UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelagem Matemática: Considerações sobre a visão do estudante em relação à matemática, seu ensino e aprendizagem.

Autor: Patrizia Palmieri
Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Patrizia Palmieri e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data:

Assinatura:...

Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

Vera Lo Figueiredo

2006

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP

	Palmieri, Patrizia
P185m	Modelagem matemática : considerações sobre a visão do estudante em relação a matemática, seu ensino e aprendizagem / Patrizia Pamieri. – Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador : João Frederico da Costa Azevedo Meyer. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.
	1. Engenharia - Estudo e ensino. 2. Concepção. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Pesquisa qualitativa. I. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.
	06-271-BFE

Keywords: **E**ngineering - Study and Education; Conception; Mathematics – Study and teaching; Qualitative research
Área de concentração: Educação matemática
Titulação: Mestre em Educação
Banca examinadora: Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
Prof. Dr. Dario Fiorentini
Profa. Dra. Vera Lúcia Xavier Figueiredo
Data da defesa: 31/07/06

Agradecimentos

Ao professor Dr. Geraldo Pompeu Júnior, por ter me incentivado a realizar este trabalho, pelos importantes conselhos e pelas valiosas e indeléveis horas de aprendizado.

Ao professor Dr. João Frederico C. A. Meyer, o Zio Joni, pela paciência, segurança e pelo apoio dado na conclusão desta pesquisa. Também pelas “injeções de ânimo”.

À professora Dr. Maria do Carmo D. Mendonça, pela seriedade e cuidado com os quais sempre tratou o meu trabalho, concedendo-me imprescindíveis sugestões.

Aos alunos, professores e funcionários da FACENS que muito contribuíram para a realização desses estudos.

À querida amiga Maura, pela amizade e confiança, pelo aconchego de sua casa e afeto de seus lindos filhos.

A todos aqui de casa que de um modo ou de outro contribuíram para que se realizasse esse trabalho.

Resumo

O objetivo central desta pesquisa é verificar se a modelagem matemática é um meio capaz de promover a transformação na visão dos alunos em relação à matemática, seu ensino e aprendizagem. Esta questão sustenta-se na possibilidade de articulação das propostas da modelagem matemática com as concepções emergentes de ciência e mundo.

Nessa perspectiva, a estratégia adotada baseia-se na elaboração de projetos realizados junto a alunos do primeiro ano de engenharia de computação, na disciplina intitulada Vetores e Geometria Analítica de uma faculdade privada.

Os procedimentos metodológicos utilizados caracterizam-na como uma pesquisa-ação. A principal fonte de informações emerge de questionários aplicados aos alunos antes e depois do trabalho com modelagem matemática.

Abstract

The central aim of this research is to verify if the mathematical modelling as a way to lead a transformation process on how to view mathematics, its teaching and learning. This is developed with the possibility of articulating mathematical modelling proposals vis-à-vis the influence emerging conceptions of science and world.

From this perspective, the adopted strategy is based upon the elaboration of projects for freshmen college students of a computer engineering course from a private institution.

The methodological procedures used characterize this work as an action research. The principal source of information comes from questionnaires applied to students before and after the work with mathematical modelling.

SUMÁRIO

- **INTRODUÇÃO**

  Apresentação 03

  Nossas questões 06

  A trajetória da pesquisa 08

- **CAPÍTULO I – O ENSINO DE MATEMÁTICA**

  Ao que estamos reagindo 13

- **CAPÍTULO II – DOS CAMINHOS DA CIÊNCIA**

  O pensamento dominante: contextos e influências 21

  O pensamento emergente: contextos e influências 27

  Novas perspectivas? 30

  O desafio na busca de uma diferente visão da matemática 33

- **CAPÍTULO III – A MODELAGEM MATEMÁTICA**

  A dinâmica da modelagem matemática 39

  A modelagem matemática e a Educação Matemática 50

- **CAPÍTULO IV – A PESQUISA DE CAMPO – METODOLOGIA**

  O plano de pesquisa 61

  Sobre a metodologia 65

  O pré-teste 67

  O trabalho com modelagem matemática 69

- **CAPÍTULO V – ANÁLISE**

  Uma análise de movimento 75

  Uma análise complementar 92

- **CAPÍTULO VI – CONCLUSÃO**

  Comentários e conclusões preliminares 99

  Conclusão final 104

- **BIBLIOGRAFIA** 105
- **ANEXOS**

INTRODUÇÃO

Apresentação

Eu não poderia começar este trabalho sem antes relatar, ainda que brevemente, meu contato e minhas experiências com a matemática enquanto estudante e, depois de formada, como profissional. Isto porque creio que um trabalho de caráter acadêmico, antes de ser estruturado como tal, deva ter tido suas origens em conjecturas advindas da própria história de vida de cada um.

Assim, procuro situar-me, mencionando, resumidamente, as influências, proporcionadas pelo sistema escolar, as quais julgo terem sido relevantes para a minha formação e para a de qualquer outro profissional que atua na área da educação matemática.

De modo geral, a concepção que um professor tem da matemática e da educação matemática está fortemente vinculada à sua vivência enquanto estudante. Em outras palavras, as concepções e atitudes com relação à matemática são, naturalmente, afetadas pelo contexto escolar no qual o estudante está inserido. Neste sentido, o modelo de educação sob o qual um professor teve sua formação terá um papel relevante na sua concepção inicial da matemática e de seu ensino.

Em geral, o agente mais direto neste processo é o comportamento do professor em sala de aula. O comportamento e a atitude de um professor com relação à disciplina que ministra têm fortes influências sobre seus alunos. Esta relação é destacada por D'Ambrósio (1996), ao afirmar:

> *Cada indivíduo tem a sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou.* (p. 91)

Nesta ótica, o futuro professor terá sua concepção de matemática e ensino impregnada do comportamento de seus professores, os quais terão transmitido, subjacentes a sua prática pedagógica, uma visão de um determinado modelo educacional.

Entretanto, à medida que o professor segue em sua profissão, sua visão de ensino poderá acompanhar os mesmos modelos da sua formação ou poderá ser transformada através da prática docente, cursos, observações críticas e reflexões teóricas.

É desse modo que me apresento, ou seja, como uma professora cuja formação se deu dentro dos padrões do paradigma dominante da educação atual, e que, apesar de suas influências, procura refletir criticamente sobre ele.

Passei anos tendo uma educação desvinculada de um contexto sociocultural, com a maioria de meus professores “despejando matéria” sem mencionar qualquer relação entre elas e a realidade. As aulas eram quase todas expositivas não dando oportunidade para que os alunos desenvolvessem uma consciência crítica[1] a respeito do conteúdo trabalhado. Isto significa que os alunos não tinham oportunidade de refletir sobre esse conteúdo, tanto do ponto de vista teórico quanto prático. E quando uma dessas oportunidades se apresentava, eu e a maioria de meus colegas não sabíamos como aproveitá-la.

Igualmente, a matemática me foi apresentada como uma disciplina isolada das outras disciplinas e da realidade. Eu a via como um saber estruturado por um conjunto de símbolos, regras e procedimentos os quais desenvolveriam minha capacidade de raciocinar logicamente.

---

[1] Na terminologia de Paulo Freire, segundo Borba (1997), “consciência pode ser “transitiva” ou “intransitiva”. Uma pessoa com consciência intransitiva não encadeia suas experiências uma com a outra; ela sempre vive o momento presente e portanto não pode fazer conexões importantes. É provável que ela mude apenas superficialmente, por exemplo, em resposta a modismos. Uma pessoa com consciência transitiva desenvolve uma maior perspectiva de reflexão que a permite fazer conexões, ligações entre suas diferentes experiências e portanto fazer mudanças significativas em resposta a estas experiências”. (p. 262)

Em particular, minhas atitudes com relação à matemática sempre foram positivas. E creio que este fato deva ter contribuído significativamente para a minha decisão de tornar-me professora de matemática.

Já atuando na área, e em busca de um crescimento profissional, enveredei pelos caminhos da educação matemática. Através de cursos, congressos e contatos com pessoas envolvidas com a área, eu comecei a refletir mais criticamente sobre meu papel enquanto educadora e professora de matemática.

Essas reflexões levaram-me a reconsiderar o conteúdo matemático e a forma com a qual ele vem sendo desenvolvido na maioria das instituições de ensino do país. Meus objetivos não mais se limitavam ao aperfeiçoamento de meu conhecimento matemático. Percebi que minha função, através da prática profissional do ensino de matemática, deveria ir além do conteúdo específico ensinado em sala de aula.

Neste caminho, através de um curso de especialização em Educação Matemática, conheci a modelagem matemática, bem como profissionais envolvidos com esta linha de trabalho. As possibilidades proporcionadas pela modelagem matemática como estratégia do processo de ensino e aprendizagem da matemática vieram ao encontro das minhas expectativas e preocupações sobre a educação matemática.

Este envolvimento foi fundamental para que eu pudesse transformar a minha concepção e prática de educação matemática até então enraizada no modelo predominante de ensino, em que o mestre é que sabe a verdade e a repete para o aluno receber, como verdade única, absoluta, objetiva, exata, ahistórica e impessoal. Além disso, a participação nesse curso incentivou-me a realizar esta investigação.

Nossas questões

Diante do contexto mencionado, no qual pretendemos orientar esta pesquisa, a questão geral e as questões mais específicas a serem investigadas podem ser delineadas como segue:

O problema de pesquisa constitui-se na investigação de possíveis transformações da visão de matemática dos alunos por meio de uma experiência baseada na modelagem matemática em sala de aula.

Para elucidarmos o nosso problema, consideramos para investigação as seguintes visões em relação à matemática:

1. A matemática é exata, no sentido de que esta fornece somente resultados únicos e corretos para os problemas, os quais descrevem, exatamente e sem qualquer ambigüidade, a natureza desses problemas.
2. A matemática é aproximada, no sentido de que esta pode fornecer resultados que são estimativas de uma situação/problema real, e que podem também ser falíveis para determinadas situações.
3. A matemática é essencialmente teórica, no sentido de que esta conduz à aquisição de conhecimentos abstratos, isto é, ela opõe-se à aquisição de conhecimentos práticos afastando-se da realidade.
4. A matemática está engajada na articulação teoria-prática, no sentido de que as relações entre a teoria e a prática matemáticas conduzem a uma apropriação mais ampla e significativa da própria matemática.
5. A matemática é universal, no sentido de que esta se aplica em todos os indivíduos, isto é, ela é comum a todos os homens.
6. A matemática é singular, no sentido de que esta é pertencente ou relativa a um indivíduo ou a um grupo de indivíduos, isto é, ela varia com o espaço e o sujeito.

7. A matemática é essencialmente transmitida, no sentido de que esta se transfere do professor para o aluno.
8. A matemática é construída, no sentido de que esta é produzida e organizada em conjunto com professores e alunos.
9. A matemática está associada a atividades silenciosas e isoladas, no sentido de que o grande “desafio” é conseguir compreendê-la apenas por meio da capacidade e do esforço abstrato individual.
10. A matemática também está associada a atividades de debates e em grupo, no sentido de que esta não é absoluta, podendo ser compreendida, modificada, produzida e reproduzida socialmente.

A trajetória da pesquisa

É bem verdade que, ao traçarmos o esboço inicial de uma investigação, tendemos a abrir um horizonte com muitas opções de direção. Embora tivéssemos a modelagem matemática e a visão de matemática de estudantes como elementos centrais da investigação, inseri-las num modo de pesquisa em Educação Matemática o qual pudesse contribuir para uma compreensão de seu uso no ensino e na aprendizagem da matemática foi um processo desafiador.

Nesse contexto, ao planejarmos nosso caminho neste trabalho, nos propusemos à tarefa de que a questão do “por que devemos considerar a modelagem matemática no contexto de ensino e de aprendizagem da matemática?” seria nosso ponto de partida e de chegada. E, segundo as perspectivas desta proposta, encaminhar uma reflexão a respeito de sua ligação com as concepções acerca da matemática.

Dessa forma, no quadro de justificativas, procuramos discutir a problemática do ensino e da aprendizagem da matemática, focalizando questões relativas à importância em se considerar a matemática em articulação com a realidade e as experiências dos estudantes. Prosseguindo nesta direção, foi se tornando claro para nós o atalho que une tais questões com os caminhos percorridos pela ciência.

A partir desta delimitação fazemos no capítulo III uma reflexão e um paralelo acerca das influências do pensamento dominante e emergente da ciência na perspectiva com a qual interpretamos o mundo. O que, de um modo ou de outro, nos conduziu a considerar os efeitos de tais influências nas concepções de ensino e aprendizagem da matemática.

Em seguida, buscamos entender o processo de modelagem matemática no contexto específico das atividades do matemático aplicado segundo quatro autores escolhidos segundo suas ideologias e práticas. Estendendo esta busca aos domínios da educação matemática, procuramos delinear qual seria o papel da modelagem matemática na tentativa de se alcançar novas perspectivas para o ensino e aprendizagem da matemática.

No capítulo V, mostramos, inicialmente, o perfil dos alunos sujeitos da pesquisa e as mudanças resultantes da aplicação do questionário como pré-teste. Os dados para análise são organizados em dois grupos: o grupo das questões de múltipla escolha e o grupo das questões abertas. No próximo capítulo, discutimos e refletimos sobre os resultados da pesquisa procurando nos orientar pelas questões específicas estabelecidas para investigação.

CAPÍTULO II – O ENSINO DE MATEMÁTICA

Ao que estamos reagindo...

De modo geral, uma das características do ensino como um todo, e do ensino da matemática em particular, é a sua desvinculação com a realidade do aluno e do contexto social, político e cultural no qual ele vive.

Recentemente, tem havido por parte de muitos educadores matemáticos, tanto no Brasil como em outros países, uma preocupação maior em desenvolver um ensino crítico de matemática, valorizando a sua associação com o cotidiano e voltado para a prática da cidadania. Um exemplo a este respeito, embora nem sempre vivenciado de fato, refere-se ao papel da matemática destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que tenta, por sua vez, delinear as perspectivas para o ensino fundamental.

> *O papel que a Matemática desempenha na formação básica do cidadão brasileiro norteia estes Parâmetros (...). Os alunos trazem para a escola conhecimentos, idéias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural (...).* (p. 31)

Contudo, o que normalmente vem sendo realizado gira em torno de práticas internalistas, no sentido de que os momentos pedagógicos em torno da matemática nascem e germinam no próprio terreno do ensino e da aprendizagem de matemática (MENDONÇA, 1996, p. 63). Isto é, em geral, as pequenas mudanças, quando ocorrem, limitam-se a questões específicas de um ou outro conteúdo programático no âmbito da sala de aula.

Na verdade, as relações matemáticas vêm sendo ensinadas em sala de aula, basicamente, como um conjunto imutável e exato de regras e procedimentos. Estes, por sua vez, são estudados por meio de exercícios repetitivos e mecânicos com uma exagerada manipulação de símbolos. Tal ação impede os alunos, professores, escola e comunidade de ver, entender e dar significados ao conteúdo matemático que estão desenvolvendo.

Podemos também observar que, algumas vezes, numa tentativa de propiciar uma compreensão mais significativa das noções matemáticas, adotam-se em sala de aula técnicas de resolução de problemas e/ou atividades envolvendo material concreto, como por exemplo, jogos, material dourado, Tangram, entre outras.

Entretanto, estes recursos parecem ser utilizados para justificar as próprias regras com a qual se vinha trabalhando. De certa forma, o aluno acaba por resolver muitos problemas utilizando-se de semelhantes regras e procedimentos encaminhados pelo professor. Além disso, os problemas, em sua grande maioria, referem-se a situações hipotéticas, quando não absurdas, de um cotidiano imaginário.

Para bem ilustrarmos, no que se refere à problemática da resolução de problemas em sala de aula considerada anteriormente, Mendonça (1993), ao qualificar como erro a estratégia do problema pronto, explica:

> *Quando qualificamos como erro a estratégia do problema pronto, estamos querendo dizer que a técnica não consiste num erro propriamente dito, mas que os seus objetivos raramente são alcançados. Em geral, o problema pronto contém em seu enunciado as relações entre os dados e a pergunta formulados de maneira explícita, dificultando, quase sempre, a abertura para dúvidas e outras considerações sobre tais dados.* (p. 269)

Igualmente, em muitas ocasiões, o uso do material concreto vem sendo empregado como recurso para justificar e visualizar essas mesmas regras e definições. E, em alguns casos, é visto apenas como uma alternativa para tornar a matemática mais atraente e divertida para os alunos.

Observamos, porém, que esta constatação não significa uma argumentação contra tais abordagens, mas uma indicação de que o atual ensino de matemática não consegue ir além da barreira de mudanças pontuais, e muitas vezes de caráter imediatista, do conteúdo matemático específico a ser desenvolvido.

Por um lado, uma parte significativa da dificuldade em transpor essas barreiras está associada, entre outras, à formação e à prática de professores e profissionais da área. Estes, quando em sua busca por idéias e práticas inovadoras, encontram um novo desafio, um novo modo, uma nova proposta, não conseguem implementá-los de maneira tanto satisfatória quanto continua.

Algumas das razões apontadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (199-) sobre o problema da implementação de idéias inovadoras por parte dos professores são:

> *Tanto as propostas curriculares como os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa ligados a universidades e a outras instituições brasileiras são ainda bastante desconhecidos de parte considerável dos professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que idéias ricas e inovadoras não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente ou recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis.* (p. 23)

Por outro lado, mesmo que o professor tenha incorporado e interpretado adequadamente tais idéias, implementá-las pode ser uma tarefa muito complicada. Em geral, a atual estrutura de ensino não favorece a prática de idéias novas, principalmente aquelas que procuram desenvolver conceitos matemáticos a partir de situações advindas da realidade dos educandos.

Sendo assim, numa instância maior, a dificuldade em transpor a barreira de um ensino essencialmente focalizado na transmissão de conteúdos para um ensino engajado com as necessidades da sociedade e com a realidade do aluno está, fundamentalmente, relacionada com as idéias e conceitos do atual sistema educacional.

Este sistema tem mantido disciplinas escolares, alunos e professores em situação de isolamento. E desse modo, no caso específico do ensino da matemática, tem sustentado o conhecimento matemático como autônomo, afastando-o das interações sociais.

Diante desse quadro, pensemos algumas questões sobre o ensino de matemática atual focalizando suas limitações referentes à sua ação no âmbito externo à matemática da sala de aula. Em outras palavras, consideremos uma reflexão sobre o atual ensino de matemática sob a ótica de que as conseqüências advindas deste ensino pouco estão contribuindo para dignificá-lo enquanto formador de um pensamento matemático mais amplo, o qual possa permitir aos estudantes e aos professores reconhecer e enfrentar situações novas que emergem de suas próprias realidades.

Pelo contrário, tal ensino vem criando na maioria dos alunos e da sociedade uma idéia de que a matemática escolar é autônoma. Além disso, vem desenvolvendo atitudes e sentimentos nem sempre favoráveis com relação a ela. Pois, para os alunos:

> *a matemática continua sendo importante, mas ao mesmo tempo, para muitos ela também é considerada como difícil, algumas vezes impossível, misteriosa, sem significado e chata. A matemática cria para alguns alunos um sentimento de medo, de falta de confiança, ou ainda um sentimento de ódio. Para outros ela ainda cria um sentimento de opressão. É como se os alunos estivessem sendo dominados por alguém que eles não conhecem quem.* (Bishop, 1988, p. 2)

Estes sentimentos dos alunos, todos relacionados entre si, podem conduzir a uma apropriação dos conhecimentos matemáticos de ação limitada. Uma ilustração nessa direção, embora nem sempre praticada, é destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (199-), ao dizer que:

> *A matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.* (p. 19)

E não apenas nessa medida, pois o exercício da cidadania também

> *... consiste na vivência de certos direitos e obrigações dentro de um estado democrático. Isto permite às pessoas – ao menos em tese – escolher seus governantes e legisladores por meio do voto, além de se organizarem de*

> *diferentes maneiras para influírem nos destinos do país ou da cidade, assumindo, assim, papel ativo nas transformações sociais.* (IMENES E LELLIS, 1995, p. 9)

Assim, esta prática, referida na literatura como internalista, de manter um ensino de matemática que não transcenda as suas barreiras do conteúdo específico não contribui no que se refere à formação de jovens que se desejem aptos a refletir sobre questões sociais, como pobreza, meio ambiente, saúde e educação, por exemplo.

Para que esta contribuição se efetive, é importante também que a prática na sala de aula seja desenvolvida de forma dialética[2], preparando dessa maneira os estudantes para uma relação constante com a natureza e a sociedade, a fim de que suas ações sejam colaborativas e não destrutivas.

É nessa perspectiva que julgamos essencial uma mudança na concepção de ensino, em particular do ensino de matemática. Isto, a princípio, possibilitaria uma transformação na concepção dos alunos sobre a matemática, bem como uma abertura para que novas propostas curriculares e metodológicas de ensino as quais poderiam garantir um ensino mais abrangente e significativo.

Muitos estudos têm sido realizados, neste sentido, tanto no Brasil como em outros países[3], o que indica não ser esta uma problemática exclusiva do ensino de matemática brasileiro. Fato que pode ser ilustrado por D'Ambrósio (1993) ao afirmar *"Enquanto nenhuma religião se universalizou, nenhuma língua se universalizou, nenhuma culinária nem medicina se universalizaram, a matemática se universalizou (...)" (pág. 10).*

---

[2] Uma das acepções modernas de dialética a define como "*o modo de pensar as contradições da realidade, o modo de compreender a realidade como essencialmente contraditória e em permanente transformação.*" (KONDER, 1981, p. 8)

[3] Ver, por exemplo, as seguintes obras de Ubiratan D'Ambrósio: Transdisciplinaridade (1997); Educação Matemática (1996); Etnomatemática (1993) e de Ole Skovsmose: Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education (1994); Competence and Reflective Kowing in Mathematics (1992); Educação Matemática e Democracia (1990).

Decorre, então, a necessidade de uma análise mais ampla sobre estas questões não se restringindo a tempo e espaço específicos. E, neste sentido, propomos como um meio primordial, o desfocar das concepções de ciência dominante para as emergentes, meio este que nós interpretamos como capaz de gerar mudanças efetivas no atual ensino de matemática.

Antes, porém, gostaríamos de colocar que, ao refletir sobre o ensino de matemática levando em conta as concepções de ciência dominante e emergente, isto vai ao encontro da atual crise de paradigmas científicos vigente, a qual, por sua vez, repercute no campo da educação em geral. Segundo Mendonça (Apud BRANDÃO, 1996, p.67), duas razões justificam o questionamento sobre tal repercussão no campo da Educação:

> *Por um lado, o isolamento do campo, fruto de uma ótica estreita e corporativa que busca, de forma infrutífera, delimitar fronteiras e resguardar esse campo da indesejável invasão de outros campos. Por outro lado, a inconsistência teórica decorre, em grande parte, desse mesmo isolamento, pois a Educação se constitui, dada a própria natureza do seu objeto de estudo, em um espaço necessariamente interdisciplinar.*

CAPÍTULO III – DOS CAMINHOS DA CIÊNCIA

O pensamento dominante: contextos e influências

É natural reconhecer que, anteriormente aos tempos ditos modernos[4], os homens já faziam ciência. Porém, o termo "ciência" ainda não existia e *"o conhecimento natural era difundido mais por acidente do que por desígnio"* (KNELLER, 1978, p. 34). De fato, não existia antes disso uma ciência hegemônica – em várias partes do globo cada civilização buscava seu próprio caminho para estudar a natureza.

Como exemplo, temos a civilização Egípcia cuja produção científica se caracteriza mais por resultados práticos do que por reflexões filosóficas; a civilização Mesopotâmica, por sua vez, utilizou e aperfeiçoou a escrita, fato de grande importância para o desenvolvimento da ciência abstrata e sua difusão. Esses povos antigos ocidentais, dentre outros, tiveram grande influência na cultura Grega. De todo modo, a cultura Grega foi aquela que mais influenciou os complexos caminhos percorridos pela ciência no ocidente.

Naturalmente, não era somente o ocidente que buscava compreender os fenômenos da natureza. No oriente, a civilização Chinesa também se desenvolvia neste sentido e com características diferentes daquelas ocidentais. Vale destacar que, para os chineses, o universo era como um vasto organismo do qual o homem e o mundo natural representam apenas uma parte. Esta forma, com a qual os chineses encaravam o mundo e, muitas das suas idéias, ainda estão sendo desenvolvidas. E como afirma Ronan (1991)

> *... o Ocidente está, em alguns casos, começando a se voltar para esses critérios, particularmente para a atitude holística dos chineses em relação ao universo, que hoje é vista como menos destrutiva do que certos aspectos da concepção ocidental da natureza.* (p. 69)

---

[4] Por volta do ano de 1600 até hoje.

A produção científica na cultura Grega teve diversos personagens importantes cujas idéias foram significativas para seu desenvolvimento. Dentre elas optamos por citar: Tales de Mileto (624 a.C.), Pitágoras (560 a.C.), Sócrates (470 a.C.), Platão (427 a.C.) e principalmente Aristóteles (384 a.C.) cujas idéias, da ótica da matemática, viriam a reger o pensamento ocidental até meados do século XV. O pensamento ocidental foi dominado, sucessivamente, por dois modelos: o de Aristóteles e o de Galileu. Neste sentido, uma breve descrição das concepções de mundo aristotélico ajuda a compreender as concepções atuais dos modelos e paradigmas dominantes da ciência[5].

Basicamente, o pensamento Aristotélico era de um mundo dicotômico, isto é, dividido entre o céu e a terra. O céu era o mundo imutável e eterno dos astros podendo ser descrito por leis matemáticas. A terra era o mundo sublunar, onde tudo era mutável, mortal e sujeito à paixões e à corrupção. Neste último, a descrição matemática podia ser apenas aproximativa. Para os aristotélicos, o interesse era mais o de saber por que se produz um processo do que como se produz. O conhecimento era *a priori*, não necessitando de experimentações para sua validação. Existia a visão de um mundo orgânico e inteligível. Na verdade, a visão de mundo dicotômico assentava-se em dois pilares: Aristóteles e a Igreja. Segundo Prigogine e Stenger (1997):

> *Um dos traços mais gerais que o estudo comparado das religiões propôs ler nas sociedades antigas é a divisão entre espaço profano e espaço sagrado; o espaço ordinário, submetido ao acaso, à degradação, insignificante, é separado do mundo sagrado, significante, subtraído à contingência e à história. É o mesmo contraste que Aristóteles supõe entre o mundo dos astros e o da natureza terrestre.* (p. 28)

Desse modo, a *ciência* se justificava como uma busca para compreender as coisas de Deus e da alma humana e o pensamento científico seguia um rumo

---

[5] "*Uma das leituras possíveis do que se chama de nascimento da ciência moderna faz da confrontação entre os aristotélicos e Galileu uma contraposição entre duas racionalidades centralizadas, uma sobre o mundo sublunar (o mundo organizado dos vivos), e a outra, sobre o mundo dos astros e das máquinas, associados por este ponto decisivo de serem ambos matematizáveis.*" (PRIGOGINE E STENGER ,1997, p. 29)

socialmente aceitável. Porém esta parceria ciência-religião começou a dissociar-se em meados do século XV.

De fato, a forma como o ser humano passou a encarar a natureza e a si mesmo mudou drasticamente nos séculos XVI e XVII. A revolução que se deu na concepção do universo cujas conseqüências foram especialmente transformadoras para a ciência e para a sociedade, teve como protagonistas três figuras principais: Galileu Galilei, René Descartes e Isaac Newton.

A revolução científica, assim como é denominada historicamente, iniciou-se com Copérnico que apresentou a concepção heliocêntrica do universo. Mas tudo indica ter sido Galileu quem iniciou a verdadeira mudança científica através de seus estudos de astronomia. E esta mudança viria a abrir as portas para a então chamada ciência moderna.

Muitas são as contraposições, no início da ciência moderna, entre o pensamento aristotélico e o pensamento Galileano , a começar pela forma com a qual se pretende descrever e compreender a natureza. O conhecimento *a priori* dá lugar ao conhecimento *a posteriori*, definindo um diálogo experimental com a natureza. Neste sentido, a matemática é utilizada como principal instrumento para a formulação e compreensão das leis da natureza.

Com efeito, o encontro entre o procedimento experimental e a utilização, a fundo, da matemática para a interpretação da natureza enfatizaria a importância dos seus aspectos quantitativos. Este encontro também permitiria uma resposta mais confiável e precisa do fenômeno estudado afastando-a do senso comum, visto que, segundo Prigogine e Stenger (1997, p. 30): “*A resposta da natureza é registrada com a maior precisão, mas a sua pertinência é avaliada em referência à idealização hipotética que guia a experiência: tudo mais é conversa, efeitos secundários, despiciendos”.*

Outro fervoroso defensor da experimentação científica, e que foi contemporâneo de Galileu, foi Francis Bacon. Neste contexto, Bacon formulou uma teoria clara do procedimento indutivo[6]. Para Bacon, o interesse da ciência deveria ser o de estender ao máximo o poder do homem sobre a natureza.

Como mencionado, o uso da matemática para descrever a natureza transformou-se em um critério dominante da ciência moderna. E, de uma certa forma, a necessidade de uma teoria matemática mais geral que impulsionasse a resolução de questões mais complexas deve ter, provavelmente, inspirado René Descartes a desenvolver um novo método de raciocínio que fosse capaz de unificar todo o saber humano e cujo modelo seria a inteligibilidade da matemática.

O método analítico cartesiano é baseado na intuição[7] e na dedução[8]. Sua finalidade era a de indicar um caminho para se chegar à verdade científica. Considerado, por muitos, o fundador da filosofia moderna, Descartes influenciou profundamente a visão ocidental de ciência e de mundo.

Vivendo numa época de conturbações e transformações sociais, políticas, religiosas e culturais, Descarte procura, definitivamente, colocar um fim na visão de ciência e de mundo aristotélica. A filosofia cartesiana reafirma a nova relação do homem com a natureza através da ciência cujo objetivo é o domínio e o controle dessa natureza.

---

[6] Fundamentado no determinismo, do ponto de vista epistemológico, a indução permite passar do particular ao universal. Ela generaliza a experiência proporcionando-lhe força de lei. (DUROZOI E ROUSSEL, 1996)

[7] A intuição, em Descartes, *"é a própria intuição racional, a "concepção firme de um espírito puro e atento, que nasce apenas da luz da razão"; marcada pelo selo da evidência, é o conhecimento das idéias claras e distintas, ou então a visão sintética do espírito que verifica o encadeamento lógico de uma demonstração."* (DUROZOI E ROUSSEL, 1996, p. 261)

[8] *"Qualifica-se um raciocínio de dedutível quando enuncia logicamente uma conclusão necessária a partir das proposições dadas".* (DUZODOI E ROUSSEL, 1996, p. 118). Para Descartes, a dedução estabelece o vínculo necessário entre duas verdades intuitivas.

A visão cartesiana da natureza era a de uma máquina, governada por leis matemáticas exatas cujos fenômenos podiam ser compreendidos reduzindo-os às suas partes constituintes. Ou seja,

> *Para Descartes, o universo material era uma máquina, nada além de uma máquina. Não havia propósito, vida ou espiritualidade na matéria. A natureza funcionava de acordo com leis mecânicas, e tudo no mundo material podia ser explicado em função da organização e do movimento de suas partes.* (CAPRA, 1982, p. 56)

Tal concepção, mecanicista, determinística e matematizável dos fenômenos físicos da natureza, parecia excluir os fenômenos da alma. De fato, Descarte baseava-se em dois domínios separados e independentes: o de mente e o de matéria.

A visão mecanicista da matéria e o dualismo entre mente e corpo viriam a influenciar significativamente o desenvolvimento das ciências humanas. De acordo com Capra (1982)

> *Em sua tentativa de construir uma ciência natural completa, Descartes estendeu sua concepção mecanicista da matéria aos organismos vivos. Plantas e animais passaram a ser considerados simples máquinas; os seres humanos eram habitados por uma alma racional que estava ligada ao corpo através da glândula pineal, no centro do cérebro. No que dizia respeito ao corpo humano era indistinguível de um animal - máquina.* (p. 56)

Contudo, não foi com Descartes o epílogo da revolução científica. Unificando os conhecimentos produzidos por Copérnico, Kepler, Galileu, Bacon e Descartes, Isaac Newton desenvolve teorias científicas que iriam permanecer absolutas até meados do século XX.

Newton, ao investigar as transformações sofridas pelo estado de movimento e de repouso dos corpos – um dos problemas centrais da física desde Galileu, atem-se ao fato de que estudar a aceleração é determinar as diferentes forças que agem sobre os pontos do sistema estudado.

A concepção de uma teoria pela qual com uma única força se determina o movimento dos corpos no sistema solar tornou-se um triunfo da ciência moderna. Assim, sob tal influência, Newton formulou as leis gerais da dinâmica cuja aplicação vai desde o movimento restrito dos átomos até as amplas trajetórias das estrelas de uma galáxia.

As leis gerais da dinâmica sintetizam pelo menos duas áreas convergentes de conhecimento, o da física e o da matemática. Neste processo, o universo passa a ser concebido como uma máquina harmoniosa e perfeita, sendo governado de acordo com leis matemáticas exatas. Em outras palavras, o modelo matemático seria equivalente ao universo no sentido de se poder prever os comportamentos a partir de condições iniciais, de modo harmonioso e preciso. Como bem afirmam Prigogine e Stenger (1997, p. 48): *“A lei matemática constitui, por sua vez, a possibilidade concreta de prever e de manipular. A natureza será sujeita a leis, submissa e previsível, e não caótica, irregular, estocástica.”*

Desse modo, a física Newtoniana, imbuída de um rigoroso tratado matemático, vai ao encontro da concepção cartesiana de mundo. O triunfo do pensamento Newtoniano–cartesiano durante o século XIX repercute em todos os ramos da ciência, cujos ecos são ouvidos até os dias atuais.

O pensamento emergente: contextos e influências

Ao mesmo tempo em que a concepção mecanicista do universo, no século XIX, influenciava todos os ramos da ciência, muitos outros estudos desenvolvidos com determinados objetivos, acabaram por evidenciar as limitações do modelo Newtoniano.

No campo da biologia, por exemplo, Jean-Baptiste Lamarck propôs uma teoria da evolução segundo a qual todos os seres vivos teriam evoluído a partir de formas mais primitivas e mais simples, sob a influência do meio ambiente. Essa teoria evolucionista foi utilizada posteriormente por Charles Darwin para apresentar a sua tese da seleção natural.

Essa nova forma de pensar a organização dos seres vivos em biologia – a idéia de um mundo dinâmico e mutável – constituía uma contraposição à idéia de um mundo estático e criado de uma só vez pelas mãos de Deus.

Igualmente, novas descobertas aconteceram no campo da física. Com o iminente surgimento da sociedade industrial e a rápida difusão das máquinas térmicas inglesas, novas questões científicas são colocadas a respeito da produção e da utilização do calor.

A formulação das leis da termodinâmica[9] pelos físicos introduziu um novo conceito na física, o de processos irreversíveis, em que o princípio da conservação de energia desempenhou um papel decisivo. Como bem ilustra Prigogine e Stenger (1997),

> *O conceito de irreversibilidade física traduz, em todo caso, essa obsessão da física da conservação: o mundo queima como uma fornalha, sem recuperação concebível; é preciso, portanto, que a energia, embora conservando-se, se dissipe.* (p. 91)

[9] A lei da conservação de energia e a lei da dissipação de energia.

Esta questão levou os físicos Sadi Carnot e Rudolf Clausius a desenvolver o princípio da dissipação da energia. Complementado posteriormente por Ludwig Boltzmann quando mostrou que a dissipação de energia era uma lei estatística.

Tais idéias inovadoras foram significativas para indicar que o universo era muito mais complexo do que se supunha. No entanto, acreditava-se ainda na ciência Newtoniana para descrever todos os fenômenos naturais.

No século XX, porém, esta situação se transformou radicalmente. No campo da física, duas teorias introduziram uma nova forma de pensar o universo. A teoria geral da relatividade e posteriormente a teoria quântica. A primeira, elaborada por Albert Einstein, abalou os alicerces da física Newtoniana modificando a concepção de objetividade física – uma das características fundamentais da física clássica – definida como a ausência de referência, na descrição do objeto, ao observador que o descreve.

A teoria quântica, por sua vez, fruto da investigação experimental acerca da natureza dos átomos, elaborada por um grupo de cientistas, dentre os quais se destacam Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr e Werner Heisenberg, coloca um término nas pretensões da física clássica de obter uma descrição completa e absoluta da natureza. Ainda neste contexto, a noção de uma análise probabilística para os fenômenos físicos e a carência de significados das partículas subatômicas quando observadas isoladamente, fez surgir o conceito das probabilidades de interconexões. Ou seja,

> *As partículas subatômicas não têm significado enquanto entidades isoladas, mas podem ser entendidas somente como interconexões, ou correlações, entre vários processos de observação e medida. Em outras palavras, as partículas subatômicas não são "coisas" mas interconexões entre coisas, e estas, por sua vez, são interconexões entre outras coisas, e assim por diante. Na teoria quântica nunca acabamos chegando a alguma "coisa"; sempre lidamos com interconexões.* (CAPRA, 1996, p. 41).

De fato, a teoria quântica, baseada neste novo conceito, provoca uma inversão no modo cartesiano de conceber a relação “partes e todo”, ou seja, enquanto que na mecânica clássica as propriedades e o comportamento das partes determinam as do todo, na mecânica quântica o todo é que determina o comportamento das partes.

Assim, a física defrontou-se com uma nova forma de encarar a realidade. Esta nova visão cria uma crise intelectual, emocional e existencial arrebatadora neste campo, tendo em vista que foi nele que o paradigma Newtoniano-cartesiano obteve seu maior triunfo.

De todo modo, o que resulta desta crise no campo da física, bem como em outros campos de conhecimento é o surgimento de um outro paradigma científico, que tem como critério básico a articulação entre as partes para o todo. Nesta perspectiva, as propriedades de qualquer sistema não podem ser compreendidas por análise de suas partes, mas sim dentro do contexto do todo maior. Além disso, “as relações entre objetos” de um determinado conjunto passam de secundárias para fundamentais, implicando numa visão do conhecimento científico feito uma rede de concepções e modelos.

Atualmente, esta mudança de paradigma na física tem gerado reflexões e transformações profundas nas concepções científicas e em nossa sociedade. A mudança de paradigma em física é reconhecida como parte integral de uma transformação cultural muito mais ampla, a qual está ocorrendo não apenas no âmbito científico, mas também no educacional e social (CAPRA, 1996).

Nessa ótica, releva-se ainda mais importante o fato de se considerar uma reflexão acerca das influências destas transformações sobre a Educação e, mais especificamente, sobre a Educação Matemática.

Novas perspectivas?

De modo geral, o modelo educacional dominante apóia-se em idéias que valorizam, entre outras, a busca da objetividade na prática científica, e acredita na certeza e na precisão do raciocínio lógico assim como na sua capacidade de descrever o passado e prever o futuro de qualquer sistema evolutivo determinista. Tais interpretações, de cunho epistemológico idealista, proporcionam, naturalmente, uma educação escolar baseada na aquisição de informações para se descobrir as "verdades" do mundo. Neste sentido, podemos considerar que o atual modelo educacional está em oposição à idéia de que: *"O objetivo do conhecimento não é descobrir o segredo do mundo numa palavra-chave. É o de dialogar com o mistério do mundo."* (MORIN[10], 1993, p. 85).

Em decorrência, o potencial criativo humano dos estudantes e a diversidade cultural própria de cada comunidade, fruto de suas histórias de vida são, de um modo ou de outro, ignorados, levando a uma formação padronizada do corpo estudantil em todos os níveis escolares.

Da mesma forma, com a concepção cartesiana de que as propriedades das partes determinam a compreensão do todo, o atual sistema educacional compartimentaliza os saberes escolares. O resultado dessa falta de conexão entre as disciplinas é uma visão parcial e isenta de valores das possibilidades de interação e transformação da realidade. Uma referência que pode ilustrar e também complementar tal fato é:

> *Na educação, a fragmentação do ensino aumenta à medida que se atinge as séries superiores, chegando a fazer das universidades atuais verdadeiras torres de Babel. Uma separatividade fundamental impregna a educação: o intelecto é confiado às escolas e o caráter, incluindo sentimentos e valores, supostamente ainda está nas mãos da família. Pela força da escolaridade, disso resulta uma visão unilateral do mundo, puramente intelectual, onde sentimentos e valores são relegados a segundo plano ou simplesmente ignorados. O conhecimento se torna uma espécie de mercadoria a ser*

[10] Veja Pessis-Pasternak (1993).

adquirida e estocada no armazém da memória. (PIERRE WEIL, 1994, p. 18) [11]

Como parte integrante do sistema educacional, a matemática enquanto disciplina escolar naturalmente trará consigo a herança dos paradigmas modernos. Por um lado, crenças e concepções sustentadas por boa parte da sociedade de que a matemática é uma disciplina exata, abstrata, lógica, verdadeira, acabada, essencialmente axiomática e afastada dos acontecimentos comuns do dia a dia, tenderá a permanecer na sua condição de herdeira das idéias pregadas pela ciência moderna. Por outro lado, propostas de percepção de mundo e maneiras de pensá-lo, numa perspectiva da ciência contemporânea oferecem possibilidades de mudança na concepção de educação e particularmente de educação matemática.

De todo modo, a inversão dos conceitos das partes para o todo propõe uma reunificação das disciplinas educativas integrando-as ao contexto no qual elas existem e encarando esta integração como sendo parte fundamental de todo processo de aquisição e produção de conhecimento. Diferentemente da concepção positivista da evolução das ciências, isto é,

> *... uma especialização e compartimentação crescentes das disciplinas científicas, identificação do comportamento científico "normal" com o trabalhador "sério", "silencioso", que não se demora em questões "gerais" sobre o significado global das suas pesquisas, e se limita aos problemas especializados da sua disciplina, autonomia essencial do desenvolvimento científico em relação aos problemas culturais, econômicos e sociais.* (PRIGOGINE E STENGER, 1997, p. 219).

Estas novas percepções de realidade que subjazem a ciência contemporânea estão alicerçadas num conjunto de valores e ações humanos, do qual depende e com o qual interage. A esse respeito, Monteiro (1998) escreve:

Sintetizando, podemos dizer que na perspectiva da ciência contemporânea:

---

[11] Veja Brandão e Crema (1991).

a) a ciência pode ser descrita como uma tentativa do homem para se comunicar com a natureza;
b) essa comunicação considera o homem em sua totalidade;
c) os processos da natureza figuram-se como aleatórios e complexos, exigindo uma percepção holística do real;
d) é reconhecida a importância das questões culturais tanto na concepção como na interpretação das teorias (p. 64).

Nesta ótica, a educação e mais especificamente o ensino de matemática poderão assumir, de fato, um papel na relação de integração entre os estudantes, a natureza e a sociedade, proporcionando um entendimento da matemática não somente informativo, mas de formação como meio de transformação e compreensão da realidade.

O desafio na busca de uma diferente visão da matemática

Da ciência grega à contemporânea, a matemática tem se colocado como um importante e influente campo de conhecimento na construção das concepções de ciência e de mundo. A busca de verdades eternas e de leis infalíveis para interpretação do universo tem tido, de um modo ou de outro, a matemática como um elemento chave.

Assim, se por um lado a matemática tem colaborado para que novas e mais complexas teorias sejam elaboradas para interpretar os fenômenos da natureza, por outro, ela tem sido influenciada pelas visões ocidentais de ciência e de mundo ao longo do tempo. Nessa perspectiva, pode-se dizer que há uma relação estreita entre as concepções acerca da natureza da matemática e da ciência.

Assim sendo, ao mesmo tempo em que os paradigmas científicos têm sustentado determinadas visões no âmbito educacional como um todo, as quais, por sua vez, têm se refletido nas salas de aula, as concepções a respeito da natureza da matemática também têm exercido uma forte e direta influência no ensino de matemática. De acordo com isso, Dossey (1992) escreve:

> *Percepções da natureza e do papel da matemática adquiridas por nossa sociedade têm uma grande influência no desenvolvimento do currículo de matemática escolar, ensino e pesquisa. A compreensão de diferentes concepções da matemática é tão importante para o desenvolvimento e para a implementação com sucesso de programas na matemática escolar quanto o é para a condução e interpretação de estudos de pesquisas.* (p. 42)

As diferentes formas de se conceber a matemática atualmente têm suas origens nas reflexões filosóficas a respeito da matemática desde a Grécia Antiga, principalmente, com Platão e Aristóteles. Mas têm sido as concepções emergentes no final do século XIX e início do XX que mais afetam o atual ensino de matemática. Estas visões, ainda impregnadas pelas visões platônicas e aristotélicas da matemática, dizem respeito às três escolas filosóficas da matemática, denominadas de logicismo, intuicionismo e formalismo.

A primeira delas, o logicismo, sustenta, basicamente, a concepção de que o conhecimento matemático existe desde sempre, é imutável, ahistórico e atemporal. Já o intuicionismo sustenta a concepção de que o conhecimento matemático é verdadeiro se este pode ser obtido somente por uma construção finita. O intuicionista vê a matemática como uma atividade abstrata construída pela mente humana.

Embora as concepções logicistas e intuicionistas da matemática tenham influenciado o campo da matemática e de seu ensino, a concepção formalista da matemática é que tem predominado no seu ensino[12]. *Sob o nome de "matemática moderna", invadiu até o jardim de infância com textos de teoria dos conjuntos* (DAVIS E HERSH, 1989). Basicamente, a escola formalista concebe a matemática como um jogo de deduções lógicas. Segundo Snapper (1984) "fazer matemática", na concepção formalista, significa manipular os símbolos sem sentido de uma linguagem de primeira ordem, de acordo com regras sintáticas explícitas.

Tal concepção privilegia um ensino de caráter mais informativo do que formativo, baseando-se na aplicação/mecanização de regras e procedimentos sem qualquer ligação com a realidade do aluno. Tal perspectiva tem conseqüência para a educação matemática, caracterizando modelos de ensino e aprendizagem de mesmo estilo e Miguel (1995, p. 38), ao refletir sobre a constituição de um paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática, escreve que *"O método de ensino de matemática que constitui o paradigma do formalismo pedagógico clássico enfatiza a exposição, a imitação, a repetição e a memorização".*

[12] Uma das razões para a dominância do formalismo, segundo Davis e Hersh (1989), foi a sua ligação com o positivismo lógico. Tendência dominante da filosofia da ciência durante os anos 40 e 50.

E, ainda segundo Miguel (1995), um dos aspectos caracterizadores, o qual é inerente a este paradigma é a negação da relação teoria-prática por Platão e Aristóteles, de que decorre o desdém pelas aplicações práticas da Aritmética e da Geometria.

Diante desse quadro, é importante para o ensino de matemática, o desenvolvimento de outros modos de conceber a matemática, os quais tragam consigo idéias de que ela seja falível, “corrigível”, aproximativa e significativa dentro de um contexto sócio/cultural. Segundo Davis e Hersh (1989),

> *... não devemos mutilar a matemática para fazê-la adaptar-se a uma filosofia pequena demais para contê-la – mas, em vez disso, exigir que as categorias filosóficas sejam ampliadas a fim de aceitar a realidade de nossa experiência matemática.* (p. 453).

Nessa ótica, a concepção da matemática subjacente ao paradigma da ciência contemporânea deve ser considerada como um possível caminho para essa ampliação. Visto que, para a ciência contemporânea, a matemática simboliza a complexidade, a impossibilidade de uma previsão exata da natureza e um retorno ao uso de reflexões e conclusões mais qualitativas nas análises quantitativas dos fenômenos que ela descreve.

CAPÍTULO IV – A MODELAGEM MATEMÁTICA

A dinâmica da modelagem matemática

Cada vez mais, e principalmente no início deste século, a matemática tem colaborado de modo significativamente mais explícito para o desenvolvimento de pesquisas científicas e, portanto, em importantes descobertas/resultados nos mais variados campos de atuação. Naturalmente, tal importância assumida pela matemática deve-se, fundamentalmente, ao fato de ela ser um caminho para a compreensão, avaliação e interpretação de fenômenos de diversas áreas de conhecimentos.

Enquanto Ptolomeu propunha sua concepção geocêntrica do universo ou Kepler anunciava suas idéias sobre as trajetórias elípticas dos planetas, a matemática confundia-se com a física, com a astronomia e também com a filosofia. Atualmente, porém, os campos de conhecimentos científicos estão mais bem definidos, e quando teorias matemáticas são empregadas na tentativa de estudar, entender e interpretar outros fenômenos de outras áreas, surge o que denomina-se de aplicação da matemática.

Muitas vezes a utilização e a construção de modelos matemáticos visam à aplicação matemática. O termo modelo tem sido usado de diferentes formas, assumindo significados diversos dependendo da área na qual é considerado. A seguir, descreverei como os termos modelo e modelo matemático vêm sendo compreendidos e definidos na literatura.

Segundo consta do dicionário Aurélio (FERREIRA, 1986, p. 1146), modelo refere-se à "*Representação em pequena escala de algo que se pretende executar em grande*". Enquanto modelo físico é especificado como sendo "*Conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades do sistema*".

Em relação à definição anterior de modelo físico, é importante mencionar o que Varga (Apud PINKER, 1981, p. 695) escreve, ao discutir a matemática como uma ferramenta e como uma ciência autônoma: *"A fim de ver claramente o que, exatamente, pode ou não pode ser suposto, a distinção entre sistemas físicos e seus modelos matemáticos é vital".*

Varga, ainda, completa que *"A palavra 'modelo' é usada em matemática quase que no senso oposto ao de um modelo matemático satisfazendo a um sistema de axiomas".*

Para Bender (1978, p.2), modelo matemático é "*uma construção matemática abstrata simplificada relativa a uma porção da realidade e criada para uma proposta particular".* Já Bassanezi (2002, p.20) chama de Modelo Matemático, simplesmente *"um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".*

Ainda segundo Bassanezi (2002, p.22), os modelos matemáticos podem ser formulados conforme a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e podem ser classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada na sua construção. Bassanezi propõe a seguinte classificação:

(i) *Linear ou não linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;*

(ii) *Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou Dinâmico quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia;*

(iii) *Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. (...) O método empregado por tais modelos envolve a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. (...); Aplicativo ou Modelo Prático, é aquele baseado em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve inter-relações de um grande número de variáveis (...);*

(iv) *Estocástico ou Determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações. Os modelos determinísticos são baseados na suposição que se existem informações suficientes em um determinado*

> *instante ou num estágio de algum processo, então todo futuro do sistema pode ser previsto precisamente.*
> *Os modelos estocásticos são aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos (cf. M. Thompson). Os modelos práticos tendem a empregar métodos estocásticos, e quase todos os processos biológicos são formulados com estes modelos quando se em pretensões de aplicabilidades.*

A construção de um ou mais modelos matemáticos envolve uma série de pesquisas e reflexões, as quais são fundamentais para a determinação de sistemas que se aproximem o melhor possível, segundo algum critério, da parte da realidade que se quer interpretar. Por exemplo, Davis & Hersh (1989, p. 107) apontam alguns dos objetivos perseguidos na construção de modelos, são eles:

(1) obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico;
(2) influenciar a experimentação ou as observações posteriores;
(3) *promover o progresso e a compreensão conceituais;*
(4) *auxiliar a axiomatização da situação física;*
(5) *incentivar a matemática e a arte de fazer modelos matemáticos.*

Neste sentido, construir modelos matemáticos coloca-se como uma ação que é parte de um processo chamado de modelagem matemática.

Para se ter um melhor entendimento do processo de modelagem matemática, mencionarei como esta vem sendo definida por quatro autores que trabalham com ensino de modelagem matemática no nível superior.

1) Modelagem matemática segundo Medley:

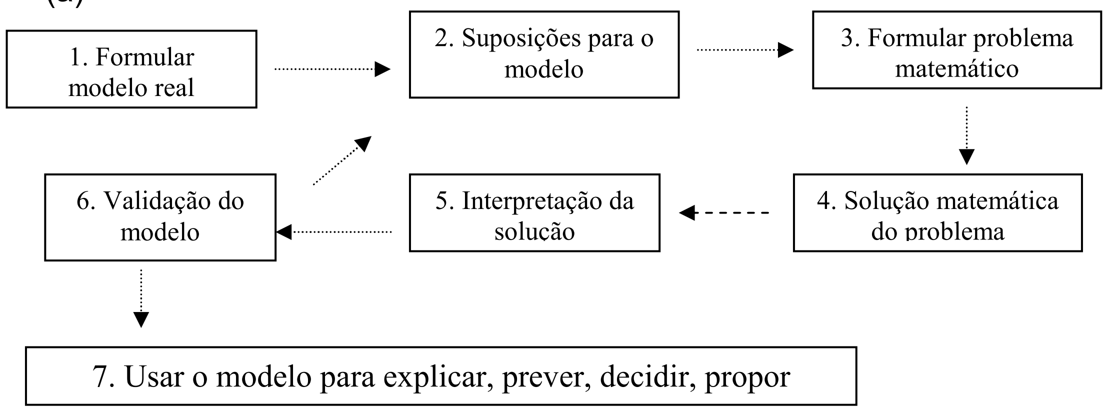
Este autor associa uma modelagem "bem sucedida" ou "mal sucedida" de acordo com o grau de probabilidade de qualquer previsão do modelo ser quantitativamente correta ou não, segundo o nível de precisão indicado pelo modelador. Ele também emprega o uso dos termos "bem sucedido" ou "mal sucedido" a modelos matemáticos, e ressalta que modelos matemáticos "mal sucedidos" não são necessariamente modelos ruins que devam ser descartados, mas sim precursores usuais de modelos matemáticos "bem sucedidos". Neste sentido, afirma que uma modelagem matemática “mal sucedida” traz consigo muitas idéias úteis. (Apud BERRY *et al*, 1984, p. 27)

Além disso, ao enfatizar a distinção entre modelagem matemática e modelo matemático, escreve:

> *Modelagem consiste de muitos passos, começando com uma reunião de idéias misturadas, e finalizando com testes rigorosos, e apresentando as conclusões se predisserem ou constituírem decisões, de uma forma conveniente para o uso (p. 26).*

Esta distinção é salientada pelo autor através do diagrama, extraído de Burghes e Borrie, 1981 (Apud BERRY et al, 1984, p. 28) a seguir, no qual os estágios típicos numa modelagem de um problema do mundo real são mostrados:

(a)



No esquema (a) acima,
O retângulo 1 deve incluir:
- geração de idéias
- seleção de idéias
- desenvolvimento de idéias

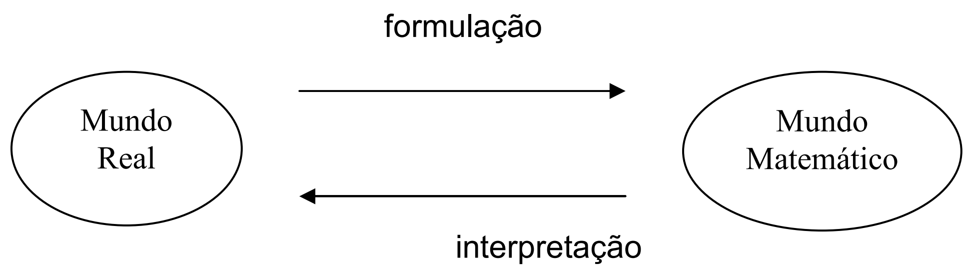
(b) onde as idéias necessitam estar:
- áreas de interesse na situação
- variáveis
- relações entre variáveis

Em relação ao diagrama, Medley observa que:

- O primeiro retângulo do esquema (a) é crucial, e poderia ser desenhado de forma mais larga, visto que contém os elementos elencados em (b);
- O primeiro passo matemático explicito abrangido pelos retângulos 1 e 2 é a identificação das variáveis significativas;
- Os retângulos de 2 a 5, algumas vezes, parecem ocupar o centro do processo;
- Para o matemático, o retângulo 4 é o centro do processo;
- O processo de 1 a 7 constitui o que chamamos de modelagem, e de 3 a 4 o modelo matemático.

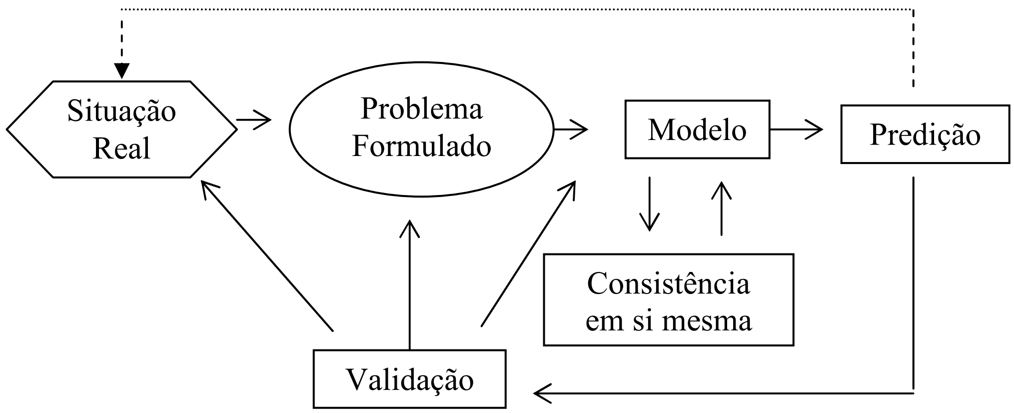
Modelagem matemática segundo O'Shea e Berry:

Estes autores, no artigo no qual descrevem a avaliação do procedimento de modelagem num curso de Matemática Aplicada da Open University , fornecem uma revisão de três esquemas representativos do processo de modelagem que têm sido publicados nos últimos anos (1982, p. 716). Eles começam com uma simples representação extraída do artigo de David Burghes (1980):

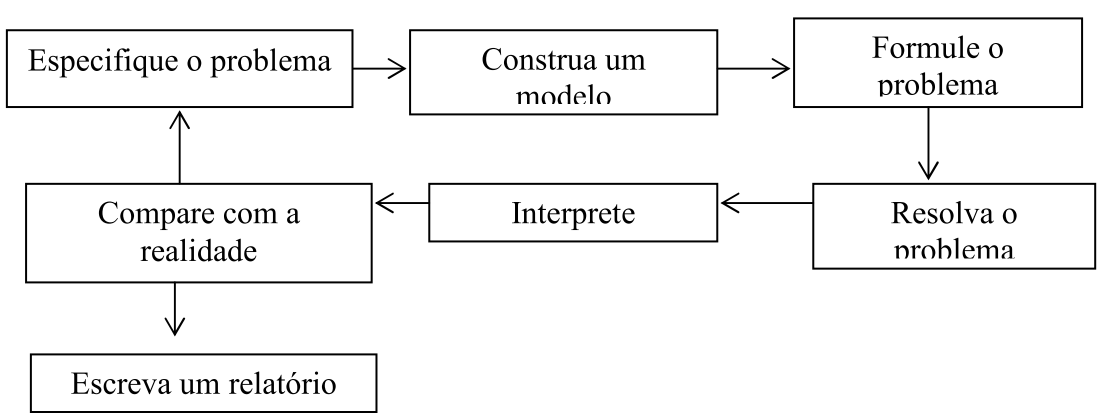


No esquema de Burghes, o mundo real representa um problema, geralmente de origem não matemática, proposto em linguagem corrente, o qual deverá ser descrito em linguagem matemática. Uma vez resolvido o problema matemático no mundo matemático, suas soluções devem ser traduzidas de volta para o mundo real, onde o problema original foi proposto.

O segundo esquema apresentado por O'Shea e Berry foi extraído do livro de Andrews e McLone (1976). Neste esquema, mostrado a seguir, a modelagem é vista, mais claramente, como um processo interativo em que o estágio de validação freqüentemente leva as diferenças entre as predições baseadas no modelo e a realidade.



O último esquema apresentado pelos autores é o "diagrama das Sete Caixas", o qual resume os vários estágios na modelagem matemática. Neste diagrama, mostrado a seguir, é proposto aos alunos preencher cada etapa a fim de orientá-los a decidir qual o próximo passo a ser dado durante a construção de um modelo e sua resolução.



Além desses três esquemas descritos anteriormente, O'Shea e Berry (1982, p. 718) resumem o processo de modelagem matemática em três etapas principais, são elas:

ESTÁGIO	O QUE ACONTECE
FORMULAÇÃO	(1) Selecione os fatores importantes que descrevem o problema (2) Faça hipóteses que simplifiquem (3) Escolha variáveis para representar as características a serem contidas no modelo (4) Relacione as variáveis através de uma estrutura matemática
SOLUÇÃO	Resolva o problema matemático proposto pelo modelo. Pode ser uma equação diferencial, ou um conjunto de equações lineares.
INTERPRETAÇÃO	(1) Interprete a solução e faça algumas previsões sobre o problema do mundo real (2) Critique as hipóteses sobre as quais o modelo se baseia (3) Aperfeiçoe o modelo

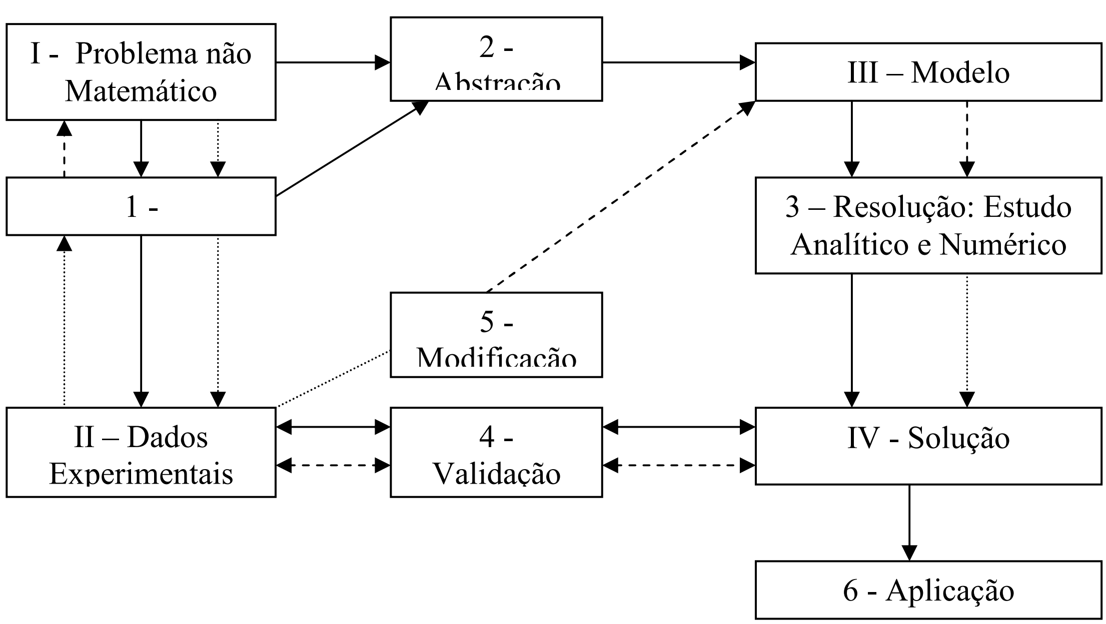
2) Modelagem matemática segundo Bassanezi:

Para este autor, modelagem matemática é o processo utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos (2002, p.24). Dessa forma, ele escreve que *"a modelagem matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".*

Além disso, observa que:

> *"A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele". (Ibidem)*

Segundo este mesmo autor, a modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma seqüência de etapas, as quais ele descreve através do esquema abaixo, onde as setas contínuas indicam a primeira aproximação e as setas tracejadas indicam a dinâmica do processo através da busca por um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado.



Bassanezi fornece ainda uma descrição das atividades intelectuais da modelagem matemática esboçadas no esquema anterior:

1. Experimentação – É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental pode dar maior confiabilidade aos dados obtidos. Os dados experimentais e/ou empíricos obtidos ajudarão na compreensão do problema, na construção e modificação do modelo e na decisão de sua validade.

2. Abstração – É o procedimento que deve levar à formulação de modelos matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:

(a) Seleção de variáveis – distinção entre as variáveis de estado e as variáveis de controle.

(b) Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando – formulação de problemas com enunciados explicitados de forma clara. Enquanto que a escolha do tema de uma pesquisa pode ser uma proposta abrangente, a formulação de um problema é mais específica e indica exatamente o que se pretende resolver.

(c) Formulação de hipóteses – As hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem, ao pesquisador, deduzir manifestações empíricas específicas. A geração de hipóteses se dá de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas, etc.

(d) Simplificação – Muitas vezes o modelo dá origem a um problema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido à sua complexidade. Neste caso, deve-se voltar ao problema original e tentar simplificá-lo sem, no entanto, perder suas informações essenciais.

3. Resolução – O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. A resolução de um modelo está sempre vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação e muitas vezes só pode ser viabilizada através de métodos computacionais.

4. Validação – É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real.

5. Modificação – Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem, considerando que: os fatos conduzem constantemente a novas situações; qualquer teoria é passível de modificações; as observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos questionamentos; a própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade.

Há muitas outras referências na literatura sobre o tema modelagem matemática, e com muita freqüência, elas estão associadas à atividade da matemática aplicada. O interesse desse trabalho, porém, é refletir sobre o processo da modelagem matemática na ótica do ensino e da aprendizagem da matemática em cursos regulares. Ou seja, perceber o papel e o significado da modelagem matemática na busca de novas perspectivas para o ensino e aprendizagem de matemática.

A modelagem matemática e a Educação Matemática

A princípio, é essencial assumir o ensino de matemática não como um campo isolado e autônomo, mas como parte integrante do processo educativo. Este deve estar vinculado e deve também atender às principais metas da Educação como um todo. Isto é muito bem discutido por D'Ambrósio (1998), quando define Educação e reflete sobre a distinção entre a prática do professor e a do educador:

> *Educação é o conjunto de estratégias desenvolvidas pelas sociedades para:*
> *(i) possibilitar a cada indivíduo atingir seu potencial criativo*
> *(ii) estimular e facilitar a ação comum, com vistas a viver em sociedade e exercer cidadania.* (p. 3)

E, nesse sentido, refletindo sobre a prática do professor, escreve:

> *(...) o professor deve subordinar sua disciplina, em particular os conteúdos, aos objetivos da educação e não subordinar a educação aos objetivos, transmissão e avanços da sua disciplina.* (p. 4)

Ou seja, segundo este autor, um ensino de matemática deve ultrapassar as barreiras de seu próprio conteúdo, deve estar vinculado às realidades dos educandos e proporcionar o desenvolvimento da criatividade de cada um, a fim de que ações sejam tomadas para a modificação ou consolidação dessas mesmas realidades.

Isto significa que o conteúdo matemático deve ser desenvolvido não somente para justificar suas próprias regras e conceitos, mas, basicamente, para ser útil, aplicável. E, neste caso, vale ressaltar que, tanto nos níveis dos ensinos fundamental e médio quanto no ensino superior, a ênfase na aplicabilidade da matemática não implica numa formação conceitual e teórica insuficiente. Isto porque penso não haver uma aplicação matemática compreensiva sem uma boa apropriação interativa e simultânea de conceitos matemáticos envolvidos.

Nessa perspectiva, e de acordo com o que foi discutido a respeito das concepções que subjazem aos paradigmas da ciência contemporânea, o ensino de matemática deverá ser capaz de:

- considerar a matemática como um saber pertencente e relativo ao grupo de indivíduos com o qual se está trabalhando;
- considerar a matemática como um saber em contínua evolução, o qual faz parte de um processo histórico de criação e recriação de conhecimentos e valores;
- tratar a matemática de forma a revelar os aspectos qualitativos, complexos e aproximativos emergentes das situações da realidade;
- balancear as relações entre a teoria e as aplicações práticas da matemática;
- mostrar que o estudo e o aprendizado da matemática permitem e requerem atividades de debates e em grupo;
- priorizar os significados e as aplicações práticas dos conceitos matemáticos a serem aprendidos;
- mostrar que o saber matemático pode ser produzido em conjunto, por alunos e professores, e outros atores.

Diante dessa concepção de ensino de matemática, é necessário que outros tipos de abordagens sejam considerados para que se alcancem tais objetivos. Desse modo, entendemos a modelagem matemática como um possível caminho na busca de uma mudança na atual concepção de ensino de matemática.

A modelagem matemática no âmbito específico da Educação Matemática tem sido definida, defendida e implementada por vários Educadores Matemáticos como uma alternativa para o ensino e o aprendizado da matemática. Preocupados em garantir um ensino e uma aprendizagem da matemática mais significativa e, principalmente, ligada à realidade dos alunos, eles têm contribuído efetivamente para justificar a inclusão da modelagem matemática nos domínios da Educação.

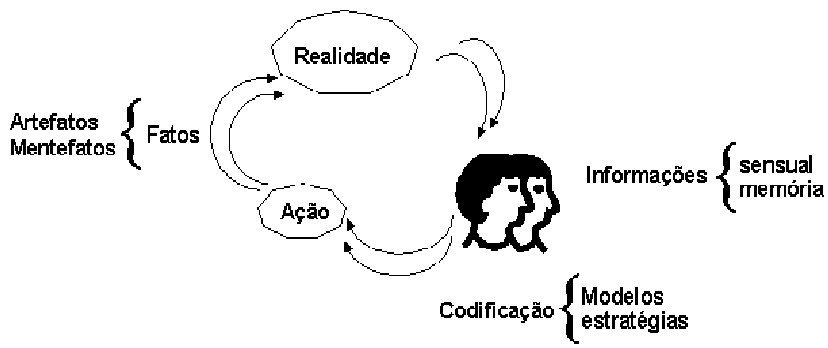
Por exemplo, para D'Ambrósio (1986), a aprendizagem é uma relação dialética reflexão-ação, cujo resultado é um permanente modificar da realidade. Esta realidade é incorporada pelos *artefatos* – artes e técnicas como manifestações do saber – e pelos *mentefatos* – idéias tais como religião, valores, filosofias, ideologias e ciência de uma determinada cultura.

Este conceito de aprendizagem sugere um processo dinâmico, pois

> *Essa modificação da realidade pela ação do indivíduo provoca imediatamente nova reflexão, novo comportamento, nova interação com informação já memorizada e informação recém-adquirida pelos mecanismos sensuais, e nova ação, com imediato efeito na realidade ainda pelo acréscimo de novos fatos.* (p. 49)

O elo entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade são os modelos e a modelagem. Os modelos são criados, recriados e compartilhados socialmente como estratégia para agir sobre a realidade, modificando-a. Essa recriação de modelos pelo sujeito, que pode utilizar outros modelos que já foram incorporados à sua realidade, e que é a essência do processo criativo, deveria constituir o ponto focal dos sistemas educativos. (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 51)

Nesse sentido, o autor destaca a modelagem como o passo essencial na aprendizagem, caracterizando-a através do seguinte esquema:

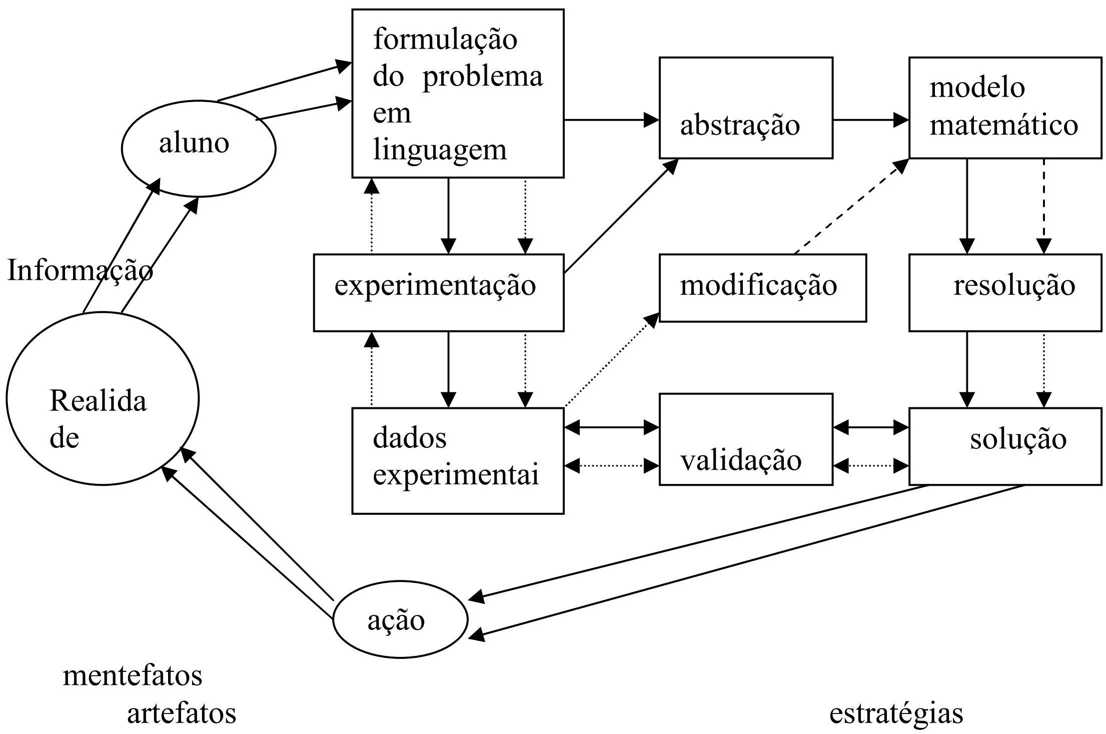


Gazzetta (1989) relata que, embora se enfatize a necessidade de trabalhar com problemas reais no ensino fundamental e médio, tal abordagem não se ajusta à estratégia de modelagem matemática, e muitos desses problemas *"não passam de uma obscura descrição de uma situação"* (p. 32). Além disso, o professor é que fornece os tipos de hipóteses a serem feitas para tais problemas conduzindo os alunos a obterem respostas corretas.

Segundo a autora, uma solução metodológica imediata seria o aluno relatar todas as hipóteses que ele formulou para o problema. Mas, ainda assim, fica a questão da origem do problema, ou seja, será que este problema tem a ver com a realidade do aluno? Neste sentido, escreve que é fundamental

> *o levantamento e a formulação do problema ser feito pelo próprio aluno, garantindo assim, uma aprendizagem significativa que apresenta um nível elevado de envolvimento, pois o aluno inclui-se como um todo na experiência a partir da qual aprende (...)* (p. 36)

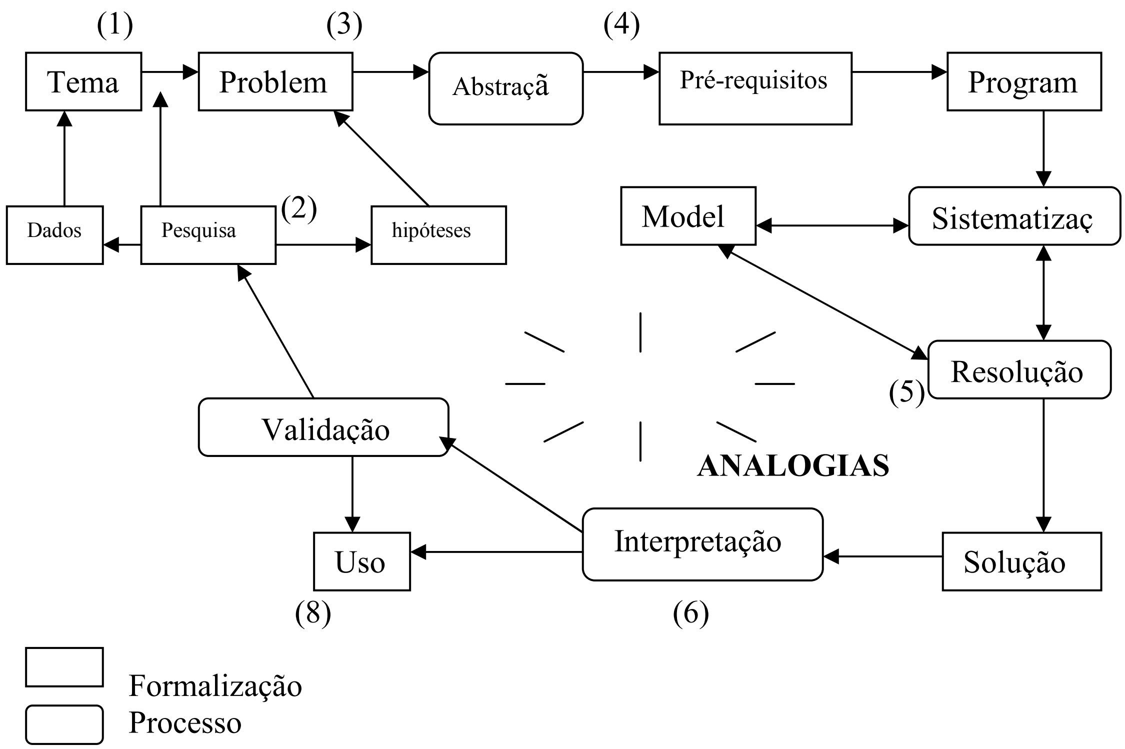
Baseando-se nessas questões, propõe uma concepção de modelagem matemática alicerçada nas concepções de D'Ambrósio e Bassanezi, onde "*o aluno* *é parte e ao mesmo tempo observador da realidade"* (GAZZETTA, 1989, p. 33). Tal concepção de modelagem matemática está esquematizada a seguir:



Observação: As setas contínuas indicam a primeira aproximação e as setas tracejadas indicam a dinâmica do processo.

Biembengutt e Hein (2000), procurando adequar a modelagem matemática como método de ensino e aprendizagem de matemática dentro do conteúdo programático a ser desenvolvido em sala de aula, propõem que o processo clássico de modelagem matemática seja modificado. Dessa forma, os autores definem: *"O método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares, com programa, denominamos modelação matemática." (p. 18)*

O esquema, a seguir, sintetiza o processo de modelação matemática segundo Biembengutt (1990, p. 141):



No quadro anterior, a ordem do procedimento está indicada pelos respectivos números:

(1) Escolha do tema central a ser desenvolvido pelos alunos;

(2) Pesquisa para coletar dados quantitativos e informações que possam auxiliar a apresentação de hipóteses;

(3) Elaboração de problemas que serão distribuídos para os grupos de interesses comuns;

(4) Abstração no sentido de selecionar as variáveis essenciais envolvidas nos problemas e formular as hipóteses;

(5) Sistematização dos conceitos que serão usados na resolução dos modelos matemáticos e que fazem parte do conteúdo programático do curso

em questão. Deve ser efetuada também enquanto se trabalha na resolução e na formalização dos modelos;

(6) Interpretação da solução de maneira analítica e com possíveis representações gráficas;

(7) Validação dos modelos que devem ser os mais coerentes possíveis com a realidade pesquisada. Caso um modelo não seja bom, o sistema deve ser retomado com novas pesquisas, tornando assim o processo dinâmico;

(8) *Quando o modelo é satisfatório devemos procurar utilizá-lo fazendo previsões, análises ou qualquer outra forma de ação sobre a realidade.* (Apud Monteiro, 1991, p. 116)

Com relação à escolha dos temas, embora Biembengutt (1990) enfatize a importância dessa escolha como feita pelos próprios alunos, também coloca o professor como tendo um papel fundamental na determinação dos problemas a serem estudados. É o professor que deverá analisar quais dos problemas levantados pelos alunos poderão ser estudados utilizando conceitos do conteúdo programático proposto para o curso.

Para completar o que foi exposto, colocamos, a seguir, alguns dos principais argumentos propostos por Blum (Apud BASSANEZI, 1994, p. 72) para a inclusão da modelagem matemática no ensino de matemática:

1. *Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas e a performance da modelagem matemática e resoluções de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.*
2. *Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.*

3. *Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.*
4. *Argumento intrínseco – considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas as suas facetas.*
5. *Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.*
6. *Argumento de alternativa epistemológica – A modelagem também se encaixa no Programa Etnomatemática, indicado por D'Ambrósio (1990) "que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica", atuando, desta forma, como uma metodologia alternativa mais adequada às diversas realidades socioculturais.*

Diante dessas várias definições e formas de compreensão do processo de modelagem matemática, seja ele inserido no contexto específico das atividades do matemático aplicado ou, principalmente, no âmbito do ensino de matemática, observamos que, embora os esquemas apresentem diferenças entre si quanto a ordem, número e/ou descrições das etapas, eles mantêm 4 estágios caracterizadores básicos do processo de modelagem matemática. Podemos, então, identificar estes estágios por meio das seguintes ações:

- Formulação de um problema da realidade;
- Construção de um modelo matemático;
- Solução deste modelo;
- Validação.

Contudo, sob a ótica do ensino e aprendizagem de matemática, estas ações, bem como os estágios descritos nos esquemas anteriores, podem adquirir ou atingir diferentes níveis de importância, de participação e de desafio. Levando-se em conta os diversos contextos nos quais estão inseridos as instituições de ensino e os diversos problemas organizacionais docentes e administrativos, bem como os pedagógicos defrontados dentro dessas mesmas instituições, o processo de modelagem matemática pode e deve ser flexível em relação a tais estruturas. Ao exemplo disso, Bassanezi (2002, p.38) observa que *"Na modelação a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural."*

Além disso, a construção de modelos matemáticos – etapa considerada fundamental para os matemáticos – poderia, em alguns casos, ser constituída de modelos já prontos, ou seja, o aluno buscaria modelos já construídos e os usaria nesta etapa. Isto não implicaria numa apropriação deficiente dos conceitos matemáticos envolvidos, pois o aluno poderia pesquisar e refletir, bem como compreender quais conceitos foram usados para se chegar a estes modelos.

É muito importante, neste momento, enfatizar que o objetivo central, neste trabalho, não é ensinar o aluno a ser "um bom modelador", mas sim criar um ambiente para que o aluno se torne um bom entendedor de conceitos por meio dos processos de modelagem matemática e, por necessários, esses conceitos serão fundamentais.

Assim, de acordo com o contexto no qual se situa esta pesquisa, e procurando direcionar e estender tais idéias e propostas aos domínios e objetivos deste trabalho, a concepção de modelagem matemática mais adequada dentre as que foram estudadas para este fim é o processo de modelação matemática (vide página 55) devido a Biembengutt e Hein.

CAPÍTULO IV – A PESQUISA DE CAMPO – METODOLOGIA

O plano de pesquisa

A pesquisa de campo foi planejada contando com as seguintes etapas:

(1) Determinação do grupo de sujeitos participantes da pesquisa;
(2) Aplicação de um Questionário (pré-teste);
(3) Aplicação de um Questionário inicial;
(4) Trabalho com modelagem matemática em sala de aula;
(5) Aplicação de um Questionário final.

(1) Os nossos participantes (sujeitos da pesquisa)

Os sujeitos da pesquisa são alunos de primeiro ano do curso de engenharia de computação de uma faculdade privada. Todos os alunos pertencem a uma mesma classe do curso diurno.

Os estudantes, na sua grande maioria, têm entre 17 e 20 anos de idade, não trabalham e têm seus estudos financiados pelos pais. A maioria deles freqüentou o ensino médio em escolas particulares[13].

Escolhemos trabalhar com os alunos do primeiro ano porque eles ainda mantém muito viva suas experiências do ensino médio, e nosso foco de investigação não era a matemática que eles estavam vivenciando na faculdade de engenharia, mas aquela matemática vivenciada, basicamente, durante seus anos de escola.

(2) O Pré – teste

Foi elaborado um questionário para um pré-teste com a finalidade de corrigir possíveis falhas na preparação da versão definitiva do questionário inicial

[13] Ver anexos 3 e 4

de pesquisa. Estas falhas podem ser: ambigüidades, linguagem inacessível, perguntas supérfluas ou necessidade de subdividir perguntas ou criar outras. Desse modo, os questionários poderão ser modificados e aprimorados para que eles possam ser aplicados com maior segurança.

O pré-teste foi aplicado numa classe com características semelhantes àquela na qual foram aplicados os questionários definitivos. Os alunos eram do primeiro ano dos cursos diurnos de engenharia civil e engenharia elétrica.

(3) O Questionário inicial

O questionário inicial foi aplicado no primeiro dia de pesquisa, em sala de aula, após a explanação para os alunos sobre a participação deles na pesquisa. Este questionário teve como objetivo geral indicar a concepção/visão dos alunos antes da experiência com a modelagem matemática.

(4) O trabalho com modelagem matemática

Nesta etapa da pesquisa tivemos um total de 11 semanas, tendo, a cada semana, 4 aulas seguidas de 50 minutos.

SEMANA	ATIVIDADE PROPOSTA	
1	(a) Apresentação da proposta de pesquisa (b) Aplicação do questionário inicial de pesquisa (c) Divisão dos alunos em grupos (d) Apresentação das sugestões dos temas para elaboração dos projetos	
2	(e) Delineamento do problema a ser investigado para cada grupo (f) Planejamento para a coleta de dados	modelagem matemática
3	(g) Coleta de dados	
4	(h) Seleção e determinação dos dados relevantes para o problema	
5	(i) Modelo matemático	
6	(j) Modelo matemático (continuação)	
7	(k) Modelo matemático (continuação)	
8	(l) Validação do modelo construído/considerado	
9	(m)Possíveis modificações no modelo	
10	(n) Conclusões e possíveis aplicações do modelo	
11	(o) Apresentação dos trabalhos pelos grupos (p) Avaliação dos grupos e auto-avaliação (q) Aplicação do questionário final de pesquisa	

(4) Questionário final

O questionário final tem como base os questionários do pré-teste e o inicial. Ele foi elaborado com o objetivo geral de apontar possibilidades de transformação na visão dos alunos sobre a matemática, após a experiência com a modelagem matemática.

Sobre a metodologia

A presente pesquisa foi desenvolvida numa faculdade de engenharia em uma instituição privada de ensino superior. Trabalhamos com alunos do primeiro ano do curso de engenharia de computação. Os dados foram obtidos na própria instituição onde estava sendo ministrado este curso e, por meio do contato direto do professor/pesquisador com a classe e com o problema a ser investigado, onde foi possível coletar, continuamente, as informações emergentes deste contexto. O material para análise foi, basicamente, obtido por meio de questionários estruturados, observações e depoimentos não estruturados que se apresentarão durante este período.

De acordo com o que foi considerado nesta pesquisa, podemos classificá-la como qualitativa e de ação. Segundo Bogdan e Biklen (1982, In Lüdke e Marli, 1986, p.12), uma pesquisa qualitativa apresenta cinco características básicas que a configuram. São elas:

1. *A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.*
2. *Os dados coletados são predominantemente descritivos.*
3. *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.*
4. *O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.*
5. *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.*

Diante disso, podemos expor as razões pelas quais as características acima descritas se enquadram na situação e no desenvolvimento desta pesquisa.

Percebendo o quotidiano de uma sala de aula como algo complexo, esta pesquisa procurou considerar as interferências das relações presentes nessa situação, as quais poderiam ser determinantes para sua conclusão. A exemplo, destacamos as relações entre o professor e os alunos e as diferentes características entre os alunos de um mesmo grupo. As experiências escolares presente e prévia dos alunos são significativas para o processo e para a conclusão da pesquisa, bem como a própria análise crítica dos participantes com relação ao trabalho que estiveram desenvolvendo. Em relação ao processo de coleta e análise de dados, decidimos que o questionário final, os depoimentos e as observações não deveriam ser definidos *a priori*, orientados apenas pelos fundamentos teóricos. Eles poderiam ser definidos durante o desenrolar do processo.

Ademais, a escolha da pesquisa-ação como método desta investigação está ancorada frente às categorias apresentadas por Cohen e Menion (1985, p. 211), no que se refere à proposta da pesquisa-ação na escola e na sala de aula:

1. *ela é uma forma de remediar problemas diagnosticados em situações específicas, ou de melhorar, de algum modo, um dado conjunto de circunstâncias;*
2. *ela é uma forma de treinamento, de modo a equipar o professor com novas habilidades e métodos, aguçando seu potencial analítico e elevando seu próprio conhecimento;*
3. *ela é uma forma de introduzir abordagens adicionais e inovadoras no ensino e no aprendizado dentro do andamento de um sistema, o qual, normalmente, inibe inovação e mudança;*
4. *ela é uma forma de melhorar a comunicação, normalmente, pobre entre o professor em exercício e o pesquisador acadêmico, e de remediar a falha da pesquisa tradicional em oferecer claras prescrições;*
5. *ela é uma forma de melhorar uma alternativa de abordagem mais subjetiva e sumária para a solução de problemas em sala de aula.*

Assim, as justificativas acima apresentadas vêm ao encontro das propostas desta pesquisa. Citarei dois fatores significativos que podem relevar tal fato: um deles é o professor estar atuando, simultaneamente, como profissional da área e também como pesquisador acadêmico. O outro fator é a introdução da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem no decorrer do ano letivo de uma turma, para a qual, usualmente, as abordagens de ensino e aprendizagem mantém características tradicionais.

O pré-teste

Após a aplicação do questionário como um pré-teste (veja em anexo 3), este foi reformulado de forma que algumas questões foram acrescentadas, reformuladas ou desconsideradas. Assim, segue uma descrição por questão:

- Questão 3 – esta questão se apresenta mais completa, pedindo ao aluno que justifique o porquê de ele ter aprendido mais os conceitos matemáticos que mencionou. Desta maneira, podemos, por exemplo, verificar se os conceitos que foram mais mencionados têm como justificativa o fato de terem sido abordados com aplicações práticas;

- Questão 5 – na ocasião da aplicação do questionário, dois alunos perguntaram-me qual alternativa deveriam assinalar visto que, não costumavam estudar matemática. Assim, acrescentamos a alternativa "não estudava";

- Questão 7 – na ocasião da aplicação do questionário, alguns alunos tiveram dúvidas quanto ao significado dos termos: "aproximativa" e "exata" referindo-se à matemática. Então, para cada alternativa, complementamos com uma frase explicativa. Além disso, re-organizamos as alternativas conforme a questão 11;

- Questão 9 – as alternativas desta questão foram reorganizadas conforme a questão 11;

- Questão 13 – para maior clareza e compreensão das respostas, reformulamos o enunciado desta questão, pedindo aos alunos para que ordenassem os itens do mais importante para o menos importante;

- Questão 17 – nesta questão, fizemos a referência ao curso de engenharia elétrica e civil, pois a classe escolhida para o pré-teste era formada de alunos destes dois cursos. Para os questionários definitivos, a referência é ao curso de engenharia de computação;

- Questão 18 – apenas dois alunos responderam a questão. As duas respostas foram referentes a dois exemplos de histórias de matemáticos, contadas, em sala de aula, pelo professor. Consideramos esta questão muito complexa e com pouco retorno para a nossa análise, e por isso, julgamos que seria adequado não considera-la;

- Questão 19 – após refletirmos sobre as respostas apresentadas, consideramos que seria mais adequado para a nossa análise reformular esta questão de acordo com o formato das questões de 7 a 12.

O trabalho com modelagem matemática

Nossas atividades tiveram início no final do 2º semestre do ano letivo do curso de engenharia de computação. O trabalho foi realizado junto à disciplina de nome Álgebra Linear, Vetores e Geometria Analítica – disciplina obrigatória do ciclo básico da grade curricular do curso. Em conformidade com a coordenação do curso de engenharia de computação e com o cronograma acadêmico do pesquisador, utilizamos as últimas 11 semanas do ano letivo para a pesquisa de campo.

Nesse período, o conteúdo programático proposto para todas as classes do ciclo básico de engenharia dessa instituição era o estudo das secções cônicas. Tivemos, então, que direcionar e sugerir, previamente, os temas aos alunos. Assim, tomamos como proposta de todos os projetos o estudo das cônicas.

Dessa forma, apresentamos aos alunos seis temas de estudos, os quais determinariam seis grupos de trabalho, e pedimos para que cada aluno se inscrevesse em apenas um dos grupos. Começamos nosso trabalho com 27 alunos no total. A distribuição dos alunos, os temas e questões relativas se configuraram da seguinte maneira:

- Antenas Parabólicas (5 alunos) – Qual a razão do nome Parabólica?
- Farolete (5 alunos) – Onde é usado e porquê?
- Abajour (4 alunos) – Projeções de luz num anteparo.
- Órbita planetária (5 alunos) – Trajetória das órbitas.
- Poste de luz / Refletores parabólicos(4 alunos) – A distância entre um poste e outro.
- Lançamento de projétil / futebol (4 alunos) – A trajetória da bola ao ser chutada.

Depois dessa etapa, combinamos que durante todo o processo de pesquisa, todos os grupos deveriam apresentar o que tinha sido feito até então e o que tinham de dúvidas, durante o horário normal das aulas da disciplina.

Esse início foi uma etapa muito difícil para todos nós. Normalmente, como já vínhamos desde o começo do ano letivo trabalhando com aulas expositivas dos tópicos a serem estudados e depois exercícios e/ou problemas de aplicação, a situação de "rompimento" dessa seqüência causou um pouco de desconforto em todos, alunos e professor.

Alguns grupos lidaram bem com essa situação, mas outros grupos tiveram algumas dificuldades. Nas aulas (nossos encontros semanais) imediatamente após a delimitação dos problemas a serem abordados, um grupo ainda não havia refletido e nem pensado em nenhuma forma de ação sobre a atividade proposta.

Além desses nossos encontros semanais, pedimos aos alunos que fossem procurar alguns professores da faculdade, os quais já haviam manifestado a disposição de auxiliar-nos, caso algum grupo necessitasse. Vale aqui destacar, a enorme ajuda do professor de física na realização do projeto "Lançamento de projéteis", bem como a ajuda dos funcionários do laboratório de elétrica no projeto "Poste de luz / Refletores Parabólicos".

Embora 11 semanas, num total de 4 aulas de 50 minutos a cada semana, pareceu-nos adequado para realizar a pesquisa de campo, a prática nos mostrou que o tempo foi curto, pois durante o processo, algumas questões de investigação propostas para o projeto tiveram de ser modificadas ou reformuladas. Um exemplo desse fato aconteceu no projeto sobre a questão da distância dos postes de iluminação de ruas. Em relação a esse projeto, nós concluímos que o estudo da disposição dos refletores que iluminavam a quadra de *futebol society* da faculdade seria bem mais prático e interessante para os alunos da faculdade.

Além disso, mesmo com a orientação do professor sobre o quê estudar e onde pesquisar, todos os grupos sentiram muita dificuldade em organizar os dados obtidos em articulação com os conceitos teóricos das seções cônicas. Assim, decidimos, em um de nossos encontros, por uma aula “tradicional” sobre as cônicas (professor na lousa, os alunos sentados nas carteiras, teoria e alguns exercícios). Esse foi um momento interessante, pois os alunos também puderam aproveitar para conhecer um pouco do trabalho que cada grupo vinha desenvolvendo.

De qualquer modo, a questão do tempo não nos permitiu uma apresentação dos projetos para toda a comunidade da instituição, bem como não conseguimos concluir um plano de validação dos problemas investigados ou mesmo uma reflexão mais profunda sobre como poderíamos utilizar esses estudos para futuras pesquisas e aplicações na realidade da comunidade. Em relação a essa questão, pedimos aos grupos que escrevessem sobre a possibilidade de continuidade dos estudos no projeto escrito a ser entregue.

Durante o processo da pesquisa de campo, tivemos 3 alunos desistentes do curso, isto mostra o número de 24 alunos como participantes nas análises. No que diz respeito à organização e relação entre os membros do grupo para a realização das tarefas, podemos observar que, em geral, houve uma boa colaboração de todos levando-se em conta a diversidade natural de uma sala de aula.

Sobre a avaliação, todos os grupos deveriam entregar o projeto escrito e também apresenta-lo num seminário para a classe, pois dessa forma teríamos uma nota relativa ao estudo das seções cônicas. No anexo 18, podemos ver a composição para a nota de avaliação do processo todo.

A dinâmica na apresentação do seminário, infelizmente, foi prejudicada por questão de tempo. Como nós não teríamos mais tempo para agendar novos encontros, visto que o calendário escolar havia chegado ao fim e as notas de todos os professores deveriam ser entregues na secretaria da faculdade na data marcada, tivemos que agendar a apresentação de todos os grupos num mesmo dia. Mais um fator negativo a destacar, foi o cansaço dos alunos, pois todos estavam também sendo avaliados nas outras disciplinas do curso.

CAPÍTULO V – ANÁLISE

Uma análise de Movimento

Nesta etapa do nosso trabalho, iniciaremos analisando as informações que nos permitirão verificar o Movimento do(s) aluno(s) em relação a cinco categorias, as quais contêm as concepções acerca da natureza da matemática enquanto disciplina escolar, consideradas nesta pesquisa. Assim, denominaremos essas categorias de Conjuntos de "características" da matemática enquanto disciplina escolar. Dispomos os Conjuntos de características da matemática da seguinte forma:

A) Exata / Aproximada
B) Teórica / Prática
C) De Transmissão / de Construção
D) Universal e/ou Singular
E) De Atividades Silenciosas e individuais / de Debate em grupo

Antes de tudo, vamos entender qual é o significado do termo Movimento ao qual estaremos nos referindo neste estudo. O termo Movimento pode ser entendido como um processo que busca indicar sob qual perspectiva o aluno tende a olhar à matemática enquanto disciplina escolar.

Em relação às perspectivas, estamos definindo como perspectivas subjacentes à modelagem matemática, aquelas representadas pelos pares articulados: exata/aproximada, teórica/prática, de transmissão/construção, universal/singular e de atividades isoladas/de debate em grupo, bem como aquelas representadas pelas características, aproximada, prática, de construção, singular e de atividades em grupo. Já as perspectivas definidas em contraposição à modelagem matemática são aquelas representadas pelas características exata, teórica, de transmissão, universal e de atividades isoladas.

Diante disso, assumimos dois tipos de Movimento, os quais nós definimos como:

Movimento favorável – indica a tendência do aluno em olhar a matemática segundo as perspectivas subjacentes à modelagem matemática;

Movimento não favorável – indica a tendência do aluno em olhar a matemática em contraposição às perspectivas subjacentes à modelagem matemática.

Assim, podemos considerar duas frentes para análise, são elas:

O Reconhecimento – indica quais características da matemática são reconhecidas pelo aluno, antes e depois do trabalho com modelagem matemática;

O Movimento – indica se houve um movimento favorável ou não favorável em relação a uma característica ou conjunto de características sob análise.

A composição entre o reconhecimento de uma dada característica e o respectivo grau de satisfação, antes e depois do trabalho com modelagem matemática, indica-nos o tipo de Movimento do aluno – se favorável ou não favorável. A discussão que nos permitiu classificar o tipo de movimento para cada característica sob análise está resumida e organizada no quadro Q1, no anexo 16.

A partir das informações do quadro Q1, construímos as tabelas T1 e T2, nos anexos 11 e 12 respectivamente, estas tabelas facilitaram a classificação, para cada aluno, do tipo de movimento em relação a cada uma das características consideradas até aqui.

Para prosseguirmos, consideremos, primeiramente, a análise das informações dadas por meio das questões 7,8,9,10,11,12,18 e 19 referentes ao questionário aplicado antes do trabalho com modelagem matemática e, das questões 4,5,6,7,8,9,18 e 19 referentes ao questionário aplicado depois do trabalho com modelagem matemática. Essas informações estão organizadas nas tabelas A, B, C e D, nos anexos 6, 7 , 8 e 9 respectivamente. Para entendermos melhor, faremos uma explicação dessas tabelas.

As tabelas A, B, C e D, mostram, para cada característica considerada, como cada aluno reconhece a matemática como disciplina escolar, e qual o seu grau de satisfação em relação a esse reconhecimento, antes e depois das atividades desta pesquisa.

Diante do que foi exposto, apresentamos para cada conjunto de características A, B, C e D, a análise das duas frentes mencionadas, O Reconhecimento e O Movimento:

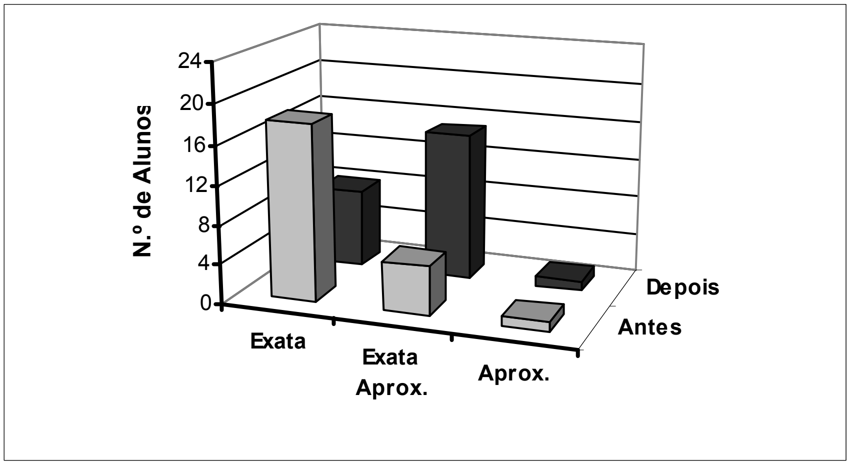
A) A matemática como uma disciplina Exata e/ou Aproximada

A1) <u>O Reconhecimento</u>

Tabela A1

	Exata		Exata/aproximada		Aproximada	
	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
Antes	18	75.00	5	20.83	1	4.17
Depois	8	33.33	15	62.50	1	4.17

Gráfico A1

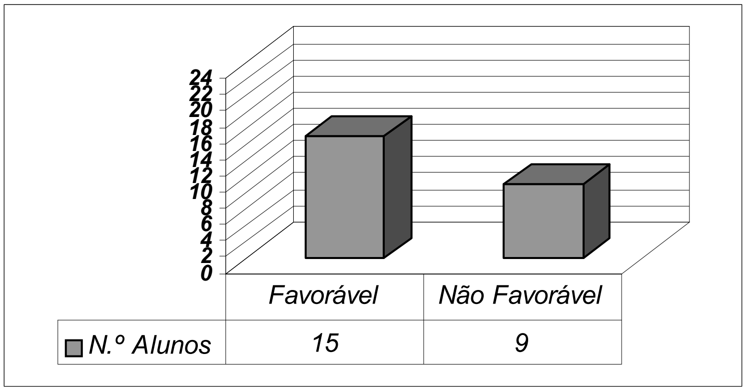


A2) O Movimento

Tabela A2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	15	9
%	62.50	37.50

GráficoA2



Sobre o Reconhecimento, podemos constatar que 75% dos alunos reconheceram que em seus estudos anteriores (ensino médio) a matemática foi tratada como uma disciplina Exata. E, após a experiência com a modelagem matemática, 62.5% dos alunos reconheceram que a matemática foi tratada como uma disciplina Exata/Aproximada. Sobre o Movimento, constatamos que a maioria dos alunos (62.5%) tendeu a olhar às características exata/aproximada da matemática segundo as perspectivas da modelagem matemática.

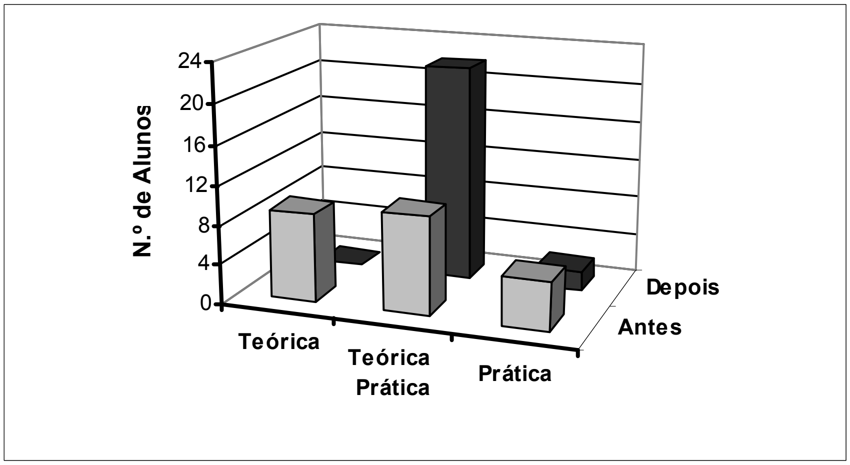
B) A matemática como uma disciplina Teórica e/ou Prática

B1) <u>O Reconhecimento</u>

Tabela B1

	Teórica		Teórica/prática		Prática	
	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
Antes	9	37.50	10	41.67	5	20.83
Depois	0	00.00	22	91.67	2	8.33

Gráfico B1

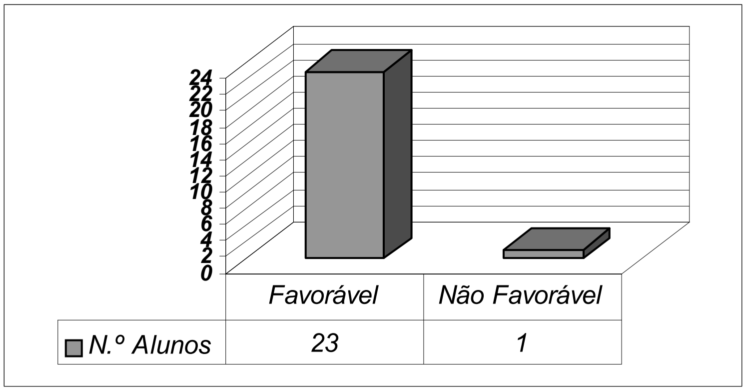


B2) <u>O Movimento</u>

Tabela B2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	23	1
%	95.83	4.17

Gráfico B2



Sobre o Reconhecimento, podemos constatar que 41.67% dos alunos reconheceram que em seus estudos anteriores (ensino médio) a matemática foi tratada como uma disciplina Teórica/prática e 37.50% apenas como Teórica. E, após a experiência com a modelagem matemática, a maioria dos alunos (91.67%) reconheceu que a matemática foi tratada como uma disciplina Teórica/prática. Vale observar que nenhum aluno reconheceu a característica apenas Teórica. Sobre o Movimento, constatamos que a maioria dos alunos (95.83%) tendeu a olhar as características teórica/prática da matemática segundo as perspectivas da modelagem matemática.

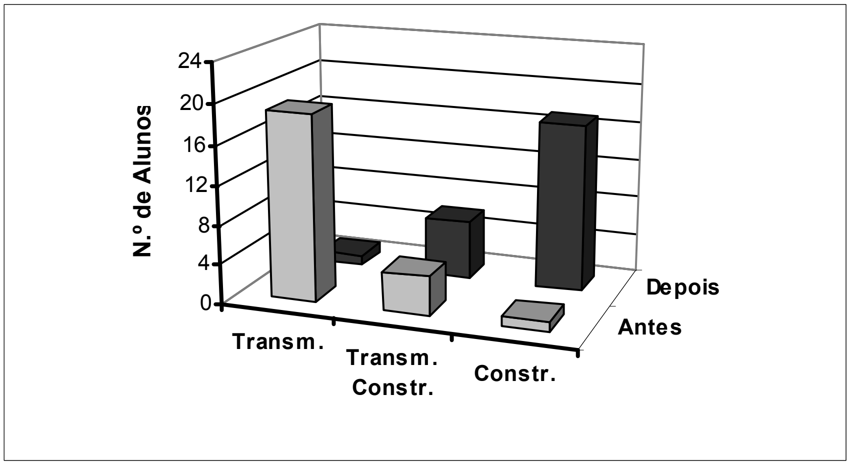
C) A matemática como uma disciplina de Transmissão e/ou de Construção

C1) <u>O Reconhecimento</u>

Tabela C1

	Transmissão		Transmissão/construção		Construção	
	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
Antes	19	79.17	4	16.66	1	4.17
Depois	1	4.17	6	25.00	17	70.83

Gráfico C1

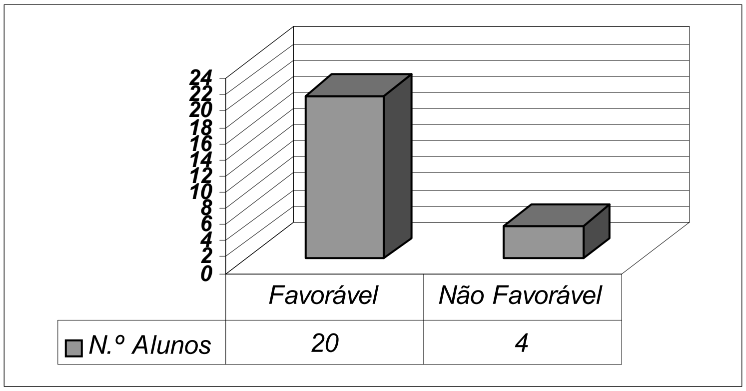


C2) <u>O Movimento</u>

Tabela C2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	20	4
%	83.33	16.67

Gráfico C2



Sobre o Reconhecimento, podemos constatar que 79.17% dos alunos reconheceram que em seus estudos anteriores (ensino médio) a matemática foi tratada como uma disciplina de Transmissão. E, após a experiência com a modelagem matemática, 70.83% dos alunos reconheceram que a matemática foi tratada como uma disciplina de Construção. Sobre o Movimento, constatamos que a maioria dos alunos (83.33%) tendeu a olhar as características de transmissão/construção da matemática segundo as perspectivas da modelagem matemática.

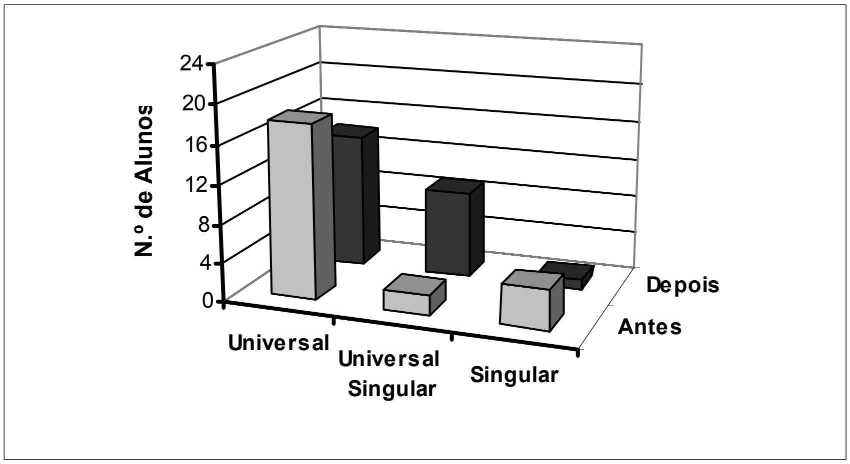
D) A matemática como uma disciplina Universal e/ou Singular

D1) O Reconhecimento

Tabela D1

	Universal		Universal/singular		Singular	
	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
Antes	18	75.00	2	8.00	4	17.00
Depois	14	58.33	9	37.50	1	4.17

Gráfico D1

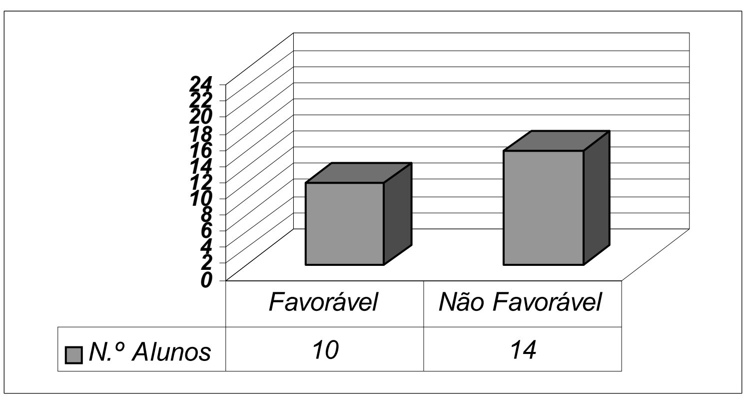


D2) O Movimento

Tabela D2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	10	14
%	41.67	58.33

Gráfico D2



Sobre o Reconhecimento, podemos constatar que 75% dos alunos reconheceram que em seus estudos anteriores (ensino médio) a matemática foi tratada como uma disciplina Universal. E, após a experiência com a modelagem matemática, 58.33% dos alunos reconheceram que a matemática foi tratada como uma disciplina Universal. Sobre o Movimento, constatamos que 58.33% dos alunos tenderam a olhar o conjunto de características Universal/singular da matemática em contraposição às perspectivas da modelagem matemática.

Continuando a análise, vamos considerar as informações dadas por meio das questões de número 20 contidas nos dois questionários, aplicados antes e após o trabalho com modelagem matemática. Estas questões referem-se ao conjunto de características, inicialmente denominado de E, ou seja, a matemática vinculada a propostas de atividades silenciosas e individuais e/ou de debate e em grupo.

As tabelas E e T3, nos anexos 10 e 13 respectivamente, mostram, respectivamente, as respostas dos alunos e a composição das respostas atribuídas para cada tipo de movimento. A partir desses dados, fizemos a seguinte análise:

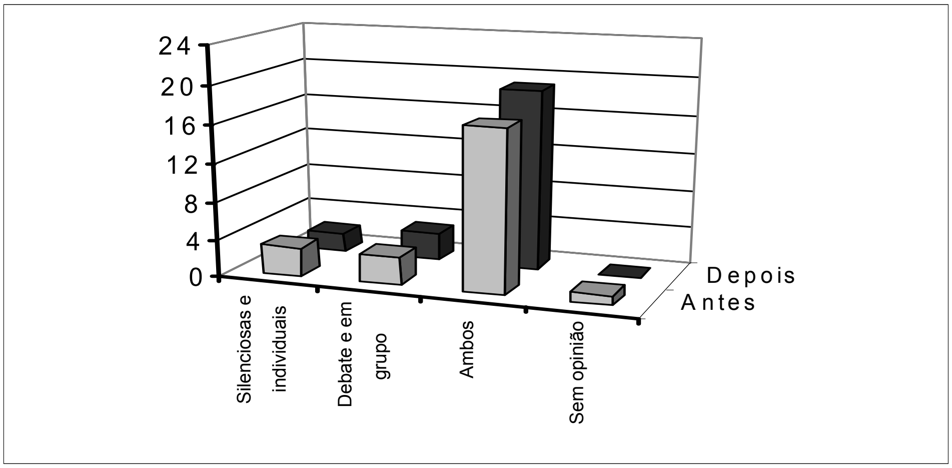
E) A matemática como uma disciplina de atividades isoladas e individuais e/ou de Debate e em grupo

E1) A opinião dos alunos

Tabela E1

	Propostas de atividades							
	Silenciosas e individuais		De debate e em grupo		Ambos os tipos		Sem opinião	
	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
Antes	3	12.50	3	12.50	17	70.83	1	4.17
Depois	2	8.33	3	12.50	19	79.17	0	0.00

Gráfico E1

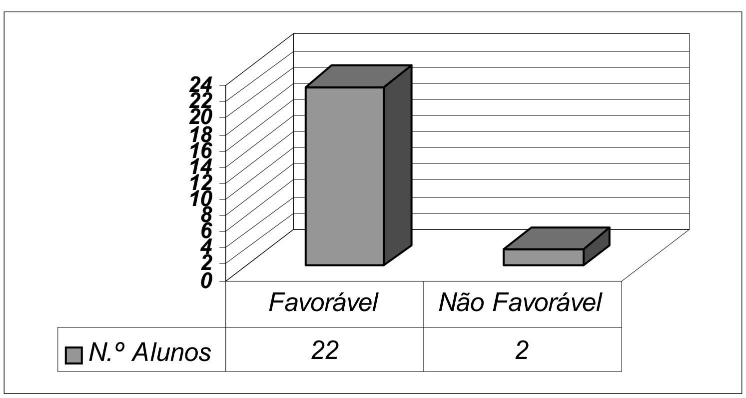


E2) O Movimento

Tabela E2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	22	2
%	91.67	8.33

Gráfico E2



Sobre opinião dos alunos, podemos constatar que 70.83% dos alunos, antes das atividades de modelagem, e 79.17% depois delas acham que a matemática deveria ser trabalhada com propostas de atividades tanto silenciosas e individuais quanto de debate e em grupo. Sobre o Movimento, constatamos que a maioria dos alunos(83.33%) tendeu a olhar para este conjunto de características da matemática segundo as perspectivas da modelagem matemática.

Vamos passar, agora, para análise das informações resultantes das questões 13 e 14 referentes ao questionário aplicado antes do trabalho com modelagem matemática e das questões 10 e 11 referentes ao questionário aplicado depois do trabalho com modelagem matemática.

Embora estas questões também resultem em informações sobre o conjunto de característica (B) Teórica e/ou Prática, optamos por analisá-las à parte em razão de seu formato e também em razão de estarmos considerando, para estas questões, o fato de que a característica Teórica da matemática pode ser interpretada, ou pode abranger, na visão do aluno, a característica Técnica – que diz respeito a regras, métodos e procedimentos – e a Teórica – que diz respeito aos significados e conceitos.

Sendo assim, de acordo com a Tabela F, no anexo 14, organizamos e dispomos os seguintes resultados para análise:

F) A ênfase na Técnica e/ou na Teoria e/ou na Prática

F1) O Reconhecimento

Tabela F1

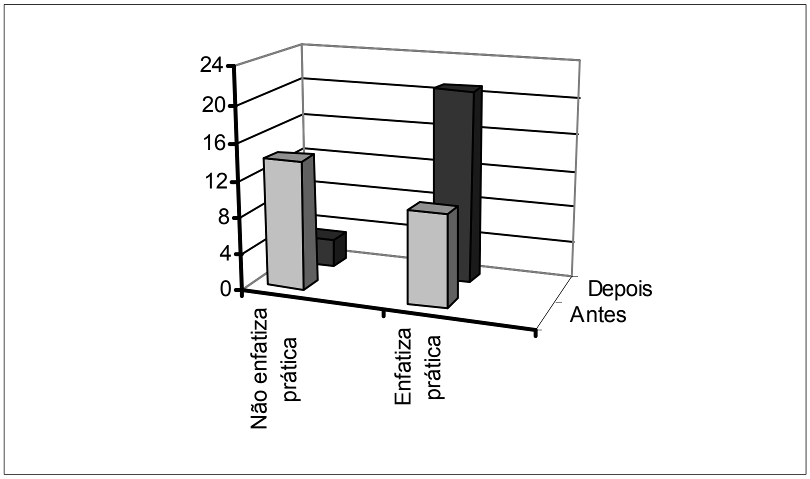
	Técnica		Teórica		Técnica Teórica		Prática		Técnica Prática		Teórica Prática		Técnica Teórica Prática	
	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%	N.º de Alunos	%
ANTES	8		1		5		1		5		1		3	
DEPOIS	2		1		0		6		5		4		6	

De acordo com a Tabela F1[14] apresentada acima, arranjamos os dados dividindo-os em dois grupos. Um grupo denominado de **"enfatiza a prática"** refere-se aos alunos os quais reconheceram que, de um modo ou de outro, aplicações práticas tenham sido enfatizadas nos seus estudos anteriores ou no trabalho com modelagem matemática. O outro grupo, **"não enfatiza a prática"**, refere-se aos alunos os quais não reconheceram que, de algum modo, aplicações práticas tenham sido enfatizadas nos seus estudos anteriores ou no trabalho com modelagem matemática.

Sendo assim, observamos que, em seus estudos anteriores, 10 alunos reconheceram alguma ênfase em aplicações práticas e 14 alunos não reconheceram ênfase alguma nas aplicações práticas. Ao passo que após o trabalho com modelagem matemática, temos que 21 alunos reconheceram alguma ênfase em aplicações práticas e 3 alunos não reconheceram ênfase alguma após o trabalho com modelagem matemática. Estas informações podem ser vistas no Gráfico F1, como segue:

[14] As informações dispostas nesta tabela foram obtidas da questão 14 do questionário anterior à pesquisa e da questão 11 do questionário posterior à pesquisa.

Gráfico F1



F2) <u>O Movimento</u>

Neste caso, o tipo de Movimento atribuído para o aluno é formado pela composição entre o Reconhecimento da ênfase nas aplicações práticas e o grau de importância dado a elas. Sobre este último, definimos assim:

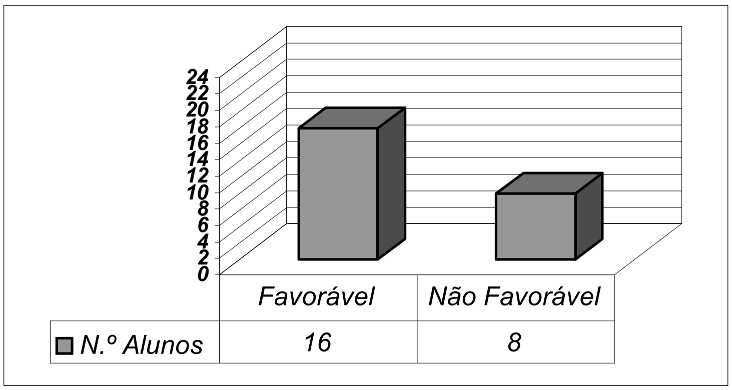
Grau de importância em relação às aplicações práticas		
Pouco importante	Importante	Muito importante
a: (1) , (2) , (3) c: (2) , (1) , (3)	b: (1) , (3) , (2) d: (2) , (3) , (1)	e: (3) , (1) , (2) f: (3) , (2) , (1)

Tal composição pode ser vista no quadro Q2, no anexo 17. E, os resultados para análise estão dispostos na Tabela F2 e no Gráfico F2, como segue:

Tabela F2

	Movimento	
	Favorável	Não favorável
N.º de alunos	16	8
%	66.67	33.33

Gráfico F2

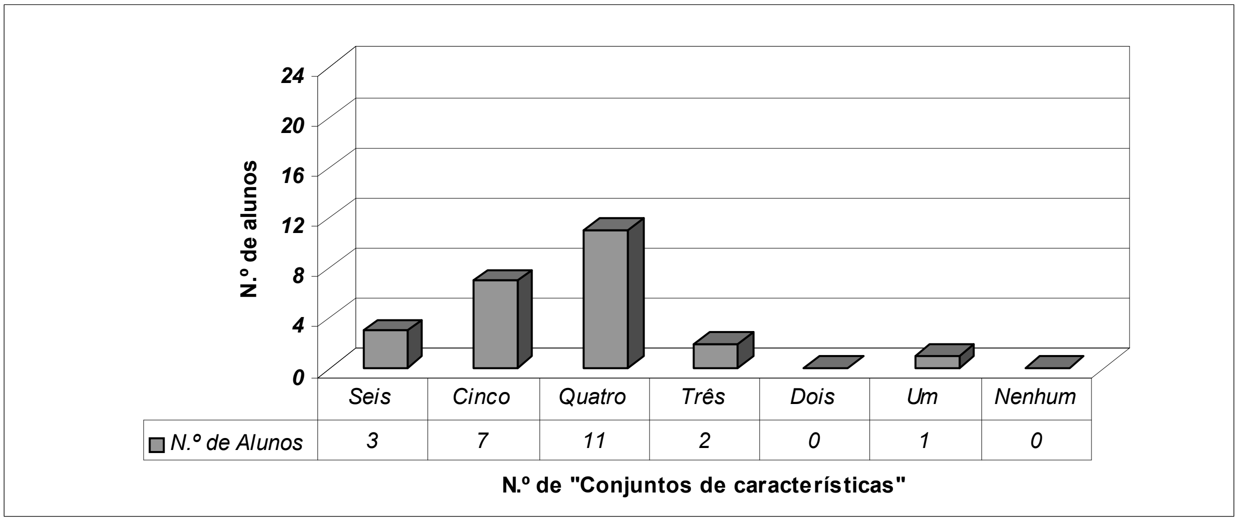


Podemos, agora, resumir a análise apresentada organizando as informações de modo a observarmos a quantidade de alunos com movimento favorável em relação ao número de “conjuntos de características” consideradas, incluindo a questão da ênfase na técnica, teoria e prática. Assim, de acordo com a tabela T4, no anexo 15, podemos dispor seis conjuntos de características, como segue:

Tabela G

	Movimento Favorável em						
	Seis	Cinco	Quatro	Três	Dois	Um	Nenhum
	Conjuntos de características						
N.º de Alunos	3	7	11	2	0	1	0
%	12.50	29.17	45.83	8.33	0.00	4.17	0.00

Gráfico G


N.º de alunos
24
20
16
12
8
4
0
Seis
Cinco
Quatro
Três
Dois
Um
Nenhum
N.º de Alunos
3
7
11
2
0
1
0
N.º de "Conjuntos de características"

Uma análise complementar

De um ponto de vista mais geral, consideremos as informações colhidas por meio das questões 1, 2, 3, 4, 21 e 22 do questionário inicial e 1, 2, 3 e 21 do questionário final. Elas foram organizadas da seguinte maneira:

- O GOSTAR DA MATEMÁTICA E SUAS JUSTIFICATIVAS

Dos 24 alunos que responderam a estas questões, temos que:

(a) 17 alunos afirmaram gostar muito de matemática tanto antes quanto depois de nossas atividades com modelagem matemática. Dentre estes alunos, apresentamos o seguinte quadro de justificativas dadas:

	Número de alunos	
Justificativa relacionada com:	Antes	Depois
Desenvolvimento do raciocínio lógico	7	7
Aplicações práticas da matemática	6	8
A matemática como sendo exata	2	2
Facilidade em aprender matemática	2	2
Não gosta da disciplina Língua Portuguesa	2	0
Influência de pessoas da família	0	1

(b) 3 alunos afirmaram gostar pouco ou “mais ou menos“ de matemática tanto antes quanto depois da pesquisa. Dentre estes alunos, apresentamos o seguinte quadro de justificativas dadas:

	Número de alunos	
Justificativa relacionada com:	Antes	Depois
Dificuldade em aprender matemática	2	2
Didática do professor	1	1

(c) 2 alunos afirmaram gostar pouco de matemática antes da pesquisa e depois dela afirmaram gostar mais ou menos de matemática. E, 1 aluno afirmou gostar mais ou menos antes da pesquisa e depois dela afirmou gostar muito de matemática. As justificativas apresentadas por estes alunos estão relacionadas com a dificuldade em aprender matemática e a falta de motivação. Não houve, porém, uma resposta a qual pudesse sugerir que alguns desses alunos tivesse mudado sua opção por alguma influência de nossas atividades de pesquisa.

- <u>A razão pela qual muitos alunos terminam o ensino médio desgostando de matemática</u>

Destacam-se as seguintes justificativas:

(a) A forma como a matemática é ensinada nas escolas:
- Memorização de fórmulas
- Exigência de respostas corretas

(b) Professores mal preparados;

(c) Dificuldade em aprender conceitos matemáticos;

(d) Não há aplicações práticas de matemática.

- Como deveriam ser as aulas de matemática

	Número de alunos	
Respostas relacionadas com:	Antes	Depois
Ter mais teoria	2	0
Ter mais aplicações práticas	11	8
Ter primeiro a teoria e depois exercícios passo a passo	4	2
Ter mais exercícios passo a passo	3	2
Incluir história	2	1
Ser mais dinâmica	5	3
Ter primeiro um exemplo prático e depois a teoria explicando o problema	1	1
Ter primeiro a teoria e depois aplicações práticas	0	3
Por meio de projetos individuais	0	2
Ter projetos de pesquisa	0	7
Ter teoria e prática	0	2

- Os conceitos matemáticos mais aprendidos no ensino fundamental e médio

Dos conceitos matemáticos mais mencionados pelos alunos, destacam-se as equações do 1º e 2 º graus e as funções. A maioria dos alunos não justificou sua resposta. Dos alunos que a justificaram, destacam-se as seguintes razões: assuntos bem explicados pelo professor, assuntos fáceis de entender e porque gostava de estuda-los.

- A utilidade da matemática trabalhada em sala de aula

A maioria dos alunos respondeu que a matemática vista na escola, nos anos anteriores, serviu e está servindo para aprender a matemática ensinada na faculdade. Destacam-se, também, algumas respostas referentes à aplicabilidade no dia a dia. Já em relação à matemática trabalhada durante a pesquisa, a maioria das respostas diz respeito à aplicabilidade da matemática no dia a dia e na profissão. Alguns alunos responderam que a matemática trabalhada durante as atividades da pesquisa serviu para relacionar a teoria e a prática.

CAPÍTULO IV – CONCLUSÃO

Comentários e conclusões preliminares

Encaminharemos nossa discussão refletindo sobre os resultados da nossa análise, bem como estabelecendo relações com as informações obtidas por meio das questões complementares do questionário e das observações espontâneas emergentes durante a pesquisa em sala de aula.

- **A matemática como uma disciplina exata/aproximada**

De acordo com os nossos estudos, é razoável considerarmos que, de um lado – ensino médio, a maioria de nossos alunos trabalhou a matemática com ênfase em tarefas[15], exercícios e problemas cujo objetivo principal era o de buscar respostas/conclusões corretas e, possivelmente, únicas. Essa prática sugere a idéia de que o "fazer matemática" em sala de aula tem como início, meio e fim a busca de respostas certas, abstratas, verdadeiras e circunscritas à matemática.

Do outro lado, no trabalho com modelagem matemática, o reconhecimento por cerca de 60% dos alunos de que a matemática foi tratada como uma disciplina tanto exata quanto aproximada indica que os alunos perceberam a ausência de exercícios e problemas repetitivos em contraste com a consideração de questões abertas e não totalmente quantitativas presentes nesse trabalho. De fato, a nossa principal preocupação era a de relacionar as propriedades e conceitos matemáticos às situações emergentes do problema proposto. Embora a maioria dos problemas propostos aos grupos não tenha incluído, rigorosamente, todas as etapas do processo de modelagem matemática, há de se destacar, e enfaticamente, que a resposta certa e única não estava sendo o objetivo principal dos alunos. Pelo contrário, a ausência imediata deste objetivo parecia indicar o motivo de vários alunos se comportarem como se não tivessem obtido conclusão nenhuma ao final de algumas aulas. Parecia não existir aquela verdade única, o

[15] Um exemplo do que estamos denominando de tarefa pode ser o emprego de material concreto para mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

resultado certo. No entanto, a pesquisa aponta que estes aspectos foram assumidos de modo positivo, visto que cerca de 60% dos alunos mostraram um movimento favorável.

- **A matemática como uma disciplina teórica/prática**
- **A ênfase na teoria ou na prática**

Observando a Tabela B1, verificamos um equilíbrio na opinião dos alunos sobre a matemática trabalhada no ensino médio, com ênfase na característica teórica da matemática. No entanto, o que merece destaque é o reconhecimento, após o nosso trabalho com a modelagem matemática e o movimento favorável de 96% dos alunos em relação a ele. Temos, aqui, 92% dos alunos reconhecendo que a matemática foi tratada como uma disciplina tanto teórica quanto prática e nenhum aluno reconhecendo que ela foi tratada apenas como teórica e, em relação aos resultados da Tabela F1, notamos que 87% dos alunos reconheceram que o trabalho enfatizou a os aspectos práticos.

Essas constatações são muito importantes no que concerne nossa preocupação sobre como as aplicações práticas e os conceitos teóricos devem ser considerados na modelagem matemática no âmbito do ensino e da aprendizagem da matemática em sala de aula. Aqui, os conceitos teóricos são trabalhados em conjunto com as aplicações práticas. Desse modo, nos afastamos da concepção denominada de conteudista, de transmissão e reprodução de conteúdos, a qual considera primeiro o aprendizado teórico e somente depois as aplicações práticas.

Nesse contexto, podemos relevar algumas respostas significativas dadas por alguns alunos quando convidados a responder sobre como eles acham que deveriam ser as aulas de matemática. São elas: “Ter primeiro a teoria e depois exercícios passo a passo”; “Ter primeiro a teoria e depois aplicações práticas”; “Ter primeiro um exemplo prático e depois a teoria”.

Essas respostas parecem indicar a importância dada a uma separação entre teoria e prática, ou também entre teoria e técnicas ("exercícios passo a passo") do ponto de vista da ordem na qual devem ser aprendidas. Vale observarmos que os alunos podem abranger, ou não, na mesma visão, tanto o aspecto teórico quanto o aspecto técnico da matemática, bem como o aspecto prático por meio de um problema pronto e por meio de um problema emergente de uma situação real.

Ainda nesse sentido, essa reflexão indica um dualismo na visão que os alunos têm da matemática. Temos a matemática do raciocínio lógico e a matemática das aplicações práticas[16]. Essa idéia se aproxima da visão isolada de teoria e de prática.

Se bem tenhamos a grande maioria dos alunos reconhecendo que a matemática foi tratada como uma disciplina teórica/prática após o trabalho com modelagem matemática, parece-nos razoável supor que algumas informações tendem a mostrar que a questão central era a pouca ênfase dada no ensino médio às aplicações práticas ou sua ausência, e não o aspecto do engajamento "sem uma ordem definida" entre teoria e prática.

- **A matemática como uma disciplina de transmissão/construção**

De acordo com as informações contidas nas Tabelas B1 e B2 podemos assumir que, no Ensino Médio, os conceitos matemáticos foram, na maioria das vezes, transmitidos dos professores para os alunos ou revelados pelos professores aos alunos, enquanto que no nosso trabalho com modelagem matemática os conceitos foram elaborados e organizados, fundamentalmente, pelos alunos em conjunto com os professores. Ademais, a constatação de um movimento favorável indica que os alunos se sentiram satisfeitos com a

[16] Ver quadro das justificativas à resposta sobre a questão "O quanto você gosta de matemática?".

experiência de poder participar ativa, construtiva e coletivamente, juntamente com seus professores e colegas, de seu próprio aprendizado. É importante destacar uma observação escrita por um aluno a respeito de como deveriam ser as aulas de matemática: “Fugir do professor tagarela em frente da lousa”. Isto reforça a presença, nos seus estudos anteriores, da situação de passividade dos alunos que, em geral, está presente quando o professor assume apenas sua função de transmitir informações e conhecimento. Em outras palavras, para os alunos foi perceptível a mudança de papel: de objetos de um ensino a sujeitos de um aprendizado.

- **A matemática como uma disciplina universal/singular**

Diante dos resultados obtidos, notamos que em ambas as situações, no ensino médio e após as atividades com modelagem matemática, existe uma tendência dos alunos em considerar a matemática como uma disciplina universal. Ou seja, os aspectos da matemática tal como é vista em sala de aula independem do contexto social e cultural do indivíduo, do grupo e da comunidade.

Em vista disso, é natural reconhecermos que o nosso trabalho com a modelagem matemática não foi suficientemente capaz de mostrar esse aspecto da natureza da matemática. É provável que tal resultado tenha sido decorrente do pouco contato dos alunos com esses termos e idéias. Isto tornou complexa a sua compreensão, na ausência de uma preparação ou explicação anterior ao trabalho.

- **A matemática como uma disciplina de atividades isoladas e/ou de debates e em grupo**

Segundo os dados das Tabelas E1 e E2, podemos constatar que a opinião dos alunos não mudou. Ou seja, tanto antes da pesquisa quanto depois dela, a maioria dos alunos acha que a matemática deve ser trabalhada por meio de atividades isoladas e de debates em grupo. Verificamos um movimento favorável, o que indica uma tendência positiva em relação às perspectivas da modelagem matemática.

No entanto, vale mencionar a dificuldade de muitos alunos em relação ao trabalho em grupo. Alguns alunos se desentenderam com colegas e cogitaram abandonar o grupo para realizar o trabalho individualmente ou até desistir do projeto. Esses comportamentos podem revelar pouca familiaridade dos alunos em realizar projetos em grupo. Uma das razões pode ser a situação de passividade contínua proporcionada pelas aulas com professores falando e alunos ouvindo. Outra razão residiria nas ênfases a um tempo individuais e competitivas (a postura do sistema no ENEM e nos vestibulares, por exemplo).

Conclusão final

Ao refletirmos sobre os estudos realizados neste trabalho, observamos que embora tenham sido observadas possibilidades de tendências para mudanças de opinião e visão, acreditamos que as atividades com modelagem matemática nesta pesquisa tenham mostrado a possibilidade mais de outra matemática no sentido da prática e da experimentação do que transformado conceitos e posturas provenientes de um ensino conteudista – reprodutivo dos ensinos fundamental e médio.

Entretanto, é possível atribuirmos à modelagem matemática – tal como foi implementada nesta pesquisa – um papel significativo nas discussões e reflexões acerca das percepções da natureza da matemática enquanto disciplina escolar. Mais especificamente, o estudo indica que o trabalho com a modelagem matemática em sala de aula pode encaminhar um processo de transformação na visão do aluno em relação à matemática, seu ensino e sua aprendizagem.

De fato, a pesquisa possibilitou o reconhecimento pela maioria dos alunos de que a matemática trabalhada em sala de aula pode:

- Reunir tanto as características de ser exata quanto a de ser aproximada (falibilista), estando imersa na dialética teoria e prática;
- Ser organizada e desenvolvida em conjunto;
- Estar associada tanto a atividades silenciosas e individuais quanto a atividades de debate e em grupo, de construção coletiva de conhecimento.

Além de tudo, a maioria dos alunos mostrou-se favorável em relação às características da matemática reconhecidas na pesquisa, ou melhor, estes alunos sentiram-se satisfeitos com a forma pela qual a matemática foi tratada durante o período de atividades.

BIBLIOGRAFIA

ARANHA, M.L.A., MARTINS, M.H.P. **Temas de Filosofia**. São Paulo: Moderna, 1992. 232 p.ew

BASSANEZI, Rodney C. Modelagem Matemática. **Dinamys**, Blumenau, V. 2, n. 7, p. 55-83, abr./jun. 1994.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002. 389p.

BENDER, Edward A. **An introduction to mathematical modeling**. New York: Wiley-Interscience , 1978.

BERRY, J.S. et al. **Teaching and applying mathematical modelling**. Southampton: Ellis Horwood Limited, 1984. 490 p.

BERRY, J.S., O'SHEA, T. Assessing mathematical modelling. **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol**, Loughborough, V. 13, n. 6, p. 715-724, 1982.

BIEMBENGUTT, Maria Salett. **Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus**. 1990. 179 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Área de concentração: Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos - Científicos, Universidade Estadual Paulista.

BIEMBENGUTT, M.S., HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

BISHOP, Alan J. **Mathematical Enculturation: A cultural perspective on mathematical education**. Holanda: D. Reidel Publishing Company, 1988.

BORBA, Marcelo C. Ethnomathematics and Education. In POWELL, A. B., FRANKENSTEIN, M. (Ed.). **Ethnomathematics**: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education. New York: State University of New York Press, 1997. p. 261-272.

BRANDÃO, D.M.S., CREMA, R. (Org.). **O novo paradigma holístico**: ciência, filosofia, arte e mística. 2. ed. São Paulo: Summus, 1991. 160 p.

BRANDÃO, Zaia (Org.). **A crise dos paradigmas e a educação**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1996. 104 p. (Questões da nossa época, 35).

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. v. 3, [199-].

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto**. Parâmetros curriculares nacionais**: convívio social e ética matemática. Versão preliminar, 1995.

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida**. São Paulo: Cultrix, [1998?]. 255 p.

CAPRA, Fritjof. **O ponto de mutação**. São Paulo: Cultrix, [1997?]. 447 p.

COBB, Paul. Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em educação matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 153-180, jul./dez. 1996.

COHEN, L., MANION, L. **Research methods in education**. New York: Croom Helm, 1985. 383 p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre Educação e Matemática. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986. 115 p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. 121 p. (Perspectivas em Educação Matemática).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação: Nas Lições do Passado, as Perspectivas para o Futuro, **Estudos Leopoldenses – Série Educação**, v. 2, n. 2, p. 7-16, jan/jun 1998.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1993. 88 p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática: Um Programa. **A Educação Matemática em revista –SBEM**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 5-11, 2º sem. 1993.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Transdisciplinariedade**. São Paulo: Palas Athena, 1997. 174 p.

DAVIS, P.J., HERSH, R. **A Experiência Matemática**. 4. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989. 485 p.

DAVIS, P.J., HERSH, R. **O sonho de Descartes**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988. 335 p.

DOSSEY, John A. The nature of mathematics: its role and its influence. In Douglas A. G. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, [s.l.], 1992. p. 39-48.

DUROZOI, G., ROUSSEL, A. **Dicionário de filosofia**. 2. ed. Campinas: Papirus, 1996. 511 p.

FERREIRA, Aurélio B.H. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa**. 2 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira S.A. , 1986.

FRANKENSTEIN, Marilyn. Educação matemática crítica: uma aplicação da Epistemologia de Paulo Freire. In BICUDO, M.A.V. (Org.). **Educação Matemática**. São Paulo: Moraes, 1988. p. 101-140.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 3. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1997. 165 p. (Coleção Leitura).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. 184 p.

GAZZETTA, Marineusa. **A modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores**. 1989. 150 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Área de concentração: Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos - Científicos, Universidade Estadual Paulista.

IMENES, L.M.P., LELLIS, M. O Ensino de Matemática e a Formação do Cidadão. **Temas & Debates**, Blumenau, n. 5, p. 9-13, out. 1994.

KNELLER, George F. **A ciência como atividade humana**. Rio de janeiro: Zahar. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1980. 310 p.

KONDER, Leandro. **O que é dialética?** São Paulo: Editora Brasiliense, 1997. 88 p. (Coleção primeiros passos, 23).

LORENZATO, S., VILA, M.C. Século XXI: qual Matemática é recomendável? **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 41-19, mar. 1993.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo, E.P.U., 1986. 99 p. (Temas Básicos de Educação e Ensino).

MATOS, João Filipe. Atitudes e concepções dos alunos: Definições e Problemas de Investigação. In: BROWN, M. et al. **Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 123-171.

MENDONÇA, Maria do Carmo D. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórico-estrutural ou uma opção valiosa? **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 5, p. 55-76, jan./jun. 1996.

MENDONÇA, Maria do Carmo D. **Problematização**: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. 1993. 307 p. Dissertação (Doutorado em Educação) – Área de concentração: Psicologia da Educação, Universidade Estadual de Campinas.

MEYER, João F.C.A. **"... o mesmo velho sujeito de sempre"**. In: CONGRESSO E MOSTRA DE EDUCAÇÃO PARA EXCELÊNCIA PROFISSIONAL – COMEEP, 1997, Campinas.

MIGUEL, Antonio. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em Educação Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 3, p. 7-39, mar. 1995.

MONTEIRO, Alexandrina. **Etnomatemática**: as possibilidades pedagógicas num curso de alfabetização para trabalhadores rurais assentados. 1998. 200 p. Dissertação (Doutorado em Educação) – Área de concentração: Educação Matemática, Universidade Estadual de Campinas.

MONTEIRO, Alexandrina. **O ensino de matemática para adultos através do método modelagem matemática**. 1991. 300 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista.

PESSIS-PASTERNAK, Guitta. **Será preciso queimar Descartes?** Lisboa: Relógio D'água, 1993. 252 p.

PINKER, Aron. The concept 'model' and its potencial role in mathematics education. **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.**, Loughborough, V. 12, n. 6, p. 693-707, 1981.

POMPEU Jr., Geraldo. **Trazendo a Etnomatemática para o Currículo Escolar: uma investigação das atitudes dos professores e da aprendizagem dos alunos.** 1992. 392 p. Tese de Doutorado, Cambridge University, Inglaterra.

PONTE, J.P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In BROWN, M. **Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-329.

PRIGOGINE, I., STENGER, I. **A nova aliança**. 3. ed. Brasília: Ed. da Universidade de Brasília, 1997. 247 p.

RONAN, Colin A. **História Ilustrada da Ciência**. 2. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991. 4v.

ROSA, Sanny D. da. **Construtivismo e mudança**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1997. 87 p. (Questões da nossa época, 29).

SKOVSMOSE, Ole. Competência Democrática e Conhecimento Reflexivo em Matemática. **For the Learning of Mathematics**, [s.l.], v. 12, n. 2, p. 141-169, jun. 1992. Tradução de: Democratic Competence and Reflective Knowing in Mathematics.

SKOVSMOSE, Ole. Educação Matemática e Democracia. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], n. 21, p. 109-128, 1990.

SKOVSMOSE, Ole. **Towards a Philosophy of Critical Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. 246 p. (Mathematics Education Library, 15)

SNAPPER, Ernst. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo, e o formalismo. **Humanidades**, [s.l.], v. 2, n. 8, p. 85-93, jul./set. 1984.

ANEXOS

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO DE DADOS PESSOAIS

Questionário de dados pessoais

- Idade: .... anos
- Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino
- Você reside em Sorocaba? ☐ Sim ☐ Não

Se não, em qual cidade você reside? ....

- Estado civil: ☐ solteiro(a) ☐ casado(a) ☐ outros
- Você concluiu o ensino médio através de curso supletivo?

  ☐ Sim ☐ Não

- Você cursou a maior parte do ensino médio em:

  ☐ Escola pública ☐ Escola particular

- Com quantos anos de idade você concluiu o ensino médio? .... anos
- Você freqüentou algum curso preparatório para vestibular?

  ☐ Sim ☐ Não

Se sim, quanto tempo?

☐ 3 meses ☐ 6 meses ☐ um ano

☐ dois anos ☐ mais de dois anos

- Você já freqüentou algum curso superior além deste?

  ☐ Sim ☐ Não

Se sim, qual curso superior você freqüentou? ....
(coloque a área e a instituição)

- Você trabalha? ☐ Sim ☐ Não

Se sim, quantas horas por dia você trabalha? .... horas
Qual sua renda mensal (em salários mínimos)? ....
No momento você está trabalhando por opção ou por necessidade? ....

- No momento quem está financiando seus estudos?

  ☐ Meus Pais ☐ Eu mesmo(a)

  ☐ A empresa onde trabalho

  ☐ Tenho bolsa de estudos parcial

  ☐ Tenho bolsa de estudos integral

  ☐ Parte contribui minha família ou a empresa onde trabalho

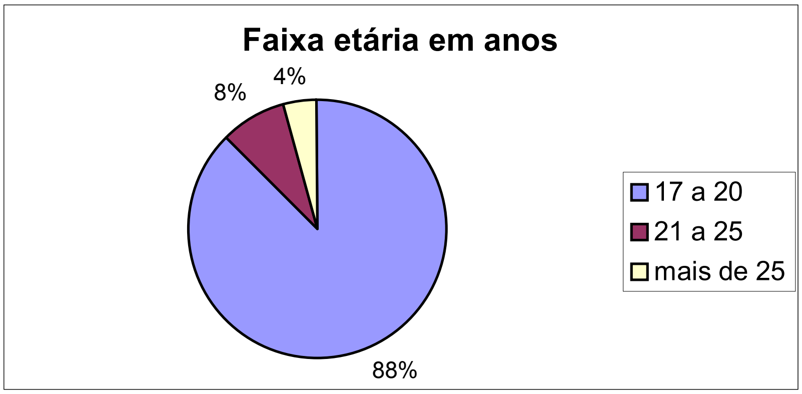
- Qual a renda aproximada (em salários mínimos) de seus pais? ....

ANEXO 2

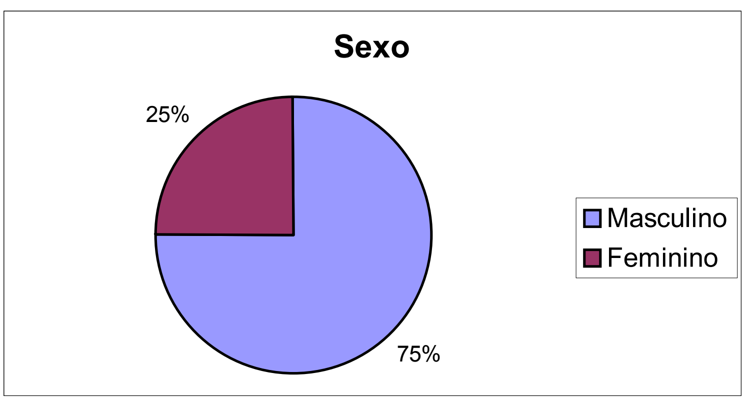
SOBRE OS NOSSOS PARTICIPANTES

De acordo com o questionário de dados pessoais, obtivemos as seguintes informações:

- Idade

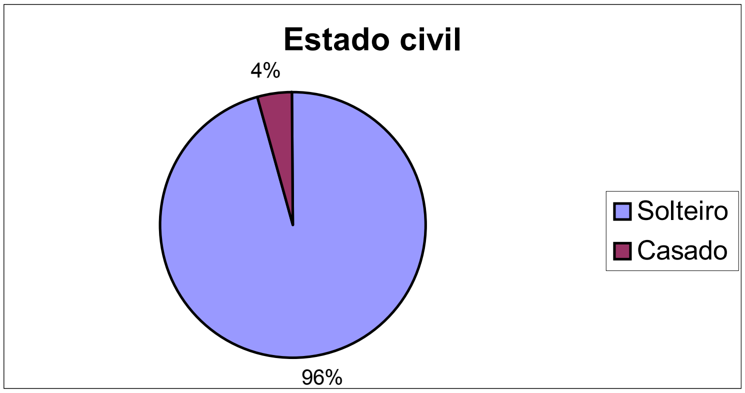


- Sexo



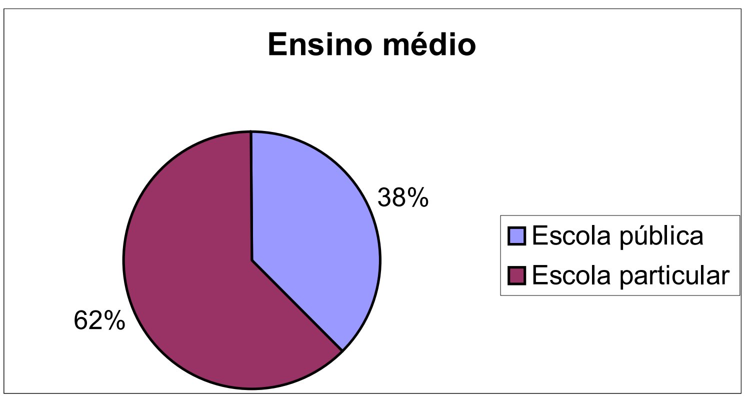
- A maioria dos alunos reside em Sorocaba ou cidades vizinhas

- Estado civil

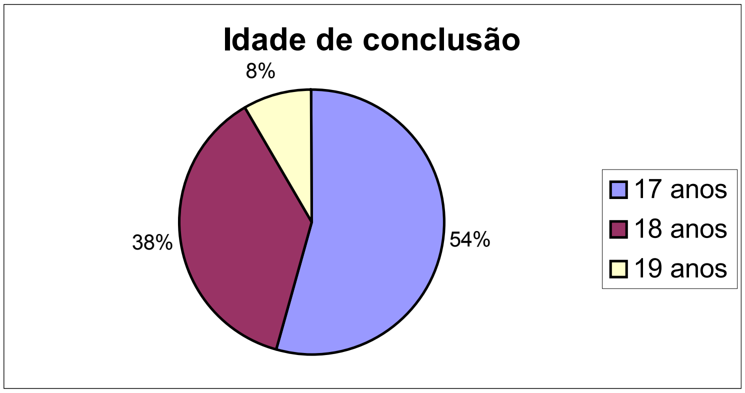


- Nenhum aluno concluiu o ensino médio em curso supletivo

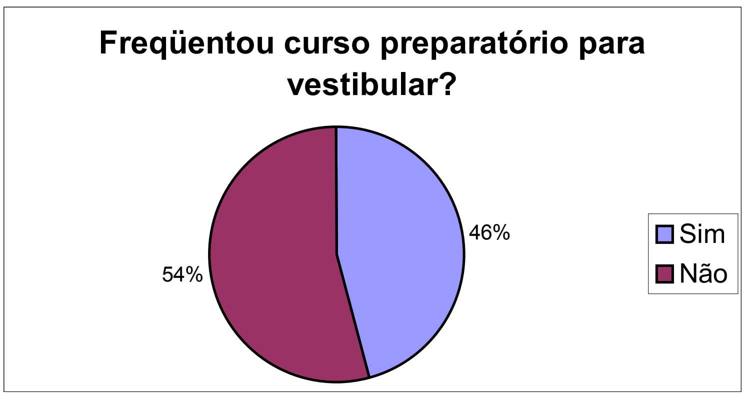
- A maior parte do ensino médio foi cursada em:



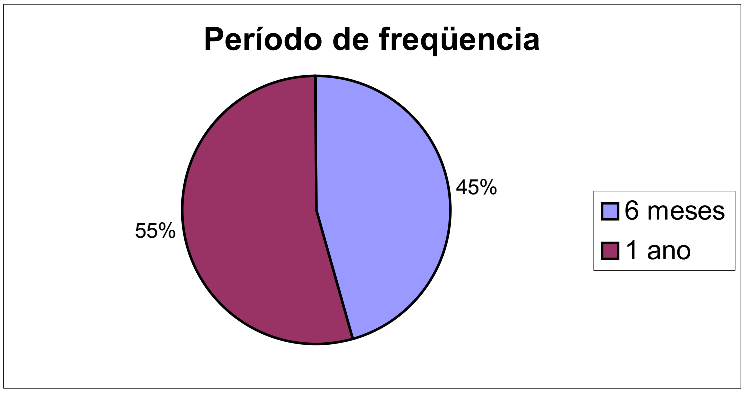
- Idade de conclusão do ensino médio



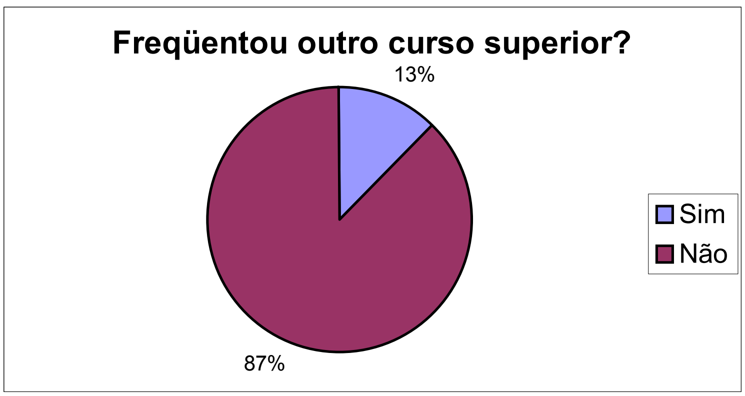
- Curso preparatório para vestibular



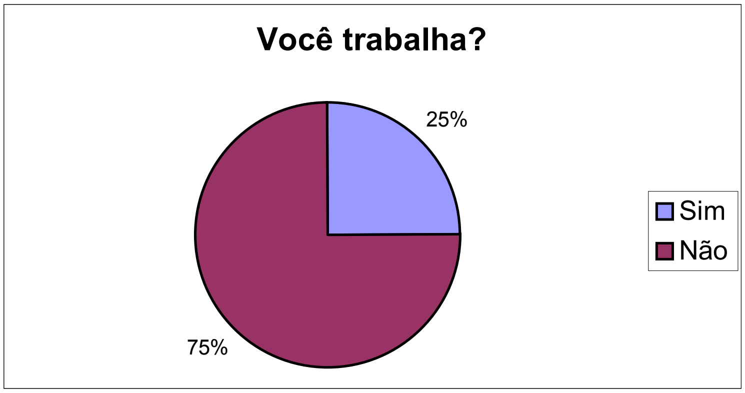
- Dentre os alunos que freqüentaram curso preparatório para vestibular, o fizeram no período de:



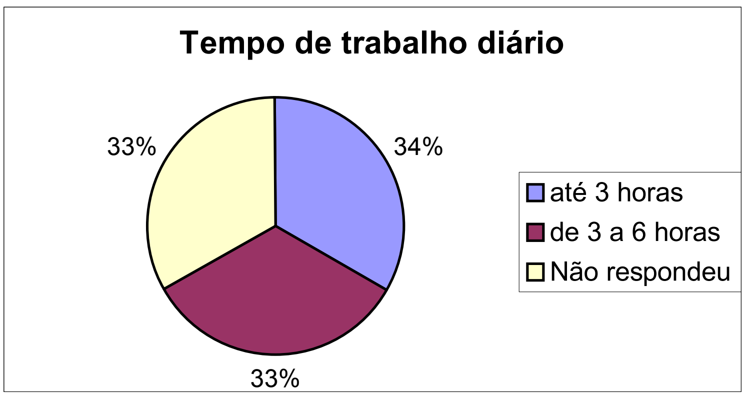
- Curso superior



- Alunos que trabalham



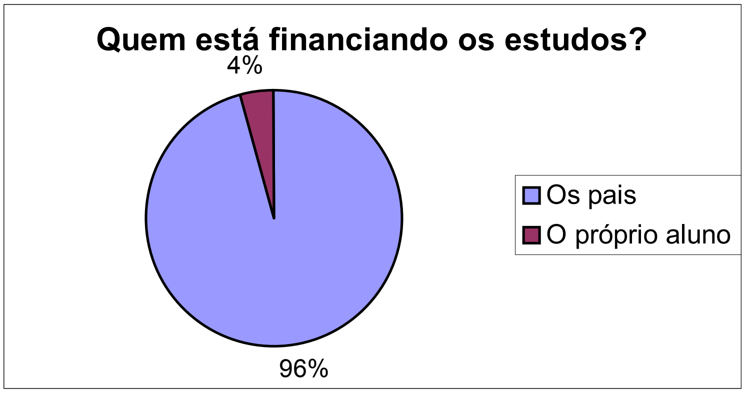
- O número de horas que o aluno trabalha por dia



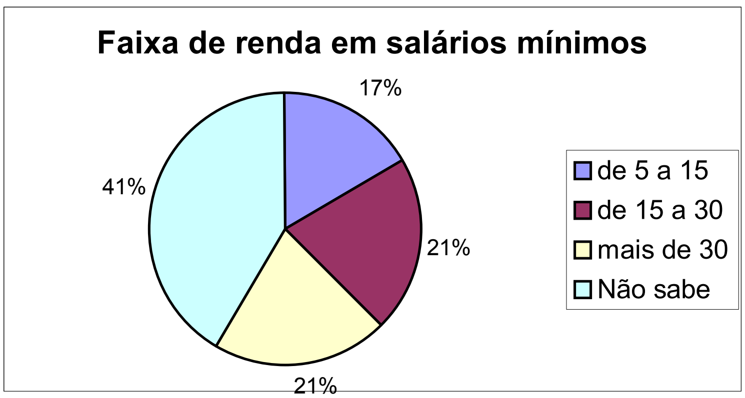
- A renda mensal dos alunos que trabalham vai de 2 a 8 salários mínimos.

- Dentre os alunos que trabalham, a metade o faz por opção e a outra metade por necessidade.

- No momento, quem está financiando os estudos dos alunos?



- A renda mensal dos pais em salários mínimos:



ANEXO 3

QUESTIONÁRIO (PRÉ –TESTE)

Prezado Aluno(a),

este questionário é parte de uma pesquisa que está sendo realizada na área de Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Você não precisará se identificar para responder ao questionário, mas é muito importante que suas respostas reflitam a sua opinião pessoal sobre o que está sendo perguntado. Não deixe de responder a nenhuma questão.

Contamos com a sua colaboração.

1) O quanto você gosta de matemática

(a) demais
(b) muito
(c) mais ou menos
(d) pouco
(e) nada

2) Com relação a questão anterior, justifique a sua resposta.

3) Dê dois exemplos do que você mais aprendeu nos seus estudos anteriores (ensino fundamental e médio).

4) Para quê serviu ou para que serve a matemática que você aprendeu no ensino médio? Dê até dois exemplos.

5) Antes de entrar na faculdade, você costumava estudar matemática:

(a) com um colega de classe
(b) com um grupo de colegas de classe
(c) sozinho

6) Você aprendeu algo da História da Matemática? Dê um exemplo.

7) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) totalmente exata
(b) totalmente aproximada
(c) mais exata do que aproximada
(d) mais aproximada do que exata
(e) ora exata, ora aproximada

8) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi ensinada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

9) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) totalmente teórica
(b) totalmente prática
(c) mais teórica do que prática
(d) mais prática do que teórica
(e) partes balanceadas de teoria e prática

10) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi tratada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

11) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) universal, no sentido de que independe do contexto social/cultural em que é ensinada
(b) parcialmente universal, no sentido de que na maioria das vezes ela independe do contexto social/cultural em que é ensinada
(c) universal/singular, no sentido de que a independência ou dependência do contexto em que é ensinada são igualmente balanceadas
(d) parcialmente singular, no sentido de que na maioria das vezes ela depende do contexto social/cultural em que é ensinada
(e) singular, no sentido de que depende do contexto social/cultural em que é ensinada

12) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi tratada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

13) Ordene em grau de importância o que deve ser mais enfatizado quando se está aprendendo matemática:

( ) métodos, regras e procedimentos
( ) o significado teórico dos conceitos estudados
( ) a utilidade prática dos conceitos estudados

14) Nos seus estudos anteriores, (ensino fundamental e médio), o que era mais enfatizado no aprendizado da matemática?

(a) métodos, regras e procedimentos
(b) o significado teórico dos conceitos estudados
(c) a utilidade prática dos conceitos estudados
(d) igualmente a e b
(e) igualmente a e c
(f) igualmente b e c
(g) igualmente tudo

15) Qual o grau de importância com que você vê a matemática no ensino de engenharia?

(a) totalmente importante
(b) muito importante
(c) importante
(d) pouco importante
(e) nenhuma importância

16) No futuro exercício profissional você se imagina usando matemática:

(a) quase sempre
(b) de vez em quando
(c) quase nunca, porque não vai precisar
(d) quase nunca, porque os *softwares* darão conta do que a gente precisa
(e) não sei

17) Até este momento do curso, você vê os assuntos de matemática do 1º ano básico de engenharia como:

(a) servem somente para aprender outras disciplinas de matemática deste curso de Engenharia Elétrica/Civil
(b) servem para aprender outras disciplinas de outras áreas em Engenharia Elétrica/Civil
(c) têm relevância própria porque terão aplicação profissional
(d) ainda não sei para que servem

18)Atualmente, acredita-se na concepção de um modelo heliocêntrico do universo (os planetas girando em torno do sol), até meados do século XVI, porém, a concepção era de um universo geocêntrico (os planetas girando em torno da terra). Tendo em vista esta mudança no modo de conceber o universo no campo da astronomia e física, você se lembra de alguma(s) concepção(s) em Matemática que mudou através do tempo? Qual?

19)Para você, a Matemática:

(a) se transmite
(b) se descobre
(c) se cria
(d) outra(s). Especifique
....

20)Você acha que para estudar/aprender matemática em sala de aula, o mais adequado seria a proposta de atividades:

(a) silenciosas e individual
(b) de debates e em grupo
(c) ambos os tipos de atividades
(d) não sei

21)Um número considerável de alunos acaba concluindo o ensino médio desgostando de matemática. A que você atribui isto?

22) Como você acha que deveriam ser as aulas de matemática?

ANEXO 4

QUESTIONÁRIO INICIAL

Prezado Aluno(a),

este questionário é parte de uma pesquisa que está sendo realizada na área de Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). A sua identidade individual será preservada, mas é muito importante que suas respostas reflitam a sua opinião pessoal sobre o que está sendo perguntado. Não deixe de responder a nenhuma questão.

Contamos com a sua colaboração.

Nome: ....

1) O quanto você gosta de matemática

   (a) demais
   (b) muito
   (c) mais ou menos
   (d) pouco
   (e) nada

2) Com relação a questão anterior, justifique a sua resposta.

3) Dê dois exemplos de conceitos matemáticos que você mais aprendeu nos seus estudos anteriores (ensino fundamental e médio) e explique porque você aprendeu mais estes conceitos.

4) Para quê serviu ou para que serve a matemática que você aprendeu no ensino médio? Dê até dois exemplos.

5) Antes de entrar na faculdade, você costumava estudar matemática:

(a) com um colega de classe
(b) com um grupo de colegas de classe
(c) sozinho
(d) não estudava

6) Você aprendeu algo da História da Matemática? Dê um exemplo.

7) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) exata, no sentido de que ela fornece apenas resultados únicos, corretos e sem ambigüidades para os problemas
(b) mais exata que aproximativa, no sentido de que na maioria das vezes ela fornece resultados únicos, corretos e sem ambigüidades para os problemas
(c) exata/aproximativa, no sentido de que a exatidão ou aproximação dos resultados fornecidos são igualmente balanceadas
(d) mais aproximativa que exata, no sentido de que na maioria das vezes ela fornece resultados aproximados, falíveis e discutíveis para os problemas
(e) aproximativa, no sentido de que ela fornece apenas resultados aproximados, falíveis e discutíveis para os problemas

8) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi ensinada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

9) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) totalmente teórica
(b) mais teórica do que prática
(c) partes balanceadas de teoria e prática
(d) mais prática do que teórica
(e) totalmente prática

10) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi tratada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

11) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) universal, no sentido de que independe do contexto social/cultural em que é ensinada
(b) parcialmente universal, no sentido de que na maioria das vezes ela independe do contexto social/cultural em que é ensinada
(c) universal/singular, no sentido de que a independência ou dependência do contexto em que é ensinada são igualmente balanceadas
(d) parcialmente singular, no sentido de que na maioria das vezes ela depende do contexto social/cultural em que é ensinada
(e) singular, no sentido de que depende do contexto social/cultural em que é ensinada

12) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi tratada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

13) Ordene em grau de importância, do mais importante para o menos importante, o que deve ser mais enfatizado quando se está aprendendo matemática:

(1) métodos, regras e procedimentos
(2) o significado teórico dos conceitos estudados
(3) a utilidade prática dos conceitos estudados

.... , ... , ...

14) Nos seus estudos anteriores, (ensino fundamental e médio), o que era mais enfatizado no aprendizado da matemática?

(a) métodos, regras e procedimentos
(b) o significado teórico dos conceitos estudados
(c) a utilidade prática dos conceitos estudados
(d) igualmente a e b
(e) igualmente a e c
(f) igualmente b e c
(g) igualmente tudo

15) Qual o grau de importância com que você vê a matemática no ensino de engenharia?

(a) totalmente importante
(b) muito importante
(c) importante
(d) pouco importante
(e) nenhuma importância

16) No futuro exercício profissional você se imagina usando matemática:

(a) quase sempre
(b) de vez em quando
(c) quase nunca, porque não vai precisar
(d) quase nunca, porque os *softwares* darão conta do que a gente precisa
(e) não sei

17) Até este momento do curso, você vê os assuntos de matemática do 1º ano básico de engenharia como:

(a) servem somente para aprender outras disciplinas de matemática deste curso de Engenharia de Computação
(b) servem para aprender outras disciplinas de outras áreas em Engenharia de Computação
(c) têm relevância própria porque terão aplicação profissional
(d) ainda não sei para que servem

18) A matemática que você teve no ensino médio era tratada como uma disciplina:

(a) de transmissão, no sentido de que ela era transmitida pelos seus professores
(b) mais de transmissão que de construção, no sentido de que na maioria das vezes ela era transmitida pelos seus professores
(c) de transmissão/construção, no sentido de que a transmissão ou construção da matemática eram igualmente balanceadas
(d) mais de construção que de transmissão, no sentido de que na maioria das vezes ela era produzida e organizada em conjunto (professores e alunos)
(e) de construção, no sentido de que ela era produzida e organizada em conjunto (professores e alunos)

19) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como ela foi tratada, você está (ou ficou):

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

20) Você acha que para estudar/aprender matemática em sala de aula, o mais adequado seria a proposta de atividades:

(a) silenciosas e individual
(b) de debates e em grupo
(c) ambos os tipos de atividades
(d) não sei

21)Um número considerável de alunos acaba concluindo o ensino médio desgostando de matemática. A que você atribui isto?

22)Como você acha que deveriam ser as aulas de matemática?

ANEXO 5

QUESTIONÁRIO FINAL

Prezado Aluno(a),

este questionário é parte de uma pesquisa que está sendo realizada na área de Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). A sua identidade individual será preservada, mas é muito importante que suas respostas reflitam a sua opinião pessoal sobre o que está sendo perguntado. Não deixe de responder a nenhuma questão.

Contamos com a sua colaboração.

Nome:...

1) O quanto você gosta de matemática

   (a) demais
   (b) muito
   (c) mais ou menos
   (d) pouco
   (e) nada

2) Com relação a questão anterior, justifique a sua resposta.

3) Após essa experiência com Modelagem Matemática, qual a sua opinião a respeito da utilidade dos conhecimentos matemáticos com os quais trabalhou?

4) Os conceitos matemáticos com os quais você trabalhou durante a pesquisa com Modelagem Matemática foram tratados como:

(a) exatos, no sentido de que eles fornecem apenas resultados únicos, corretos e sem ambigüidades para os problemas investigados
(b) mais exatos que aproximativos, no sentido de que na maioria das vezes eles fornecem resultados únicos, corretos e sem ambigüidades para os problemas investigados
(c) exatos/aproximativos, no sentido de que a exatidão ou aproximação dos resultados fornecidos são igualmente balanceadas
(d) mais aproximativos que exatos, no sentido de que na maioria das vezes eles fornecem resultados aproximados, falíveis e discutíveis para os problemas investigados
(e) aproximativos, no sentido de que eles fornecem apenas resultados aproximados, falíveis e discutíveis para os problemas investigados

5) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como a matemática foi trabalhada, você está:

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

6) Os conceitos matemáticos com os quais você trabalhou durante a pesquisa com Modelagem Matemática foram tratados como:

(a) totalmente teóricos
(b) mais teóricos do que práticos
(c) partes balanceadas de teoria e prática
(d) mais práticos do que teóricos
(e) totalmente práticos

7) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como a matemática foi trabalhada, você está:

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

8) Os conceitos matemáticos com os quais você trabalhou durante a pesquisa com Modelagem Matemática foram tratados como:

(a) universais, no sentido de que independem do contexto social/cultural em que são ensinados
(b) parcialmente universais, no sentido de que na maioria das vezes eles independem do contexto social/cultural em que são ensinados
(c) universais/singulares, no sentido de que a independência ou dependência do contexto em que são ensinados são igualmente balanceadas
(d) parcialmente singulares, no sentido de que na maioria das vezes eles dependem do contexto social/cultural em que são ensinados
(e) singulares, no sentido de que dependem do contexto social/cultural em que são ensinados

9) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como a matemática foi tratada, você está:

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

10) Ordene em grau de importância, do mais importante para o menos importante, o que deve ser mais enfatizado quando se está aprendendo matemática:

(1) métodos, regras e procedimentos
(2) o significado teórico dos conceitos estudados
(3) a utilidade prática dos conceitos estudados

.... , ... , ...

11) Durante o trabalho de pesquisa com Modelagem Matemática, o que foi mais enfatizado no aprendizado da matemática?

(a) métodos, regras e procedimentos
(b) o significado teórico dos conceitos estudados
(c) a utilidade prática dos conceitos estudados
(d) igualmente a e b
(e) igualmente a e c
(f) igualmente b e c
(g) igualmente tudo

12) Após esse trabalho, qual o grau de importância com que você vê a matemática no ensino de engenharia?

(a) totalmente importante
(b) muito importante
(c) importante
(d) pouco importante
(e) nenhuma importância

13) Em relação a questão anterior, sua opinião mudou após essa pesquisa? Justifique a sua resposta.

14) Após esse trabalho, você acredita que no exercício profissional você irá usar a matemática:

(a) quase sempre
(b) de vez em quando
(c) quase nunca, porque não vai precisar
(d) quase nunca, porque os *softwares* darão conta do que a gente precisa
(e) não sei

15) Em relação a questão anterior, sua opinião mudou após essa pesquisa? Justifique a sua resposta.

16) Após esse trabalho e até este momento do curso, você vê os assuntos de matemática do 1º ano básico de engenharia como:

(a) servem somente para aprender outras disciplinas de matemática deste curso de Engenharia de Computação
(b) servem para aprender outras disciplinas de outras áreas em Engenharia de Computação
(c) têm relevância própria porque terão aplicação profissional
(d) ainda não sei para que servem

17) Em relação a questão anterior, sua opinião mudou após essa pesquisa? Justifique a sua resposta.

18) Os conceitos matemáticos com os quais você trabalhou durante a pesquisa com Modelagem Matemática foram tratados como:

(a) de transmissão, no sentido de que eles eram transmitidos pelos seus professores
(b) mais de transmissão que de construção, no sentido de que na maioria das vezes eles eram transmitidos pelos seus professores
(c) de transmissão/construção, no sentido de que a transmissão ou construção destes conceitos eram igualmente balanceadas
(d) mais de construção que de transmissão, no sentido de que na maioria das vezes eles eram produzidos e organizados em conjunto (professores e alunos)
(e) de construção, no sentido de que eles eram produzidos e organizados em conjunto (professores e alunos)

19) De acordo com a questão anterior, em relação à forma como estes conceitos foram trabalhados, você está :

(a) muito satisfeito
(b) satisfeito
(c) nem satisfeito nem insatisfeito
(d) insatisfeito
(e) muito insatisfeito

20)Você acha que para estudar/aprender matemática em sala de aula, o mais adequado seria a proposta de atividades:

(a) silenciosas e individuais
(b) de debate e em grupo
(c) ambos os tipos de atividades
(d) não sei

21)Após essa sua experiência no trabalho de pesquisa com Modelagem Matemática, como você acha que deveriam ser as aulas de matemática? Justifique a sua resposta.

ANEXO 6

Tabela A

ALUNO	ANTES						DEPOIS					
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
	Exata	Exata aproximada	Aproximada	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Exata	Exata aproximada	Aproximada	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
1	X				X				X			X
2	X					X		X			X	
3	X				X			X				X
4	X					X		X				X
5		X			X			X			X	
6	X				X			X				X
7		X				X	X					X
8	X					X	X					X
9	X			X				X				X
10	X				X			X				X
11	X					X		X				X
12		X		X			X					X
13	X				X		X					X
14	X					X		X				X
15	X					X		X				X
16		X				X	X					X
17	X					X	X					X
18	X					X		X				X
19			X	X				X				X
20	X			X			X					X
21	X				X		X					X
22		X			X			X				X
23	X				X			X				X
24	X				X			X			X	

ANEXO 7

Tabela B

ALUNO	ANTES						DEPOIS					
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
	Teórica	Teórica prática	Prática	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Teórica	Teórica prática	Prática	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
1	X			X				X				X
2		X				X		X		X		
3	X			X				X				X
4		X				X		X				X
5		X			X			X			X	
6			X			X			X			X
7		X			X			X				X
8			X		X			X				X
9		X			X			X			X	
10		X			X			X				X
11			X			X		X				X
12	X			X				X				X
13	X				X			X				X
14			X		X				X			X
15		X				X		X				X
16		X				X		X				X
17			X			X		X				X
18	X			X				X				X
19	X				X			X				X
20	X					X		X				X
21	X					X		X				X
22		X			X			X				X
23	X					X		X				X
24		X			X			X			X	

ANEXO 8

Tabela C

	ANTES						DEPOIS					
ALUNO	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
	Transmissão	Transmissão construção	Construção	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Transmissão	Transmissão construção	Construção	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
1	X			X					X			X
2		X			X				X	X		
3	X			X					X			X
4	X				X			X			X	
5		X				X		X			X	
6	X					X			X			X
7	X				X				X			X
8	X				X			X				X
9			X	X				X				X
10		X			X				X			X
11	X				X				X			X
12	X					X			X			X
13	X				X				X			X
14	X					X		X				X
15	X				X				X			X
16	X				X				X			X
17	X					X			X			X
18	X				X				X		X	
19	X				X			X				X
20	X			X					X			X
21	X			X					X			X
22		X			X				X		X	
23	X			X			X					X
24	X					X			X		X	

ANEXO 9

Tabela D

ALUNO	ANTES						DEPOIS					
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
	Universal	Universal singular	Singular	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Universal	Universal singular	Singular	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
1	X			X				X			X	
2	X					X	X					X
3	X					X	X					X
4	X			X			X					X
5	X				X			X			X	
6	X					X	X					X
7			X		X		X					X
8	X					X	X					X
9		X			X		X					X
10		X			X			X				X
11	X					X	X					X
12	X				X		X				X	
13	X					X	X					X
14	X					X		X				X
15	X					X		X				X
16	X					X		X				X
17	X					X		X				X
18	X					X	X					X
19			X		X			X				X
20	X			X					X			X
21	X				X		X					X
22	X					X	X				X	
23			X		X			X				X
24			X	X			X			X		

ANEXO 10

Tabela E

	ANTES				DEPOIS			
	Propostas de atividades				Propostas de atividades			
ALUNO	Silenciosas e individuais	De debate e em grupo	Ambos os tipos	Sem opinião	Silenciosas e individuais	De debate e em grupo	Ambos os tipos	Sem opinião
1			X				X	
2			X				X	
3			X				X	
4		X					X	
5			X				X	
6			X				X	
7	X						X	
8			X				X	
9		X					X	
10	X				X			
11				X		X		
12			X				X	
13		X					X	
14	X						X	
15			X				X	
16			X				X	
17			X				X	
18			X				X	
19			X		X			
20			X				X	
21			X			X		
22			X				X	
23			X				X	
24			X			X		

ANEXO 11

Tabela T1

	ANTES						DEPOIS					
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
MOVIMENTO	Em contraposição à MM	Balanceada segundo as perspectivas da MM	Segundo as perspectivas da MM	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Em contraposição à MM	Balanceada segundo as perspectivas da MM	Segundo as perspectivas da MM	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
FAVORÁVEL	X			X					X		X	
	X			X					X			X
	X				X				X			X
	X			X				X			X	
	X			X				X				X
	X				X			X				X
		X		X					X		X	
		X		X					X			X
		X			X				X			X
		X		X				X			X	
		X		X				X				X
		X			X			X				X
			X	X					X		X	
			X	X					X			X
			X		X				X			X
			X	X				X			X	
			X	X				X				X
			X		X			X				X
	X					X			X			X
	X				X				X		X	
	X					X		X				X
	X				X			X			X	
		X				X			X			X
		X			X				X		X	
			X			X			X			X
			X		X				X		X	
		X				X		X				X
		X			X			X			X	
			X			X		X				X
			X		X			X			X	

Observações:

- Características “em contraposição à modelagem matemática (MM)”:

Exata, Teórica, de Transmissão e Universal

- Características “balanceada segundo as perspectivas da MM”:

Exata/Aproximada, Teórica/Prática, de Transmissão/ Construção e Universal/Singular

- Características “segundo as perspectivas da MM”:

Aproximada, Prática, de Construção e Singular

ANEXO 12

Tabela T2

MOVIMENTO	ANTES						DEPOIS					
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO			CARACTERÍSTICA			GRAU DE SATISFAÇÃO		
	Em contraposição à MM	Balanceada segundo as perspectivas da MM	Segundo as perspectivas da MM	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito	Em contraposição à MM	Balanceada segundo as perspectivas da MM	Segundo as perspectivas da MM	Insatisfeito	Nem satisfeito Nem insatisfeito	Satisfeito
NÃO FAVORÁVEL			X	X			X					X
			X	X			X				X	
			X		X		X					X
			X			X	X					X
			X		X		X				X	
		X		X			X					X
		X		X			X				X	
		X			X		X					X
		X				X	X					X
		X			X		X				X	
	X			X			X					X
	X			X			X				X	
	X				X		X					X
	X					X	X					X
	X				X		X				X	
	X					X			X	X		
	X					X			X		X	
	X				X				X	X		
	X			X					X	X		
	X					X		X		X		
	X					X		X			X	
	X				X			X		X		
	X			X				X		X		
		X				X			X	X		
		X				X			X		X	
		X			X				X	X		
		X		X					X	X		
			X			X			X	X		
			X			X			X		X	
			X		X				X	X		
			X	X					X	X		
		X				X		X		X		
		X				X		X			X	
		X			X			X		X		
		X		X				X		X		
			X			X		X		X		
			X			X		X			X	
			X		X			X		X		
			X	X				X		X		
			X			X	X			X		
			X			X	X				X	
			X		X		X			X		
			X	X			X			X		
		X				X	X			X		
		X				X	X				X	
		X			X		X			X		
		X		X			X			X		
	X					X	X			X		
	X					X	X				X	
	X				X		X			X		
	X			X			X			X		

ANEXO 13

Tabela T3

MOVIMENTO	ANTES				DEPOIS			
	Propostas de atividades				Propostas de atividades			
	Silenciosas e individuais	De debate e em grupo	Ambos os tipos	Sem opinião	Silenciosas e individuais	De debate e em grupo	Ambos os tipos	Sem opinião
FAVORÁVEL	X						X	
		X					X	
			X				X	
				X			X	
	X					X		
		X				X		
			X			X		
				X		X		
NÃO FAVORÁVEL	X							X
		X						X
			X					X
				X				X
	X				X			
		X			X			
			X		X			
				X	X			

ANEXO 14

Tabela F

ALUNO	ANTES				DEPOIS			
	CARACTERÍSTICA			GRAU DE IMPORTÂNCIA	CARACTERÍSTICA			GRAU DE IMPORTÂNCIA
	Técnica (1)	Teórica (2)	Prática (3)	a: (1) , (2) , (3) b: (1) , (3) , (2) c: (2) , (1) , (3) d: (2) , (3) , (1) e: (3) , (1) , (2) f: (3) , (2) , (1)	Técnica	Teórica	Prática	a: (1) , (2) , (3) b: (1) , (3) , (2) c: (2) , (1) , (3) d: (2) , (3) , (1) e: (3) , (1) , (2) f: (3) , (2) , (1)
1	**X**	**X**		**f**			**X**	**f**
2	**X**	**X**	**X**	**d**			**X**	**c**
3	**X**			**e**		**X**	**X**	**c**
4	**X**			**f**	**X**			**f**
5	**X**			**f**	**X**			**f**
6	**X**	**X**		**d**	**X**	**X**	**X**	**b**
7	**X**			**c**			**X**	**e**
8	**X**		**X**	**b**			**X**	**d**
9	**X**		**X**	**b**	**X**		**X**	**b**
10	**X**		**X**	**f**	**X**		**X**	**d**
11	**X**	**X**	**X**	**d**	**X**	**X**	**X**	**d**
12	**X**	**X**		**b**	**X**	**X**	**X**	**f**
13	**X**	**X**		**d**			**X**	**f**
14	**X**		**X**	**b**	**X**		**X**	**e**
15	**X**			**d**	**X**		**X**	**f**
16			**X**	**d**	**X**	**X**	**X**	**b**
17	**X**		**X**	**a**		**X**	**X**	**c**
18	**X**	**X**		**e**	**X**	**X**	**X**	**f**
19		**X**	**X**	**d**		**X**	**X**	**e**
20	**X**			**f**		**X**	**X**	**f**
21	**X**			**d**		**X**		**c**
22	**X**	**X**	**X**	**b**	**X**	**X**	**X**	**f**
23		**X**		**d**			**X**	**d**
24	**X**			**e**	**X**		**X**	**b**

ANEXO 15

Tabela T4

	Conjunto de características										Ênfase na Técnica, Teoria, Prática	
	A		B		C		D		E		F	
ALUNO	Favorável	Não favorável	Favorável	Não favorável	Favorável	Não favorável	Favorável	Não favorável	Favorável	Não favorável	Favorável	Não favorável
1	X		X		X		X		X		X	
2		X		X		X		X	X			X
3	X		X		X			X	X			X
4	X		X		X			X	X			X
5	X		X			X	X		X			X
6	X		X		X			X	X		X	
7		X	X		X			X	X		X	
8		X	X		X			X	X		X	
9	X		X		X			X	X		X	
10	X		X		X		X			X		X
11	X		X		X			X	X		X	
12		X	X		X			X	X		X	
13		X	X		X			X	X		X	
14	X		X		X		X		X		X	
15	X		X		X		X		X		X	
16		X	X		X		X		X		X	
17		X	X		X		X		X			X
18	X		X		X			X	X		X	
19	X		X		X		X			X	X	
20		X	X		X		X		X		X	
21		X	X		X			X	X			X
22	X		X		X			X	X		X	
23	X		X			X	X		X		X	
24	X		X			X		X	X			X

ANEXO 16

Quadro Q1

- <u>Composição para o Movimento Favorável</u>

Reconhecimento da Característica Antes →	Depois	GRAU DE SATISFAÇÃO Antes → Depois
Em contraposição à MM ou Balanceada segundo as perspectivas da MM ou Segundo as perspectivas da MM →	Balanceada segundo as perspectivas da MM ou Segundo as perspectivas da MM	Aumenta ou permanece satisfeito ou permanece nem satisfeito/insatisfeito

- <u>Composição para o Movimento Não favorável</u>

Reconhecimento da Característica Antes →	Depois	GRAU DE SATISFAÇÃO Antes → Depois
Em contraposição à MM ou Balanceada segundo as perspectivas da MM ou Segundo as perspectivas da MM →	Em contraposição à MM	Aumenta ou diminui ou permanece o mesmo
Em contraposição à MM ou Balanceada segundo as perspectivas da MM →	Balanceada segundo as perspectivas da MM ou	Diminui ou permanece insatisfeito

ANEXO 17

Quadro Q2

- Composição para o Movimento Favorável

Reconhecimento da ênfase em aplicações práticas Antes → Depois		GRAU DE IMPORTÂNCIA Antes → Depois
Não enfatiza a prática ou Enfatiza a prática →	Enfatiza a prática	Aumenta ou permanece Muito importante ou permanece importante

- Composição para o Movimento Não favorável

Reconhecimento da ênfase em aplicações práticas Antes → Depois		GRAU DE IMPORTÂNCIA Antes → Depois
Não enfatiza a prática ou Enfatiza a prática →	Não enfatiza a prática	Aumenta ou diminui ou permanece o mesmo
Não enfatiza a prática ou Enfatiza a prática →	Enfatiza a prática	Diminui ou permanece pouco importante

ANEXO 18

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO - 1E

(a) Projeto Escrito = PE
(b) Observações do professor = OP
(c) Avaliação do aluno = AA
(d) Avaliação do seminário = AS

$$\text{NOTA} = \frac{4PE + 2OP + AA + AS}{8}$$

Como será a avaliação do aluno (AA)

$$AA = \frac{AI + AG}{2}$$

AI = auto - avaliação (você dará uma nota para si)
AG = cada membro do seu grupo dará uma nota para você e então será calculada a média aritmética dessas notas

Como será a avaliação do seminário (AS)

Após a sua apresentação no seminário cada aluno presente – excluindo os membros do seu grupo – dará uma nota para você. E a AS será a média aritmética dessas notas

ATENÇÃO:

- A apresentação dos projetos (seminário) será no dia 14/12, Terça-feira com início às 8 horas da manhã. Cada grupo terá 40 minutos para expor seu trabalho
- A avaliação final se dará no dia 16/12, Quinta-feira às 8 horas da manhã (com a presença de todos para ninguém sair prejudicado).

Observação:
Deverá, necessariamente, constar do projeto escrito de cada grupo uma conclusão abordando os seguintes tópicos:

(a) Conceitos matemáticos estudados durante a elaboração do projeto
(b) Uma opinião a respeito do processo utilizado para tal aprendizado
(c) Em relação ao que foi feito o que mais poderia ser pesquisado/ enfatizado/ aprofundado para dar continuidade ao projeto?

ANEXO 19

Projeto – FAROLETE
Na íntegra

Farolete

Trabalho de avaliação da disciplina
de Geometria Analítica
2º Semestre de Engenharia
de Computação


Regulagem de
feixe de luz
(rosca)
Farolete

Sumàrio

Introdução.....3

Cônicas.....4

Hipérboles.....6

Elipses.....9

Parábolas.....12

Parabolóide Circular.....15

A Luz.....17

Lentes.....20

Aplicações.....23

Conclusão.....24

Bibliografia.....25

Introdução

O objetivo deste trabalho é analisar o funcionamento de um farolete, apontando suas diferenças em relação à lanterna comum, suas aplicações, suas propriedades matemáticas e físicas.

O aspecto mais importante a ser analisado é, sem dúvida, a mudança do feixe de luz. Ela é possível, pois diferentemente de uma lanterna comum, o farolete tem uma lâmpada associada a uma rosca que permite seu movimento, ou seja, em termos ópticos, a lâmpada vai de muito próxima ao vértice até o foco, e é isso que permite que os raios saiam juntos ou dispersos, resultando na mudança do feixe de luz.

Além de vermos o funcionamento de um farolete simplesmente como um objeto qualquer, devemos destacar as propriedades matemáticas e físicas que permitem seu funcionamento. Por isso, estudaremos cônicas de um modo geral, em especial a parábola, pois fazendo uma associação entre a mudança do feixe de luz com conceitos matemáticos e físicos, não poderemos deixar de lado o estudo da parábola, e ampliando para uma visão em três dimensões o estudo do parabolóide, que dará origem ao espelho do farolete. Estudamos também a hipérbole para podermos explicar matematicamente por que um espelho hiperbólico não seria tão bom quanto um espelho parabólico.

Como curiosidade, falaremos das propriedades da luz e de sua principal aplicação que é na pescaria. Também abordaremos o uso opcional de lentes no farolete que produzirá uma pequena alteração no "caminho" descrito pelos raios.

A importância do estudo deste tema nos faz compreender a influência da matemática em nosso cotidiano. Muitas vezes a consideramos como simples estudo teórico de sala de aula. Agora, temos a oportunidade de ver apenas uma de suas milhares de aplicações em nosso dia-a-dia.

Cônicas

Primeiramente estudaremos algumas cônicas e definir qual será a melhor delas para a construção do espelho de um farolete.

O gráfico de toda equação da forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, é uma cônica, com exceção apenas de certos casos degenerados em que se obtém um ponto, uma ou duas retas, ou nenhum gráfico. Se A e C são iguais e distintos de 0, então o gráfico, quando existe, é um círculo ou, em casos excepcionais, um ponto. Se A e C são diferentes, mas têm o mesmo sinal, então, completando quadrados e fazendo uma translação adequada de eixos, obtemos uma equação cujo gráfico, quando existe, é uma elipse (ou um ponto). Se A e C têm sinais opostos, obtêm-se a equação de uma hipérbole ou possivelmente, no caso degenerado, duas retas que se interceptam. Se A ou C (mas não ambos) é 0, o gráfico é uma parábola ou, em certos casos, um par de retas paralelas.

As cônicas são importantes pois elas têm propriedades reflexivas que são muito úteis em diversas áreas - desde construção de pontes até telescópios de grande potência que podem associar espelhos parabólicos e hiperbólicos.

Em uma elipse, se um raio de luz ou som emana de um foco, será refletido no outro foco. Esta propriedade é utilizada na construção de certos aparelhos óticos. É também percebida nas galerias sussurrantes - isto é, compartimentos com tetos em forma elíptica, onde uma pessoa que sussurra em um foco pode ser ouvida no outro foco. A rotunda do Capitólio em Washington, e o Tabernáculo dos Mórmons, em Salt Lake City, são exemplos de galerias sussurrantes.

Na hipérbole, o raio de luz que emana de um foco será refletido no prolongamento do outro foco. Esta propriedade é utilizada na construção de telescópios do tipo Cassegrain, na base do sistema de navegação LORAN (Long Range Navigation) que consiste em dois pares de rádio transmissores que ficam nos focos de uma hipérbole.

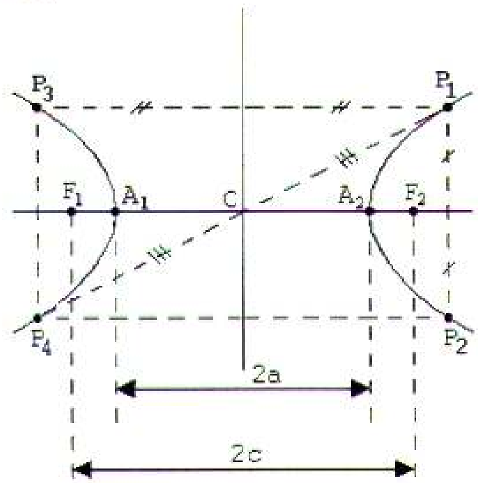
As parábolas, que serão nosso objeto de estudo, têm a propriedade de, quando a luz emana do seu foco, os raios sairão paralelos indo em direção "a um foco imaginário no infinito", por isso conseguem iluminar a longa distâncias. Algumas das diversas aplicações das parábolas estão inclusive na construção dos espelhos de lanternas, faroletes e holofotes. A forma dos espelhos são obtidas fazendo uma parábola girar sobre seu eixo. Emprega-se o mesmo princípio na construção de espelhos para telescópios ou fornos solares - um raio de luz caminhando em direção ao espelho parabólico, paralelamente ao eixo, se refletirá no foco. Esta propriedade é também utilizada em antenas de sistema de radar, rádio telescópios e microfones de campo, usados em jogos de futebol, etc..

Estudaremos as hipérboles e mostraremos que um espelho hiperbólico não seria tão eficiente quanto ao parabólico, pois em uma hipérbole os raios que são emitidos por um dos focos refletirão sobre a reta que passa sobre o outro foco, como veremos mais adiante. Isso não seria interessante já que não sairiam raios no centro, não se tornando assim um bom objeto de iluminação.

Mas afinal, o que é uma hipérbole?

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano, é constante.

Consideremos, no plano, dois pontos distintos: F_1 e F_2 , tal que a distância seja: $d(F_1, F_2) = 2c$.



A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como também em relação ao ponto C, se P_1, P_2, P_3 e P_4 , tais que P_2 for o simétrico de P_1 , em relação ao ponto C.

Ainda, pela simetria, concluiu-se que:

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

e da própria definição, vem

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. Esta aproximação é "contínua" e "lenta", de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Naturalmente, esta particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

Assim:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

é a equação de uma hipérbole de centro $C(0, 0)$ e eixo real sobre o eixo dos x; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos x e o centro é $C(h, k)$, sua equação passa a ser:

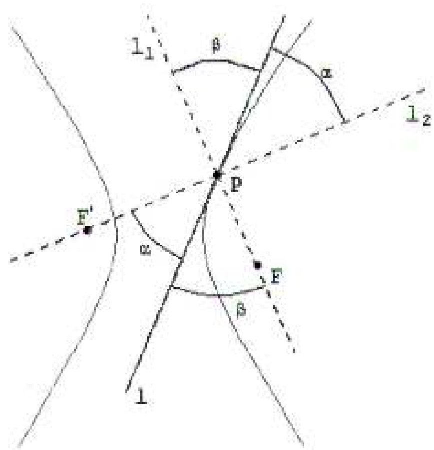
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

De forma análoga, quando o eixo real é paralelo ao eixo y, temos:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Faremos agora um estudo de como sairiam os raios de luz, caso o espelho do farolete fosse hiperbólico.

Seja l a tangente em um ponto P, de uma hipérbole de focos F e F'. Se α é o ângulo agudo entre F'P e l; e se β é o ângulo agudo entre FP e l, então $\alpha \equiv \beta$. Dirigindo-se um raio de luz ao longo da reta l_1 para F, ele se refletirá em P, segundo a reta l_2 para F'.

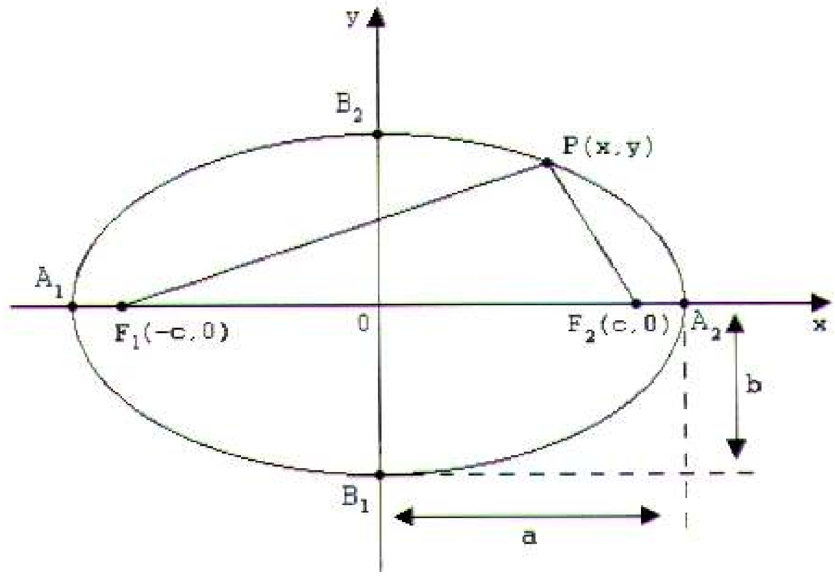


Elipses

Uma elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante.

Se as distâncias entre os focos é nula, ou seja, $F_1 = F_2$, temos um círculo de centro F.

Adotando o eixo x, como a reta que passa pelos focos F_1 e F_2, com origem no ponto médio do segmento $F_1 F_2$. O ponto médio é o centro da elipse. Se F_2 tem coordenadas (c,0) com c>0, então, F_1 tem coordenadas (-c,0). Logo, a distância entre F_1 e F_2 é 2c. Denotaremos por 2a a soma constante das distâncias de P a F_1 e F_2. Para obter pontos que não estejam sobre o eixo x, devemos ter 2a>2c, isto é, a>c. Por definição, P (x, y) está na elipse se e somente se as seguintes equações equivalentes são verdadeiras:



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última equação, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

ou

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Novamente elevando ambos os membros ao quadrado, $a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$ ou $x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Dividindo ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

9

Lembrando que $a>c$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$, fazemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$ou$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

o que nos dá

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $c > 0$ e $b^2 = a^2 - c^2$, segue-se que $a^2 > b^2$ e, então, $a>b$.

Reciprocamente, se (x,y) é uma solução desta equação, então, invertendo o raciocínio, vemos que o ponto (x,y) pertence à elipse.

Podemos achar os interceptos x da elipse fazendo $y=0$ na equação. Temos então $x^2/a^2 = 1$, ou $x^2 = a^2$, consequentemente os interceptos x são a e -a Os pontos correspondentes $A_2(a,0)$ e $A_1(-a,0)$ do gráfico são os vértices da elipse. O segmento $A_2 A_1$ é o eixo maior. Da mesma forma, fazendo $x = 0$, obtemos $y^2/b^2=1$, ou $y^2=b^2$. Logo, os interceptos y são b e -b. O segmento que une $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ é o eixo menor da elipse. Como $a>b$, o eixo maior é sempre maior do que o eixo menor.

O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para $a^2>b^2$ é uma elipse com vértice $(\pm a,0)$. As extremidades do eixo menor são $(0,\pm b)$. Os focos são $(\pm c,0)$, com $c^2 = a^2 - b^2$.

O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

para $a^2>b^2$ é uma elipse com vértice $(0,\pm a)$. As extremidades do eixo menor são $(\pm b,0)$. Os focos são $(0,\pm c)$, com $c^2 = a^2 - b^2$.

Generalizando para uma elipse com centro em um ponto arbitrário $C(h, k)$ no plano xy. Por exemplo, como o gráfico de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

é uma elipse com centro O' em um plano x'y', sua equação no sistema xy de coordenadas é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

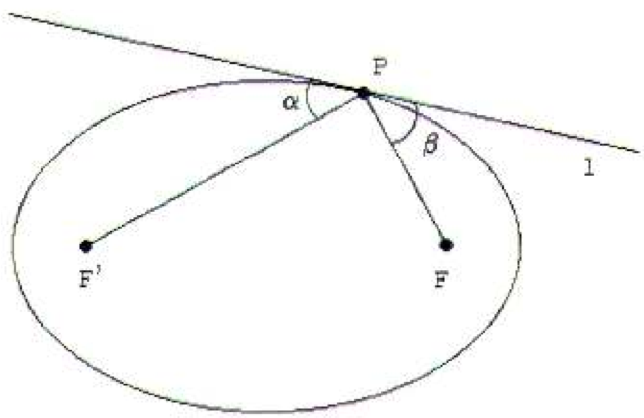
Desenvolvendo os quadrados indicados na última equação e simplificando, obtemos uma equação da forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde os coeficientes são números reais e A e C são ambos positivos. Reciprocamente, partindo de uma tal equação e completando quadrados, podemos obter uma forma que evidencie o centro da elipse e os comprimentos dos eixos maior e menor.

As elipses podem ser muito achatadas ou quase circulares. Para obter informações sobre o achatamento de uma elipse, costuma-se lançar mão da excentricidade e. A excentricidade é definida a seguir, onde a, b e c têm os mesmos significados que anteriormente.

A excentricidade e de uma elipse é

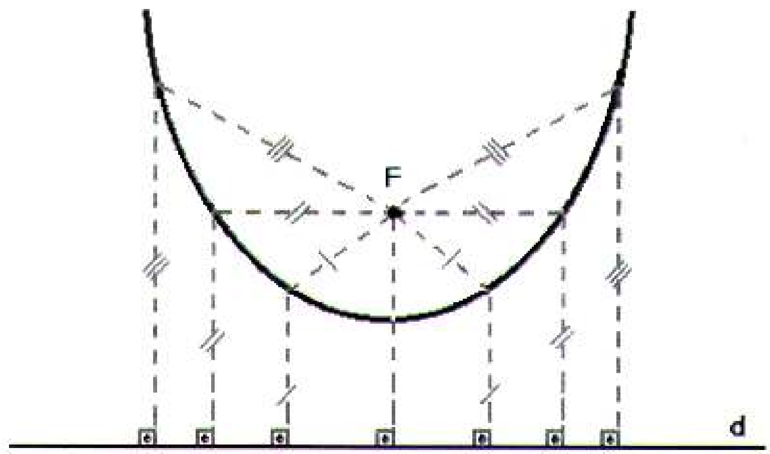
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Apesar de uma elipse ter propriedades reflexivas análogas à da parábola, veremos que um espelho elíptico não seria tão eficiente. Como ilustração, seja l a tangente em um ponto P de uma elipse com focos F e F'. Se α é o ângulo entre F'P e l e se β é o ângulo entre FP e l, pode-se mostrar que $\alpha = \beta$. Assim, se um raio de luz ou som emana de um foco, será refletido no outro foco, como mostra a figura abaixo.

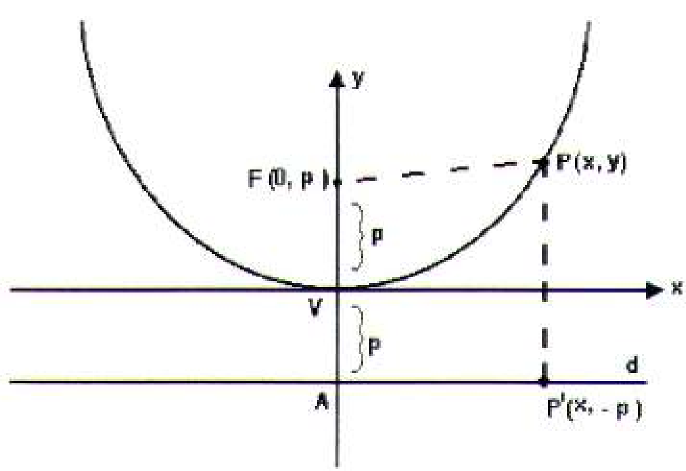


Parábolas

A parábola será agora nosso objeto de estudo. Começaremos definindo o que ela é. Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta fixa d (diretriz) do plano.



Admitindo que F não pertença a d, pois isto resultaria em uma reta, se P for um ponto do plano e P' for o ponto de d, determinado por uma reta P perpendicular a d, então, P pertence à parábola, se, e somente se, as distâncias d(P, F) e d(P, P') forem iguais. O eixo da parábola é a reta F perpendicular à diretriz. O vértice da parábola é o ponto V do eixo, eqüidistante de F e d.



$$(\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}\,)^2 = (\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}\,)^2$$

$$y = \frac{x^2+2xh+h^2+4pk}{4p}$$

As coordenadas de todo ponto (x, y) da parábola verificam $x^2 = 4py$. Reciprocamente, se (x, y) é solução de $x^2 = 4py$, então, invertendo a marcha anterior, vemos que o ponto (x, y) pertence à parábola. Se p>0, a parábola tem abertura para cima. Se p<0, a parábola tem abertura para baixo. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y, pois substituindo-se x por -x, a equação não se altera.

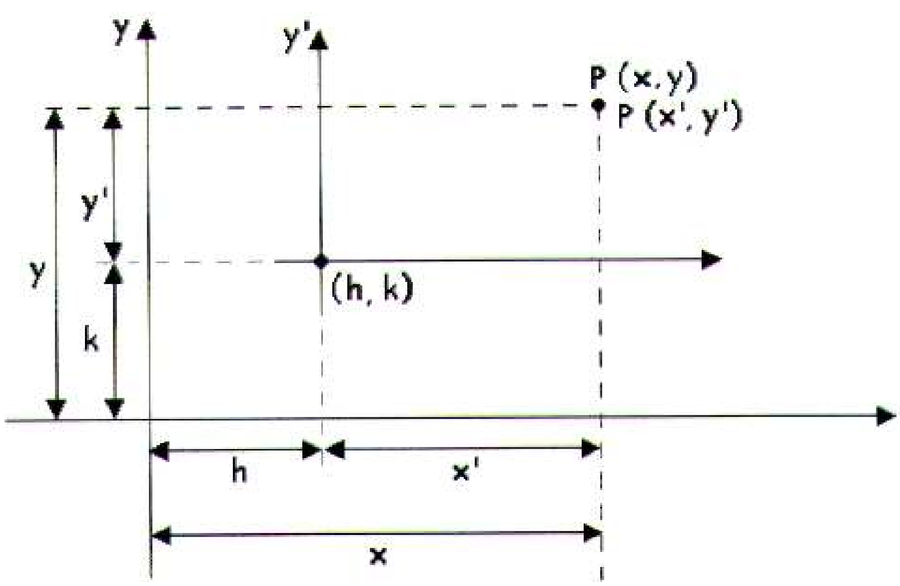
Permutando os papéis de x e y, obtemos $y^2 = 4px$. Essa é a equação de uma parábola com vértice na origem, foco F(p,0) e abertura para a direita, se p>0, ou para esquerda, se p<0.

Para estender o estudo a uma parábola cujo vértice não está na origem, utilizamos uma translação de eixos, onde os eixos x e y são transladados para posições denotadas por x' e y', paralelas à posições originais. Todo ponto P do plano tem, assim, duas representações diferentes: P(x, y) no sistema xy, e P(x', y') no sistema x'y'. Se a origem do novo sistema x'y' tem coordenadas (h, k) no plano xy, vê-se que

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$



Sabemos que $(x')^2 = 4py'$, é a equação de uma parábola com vértice na origem O' do plano x'y'. Utilizando as fórmulas de translação de eixos, vê-se que $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ é a equação da mesma parábola no plano xy com vértice $V(h, k)$. O foco é $F(h, k+p)$ e a diretriz é $y = k-p$. Desenvolvendo temos:

$$x^2 + 2xh + h^2 = 4py - 4pk$$

Para simplificar:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

onde a, b, c são números reais, com $a \neq 0$. Em $y = ax^2$, pode-se mostrar que $a = \frac{1}{4p}$, ou $p = \frac{1}{4a}$.

Parabolóide Circular

Continuando nosso estudo mas agora girando a parábola descrita acima em torno de seu eixo e ampliando para uma visão em três dimensões iremos obter um espelho em forma de parabolóide circular.

Vimos que uma equação do segundo grau nas variáveis x e y, é uma secção cônica. O gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e z, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ é chamado de *superfície quádrica* e um de seus tipo é um parabolóide.

A equação do parabolóide circular é

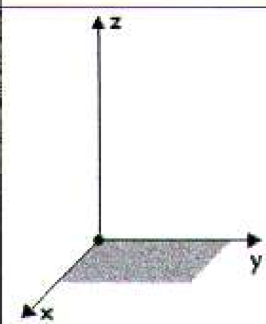
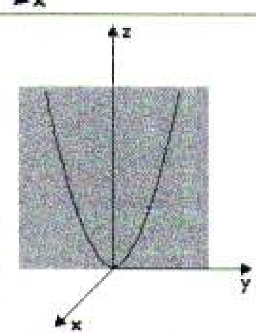
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

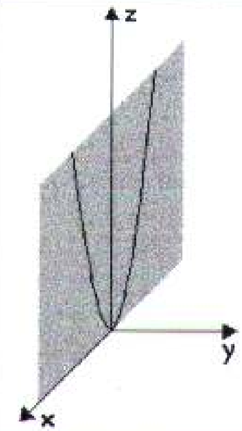
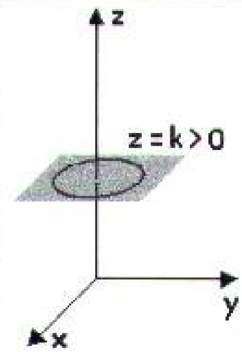
com a=b pois se a≠b os traços nos planos z=k paralelos ao plano xy são elipses em lugar de círculos. Se c>0, o parabolóide abre para cima e se c<0 ele abre para baixo. O eixo z é o eixo do parabolóide. Os gráficos das equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$$

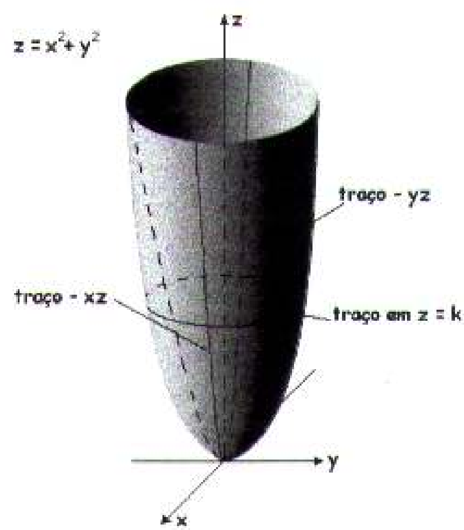
são parabolóides cujos eixos são o eixo y e o eixo x, respectivamente.

Exemplo: O gráfico da equação, $z = x^2 + y^2$, é uma superfície em um sistema coordenado xyz. Dão-se a seguir os traços sobre diversos planos.

Traço	Equação do Traço	Natureza do Traço	Esboço do Traço
Traço - xy	$0 = x^2 + y^2$	Origem	
Traço - yz	$z = y^2$	Parábola	

Traço - xz	$z = x^2$	Parábola	
Em z = k	$k = x^2 + y^2$ ou $x^2 + y^2 = k$	Círculo, ponto, ou nenhum gráfico	

Esboçamos a seguir esses traços utilizando apenas um conjunto de eixos coordenados. Notando que o raio $\sqrt{k}$ do traço circular em z = k aumenta com z, como mostra o esboço:



Os traços nos planos x = k e y = k são parábolas. A superfície desse exemplo pode ser considerada como tendo sido gerada pela revolução do gráfico da parábola $z = y^2$ no plano yz em torno do eixo z. Esta superfície é chamada parabolóide de revolução ou circular.

A Luz

Agora que já sabemos o formato do espelho de um farolete estudaremos as propriedades da luz.

Na óptica geométrica, quando queremos representar o caminho que a luz descreve, usamos o conceito de raio de luz que foi proposto por Alhazem na Antiguidade (por volta do ano 1000 da nossa era).

Um raio de luz é uma linha orientada que indica de maneira geométrica, isto é, através de um desenho, de onde a luz sai, para onde se dirige e segundo qual trajetória.

São três os princípios da óptica geométrica:

↬Princípio da propagação retilínea da luz que diz, em um meio material homogêneo e transparente, a luz se propaga em linha reta.

↬Princípio da independência da luz, quando dois ou mais pincéis de luz encontram-se em uma determinada região, nenhuma de suas características sofre modificações. Ou seja, as direções, os sentidos de propagação e as cores permanecem inalterados.

↬Princípio da reversibilidade, num meio homogêneo e transparente, a trajetória descrita por um raio de luz não depende do sentido de propagação.

A reflexão ocorre quando a luz atinge uma superfície polida. Nessa situação, a luz retorna ao meio original de propagação.

A refração é a passagem da luz de um meio material para outro. Quando a luz se propaga no ar atmosférico e atinge uma lente de óculos, passando a se propagar através deste vidro, ela sofreu refração. A refração é um fenômeno regular que depende de diversos fatores, incluindo a cor da luz. Devemos observar que sempre que a refração ocorre, uma certa quantidade de luz é também refletida.

Absorção é o que ocorre quando a luz atinge uma superfície de cor escura e sem polimento. Nesse caso, a luz é retida pela superfície, não ocorrendo refração ou reflexão.

A visualização de um objeto ocorre quando uma parcela da luz emitida por ele incide sobre o globo ocular. Isso pode ocorrer de maneira direta, quando se visa o objeto diretamente, ou não, quando recebemos luz desviada por um aparelho óptico como, por exemplo, um espelho, uma lente, um prisma, etc..

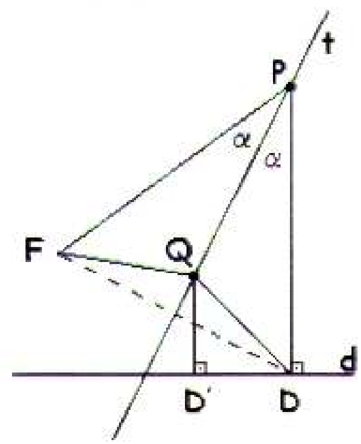
Vamos estudar melhor a reflexão da luz que é o que nos interessa já que a luz será refletida pelo espelho no farolete.

As duas leis que governam a reflexão da luz são:

↬O raio incidente, a reta normal e o raio refletido são coplanares.

☞A medida do ângulo de reflexão é igual à medida do ângulo de incidência.

Resumindo, quando a luz é refletida em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivesse sendo refletida em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão."

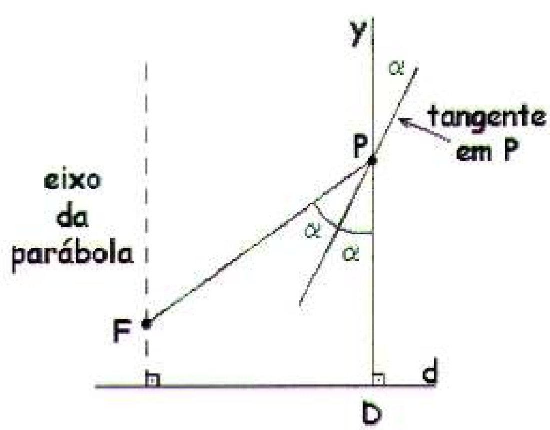


Analisando matematicamente a figura, podemos considerar um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo FPD e tangente à parábola.

No triângulo PFD, como PF = PD, a reta t, bissetriz do ângulo FPD, é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD. Seja agora Q, um ponto qualquer da reta t, distinto de P. Se D' é a projeção de Q sobre d, temos:

$$QF = QD > QD'$$

Portanto, Q é exterior à parábola. Ora, o ponto P da reta t pertence à parábola e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P.



Observe, na figura acima, a semi-reta PY, prolongamento do segmento DP. Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD, temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Por isso, todo sinal emitido do foco será refletido paralelo ao eixo.

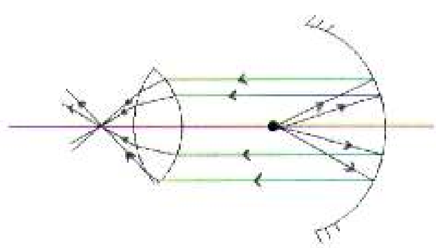
Agora iremos analisar qual(is) tipo(s) de lente(s) pode(em) ser utilizado(s) na fabricação de um farolete, onde desejamos que ocorra uma mudança na concentração do pincel de luz emergente.

As lentes esféricas são classificadas em divergentes e convergentes. As lentes divergentes fazem com que os raios de luz dela emergentes se "espalhem", formando uma "abertura" grande.

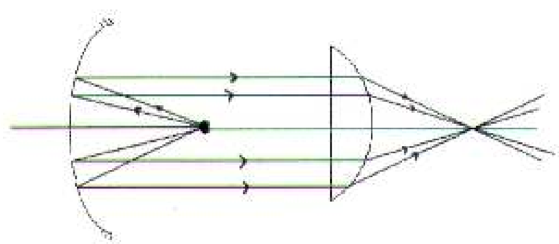
As lentes convergentes fazem com que os raios de luz dela emergentes se "agrupem" , todos em um mesmo ponto, denominado Foco Principal Imagem.

Foco Principal Imagem de uma lente é o ponto, sobre o eixo principal onde se formam imagens de objetos impróprios, o pincel cilíndrico incidente é paralelo ao eixo principal, sendo que, numa lente convergente , o Foco Imagem é real, e , numa lente divergente, o Foco Imagem é virtual.

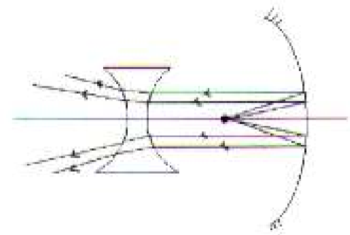
Biconvexa: não devemos utilizadar em um farolete, pois em qualquer lugar do eixo principal que se coloque a lâmpada, os raios de luz irão "bater"(incidir) na parede espelhada e depois serão refletidos, fazendo com que incida sobre a lente um pincel cilíndrico paralelo ao eixo principal, e que, ao atravessar a lente, esse pincel irá sempre emergir para o foco denominado Foco Imagem.



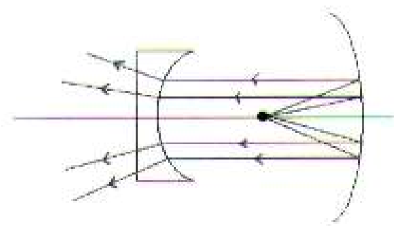
Plano - Convexa: também é uma lente sem utilidade para a fabricação de um farolete, por ser uma lente convergente, sempre haverá uma intensidade muito forte de raios de luz em um ponto.



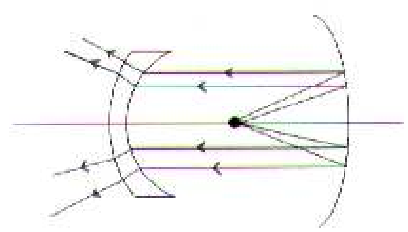
Bicôncava: se a lâmpada ficar no próprio foco imagem, o feixe de luz emergente terá uma grande abertura.



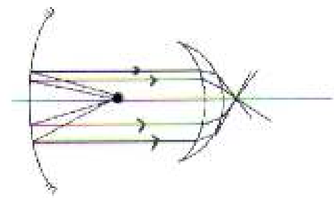
Plano Côncava: perceberemos que existe uma certa mudança do feixe, mas não tão significante como na lente Bicôncava.



Convexo-Côncava: esta é uma boa lente para ser utilizada, pois produz uma abertura boa no feixe de luz.



Côncavo - Convexa: essa lente não oferece quase nenhuma mudança na abertura do pincel de luz emergente, ou seja, a maior abertura que uma lente côncavo - convexa oferece é muito pequena em relação à abertura que uma lente convexo - côncava e bicôncava.



Aplicações

O farolete é utilizado na pescaria devido a sua propriedade de mudar a concentração de seu feixe de luz.

Falando na forma prática, os pescadores dizem que, durante a pescaria, se for usada uma lanterna comum, que não possui a propriedade mudança de feixe de luz, a luz irá incidir diretamente nos peixes, o que irá "assustá-los" e fará com que eles "fujam" do local.

Esse problema não irá ocorrer se for usado na pescaria um farolete, pois, através de sua propriedade de mudança de feixe, os pescadores podem fazer com que a luz não incida diretamente nos peixes, o que não irá "assustá-los", e, desta forma, os pescadores conseguirão realizar a pescaria.

Conclusão

Concluindo este trabalho percebemos a grande influência da matemática em nossas vidas. Do estudo de um simples farolete, que aparentemente não tem nada a ver com matemática, aprendemos conceitos matemáticos importantíssimos.

Estudamos cônicas como um todo e, desse estudo percebemos ser a parábola a mais eficiente delas para se construir o espelho de um farolete, e então partimos para um estudo mais aprofundado e chegamos a parabolóide circular.

Esse trabalho também permitiu aprender mais sobre as diferentes formas de propagação da luz, sobre a construção desde uma lanterna simples até chegar em um farolete, o que envolveu todo um processo matemático que explica a mudança do feixe de luz.

O processo utilizado no aprendizado é muito interessante já que diferentemente do modo tradicional de aprender matemática, que é teórico e na "visão" de cada professor, nesse trabalho tivemos a oportunidade de perceber o quanto é importante e interessante a matemática do cotidiano, e como aprendemos muito mais quando somos "induzidos" a procurar conhecimento. Mas também percebemos que esse método não é totalmente eficiente.

Se esse trabalho continuasse, estudaríamos outras maneiras de se construir um farolete procurando novos sólidos de revolução que pudessem ser utilizados, novos tipos de lâmpadas e o quanto essa influi na intensidade da luz, procuraríamos onde mais o farolete poderia ser eficiente além da pescaria, etc..

Bibliografia

SWOKOWSKI, Earl William, 1926 -

Cálculo com geometria analítica/ Earl W. Swokowski : tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração dos professores Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno; revisão técnica Antônio Pertence Júnior. -- 2. ed. Volume 2 -- São Paulo : Makron Books, 1994.

STEINBRUCH, Alfredo

Geometria analítica/ Steinbruch, Alfredo, Winterle, Paulo-2. ed.- São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Revista do Professor de matemática, número 33, 1997.

Coleção Anglo - São Paulo : Anglo, 1990 - 1991.

Física(óptica geométrica) - livro 8 - vários autores.

LEITHOLD, Louis

Cálculo com Geometria Analítica/Leithold, Louis - vol. 2, 3ed.- São Paulo: Harbra.

ANEXO 20

Projeto – ABAJOUR

Na íntegra

Secções Cônicas "Abajour"

ÍNDICE

1. OBJETIVOS 2

2. INTRODUÇÃO TEÓRICA 2

- **2.1 A PARÁBOLA** 2
  - 2.1.1 Elementos 3
  - 2.1.2 Equação da Parábola de Vértice na Origem do Sistema 3
  - 2.1.3 Equação da Parábola de Vértice Fora da Origem do Sistema 5
  - 2.1.4 Equação da Parábola na Forma Explícita 6

- **2.2 A ELIPSE** 9
  - 2.2.1 Elementos 10
  - 2.2.2 Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema 12
  - 2.2.3 Observação: A Circunferência 14
  - 2.2.4 Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema 15

- **2.3 A HIPÉRBOLE** 15
  - 2.3.1 Elementos 17
  - 2.3.2 Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema 19
  - 2.3.3 Equação da Hipérbole de Centro Fora da Origem do Sistema 21

- **2.4 SECÇÕES CÔNICAS** 21

3. MATERIAIS UTILIZADOS 23

4. PROCEDIMENTO 24

5.ANÁLISE DOS DADOS 26

6. CONCLUSÃO 29

7. BIBLIOGRAFIA 30

1. Objetivos

Estudar experimentalmente as sessões cônicas com base em um abajur.

2. Introdução Teórica

2.1 A Parábola

Consideremos em um plano uma reta *d* e um ponto *F* não pertencentes a d.

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de *F* e *d*.

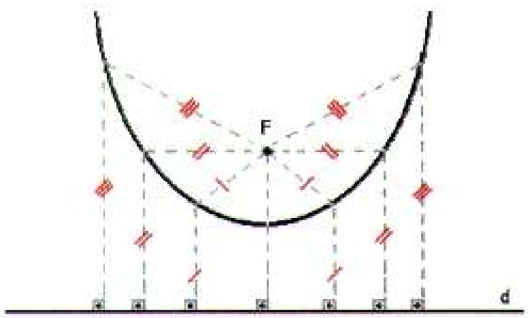


Fig. 1

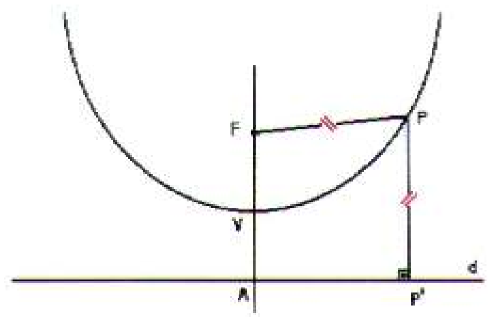


Fig. 2

Na figura 1 estão assinalados sete pontos que são eqüidistantes do ponto *F* e da reta *d*.

Sendo P' o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta *d* (figura 2), de acordo com a definição, P pertence à parábola se, e somente se:

$$d(P,F)=d(P,P')$$

ou também:

$$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PP'}|$$

Observação

Consideramos o fato de $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

2.1.1 Elementos

Considerando a figura 2, temos;

Foco: é o ponto F

Diretriz: é a reta d

Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicularmente à diretriz

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo

Obviamente, tem-se:

$$d(V,F) = d(V,A)$$

Com finalidade de obtermos uma equação da parábola, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos. Iniciemos pelo caso mais simples.

2.1.2 Equação da Parábola de Vértice na Origem do Sistema

1° caso: *O eixo da parábola é o eixo dos y*

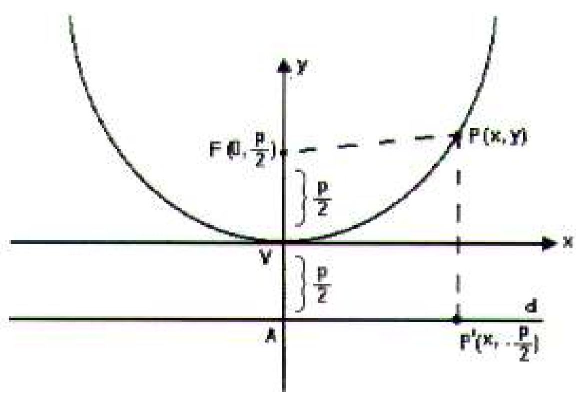
Seja (x, y) um ponto qualquer da parábola (figura 2) de foco F(0,P/2).

Da definição de parábola, tem-se:

$$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PP'}|$$

ou

$$|\overrightarrow{FF}| = |\overrightarrow{P'P}|$$



Como P'(x,-P/2), vem:

$$|(x-0,y-P/2)| = |(x-x,y+p/2)|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

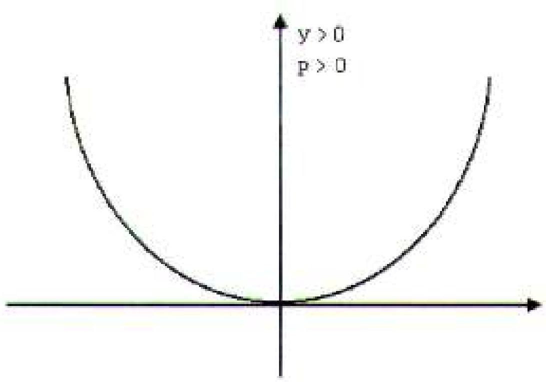
$$(x-0)^2+(y-P/2)^2=(x-x)^2+(y+p/2)^2$$

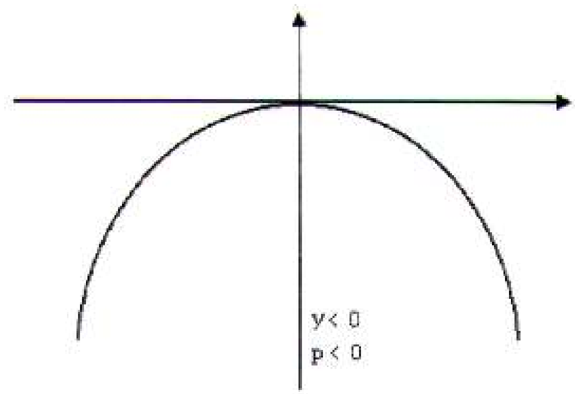
ou, simplesmente:

$$x^2 = 2py$$

Esta equação é chamada equação *reduzida* da parábola e constitui a forma padrão da equação da parábola de vértice na origem tendo para eixo o eixo dos y.

Da análise desta equação conclui-se que, em vista ser 2py sempre positivo ou nulo (pois é igual a $x^2 \geq 0$), os sinais de p e de y são sempre iguais. Consequentemente, se p >0 a parábola em *concavidade voltada para cima* e, se p<0, a parábola tem *concavidade voltada para baixo*, conforme as figuras a seguir esclarecem.



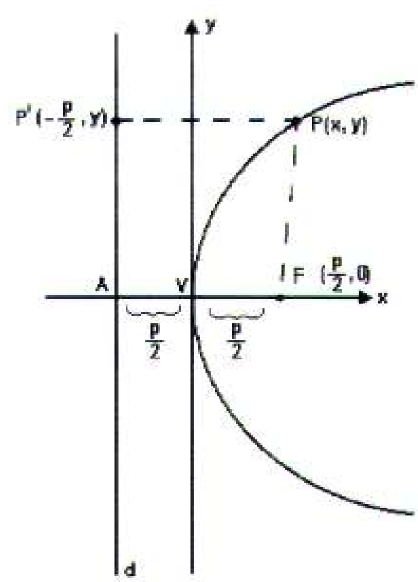


Este número real $p \neq 0$ é conhecido com *parâmetro* da parábola

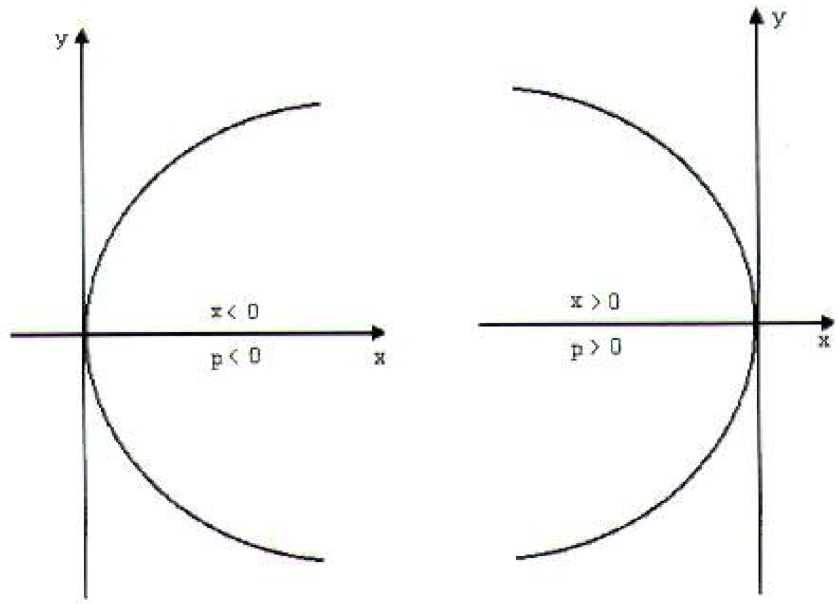
2° caso: *O eixo da parábola é o eixo dos x*

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola (figura 4) de foco F(P/2,0), obteremos, de forma análoga ao 1° caso, a equação reduzida:

$$y^2=2px$$



Conforme o sinal de p, teremos: se $p > 0$, a parábola tem *concavidade voltada para a direita* e, se $p < 0$, a parábola tem *concavidade voltada para a esquerda* .



2.1.3 Equação da Parábola de Vértice Fora da Origem do Sistema

1° Caso: *o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

Seja uma parábola de vértice V(h, k) e eixo paralelo ao eixo dos y, sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy.

Seja P(x, y) um ponto qualquer desta parábola.

Consideremos um novo sistema x'O'y' com origem O' em V.

Sabe-se que a equação da parábola referida ao sistema x'O'y' é

$$x'^2 = 2py'$$

mas:

$$x' = x - h \quad e \quad y' = y - k$$

e daí:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

que é a equação de uma parábola de vértice V(h, k) e eixo paralelo ao eixo dos y.

2° caso: *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x.*

De modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

Observemos que se (h, k)=(0,0), voltamos a ter o caso particular de **2.1.2**

2.1.4 Equação da Parábola na Forma Explícita

Sabemos que a função de uma parábola de vértice V(h, k) e eixo paralelo ao eixo dos y tem a forma padrão:

$$(x-h)2 = 2p(y-k)$$

por exemplo, para V(2,-1) e p = 1/8, teríamos:

$$(x-2)^2 = \frac{1}{4}(y+1)$$

Com o objetivo de explicitar y nesta equação, faremos:

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

ou

$$4x^2 - 16x + 16 = y + 1$$

donde:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

Uma equação na forma padrão pode ser apresentada sob a forma:

$$y = ax^2 - bx + c$$

chamada *forma explícita* da equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo Oy.

Reciprocamente, dada uma equação na forma explícita, podemos sempre conduzi-la à forma padrão. Consequentemente, o gráfico de

$$y=ax^2-bx+c$$

com $a \neq 0$, é sempre uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y.

Analisemos os aspectos mais importantes do gráfico da parábola da equação:

$$y=4x^2-16x+15$$

Inicialmente, transformaremos esta equação para a forma padrão:

$$y-15=4x^2-16x$$

$$4(x-2)^2=y+1$$

$$(x-2)^2=\tfrac{1}{4}(y+1),$$

logo, o vértice é:

$V(2,-1)$

e:

$$2p=1/4 \therefore p=1/8$$

Para esboçar o gráfico, vamos calcular s intercessões da parábola $y=4x^2-16x+15$ com os eixos coordenados.

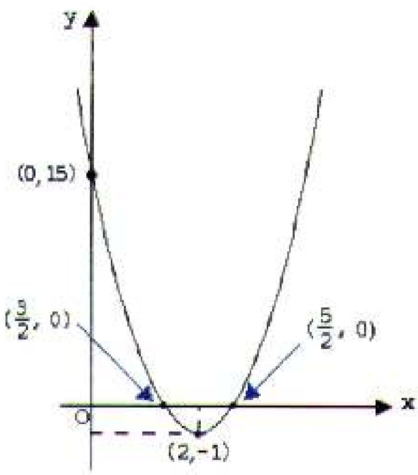
Fazendo $x=0$, vem $y=15$ e, portanto, $(0,15)$ é o ponto onde a parábola corta o eixo dos y.

Fazendo $y=0$, vem

$$4x^2-16x+15=0$$

cujas raízes são 3/2 e 5/2 e, portanto, (3/2,0) e (5/2,0) são os pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

O gráfico estão esboçado na figura abaixo.



Mas,

$$p/2=1/16$$

E, portando, o foco é :

$$F(2,-1+1.16)$$

ou

$$F(2,-15/16)$$

E a diretriz tem equação:

$$Y = -1-1/16 \quad \text{ou} \quad y=-17/16$$

Quando a equação da parábola estiver na forma explícita $y=ax^2 - bx + c$, a determinação do vértice V(h, k) poderá ser feita com maior rapidez lembrando que $h = -b/2a$.

Para o caso da equação $y=4x^2 - 16x + 15$, teremos;

$$h = -\frac{-16}{2(4)} = 2$$

E a ordenada correspondente k será obtida substituindo $x = h$ por 2 nesta equação, isto é

$$k= 4(2)^2 - 16(2) + 15 = -1$$

Logo, o vértice é $V(2,-1)$.

Observação :

Se a parábola tem eixo paralelo ao eixo dos x, sua equação na forma explícita é

$$x = ay^2 - by + c$$

correspondente a forma padrão:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

Um detalhe importante na comparação destas equações é que o sinal do coeficiente a é o mesmo de p, e, portanto, a concavidade da parábola fica declarada quando sua equação estiver na forma explícita. Por exemplo, o gráfico de

$$x= -3y^2 + 5y$$

é uma parábola de concavidade voltada para a esquerda porque o sinal de a é negativo.

2.2 A Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$.

Seja um número real a tal que $2a > 2c$.

Ao conjunto de todos os pontos do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2)$$

ou

$$|\overrightarrow{PF_1}| = |\overrightarrow{PF_2}|$$

dá se o nome de elipse (fig.1)

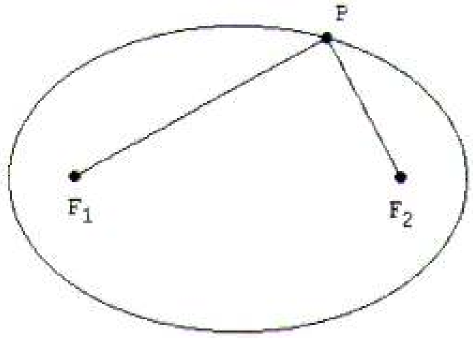


Fig. 1

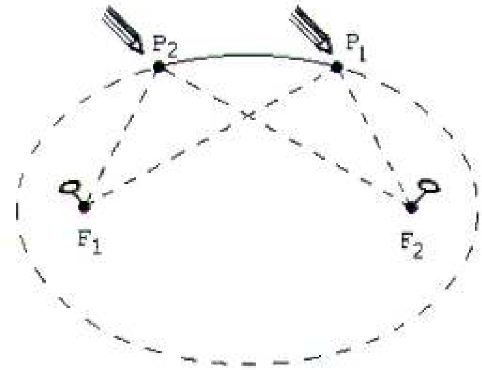


Fig. 2

A figura 2 sugere como se pode construir uma elipse no papel. Nos pontos F_1 e F_2 fixemos dois percevejos e neles amarremos um fio não esticado.

Tomemos um lápis e distendamos com sua ponta o fio, marcando o ponto P1. Então, a soma das distâncias d (P1,F1) e d(P1,F2) é o comprimento do fio.

Sabe-se que o lápis desliza sobre o papel, mantendo o fio sempre esticado, ficará traçada uma elipse de focos F1 e F2. A figura mostra outra posição P2 da ponta do lápis e, também para este ponto, a soma das distâncias, d(P2,F1) e d(P2,F2) é o comprimento do fio.

Assim, para as infinitas posições da ponta do lápis, a soma das distâncias a F1 e F2 é constante.

A constante 2a anteriormente referida é o comprimento do fio.

Se mantivermos constante o comprimento do fio e variarmos as posições de F1 e F2, a forma da elipse irá variar. Assim, quanto mais próximos os focos estão entre si, tanto mais a forma da elipse se assemelha a circunferência, e quando F1 = F2 obtém-se uma circunferência.

Por outro lado, quanto mais afastados os focos estiverem entre si, mais "achatada" será a elipse.

2.2.1 ELEMENTOS :

Focos: são os pontos F_1 e F_2

Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

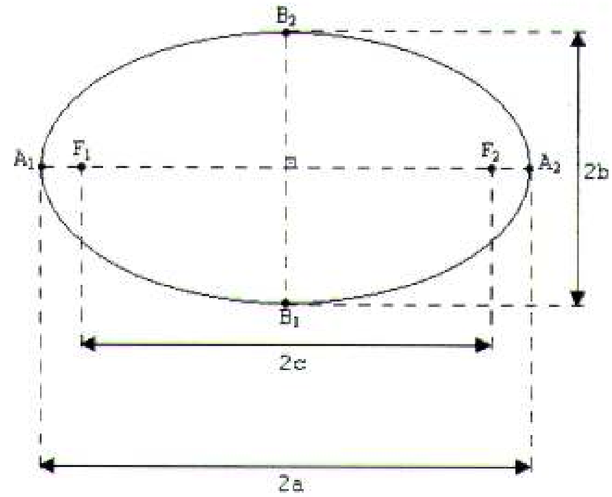
Centro: é o ponto médio do seguimento F_1F_2

Eixo maior: é o seguimento A_1A_2 de comprimento 2a (o seguimento A_1A_2 contém os focos e seus extremos pertencem à elipse.).

Eixo menos: é o seguimento B_1B_2 de comprimento 2b($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio)

Vértice: são os pontos A_1A_2, B_1B_2.

Excentricidade: é o número e dado por $e = c/a$



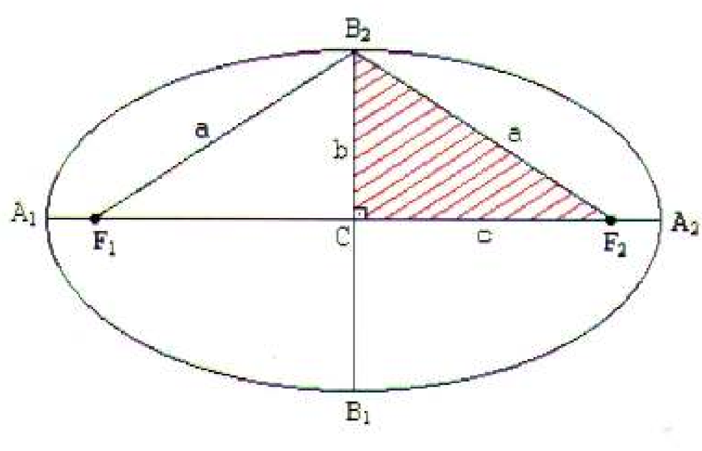
Tendo em vista que $c<a$, tem-se: $0<e<1$.

Observação

Em toda elipse vale a relação:

$$a^2=b^2+c^2$$

Na verdade, esta igualdade é a relação de Pitágoras no triângulo



retângulo B_2CF_2.

2.2.2 Equação da Elipse de centro na Origem do Sistema

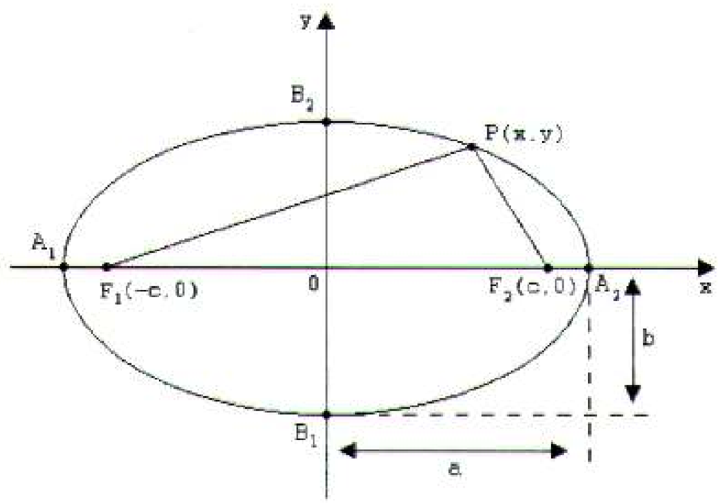
1° caso: *o eixo maior está sobre o eixo dos x*

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Por definição, tem-se:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

ou

$$|\overrightarrow{F_1P}| = |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$



ou em coordenadas:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$
$$(\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2})^2=(2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2})^2$$
$$x^2+y^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$
$$4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=4a^2-4cx$$
$$a^2(x^2+y^2-2cx+c^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

mas;

$$a^2 - c^2 = b^2$$

logo

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por $a^2\ b^2$, obtemos

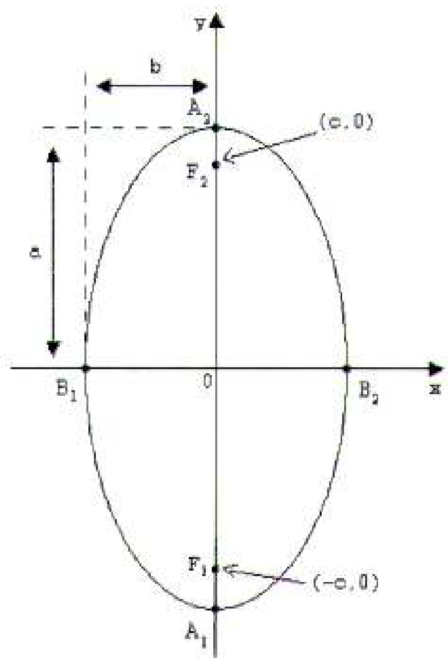
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que é a *equação reduzida* da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x.

2° caso: *o eixo maior esta sobre o eixo dos y*

Com procedimento análogo ao primeiro caso, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Observação:

Tendo em vista que $a^2=b^2+c^2$, segue-se que: $a^2>b^2$ e daí : $a>b$

Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2 , onde a é a medida do semi-eixo maior.

Ainda mais: se na equação da elipse o número a^2 é o denominador de x^2, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos x.

2.2.3 OBSERVAÇÃO:

Quando os dois focos de uma elipse se coincidem temos uma circunferência, portanto a circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Ex.

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

A forma reduzida dessa equação é:

$x^2 + y^2 = 9$

a) Neste caso, tem-se

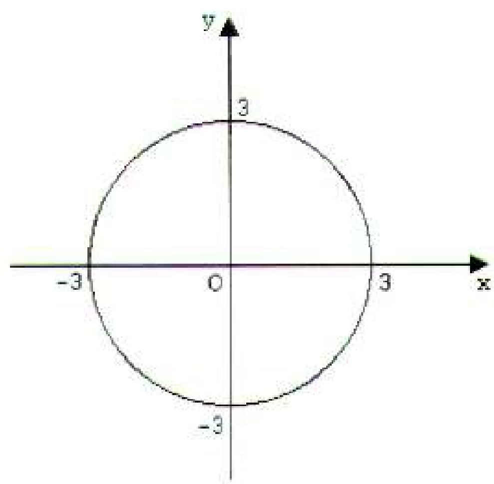
$a^2 = b^2 = 9$

e, portanto,

$a = b = 3$

Trata-se de uma **circunferência** de raio 3.

b)



c) $a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 9 + c^2$

$c = 0$

Portanto, os dois focos se coincidem com o centro da circunferência.

d) $e=\frac{c}{a}=\frac{0}{3}=0$

2.2.4 Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema

1° caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos x*

Consideremos uma elipse de centro C(h, k) e seja P(x, y) um ponto qualquer da mesma.

O caso presente da elipse é perfeitamente análogo quando ocorre uma translação de eixos.

Assim:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

É a equação de uma elipse de centro C(0,0) e eixo maior sobre o eixo dos x; quando o eixo maior for paralelo ao eixo dos x e o centro for C(h, k), a

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

equação passa ser

Este mesmo detalhará irá se repetir também no estudo da hipérbole a ser feito logo a seguir.

2° caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos y*

De forma análoga, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

2.3 Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

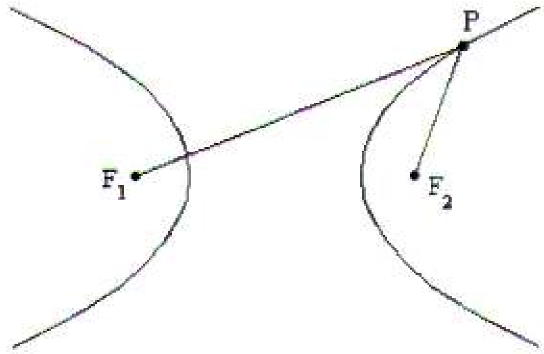
Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1,F_2)=2c$.

Seja um número real a tal que 2a <2c

Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a$$

dá-se o nome de hipérbole.

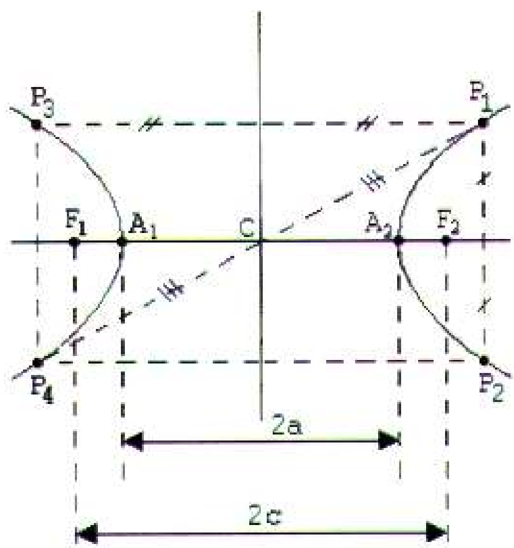


Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação acima um ponto P está na hipérbole se, e somente se:

$$|\, d(P,F_1)-d(P,F_2) \,| = \pm 2a$$

Quando P estiver no ramo da direita, a diferença +2a e, em caso contrário, será −2a .

Consideremos a reta que passa por F_1 e F_2 e sejam A_1 e A_2 os pontos de interseção da hipérbole com esta reta. Consideremos outra reta perpendicular a esta passando pelo ponto médio C do segmento F_1 e F_2.



A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como também em relação ao ponto C. se P_1 é um ponto da hipérbole, existem os pontos P_2, P_3, e P_4 tais que: P_2 é o simétrico de P_1 em relação à reta horizontal, P_3 é o simétrico de P_1 em relação à reta vertical, P_4 é o simétrico de P_1, em reação ao ponto C.

Ainda, pela simetria, conclui-se que:

$$d(A_1,A_2) = 2a$$

2.3.1 ELEMENTOS

Foco: são os pontos F_1 e F_2 .

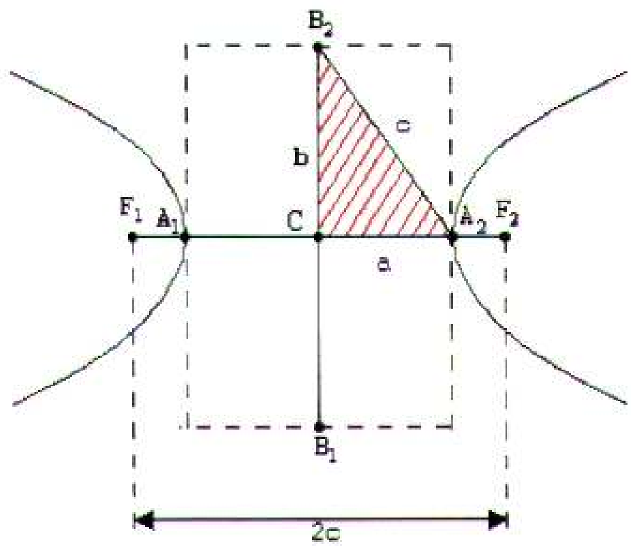
Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

Centro: é o ponto médio do segmento F_1F_2

Vértice: são os pontos A_1 e A_2

Eixo real ou transverso: é o seguimento A_1A_2 de comprimento 2a.

Eixo imaginário: é o seguimento B_1B_2 de comprimento 2b.



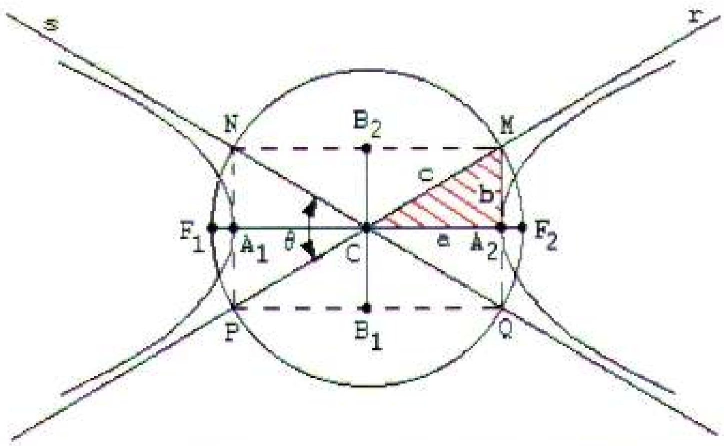
O valor de b é definido através da relação:

$$c^2=a^2+b^2$$

onde, a, b e c são as medidas dos lados do triângulo retângulo B_2CA_2.

Vamos fazer ainda uma outra consideração em torno de a, b e c. Consideremos uma circunferência de raio c e cujo centro é o próprio centro C da hipérbole. Tomemos um valor arbitrário para a e marquemos os pontos A_1 e A_2, vértices da hipérbole. Por estes pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1 e F_2. As quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo MNPQ inscrito nesta circunferência.

O retângulo assim construído tem dimensões 2a e 2b e a relação $c^2=a^2+b^2$ está novamente presente no triângulo retângulo, com o eixo imaginário B_1B_2 bem caracterizado.



As retas r e s, que contém as diagonais do referido retângulo, chamam-se assíntotas da hipérbole.

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. Esta aproximação é "continua" e "lenta" de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Naturalmente esta particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

O ângulo θ é chamado abertura da hipérbole.

Chama-se excentricidade da hipérbole ao número e dado por:

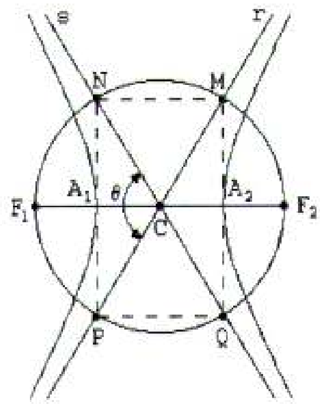
$$e = c/a$$

mas:
$c > a \therefore e > 1.$

A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com sua abertura.

De fato: voltemos outra vez à figura anterior onde a circunferência tem raio c. Mantendo o raio c da figura e tomando um valor para "a" menor de que o anterior , o novo retângulo MNPQ será "estreito" e , em conseqüência , a abertura θ será maior.

Diminuindo o valor de "a" (mantendo c fixo) significa aumentar o valor



de e= c/a. Assim, quanto maior a extremidade, maior será a abertura , ou seja, mais " abertos" estarão os ramos da hipérbole.

Quando a = b , o retângulo MNPQ se transforma e as assíntotas serão perpendiculares (θ = 90°). A hipérbole, neste caso é denominada " hipérbole equilátera".

2.3.2 Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema

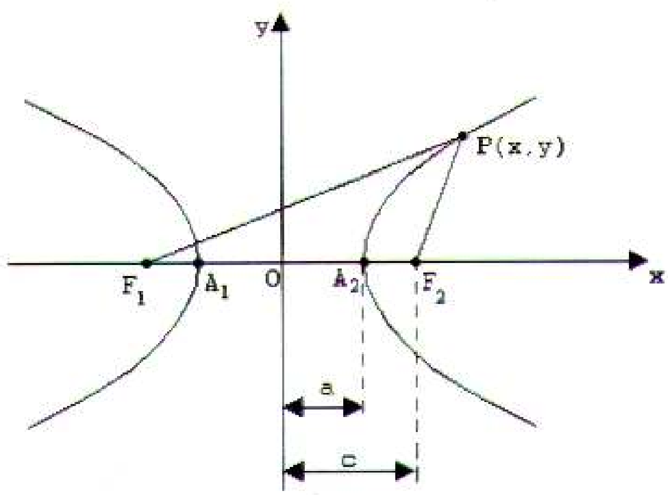
1° caso: O eixo real está sobre o eixo dos X.

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma hipérbole de focos F_1(-c,0) e F_2 (c,0). Por definição , tem –se:

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

ou, em coordenadas:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$



Com procedimento de simplificação análoga ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegaremos à equação:

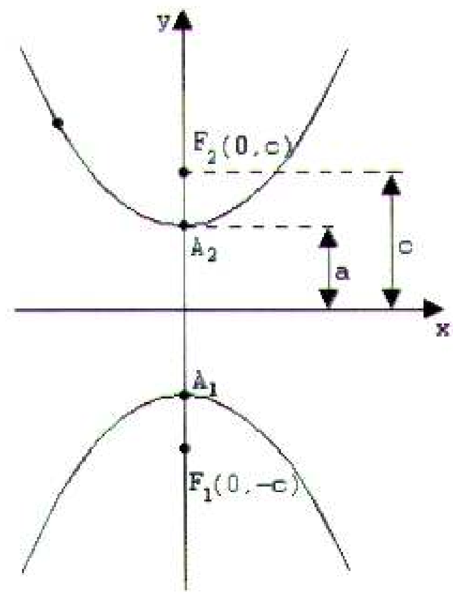
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que é a equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x.

2° caso: O eixo real está sobre o eixo dos y

Como já ocorreu com a parábola e a elipse, a equação desta hipérbole somente difere da anterior pela troca de posição das variáveis:

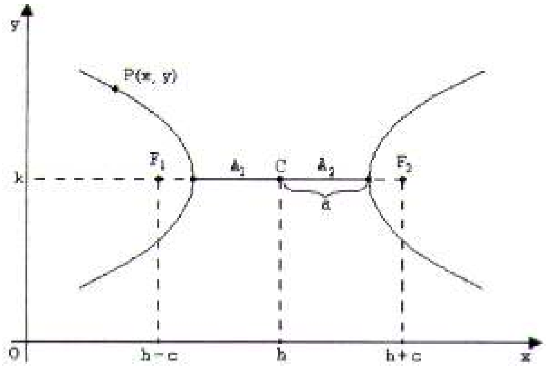
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



2.3.3 Equação da Hipérbole de Centro Fora da Origem do Sistema

1° caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos X

Consideremos uma hipérbole de centro C (h, k) e seja P(x, y) um ponto qualquer da mesma.



O que foi comentado em 2.2.4 para o caso da elipse também vale aqui.
Assim :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

É a equação de uma hipérbole de centro C(0,0) e eixo real sobre o eixo dos X ; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos X e o centro é C(, k), sua equação passa a ser :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

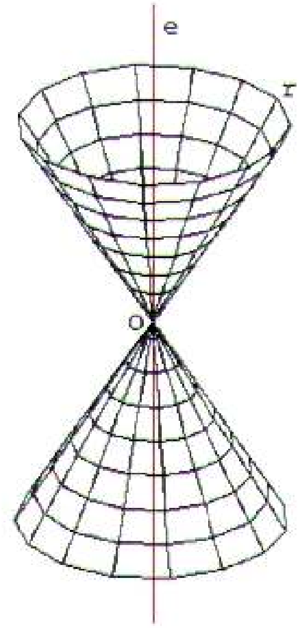
2° caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos y

De forma análoga, temos :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

2.4 Seções Cônicas

Sejam duas retas **e** e ***r*** concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta **e** e façamos ***r*** girar 360° em torno de **e** mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta ***r*** gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice (figura abaixo).

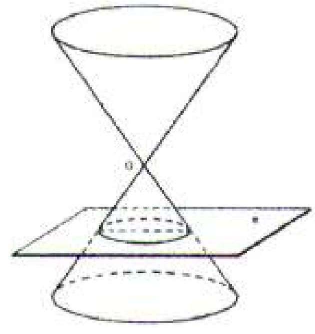


A reta **r** é chamada *geratriz* da superfície cônica e a reta **e**, ***eixo*** da superfície.

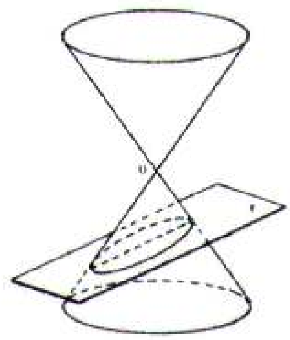
Chama-se *seção cônica* ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a seção cônica será:

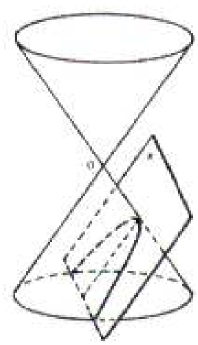
a) uma *circunferência* se π for perpendicular ao eixo **e** da superfície;



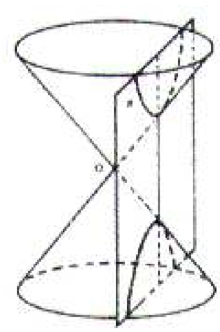
b) uma *elipse* se π for oblíquo ao eixo **e**, cortando apenas uma das folhas da superfície;



c) uma *parábola* de π for paralelo a uma geratriz da superfície;



d) uma *hipérbole* se π for paralelo ao eixo **e**;



3. Materiais Utilizados:

- Abajur
- Cartolina preta
- Suporte Móvel
- Transferidor
- Régua
- Papel milimetrado (anteparo)
- Lanterna

4. PROCEDIMENTO

Ao iniciarmos este estudo, não sabíamos ao certo que queríamos concluir com este trabalho mas, após uma semana de estudo verificamos que num simples abajour há um estudo matemático muito interessante, através dele, nos deu uma idéia de estudar as sessões cônicas.

Primeiramente começamos fazendo nossa pesquisa com o "abajour", com cúpula. Como não conseguimos uma projeção satisfatória para o estudo das sessões cônicas, então modificamos o nosso abajour para que a projeção fosse mais nítida no anteparo.

Criamos um espécie de canhão, utilizando uma cartolina preta em forma de cilindro que substituiu a cúpula do abajour.

A cartolina envolvia todo o abajour, e a luz era emitida totalmente para a frente, com a utilização de um suporte móvel que em nosso caso foi o retroprojetor, para obtermos alguns ângulos, cujos seriam utilizados no próximo passo.

Necessitamos observar a projeção da luz em diferentes ângulos, pois dependendo dos ângulo que a luz é projetada obtém-se no anteparo formas geométricas diferentes como, circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Para podermos confirmar matematicamente se realmente a figura formada está de acordo com a teoria, e necessário sabermos os ângulos.

Analisando o nosso canhão, observamos que era semelhante a uma lanterna, passamos a utilizar uma lanterna para o nosso estudo, pois o canhão era falho também a respeito de projeções no anteparo.

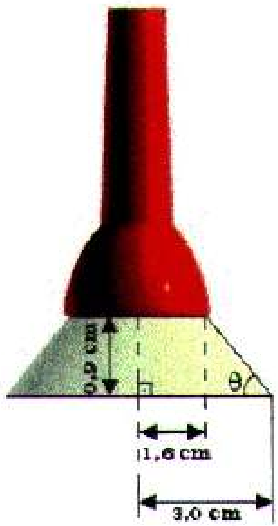
A luz emitida, no nosso caso da lanterna, tem a forma cônica, chegamos a esta conclusão pois sua projeção em um anteparo num angulo de zero de uma altura h, forma uma circunferência de diâmetro maior que a da abertura da lanterna.

Conforme foi estudado anteriormente (seções cônicas), dependendo do ângulo de inclinação do plano (anteparo), obteríamos as projeções. Como nosso anteparo era uma grande folha milimetrada, decidimos variar o angulo da lanterna, pois obteríamos os mesmo resultados e seria muito mais cômodo.

Conforme a teoria, verificamos que as projeções formadas no anteparo eram as figuras estudadas anteriormente, porém não sabíamos ao certo se aquelas figuras correspondiam ao modelo teórico. A única coisa que sabíamos eram os o ângulos formados entre a lanterna e o plano

Ângulo(θ)	Forma geométrica
0°	Circunferência
$0° < \theta < 32,73°$	Elipse
$32,73° \leq \theta < 90°$	Parábola
90°	Hipérbole

Foi necessário calcular o ângulo formado entre a geratriz e a base do cone. Para a cálculo desse ângulo, colocamos a lanterna a 0° em relação ao anteparo, para que formasse uma circunferência. Após isso medimos o raio da circunferência formada, o raio do bocal da lanterna e a distância entre bocal da lanterna e o anteparo (figura abaixo).



Para calcular este ângulo utilizamos a seguinte fórmula:

$$\theta = \text{arctg}\ \frac{\text{cat op.}}{\text{cat adj.}}$$

$$\theta = \text{arctg}\ \frac{0,9}{3,0 - 1,6}$$

$$\theta \cong 32,73°$$

Esse ângulo calculado é o que determina até quando a forma geométrica passa de elipse de hipérbole.

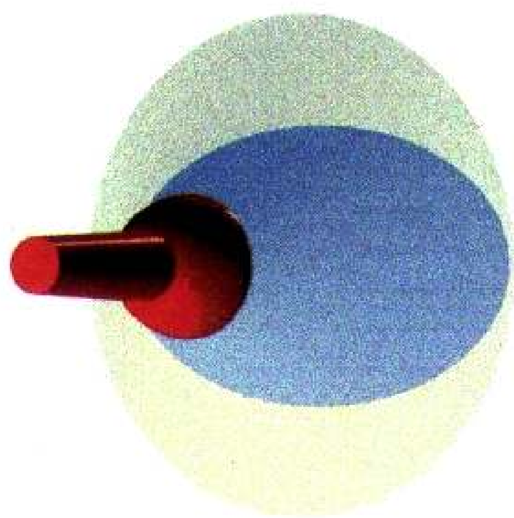
5. Análise dos Dados

Circunferência:

Com um ângulo de 0° do anteparo em relação ao plano (no nosso caso a lanterna) obtivemos a seguinte forma geométrica.(amarelo escuro).
Como sabemos, a distância de um ponto qualquer da circunferência até o seu centro é sempre constante.
Através das medidas obtidas da figura, verificamos que a figura era realmente uma circunferência.

Elipse:

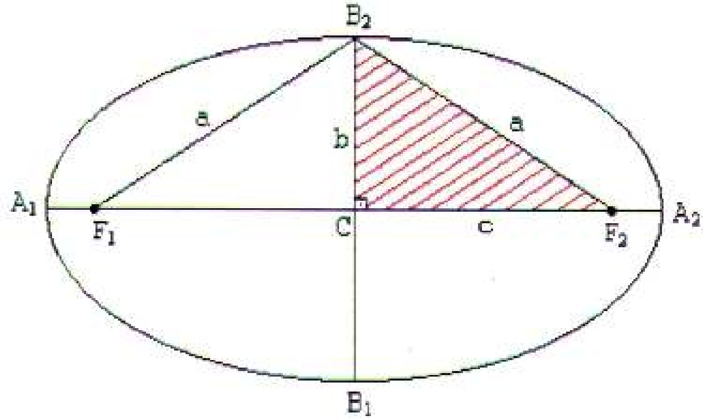
A partir de uma ângulo formada com o anteparo, verificamos que a figura obtida, parecia uma elipse (fig. abaixo). Provamos que a nossa definição estava correta através dos seguintes cálculos.



Cálculo do foco: conforme a teoria descrita anteriormente.

Eixo maior (2a): 36 cm

Eixo menor (2b): 24 cm



$A^2=b^2+c^2$

$(18)^2=(12)^2+c^2$

c= 13,41 cm

esta é a medida do foco.

Calculado o foco, observamos que a soma da distância de um ponto a até os focos é sempre igual ao eixo maior assim podemos confirmar a nossa experiência.

Parábola

A partir de um certo ângulo podemos verificar, que a elipse se transformava em uma parábola e este ângulo para nosso calculo era de aproximadamente 33°, calculado e experimentalmente, mas ao calcularmos o foco, vários pontos desta suposta parábola observamos que os focos eram diferentes , a equação usada foi a equação reduzida :

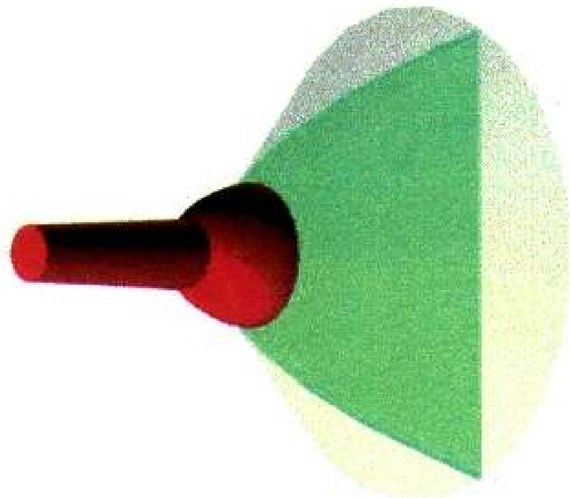
$$x^2 = 2py$$

Ponto(eixo x)	Ponto(eixo y)	P(foco)
3,5	2	1,53
4,5	3	1,69
5,3	4	1,76
5,5	4,1	1,84
5,9	5	1,92

Calculando o desvio padrão , que nos da o erro, teremos: ± 0,298 cm, assim nosso foco calculado(média), é de (1,75 ± 0,29)cm.

Com esse ponto de foco calculado, medimos a distancia do foco até qualquer ponto da parábola e a distancia deste ponto até a diretriz e verificamos que ocorre uma pequena diferença foi muito pequena.

Levando em conta o material utilizados para realizar o nosso experimento, material este pouco preciso e o modo como foi realizado, podemos deduzir que a forma geométrica formada no anteparo é uma parábola.



Hipérbole:

A hipérbole é formada quando a lanterna forma um ângulo de 90° com a plano (anteparo). A forma geométrica apresentada é uma hipérbole.

Nossa hipérbole tem centro na origem e o eixo real está sobre o eixo dos y. Com isso utilizamos a formula conforme a teoria:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Primeiramente medimos o valor de a (0,4 cm) e pegamos um ponto p qualquer. Após isso calculamos o valor de b.

Através de pitágoras, calculamos o valor de c, que é o foco. Abaixo temos as medidas e os valores dos focos.

pontos	a (cm)	x (cm)	y (cm)	c (cm)
P1	0,4	-3,0	1,5	0,92
P2	0,4	2,0	1,0	0,95
P3	0,4	5,0	3,0	0,78
P4	0,4	1,0	0,6	0,80
P5	0,4	-4,0	2,2	0,84

Com essa tabela, calculamos a média e desvio padrão do foco e obtivemos o seguinte foco: $(0{,}86 \pm 0{,}15)$cm.

Com esse valor conseguimos provar que a figura era uma hipérbole, pois a partir dele comprovamos a teoria.

6. Conclusão

Através deste projeto estudamos as secções cônicas. Nós nos aprofundamos mais na comprovação das formas geométricas obtidas experimentalmente. Para isso foi necessário ter um conhecimento do conceito matemático e geométrico de circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Como nós tínhamos certeza que maioria das formas obtidas eram realmente verdadeiras, não nos preocupamos tanto em desenvolver o conceito, e sim aplicá-los.

Com a ajuda de alguns recursos de computação gráfica, pudemos verificar esse formas geométricas à partir de simulações feitas em computador, comprovando nosso experimento.

Este método de aprendizado é muito interessante, pois força o aluno a desenvolver o raciocínio e aprimorar o trabalho em grupo. Com isso aprende realmente , comprovando que o aluno pode aprender e a desenvolver sem o professor ao lado. Porém a orientação de um professor é extremamente necessária.

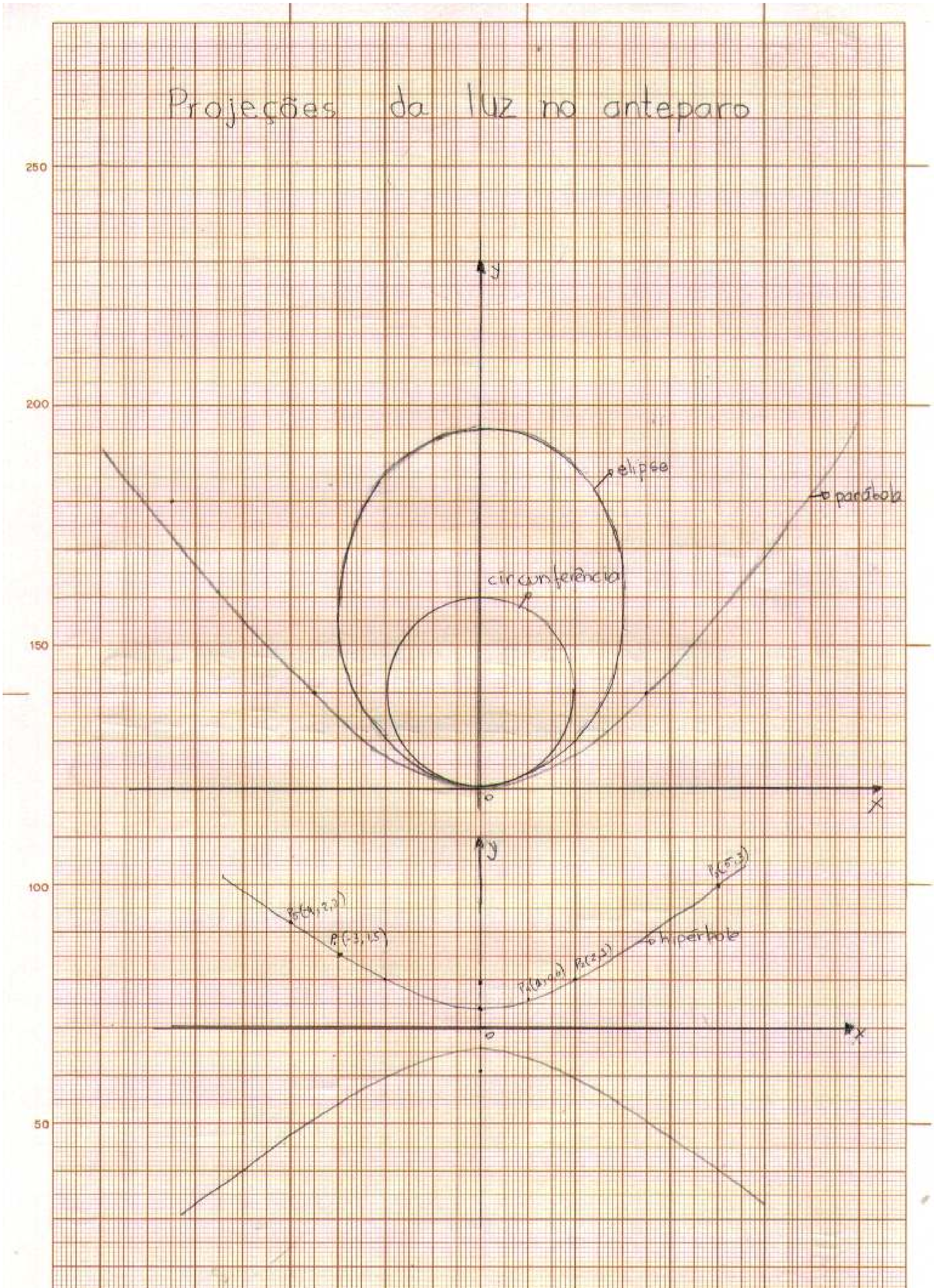
Como mudamos o objeto de pesquisa de um abajour para uma lanterna, poderia ter sido estudado também as superfícies quadráticas como o parabolóide por exemplo, pois como pudemos perceber durante a realização do experimento, a lanterna (material refletor) tem forma de um parabolóide.

Como levamos um certo tempo para perceber que o objetivo deste trabalho era o estudo das secções cônicas através da projeção de um ponto de luz em um anteparo, teríamos mudado logo o tema de **abajour** para **lanterna**. Porém se o tema inicial fosse lanternas teríamos nos aprofundado mais nas secções quadráticas, desviando-nos dos assunto proposto.

7. BIBLIOGRAFIA:

STEINBRUCH, Alfredo.

Geometria Analítica/ Steinbruch, Alfredo; **Winterle**, Paulo. – 2ª ed. – São Paulo: Ed. McGraw – Hill, 1987

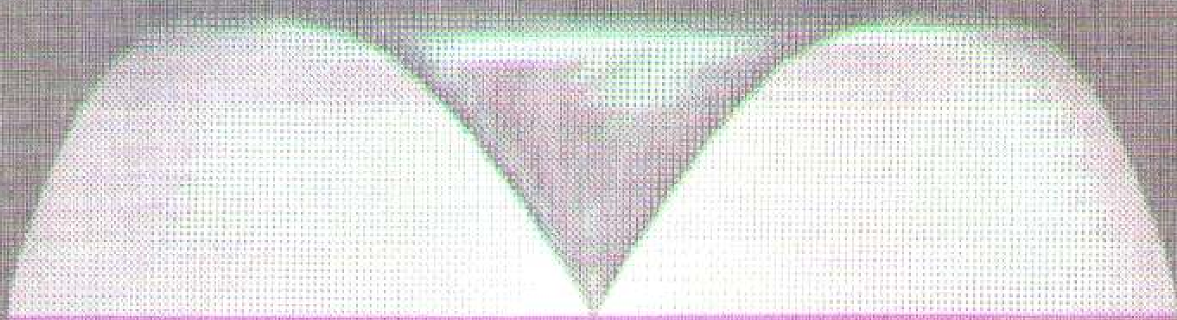

Projeções da luz no anteparo
elipse
parábola
circunferência
hipérbole
y
x
o
250
200
150
100
50
0
50
100
150
Ref: Formato A-4 = 210 x 297 mm - Divisão 180 x 280 mm

ANEXO 21

Projeto – LANÇAMENTO DE PROJÉTIL

Na íntegra

LANÇAMENTO DE PROJETIL



DOUGLAS FULANETTI Nº 99302
ANDRE LUIZ DA SILVA Nº 99333
MARCOS A. PREVITALLI Nº 99337
CARLOS HENRIQUE DE ALMEIDA Nº 99340

Movimento de Projéteis: *Fundamentos Teóricos*

Alguns conceitos que precisamos para entender melhor o nosso projeto:

Movimento: um ponto material está em movimento em relação a um dado referencial quando sua posição varia no decorrer do tempo.

Trajetória: é o lugar geométrico das posições ocupadas pelo ponto no decorrer do tempo. A trajetória pode ser retilínea ou curvilínea, dependendo do referencial considerado.

Referencial: é o sistema adotado como referência para indicar se o ponto está em movimento ou em repouso. O referencial utilizado será o de um sistema rigidamente ligado a Terra.

Tempo: ente fisico que é associado a uma sucessão de eventos e é considerado como conceito primitivo. A origem do tempo é um instante que é fixado por convenção e ao qual é atribuído o valor zero.

Intervalo de tempo: é a diferença entre o instante posterior e o instante anterior

Espaço: grandeza que define a posição de um ponto material sobre sua trajetória. A medida do espaço é realizada a partir da origem dos espaços. A origem do espaço é atribuida o valor de referência que pode ser zero ou qualquer outro valor.

Variação de espaço ou deslocamento escalar: quando um ponto material, em um intervalo de tempo, muda sua posição, relativamente a um referencial, ocorre uma variação de espaço ou um deslocamento de espaço. à medida da variação de espaço é portanto a diferença entre o espaço posterior e o espaço anterior.

Movimento Unidimensional: quando um ponto material está se movimentando segundo uma reta, ou seja, em uma única direção, o movimento é denominado unidimensional. O movimento retilíneo é unidimensional.

Movimento bidimensional: quando um ponto material está se movimentando sobre um plano, ou seja, em duas direções, o movimento é denominado bidimensional. Os movimentos, tais como os de projéteis e o circular, são bidimensionais.

Velocidade instantânea: ao trafegar em uma estrada você pode observar no velocímetro do carro que a velocidade indicada varia no decorrer do tempo. Esta velocidade que você lê no velocímetro em um determinado instante é denominada velocidade instantânea. Para determinar esta velocidade tem-se que calcular o limite de (S/t), para t tendendo a zero; este tipo de cálculo não é realizado neste nível de aprendizagem.

Velocidade escalar média: é a variação de espaço que o ponto material realiza em um intervalo de tempo.

PRINCÍPIO DA INDEPENDÊNCIA DOS MOVIMENTOS (GALILEU)

O movimento da bola é um **movimento bidimensional**, sendo realizado nas direções horizontal (X) e vertical (Y); este movimento é composto de dois tipos movimentos:

- movimento uniforme na direção horizontal (X)

- movimento uniformemente variado na direção vertical (Y)

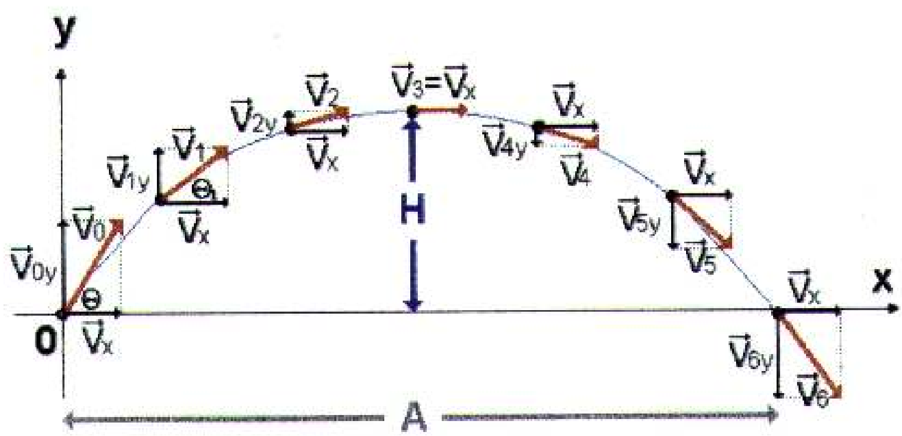
Galileu já sabia disto no século XVI, e baseando-se em fatos experimentais, enunciou o **Princípio da Independência dos Movimentos**, que diz o seguinte:

"Quando um móvel realiza um movimento composto cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem."

No nosso caso este princípio se aplica, porque o movimento na direção horizontal se realiza uniformemente, independente do movimento na vertical que é uniformemente variado.

Análise vetorial / Movimento de projéteis

A trajetória da bola de futebol . Foram traçados os vetores velocidade, $\mathbf{V_0}$, $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_3}$, $\mathbf{V_4}$, $\mathbf{V_5}$ e $\mathbf{V_6}$, que são tangentes a cada ponto da trajetória, também está indicado o alcance, A, e a altura máxima da bola, H.



Trajetória de um projétil (a bola de futebol), mostrando os vetores velocidade e suas componentes vetoriais.

Estes vetores velocidade apresentam as componentes, $\mathbf{V_x}$ e $\mathbf{V_y}$, para cada posição, nas direções X e Y.

Como na direção X o movimento é uniforme, o valor da componente $\mathbf{V_x}$ será constante, ou seja, $V_{1x} = V_{2x} = \text{---} = V_{nx} = V_x$.

Na direção Y o movimento é uniformemente variado, portanto cada componente V_y terá um valor. Observe que, vetorialmente, o valor de V_y diminui na subida, anula-se no vértice da parábola (altura máxima) e aumenta na descida.

A bola foi lançada a partir de O (origem), fazendo um ângulo com a horizontal. Para determinar as componentes $\mathbf{V_x}$ e $\mathbf{V_{0y}}$, sendo conhecidos o ângulo e a velocidade $\mathbf{V_0}$, basta projetar o vetor $\mathbf{V_0}$ nas duas direções X e Y, obtendo:

$$V_x = V_0.\cos$$
$$V_{0y} = V_0.\text{sen}$$
$$V_{1y} = V_1.\text{sen}_1$$

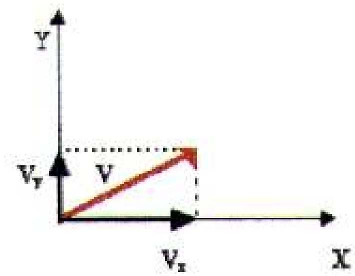
e análogamente determina-se V_{2y}, V_{3y}, ...

O vetor resultante **V** é dado pela soma dos dois vetores $\mathbf{V_x}$ e $\mathbf{V_y}$:

$$V = \mathbf{V_x} + \mathbf{V_y}$$

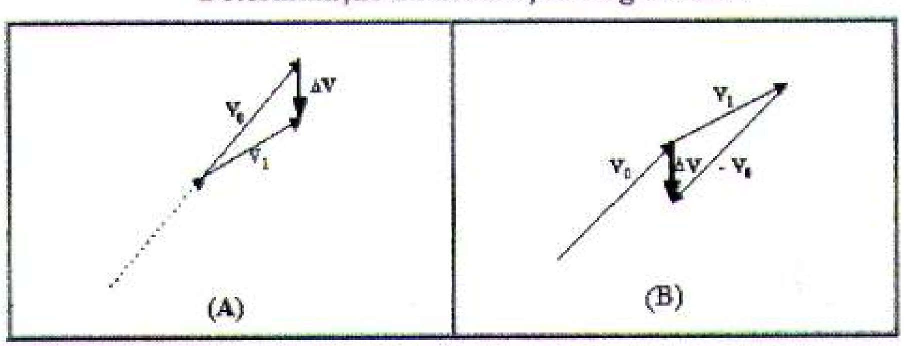
Pode-se determinar o módulo do vetor velocidade **V**, para cada posição, sendo conhecidos os módulos das componentes, V_x e V_y, obtendo:

$$V^2 = V^2_x + V^2_y$$



Vetor velocidade **V** e as componentes $\mathbf{V_x}$ e $\mathbf{V_y}$.

Determinação da aceleração da gravidade



Diferença entre os dois vetores velocidade para duas posições sucessivas.

(A) Método do paralelogramo;

(B) Método da triangulação.

Considerando os vetores velocidade, V_0 e V_1, por exemplo, e colocando as origens destes vetores coincidentes ou colocando a origem do vetor oposto, $-V_0$, coincidente com a extremidade do vetor V_1, obtém-se a diferença entre dois vetores velocidade (V) para duas posições sucessivas. Fazendo o mesmo procedimento para todas as posições, para intervalos de tempo iguais, observa-se que esta diferença de velocidade é constante, para quaisquer duas posições, ou seja, a aceleração é constante:

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}/t = \text{constante}$$

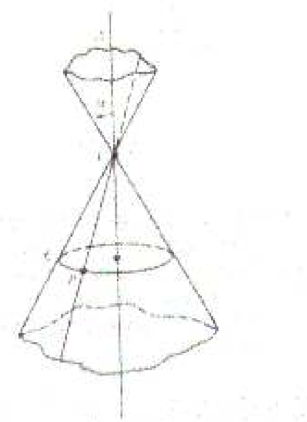
$$\mathbf{a} = -\mathbf{g}$$

Onde **g** é a aceleração da gravidade. O sinal para **g** é considerado negativo porque a trajetória é orientada positiva para cima e o vetor **g** atua para baixo.

Observação: Na experiência simulamos lançamento de projéteis - o valor da aceleração encontrado não será o da gravidade, mas um valor menor, porque o movimento do PUCK é realizado sobre uma superficie inclinada, havendo as forças de reação da superficie.

SEÇÕES CONICAS

Introdução:

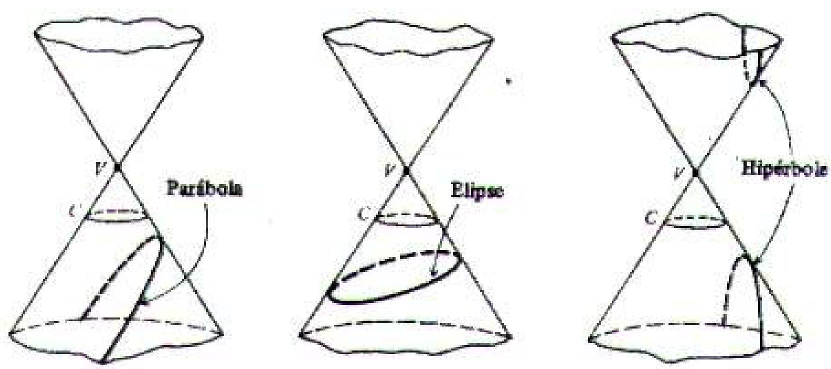


Seções de um cone

Considere uma circunferência C. Seja A a reta que passa pelo centro de C e é perpendicular ao plano de C e seja V um ponto de A que não pertence ao plano de C.

Passa-se um ponto P de C e desenha-se uma reta por P que passa também por V. Fazendo P percorrer C a reta PV Gera um cone circular reto com eixo. A e vértice V. Cada uma das retas PV chama-se geratriz do cone mostrado na figura acima tem um eixo vertical; as porções superior e inferior do cone que se interceptam chama-se "folhas" do cone. Em geometria elementar, um cone geralmente é entendido como sendo uma figura solida que ocupa a região limitada do espaço que esta entre V e o plano C e no interior das superficie, que acabamos de descrever. Entretanto, no contexto presente, o cone é apenas essa superfície, e é encarado como constituído de ambas as folhas, estendendo-se ao infinito em ambos os sentidos.

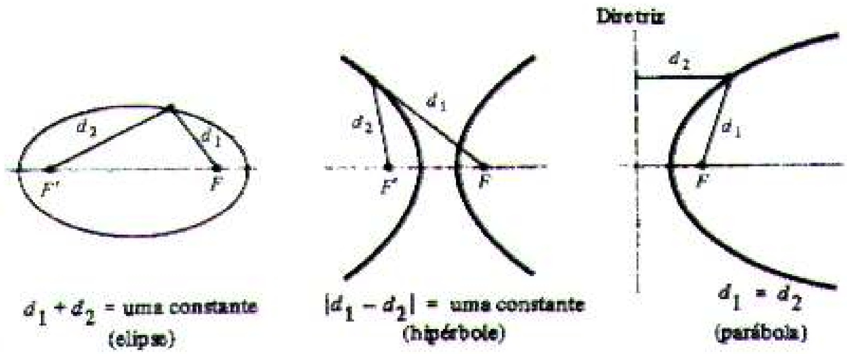
As curvas obtidas cortando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice chamam-se seções cônicas ou simplesmente cônicas. Se o plano secante é paralelo a uma geratriz, a cônica chame-se parábola. Caso contrario, a cônica chama-se elipse ou hipérbole, conforme o plano corte uma só ou ambas as folhas. A hipérbole deve ser encarada como uma curva só, constituindo em dois "ramos", um em cada folha. Essas três curvas são ilustradas na figura .



As três curvas mostradas na figura acima podem ser descritas de outra maneira. Imagine uma fonte de luz colocada em V e um Anel circular colocado em C. Então a sombra do anel projetada sobre um plano será uma parábola, uma elipse ou um ramo de hipérbole, dependendo da inclinação plano. Se o plano é paralelo a uma das retas que une V a C, obtemos uma sombra parabólica; a sombra será uma elipse se o plano for menos inclinado que esse plano que gera a parábola e será parte de uma hipérbole se for mais inclinado.

Devemos notar que transladando cada um dos planos secantes da figura paralelamente à posição original até passar pelo vértice, obteremos as chamadas seções cônicas "degeneradas", ou seja, respectivamente uma única reta, um ponto e um par de retas concorrentes.

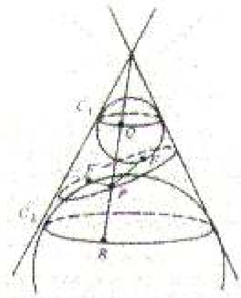
Muitas descobertas importantes em matemática Pura e em ciência estão às seções cônicas. Os gregos clássicos – Arquimedes, Apolônio e outros – estudaram essas belas curvas por puro prazer, como forma de desafios, sem qualquer pensamento em possíveis aplicações. As primeiras aparições apareceram quase 2000 anos depois no inicio do século XVII. Em 1604, Galileu descobriu que, lançando-se um projetil horizontalmente do topo de uma torre, supondo que a única força atuante seja a da gravidade – isto é, a resistência do ar e outros fatores complicadores são ignorados - , sua trajetória será uma parábola. Um dos grandes eventos da historia da Astronomia ocorreu alguns anos mais tarde, apenas em 1609, quando Kepler publicou sua descoberta de que a órbita de marte era uma elipse, lançando a hipótese de que todos os planetas se moveriam em orbitas elípticas. E cerca de 60 anos depois disso, Newton provou matematicamente que a orbita planetária elíptica é a causa e conseqüência de uma lei de atração gravitacional, baseada no inverso do quadrado da distancia. Isso levou Newton a formular e publicar (em 1687) sua famosa Teoria da Gravitação Universo, para explicar o mecanismo do sistema solar, teoria esta considerada como a maior contribuição à ciência feita por um só homem. Esses desenvolvimentos ocorreram centenas de anos atras, mas o estudo das seções cônicas não é , ainda hoje, nem um pouco anacrônico. De fato, essas curvas são instrumentos importantes nas explorações espaciais dos dia de hoje, e também nas pesquisas do comportamento de partículas atômicas: os satélites artificiais movem-se ao redor da terra em orbitas elípticas, e a trajetória de uma partícula alfa movendo-se no campo elétrico de um núcleo atômico é uma hipérbole. Esses exemplos e muitos outros mostram que a importância das seções cônicas , tanto antigamente como atualmente, é difícil de ser menosprezada.



Hipérbole é o conjunto de todos os pontos para os quais o valor absoluto da diferença $|d_1\text{-}d_2|$ é constante. Finalmente, parábola é o conjunto de todos os pontos cujas distancias a um ponto fixo F (o foco) e a uma reta fixa (chamada diretriz) são iguais.

Há um argumento simples e elegante que mostra que a propriedade focal de uma elipse pode ser obtida de uma definição como seção cônica. A demonstração utiliza as duas esferas mostradas na figura abaixo, internamente tangentes ao plano secante, que origina a elipse nos pontos F e F'. Sendo P um ponto arbitrário da elipse, devemos mostrar que a soma de suas distancias aos focos PF + PF' é constante no sentido de que não depende da posição particular de P. para ver isto, notamos que, sendo Q e R pontos sobre C_1 e C_2 que estão na geratriz que passa por P, então PF = PQ e PF' = PR, pois duas tangentes quaisquer a uma esfera trancada de um mesmo ponto externo, tem o mesmo comprimento. Segue-se que PF+PF' = PQ+ PR = QR; e o argumento se completa observando–se que QR, considera como medida da distancia de C_1 a C_2 tomada sobre uma geratriz, tem o mesmo valor qualquer que seja a posição de P.

Com pequenas modificações, essa prova funciona também para a hipérbole e para a parábola. No caso da hipérbole, utilizamos uma esfera em cada folha do cone, com ambas as esferas tangentes ao plano secante. E para a parábola é esse ponto de tangência, e sua diretriz é a reta de intersecção do plano secante com o plano da circunferência ao longo da qual a esfera é internamente tangente ao cone. Os estudantes devem utilizar essas sugestões para desenhar figuras adequadas e provar para si mesmos que as propriedades focais da hipérbole e da parábola podem ser deduzidas a partir de suas difinições de seções cônicas



O que é a parábola ?

Definição: é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta fixa L (diretriz) do plano.

Admitiremos que f não pertence a L, pois isto resultaria em uma reta. Se P é um ponto do plano e P′ é o ponto de L determinado por uma reta por P perpendicular a L, então, pela Definição acima, P pertence à parábola se e somente se as distâncias d(P,F) e d(P,P′) são iguais. O eixo da parábola é a reta por F perpendicular á diretriz. O vértice da parábola é o ponto V do eixo, equidicular de F e L.

Para obter uma equação simples de uma parábola, fixemos o eixo-y coincidindo com o eixo da parábola, com a origem no vértice V. Neste cas, o foco F tem coordenadas (0,p) para algum número real p diferente de zero, e a equação da diretriz é y = -p. Pela fórmula da distância, um ponto P(x,y) pertence à parábola se e somente se

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros simplificando:

$$(x - 0)^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Uma equação equivalente é $y = \frac{1}{4p} x^2$

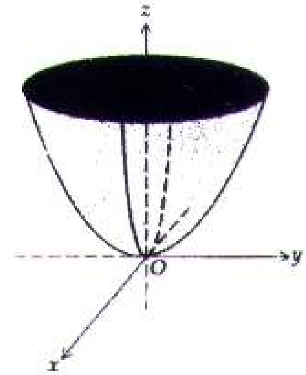
Mostramos que as coordenadas de todo ponto (x,y) da parábola verificam $x^2 = 4py$. Reciprocamente, se (x,y) é solução de $x^2 = 4py$, então, invertendo a marcha anterior vemos que o ponto (x,y) pertence à parábola. Se $p < 0$, a parábola tem abertura para baixo, se $p < 0$, a parábola tem abertura baixo. O gráfico é simético em relação ao eixo-y, pois substituindo-se x por –x a equação $x^2 = 4py$ não se altera.

Permutando os papéis de x e y, obtemos $y^2 = 4px$, ou, equivalente, $x=y^2/(4p)$. Esta é a equação de uma parábola com vértice na origem, foco F(p,0) e abertura para a direita se $p > 0$ ou para a esquerda se $p < 0$.

Abreviadamente, costumamos referir-nos à parábola $x^2 = 4py$ ($y^2 = 4px$), em lugar de a parábola de equação $x^2 = 4py$ (ou $y^2 = 4px$).

O parabolóide elíptico

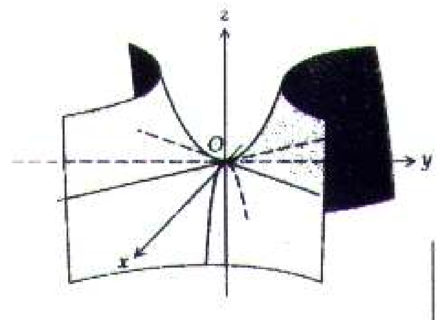
Onde a e b são positivos e $c \neq 0$. A superfície , se $c > 0$.Substituindo k por z em (5)



Quando $k = 0$, essa equação torna-se $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$, que representa um único ponto, a origem. Se $k \neq 0$ e k e c tiverem o mesmo sinal, a equação será de uma elipse. Assim, concluímos que as secções transversais da superfície nos planos $z = k$, onde k e c têm o mesmo sinal, são elipses e os comprimentos dos semi-planos $z = k$, onde k e c têm o mesmo sinal opostos, os planos $z = k$ não interceptam a superfície. As secções transversais da superfície com os planos $x = k$ e $y = k$ são parábola. Quando $c > 0$, as parábolas abrem-se para cima, quando $c < 0$, as parábolas abrem-se para baixo.

Se $a = b$, a superfície é uma parabolóide de revolução.

O parabolóide hiperbólico



Onde a e b são positivo e $c \neq 0$. A superfície para $c > 0$.

As secções transversais da superfície nos planos $z = k$, onde $k \neq 0$, são hipérbole com seus eixos transversais paralelos ao eixo x se k e c tiverem sinais opostos. A secção transversal da superfície no plano $z = 0$ consiste em duas retas passando pela origem. As secções transversais nos planos $x = k$ são parábola abrindo-se para cima se $c > 0$, e para baixo se $c < 0$. As secções transversais nos planos $y = k$ são parábola abrindo-se para baixo se $c > 0$, e para cima se $c < 0$

Estudo Teórico do Projeto

Começamos nosso projétil estudando o movimento de um jogo de futebol, mais precisamente de um chute numa bola de futebol.

Você já observou que quando um jogador de futebol chuta a bola com um determinado ângulo horizontal, a bola descreve no ar uma trajetória que é uma parábola.

O que acontece com a velocidade inicial da bola?

Quando a bola está subindo, a sua velocidade inicial vai diminuindo até atingir um valor mínimo no ponto mais alto da trajetória (vértice da parábola) e vai aumentando quando está descendo até atingir o solo (alcance da bola).

Por que a velocidade da bola tem esta variação?

Você sabe que para que haja variação da velocidade, precisa haver forças atuando; desprezando a resistência do ar, a força que está atuando na bola é a força peso.

A força peso que atua na vertical de cima para baixo, fazendo com que a bola tenha uma aceleração denominada aceleração da gravidade.

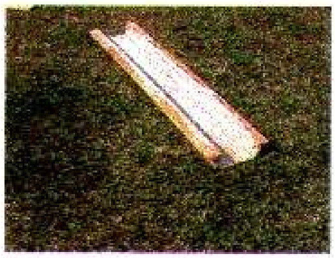
Esta aceleração, para corpos próximos à superficie da Terra, vale aproximadamente 9,8 m/s^2.

Quando a bola está subindo, a força peso, sendo para baixo, faz com que a velocidade diminua (movimento retardado) e quando a bola está descendo, a força peso, atuando no mesmo sentido, faz com que a velocidade aumente (movimento acelerado).

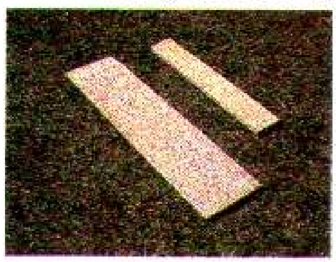
Procedimentos Utilizados na Experiência Pratica

Material Utilizado:

1-) Uma madeira com formato de canaleta, como podemos observar na foto abaixo.
Ela tem a função de ser a Hipotenusa do angulo, isto é, o ponto para a bola rolar.



2-) Duas madeiras em formato de "ripa", como podemos observar na foto abaixo.
Elas tem como função variar a altura, com isso variando o ângulo do experimento.



3-) Uma bola de futebol, como a massa igual à 438,7 gramas.

4-) Uma fita métrica.

5-) Um cronometro

Procedimentos:

1-) Colocar a madeira em forma de canaleta, sobre uma da ripas da seguinte forma:

Na qual a madeira em forma de canaleta forme um angulo com o gramado(solo).

2-) Colocar a bola de futebol na base da madeira em forma de canaleta.

3-) Chutar a bola de tal forma com que ela role sobre a madeira em forma de canaleta.

4-) Medir o tempo em que a bola leva para atingir o gramado (solo) , a

altura da ripa, a distancia entre a ripa , o ponto de lançamento da bola e também medir a distancia em que a bola cai em relação a base da madeira em forma de canaleta, como podemos observar na figura.

5-) Agora já temos alguns dados sobre o projeto, temos a massa da bola, a trajetória que a bola faz, o espaço que a bola caiu do seu ponto de origem, o tempo que a bola demorou para atingir a altura máxima (metade do tempo total) e o tempo total até a bola cair no chão.

6-) Repetimos essa experiência por 9(nove) vezes.

8-) Com alguns dados podemos calcular a velocidade inicial da bola de futebol (formula pega na Internet).

$$T_{empo\ Total} = \frac{(2.V_0.sen\theta)}{g}$$

Isolando a velocidade inicial:

$$V_0 = \frac{(T_{empo\ Total}.g)}{2.sen\theta}$$

9-) Agora vamos calcular a altura máxima que a bola de futebol atingiu, fórmula que pegamos na Internet.

$$H = \frac{(V_0^2\ sen^2\theta)}{2\ g}$$

10-) Tabela de Dados Obtidos:

Lançamentos	Tempo Total (s)	Ângulo (°)	Veloc. Inicial (m/s)	Altura máxima (m)	Espaço Total (m)
1	1,29	43	10	1,99	4,57
2	0,9	10,3	27,3	0,98	4,79
3	1,27	50,76	8,69	1,97	2,7
4	0,68	5,3	36,07	0,56	4,84
5	1,06	43,9	7,49	1,37	4,4
6	1,3	43	9,34	2,07	7,86
7	0,7	11,67	16,95	0,59	6,47
8	0,89	16,1	15,7	0,96	8,75
9	1,73	31,73	13	2,38	10,8

11-)A partir desses dados, começamos a estudar e logo descobrimos que não tinhamos dados suficientes.

12-)Decidimos então mudar de experiência por muitos motivos, conversando com o prof. Martins, chegamos a conclusão que não tinhamos dados exatos e com isso preferimos mudar a experiência, com a intenção de compararmos a experiência teórica com a experiência pratica.

13)Encerrando assim, a experiência do futebol e reiniciando a nova experiência tudo de novo.

Experiência do canhão

Você já deve ter observado como funciona um canhão (desses de guerra), ele nos da a perfeita ilustração do que seja um lançamento de projetil. Então nós resolvemos tentar construir um "mini canhão" para obtermos dados mais precisos.

Canhão de guerra

Mini-canhão

Procedimentos Utilizados na Nova Experiência Pratica

Material Utilizado:

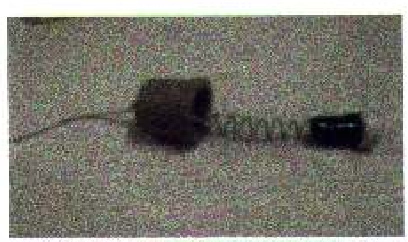
1-) Um cano PVC (de 20 cm).
2-) Uma madeira em forma quadrática.
3-) Uma folha tipo sulfite e um papel tipo carbono

4-) Uma bola de Gude (que vamos denominar de esfera) de massa de 7,63 gramas

5-) Uma mola
6-) Um barbante
7-) Uma dobradiça

Procedimentos para montagem do mini-canhão.

1-) Furar o fundo do cano de PVC de forma com que passe o barbante.
2-) Colocar a mola (presa ao barbante) dentro do cano de PVC conforme a figura).
3-) Furar o cano de PVC na sua lateral, para que possamos colocar a dobradiça.



4-) Parafusar a dobradiça na madeira e a outra extremidade no cano de PVC.
5-) Colocar um transferidor a base da dobradiça.

Procedimentos utilizados para experiência teórica.

1-) Colocar o papel carbono com a folha sulfite em baixo (conforme a figura abaixo).

2-) Colocar a bola de gude dentro do cano de PVC.

3-) Direcionar o mini-canhão na folha de carbono.

4-) Puxar o barbante até que a mola fique completamente comprimida.

5-) Medir o angulo (com o transferidor preso na base da dobradiça)

6-) Soltar o barbante

7-) Medir a distancia com que a bola de gude caiu da sua base de lançamento. Através do pontos marcados pela folha de papel carbono na folha sulfite.

8-) Medir a constante elástica da mola.

Para que podessemos medir a constante elástica da mola fomos até o laboratório de fisica da Facens. No laboratório penduramos a mola numa extremidade e medimos o tamanho da mola e depois penduramos um peso de 0,5 Kg na outra extremidade e medimos o quanto a mola aumentou, e com isso verificamos que a mola deformou 4,5 cm.

9-) Com a fórmula da constante elástica.

K(constante elástica) = (Peso 9,8) / (deformação da mola).

10-) Agora que sabemos o K podemos utilizar a seguinte forma para calcular a velocidade inicial da partícula.

$$\mathbf{½.K.X^2= ½.M.V_0^2 + M.G.H}$$

K= constante elástica
X= distancia que a bola de gude caiu do seu ponto de lançamento.
V0=velocidade inicial da bola de gude (o que queremos calcular)
M=massa da bola de gude
G=gravidade local
H=altura da boca do canhão

Agora que já calculamos a velocidade inicial vamos utilizar as seguintes formulas:

$X=X_0+V_0.COS\theta.T$
$V_X=V_0.COS\theta$

$Y=Y_0+V_0.SEN\theta.T-1/2.G.T^2$
$V_Y=V_0.SEN\theta-G.T$

11-) Vamos isolar o tempo da seguinte equação :

$X=X_{0\ (\text{no caso esse é zero})}+V_0.COS\theta.T$
Temos:
$T= X / (V_0.COS\theta)$
Com isso temos o tempo.

12-) Agora vamos calcular a altura máxima que a bola de gude atinge.Vamos utilizar as seguintes formulas:

$T= X / (V_0.COS\theta)$
$Y=Y_0+V_0.SEN\theta.T- ½.G.T^2$
Com isso temos:
$Y=Y_0+V_0.SEN\theta.(X / (V_0.COS\theta)) – ½.G.(X / (V_0.COS\theta))^2$.
O "y" é a altura máxima que a bola de gude atinge.

As contas feitas para obter os dados do procedimento teórico.

Conforme já dito acima para calcularmos o valor de K (constante elástica) tivemos que ir até o laboratório. No laboratório medimos o peso da bola de gude (0.00763 kg) e colocamos a mola que usamos no experimento num suporte e colocamos um peso de 0,5 Kg e medimos sua deformação que é de $\Delta X = 0{,}045$ m.
Assim com estes dados conseguimos calcular o K.

$F = m.g$
$F = 0{,}5 x 9.8$
$F = 4{,}9$ N

$F = K\ \Delta X$
Substituindo temos:
$4{,}9 = K.0{,}045$
$K = 4{,}9 / 0{,}045$
$K = 108{,}8$ N/m

Para sabermos a velocidade inicial que a bola atinge, quando sai do canhão usamos a seguinte formula:

$\frac{1}{2}.\ KX^2 = \frac{1}{2}.\ M.v_0^2 + M.g.h$

OBS:calculamos a altura da extremidade do canhão (h) com um ângulo de 45°,

$h = 17{,}1$ cm ou $0{,}171$ m

Isolando o V_0 da formula anterior temos:

$$V_0^2 = \frac{k.x^2 - 2m.g.h\ .2}{2.m}$$

$$V_0^2 = \frac{0{,}118(0{,}033)^2 - 2.0{,}00763.9{,}8.0{,}171}{0{,}00763}$$

$V_0 = 3{,}48$ m/s

Jogamos o valor de V_0 na equação para acharmos a altura máxima que a bola de gude atingio Usando um ângulo de 45°.

$$Y = Tg\theta.x - \frac{g.x^2}{2.v0^2 \cos^2\theta}$$

Vamos utilizar uma tabela de y em função de x .

ENCONTRAMOS ESSA EQUAÇÃO APARTIR DAS EQUÇÕES:

$X=X_0 + V_0 \cos\theta . t$

Isolamos o t e obtivemos:

$$T = \frac{x}{V_0 . \cos\theta}$$

$$Y = y_0 + v_0 . \operatorname{sen}\theta . t - \frac{g . t^2}{2}$$

substituindo t na equação acima, temos:

$$y = \frac{vo . \operatorname{sen}\theta . x}{v_0 . \cos\theta} - \frac{g . x^2}{2 . v_0^2 . \cos 2\theta}$$

$$y = tg\theta x - \frac{g . x^2}{2 . v_0^2 \cos^2 2\theta}$$

Usando $\theta=45°$, marcamos o ponto onde caiu a bola de gude com papel carbono e papel sulfite embaixo do carbono.

Assim encontramos x.

X=66,47 cm

X=0,6647 m

$$Y = tg\theta . x - \frac{g . x^2}{2 . v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$Y = tg45 . 66{,}47 - \frac{9.8 . (0{,}6647)^2}{2 . (3{,}48)^2 \cos^2 45}$$

$$Y = 0{,}6647 - \frac{4{,}329}{12{,}11}$$

Y= 0,3077 m

Dados Obtidos:

Os dados iniciais que obtivemos na experiência pratica foram:

Deformação da mola: 4.5 cm.
O angulo de lançamento da bola de gude, que no caso utilizamos 45°.
O espaço que a bola de gude caiu do seu ponto de origem.

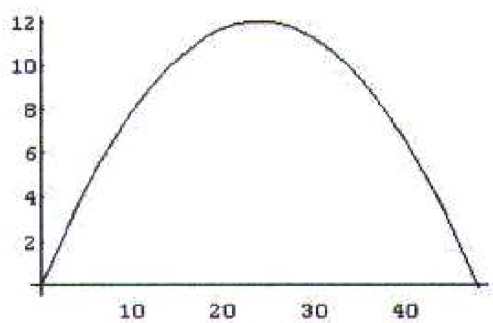
Dados obtidos através das formulas:

A constante elástica da mola é de 108.9 N/m
A velocidade inicial da bola de gude é de 21,66 m/s
A altura máxima obtida pela bola de gude é de 6,1 cm(saindo da boca do canhão).
A altura máxima obtida pela bola de gude é de 30.7 cm(do chão).

Gráfico da medida teórica:

```
f[x_]:= Tan[Pi/4]x - (9.8x^2)/469.5

Plot[f[x], {x,0,48}]
```



PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1-) Colocar a bola de gude dentro do cano de PVC.

2-) Colocar a folha sulfite(com a de carbono por cima) em pé conforme a figura.

4-) Puxar o barbante até que a mola fique completamente comprimida.

5-) Medir o angulo (com o transferidor preso na base da dobradiça).

6-) Soltar o barbante.

7-) Medir a altura que a bola de gude atingiu na folha sulfite.

8-) Medir a distancia que a folha sulfite(com a de carbono por cima) está do ponto de lançamento da bola de gude.

9-) Repetir essa experiência variando a distância que a folha sulfite(com a de carbono por cima) está do ponto de lançamento.

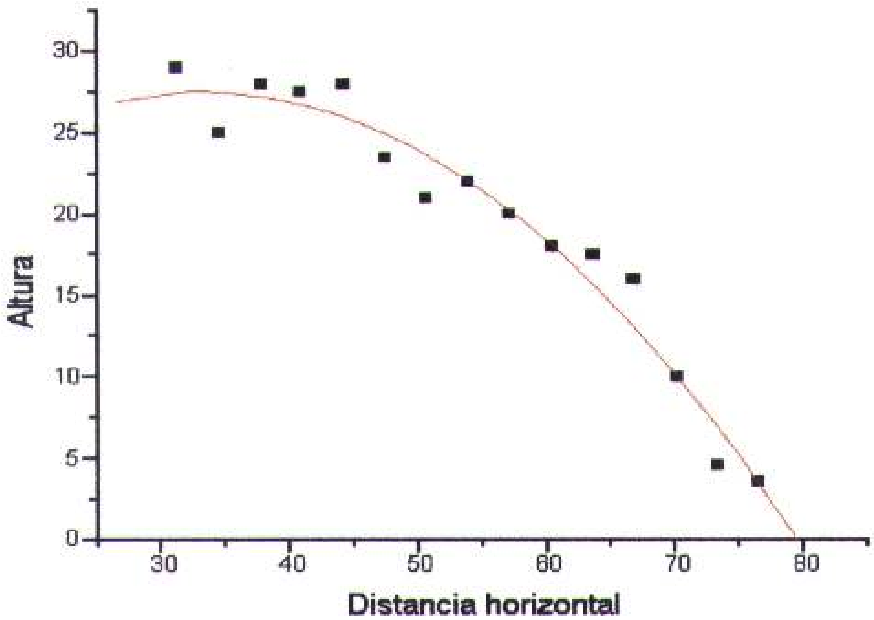
Nessa experiência obtivemos os seguintes dados:

Lançamentos	**Distancia (cm)**	**Altura (cm)**
1	31,2	29
2	34,5	25
3	37,8	28
4	40,8	27,5
5	44,2	28
6	47,4	23,5
7	50,6	21
8	53,9	22
9	57,1	20
10	60,4	18
11	63,6	12,5
12	66,8	16
13	70,1	10
14	73,3	4,6

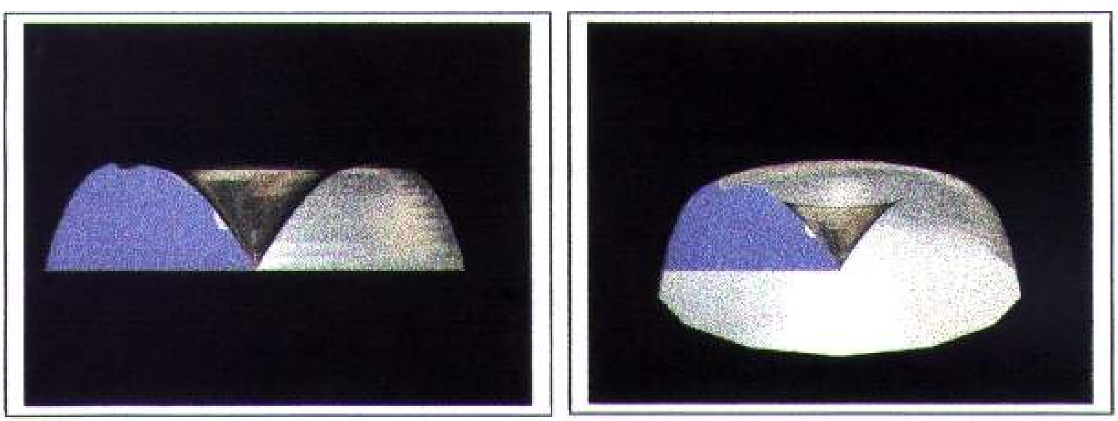
Lançamentos é o numero de lançamentos que foi feito .
Altura é a altura máxima que a bola de gude atingiu na folha sulfite(com a de carbono por cima).
Distancia é a distancia da folha sulfite(com a de carbono por cima) do seu ponto de origem.

Gráfico da medida experimental:

Esse gráfico foi feito no orange, jogando os valores de x e y , foram mostrados os diversos pontos e depois o programa fez um aproximação da parábola.



PARABOLOIDE



Bibliografia:

Calculo com Geometria Analítica
Simmons

Calculo II
Leithold , Louis

Calculo e Geometria Analítica
Swokowski

Pesquisas na rede mundial de computadores

ANEXO 22

Projeto – ÓRBITAS PLANETÁRIAS

Parte do projeto: Conclusões

ÓRBITAS PLANETÁRIAS

6. Conclusão:

Durante todo o projeto foram estudadas as elipses, que estão diretamente relacionadas com o tema central: Órbitas Planetárias. Foram feitos estudos de várias elipses utilizando os conceitos de Johannes Kepler, encontrando os focos de cada elipse. Utilizamos a fórmula da distância entre dois pontos para encontrar a excentricidade da elipse que é a razão entre o foco e o valor da metade do eixo maior de uma elipse. Em relação à parábola e a hipérbole, vimos suas propriedades, sem dedução de fórmulas.

O grupo dividiu-se em duas opiniões à respeito do modo utilizado para o aprendizado: alguns acharam melhor o método de Modelagem Matemática, sugerido pela professora, outros continuam achando que o método de aprendizado "pela lousa", ou seja, com o professor ensinando, é melhor.

Para uma continuação do projeto, poderiam ser estudadas as outras cônicas - as parábolas e as hipérboles - mais profundamente, relacionando-as com os cometas. Um aprofundamento nas Leis de Kepler seria muito interessante, porém não tínhamos condições necessárias, no trabalho, de dar ênfase à essa parte. Faltou-nos alguns conhecimentos para a Segunda Lei.

Gostaríamos de fazer experiências com os planetas, para mostrar para a classe como, por exemplo, animações das Órbitas Planetárias feitas no computador. Também gostaríamos de ter conversado com alguns astrônomos, mas aqui no Brasil isso é muito difícil de se conseguir. Alguns acharam que a biblioteca da Faculdade não forneceu o apoio necessário, precisando conseguir todo o material utilizado fora dela. Em contrapartida, o Laboratório de Informática foi de grande ajuda para todos do grupo, pois a maioria das pesquisas que fizemos na Internet foi realizada a partir dos micros do L.I.

ANEXO 23

Projeto – REFLETORS PARABÓLICOS

Parte do projeto: Alguns resultados e conclusão

Refletores Parabólicos

Índice:

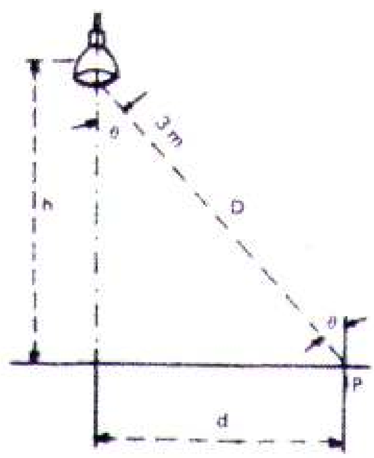
- Parábola 2
- Antenas e Espelhos 3
- Definições 6
  - Luz 6
  - Cor 6
  - Intensidade Luminosa 7
  - Fluxo Luminoso 8
  - Iluminamento 8
  - Quantidade de Luz 8
  - Emitância Luminosa 8
  - Eficiência Luminosa 9
  - Curva de Distribuição Luminosa 9
- Cálculo de Iluminação 9
  - Método dos Lumens 9
  - Determinação do Índice do Local 10
  - Determinação do Coeficiente de Utilização 13
  - Determinação do Fator de Depreciação 13
  - Fluxo Total e Números de Luminárias 13
  - Fator Superficial de Área Infinita 14
  - Feixe Paralelo de Luz 14
  - Fórmulas Empregadas 14
- Dados Experimentais (Estudo da Parábola) 15
- Estudo da Iluminação da Quadra 17
- Conclusão 18
- Agradecimentos 19
- Bibliografia 19

D = distância do centro da fonte de luz ao ponto P em metros;
θ = ângulo entre a vertical à superficie receptora e D.

$$Ep = \frac{I(\theta)\cos^3(\theta)}{h^2} \text{ (na horizontal)}$$

$$Ep = \frac{I(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{d^2} \text{ (na vertical)}$$

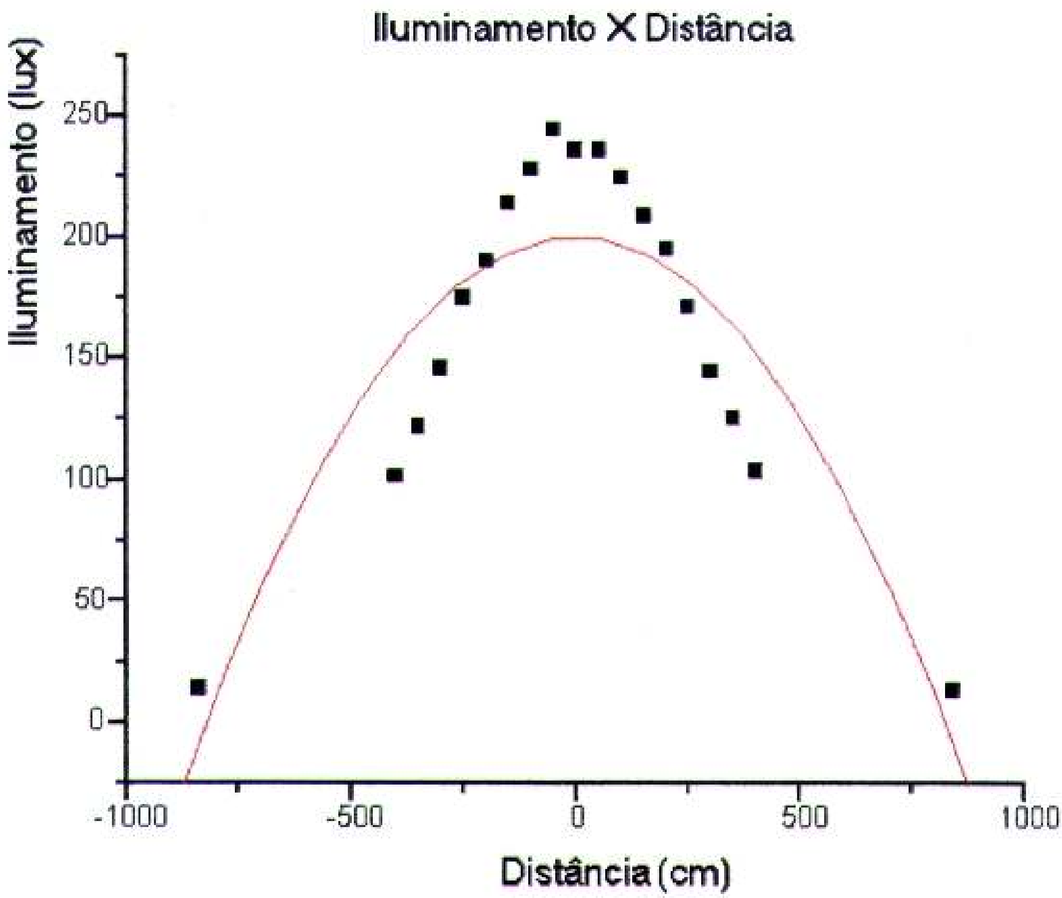
$I(\theta)$ é obtido por meio de curvas em função do ângulo θ.



• DADOS EXPERIMENTAIS (Estudo da Parábola):

Através da fórmula acima, obtivemos a intensidade luminosa de fonte na direção do ponto em candelas.

Distância (cm)	Altura (cm)	Iluminamento(lux)	Angulo (graus)	I(θ) (Candela)
0	800	236	0	15104
50	800	245	3,57	15192,27
100	800	228	7,12	14624,68
150	800	214	10,62	14087,59
200	800	190	14,04	13668,77
250	800	175	17,35	12584,82
300	800	146	20,56	11305,66
350	800	122	23,63	10486,89
400	800	102	26,57	9303,25
840	800	14	46,40	2536,85



Com os dados da tabela obtivemos o gráfico a seguir:

Considerando a origem dos eixos tendo início no vértice da parábola descrita anteriormente, para provar que esta curva é um parábola, usamos as equações descritas no estudo da parábola, assim sendo:

$x^2 = 2py$

Logo:

$$p = \frac{x^2}{2y}$$

p ∴ distância do vértice ao foco ou do vértice à diretriz.

Analisando alguns pontos deste gráfico, conseguimos obter a p:

x	y	P
-750	-175	-1607
-500	-75	-1666
-250	-15	-2083
-200	-10	-2000
200	-10	-2000
250	-15	-2083
500	-75	-1666
750	-175	-1607

Como a parábola considerada esta totalmente abaixo do eixo, seu foco é negativo e, envolvendo todos os erros de medições, achamos um foco médio de –1839 cm, isto é, - 18,39m.

• ESTUDO DA ILUMINAÇÃO DA QUADRA

O primeiro passo no estudo da iluminação de um recinto, é a obtenção da área a ser iluminada, que no caso da quadra estudada é de 960 m^2.

O índice de iluminamento a ser utilizado na quadra em estudo, segundo a tabela de normas NB-57, é de 300 luxes; e o coeficiente de utilização é de 0,45.

Há perdas na luminosidade por falta de manutenção, incluídas no fator de depreciação, neste caso de 0,70.

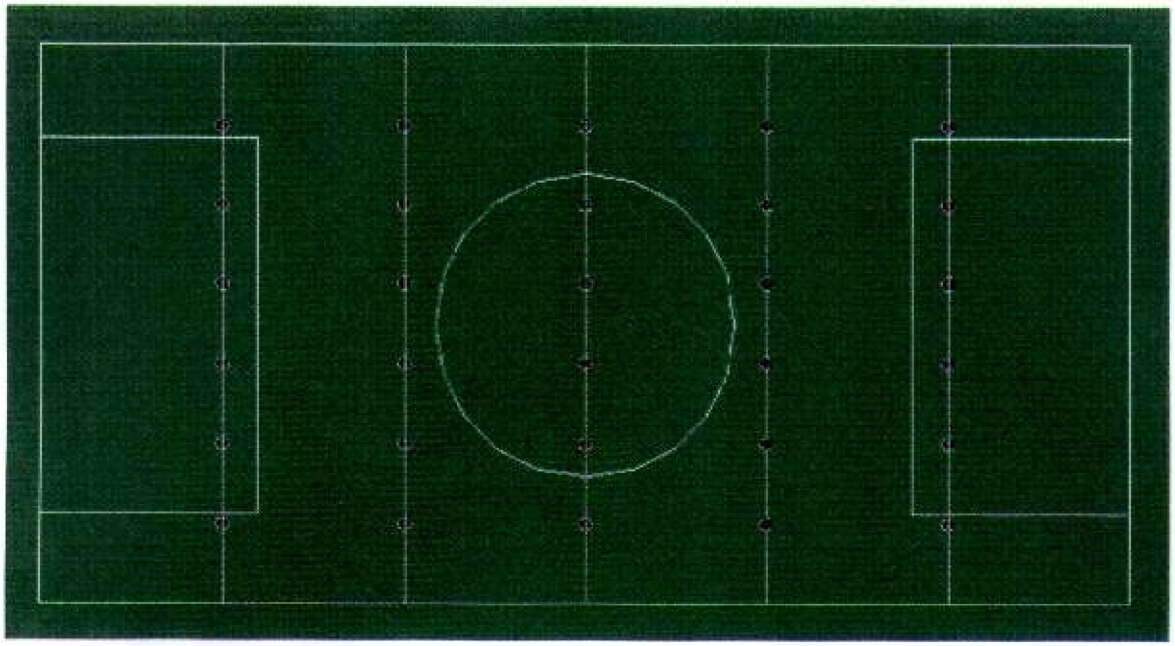
Assim:

$$\phi = \frac{300.960}{0,45.0,7} = 914285,71$$

Para o cálculo de número de luminárias utilizamos esse número e dividimos pelo fluxo da luminária, em lumens.

$$\eta = \frac{914285,71}{30500} \cong 30$$

Na figura a seguir, foi demonstrado esquematicamente a melhor distribuição das luminárias para a iluminação da quadra.



- **Conclusão**

Conceitos Matemáticos Estudados:

- Parábola
- Propriedades de Reflexão e Refração
- Espelhos Esféricos

Opinião a respeito do processo utilizado para tal aprendizado:

No tempo usado para a preparação do trabalho, poderíamos ter estudado mais conceitos matemáticos durante o período de aula, que renderia mais com maior esclarecimento dos alunos, que ao invés de se aprofundarem em estudar apenas um conceito teriam um número maior de informações orientadas para serem estudadas .

À partir do que foi feito, o que mais poderia ser estudado para dar continuidade ao projeto ?

Poderíamos estudar outros tipos de refletores em outros ambientes (Xe: escritórios, escolas, bibliotecas, bancos, auditórios e anfiteatros).

Crítica ao projeto:

Nós marcaríamos uma visita na fábrica, usaríamos instrumentos mais precisos, consultaríamos mais especialistas no assunto