UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONHECIMENTO DECLARATIVO E DE PROCEDIMENTO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Luciane de Castro Quintiliano

Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Luciane de Castro Quintiliano e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 15/02/2005

Assinatura: Márcia Regina F. de Brito

COMISSÃO JULGADORA:

Tânia Maria Mcampos

Márcia Regina F. de Brito

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

2005

© by Luciane de Castro Quintiliano, 2005.

UNIDADE BC
Nº CHAMADA T/UNICAMP
Q45c
V ____ EX ____
TOMBO BC/ 65017
PROC. 16-P-00086-05
C ☐ D ☒
PREÇO 11,00
DATA 02/08/05
Nº CPD ____
Bib. id 359256

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca da Faculdade de Educação/UNICAMP

Q45c

Quintiliano, Luciane de Castro .
Conhecimento declarativo e de procedimento na solução de problemas algébricos / Luciane de Castro Quintiliano. -- Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1.Conhecimento. 2. Álgebra. 3. Desempenho de aprendizagem. 4. Solução de problemas. I. Márcia Regina Ferreira de Brito. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

05-54

Keywords: Knowledge; Algebra; leraning performance; Problem solving
Área de concentração: Educação matemática
Titulação: Mestre em educação
Banca examinadora: Profa. Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini
Profa. Dra. Fernanda Soares de Oliveira Taxa
Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola
Data da defesa: 15/02/2005

Dedico este trabalho à minha mãe,
à minha filha Beatriz e
ao meu querido Erick.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

200515819

AGRADECIMENTOS

- À professora Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito, por todos os ensinamentos e incentivos dispensados a todo o momento, através de sua orientação ímpar.
- À minha querida mãe Emília, incentivadora constante, que nunca mediu esforços para esta realização, sem o qual a concretização deste trabalho não teria sido possível.
- Ao meu querido marido, companheiro e amigo Erick, que sempre, com muito carinho e atenção, esteve ao meu lado, dispensando seu apoio e seus sábios conselhos, além de sua infinita paciência.
- À minha querida filha Beatriz, pelo amor, pela razão e pelo sentido da vida.
- Ao **CNPq** e **CAPES** pelo apoio financeiro, pois sem este, não seria possível a realização deste trabalho.
- Ao professor Nelson, amigo incondicionalmente disposto a contribuir com seu conhecimento e experiência profissional. A atenção e apreço sempre serão lembrados.
- À amiga Gislaine, que durante toda nossa convivência sempre foi solidária. Suas palavras de apoio e sua atenção jamais serão esquecidas.
- À amiga Odaléa, pelo incentivo, pela contribuição no desenvolvimento do presente trabalho e principalmente pela imensurável colaboração na análise dos dados coletados.
- À amiga Érica, pelo apoio nos momentos difíceis da pesquisa, constantemente preocupada com os detalhes que são de extrema importância para a realização e conclusão do trabalho. Obrigada por se preocupar comigo!
- A todos os amigos do PSIEM, que sempre colaboraram com sugestões e apoio. Obrigada, Liliane, Viviane, Marcos, Kelly, Adriana, Fernanda Marinheiro, Fernanda Taxa, Roseline e Fabiane pelas suas contribuições. E a Lenir que também muito ajudou na análise dos instrumentos.
- À querida Clayde, que com muito carinho e dedicação, colaborou na análise estatística deste trabalho.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

- À Profa. Dra. Lucila D. Fini e a Profa. Dra. Tânia Campos pela grande contribuição na realização deste projeto.
- A todos os professores das disciplinas que cursei na pós-graduação, que de alguma forma colaboraram para a concretização deste projeto e, em especial, para minha formação.
- À Direção da Escola Estadual "Luiz Zuiani" e da Escola Estadual "Ernesto Monte", em Bauru/SP, e aos seus professores, que colaboraram com este estudo permitindo a coleta de dados.
- Aos estudantes que participaram deste trabalho, que esta experiência possa servir-lhes de incentivo e ponto de partida para o pleno desenvolvimento da aprendizagem de conceitos.
- À minha prima Adriane, pela colaboração na correção gramatical deste projeto.
- À professora Flávia, pelo auxílio nas questões referentes a língua inglesa.
- E por último, mas não de menor importância, agradeço a **DEUS**, por ter me dado a vida e condições para que todas as oportunidades e sonhos acontecessem!

RESUMO

Tendo em vista a importância da solução de problemas na aprendizagem dos conteúdos da Matemática escolar, o presente estudo foi formulado com o objetivo de investigar a influência do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento na solução de problemas algébricos. Os sujeitos desta pesquisa foram 96 alunos da última série do Ensino Fundamental de duas escolas da rede Pública de Ensino em Bauru. O estudo foi delineado com o propósito de atender os objetivos estabelecidos para a investigação. Os dados foram coletados através de um questionário informativo, uma prova para investigar o conhecimento declarativo com questões envolvendo o conceito de equação, expressão algébrica, variável e incógnita, e uma prova para investigação do conhecimento de procedimento com problemas que requeriam a utilização de procedimentos algébricos. Através da análise das notas nas duas provas obteve-se uma correlação positiva moderada, indicando que havia uma tendência de quanto melhor era a nota atribuída ao conhecimento declarativo, melhor era a nota atribuída ao conhecimento de procedimentos. Observou-se também que não houve diferença significativa ($p > 0,05$) em relação ao desempenho das duas escolas investigadas.

Palavras-chave: Conhecimento Declarativo – Conhecimento de Procedimento - Álgebra - Desempenho

Este estudo recebeu apoio financeiro do CNPq e CAPES.

ABSTRACT

Considering the importance of the problem's solution in the learning of mathematical scholar contents, the present study was formulated with the aim to investigate the declarative knowledge influence and the procedural knowledge on the solution of algebraic problems. The subjects of this research were 96 students from the last grades of the Fundamental Education of two Public Schools in the city of Bauru, São Paulo state. The study was delineated with the purpose to attend the aims established to the investigation. The datas were collected through an informative questionnaire, a test to investigate the declarative knowledge with questions involving the equation concept, algebraic expression, variable and unknown, and a test for the procedural knowledge investigation with problems that requested the use of algebraic procedures. Through the grades analysis on the two tests, it was obtained a moderated positive correlation, indicating that there was a tendency of as much better the grade was attributed to the declarative knowledge, much better was the grade attributed to the procedural knowledge. It was also observed that there was no significant difference ($p > 0,05$) regarding the performance of the two schools investigated.

Key-words: Declarative Knowledge – Procedural Knowledge – Algebra – Performance

This research received a financial support from CNPq and CAPES.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 1

I - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Processamento de Informação 7
Modelo de formação de conceitos 10
Conhecimento Declarativo e Conhecimento de Procedimento 17
Solução de Problemas 24
Pensamento Algébrico 34

II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 39

III – OBJETIVO, PARTICIPANTES, MATERIAL, PROCEDIMENTO E MÉTODO

Objetivo 57
Participantes 57
Material 58
Procedimento 58
Método 63

IV – RESULTADOS E DISCUSSÕES

Análise descritiva dos dados dos participantes 65
Resultados obtidos na prova matemática para avaliar o Conhecimento Declarativo 74
Resultados obtidos na prova matemática para avaliar o conhecimento de procedimento 82
Análise dos dados obtidos através da prova matemática para avaliar o Conhecimento declarativo 98
Análise dos dados obtidos através da prova matemática para avaliar o conhecimento de procedimento 103
Análise dos resultados obtidos nos problemas matemáticos de acordo com o procedimento utilizado 107
Análise das notas obtidas nas provas matemáticas para avaliar o conhecimento declarativo e o conhecimento de procedimento 115

V – CONCLUSÃO E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO 117

VI – CONSIDERAÇÕES FINAIS 123

REVISÃO DA LITERATURA PERTINENTE 131

ANEXOS

Anexo I - Questionário Informativo do Aluno 145
Anexo II - Instrumento utilizado para investigação do conhecimento declarativo 149
Anexo III - Instrumento utilizado para investigação do conhecimento de procedimento 153

ÍNDICE DE FIGURAS:

Figura 1. Problema extraído de Bianchini (1996) 14
Figura 2. Processo de resolução de um problema matemático (Mayer, 1983) 29
Figura 3. Ciclo de resolução de problemas (Sternberg, 2000) 30
Figura 4. Quadro que sintetiza as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras (PCN, 1998) 38
Figura 5. Modelo interativo para o desenvolvimento do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento (Rittle-Johnson *et al*, 2001) 48
Figura 6. Comparação entre a nota do conhecimento de procedimento e a nota do conhecimento declarativo 115

ÍNDICE DE TABELAS:

Tabela 1: Investigação sobre o conhecimento declarativo dos conceitos de equação, expressão algébrica, variáveis e incógnitas 59
Tabela 2: Investigação sobre o conhecimento de procedimento em problemas algébricos envolvendo os conceitos de expressão algébrica e equação 60
Tabela 3: Distribuição dos participantes de acordo com a escola 66
Tabela 4: Distribuição dos participantes de acordo com a idade 66
Tabela 5: Distribuição dos participantes de acordo com o gênero 67
Tabela 6: Distribuição dos participantes de acordo com o nível de escolaridade dos pais 67
Tabela 7: Distribuição dos participantes de acordo com a reprovação em alguma série..... 68
Tabela 8: Distribuição dos participantes de acordo com a série que reprovou 68
Tabela 9: Distribuição dos participantes conforme o sentimento em relação à matemática 69
Tabela 10: Distribuição dos participantes conforme o sentimento em relação à álgebra 69
Tabela 11: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra em que têm mais facilidade 70
Tabela 12: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra em que têm mais facilidade 71
Tabela 13: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra em que têm mais dificuldade 72
Tabela 14: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra em que têm mais dificuldade 73
Tabela 15: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 1, Itens **a**, **b**, **c** e **d** 75
Tabela 16: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 2 78
Tabela 17: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 3 80

Tabela 18: Estatística relativa à Prova 1 com relação ao conhecimento declarativo e a escola 81
Tabela 19: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 1..... 88
Tabela 20: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 2 89
Tabela 21: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 3 90
Tabela 22: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 4 91
Tabela 23: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 5 92
Tabela 24: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 6 92
Tabela 25: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 7 93
Tabela 26: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 8 94
Tabela 27: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 9 95
Tabela 28: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 10... 95
Tabela 29: Estatísticas relativas à Prova 2 com relação ao conhecimento de procedimento e a escola 96
Tabela 30: Distribuição dos participantes de acordo com os procedimentos utilizados nas questões 3, 5, 8a1, 8b e 10 97
Tabela 31: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gênero 98
Tabela 32: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo a reprovação 98
Tabela 33: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gostar de matemática 99
Tabela 34: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gostar de álgebra 99
Tabela 35: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo de acordo com o conteúdo de álgebra em que tem mais facilidade 100
Tabela 36: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo de acordo com o conteúdo de álgebra em que tem mais dificuldade 101
Tabela 37: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento segundo o gênero 103
Tabela 38: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento segundo a reprovação 103

Tabela 39: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de Procedimento e o gostar de matemática 104
Tabela 40: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento e o gostar de álgebra 105
Tabela 41: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento de acordo com o conteúdo da álgebra em que tem mais facilidade.... 105
Tabela 42: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento de acordo com o conteúdo da álgebra em que tem mais dificuldade.. 106
Tabela 43: Estatística relativa ao desempenho na questão 3 da prova conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado 107
Tabela 44: Estatística relativa ao desempenho na questão 5 da prova conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado 107
Tabela 45: Estatística relativa ao desempenho na questão 8a1 da prova conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado 108
Tabela 46: Estatística relativa ao desempenho na questão 8b da prova conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado 109
Tabela 47: Estatística relativa ao desempenho na questão 10 da prova conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado 110
Tabela 48: Estatística relativa ao gênero e o sentimento em relação à álgebra 111
Tabela 49: Estatística relativa ao gênero e o sentimento em relação à matemática..111
Tabela 50: Estatística relativa à reprovação e o sentimento em relação à álgebra ...112
Tabela 51: Estatística relativa ao tipo de procedimento que prevaleceu (nas questões 3, 5, 8a1, 8b e 10 referente ao conhecimento de procedimento) e o sentimento em relação à álgebra.....113

Introdução

As finalidades da álgebra são determinadas por ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.

Zalman Usiskin

O ensino da álgebra há algum tempo tem proporcionado uma ênfase apenas nas fórmulas e manipulações mecânicas com símbolos (Domingues, 1995). E isto provavelmente culminou na situação que podemos constatar atualmente no ensino dos conceitos algébricos, pois verifica-se a existência de muitas dificuldades que permeiam o processo de ensino-aprendizagem destes conceitos nos diversos níveis escolares.

Tais dificuldades estão relacionadas com a compreensão das "letras", usualmente chamadas de variáveis, e às operações com elas realizadas. Usiskin (1995) defende a tese de que as finalidades da álgebra, as concepções que temos sobre este conteúdo e a manipulação de variáveis estão intrinsecamente relacionadas.

No decorrer do ensino da álgebra, principalmente no ensino médio, há uma tendência a enfatizar as manipulações de diversas técnicas algébricas, mas Usiskin (1995) coloca em questão este fato, já que no futuro provavelmente os estudantes não terão necessidade de realizar tantas manipulações algébricas, visto que existem programas de computador que desempenham tais manipulações. Não que as manipulações não tenham sua importância, mas o que no caso torna-se mais importante é o conhecimento declarativo relacionado a este

conceito para que seja possível a utilização correta do conhecimento de procedimentos.

De acordo com a literatura, há um consenso entre vários pesquisadores em educação matemática, no sentido de que o fracasso no ensino da álgebra pode representar um obstáculo ao sucesso em matemática (Pinto, 1998), e que a qualidade do ensino deste conteúdo pode influenciar a tomada de decisão por parte do estudante, em relação a continuar ou não estudando matemática (House,1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (MEC, 1998, p. 115) enfatizam que o estudo da álgebra, por ser um campo amplo e expressivo, permite ao aluno desenvolver e exercitar sua capacidade de abstração e generalização, sendo ainda uma importante ferramenta para solucionar problemas. Os conceitos algébricos são introduzidos aos alunos inicialmente nos 3° e 4° ciclos do ensino fundamental (5 ª a 8 ª série). E entre os conceitos matemáticos que se relacionam à álgebra, destaca-se a geometria, que permite, por exemplo, o uso daqueles conceitos para o cálculo de áreas.

O National Council of Teacher of Mathematics (1989), abordando também o ensino deste conteúdo, afirma que a álgebra é a linguagem com a qual a maior parte da matemática se comunica, e a grade curricular da 4ª à 7ª série do ensino fundamental (níveis 5-8) deve proporcionar aos alunos o entendimento sobre os conceitos de equações, expressões e variáveis, permitindo que eles adquiram o conhecimento necessário para aplicar os procedimentos algébricos na solução de uma ampla variedade de problemas do mundo real e da matemática.

A partir disso, ressalta-se a importância de que a grade curricular da 8ª série do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio (níveis 9-12) deve proporcionar aos estudantes o conhecimento necessário para representar situações que envolvam variáveis com expressões, equações, desigualdades e matrizes.

De acordo com Garcia (1997), o que incentivou a expansão e a concretização da linguagem algébrica foi a procura e a necessidade de generalizações, tanto dos problemas aritméticos como dos problemas geométricos

clássicos. Ulrich (1973, p.5) corroborou tal afirmação quando afirmou que *um dado conceito matemático pode ser tratado algebricamente ou geometricamente; para alguns conceitos, a álgebra precede a geometria, e para outros, a ordem é inversa* (citado em Oliveira, 2000, p. 37).

Kieran (1990) abordou a evolução pela qual a álgebra passou, resumindo os três estágios dessa evolução: a álgebra retórica, a álgebra sincopada, e a álgebra simbólica, incluindo neste último a álgebra geométrica (Sousa e Moura, 2003).

Segundo Sousa e Moura (2003), o surgimento da álgebra está associada à origem do zero, e foi definido *como fenômeno notável da história.* A invenção do zero abriu caminho para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os campos da matemática. Mas foi a descoberta da notação simbólica realizada em 1591 por François Viéte, posteriormente aperfeiçoada por René Descartes, que promoveu o avanço da álgebra (p. 2).

As pessoas, segundo Sternberg (2000), possuem alguma forma de representação mental dos objetos, das pessoas e das idéias. Para isso, utilizam a representação do conhecimento para demonstrar o que conhecem sobre tais aspectos.

Os psicólogos cognitivos buscam investigar a representação e o processamento do conhecimento, pois a necessidade de saber como este é representado na mente influencia amplamente no modo *como o conhecimento pode ser manipulado com facilidade, precisão e eficiência, para desempenharmos qualquer quantidade de tarefas cognitivas* (Sternberg, 2000, p. 185).

Um dos métodos existentes para investigar e observar como os indivíduos representam o conhecimento na mente é o método racionalista, através do qual tenta-se deduzir logicamente como os indivíduos representam o conhecimento, utilizando-se explicações que são consideradas mais prováveis na observação.

Os filósofos da epistemologia clássica que utilizaram tal método distinguiram duas classes de estruturas do conhecimento: o *conhecimento declarativo*, cujas informações podem ser verbalizadas, como por exemplo, data de nascimento, nome de algum amigo, entre outras; e o *conhecimento de*

procedimento, cujas informações podem ser executadas, como por exemplo, somar coluna de números, dirigir um carro, entre outras (Sternberg, 2000, p. 151).

A diferenciação entre esses dois conhecimentos está entre *"saber o quê"* e *"saber como"* os indivíduos os representam na mente. Dessa forma, os psicólogos cognitivos buscam entender o *quê* (a forma ou a estrutura) do conhecimento e também entender o *como* (os processos) da representação e manipulação do conhecimento na mente humana (Sternberg, 2000, p. 151).

Segundo Angón e Pozo (1998), na solução de problemas é requerido do aluno a ativação do conhecimento declarativo (fatual e conceitual específico), bem como o conhecimento de procedimento e o domínio de técnicas e estratégias. Dessa forma, ao solucionar-se um problema, é necessário algum conhecimento de heurísticas da solução de problemas, ou seja, um conhecimento das estratégias necessárias à solução (Mayer, 1992).

A solução de problemas, segundo Chi e Glaser (1992, p. 250), *é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes.* Estes autores abordaram as características gerais da capacidade para solução de problemas das pessoas, enfatizando que a teoria sistêmica relacionada aos mecanismos de solução de problemas pelos humanos é um progresso recente da ciência psicológica; o conhecimento dos processos fundamentais proporciona uma base para a compreensão do desenvolvimento e aquisição de nossas capacidades para pensar e solucionar problemas.

Tendo em vista a importância da solução de problemas na aprendizagem dos conteúdos da Matemática escolar, o presente estudo foi formulado com o objetivo de investigar a influência do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento na solução de problemas algébricos, visando contribuir para a identificação de possíveis fatores que influenciam o desempenho dos estudantes nas atividades algébricas, particularmente, nas equações do 1º grau, nas expressões algébricas e nos problemas que permitam a solução através de procedimentos algébricos. Espera-se que os resultados deste trabalho possam ser utilizados para fomentar outras investigações relacionadas a este campo de pesquisa, e ainda subsidiar o prosseguimento do presente estudo. A idéia é

proporcionar condições que facilitem a identificação dos fatores que influenciam o desempenho dos alunos durante as atividades de solução de problemas que envolvam conceitos algébricos, buscando contribuir para a melhoria do ensino desse campo da Matemática.

O problema de pesquisa, formulado com base nessas considerações iniciais, é o seguinte:

Quais as relações entre o conhecimento declarativo e de procedimento, e o desempenho do estudante envolvido em atividades de solução de problemas algébricos?

Partindo desta questão, o presente estudo buscará subsídios para responder as seguintes indagações:

1- Os participantes conseguem discriminar entre exemplos e não-exemplos de equação e expressão algébrica?
2- Os participantes conseguem traduzir uma sentença da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática?
3- Existe relação entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução de problemas algébricos?

Com a finalidade de responder a estas questões, o presente estudo terá seus dados coletados em situações nas quais o sujeito esteja envolvido em atividades algébricas que permitam que tais características emerjam.

CAPÍTULO I

Fundamentação Teórica

Uma combinação de materiais apropriados e bom ensino pode produzir grandes mudanças positivas na aprendizagem e desenvolvimento de conceitos dos alunos.

Herbert J. Klausmeier

Processamento de Informação

Pozo (1998) apontou com base nos trabalhos de Hebert Simon que a psicologia cognitiva somente é compreensível se for considerada como uma conseqüência do novo mundo científico iniciado pelas "ciências do artificial". Esse novo movimento cognitivo assumiu um enfoque de acordo com as demandas tecnológicas da Revolução Pós-Industrial, sendo que a "revolução cognitiva" configurou-se como uma resposta a tais demandas e o ser humano passou a ser considerado um processador de informação (Bruner, 1983).

Houve várias influências durante o desenvolvimento da psicologia cognitiva e uma delas foi a chegada do computador digital; segundo Eysenk e Keane (1996), *não seria uma surpresa se muitos teóricos respondessem a essa invenção, com tentativas de comparar o funcionamento da mente humana com o de um computador.* Neste aspecto, a concepção do ser humano como processador de informação fundamenta-se na aceitação da analogia da mente humana e com o funcionamento do computador.

Pozo (1998), na busca dos postulados básicos do processamento de informação, considerou que

> *... o homem e o computador são sistemas de processamento com propósitos gerais funcionalmente equivalentes, que intercambiam informação com seu entorno mediante a manipulação de símbolos. Segundo tal concepção, tanto o ser humano como o computador são verdadeiros "informativos" (Psylushyn, 1984), são sistemas cognitivos cujo alimento é a informação (p. 42).*

Os teóricos do processamento de informação buscam compreender o desenvolvimento cognitivo em função de como as pessoas de diferentes idades tratam a informação, como a codificam, transferem, combinam, armazenam e recuperam, particularmente quando solucionam problemas desafiadores (Sternberg, 2000, p. 386).

O conceito de psicologia cognitiva é mais abrangente do que o conceito de processamento de informação, pois a psicologia cognitiva remete-se à explicação da conduta, entidades, estados, processos e disposições de natureza mental, para os quais requer um nível de discurso próprio (Rivière, *in* Pozo, 1998, p. 40).

Autores clássicos como Vygotskii e Piaget consideraram a importância das representações como determinante das ações dos participantes.

Segundo Lachman, Lachman e Butterfield (1979), o processamento de informação é mais limitativo, pois sugere que *tais representações estejam compostas por algum tipo de cômputo*, considerando que *umas poucas operações simbólicas relativamente básicas, tais como codificar, comparar, localizar, armazenar, etc., podem, em última análise, explicar a inteligência humana e a capacidade para criar conhecimentos, inovações e talvez expectativas com respeito ao futuro* (como citado em Pozo, 1998, p. 41).

A concepção do ser humano como processador de informação é baseada na aceitação da analogia entre a mente humana e o funcionamento do computador, isto é, adotam-se os programas de computador como metáfora do funcionamento cognitivo humano. O processamento de informação considera a memória como estrutura básica do sistema de processamento e leva em

consideração também os processos cognitivos causais como os processos de atenção e os processos e estruturas de memória. As teorias do processamento de informação ou teorias cognitivas da inteligência tentam compreender a inteligência humana em termos dos processos mentais que colaboram para o desempenho em tarefas cognitivas (Sternberg, 1992, p.26).

De acordo com esse autor, os psicólogos do processamento de informação tentam compreender as capacidades humanas em termos dos mecanismos mentais básicos subjacentes ao comportamento inteligente, buscando entender a forma através da qual as pessoas processam e representam mentalmente as informações. O autor explicitou que as correntes de interpretação existentes, fundamentadas no processamento, não têm o intuito de prover uma demonstração compreensiva do desenvolvimento cognitivo (tal como fizeram Piaget e Vygotskii). As teorias de processamento analisam todo o conjunto, considerando toda variação dos processos cognitivos que manipulam a informação em pessoas de todas as idades, pois segundo o autor todas a atividades mentais envolvendo observação, entrada, manipulações mentais, armazenamento, combinação ou ação relacionadas com a informação estão inseridas no campo do processamento de informação.

Após examinar as diversas abordagens e teorias que estudam o desenvolvimento cognitivo, Sternberg (2000) buscou encontrar alguns princípios básicos que regem o estudo do desenvolvimento cognitivo e o integram. Além disso, segundo ele, a primeira das respostas a essas indagações seria ao longo do curso do desenvolvimento, pois parece que ocorre um controle mais sofisticado pelos participantes, sobre o próprio pensamento e aprendizado, à medida que avançam na idade. Assim, mais aptidão para a realização de interações complexas entre o pensamento e o comportamento. Em segundo, com a idade, o indivíduo se empenha em um processo de informação mais completo. Por exemplo, as crianças mais velhas codificam mais informações derivadas de problemas que as mais jovens. Assim, elas têm maior probabilidade de solucionar os problemas com exatidão. Dessa forma, ao longo do desenvolvimento cognitivo

pelos anos é desenvolvida a flexibilidade para a utilização de estratégias e de outras informações.

Modelo de formação de conceitos

O desenvolvimento cognitivo, conforme Klausmeier (1977), se processa através de mudanças progressivas e ordenadas na estrutura cognitiva e nos comportamentos que podem ser observados e naqueles passíveis de inferência, sendo que estas mudanças ocorrem durante toda a vida do indivíduo e são particularmente acentuadas no período compreendido entre o nascimento e a maturidade. Este modelo é chamado de aprendizagem cumulativa e atribui aos conceitos um papel fundamental no desenvolvimento e no desempenho intelectual (Brito, 2000a, p. 79).

As diferenças referentes ao nível de desenvolvimento conceitual de um indivíduo podem ser explicadas, segundo Klausmeier (1977), em termos das operações mentais que os mesmos são capazes de desenvolver, e ainda em termos do que cada um já sabe.

A maioria dos estudos realizados por esse autor teve como objetivo a investigação da aquisição de conceitos e os níveis de formação conceitual relacionados aos conceitos de triângulo eqüilátero e de substantivo. Utilizou-se para estes estudos resultados obtidos de participantes de diferentes séries e faixas etárias, que estavam engajados em atividades em sala de aula.

Através de um modelo de aprendizagem e desenvolvimento de conceitos formulado por este autor em 1971, e posteriormente aprimorado por Klausmeier, Ghatala e Frayer (1974), foi descrito como se processa o desenvolvimento conceitual, desde a primeira infância até a adolescência.

Segundo Brito (2000a),

> *... a formação e o desenvolvimento de conceitos, na abordagem cognitivista, implicam na aquisição de níveis conceituais cada vez mais diferenciados e é importante ressaltar que este desenvolvimento e aprendizagem obedecem ao padrão*

> *maturacional do indivíduo, às características do conceito que está sendo ensinado/aprendido e ao ambiente no qual está situado o aprendiz e de onde emerge o conceito* (p. 80).

Klausmeier (1977) definiu um conceito como *uma informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas – objetos, eventos ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de ou relacionada com outras coisas ou classes de coisas* (p. 312).

O autor, levando em consideração a definição de conceito acima, ressaltou que a palavra "conceito" é utilizada para denominar tanto *constructos mentais* como também *entidades públicas*.

Os conceitos são classificados como *constructos mentais* quando decorrem das próprias experiências dos indivíduos, pois à medida que os mesmos desenvolvem-se, formam conceitos de acordo com suas experiências de aprendizagem e padrões maturacionais. Dessa forma, os conceitos como *entidades públicas* são definidos como a informação organizada que corresponde aos significados das palavras, aceitos socialmente, de grupos de pessoas que falam a mesma língua, podendo ser encontrado em dicionários, enciclopédias e outros livros. Tomando-se como exemplo o conceito de incógnita, a definição que encontramos no dicionário e nos livros didáticos é o conceito como entidade pública. Já as idéias que o indivíduo desenvolve a respeito deste conceito, que decorre de sua experiência prévia, é designado conceito como constructo mental.

Uma relação entre dois ou mais conceitos chama-se *princípio*. Os princípios podem ser denominados de constructo mental ou entidade pública. Na medida em que os indivíduos atribuem significados ou interpretações únicas a um princípio específico, designa-se de constructo mental. Quando os indivíduos atribuem um significado ou interpretação de um princípio, que é aceito igualmente pela sociedade, designa-se de entidade pública.

Grande parte do conhecimento que orienta o comportamento do indivíduo incorpora-se por afirmações de relações que indicam causa e efeito, correlação, probabilidade e outras relações que são colocadas como dados, sob a forma de

axiomas. O autor considerou oito atributos definidores de "conceito", presumindo que estes atributos são aplicáveis a qualquer conceito público e, também, a conceitos como constructo mental de indivíduos. Destacou ainda que os seis primeiros atributos também definem um princípio, mas é importante ressaltar que a aprendizagem de um princípio decorre da aprendizagem de conceitos. Além disso, a aprendizagem de um princípio requer um nível de pensamento superior que a de conceito. A aplicação de cada atributo definidor, deste modo, é diferente para um princípio e para um conceito (Klausmeier, 1977, p. 315).

Os oito atributos definidores são:

1) Aprendibilidade: varia entre conceitos, pois alguns conceitos podem ser mais facilmente aprendidos que outros, por indivíduos que compartilham experiências culturais e línguas semelhantes, visto que há conceitos que apresentam exemplos mais perceptíveis que outros. Por exemplo, para o aluno é menos complexo solucionar uma equação do 1° grau, do que solucionar um sistema de equações do 1° grau com duas variáveis.
2) Utilidade: os conceitos podem variar a respeito de sua utilidade, no sentido de que alguns podem ser mais utilizados que outros, para compreender-se e formar princípios e também solucionar problemas.
3) Validade: os conceitos somente são válidos quando os especialistas concordam com sua definição. Por exemplo, o conceito de equação, como toda sentença aberta expressa por uma igualdade, somente é válido pelo fato de que esta definição foi amplamente aceita pelos especialistas da área.
4) Generalidade: muitos sistemas são classificados hierarquicamente em sistemas taxonômicos, possibilitando uma visão ampla de um conceito e suas classes. Sendo assim, torna-se interessante a elaboração de uma taxonomia do conceito, iniciando com o mais geral em direção aos particulares e identificando, dessa forma, as relações supra-ordenadas, coordenadas e subordinadas dos conceitos.

5) Importância: um conceito, em geral, pode facilitar ou é essencial para a formação de outros conceitos. Para ensinar o conceito de inequação, é necessário que os estudantes já tenham formado o conceito de equação.
6) Estrutura: o conceito está diretamente relacionado aos seus atributos definidores através de relações, que podem ser: afirmativa, conjuntiva, disjuntiva, condicional e bi-condicional.
7) Perceptibilidade de exemplos: os conceitos variam com relação à possibilidade de seus exemplos serem captados pelos sentidos.
8) Numerosidade de exemplos: o conhecimento de vários exemplos e não-exemplos relacionados a um conceito é necessário para a aprendizagem do indivíduo, pois assim poderá identificar, entre eles, seus atributos definidores, facilitando então a formação de tal conceito. Mas, segundo o autor, o uso de exemplos e não exemplos devem ser adequadamente combinados, para evitar erros de subgeneralização e supergeneralização. Os erros de subgeneralização podem acontecer se forem utilizados pelo professor poucos exemplos, ou exemplos que sejam excessivamente semelhantes. Então, o aluno poderá fracassar na identificação de alguns exemplos, isto é, subgeneralizar. E, no outro caso, erros de supergeneralização poderão ocorrer se forem utilizados pelo professor não exemplos em pouca quantidade ou muito parecidos.

Klausmeier (1977) utiliza o termo *não exemplos* para indicar os exemplos de conceitos diferentes do qual está se referindo. O autor exemplifica que os *não exemplos* de triângulo eqüilátero são, por exemplo, triângulo reto, isósceles, escaleno e ainda quadrados de vários tamanhos e formas.

O termo *não exemplos* não é semelhante ao termo *contra-exemplo* da lógica matemática, pois segundo Sober (2000), um *contra-exemplo* é um exemplo que contradiz uma teoria geral, e exemplificou dizendo que um contra-exemplo contra uma generalização mostra que a generalização é falsa. Para explicar melhor, tomamos como exemplo o conceito de triângulo retângulo:

Se partirmos da generalização: todo triângulo retângulo é isósceles, ou seja, têm dois lados congruentes, sabemos que tal generalização é falsa, pois existem exemplos que contradizem tal generalização, como por exemplo o triângulo retângulo pitagórico, já que tem os três lados diferentes.

Segundo Klausmeier (1977), os conceitos podem ser constituídos em quatro níveis sucessivamente mais elevados, que são: nível concreto, de identidade, classificatório e formal. Estes níveis aplicam-se a muitos conceitos que são ou podem ser definidos em termos de atributos, e que também têm exemplos reais ou representação construídas a partir de exemplos. Um atributo, de acordo com o autor, é *uma característica discriminável de um objeto ou evento que pode assumir valores diferentes, por exemplo, cor, forma, etc.* (p.52).

Considerando, por exemplo, o conceito de expressão, tomando como modelo a expressão que representa a área do quadrado e do retângulo abaixo:

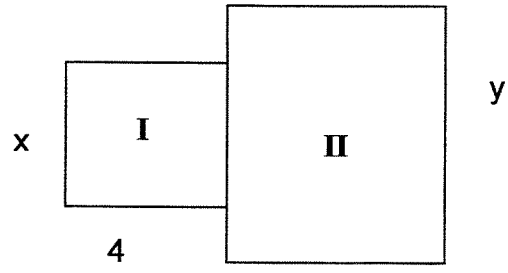


Figura 1: Extraída de Bianchini (1996, p. 75).

Então, os atributos definidores da figura são:

- A área da figura é 4x + 5y. Cada uma das parcelas dessa expressão chama-se **termo algébrico**.

- Os termos 4x e 5y são os atributos que definem essa expressão:

  - o número 4 é chamado **coeficiente** da incógnita ***x***, e a letra ***x*** é chamada **parte literal**. O termo 4x indica o produto de 4 por x.

- o número 5 é chamado **coeficiente** da incógnita ***y***, e a letra ***y*** é chamada **parte literal**. O termo 5y indica o produto de 5 por y.

Considerando os níveis de formação do conceito e as condições internas, a capacidade para desempenhar certas operações é um pré-requisito para a formação de cada nível.

Um conceito é formado no nível concreto quando o indivíduo reconhece um objeto que foi anteriormente encontrado em uma dada situação. Por exemplo, quando é mostrado a um estudante que em uma expressão a letra representa uma variável e, posteriormente, quando tal situação for apresentada novamente a este aluno, o mesmo conseguir reconhecer tal característica, então se pode inferir que tal conceito foi formado no nível concreto.

A formação de um conceito no nível de identidade é inferida quando o indivíduo reconhece um objeto como sendo o mesmo previamente encontrado (conceito formado no nível concreto), e ainda quando o objeto for reconhecido pelo indivíduo, em diferentes perspectivas físicas e sensoriais.

Como mencionado anteriormente, os níveis de formação de conceito são sucessivamente formados. Então para que um indivíduo forme um conceito no nível classificatório é preciso que o mesmo já tenha formado tal conceito no nível de identidade. A formação de conceito neste nível ocorre quando um indivíduo responde a pelo menos dois diferentes exemplos da mesma classe de objetos, eventos ou ações. Portanto, podemos dizer que um estudante formou um conceito neste nível quando, por exemplo, são apresentados ao aluno vários tipos de expressões, e o mesmo consegue identificá-las como sendo figuras que pertencem a uma mesma classe.

A formação de um conceito no nível formal, segundo Klausmeier (1977, p. 55), ocorre quando o indivíduo *sabe dar o nome do conceito, sabe definir o conceito em termos de seus atributos definidores, sabe discriminar e sabe diferenciar entre exemplos e não-exemplos em termos dos atributos definidores*, sendo também capaz de formular hipóteses a partir da avaliação das instâncias

positivas e negativas do conceito e, além disso, reconhecer as relações supra-ordenadas, subordinadas e coordenadas que envolvem tal conceito, e ainda reconhecer as relações de causa-efeito, probabilidade e correlacional, bem como os princípios que envolvem o conceito para solução de problemas (Brito, 2001, p.82). Podemos concluir que um estudante formou o conceito de expressão no nível formal se o mesmo conseguir definir uma expressão, apresentar exemplos e discriminá-los dos não-exemplos, conhecer os atributos definidores do conceito expressão, e ainda identificar as relações subordinadas relacionadas a tal conceito.

Representação Mental do Conhecimento

Conhecimento Declarativo e Conhecimento de Procedimento

De acordo com Sternberg (2000), as pessoas possuem em sua mente alguma forma de representação mental sobre objetos, pessoas, idéias, etc., isto é, alguma maneira de demonstrar algo mais do que conhecemos sobre tais aspectos, porém comumente usamos a representação do conhecimento, ou seja, a forma através da qual conhecemos em nossa própria mente os objetos, idéias, eventos, etc. que se encontram no seu exterior.

O autor salientou que o conhecimento pode ser representado tanto na forma de proposições quanto através de imagens, enfatizando ainda que os métodos empíricos, os quais têm intuito de observar como as pessoas representam o conhecimento, não estão ainda disponíveis e, além disso, é pouco provável que isto aconteça futuramente. Entretanto, segundo ele, podemos recorrer a outros métodos alternativos, sendo que uma forma de realizarmos essas observações é recorrer ao processo de auto-relato (Pinker,1985), no qual é solicitado ao sujeito a descrição de seus próprios processos e suas próprias representações do conhecimento. Contudo, este método não é considerado confiável, já que, segundo o autor, não temos a consciência dos nossos próprios processos de representação do conhecimento (Sternberg, 2000, p. 151).

Uma outra forma baseia-se na metodologia racionalista, na qual tenta-se deduzir logicamente através de explicações, que são consideradas mais plausíveis na observação de como os indivíduos representam o conhecimento.

Na epistemologia clássica, os filósofos utilizaram tal método e distinguiram duas classes de estruturas do conhecimento, da seguinte maneira: o *conhecimento declarativo*, que são fatos que podem ser declarados, como por exemplo, data de nascimento, nome de algum amigo, e outros; e o *conhecimento de procedimento*, que são fatos que podem ser executados, como por exemplo, somar coluna de números, dirigir um carro, etc. Todavia, a distinção entre estes conhecimentos, em conformidade com Gilbert Ryle (1949), está respectivamente

entre *"saber o quê"* e *"saber como"* os indivíduos representam o conhecimento na mente. Dessa forma, os psicólogos cognitivos, além de buscarem entender o *"quê"* (a forma ou a estrutura) do conhecimento, buscam entender o *"como"* ocorrem os processos da representação, bem como da manipulação do conhecimento na mente humana (Sternberg, 2000, p. 151).

Entre os pesquisadores que buscam investigar a representação e o processamento do conhecimento, encontram-se, além dos psicólogos cognitivos, também os cientistas da computação que estudam inteligência artificial e os neuropsicólogos, visto que, de acordo com Sternberg (2000), a necessidade de saber sobre a forma de como o conhecimento é representado na mente influencia amplamente no modo de *como o conhecimento pode ser manipulado com facilidade, precisão e eficiência, para desempenharmos qualquer quantidade de tarefas cognitivas* (p. 185-189).

De acordo com esse autor, um excelente exemplo de teoria que compõe formas de representação mental é o modelo CAP (Controle Adaptativo do Pensamento; ACT, no original, de "Adaptive Control of Thought") de representação do conhecimento e de processamento de informação de John Anderson (1976) que, em seu modelo, sintetizou algumas características dos modelos de processamento de informação e de rede semântica.

Nesse modelo, o conhecimento de procedimento foi representado na forma de sistemas de produção, e o conhecimento declarativo foi representado na forma de redes proposicionais, sendo que proposição foi definida por Anderson (1985) como "a menor unidade do conhecimento que pode se manter como uma asserção separada". Sternberg (2000) ressaltou que Anderson (1985) pretendia que seu modelo propiciasse uma teoria que abrangesse toda arquitetura da cognição humana.

Sternberg (2000), em concordância com Anderson (1990), definiu o conhecimento declarativo como um corpo organizado de informações factuais, ou seja, a informação real que os participantes conhecem sobre objetos, idéias e eventos, no ambiente. Conforme esse autor, este conhecimento pode ser expresso em palavras e na forma de outros símbolos, ou seja, *"saber o quê"*, e cita

como exemplos, o nosso conhecimento de fatos sobre a história mundial e da nossa própria história pessoal e da matemática, pois todos contam com a representação mental do conhecimento declarativo.

De acordo com Anderson (1983), esse conhecimento é facilmente verbalizável, podendo ser adquirido por exposição verbal e costuma ser consciente. Anderson (1990) preocupou-se em investigar como o conhecimento sobre o mundo leva ao sistema, como ele é representado, e como isto é armazenado e recuperado na memória de longo prazo, enfatizando que este tipo de conhecimento refere-se freqüentemente ao conhecimento declarativo, ou seja, o conhecimento sobre fatos e coisas (Angón e Pozo, 1998, p.142).

Na literatura, segundo Jong e Ferguson-Hessler (1996), no campo do ensino e aprendizagem, o conhecimento representa o papel de eixo, e a ele está atribuída uma ampla variedade de propriedades e qualidades que podem ser encontradas entre exemplos com os quais podemos nos deparar tais como, conhecimento concreto e abstrato, formal e informal, declarativo e proceduralizado, conceitual e de procedimento, elaborado e compilado, estruturado e não estruturado, implícito e inativo, estratégico, aquisição de conhecimento, situado, e metaconhecimento. E segundo esses autores, há vários estudos que se destacam nesta explosão de constructos e termos e que têm tentado estruturar o campo, abordando os vários aspectos do conhecimento de uma perspectiva cognitiva geral, mas os exemplos mais conhecidos são os de conhecimento declarativo e de procedimento.

No âmbito da representação do conhecimento declarativo, Sternberg (2000) enfatizou inicialmente que o conceito é a unidade fundamental do conhecimento simbólico, ou seja, a idéia sobre algo, sendo que um único conceito pode ser captado por uma única palavra, estando conseqüentemente relacionado com outros conceitos.

Dessa forma, os conceitos podem ser organizados na forma de *esquemas* que são estruturas mentais para representar o conhecimento, e que podem ocorrer em *redes semânticas* e são inter-relacionados em uma estrutura organizada significativamente abrangendo uma série de conceitos (p. 185).

Segundo o autor, um modelo alternativo para representar o conhecimento declarativo são as *redes semânticas*, pois estão relacionadas ao significado, isto é, conforme é expresso na linguagem, ou seja, em símbolos lingüísticos. As *redes semânticas* são um conjunto de elementos interconectados, sendo que esses elementos são denominados de *nós*. As conexões entre os *nós* são relações classificadas, que podem envolver a qualidade de membro de uma categoria, os atributos ou alguma outra relação semântica. As relações classificadas formam vínculos na memória, possibilitando ao indivíduo conectar os vários *nós* de uma forma significativa (p. 187).

Anderson (1990) definiu que o conhecimento de procedimento refere-se ao conhecimento sobre como desempenhamos diversas atividades cognitivas, e que esse conhecimento tem uma organização de solução de problemas, pois todas as atividades cognitivas estão essencialmente na natureza da solução de problemas.

Sternberg (2000, p.184) corroborou a definição apresentada por Anderson (1990), enfatizando que é o conhecimento *sobre como seguir vários passos de procedimento para desempenhar as ações*, ou seja, *"saber como"*, tal como nosso conhecimento de como andar de bicicleta, como assinar o nome, como dirigir o carro, etc. Tudo isso depende da representação mental que temos do conhecimento de procedimento, e que interage com o conhecimento declarativo. Mas de acordo com Anderson (1983), o conhecimento de procedimento nem sempre é possível ser verbalizado, pois ele é adquirido com mais eficácia através da ação e executa-se, com freqüência, de forma automática sem que tenhamos consciência disso, e, de acordo com esse autor, a função dos procedimentos é justamente automatizar conhecimentos, convertendo o conhecimento declarativo em procedimentos automatizados que, de outra forma, seriam difíceis e complexos de colocar em ação (Angón e Pozo, 1998, p. 142).

Porém, Angón e Pozo (1998) atentam para o fato de que, apesar de em muitas situações os procedimentos serem uma seqüência de ações automatizadas, algumas vezes podem não ocorrer dessa maneira, pois existem procedimentos que só podem se realizados de modo consciente e deliberado, citando ainda como exemplo as estratégias de solução de problemas que são

procedimentos manipulados intencionalmente e deliberadamente em uma atividade, e que não podem ser reduzidos somente a ações automatizadas, como por exemplo, na formulação e comprovação de hipóteses (p. 142).

Sternberg (2000) ressaltou que alguns dos modelos clássicos para representar o conhecimento de procedimentos originaram-se das pesquisas a respeito da IA (Inteligência Artificial)[1] e de simulação computadorizada, que seguem as regras de produção "se-então"[2], através das quais os pesquisadores buscam obter que os computadores desempenhem as tarefas de maneira inteligente, particularmente em maneiras que simulem o desempenho inteligente dos humanos. *A* implicação disto originou uma variedade de modelos desenvolvidos pelos psicólogos cognitivos sobre como as informações são representadas e tratadas na mente, sendo que cada um desses modelos envolve o *tratamento em série* da informação, manipulada por meio de uma seqüência linear de operações (p. 189). As regras de produção são organizadas em uma estrutura de *rotinas* (instruções para desempenhar uma tarefa) e *sub-rotinas* (instruções para execução de uma subtarefa dentro de uma tarefa mais ampla, dirigida por uma rotina).

Neumann (1995), baseado na teoria de Anderson (1981, 1990, 1992), afirmou que durante o desenvolvimento das habilidades cognitivas, a forma de representação do conhecimento passa por três estágios:

1) Estágio declarativo: onde todos os conhecimentos novos são codificados de forma declarativa, sendo que ele não está associado a qualquer tipo de procedimento, podendo ser aplicado em uma ampla variedade de situações. O conhecimento representado dessa maneira toma a forma de princípios e fatos que são indispensáveis para resolução de problemas. Como por exemplo, alguns conhecimentos declarativos requeridos na solução de problemas algébricos tais como os que seguem abaixo:

---

[1] A tentativa humana para construir sistemas que mostrem a inteligência e, particularmente, o tratamento inteligente da informação (em Sternberg, 2000, p. 31, Merriam-Webster's Collegiate Dictionary, 10. ed., 1993)

[2] A cláusula "se" é um conjunto de condições que devem ser atendidas a fim de efetuar as séries de ações requeridas para chegar à cláusula "então" (Sternberg, 2000, p. 189)

Referindo-se aos conceitos de: equação, termos da equação, termos semelhantes, números, operações, etc.

"Em uma equação, a igualdade se mantém ao somar um mesmo número a ambos os termos da igualdade" (Princípio).

2) Estágio da compilação do conhecimento: neste estágio a aplicação do conhecimento passa por uma aplicação interpretativa a uma aplicação direta, transformando os fatos declarativos em produções. No processo de elaboração de procedimento, o conhecimento declarativo se traduz em pequenas regras ou conhecimento aplicativo, onde são então geradas as produções.

Exemplo: P1 – "SE se quiser reduzir termos semelhantes e há dois ou mais termos semelhantes com sinal positivo, ENTÃO some os termos semelhantes com sinal positivo e conserve o sinal positivo no resultado".

3) Estágio de aperfeiçoamento: neste estágio as produções são aperfeiçoadas através dos processos de generalização, de discriminação e de fortalecimento.

Generalização: onde uma ou mais produções são envolvidas em uma produção mais geral. Por exemplo:

P9 – "SE em uma equação quiser isolar-se a incógnita, e há alguns termos no lado da igualdade onde está a incógnita, ENTÃO pode-se 'isolar' os termos ao lado contrário trocando os sinais dos termos correspondentes.

Discriminação: quando ocorre uma nova condição que havia sido negligenciada, a discriminação é acrescentada para limitar a aplicação da produção. Por exemplo:

P8 – "SE se quiser reduzir os termos semelhantes e há vários termos semelhantes com distintos sinais no mesmo lado da igualdade, ENTÃO":

- Some os termos semelhantes positivos do mesmo lado da igualdade e conserve no resultado o sinal positivo.

- Some os termos semelhantes negativos do mesmo lado da igualdade e conserve no resultado o sinal negativo,
- Subtraia o termo menor do maior do mesmo lado da igualdade e mantenha no resultado o sinal do termo maior".

Fortalecimento: corresponde ao montante de ativação apresentado por uma produção, quando ela é ativada. E quanto mais um procedimento é ativado mais a produção, como um todo, será fortalecida.

A idéia central das diferenciações entre o conhecimento declarativo e de procedimento, segundo Anderson (1983), é que as pessoas dispõem de duas maneiras diferentes, mas nem sempre relacionadas de conhecer o mundo, pois de um lado sabemos dizer coisas sobre a realidade física e social, e por outro, sabemos fazer algo que afeta essa realidade (em Angón e Pozo, 1998, p. 141).

No caso da solução de problemas, fica evidente que os alunos às vezes têm conhecimentos conceituais e verbais, mas não são capazes de utilizá-los em uma atividade concreta. Por exemplo: podemos saber a conjugação dos verbos ingleses e as formas gramaticais, mas não sabemos produzir nenhuma frase. De acordo com esses autores, a diferenciação que Anderson (1983) estabeleceu entre esses dois conhecimentos nos possibilita determinar um significado psicológico exato com relação a essa divergência entre o que podemos dizer e fazer (Angón e Pozo, 1998).

Conforme os aspectos acima abordados por estes autores, na solução de problemas de áreas distintas do currículo escolar os estudantes se defrontam com diferentes problemas os quais requerem deles o domínio e a ativação de conhecimentos fatuais e conceituais específicos (conhecimento declarativo), bem como técnicas e estratégias (conhecimento de procedimento) que em diversas situações podem distinguir-se.

Solução de Problemas

A adoção da solução de problemas como atividade das diversas disciplinas que compõem a grade curricular é indicada, com o objetivo de possibilitar aos alunos o desenvolvimento de suas habilidades e estratégias para solucionar problemas, uma vez que, sem procedimentos adequados e eficazes, quer dizer, habilidades e estratégias, o aluno não será capaz de solucionar problemas. Pozo e Echeverría (1998), tratando do currículo espanhol, destacam o objetivo geral n ° 4 do *Diseño Curricular Base* (DCB - Projeto Curricular Básico) ao término da Educação Básica, o aluno deve ser capaz de *elaborar e desenvolver estratégias pessoais de identificação e solução de problemas nas principais áreas de conhecimento, através da utilização de alguns hábitos de raciocínio objetivo, sistemático e rigoroso, e que as aplique espontaneamente a situações da vida cotidiana* (p. 14).

De maneira semelhante, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999, p.28) também tratam das competências abordadas pelo *DCB*[3] enfatizando que o *currículo deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o aluno para a vida em sociedade, a atividade produtiva e experiências subjetivas*, proporcionando o desenvolvimento das capacidades básicas, entre as quais se destacam:

> *... a de abstração, do desenvolvimento do pensamento sistêmico, ao contrário da compreensão parcial e fragmentada dos fenômenos, da criatividade, da curiosidade, da capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema, ou seja, do desenvolvimento do pensamento divergente...*(p.24)

Nesta perspectiva, nos Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática (1998, p. 40), evidenciou-se a importância da solução de problemas como uma ferramenta que *possibilita ao estudante mobilizar conhecimentos e desenvolver a*

[3] Diseño Curricular Base (DCB - Projeto Curricular Básico)

capacidade para gerenciar informações que estão ao seu alcance, proporcionando, dessa forma, a oportunidade para expandir seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimentos matemáticos, e possibilitando também ampliar não só sua visão em relação aos problemas com os quais se deparam na Matemática, mas ainda no mundo em geral.

Entretanto, segundo os Parâmetros, a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva da resolução de problemas, quando acionada, surge como item isolado, cujo desenvolvimento é realizado paralelamente com a aprendizagem, através de seqüências de problemas cuja solução requer dos alunos somente escolhas de técnicas ou fórmulas de solução memorizadas, possivelmente pelo fato de ser interpretada equivocadamente, resumindo-se em mera atividade de aplicação ao final do estudo de um conteúdo matemático (1998, p. 22-23).

De acordo com Echevirría e Pozo (1998), a matemática constitui o campo mais tradicional do estudo da solução de problemas, e é nesta área que se realiza a maior parte das pesquisas e trabalhos sobre "solução de problemas".

E, segundo os autores, é desejável que, além de ensinar os estudantes a obterem um desenvolvimento de estratégias eficazes e habilidades para solucionar problemas, é necessário também proporcionar a eles o desenvolvimento do *hábito e da atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta,* ou seja, *o objetivo final da aprendizagem de solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender* (p. 14).

Os autores enfatizaram também que a solução de problemas, além de exigir procedimentos adequados e determinadas atitudes, pressupõe que o aluno compreenda os conteúdos fatuais e conceituais envolvidos na solução dos problemas, sendo que um procedimento é definido como *"um conjunto de ações organizadas para consecução de uma meta"* (DCB da ESO, p. 41-42, citado Echeverría e Pozo, 1998, p. 14).

Um outro aspecto abordado por esses autores está relacionado com a diferenciação entre problema e exercício. Segundo eles, um aluno está diante de

um problema quando se depara com uma situação a qual precisa solucionar, e não dispõe de uma forma rápida e direta para atingir a solução. Sendo assim, conforme os autores, um problema *é uma situação nova ou diferente do que foi aprendido, requerendo assim o emprego estratégico de técnicas conhecidas, e requer do aluno uma demanda cognitiva e motivacional maior do que na realização de exercícios* (p.16).

Portanto, quando não é possível recuperar rapidamente na memória uma resposta, o sujeito está frente a um problema (Sternberg, 2000). E quando se faz uso de procedimentos automáticos e estratégias imediatas, isto é, quando em determinadas situações não precisamos refletir para identificarmos a seqüência de passos a serem seguidos para solucionarmos a situação, está sendo executado um exercício.

Chi e Glaser (1992) definiram problema como uma situação na qual o sujeito tenta alcançar algum objetivo e deve encontrar um meio para conseguir chegar a este objetivo.

Na literatura, encontramos diversas classificações relacionadas a estruturas dos problemas, que podem variar tanto pela função e conteúdo da área à qual pertencem como do tipo de operações e processos exigidos para solucioná-los (Echeverría e Pozo, 1998, p. 20).

Assim sendo, temos que *problema bem definido* caracteriza-se pela facilidade com a qual podemos identificar facilmente se a solução foi alcançada, por exemplo, "Como você calcula a área de um paralelogramo?" (Sternberg, 2000, p. 309), e *problema mal definido* caracteriza-se pelas normas que são estabelecidas no problema das quais não podemos identificar claramente os passos necessários para a solução da tarefa, pois são apresentadas de maneira menos específica e menos clara, como por exemplo, "Como você amarra as duas cordas suspensas, quando nenhuma delas é suficientemente longa para permitir-lhe que alcance a outra corda, enquanto segura uma das cordas?" (Sternberg, 2000). Portanto, o problema é qualificado como *mal definido* se qualquer um ou todos os componentes não estiverem bem especificados (Chi e Glaser, 1992).

Os psicólogos cognitivistas sugeriram diversas maneiras para classificar os problemas. Greeno (1978) e Greeno e Simon (1988) indicaram quatro tipos de problemas, que são: 1) problemas de transformação, nos quais os participantes devem ter uma clara definição da situação presente (problema) e da situação final (solução), e então realizar uma série de operações para obter a solução; 2) problemas de organização, onde os participantes têm uma seleção de elementos e uma visão geral do objetivo, e devem manipular os elementos de tal modo que obtenham esse objetivo; 3) problemas de estrutura indutora, que envolvem *raciocínio indutivo*, isto é, inferência de princípios gerais a partir de exemplos específicos; e 4) problemas de avaliação de argumento dedutivos, que envolvem *raciocínio dedutivo*, isto é, a aplicação de premissas gerais em exemplos específicos (citado em Sternberg 2000, p. 309).

A maioria das definições que abordam os diferentes tipos de problemas baseia-se na característica da tarefa (Mayer, 1983), sendo que uma da mais comuns destas definições trata da distinção entre um problema bem definido ou estruturado e um problema mal definido ou mal estruturado, pois os psicólogos cognitivos classificaram os problemas da maneira como estes têm caminhos claros para uma solução ou não (Echeverría e Pozo 1998, p 20).

Segundo Echeverría e Pozo (1998), independentemente da classificação e estrutura de uma tarefa sendo ela bem ou mal definida, para solucionar-se um problema, não é necessário somente compreensão da tarefa, mas é necessário ainda executar uma seqüência de passos ou etapas para obter-se uma solução bem sucedida. Esses autores, em conformidade com Polya (1945), descreveram uma seqüência de passos semelhantes.

Os passos necessários para resolver um problema, segundo Polya (1945), são: 1) compreender o problema: ao fazer a leitura do problema, o estudante deve identificar palavras, linguagem e símbolos, assumindo uma disposição para buscar a solução; 2) conceber um plano: disponibilizar procedimentos úteis para obter a solução; 3) executar o plano: selecionar o procedimento mais útil e aplicá-lo; 4) verificar a solução: checar e interpretar a solução nos termos da situação dada no problema (*apud* Brito, 2001, p. 5).

Conforme Mayer (1992), a solução de problemas matemáticos pode ser dividida em dois passos fundamentais[4], que são: a representação do problema ou tradução, que constitui *a capacidade que o sujeito tem para traduzir cada proposição do problema em uma representação interna*, sendo para isso necessário que o solucionador tenha algum *conhecimento linguístico*, isto é, algum conhecimento de linguagem, e também *conhecimento factual*, que é a concepção do indivíduo sobre o mundo.

Segundo o autor, existem diferenças entre as representações dos problemas elaboradas pelos participantes, que possivelmente estão relacionadas com esses dois tipos de conhecimento.

O outro passo é a solução do problema, que envolve *a aplicação das operações legais da matemática à representação interna, a fim de se chegar a uma resposta final.* Sendo assim, tem-se que neste passo estão envolvidos tanto o desenvolvimento quanto o monitoramento do plano de solução, bem como a execução do plano de solução (p. 147).

Nesta perspectiva, Mayer (1992) também abordou outros possíveis tipos de conhecimento que podem ser importantes para a representação e solução de problemas, tais como o *conhecimento de esquema* que é requerido na etapa da integração do problema, o *conhecimento de estratégias* requerido durante a etapa do planejamento da solução e refere-se ao conhecimento sobre como desenvolver e monitorar um plano de solução, e o *conhecimento algorítmico*, que é necessário na etapa da execução da solução dos problemas e refere-se ao procedimento para a realização de uma operação planejada. Dessa forma, o autor definiu que a habilidade matemática refere-se ao conhecimento específico necessário para solucionar com sucesso as quatro etapas fundamentais da solução do problema mencionadas acima (p.149).

A figura abaixo apresenta a descrição desses passos relacionados ao processo de resolução de problemas segundo Mayer (1983), juntamente com os tipos de conhecimentos requeridos para solução de problemas.

---

[4] Conforme, Bobrow (1968); Hayes, (1981); Mayer, (1983); Wickekgren, (1974).

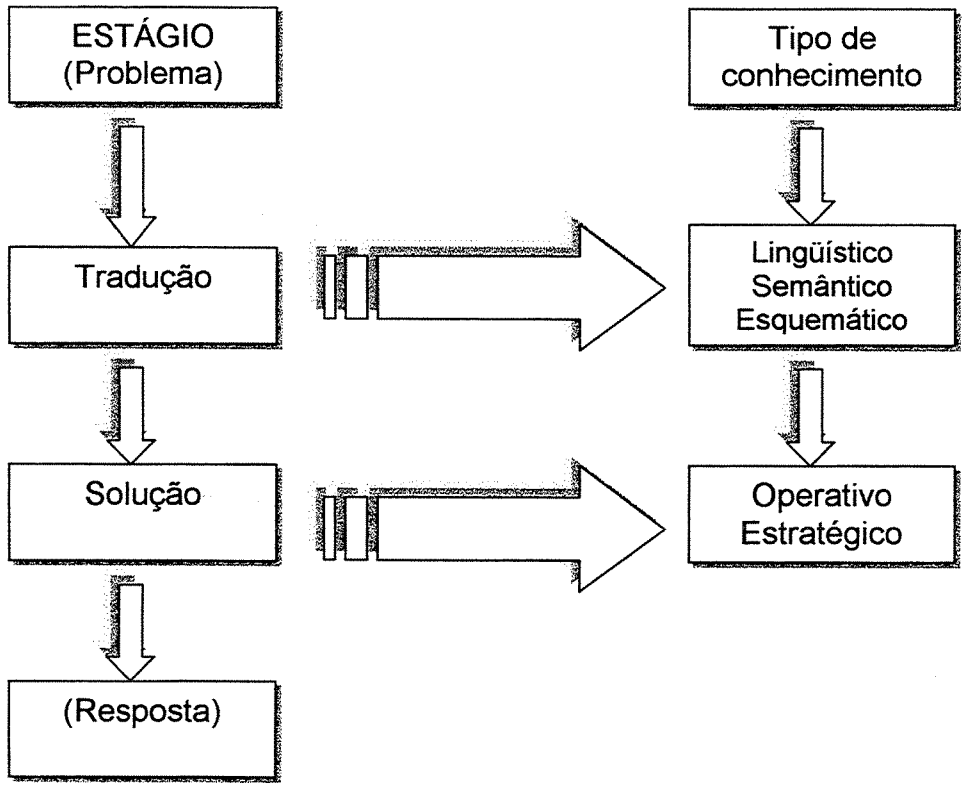


Figura 2: *Processo de resolução de um problema matemático, segundo Mayer* (1983, *apud* Echeverría e Pozo, 1998, p. 52).

A partir destes quatro passos, segundo esse autor, é possível analisar a capacidade para a solução de problemas de álgebra em palavras ou estórias. Para tanto, indicou alguns exemplos de como as pessoas podem diferir conforme o conhecimento que trazem para a tarefa matemática quando a solucionam. Segue abaixo os passos principais[5] que são: tradução, integração, planejamento e execução (p.166-167).

1- No passo de tradução, as pessoas podem diferir em suas capacidades para a compreensão das expressões lingüísticas tais como as proposições de relacionamento.

[5] Esses passos são semelhantes aos quatro passos estabelecidos por Polya (1945) e Echevirría e Pozo (1998).

2- Na fase de integração, as pessoas podem diferir nos detalhes de seu conhecimento de diferentes tipos de problemas em formato de estória e palavras.

3- Na fase de planejamento, as pessoas podem diferir nas estratégias gerais de solução de problemas.

4- Na fase de execução, as pessoas podem diferir na sofisticação, correção e automatismo de seus algoritmos para as operações básicas, tais como adição e subtração.

Sternberg (2000) afirmou que *nos empenhamos na resolução de problemas, quando precisamos superar obstáculos, a fim de responder a uma pergunta ou alcançar um objetivo.* Este autor descreveu os passos necessários para solucionarmos um problema e demonstrou as etapas que constituem um 'ciclo de resolução de problemas' (de acordo com Bransford e Stein, 1983; Hayes, 1989 e Sternberg, 1986), como o esquema abaixo demonstra:

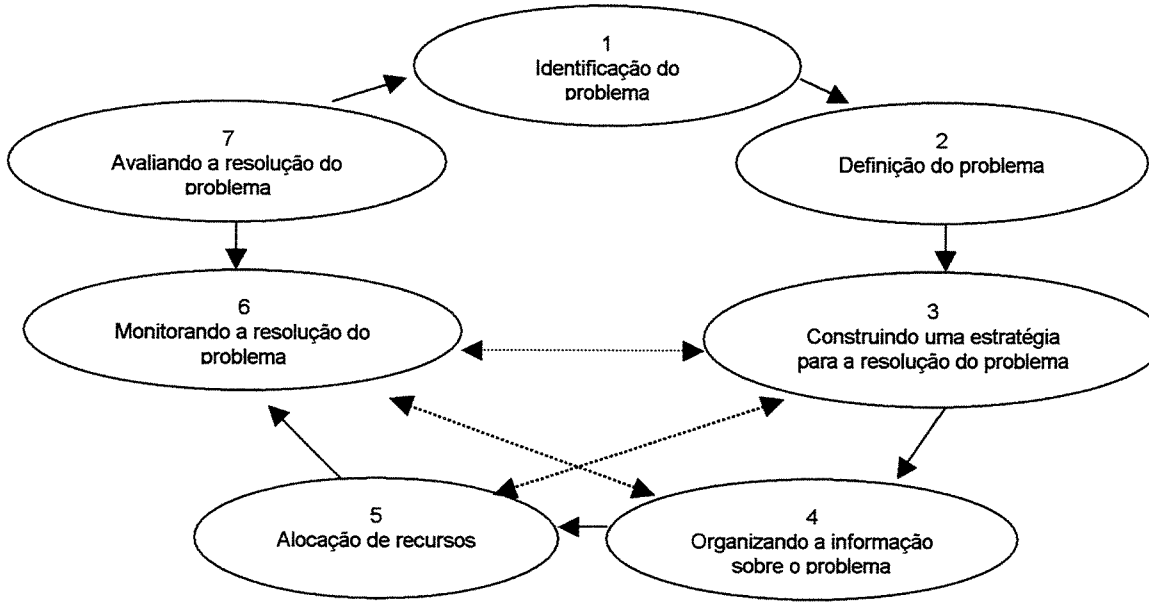


Figura 3: Ciclo de Resolução de Problemas (em Sternberg, 2000, Fig. 11.2, p. 307).

O autor ressaltou que é essencial haver uma flexibilidade no seguimento das várias etapas deste ciclo, e para obter uma resolução de problemas bem-sucedida é necessário tanto *tolerar alguma ambigüidade quanto a como prosseguir melhor*. Dessa forma, pode-se tanto avançar quanto recuar ao longo das etapas, alterando a ordem delas ou mesmo omitindo ou adicionando mais etapas, quando eventualmente for necessário e apropriado.

A primeira etapa deste ciclo refere-se à *identificação do problema*, onde é necessária a identificação da questão a ser tratada reconhecendo o objetivo do problema. A segunda etapa, *definição e representação do problema*, é necessária para definir e representar de forma satisfatória tais problemas, bem como compreender a forma como se pode solucioná-lo.

A terceira etapa, *formulação estratégica*, requer o planejamento de uma estratégia para o problema, a qual pode envolver a *análise*[6]. Sendo assim, durante a definição da estratégia poderá também estar envolvido o processo complementar de *síntese* - reunião de vários elementos para organizá-los em algo útil.

Há um outro conjugado de estratégias complementares que envolvem o *pensamento divergente* e o *convergente*. No *pensamento divergente*, busca-se desenvolver um agrupamento diferente das possíveis soluções alternativas para um problema e, após a ponderação de várias possibilidades, o solucionador deve então se empenhar em um *pensamento convergente*, limitando as múltiplas possibilidades, até convergirem numa única e melhor solução.

O quarto passo deste ciclo é a *organização da informação* onde, após a formulação de uma estratégia, deve-se organizar a informação disponível, de uma forma que seja capaz de executar a estratégia. O quinto passo, a *alocação de recursos*, é necessário para alocarmos os recursos disponíveis da melhor maneira possível. Segundo o autor, ao deparar-se com problemas, pode-se encontrar algumas limitações, como por exemplo, tempo, equipamento, entre outras. No sexto passo, da *monitoração* é necessário um dispêndio de tempo para monitorarmos o processo de solução de problemas. A sétima e última etapa, da

[6] A decomposição da totalidade de um problema complexo em elementos manuseáveis.

avaliação, é tão necessária quanto à da monitoração da solução, tendo em vista a importância da avaliação da solução após a sua conclusão (p. 306-309).

A solução de problemas é também abordada por diversos pesquisadores como uma atividade cognitiva, dentre eles Chi e Glaser (1992) consideraram a solução de problemas uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes. Com relação a isso, afirmaram que:

> *... desde a infância somos chamados a solucionarmos problemas que o mundo nos apresenta. Adquirimos informações sobre o mundo e as organizamos em estruturas de conhecimento sobre objetos, eventos, pessoas e nós mesmos, que são armazenadas em nossas memórias. Essas estruturas de conhecimento compreendem corpos de entendimento, modelos mentais, convicções e crenças que influenciam o modo como conectamos nossas experiências e o modo como solucionamos os problemas com os quais nos confrontamos na vida cotidiana, na escola, em nosso emprego e nos momentos de lazer (p.250).*

Segundo Chi e Glaser (1992), a natureza da tarefa e o tipo de conhecimento trazido para o problema, pelo solucionador, são os dois fatores que influenciam a solução de problemas, sendo que, de alguma maneira, esse conhecimento determina a representação e conduz a recordação dos procedimentos adequados para a solução do problema. Ainda segundo eles, os estudos relacionados com a solução de problemas que requerem um alto nível de conhecimento em um certo campo indicam que o sucesso na solução de problemas é determinado pela *capacidade para acessar um amplo campo de conhecimento bem estruturado do campo de conhecimento do problema*, e salientaram ainda a importância das explorações e pesquisas atuais sobre *como um amplo campo de conhecimentos é organizado e representado, de modo que*

pode ser acessado facilmente para que a solução dos problemas seja bem sucedida (Chi e Glaser, 1992, p.271).

Nesta perspectiva, Neumann (1995) ressaltou a necessidade dos participantes escolherem, para solução de um problema, um conjunto de componentes satisfatórios, ainda que na solução de um mesmo problema seja possível selecionar diferentes conjuntos de componentes. O autor salientou ainda que a escolha inadequada pode derivar uma resposta errônea ou um procedimento ineficaz.

No que se refere à capacidade para solucionar problemas matemáticos, Mayer (1992) afirmou que algumas pessoas, quando se deparam com um problema matemático, são capazes de obter uma resposta correta, mas outras não conseguem alcançar a solução adequada, e discriminou duas abordagens básicas para o problema da capacidade para matemática: a) a abordagem psicométrica, que define a capacidade para matemática como *"o que os testes de matemática medem"*, sendo assim, a capacidade para matemática é a capacidade do indivíduo obter um bom desempenho nos referidos testes; e b) a abordagem do processamento de informação baseia-se na análise da tarefa, sendo que qualquer tipo de problema matemático pode ser dividido em componentes de processamento de informação, isto é, em operações mentais simples, habilidades e conhecimento que são requeridos na solução do problema (Sternberg, *apud* Mayer, 1992).

Ainda segundo este autor, a capacidade para matemática é definida *como todas as operações cognitivas, habilidades e conhecimento dos componentes das tarefas matemáticas*, e as razões para o estudo da capacidade matemática envolvem tanto aspectos práticos quanto teóricos. Os aspectos práticos podem trazer implicações diretas para o ensino desta disciplina em sala de aula, e os aspectos teóricos *têm implicações para questões da cognição humana em geral possibilitando uma compreensão sobre a solução de problemas em um domínio específico*. Sendo assim, a abordagem do processamento de informação, relacionada ao problema de definição de tal capacidade, supera algumas das dificuldades da abordagem psicométrica (Mayer, 1992, p. 146-147).

Anderson e Lovett (1996) destacaram que existem dois enfoques de pesquisa relacionados com a questão sobre o entendimento de como as pessoas solucionam problemas.

Um deles aborda como os solucionadores processam as informações atuais, e o outro enfatiza como os solucionadores dependem de suas experiências passadas para solução de problemas. E ressaltaram que a pesquisa que aborda a informação corrente mostrou que *as seleções de operadores feitas pelos solucionadores de problemas são fortemente influenciadas pelas características do problema que eles estão habitualmente solucionando* (p. 169).

Com relação à capacidade para solucionar problemas em álgebra, segundo Sternberg (1992), o que difere um excelente solucionador de outro menos capacitado não é o uso de heurísticas mais poderosas ou diferentes, mas sim uma capacidade para escolher o melhor caminho para a solução sem fazer tentativas anteriores com outros (Utsumi, 2000).

Pensamento Algébrico

A álgebra elementar, tradicionalmente, tem sido associada com símbolos literais e com as operações que podem ser realizadas ao manipularmos tais símbolos (Kieran, 1996).

Contudo, ao analisar em seu estudo algumas novas perspectivas constatou que, possivelmente, a álgebra hoje não se resume meramente em atribuir significados para os símbolos literais, evidenciando então a existência de representações que estão além da definição tradicional da álgebra, e que conduzem para um nível mais elaborado de pensamento.

Segundo Kieran (1990), *alguns dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de álgebra encontram sua origem no desenvolvimento histórico da álgebra como um sistema simbólico* (p. 97).

A autora brevemente resumiu os três estágios da evolução pela qual a álgebra passou. Primeiramente, o estágio retórico ao qual pertenceu ao período anterior a Diophantus (ca. a.D. 250), e que se caracterizou pelo uso das

descrições da linguagem comum para a solução de tipos particulares de problemas, nos quais se necessitava da utilização de símbolos ou sinais especiais para representar "incógnitas (desconhecido)".

O segundo estágio, álgebra sincopada, desenvolvida a partir de Diophantus, introduziu o uso das abreviações para quantidades "desconhecidas" no final do século XVI. O terceiro estágio foi o da álgebra simbólica, ao qual se iniciou pelo uso das letras por Viète[7] para representar quantidades. Segundo Harper (1987), existem algumas evidências que apontam que os estudantes passam por estes mesmos estágios durante a evolução do seu próprio uso do simbolismo.

Existem duas concepções relacionadas com o ensino da álgebra (Kieran, 1990). A primeira marca o início do ensino da álgebra, quando são abordados conceitos algébricos como equações, funções, e a manipulação de expressões literais e equações. Já na segunda concepção, os estudantes são ensinados a extrair relações pertinentes de situações problemas e a expressar estas relações utilizando o simbolismo algébrico.

A autora enfatiza ainda que ambas concepções estão relacionadas com a continuidade e descontinuidade da álgebra com relação à aritmética, e que os estudantes transferem para o estudo da álgebra as suas concepções e competências de suas experiências em aritmética.

A aritmética e a álgebra partem dos mesmos símbolos e sinais, tais como sinal de igual, sinal da adição e da subtração. Entretanto, a interpretação que é feita para estes símbolos e sinais são diferentes em ambas.

Conforme Kieran (1990), há aspectos na álgebra que não representam uma continuação dos métodos e símbolos aprendidos no ensino da aritmética elementar (p. 98).

Ainda conforme a autora, existem alguns aspectos que favorecem a descontinuidade entre o ensino da aritmética e da álgebra, como por exemplo, a introdução das representações formais e métodos para solução de problemas que são manipulados intuitivamente.

---

[7] Françcois Viéta, matemático francês.

E ainda, na aritmética, os estudantes utilizam métodos informais que não se estendem para os problemas de álgebra ou para a representação de expressões algébricas. Dessa forma, a autora afirmou que os estudantes que estão iniciando seus estudos em álgebra experimentam dificuldades na representação formal dos métodos matemáticos porque, no ensino elementar, eles não realizam explicitamente os procedimentos utilizados na solução de problemas aritméticos.

Segundo Booth (1988, p.29),

> *... a álgebra não está separada da aritmética; na verdade, ela é, em muitos aspectos, 'aritmética generalizada'. E aí se encontra a fonte de outras dificuldades. Compreender a generalização de relações e procedimentos aritméticos exige que estas relações e procedimentos tenham sido apreendidos dentro do contexto aritmético. Se eles não são identificados, ou se os alunos têm falsas concepções a respeito deles, isto pode afetar muito a performance deles no estudo da álgebra* (*apud* Oliveira, 2002, p.37).

Lins e Gimenez (1997, p. 137) acreditam que não necessariamente a aritmética deva preceder a álgebra, desde que o desenvolvimento de ambas esteja mutuamente ancorado. Segundo os autores, isto sugere que não apenas a aprendizagem de uma beneficia a outra, mas que também uma depende da outra, pois *a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade.* Dessa forma, é necessário, segundo eles, entender de que maneira a álgebra e a aritmética se ligam, e ainda, o que elas têm em comum, para possibilitar-nos pensar a educação aritmética e algébrica de forma única.

Kieran (1996) interpretou pensamento algébrico como um domínio amplo de representações no qual, às vezes, inclui-se a letra simbólica, evidenciando que

o pensamento algébrico é uma visão ampliada da álgebra, distinguindo-a da visão tradicional da álgebra elementar.

Por fim, definiu que se pode interpretar o pensar algebricamente como a utilização de uma multiplicidade qualquer de representações para manipular-se situações em âmbitos relacionados (p.275).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998) também corroboram os mesmos aspectos abordados por Kieran em relação à álgebra e ao pensamento algébrico, enfatizando a necessidade de que para se adotar decisões a respeito do ensino desta área da Matemática, tem-se que ter em mente claramente o seu papel no currículo escolar.

Ainda segundo tal documento, destaca-se a importância da necessidade dos professores proporem aos estudantes situações que possibilitem aos mesmos construírem suas noções algébricas através da observação da formação de tabelas e gráficos, identificando assim as relações envolvidas em tal, e não apenas desenvolver o ensino da álgebra ressaltando somente as manipulações de expressões algébricas e equações de forma simplesmente mecânica, sem permitir aos estudantes o entendimento dos conceitos envolvidos nessas atividades.

Revelam ainda os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que, para tornar mais significativa a aprendizagem dos conceitos algébricos, é necessário que o ensino destes conceitos esteja engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra, não privilegiando somente o estudo do cálculo algébrico em expressões e equações, mas também o ensino desses conceitos interligando as quatro dimensões da álgebra, ao longo do ensino fundamental. Como demonstra o quadro a seguir:

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funcões	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimen – tos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Figura 4: Quadro que sintetiza as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras (PCN, 1998, p. 116).

Dessa forma, o ensino da álgebra articulado com os conceitos aritméticos a partir dos ciclos iniciais, bem como a apresentação de múltiplas situações envolvendo os conceitos algébricos de modo informal, por conseguinte, permitirá aos estudantes um desenvolvimento significativo da habilidade para pensar abstratamente, e proporcionará ainda o desenvolvimento da capacidade para generalizar os conceitos (PCN, 1998, p.117).

CAPÍTULO II

Revisão Bibliográfica

O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e resolvê-los como forma de aprender.

Juan Ignácio Pozzo

A revisão da literatura enfatizou os estudos que abordam a influência do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento, presentes em situações nas quais os participantes se encontravam envolvidos em atividades algébricas, especificamente, equações do 1º grau, expressões e problemas que permitiam solução utilizando os conceitos algébricos. Além disso, foram considerados também os estudos que envolviam a influência dos fatores afetivos, por exemplo, a ansiedade que aparece durante a solução de problemas com conceitos algébricos.

Loos (1998) investigou as relações entre os aspectos cognitivos, conceituais e didáticos, e também os aspectos afetivos e motivacionais relacionados à Matemática, especificamente da álgebra. Este estudo teve como participantes 77 estudantes de sexta e sétima séries, tendo utilizado diferentes procedimentos metodológicos. Através das análises feitas, observou-se o predomínio entre os alunos de sexta série de uma predisposição negativa em relação à matemática, considerando-se menos capazes de solucionar os problemas propostos por esta disciplina, sendo que esta visão da matemática estaria associada a diversas dificuldades conceituais e operacionais no uso da

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

álgebra. Foram verificadas relações entre ansiedade e desempenho em matemática, e observou-se que o excesso de ansiedade, ou a falta de um controle adequado desta, tende a 'bloquear' o indivíduo quando está solucionando alguma tarefa, favorecendo, assim, o aparecimento de dificuldades para solucioná-la.

Utsumi (2000) investigou se as atitudes em relação à Matemática estavam relacionadas às variáveis gênero, série e desempenho, tendo como participantes, na primeira etapa do estudo, 256 alunos de 6ª, 7ª e 8ª séries do ensino fundamental. A partir dos resultados obtidos em um teste matemático, elaborado com objetivo de avaliar o desempenho dos alunos em cada série, foram selecionados os participantes com o melhor desempenho. Estes, posteriormente, foram submetidos a testes algébricos onde eram solicitados a solucionar problemas "pensando em voz alta". O estudo tinha a finalidade de investigar vários componentes da habilidade matemática (propostos por Krutetskii, 1976), como percepção, generalização, flexibilidade de pensamento, reversibilidade dos processos mentais, encurtamento do raciocínio, compreensão, raciocínio e lógica, memória matemática e tipo de habilidade matemática. A análise dos protocolos dos participantes considerados mostrou que, mesmo aqueles considerados mais capazes, não conseguiam solucionar os problemas propostos. Os resultados mostraram que os alunos tinham dificuldades nos estágios de processamento e retenção da informação durante a solução de problemas algébricos. Através da análise dos dados, a autora verificou que as atitudes em relação à Matemática estavam relacionadas à série e ao desempenho.

Além do estudo sobre as influências das variáveis afetivas relacionadas à aprendizagem da Matemática, os trabalhos que têm sido desenvolvidos no grupo de pesquisa Psicologia da Educação Matemática, enfocam também os fatores cognitivos relacionados à solução de problemas nesta área, tais como os estudos de Oliveira (1998), Spalleta (1998), Araújo (1999), Alves (1999), Pirola (2000), Silva (2001), Viana (2000).

Um outro tema que tem sido recorrente nas pesquisas realizadas no Brasil que se refere às dificuldades encontradas pelos alunos em conceitos algébricos, é a passagem da aritmética para a álgebra. Tal aspecto pesquisado busca analisar

se as dificuldades com tais conceitos que surgem nas séries mais avançadas são adquiridas nesta transição. Além deste aspecto, há estudos ainda no Brasil como o de Lins e Gimenez (1997), Brito Lima e Falcão (1998) que propõe a introdução do ensino dos conceitos algébricos desde as séries iniciais ocorrendo simultaneamente com os conceitos aritméticos, visando dessa forma diminuir os fatores, tanto os cognitivos como os afetivos, que influenciam o surgimento das dificuldades relacionadas a esses conceitos.

Brito Lima e Falcão (1998) realizaram um estudo buscando investigar a solução de 12 problemas algébricos com enredo, tendo como participantes 72 alunos do ensino fundamental. Através da análise dos protocolos, foi verificado que os problemas com estrutura mais simples, eram solucionados, quase sempre através de procedimento aritmético. Nos problemas em que a composição era mais complexa era preciso uma representação precedente para ser solucionado. Enquanto os alunos das séries iniciais necessitavam do auxílio do examinador para solucionar os problemas, os alunos da sexta série representaram de forma mais sistemática as informações de problemas como equações. Os dados evidenciaram que o desempenho dos estudantes, das séries iniciais, variava de acordo com a ajuda ou não do examinador e dessa forma, os autores concluíram que é possível trabalhar no campo conceitual da álgebra bem mais cedo do que o proposto pelo currículo escolar de Matemática.

Um outro fator relacionado com o processo de ensino-aprendizagem de álgebra é a aprendizagem inadequada da aritmética, pois existem estudos tanto no Brasil como também em outros países que enfatizam que o conhecimento aritmético inadequado leva a dificuldades na aprendizagem de álgebra conforme Wong (1997) apontou em seu estudo realizado em Hong Kong. Nessa mesma direção, Kieran (1990) ressaltou que a articulação no ensino da aritmética e da álgebra tem sido documentada em várias investigações. Esse fato pode estar relacionado com as dificuldades apresentadas pelos estudantes na transição da aritmética para a álgebra. Segundo a autora, as várias dificuldades para aprender álgebra são encontradas não só em estudantes que estão iniciando a pré-álgebra, mas também em estudantes de séries mais avançadas. Considerando tal fato, no

presente estudo considera-se de extrema importância também averiguar se as dificuldades apresentadas pelos estudantes decorrem de uma aprendizagem inadequada em aritmética.

Vermeulen, Olivier e Human (1996) da Universidade de Stellenbosch realizaram um breve estudo comparativo do papel da propriedade distributiva no cálculo aritmético e na manipulação algébrica. Formularam um modelo descrevendo os diferentes níveis de conhecimento da propriedade distribuitiva. Este estudo partiu da mesma suposição de Booth (1989) sobre a importância do entendimento da estrutura numérica como um pré-requisito para o entendimento da estrutura algébrica. Esta investigação foi motivada pelos resultados adquiridos em estudos anteriores, e baseados nas próprias observações e estruturas teóricas, os autores delinearam um modelo para os níveis de conhecimento da propriedade distributiva:

Nível 1: A utilização espontânea da propriedade distributiva.

Nível 2: O reconhecimento da propriedade distributiva.

Nível 3: A utilização intencional da propriedade.

Nível 4: A generalização da propriedade.

Nível 5: A explicação da propriedade.

Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay, Wilss e Mutch (1997) identificaram, através da análise da literatura, a existência de uma lacuna na transição da aritmética para álgebra, sendo necessário uma "pré-álgebra" para superar esta falha. A proposta do estudo realizado na Austrália foi discutir sobre como os estudantes compreendem as operações e variáveis relacionadas com a álgebra. Na primeira etapa do estudo, feita através de uma investigação longitudinal com 51 alunos do nível 7 (equivalente à sexta série do ensino fundamental), foram estudados desde o início da introdução da álgebra até sua conclusão - nível 9 (equivalente à oitava série do ensino fundamental). No modelo utilizado pelos autores, os componentes foram categorizados como aritmética binária, álgebra binária e aritmética complexa.

Focaram-se nas entrevistas já tidas inicialmente antes de qualquer outra instrução em álgebra, e relatou sobre o entendimento dos estudantes em:

igualdade e *regras operacionais,* e também sobre *variável.* Os dados foram obtidos através de uma entrevista clínica estruturada, onde foi apresentada aos alunos a mesma tarefa na mesma ordem. Os estudantes foram entrevistados durante aproximadamente 20 minutos, e as entrevistas registradas por meio de videotape. Segundo os autores, a seqüência de desenvolvimento para a amostra pareceu adaptar-se como o modelo sugerido. Isto significa que a álgebra complexa desenvolve-se a partir da aritmética binária, por meio da álgebra binária e da aritmética complexa. A pesquisa indicou várias dificuldades, dentre elas, um entendimento restrito a respeito de igualdade (por exemplo: $\frac{28}{7}$+20=60-36) que existia nos alunos da escola primária, e persistia nos níveis posteriores. E com relação aos componentes do modelo sugerido, evidenciou-se que os participantes mostraram algumas dificuldades em todos eles.

Além disso, quando se tratava da aritmética binária, o conhecimento dos alunos era na maioria satisfatório. E os participantes mostraram serem capazes de usar operações binárias (Ex: 8+5=13) em equações lineares (Ex: x+5=13). Entretanto, confirmou-se neste estudo que os alunos necessitavam de um entendimento melhor de divisão e de igualdades, e com relação à álgebra binária (2x, x+3), os alunos apresentaram dificuldades na multiplicação com números desconhecidos. Ainda, salientou que, em concordância com a literatura, qualquer aprendizagem inadequada em aritmética poderá causar dificuldades em álgebra (Boulton-Lewis, et al., 1997, pp. 89-95).

Cooper, Boulton-Lewis, Atweh, Pillay, Wilss e Mutch (1997, p. 191) em um outro estudo discutiram a transição da aritmética para álgebra de uma perspectiva cognitiva, e propuseram o modelo "Two Path Model" para a aprendizagem de álgebra. Os autores sugeriram que é necessário um "conhecimento pré-algébrico" entre a aritmética e a álgebra. Enfatizaram também que equações lineares em álgebra como, por exemplo, $2x + 3 = 11$ incluem três componentes decisivos, que são o sinal de igual, uma série de mais de uma operação, uma variável 'x', sendo que tais equações são descritas tão complexas quanto opostas para uma operação binária única, assim como $x + 5 = 6$. Propuseram também que a solução

de uma equação complexa é o produto final de uma seqüência de aprendizagem de conceitos matemáticos que incluem:

a) operações aritméticas binárias; (ex: 18 + 6 = 24 ; 51 x 38);

b) aritmética complexa; (ex: 12 + 27 x 39);

c) operações algébricas binárias (ex: 4x, x + 8).

Tais considerações, segundo os autores, subordinam a construção do modelo para aprendizagem de álgebra complexa, onde as operações aritméticas binárias e as operações aritméticas complexas são componentes necessários para um caminho, e as operações aritméticas binárias e as operações algébricas binárias são os componentes necessários para um segundo caminho. Ressaltaram também que o entendimento de operações binárias é um pré-requisito importante, assim como 2x e x+3 são necessários para poder entender 2x + 3 = 11, e o entendimento de regras operacionais devem também ser aplicadas para a série de operações. Este modelo assume que as aprendizagens de equações lineares serão facilitadas através do entendimento de estruturas similares (isomórfica) na aritmética complexa. Por esta razão, a compreensão da estrutura aritmética torna-se um importante fator na aprendizagem de álgebra (p. 187).

Cooper et al. (1997, 191) salientaram também que a maioria dos alunos parecia capaz de utilizar as operações binárias em equações lineares e interpretavam '=' (sinal que representa uma igualdade) como indicador de uma resposta. O estudo também apontou que os alunos necessitariam aprender o que significa a equivalência '=' numa equação (talvez com o uso de uma viga de equilíbrio).

Segundo Bianchini (1996), equação algébrica é *toda sentença aberta expressa por uma igualdade*. As equações podem diferir-se pelo grau, como por exemplo, 3x - 4 = 14, que é uma equação do 1º grau com uma variável, e ainda $x^2 - 5x + 6 = 0$, que é uma equação do 2º grau com uma variável.

Ainda segundo o autor, *expressões que possuem apenas letras ou números e letras, são chamadas expressões algébricas ou literais*. Como por exemplo, a área do triângulo que é representada pela expressão, $\frac{b.h}{2}$ (p. 21, 80).

A literatura nos mostra uma gama de estudos apontando a importância tanto do conhecimento declarativo quanto do conhecimento de procedimento para que aprendizagem de conceitos torne-se significativa, possibilitando assim que o estudante relacione os conceitos previamente aprendidos como outros que posteriormente necessitam aprender.

No Brasil existem vários estudos abordando tal aspecto, como o estudo de Pirola (2000) o qual ressaltou a importância do conhecimento de conceitos específicos utilizados na solução de problemas, sendo que este deve ser utilizado para ativar os esquemas adequados. O autor observou também uma deficiência por parte dos participantes quanto ao conhecimento declarativo e de procedimentos, envolvendo os conceitos de área, perímetro e volume. Segundo ele, esse fato pode ser observado, através do baixo desempenho dos participantes na utilização de conceitos e princípios para a solução de problemas e também, através das questões, que solicitavam seus conceitos.

Quintiliano e Brito (2003) buscaram investigar os fatores envolvidos nas dificuldades encontradas por alunos nas atividades algébricas, tais como equações e expressões, buscando uma relação entre esses fatores e o desempenho dos estudantes. Os participantes desta pesquisa foram 26 estudantes do 3° ano do ensino médio de uma escola pública de Bauru. Os instrumentos utilizados foram um questionário informativo tipo lápis e papel com perguntas sobre a vida escolar do estudante, e uma prova matemática, versando sobre conceitos algébricos. A análise dos protocolos evidenciou que a maioria dos estudantes encontrou dificuldades em solucionar as atividades propostas, sendo que nenhum estudante da série investigada conseguiu identificar a diferença entre uma equação e uma expressão algébrica, atividade solicitada na primeira questão do referido estudo. Foi possível detectar que, além da aparente confusão feita pelos alunos entre expressão algébrica e equações; já nos exercícios em que

eram apresentadas equações e expressões algébricas, a maioria dos participantes não conseguia solucioná-los. Foi observado também um alto índice de estudantes que deixaram várias questões em branco, notadamente os participantes com idade mais avançada para a série investigada, possivelmente pela falta do conhecimento declarativo relativo aos conceitos investigados.

Paulovich (1998) desenvolveu uma pesquisa sobre a formação de conceitos algébricos iniciais na sétima série do ensino fundamental, tendo como participantes 36 estudantes que eram solicitados frente a uma lista com 33 objetos matemáticos envolvendo expressões numéricas, igualdades numéricas, desigualdades numéricas, expressões algébricas, equações do 1° grau com uma incógnita, inequações do 1° grau com uma incógnita, equações do 1° grau com duas incógnitas e sistemas de duas equações com duas incógnitas. Foi solicitado aos estudantes que, baseados nos conceitos matemáticos que conheciam, formassem agrupamentos com os objetos apresentados, justificando a formação de cada agrupamento. Com base na teoria de Vygotsky (*apud* Paulovich, 1998), tais agrupamentos foram classificados nas categorias como, complexos, pseudoconceitos e conceitos[8]. A análise dos dados evidenciou que dos 188 agrupamentos formados pelos estudantes, 16 puderam ser considerados como baseados no pensamento conceitual, revelando um baixo emprego desse tipo de pensamento nas respostas, o que levou o autor a concluir que a baixa incidência de respostas dadas com base em conceitos devia-se ao fato da formação dos conceitos algébricos iniciais possuir deficiências. Isso ocorria, provavelmente, pelo fato de o professor privilegiar, em suas aulas, o ensino de técnicas de cálculo e algoritmos, deixando de lado a formação dos conceitos algébricos.

Em outros países como o estudo de Sackur e Drouhard (1997) em Nice o qual teve como sujeito uma estudante de 15 anos de idade, os pesquisadores buscaram saber como eram construídas algumas etapas do conhecimento que envolvia expressões e equações algébricas. Foram realizadas várias entrevistas com a estudante e a mesma solucionava problemas que envolviam a solução de

[8] Complexos – Neste agrupamento, o tipo de pensamento empregado pelo aluno revela que, ao agrupar os objetos, ele não faz uso do pensamento conceitual preferindo traços concretos presentes nos mesmos. Pseudoconceito – é um pensamento empregado pelo aluno ao formar um agrupamento onde os objetos componentes, fenotipicamente, assemelham-se a um conceito, porém a justificativa apresentada revela que o pensamento utilizado não foi conceitual (Paulovich, 1998, p.79-80).

expressões e equações. A análise do protocolo das entrevistas realizadas mostrou que ela aprendia uma classificação de regras não relacionadas e, algumas vezes, não percebia a existência de um princípio subjacente, ou seja, a estudante realizava as manipulações necessárias, porém não identificava o conceito relacionado aos procedimentos que eram utilizados durante a execução das soluções das equações e expressões propostas pelo estudo.

Panizza, Sadovsky e Sessa (1997) analisaram a concepção dos estudantes do ensino secundário, buscando observar se a aprendizagem de equações com somente uma variável influencia a compreensão de equação linear com duas variáveis. Inicialmente era proposto um problema com enredo, onde era fornecido o preço de dois diferentes tipos de objetos. A relação entre eles era representada por uma equação linear com duas variáveis e os estudantes eram solicitados a encontrar os possíveis valores para estes preços. No segundo problema, os alunos foram solicitados a solucionar um sistema com duas equações lineares, e verificar quais relações eram estabelecidas entre as soluções dos sistemas e as soluções da equação. Através das entrevistas realizadas com os estudantes foi verificado que o conceito de equação com duas variáveis parecia não ter sido entendido pelos participantes mesmo aqueles que já haviam trabalhado com esse tipo de equação. Provavelmente, isto estava relacionado com os tipos de problemas solucionados pelos alunos em sala de aula, que são quase sempre modelados dentro de sistemas de equações com única solução.

Essas dificuldades com os conceitos de álgebra também são encontradas em alunos do curso superior, como mostra um estudo feito por Ursini e Trigueros (1997) sobre o entendimento dos diferentes usos das variáveis. Os participantes foram 164 universitários de um curso de Matemática. Foi apresentada aos estudantes uma decomposição dos conceitos de variável utilizados para esboçar um questionário com 65 itens. A análise qualitativa e quantitativa das respostas dos participantes sugeriu que eles tinham grandes dificuldades para lidar com diferentes usos da variável, incógnita, noção de número e variáveis em uma relação funcional. Os resultados deste estudo confirmaram que aprender e entender o conceito de variável é um processo lento e difícil para os estudantes,

mesmo quando a maioria deles é capaz de reconhecer o papel das variáveis na solução dos problemas com expressões mais simples. Se houver um pequeno aumento na complexidade do problema, isto pode levar o aluno a fazer generalizações inadequadas, buscando alcançar a solução através de tentativa e erro.

Rittle-Johnson, Siegler e Alibali (2001) das Universidades de Carnegie Mellon e Wisconsin, através de um modelo interativo para o desenvolvimento do conhecimento de procedimentos e conceitual, examinaram as sólidas ligações entre esses dois conhecimentos. Neste estudo, dois experimentos foram conduzidos com estudantes da quarta e quinta séries do ensino fundamental, a respeito da aprendizagem sobre fração decimal. Os autores enfatizaram que há discussões em torno da precedência do desenvolvimento desses dois tipos de conhecimento, e em contraste com as pesquisas do passado propõem que tanto do conhecimento de procedimento como o conceitual são influenciados mutuamente e desenvolvem-se interativamente.

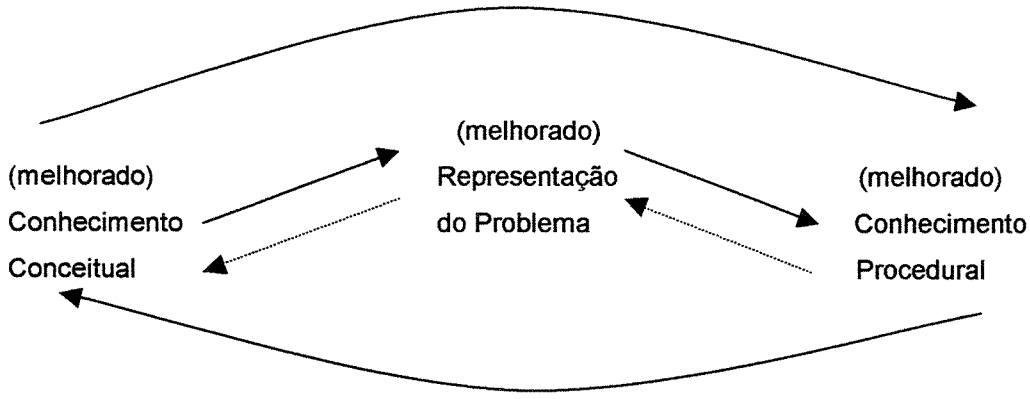


Figura 5: Modelo iterativo para o desenvolvimento do conhecimento conceitual e do conhecimento de procedimento (Rittle-Johnson, Siegler e Alibali, p. 347). Copyright©2001 by the American Psychological Association. Reproduzido e traduzido com permissão da American Psychological Association -APA.

O modelo interativo demonstrado pela Figura 5 indica como talvez ocorra o processo de desenvolvimento dos dois tipos de conhecimento. Os autores destacaram ainda que o conhecimento de um tipo particular é muitas vezes incompleto, e uma variedade de experiências, assim como a solução de problemas, a observação das atividades de outras pessoas, a instrução verbal direta e a reflexão, talvez promovam uma mudança no conhecimento. Além disso, enfatizaram que o entendimento conceitual e a destreza de procedimentos são dois tipos de conhecimento considerados essenciais aos estudantes, e que a capacidade no campo da matemática se apóia sobre o desenvolvimento dos estudantes e a ligação de seu conhecimento a respeito dos conceitos e dos procedimentos (Silver, 1986).

E com relação às dificuldades encontradas por alunos na solução de expressões algébricas, Wong (1997, p. 289) propôs em seu estudo a descrição de algumas situações onde os estudantes encontravam mais dificuldades, na aplicação do mesmo conhecimento de procedimento, durante a manipulação de expressões algébricas envolvendo números, e tentou explicar tais diferenças. O estudo foi conduzido em uma escola de nível secundário de Hong Kong. Os participantes foram 156 estudantes do nível secundário 4 (equivalente ao nível 10 em alguns países e, no Brasil, correspondente ao 1º ano do ensino médio), que foram testados no início do ano acadêmico, e 7 estudantes foram selecionados para entrevista individual subseqüente, por 6 vezes. Posteriormente, 2 estudantes do nível secundário 2 (correspondente ao nível 8, e no Brasil à sétima série do ensino fundamental) foram submetidos a um estudo de caso. Em seu trabalho, apontou que alguns alunos conseguem manipular expressões algébricas com letras, mas não com números; isso pode indicar que eles não conseguem ativar na estrutura cognitiva os elementos apropriados da informação na mente. Apontou também que o conhecimento das operações sobre letras pode ser isolado do conhecimento de operações sobre números, e talvez ambos sejam percebidos como objetos matemáticos distintos.

Destacou ainda que, embora as letras não sejam utilizadas na aritmética, os números são comumente usados nas expressões algébricas. Segundo a

autora, alguns cientistas consideram a importância do nível de intensidade entre as conexões dos itens de informação em situações de aprendizagem. A autora concluiu que *as expressões envolvendo números se tornam mais ou menos difíceis, dependendo dos tipos de expressões e de como é o conhecimento algébrico individual dos alunos.*

Enfatizou também que, algumas vezes, o conhecimento de procedimento envolvido pode ser diferente devido à presença dos números com letras, como por exemplo: $a(b+c) = ab + ac \neq a(3+4) = a(7) = 7a$. E, em outros casos, os procedimentos são iguais, $a^2 . a^3 = a^{2+3} = a^5$; $4^2 . 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$.

Neste contexto, Stacey e MacGregor (1997, p. 190) da Universidade de Melbourne afirmaram que no início da aprendizagem dos conceitos algébricos os estudantes são ensinados a utilizar as letras para representar valores desconhecidos específicos, ou uma série de valores possíveis de variáveis. Entretanto, alguns alunos são bem sucedidos durante aprendizagem, enquanto outros não.

Assim, no estudo realizado nesse mesmo ano, as autoras tentaram mostrar se a interpretação de *"x"* tendo valores relacionados a múltiplos ou mutáveis está evidente no pensamento dos estudantes, e como o significado impreciso e variado para "o desconhecido" compromete o raciocínio desses estudantes quando eles trabalham sobre problemas.

Participaram de tal estudo 900 estudantes australianos de 10 escolas. Todos eles tinham idade entre 13 e 15 anos, e a maior parte deles estavam no 3° ou 4° ano de aprendizagem em álgebra. Foram utilizados para coleta de dados um grupo de problemas escritos, freqüentemente usados no início do ensino de álgebra (como por exemplo, *"O perímetro do triângulo é 44 cm. Escreva uma equação algébrica e solucione o x". Um dos lados do triângulo mede 14 cm e o outro 2x cm)*, para serem aplicados pelo professor em classe. Após a aplicação dos problemas, foi realizada uma entrevista individual com 30 alunos em 3 escolas. Pela entrevista, tornou-se possível a compreensão a respeito do raciocínio dos alunos, e muito foi demonstrado sobre o comportamento evidente durante a solução escrita desses estudantes. Através da análise dos dados

obtidos, foi possível verificar que a maioria dos estudantes não conseguia escrever as equações solicitadas, e outros tentaram solucionar por métodos não algébricos. A análise dos protocolos evidenciou também que os alunos indicaram através de suas respostas, três modos diferentes de usar uma letra para simbolizar "a incógnita" (ou, "desconhecidos"). Segue abaixo:

1- "x" refere-se a quantidades diferentes em uma equação.

2- "x" refere-se a quantidades diferentes, em diferentes estágios de uma solução.

3- "x" é uma classificação geral para qualquer quantidade desconhecida ou uma combinação delas.

Oliveira (2002), em um estudo, apresentou algumas reflexões sobre o ensino aprendizagem da álgebra, analisando algumas possíveis razões para os erros comuns observados no desempenho dos alunos. A autora evidenciou a necessidade de uma metodologia de ensino que favoreça a produção de significados para a aprendizagem de álgebra. Destacou ainda a importância de tomarmos ciência das diferentes formas de conceitualização desse ramo da Matemática e enfatizou que podemos encontrar muitas vezes definições para a álgebra como "cálculo literal" ou como "uma generalização da aritmética". Com relação às dificuldades apresentadas pelos estudantes, a autora afirmou que, para solucionar uma equação, fatorar uma expressão algébrica ou mesmo fazer simplificações para reduzi-la a uma expressão mais simples, são necessários conhecimentos, técnicas e realização de manipulações muitas vezes mais elaboradas. E ainda, ao observar as dificuldades dos alunos, evidenciou que há indícios *de um processo de ensino aprendizagem que investe numa atuação mecânica, caracterizada por uma manipulação automática e cega das variáveis e operações* (p. 36).

Ainda para essa autora, os alunos, ao se depararem com letras não usuais (x, y e z) para a simbolizar as incógnitas, possivelmente podem estranhar, como se tais relações entre as quantidades representadas pudessem estar comprometidas. E, sendo assim, enfatizou a necessidade da variação das letras

ao simbolizar as quantidades para evitar essa tendência do aluno achar que tais letras são as únicas que podem representar as incógnitas em uma equação.

Oliveira (2002) também abordou em seu estudo que a diversidade existente nas situações que se referem a variável e incógnita, muitas vezes, poderá comprometer a compreensão dos alunos, pois o conceito de variável é multifacetado. Mas segundo Usikin (1988, p. 8), é de grande importância estar vigilante para as interpretações equivocadas relacionadas ao conceito de variável. A partir desses equívocos, conceitua-se muitas vezes a álgebra como o *estudo das variáveis* sendo que é inadequado pois, além de não abranger o verdadeiro sentido da álgebra, nem sempre os elementos representados por letras estão associados ao conceito de variável (Oliveira, 2002, p. 36).

Segundo Skemp (1980), variável é um elemento não especificado de um dado conjunto. E os elementos que uma variável pode representar denominam-se valores da variável. Tomando como exemplos a expressão e a equação acima, tem-se que:

$3\mathbf{t} + 6$, onde a letra **t** é a variável na qual podem ser atribuídos diversos valores de um dado conjunto. Por exemplo, se t=2 então, $3\ (2) + 6 = 6 + 6 = 12$.

Em uma outra situação, o valor desconhecido, a incógnita, representa um número.

$\mathbf{n} + 5 = 12$, **n** é o valor a ser descoberto. Então,

$n = 12 - 5$

$n = 7$

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN- SEF/MEC, 1998):

> *... a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.* Isso permite supor que, *existe um razoável consenso de que*

> *para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra* (p. 118).

Há muitos estudos que enfatizam a formação de conceitos e, para que ela ocorra no nível formal, é necessário inicialmente que o estudante saiba nomear o conceito, definindo-o em termos de seus atributos definidores e diferenciando-o entre exemplos e não exemplos do conceito a ser aprendido, para que seja possível, posteriormente, selecionar os procedimentos corretos de solução do problema.

Neste campo, Pirola (1995), em seu estudo sobre formação de conceitos de triângulo e de paralelogramo com alunos de quinta à oitava série, ressaltou a importância do ensino de conceitos, valorizando os atributos definidores, atributos relevantes e irrelevantes, exemplos e não-exemplos do conceito, conforme mostraram pesquisas desenvolvidas por Klausmeier (1977).

Pirola, Quintiliano e Proença (2003), investigando o desempenho de alunos em tarefas envolvendo o conceito de polígonos e poliedros, apontaram também a necessidade do ensino dos conceitos matemáticos ter como preocupação proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa dos conceitos valorizando os atributos definidores, atributos relevantes e irrelevantes, exemplos e não-exemplos, pois os participantes desta pesquisa tiveram um baixo desempenho nas tarefas que envolviam definições e discriminação de exemplos de alguns polígonos e poliedros. Além disso, a principal dificuldade apontada pelos participantes na realização da atividade era o esquecimento da definição do conceito. Assim, torna-se importante também a valorização de tais aspectos no ensino dos conceitos algébricos.

Stacey e Macgregor (1997) observaram que os educadores matemáticos e os psicólogos continuam a perguntar-se por que os alunos passam por três ou quatro anos de cursos de álgebra sendo incapazes de usá-la para solucionar problemas. A partir disso, amplamente é aceito que estes alunos não aprenderam a 'pensar algebricamente'. A análise da amostra coletada no estudo mostrou um

pensar lógico e complexo. Entretanto, quando foi solicitado aos alunos que escrevessem uma equação, ou solucionassem problemas mais difíceis, eles não souberam empregar as notações algébricas para organizar, registrar e estender suas idéias. E as estratégias de solução empregadas se restringiram a uma seqüência de cálculos independentes (Stacey e MacGregor, 1997, p.197).

Kieran (1996) investigou algumas das novas perspectivas a respeito do ensino da álgebra, considerando uma distinção entre o pensamento algébrico e a álgebra. Segundo a autora, na visão tradicional, *a álgebra é associada aos símbolos literais e as operações que são realizadas a partir destes símbolos,* enfatizando ainda que a álgebra não é somente uma ferramenta para representar números e quantidades com símbolos literais, mas também para realizarmos cálculos com esses símbolos.

Neste aspecto, a autora empregou o termo pensamento algébrico referindo-se a um amplo campo de representações que não obstante, inclui às vezes a letra simbólica. Afirmou ainda que esta visão ampliada da álgebra é chamada pensamento algébrico, com o propósito de distingui-la da álgebra elementar tradicional.

Dessa forma, definiu que pensar algebricamente pode ser interpretado *como o uso de uma variedade qualquer de representações para manipular situações num meio relacional.* Além disso, segundo a autora, pensamento algébrico pode ser interpretado como um caminho para situações quantitativas que enfatizam os aspectos relacionados com ferramentas que não são necessariamente as letras, mas que podem principalmente, serem usadas como suporte cognitivo para introdução e sustentação do discurso mais tradicional do ensino de álgebra (Kieran, 1996, p. 275).

Um aspecto fundamental para que o estudante obtenha sucesso na solução de problemas matemáticos, segundo Brito, Fini e Garcia (1994), é a habilidade verbal, pois ela é necessária para a compreensão do enunciado do problema. Os autores investigaram a relação entre a solução de problemas e o desempenho em um teste verbal. Participaram 60 alunos de um curso de licenciatura em Matemática, que solucionaram 12 problemas que envolviam conceitos algébricos,

aritméticos e geométricos sem nenhuma questão formulada. Foi solicitado aos participantes formularem uma questão a partir da compreensão dos dados e das relações envolvidas nos problemas para, então, solucioná-los. Através do teste verbal utilizado para analisar a habilidade de abstração e generalização dos conceitos expressados em palavras, os autores puderam concluir que há necessidade de pelo menos um mínimo de habilidade verbal para que os participantes compreendam a natureza matemática do problema.

Referindo-se especificamente à solução de problemas algébricos, Macgregor e Price (1999) investigaram se os três componentes do conhecimento metalingüístico, tais como a consciência de símbolo, sintaxe e ambigüidade estão associadas com o sucesso dos estudantes na aprendizagem da notação de álgebra, pois a hipótese desses autores era de que tais componentes são necessários para o sucesso na aprendizagem durante a utilização da notação algébrica. E que a investigação, nesse âmbito, talvez proporcione importantes informações sobre os processos específicos ou as estruturas cognitivas comuns, tanto para proficiência em linguagem como para aprendizagem em álgebra. Segundo os autores, baseados em vários pesquisadores no campo do desenvolvimento da alfabetização (Cazden; Hakes, et al., *apud* Macgregor e Price, 1999, p. 451), o termo conhecimento metalinguístico refere-se à habilidade linguística que possibilita usar uma linguagem para refletir sobre a tarefa, bem como analisar a linguagem escrita e verbal. E esse conhecimento é envolvido quando a forma ou função de uma palavra ou frase não é somente seu significado, mas sim o objeto de atenção. Desta pesquisa participaram 1236 estudantes com idade de 11 a 15 anos do nível 7 ao nível 10 (correspondente à sexta série do ensino fundamental ao 1º ano do ensino médio) de 18 escolas de Melbourne. Um dos resultados que ficou mais evidenciado neste estudo demonstrou que as falhas na aprendizagem desse conceito, em alguns estudantes, estavam associadas ao fraco desenvolvimento do conhecimento metalingüístico.

Pode ser observado que existem várias dificuldades com as quais os alunos defrontam-se nos diversos níveis, e estão relacionadas com situações algébricas. Entre elas, destacam-se o uso incorreto do cancelamento em

expressões algébricas, a dificuldade em diferenciar expressão e equação algébrica, o conceito de igualdade e equivalência, o conceito sobre variáveis, estratégias de solução, conhecimento de procedimentos, etc.

E os estudos analisados estão preocupados em identificar e sanar as dificuldades dos alunos no decorrer de sua formação acadêmica, notadamente em relação aos problemas apresentados por eles no desenvolvimento do pensamento algébrico. A partir disso é que se constata a real necessidade em dar continuidade à pesquisa relacionada com a aprendizagem de conceitos algébricos e ao desenvolvimento do *"pensamento algébrico"*. Tal pensamento tem sido estudado por vários autores que abordam diferentes aspectos da aprendizagem da álgebra, tais como a passagem do pensamento aritmético para o algébrico, formação de conceitos algébricos, as estratégias de solução de problemas e procedimentos, dentre outros.

A partir de uma primeira análise da literatura e das evidências de pesquisas, bem como dos aspectos envolvidos, o presente projeto visa, primordialmente, investigar a influência do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento na solução de problemas algébricos, visando contribuir para a identificação de possíveis fatores que influenciam o desempenho dos estudantes nas atividades algébricas. Particularmente, trata de equação do 1º grau, expressões álgébricas e problemas que permitam solução através dos procedimentos algébricos e, conseqüentemente, buscará subsídios e ferramentas que possam auxiliar os educadores na solução de tais problemas. Alunos da oitava série do ensino fundamental foram escolhidos como participantes por se tratar da etapa final desse nível de ensino e o ensino dos conceitos algébricos nesta série devem oferecer ao aluno a possibilidade de continuidade do aprendizado de forma autônoma e crítica proporcionando aos estudantes a generalização dos conceitos aprendidos e a aquisição de abstrações mais complexas previstas no estudo da álgebra avançada, por exemplo, o estudo das variáveis complexas.

CAPÍTULO III

Objetivo, participantes, procedimento, material e método

O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis diferentes.

Juan Ignácio Pozzo

1- Objetivo:

Investigar a influência do conhecimento declarativo e do conhecimento de procedimento na solução de problemas algébricos, particularmente, nas equações de 1º grau, expressões algébricas e problemas que permitam solução através dos procedimentos algébricos.

2 - Participantes:

Os participantes deste estudo são 96 alunos da última série do 4º ciclo do Ensino Fundamental (oitava série) de 2 escolas da Rede Pública de Ensino de Bauru do período matutino e vespertino. A amostra foi estabelecida por conveniência, pelo fato de que os participantes da série escolhida já terem tomado contato com os conceitos investigados.

3- Material:

Foram utilizados os seguintes instrumentos:

1. Questionário (anexo 1), baseado no questionário elaborado por Brito (1996), com o objetivo de delinear algumas características dos participantes e obter informações sobre sua vida acadêmica.
2. Prova 1 (anexo2) (tipo lápis e papel), com questões envolvendo o conceito de equação e expressão algébrica, variável e incógnita, bem como a diferenciação entre exemplos e não exemplos desses conceitos (Conhecimento Declarativo).
3. Prova 2 (anexo 3) (tipo lápis e papel), contendo problemas que permitem e requerem a utilização de procedimentos algébricos para sua solução.

4. Procedimentos:

O presente estudo foi delineado com o propósito de atender os objetivos estabelecidos para a investigação, dentre eles analisar o desempenho dos estudantes nos problemas propostos, buscando encontrar sua relação com o conhecimento de procedimentos e declarativo ao solucionar os problemas.

A amostra foi selecionada por conveniência, formada por 96 estudantes matriculados na última série do 4° ciclo do Ensino Fundamental (8^a série) do período vespertino e matutino, de 2 escolas da Rede Pública de Ensino de Bauru/SP.

Os estudantes responderam a um questionário informativo (anexo I), e a duas provas matemáticas (anexo II e III).

As provas matemáticas tiveram os objetivos e pontuação de acordo com a tabela abaixo:

Tabela 1: Anexo 2 - Prova 1: Investigação sobre o conhecimento declarativo dos conceitos de equação, expressão algébrica, variáveis e incógnitas.

Questão I		
Itens	Objetivo	Pontuação
1	Definir o que é uma equação. Verificar se os alunos conseguem: - reconhecer equação como toda sentença aberta expressa por uma igualdade; - exemplificar tipos de equação e se utilizam a igualdade e incógnitas.	1
2	Definir o que é uma expressão algébrica. Verificar se os alunos conseguem: - reconhecer expressão algébrica como uma expressão matemática que apresenta letras e pode conter números; - exemplificar tipos de expressões algébricas utilizando variáveis.	1
3	Definir o que é variável. Verificar se os alunos conseguem representar situações que envolvam variáveis apresentando exemplos.	1
4	Definir o que é incógnita. Verificar se os alunos conseguem representar situações que envolvam incógnitas apresentando exemplos.	1
Questão II	Identificar, dentre os exemplos apresentados, equação e expressão algébrica. Verificar se os alunos conseguem fazer a diferenciação entre equação e expressão algébrica.	3
Questão III	Identificar, entre os exemplos apresentados, aqueles em que a letra representa uma incógnita e em qual ela representa uma variável. Verificar se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.	3

Tabela 2: Anexo 3- Prova 2: Investigação sobre o conhecimento de procedimento em problemas algébricos envolvendo os conceitos de expressão algébrica e equação.

Questão 1	Objetivo	Pontuação
	Determinar o valor dos termos desconhecidos. Verificar: - se os alunos reconhecem e aplicam os procedimentos de solução de equação; - se utilizam os procedimentos corretamente para solucionar as equações.	1
Questão 2	Objetivo	Pontuação
	Simplificar as expressões quando possível. Verificar: - se os alunos conseguem identificar quando é possível ou não simplificar as expressões apresentadas; - se os alunos utilizam corretamente as propriedades do cancelamento e elemento oposto da adição, as operações com números inteiros, e redução de termos semelhantes (adição e subtração algébrica).	1
Questão 3	Objetivo	Pontuação
	Problema da balança. Encontrar os valores para os ovos de Páscoa, que representam as incógnitas do problema. Verificar: - se os alunos reconhecem que cada ovo corresponde a uma incógnita; - se os alunos conseguem montar e solucionar a equação, ou seja, se conseguem traduzir a sentença da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática. - os procedimentos de solução utilizados.	1

Questão 4		
Itens	Objetivo	Pontuação
a	Solucionar o problema apresentado (adaptado de Mayer, 1992). Verificar se os alunos conseguem solucionar corretamente a equação. Verificar se os alunos conseguem traduzir a sentença da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática.	0,5
b	Solucionar a equação apresentada (extraída de Mayer, 1992). Verificar se os alunos conseguem solucionar corretamente a equação.	0,5
Questão 5	Objetivo	Pontuação
	Solucionar o problema. Verificar: - se os alunos traduzem as sentenças da linguagem corrente para linguagem simbólica da matemática, montando a equação de acordo com os dados do problema; - os procedimentos utilizados.	1
Questão 6	Objetivo	Pontuação
	Calcular o valor numérico da expressão. Verificar: - se os alunos realizam corretamente as operações com números inteiros e fracionários e calculam corretamente o valor numérico da expressão; - os procedimentos utilizados.	1
Questão 7	Objetivo	Pontuação
	Calcular o valor da expressão. Verificar: - se os alunos realizam corretamente as operações com números inteiros e fracionários, particularmente a divisão com os números racionais (multiplicar primeira fração pelo inverso da segunda) e cálculo do m.m.c; - o emprego dos procedimentos.	1

Questão 8		
Itens	Objetivo	Pontuação
a_1	Verificar se o aluno: - identifica a expressão que representa o problema; - utiliza os procedimentos algébricos ou aritméticos na solução do problema; - aplica o conhecimento escolarizado em situações cotidianas.	0,25
a_2	Verificar se o aluno identifica a expressão que representa o problema	0,125
a_3	Calcular o valor numérico da expressão. Identificar quais os procedimentos utilizados na solução da expressão. Verificar se o aluno calcula o valor da expressão corretamente.	0,125
b	Solucionar o problema. Verificar se o aluno: - identifica a equação que representa o problema; - calcula o valor da equação corretamente. Verificar os procedimentos utilizados na solução da equação.	0,5
Questão 9	Objetivo	Pontuação
	Solucionar o problema. Verificar se o aluno: - traduz as sentenças da linguagem corrente para linguagem matemática, ou seja, a **expressão** que representa o problema; - soluciona corretamente a expressão. Verificar os procedimentos empregados na solução da equação.	1
Questão 10	Objetivo	Pontuação
	Solucionar o problema. Verificar se o aluno: - traduz as sentenças da linguagem corrente para linguagem matemática, ou seja, a **equação** que representa o problema; - soluciona corretamente a equação. Verificar os procedimentos empregados na solução da equação.	1

5. Método:

A presente pesquisa refere-se a um estudo exploratório e descritivo.

Segundo Cervo e Bervian (1983), a pesquisa descritiva *observa, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (variáveis) sem manipulá-los. Estuda fatos fenômenos do mundo físico e especialmente do mundo humano, sem a interferência do pesquisador* (p. 55). Ainda segundo os mesmos autores, os estudos exploratórios *não elaboram hipóteses a serem testadas no trabalho, restringindo-se a definir objetivos e buscar maiores informações sobre determinado assunto de estudo. A pesquisa exploratória realiza descrições precisas da situação e quer descobrir as relações existentes entre os elementos componentes da mesma* (p. 56).

CAPÍTULO IV

Resultados e Discussões

A álgebra continua sendo um veículo para resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso, pois fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas.

Zalman Usiskin

Neste capítulo são apresentados os resultados da análise de dados dos instrumentos utilizados Prova 1 (anexo 2) e Prova 2 (anexo 3). Foram participantes desta pesquisa 96 estudantes da última série do 4º ciclo Ensino Fundamental (8ª série) de duas escolas da Rede Pública de Ensino de Bauru, sendo que 33 participantes eram do período matutino e 63 do período vespertino.

Os dados obtidos foram analisados utilizando-se o pacote estatístico SPSS for Windows: version, release 6.1.2. Chicago, T2: SPSS Inc, 1995 (Statistical Package for Social Sciences), com o propósito de atender os objetivos estabelecidos para a investigação.

Análise descritiva dos dados dos participantes

Inicialmente é apresentada uma análise descritiva dos participantes. Em seguida, é apontado o resultado da prova matemática (Prova 1- anexo 2) com a finalidade de analisar o conhecimento declarativo dos participantes com relação à equação, expressão algébrica, variável e incógnita. Posteriormente, é apresentado

o resultado da prova matemática (Prova 2- anexo 3) com o propósito de analisar o conhecimento de procedimento dos participantes com relação às atividades propostas que requerem a utilização de procedimentos algébricos para a sua solução.

Análise descritiva

Tabela 3: Distribuição dos participantes de acordo com a escola

Escola	Freqüência	Porcentagem
Escola 1	63	65,6
Escola 2	33	34,4
Total	96	100,0

A amostra foi composta por 96 estudantes da última série do 4º ciclo do Ensino Fundamental (8ª série), de acordo com a tabela 3.

Tabela 4: Distribuição dos participantes de acordo com a idade

Idade	Frequência	Porcentagem
13	2	2,1
14	79	82,3
15	13	13,5
16	2	2,1
Total	96	100,0

Conforme mostra a tabela 4 a idade dos participantes variou entre 13 e 16 anos, sendo a idade média igual a 14,16 anos, com desvio padrão de 0,47 anos. E *82,3%* destes participantes têm 14 anos de idade, indicando que a maioria dos estudantes estava com a idade adequada para a série, considerando que o início da aprendizagem escolar se realiza aos 7 anos de idade.

Tabela 5: Distribuição dos participantes de acordo com o gênero

Gênero	Freqüência	Porcentagem
Masculino	46	47,9
Feminino	50	52,1
Total	96	100,0

A tabela 5 aponta que, dos participantes analisados, 47,9% eram do gênero masculino e 52,1% eram do gênero feminino.

Tabela 6: Distribuição de acordo com o nível de escolaridade dos pais

Escolaridade	Escolaridade do pai		Escolaridade da mãe	
	Nº de participantes	%	Nº de participantes	%
Não sabe	24	25,0	20	20,8
1ª a 4 completo/incompleto	4	4,2	3	3,1
5ª a 8ª completo/incompleto	14	14,6	21	21,9
Ensino médio completo/incompleto	36	37,5	31	32,3
Superior completo/incompleto/pós-graduação	18	18,8	21	21,9
Total	96	100,0	96	100,0

Com relação à escolaridade dos pais, foi verificado que a maioria havia concluído o ensino médio, ou pelo menos concluído alguma das séries que pertencem a este nível, de modo que 37,5% dos pais e 32,3% das mães apresentavam no mínimo o ensino médio completo ou incompleto. No entanto, conforme se pode observar na tabela 6, 25% dos participantes não souberam

responder qual era a escolaridade de seus pais. E ainda, apenas 18,8% dos pais e 21,9% das mães concluíram ou não o ensino superior, ou concluíram a pós-graduação, demonstrando haver então um equilíbrio entre o nível de escolaridade dos pais e das mães.

Tabela 7: Distribuição dos participantes de acordo com a reprovação em alguma série

Reprovação	Freqüência	Percentual
Sim	10	10,4
Não	86	89,6
Total	96	100,0

Na tabela 7 pode-se observar que há um baixo índice de reprovações (10,4%) e conforme a tabela 8 pode-se notar ainda que, o maior índice de reprovações (30,0%) ocorreu para a 2ª e 8º séries do ensino fundamental. Além disso, vale ressaltar que 3 participantes da amostra reprovaram a 8ª série e a estavam cursando novamente.

Tabela 8: Distribuição dos participantes de acordo com a série que reprovou

Série	Freqüência	Percentual
Não respondeu	1	10,0
1ª série	1	10,0
2ª série	3	30,0
4ª série	1	10,0
5ª série	1	10,0
8ª série	3	30,0
Total	10	100,0

Nessa primeira parte do estudo, o objetivo era conhecer os sentimentos dos alunos em relação à disciplina de matemática, especificamente sobre a álgebra.

Para isso foi perguntado aos participantes se os mesmos gostavam de matemática e de álgebra, e ainda quais conteúdos eles tinham mais facilidade e quais conteúdos eles tinham mais dificuldade em álgebra. A partir disso, obteve-se os seguintes resultados, conforme pode-se observar nas tabelas 9 à 14.

Tabela 9: Distribuição dos participantes conforme o sentimento em relação à matemática.

Respostas	Freqüência	Percentual
Gosta de matemática	52	54,2
Não gosta de matemática	17	17,7
Gosta mais ou menos de matemática	27	28,1
Total	96	100,0

De acordo com a tabela 9, a maioria dos participantes (54,2%) afirmou gostar da disciplina matemática e 28,1% afirmou gostar mais ou menos desta disciplina e apenas, 17,7% dos estudantes disseram não gostar de matemática.

Tabela 10: Distribuição dos participantes conforme o sentimento em relação à álgebra

Resposta	Freqüência	Percentual
Não respondeu	8	8,3
Gosta de álgebra	15	15,6
Não gosta de álgebra	40	41,7
Gosta mais ou menos de álgebra	18	18,8
Não sabe	15	15,6
Total	96	100,0

Com relação ao gostar de álgebra, pode-se observar na tabela 10 que, ao contrário das respostas dadas pelos participantes quando perguntados sobre o gostar de matemática, nesta questão a maioria (41,7%) respondeu que não gosta

de álgebra, e apenas 15,6% afirmaram que gostam. E é importante ressaltar que, diferentemente da questão sobre a matemática, ocorreu um percentual de 15,6% dos alunos que afirmaram não saber se gostam ou não de álgebra, e isto pode estar relacionado ao fato desses alunos não saberem ou não lembrarem o que é álgebra. Loos (1998) observou em seu estudo que o predomínio entre os alunos de 6ª série de uma predisposição negativa em relação à matemática estaria associado a diversas dificuldades conceituais e operacionais no uso de álgebra. Dessa forma, de acordo com os resultados obtidos nesta questão, o sentimento do não gostar de álgebra poderá levar o estudante à não gostar também da disciplina matemática.

Tabela 11: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra em que tem mais facilidade.

Conteúdo	Freqüência	Percentual
Não sabe	58	60,4
Todos	7	7,3
Nenhum	10	10,4
Alguns conteúdos	5	5,2
Equações	11	11,5
Equações/Teorema de Pitágoras	3	3,1
Operações	2	2,1
Total	96	100,0

A tabela 11 evidencia as respostas apresentadas pelos participantes ao responderem a questão 7 e de acordo com as respostas, verificou-se que a maioria (60,4%) não conseguiu definir qual conteúdo da álgebra tem mais facilidade, possivelmente pelo fato de que, além de não conseguirem estabelecer quais as partes têm mais facilidade, também não sabem o que é álgebra, o que é um fator preocupante, levando-se em consideração que os mesmos já tiveram contato com tal conteúdo nas séries anteriores. Isso parece indicar que o processo

ensino-aprendizagem desses alunos em álgebra pode ser falho. Verificou-se também que 11,5% dos participantes afirmaram ter facilidade na solução de equações, e 3,1% afirmaram ter facilidade em equação do 2º grau e Teorema de Pitágoras. Observou-se ainda que 10% afirmaram não ter facilidade em nenhuma parte do referido conteúdo, e somente 7,3% afirmaram ter facilidade em todo o conteúdo algébrico, restando uma pequena porcentagem de 2,1% que afirmaram ter facilidade com as operações envolvidas na solução das atividades algébricas propostas.

Tabela 12: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra onde tem mais facilidade.

Reorganizando os dados que geraram a tabela 11, obtivemos a tabela 12, onde verificou-se que apenas 21,9% dos estudantes especificaram qual parte da álgebra tem mais facilidade.

Conteúdo	Freqüência	Percentual
Não sabe	58	60,4
Todos	7	7,3
Nenhum	10	10,4
Alguns conteúdos/Equações/Teorema de Pitágoras/Operações	21	21,9
Total	96	100,0

Tabela 13: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra onde tem mais dificuldade.

Conteúdo	Freqüência	Percentual
Não sabe	62	64,6
Todos	8	8,3
Nenhum	9	9,4
Alguns conteúdos	4	4,2
Equação 2º grau	1	1,0
Operações	7	7,3
Função	2	2,1
Expressão algébrica	1	1,0
Interpretar problemas	2	2,1
Total	96	100,0

A tabela 13 apresenta as respostas dos alunos dada à questão que buscava investigar qual conteúdo da álgebra os participantes têm mais dificuldade, e pode-se constatar que a porcentagem de 64,6% dos participantes que responderam *não sabe* novamente predominou, como aconteceu na questão anterior. E apenas 9,4% afirmaram não ter dificuldades em álgebra, e 8,3% afirmaram ter dificuldades em todo o conteúdo algébrico. É válido salientar que 1% dos participantes responderam ter dificuldades na solução de expressões algébricas, e 1% dos estudantes afirmaram ter dificuldade na solução de equação do 2º grau. Além disso, 2% responderam ter dificuldades em atividades que envolvam gráficos, como na aprendizagem de função, e 7% responderam ter dificuldades em lidar com as operações envolvidas na solução dos problemas propostos. E ainda, 2,1% declararam ter dificuldades na interpretação dos problemas.

Reorganizando os dados que geraram a tabela 13 obtivemos a tabela 14, e verificou-se que somente 17,7% dos alunos conseguiram explicitar qual parte da álgebra tem mais dificuldades, conforme mostra a tabela 14.

Tabela 14: Distribuição dos participantes de acordo com o conteúdo de álgebra onde tem mais dificuldade.

Conteúdo	Freqüência	Percentual
Não sabe	62	64,6
Todos	8	8,3
Nenhum	9	9,4
Alguns conteúdos/Equação 2ºgrau/Operações/Função/Expressão Algébrica/Interpretar problemas	17	17,7
Total	96	100,0

Resultados obtidos na prova matemática para avaliar o conhecimento declarativo

Nesta etapa serão apresentados os resultados da prova matemática, que teve como objetivo analisar o conhecimento declarativo dos participantes em relação à equação, expressão algébrica, variável e incógnita.

Para a correção da questão 1 relativa ao conhecimento declarativo foi utilizado o seguinte critério:

Resposta	Valor da questão
Errou	0
Acertou um exemplo/acertou em parte a definição	0,25
Acertou em parte	0,50
Acertou a definição e um exemplo/acertou os exemplos e parte da definição	0,75
Acertou	1

A **questão 1** solicitava ao estudantes explicar o que entendem sobre os conceitos de equação, expressão algébrica, variável e incógnita, e ainda apresentar dois exemplos.

Tabela 15: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 1, itens **a**, **b**, **c** e **d**.

Questões	Respostas				
	Errou	Acertou	Acertou em parte	Acertou um exemplo/acertou em parte a definição	Acertou a definição e um exemplo/acertou os exemplos e parte da definição
O que é equação?	59 (61,5%)	4 (4,2%)	4 (4,2%)	25 (26,0%)	4 (4,2%)
O que é expressão algébrica?	74 (77,1%)	3 (3,1%)	7 (7,3%)	10 (10,4%)	2 (2,1%)
O que é variável?	82 (85,4%)	1 (1,0%)	3 (3,1%)	8 (8,3%)	2 (2,1%)
O que é incógnita?	56 (58,3%)	7 (7,3%)	12 (12,5%)	12 (12,5%)	9 (9,4%)

Conforme a tabela 15 pode-se verificar que, quando questionados sobre os conceitos de equação, expressão algébrica, variável e incógnita, a maioria dos participantes errou a definição de tais conceitos, sendo que a maior porcentagem de erro se concentrou na definição do conceito de variável (85,4%), e expressão algébrica (77,1%), uma vez que os participantes não conseguiram definir expressão algébrica como uma expressão matemática que apresenta letras e pode conter números, bem como não apresentaram exemplos de expressão. E, por conseguinte, não conseguiram apresentar situações envolvendo variáveis. Ursini e Tigueros (1997) em seu estudo verificaram que as dificuldades relacionadas à variável podem também ser encontradas em alunos universitários, pois os resultados deste estudo sugeriram que os alunos tinham grandes dificuldades em lidar com os diferentes usos de variável e incógnita, e que entender o conceito de variável é um processo lento e difícil para os estudantes. Segundo Chalouh e Herscovics (2001), para que os estudantes construam um

significado para as expressões algébricas é necessário que desde o início da aprendizagem tenham em sua formação uma base cognitiva que o alicerce.

Com relação à definição do conceito de equação e incógnita, verifica-se também a ocorrência de uma elevada porcentagem de 61,5% e 58,3%, respectivamente, de participantes que erraram estas questões, pois não conseguiram reconhecer equação como toda sentença aberta expressa por uma igualdade e ainda estabelecer exemplos desse conceito. Assim sendo, não conseguiram apresentar exemplos envolvendo incógnitas.

É válido salientar que, com relação ao conceito de variável, obteve-se a porcentagem de apenas 1% de acerto, e 3,1% de acertos com relação ao conceito de expressão algébrica. Nas questões que abordavam o conceito de equação e incógnita, houve 4,2% e 7,3% de acertos, respectivamente. A partir da análise dos dados relacionados aos conceitos investigados, pode-se verificar que, ao compararmos os resultados obtidos, houve um equilíbrio com relação às porcentagens de erros e acertos, tanto para o conceito de equação como para o conceito de incógnita.

Dessa mesma forma, ocorreu um equilíbrio com relação aos conceitos de expressão algébrica e variável. Isso provavelmente aconteceu pelo fato de que, se os alunos não conseguem definir o conceito de expressão algébrica e apresentar exemplos dela, dificilmente conseguirão definir o conceito de variável e ainda representar situações que a envolvam. Isto acontece igualmente com a definição de equação, pois se os estudantes não conseguem definir o conceito de equação e apresentar exemplos deste conceito, é provável que não consigam definir o conceito de incógnita, e não apresentem exemplos que as representem corretamente, já que ambos conceitos estão relacionados. Sackur e Drouhard (1997) em seu estudo, ao analisar os protocolos observaram que o estudante realizava as manipulações necessárias, mas não identificava o conceito relacionado aos procedimentos utilizados durante a solução das equações e expressões propostas pelo estudo.

Conforme Klausmeier (1977), a relação entre dois ou mais conceitos, que é denominada princípio, quando compreendida, permite ao estudante interpretar

várias situações e fenômenos específicos. Logo, saber que toda expressão algébrica é uma sentença matemática que apresenta letras e pode conter números, sendo que a tais letras podem ser atribuídos diversos valores de um dado conjunto, torna o estudante capaz de reconhecer diferentes expressões algébricas em várias situações.

Observou-se ainda que, com relação aos participantes que acertaram somente um exemplo ou acertaram somente parte da definição nesta questão, houve uma porcentagem de 26,0% que acertaram somente um exemplo de equação ou acertaram apenas em parte a definição deste conceito. O percentual de 4,2% foi observado para os participantes que acertaram em parte a questão, e isto significa que os mesmos simplesmente acertaram a definição do conceito sem apresentar exemplos, ou somente conseguiram estabelecer os exemplos solicitados do referido conceito.

Com relação aos participantes que acertaram a definição e um exemplo, ou acertaram os exemplos solicitados e parte da definição, ocorreu igualmente a porcentagem de 2,1% para as questões que abordavam o conceito de expressão algébrica e variável. Na questão que investigava o conceito de equação houve uma porcentagem de 4,2% de acertos e na questão que tratava sobre o conceito de incógnita ocorreu uma porcentagem de 9,4% de acertos. Segundo Klausmeier (1977), levando em consideração os níveis de formação dos conceitos, dentre as condições necessárias para que o estudante forme o conceito no nível formal, é importante que, o indivíduo saiba nomear o conceito, defini-lo em termos dos seus atributos, e ainda diferenciá-los entre exemplos e não exemplos dos mesmos.

De acordo com os resultados obtidos, foi possível notar que os participantes tiveram um desempenho insatisfatório nas questões que buscavam investigar o conhecimento declarativo, visto que ocorreu uma alta porcentagem de alunos que não sabiam os conceitos investigados, e não conseguiam representar situações nas quais os mesmos estavam envolvidos apresentando exemplos. Paulovich (1998) concluiu em seu estudo que houve uma baixa incidência também de respostas apresentadas pelos alunos com base em conceitos. Deste modo, evidenciou-se a importância da formação de conceitos para que o aluno seja

capaz de selecionar e aplicar os procedimentos necessários para a solução de problemas. E para isso, torna-se necessário que o professor não privilegie somente o ensino de técnicas de cálculo e algoritmos, mas que se preocupe, principalmente, com a formação dos conceitos algébricos.

Para a correção da questão 2 relativa ao conhecimento declarativo foi utilizado o seguinte critério:

Resposta	Valor da questão
Errou todas as alternativas	0
Acertou todas as alternativas	3
Acertou sete alternativas	2,63
Acertou seis alternativas	2,25
Acertou cinco alternativas	1,88
Acertou quatro alternativas	1,50
Acertou três alternativas	1,13
Acertou duas alternativas	0,75
Acertou uma alternativa	0,38

Questão 2 solicitava aos estudantes a identificação das expressões algébricas e equações algébricas apresentadas.

Tabela 16: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 2

Resposta	Frequência	Percentual
Errou todas as alternativas	6	6,3
Acertou uma alternativa	6	6,3
Acertou duas alternativas	14	14,6
Acertou três alternativas	13	13,5
Acertou quatro alternativas	13	13,5
Acertou cinco alternativas	9	9,4
Acertou seis alternativas	8	8,3
Acertou sete alternativas	6	6,3
Acertou todas as alternativas	21	21,9
Total	96	100,0

O objetivo desta questão era o de verificar se os alunos conseguiriam fazer a diferenciação entre equação e expressão algébrica. Conforme mostra a tabela 16, 21,9% dos participantes acertaram todas as alternativas, ou seja, conseguiram identificar entre os exemplos apresentados, quais representavam uma equação e quais representavam uma expressão algébrica. Observou-se também que 6,3% dos participantes erraram todas as alternativas, e 13,5% acertaram em parte a questão. Segundo Oliveira (2002), a variedade existente nas situações que se referem a variável e incógnita muitas vezes poderá comprometer a compreensão dos alunos, pois o conceito de variável é multifacetado. Mas é válido salientar que, diferentemente da questão anterior, esta somente apresentava itens que continham exemplos e não-exemplos de equações e expressões algébricas, e os participantes tinham que somente assinalar se a situação apresentada era uma equação ou uma expressão, e isto possivelmente pode ter sido um fator interveniente nos resultados obtidos.

Mas apesar deste fato, pode-se considerar que o desempenho dos participantes no geral foi abaixo da média, pois 78,10% dos alunos não acertaram completamente a questão, ou seja, tinham dificuldades em diferenciar equação de expressão algébrica, o mesmo resultado encontrado por Quintiliano e Brito (2003) e Sackur e Drouhard (1997), e isto parece indicar que os participantes não têm os conceitos investigados formados no nível identidade, resultado também encontrado por Pirola (1995), pois conforme Klausmeier (1977), o conceito é formado no nível identidade quando o indivíduo reconhece o objeto (o conceito) em diferentes perspectivas físicas e sensoriais, o que pareceu não ocorrer neste caso. Dessa maneira, torna-se difícil o desenvolvimento conceitual ocorrer no nível formal, considerando que os níveis são sucessivamente constituídos. É necessário então que o estudante saiba identificar tais conceitos em diversas situações, e saiba defini-lo em termos dos seus atributos definidores para que seja capaz posteriormente de utilizá-lo para solucionar problemas.

Para a correção da questão 3 relativa ao conhecimento declarativo foi utilizado o seguinte critério:

Resposta	Valor da questão
Errou todas as alternativas	0
Acertou todas as alternativas	3
Acertou três alternativas	2,25
Acertou duas alternativas	1,50
Acertou uma alternativa	0,75

Questão 3 solicitava aos estudantes a identificação das variáveis e das incógnitas nas expressões algébricas e equações algébricas apresentadas.

Tabela 17: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 3

Resposta	Frequência	Percentual
Errou todas as alternativas	41	42,7
Acertou uma alternativa	9	9,4
Acertou duas alternativas	21	21,9
Acertou três alternativas	3	3,1
Acertou todas as alternativas	22	22,9
Total	96	100,0

O objetivo desta questão era o de verificar se os alunos conseguiriam diferenciar dentre os exemplos apresentados, aqueles em que a letra representava uma incógnita e aqueles que ela representava uma variável. Conforme a tabela 17, observou-se que 42,7% dos participantes erraram a questão, e apenas 22,9% acertaram a questão integralmente. De acordo com a análise dos protocolos, verificou-se que os participantes tinham dificuldades em identificar as variáveis e as incógnitas nas situações apresentadas, o mesmo resultado encontrado por Ursini e Trigueros (1997). E, comparando os resultados obtidos na análise das questões anteriores, foi possível constatar que a maioria dos estudantes demonstrou não saber os conceitos de equação, expressão

algébrica, variável e incógnita. Considerando que os alunos estavam terminando o ensino fundamental, constata-se uma situação preocupante. Kieran (1990) enfatizou que as várias dificuldades para aprender álgebra são encontradas não só em estudantes que estão iniciando a pré-álgebra, mas também em estudantes de séries mais avançadas. Não se pode deixar de considerar que isto pode ter ocorrido também por limitações do estudo, ou mesmo por uma falha durante o processo ensino-aprendizagem dos alunos. Para evitar estas falhas, é importante que o professor esteja sempre atento, buscando identificar logo no início do ensino dos conceitos o que o estudante traz de aprendizado consigo, para que tenha condições de aprender os conceitos mais avançados.

Tabela 18: Estatística relativa à Prova 1 com relação ao conhecimento declarativo e à escola.

Escola	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
Escola 1	63	3,3269	2,2964	t (94)= - 0,429
Escola 2	33	3,5321	2,0888	p >0,05

A estatística relativa ao conhecimento declarativo mostrou que não houve diferença significativa entre as escolas investigadas. Mas os resultados indicaram, conforme a tabela 18, que o desempenho das duas escolas foi baixo, uma vez que em ambas a média foi abaixo de 5,0. Pirola (1995), em seu estudo, observou que os alunos de séries mais adiantadas, no caso a 8ª série, tiveram um desempenho inferior comparado ao dos estudantes de séries menos adiantadas, ou seja, não conseguiram definir os conceitos investigados pelo autor. E ainda, em um outro estudo, Pirola (2000) observou diferenças significativas entre os grupos investigados, verificando também que os alunos tinham dificuldades em lembrar os conceitos básicos por ele investigados.

Resultados obtidos na prova matemática para avaliar o conhecimento de procedimento

Nesta etapa serão apresentados os resultados da prova matemática, que teve como objetivo analisar o conhecimento de procedimento dos participantes com relação às atividades propostas que requerem a utilização de procedimentos algébricos para a sua solução.

O valor atribuído a esta prova matemática foi de 0 à 10 pontos. Por conseguinte cada questão valia 1,0 ponto. Para a correção das questões relativas ao conhecimento procedimento foi utilizado o seguinte critério:

- A questão 1 foi subdividida em 6 itens, valendo 0,17 pontos cada item com a resposta correta. Para os itens com a resposta errada foi atribuído valor 0. Os itens onde os participantes aplicaram os procedimentos, as operações e os algoritmos corretamente, mas deixaram a resposta sem finalização foi retirado 0,02 pontos do item. E para os itens onde os participantes aplicaram os procedimentos, as operações e os algoritmos corretamente, mas deixaram a resposta incompleta foi retirado 0,04 do item. A partir disso, foi considerado o seguinte critério para a pontuação:

Resposta	Valor da questão
Errou	0
Acertou	0,17
Acertou os procedimentos, as operações e os algoritmos/resposta sem finalização.	0,15
Acertou os procedimentos, as operações e os algoritmos/resposta incompleta.	0,13

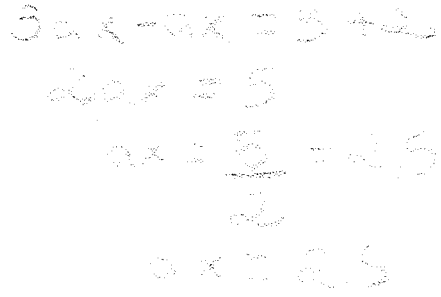
Para exemplificar como esse critério foi aplicado, apresentamos dois exemplos de correção.

Exemplo 1: Neste caso foram retirados 0,04 pontos do item *a* desta questão, pois apesar do aluno acertar a questão deixou indicado o valor de *x* de forma incompleta.

a) $3x - 5 = 0$

Exemplo 2: Neste caso foram retirados 0,02 pontos do item *b* desta questão, pois apesar do aluno acertar a questão, não indicou o valor de *x* em função da variável *a,* deixando dessa forma, a resposta da atividade proposta sem finalização.

b) $3ax - 2 = ax + 3$



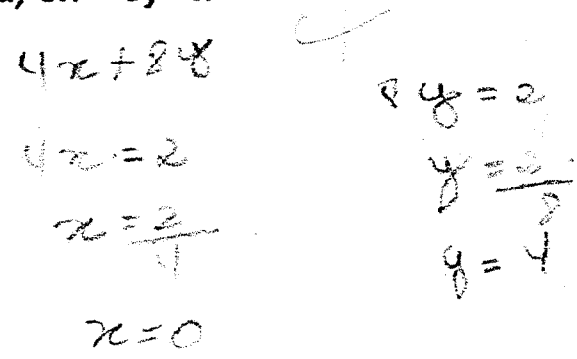
O desconto dos pontos nos item *a* e *b* se diferem na medida em que a dificuldade na solução da questão aumenta, pois no item **a** a dificuldade é menor que no item **b**, visto que no último item é mais difícil o estudante perceber que o resultado final da questão é o valor de *x* em função da variável *a* e não o valor de *ax*.

- A questão 2 também foi subdividida em 6 itens, com o mesmo valor de 0,17 por item correto, conforme a primeira questão. E foi atribuído igualmente valor 0 para o item errado. E ainda, para os itens em que os participantes acertaram em parte, foram retirados 0,04 pontos.

Resposta	Valor da questão
Errou	0
Acertou	0,17
Acertou em parte	0,13

Um exemplo é apresentado abaixo para ilustrar o critério aplicado para correção.

a) 3x + 8y +x



Neste caso foram retirados 0,04 pontos do item, pois apesar do estudante acertar a questão, errou ao tentar montar uma equação.

- Na questão 3 os valores atribuídos foram:

Resposta	Valor da questão
Acertou	1,00
Errou	0

- A questão 4 foi subdividida em 2 itens e foram atribuídos os seguintes valores para cada item:

Resposta	Valor da questão
Acertou	0,50
Errou	0

- Na questão 5 foram atribuídos os seguintes valores:

Resposta	Valor da questão
Acertou	1
Errou	0

- A questão 6 foi subdividida em 2 itens e foram atribuídos os seguintes valores para a sua correção:

Resposta	Valor da questão
Acertou dois itens	1
Acertou um item	0,50
Errou	0

- Na questão 7 foram atribuídos os seguintes valores:

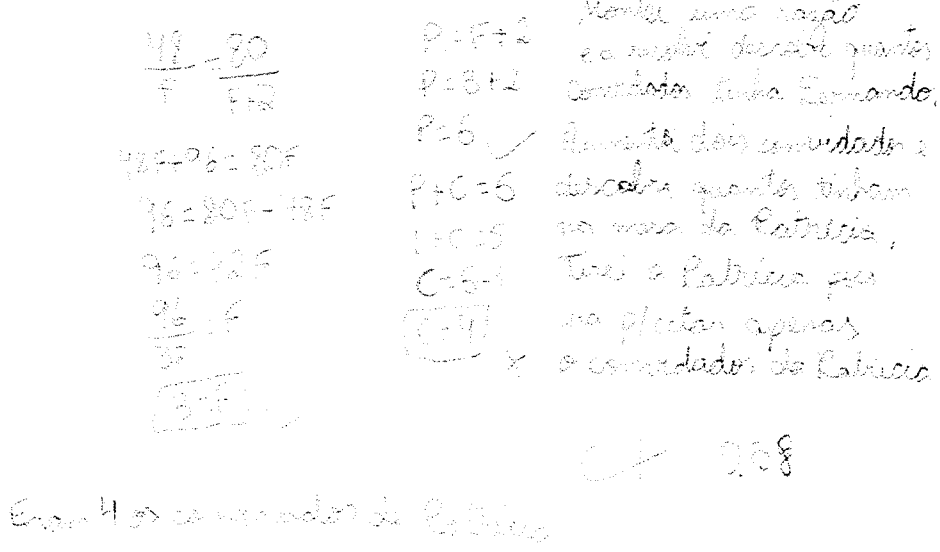
Resposta	Valor da questão
Acertou	1
Errou	0

- A questão foi subdividida em 3 itens e os valores atribuídos foram os seguintes:

Item	Resposta	Valor da questão
8 a1	Errou	0
	Acertou	0,25
8 a2	Errou	0
	Acertou	0,125
8 a3	Errou	0
	Acertou	0,125
8 b	Errou	0
	Acertou	0,5
	Acertou os procedimentos, algoritmos e as operações/errou a resposta.	0,38

Neste caso foram retirados 0,12 pontos do item *b* desta questão, pois apesar do aluno acertar os procedimentos, algoritmos e as operações, errou ao apresentar a resposta e para exemplificar apresentamos um exemplo.

b) Num restaurante, Fernando pagou para si e seus convidados a quantia de R$ 48,00. Na mesa ao lado, Patrícia e seus convidados gastaram R$ 80,00. Patricia tinha dois convidados a mais que Fernando. Todos gastaram a mesma quantia. Quantos eram os convidados de Patricia?

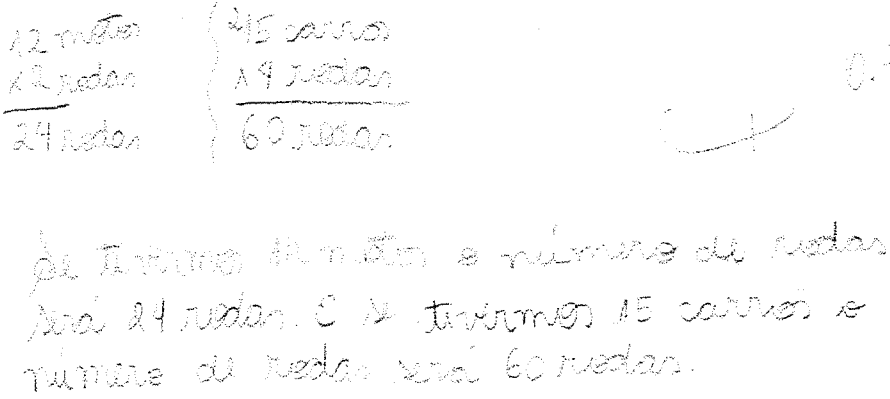


- Na questão 9 foram atribuídos os seguintes valores:

Resposta	Valor da questão
Acertou	1
Errou	0
Acertou /resposta incompleta	0,75

Nesta questão foram retirados 0,25 pontos, pois apesar do aluno acertar os procedimentos, algoritmos e as operações, apresentou a resposta de forma incompleta, pois não apresentou o resultado da adição algébrica solicitada na questão.

9) Num estacionamento encontram-se x motos e y carros. A expressão que representa o número total de rodas é de 2x + 4y. Qual o número de rodas se tivermos 12 motos e 15 carros?



No caso das questões 8b e 9 foram retirados 0,12 e 0,25 pontos, respectivamente, proporcionalmente aos valores das questões e de acordo com a importância do problema e da relevância do seu conceito.

- Na questão 10 foram atribuídos os seguintes valores:

Reposta	Valor da questão
Acertou	1
Errou	0

Tabela 19: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 1.

Item	Respostas			
	Errou	Acertou	Acertou os procedimentos, as operações e os algoritmos-resposta incompleta	Acertou os procedimentos, as operações e os algoritmos-resposta sem finalização
1a	59 61,5%	34 35,4%	3 3,1%	——
1b	76 79.2%	2 2,1%	4 4,2%	14 14,6%
1c	91 94,8%	5 5,2%	——	——
1d	93 96,9%	1 1%	2 2,1%	——
1e	90 93,8%	6 6,3%	——	——
1f	82 85,4%	13 13,5%	——	1 1%

A questão 1 solicitava ao participante determinar o valor dos termos desconhecidos, e o objetivo era o de verificar se os alunos reconheceriam e aplicariam os procedimentos de solução de equação corretamente. De acordo com a tabela 19, observou-se que em todos os itens ocorreu uma alta porcentagem de erros, sendo que no item 1d ocorreu a maior porcentagem (96,9%). Isto aconteceu possivelmente pelo fato deste item conter duas letras diferentes para representar os valores desconhecidos, e que para solucioná-lo o aluno teria que inicialmente encontrar o m.m.c. para posteriormente aplicar a

propriedade distributiva e agrupar os termos semelhantes da equação. Por isso, os resultados apontaram um desempenho insuficiente nesta questão, e que, de acordo com os dados obtidos no estudo de Ursini e Trigueros (1997), confirmaram que um pequeno aumento na complexidade do problema pode conduzir o aluno ao erro, pois ao fazer generalizações inadequadas, ele busca a solução através de tentativa e erro.

Observou-se também que 35,4% dos participantes acertaram o item 1a, considerado como o item de solução mais simples. E ainda, verificou-se que no item 1b houve 4,2% de participantes que acertaram os procedimentos, as operações e os algoritmos, mas apresentaram a resposta incompleta, e 14,6% dos participantes acertaram os procedimentos, as operações e os algoritmos, mas apresentaram a resposta sem finalização. Para Cooper e outros (1997), a aprendizagem de equações lineares é facilitada através do entendimento de estruturas similares (isomórfica) na aritmética complexa, de modo que a compreensão da estrutura aritmética torna-se um importante fator para a aprendizagem de álgebra.

Tabela 20: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 2

Item	Respostas		
	Errou	Acertou	Acertou em parte
2a	63 65,6%	31 32,3%	2 2,1%
2b	83 86,5%	13 13,5%	——
2c	91 94,8%	5 5,2%	——
2d	89 92,7%	7 7,3%	——
2e	68 70,8%	28 29,2%	——
2f	94 97,9%	2 2,1%	——

A questão 2 tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiriam identificar quando era possível ou não simplificar as expressões apresentadas, e ainda se utilizariam as operações corretamente. A tabela 20 mostra que ocorreu uma alta porcentagem de erros nos vários itens desta questão. No item 2f obteve-se a maior porcentagem de erro (97,9%), possivelmente pelo fato de que os participantes acreditavam que poderiam utilizar logo de início a propriedade do cancelamento, e por esse motivo erraram na aplicação das propriedades das frações algébricas. No item 2c ocorreu uma porcentagem de 94,8% de erro, pois os estudantes erraram ao realizar as operações com números inteiros. É válido ressaltar também que no item 2d não era possível a simplificação, e somente 7,3% acertaram esta questão. Nos itens 2a e 2e ocorreram os maiores índices de acertos desta questão, respectivamente, 32,3% e 29,2%, talvez pela facilidade na aplicação das operações que teriam que ser realizadas, já que no primeiro o participante teria que realizar a soma algébrica agrupando os termos semelhantes, e no segundo teria somente que obter uma fração mais simples, dividindo os dois termos da fração por um divisor comum diferente de um. E ainda, no item 2a houve uma porcentagem de 2% que acertaram em parte a questão, pois iniciaram a solução corretamente, mas erraram ao apresentarem a resposta.

Tabela 21: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 3.

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	55	57,3
Acertou	41	42,7
Total	96	100,0

O objetivo da questão 3 era o de verificar se os participantes conseguiriam montar e solucionar a equação, traduzindo a sentença da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática. Através da tabela 21, foi possível observar que, apesar da porcentagem de participantes que erraram a questão ser de 57,3%, foi considerável o número de acertos, correspondendo a (42,7%).

Apesar disso, o objetivo da questão era que o aluno utilizasse procedimentos algébricos para solucioná-la, mas não foi o que ocorreu, pois a maioria (56,3%) utilizou procedimentos aritméticos para sua solução, resultado encontrado também por Lima (2001) e Utsumi (2000).

Tabela 22: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 4.

Item	Respostas	
	Errou	Acertou
4a	88 91,7%	8 8,3%
4b	87 90,6%	9 9,4%

A questão 4 foi subdividida em dois itens, com o propósito de verificar se haveria diferença no desempenho dos participantes ao solucionarem esta questão, já que o item 4a foi apresentado em forma de enredo e o item b foi apresentado na forma de uma equação. E ainda, verificar se os alunos conseguiriam traduzir a sentença apresentada na linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática. O resultado obtido pode ser observado na tabela 22, onde se vê que houve um equilíbrio no resultado tanto na porcentagem de erros quanto na porcentagem de acertos. No item 4a somente 8,3% dos participantes acertaram, e no item 4b apenas 9,4% acertaram. Portanto, concluiu-se que não houve diferença significativa nas respostas dos alunos referente a esta questão. Mas torna-se importante destacar que o índice de acerto nos dois itens foi muito baixo, indicando que os participantes tiveram dificuldades em traduzir o problema apresentado da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática. Além disso, tiveram dificuldades para solucionar o item 4b, o qual apresentava a equação montada para solução. Algumas das dificuldades que a análise dos protocolos possibilitou verificar foi no cálculo do m.m.c. e na aplicação

das operações necessárias, como no agrupamento dos termos semelhantes e sinais, e ainda na eliminação do denominador para a solução da equação.

Tabela 23: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 5.

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	29	30,2
Acertou	67	69,8
Total	96	100,0

A questão 5 solicitava ao participante solucionar o problema apresentado. O objetivo era o de verificar se os participantes conseguiriam traduzir a sentença apresentada da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática, e ainda os procedimentos utilizados para a sua solução. Conforme a tabela 23, foi possível constatar que a maioria dos participantes (69,8%) acertou a questão, e o mesmo ocorreu na questão 3, pois a maioria (40,6%) utilizou a procedimento aritmético para solucionar esta questão, resultado também encontrado por Utsumi (2000) em alunos da 8ª série.

Tabela 24: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 6.

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	47	49,0
Acertou um item	21	21,9
Acertou dois itens	28	29,2
Total	96	100,0

A questão 6 foi subdividida em dois itens, os quais solicitavam ao participante o cálculo do valor numérico das expressões algébricas propostas, sendo que o objetivo desta questão era constatar se os participantes realizariam corretamente as operações com números inteiros e fracionários, e se calculariam

o valor numérico da expressão corretamente. Observou-se que 49% dos participantes erraram a questão, 21,9% acertaram somente um item e 29,2% acertaram completamente a questão. Pode-se dizer que, apesar da questão ser de fácil solução, a maioria dos participantes não atingiu o objetivo.

Tabela 25: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 7

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	95	99,0
Acertou	1	1,0
Total	96	100,0

A questão 7 solicitava aos participantes solucionarem a expressão algébrica proposta, sendo o objetivo verificar se os alunos realizariam corretamente as operações com números inteiros e fracionários, particularmente a divisão com os números racionais (multiplicando a primeira fração pelo inverso da segunda) e o cálculo do m.m.c.. Constatou-se que ocorreu um alarmante resultado, pois 99% dos participantes erraram a questão. E pode-se constatar que os alunos têm uma dificuldade extrema em trabalhar com estas operações, visto que no exercício anterior (questão 6), de solução mais simples, a porcentagem de erro também foi alta, e isso leva a crer que um aumento na complexidade do exercício leva o aluno ao erro, pois conforme Boulton-Lewis et al. (1997), qualquer aprendizagem inadequada em aritmética pode causar dificuldades em álgebra.

Tabela 26: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 8

Item	Respostas		
	Errou	Acertou	Acertou os procedimentos, as operações e os algoritmos-errou a resposta
8a1	39 40,6%	57 59,4%	——
8a2	80 83,3%	16 16,7%	——
8a3	81 84,4%	15 15,6%	——
8b	79 82,3%	16 16,7%	1 1%

A questão 8, subdividida em 4 itens, solicitava ao aluno solucionar o problema apresentado e verificava se o participante identificaria a expressão ou a equação que representa o problema, aplicando o conhecimento escolarizado em situações cotidianas, e ainda se o aluno calcularia o valor da expressão ou da equação corretamente. Observou-se que, de acordo com a tabela 26, 59,4% dos participantes acertaram o item 8a1, sendo que este foi o único item que ocorreu um número considerável de acertos. Contudo, nos itens 8a2, 8a3 e 8b, o índice de participantes que erraram variou entre 82% a 84%, indicando que houve para esta questão um baixo índice de acertos, e que a maioria dos participantes não atingiram os objetivos da questão. Vale destacar que 72,9% dos estudantes utilizaram o procedimento aritmético para solucionar o item 8a1, o que tornou-se um fator interveniente no resultado obtido nos demais itens, pois o participante que não conseguiu encontrar a expressão que representava o problema, conseqüentemente, não conseguiu solucionar os itens 8a2 e 8a3.

Com relação ao item 8b, apenas 16,7% acertaram o item e ressalta-se ainda que apenas 8,3% dos participantes encontraram a equação a qual representava o problema, utilizando para isso o procedimento algébrico, e 33,3% dos alunos solucionaram o item através de procedimento aritmético.

Tabela 27: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 9

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	50	52,1
Acertou-resposta incompleta	14	14,6
Acertou	32	33,3
Total	96	100,0

A questão 9 buscava verificar se os participantes solucionariam a expressão que representa o problema corretamente. Verificou-se que somente 33,3% dos participantes acertaram a questão, e 14,6% acertaram os procedimentos, mas não apresentaram a resposta completa do problema. Apesar do índice de acertos, houve a ocorrência de 52,1% de erros, o que representa a maior parte. Isto indica que os alunos têm dificuldades na solução de expressão algébrica, e ao substituir os valores estabelecidos para as variáveis.

Tabela 28: Distribuição dos participantes de acordo com a resposta à questão 10.

Resposta	Frequência	Percentual
Errou	46	47,9
Acertou	50	52,1
Total	96	100,0

A questão 10 solicitava ao participante encontrar a equação que representa o problema proposto, na qual o objetivo era o de verificar se conseguiriam traduzir a sentença apresentada da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática. Os resultados apresentados na tabela 28 possibilitaram constatar que 52,1% acertaram a questão, mas apenas 6,3% dos participantes solucionaram a questão utilizando o procedimento algébrico. E a maioria, 53,1% dos alunos, utilizou o procedimento aritmético, indicando que apesar de acertarem a solução,

não atenderam ao objetivo da questão, pois não conseguiram identificar qual era a equação que representava o problema.

Conforme podemos observar na tabela 29, não houve diferença significativa relacionada à escola, o mesmo resultado encontrado por Alves (1999) para a Prova 2; ou seja, para essas escolas, o conhecimento de procedimento dos seus alunos pode ser considerado idêntico. É válido salientar que, as médias dos participantes com relação às provas estão abaixo de 5,0, e portanto o desempenho desses estudantes foi considerado insatisfatório, pelo fato de que os objetivos esperados não foram atingidos.

Destaca-se que, para a correção desta prova, foi utilizado o critério onde, aos alunos que entregaram a prova em branco, foi atribuída nota zero.

Tabela 29: Estatísticas relativas à Prova 2 com relação ao conhecimento de procedimento e a escola.

Escola	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
Escola 1	63	3,2985	2,2127	t (94)= 0,838
Escola 2	33	2,9124	2,0035	p >0,05

Para a classificação do predomínio dos procedimentos utilizados pelos participantes foram utilizados os seguintes critérios:

O procedimento foi classificado como *em branco* para os casos em que o aluno deixou a questão em branco, e o procedimento foi classificado como *aritmético* quando o aluno solucionou ou tentou solucionar o problema aritmeticamente. E ainda, o procedimento foi classificado como *algébrico* quando o aluno solucionou ou tentou solucionar o problema algebricamente. Nos casos onde o aluno apresentou somente a resposta do problema, foi classificado como *procedimento não identificado.*

Tabela 30: Distribuição dos participantes de acordo com os procedimentos utilizados nas questões 3, 5, 8a1, 8b e 10.

Procedimentos	Questão 3	Questão 5	Questão 8a1	Questão 8b	Questão 10
	nº de participantes	nº de participantes	Nº de participantes	nº de participantes	nº de participantes
Em branco	28	20	17	49	30
Aritmético	54	39	70	32	51
Algébrico	13	32	6	8	6
Não identificado	1	5	3	7	9
Total	96	96	96	96	96

De acordo com a tabela 30, observou-se que houve um predomínio da utilização do procedimento aritmético pelos alunos, e somente na questão 5 houve um número considerável de participantes (32) que utilizaram o procedimento algébrico para solucionar esta questão.

Análise dos dados obtidos através da prova matemática para avaliar o conhecimento declarativo

Tabela 31: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gênero

Gênero	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
masculino	46	3,3365	2,0934	t (94) = -0,257
feminino	50	3,4535	2,3471	$p > 0,05$

Como não se obteve diferença significativa, pode-se dizer que os meninos e as meninas obtiveram desempenho idêntico nesta prova. Mas é válido ressaltar que a média relativa ao conhecimento declarativo destes alunos foi abaixo de 5,0, indicando um desempenho insatisfatório tanto do gênero feminino quanto do gênero masculino.

Tabela 32: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo a reprovação

Reprovação	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
Sim	10	1,8275	1,0463	t (94) = -2,425
Não	86	3,5800	2,2495	$p < 0,05$

Os dados da tabela 32 indicam diferença significativa em relação ao conhecimento declarativo dos alunos e a variável reprovação. Sendo assim, pode-se dizer que, há relação entre o conhecimento declarativo dos estudantes, e a reprovação de alguma série, visto que os estudantes que afirmaram terem sido reprovados em alguma série apresentaram um desempenho mais baixo do que os alunos que não reprovaram.

Tabela 33: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gostar de matemática

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Gosta de matemática	52	3,8937	2,5223	0,00	9,75
Não gosta de matemática	17	2,8024	1,8219	0,25	6,25
Gosta mais ou menos de matemática	27	2,8163	1,5439	0,00	6,50
Total	96	3,3974	2,2183	0,00	9,75
Estatística	$F(2, 93) = 4,366; p > 0,05$				

Os dados da Tabela 33 não apresentaram diferença significativa em relação à resposta dos participantes sobre o gostar de matemática e o conhecimento declarativo. Vale ressaltar que, apesar de não existir diferença significativa entre as médias dos alunos que declararam que *gostam*, *não gostam* ou *gostam mais ou menos* da disciplina matemática, houve uma pequena diferença numérica superior em relação à média dos alunos que disseram que *gostam mais ou menos* de matemática, comparada à média dos alunos que disseram que *não gostam* de matemática.

Tabela 34: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo segundo o gostar de álgebra

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não respondeu	8	2,7975	1,8223	0,75	5,00
Sim	15	5,1677	3,1072	0,63	9,75
Não	40	3,2202	2,0192	0,00	9,75
Mais ou menos	18	3,4606	1,8200	0,75	8,00
Não sabe	15	2,3440	1,3596	0,00	4,50
Total	96	3,3974	2,2183	0,00	9,75
Estatística	$F(4, 91) = 3,863; p < 0,01$				

Os dados da Tabela 34 apresentam diferença significativa e o Teste *Tukey HSD* indicou que tais diferenças ocorreram entre as médias dos alunos que declararam que *não gostam de álgebra* e os que *gostam de álgebra*, e entre os que declararam que *não sabem se gostam de álgebra* e aqueles que declararam que *gostam de álgebra*. Isto indica que os alunos que declararam ter um sentimento positivo com relação à álgebra obtiveram médias superiores aos que declararam que *não gostam de álgebra* ou *não sabem se gostam de álgebra*. E isto pode ser um fator interveniente no processo de ensino-aprendizagem de matemática, pois se o estudante tem um sentimento negativo com relação à álgebra, isto poderá levá-lo a formar um sentimento negativo também em matemática, prejudicando assim sua aprendizagem, pois segundo Pinto (1998), o ensino da álgebra representa um obstáculo ao sucesso em matemática.

Tabela 35: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo de acordo com o conteúdo da álgebra em que tem mais facilidade

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não sabe	58	3,1718	1,8731	0,00	9,75
Todos	7	5,1800	3,2067	1,38	9,75
Nenhum	10	2,3770	1,8324	0,00	5,25
Alguns conteúdos/Equações/Teorema de Pitágoras/Operações	21	3,9124	2,5923	0,63	9,00
Total	96	3,3974	2,2183	0,00	9,75
Estatística		$F(3,92) = 2,962$; $p < 0,05$			

De acordo com a Tabela 35 existe uma diferença significativa entre o conhecimento declarativo e a variável "conteúdo da álgebra que tem mais facilidade". E o teste *Tukey* indicou que existem diferenças significativas apenas em relação à média dos participantes que declararam ter facilidade em *todos conteúdos da álgebra*, e aqueles que declararam não ter facilidade em *nenhum conteúdo da álgebra*, pois se o aluno declara não ter facilidade em nenhum

conteúdo algébrico, considerando que os mesmos estão na 8ª série, isto parece indicar que há uma falha no ensino-aprendizagem destes conceitos. De acordo com House (1994) o ensino da álgebra encontra-se bastante vulnerável, apresentando resultados insuficientes em termos de aprendizagem. Sendo assim, Brito Lima e Falcão (1998) ressaltaram em seu estudo que as situações didáticas desenvolvidas em sala-de-aula são de extrema importância para a compreensão dos conceitos e para a solução de problemas algébricos.

Tabela 36: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento declarativo de acordo com o conteúdo de álgebra em que tem mais dificuldade

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não sabe	62	3,1086	1,8483	0,00	9,75
Todos	8	2,0175	1,8408	0,00	5,25
Nenhum	9	5,2228	3,2641	1,38	9,75
Alguns conteúdos/Equação 2º grau/Operações/Função/Expressão Algébrica/Interpretar problemas	17	4,1338	2,3786	0,63	8,50
Total	96	3,3974	2,2183	0,00	9,75
Estatística			$F(3,92) = 4,482$; $p < 0,01$		

Os dados da Tabela 36 apresentam diferença significativa entre o desempenho na prova de conhecimento declarativo e a variável "conteúdo da álgebra que tem mais dificuldade" e o teste *Tukey HSD* indica que essas diferenças ocorrem entre as médias dos alunos que declararam ter dificuldade em *todos os conteúdos da álgebra* e aqueles que declaram ter dificuldade em *nenhum conteúdo*, e também entre aqueles que declararam que *não sabem em qual conteúdo* tem mais dificuldade e aqueles que declararam ter dificuldade em *nenhum conteúdo*. Brito Lima e Falcão (1998), sugeriram em seu estudo que é possível introduzir o ensino dos conceitos algébricos mais cedo do que tradicionalmente a escola propõe, trabalhando tanto os conceitos quanto os procedimentos de solução de problemas algébricos paralelamente ao ensino dos

conceitos e procedimentos aritméticos. E esta pode ser uma forma de evitar que as dificuldades apareçam durante a aprendizagem destes conceitos em séries mais avançadas.

Analisando os dados obtidos nesta questão proposta aos participantes, verificou-se que os conceitos que os estudantes declararam ter mais dificuldades foram em relação às operações, ao contrário do resultado encontrado por Gomes (1998). A autora afirmou em seu estudo que possivelmente a dificuldade não está na solução da equação propriamente dita, mas na falta de vinculação com outros conceitos, como por exemplo, frações, números decimais, polinômios, as operações e suas inversas, pois geralmente os estudantes não apresentam um aprendizado significativo relacionado a estes conceitos. É válido ressaltar que apenas um participante declarou ter dificuldades em trabalhar com expressões algébricas.

Conforme o estudo de Macgregor e Price (1999), as falhas na aprendizagem da notação algébrica, em alguns estudantes, podem estar relacionadas a um desenvolvimento do conhecimento metalingüístico fraco.

Análise dos dados obtidos através da prova matemática para avaliar o conhecimento de procedimento

Tabela 37: Estatísticas relativas ao desempenho nas provas de conhecimento de procedimento segundo o gênero

Gênero	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
masculino	46	3,4837	2,2261	t (94) = 1,417
feminino	50	2,8683	2,0283	$p > 0,05$

Como não se obteve diferença significativa, pode-se dizer que os meninos e as meninas obtiveram desempenho idêntico nesta prova, o mesmo resultado encontrado por Utsumi (2000) em estudantes da 8ª série e Lima (2001) em estudantes de 6ª, 7ª e 8ª séries. Mas ressalta-se que a média relativa ao conhecimento de procedimento destes estudantes foi abaixo de 5,0, apontando um desempenho insatisfatório tanto do gênero feminino quanto do gênero masculino, o mesmo resultado encontrado através dos dados obtidos relativos ao conhecimento declarativo na tabela 31.

Tabela 38: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento segundo a reprovação

Reprovação	N	Média	Desvio Padrão	Estatística
Sim	10	1,6950	1,9468	t (94) = -2,350
Não	86	3,3339	2,1018	$p < 0,05$

Os dados obtidos apresentados na Tabela 38 indicam diferença significativa em relação ao conhecimento de procedimentos dos alunos e a variável reprovação. Sendo assim, pode-se dizer que há relação entre o conhecimento de

procedimento dos estudantes, e a reprovação deles em alguma série, o mesmo resultado obtido na análise dos dados obtidos do conhecimento declarativo na Tabela 32, sendo que os estudantes que afirmaram terem sido reprovados em alguma série mostraram um desempenho mais baixo do que os alunos que não reprovaram.

Tabela 39: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento o gostar de matemática

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Gosta de matemática	52	3,7511	2,1669	0,00	8,91
Não gosta de matemática	17	1,9138	1,7371	0,00	5,68
Gosta mais ou menos de matemática	27	2,8176	1,9433	0,00	5,70
Total	96	3,1632	2,1365	0,00	8,91
Estatística			F (2, 93) = 5,751; p < 0,01		

Diferentemente dos dados obtidos relacionados ao sentimento dos estudantes em relação à matemática e o conhecimento declarativo, os dados da Tabela 39 apresentam diferença significativa e o Teste *Tukey HSD* indicou que tais diferenças existem apenas com relação aos alunos que disseram que *gostam de matemática* e aqueles que declararam que *não gostam de matemática*. Isto indica que, os participantes que declararam que *gostam de matemática* obtiveram média significativamente maior quando comparada à média obtida pelos participantes que declararam que *não gostam de matemática*. Os mesmos resultados foram apontados por Lima (2001), e revelaram a existência de diferenças significativas entre os grupos que declaram não gostar de matemática, pois obtiveram as médias mais baixas.

Tabela 40: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento segundo o gostar de álgebra

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não respondeu	8	2,7475	1,9466	0,00	5,59
Sim	15	4,4833	2,5729	0,00	8,91
Não	40	2,9788	2,0887	0,00	7,30
Mais ou menos	18	3,0206	1,9636	0,00	6,39
Não sabe	15	2,7277	1,8260	0,00	5,70
Total	96	3,1632	2,1365	0,00	8,91
Estatística			$F(4, 91) = 1{,}818$; $p > 0{,}05$		

Ao contrário dos resultados obtidos na análise do sentimento em relação à álgebra e o conhecimento declarativo, os dados da Tabela 40 não apresentam diferença significativa. Mas foi possível observar que ocorreu uma diferença numérica superior entre a média dos participantes que afirmaram que *gostam de álgebra* e a média dos alunos que afirmaram que *não gostam de álgebra*.

Tabela 41: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento de acordo com o conteúdo da álgebra que tem mais facilidade

Respostas	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não sabe	58	3,0579	2,0968	0,00	7,30
Todos	7	5,3357	2,6062	2,25	8,91
Nenhum	10	1,8650	1,6656	0,00	4,93
Alguns conteúdos/Equações/Teorema de Pitágoras/Operações	21	3,3479	1,8178	0,00	6,34
Total	96	3,1632	2,1365	0,00	8,91
Estatística			$F(3, 92) = 4{,}110$; $p < 0{,}01$		

Segundo a Tabela 41, existe uma diferença significativa entre o conhecimento de procedimento e a variável "conteúdo da álgebra que tem mais

facilidade", o mesmo resultado encontrado na análise dos dados coletados com relação ao conhecimento declarativo. Mas o teste *Tukey HSD* indicou que tais diferenças existem entre as médias dos participantes que afirmaram que *não sabem* qual conteúdo da álgebra tem mais facilidade, e os que declararam ter facilidade em *todos os conteúdos da álgebra*, e ainda entre os participantes que declararam não ter facilidade em *nenhum conteúdo da álgebra* e aqueles que declararam ter facilidade em *todos os conteúdos da álgebra*.

Tabela 42: Estatística relativa ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento de acordo com o conteúdo de álgebra que tem mais dificuldade

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Não sabe	62	3,1059	2,0938	0,00	7,30
Todos	8	2,0338	1,7319	0,00	4,93
Nenhum	9	5,1466	2,4672	2,25	8,91
Alguns conteúdos/Equação 2º grau/Operações/Função/Expressão Algébrica/Interpretar problemas	17	2,8535	1,7517	0,00	5,52
Total	96	3,1632	2,1365	0,00	8,91
Estatística		$F(3,92) = 3,767$; $p < 0,05$			

Conforme a Tabela 42 existe diferença significativa, e o Teste *Tukey HSD* indica que essas diferenças ocorrem entre as médias dos alunos que declararam ter dificuldade em *todos os conteúdos da álgebra* e aqueles que declaram ter dificuldade em *nenhum conteúdo;* entre aqueles que declararam que *não sabem em qual conteúdo* tem mais dificuldade e aqueles que não tem dificuldade *nenhum conteúdo da álgebra*, o mesmo resultado obtido em relação ao conhecimento declarativo. E ainda, obteve-se diferença significativa entre aqueles que declararam ter dificuldades em *alguns conteúdos* e aqueles que declararam não ter dificuldades em *nenhum conteúdo*.

Análise dos resultados obtidos nos problemas matemáticos de acordo com o procedimento utilizado

Tabela 43: Estatística relativa ao desempenho na questão 3 da prova de conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado

Procedimento	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Em branco	28	0,0000	0,0000	0,00	0,00
Aritmético	54	0,5370	0,5033	0,00	1,00
Algébrico	13	0,9231	0,2774	0,00	1,00
Não identificado	1	0,0000	-	0,00	0,00
Total	96	0,4271	0,4973	0,00	1,00

Não foi garantida a homogeneidade de variância, razão pela qual não foi possível realizar a ANOVA neste caso. Mas, como se pode observar na Tabela 43, ocorreu um predomínio da utilização do procedimento *aritmético* nesta questão, e apesar disso a média dos participantes que utilizaram o procedimento *algébrico* foi maior.

Tabela 44: Estatística relativa ao desempenho na questão 5 da prova de conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado

Resposta	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Em branco	20	0,0000	0,0000	0,00	0,00
Aritmético	39	0,9231	0,2700	0,00	1,00
Algébrico	32	0,8438	0,3689	0,00	1,00
Não identificado	5	0,8000	0,4472	0,00	1,00
Total	96	0,6979	0,4616	0,00	1,00
Estatística	$F(3,92) = 49,031$; $p < 0,001$				

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

De acordo com a Tabela 44 existe diferença significativa entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução da questão 5, e o teste *Tukey HSD* indicou que essas diferenças existem na comparação das médias entre os alunos que utilizaram os procedimentos *aritmético*, *algébrico* e *não identificado* e aqueles considerados *em branco*. O procedimento mais utilizado para solucionar a questão pelos participantes foi o *aritmético*. Apesar disso, ocorreu uma pequena diferença superior da média dos participantes que utilizaram o procedimento *aritmético* em relação à média dos que utilizaram o procedimento *algébrico*.

Tabela 45: Estatística relativa ao desempenho na questão 8a1 da prova de conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado.

Procedimento	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Em branco	17	0,0000	0,0000	0,00	0,00
Aritmético	70	0,1821	0,1120	0,00	0,25
Algébrico	6	0,2500	0,0000	0,25	0,25
Não identificado	3	0,0000	0,0000	0,00	0,00
Total	96	0,1484	0,1234	0,00	0,25
Estatística	$F(3,92) = 20,632$; $p < 0,001$				

Conforme a Tabela 45 existe diferença significativa entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução da questão 8a1, e o Teste *Tukey HSD* indicou que as diferenças existem na comparação das médias entre os participantes que utilizaram os procedimentos *aritmético*, *algébrico* e aqueles considerados *em branco* ou *não identificado*. Apesar de ter ocorrido um predomínio da utilização do procedimento *aritmético*, a média dos participantes que utilizaram o procedimento *algébrico* foi maior. E a maioria dos participantes solucionou a questão através do procedimento *aritmético*, pois não conseguiram reconhecer qual era a expressão que representava o problema, e erraram os demais itens da questão. De acordo com Mayer (1992), o primeiro e fundamental

passo para solucionar-se um problema constitui-se em conseguir representá-lo, ou seja, *traduzir cada proposição do problema em uma representação interna*. Wong (1997) em seu estudo verificou que os alunos encontravam mais dificuldades em manipular expressões algébricas com letras do que expressões com números, e segundo a autora isso pode indicar que eles não conseguem ativar na estrutura cognitiva os elementos apropriados da informação na mente.

Tabela 46: Estatística relativa ao desempenho na questão 8b da prova de conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado.

Procedimento	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Em branco	49	0,0000	0,0000	0,00	0,00
Aritmético	32	0,2188	0,2520	0,00	0,50
Algébrico	8	0,1100	0,2062	0,00	0,50
Não identificado	7	0,07143	0,1890	0,00	0,50
Total	96	0,08729	0,1895	0,00	0,50
Estatística			$F(3,92) = 11,525$; $p < 0,001$		

Conforme a Tabela 46 existe diferença significativa entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução da questão 8b, e o teste *Tukey HSD* indicou que as diferenças existem na comparação das médias entre os participantes que utilizaram o procedimento *aritmético*, e aqueles que deixaram *em branco* a questão. Houve também nesta questão um predomínio da utilização do procedimento *aritmético*, e a média dos participantes que utilizaram tal procedimento foi maior do que a média dos participantes que utilizaram o procedimento algébrico. O mesmo resultado foi encontrado no estudo de Stacey e Macgregor (1997), pois tornou possível os autores verificarem que, a maioria não conseguia escrever a equação solicitada no problema proposto, e ainda outros tentaram por métodos não algébricos. Dessa forma, enfatizaram que possivelmente estes estudantes não aprenderam a "pensar algebricamente", e por este motivo o estudante não consegue empregar as notações algébricas para

organizar, registrar e estender suas idéias na solução dos problemas algébricos. Nesta questão, os participantes também apresentaram dificuldades na etapa de representação do problema, o mesmo resultado encontrado por Alves (1999) e Pirola (2000).

Tabela 47: Estatística relativa ao desempenho na questão 10 da prova de conhecimento de procedimento de acordo com o procedimento utilizado.

Procedimento	N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Em branco	30	3,333E-02	0,1826	0,00	1,00
Aritmético	51	0,7843	0,4154	0,00	1,00
Algébrico	6	0,3333	0,5164	0,00	1,00
Não identificado	9	0,7778	0,4410	0,00	1,00
Total	96	0,5208	0,5022	0,00	1,00
Estatística		$F(3,92) = 28,191$; $p < 0,001$			

Os dados da Tabela 47 revelam a existência de diferença significativa entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução da questão 10, e o teste *Tukey HSD* indicou que as diferenças existem na comparação das médias entre os participantes que utilizaram os procedimentos *aritmético* e *não identificado*, e aqueles considerados *em branco*. E ainda entre aqueles que utilizaram o procedimento *aritmético* em relação àqueles que utilizaram o procedimento *algébrico*. Dessa forma, a análise possibilitou verificar a ocorrência da dificuldade dos participantes na etapa de representação do problema e, por este motivo a maioria dos alunos tentaram ou solucionaram a questão aritmeticamente.

De acordo com Rittle-Johnson, Siegler e Alibali (2001), o entendimento conceitual e a destreza de procedimentos são dois tipos de conhecimento considerados essenciais aos estudantes, e a capacidade no campo da matemática se estende em torno do desenvolvimento dos alunos e a conexão entre o conhecimento declarativo e o conhecimento dos procedimentos.

Tabela 48: Estatística relativa ao gênero e o sentimento em relação à álgebra

Gênero	Respostas					Total
	Não respondeu	Sim	Não	Mais ou menos	Não sabe	
Masculino	2	8	17	11	8	46
Feminino	6	7	23	7	7	50
Total	8	15	40	18	15	96
Estatística	$X^2(4) = 3{,}762;\ p > 0{,}05$					

Para os dados da Tabela 48 não foi encontrado diferença significativa entre o gênero e as respostas dos participantes sobre o sentimento em relação à álgebra. Isto significa que os meninos e as meninas não gostam igualmente de álgebra.

Tabela 49: Estatística relativa ao gênero e o sentimento em relação à matemática

Gênero	Respostas			Total
	Sim	Não	Mais ou menos	
Masculino	28	6	12	46
Feminino	24	11	15	50
Total	52	17	27	96
Estatística	$X^2(2) = 1{,}948;\ p > 0{,}05$			

Conforme os dados da Tabela 49 não existe diferença significativa entre o gênero e as respostas dos participantes sobre o sentimento em relação à matemática. Isto significa que os meninos e as meninas gostam igualmente de matemática.

Tabela 50: Estatística relativa à reprovação e o sentimento em relação à álgebra

Reprovação	Respostas					Total
	Não respondeu	Sim	Não	Mais ou menos	Não sabe	
Sim	0	1	5	2	2	10
	0%	10,0%	50,0%	20,0%	20,0%	100%
Não	8	14	35	16	13	86
	9,3%	16,3%	40,7%	18,6%	15,1%	100%
Total	8	15	40	18	15	96
	8,3%	15,6%	41,7%	18,8%	15,6%	100%

Como não foi possível aplicar o teste qui-quadrado, pois havia 50,0% de células com freqüência menor que cinco, a análise que foi realizada em termos percentuais de acordo com a tabela 50 e indicou que, dos participantes que declararam ter sido reprovado em alguma série, 50,0% afirmaram que *não gostam de álgebra*. Em relação aos participantes que declararam não ter sido reprovado em alguma série, a maioria (40,7%) também afirmou que *não gostam de álgebra*. Sendo assim, pode-se dizer que os participantes não gostam igualmente de álgebra.

Tabela 51: Estatística relativa ao tipo de procedimento que prevaleceu (nas questões 3, 5, 8a1, 8b e 10 referente ao conhecimento de procedimento) e o sentimento em relação à álgebra

Procedimento	Respostas					Total
	Não respondeu	Sim	Não	Mais ou menos	Não sabe	
Em branco	1	1	7	2	2	13
	7,7%	7,7%	53,8%	15,4%	15,4%	100%
Aritmético	6	7	26	15	10	64
	9,4%	10,9%	40,6%	23,4%	15,6%	100%
Algébrico	0	6	3	0	1	10
	0,0%	60,0%	30,0%	0,0%	10,0%	100%
Não identificado	0	0	2	0	0	2
	0,0%	0,0%	100%	0,0%	0,0%	100%
Aritmético e algébrico	1	1	2	1	2	7
	14,3%	14,3%	28,6%	14,3%	28,6%	100%
Total	8	15	40	18	15	96
	8,3%	15,6%	41,7%	18,8%	15,6%	100%

Para a classificação do tipo de procedimento que prevaleceu nas respostas dos participantes às questões 3, 5, 8a1, 8b e 10, referente ao conhecimento de procedimento, foram utilizados os seguintes critérios:

O procedimento foi classificado como *em branco* para os casos em que o aluno deixou todas as questões em branco. O procedimento foi classificado como *aritmético* quando havia um predomínio do procedimento aritmético na solução ou na tentativa solucionar as questões apresentadas. E ainda, o procedimento foi classificado como *algébrico* quando havia um predomínio do procedimento algébrico na solução ou na tentativa solucionar as questões apresentadas. E nos casos em que o aluno apresentou somente a resposta do problema foi classificado como *procedimento não identificado.* E quando havia um equilíbrio na utilização

dos procedimentos, tanto para algébrico quanto para o aritmético, o procedimento foi classificado como *aritmético e algébrico*. Ressalta-se que, para os casos onde os participantes deixaram a maioria das questões em branco, mas utilizou em alguma questão qualquer um dos procedimentos acima relacionados, exceto o procedimento *em branco*, esse então foi considerado o procedimento predominante.

Como não foi possível aplicar o teste qui-quadrado, pois havia 76,0% de células com freqüência menor que cinco, a análise que foi realizada em termos percentuais de acordo com a Tabela 51 indicou que 40,6% dos participantes que declararam que *não gostam de álgebra* utilizaram o procedimento *aritmético* e 30,0% utilizaram o procedimento *algébrico*. E dos participantes que declararam que *gostam de álgebra,* 60,0% utilizaram o procedimento *algébrico* e 10,9% utilizaram o procedimento *aritmético*.

Análise das notas obtidas nas provas matemáticas para avaliar o conhecimento declarativo e o conhecimento de procedimento

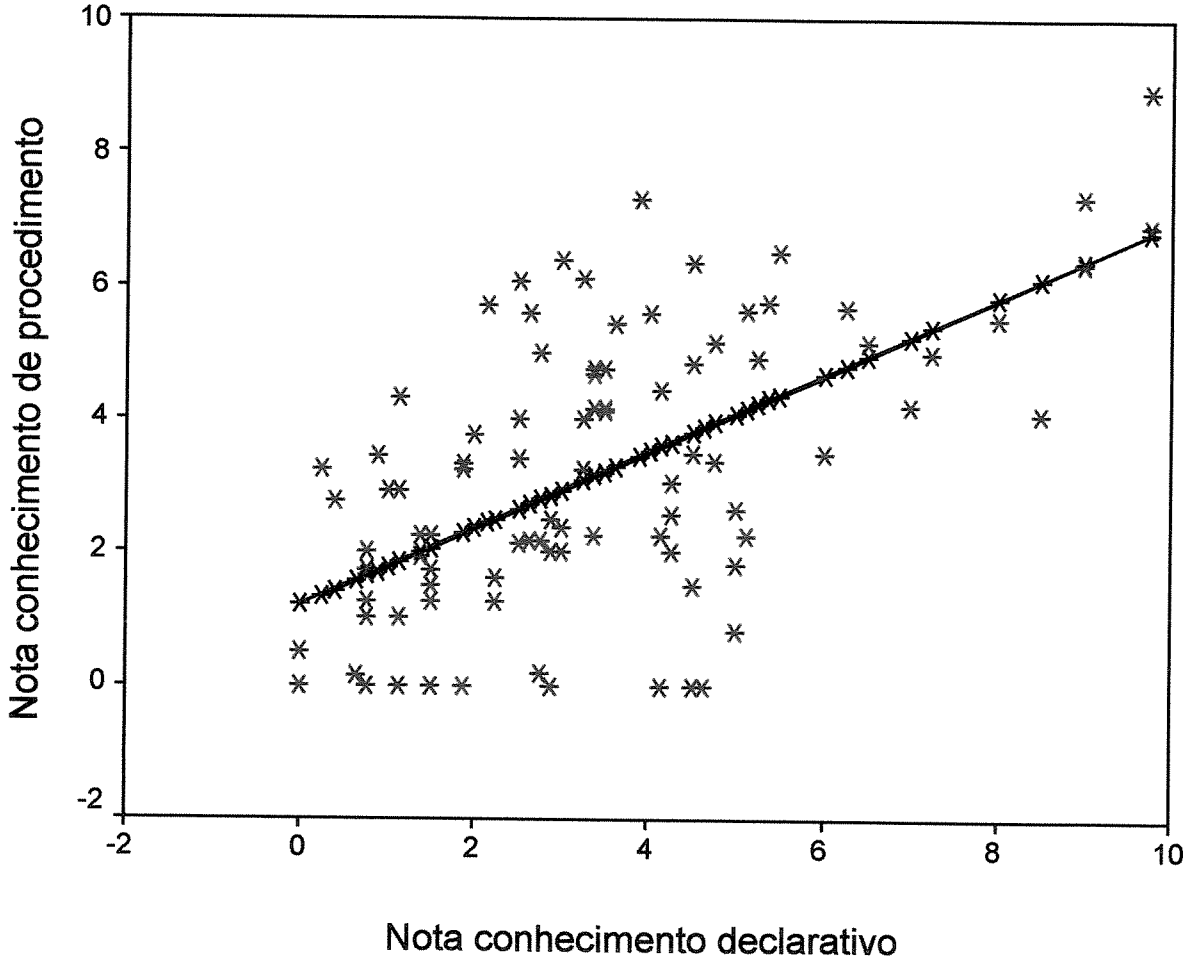


Figura 6: Comparação entre a nota do conhecimento de procedimento e a nota do conhecimento declarativo

Comparando a nota do conhecimento declarativo com a nota do conhecimento de procedimento, encontramos uma correlação positiva e moderada [r (96) = 0,598, p < 0,001], e utilizando a análise de regressão para modelar essa relação obtivemos a equação: Y = 1,208 + 0,575 * X, sendo X a nota atribuída ao conhecimento declarativo e Y a nota atribuída ao conhecimento de procedimento, com um coeficiente de determinação r^2 = 35,7%. Isso significa que para cada

ponto a mais na nota atribuída ao conhecimento declarativo, o participante aumentava em pouco mais de meio ponto o valor da nota atribuída ao conhecimento de procedimento (conforme apresentado na Figura 6). Além disso, o coeficiente de determinação nos permite considerar que 35,7% da variação das pontuações das notas atribuídas ao conhecimento de procedimento pode ser explicada pela variação da nota atribuída ao conhecimento declarativo. Isto mostrou que havia uma tendência de quanto melhor era a nota atribuída ao conhecimento declarativo, melhor era a nota atribuída ao conhecimento de procedimentos.

CAPÍTULO V

Conclusão e implicações do estudo

Resposta às questões de pesquisa

> *Uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa disciplina e investigar as razões desses erros.*
>
> *Lesley R. Booth*

Os resultados obtidos neste estudo indicaram que não houve diferença significativa entre o desempenho dos participantes do gênero feminino e do gênero masculino, o mesmo resultado encontrado por Utsumi (2000) e Lima (2001) em relação ao conhecimento declarativo e ao conhecimento de procedimento.

Observou-se também que não ocorreu diferença significativa quanto ao gênero e ao sentimento dos alunos em relação à álgebra e à Matemática e através verificou-se que os participantes do gênero masculino e os participantes do gênero feminino não gostam igualmente de álgebra. Porém, pode-se notar que os estudantes do gênero masculino e os do gênero feminino gostam igualmente de Matemática.

A partir da análise dos dados foi possível constatar que ocorreu uma diferença significativa ($p < 0,05$) entre o desempenho nas provas matemáticas que buscaram investigar o conhecimento declarativo e o conhecimento de procedimento em relação à variável reprovação, pois os alunos que declararam terem sido reprovados em alguma série apresentaram um desempenho mais baixo do que os participantes que declararam não terem sido reprovados.

Nesta amostra, não houve diferença significativa entre o desempenho na prova matemática sobre o conhecimento declarativo e o sentimento dos participantes em relação à Matemática. Quando a variável gostar de Matemática foi comparada ao desempenho na prova matemática sobre o conhecimento de procedimento, o resultado indicou que existe diferença significativa ($p< 0,01$), pois a média dos participantes que afirmaram *não gostar* de matemática foi mais baixa do que a média dos alunos que declararam *gostar* de matemática. Os mesmos resultados foram revelados no estudo de Lima (2001) e Loos (1998), que constatou que o predomínio de uma predisposição negativa em relação à Matemática pode estar relacionado a várias dificuldades na aprendizagem de álgebra.

A análise mostrou ainda a existência de diferença significativa ($p < 0,01$) entre o desempenho na prova de conhecimento declarativo e o sentimento dos participantes em relação à álgebra, pois os alunos que disseram *gostar* de álgebra obtiveram um desempenho melhor do que os que declararam não *gostar* de álgebra. Mas o mesmo não aconteceu com os resultados obtidos relacionados ao desempenho na prova de conhecimento de procedimento e o sentimento em relação à álgebra. Apesar disso, foi possível averiguar numericamente que os estudantes que declararam *não gostar* de álgebra também obtiveram médias inferiores em relação aos participantes que afirmaram *gostar* de álgebra. Em seu estudo, House (1998) enfatizou que a falta de sucesso em álgebra pode ser um fator interveniente no sucesso da disciplina Matemática. E o estudo de Pinto (1998) apontou que resultados insatisfatórios na aprendizagem de álgebra podem ser um obstáculo na aprendizagem Matemática.

Um outro resultado importante encontrado foi a existência de diferença significativa entre o desempenho na prova de conhecimento declarativo ($p< 0,05$) e na prova de conhecimento de procedimento ($p< 0,01$), quando se estabelece uma comparação entre a variável "conteúdo da álgebra que tem mais facilidade", e de acordo com as respostas dos participantes, verificou-se que 60,4% não conseguiram sequer definir em qual conteúdo da álgebra têm mais facilidade, talvez pelo motivo de não saberem o que é álgebra.

Ressalta-se ainda que, dos conteúdos que os estudantes declararam ter mais facilidade em álgebra, o mais citado foi "equação", ao contrário de resultado encontrado no estudo de Gomes (1998). E quando perguntados sobre qual conteúdo teria mais facilidade em álgebra, os estudantes que declararam não ter facilidade em *nenhum conteúdo* da álgebra obtiveram um desempenho inferior aos que afirmaram ter facilidade em todos os conteúdos. E com relação a este fato, Brito Lima e Falcão (1998) ressaltaram sobre a importância da maneira como são desenvolvidas as atividades em sala-de-aula, pois isto é importante tanto para a aprendizagem dos conceitos como também para a solução de problemas algébricos.

Na análise estatística referente ao desempenho nas duas provas propostas pelo estudo, verificou-se a existência de diferença significativa em relação à variável "conteúdo da álgebra que tem mais dificuldade". E é válido ressaltar que apenas um participante declarou ter dificuldade em expressões algébricas e um participante declarou ter dificuldades em trabalhar com equações do 2º grau e 2,1% declararam ter dificuldades na interpretação dos problemas. Isto comprova que o resultado está em concordância com o que os estudantes declararam, pois possivelmente a falta de conhecimento sobre os conceitos investigados é tamanha que eles sequer conseguem definir em qual conceito algébrico têm mais dificuldade.

Através da análise dos protocolos foi possível averiguar que, quando questionados sobre o que entendiam a respeito dos conceitos de equação, expressão algébrica, variável e incógnita, a maioria errou ao definí-los, e os conceitos onde ocorreram os maiores índices de erros foram nos conceitos de variável (85,4%) e expressão algébrica (77,1%), pois os participantes que não conseguiram definir expressão algébrica corretamente, conseqüentemente não conseguiram definir o que é variável e ainda não conseguiram estabelecer os exemplos solicitados relacionados a estes conceitos.

E ainda, com relação ao conceito de equação e incógnita, verificou-se que houve uma alta ocorrência de erros, sendo que 61,5% erraram a definição de

equação e 58,3% erraram o conceito de incógnita, e dessa forma, não conseguiram também estabelecer exemplos para estes conceitos investigados.

Nota-se através destes resultados o quanto a formação do conhecimento declarativo é necessária para aprendizagem de conceitos, pois sem este conhecimento a aprendizagem fica deficiente, já que os estudantes não conseguem incorporar os conceitos em sua estrutura cognitiva, dificultando a lembrança dos conceitos aprendidos. E nota-se também o quanto é importante o professor enfatizar durante o ensino dos conceitos de equação e expressão algébrica os atributos que o definem, e ainda apresentar exemplos e não-exemplos dos mesmos para que o estudante consiga, além de diferenciá-los de outros conceitos, recordá-los quando se depararem novamente com eles, pois isso possibilitará ao aluno a formação dos princípios.

Com relação à estatística relativa ao desempenho nos problemas propostos na prova matemática que buscou investigar o conhecimento de procedimento e o tipo de procedimento utilizado para a solução dos problemas, verificou-se que houve um predomínio da utilização do procedimento *aritmético,* e observou-se a existência de diferença significativa ($p < 0,001$) entre o desempenho nas questões e o tipo de procedimento utilizado pelo aluno.

Observou-se ainda, através da análise das questões referentes ao conhecimento de procedimento que, onde se solicitava ao aluno reconhecer qual era a equação ou a expressão que representava o problema, a maioria dos alunos não conseguiu identificá-las, o mesmo resultado encontrado por Stacey e Macgregor (1997), e talvez por este motivo a maioria dos participantes solucionaram os problemas através de procedimentos aritméticos, resultados encontrados também por Utsumi (2000) e Lima (2001).

Ressalta-se que alguns problemas propostos permitem a solução aritmética. Porém, outros não, como por exemplo o problema 8, pois os alunos que não conseguiram identificar qual era a expressão que representava o problema neste caso não conseguiram solucionar os demais itens da questão. Sendo assim, pode-se dizer que existe relação entre o desempenho e o tipo de procedimento utilizado na solução de problemas algébricos.

Conforme Mayer (1992), para que o estudante consiga solucionar um problema é necessário primeiramente que consiga representá-lo, isto é, *traduzir cada proposição do problema em uma representação interna* (p. 147). Isto explica o fato da maioria dos participantes encontrar dificuldades para traduzir uma sentença da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática.

Constatou-se que não houve diferença significativa ($p>0,05$) em relação ao desempenho dos participantes das duas escolas investigadas, o mesmo resultado encontrado por Alves (1999), tanto para o conhecimento declarativo quanto para o conhecimento de procedimento. E os resultados também apontaram que as médias nas duas provas matemática foram abaixo de 5,0, e portanto o desempenho desses alunos foi considerado insatisfatório.

CAPÍTULO VI

Considerações finais

A principal diferença entre a aritmética e a álgebra está na distinção entre as operações utilizadas no processo de resolver equações e as operações indicadas nessas equações.

Carolyn Kieran

A proposta do presente estudo parte da identificação das dificuldades encontrada pelos alunos quando lhes são propostas atividades envolvendo conceitos algébricos.

Invariavelmente, conclui-se que tais dificuldades têm correlação direta com a formação dos conhecimentos declarativo e de procedimento.

Sem afastar a responsabilidade decorrente da qualidade do ensino fundamental da rede pública, muitas vezes motorizada pelo desempenho do professor, e não do aluno, é certo que a motivação deste na solução de problemas matemáticos decorre de sua capacidade de lidar com os conceitos nela envolvidos.

Para que o aluno obtenha sucesso na solução de problemas algébricos é necessário que ele desenvolva uma formação de conceitos adequada e completa, onde é necessário inicialmente saber o conceito envolvido para posteriormente selecionar os procedimentos corretos de solução do problema.

Partindo-se disso, conclui-se que o conhecimento declarativo está inter-relacionado com o conhecimento de procedimentos, pilares fundamentais e inter-dependentes para um bom desempenho na solução de problemas, pois a ativação do conhecimento conceitual, bem como o domínio das técnicas e estratégias, são

importantes fatores para o desenvolvimento da sua capacidade para solucionar problemas matemáticos.

Levando-se em consideração os níveis de formação conceitual, é necessário que o professor tenha condições de buscar a identificação do nível conceitual dos seus alunos, para então dar prosseguimento ao ensino dos conceitos necessários.

O que acontece hoje com o ensino da álgebra é que estes conceitos são apresentados aos alunos de forma aleatória, enfatizando somente as fórmulas e suas manipulações, de uma forma totalmente desarticulada com qualquer outro conteúdo matemático, dificultando ao aluno o estabelecimento de relações entre o conceito aprendido e os outros conceitos, impedindo assim formação dos princípios. É o que está sendo deixado de lado.

Para que os alunos tenham uma satisfatória formação de conceitos algébricos e para que consigam um desenvolvimento do pensamento algébrico sólido, o ensino da álgebra deve estar articulado com os conceitos aritméticos desde os ciclos iniciais, para permitir ao aluno o desenvolvimento do pensamento abstrato e a capacidade para generalizar os conceitos nas séries mais avançadas.

Dessa forma, é necessário que os professores de Matemática estejam sempre engajados em cursos de formação continuada que proporcionem a eles o contato com atividades envolvendo os conteúdos pedagógicos, que incentivem efetivamente a busca de ferramentas através da literatura existente nas universidades para lidarem não só com suas próprias dificuldades, mas também com as dificuldades de seus alunos, e ainda elaborar atividades que desenvolvam os conteúdos específicos da Matemática de uma forma geral, para que adquiram subsídios que possibilitem exercitar e atuar de forma eficaz durante o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, especificamente os conceitos algébricos.

É necessário ainda que mudanças sejam feitas no currículo da Matemática, buscando relacionar o ensino da álgebra com o ensino da aritmética, já que suas operações estão igualmente relacionadas, evitando assim que os alunos encontrem dificuldades na aprendizagem dos conceitos algébricos, tais como as

que foram encontradas neste estudo, e ainda que essas dificuldades sejam transportadas para as séries posteriores. E o professor deve proporcionar aos estudantes atividades que apresentem exemplos e não-exemplos dos conceitos ensinados para que os alunos tenham condições de formarem os conceitos no nível formal.

Além das mudanças que devem ser realizadas no ensino da álgebra, é importante de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e Usiskin (2001), que o ensino da álgebra enfatize as várias concepções, ou seja, as várias dimensões da álgebra no decorrer do ensino fundamental.

Segundo Usiskin (2001), as diversas concepções da álgebra têm relação com os diferentes usos das variáveis e, portanto, segundo a autora, tentar enquadrar o conceito de variável em uma única concepção pode desencadear uma supersimplificação, distorcendo dessa forma os objetos da álgebra.

Inicialmente, a primeira concepção trata a álgebra como aritmética generalizada. Nesta concepção, é habitual pensar as variáveis como generalizadora de modelos, como por exemplo, 3 + 5 x 7 = 5 x 7 + 3 como a + b = b + a. O modelo 3 x 5 = 15

2 x 5 = 10

1 x 5 = 5

0 x 5 = 0

é desenvolvido desta forma, envolvendo a multiplicação por números negativos (o que de acordo com a autora, nesta concepção, muitas vezes é considerado álgebra, e não aritmética):

-1 x 5 = -5

-2 x 5 = -10

generaliza-se então essa idéia extraindo propriedades como: -x . y = -xy

Nessa concepção, as instruções-chave para o aluno são traduzir e generalizar, e isto é importante tanto para o ensino da álgebra quanto para o ensino da aritmética.

A segunda concepção trata a álgebra como um estudo de procedimentos para solucionar determinados tipos de problemas. A partir do problema

"*Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Encontrar o número*", pode-se traduzir tal problema para a linguagem da álgebra, tal como $5x + 3 = 40$ e solucioná-lo somando-se –3 a ambos os membros; $5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$ posteriormente fazer a simplificação $5x = 37$ o resultado será $x = 7,4$.

Nesta concepção de álgebra, as variáveis são *incógnitas* ou *constantes*, e enquanto as instruções-chave no uso da variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, nesta situação as instruções-chave são simplificar e resolver.

A terceira concepção trata a álgebra como o estudo de relações entre grandezas. Por exemplo, quando escrevemos A = b.h (fórmula da área de um triângulo retângulo), estamos expressando uma relação entre três grandezas, pois neste caso não se tem a percepção de estar trabalhando com uma incógnita, porque não estamos solucionando nada neste caso. E a diferença entre esta concepção e a concepção anterior é que neste caso as variáveis realmente *variam*.

E tal diferença fica clara através das respostas que os alunos habitualmente apresentam às perguntas do tipo: O que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior? A questão inicialmente parece simples, mas pode confundir os alunos, pois não pedimos neste caso o valor de x, e portanto x não é incógnita. Existe neste caso um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se assemelhe com a aritmética é um modelo essencialmente algébrico.

A quarta concepção trata a álgebra como o estudo das estruturas, e a reconhecemos como tal através das propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios, como por exemplo no seguinte problema: Fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$. A resposta à questão é $(3x + 22a)(x - 6a)$, e nesse caso é importante solicitar ao aluno testar a resposta multiplicando os binômios, utilizando o mesmo procedimento que empregaram inicialmente para obter a resposta. A concepção de variável nesta situação não coincide com nenhuma daquelas apontadas anteriormente, pois a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário.

Segundo Usiskin (2001), muitos estudantes pensam que todas as variáveis são letras que representam números, mas os valores assumidos por uma variável nem sempre são números, mesmo na matemática ensinada no ensino médio. Verifica-se este fato, por exemplo, na geometria onde as variáveis muitas vezes representam pontos.

Com relação às dificuldades dos estudantes em álgebra, de acordo com Booth (2001), é importante o professor tentar identificar os tipos de erros que os alunos normalmente cometem, e buscar investigá-los. E tratando sobre as diferenças de idade e experiência em álgebra, em seu estudo o autor verificou que alguns tipos de erros apareciam em todas as séries investigadas, e a partir disso, através de entrevistas com os alunos, identificou quatro aspectos que poderiam ter originado das idéias dos estudantes sobre eles:

1- o foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas";
2- o uso da notação e da convenção em álgebra;
3- o significado das letras e das variáveis;
4- os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

O foco da atividade algébrica é diferente da aritmética, pois em álgebra estabelecem-se procedimentos e relações para expressá-los em uma forma simplificada geral, e na aritmética o foco é encontrar determinadas respostas numéricas específicas.

Com relação à interpretação dos símbolos, os estudantes têm dificuldades para simplificar expressões do tipo 3a + 6b, pois segundo Booth (2001) isso decorre do fato de que, em aritmética, símbolos como + e = são interpretados comumente em termos de ações a serem efetuadas, de forma que + significa efetivamente realizar a operação solicitada, e = representa escrever a resposta. Portanto, isto leva o aluno a associar a junção dos dois termos, como é feita na aritmética, às operações e procedimentos algébricos, levando o estudante ao erro, como por exemplo em 3a + 6b = 9ab.

Uma outra questão que pode gerar dificuldades sobre o entendimento do significado das letras e das variáveis em álgebra é, por exemplo, quando o

estudante associa erroneamente a letra *m* para representar "metros", como acontece na aritmética, e não para representar o *número* de metros, como em álgebra, e isto decorre possivelmente da falta de referencial numérico por parte do aluno ao interpretar o significado das letras em álgebra. O autor sugere que para evitar esse tipo de erro é importante que o professor tome cuidado ao fazer afirmações do tipo "*a* representa o número de abacaxis", conduzindo o aluno a converter "3*a*" em "3 abacaxis", ao invés de "3 vezes o número de abacaxis", pois escrevendo o produto por extenso, pode-se evitar erros de conversão. Com relação ao entendimento de variável, torna-se importante o professor tomar cuidado ao utilizar sempre as mesmas letras para representar as variáveis, evitando assim que o aluno pense que tais letras representam valores únicos.

Na perspectiva das diferenças entre a aritmética e a álgebra, as dificuldades podem ocorrer na compreensão, por parte dos alunos, da generalização das relações e procedimentos dentro do contexto aritmético, pois se os estudantes tiverem concepções errôneas a respeito deles, poderão encontrar dificuldades na aprendizagem dos conceitos algébricos.

Outro conceito que com freqüência os estudantes encontram dificuldades são as expressões algébricas, e isto pode estar vinculado, segundo Chalouh e Herscovics (2001), às definições formais que são apresentadas aos alunos desde o princípio da aprendizagem deste conteúdo escolar, pois dizer que "uma variável é uma letra que representa um ou mais números", de acordo com os autores, é adequado somente para os professores de matemática, porque para os estudantes, principalmente os iniciantes, tal definição carece de significado, visto que para que os estudantes construam um significado para as expressões algébricas desde o início, é preciso que tenham em sua formação uma base cognitiva que o alicerce.

Para isso, os autores construíram um esquema de ensino onde as expressões são introduzidas como respostas aos problemas utilizando representação visual para os conceitos que já foram aprendidos previamente pelos alunos, tais como número de pontos de um quadro retangular, o comprimento de um segmento de reta e a área de um retângulo. E para colocar

em prática o esquema de ensino, levou-se em consideração inicialmente quatro obstáculos cognitivos:

1- Falta de referencial numérico no uso das letras pelo aluno – neste caso se o aluno não consegue visualizar as letras como representações dos números, realizar operações com tais letras torna-se sem sentido.
2- Incapacidade de aceitar a ausência de fechamento – em aritmética, por exemplo, "2 + 3" pode ser substituída por "5"; porém, uma expressão como "x + 3" não pode ser substituída por outro número, e portanto pode acontecer do aluno encontrar dificuldades em manter a expressão sem efetuar operações.
3- Dilema *nome-processo* – esta situação representa um outro obstáculo cognitivo; no caso anterior, "2 + 3" é o problema e "5" a resposta, enquanto que "x + 3" tanto descreve um *processo* (somar 3 com *x*) como dá *nome* à resposta.
4- *Justaposição* em álgebra – na aritmética a justaposição de dois números significa a adição (43 = 40 + 3); já na álgebra significa a multiplicação (4a = 4 . a).

A partir disso, considera-se de extrema importância que os professores, ao dar início ao ensino de expressões algébricas, considerem os obstáculos acima evidenciados para que a aprendizagem deste conceito seja significativa para os alunos, evitando que posteriormente surjam as dificuldades relacionadas a este conceito.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Revisão da literatura pertinente

Alves, E. V. (1999). *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio*, Campinas, SP: Faculdade de Educação, UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Educação).

Anderson, J. R (1990). *Cognitive Psychology and Its Implications*. 3 ª ed. Carnegie-Mellon University. New York: W. H. Freeman and Company.

Angón, Y. P. & Pozo, J. I. (1998). A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Juan Ignácio Pozo. Porto Alegre: Artmed. p. 140-165.

Blanchini, E. (1996). *Matemática*. Livro Didático. Editora Moderna. p. 21-80.

Booth, L. R. (2001). Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In *As idéias da álgebra*. (Higino, D. H., trad). Arthur F. Cosford, Alberto P. Shulte (org). The National Council of teachers of mathematics. São Paulo: Editora Atual. p. 23-36.

Bouton-Lewis, G. M., Cooper T. J., Atweh, B., Pillay, H., Wilss L. & Mutch S. (1997). The transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), 2, p. 191.

Brito, A. P. L. & Falcão, J. T. R. (1998). Desenvolvimento da representação algébrica em crianças de 1ª à 6ª série do 1º grau. In R. C. Lins (Ed). *Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo: PUC/SBEM, 2, p. 510-512.

Brito, M. R. F, Fini, L. D. T & Garcia, V. J. N. (1994). Um estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. *Pró-Posições*, 5, 1 (13), p. 37-44.

Brito, M. R. F. (2000a). Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. *Psicologia da Educação Matemática*. Teoria e pesquisa. Márcia Regina Ferreira de Brito (org). Florianópolis: Editora Insular. p. 69-83.

_____ (2000b). Este problema é difícil porque não é de escola! A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. *Temas em Psicologia da SBP 8*, 1, p. 93-109.

Brito, M. R. F. (2001). O "Pensar em voz alta" como uma técnica de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática. *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. Curitiba, PR. p.15-35.

Brito, M. R. F., Fini, L. D. T e Neumann, V. J (1994). Um Estudo Exploratório sobre as relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático, *Pró-Posições 13.* (4), p. 37-44.

Chalouh, L. & Herscovics, N. (2001). Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In *As idéias da álgebra*. (Higino, D. H., trad). Arthur F. Cosford, Alberto P. Shulte (org). The National Council of teachers of mathematics. São Paulo: Editora Atual. p. 23-36.

Chi, M. T. H. & Glaser, R. A (1992). Capacidade para a Solução de Problemas. In Sternberg, R.J. *As Capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações*. Porto Alegre: Artes Médicas. p. 250-275.

Cooper T. J., Bouton-Lewis, G. M., Atweh, B., Pillay, H., Wilss L. & Mutch S. (1997). The transition from arithmetic to algebra: Initial understanding of equals, operations and variable. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Edited by Pehkonen. Lahti: Finlândia. Vol 2, p. 89.

Echeverría, M.D.P.P. (1998). A solução de problemas em Matemática. In *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Juan Ignácio Pozo. Porto Alegre: Artmed. p. 43-65.

Echeverría, M.D.P.P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Juan Ignácio Pozo. Porto Alegre: Artmed. p. 13-42.

Eysenck, M. W., Keane, M T. (1994). *Psicologia Cognitiva: um manual introdutório.* (Gesser W. e Gesser M. H. F, trad.). . Porto Alegre: Artes Médicas.

Garcia, F. F. (1997). Aspectos históricos Del paso de la Aritmética al Álgebra. *Uno – Revista de Didáctica de las matemáticas*, 14, p. 75-91.

Hudson, B., Elliot, S. & Johnson S. (1997). Na analysis of student talk in 're-learling' algebra: From individual cognition to social pratice. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Edited by Pehkonen. Lahti: Finlândia. p.97-103, Volume 3.

Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist.* Editor. Paul R. Pintrich. Lawrence Erlabaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey.. Vol. 31, nº 2. p. 105-112.

Kieran, C. (1996). The chancing face of school algebra. *8º Congresso Internacional de Ed. Mat.*. Seleção Conferências. Sevilla. Julho, p. 271-285.

_____ (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. *Mathematics and Cognition*. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Edited by, Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick. Cambridge University Press. First Published. p.96-112.

Klausmeier, H.J., & Goodwin, W. (1977). *Manual de Psicologia Educacional* - aprendizagem e capacidades humanas: (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo:Harper & Row.

Lima, V. S. (2001). *Solução de problemas: Habilidadades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade.* Tese de Doutorado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Lins, R. C. & Gimenes, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.* São Paulo: Papirus.

Loos, H. (1998). *Estudo exploratório acerca do papel da ansiedade na aprendizagem da matemática quando da introdução à álgebra elementar.* Universidade Federal de Pernambuco. (Dissertação de Mestrado).

Loos, H., Falcão, J. T. R. & Régnier, N. M. A. (2001). A ansiedade na aprendizagem da aritmética para a álgebra. In Márcia Regina Ferreira de Brito (organizadora). *Psicologia da Educação Matemática Teoria e Pesquisa.* Florianópolis: Insular. p. 235-261.

Lovett, M. C. & Anderson, J. R. (1996). History of success and current context in problem solving. *Cognitive Psychology*, Orlando, October, v. 31, n° 2. p. 169.

Macgregor, M. & Prince, E. (1999). Na exploration of aspects of language Proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*. vol. 30, p. 449-463.

Mayer, R. E. (1992). A capacidade para a matemática. *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações*. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas. p.144-167.

Moura, A R. L. & Sousa, M. C. (2003). O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois modos de ver. *ANAIS do II SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Santos/SP. p. 1-21.

National Council of Teacher of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standarts for school mathematics*. Reston, VA: The council.

Neumann, V. J. G. (1995). *Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informação de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades de Krutetskii*. Dissertação de Mestrado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Oliveira, A.T. C. C. (2002). Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. *Educação Matemática em Revista*. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 9, n° 12, p. 35-39.

Oliveira, M. A. G. (1998). O ensino da álgebra elementar: depoimentos e reflexões daqueles que vêm fazendo a sua história. *Quinto Encontro Paulista de Educações Matemática*. EPEM. SBEM-SP. São José do Rio Preto. p. 274-277.

Panizza, M., Sadovsky, P & Sessa, C (1997). Two letters in one equation: unknowns or variables?. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*_(PME). Edited by Pehkonen. Lahti: Finlândia. vol 1, p.262.

Paulovich, L. (1998). A formação de conceitos algébricos iniciais em uma turma de 7ª série do 1° grau. *Quinto Encontro Paulista de Educações Matemática*. EPEM. SBEM-SP. São José do Rio Preto. p. 78-81.

Pinto, A. R. & Fiorentini, D. (1997). Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para "coisa". *Zetetiké*, vol. 5, n° 8, p. 45-62-63.

Pinto, H. (1998). As concepções de álgebra e de educação algébrica dos professores de matemática. In R. C. Lins (Ed). *Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo: PUC/SBEM, 2, p. 507-509.

Pirola, N. A (1995). *Um estudo sobra a formação dos conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de primeiro grau* - Dissertação de Mestrado - UNICAMP, 1995.

Pirola, N. A. (2000*). Soluções de problemas geométricos: Dificuldades e perspectivas*– Tese de Doutorado – UNICAMP.

Pirola, N. A, Quintiliano, L. C. & Proença, M. P. (2003). Um estudo sobre o desempenho de alunos do ensino médio em tarefas envolvendo o conceito de polígono e poliedro. *ANAIS do II SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Santos/SP.

Polya, G. (1986). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do Método Matemático*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Pozo, J. I. (1998). *Teorias cognitivas da aprendizagem*. Tradução: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre. Artes Médicas.

Quintiliano, L. C. & Brito, M. R. F. (2003). Aspectos envolvidos no desenvolvimento do pensamento algébrico. *III Conferencia Argentina de Educacion Matemática. Libro de Resúmenes.* SOAREM. Salta, Argentina. p. 107.

Rittle-Johnson B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: A interative process. *Journal of Educational Psychology.*, vol. 93, nº 2, p.346-362.

Sackur, C & Drouhard, J. P. (1997). Algebraic expressions and equations: an example of the evolution of the notions. Edited by Pehkonen. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*_(PME). Lahti: Finlânida. vol. 4, p.12-119.

Secretaria de Educação Fundamental (SEF/MEC) (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.

Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT/MEC) (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.

Sober, E. (2000). *Questions in Philosophy*. [on line]. Disponível em: http://www.criticanarede.com/fil_conhecimento.html

Skemp, R. (1980). Resolucion de problemas em matematicas. *Psicologia del aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata. p. 236-255.

Stacey, K. & Macgregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students'use of algebra. *Proceedings of the 21 st Conference of the*

*International Group for the Psychology of Mathematics Education*_(PME). Lahti: Finlânida. vol. 4, p. 194.

Sternberg, R. (1992). *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações.* Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas. p. 17-41.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva.* Porto Alegre. Artes Médicas.

Ursini, S. & Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable a study with starting college students). Edited by Pehkonen. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Lahti: Finlândia. vol. 1, p.254-261.

Wong, P. H. M., (1997). Numbers versus letters in algebraic manipulation: Which is more difficult*?. Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*_(PME). Edited by Pehkonen. Lahti: Finlândia. vol. 4, p.289.

Usikin, Z. (2001). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In *As idéias da álgebra.* The National Council of teachers of mathematics. Organizadores Arthur F. Cosford, Alberto P. Shulte. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual. p. 9-22.

Utsumi, M. C. (2000*). Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: Um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática.* Tese de Doutorado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Vermeulen, N., Olivier, A. & Human, P. (1996). Edited by Pehkonen. *Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Lahti: Finlânida. vol. 4, p. 379-386.

ANEXOS

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

Prezado(a) aluno(a),

Você está participando de uma pesquisa desenvolvida em nível de Mestrado na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da Profª Drª Márcia Regina F. de Brito.

Esta pesquisa tem como objetivo o estudo das dificuldades apresentadas por alunos de 8ª série relacionadas à álgebra.

Pedimos sua colaboração respondendo às questões a seguir, com a maior seriedade e sinceridade, pois suas respostas serão importantes para a validade da pesquisa. Os dados fornecidos serão mantidos em sigilo acadêmico.

Desde já, agradecemos sua contribuição e atenção porque serão de extrema importância para que os objetivos desta pesquisa sejam atingidos.

Luciane de Castro Quintiliano

Nome: _____

Idade: _____ anos

Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

1. Escolaridade do Pai: _____

2. Escolaridade da Mãe: _____

3. Você já repetiu alguma série?

( ) Sim ( ) Não

4. Se sim, qual(is) série(s)? _____

5. Você gosta de Matemática? _____

6. Você gosta de álgebra? _____

7. Qual parte da álgebra você tem mais facilidade para aprender?

8. Qual parte da álgebra você tem mais dificuldade para aprender?

ANEXO 2

INSTRUMENTO UTILIZADO PARA INVESTIGAÇÃO DO CONHECIMENTO DECLARATIVO

INVESTIGAÇÃO SOBRE O CONHECIMENTO DECLARATIVO DOS CONCEITOS DE EQUAÇÃO, EXPRESSÃO ALGÉBRICA, VARIÁVEIS E INCÓGNITAS

1 - Explique o que você entende sobre os conceitos abaixo e dê dois exemplos.

a) O que é equação?

Exemplos:

b) O que é expressão algébrica?

Exemplos:

c) O que é variável?

Exemplos:

d) O que é incógnita?

Exemplos:

2 – Coloque **EQ** para os exemplos que correspondem a Equação e **EA** para os exemplos que correspondem a Expressão Algébrica.

a) ( ) $5(7-x)+3x$

b) ( ) $5y-1=y+5$

c) ( ) $ax-2x+ay-2y$

d) ( ) $0=4x-\frac{1}{3}(x+1)$

e) ( ) x^2-x

f) ( ) $2x-\frac{a}{3}=ax-2$

g) ( ) $(a+b)^2-c^2$

h) ( ) p^2

3 – Identificar com (X) em qual situação a letra representa uma incógnita e em qual situação representa uma variável.

a) I . $3x+2=5$
II . $3x+2-5$

I . variável ( ) incógnita ( )
II . variável ( ) incógnita ( )

b) I . $3m+2=5$
II . $3m+2-5$

I . variável ( ) incógnita ( )
II . variável ( ) incógnita ( )

c) I . $\frac{4}{3}x+7-x$

II . $\frac{4}{3}x+7=x$

I . variável ( ) incógnita ( )
II . variável ( ) incógnita ( )

d) I . $\frac{4}{3}y+7-y$

II . $\frac{4}{3}y+7=y$

I . variável ( ) incógnita ( )
II . variável ( ) incógnita ( )

ANEXO 3

INSTRUMENTO UTILIZADO PARA INVESTIGAÇÃO DO CONHECIMENTO DE PROCEDIMENTO

INVESTIGAÇÃO SOBRE O CONHECIMENTO DE PROCEDIMENTO DOS CONCEITOS DE EQUAÇÃO, EXPRESSÃO ALGÉBRICA, VARIÁVEIS E INCÓGNITAS

Prezado(a) aluno(a)

Esta prova faz parte de uma pesquisa que estamos realizando com o objetivo de investigar as principais dificuldades dos estudantes ao trabalharem com conceitos algébricos. Sua participação é muito importante. Para isso, é necessário que você deixe registradas no papel todas as operações realizadas nesta prova e descreva como pensou para solucionar a questão. Mas, se não souber responder a alguma questão, por favor, não a deixe em branco, escreva suas principais dificuldades.

Desde já, agradecemos sua colaboração.

Luciane de Castro Quintiliano
PSIEM – Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática
UNICAMP

1) Determinar o valor dos termos desconhecidos:

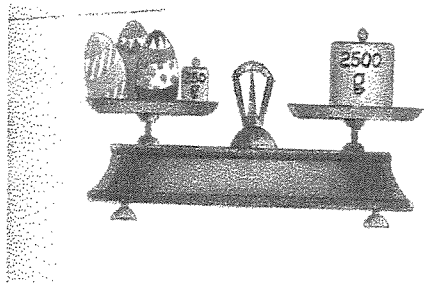
a) $3x - 5 = 0$	b) $3ax - 2 = ax + 3$
c) $\frac{3}{x} + \frac{5}{2} = 4$	d) $\frac{a(x-2)}{3} = \frac{a+5}{2}$
e) $3\left(\frac{1}{2}+1\right) = 4x$	f) $-4z + 4 = 8$

2) Simplificar quando possível:

a) 3x + 8y +x	b) (a – b) + b
c) 3a - (b + a)	d)2a + 5b
e) $\frac{ax}{bx}$	f) $\frac{a + x}{b + x}$

3) O esquema abaixo representa uma balança em equilíbrio.

Os três ovos de Páscoa têm pesos iguais. Qual o peso de cada ovo?



Extraído de Bianchini, E., (1997,p. 97). Ed Moderna. 6ª série.

4) Resolva:

a) Encontre um número tal que, se 8 mais o triplo deste número for divido por 2, o resultado será o triplo deste número menos 11.
b) $\frac{(8+3x)}{2} = 3x - 11$

5) Pensei em um número. Multipliquei por 3 e somei 4. Deu 40. Em que número pensei?

6) Calcule o valor numérico das expressões:

a) 2a + 3b, para a = 5 e b = - 1
b) $\frac{x+y}{x-y}$, para x = 4 e y = 2

7) Qual é o valor da expressão $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{2-x}$, para $x = -\dfrac{1}{2}$.

8) a) Seu João faz pequenos fretes urbanos com sua perua cobrando uma taxa inicial de R$ 20,00 e mais R$ 6,00 por quilômetro rodado.

a_1) Quanto pagaria uma pessoa se viajasse 15 km com a perua?

a_2) Indicando por x o número de quilômetros rodados, qual a expressão que representa o preço a ser pago por uma viagem qualquer?

a_3) Qual o valor numérico da expressão para x = 6?

b) Num restaurante, Fernando pagou para si e seus convidados a quantia de R$ 48,00. Na mesa ao lado, Patrícia e seus convidados gastaram R$ 80,00. Patricia tinha dois convidados a mais que Fernando. Todos gastaram a mesma quantia. Quantos eram os convidados de Patricia?

9) Num estacionamento encontram-se x motos e y carros. A expressão que representa o número total de rodas é de 2x + 4y. Qual o número de rodas se tivermos 12 motos e 15 carros?

10) Uma comissão municipal de esportes ofereceu 72 bolas, para treinamento, às equipes de futebol que participariam de um Torneio. No momento da distribuição, uma equipe desistiu de participar. Com isso cada uma das equipes recebeu 9 bolas. Quantas equipes participaram do torneio?