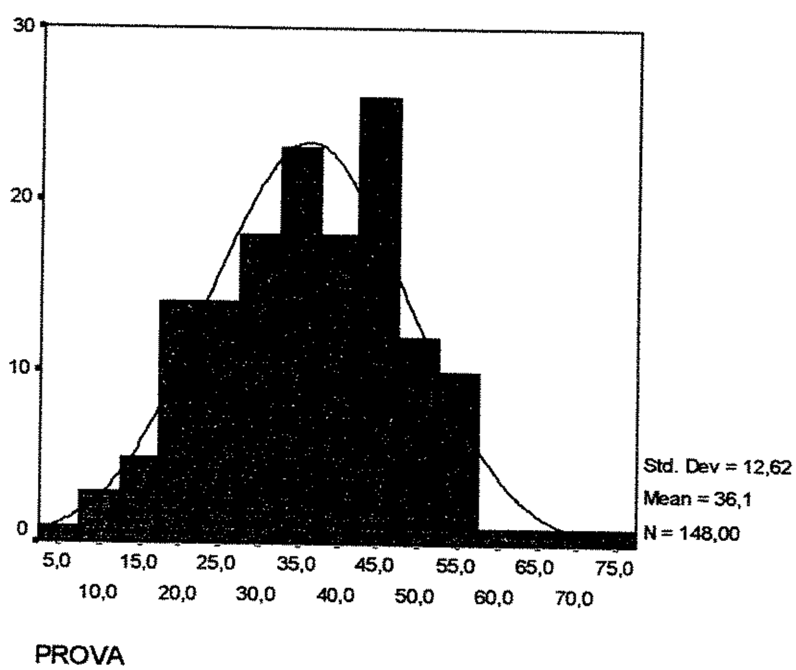


Figura 10.14. Histograma do desempenho na Prova CEHM.

O desempenho na Prova CEHM difere por gênero, isto é, os meninos tiveram um desempenho melhor do que as meninas $t_{(146)}$= 2,871, p=0,005), conforme mostra a Figura 10.15.

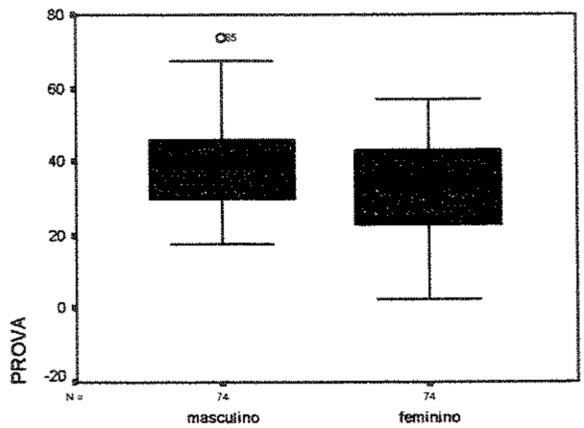


Figura 10.15. Desempenho na Prova CEHM por gênero

Também foi verificada a diferença por série, sendo que a ANOVA seguida do Teste de Tukey mostraram que os sujeitos da 3ª série tiveram um desempenho melhor do que os sujeitos da 1ª série ($F_{(2,145)}$ = 5,416 p=0,005), conforme mostra Figura 10.16.

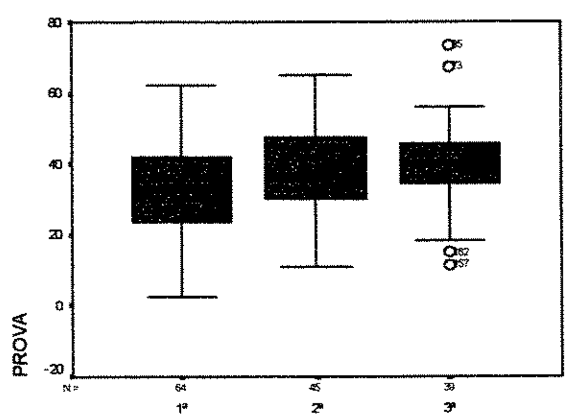


Figura 10.16. Desempenho na Prova CEHM por série

Embora os sujeitos que optaram pela área de Exatas tenham tido um desempenho superior aos que escolheram outras áreas, a diferença não foi significativa. ($F_{(3,124)} = 2,372$, p=0,074).A Tabela 10.34 mostra os resultados.

Tabela 10.34. Distribuição do desempenho na Prova CEHM por grupos.

Variáveis	Grupos	N	Média	D.padrão	Estatística
Gênero	Masculino	74	38,99(*)	12,07	$t_{(146)}$= 2,871
	Feminino	74	33,18(*)	12,56	p=0,005
Série	1ª	64	32,48(*)	11,76	$F_{(2,145)} = 5,416$
	2ª	45	37,54	12,96	p=0,005
	3ª	39	40,32(*)	12,23	
Área	Exatas	31	41,05	12,52	$F_{(3,124)} = 2,372$
	Humanas	45	34,58	12,91	p=0,074
	Biológicas	43	35,40	12,20	
	Não sabe	9	30,89	13,12	
Estuda para prova	Estuda	111	46,00(*)	11,82	$t_{(126)}$= 3,557
	Não estuda	17	34,65(*)	12,31	0,001

(*) $p<0,05$

AS RELAÇÕES ENTRE O COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA, O RACIOCÍNIO ESPACIAL E AS ATITUDES

Com o objetivo de verificar a existência de relações entre o desempenho na Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM), o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e as pontuações nas escalas de atitudes em relação à Matemática (EARM) e à Geometria (EARG) foi feita a análise de correlação, sendo calculado o coeficiente de correlação de Pearson em cada caso. O resultado mostrado na Tabela 10.35 indica que existiu correlação fraca entre CEHM e as variáveis EARM e EARG, mas a correlação entre CEHM e RE foi moderada, sendo que todas as correlações encontradas foram significativas.

Tabela 10.35. Correlações entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) com o desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática e à geometria.

Variáveis	Raciocínio Espacial (RE)	Atitudes/Matemática (EARM)	Atitudes/Geometria (EARG)
Componente Espacial da Hab. Matem (CEHM)	$r = 0,497$(*) $p = 0,000$ n=148	$r = 0,328$(*) $p = 0,000$ n=142	$r = 0,297$(*) $p = 0,000$ n=138

(*) a correlação é significante ao nível de 0,01.

Quando os sujeitos são separados de acordo com a série, podemos verificar variações interessantes nas correlações encontradas, conforme mostra a Tabela 10.36.

Tabela 10.36. Correlações[1] entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) com o desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e as atitudes em relação à Matemática e à Geometria por série

	Raciocínio Espacial (RE)			Atitudes/Matemática (EARM)			Atitudes/Geometria (EARG)		
	1ª	2ª	3ª	1ª	2ª	3ª	1ª	2ª	3ª
CEHM	0,467**	0,583**	0,470**	0,418**	0,217	0,347*	0,100	0,476**	0,683**
	p=0,000	p=0,000	p=0,003	p=0,001	p=0,167	p=0,033	p=0,448	p=0,002	P=0,000
	N=64	N=43	N=39	N=62	N=42	N=38	N=60	N=41	N=37

[1] Os valores se referem a r (Coeficiente de correlação de Pearson)

(*) a correlação é significante ao nível de 0,05. (**) a correlação é significante ao nível de 0,01.

A tabela 10.36 mostra que as relações entre CEHM e RE são moderadas em todas as séries. Dessa maneira, os sujeitos com desempenho melhor na Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática tenderam a ter um desempenho melhor no teste de Raciocínio Espacial e os sujeitos com pior desempenho na primeira também tenderam a ter pior desempenho na segunda prova, sendo que essa relação é mais forte na 2ª série.

Já o desempenho na prova CEHM parece não estar relacionado com as atitudes em relação à Matemática para os sujeitos da 2ª série. No entanto, existem correlações entre fraca e moderada para a 1ª e 3ª série. Assim, nestas séries, sujeitos com melhor desempenho na prova CEHM tenderam a ter atitudes mais positivas em relação à Matemática e sujeitos com pior desempenho tenderam a ter atitudes menos favoráveis à Matemática.

Foram encontradas diferenças nas correlações entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) e as atitudes em relação à Geometria (EARG) por série. Não existiu correlação entre CEHM e EARG na 1ª série. Mas, foi encontrada uma correlação moderada na 2ª série e uma correlação entre moderada e forte na 3ª série. Sujeitos da 2ª e 3ª séries com melhor desempenho na CEHM tinham atitudes mais positivas em relação à Geometria e sujeitos com pior desempenham na PHEG tinham atitudes mais negativas em relação à geometria. Sugere-se que o conteúdo de geometria que é dado nas séries possa estar influenciando nos resultados. Na 1ª série os alunos estudam geometria plana, enquanto que na 2ª e na 3ª série acrescenta-se geometria de posição e métrica, isto é, inclui-se o estudo das figuras tridimensionais que compunham praticamente toda a Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática. A Figura 10.17 ilustra os resultados.

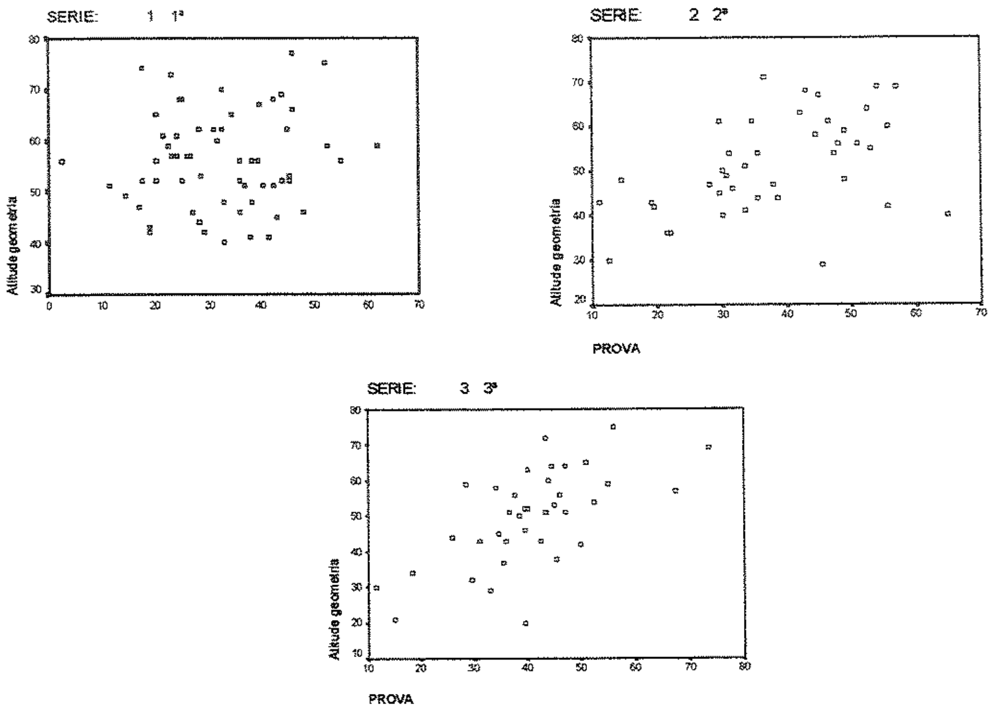


Figura 10.17. Relações entre CEHM e EARG por série.

DESEMPENHO ESCOLAR (NOTA)

O Desempenho Escolar dos sujeitos foi medido pela média das quatro notas bimestrais obtidas no ano de 2003 nas nove disciplinas constantes na grade curricular. Foi eliminada a disciplina Educação Artística, pois só aparecia na grade da 1ª série, e também não se considerou a nota de Educação Física, pois é considerada uma atividade. Foi utilizada também a nota geral anual, média das nove disciplinas. A Tabela 10.37 mostra a estatística da nota geral dos sujeitos e a nota por disciplina. Observa-se que foi feito o teste de normalidade, constatando-se que as variáveis Nota Matemática, Nota Geometria, Nota Física, Nota Português e Nota Geral têm distribuição normal.

Tabela 10.37. Estatística das Notas por disciplina e da Nota Geral

Variáveis	N	Média[1]	Desv. padrão	Mínima	Máxima	Teste de normalidade	
Nota Matemática	171	6,28	1,98	1,75	10,00	K-S(171)=0,054	p=0,200
Nota Geometria	171	6,54	2,00	1,00	10,00	K-S(171)=0,054	p=0,200
Nota Física	171	6,41	1,77	2,00	10,00	K-S(171)=0,049	p=0,200
Nota Química	171	6,85	1,60	2,25	9,88	K-S(171)=0,079	p=0,012
Nota Biologia	171	6,85	1,60	2,25	9,88	K-S(171)=0,079	p=0,012
Nota Português	171	7,03	1,06	4,75	9,75	K-S(171)=0,055	p=0,200
Nota História	171	7,02	1,18	3,75	9,50	K-S(171)=0,068	p=0,054
Nota Geografia	171	6,70	1,31	2,25	9,50	K-S(171)=0,086	p=0,004
Nota Inglês	171	7,51	1,24	4,25	10,00	K-S(171)=0,075	p=0,020
Nota Geral	**171**	**6,79**	**1,37**	**3,49**	**9,75**	K-S(171)=**0,043**	p=**0,200**

[1]As notas variam de 0,00 a 10,00

Não foram encontradas diferenças de gênero nas notas por disciplina e na nota geral ($t_{(146)}$= 0,416 p=0,678).

Foram analisadas as relações entre a nota de geometria e outras variáveis, conforme mostra a Tabela 10.38. Pode-se verificar que não existiram diferenças na nota de geometria quando se compara por gênero. Houve diferenças por série, sendo que a segunda série teve uma média melhor do que a terceira. Alunos que escolheram exatas tiveram média melhor do que os que escolheram humanas e verifica-se também as diferenças nas médias quanto à autopercepção do desempenho em geometria.

Tabela 10.38. Distribuição dos valores da nota de Geometria por grupos.

Variáveis independentes	Grupos	N	Média	Desvio padrão	Estatística
Gênero	Masculino	81	6,65	1,96	$t_{(169)}$= 0,697
	Feminino	90	6,43	2,06	p=0,487
Série	1ª	69	6,37	2,17	$F_{(2,168)}$= 4,383
	2ª	50	7,20(*)	1,72	p=0,014
	3ª	52	6,11(*)	1,92	
Área	Exatas	34	7,45(*)	1,84	$F_{(3,142)}$ = 2,904
	Humanas	50	6,26(*)	1,80	p=0,037
	Biológicas	50	6,66	1,88	
	Não sabe	12	6,99	1,80	
Auto-percepção do desempenho	Péssimo	22	5,38(*)	1,52	
	Ruim	42	5,48	1,77	$F_{(3,159)}$ =19,862
	Bom	72	7,11(*)	1,82	p=0,000
	Ótimo	27	8,15(*)	1,38	

Foi feita a análise de correlação entre as notas escolares e o resultado é mostrado na Tabela 10.39.

Tabela 10.39. Correlações entre as notas escolares[1]

	Mat	Geom	Fis	Quim	Biol	Port	Hist	Geog
Geom	0,891							
Fis	0,932	0,882						
Quim	0,876	0,827	0,917					
Biol	0,876	0,827	0,917	0,900				
Port	0,846	0,824	0,853	0,816	0,810			
Hist	0,662	0,580	0,707	0,728	0,725	0,673		
Geog	0,787	0,727	0,830	0,790	0,786	0,795	0,778	
Ingl	0,717	0,683	0,727	0,679	0,681	0,691	0,519	0,650
N=	171	171	171	171	171	171	171	171

[1] Os valores se referem a *r* (Coeficiente de correlação de Pearson) e as correlações são todas significantes ao nível de 0.01.

Encontrou-se correlação forte e significativa entre as notas escolares de todas as disciplinas, especialmente na área de Exatas. As notas de Geometria estão mais fortemente correlacionadas com Matemática Física e menos com as disciplinas de Humanas.

Com o objetivo de verificar a correlação entre o desempenho no teste de Raciocínio Espacial e a Notas escolares, calculou-se o coeficiente de correlação de Pearson e os resultados são mostrados na Tabela 10.40.

Tabela 10.40. Correlações[1] entre o Raciocínio Espacial (RE) e as Notas(N=161)

Disciplinas	Mat	Geom	Fis	Quim	Biol	Port	Hist	Geog	Ingl
Raciocínio Espacial(RE)	0,299** p=0,000	0,393** p=0,000	0,262** p=0,001	0,190* p=0,016	0,190* P=0,016	0,288** p=0,000	-0,020 p=0,805	0,121 P=0,125	0,197* p=0,012

[1] Os valores se referem a r (Coeficiente de correlação de Pearson
** A correlação é significante ao nível de 0.01
* A correlação é significante ao nível de 0,05

Verifica-se que a maior correlação encontrada está entre o desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e a Nota em Geometria. Apesar de ser uma correlação fraca, esta é altamente significativa.

Verificando se a correlação entre RE e Nota em Geometria se diferenciava por série, foi calculado o coeficiente de Pearson em cada situação, sendo que a Tabela 10.41 mostra os resultados.

Tabela 10.41. Correlações[1] entre o Raciocínio Espacial (RE) e as Nota em Geometria por série

Série	Correlação entre Raciocínio Espacial (RE) e Nota em Geometria		
1ª	n =67	r = 0,359**	p = 0,003
2ª	n =45	r = 0,303**	p = 0,043
3ª	n =53	r = 0,419**	p = 0,002
Geral	n=161	r = 0,393**	p = 0,001

** A correlação é significante ao nível de 0.01

Pode-se verificar que a correlação entre o desempenho no Teste de Raciocínio Espacial (RE) e a Nota em Geometria é maior na terceira série. Assim, sujeitos com melhores notas em Geometria tenderam a ter melhor desempenho no teste de Raciocínio Espacial (RE) e sujeitos com notas mais baixas tenderam a ter pior desempenho no Teste RE. Tal fato é ilustrado na Figura 10.18.

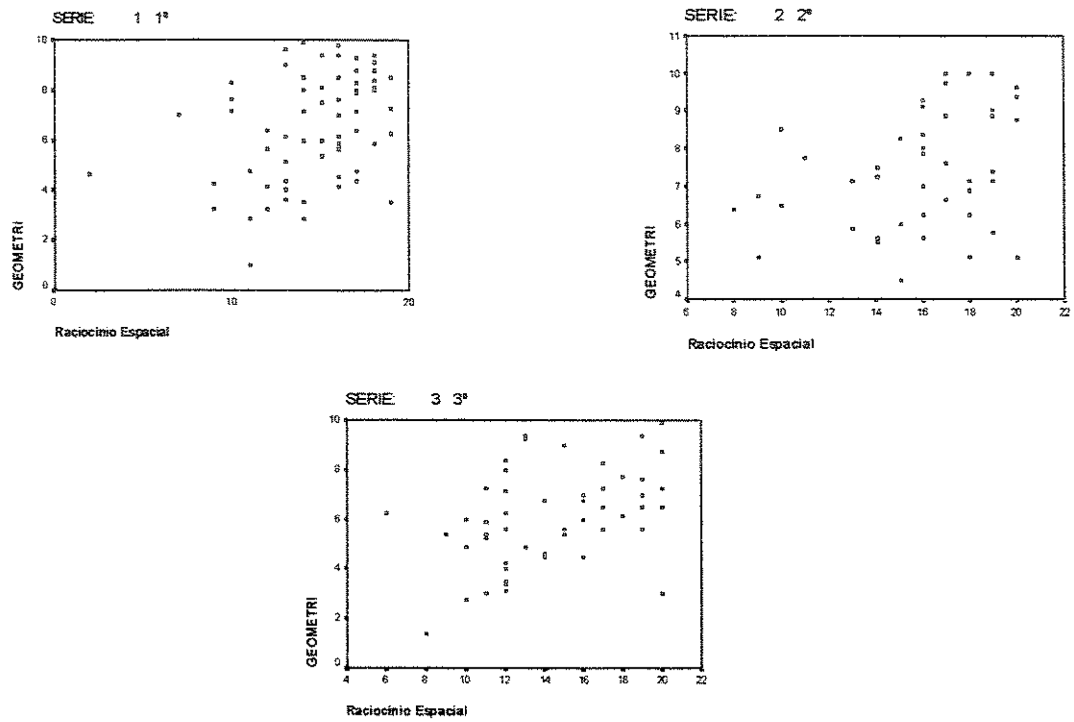


Figura 10.18. Relações entre a nota em Geometria e Raciocínio Espacial (RE) por série.

Para verificar se havia relação entre as notas em Geometria e em Matemática e o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática, foi feita a análise de correlação e calculado o coeficiente de correlação de Pearson, conforme mostra a Tabela 10.42.

Tabela 10.42. Correlações entre o desempenho na prova do Componenete Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) e as notas em Matemática e em Geometria

	Nota Mat	Nota Geom
	0,390**	0,454**
CEHM	p=0,000	p=0,000
	N=144	N=144

** A correlação é significante ao nível de 0.01

Verifica-se que as correlações são altamente significativas, sendo que é maior a correlação entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática e a nota em Geometria. As relações por série são mostradas na Tabela 10.43.

Tabela 10.43. Correlações entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) com as notas em Matemática e em Geometria por série

	Notas Matemática			Notas Geometria		
	1ª	2ª	3ª	1ª	2ª	3ª
CEHM	0,384**	0,486**	0,372**	0,432**	0,482**	0,574*
	p=0,002	P=0,001	p=0,020	p=0,000	p=0,001	p=0,000
	N=62	N=43	N=39	N=62	N=43	N=39

(*) a correlação é significante ao nível de 0,05. (**) a correlação é significante ao nível de 0,01.

Foi possível verificar que a correlação entre o desempenho na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) e a nota em Geometria é maior na 3ª série. Assim, os sujeitos deste estudo, em especial os da 3ª série, com as melhores notas em Geometria tenderam a ter o melhor desempenho na prova CEHM e os sujeitos com as piores notas tenderam a ter o pior desempenho na prova CEHM. A Figura 10.19 ilustra os resultados.

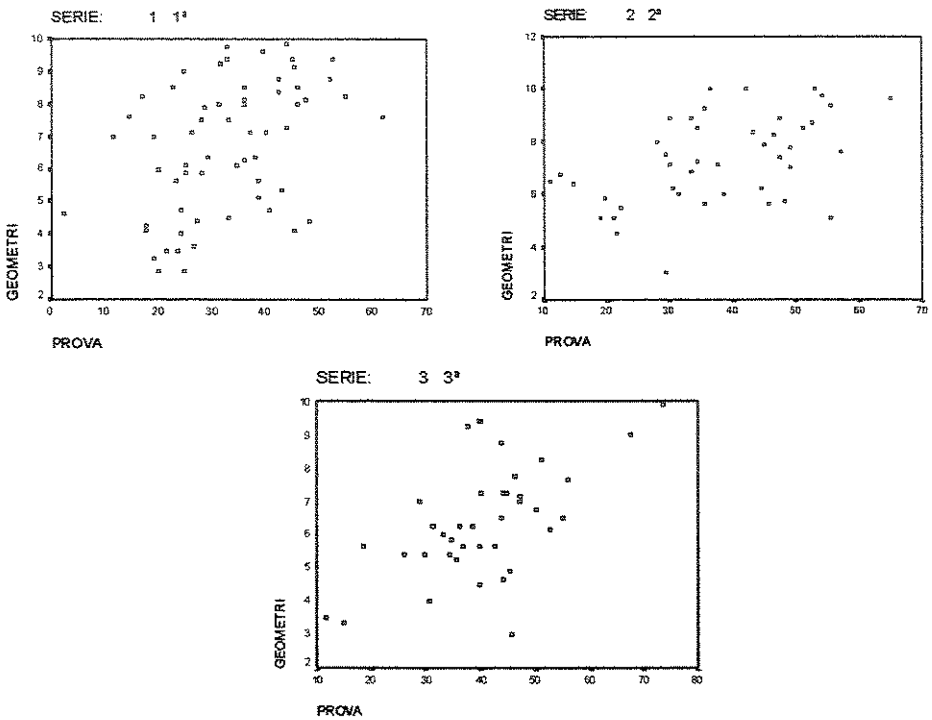


Figura 10.19. Relações entre o desempenho na prova do Componenete Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) e a nota em geometria por série.

As notas estavam relacionadas com as atitudes, tanto na disciplina matemática quanto na disciplina geometria.

Foi feita a análise de correlação entre a escala de atitudes em relação à Matemática (EARM) e as notas nessa disciplina, conforme mostra a Tabela 10.44.

Tabela 10.44. Correlações entre a nota em Matemática e as atitudes em relação à Matemática (EARM) por série

Série	Correlação entre nota Matemática e atitudes (EARM)		
1ª	n =64	$r = 0{,}547^{**}$	$p = 0{,}000$
2ª	n =46	$r = 0{,}530^{**}$	$p = 0{,}000$
3ª	n =47	$r = 0{,}547^{**}$	$p = 0{,}000$
Geral	n=157	$r = 0{,}527^{**}$	$p = 0{,}000$

** A correlação é significante ao nível de 0.01

Nota-se que a correlação entre as variáveis analisadas foi moderada para todas as séries, o que indica que os sujeitos com melhores notas em matemática tendiam a ter atitudes mais positivas em relação a esta disciplina e os sujeitos com notas mais baixas tendiam a ter atitudes mais negativas.

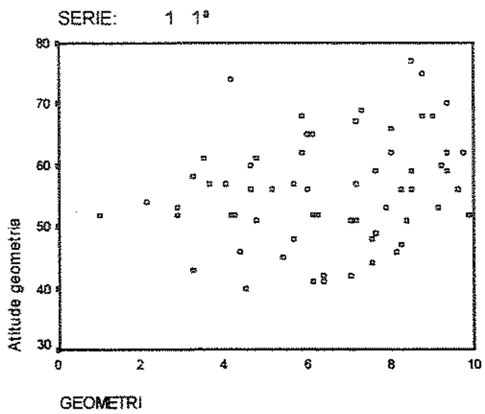
Foi feita a análise de correlação entre a escala de atitudes em relação à Geometria (EARG) e as notas nessa disciplina, conforme mostra a Tabela 10.45.

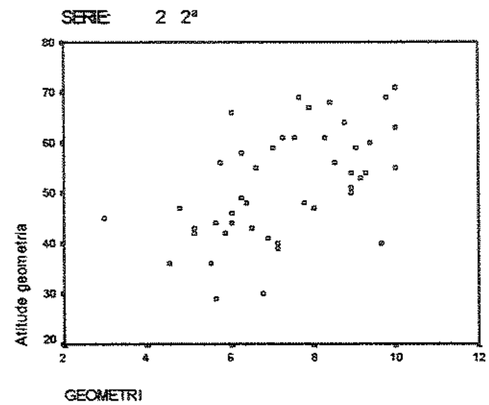
Tabela 10.45. Correlações[1] entre a nota em Geometria e as atitudes em relação à Geometria (EARG) por série

Série	Correlação entre nota Geometria e atitudes (EARG)		
1ª	n =64	r = 0,255*	p = 0,042
2ª	n =45	r = 0,539**	p = 0,000
3ª	n =46	r = 0,700**	p = 0,000
Geral	n=155	r = 0,435**	p = 0,000

* A correlação é significante ao nível de 0.05; ** A correlação é significante ao nível de 0.01

Nota-se que a correlação entre as variáveis analisadas foi moderada para o total de sujeitos. No entanto, os resultados diferiram por série. A correlação foi fraca para os sujeitos da 1ª série e moderada para os da 2ª. Verifica-se uma correlação forte para a 3ª série. Assim, em especial para os sujeitos da 3ª série, aqueles com melhores notas tinham atitudes mais positivas em relação à Geometria, enquanto que os sujeitos com notas mais baixas tinham atitudes mais negativas em relação a esta disciplina. A figura 10.20 ilustra os resultados.





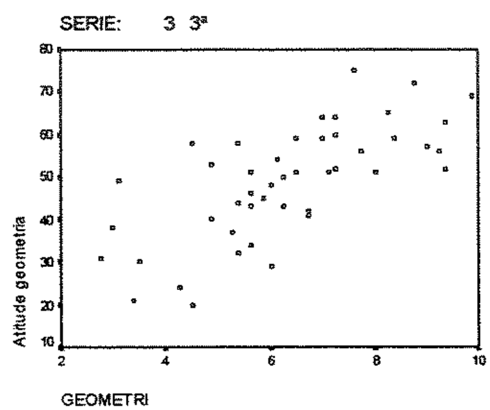


Figura 10.20. Relações entre a nota em Geometria e as atitudes em relação à Geometria (EARG) por série.

A figura 10.21 resume as principais relações encontradas.

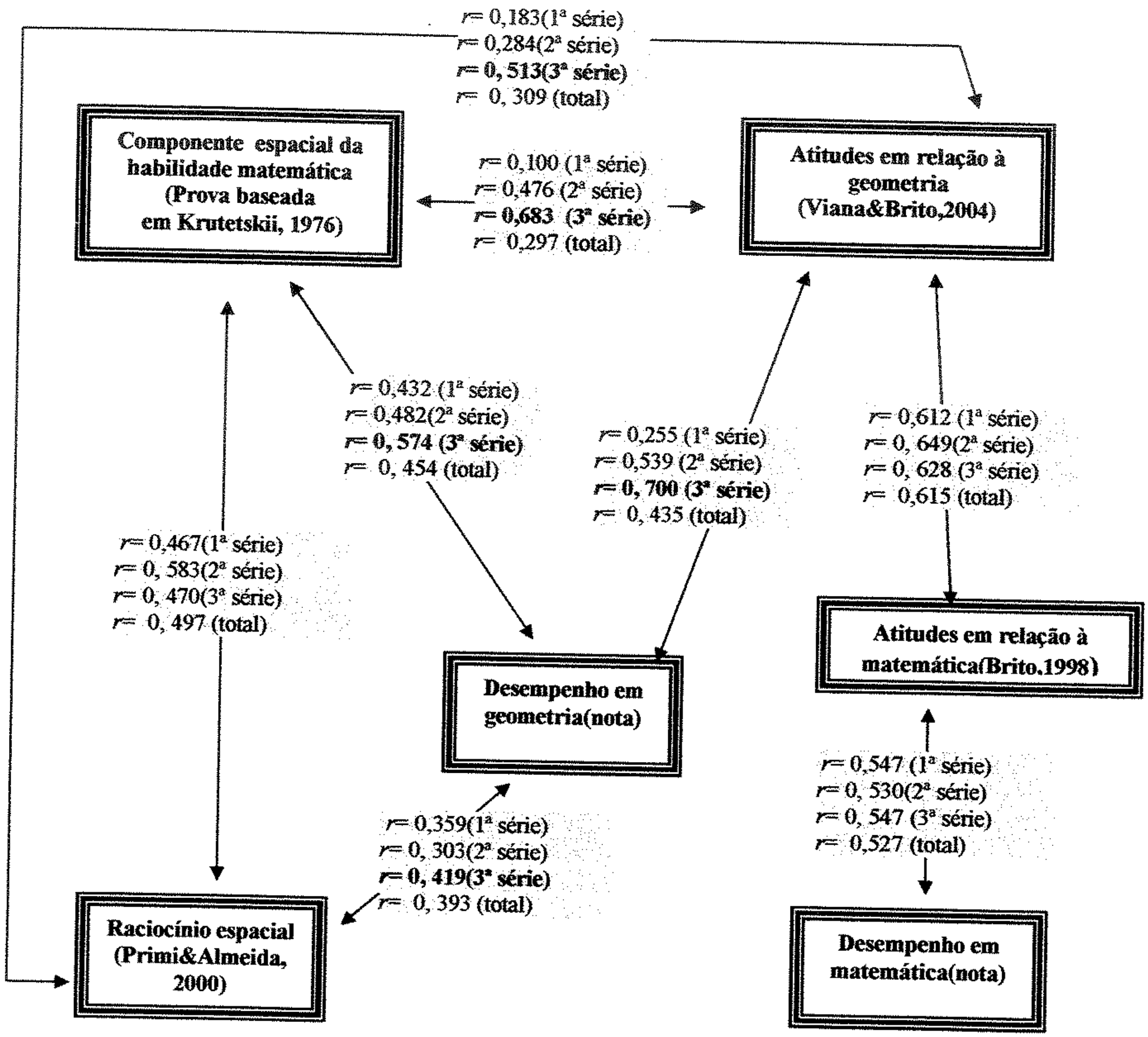


Figura 10.21. Relações entre as variáveis estudadas.

CAPÍTULO XI

O COMPONENTE ESPACIAL DA HABILIDADE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE QUALITATIVA

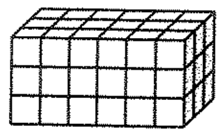
Para essa análise, optou-se por selecionar, dentre os sujeitos, aqueles com melhor e com pior desempenho na Prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática. Considerou-se que os sujeitos com melhor desempenho nesta prova lidavam com os conceitos geométricos espaciais com uma habilidade mais desenvolvida que a habilidade apresentada pelos sujeitos com pior desempenho. Foram selecionados vinte e um sujeitos, sendo que o primeiro grupo foi formado pelos dez sujeitos considerados como mais habilidosos e o segundo por onze sujeitos considerados como menos habilidosos. O gênero, a série e a pontuação na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (CEHM) são mostrados na Tabela 11.1.

Tabela 11.1. Sujeitos considerados como mais habilidosos e menos habilidosos de acordo com o gênero, série, desempenho na prova CEHM e pontuação no teste de RE.

Mais habilidosos				Menos habilidosos			
Sujeito	**Gênero**	**Serie**	**CEHM**	**Sujeito**	**Gênero**	**Serie**	**CEHM**
VIT	Masculino	3ª	73,5	DEB	Feminino	1ª	2,5
VAG	Masculino	3ª	67,5	ELE	Feminino	1ª	11,5
ALV	Masculino	2ª	65,0	LUC	Feminino	3ª	11,5
ALF	Masculino	1ª	62,0	MAR	Feminino	2ª	14,5
PED	Masculino	2ª	57,0	PAU	Feminino	1ª	14,5
CEL	Feminino	3ª	56,0	NAT	Feminino	2ª	14,5
DOU	Masculino	2ª	55,5	THA	Feminino	3ª	15,0
GUI	Masculino	2ª	55,5	CAR	Feminino	1ª	17,0
VIN	Masculino	3ª	55,0	ELL	Feminino	1ª	17,0
HEN	Masculino	1ª	55,0	NIL	Masculino	1ª	17,5
				THAS	Feminino	1ª	17,5

A contagem de cubos

Os sujeitos considerados como mais habilidosos tenderam a representar o processo de contagem por meio de uma expressão numérica. Para o primeiro sólido, os sujeitos apresentaram a fórmula axbxc, como mostra a Figura 11.1 .



6x3x3=54
(VIT, VAG, ALV)

Figura 11. 1. Sólido e a fórmula para contagem utilizada por sujeitos mais habilidosos

Já nos outros sólidos, alguns sujeitos organizavam os blocos em paralelepípedos, adicionando blocos menores. Outros dividiram o sólido em camadas, representando o resultado por meio de adição ou de multiplicação, o que caracterizou uma estratégia mais curta de solução. A figura 11.2 mostra algumas estratégias utilizadas pelos sujeitos mais habilidosos.

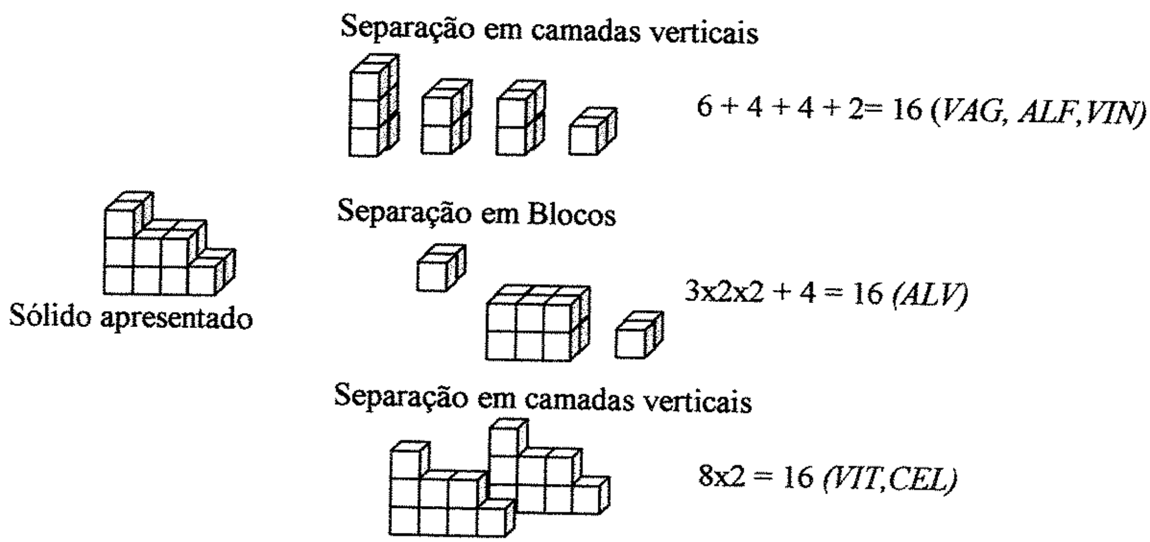


Figura 11.2. Estratégias de contagem por camadas, utilizadas por sujeitos mais habilidosos

Os alunos considerados como mais habilidosos também fizeram uso da composição de cubinhos, isto é, em vez de decompor o sólido em camadas para contá-las, preferiram compor o bloco e, então, subtrair o sólido que foi retirado, conforme mostra a Figura 11.3 .

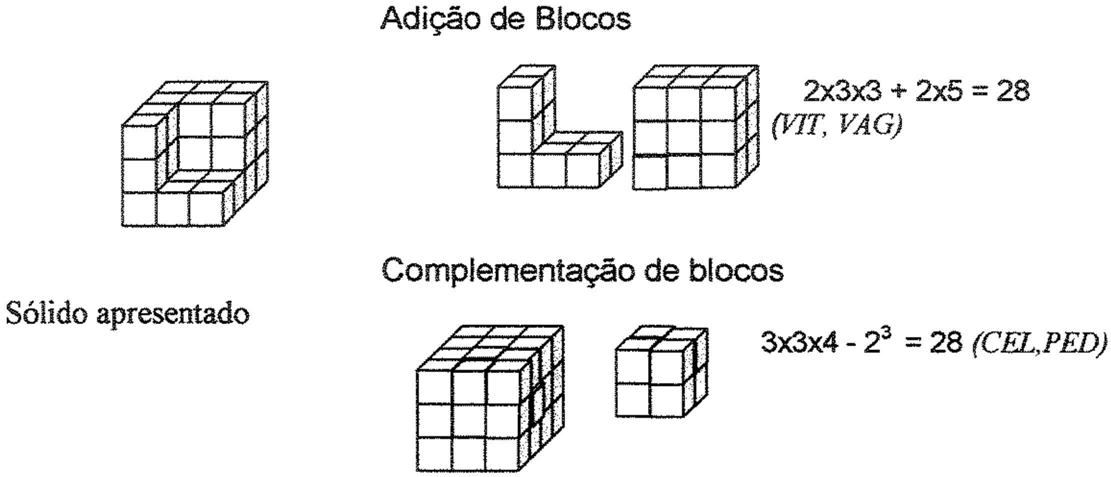


Figura 11.3. Estratégias de contagem por adição ou complementação de blocos, utilizadas por sujeitos mais habilidosos

Já os sujeitos considerados como menos habilidosos fizeram a contagem dos cubinhos um a um e, na maioria das vezes, erraram essa questão. Em algumas vezes, combinaram a contagem um a um com os blocos, mas sem sistematização, o que levou a muitos erros. Houve casos em que o sujeito contava apenas os cubos que estavam visíveis, em outras situações contavam os cubos que estavam no exterior e juntavam com os cubos não visíveis, que estavam no interior do sólido. Houve ainda os sujeitos que contaram as faces visíveis – e não os cubos. É o que mostra a Figura 11.4.

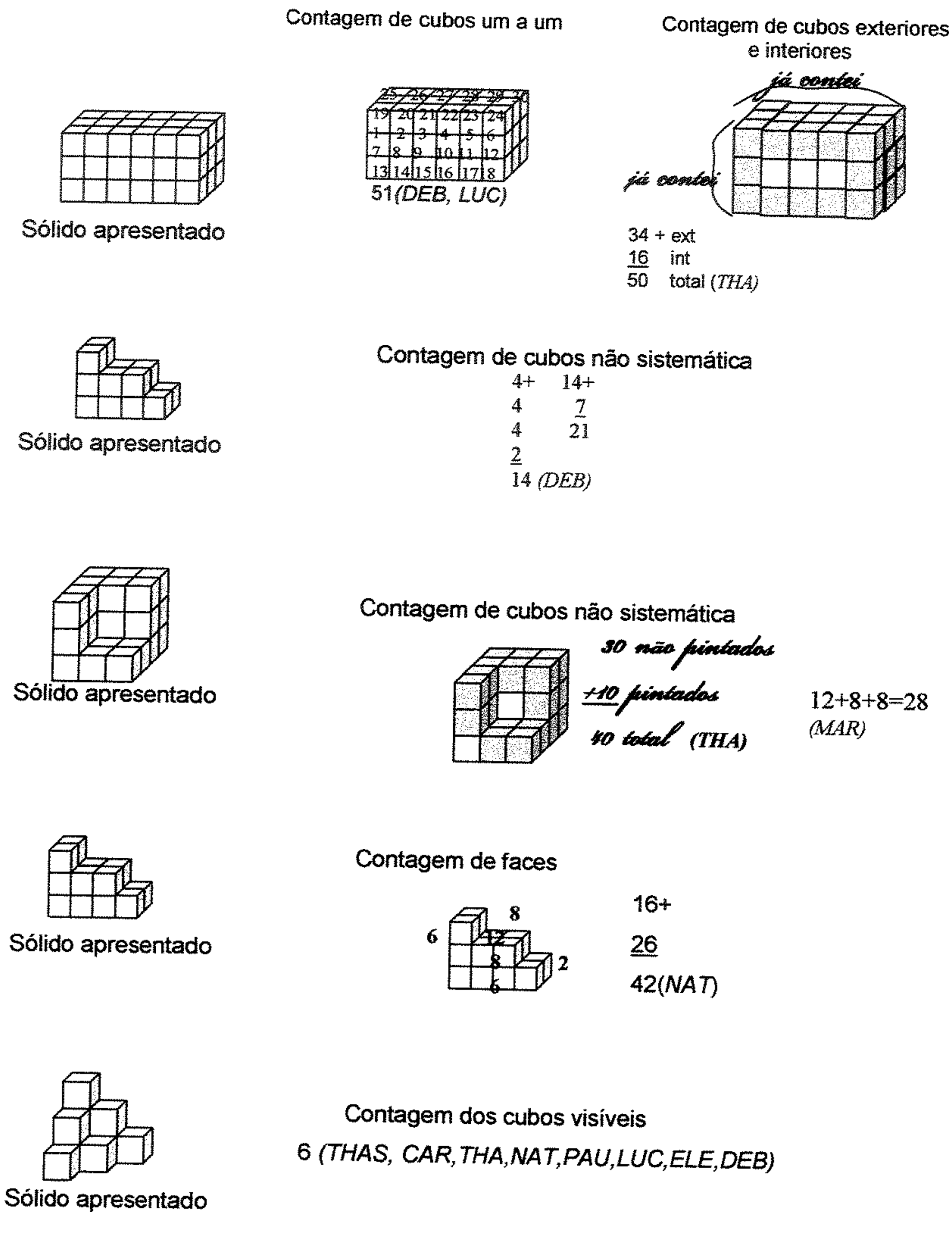


Figura 11.4. Estratégias de contagem de cubos e de faces utilizadas por sujeitos menos habilidosos

A formação e a identificação de polígonos no espaço

Essa questão solicitava que o sujeito unisse pontos de um cubo com o objetivo de formar uma imagem mental de um polígono. A seguir o sujeito deveria identificar o polígono usando uma relação de nomes. Convém esclarecer que os conceitos foram rapidamente recordados pela pesquisadora, isto é, a mesma explicou, com exemplos na lousa, os atributos de cada conceito. Para responder a essa questão, foram dadas as seguintes informações sobre os polígonos:[1]

- Quadrado: quatro lados congruentes e quatro ângulos retos
- Retângulo: quatro lados congruentes dois a dois e quatro ângulos retos
- Triângulo eqüilátero: três lados congruentes
- Triângulo isósceles: dois lados congruentes
- Triângulo escaleno: três lados não-congruentes
- Losango: quatro lados congruentes e lados paralelos dois a dois
- Trapézio: um par de lados paralelos
- Quadrilátero qualquer: qualquer figura formada por quatro lados
- Triângulo retângulo: triângulo com um ângulo reto
- Paralelogramo: quatro lados sendo dois pares de lados paralelos e ângulos não retos.

Praticamente todos os sujeitos que foram considerados como mais habilidosos conseguiram identificar os polígonos pela congruência dos lados, como nos casos mostrados na Figura 11.5.

---

[1] Essas definições foram dadas com o objetivo de identificar os polígonos. Nota-se que não estão presentes, nessas definições, as relações de inclusão, por exemplo: todo quadrado é retângulo, paralelogramo e retângulo. Assim, a definição que foi dada ao retângulo, por exemplo, é a de retângulo não- quadrado.

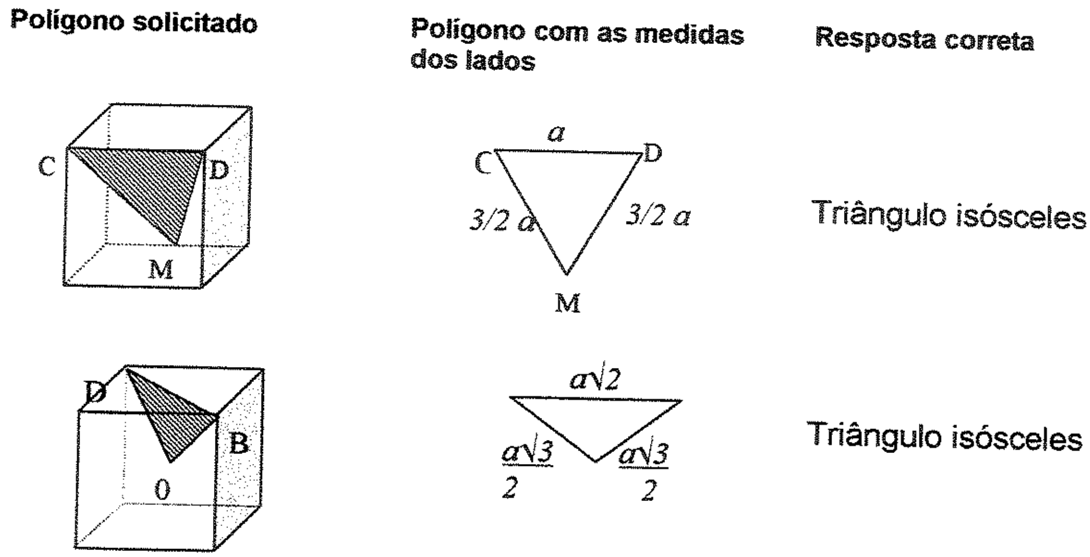


Figura 11. 5. Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes corretos dados por sujeitos mais habilidosos.

Para estabelecer a congruência dos lados dos polígonos mostrados na Figura 5, os sujeitos mais habilidosos pareciam comparar as medidas dos segmentos sem se deixar enganar pelo tamanho aparente dos mesmos, ocasionado pelo desenho em perspectiva. Talvez eles tenham formado as imagens dos polígonos no próprio cubo e, depois tenham girado mentalmente os polígonos para estabelecer a comparação das medidas dos lados. Mas, é possível, também, que a imagem do cubo tenha sido girada antes da formação da imagem do polígono. É pouco provável que eles tenham calculado a medida dos segmentos em função da medida da aresta, pois, se assim o fizessem, os cálculos teriam sido registrados.

Praticamente todos os sujeitos mais habilidosos também conseguiram identificar os ângulos retos dos polígonos, como no caso mostrado na Figura 11.6.

Polígono solicitado | **Polígono com as medidas dos lados** | **Resposta correta**

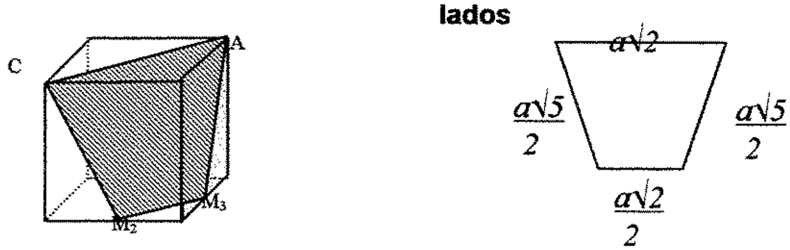
Retângulo

Figura 11.6. Polígono formado no cubo, suas medidas e o nome correto dado por sujeitos mais habilidosos.

Nota-se que para identificar os ângulos retos do retângulo era necessário que o sujeito reconhecesse os diedros retos que continham as faces do cubo. Também era necessário reconhecer retas perpendiculares a planos, pois estas eram suportes das arestas do cubo. Assim, a reta suporte da aresta AD era perpendicular ao plano que continha a face CDHG. Em seguida, o sujeito deveria estabelecer a perpendicularidade entre as retas contidas em planos perpendiculares, por exemplo, a reta suporte do segmento AM_1 era concorrente à reta suporte da aresta AD e as duas retas estavam contidas em planos perpendiculares; sendo assim, AD e AM_1 eram segmentos contidos em retas perpendiculares.

O reconhecimento do paralelismo entre retas contidas em planos paralelos é outra característica da habilidade relativa aos conceitos espaciais. A Figura 11.7 mostra um exemplo.

Polígono solicitado | **Polígono com as medidas dos lados** | **Nome correto**



Trapézio

Figura 11.7. Polígono formado no cubo, suas medidas e o nome correto dado por sujeitos habilidosos.

A relação de congruência entre os lados AM_3 e CM_2 talvez tenha sido utilizada por sujeitos mais habilidosos para a identificação do trapézio.

Quase todos os sujeitos habilidosos conseguiram estabelecer duas relações ao mesmo tempo: a de congruência de lados e a de perpendicularidade de lados quando identificaram os polígonos mostrados na Figura 11.8.

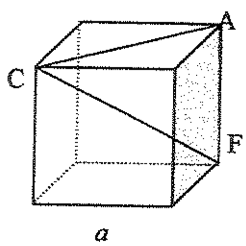
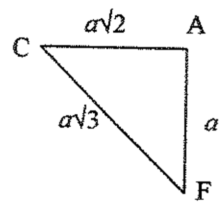
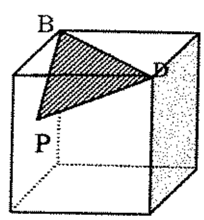
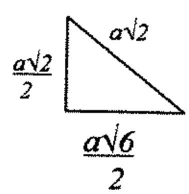
Polígono solicitado	Polígono com as medidas dos lados	Nome correto
		Triângulo retângulo escaleno
		Triângulo retângulo escaleno

Figura 11. 8. Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes corretos dados pelos sujeitos mais habilidosos.

Já os sujeitos considerados como não habilidosos não conseguiram estabelecer as relações de congruência entre os lados e também não identificaram o ângulo reto em algumas figuras. Quase todos conseguiram acertar o número de lados do polígono, embora alguns tenham errado isso, conforme mostra a Figura 11.9.

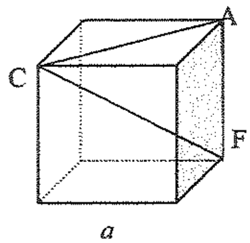
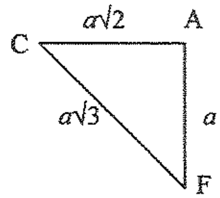
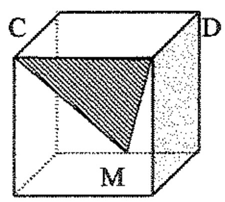
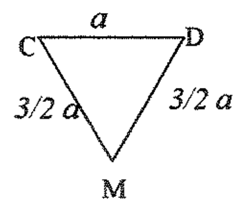
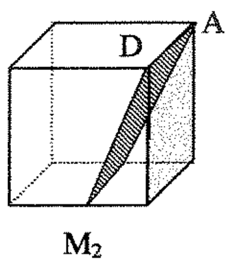
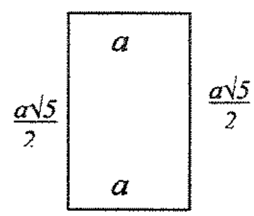
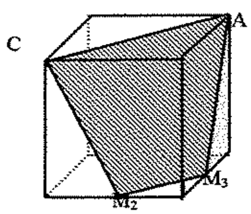
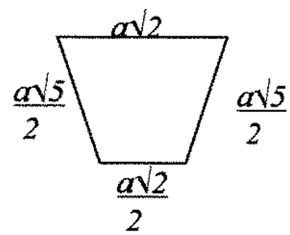
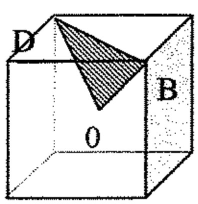
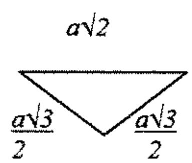
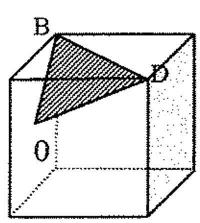
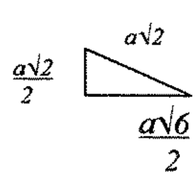
Polígono solicitado	Polígono com as medidas dos lados	Respostas dadas
		Triângulo eqüilátero*(CAR, NIL)* Triângulo isósceles *(ELE, LUC, PAU, THAS)*
		Triângulo retângulo*(PAU,NIL,ELL)* Triângulo eqüilátero*(THAS)* Triângulo escaleno*(LUC)* Retângulo *(DEB)* Quadrado *(ELE)*
		Paralelogramo*(MAR)* Quadrilátero qualquer*(PAU,NAT)* Trapézio *(DEB,LUC)* Triangulo retângulo *(ELE,CAR)* Triangulo isósceles *(ELL)*
		Triângulo isósceles*(DEB)* Paralelogramo *(ELE,ELL)* Quadrilátero qualquer*(LUC,CAR,NIL)*
		Triângulo eqüilátero (LUC,CAR,ELL) Triângulo retângulo (NAT,THAS)
		Losango (DEB) Triângulo eqüilátero (ELE, LUC,PAU,THAS) Triângulo isósceles (MAR,NAT,CAR,NIL,ELL)

Figura 11. 9. Polígonos formados no cubo, suas medidas e os nomes dados pelos sujeitos menos habilidosos

As secções

Os sujeitos considerados como mais habilidosos conseguiram seccionar os sólidos por meio de planos imaginários e representar as secções no plano do papel como se essas fossem vistas de frente. Para realizar essa tarefa parece que era necessária uma série de quatro operações, sendo que a primeira era a formação da imagem do plano em uma determinada posição seccionando o sólido. A segunda era a formação da imagem da figura obtida pela intersecção do sólido com o plano imaginário, isto é, era necessário que o sujeito estabelecesse o limite dos pontos que pertenceriam ao plano e ao sólido ao mesmo tempo. A terceira era girar o plano em que se encontrava essa figura para poder reconhecê-la e então representá-la, finalmente, no plano do papel. Os sujeitos considerados como mais habilidosos demonstraram ter conseguido imaginar planos horizontais e verticais com diferentes afastamentos do centro do sólido, podendo assim, formar imagens de várias secções. Parece que conseguiram também imaginar vários planos inclinados que formavam vários ângulos com o plano da base do sólido, e também esses planos com diferentes afastamentos do centro dos sólidos. Assim, as secções puderam ser variadas para cada sólido, dependendo da posição dos planos. Também conseguiram representar as figuras obtidas, mantendo a semelhança com as secções originais. A Figura 11.10 mostra as secções feitas .

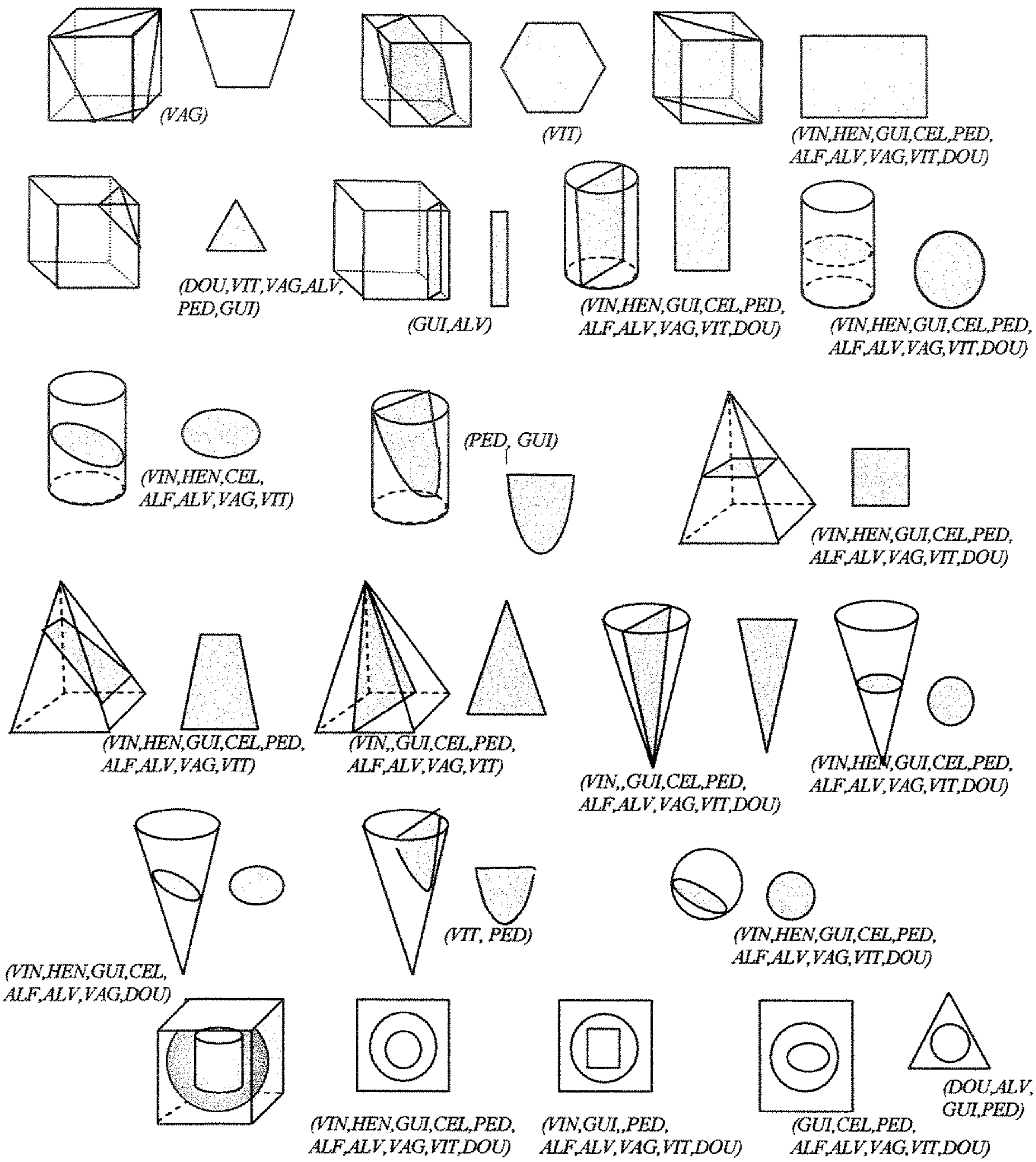


Figura 11.10. Secções obtidas pelos sujeitos mais habilidosos

Os planos indicados para os dois últimos sólidos, anel e tora, geraram secções mais difíceis, mesmo para os sujeitos mais habilidosos. Vários sujeitos erraram as secções da tora, principalmente a secção obtida pelo plano C. A seqüência de cortes A, B e C sugere que as secções tenham continuidade, isto é, que as formas (dois quadrados, para o anel, e dois círculos, para a tora) se modifiquem, se aproximem, até formar um retângulo e uma elipse, respectivamente, que representariam a secção D. Parece que o limite que define a secção C é a imagem mais complexa, mesmo para os sujeitos mais habilidosos. A Figura 11.11 mostra os desenhos das secções obtidas.

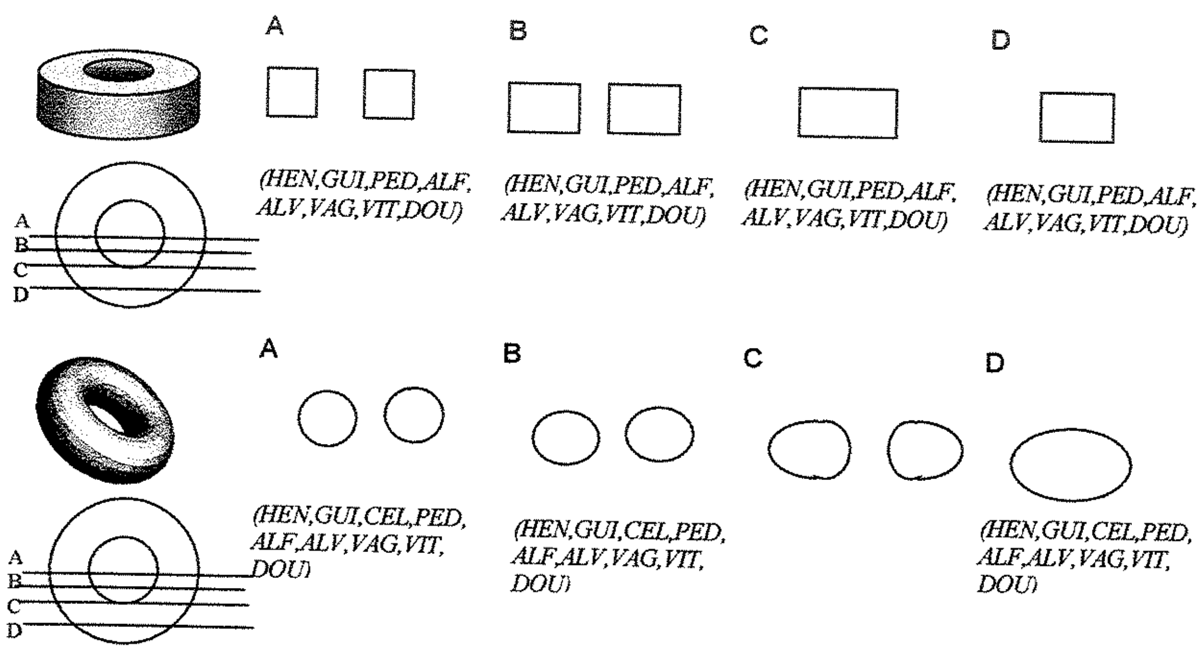


Figura 11.11. Secções obtidas pelos sujeitos mais habilidosos

Entre os sujeitos menos habilidosos, muitos não fizeram os desenhos das secções, o que sugere que eles não tenham sido capazes de imaginar o corte. Outros fizeram apenas uma secção para cada sólido, obtida por um plano paralelo à base (horizontal) ou por um plano vertical. Imaginar secções com esses planos parece ser mais fácil. Mesmo nesses casos, vários sujeitos menos habilidosos não desenharam a secção correta, conforme mostra a Figura 11.12.

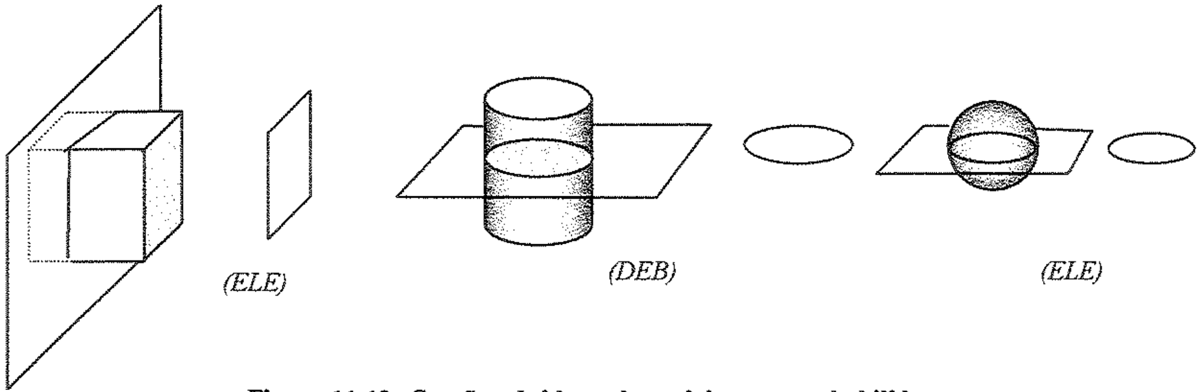


Figura 11.12 . Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos

É importante acrescentar que, nos casos mostrados pela Figura 11.12, o sujeito esboçou o plano de corte. Portanto, há indícios de que, além de ter imaginado o plano, o sujeito tenha representado mentalmente a intersecção entre o plano e as superfícies do sólido. No entanto, parece que o sujeito não girou a figura obtida, em um plano frontal e, assim, desenhou a figura ainda sob perspectiva.

Alguns sujeitos menos habilidosos fizeram representações de planos perpendiculares ou oblíquos ao plano da base dos sólidos. No entanto, os desenhos representavam a face frontal ou a face de topo do sólido partido, e não a secção obtida. A figura 11.13 mostra esses resultados.

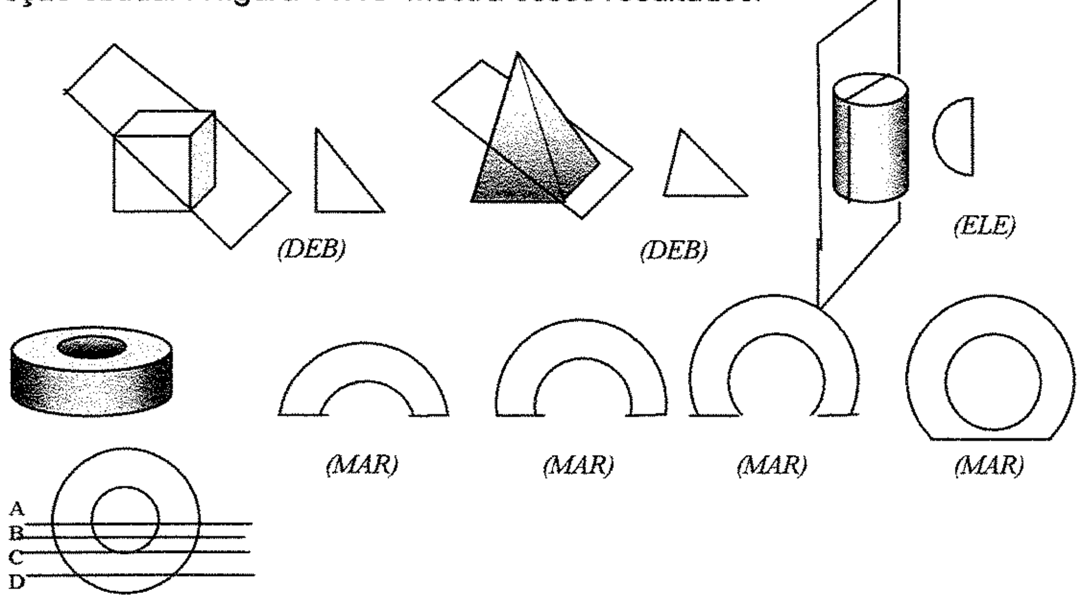


Figura 11.13. Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos

Em vários casos é possível notar a dificuldade que o sujeito menos habilidoso teve para estabelecer o limite da intersecção do plano com o sólido. Essa dificuldade pareceu ser mais freqüente quando o sujeito era solicitado a seccionar sólidos redondos, como a esfera, cilindro, cone e tora, como mostra a Figura 11.14.

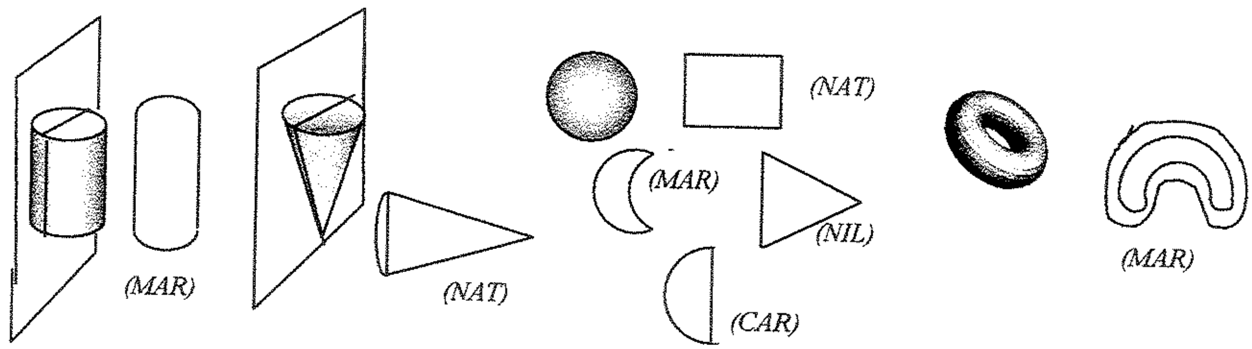


Figura 11.14. Secções obtidas pelos sujeitos menos habilidosos

Nota-se, pelos desenhos da Figura 11.14 que, nos casos do cilindro e do cone, os sujeitos insistiam em desenhar uma linha curva representando o limite da intersecção do plano com as bases do sólido, demonstrando que os círculos pareciam ser vistos como superfícies não-planas. No entanto, os exemplos de secções na forma de retângulo, triângulo e na forma de uma lua - que três sujeitos fizeram para a esfera - demonstram que eles não conseguiram estabelecer os limites da intersecção da superfície esférica com o plano.

A planificação de figuras

As figuras apresentadas foram classificadas em três grupos: no primeiro ficaram os prismas e pirâmides retos; no segundo, os corpos redondos retos; e, no terceiro grupo agruparam-se as figuras mais complexas, incluindo-se aí as figuras obliquas e as figuras compostas.

Os desenhos de planificação dos sujeitos mais habilidosos sugerem que houve uma tendência a realizar dois tipos de movimento de desdobramento das faces do prisma quando o mesmo estava apoiado na base. No primeiro, a face frontal foi mantida e as faces laterais foram desdobradas em continuidade. No segundo tipo, a base foi mantida no centro do desenho e as faces laterais foram ligadas a ela. As bases pareciam ser movimentadas ao mesmo tempo, mantendo-se, na planificação, o desenho das bases na mesma face lateral. No caso do prisma não apoiado na base, verificou-se também dois tipos de planificação. No primeiro o sujeito manteve a face frontal e a partir daí fez o desdobramento e no segundo tipo o sujeito girou a figura, desenhou a face de apoio (que é face lateral) e desdobrou as outras faces laterais. Em todos esses casos, o desenho final da planificação apresentou uma certa regularidade que se caracterizou, em várias vezes, por uma simetria. A Figura 11.15 mostra as planificações.

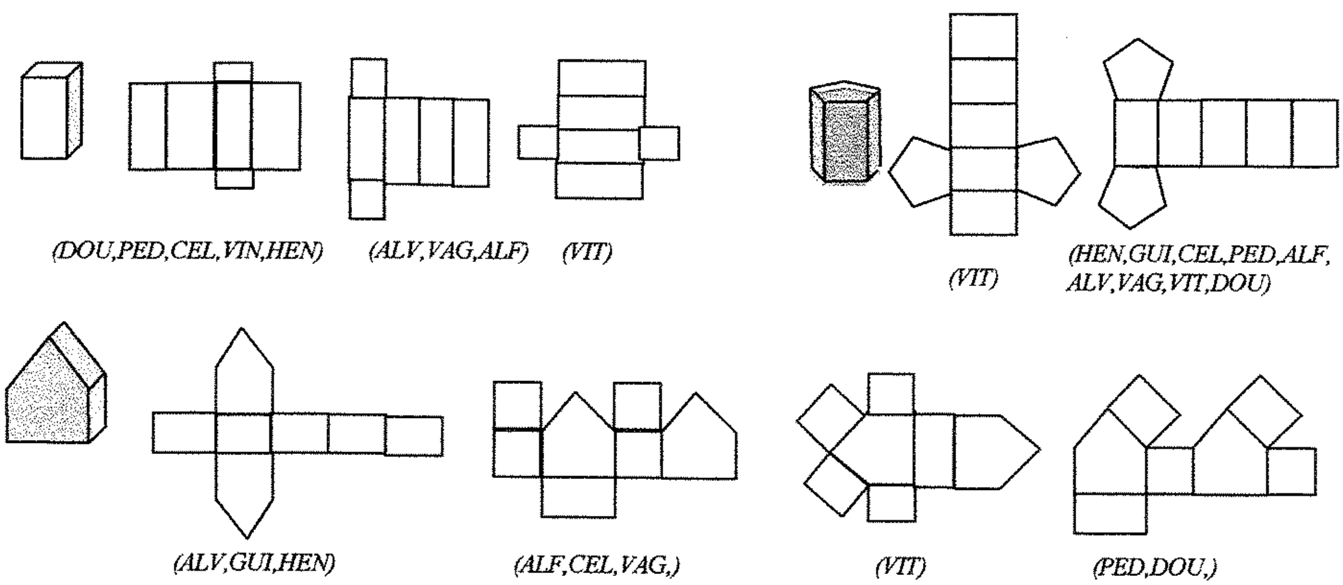


Figura 11.15. Planificações de prismas feitas por sujeitos mais habilidosos

As planificações da pirâmide e do tronco de pirâmide puderam ser classificadas em dois tipos. No primeiro as faces laterais formaram um conjunto de figuras em continuidade; no segundo a base se manteve centralizada com as faces laterais ligadas a esta. A Figura 11.16 mostra as planificações.

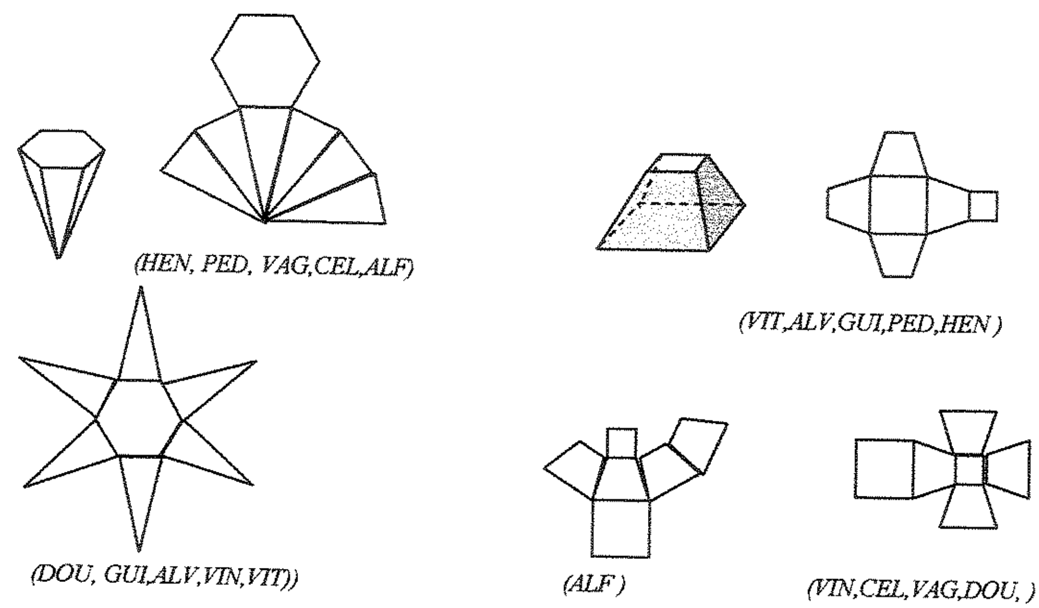


Figura 11.16. Planificações da pirâmide e do tronco de pirâmide feitas por sujeitos mais habilidosos.

A planificação do paralelepípedo oblíquo pareceu ser mais difícil, pois vários sujeitos habilidosos não acertaram o desenho. Parece que a dificuldade não estava em identificar as seis faces paralelogramos, mas sim em identificar os ângulos entre as faces. A Figura 11.17 mostra as planificações corretas e erradas, feitas pelos sujeitos.

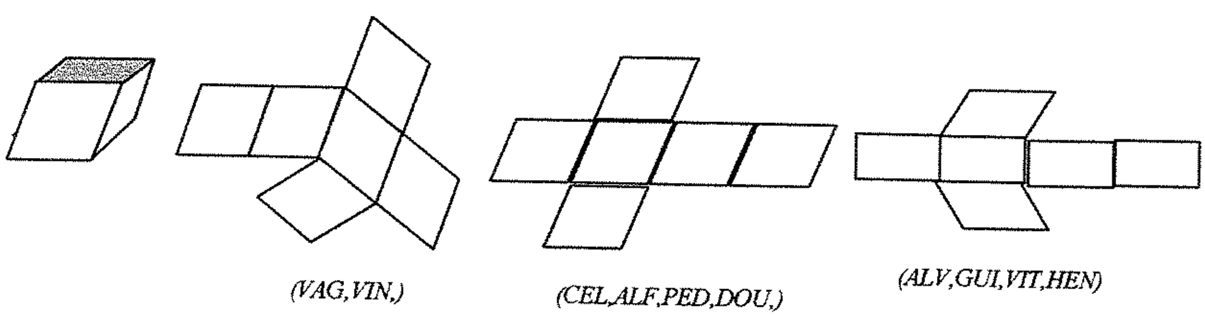


Figura 11.17. Planificações do paralelepípedo oblíquo: correta (à esquerda) e incorretas (no centro e à direita) feitas pelos sujeitos mais habilidosos.

No caso dos corpos redondos, não houve variedade nos desenhos das planificações. A planificação do cilindro reto manteve o retângulo e os dois círculos tangenciando o retângulo na base superior e na base inferior, em posição de simetria. Quanto ao cone, os sujeitos mais habilidosos desenharam a superfície lateral corretamente na forma de setor circular com um ângulo que variou entre 100º e 180º, aproximadamente. Nota-se que, pela forma do cone apresentado, o ângulo do setor deveria medir aproximadamente 180º. Acrescenta-se que três alunos habilidosos desenharam a superfície lateral do cone na forma de triângulo, errando, assim, a planificação. Apenas um aluno conseguiu desenhar a planificação do cilindro obliquo que, aliás, não é estudado no ensino médio. A Figura 11.18 mostra os desenhos feitos pelos sujeitos mais habilidosos.

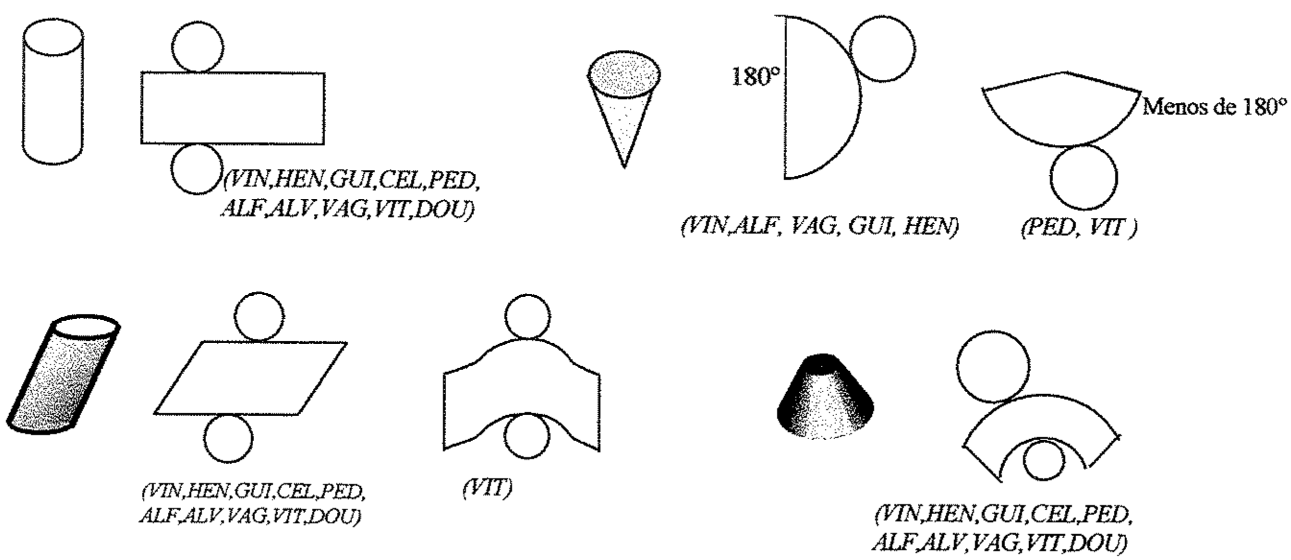


Figura 11.18. Planificações dos corpos redondos feitas por sujeitos mais habilidosos.

Os sólidos compostos exigiram planificações mais complexas. Não era possível, por exemplo, a planificação do anel em um único desenho. Já o cubo seccionado exigiu dos sujeitos que retirassem parte do desenho da planificação do cubo e que acrescentassem um triângulo que ficasse ligado a três faces. Mas a planificação mais difícil foi a do sólido formado por dois troncos. Alguns sujeitos mais habilidosos erraram o desenho, conforme pode ser verificado na Figura

11.19. No desenho, as faces estavam corretas, mas a disposição delas não permitia uma movimentação de modo a formar a figura apresentada.

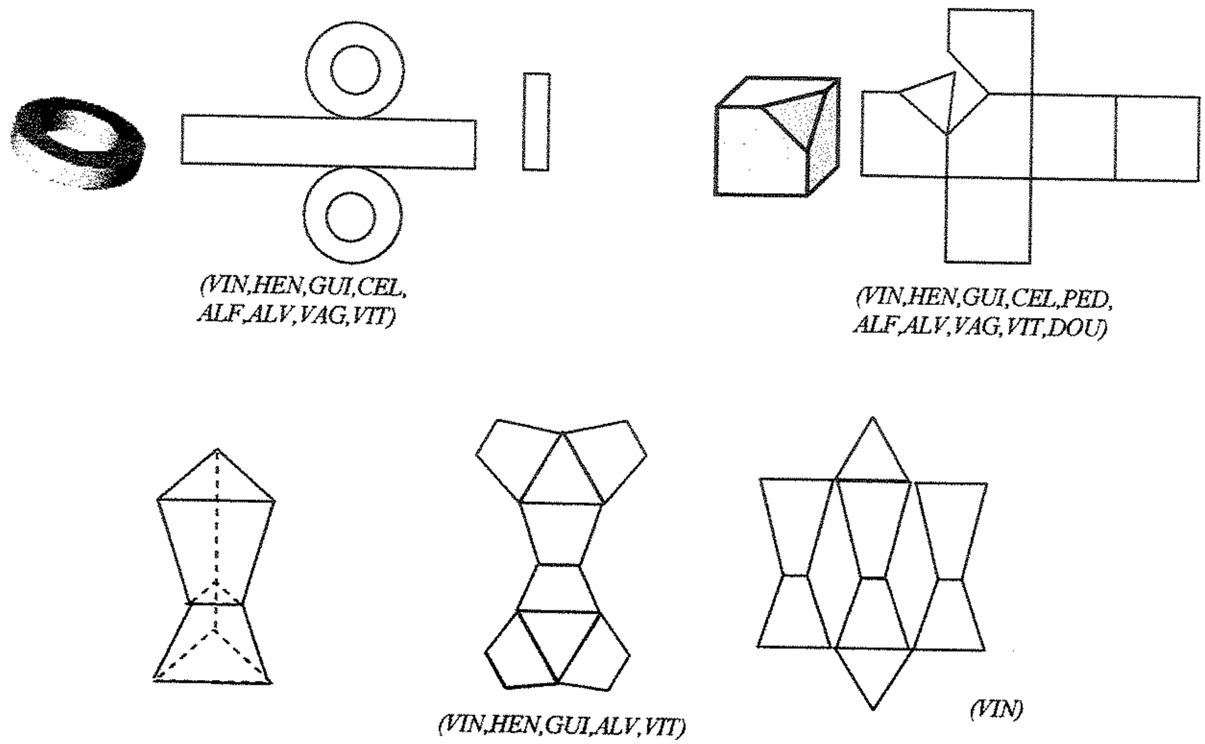


Figura 11.19. Planificações dos sólidos compostos feitas por sujeitos mais habilidosos.

As planificações do paralelepípedo feitas pelos sujeitos menos habilidosos puderam ser classificadas em quatro tipos: (1) o sujeito errou o número de faces; (2) o sujeito errou nas medidas das faces; (3) o sujeito representou algumas faces ainda em perspectiva e (4) o sujeito desenhou uma representação global da figura, sem destacar as faces, ou destacando algumas faces, mas sem possibilidade de movimentação das mesmas É o que mostra a Figura 11.20.

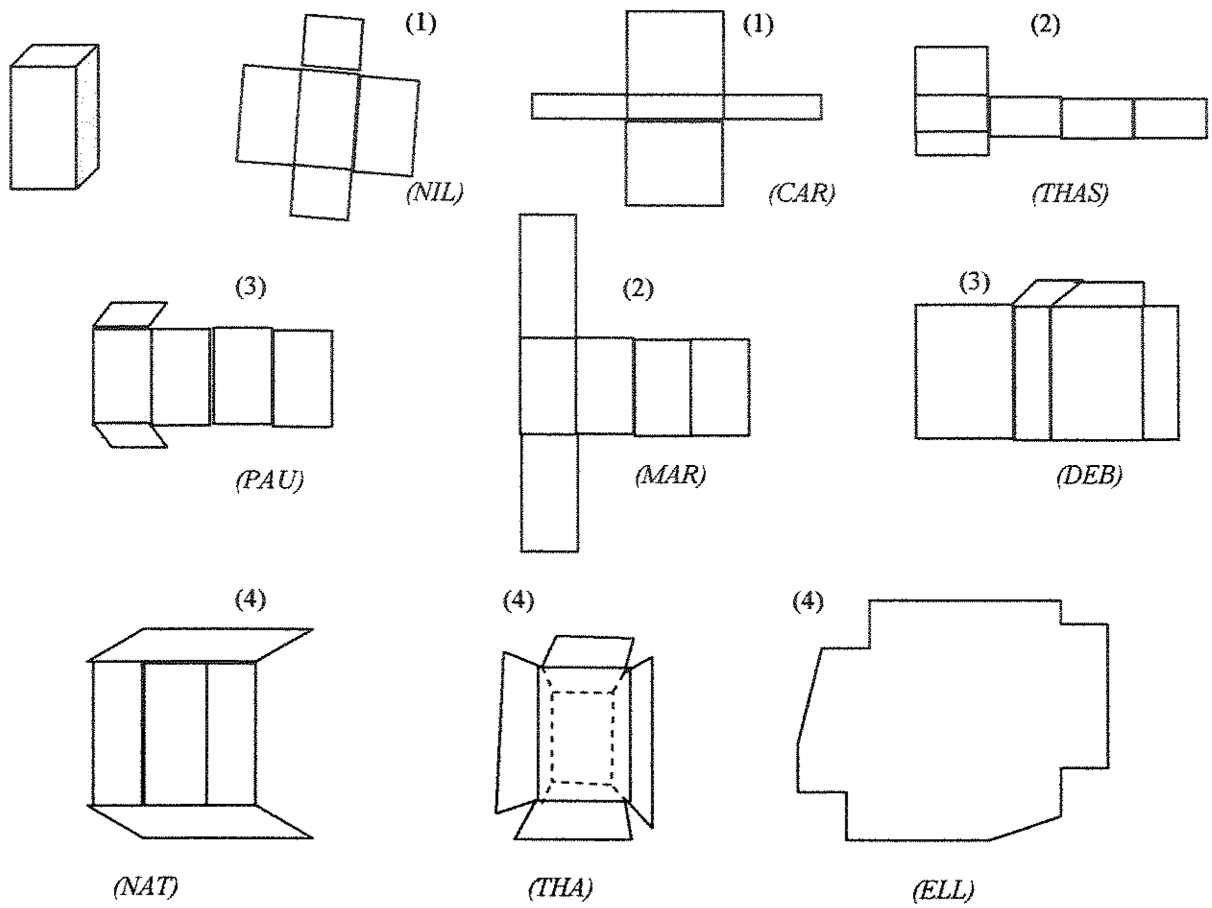


Figura 11.20. As planificações do paralelepípedo feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) n° de faces errado; (2) medidas erradas; (3) faces em perspectivas; (4) representação global

Nos casos do prisma regular e do prisma não regular, ambos de base pentagonal, as planificações puderam ser classificadas em dois tipos: (1) o sujeito errou o número de faces e, em alguns casos, também as medidas; (2) o sujeito desenhou uma representação global da figura que não mantinha as faces, ou representou a figura ainda sob perspectiva, sendo que, em alguns casos, duplicou o desenho, conforme mostra a Figura 11.21. A mesma classificação vale para o paralelepípedo oblíquo e para a pirâmide, cujas planificações são mostradas na Figura 11.22, e para o tronco de pirâmide, cubo seccionado e o sólido composto por dois troncos, sendo que essas duas últimas figuras foram planificadas por poucos sujeitos, conforme mostra a Figura 11.23.

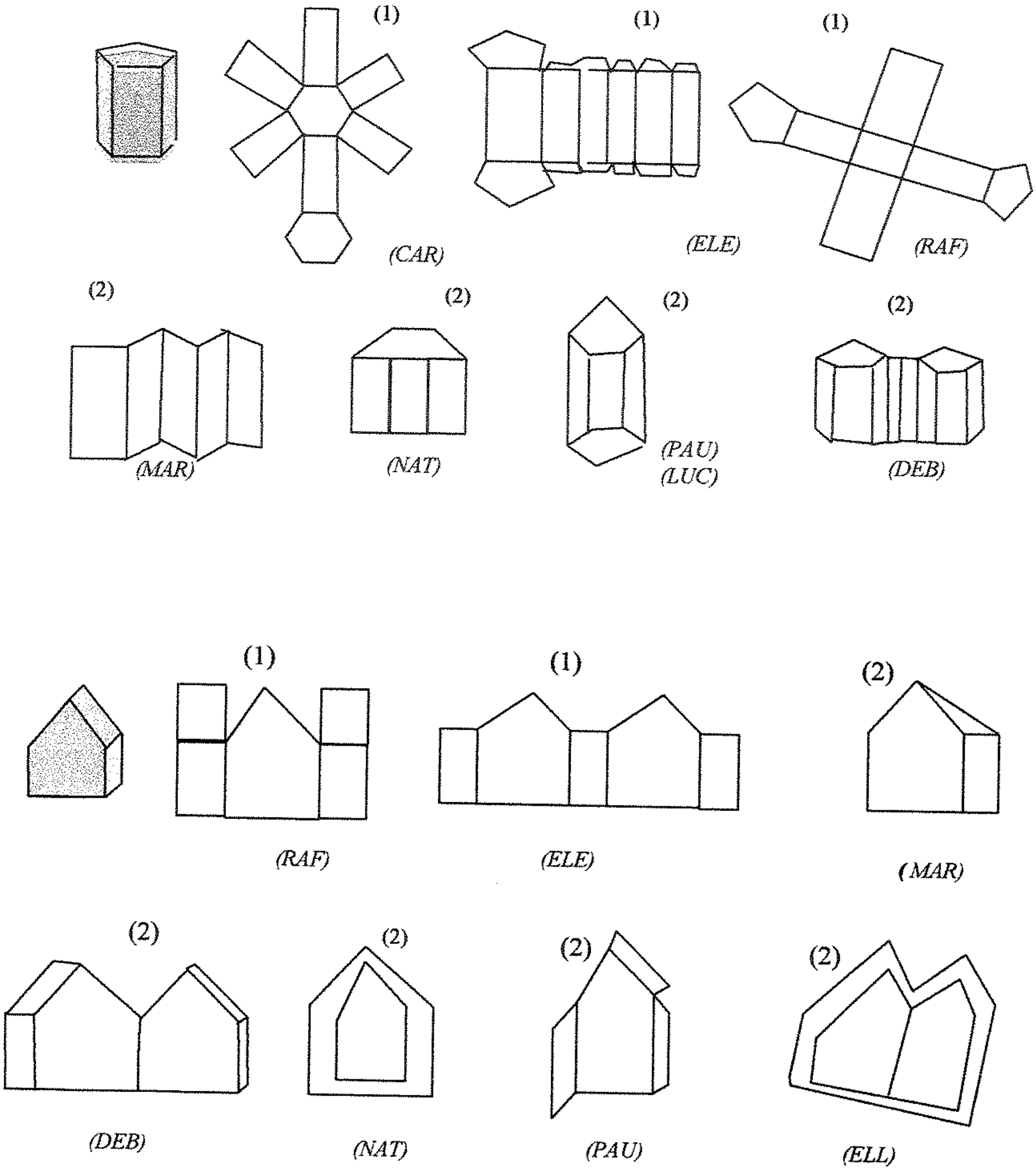


Figura 11.21 . As planificações de prismas feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) nº de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura

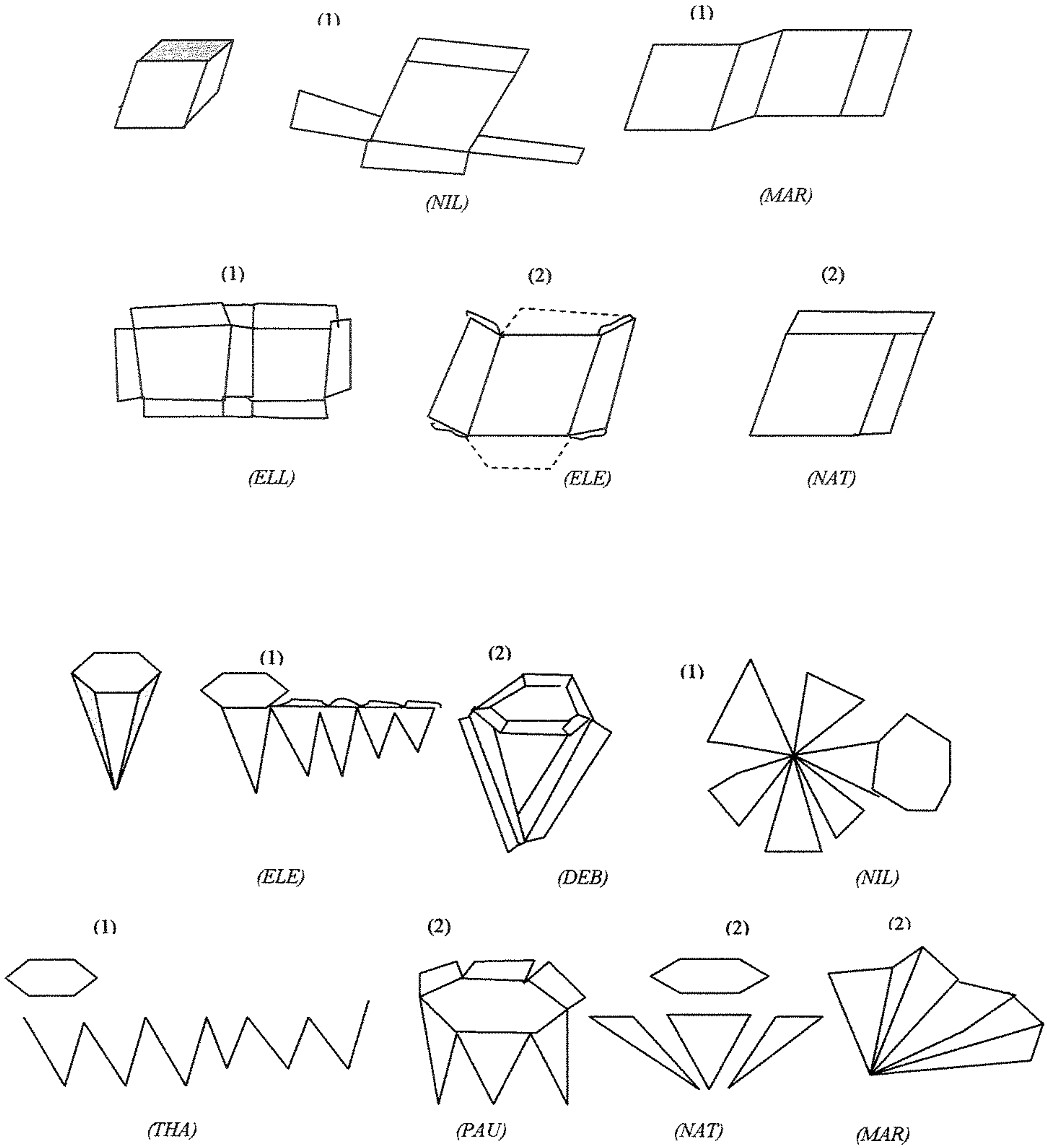


Figura 11.22 . As planificações de prismas e pirâmides feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) n° de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura

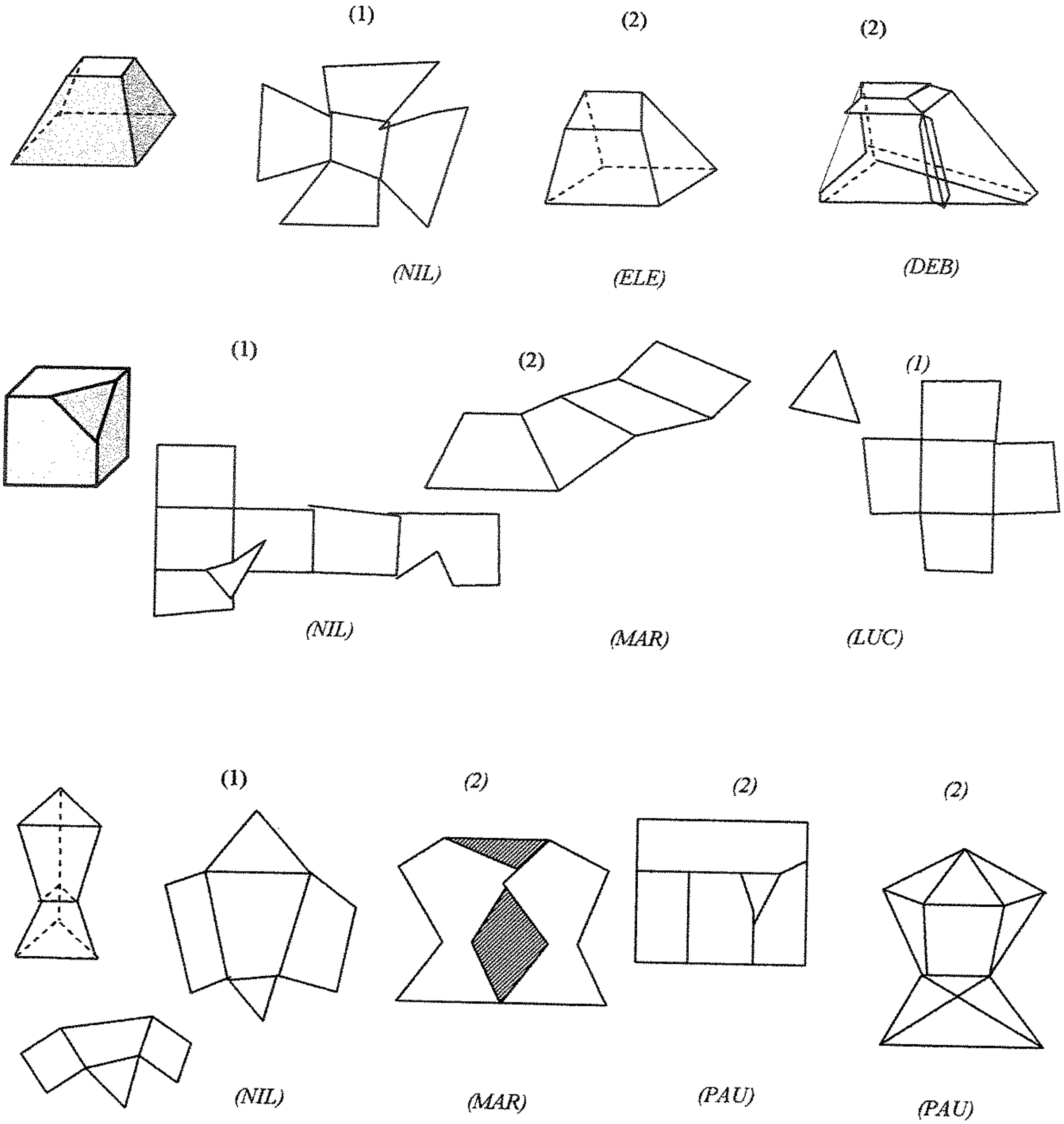


Figura 11.23 . As planificações de poliedros feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) n° de faces errado ou medidas incorretas; (2) representação global da figura.

Os desenhos das planificações dos corpos redondos foram classificados em duas categorias: (1) o sujeito errou a figura que representava a superfície lateral (retângulo ou setor) ou não desenhou os círculos tangentes a essa superfície (muitas vezes desenhou elipses "entrando" na superfície lateral, como se ainda fizesse parte dela); (2) manteve a figura dada em perspectiva, com algum desdobramento ou representou a planificação por um único desenho, dando a idéia de um inteiro continuo. A Figura 11.24 mostra as planificações do cilindro reto, cilindro oblíquo e setor circular.

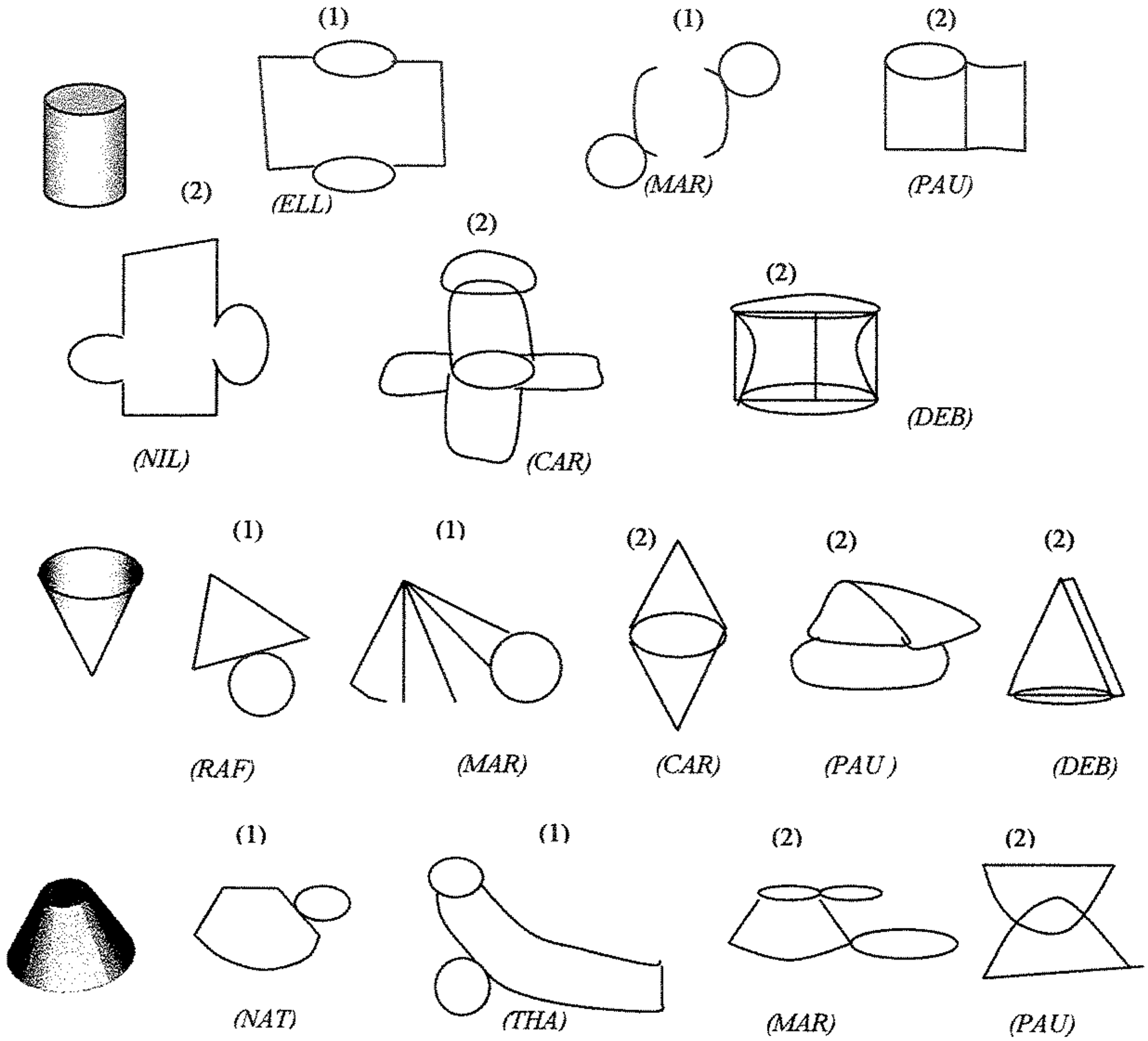


Figura 11.24. As planificações de corpos redondos feitas pelos sujeitos menos habilidosos e as classificações: (1) superfície lateral errada e/ou círculos não tangentes; (2) figura dada em perspectiva

A projeção de figuras

Os sujeitos mais habilidosos conseguiram desenhar as projeções do sólido formado por cubinhos em qualquer face do cubo. Desprezaram os cubos que ficavam sobrepostos, representando apenas sua projeção. Também respeitaram a posição da face pedida, fazendo o desenho conforme o ponto de vista solicitado. Quando era solicitado o desenho da projeção ortogonal do cubo sobre a face, os sujeitos habilidosos mantiveram o ângulo reto e também a proporcionalidade dos lados. No entanto, a projeção ortogonal do cubo quando o mesmo se encontrava inclinado em relação às faces foi difícil de ser imaginada. Apenas um sujeito conseguiu fazer a representação dessa projeção, conforme mostra a Figura 11.25.

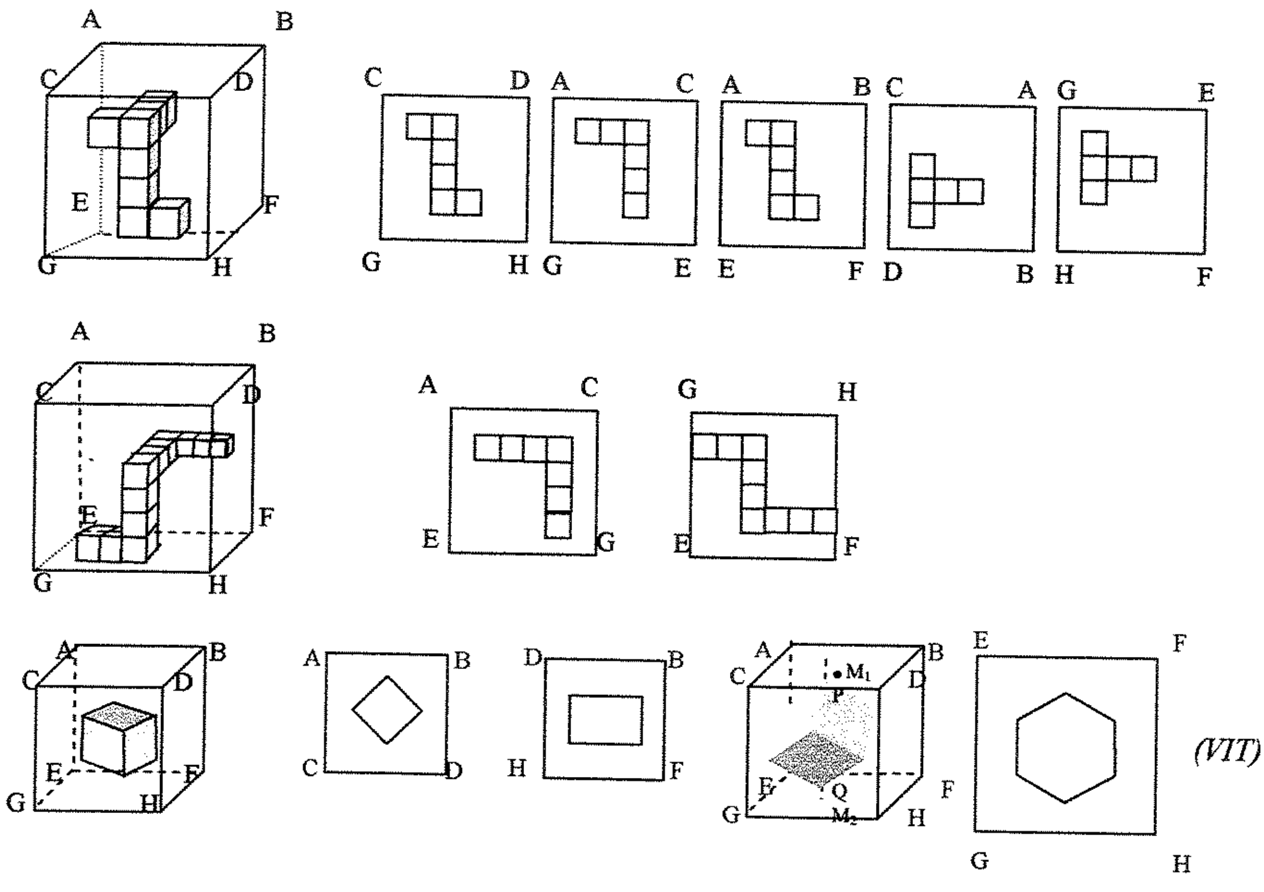


Figura 11.25 . Desenhos das projeções feitas por sujeitos mais habilidosos. (O ultimo desenho foi feito apenas pelo sujeito VIT).

Já a maioria dos sujeitos menos habilidosos não respondeu a questão, deixando-a em branco. Os sujeitos que desenharam as projeções cometeram dois tipos de erro: (1) nº de cubinhos errados e/ou posição errada e/ou linhas pontilhadas e (2) cubos em perspectiva. A Figura 11.26 mostra alguns resultados.

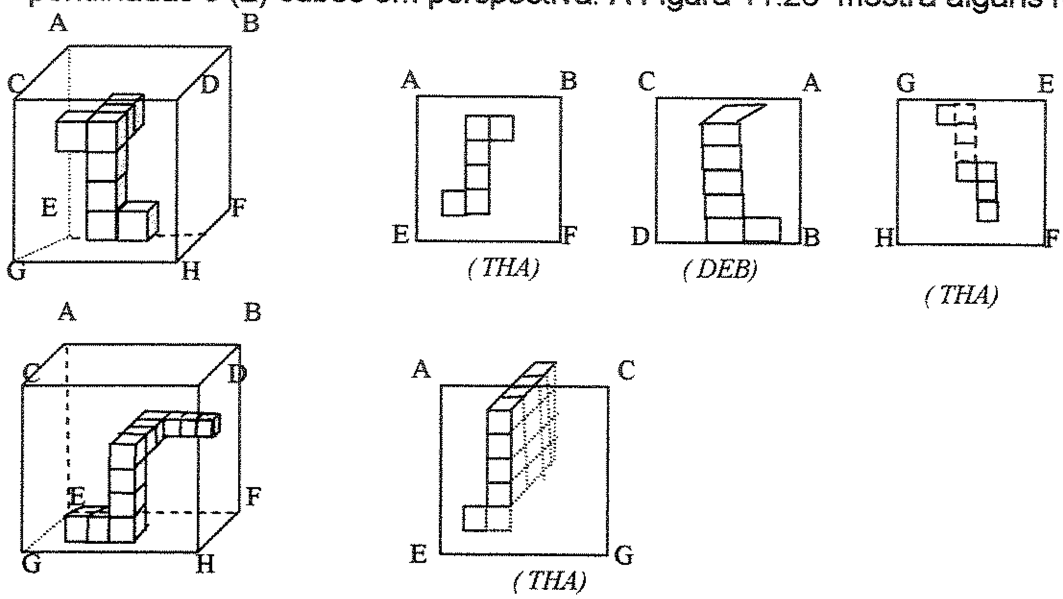


Figura 11.26 . Desenhos das projeções feitas por sujeitos menos habilidosos.

A formação de sólidos de revolução

A identificação de figuras planas geradoras de sólidos de revolução foi uma tarefa aparentemente simples para os sujeitos habilidosos. Para realizar essa tarefa, os sujeitos deviam identificar quais os pontos e linhas da figura plana que iriam definir a superfície do sólido. Algumas linhas mais afastadas do eixo gerariam as superfícies externas e as linhas mais próximas as superfícies internas. Além disso, os sujeitos tiveram que girar mentalmente o sólido obtido (pelo eixo de revolução que foi apresentado sempre na posição vertical) com o sólido apresentado (em geral em outra posição).Os pares de sólido e figura plana corretos são mostrados na Figura 11.27.

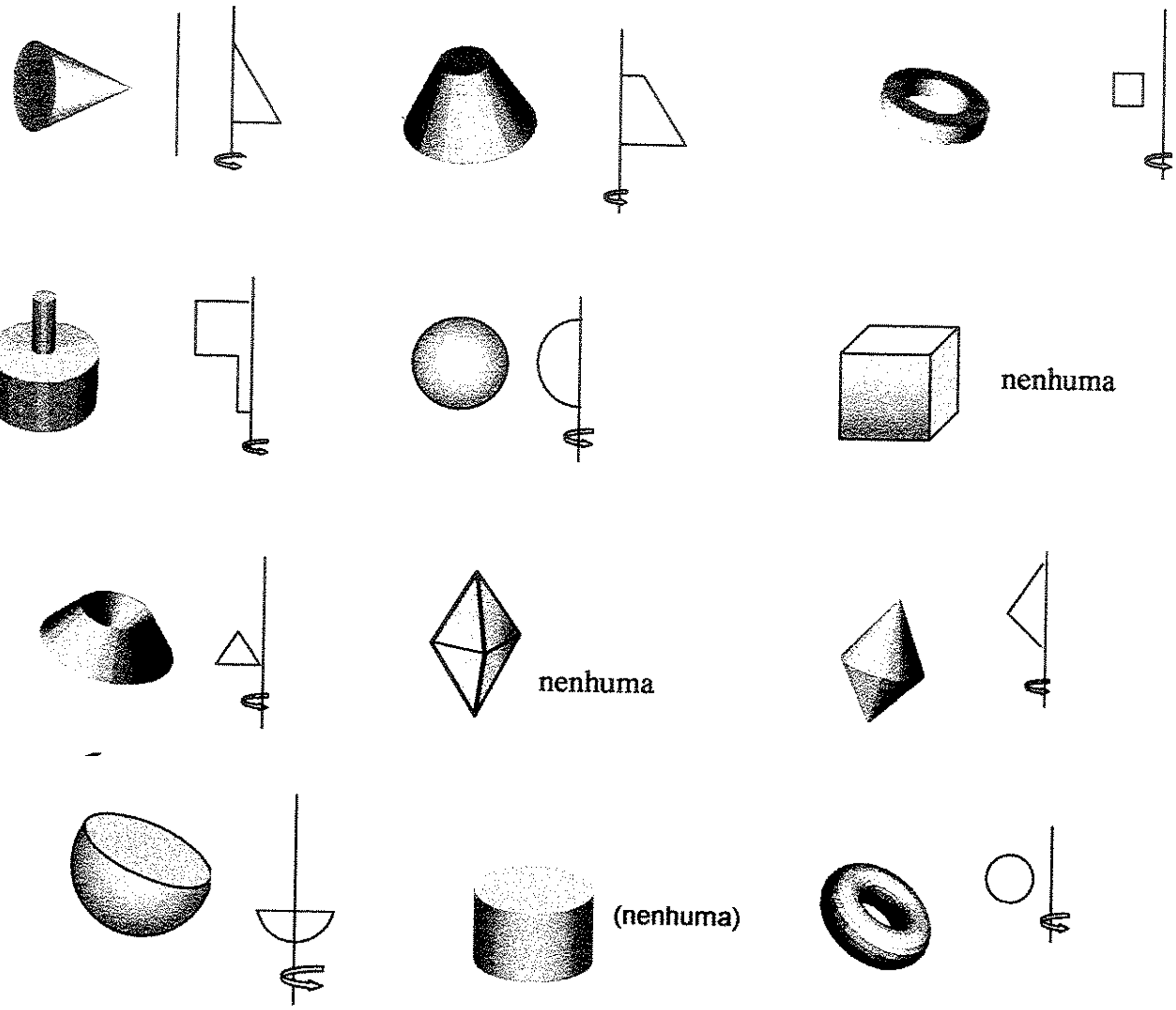


Figura 11.27 . Identificação do sólido de revolução com a figura plana geradora feita pelos sujeitos mais habilidosos.

Da mesma maneira, não pareceu ser difícil, para os sujeitos habilidosos, desenhar as figuras planas que davam origem aos sólidos de revolução. Em geral, os desenhos mantiveram as medidas adequadas dos lados e ângulos dos polígonos bem como as distâncias das linhas até o eixo de rotação. A Figura 11.28 mostra os desenhos feitos pelos sujeitos habilidosos.

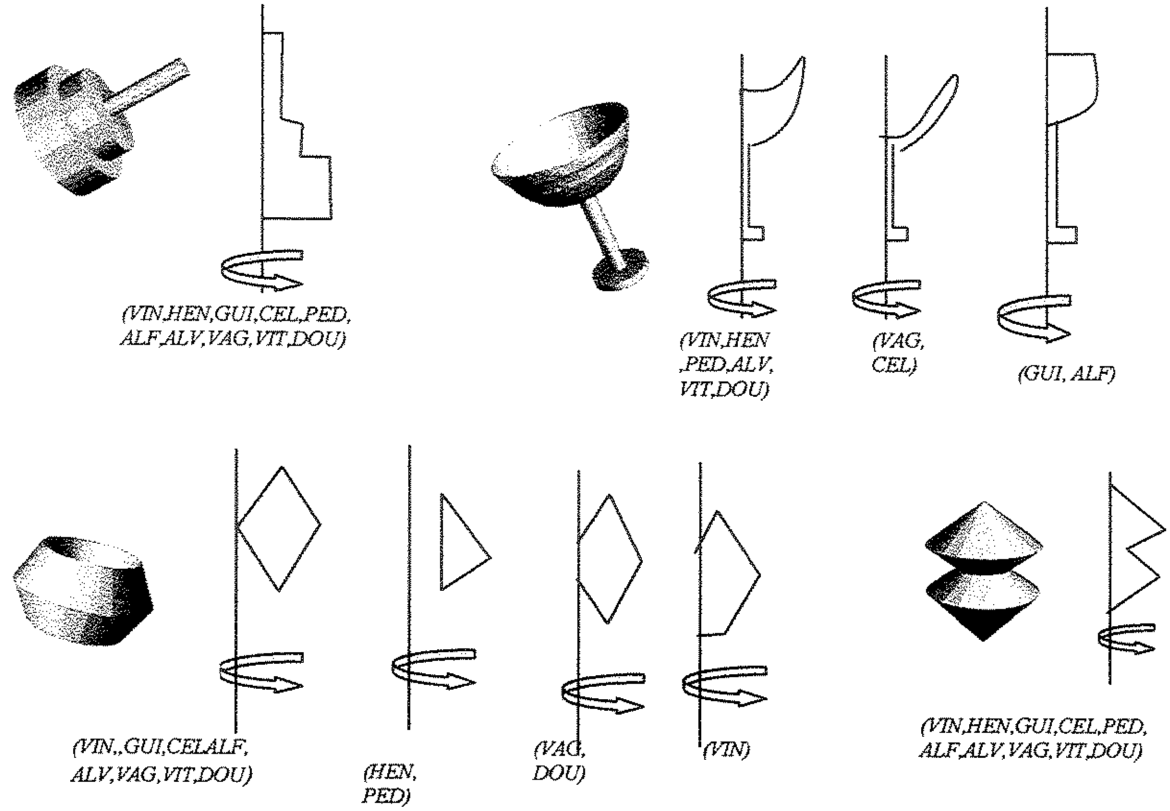


Figura 11.28. Desenhos de figuras planas geradoras de sólidos geométricos feitos pelos sujeitos mais habilidosos

Os sujeitos menos habilidosos cometeram vários erros quando associaram a figura plana ao sólido de revolução. Parece que, ao girar mentalmente a figura em torno do eixo, os sujeitos não coordenaram as diversas características da figura que iriam definir o sólido, tais como, medidas dos lados, medidas dos ângulos, afastamento ao eixo etc. A Figura 11.29 mostra as associações feitas.

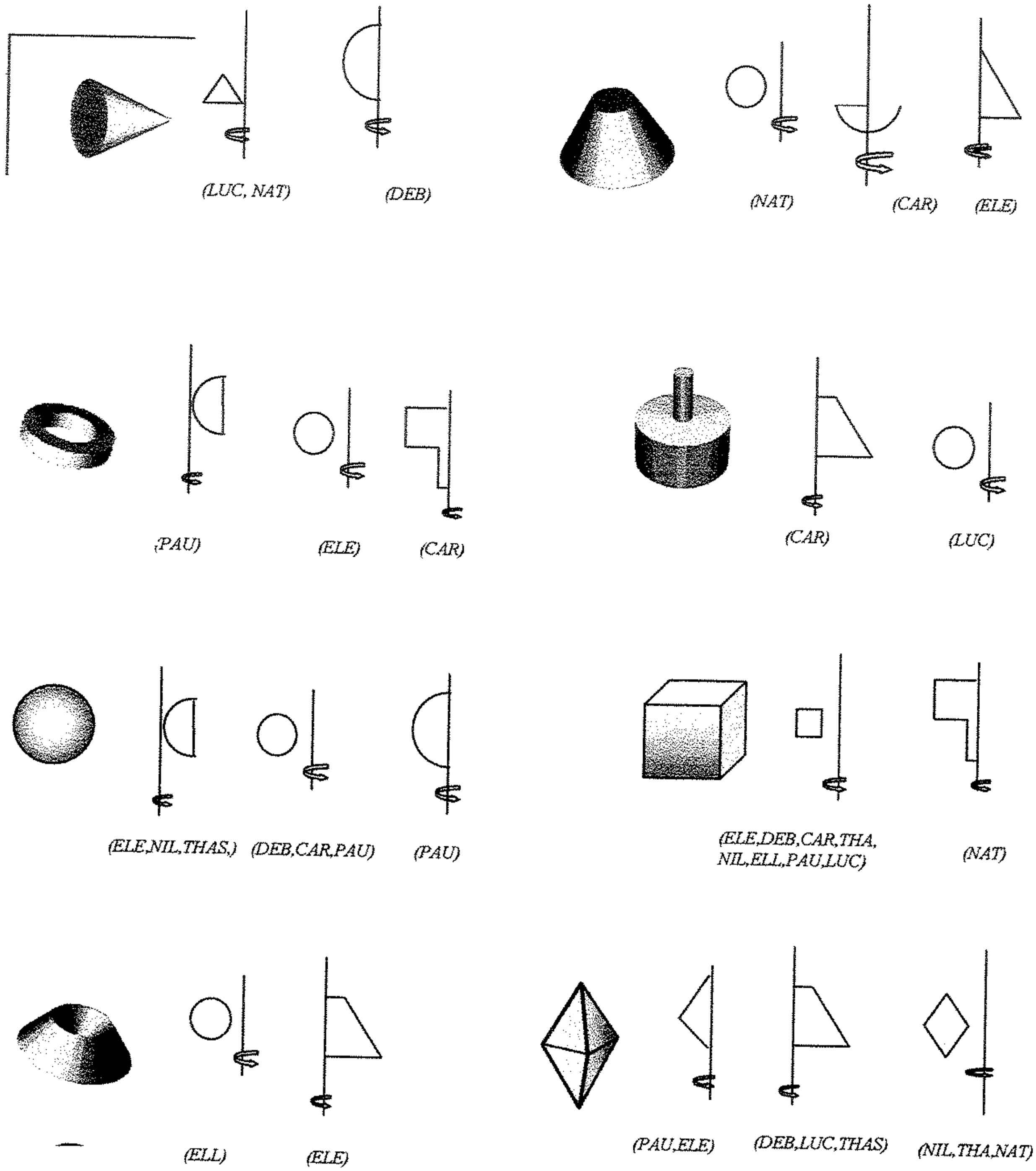


Figura 11.29 . Identificação do sólido de revolução com a figura plana geradora feita pelos sujeitos menos habilidosos.

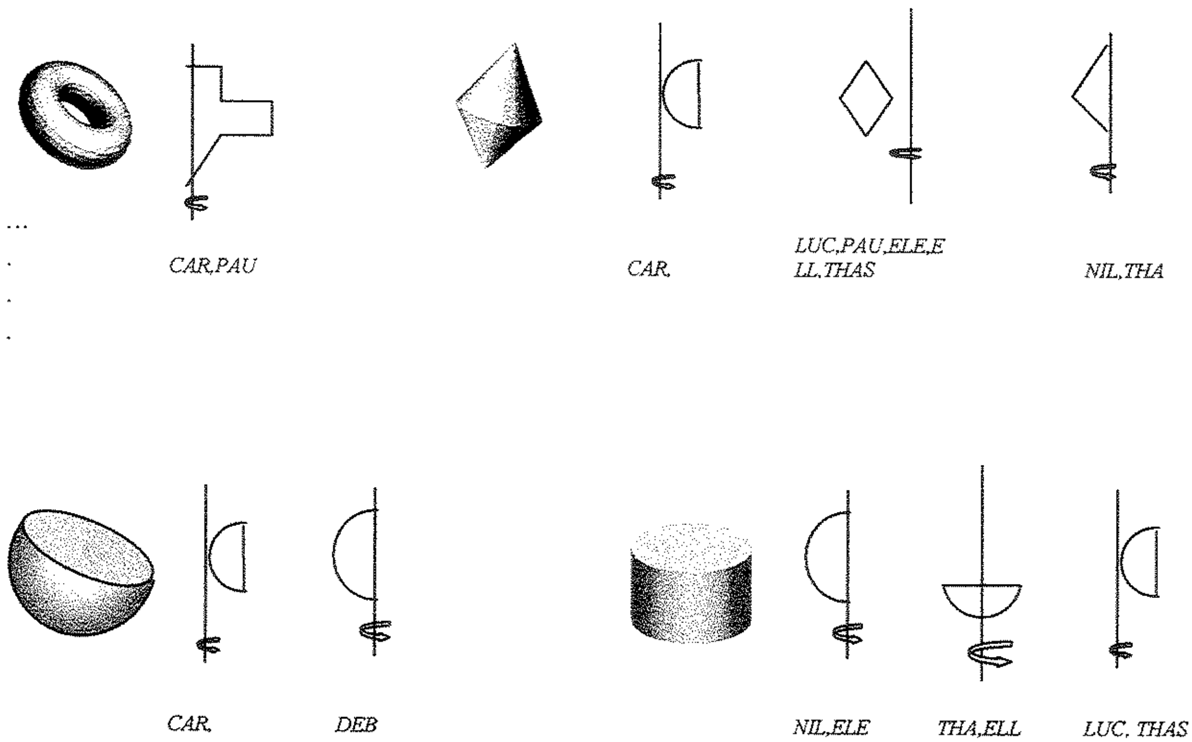


Figura 11.29 . Identificação do sólido de revolução com a figura plana geradora feita pelos sujeitos menos habilidosos (continuação).

Verifica-se que os sujeitos menos habilidosos pareciam perceber, erroneamente, os poliedros como sendo sólidos de revolução e associavam figuras planas na forma de polígonos como possíveis geradoras de tais sólidos. É o caso do cubo que foi associado ao quadrado por quase todos os sujeitos. No caso do cilindro, mesmo sendo um sólido de revolução, não havia nenhuma figura plana geradora que pudesse ser associada a este. Mas, vários sujeitos menos habilidosos associaram partes do círculo como respostas.

Se associar a figura geradora ao sólido de revolução já pareceu ser uma tarefa complexa para esses sujeitos, desenhar a figura geradora foi uma tarefa abandonada por quase todos eles. Apenas um sujeito tentou fazer dois desenhos, porém sem sucesso, conforme mostra a Figura 11.30.

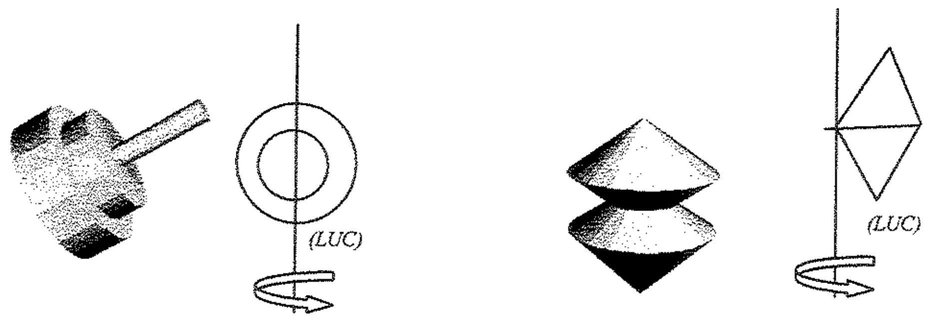


Figura 11.30. Desenhos de figuras planas geradoras de sólidos geométricos feitos por um sujeito menos habilidosos.

O Componente Espacial da Habilidade Matemática e outras variáveis

Outros dados acerca dos sujeitos mais habilidosos e dos sujeitos menos habilidosos são mostrados na Tabela 11.2 e na Tabela 11.3, respectivamente.

Tabela 11.2. Variáveis relativas aos sujeitos mais habilidosos.

Sujeito	Gênero	Serie	CEHM[1]	RE[2]	EARM[3]	EARG[4]	Nota Mat	Nota geom	Nota geral
VIT	Mas	3ª	73,5	20	69	69	10,0	9,9	9,5
VAG	Mas	3ª	67,5	15	41	57	7,5	9,0	8,0
ALV	Mas	2ª	65,0	20	61	50	9,5	9,6	9,1
ALF	Mas	1ª	62,0	16	75	59	8,0	7,6	7,2
PED	Mas	2ª	57,0	17	48	69	6,6	7,6	6,8
CEL	Fem	3ª	56,0	19	77	75	7,4	7,6	7,3
DOU	Mas	2ª	55,5	20	38	42	4,4	5,0	5,7
GUI	Mas	2ª	55,5	20	59	60	9,8	9,4	8,8
VIN	Mas	3ª	55,0	19	28	59	5,3	6,5	6,5
HEN	Mas	1ª	55,0	16	62	56	8,5	8,3	8,2

1: Componente Espacial da Habilidade Matemática; 2: Raciocínio Espacial; 3: Escala de Atitudes em Relação à Matemática; 4: Escala de Atitudes em Relação à Geometria.

Tabela 11.3. Variáveis relativas aos sujeitos menos habilidosos.

Sujeito	Gênero	Serie	CEHM[1]	RE[2]	EARM[3]	EARG[4]	Nota Mat	Nota geom	Nota geral
DEB	Fem	1ª	2,5	2	30	56	5,6	4,6	6,5
ELE	Fem	1ª	11,5	7	54	51	7,3	7,0	7,5
LUC	Fem	3ª	11,5	12	30	30	5,8	3,5	6,2
MAR	Fem	2ª	14,5	8	20	30	5,5	6,8	6,5
PAU	Fem	1ª	14,5	10	42	49	6,5	7,5	7,8
NAT	Fem	2ª	14,5	8	64	48	5,0	6,4	6,0
THA	Fem	3ª	15,0	12	29	21	5,0	3,4	5,6
CAR	Fem	1ª	17,0	10	50	47	8,4	8,2	8,4
ELL	Fem	1ª	17,0	9	46	52	3,6	4,2	4,3
NIL	Mas	1ª	17,5	12	56	74	4,9	4,1	5,2
THAS	Fem	1ª	17,5	10	26	43	3,0	3,2	4,4

1: Componente Espacial da Habilidade Matemática; 2: Raciocínio Espacial; 3: Escala de Atitudes em Relação à Matemática; 4: Escala de Atitudes em Relação à Geometria.

No caso dos sujeitos mais habilidosos, verifica-se que a pontuação no teste de raciocínio espacial (RE) foi alta, com média acima de 18 pontos. As atitudes em relação à geometria podem ser consideradas positivas, com exceção de um sujeito que apresentou menos de 50 pontos na EARG indicando, portanto, atitudes menos favoráveis em relação a esta disciplina. Aliás, o sujeito com atitudes menos favoráveis em relação à matemática e à geometria é justamente aquele que apresentou as notas mais baixas, tanto em relação às duas disciplinas, como na média geral. As notas escolares dos sujeitos mais habilidosos indicaram um bom desempenho em Geometria, em Matemática e na média geral do total das disciplinas.

No caso dos sujeitos menos habilidosos, a pontuação no teste de raciocínio espacial (RE) teve uma média de 9,1, portanto bem inferior à média apresentada pelos sujeitos mais habilidosos. É possível verificar a relação entre as atitudes em relação à Geometria e o desempenho escolar apenas no caso dos dois sujeitos da 3ª série, que apresentaram atitudes pouco favoráveis e notas baixas nessa disciplina. Já na 1ª série encontrou-se um sujeito com atitudes positivas e com notas baixas e na 2ª série um sujeito com atitudes pouco favoráveis e notas razoáveis. Apesar das notas em geometria apresentarem média (5,4) inferior à média apresentada pelos sujeitos mais habilidosos (8,0), verifica-se que alguns sujeitos conseguiram um bom desempenho escolar tanto em geometria como nas outras disciplinas, em geral.

CAPÍTULO XII

AS REPRESENTAÇÕES PICTÓRICAS EXTERNAS: UMA ANÁLISE QUALITATIVA

Nesta parte do estudo é feita uma análise das representações externas utilizadas para solucionar os problemas constantes do instrumento I_6, lembrando que estes fizeram parte das questões de exames vestibulares de universidades públicas nos últimos anos.

Quatro partes compõem esta análise. A primeira delas consiste em uma classificação de problemas geométricos quanto às características do enunciado, quanto à estrutura conceitual requerida para sua solução e quanto à habilidade envolvida no processo de solução. A segunda parte consiste na análise da funcionalidade, da coerência e do detalhamento das representações pictóricas externas no processo de solução de problemas. Na terceira parte é feita uma comparação das representações feitas por sujeitos mais habilidosos e por sujeitos menos habilidosos e, finalmente, a última parte é destinada à análise dos processos visuais mentais evidenciados pelas representações pictóricas externas.

As características dos problemas dos exames vestibulares

Na análise dos problemas que constam dos exames vestibulares e que se referem à geometria espacial podem ser verificadas três características importantes. Uma delas diz respeito à maneira como são apresentadas as informações do problema; a outra refere-se ao tipo de estrutura conceitual requerida para solucioná-lo e a terceira faz referência a algumas habilidades relativas ao componente espacial da habilidade matemática.

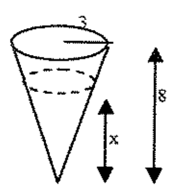
Uma característica importante do problema refere-se ao seu enunciado, ou seja, ao modo como é feita a apresentação das informações iniciais e daquelas que indicam as operações necessárias para o processo de solução. Muitos problemas apresentam as informações na forma predominantemente pictórica, sendo que nesse caso o próprio desenho (em geral mostrando um ponto de vista em perspectiva) já traz quase todos os dados necessários para a obtenção da informação geométrica e também para o processamento dessa informação. Em outros, a informação é predominantemente verbal, ou seja, os dados do problema aparecem descritos na forma de palavras. Há também os enunciados mistos, quando parte dos dados é dada na forma pictórica e parte na forma verbal.

A Figura 12.1 mostra um exemplo de problema para cada situação.

(a)Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta suas três arestas formando um triângulo de lados medindo 8m, 10m e 12 m. Calcular o volume da pirâmide assim formada.

(b)Calcule o volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensão dadas pela figura.

(c) Calcular a altura x para que o volume do líquido seja metade do volume do copo.



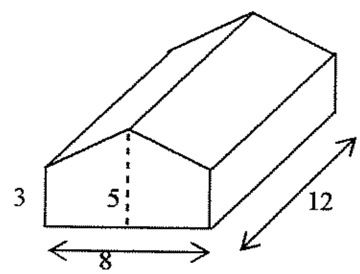


Figura 12.1 . Exemplos de problemas quanto à forma de apresentação das informações (a) verbal; (b) pictórica e (c) mista

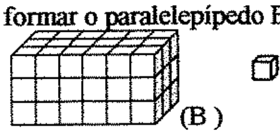
Para solucionar problemas de geometria é necessário que o aluno tenha formado uma estrutura conceitual (Pirola,2000). Mas, em muitos casos, a experiência mostra que os alunos sabem os conceitos e princípios geométricos relativos ao problema, mas erram a resposta porque não dominam cálculo aritmético ou algébrico. Assim, vários são os problemas que requerem uma estrutura conceitual complexa e predominantemente aritmética ou algébrica, sendo que os conceitos geométricos envolvidos são relativamente simples. São exemplos deste tipo os problemas cuja solução requer aplicação de fórmulas e cálculo aritmético e/ou algébrico. Em outros casos, a estrutura requerida é predominantemente geométrica, ou seja, a solução exige que o aluno saiba conceitos e princípios geométricos e estes, na maioria das vezes, não aparecem explícitos no enunciado. Outros problemas têm estrutura predominantemente espacial, pois a sua solução requer raciocínio espacial, às vezes não necessitando de cálculos ou conceitos geométricos mais complexos. Há ainda os problemas com estrutura mista, quando requer conceitos geométricos, aritméticos e algébricos e também exigem raciocínio espacial. A Figura 12.2 ilustra alguns exemplos.

(a)Num paralelepípedo retângulo a área total mede 28 cm^2 e a diagonal mede $\sqrt{21}$ cm. Calcular a soma das dimensões.

(b)Dado um paralelepípedo retângulo de volume V, cujas arestas estão em PG de razão *q*. Determinar a área total em função de V e de *q*.

(c) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3cm e que sua área lateral é o dobro da área da base. Calcular o volume.

(d) Quantos cubos A precisam ser empilhados para formar o paralelepípedo B?



(B) (A)

(e)A figura a seguir é a secção de dois cones retos cortados por um plano paralelo às bases. Qual o volume da região hachurada?

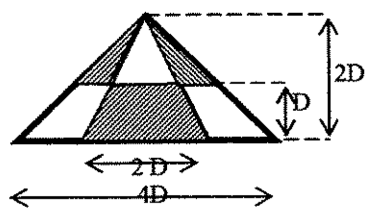


Figura 12.2. Exemplos de problemas quanto à estrutura conceitual requerida: (a) aritmética; (b) algébrica; (c) geométrica; (d) espacial; (e) mista

Os problemas também podem ser classificados de acordo com as habilidades mais exigidas para sua solução. Utilizando-se as operações relativas ao componente espacial da habilidade matemática, os problemas puderam ser classificados em: contagem de cubos, formação de polígonos, secção, planificação, revolução e projeção.

A Tabela 12.1 mostra o resumo da classificação dos problemas de geometria.

Tabela 12.1.Classificação dos problemas geométricos quanto à forma de apresentação das informações, quanto à estrutura conceitual requerida para sua solução e quanto à habilidade espacial envolvida

Problemas de geometria espacial	
Critérios	**Classificação**
Forma de apresentação das informações	Verbal Pictórica Mista
Estrutura conceitual requerida	Aritmética Algébrica Geométrica Espacial Mista
Habilidade espacial envolvida (componente espacial da habilidade matemática)	Contagem de cubos Formação de polígonos Secção Planificação Projeção Revolução

Sendo assim, as questões selecionadas como instrumento para essa etapa do estudo estão analisadas conforme mostra a Tabela 12.2.

Tabela 12.2 . Classificação dos problemas de exames vestibulares do instrumento utilizado na pesquisa.

Problema	**Classificação**		
	Apresentação das informações	**Estrutura conceitual**	**Habilidade envolvida**
1)Tem-se um cubo de madeira , de aresta 10 cm cujas faces estão pintadas de 6 cores diferentes e que não confundem com a cor da madeira. Subdividimos esse cubo em cubinhos menores de 1 cm de aresta. Qual é o número de cubos que têm faces com *exatamente* 3 cores diferentes (considere a cor da madeira como uma cor) ?	Verbal	Espacial	Contagem de cubos

Tabela 12.2 . Classificação dos problemas de exames vestibulares do instrumento utilizado na pesquisa (Continuação).

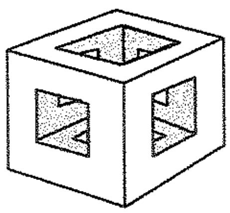
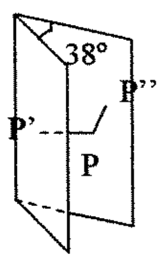
Problema	Classificação		
	Apresentação das informações	Estrutura conceitual	Habilidade envolvida
2)As arestas de um cubo de isopor medem 6 cm. Buracos quadrados, de 2cm de lado, cortam o cubo, indo de uma face até a face oposta. As arestas desses buracos são paralelas às arestas do cubo, como na figura a seguir. Determine o volume da peça 	Mista (verbal e pictórica)	Espacial	Contagem de cubos
3)Sejam π' e π'' as faces de um ângulo diedro de 38° e P um ponto no interior a esse diedro. Sejam P'e P" as projeções ortogonais de P sobre π' e π'' respectivamente. Determine a medida em graus do ângulo P'P P" 	Mista (verbal e pictórica)	Mista (espacial e geométrica)	Formação de polígonos, projeção
4)Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado 6 cm. Sabe-se que a área da superfície lateral coincide com a área da base. Calcular o volume do prisma.	Verbal	Mista (espacial, geométrica e aritmética)	Planificação

Tabela 12.2 . Classificação dos problemas de exames vestibulares do instrumento utilizado na pesquisa (continuação)

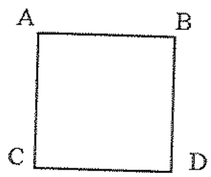
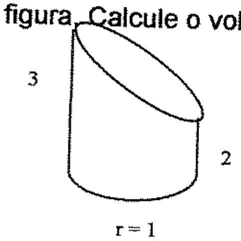
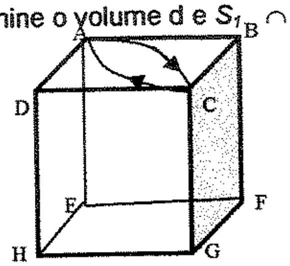
Problema	Classificação		
	Apresentação das informações	Estrutura conceitual	Habilidade envolvida
5) O quadrado ABCD é face de um cubo e I é o centro da face oposta. Sendo α o ângulo entre os planos ABI e CDI calcule tg $\frac{\alpha}{2}$ 	Mista (verbal e pictórica)	Mista (Espacial e Geométrica)	Formação de polígonos, projeção
6)Uma caixa d'água com a forma de um paralelepípedo reto de $1m \times 1m$ de base e $\frac{\sqrt{3}}{2}m$ de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura *h*. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse 30º. Calcular a altura *h*.	Verbal	Mista (Espacial e Geométrica)	Formação de polígonos, secção
7)Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido. 	Mista (verbal e pictórica)	Mista (Espacial e Geométrica)	Secção

Tabela 12.2 . Classificação dos problemas de exames vestibulares do instrumento utilizado na pesquisa (continuação)

Problema	Classificação		
	Apresentação das informações	**Estrutura conceitual**	**Habilidade envolvida**
8)As arestas do cubo ABCDEFGH da figura medem 1 *m* . Seja S_1 a parte do cubo que a face AEHD geraria se sofresse uma rotação de 90° em torno de DH até coincidir com DCGH. E seja S_2 a parte do cubo que a face ABFE geraria se sofresse uma rotação de 90° em torno de BF até coincidir com BCGF. Nessas condições : a) determine o volume de S_1 e S_2 b) determine o volume d e $S_1 \cap S_2$ 	Mista (verbal e pictórica)	Mista (espacial e geométrica)	Revolução

Observa-se que os oito problemas selecionados requerem estrutura espacial ou estrutura mista (espacial e geométrica). A classificação que foi feita permitiu a segunda parte desta análise, ou seja, a análise da funcionalidade das representações pictóricas externas feitas pelos alunos na solução de problemas geométricos.

A funcionalidade das representações pictóricas externas

Para essa etapa do estudo foram selecionados apenas sujeitos da 3ª série, uma vez que estes, no momento da aplicação do instrumento, já haviam estudado os conceitos relativos à geometria espacial necessários para a solução dos problemas.

Os sujeitos foram solicitados a resolver os problemas, deixando a solução indicada nos espaços determinados. A verificação das representações pictóricas externas feitas por esses sujeitos permitiu um melhor entendimento do papel dessas representações em algumas fases da solução de um problema geométrico.

Tomou-se por base a identificação feita por Krutetskii (1976) dos componentes básicos da habilidade matemática correspondentes aos processos cognitivos do sujeito durante a solução de problemas matemáticos[1]. Optou-se, então, por classificar a funcionalidade das representações pictóricas externas em duas fases: na fase da obtenção da informação geométrica e fase do processamento da informação geométrica.

1ª fase: a funcionalidade das representações externas na obtenção das informações geométricas iniciais

Os problemas usados na pesquisa apresentavam as informações na forma verbal ou na forma mista (verbal e pictórica). Para interpretar as informações que eram dadas verbalmente, parece que o sujeito deveria decodificar as propriedades e as relações de modo a representá-las mentalmente na forma de uma imagem tri-dimensional que traduzisse o conceito geométrico espacial. Observando-se as soluções dos sujeitos, verificou-se que em muitos casos essa imagem tri-dimensional pôde ser externalizada na forma pictórica bi-dimensional em perspectiva.

Quando as informações do problema (ou parte delas) se apresentavam na forma pictórica, parece que o sujeito deveria decodificar as propriedades e relações a partir do desenho bi-dimensional a fim de construir uma representação mental tri-dimensional do objeto.

---

[1] Esses componentes - que formam em conjunto um sistema que caracteriza a habilidade matemática - são: obtenção da informação matemática; processamento da informação matemática; retenção da informação matemática e componente geral sintético.

Assim, para obter as informações geométricas iniciais de um problema, o sujeito deveria formar uma imagem mental em três dimensões, sendo esta construída quer a partir da informação verbal, quer a partir da percepção do desenho dado.

As representações pictóricas externas nesta primeira fase de obtenção da informação geométrica pareciam ter a função de representar o conceito geométrico espacial ao qual o problema se referia.

A figura 12.3 mostra algumas representações pictóricas externas com essa função, sendo estas relativas ao primeiro, quarto e sexto problema. Acrescenta-se que esses problemas tinham as informações dadas na forma verbal.

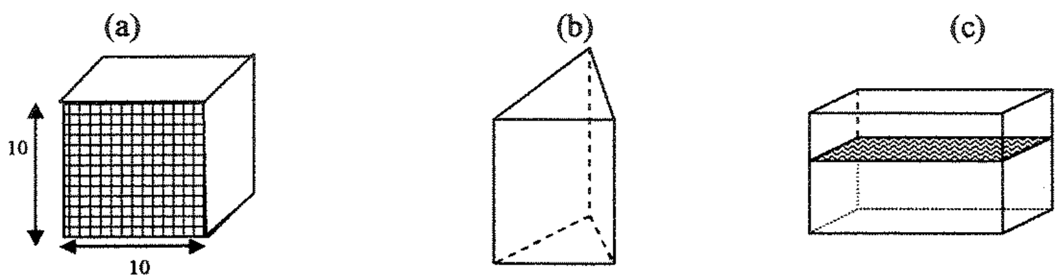


Figura 12.3. Representações pictóricas externas como referência conceitual espacial.

Observa-se, na Figura 12.3, que (a) refere-se ao conceito de cubo (com medida de arestas); (b) refere-se ao prisma regular de base triangular e (c) ao paralelepípedo.

2ª fase: a funcionalidade das representações pictóricas externas no processamento das informações do problema.

Quando a estrutura do problema era espacial, os alunos não precisavam de outros conceitos, princípios e relações geométricas complexas para solucioná-lo.

O primeiro problema, por exemplo, solicitava o número de cubinhos que possuíam exatamente três cores, após fornecer as informações sobre o cubo inteiro, as divisões, as faces coloridas etc. Se ao sujeito fosse oferecido um cubo grande de madeira com as faces coloridas e demarcadas, pode-se supor que, mesmo de posse do objeto, a contagem dos cubinhos não se daria baseada apenas na percepção: talvez o sujeito precisasse movimentar o cubo, imaginar as faces não pintadas, contar as arestas, anotar e organizar a contagem. Sem o objeto, todas as operações seriam organizadas mentalmente e pode-se supor um grau de dificuldade maior, considerando que é necessário certo esforço para manter as imagens mentais, inspecionar essas imagens, relacioná-las e organizar a contagem.

A maior parte dos sujeitos fez representações pictóricas externas para o primeiro problema. Embora os desenhos feitos sejam bidimensionais, verifica-se, pelos rabiscos e sombreamentos feitos, que os sujeitos inspecionaram as imagens usando suas próprias representações pictóricas externas. Há casos em que o sujeito representou uma nova imagem que serviu para refinar as imagens anteriormente formadas e assim organizar melhor a contagem. Em outros casos, representou o objeto de forma ampliada e incompleta, resultado do enfoque feito em apenas uma parte da imagem, e então explorou propriedades para sistematizar a contagem. Portanto, além de serem uma referência conceitual, as representações pictóricas externas pareciam ter a função de assistência perceptual.

A figura 12.4 mostra as representações do primeiro problema, com essas funções.

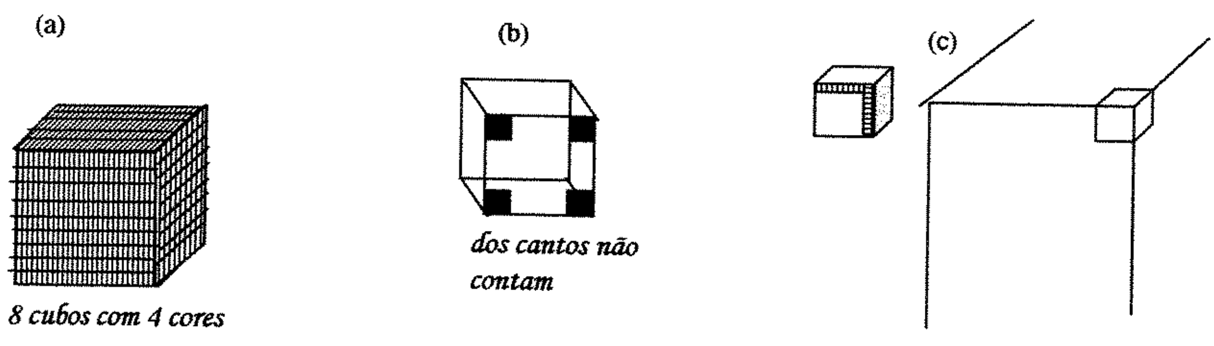


Figura 12.4. Representações pictóricas externas com a função de assistência perceptual no processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem.

O segundo problema, com estrutura também espacial, apresentava parte das informações na forma pictórica, sendo que a figura dada poderia ter sido usada com a função de assistência perceptual na fase do processamento das informações. Vários sujeitos subdividiram o sólido em cubos e paralelepípedos menores e somaram seus volumes. Mas, parece que outros sujeitos organizaram o interior vazado do cubo e assim formaram a imagem de um sólido representando a parte oca. Dessa forma, uma solução elegante foi subtrair o volume "vazado" do cubo inteiro. Portanto, o resultado da inspeção da imagem antiga foi traduzido na forma de uma outra imagem tridimensional, com as informações conceituais da geometria espacial necessárias para o prosseguimento da solução.

De forma parecida, as representações pictóricas externas feitas para o sétimo problema indicaram que os sujeitos formaram uma outra imagem tridimensional a partir da inspeção da imagem antiga, sendo clara a intenção de completar o cilindro para calcular o volume.

Nesses casos, portanto, as representações pictóricas externas se referiam a imagens tridimensionais resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem e serviam como uma referência conceitual espacial para a solução do problema.

A figura 12.5 mostra as representações pictóricas externas com essa função.

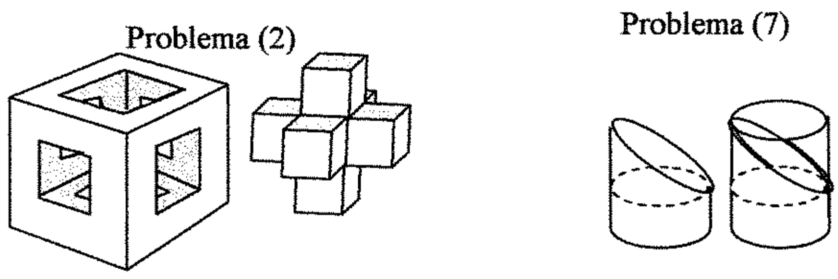


Figura 12.5. Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial.

Quando as informações do problema sugeriam uma transformação na imagem inicial, a representação da imagem resultante também era feita de modo completo, como se o processo se iniciasse a partir dessa nova representação. A figura 12.6 mostra as representações pictóricas externas para o sexto e o oitavo problema com a função de externalizar o resultado de uma transformação na imagem inicial e de dar referência conceitual espacial para a solução.

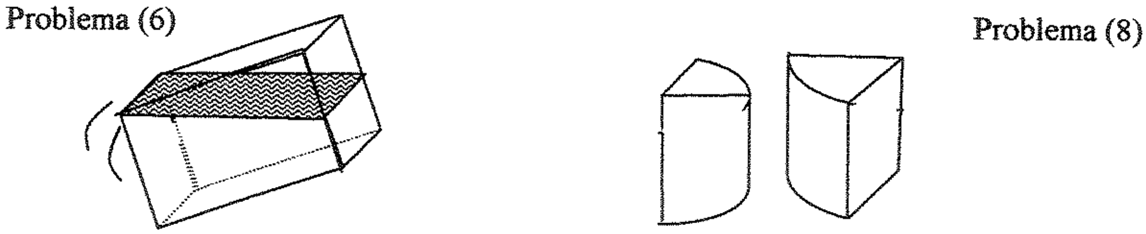


Figura 12.6. Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à transformação de imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial.

Finalmente, há os casos em que o processamento das informações relativas à inspeção ou à transformação de imagem parecia levar à formação de uma figura plana. Essa figura podia ser um polígono formado no espaço, o resultado de secção, a face de um poliedro, o resultado de projeções etc. Nesses casos, as representações pictóricas externas tinham a função de externalizar o resultado de uma inspeção na imagem e de dar referência conceitual plana para a solução. A figura 12.7 mostra representações pictóricas externas para o terceiro e o quinto problema, com essa função.

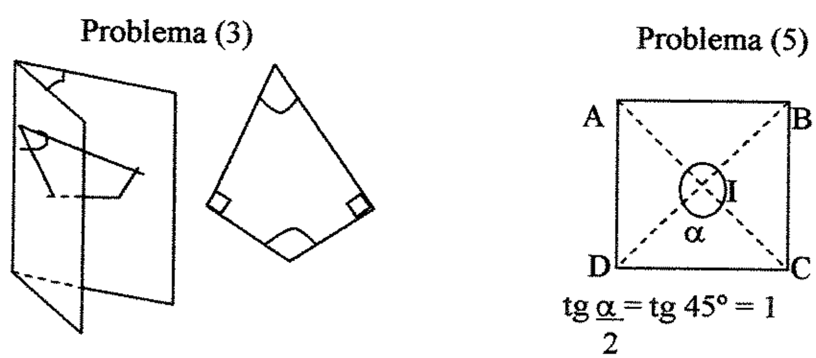


Figura 12.7. Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de referência conceitual plana.

A coerência das representações pictóricas externas

As representações pictóricas externas com a função de referência conceitual na obtenção das informações geométricas iniciais do problema nem sempre estavam de acordo com o problema. As representações foram denominadas de coerentes quando expressavam os conceitos, as propriedades e as relações que constavam nas informações do problema de modo correto. As representações não coerentes expressavam parte das propriedades e das relações ou mostravam uma organização que não estava de acordo com o problema. A figura 12.8 mostra representações coerentes e não coerentes para o quarto problema que tratava do conceito de prisma regular de base triangular.

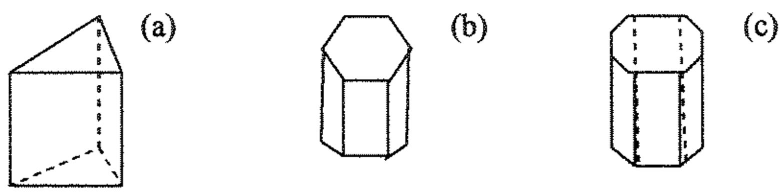


Figura 12.8. Representações pictóricas externas com a função de referência conceitual: coerente (a) e não coerentes (b) e (c) para o quarto problema.

Foi possível observar também a coerência das representações pictóricas externas como resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem. A Figura 12.9 mostra duas representações pictóricas externas para o problema (5).

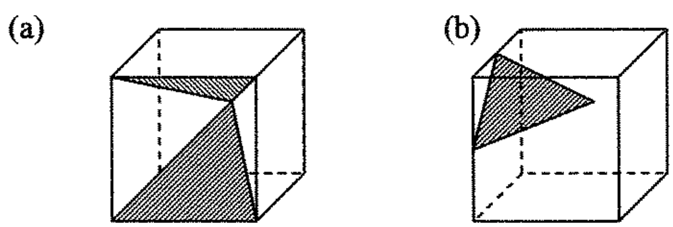


Figura 12.9. Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de nova referência conceitual espacial: coerente (a) e não-coerente (b) para o quinto problema.

Para traduzir o processamento das informações que levava a uma transformação da imagem, os sujeitos usaram representações externas que também puderam ser classificadas pela sua coerência com a imagem que deveria ser obtida. A figura 12.10 mostra algumas representações pictóricas externas para o sexto problema.

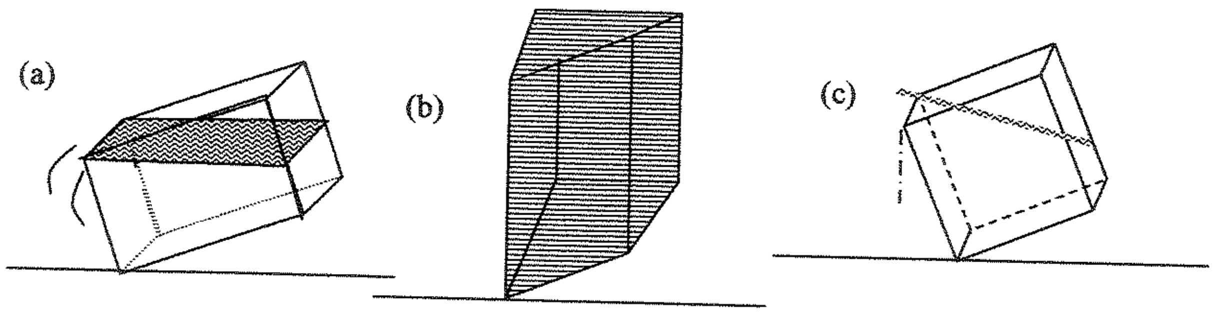
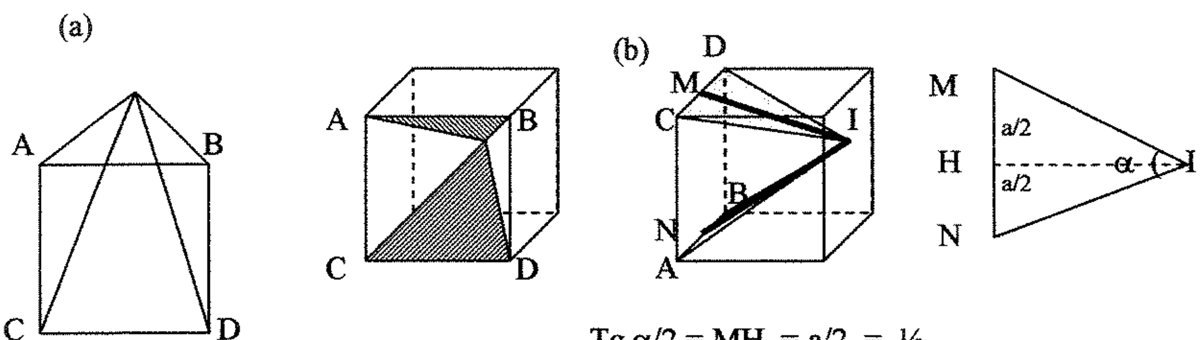


Figura 12.10. Representações pictóricas externas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à transformação de imagem com a função de nova referência conceitual espacial: coerente (a) e não-coerentes (b) e (c) para o sexto problema.

O detalhamento processual das representações pictóricas externas

Vários sujeitos, em alguns problemas, utilizaram mais de uma representação pictórica externa para detalhar seqüencialmente cada um dos processos de inspeção e transformação das imagens. Cada representação resultante tinha a função de nova referência conceitual e parecia estar comprometida com as estratégias de solução do problema. Outros sujeitos fizeram, para os mesmos problemas, apenas uma representação inicial ou uma representação final, sem intermediárias do processo. A representação inicial tinha a função de referência conceitual espacial. Já a representação final era resultante do processamento das informações geométricas relativas à transformação de imagem com a função de uma nova referência conceitual plana.

Assim, as representações que podiam ser claramente interpretadas, que detalhavam uma seqüência dos processos de inspeção e transformação de imagens e que pareciam estar comprometidas com as estratégias de solução do problema foram chamadas de representações pictóricas externas completas. Quando as representações não eram apresentadas de forma a retratar a seqüência dos processos de manipulação de imagens, mostravam figuras ambíguas, pareciam incompletas ou não traduziam a lógica de solução, estas foram chamadas de representações pictóricas externas parciais. Acrescenta-se que o detalhamento completo ou parcial das representações não garantia a coerência com as informações do problema. Muitas vezes o aluno solucionou corretamente o problema mostrando apenas representações parciais, enquanto que outros mostraram com detalhamento os processos coerentes com as estratégias de solução, mas obtiveram solução errada. A Figura 12.11 mostra exemplos de representações pictóricas externas parciais e completas para o quinto problema.



$$Tg\ \alpha/2 = \frac{MH}{HI} = \frac{a/2}{a} = ½$$

Figura 12.11. Representações pictóricas externas (a) parcial e (b) completa, para o quinto problema.

A Tabela 12.3 mostra o resumo dos critérios adotados para análise das representações pictóricas externas.

Tabela 12.3. Resumo dos critérios estabelecidos para análise das representações pictóricas externas

	Representações pictóricas externas
Critérios	**Classificação**
Funcionalidade	Referência conceitual espacial Assistência perceptual Resultante de inspeção/transformação: nova referência conceitual espacial Resultante de inspeção/transformação: referência conceitual plana
Coerência	Coerente Não coerente
Detalhamento processual	Completa Parcial

Comparação das representações feitas por sujeitos mais habilidosos e por sujeitos menos habilidosos

Para esta parte da análise, optou-se por selecionar oito sujeitos, sendo estes classificados de acordo com a pontuação obtida na prova do componente espacial da habilidade matemática (CEHM), isto é, quatro sujeitos considerados como mais habilidosos e quatro que foram considerados como menos habilidosos, conforme mostra a Tabela 12.4.

Tabela 12.4 . Sujeitos selecionados para a etapa do estudo e algumas variáveis.

Sujeito	Gênero	Serie	CEHM	Classificação
VIT	Mas	3ª	73,5	Mais habilidoso
VAG	Mas	3ª	67,5	Mais habilidoso
CEL	Fem	3ª	56,0	Mais habilidoso
VIN	Mas	3ª	55,0	Mais habilidoso
SER	Mas	3ª	54,0	Mais habilidoso
LUC	Fem	3ª	11,5	Menos habilidoso
THA	Fem	3ª	15,0	Menos habilidoso
JUL	Fem	3ª	18,5	Menos habilidoso
PAT	Fem	3ª	20,0	Menos habilidoso
FAB	Fem	3ª	26,0	Menos habilidoso

Os sujeitos menos habilidosos

As representações externas pictóricas para o primeiro problema tiveram a função de referência conceitual e alguns sujeitos as utilizaram como assistência perceptual. No entanto, apesar dos rabiscos e sombreamentos feitos no desenho, a contagem não foi sistematizada, já que erraram o número de cubinhos com exatamente três cores. Um dos sujeitos tentou sistematizar a contagem planificando o cubo. Embora sua representação pictórica estivesse comprometida com a solução parcial apresentada, esta era incoerente com as informações do problema, sendo que o sujeito parecia confundir os conceitos de área e volume. A Figura 12.12 mostra as representações para o primeiro problema.

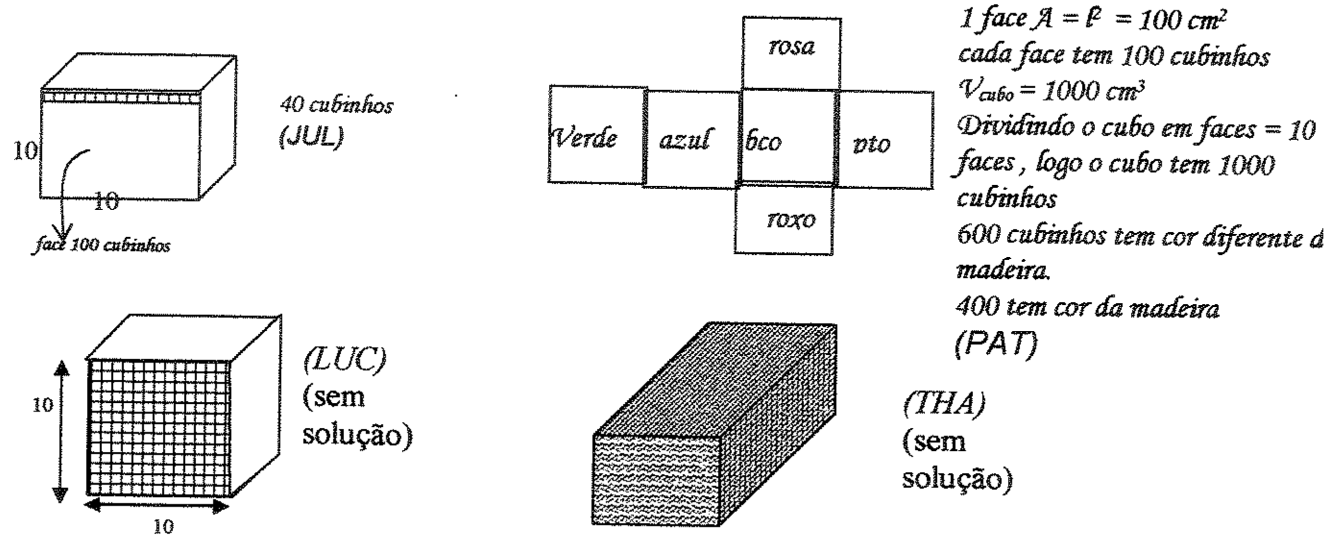


Figura 12.12. Representações pictóricas externas de sujeitos menos habilidosos para o primeiro problema.

Considerando as representações mostradas na Figura 12.12, pode-se concluir que os sujeitos menos habilidosos, apesar de terem formado e representado a imagem referente ao conceito de cubo (embora nem todas coerentes), não foram hábeis em inspecionar essa imagem, mesmo usando as representações externas como assistência perceptual.

O segundo problema, cujas informações eram dadas na forma mista, isto é, pictórica e verbal, não requeria a representação pictórica externa. A imagem que poderia ser formada era referente ao sólido retirado do cubo. As soluções dos alunos sugerem que estes não formaram aquela imagem, conforme mostra a Figura 12.13.

V total: $6^3 = 216\ cm^3$.
V buraco: $2^3 = 8\ cm^3$.
Vtotal – Vburaco =
$216 - 8 = 208\ cm^3$.

O volume da peça é $208\ cm^3$.
(PAT)

$V = a^3$.
$V = 6^3$
$V = 216\ cm^3$.
O buraco tem aresta de 2 cm
$2^2 \times 6 = 24$
$216 - 24 = 192\ cm^3$
(JUL)

$V_{total} = a^3 = 6^3 = 216$.
V buraco $= a^3 = 2^3 = 8$

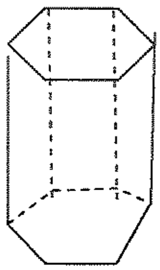
$V = 216 - 8 = 208\ cm^3$
(LUC)

Figura 12.13. Soluções apresentadas por sujeitos menos habilidosos para o segundo problema.

Os outros problemas não foram solucionados pelos sujeitos menos habilidosos. Apenas o quarto problema foi solucionado erroneamente por dois sujeitos, conforme mostra a Figura 12.14.

$\mathcal{A}_t = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} =$

$\frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

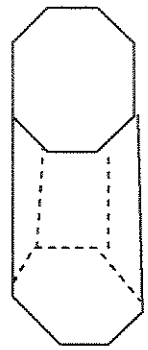


$V_{prisma} = \mathcal{A}_6 . \mathcal{H}$

$V_{prisma} = 9\sqrt{3} . 6 =$

$V_{prisma} = 54\sqrt{3}$

(LUC)



$\mathcal{A} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$V = \mathcal{A}_6 . h = 9\sqrt{3} . \frac{9\sqrt{3}}{6}$

$V = \frac{81.3}{6} = 40,5\ cm^3$

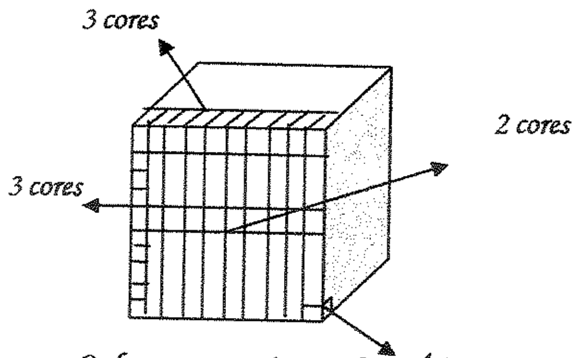
(FAB)

Figura 12.14. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos menos habilidosos para o quarto problema.

Pode-se verificar, pela Figura 12.12, que os sujeitos conheciam as fórmulas de área e volume, mas não as aplicavam corretamente de acordo com as informações do problema. As representações pictóricas externas não eram coerentes com o conceito de prisma triangular, sendo que o desenho de *FAB* não possuía coerência interna, isto é, o prisma tinha a base inferior hexagonal e a superior octogonal ao mesmo tempo.

Os sujeitos mais habilidosos

Para o primeiro problema, apenas um sujeito fez representações completas, isto é, estas detalhavam o processo de inspeção e a linha de raciocínio para a solução. A maioria deles fez representações parciais, e dois não fizeram nenhuma representação, indicando que pareciam não necessitar da representação pictórica externa como assistência perceptual. A figura 12.15 mostra a solução para o primeiro problema.



Cada aresta contém 8 cubos
12x8=96
(CEL)

12 . 8 = 96
(VIT, VAG, VIN, SER)

Figura 12.15. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o primeiro problema.

Nota-se, pela Figura 12.13, que *CEL* não parece ter usado sua representação como assistência perceptual. Seu desenho está mais comprometido em explicar as estratégias de solução do problema.

O segundo problema pareceu também ter sido organizado mentalmente, sendo que a maioria utilizou a estratégia de retirar o volume do sólido "vazado" do interior do cubo, sem usar representações pictóricas externas. Nota-se que *CEL* diferiu dos outros sujeitos pois decompôs o cubo em paralelepípedos e estes em cubos, calculou os volumes e compôs a figura. A figura 12.16 mostra as soluções para o segundo problema.

8 cubos (cantos)

$V = a^3$
$V = 2^3$
$V_1 = 8.8 = 64\ cm^3$

8 cubos (entre cantos)
$V = a^3$
$V = 2^3$
$V_2 = 12.8 = 96\ cm^3$

$V = 64 + 96$
$Vt = 160\ cm^3$
(CEL)

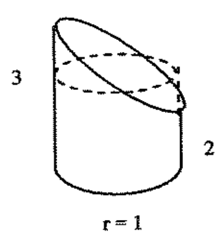
$V = 6^3 = 216$
$v = 2^3 = 8$
$7.8 = 56$
$216 - 56 = 160\ cm^3$
(VAG, VIN, SER)

$6^3 - (3.\ 2\ .\ 2\ .6 - 2\ .\ 2^3\ ) =$
$216 - 72 + 16 = 160\ cm^3$
(VIT)

Figura 12.16. Soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o segundo problema.

Parecendo indicar um raciocínio mais complexo, *VIT* utilizou uma expressão que sugere imagens separadas de três paralelepípedos (e da intersecção deles) a serem retiradas do cubo. Nesse último caso, *VIT* não parece inspecionar uma imagem, e sim utilizar processos analíticos para subtrair os cubos do volume total

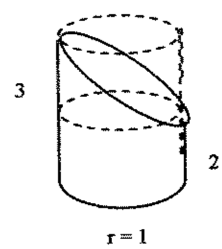
Se as representações pictóricas externas não tinham a função de assistência perceptual ou de referência conceitual espacial para o primeiro e quarto problema, elas surgiram, de forma completa, em outros problemas como resultantes do processo de inspeção de imagem na fase de processamento das informações do problema. Uma solução simples para o sétimo problema encontrada pelos sujeitos habilidosos foi representada coerentemente e completamente conforme mostra a figura 12.17.



$V = \pi.1.2{,}5$

$V = 2{,}5\ \pi.$

(VAG)



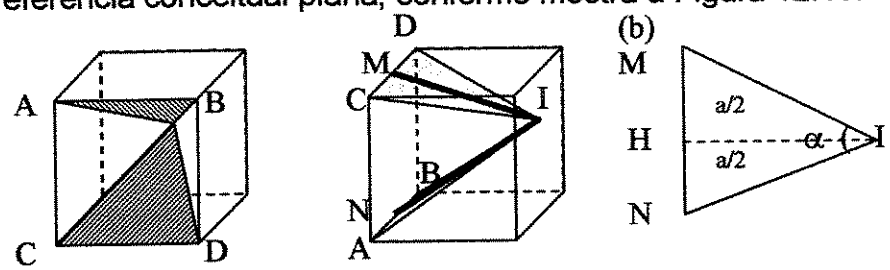
$V = \pi.1.2 + \frac{\pi..1}{2}$

$V = \frac{5}{2}\pi.$

(VIN)

Figura 12.17. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o sétimo problema.

No quinto problema, os sujeitos fizeram três desenhos, sendo que os dois primeiros tinham a função de nova referência conceitual espacial e o terceiro de referência conceitual plana, conforme mostra a Figura 12.18.



$$Tg\ \alpha/2 = \frac{MH}{HI} = \frac{a/2}{a} = ½$$

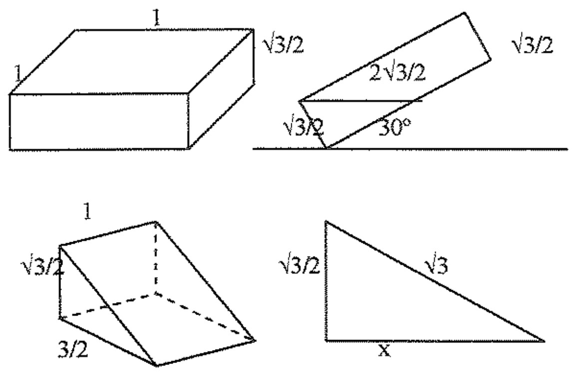
(SER, CEL, VAG)

Figura 12.18. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o quinto problema.

Verifica-se, pela figura 12.18, que os sujeitos fizeram representações coerentes e completas, indicando uma seqüência de movimento no cubo com o objetivo de explicar a imagem formada. *VIT* solucionou o problema sem fazer nenhuma representação, indicando apenas tg $a/2 = ½$. o que sugere que ele tenha inspecionado as imagens mentalmente.

Para processar as informações do sexto problema era necessário que os sujeitos inspecionassem a imagem de uma caixa com água em uma posição inclinada em relação ao solo e formassem a imagem resultante dessa transformação. Vários sujeitos mais habilidosos fizeram representações pictóricas externas completas, mas nem todas coerentes com as informações. A linha de demarcação da água reunida com as arestas do paralelepípedo formaria um trapézio, mas alguns sujeitos representaram um triângulo. Mesmo com a solução errada, foi possível verificar que as representações desses sujeitos eram completas, isto é, detalhavam o processo de transformação da imagem e estavam comprometidas com as suas estratégias de solução. A figura 12.19 mostra as representações feitas pelos sujeitos mais habilidosos para esse problema.

Observa-se, pela Figura 12.19, que *VAG* falhou ao imaginar que o nível da água, na caixa inclinada, formaria um triângulo. No entanto suas representações pictóricas externas resultantes da transformação de imagem tinham a função de uma nova referência conceitual espacial, ou seja, o prisma de base triangular. Também pode-se verificar o desenho do triângulo como referência conceitual plana e constatar que suas representações eram completas, isto é, detalhavam o processo e estavam comprometidas com a linha de raciocínio. Já *VIT* não fez as representações pictóricas com a função de referência conceitual espacial, pois seus desenhos já se referiam aos conceitos de geometria plana, sendo portanto, representações parciais e finais. Mas, nos dois exemplos citados, os sujeitos parecem imaginar a água formando um prisma, sendo este de base triangular (como imaginou *VAG*) ou trapezoidal (como imaginou *VIT*).



$$\cos 30^{o} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}$$

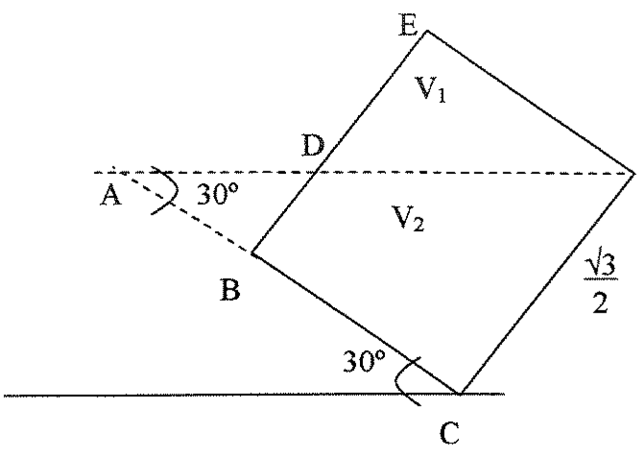
$$x = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\frac{3}{4} + y^2 = 3 \rightarrow y^2 = \frac{12-3}{4} \rightarrow y^2 = \sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} = l.c.h \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{8} = 1.1.h \rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{8} m \quad (VAG)$$



$$AC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{tg30^{o}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$BD = ABtg30^{o} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} .1. \frac{1}{2} .1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$V = h.1.1 = 1.1.\frac{\sqrt{3}}{2} - V_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3} m \quad (VIT)$$

Figura 12.19. Representações pictóricas externas e soluções apresentadas por dois sujeitos mais habilidosos: completas e não-coerentes (VAG, acima) e parciais e coerentes (VIT, abaixo) para o sexto problema.

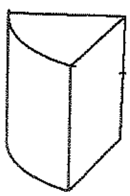
O último problema tinha duas perguntas, sendo que a primeira foi solucionada corretamente por quatro sujeitos e a segunda por três sujeitos. Eles não fizeram nenhuma representação pictórica externa para as imagens dos cilindros e de seus cortes, com exceção de *VAG* e *SER*, que não conseguiram terminar o problema. As soluções são mostradas na figura 12.20.

$V_{cubo} = 1^3 = 1m^3$

$a)V_{semi-cilindro} = \frac{\pi}{4}$

$S_1 = S_2 = \frac{\pi}{4}$

$b)?$



(SER)

$a)360° \to \pi r^2$

$....90° \to x$

$x = \frac{90.\pi.r^2}{360}$

$x = \frac{\pi}{4}$

$V = Ab.h$

$V = \frac{\pi}{4}.1$

$V = \frac{\pi}{4}m^3$

$VS_1 = VS_2$

$b)?$ (CEL)

$cilindro V = \pi.1^2.1 = \frac{\pi}{4}$

$cubo V = a^3 = 1$

$a)S_1 = \frac{\pi}{4}$

$S_2 = \frac{\pi}{4}$

$b)V_t = 1$

$S_1 \cap S_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4}.2 - 1 =$

$\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$

(VIN)

$a)V_1 = V_2 = \frac{\pi.1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$

$b)\frac{A}{2} = \frac{\pi.1^2}{4} - \frac{1.1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$A = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)m^2$

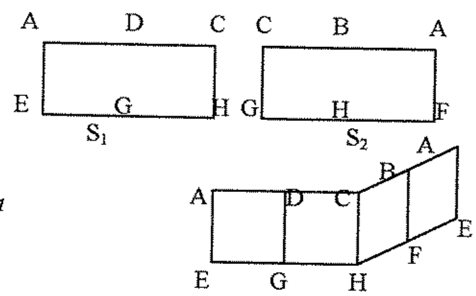
$V = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)m^3$

(VIT)

$a)VS_1 = VS_2 = 2.1 = 2$

b) Não há volume a intersecção

(S_1 .$\cap$ S_2) é apenas uma semi-reta CG_1



(VAG)

Figura 12.20. Soluções e representações apresentadas por sujeitos mais habilidosos para o oitavo problema.

Nota-se, pela Figura 12.18, que *SER* e *CEL* não solucionam a parte b) do problema. *VIN* subtrai a intersecção de volumes do volume total e *VIT* faz o mesmo, porém com as áreas das bases. É interessante observar as representações de *VAG*. Este sujeito processou o movimento das faces do cubo, mas não formou a imagem do cilindro - como sugeria as informações do problema – e planificou algumas faces do cubo. Suas representações pictóricas externas apesar de não-coerentes, são completas pois detalham o processamento de transformação da imagem.

Os processos visuais mentais evidenciados pelas representações pictóricas externas na solução de problemas: a formação e manipulação de imagens.

Para a obtenção da informação geométrica do problema e para o processamento dessa informação, considerou-se que os conceitos devem ser representados mentalmente por meio de imagens. Para explicar como as imagens podem ser formadas e manipuladas, buscou-se embasamento no modelo de Kosslyn (1995).

O processo de formação das imagens pode ser compreendido como a geração, no campo visual, de uma imagem única ou a geração de múltiplas partes que irão compor a imagem final a ser inspecionada. Mesmo quando a informação do problema é dada na forma pictórica, é necessário que o sujeito forme, a partir da percepção do desenho bidimensional, uma imagem tridimensional da figura e a configure no campo visual.

Assim, no problema que fazia referência a um prisma de base triangular, parece que seriam acessadas as representações na memória associativa e, no sistema chamado de ativação de padrões, seria ativada uma imagem padrão associada com o objeto. No caso de imagens mais complexas, como sugere o problema que solicitava determinar o nível da água numa caixa que inclinada, parece ser o sistema da busca da informação melhorada que acessaria a localização de uma parte ou característica a ser imaginada na memória associativa, sendo que o sistema de mudança de atenção focalizaria novo painel de atenção, no campo visual.

De acordo com Kosslyn (1995), é possível ativar uma representação no subsistema de ativação de um modelo exemplar ou de um modelo categórico (ou proposicional). Na primeira situação, a imagem é o único representante para aquele conceito, como é o caso do primeiro e do quinto problema, que inicialmente sugerem a imagem do cubo. Na segunda situação, o modelo proposicional é mais genérico, contém informações sobre as propriedades do objeto e como elas se relacionam. Como exemplo, pode-se verificar as diferenças nas representações que os sujeitos fizeram quando processavam as informações dos problemas.

Além do processo de formação da representação mental, é necessário que o sujeito inspecione essa imagem e então forme outras imagens associadas ao problema. Os subsistemas de mapeamento espacial e de movimentação ajudam a organizar os elementos da imagem. Em muitos casos as imagens devem ser manipuladas, sendo que os processos envolvidos na inspeção e transformação das imagens foram classificados por Kosslyn (1995) como: esquadrinhar, traçar um panorama, zoom e rotacionar, acrescentando-se que a maioria desses processos citados não acontece separadamente.

A seguir, será feita uma tentativa de interpretação dos cinco primeiros problemas, tendo por base os processos envolvidos na formação e manipulação de imagens, conforme Kosslyn (1995).

O primeiro problema solicitava a contagem de cubos num arranjo. Para interpretar as informações iniciais, parece que o sujeito deveria formar a imagem mental tridimensional de um cubo (figura bastante conhecida dos alunos) e a seguir representá-la externamente na forma de um desenho em perspectiva.

A imagem parece ser formada através do subsistema de ativação de modelo exemplar, na memória associativa. Mas, como o modelo deveria sofrer modificações, isto é, o enunciado do problema informava que as faces foram pintadas e subdivididas, então deveria ser ativado um modelo categórico, isto é, uma imagem padrão formada a partir de informações conceituais: seis faces, oito vértices, doze arestas etc. A inspeção da imagem deveria acontecer em três momentos: primeiro, quando o problema indicou uma ação a ser realizada com o cubo inteiro (suas seis faces devem ser pintadas); segundo, quando o problema indicou uma ação que transformaria o cubo (este deve ser subdividido em cubinhos de 1cm de aresta); terceiro, quando o problema indagou sobre o número de cubinhos que terão exatamente três cores. O subsistema responsável por essa inspeção de imagem parece ser o subsistema de procura melhorada da informação, pois há a necessidade de um mapeamento espacial na imagem do cubo.

Nesse caso, as imagens devem ter sido formadas e inspecionadas a partir da percepção, por meio do subsistema de controle da atenção baseado no estímulo.

Este subsistema também pode ter sido responsável pela inspeção das imagens dos cubinhos da cor da madeira que estariam no interior do cubo, embora estes não precisassem ser contados.

Assim, as representações pictóricas externas dos sujeitos, parecem ter ajudado a organizar o raciocínio para encaminhar a solução do problema: em cada aresta, oito cubos teriam três cores diferentes; como o cubo tem 12 arestas, então: $12 . 8 = 96 \text{ cm}^3$.

Se o primeiro problema exigia, a partir de informações verbais, a formação da imagem do cubo para posterior inspeção, o segundo problema já apresentava as informações na forma pictórica e também exigia a habilidade de contar cubos num arranjo. A partir da percepção, o sujeito deveria formar a imagem a ser inspecionada.

Observando-se a representação pictórica externa do sujeito *CEL*, foi verificado que ela dividiu o cubo em regiões sólidas que foram identificadas como cubos menores e que foram organizados, sendo que seus volumes foram somados ao final. Isto sugere que *CEL* tenha utilizado o subsistema de decodificação de relações espaciais categóricas para inspecionar a imagem obtida por meio da percepção, através do subsistema de controle de atenção baseado no estímulo. Os riscos auxiliares que *CEL* fez no desenho mostram que ela utilizou a figura para organizar as informações espacialmente, refinar e tornar imagens mentais não ambíguas além de mantê-las na memória.(veja Figura 12.13). Em outra solução, *VAG* e *VIN* parecem ter formado a imagem da região vazada que foi subtraída do cubo. Trata-se, nesse caso, da formação de imagem através do mapeamento espacial e da decodificação de relações categóricas (relativas ao próprio cubo) e coordenadas (relativas à posição dos cubinhos dentro do cubo). Para inspeção da imagem e finalmente cálculo do volume vazado, deve ter sido usado o subsistema de procura melhorada da informação, já que *VAG* e *VIN* não fizeram a representação externa pictórica.

O terceiro problema requeria a habilidade de identificação de polígonos no espaço e a percepção da figura que foi apresentada aos sujeitos pareceu auxiliar a formação da imagem. Parece que, embora a primeira imagem esteja apoiada na percepção (tendo sido utilizado inicialmente o controle de atenção baseado no estímulo), para solucionar o problema é necessário que o sujeito decodifique relações espaciais coordenadas: as projeções ortogonais do ponto P nos semi-planos formaram segmentos perpendiculares a esses planos, indicando a formação da imagem do quadrilátero. A solução final parece que dependeu da utilização do subsistema de procura melhorada da informação, sendo importante o conceito de ângulos internos de um quadrilátero.

O quarto problema exigia a habilidade de planificação de uma figura. Para tanto, parece que era necessário buscar na memória associativa a imagem do prisma regular de base triangular, sendo responsável por essa busca o subsistema de ativação de modelo categórico (ou proposicional). A inspeção da imagem por meio do subsistema de decodificação das relações espaciais deve ter sido utilizado para identificar as faces do prisma.

O problema 5 exigia a habilidade de identificação de polígonos no espaço. Isso sugere que os sujeitos tenham utilizado o subsistema de controle da atenção baseado no estímulo e o subsistema das relações de movimento. A identificação do ângulo solicitado deve ter sido possibilitada pelo uso do subsistema de decodificação das relações espaciais categóricas. Os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente, tangente devem ter sido ativados pelo subsistema de procura melhorada da informação – que é baseado nas informações conceituais - para encaminharem a solução.

Considerou-se, portanto, que a solução dos problemas geométricos compreenderia duas fases importantes - uma relativa à obtenção da informação geométrica do problema e outra relativa ao processamento da informação - e que ambas poderiam ser analisadas sob a evidência de processos visuais mentais. Assim, a teoria de Kosslyn (1995) pôde fornecer alguns indícios para que se possa entender os mecanismos comuns aos processos mentais de formação e manipulação de imagens e aos processos da percepção, evidenciados pelas representações pictóricas externas.

CAPÍTULO XIII

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Sobre os fatores cognitivos e o desempenho escolar em geometria

Uma das questões básicas do presente trabalho se referia às diferenças de desempenho escolar em geometria ligadas aos aspectos cognitivos. Buscou-se obter um melhor entendimento da habilidade espacial evidenciada pelos sujeitos desse estudo quando desempenhavam tarefas de geometria. A compreensão dessa habilidade incluiria a análise quantitativa das relações com o raciocínio espacial e com o desempenho escolar, além da análise qualitativa das representações pictóricas externas na solução de problemas de geometria espacial.

Na revisão da literatura feita por Krutetskii (1976) foi encontrado, entre outros estudos, o trabalho de Werdelin (1958) que estudou a estrutura da habilidade matemática por meio da análise fatorial e identificou quatro componentes: espacial, lógico, numérico e simbólico. Já Krutetskii (1976) postulou que a potência do componente espacial não determinaria o grau de genialidade, mas sim o seu tipo de mente matemática. Seus estudos acerca do "componente geral sintético" permitiram ao autor avaliar a habilidade para visualizar a posição de um sólido no espaço e as posições de suas partes e a capacidade de inter-relacionar sólidos, figuras, planos e linhas.

Sendo assim, um dos objetivos desse estudo era uma melhor compreensão do componente espacial da habilidade matemática através da identificação de habilidades específicas para as operações que foram solicitadas nas tarefas propostas aos sujeitos.

Os dados relativos à análise fatorial feita com as operações constantes na prova do Componente Espacial da Habilidade Matemática (contagem de cubos, formação e identificação de polígonos no espaço, secção, planificação, projeção e revolução) indicaram a existência de um único fator responsável por 47,524% da variância total. Isto significa que a prova avaliou a habilidade geral dos sujeitos em lidar com conceitos geométricos espaciais, com base nas tarefas propostas.

A análise quantitativa do Componente Espacial da Habilidade Matemática e a análise qualitativa das operações realizadas pelos sujeitos com melhor e pior desempenho permitiram identificar alguns sub-componentes dessa habilidade, tais como:

a) habilidade para sistematizar a contagem de cubos em um arranjo, organizando os blocos em paralelepípedos ou dividindo o sólido em camadas e representando o número total por uma expressão numérica (adição/multiplicação)

b) habilidade para identificar polígonos resultantes da união de pontos no espaço, identificando congruência dos lados, ângulos retos, paralelismo e perpendicularismo entre segmentos, estabelecendo duas ou mais relações simultaneamente.

c) habilidade para seccionar os sólidos por meio de planos imaginários e representar as secções no plano do papel como se estas fossem vistas de frente, realizando uma série de quatro operações: formação da imagem do plano em uma determinada posição que seccione o sólido, formação da imagem da figura plana obtida pelo limite da intersecção do sólido com o plano imaginário, rotação do plano em que se encontra essa figura e representação externa da figura. Habilidade para imaginar planos horizontais e verticais com diferentes afastamentos do centro do sólido e também vários planos inclinados em ângulos diversos com o plano da base do sólido, podendo assim, representar externamente várias secções.

d) habilidade para planificar figuras tridimensionais, seja rebatendo os planos das faces de poliedros, seja desenvolvendo as superfícies laterais de corpos redondos, sendo que os desenhos apresentam simetria ou indicam desdobramentos em continuidade.

e) habilidade para projetar ortogonalmente sólidos formados por cubinhos em qualquer face de um cubo referencial, desprezando cubos sobrepostos, respeitando a posição da face pedida, fazendo o desenho conforme o ponto de vista solicitado, representando apenas sua projeção. Habilidade para projetar ortogonalmente um cubo, mantendo os ângulos retos e também a proporcionalidade dos lados.

f) habilidade para identificar figuras planas geradoras de sólidos de revolução, reconhecendo pontos e linhas mais próximos e mais afastados do eixo de rotação, girando mentalmente o sólido obtido para comparar com o sólido apresentado na tarefa. Habilidade para desenhar figuras planas geradoras de sólidos de revolução, mantendo as medidas adequadas dos lados e ângulos dos polígonos bem como as distâncias das linhas até o eixo de rotação.

Já os sujeitos menos habilidosos utilizavam estratégias variadas para contar o número de cubinhos em um arranjo e estas também foram encontradas por Battista (1996), mas não conseguiram sistematizar a contagem, errando as respostas. As características das planificações que esses sujeitos fizeram são coerentes com as que foram encontradas em Viana (2000). Verificou-se, em várias planificações, que o sujeito ainda desenhava faces em perspectiva e, em alguns casos, desenhava uma representação global da figura, como se percebesse a figura como um inteiro contínuo. Os erros relativos à projeção de figuras cometidos por sujeitos menos habilidosos podem indicar a complexidade dessa operação, conforme apontam os estudos de Pani e seus colaboradores (1996), de Sweller (1988) e de Pillay (1994, 1998). Esses autores encontraram que quando não há alinhamento entre a orientação do objeto e a orientação da projeção do meio, pessoas não – especialistas freqüentemente não conseguem formar as imagens mentais das projeções.

As representações pictóricas externas demonstradas na solução de problemas de vestibulares evidenciaram diferenças entre os sujeitos mais habilidosos do presente estudo. O sujeito que foi considerado como mais habilidoso não fez representações pictóricas externas com a função de referência conceitual espacial, nem de assistência perceptual, nem de nova referência conceitual espacial nas representações resultantes de processo de inspeção/transformação de imagens mentais. Verificou-se que este sujeito fez as representações apenas no caso de nova referência conceitual plana. Foi observado que as poucas representações feitas eram coerentes com as informações do problema, apesar de serem parciais finais, isto é, não detalharem a obtenção da informação e nem as etapas de processamento da informação geométrica.

Outros sujeitos habilidosos fizeram representações que variaram de acordo com a natureza do problema. Mas, um ponto em comum com estes sujeitos é a ausência de representações pictóricas externas com a função de assistência perceptual, o que sugere que eles manipulem as imagens mentalmente. Dois sujeitos se valeram de representações parciais finais, na maioria dos casos com a função de nova referência conceitual plana. Dois sujeitos, ao contrário, utilizaram representações completas, explicando com detalhes a inspeção e transformação processada na imagem e finalmente as estratégias de solução do problema. Como foi verificado por Zhang (1977), a construção da representação externa bem elaborada para uso próprio só é feita se o custo associado com o processo de externalização for mais importante, para o sujeito, do que os benefícios do uso da representação.

Os sujeitos menos habilidosos fizeram as representações com a função de assistência perceptual, assim como também foi identificado nos estudos de Cox (1999). Várias representações não eram coerentes com as informações do problema, eram parciais e não pareciam comprometidas com as estratégias de solução.

Esses resultados podem ser interpretados de acordo com a teoria de Krutetskii (1976), que postulou que as pessoas habilidosas em matemática e classificadas no tipo geométrico seriam marcadas por um alto desenvolvimento de conceitos espaciais. As questões mais complexas poderiam ser elaboradas de modo rápido e acurado em suas mentes, sem haver necessidade de fazer desenhos de figuras. Nos estudos do autor, perguntas que solicitavam a identificação de sólidos de revolução a partir de figuras planas eram, por exemplo, respondidas rapidamente sem o uso de representações gráficas, permitindo inferir que os sujeitos imaginaram e manipularam mentalmente as figuras. Já os sujeitos do tipo analítico ou harmônico teriam mais dificuldade em visualizar as formas globalmente, sendo que as imagens poderiam ser formadas por meio de análise das partes da figura. Como no caso de um exemplo dado pelo autor, um triângulo retângulo girando em torno de um cateto poderia ser facilmente identificado como um cone, por um sujeito do tipo geométrico, como se este formasse a imagem globalmente; já um sujeito do tipo analítico concluiria que se trata de um cone fazendo a análise dos pontos do triângulo: o vértice do ângulo reto não gira, pois pertence ao eixo, o vértice do ângulo agudo gira definindo um círculo, a hipotenusa define o semi-espaço. Mas, o autor verificou que sujeitos habilidosos seriam hábeis em responder questões desse tipo, seja por meio de um processamento mais global ou mais analítico, com maior ou menor rapidez.

Assim, independende do tipo de mente matemática (algébrica, geométrica ou harmônica), os resultados do presente estudo sugerem que os alunos que conseguiram realizar as operações propostas no tempo determinado pela prova eram mais habilidosos quanto ao componente espacial da habilidade matemática. Eles conseguiram, também, resolver problemas com estruturação espacial valendo-se de representações pictóricas externas parciais e coerentes.

O Componente Espacial da Habilidade Matemática estava moderadamente relacionado com o Raciocínio Espacial, sendo que este foi tratado, neste trabalho, como um fator da inteligência. Embora se saiba que o conteúdo de geometria que havia sido ensinado aos sujeitos, até a data da aplicação dos instrumentos, era diferente nas três séries, verificou-se que foi mantida a correlação entre Raciocínio Espacial e o Componente Espacial da Habilidade Matemática nas séries, sendo que o desempenho na prova foi melhor na terceira série. Estes resultados parecem confirmar que o Componente Espacial deve estar ligado não apenas ao conhecimento e destrezas adquiridas em geometria, mas também à habilidade do sujeito. Como afirmaram Cooper e Regan (1982), certos procedimentos em tarefas com elementos espaciais exigem um modo de pensar que parece não depender muito de conhecimentos anteriores específicos, sendo que esse tipo de raciocínio parece ser representativo do pensamento de pessoas consideradas inteligentes.

O presente trabalho constatou que, para os sujeitos analisados, o desempenho escolar era influenciado pelo componente espacial da habilidade matemática, sendo que este exerceu maior influência no desempenho específico em geometria que em matemática. Além disso, existiu uma relação mais forte entre o componente espacial da habilidade matemática e o desempenho em geometria na terceira série. Convém esclarecer que na primeira e na segunda série os alunos tinham estudado mais geometria plana que espacial e que, na terceira série, o assunto era especificamente geometria de posição e métrica. Sendo assim, a relação encontrada na terceira série pode mostrar que o entendimento de conceitos e procedimentos nas aulas de geometria e o desempenho na solução de problemas solicitados nas provas mensais escolares pareciam influenciados pelas habilidades identificadas neste trabalho.

Mais uma vez, a discussão desses dados toma por base a teoria de Krutetskii (1976), que afirma que o bom desempenho dos alunos em tarefas matemáticas escolares pode ser influenciado por certas características individuais relativas às habilidades matemáticas.

O raciocínio espacial também teve, para os sujeitos desse estudo, relação com as notas escolares das disciplinas geometria (*r=0,393*) matemática (*r=0,299*) e física (*r=0,262*) e nenhuma relação com historia (*r=-0,020)* e geografia (*r=0,121).* Essas correlações foram parecidas com as correlações encontradas nos estudos de Primi e Almeida (2000) entre Raciocínio Espacial e nota em matemática (*r=0,27)* e desenho técnico (*r=0,66),* a partir da amostra de alunos portugueses; e entre Raciocínio Espacial e nota em matemática (*r=0,26*), em física (*r=0,36*), em história *(r=0,10)* e geografia *(r=0,20)* a partir da amostra de alunos brasileiros. Esses resultados indicam que o raciocínio espacial deve influenciar, de certa forma, o desempenho escolar dos alunos nas disciplinas chamadas de exatas, principalmente nos assuntos que requerem formação e manipulação de imagens mentais.

Esses resultados estão de acordo com o que foi encontrado por Balomenos, Mundy e Dick (1994); Bishop (1983); Clements e Batista (1992); Fennema e Sherman (1977, 1978, 1985); Guay e McDaniel (1977) e (Pillay, 1994), que identificaram correlação entre desempenho em matemática e habilidade espacial.

Diferenças de gênero em testes de raciocínio espacial têm sido investigadas há tempo, tendo sido feitas meta-análises dos estudos sobre esse tema[1], mas parece não haver um consenso quanto às diferenças de gênero no desempenho desses testes. Parece que a natureza das tarefas específicas influencia nos resultados, pois foram encontradas diferenças de gênero em tarefas de rotação mental, mas não em tarefas de visualização ou orientação. Os estudos de Delgado e Prieto (1997) indicaram que, quando foram selecionados os sujeitos com desempenho mais alto, os homens se saíram melhor que as mulheres, sendo que essa diferença foi mais acentuada nas tarefas que exigiam rotação mental que em outras tarefas. Para os de baixo desempenho não houve diferenças quanto ao gênero. No presente trabalho, foi encontrada diferença de gênero no desempenho do teste de raciocínio espacial, com uma vantagem para os meninos. O melhor desempenho dos meninos também foi verificado na prova do componente espacial da habilidade matemática, mas não foram encontradas diferenças significativas nas notas escolares de matemática e geometria. Acrescenta-se que, para as provas de geometria, as meninas alegaram que estudavam mais, o que poderia ter contribuído para que o gênero não tivesse influência nas notas desta disciplina.

Outro aspecto abordado pelo presente trabalho se referia aos processos visuais mentais envolvidos na formação e manipulação de imagens. Para resolver problemas de geometria, considerou-se que as fases de obtenção da informação geométrica do problema e de processamento dessa informação requeriam formação, inspeção e transformação de imagens mentais.

[1] Cita-se o estudo clássico de Maccoby e Jacklin (1974) além dos trabalhos de Casey, Nuttal, Pezaris e Bendov(1995), Caplan, MacPherson e Tobin (1985), Hedges e Nowel (1995), Linn e Peterson (1985) e Voyer and Bryden(1995), citados por Delgado e Prieto (1997).

A teoria de Kosslyn (1995) explica que a formação de imagens e a percepção compartilham mecanismos comuns, sendo que os sistemas que compõem o seu modelo computacional se relacionam a áreas cerebrais responsáveis por determinadas funções. Considerou-se, assim, que a formação e manipulação das imagens mentais na solução de problemas de geometria poderiam ser explicadas pelo modelo.

Segundo o autor, a imagem mental associada a uma figura pode ser formada por meio do subsistema de ativação de modelo exemplar ou de modelo categórico (ou proposicional), na memória associativa. Se na primeira situação, a imagem é o único representante para um determinado conceito, na segunda o modelo proposicional é mais genérico, contém informações sobre as propriedades do objeto e as relações entre estas. Assim, por exemplo, ao ser indagado sobre prisma triangular, parece que indivíduos mais habilidosos e que possuem o conceito em um nível mais alto de formação poderiam ativar um modelo categórico e processar melhor as informações. Sujeitos menos habilidosos poderiam formar a imagem através de um modelo exemplar, não levando em consideração as propriedades do prisma, e teriam mais dificuldade para o processamento das informações de um problema.

Mesmo quando as imagens estão apoiadas na percepção, parece ser necessário ativar o subsistema de controle da atenção baseado no estímulo e decodificar relações espaciais. A inspeção de uma imagem mais complexa parece depender da utilização do subsistema de procura melhorada da informação, que é baseado nas informações conceituais.

Para inspecionar e transformar uma imagem, parece que sujeitos mais habilidosos não apenas acessariam a informação armazenada, mas conseguiriam iniciar mecanismos para mudar a atenção e assim localizar propriedades mais importantes da imagem, relacioná-las, levantar e testar hipóteses, enfim, organizar as informações para poder representá-las, seja apenas mentalmente, seja externamente na forma pictórica.

A presente pesquisa mostrou que sujeitos mais habilidosos freqüentemente não utilizavam representações pictóricas externas, o que leva a crer que eles consigam organizar as relações espaciais mentalmente, sem apoio perceptual. Segundo Kosslyn (1995) para manter as imagens é necessário certo esforço, pois estas desaparecem rapidamente. Sendo assim, a inspeção das imagens parece ser difícil para um indivíduo que não consegue mantê-las nítidas na memória.

Utilizar o modelo computacional de Kosslyn (1995) na interpretação das soluções de problemas é apenas uma tentativa de explicar a complexidade dos processos envolvidos em questões de geometria. Assim, pode-se sugerir que alunos mais habilidosos processariam as informações de modo mais meticuloso, rápido e coerente. Como já foi dito, a interpretação feita pelo presente estudo é apenas um esboço que mereceria uma análise mais aprofundada em estudos posteriores.

Sobre os fatores afetivos e o desempenho escolar em geometria

De acordo com Krutetskii (1976), o sucesso nas tarefas depende, além da habilidade do sujeito, de outras variáveis tais como atitudes positivas em relação à atividade, interesse e esforço. Assim, a relação entre a carga afetiva e o empenho cognitivo nas tarefas de geometria foi estudada como uma das variáveis que afetavam o desempenho escolar dos sujeitos.

Foi observado que tanto as atitudes em relação à matemática quanto as atitudes em relação à geometria estavam fracamente correlacionadas com o desempenho na prova do componente espacial da habilidade matemática. No entanto, foram percebidas diferenças quanto se analisou a série. Apenas para os sujeitos da terceira série foi encontrada correlação quase forte entre o desempenho na prova do componente espacial e as atitudes em relação à geometria. Uma explicação possível para esse resultado seria o fato que sujeitos da primeira e da segunda série talvez não tenham vivido muitas experiências relativas à geometria espacial. O conteúdo de geometria na terceira série é relativo ao estudo das posições de retas e planos e das figuras tridimensionais. Experiências negativas com esse conteúdo, talvez relacionadas com uma habilidade espacial pouco desenvolvida, podem ter influenciado na formação de atitudes mais negativas em relação aos assuntos de geometria que exigiam manipulação mental de figuras.

A nota em matemática estava correlacionada moderadamente com as atitudes em relação à matemática, em todas as séries. Esse resultado é consistente com os que foram encontrados na revisão de literatura, em especial nos trabalhos do grupo PSIEM (Psicologia da Educação Matemática da Unicamp), que apontaram que constantes fracassos nas avaliações de matemática podem levar à formação de atitudes negativas em relação a essa disciplina. A nota em geometria também estava correlacionada moderadamente com as atitudes em relação à geometria. Mas, quando as relações são verificadas por série, nota-se que as correlações aumentam consideravelmente (*0,255* para a primeira série, *0,539* para a segunda e *0,700* para a terceira). Este resultado parece estar de acordo com a teoria das atitudes que afirma que um indivíduo não tem uma atitude em relação a um objeto até que ele possa responder de forma avaliativa a esse objeto, seja em uma base afetiva, cognitiva ou comportamental. Se essa tendência de resposta se estabilizar, então o individuo terá formado uma atitude em relação ao objeto. Assim, pode ser que os alunos da primeira série, embora a maioria já tivesse aprendido geometria em séries anteriores, não tivessem tido tantas experiências quanto os alunos de terceira série e não tivessem formado atitudes estáveis em relação a esta disciplina.

Segundo Eagly e Chaiken (1993), embora seja óbvia a idéia de que a força da atitude se desenvolve com o tempo, tem-se relativamente pouco conhecimento sobre os processos pelos quais as atitudes tornam-se fortes. Atitudes mais fracas ou recém-formadas são geralmente instáveis e abertas para mudanças; seu efeito sobre o processamento de informações é difícil de ser discernido e sua relação com o comportamento é pequena. Ao contrário, atitudes mais antigas, se essas tiverem se fortalecido, são mais estáveis e fechadas para mudanças; elas têm um efeito mais pronunciado no processamento das informações e uma relação mais forte com o comportamento.

O conhecimento acerca da geometria espacial a partir da segunda série pode ter influenciado nas atitudes em relação à geometria. Tarefas exigindo rotação mental de figuras ou projeções ortogonais podem ser avaliadas como desagradáveis a um aluno com habilidade espacial pouco desenvolvida, o que caracterizaria o aspecto afetivo da atitude. Esse aluno pode formar uma crença de que não é capaz de executar tais tarefas e manifestar desinteresse pelo assunto. Aliás, os resultados apontaram que os sujeitos que se perceberam com péssimo desempenho tiveram atitudes mais negativas em relação à geometria, Segundo Klausmeier (1977), as atitudes aprendidas influenciam no comportamento das pessoas, que acabam se aproximando ou evitando os pensamentos e as ações em relação ao objeto.

Os resultados acerca das atitudes estão coerentes com a afirmação de Brito (2002 a) acerca da influência dos fatores afetivos e emocionais na profundidade do entendimento construído e a qualidade e quantidade do material aprendido e posteriormente recordado.

As atitudes em relação à matemática estavam correlacionadas com as atitudes em relação à geometria ($r=0,615$, $p=0,01$), sendo este muito próximo ao valor ($r=0,609$,$p=0,01$) encontrado por Viana e Brito (2004). A geometria ensinada no ensino médio requer muitos conceitos matemáticos (aritméticos e algébricos) e seria esperada tal relação entre as atitudes, uma vez que os assuntos também se relacionam e, por conseqüência, os sucessos e fracassos nessas disciplinas.

Fato semelhante foi observado por Cazorla (2002) que encontrou correlação moderada entre as atitudes em relação à matemática e à estatística, o que indicava a influência da matemática na formação das atitudes em relação à estatística.

A escolha profissional estava correlacionada com as atitudes em relação à matemática e à geometria. Esses resultados são coerentes com o que encontrou Araújo (1999), tendo como sujeitos da pesquisa alunos do ensino médio e superior. A autora encontrou que os sujeitos da área de ciências exatas tinham desempenho melhor e atitudes mais favoráveis em relação à matemática.

Assim, no presente estudo foi possível verificar que as atitudes influenciavam na escolha da futura profissão. Embora outras variáveis pudessem interferir na decisão desses jovens, é possível avaliar a importância das atitudes nesse contexto. Indivíduos que optam pela área de exatas sabem que terão a matemática como uma ferramenta essencial para o exercício da profissão. Se essa disciplina for percebida como desagradável, o indivíduo pode associar a rotina profissional a algumas das características negativas da matemática e defender um certo percurso de ação como indesejável. Portanto, a escolha profissional pode ser entendida como um aspecto relativo ao componente comportamental das atitudes, pois se refere às manifestações ou às intenções do sujeito em realizar as ações, mesmo que elas não sejam executadas, conforme observaram Eagly e Chaiken (1993).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No cotidiano escolar, as diferenças relativas ao desempenho dos alunos do ensino médio na disciplina geometria podem ser facilmente constatadas pelas notas bimestrais dos mesmos: em uma mesma sala, apesar de terem o mesmo método de ensino, as notas em geral variam bastante. Também é fácil constatar as diferenças de comportamento quando se observam os alunos durante as aulas: nem todos demonstram o mesmo interesse, uns participam ativamente, outros não se mostram estimulados diante de desafios, alguns apresentam soluções interessantes para os problemas de geometria, vários não se esforçam, e assim por diante.

Considerou-se que era preciso avançar na constatação dessas diferenças. Era preciso entender quais aspectos cognitivos e afetivos estariam na origem de alguns comportamentos e relacionar as possíveis variáveis que influenciavam no desempenho destes estudantes.

O presente trabalho buscou entender algumas dessas variáveis. Assim, valeu-se do construto atitude, uma disposição pessoal formada a partir das experiências do sujeito e que tem componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor, conforme afirmou Brito (1996). Sendo uma tendência avaliativa, a atitude pode ser expressa quando um indivíduo avalia alguma coisa com certo grau de aprovação (demonstrando ser favorável a ela) ou de desaprovação (demonstrando ser desfavorável a ela). Os dados mostraram que, para os sujeitos analisados, sob as condições da pesquisa, as atitudes em relação à geometria se correlacionavam moderadamente com o desempenho nessa disciplina, sendo que a correlação era bem maior na terceira série. Acrescenta-se que nesta série os alunos tiveram mais tempo de experiência com o objeto de atitude – a geometria – e também mais contato com o conteúdo específico de geometria espacial.

Buscou-se embasamento teórico no conceito de raciocínio espacial, um dos componentes que definem a inteligência, se esta for entendida como uma estrutura de organização, segundo os modelos analítico-fatoriais, como o de Carroll (1993). Valeu-se também do conceito de habilidade matemática de Krutetskii (1976), definida como uma característica psicológica individual que influenciaria o sucesso especificamente na atividade matemática. Verificou-se que tanto o raciocínio espacial quanto o componente espacial da habilidade matemática se relacionavam com a nota escolar em geometria, especialmente na terceira série.

Mas, seria pouco apontar que existiam diferenças quanto ao raciocínio espacial e quanto à habilidade matemática e que havia influências dessas variáveis no desempenho escolar em geometria. Buscou-se entender, então, quais componentes da habilidade matemática poderiam ser evidenciados quando o sujeito estivesse diante de tarefas que exigissem manipulação mental de figuras geométricas espaciais. Foi constatado que os sujeitos da pesquisa que foram considerados como mais habilidosos diferenciavam-se dos menos habilidosos porque realizavam as operações de contagem de cubos de maneira sistematizada, seccionavam os sólidos por meio de diferentes planos imaginários e representavam as secções, formavam polígonos no espaço identificando lados e ângulos, rebatiam planos das faces de poliedros ou desenvolviam as superfícies laterais de corpos redondos fazendo as planificações coerentemente, projetavam faces ortogonalmente e identificavam figuras planas geradoras de sólidos de revolução.

Além disso, buscou-se analisar as diferenças de representações pictóricas externas na fases de obtenção e de processamento da informação geométrica de problemas de vestibulares que possuíam estrutura espacial. Foi verificado que sujeitos mais habilidosos se diferenciavam dos menos habilidosos pois pareciam não precisar externalizar as representações para utilizá-las como assistência perceptual mas sim como referência conceitual plana final, isto é, usavam as figuras para representar o resultado final da manipulação mental das imagens.

Por fim, para conhecer um pouco a complexidade dos processos de formação e manipulação de imagem, o presente trabalho buscou fundamentar que a representação e a percepção compartilhavam mecanismos comuns, de acordo com a teoria de Kosslyn (1995). Embora não tenha se aprofundado nestas questões, o trabalho tentou explicar como é que a nossa mente, visualizando imagens bidimensionais, é capaz de interpretar o espaço tridimensional, ou seja, de avaliar profundidade, tamanhos, distâncias, movimentos, alteração e constância da forma e outras relações entre os objetos do mundo físico. De acordo com a teoria adotada, sete subsistemas ligados a regiões cerebrais, além de serem responsáveis pela nossa capacidade de perceber e interpretar o mundo físico, explicariam a representação mental a partir da percepção e da memória e definiriam quais são os processos usados para compor, inspecionar e transformar as imagens mentais.

Todos os resultados encontrados, bem como a discussão destes à luz de teorias e da revisão de literatura, puderam trazer uma maior compreensão da complexidade de variáveis que interferem no rendimento em geometria.

Mas, apesar deste trabalho se constituir em uma pesquisa básica, a compreensão obtida deve provocar novas reflexões quando se volta a atenção à prática do professor em sala de aula.

A primeira reflexão que se pode fazer é sobre o nível de dificuldade das questões de geometria espacial que são encontradas nos livros e apostilas do ensino médio. Se existem diferenças quanto às habilidades em lidar com os conceitos espaciais, pode-se sugerir que o professor deva ter o cuidado de propor exercícios com um grau crescente de dificuldades, principalmente quando for o caso de problemas que requerem estrutura conceitual espacial. De acordo com Krutetskii (1976), todos os sujeitos normais podem, com mais ou menos dificuldade, aprender a matemática escolar. Assim, podem aprender a geometria do ensino médio, mas não se deve exigir que todos, ao mesmo tempo, tenham desenvolvido o mesmo nível de habilidade espacial para resolver questões que vão exigir operações muito complexas. Não se trata de minimizar diferenças, mas sim de explorar, ao máximo, as potencialidades de cada um.

Solicitar que os alunos façam as representações externas pictóricas e explorar a funcionalidade, a coerência e o detalhamento processual desses desenhos seria uma maneira de acompanhar o desenvolvimento dos alunos quanto à habilidade de formar e manipular imagens mentais, principalmente quando se trata de geometria espacial.

Outra maneira de ajudar os alunos a manipularem as imagens mentais que são exigidas em muitas problemas de geometria é mostrar as etapas das transformações, conforme sugeriu Pillay (1998). Representações pictóricas externas correspondentes aos estágios da obtenção e do processamento das informações geométricas do problema podem ser cuidadosamente elaboradas na lousa ou apresentadas em tela de computador. Tais representações, comparadas às representações de alunos, podem ajudá-los na formação e na manipulação de suas próprias imagens.

Uma sugestão de técnica para trabalhar com os conceitos de geometria espacial é a modelagem geométrica, inspirada na modelagem matemática. Alguns autores, entre eles Biembengut e Hein (2000), têm sugerido a técnica da modelagem matemática em sala de aula.

Um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real. O modelo retrata, embora em visão simplificada, aspectos da situação pesquisada. A modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção do modelo. É um processo artístico, pois, para elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conceitos e procedimentos melhor se adaptam e jogar com as variáveis envolvidas.

No caso da modelagem geométrica, o modelador deve interpretar geometricamente uma forma, seja esta obtida pela percepção de um objeto, seja obtida por meio de uma imagem mental. Nesta técnica, o aluno seria solicitado a reproduzir, em papel cartolina ou similar, uma figura tridimensional que seja o modelo do objeto físico ou da forma criada por ele. Essas representações pictóricas externas tridimensionais poderiam ser, portanto, chamadas de (a) modelos de objetos reais, (b) modelos de formas imaginadas (extensão de exemplos de um conceito ou combinação de formas) ou (c) modelos de formas resultantes de ações imaginadas (cortes, encaixes).

As etapas do processo de modelagem geométrica em geral obedecem à seguinte ordem: (1) escolha do modelo, (2) interpretação conceitual geométrica das formas constantes no modelo, (3) desenho em perspectiva, (4) planificação das peças que compõem o modelo, (5) cálculo de área e volume das peças, (6) estimativa da massa supondo que as peças fossem sólidos de um determinado material.

O tempo requisitado por essas etapas seria distribuído ao longo do semestre letivo, sendo que a atuação do professor enquanto orientador é fundamental nesse tipo de trabalho.

A experiência com esta técnica permite afirmar que muitos são os alunos que realmente se interessam em realizar o seu trabalho, que demonstram entusiasmo e confiança na sua capacidade de criar formas, de construir conhecimento e de resolver os próprios problemas originados do processo de modelagem. Como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) é necessário despertar no aluno a curiosidade e interesse por conhecer, interpretar e produzir, e a perseverança, o esforço e a disciplina na busca de resultados. A experiência mostra que, em geral, os alunos demonstram um comportamento que leva a crer que eles tenham formado atitudes mais favoráveis em relação à geometria.

Conforme apontou Krutetskii (1976), as habilidades não são constantes e nem inalteráveis, mas passíveis de cultivo e de aperfeiçoamento. Ao professor cabe a tomada de decisão de qual técnica de ensino poderá promover o melhor desenvolvimento das habilidades dos alunos e, ao mesmo tempo, favorecer a formação de atitudes mais positivas diante de uma disciplina que tem, como uma das finalidades, o estudo das formas dos objetos do espaço físico, das relações e das transformações. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Brasil, 1999) confirmam a importância das habilidades de visualização na construção de modelos para interpretação de questões de matemática e de outras áreas do conhecimento.

Finalmente, se é a imaginação visual que permite ao homem formar imagens mentais a partir da percepção direta ou não, manter essas imagens, manipulá-las mentalmente, transformá-las, para, por fim, representá-las externamente, a disciplina que melhor pode fornecer ao aluno do ensino médio a oportunidade de desenvolver as habilidades relativas à imaginação visual é a geometria.

O entendimento dessa capacidade humana de representar mentalmente o espaço continuará certamente fascinando os psicólogos e os pesquisadores na área de educação matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, G. (1995). *A* teoria das representações sociais e a cognição matemática.*Quadrante*. V. 4, N. 1, 25 - 41.

AIKEN, L. R. & DREGER, R.M. (1961). The effect of attitudes on Performance in Mathematics.*Journal of Educational Psychology*. V .52, N.1, 19 -24.

ALMEIDA, L. S. (1992). Inteligência e aprendizagem: dos seus relacionamentos à sua promoção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*.V.8, N.3, 277-292.

ALVES, E.V. (1999). *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio.* Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado.

ANDERSON, J.R. (1990). *Cognitive Psychology and its implications.* New York: Freman.

ANDERSON, R.E. & HELSTRUP, T.(1993).*Visual* discovery in mind and on paper. *Memory and Cognition.* V.21, N.3, 283 -293.

ARAÚJO, E.A. (1999). *Influências das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional.* Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

BALOMENOS, R. H; MUNDY, J. F. & DICK, T. (1994). *Geometria: prontidão para o cálculo. In*: LINDQUIST M. M. & SHULTE, A. A. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria.* Tradução de Higyno H.Domingues. São Paulo: Atual.

BANDURA, A. (1986). Self - Efficacy mechanism in human agency. *American Psychologist.* V.37, 122 - 147.

BATTISTA, M. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: a spatial/geometrical perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* V.21, 47-60.

BATTISTA, M. & CLEMENTS, D.H. (1996). Student's understanding of three – dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, V.27, N.3, 258 – 292.

BATTISTA, M; WHEATLEY, G.H & TALSMA, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. V.13, 332-340.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino.* São Paulo: Contexto.

BISHOP, A. I. (1983). *Space and Geometry.* In R.LESHM; M. LANDAU (eds). *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. Orlando: Academic Press.

BISHOP, A. I. (1990). Spatial abilities and mathematics achievement – A review. *Educational Studies in Mathematics*, V.7, 23-40.

BORJA, A. (1996). *A representação social dos determinantes de dificuldades de aprendizagem.* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BOWERS, K. S. (1990). Intuition in the context of discovery. *Cognitive Psychology*. V.22, 72-110.

BRASIL (1997). MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA/ SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Nove volumes). Brasília.

BRASIL (1999). MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA/ SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília.

BRITO, M. R. F. (1994). Atitudes de Alunos de Primeiro e Segundo Graus com relação à Matemática: Mito ou Realidade?, *Mapeamento de Pesquisas em Educação Matemática,* Brasília, DF: INEP, V.1, Fascículo 1, 17 - 18.

BRITO, M. R. F. (1995). Grade Distribution and Stability of Attitudes toward Mathematics, *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, V. 1, 1-231.

BRITO, M. R. F. (1996a). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus.* Tese de Livre Docência. Universidade estadual de Campinas.

BRITO, M. R. F. (1996b). Generalization in Algebra Problem Solving and Attitudes toward Mathematics, *In: Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Edited by Luis Puig and Angel Gutiérrez, Valencia (Spain), V. 1, P. 167.

BRITO, M. R. F. (1996c). Gender and Attitudes Toward Mathematics. *Abstracts of Short Presentations, 8th International Congress on Mathematical Education, Seville (Spain).* P. 448.

BRITO, M. R. F. (1996d). Atitudes de Estudantes de 1º e 2º graus com Relação à Matemática, *Resumos de Comunicações Científicas da XXVI Reunião Anual de Psicologia,* P. 23 - 24.

BRITO, M. R. F. (1998). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. *Zetetiqué.* V.6, N.9, 109 -161.

BRITO, M. R. F. (2001). *Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática*, *In*: BRITO, M. R. F. (org). *Psicologia da educação Matemática. Teoria e Pesquisa*. Florianóplolis: Insular.

BRITO, M. R. F. (2002-a). A psicologia educacional e a formação do professor – pesquisador: criando situações desafiadoras para a aprendizagem e o ensino da Matemática. *Educação Matemática em Revista*. N.11-A, 57 - 68.

BRITO, M. R. F. (2002-b). Atitudes, ansiedade, afeto e matemática. *Anais do XIX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*. Águas de Lindóia. 81 - 93.

BRITO, M. R. F; FINI, L. D. T & NEUMANN, V. J. (1994). Um estudo exploratório sobre as relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático. *Pró-posições*. V.13(4), 37-44.

BRITO, M. R. F; MUNHOZ, A; PRIMI, R; GONÇALEZ, M. H; REZI, V; NEVES, L. F; SANCHES, M. H. & MARINHEIRO, F. B. (2000). Exames nacionais: uma análise do ENEM aplicado à Matemática. *Revista Avaliação*.V.5, N.18,15-54.

BROOKS, L. R. (1968). Spatial and verbal components of die act of recall. *Canadian Journal of Psychology*. V.22, N.5, 349-368.

BROWN, D. L. & WHEATLEY, G. W. (1989). Relationship between spatial ability and mathematical knowledge. Paper presented at the meeting of the *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. New Brunswick. NJ.

BRUNER, J. S. (1957). On perceptual readiness. *Psychological Review*, V.64, 123-152.

BZUNECK, J. A. (1999). Uma abordagem socio-cognitivista à motivação do aluno: a teoria de metas de realização. *PSICO-USF*. V.4, N.2, 51-66.

CARROL, J. B. (1993). *Human cognitive abilities.* New York: Cambridge University Press.

CATELL, R. B. (1963).Theory of fluid and crystallized intelligence: a critical experiment. *Journal of Educational Phychology.*V.54,1-22.

CAZORLA, I. M; SILVA, C. B; VENDRAMINI, C. & BRITO, M. R. F. (1999). Adaptação e Validação de uma Escala de Atitudes em Relação à Estatística. *Atas da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios para o Século XXI"* . Florianópolis, SC.

CAZORLA, I. M. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos.* Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas. SP.

CLEMENTS, D. H. & BATTISTA, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning.* In GROUWS, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Macmillan Library Preference.

CLEMENTS, D. H. & BATTISTA, M. T. (1996). Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education.* V.27, N.3, 258- 292.

CLEMENTS, D. H. & CAMPO, G. (1989). Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* V.11, N.1,25- 33.

CLEMENTS, D. H; SWAMINATHAN, S; HANNIBAL, M. A. Z. & SARAMA, J. Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education.* V.30, N. 2, 192-212.

COHEN, N. (2003). Curved solids nets. *Psychology of Mathematics Education.* Session Type: Research Report Session Title.229- 236. http://igpme.org/index.html

COHEN, D. & KUBOVY, M. (1993). Mental Rotation, Mental Representation, and Flat Slopes. *Cognitive Psychology.* V.25, 351-382.

COLL, C. (1998). *Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos.* In: COLL, C; POZO, J. I; SARABIA, B. & VALLS, E. *Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.* Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.

COOB, P. (1990). *A constructivist perspective on information- processing theories of mathematical activity.* Purdue University.

COOPER, L. A. & REGAN, D. T. (1982) *Attention, perception, and intelligence.*In STERNBERG,R.J. *Handbook of human intelligence.* Cambridge University Press.

COOPER, L. & SHEPARD, R. N. (1982). *Mental images and their transformation. Cambridge,* MA: MIT Press.

COX, M. V. & PERARA, J. (1998). Children's observational drawings: a nine scale for scoring drawings of a cube. *Educational Psychology*, V.18,N.3, 309-317.

COX, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction.* V.9, 343- 363.

DAVIS, R. B. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: a summary analysis.* In J. HIELBERT (Ed). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erbaun.

DEL GRANDE (1994). *Percepção espacial e geometria primária.* In LINDQUIST M. M. & SHULTE, A. A. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria.* Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual.

DELGADO, A. R. & PRIETO, G. (1997). Mental rotation as Mediator for Sex-related differences in visualization. *Intelligence*. V. 24.N.3, 405-416.

EAGLY, A. H. & CHAIKEN, S. (1993). *The psychology of attitudes.* Forth Worth: Harcourt Brace College Publishers.

ELIOT. J. (1987). *Models of psychologycal space.* New York: Springer-verlag

EYSENK, M. W. & KEANE M. (1994). *Psicologia Cognitiva: um manual introdutório.* Tradução de Maria Helena F Gesser e Wagner Gesser. Porto Alegre: Artes Médicas.

FENNEMA, E. & SHERMAN, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal* , V.14, 51-71.

FENNEMA, E. & SHERMAN, J. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors. *Journal for Research in Mathematics Education*, V.9, 189-203.

FENNEMA, E. & SHERMAN, J. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education,* V.16, 184 -206.

FINKE, R. A; PINKER, S. & FARAH, M. J. (1989). *Reinterpreting visual patterns in mental imagery.* Cognitive Science,V.13, N.3, 252-257.

FRIEDMAN, L. (1995). The *space factor in Mathematics: gender differences.* Review of Educational Research. V.65, N.1, 22-50.

GANIS, G; THOMPSON, W. L. & KOSSLYN, S. M. (2004). Brain areas underlying visual mental imagery and visual perception. *Cognitive Brain Research,* V.20, 226-241.

GARDNER, H. (1983). *Frames of mind: The Teory of Multiple Intelligences.* New York: Basic Books.

GONÇALEZ, M. H. (1995). *Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

GONÇALEZ, M. H. (2000). *Relações entre a família, o gênero, o desempenho , a confiança e as atitudes em relação à matemática.* Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

GONÇALEZ, M. H. & BRITO, M. R. F. (1996). *Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática.*Revista do Professor. N.47, 42-44.

GONÇALEZ, M. H. & BRITO, M. R. F. (2001). *A aprendizagem de atitudes positivas em relação à matemática* .In BRITO, M. R. F. (2001) (org). *Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa.* Florianópolis: Insular.

GORGORIÓ, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational studies in Mathematics.* V.35, 207-231

GREGORY, R. L. (1980). *Psicologia da Visão.* Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar.

GUAY, R. B. & McDANIEL,E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary scholl children. *Journal for Research in Mathematics Education.* V.8, 211-215.

GUILFORD, J. P. (1982). Cognitive Psychology's ambiguities: Some suggested remedies , *Psychology Review.*V.89, 48-59.

GUIMARÃES, S. E. R. (2001). *Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula*. In BORUCHOVITCH, E. & BZUNECK, J. A. (orgs.) *A motivação do aluno*. Petrópolis: Vozes.

HERSHKOWITZ, R. (1989). Visualization in Geometry - Two sides of the coin. *Focus in Learning Problems in Mathematics*,V.11, 61-76.

HOFFER, A. (1983). *Van Hiele - Based Research*. In LESH, R. LANDAU, M. *Aquisition of Mathematics Concepts and processes* :Academic Press,INC.

HOOVEN, C. K; CHABRIS, C. F; ELLISON, P.T. & KOSSLYN, S. M. (2004). The relationship of male testosterone to components of mental rotation. *Neuropsychology* .V. 42, 782-790.

JAMES, W. (1890). *The Principles of Psychology*. In *Classics in the History of Psychology*. http://psychclassics.yorku.ca/James/Principles/prin20.htm

JESUS, M. A. S. (1999). *Jogos na educação matemática: análise de uma proposta para a 5ª série do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

JESUS, M. A. S. & FINI, L. D. T. (2001). *Uma proposta de aprendizagem significativa de matemática através de jogos*. .In BRITO, M. R. F. (2001) (org). *Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa*. Florianópolis: Insular.

KLAUSMEIER, H. J. & GOODWIN, W. (1977). *Manual de Psicologia Educacional*, Tradução de Maria Célia T.A . de Abreu, São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda.

KOBAYASHI, M. C. M. (2003). *A representação espacial infanto-juvenil: as relações entre a geometria axiomática e a geometria vivida*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista. Marília.

KÖHLER, W. (1980). *Psicologia da Gestalt*. Tradução de David Jardim. Belo Horizonte: Itatiaia.

KOSSLYN, S. M. (1983). Coordinate Systems in the Long Term Memory Representation of three dimensional shapes. *Cognitive Psychology*. V.15, 301-345.

KOSSLYN, S. M. (1995). *Image and Brain: The Resolution of the Imagery Debate*. Cambridge,Mass.: MIT Press.

KOSSLYN, S. M. & POMERANTZ, J. R. (1977). Imagery, proposition, and the form of internal representation. *Cognitive Psychology*. V.77, 272- 284.

KOSSLYN, S. M. & THOMPSON, W. L. (2003); When is Early Visual Cortex Activated During Visual Mental Imagery? *Psychological Bulletin,* V.129, 723-746.

KRUTETSKY, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

LAENG, B; ZARRINPAR, A. & KOSSLYN, S. M. (2003); Do separate processes identify objects as exemplars versus members of basic-level categories? Evidence from hemispheric specialization. *Brain and Cognition,* V.53, 15-27.

LEA H. (1990). Spatial Concepts in the Kalahari. *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*. México. V.II, 259-266.

LEAN, G. & CLEMENTS.M.T. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics,* V.12, 267- 299.

LESTER, F. K. (1983). *Problem solving: it is a problem?* In M. M. LINDQUIST(ed). *Select issues in mathematics education* .Berkeley, Calif: McCutchan.

LINN, M.C. & PETERSEN, A. C. (1985). Emergency and characterization of Sex differences: A meta-analysis. *Child Development*. V.56, 1479- 1498.

LOHMAN, D. F. (1979). *Spatial ability a review and reanalysis of correlational literature*. (Technical Report N.8, Aptitude Research Project). Stanford. Calif:Stanford University, School of Education.

LOPES, M. L. & NASSER, L. (coord.). (1997). *Geometria: na era da imagem e do movimento*. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: UFRJ

LOSS, H; FALCÃO, J. T. R. & ACIOLY-RÉGNIER. (2001). *A ansiedade na aprendizagem da matemática e a passagem da aritmética para a álgebra*. In BRITO, M. R. F.(org). *Psicologia da educação Matemática. Teoria e Pesquisa*. Florianóplolis: Insular.

MARTINEZ ARIAS, M. R. (1991). *Inteligencia y procesos superiores*. In MARTINEZ ARIAS, M. R. & YELA, M. (org). *Tratado de Psicologia General.v.5 Pensamiento y Inteligencia*. Madrid: Alhambra Longman.

MAST, F. W. & KOSSLYN, S. M. (2002). Visual mental images can be ambiguous: insights from individual differences in spatial transformation abilities, *Cognition, V. 86, 57-70*.

MAST, F. W; GANIS, G; CHRISTIE, S. & KOSSLYN, S. M. (2003). Four types of visual mental imagery processing in upright and tilted observers .*Cognitive Brain Research*, V.17, 238-247.

MCLEAY, H. & PIGGINS, D. (1996). The mental manipulation of 2-d representations of knots as deformable structures. *Educational Studies in Mathematics*. V.30, 399 - 414.

McGEE, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and environmental, genetic, hormonal and neurological influences. *Psychological Bulletin*. V.86, 889-918.

MORON, C. F (1998). *Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de educação infantil em relação à matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

MORON, C. F. & BRITO, M. R. F. (1997). *Um estudo exploratório sobre as atitudes de professores de educação infantil com relação à matemática*, *in* "Piaget e a Educação", organizado por Assis, O. Z. & Assis, M.C., XIV Encontro Nacional de Professores do Proepre, Águas de Lindóia, SP. p.221.

MOSCOVICI, S. (1978). *A representação social da Psicanálise*. Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar.

NASSER, L. & SANT'ANNA,N. F. P (coord.). (1995). *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. Projeto Fundão.Rio de Janeiro: UFRJ.

NEISSER, U. & BECKLEN, R (1975). Selective looking:Attending to visual specified events. *Cognitive Psychological.*, N.7, N.4, 480-494.

NEVES, L. F. (2000). *Um estudo sobre as relações entre a percepção e as expectativas dos professores e dos alunos e o desempenho em matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

NEUMANN, V. J. (1995). *Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da Teoria do Processamento de Informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii*. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

NUNEZ, R; CORTI, D. & RETSCHITZKI, J. (1998). Mental Rotation in children from Ivory Coast and Switzerland. *Journal of Cross-Cultural psychology*. V. 29, N.4, 577-589.

OLIVEIRA, L. T. F. (1998). *Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

OLIVEIRA, P. C. (1997). *Um estudo sobre o discurso e a prática pedagógica em geometria: representações sociais.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas

ORTON, J. (1997). Pupils's perception of pattern in relation to shape. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*

PAIVIO, A. (1969). Mental imagery in associative learning na memory. *Psychological Review.* V.76, N.3, 241-23.

PASSOS, C. L. B. (1995). *As representações matemáticas dos alunos do curso de magistério e suas possíveis transformações: uma dimensão axiológica.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

PAVANELLO, R. M. & ANDRADE, R. N. G. (2002). Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. *Educação Matemática em Revista.* Nº 11.A.78-87.

PIAGET, J. & INHELDER, B. (1993). *A representação do espaço na criança.* Tradução de Albuquerque. B. M., Porto Alegre: Artes Médicas.

PILLAY, H. K. (1994). Cognitive load and mental rotation: structuring orthographic projection for learning and problem solving. *Instructional Science* V. 22, 91 – 113.

PILLAY, H. K. (1998). Cognitive processes strategies employed by children to learn spatial representations. *International Journal of Educational Research* V. 30, 1 – 18.

PIROLA, N. A. (1995). *Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelepípedo em alunos do 1º grau.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

PIROLA, N. A. (2000). *Solução de Problemas Geométricos: Dificuldades e Perspectivas.* Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

PRIMI, R. (1998). *Desenvolvimento de um instrumento informatizado para a avaliação do raciocínio analítico.* Tese de doutorado. Universidade de São Paulo.

PRIMI, R. & ALMEIDA, L. S. (2000). *BPR-5: Bateria de provas de raciocínio: manual técnico.* São Paulo: Casa do Psicólogo.

PRIMI, R. & ALMEIDA, L. S. (2000). Estudo de validação da Bateria de Provas de Raciocínio (BPR-5). *Psicologia:Teoria e Pesquisa.* V.16.N.2, 165- 173.

REZI, V. (2001). *Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

RYAN, R. M. & DECI, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation on intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist,* V.55, N.1, 68-78.

SAO PAULO (1998) (ESTADO). Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação. Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Matemática - *Análise Pedagógica dos Itens das Provas Aplicadas aos Alunos das 4ªs e 8ªs Séries.*Vol III.São Paulo.

SANTOS, V. M. (1989). *A Matemática no primeiro grau: o significado que pais, alunos e professores conferem à matemática.* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, C. B. (2000-a). *Atitudes em relação à estatística: um estudo com alunos de graduação*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

SILVA, M. V. (2001). *Variáveis atitudinais e o baixo desempenho em matemática de alunos de 5ª a 8ª série do ensino fundamental*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

SILVA, V. L. R. (2000-b). *Representações sociais de alunos e professores do ensino médio sobre a matemática.* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SHEPARD, R. N. (1978). The mental image. *American Psychologyst,* 125-137.

SHEPARD, R. & MELTZER, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science,* V.171, 701-703

SHERMAN, J. A. (1967). The problem of sex differences in space perception and aspects of intellectual functioning. *Psychological Review*. V74. 290-299.

SPEARMAN, C. E. (1927). *The abilities of man*. New York :Macmillan.

STERNBERG, R. J. (1982). *Handbook of human intelligence.* Cambridge University Press.

STERNBERG, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva*. Tradução de Maria Regina Borges Osório- Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

SWELLER, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*.V.12, 257- 285.

TARTRE, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*.V. 21, 216-229.

THURSTONE, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Chicago: University o Chicago Press.

USISKIN Z. (1994). *Resolvendo os dilemas da geometria escolar. In LINDQUIST. M .M. & SHULTE A. A. (org.) Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução de Hygino H. Domingos - São Paulo:Atual.

UTSUMI, M. C. (2000). *Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: um estudo sobre a estabilidade das atitudes e as habilidades matemáticas de estudantes das séries finais do primeiro grau*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

VAN HIELE, P. M. (1986). *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education*, Orlando: Academic Press.

VANDENBERG, S. G. & KUSE, A. R. (1978). Mental rotation, a group test of three-dimensional spatial visualisation. *Perceptual Motor Skills*, 47, 599-604.

VEDERHUS, L. & KREKLIN, S. (1996). *Sex* diferences in Visual Spatial Ability in 9-Year-Old children. *Intelligence*. 33-43

VENDRAMINI, C. M. M. (2000). *Implicações das atitudes e das habilidades matemáticas na aprendizagem dos conceitos de estatística*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

VIANA, O. A. (2000). *O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

VIANA, O. A. (2001). *Um estudo dos níveis de conceito em geometria*. Anais do V EPRAPEM – V Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática –Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. PUC/SP; 364-370.

VIANA, O. A. & BRITO, M. R. F. (2004). *As atitudes de alunos do ensino médio em relação à geometria: adaptação e validação de escala.* VIII Encontro de Educação Matemática. Educação Matemática: um compromisso social. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Recife. Disponível em cd-rom.

VIEILLEDENT, S; KOSSLYN, S. M; BERTHOZ, A. & GIRAUDO, M. D. (2003). Does mental simulation of following a path improve navigation performance without vision? *Cognitive Brain Research,* V. 16. 238-249.

VOYER, D; NOLAN, C. & VOYER, S. (2000). The Relation Between Experience and Spatial Performance in Men and Women - Statistical Data Included. *Sex Roles: A Journal of Research.* Dec. 1 – 9.

WEINER, B. (1985). An attributional theory of achievement motivation and emotion. *Psychological Review.* V.92.N..4, 548-573.

WITKIN, H. A; MOORE, C. A; OLTMAN, P. K; GOODENOUGH, D. R; FRIEDMAN, F; OWEN, D. R. & RASKIN, E. (1977). Role of the field-dependent and field-independent cognitive styles in academic evolution: A longitudinal stugy. *Journal of Educational Psychology* .V.69. 197-211.

WRAGA, M; THOMPSON, W. L; ALPERT, N. M. & KOSSLYN, S. M. (2003). Implicit transfer of motor strategies in mental rotation. *Brain and Cognition,* V.52, 135-14.

ZHANG, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science.* V.18, 87 – 122.

ANEXO 1 – I_1 :Questionário Informativo

PREZADO ALUNO

Estou estudando habilidade matemática, raciocínio espacial e atitudes em relação à matemática e à geometria e faço parte do grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Unicamp.

Espero contar com a sua colaboração, respondendo as seguintes questões.

Muito obrigada.
Odaléa Aparecida Viana

QUESTIONÁRIO

NOME:..n° .... série:...............idade.....................

1) Qual curso superior você pretende fazer?
Curso ....
Esse curso pertence a qual área? ( ) exatas ( ) humanas ( ) biológicas

2) Para a sua futura atuação profissional, o conhecimento em geometria será:
Muito Importante ( ) importante ( ) pouco importante ( ) não será importante ( )
Por quê?...
....
....
....

3) Complete a frase: O que eu mais gosto em geometria é...
....
....
....

4) Complete a frase: O que eu menos gosto em geometria é ....
....
....
....

5) Normalmente você estuda geometria mesmo quando não há prova?
Não estudo ( ) Estudo até 30 min por semana ( ) Estudo 1 hora por semana ( )
Estudo entre 1 e 2 horas por semana ( ) Estudo mais de 2 horas por semana ( )

6) Normalmente você estuda para a prova de geometria?
Não estudo ( ) Estudo até 30 min ( ) Estudo 1 hora ( )
Estudo entre 1 e 2 horas ( ) Estudo mais de 2 horas ( )

7) As matérias que normalmente você mais estuda são (incluindo ou não geometria):
1ª.. 2ª.. 3ª...................................

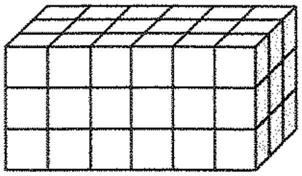
8) Que importância você dá à escola na sua vida. Dê um valor de 0 a 10.........................

ANEXO 2 – I_2 : Prova CEHM

NOME ___________nº___série_________

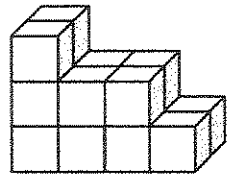
1) Dê o número de cubinhos utilizados para cada sólido a seguir.
Caso você faça alguns cálculos, deixe-os indicados .

a)



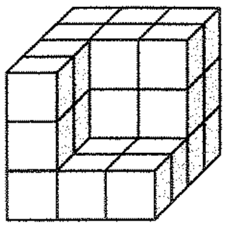
Resposta:

b)



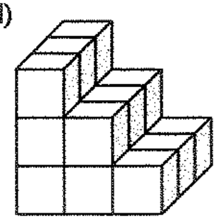
Resposta:

c)



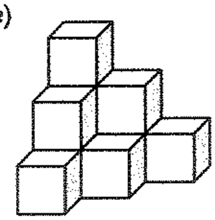
Resposta:

d)



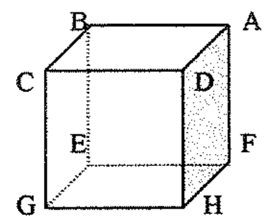
Resposta:

e)



Resposta:

2) É dado o cubo de vértices ABCDEFG .



Ligando-se alguns de seus vértices, obtemos figuras planas
Algumas figuras planas possíveis:

Quadrado	Retângulo	Triângulo equilátero	Triângulo isósceles	Triângulo escaleno
Losango	Trapézio	Quadrilátero qualquer	Triângulo retângulo	Paralelogramo

➢ Completar com o nome que melhor representa a figura plana obtida ao ligarmos os vértices:

a) AFC
resposta:............................

b) CDM_1 sabendo-se que M_1 é o ponto médio de EF
resposta:............

c) DAM_1M_2 sendo M_1 o ponto médio de EF e sendo M_2 o ponto médio de GH
resposta:................

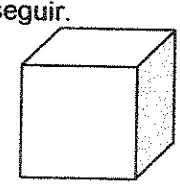
d) ACM_2M_3 sendo M_2 o ponto médio de GH e sendo M_3 o ponto médio de HF
resposta:...........

e) DBO sendo O o centro do cubo
resposta:.....................

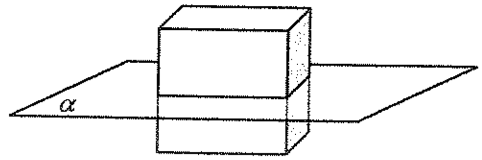
f) DBP sendo P o centro da face BCGE
resposta:...........................

➢ responda: as retas CF e BG são perpendiculares? (isto é, formam ângulo reto?).

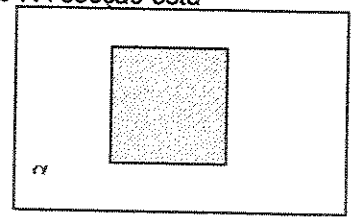
3) O sólido a seguir pode ser seccionado por um plano paralelo à base . A secção está desenhada a seguir.



Sólido



Sólido sendo seccionado

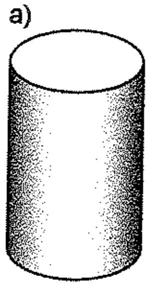


Desenho da Secção

Desenhe mais três secções diferentes que podem ser obtidas pela intersecção de um plano qualquer (em outra posição) em um cubo.

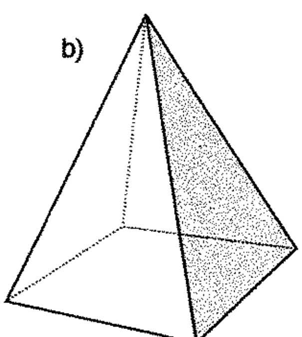
4) Desenhe três secções possíveis para cada sólido a seguir, imaginando a intersecção desses sólidos com um plano, em qualquer posição.

a)



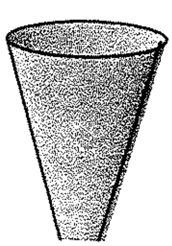
Cilindro

b)

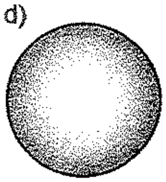


Pirâmide de base quadrada

c)

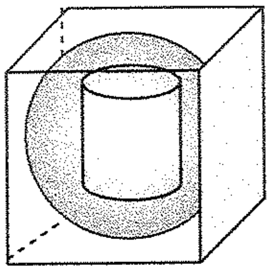


d)

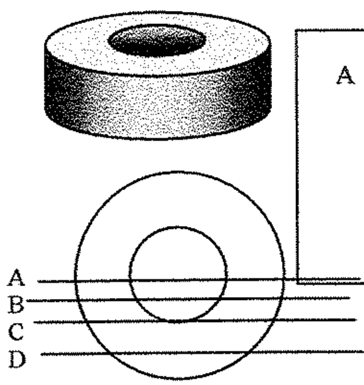


esfera

e)

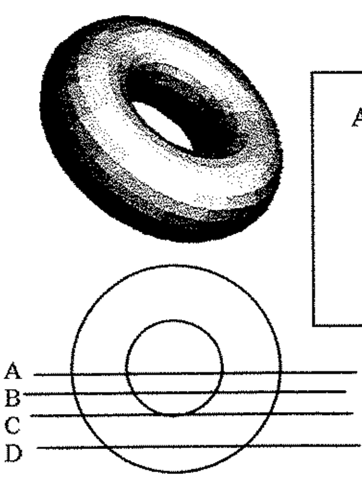


f) a figura a seguir deve ser cortada pelos planos A, B , C ou D e o desenho é a figura vista de cima e mostrando a posição desses planos. Desenhe a secção obtida em cada situação.



A B C D

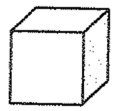
g) idem para a figura a seguir



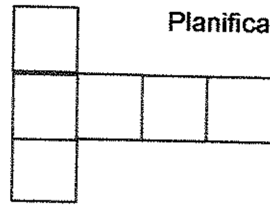
A B C D

5) Um cubo pode ser feito de cartolina através de um molde. A esse molde damos o nome de planificação. Na figura a seguir temos um exemplo de planificação para o cubo.

Cubo

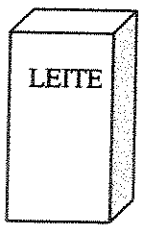


Planificação

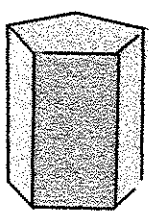


Para cada sólido a seguir, desenhe ao lado uma planificação correspondente (pode diminuir a planificação)

a)

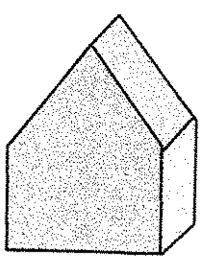


b)

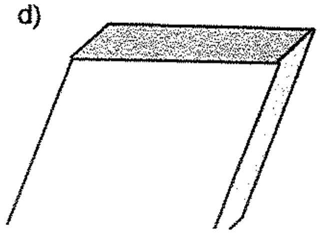


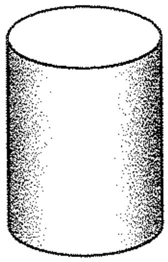
a base é um pentágono regular

c)

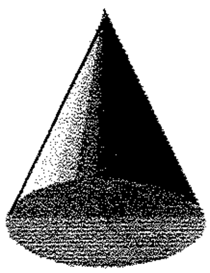


d)



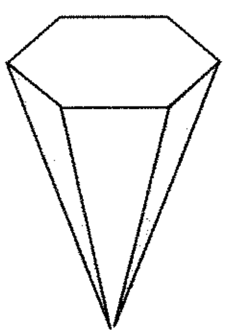


f)

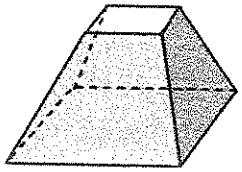


g)

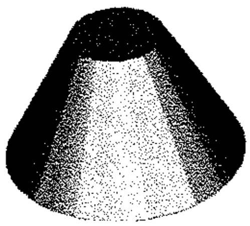
h)



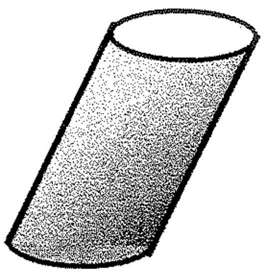
i)



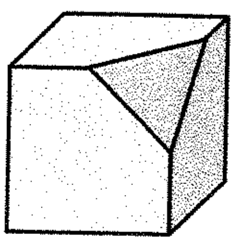
j)



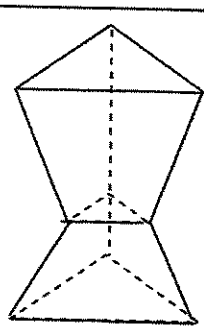
l)



m)

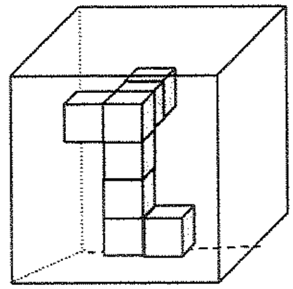


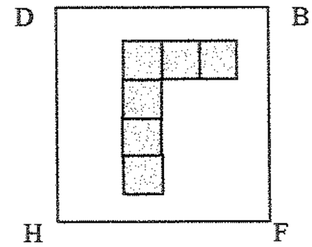
n)



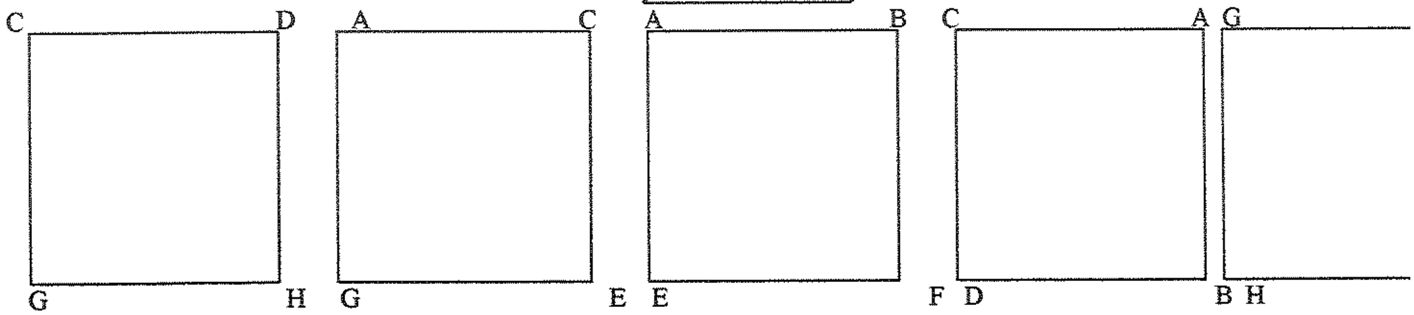
Os triângulos são equiláteros

5) A projeção ortogonal do sólido ao lado (que é formado por cubinhos) sobre a face BDHF do cubo está desenhada ao lado.

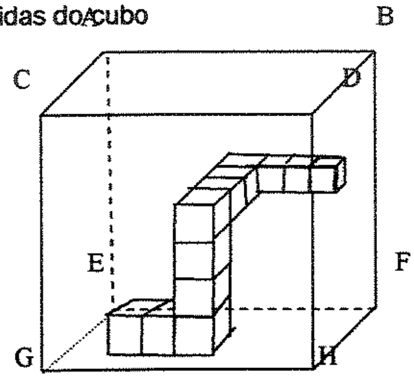


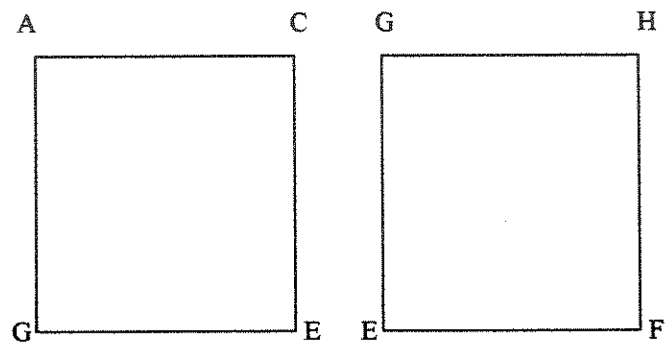


Desenhe as projeções do sólido sobre as outras faces

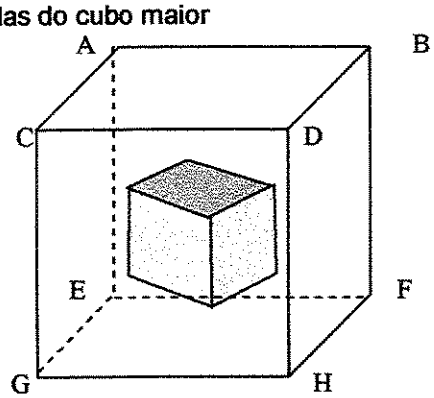


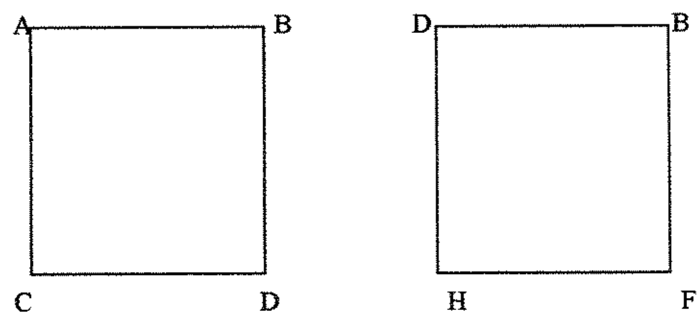
6)Desenhe as projeções ortogonais do sólido a seguir (que é formado por cubinhos) sobre as faces pedidas do cubo



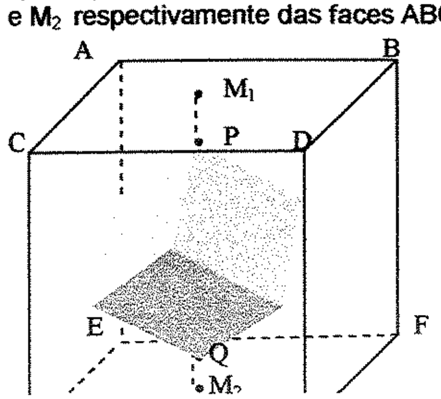


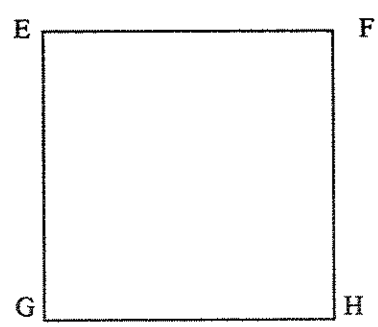
7)O cubo menor tem a base paralela à do cubo maior. Desenhe as projeções ortogonais sobre as faces pedidas do cubo maior



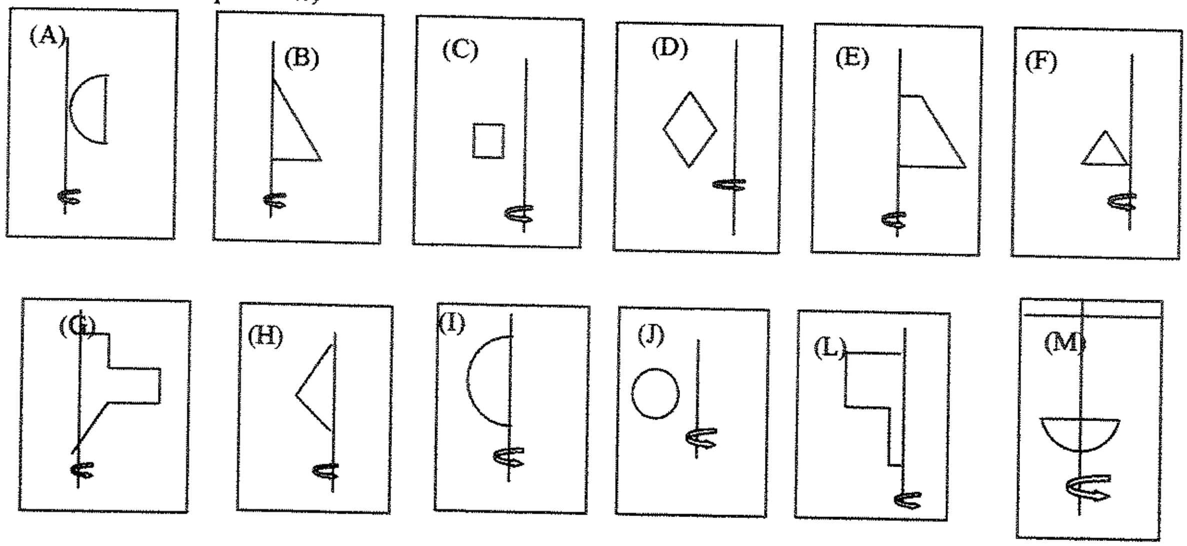


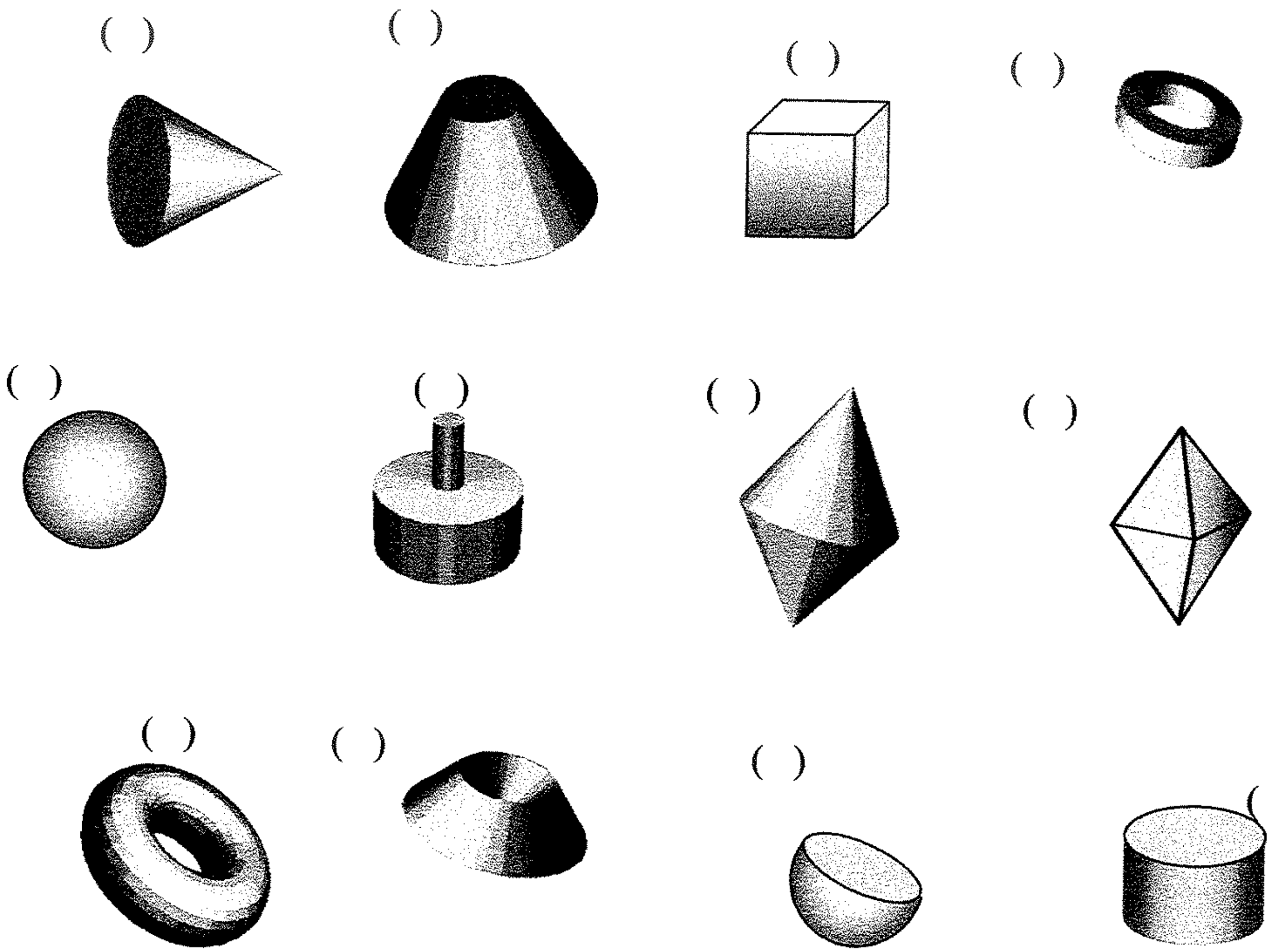
8)O segmento que liga os vértices P e Q do cubo menor pertencem à reta que liga os pontos médios M_1 e M_2 respectivamente das faces ABCD e EFGH. Desenhe a projeção ortogonal do cubo na face EFGH



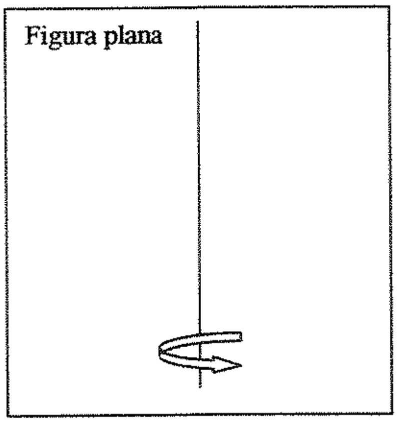


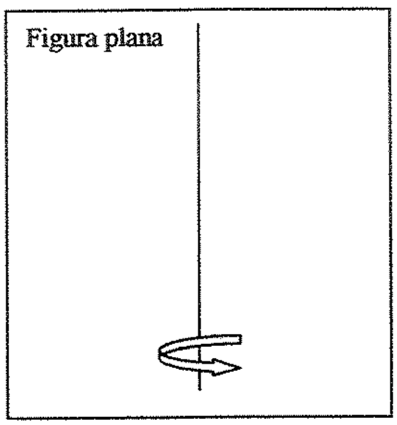
8) Ao rotacionar as figuras planas a seguir, qual será o sólido resultante? Complete os parênteses ao lado de cada sólido com a respectiva figura. (Observação: As posições e tamanhos dos sólidos estão alteradas. Algumas figuras não têm sólidos correspondente)

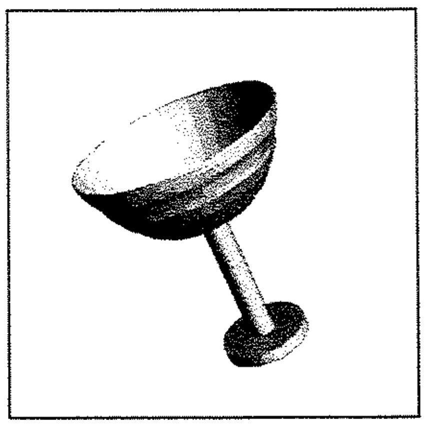


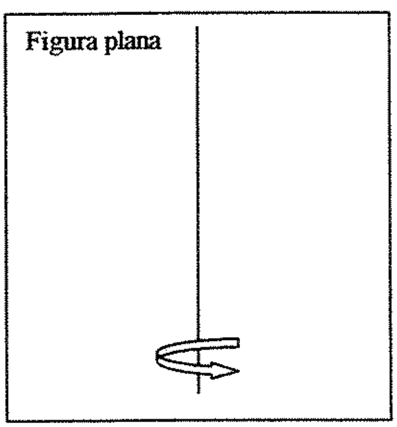


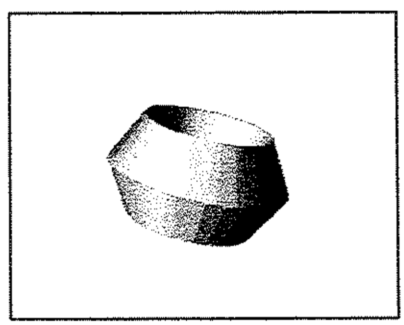
9) Os sólidos a seguir foram obtidos pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo. Para cada sólido dado, ao lado temos um eixo e você deve desenhar a figura plana correspondente, isto é, a figura que, se fosse girada, geraria o tal sólido . (A posição do sólido está modificada)

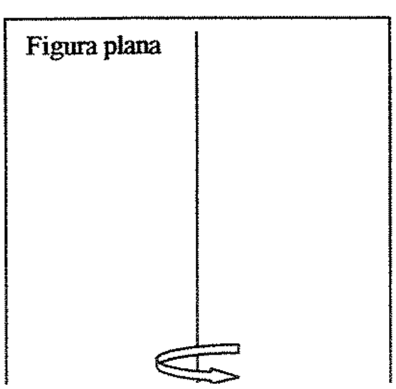


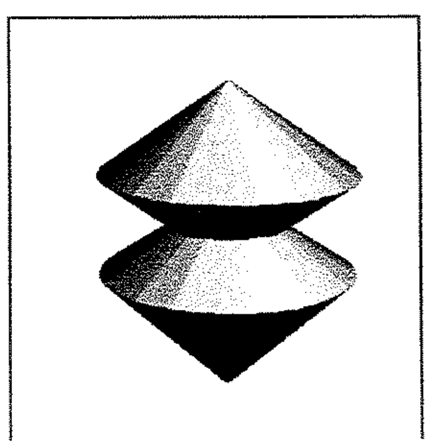












ANEXO 3 – I_4 :Escala de atitudes em relação à Matemática

Escola ____
Nome: _______________________________________ **nº____série__________**
Sexo: masculino( ) feminino ( ) **data nascimento:__/__/___**

ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

INSTRUÇÃO: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que pessoas apresentam com relação à Matemática. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatros pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Matemática.

1) Eu fico sempre com uma terrível tensão na aula de Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

2) Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

3) Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

4) A Matemática é fascinante e divertida
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

5) A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

6) "Dá um branco"na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

7) Eu tenho uma sensação de insegurança quando me esforço em Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

8) A Matemática me deixa inquieto (a), descontente, irritado(a) e impaciente
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

9) O sentimento que tenho em relação à Matemática é bom
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

10) A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido numa selva de números
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

11) A Matemática é algo que eu aprecio grandemente
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

12) Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

13) Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultante do medo de não ser capaz em Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

14) Eu gosto realmente de Matemática
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

15) A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

16) Pensar sobre a obrigação de resolver um problema matemático me deixa nervoso(a)
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

17) Eu nunca gostei de matemática e é a mateira que me dá mais medo
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

18) Eu fico mais feliz na aula de matemática do que na aula de qualquer outra matéria
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

19) Eu me sinto tranqüilo (a) em Matemática e gosto muito dessa matéria
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

20) Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

21) Não tenho um bom desempenho em matemática.
( ) discordo totalmente ( )discordo ( )concordo ( )concordo totalmente

ANEXO 4 – I_5 :Escala de atitudes em relação à Geometria

Escola ____
Nome: ______________________________________ **nº**____ **série**________
Sexo: masculino( )   feminino ( )   data nascimento:__/__/___

ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À GEOMETRIA

INSTRUÇÃO: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que pessoas apresentam com relação à Geometria. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatros pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possivel, o sentimento que você experimenta com relação a esse conteúdo da Matemática.

01- Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula cujo conteúdo é Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

02- Eu não gosto de Geometria e me assusta ter que estudar esse conteúdo.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

03- Eu acho a Geometria muito interessante e gosto das aulas que abordam esse conteúdo.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

04- A Geometria é fascinante e divertida.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

05- A Geometria me faz sentir seguro (a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

06- "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

07- Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

08- A Geometria me deixa inquieto (a), descontente, irritado (a) e impaciente.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

09- O sentimento que tenho com relação à Geometria é bom.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

10- A Geometria me faz sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de figuras, formas e números e sem encontrar a saída.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

11- A Geometria é algo que eu aprecio grandemente.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

12- Quando eu ouço a palavra Geometria, eu tenho um sentimento de aversão.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

13- Eu encaro a Geometria com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

14- Problemas sobre figuras geométricas são mais fáceis de serem solucionados.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo)Concordo ( )Concordo totalmente

15- Eu gosto realmente da Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

16- A Geometria é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

17- Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Geometria me deixa nervoso (a).
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

18- Eu nunca gostei de Geometria e é o conteúdo que me dá mais medo.
( )Discordo Totalmente ( )discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

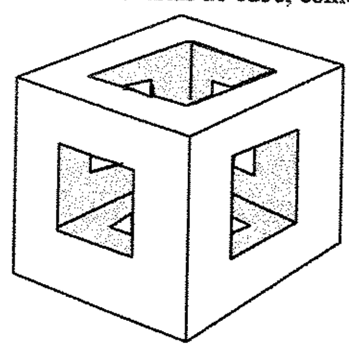
19- Eu fico mais feliz na aula que trata de Geometria que na aula de qualquer outro conteúdo
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente
20- Eu me sinto tranqüilo (a) em Geometria e gosto muito desse conteúdo.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente
21- Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Geometria: Eu gosto e aprecio esse conteúdo.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo)Concordo ( )Concordo totalmente
22- Sempre fico ansioso quando o problema envolve formas e figuras.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo)Concordo ( )Concordo totalmente
23- Não tenho um bom desempenho em Geometria.
( )Discordo Totalmente ( )Discordo ( )Concordo ( )Concordo Totalmente

ANEXO 5 – I_6 :Questões de vestibulares

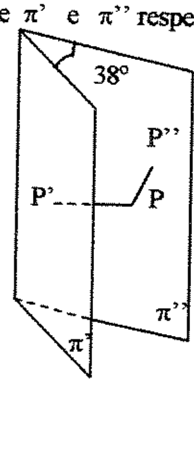
NOME:______________________________________ SÉRIE:__________

1) Tem-se um cubo de madeira , de aresta 10 cm cujas faces estão pintadas de 6 cores diferentes e que não confundem com a cor da madeira. Subdividimos esse cubo em cubinhos menores de 1 cm de aresta. Qual é o número de cubos que têm faces com *exatamente* 3 cores diferentes (considere a cor da madeira como uma cor) ?

2) As arestas de um cubo de isopor medem 6 cm. Buracos quadrados, de 2cm de lado, cortam o cubo, indo de uma face até a face oposta. As arestas desses buracos são paralelas às arestas do cubo, como na figura a seguir. Determine o volume da peça

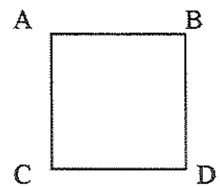


3) Sejam π' e π'' as faces de um ângulo diedro de 38° e P um ponto no interior a esse diedro. Sejam P'e P'' as projeções ortogonais de P sobre π' e π'' respectivamente. Determine a medida em graus do ângulo P'P P''



4)Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado 6 cm. Sabe-se que a área da superfície lateral coincide com a área da base. Calcular o volume do prisma.

5) O quadrado ABCD é face de um cubo e I é o centro da face oposta. Sendo α o ângulo entre os planos ABI e CDI calcule $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$



6)Uma caixa d'água com a forma de um paralelepípedo reto de $1m$ x $1m$ de base e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$ de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura h. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse 30°. Calcular a altura h.

7)Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido.