NELSON ANTONIO PIROLA

UM ESTUDO SOBRE A FORMAÇÃO DOS CONCEITOS DE TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO EM ALUNOS DE 1º GRAU

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Educação
1995

NELSON ANTONIO PIROLA

UM ESTUDO SOBRE A FORMAÇÃO DOS CONCEITOS DE TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO EM ALUNOS DE 1º GRAU

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Nelson Antonio Pirola e aprovada pela Comissão Julgadora em 26 de Junho de 1995.
Data: 26/06/95
Assinatura: Márcia Regina F. de Brito

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Educação
1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA FE/UNICAMP

Pirola, Nelson Antonio
P668e Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau / Nelson Antonio Pirola. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Triângulo. 2. Paralelogramo. 3. Conceitos geométricos. 4. Educação matemática. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

NELSON ANTONIO PIROLA

UM ESTUDO SOBRE A FORMAÇÃO DOS CONCEITOS DE TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO EM ALUNOS DE 1º GRAU

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO na Área de Concentração em Psicologia Educacional à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito.

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Educação
1995

Comissão Julgadora:

Maria Zoraide M Costa Soares

Márcia Regina F. de Brito

À Profa. Waldirlene por ter-me despertado, desde muito cedo, o gosto pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa. Agradeço de uma forma especial:

À Orientadora Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito pelas preciosas sugestões dispensadas ao trabalho.

Aos colegas de pós-graduação pela convivência e troca de experiências.

À Sra. Maria Teresa Villalobos Aguayo por ter-me auxiliado na Análise dos Dados Estatísticos da pesquisa.

Ao CNPq pelo financiamento da pesquisa.

À Srta. Linda pelo trabalho de digitação.

"Os conceitos são os instrumentos primários que um indivíduo usa para pensar sobre qualquer coisa". (Klausmeier, 1977, p. 343)

ABSTRACT

"A study on the formation of the triangle and parallelogram concepts in grade students"

The present research aims to study the formation of the triangle and parallelogram concepts in grade students (from the 5^{th} to the 8^{th} grade). Based on Klausmeier's model of concepts formation (1977) and on Van Hiele's model of the geometric thinking (in Matos, 1992), the initial question of the research has been investigated. It is the question that students in more advanced grades are able to identify the triangle and parallelogram concepts in terms of their defining atributes, their examples and non-examples, in a more complete way than students in less advanced grades. 137 students from a public school in the State of São Paulo have been subject to this research. For the data compilation, they have been submitted to the following instruments: a questionnaire, an examination in defining attributes and an examination in examples and non-examples. The results have indicated that 7^{th} grade students have shown a significantly better performance in the proposed tasks than the ones in the other grades. The order of grades, based on the quality of their performance in the tasks, was the following: 7^{th}, 6^{th}, 8^{th} and 5^{th}. It has thus been shown that the grade the student is in is not an appropriate indicator that students in more advanced grades have more complete triangle and parallelogram concepts than the ones in less advanced grades, when these concepts are considered in terms of their defining attributes as well as of examples and non-examples.

RESUMO

Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau

A presente pesquisa tem como objetivo estudar a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau (5ª a 8ª séries). Com base no modelo de formação de conceitos de Klausmeier (1977) e no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (in Matos, 1992) foi investigada a questão inicial da pesquisa de que alunos de séries mais adiantadas conseguem identificar o conceito de triângulo e paralelogramo em termos dos seus atributos definidores, exemplos e não-exemplos, de maneira mais completa que alunos de séries menos adiantadas. Foram sujeitos desta pesquisa 137 alunos de uma escola da rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo que foram submetidos aos seguintes instrumentos para coleta de dados: questionário, prova dos atributos definidores e prova dos exemplos e não-exemplos. Os resultados indicaram que os alunos de 7ª série apresentaram um desempenho significativamente melhor nas tarefas propostas que aqueles das outras séries. A ordenação das séries pela qualidade do desempenho na tarefa foi a seguinte: 7ª, 6ª, 8ª e 5ª. Mostrou-se, desta forma, que a série em que o estudante se encontra não é um indicativo adequado para afirmar que alunos de séries mais adiantadas possuem os conceitos de triângulo e paralelogramo de maneira mais completa que alunos de séries menos adiantadas, quando estes conceitos são considerados em termos de seus atributos definidores bem como de exemplos e não-exemplos.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE TABELAS (Anexo)

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE GRÁFICOS (Anexo)

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

De acordo com Paulus Gerdes (1981), a matemática é percebida por muitos indivíduos como sendo uma disciplina abstrata e totalmente fora da realidade e isso pode ser exemplificado pela seguinte afirmação:

> *"Muitos pensam que a matemática é uma ciência abstrata, muito difícil de aprender, desligada do cotidiano do homem. Há professores que afirmam abertamente nas suas aulas que a matemática é difícil e pensam que é acessível a uma minoria."* (p. 03)

A matemática, realmente, é uma ciência que exige abstrações, ou seja, ela conduz a uma exploração e conservação, na mente, de conceitos sem a necessidade de uma representação concreta. Este fato leva muitos professores a transmitirem os conceitos matemáticos, considerando que só uma minoria é que possui o grau de abstração exigido para se aprender matemática. Procedendo desta forma, "a matemática se torna assim um instrumento de seleção para o fracasso" (Not, 1979, p. 274), através do qual os alunos são rotulados de mais e menos inteligentes.

Para não ocorrer esta distinção entre os alunos quanto ao ensino dos conceitos matemáticos, deve haver uma análise do nível de abstração em que o aluno se encontra, procurando adequar, à realidade dos estudantes, os conceitos que serão ensinados.

O que presenciamos hoje, na maioria das escolas, é um ensino que induz a uma aprendizagem mecânica, pois o professor "transmite" a seus alunos uma matemática desvinculada do cotidiano, sem se preocupar com a aprendizagem de significados e a formação de conceitos que sejam significativos para as crianças.

Cada método de ensino traz, subjacente a ele, uma teoria da aprendizagem e, embora muitos professores se esforcem por adotar métodos dinâmicos e ativos, que favoreçam a ocorrência da aprendizagem significativa, muitas vezes os alunos apresentam mais conceitos memorizados que conceitos adquiridos de forma expressiva. Os métodos usados no ensino tradicional (entendido aqui como aquele que enfatiza mais a memorização que a compreensão) ainda persistem em nossas escolas.

Um tipo de ensino no qual grande parte dos professores enfatizam mais a quantidade do que a qualidade também evidencia que o aluno o qual aprendeu e já formou os conceitos é aquele que obteve êxito nas avaliações, independente da compreensão. Não se pode deixar de ressaltar que esses alunos, cujos professores acreditam que a aprendizagem ocorreu depois de um certo tempo de prática e de repetição, embora não consigam definir de forma significativa o conceito já aprendido, são capazes de repeti-lo da maneira que está nos livros e, também, são capazes de resolver problemas - tipo aprendidos em sala de aula.

O resultado dessa aprendizagem, na qual os alunos memorizam os conceitos e os princípios, não apresentando formação significativa dos conceitos fundamentais da Matemática, vai levá-los a situações de grande dificuldade em séries posteriores, quando necessitam desses conceitos para novas aprendizagens e para a solução de problemas que envolvam os mesmos. Por exemplo, como o aluno solucionará problemas que envolvam frações, se não é capaz de trabalhar com tal conceito de forma significativa?

O ensino de conceitos presentes, na maior parte de nossas escolas, tem como características:

1. **Ensino Técnico:** O professor procura introduzir o conceito a ser aprendido através de definições, regras e fórmulas. É muito comum encontrarmos professores que ensinam área de triângulo, enfatizando apenas a fórmula $A = (B \cdot H)/2$, não havendo uma preocupação em mostrar qual o significado de área e como tal fórmula é obtida.
2. **Ensino de Conceitos Fechados:** Em muitos casos, o conceito é fornecido ao aluno desvinculado de outros, não havendo relação com a realidade do aluno. No caso anterior, quando é dito aos alunos que a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura, devem ser fornecidas, aos estudantes, algumas situações práticas nas quais tal fórmula pode ser usada. O que se constata, atualmente, é uma situação em que só é

exigido do aluno que ele saiba a fórmula e sua aplicação em exercícios artificiais, sendo que o conceito é apresentado ao aluno em sua forma pronta e acabada. Além disso, poucos professores fornecem um conjunto de exemplos e não-exemplos do conceito que está sendo ensinado.

3. Klausmeier (1977) afirma que, utilizando um conjunto de exemplos e não-exemplos do conceito estudado, há uma eliminação de erros de subgeneralização, supergeneralização e má formação do conceito.
4. **Ensino de Conceitos baseado em Livros Didáticos:** Muitos livros didáticos procuram fornecer informações ao aluno baseados em uma teoria bastante reduzida e com muitos exercícios. Muitos professores se apegam de tal forma ao livro didático que nem se preocupam em analisar os conceitos matemáticos que ele apresenta.

Uma análise um pouco mais cautelosa do livro didático mostra que a maior preocupação dos autores desses livros é apresentar os conceitos técnicos, fazendo uso de fórmulas e conceitos fechados com a utilização em problemas artificiais que, realmente, só medem a capacidade, do aluno, de reproduzir fórmulas, não aparecendo uma preocupação com a aprendizagem de significados.

A grande parte dos alunos que aprendem conceitos da forma como se expôs acima, realmente, não conseguirá lembrar e utilizar tais conceitos em séries subseqüentes, gerando dificuldades e até mesmo, como sugere Papert (1985), uma matemafobia.

Utilizando a Geometria, como exemplo pode ser constatado, durante as aulas, que alguns alunos conseguem lembrar-se da figura "losango" e desenhá-la. Entretanto, quando questionados a respeito de suas características, não conseguem defini-la em termos de seus atributos definidores. Este fato pode ser um indicador de que o ensino das figuras planas tem valorizado o aspecto visual e não as características mais relevantes das figuras geométricas.

A aprendizagem não-significativa do conceito favorece a ocorrência da memorização. Assim, muitos alunos decoram definições e até mesmo o processo de como resolver um determinado problema, sem se questionarem a respeito do porquê. Um aluno poderá calcular com sucesso a área de um trapézio pela fórmula $A = (B + b) . h/2$. Mas ao ser questionado acerca do que seja um trapézio, poderá não se recordar de sua definição e não reconhecer os seus atributos definidores. Isso acontece com muitos outros conceitos de matemática que, sendo ensinados de forma a facilitar a ocorrência da memorização, não conseguem despertar o interesse dos alunos, gerando atitudes negativas com relação à essa disciplina.

A questão do ensino de matemática tem despertado o interesse de vários especialistas em Educação Matemática. Eles salientam a necessidade de se definir os conteúdos matemáticos de uma maneira voltada para atender as exigências de uma sociedade em constantes transformações e na qual a escola está inserida.

Em um artigo publicado pela revista Veja (1989), pode ser verificado que especialistas em Educação Matemática abordam os mitos e realidades que norteiam o ensino da mesma na atualidade, mostrando que muitos países como França, Estados Unidos, Japão e outros já "acordaram" no sentido de renovar o ensino de Ciências Exatas onde regras e fórmulas memorizadas dão espaço à aprendizagem significativa e à compreensão dos conceitos. No caso do ensino de matemática no Brasil, existe necessidade de ser desenvolvido um programa educacional em que a formação de conceitos seja valorizada pelo professor, com o objetivo de abranger todos os alunos e não somente aqueles que são rotulados de "mais inteligentes". O artigo publicado pela revista Veja mostra, ainda, que os currículos escolares devem ser elaborados de tal forma que um maior número de alunos possam acompanhar a escola.

Para que isto ocorra, torna-se necessário que seja adotada uma teoria de aprendizagem que subsidie um ensino no qual os alunos sejam avaliados mais pela qualidade do pensamento com o qual conseguem resolver problemas que pela quantidade de exercícios que são capazes de resolver.

O Ensino de Conceitos e a Geometria

O ensino de conceitos em Geometria constitui-se em um grande problema, quando analisado através da ótica do modelo de formação de conceitos proposto por Klausmeier (1977), pelos seguintes motivos:

1. A Geometria é um dos últimos assuntos apresentados na maior parte dos livros didáticos e, por esta razão, muitos professores alegam que não há tempo para trabalhar este conteúdo.
2. A relação entre a Álgebra e a Geometria, raramente, é apresentada aos estudantes. Os conceitos são apresentados apenas com definições, são dados poucos exemplos e os alunos são solicitados a resolverem uma grande quantidade de exercícios que, a rigor, não avaliam a aprendizagem do conceito mas, sim, a habilidade em trabalhar com fórmulas e regras.
3. Há uma desvinculação entre as figuras planas (propriedades, atributos definidores, atributos relevantes e irrelevantes) e as construções executadas com os instrumentos geométricos. Atualmente, na grade curricular das escolas da rede pública do Estado de São Paulo, foi abolida a disciplina Desenho Geométrico. Nesta disciplina, os alunos tinham a oportunidade de realizar construções geométricas mas, atualmente, suas aulas foram incorporadas à disciplina "Matemática". O professor, muitas vezes, sem preparação, ensina Geometria dando ênfase maior aos cálculos, abdicando do uso da régua e do compasso, habilidades essas que devem ser desenvolvidas na escola.
4. Há uma desvinculação entre a Geometria plana e a espacial e um quase desaparecimento da Geometria espacial de posição dos livros didáticos.
5. A Geometria é ensinada isoladamente, sem ligações com outras Ciências, como a Astronomia e a Engenharia, por exemplo. Provavelmente, para os alunos, seria muito mais interessante aplicar os conceitos de razão e proporção em escalas, para compreender exercícios do tipo "calcule x nas proporções". Isto não indica que esse tipo de exercício não tenha validade, apenas é importante que o exercício tenha significado para o aluno.

6. Muitos professores, por várias razões, não se esforçam em preparar atividades que propiciem uma aprendizagem efetiva, apoiando-se única e exclusivamente nos livros didáticos.
7. O número de exemplos e não-exemplos do conceito a ser ensinado é muito reduzido e os "não-exemplos" quase não aparecem nos textos e nas aulas de Geometria. Por exemplo, ao ensinar que os Polígonos são figuras planas, é necessário mencionar que os sólidos geométricos, de acordo com seus atributos, não estão incluídos na classe dos Polígonos.

Pavanello (1993) comenta que o abandono da Geometria em nossas escolas é um fenômeno mundial que pode ser relacionado a questões de cunho educacional. Este abandono é resultante não somente da ausência deste tema nos programas escolares, mas também da redução da importância de ensiná-la em nossas escolas.

O "National Council of Supervisor of Mathematics" em um documento denominado "Basic Mathematical Skills for the 21st Century" discute algumas habilidades que as escolas deverão desenvolver nos estudantes, sendo que uma delas diz respeito à compreensão dos conceitos geométricos, não de uma forma isolada e sem relação com outros conceitos, mas de uma maneira ordenada e que conduza o aluno à resolução adequada e significativa de problemas.

Hoje, existe uma grande preocupação com o ensino de Matemática em geral e, particularmente, com o ensino da Geometria, mas, infelizmente, poucas mudanças aparecem, permanecendo a ênfase em um ensino que avalia a capacidade de memória e não a compreensão, quando o ideal seria a atenção a estes dois aspectos: Ênfase na aquisição dos significados dos conceitos matemáticos e uma análise mais aprofundada nas maneiras de reter esses conceitos.

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO DO CONCEITO DE TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO

A Proposta Curricular para o ensino da Matemática de 1° grau (PCM) (1991), elaborada pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas do Estado de São

Paulo (CENP), determina o ensino da Geometria em todas as séries do primeiro grau de modo que o aluno deva ser levado a:

> *"estudar Geometria tendo como meta primordialmente a aprendizagem da lógica, da organização do conhecimento, partindo-se de pontos, retas e planos para somente ao final do percurso tratar dos objetos tridimensionais"* (P.C.M., p. 11).

Esta colocação valoriza a necessidade de o professor retomar, a cada ano escolar, as características e propriedades do conceito ampliando-os, e, neste sentido, a proposta apresenta várias atividades que o professor pode utilizar em sala de aula para tratar um determinado conceito.

É importante salientar que o ensino da Geometria deve ser um trabalho contínuo em todas as séries, integrado com o ensino dos números e das medidas, pois conforme é mostrado na Proposta Curricular de Matemática:

> *"Ao longo das oito séries os temas são tratados de modo simultâneo, sempre que possível, tentando-se uma abordagem que ponha em destaque as idéias fundamentais envolvidas e não os assuntos em si mesmos"* (p. 19).

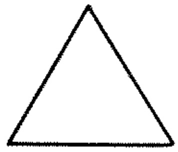
Partindo dessas idéias contidas na Proposta Curricular de Matemática, surgiu o interesse em realizar uma pesquisa na área de Formação de Conceitos. Tal idéia foi gerada a partir de um estudo exploratório, realizado em uma escola da Rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo que seguia a Proposta Curricular de Matemática, de acordo com informação da administração da escola.

O estudo foi realizado em uma classe de quinta série, tendo como sujeitos trinta e cinco alunos e o objetivo do trabalho foi investigar o conceito que os alunos possuíam a respeito de triângulo, uma vez que já haviam terminado o estudo sobre figuras planas.

O procedimento para obtenção dos dados consistiu em mostrar aos alunos algumas figuras planas presentes nos blocos lógicos, solicitando a eles que denominassem e definissem verbalmente cada figura. A primeira figura mostrada foi um quadrado e, para esta figura, a definição mais freqüente foi "é um quadrado, porque possui todos os lados iguais".

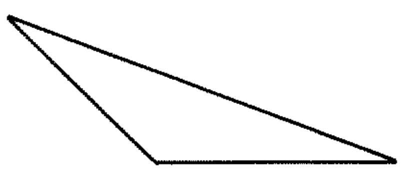
A outra figura mostrada foi um triângulo, como mostra a figura 1. A definição mais freqüente foi "é um triângulo, porque possui todos os lados iguais".

Figura 1



Vários triângulos foram desenhados na lousa e grande parte dos alunos identificavam como triângulo somente aquele que tinha o aspecto da figura 1. Triângulos como os da figura 2 não eram facilmente identificados pelos alunos.

Figura 2



A partir da análise dos dados obtidos, foi verificado que mesmo os alunos que tiveram algum contato com triângulo desde as séries iniciais não são capazes de discriminar que duas ou mais formas de triângulos pertencem à mesma classe (no caso, à classe dos triângulos).

Foi constatado que o conteúdo referente às figuras planas, realizado anteriormente à essa investigação, foi transmitido na forma pronta e acabada com definições e exercícios que apresentavam triângulos parecidos com o eqüilátero. O estudo de áreas, por exemplo, não foi trabalhado de acordo com a PCM, e não foram valorizadas atividades para a compreensão de áreas. Foi fornecida somente a figura, um exemplo, e as fórmulas prontas e acabadas.

A partir da motivação despertada por este estudo, tentou-se analisar as respostas de alunos de outras séries em relação ao conceito de triângulo.

Em uma classe de 8ª série, com 33 alunos e em uma classe de 1° colegial, com 32 alunos foi solicitado aos estudantes que respondessem em uma folha "O que é um triângulo?" e foi solicitado também, que desenhassem o mesmo. As duas séries pertenciam a uma escola da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo.

As respostas dos alunos de 8ª série foram analisadas e categorizadas, apresentando a seguinte distribuição:

Tabela 1

Distribuição dos sujeitos (8ª série) de acordo com a definição de triângulo

DEFINIÇÃO	FREQÜÊNCIA	%
Figura que possui todos os lados iguais	06	18,18
Figura que possui 3 lados	19	57,58
Figura que possui um ângulo de 90	02	6,06
Figura que possui três partes	02	6,06
Retângulo que possui três partes	02	6,06
Figura geométrica	01	3,03
Figura que possui todos os ângulos iguais	01	3,03
TOTAL	33	100

Aproximadamente 90% dos alunos desenharam como exemplo de triângulo a figura abaixo:

Figura 3

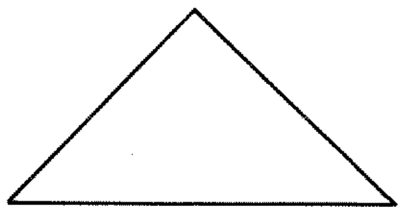


Tabela 2

Distribuição dos sujeitos (1° Colegial) de acordo com a definição dada a triângulo

DEFINIÇÕES	FREQÜÊNCIA	%
Figura que possui 3 lados iguais	18	56,25
Figura que possui 3 lados iguais e diferentes	03	9,38
Área que tem 3 lados iguais	01	3,12
Figura que possui 3 lados e 3 ângulos	04	12,5
Figura geométrica que possui 3 lados	02	6,25
Figura geométrica formada por 3 linhas	01	3,12
Desenho que tem dois lados iguais	01	3,12
Triângulo é muito usado na matemática	01	3,12
Ângulo de 3 lados	01	3,12
TOTAL	32	100

É interessante ressaltar que, quando solicitados a desenhar o triângulo, os alunos de 1° colegial apresentaram o seguinte resultado:

- 90,6% dos alunos desenharam a figura 4.
- 6,2% não fizeram o desenho.
- 3,2% desenharam a figura 5.

Figura 4

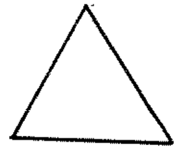
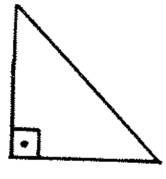


Figura 5



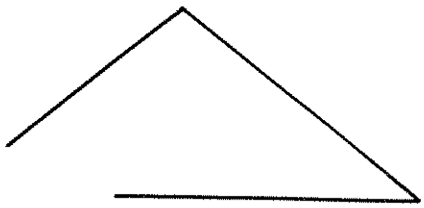
Pelas respostas dos alunos, podemos observar que, ao definirem o triângulo, muitos se utilizam de conceitos outros que não enquadram na definição do conceito solicitado. Alguns alunos confundiram triângulo com retângulo e isso pode ser atribuído ao fato de o aluno já ter ouvido falar em triângulo retângulo e no momento de se expressar ter, através de um processo de generalização, confundido os dois conceitos.

É interessante que a resposta "Triângulo é uma figura de 3 lados iguais", foi mais freqüente entre os alunos do primeiro colegial que entre os alunos de oitava série, embora fosse esperado que os alunos de séries mais adiantadas fossem capazes de definir triângulo melhor que os de séries inferiores.

Percebemos, também, que ao responderem que triângulo "É um ângulo de 3 lados" ou "É uma área que tem 3 lados iguais", não há compreensão por parte dos alunos do que seja um triângulo nem do que seja área e ângulo (não existe ângulo de 3 lados).

Não sabemos se alunos que responderam que triângulo "É uma figura de três lados" reconhecem a figura abaixo como sendo triângulo.

Figura 6



Esse tipo de exploração não foi realizada neste estudo. Também não foram explorados outros atributos definidores de triângulo como o atributo de ser figura plana e fechada.

Foi realizado também um estudo exploratório sobre os conceitos de quadriláteros com o objetivo de analisar as respostas de alguns alunos a respeito dos quadriláteros mais conhecidos: quadrado, retângulo, losango e paralelogramo. Os estudantes foram solicitados a escreverem em uma folha o que eles entendiam por essas figuras.

Os sujeitos eram alunos de uma escola da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo de 1° colegial (30 estudantes), 3° colegial (30 estudantes) e 7ª série (30 estudantes) e a eles foi perguntado o significado da figura e solicitado que fizessem o desenho da mesma.

Foram feitas as seguintes perguntas:

– O que é um quadrado?

– O que é um retângulo?

– O que é um losango?

– O que é um paralelogramo?

As respostas foram analisadas e categorizadas segundo os atributos definidores dessas figuras. As perguntas foram feitas aos alunos por professores de Matemática que receberam instruções no sentido de não permitirem comunicação entre os alunos e nem consultas a livros e a cadernos.

A tabela abaixo mostra as respostas mais freqüentes dos alunos de 1° colegial, 3° colegial e 7ª série, a respeito do conceito de quadrado.

Tabela 3

Freqüência de respostas dadas por alunos de 3 diferentes séries ao conceito de quadrado

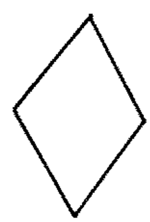
DEFINIÇÕES	SÉRIE					
	PRIMEIRO COLEGIAL		TERCEIRO COLEGIAL		SÉTIMA SÉRIE	
	N°	%	N°	%	N°	%
Figura geométrica com 4 lados iguais	15	50	24	80	17	56,6
Figura que possui 4 partes iguais	6	20	4	13,3	7	23,3
Ângulo que possui 4 lados iguais	3	10	-	-	-	-
Figura com 4 lados iguais e 4 ângulos retos	2	6,6	2	6,7	-	-
Quadriláteros com todos os lados iguais	2	6,6	-	-	-	-
Figura com 4 lados	2	6,6	-	-	-	-
4 retas emendadas	-	-	-	-	2	6,7
Fórmula com 4 lados iguais	-	-	-	-	1	3,3
Extremidade com 4 lados iguais	-	-	-	-	3	10
TOTAL	*30*	*100*	*30*	*100*	*30*	*100*

Pela tabela acima, podemos notar que são poucos os alunos que mencionam ângulo reto na definição de quadrado. É preciso salientar que, na tabela, foram colocadas somente algumas características mais freqüentes do conceito de quadrado.

Dentre as respostas obtidas, encontramos respostas do tipo: "Reta que possui 4 lados iguais", "Área que possui 4 (quatro) partes" e "Corpo que possui 4 (quatro) lados iguais".

Os alunos de colegial em nenhum momento citaram a palavra polígono para definir quadrado e somente os alunos do 1° colegial conseguiram relacionar o quadrado com a classe dos quadriláteros. Não foi investigado, nesse estudo, se os alunos consideravam todas as figuras de 4 lados como sendo exemplos de quadrado, como a figura abaixo:

Figura 7



A tabela abaixo mostra as definições mais freqüentes de retângulo.

Tabela 4

Freqüência de respostas dadas por alunos de 3 diferentes séries ao conceito de retângulo

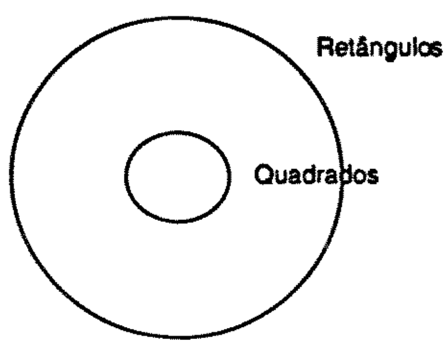
DEFINIÇÕES	SÉRIE					
	PRIMEIRO COLEGIAL		TERCEIRO COLEGIAL		SÉTIMA SÉRIE	
	N°	%	N°	%	N°	%
Figura que possui 2 lados iguais e 2 lados diferentes	23	76,6	25	83,3	17	56,7
Figuras de 3 partes	2	6,7	-	-	1	3,3
Figura que possui 4 partes diferentes	-	-	-	-	5	16,7
Figura de 3 lados iguais	-	-	-	-	2	6,6
Ângulo reto de 3 lados	-	-	-	-	1	3,3
Não responderam	3	10	-	-	4	13,3
Desenho que possui 2 lados iguais	-	-	1	3,3	-	-
Ângulo de 4 lados	-	-	1	3,3	-	-
Possui lados iguais e proporcionais	-	-	1	3,3	-	-
Figura que possui o comprimento maior que a altura	-	-	2	6,6	-	-
Possui lados diferentes	2	6,7	-	-	-	-
TOTAL	30	100	30	100	30	100

Pelas respostas dadas pelos alunos, pode ser percebido que somente um exemplo de retângulo foi reconhecido por eles e a figura é aquela que possui a base maior que a altura, como mostrado abaixo:

Figura 8

Para a maioria dos alunos das três séries, o quadrado parece não estar incluído na classe dos retângulos, ou seja, a inclusão de classes parece não fazer parte do conceito de retângulo e os alunos não demostraram conhecer o princípio "Todo quadrado é um retângulo".

Figura 9



Além disso, nenhum aluno relacionou ângulo reto com retângulo, que é o principal atributo do retângulo, pois:

Retângulo é um quadrilátero que possui 4 ângulos retos.

Alguns alunos chegaram a confundir retângulo com triângulo e isso, talvez, possa ser atribuído à interferência do conceito particular de triângulo retângulo sobre o conceito mais geral de triângulo e/ou sobre o conceito específico de retângulo.

A tabela 5 mostra as definições mais freqüentes que os alunos atribuíram a losango.

Tabela 5

Freqüência de respostas dadas por alunos de 3 diferentes séries a respeito de losango

DEFINIÇÕES	SÉRIE					
	PRIMEIRO COLEGIAL		TERCEIRO COLEGIAL		SÉTIMA SÉRIE	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Figura que possui 6 lados iguais	-	-	6	20	-	-
Retas que se encontram formando 45°	-	-	1	3,3	-	-
Possuem 4 lados iguais	4	13,3	15	50	4	13,3
Figura de 4 lados	2	6,6	1	3,3	-	-
Tem os lados voltados para ponta	-	-	1	3,3	-	-
Formam ângulos de 90°	-	-	1	3,3	-	-
Não responderam	16	53,4	5	16,6	17	56,7
Dois triângulos emendados	4	13,3	-	-	-	-
Figura formada por 4 paralelas	1	3,3	-	-	-	-
Figura ângulos diferentes	1	3,3	-	-	-	-
Figura com 5 lados	2	6,6	-	-	-	-
Tem laods diferentes	-	-	-	-	9	30
TOTAL	30	100	30	100	30	100

Com relação ao losango, pode ser constatado que muitos alunos não escreveram o que ele significa. Os professores que aplicaram as perguntas nas três classes revelaram que ao responder a pergunta "O que é um losango?", os alunos diziam frases como: "A senhora ainda não explicou isso", "Eu não sei o que é losango" e "Eu nunca vi isso".

Muitos alunos confundiram o losango com pentágonos e hexágonos, o que mostra o desconhecimento dessa figura por muitos deles. Além disso, os estudantes do 3° colegial tiveram um desempenho melhor nessa questão, pois citaram um atributo muito importante do losango.

Losango é um quadrilátero que possui 4 lados iguais.

Provavelmente, nesse caso, não há inclusão de classes, como: "Todo quadrado é um losango", pois nenhum aluno desenhou um quadrado como exemplo dessa figura. É interessante notar que muitos alunos não se lembram de que, na bandeira do Brasil, há um losango amarelo.

Quando é perguntado aos alunos "O que é um paralelogramo?", pode ser verificado também o desconhecimento dessa figura, pois não aparecem relações com outras figuras como quadrado, retângulo e losango.

A tabela abaixo mostra a freqüência e o tipo das respostas dos alunos sobre o paralelogramo.

Tabela 6

Freqüência de respostas dadas por alunos de 3 diferentes séries sobre paralelogramo

DEFINIÇÕES	SÉRIE					
	PRIMEIRO COLEGIAL		TERCEIRO COLEGIAL		SÉTIMA SÉRIE	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Não responderam	17	56,7	14	46,7	21	70
Figura com 2 retas inclinadas	-	-	5	16,6	-	-
Conjunto de 4 retas paralelas	-	-	-	-	1	3,3
Quatro lados proporcionais	-	-	1	3,3	-	-
Lados paralelos	7	23,3	5	16,6	-	-
Dois lados iguais	2	6,6	5	16,6	3	10
Três lados diferentes	-	-	-	-	2	6,6
Lados diferentes	1	3,3	-	-	3	10
Figura com vários lados	1	3,3	-	-	-	-
Figura com lados infinitos	1	3,3	-	-	-	-
Quadrado deitado	1	3,3	-	-	-	-
TOTAL	30	100	30	100	30	100

Em relação ao paralelogramo, sua definição é:

Paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

Poucos sujeitos (7 do 1° colegial e 5 do 3° colegial) conseguiram relacionar o atributo "lados paralelos" ao conceito de paralelogramo. Um fato que merece ser assinalado é que quase a metade dos estudantes do 3° colegial (46,7%) não souberam definir paralelogramo.

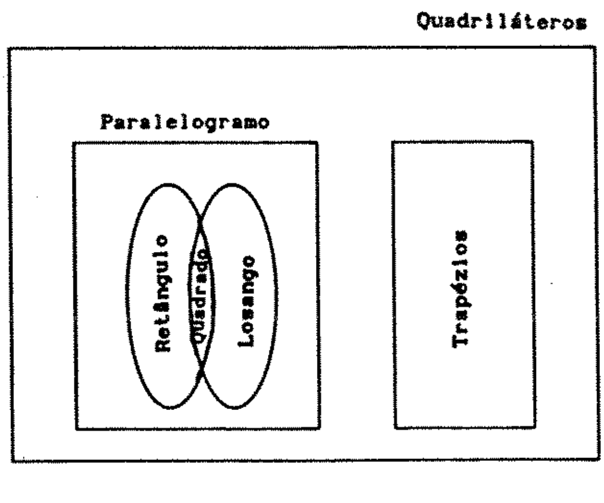
Será que durante todo o período de escolaridade esses estudantes não tiveram contato com essa classe de figuras? Será que nunca resolveram problemas de área que envolvem as características dessas figuras?

A análise dos dados obtidos no estudo exploratório realizado veio confirmar que os conceitos não estavam sendo significativamente aprendidos por estes alunos e o estudo da Geometria está se processando sem valorizar esses conceitos, seus atributos definidores, bem como o uso de exemplos e não-exemplos dos conceitos.

Concluímos também que, nesta amostra, muitos alunos chegaram ao colegial sem terem o conhecimento dos atributos definidores das figuras básicas da Geometria.

As figuras geométricas são ensinadas separadamente umas das outras e não existe relação entre os seus atributos definidores, o que pode levar os alunos a não reconhecerem, por exemplo, um quadrado como retângulo e paralelogramo, pois esses não são capazes de incluirem o conceito na sua classe. Pelas respostas dos alunos, pode-se inferir que a classificação das figuras geométricas não foi aprendida. A inclusão das figuras geométricas poderia ser melhor observada na figura abaixo:

Figura 10



Através dessa figura, podemos verificar, com maior facilidade, que o quadrado é um retângulo, losango e paralelogramo e estão inseridos na classe dos quadriláteros. Assim, quadrilátero seria a classe mais geral e abrangente.

DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E TIPO DE PESQUISA

Baseado neste estudo exploratório do conceito de triângulo e alguns quadriláteros, onde era solicitado dos alunos somente a definição e o desenho da figura, um aspecto ficou em evidência: Alunos de séries mais adiantadas parecem ter um desempenho semelhante ou inferior aos alunos de séries menos avançadas.

Como esse estudo mostrou somente um aspecto do conceito (atributos definidores presentes nas respostas), buscou-se ampliar o conhecimento a respeito desse fenômeno. Assim, este trabalho foi formulado com o objetivo de analisar o conceito de triângulo e paralelogramo de maneira mais ampla, em termos dos atributos definidores, e da presença de exemplos e não-exemplos. Procurou-se, também, investigar o conceito de paralelogramo, tendo em vista que, no estudo preliminar, esta figura teve um alto nível de sujeitos, cujas respostas evidenciaram o desconhecimento do conceito. No estudo exploratório 56,7% dos alunos de 1° colegial, 46,7% de alunos de 3° colegial e 70% de alunos de 7ª série não souberam definir o que é um paralelogramo.

A presente pesquisa tentará responder à pergunta:

– *Alunos de séries mais adiantadas do 1° grau têm um desempenho melhor que alunos de* séries menos adiantadas, em relação ao conceito de triângulo e paralelogramo, no que diz respeito a seus atributos definidores, exemplos e não exemplos? Em outras palavras, o trabalho foi levado a efeito, buscando investigar se existem diferenças significativas entre os alunos de 1° grau (5ª à 8ª séries) no que se refere aos conceitos de triângulo e paralelogramo, quando são utilizados, como critério, os atributos definidores e os exemplos e não exemplos?

Assim, o problema de pesquisa pode ser resumido da seguinte forma:

Alunos de séries mais adiantadas conseguem definir o conceito de triângulo e paralelogramo em termos de seus atributos definidores, exemplos e não-exemplo de forma mais completa que alunos de séries menos adiantadas?

A presente pesquisa, que será descrita no capítulo 5, tem caráter descritivo, ou seja, trata-se de uma pesquisa não experimental em que as relações entre os fenômenos são estudadas sem intervenção experimental. De acordo com Kerlinger, estes estudos são interessantes porque:

> *"Tomamos pessoas e grupos 'como eles são' e estudamos as supostas influências das variáveis em outras variáveis, as relações entre as variáveis (Kerlinger, 1979, p. 5).*

A presente pesquisa foi levada a efeito, buscando analisar e comparar as respostas dos alunos com o objetivo de buscar evidências que permitam apontar diferenças entre as séries, com relação ao conceito de triângulo e paralelogramo, analisados em termos de atributos definidores, exemplos e não-exemplos.

CAPÍTULO II

A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E O CONCEITO MATEMÁTICO

O MODELO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E O MODELO DA FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE KLAUSMEIER

Os Van Hiele, educadores holandeses, elaboraram uma teoria que mostra como o pensamento geométrico se desenvolve através de níveis e como a mudança de um nível para outro se dá através de algumas etapas de aprendizagem. De forma semelhante, Herbert J. Klausmeier, usando uma abordagem cognitivista, elaborou, a partir da década de 50, uma teoria em que os conceitos são formados de acordo com determinados níveis de desenvolvimento.

O presente trabalho é fundamentado teoricamente nestes autores e a construção do material utilizado bem como a análise dos resultados foram fortemente baseadas em estudos realizados por estes pesquisadores.

O MODELO VAN HIELE DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Pierre Marie Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele Geldof, educadores holandeses, elaboraram um modelo do pensamento geométrico a partir dos seus trabalhos de doutoramento completados na universidade de Utrech, em 1957, sob a orientação de Hans Freudenthal. A descrição usada no presente trabalho, a respeito daquele elaborado por Van Hiele, é baseada no trabalho apresentado por Matos (1992) e Hoffer (1981).

As pesquisas dos Van Hiele se processaram num contexto em que a Matemática Moderna não havia começado, mas já eram discutidos os novos métodos e mudanças no campo da Educação Matemática.

Pierre investigava o "insight" geométrico e Dina procurava estudar uma abordagem da didática da Geometria para alunos de 12 e 13 anos em que a manipulação das figuras geométricas, o uso do geoplano e desenhos efetuados pelos alunos, com régua e compasso, eram ressaltados. É interessante notar que o conceito de "insight" retirado da psicologia da Gestalt, originada na Alemanha, refere-se a uma re-estruturação dos elementos disponíveis na estrutura cognitiva, permitindo a formação de uma configuração significativa.

> *"O insight é, para Pierre van Hiele, um mecanismo chave que permite aos estudantes visualizar diferentes campos ('estruturas' na sua terminologia) o qual lhes permite construir conceitos mais complexos".* (Matos, 1992, p. 96).

Em síntese, os Van Hiele estavam interessados em elaborar um trabalho enfatizando a didática da Matemática, especialmente no que se diz respeito ao insight em sala de aula, mas o embasamento psicológico aparece apenas em alguns de seus trabalhos. A definição de estrutura, por exemplo, não é dada por Pierre, que apenas "explica algumas de suas propriedades, descreve espécies de estruturas e dá alguns exemplos" (Matos, 1992, p. 95).

Em seu trabalho, Pierre Van Hiele classifica as estruturas nos seguintes tipos:

- Mundo 1 - Estruturas do mundo em que vivemos.
- Mundo 2 - Estruturas da nossa mente. Exemplo, as estruturas visuais.
- Mundo 3 - Estruturas do mundo do conhecimento comum.

Os estudos de Pierre Van Hiele foram utilizados por Matos (1992) para mostrar a relação entre o modelo proposto por este autor e os modelos cognitivos idealizados. De acordo com a explicação desse autor português, temos que:

> *"O desenvolvimento mental progride à medida em que as estruturas dos alunos se transformam gradualmente (trans-estruturação - transtructuring) ou se substitui uma estrutura por outra (re-estruturação - restructuring). A trans-estruturação ocorre, por*

exemplo, quando, na teoria de Van Hiele, as estruturas originais são gradualmente transformadas em estruturas abstratas". (Matos, 1992, p. 96)

Baseados nesta teoria em que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças das estruturas cognitivas dos alunos, os Van Hiele elaboraram um modelo de aprendizagem de Geometria que consta de 5 níveis, sendo que a passagem de um nível para o seguinte deve ocorrer mediante seqüência de fases de ensino.

a) **Nível 0 - Visualização:** Neste nível, o espaço é simplesmente observado. O aluno consegue fazer classificações, mas não reconhece que quadrados e retângulos possuem ângulos retos ou que os lados opostos são paralelos. Dada uma figura, o aluno consegue reproduzi-la num geoplano ou papel. Em síntese, as figuras são apenas observadas pela sua aparência.

b) **Nível 1 - Análise:** Neste nível, os alunos começam a discernir as características do objeto através das suas propriedades. Inicia-se uma análise dos conceitos geométricos através de generalizações. Os alunos podem estabelecer relações entre objetos, mas não são capazes de explicá-las. As propriedades são usadas para conceituar classes de formas.

c) **Nível 2 - Dedução Informal:** Neste estágio, os alunos conseguem estabelecer inter-relações com as propriedades da figura. A inclusão de classes é entendida e as definições são expressivas. Neste estágio, o aluno consegue compreender, através de propriedades similares, a inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos. Neste nível, o professor deverá mostrar ao aluno as possibilidades de resolução de exercícios de maneiras diferentes.

   O uso de argumentos dedutivos, através da proposta de alguns passos, são ressaltados nos trabalhos de Van Hiele e como exemplo é destacado um exercício que mostra o uso desses argumentos.

Figura 11

C é o centro do círculo

Explique porque:

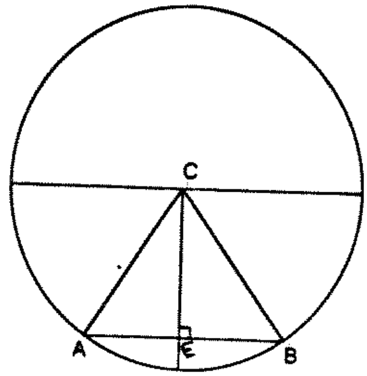
a) $\overline{AC} = \overline{BC}$

b) $\angle C\hat{A}B = \angle C\hat{B}A$

c) $A\hat{C}E = B\hat{C}E$

d) $\overline{AE} = \overline{EB}$

(Extraído de Learning and Teaching, K12, NCTM - 1987, yearbook, p. 11)



d) **Nível 3 - Dedução:** Neste estágio, os termos e as funções de axiomas, teoremas, postulados, provas e definições são compeendidos. As condições necessárias e suficientes são compeendidas. O aluno poderá compreender provas de teoremas e não somente memorizá-los, podendo desenvolver outros modos de provar o mesmo teorema.

e) **Nível 4 - Rigor:** A Geometria é vista no abstrato. O aluno pode trabalhar com outras Geometrias, como as não-euclidianas.

Pierre Van Hiele atentou pouco a este último nível, interessando-se apenas pelos primeiros quatro níveis. Para ele, a maioria dos cursos de Geometria das escolas de 2° grau são ensinados no nível 3 (dedução). O início dos trabalhos de Van Hiele foi marcado pela busca de caminhos, para se desenvolver a compreensão dos alunos. Segundo ele, um aluno que compreendeu um determinado conceito é capaz de aplicar os seus conhecimentos na resolução de problemas entendendo o raciocíonio utilizado. Van Hiele, em seus estudos, estava interessado na aprendizagem de Geometria dos seus alunos e, por isso, formulou algumas etapas de aprendizagem com o objetivo de elevar o nível do pensamento geométrico do aprendiz, e tais etapas são as seguintes: informação, orientação dirigida, explicitação, orientação livre e integração.

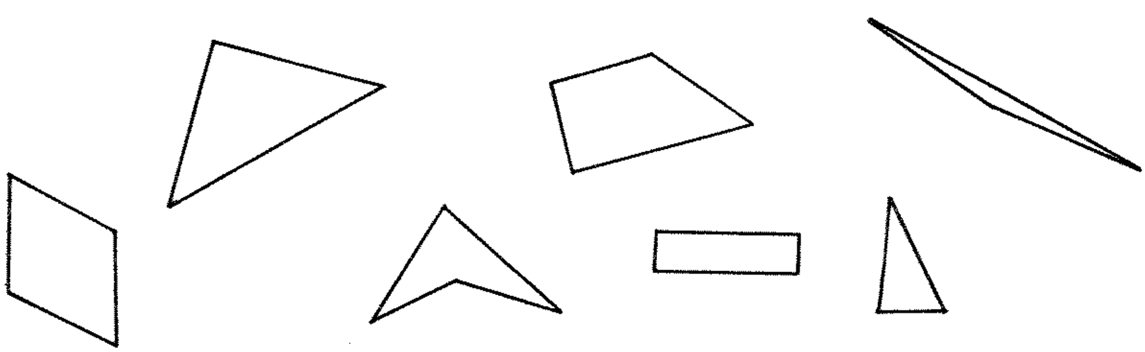
Na fase de **informação,** há um diálogo entre o aluno e o professor, sendo que o segundo fornece os objetivos do estudo em questão, observando como os alunos interpretam algumas palavras do assunto a ser estudado. Essa fase pode ser vista como a de preparação para estudos posteriores.

No caso do ensino de algumas figuras geométricas, como triângulo e paralelogramo, esta primeira fase consiste em apresentar aos alunos os objetivos deste estudo em Geometria, observando como os alunos interpretam algumas palavras utilizadas na definição dessas figuras como plana, fechada, ângulo e outras.

Nesta fase, o professor utiliza tais palavras em situações que sejam familiares aos seus alunos, como por exemplo: pedir para que seus alunos identifiquem essas palavras com objetos que se encontrem na sala de aula.

Na **orientação dirigida**, o professor é o orientador de algumas atividades que devem objetivar a pesquisa por parte dos alunos. Uma das atividades que o professor poderá apresentar no estudo de triângulo e paralelogramo é fornecer um conjunto de figuras, para que os alunos as classifiquem segundo as suas características, como por exemplo:

Figura 12
Conjunto de figuras apresentadas para classificação



Na **explicitação**, os alunos fazem suas observações claramente a respeito das atividades desenvolvidas na fase anterior, ou seja, como e por que procederam de uma determinada maneira na resolução das atividades apresentadas. É importante ressaltar que estas observações devem ser feitas pelos alunos e não serem oferecidas pelo professor.

> *"Esta fase implica tornar as estruturas observadas na fase anterior explícita através do uso da linguagem. As discussões, na turma, permitirão que os estudantes aprendam a linguagem necessária para exprimir o que descobriram. O professor introduzirá toda linguagem técnica".* (Matos, 1992, p. 99)

Na fase **orientação livre**, os alunos são colocados em situações-problemas que podem ser solucionadas de diversas maneiras. Os alunos devem ter a liberdade de explicar como procederam à resolução das tarefas.

> *"O professor dará aos estudantes trabalhos gerais e esses terão a oportunidade de conhecer o tópico de todas as direções".* (Matos, 1992, p. 99)

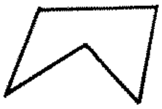
Na fase de **integração**, há uma revisão de tudo o que foi realizado durante as fases anteriores e o professor auxilia neste processo, tomando cuidado para não interferir com idéias novas ou discordantes. Ao fim desta quinta fase, é esperado que os alunos atinjam um novo nível do pensamento.

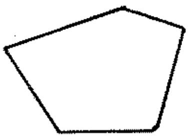
Hoffer (1981), tomando as cinco habilidades básicas, necessárias para a aprendizagem Matemática, relacionou-as com os níveis de Van Hiele, evidenciando a compreensão da Geometria. Estas habilidades são: habilidade visual verbal, habilidade de desenho, habilidade lógica e habilidade de aplicação.

A **Habilidade Visual** diz respeito ao reconhecimento e observação das figuras geométricas. Algumas atividades que permitem verificar essa habilidade podem ser do tipo seguinte:

I - Qual destas figuras é um paralelogramo?

a) 

b) 

c) 

d) 

Esta habilidade visual é correlata ao Nível 0 de Van Hiele que refere-se à visualização.

II - Quantos eixos diferentes de simetria possui um retângulo?

Este refere-se ao Nível 1 - Análise.

Na **Habilidade Verbal**, os alunos aprendem a utilizar a linguagem oral e a escrita, para descrever características, propriedades e relações das figuras geométricas.

Algumas atividades carcterísticas:

I) Descrever algumas propriedades do retângulo. (Nível 1 - Análise)

II) Explique por que não existe retângulo na Geometria não-euclidiana. (Nível 4 - Rigor)

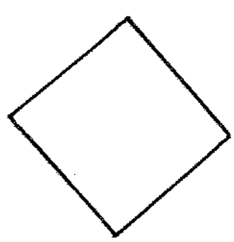
A **Habilidade de Desenho** é importante, porque o desenho é uma forma de comunicação necessária em Geometria e é através dele que podemos observar relações e propriedades que poderão fornecer orientação para o entendimento de algumas situações de resolução de problemas.

> *"O curso de Geometria fornece oportunidades para estudantes expressarem suas idéias em desenhos e diagramas". "Fazendo construções com régua e compasso, os estudantes compreendem as propriedades das figuras".* (Hoffer, 1981, p. 12)

Algumas atividades características que podem ser relacionadas à esta habilidade seriam: a) construir um retângulo dada a medida de um lado e a de uma diagonal. (Nível 1 - Análise) e, b) dado um círculo, é possível, usando somente régua e compasso, construir um retângulo de área igual à área do círculo? (Nível 4 - Rigor)

A **Habilidade Lógica** refere-se ao fato de a Geometria auxiliar os estudantes nas atividades de análise, questionando a respeito da validade ou invalidade de argumentos, no contexto das figuras geométricas e nos problemas da vida diária. Alguns problemas seriam: a) Todo retângulo é um quadrado? (Nível 2 - Dedução) e, b) Se um quadrado é rotacionado, como mostra a figura abaixo, esse continua sendo um quadrado? (Nível 0 - Visualização).

Figura 13



Já a **Habilidade de Aplicação** diz respeito às aplicações práticas da Geometria, como arquitetura, astronomia, engenharia e outras. Algumas atividades características seriam: a) Descrever as formas retangulares presentes na sala de aula. (Nível 0 - Visualização), b) Qual é a área do maior retângulo que pode ser inscrito num triângulo dado? (Nível 2 - Dedução Informal).

Com o objetivo de se estudar os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, analisando a forma como os estudantes aprendem, psicólogos soviéticos, simpatizaram com as idéias daquele, utilizando-as para explicar questões como: "Por que crianças que se saem tão bem em outras matérias do currículo escolar, ficam perdidas no estudo da Geometria?"

Para esta questão, alguns pesquisadores soviéticos afirmam que isso se deve ao fato de a Geometria ser ensinada muito tarde nas escolas com uma ênfase maior nos aspectos quantitativos. Segundo eles, a familiarização dos alunos com os objetos geométricos começa com aspectos qualitativos como forma e relações, para que, em seguida, possam ser, gradualmente, desenvolvidos os aspectos quantitativos como as medidas. Esses estudos levaram os soviéticos a produzir uma linha contínua e única de desenvolvimento geométrico para os alunos, sempre levando em consideração os níveis do pensamento geométrico propostos por Van Hiele.

Os modelos de Van Hiele também foram estudados por pesquisadores ocidentais como Burger, Hoffer, Mitchel e Shaughnessy. Estes autores desenvolveram, de 1979 a 1982, o conhecido Projeto Oregon, cujo objetivo era investigar até que ponto os níveis de Van Hiele serviam como modelo para avaliar a compreensão do aluno em Geometria. Os pesquisadores utilizavam entrevistas gravadas, onde cada aluno entrevistado tinha a oportunidade de explicar o raciocínio utilizado na resolução de uma determinada tarefa.

Uma dessas atividades consistia em pedir para que o aluno desenhasse vários tipos de figuras de quatro lados com a instrução de que cada figura deveria se diferenciar da outra, de alguma forma. O pesquisador, através dos desenhos, podia identificar em quais atributos o aluno variava. No final dessa tarefa, esse deveria explicar (ou demonstrar) por que os lados opostos de um paralelogramo eram iguais em comprimento. Essa tarefa era uma das que exigiam um nível mais elevado de raciocínio. A mesma atividade realizada com quadriláteros foi feita com triângulos e, através dessas, é possível saber se os alunos incluem quadrados na classe de retângulos e paralelogramos.

"Qual é a minha forma?", é outra atividade que analisa os atributos das figuras geométricas. Nesta atividade, o pesquisador diz várias características da figura e os estudantes descobrem qual é a mesma. Como por exemplo mostramos as pistas listadas abaixo, necessárias para que o aluno "descubra" que se refere ao paralelogramo:

1 - É uma figura fechada formada por quatro segmentos de reta.
2 - Tem dois lados maiores e dois lados menores.
3 - Os dois lados maiores têm a mesma medida.
4 - Os dois lados menores têm a mesma medida.
5 - Um dos ângulos é maior que um dos outros ângulos.
6 - Dois dos ângulos possuem a mesma medida.
7 - Os outros dois ângulos possuem a mesma medida.
8 - Os dois lados maiores são paralelos.
9 - Os dois lados menores são paralelos.

Esse tipo de atividade foi apresentada no Projeto Oregon e mostra resultados interessantes. Na primeira pista, que era "figura que tem 4 lados", muitos alunos responderam "É um quadrado", sendo que para figura de quatro lados com um ângulo reto, a resposta era retângulo.

Essas atividades permitem identificar o nível do pensamento proposto por Van Hiele e, ao mesmo tempo, detectar o conceito que os alunos possuem a respeito dessas duas classes de figuras (triângulos e quadriláteros). Também permite, de maneira semelhante, identificar o nível de formação de conceito de acordo com a classificação de Klausmeier (concreto, identidade, classificatório e formal). É interessante observar que, nas atividades desenvolvidas no projeto Oregon, os entrevistadores tinham a oportunidade de questionar os estudantes através de suas respostas e, assim, de aprofundar o conhecimento a respeito da formação do conceito pelo aluno.

O MODELO DE FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE KLAUSMEIER

Klausmeier realizou várias pesquisas (ver revisão bibliográfica) sobre a formação e ensino de conceitos. Grande parte de seus estudos estiveram direcionados ao conceito de triângulo eqüilátero, tendo sido realizados em sala de aula. Esse autor trabalhou, também, com o método instrucional com o objetivo de facilitar a aprendizagem dos conceitos (Klausmeier, 1974). Os aspectos desenvolvimentais de suas pesquisas foram baseadas em cortes transversais e estudos longitudinais. A partir das pesquisas sobre a formação de conceitos, Klausmeier (1977) definiu um conceito como:

> *"Informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas - objetos, eventos ou processos - que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de, ou relacionada com outras coisas ou classes de coisas".* (p. 312)

Pela citação acima, observamos que os conceitos são definidos pelas suas propriedades (atributos definidores) que os diferenciam ou relacionam a outros conceitos. Alguns autores, como Gagné (1974), que não apresentam os conceitos como informações ordenadas, argumentam que os indivíduos capazes de formar conceitos são aqueles que possuem os requisitos necessários para a discriminação. Esse autor, assim como Klausmeier, defende a idéia de que os conceitos devem servir, para identificar e estabelecer relações entre objetos.

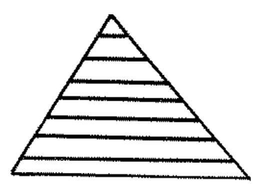
Uma diferenciação importante feita por Klausmeier é a referente à existência de dois tipos de conceitos: conceitos como constructo mental e conceitos como entidade pública.

O conceito como constructo mental é idiossincrático e capacita o indivíduo, não somente a identificar exemplos de não-exemplos, mas também a usar o conceito e se constitui em um instrumento importante para o processo do pensamento. É o conceito ou informação pessoal que o indivíduo dispõe sobre um objeto.

O conceito como entidade pública é o conceito aceito pela sociedade, encontrado em dicionários e enciclopédias. Se for tomado o conceito de triângulo como exemplo, o que é pensado e verbalizado a partir da experiência do sujeito com essa figura, e aquilo que é dito a respeito, quando se pede que a definamos, é o nosso constructo mental. A definição que aparece no dicionário é o conceito como entidade pública. Os conceitos como entidade pública são definidos por palavras (símbolos que nomeiam os conceitos) que são aceitos por grupos de pessoas que se comunicam através de uma mesma língua. É importante assinalar que uma das funções da escola é relacionar os constructos mentais com os conceitos como entidades públicas, levando os alunos a emitir definições de conceitos que são cada vez mais próximas àquelas propostas pelos estudiosos da área.

Em suas pesquisas a respeito de triângulos, Klausmeier deu grande importância à variedade de exemplos e não-exemplos e atributos definidores na aprendizagem de conceitos. Ao ser fornecido um conjunto de exemplos e não-exemplos aos alunos, era levado em consideração os atributos relevantes e irrelevantes do conceito. Entre os atributos irrelevantes do conceito são encontrados as hachuras, bordas espessas, orientação na página e tamanho. Assim, a figura abaixo representa um triângulo com hachuras (atributo irrelevante para se definir o triângulo).

Figura 14



Um conceito pode estar relacionado a outros dois ou mais conceitos, sendo esta relação chamada de **Princípio**. Um princípio é um constructo mental, na medida em que os indivíduos atribuem significados ou interpretações a ele. É também uma entidade pública, pois há interpretações e significados compartilhados e aceitos pela sociedade. Segundo Klausmeier (1977), grande parte do conhecimento que orienta o comportamento do indivíduo é formado por afirmações de relações. O autor coloca como relações mais importantes as seguintes (Klausmeier, 1977):

Causa e efeito:

A AIDS é causada pelo vírus HIV.

Probalidade:

A probabilidade de obtermos o número 2 no lançamento de um dado não viciado é 1/6.

Correlação:

"A incidência de câncer no pulmão está aumentando nas mulheres: o número de mulheres que fumam está aumentando".

A correlação não implica em uma relação de causa e efeito. No exemplo anterior, não podemos afirmar que todas as mulheres que fumam irão contrair o câncer.

As afirmações de relação também são encontradas em Geometria através dos axiomas e, dentre eles, podemos exemplificar com os seguintes:

- Quadrados têm formas iguais.
- *Por dois pontos distintos passa uma única reta.*

> *"Os princípios, quando compreendidos, permitem que o indivíduo interprete muitas situações e fenômenos específicos".* (Klausmeier, 1977, p. 315)

Os atributos definidores do conceito podem ser classificados em:

- Intrínseco: Refere-se às propriedades invariantes do conceito, aquelas que são observadas. Exemplo: todos os atributos do triângulo.
- Funcional: Refere-se à aplicação (para que serve?). No caso do triângulo, uma de suas aplicações é reforçar portões, já que é uma figura rígida.
- Relacional: Diz respeito à relação entre os aspectos invariantes do conceito. Exemplo: O lado oposto ao ângulo reto em um triângulo retângulo é a hipotenusa.

Klausmeier enumera oito atributos do conceito, em que os seis primeiros também definem um princípio: aprendibilidade, perceptividade de exemplos, utilidade, validade, generalidade, importância, estrutura e número de exemplos.

a) **Aprendibilidade:** Alguns conceitos são aprendidos com mais facilidade que outros. Aqueles que podem ser ensinados com exemplos concretos, por exemplo, as figuras geométricas são aprendidas mais facilmente que aquelas mais abstratas, como por exemplo, Binômio de Newton.

A geometria dá oportunidade ao professor para ensinar o conceito concretamente, de modo que os alunos podem perceber as propriedades e características do conceito a ser aprendido.

b) **Perceptibilidade de Exemplos:** Como estão presentes no mundo, os exemplos de geometria são percebidos com maior facilidade que os exemplos de Álgebra. Quando ensinamos o conceito de triângulos e quadriláteros, os alunos poderão, ao seu redor, apontar exemplos de objetos onde essas duas classes de figuras aparecem. Exemplos como o desenvolvimento de um produto notável não é percebido com facilidade pelos alunos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

c) **Utilidade:** Quando ensinamos um determinado conceito, a utilidade deve ser mostrada, na medida do possível, aos alunos através de situações que levem os estudantes a perceberem que o conceito que estão estudando tem aplicações práticas que os auxiliam a compreender a realidade em que vivem.

No ensino de geometria, o professor não dá oportunidade aos alunos de aplicarem os conceitos aprendidos em situações-problemas que lhes sejam familiares. O que não deve ocorrer é fornecer uma lista de exercícios mecânicos, para que os alunos apliquem uma determinada fórmula conhecida.

d) **Validade:** Os conceitos, principalmente de matemática, são válidos, quando os especialistas da área concordarem com a sua definição. O conceito de triângulo como sendo uma figura plana, fechada, com três lados formados por segmentos de reta e três ângulos é válido, pois esta é a definição utilizada pelos especialistas não só do Brasil, como também pelos do mundo todo.

e) **Generalidade:** Com a finalidade de possibilitar uma visão global do conceito e suas classes, é interessante trabalhar a partir de taxonomias onde iniciamos com um conceito mais geral em direção aos particulares, e em que podemos identificar as relações supra-ordenadas, coordenadas e subordinadas do conceito em relação a outros.

Para Klausmeier (1977):

> *"Muitos conceitos são dispostos hierarquicamente em sistemas taxonômicos. Dentro da mesma taxonomia, quanto mais alto for o lugar que o conceito ocupar, mais geral ele será em termos do número de subclasses ou de conceitos subordinados que ele inclui".* (p. 318)

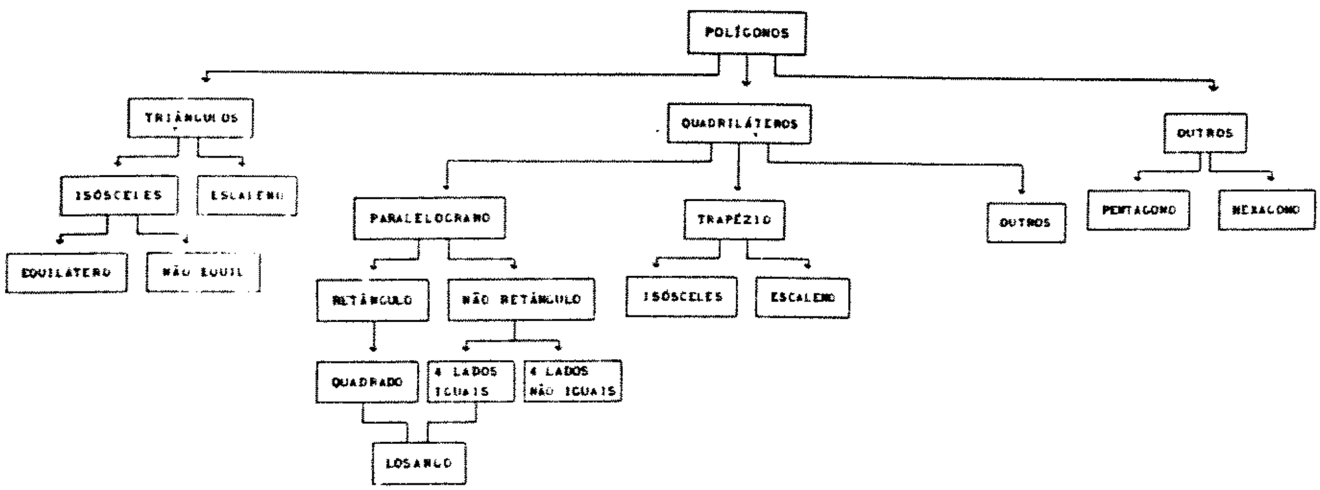
Um conceito não deve ser fornecido ao aluno desvinculado de outros conceitos que estão na mesma classe. Ao se ensinar o conceito de triângulos e sua classificação, este deve ser relacionado com outras figuras que pertencem à mesma classe, que é a dos Polígonos (conceito mais geral).

Ao elaborar a análise de uma taxonomia de triângulos e quadriláteros, o ponto de partida é identificar a classe geral das figuras geométricas planas, ou seja, a dos polígonos.

A figura 15 mostra um exemplo de uma taxonomia de polígonos que facilita o ensino de triângulos e quadriláteros. É importante salientar que o ponto de partida é o conceito mais geral e abrangente e vai do geral para o particular. No caso dos triângulos, verifica-se que o triângulo eqüilátero pertence à classe dos isósceles, porque possui 3 lados iguais. Logo, o triângulo eqüilátero também possui 2 lados iguais. Desse ramo de triângulos, deduz-se que todo triângulo eqüilátero é isósceles, mas nem todo triângulo isósceles é eqüilátero. O mesmo é percebido com relação aos quadriláteros, pois todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

Quando colocamos o conceito na taxonomia, esse é colocado do geral para o particular. Isso permite, ao aluno, incluir ou excluir figuras em uma determinada classe, levando em consideração suas características (atributos definidores).

Figura 15
Taxonomia de Polígonos



No caso do ensino de conceitos, esta taxonomia pode ser ampliada de acordo com os que o professor for trabalhar, pois podem-se acrescentar os ângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos na classe dos triângulos. A partir deles, o professor poderá conduzir seus alunos ao princípio de que todo triângulo equilátero é acutângulo.

f) **Importância:** os conceitos, em geral, devem ser ensinados com o propósito de facilitar a formação de outros conceitos. Para ensinar o conceito de triângulo retângulo, é necessário e importante que os alunos tenham formado os conceitos de retas perpendiculares e ângulo reto.

g) **Estrutura:** A estrutura de um conceito está relacionada com os atributos definidores através de relações afirmativas, conjuntivas, disjuntivo-inclusivas, condicionais e bicondicionais.

- Afirmativas: Todos os quadrados são retângulos.
- Conjuntivas: Todos os quadriláteros que possuem quatro lados iguais e quatro ângulos retos são quadrados.
- Disjuntivo-Inclusiva: Quadriláteros ou Triângulos são exemplos de polígonos.
- Condicional: Um quadrilátero deve ter ângulo reto para ser um retângulo.
- Bicondicional: Um losango é um quadrado se, e apenas se, tiver quatro ângulos retos.

Esse tipo de estrutura do conceito foi proposto, inicialmente, por Bourne (1970), (apud Klausmeier, 1977) com o nome de regras conceituais.

h) **Numerosidade de Exemplos:** Para que um determinado conceito seja aprendido, é necessário apresentar muitos exemplos e solicitar que os próprios alunos apresentem mais exemplos.

A esse respeito, Derville (1976) afirma que:

> *"As pessoas não raro formam conceitos incorretos sobre uma classe de coisas, porque apenas conhecem um único membro, ou poucos membros dessa classe".* (p. 86)

O referido autor mostra como a numerosidade de exemplos é importante para a formação de um conceito. Para isso conta a história do pai que queria ensinar ao seu filho de apenas quatro anos de idade, o conceito de perpendicular. Com um lápis, colocou-o em ângulo reto com a mesa dizendo "Isso é uma perpendicular". A seguir, pediu para que seu filhinho repetisse a palavra várias vezes.

Durante alguns dias, o pai colocava o lápis, formando um ângulo reto com a mesa e o filho respondia "perpendicular".

Numa certa ocasião, durante um jantar com seus amigos, o pai, para demonstrar que seu filho já sabia o que era uma perpendicular, colocou uma faca formando um ângulo reto com a mesa e perguntava "O que é isto?". O filho respondia "Uma faca". Depois de várias tentativas frustradas, o pai colocou um lápis, fazendo um ângulo reto com a mesa. Desta vez o menininho respondeu "É uma perpendicular".

Essa pequena história mostra que, para se ensinar um conceito, é necessário que se forneçam vários exemplos, para não correr o risco de o aluno aprender a definição sem entendê-la. Derville cita algumas regras, para se ensinar um conceito. Uma dessas regras diz respeito aos exemplos práticos.

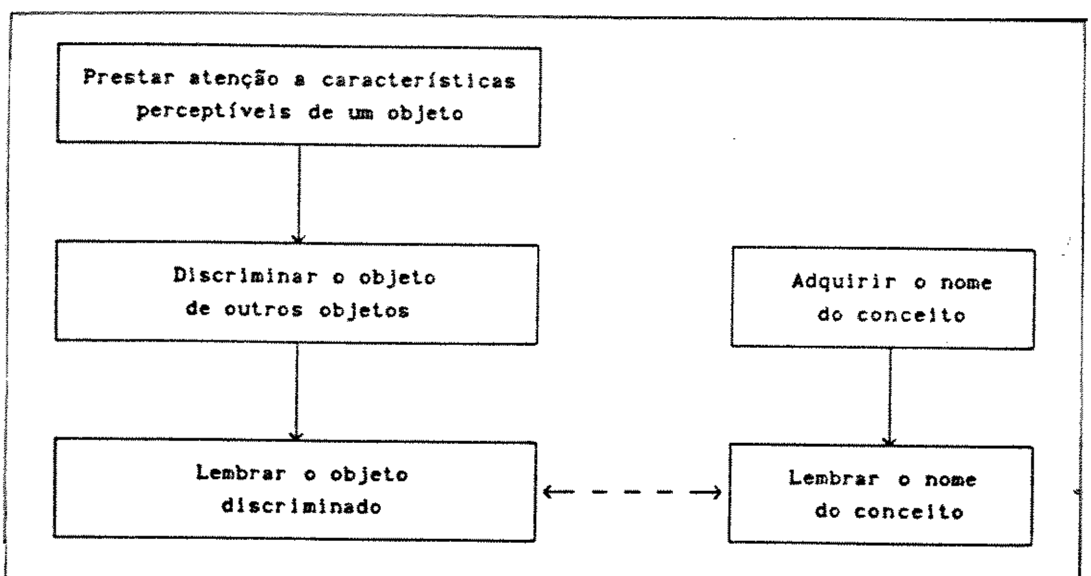
> *"Ir do concreto ao abstrato. Em vez de explicar o sentido de uma palavra por meio de outra palavra, como fazemos ao ensinar uma definição, devemos dar exemplos práticos que ilustrem o conceito. Quanto mais exemplos as crianças tiverem, mais probabilidades terão de formar um conceito correto".* (Derville 1976, p. 88)

Após a apresentação de um número suficiente de exemplos, é importante fornecer aos alunos não exemplos do conceito estudado, para que eles possam detectar as características (atributos) que diferenciam exemplos de não-exemplos.

Segundo Klausmeier (1977), os conceitos podem ser formados em quatro níveis:

a) **Concreto** - Um conceito é formado no nível concreto, quando o indivíduo, prestando atenção às características perceptíveis de um objeto, consegue reconhecê-lo em outras ocasiões.

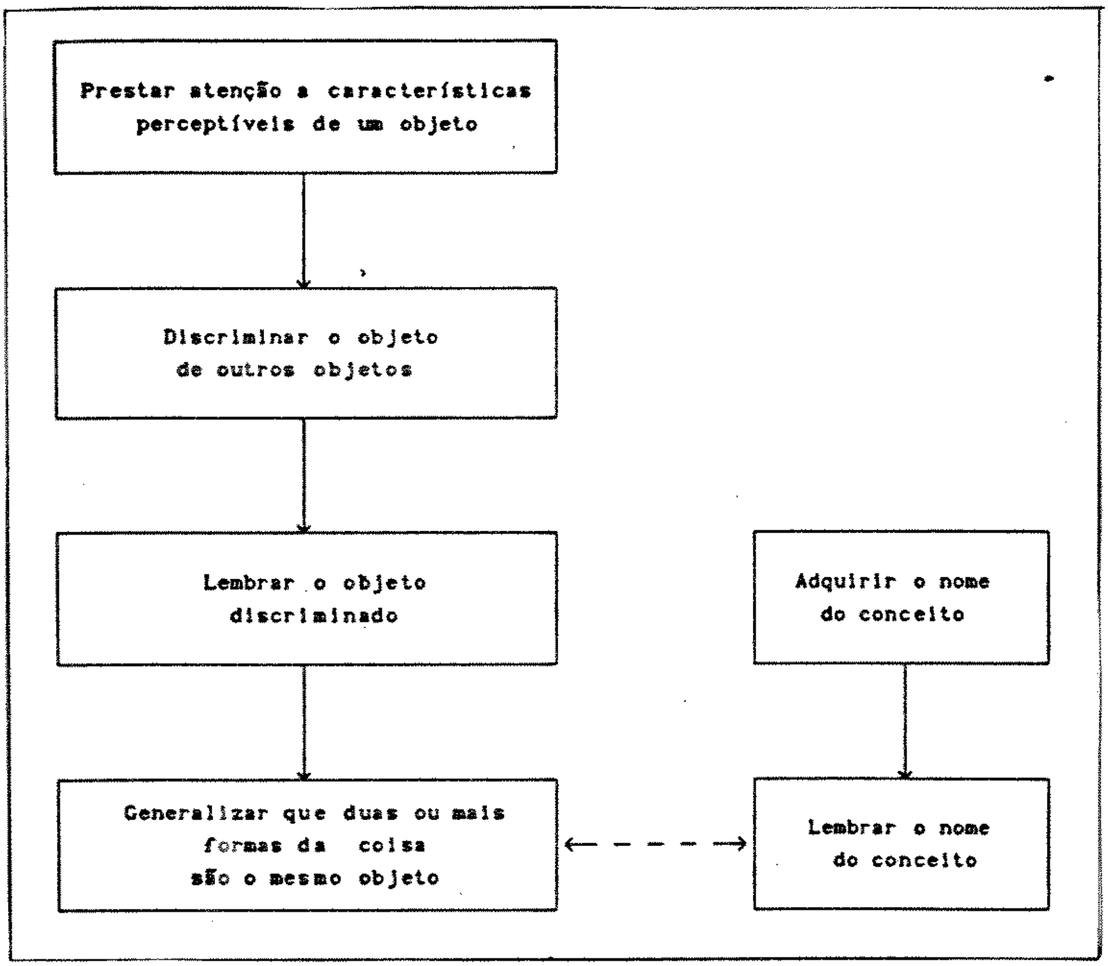
Figura 16
Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível concreto (Klausmeier, 1977, p. 52).



b) Identidade - Um conceito no nível de identidade desenvolve-se depois que o indivíduo já o formou no nível concreto, acrescentando que o mesmo deve generalizar que duas ou mais formas da coisa são o mesmo objeto, ou seja, variando as posições de um *determinado objeto, o indivíduo deverá generalizar que corresponde ao mesmo objeto.*

Figura 17

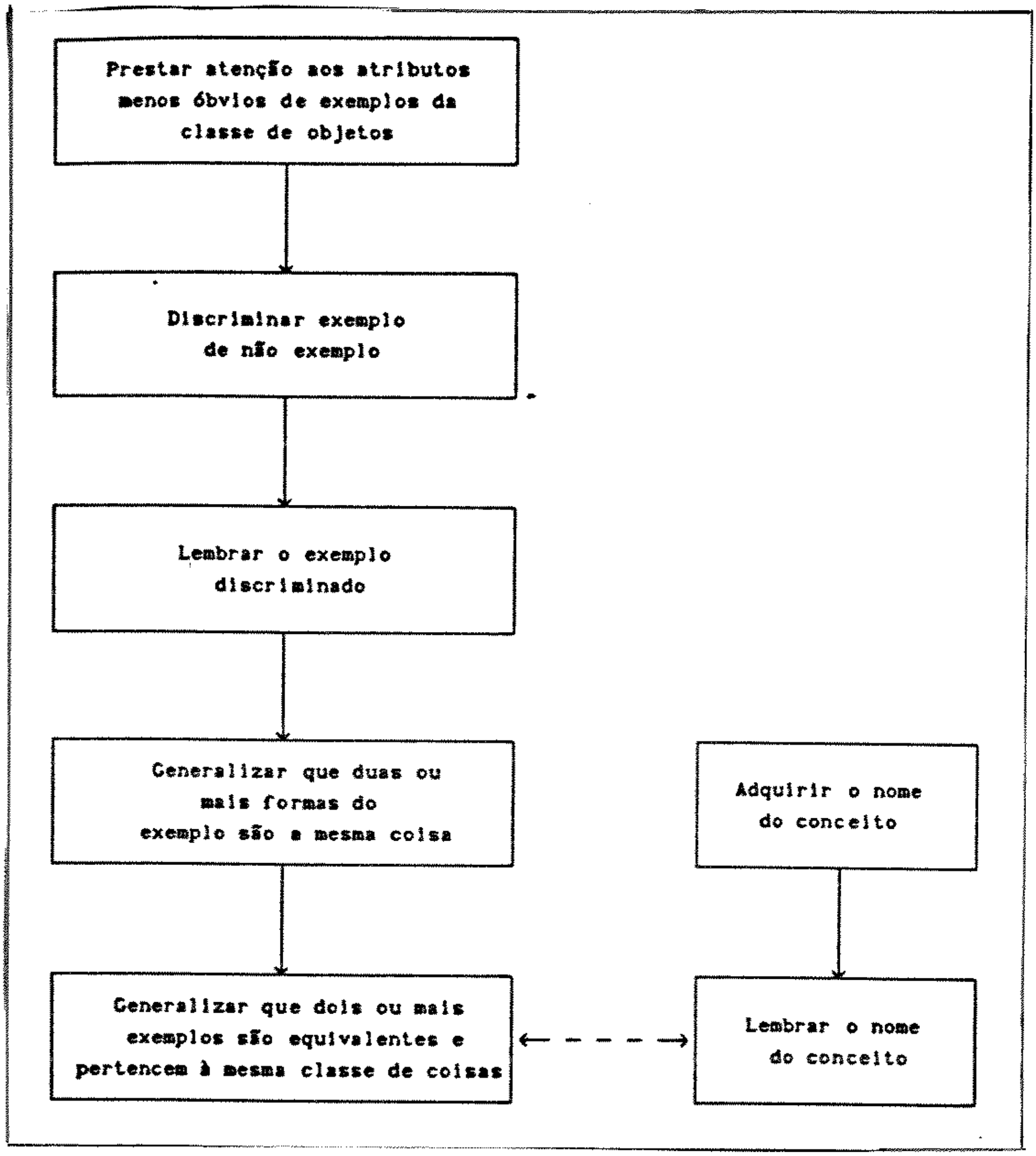
Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível de identidade (Klausmeier, 1977, p. 54).



c) **Classificatório** - A condição para que o aluno forme um conceito no nível classificatório, é que ele deve, antes, apresentar as operações ao nível identidade, acrescentando que o mesmo deve generalizar que dois ou mais exemplos são equivalentes e pertencem à mesma classe de coisas.

Figura 18

Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível classificatório (Klausmeier, 1977, p. 55)



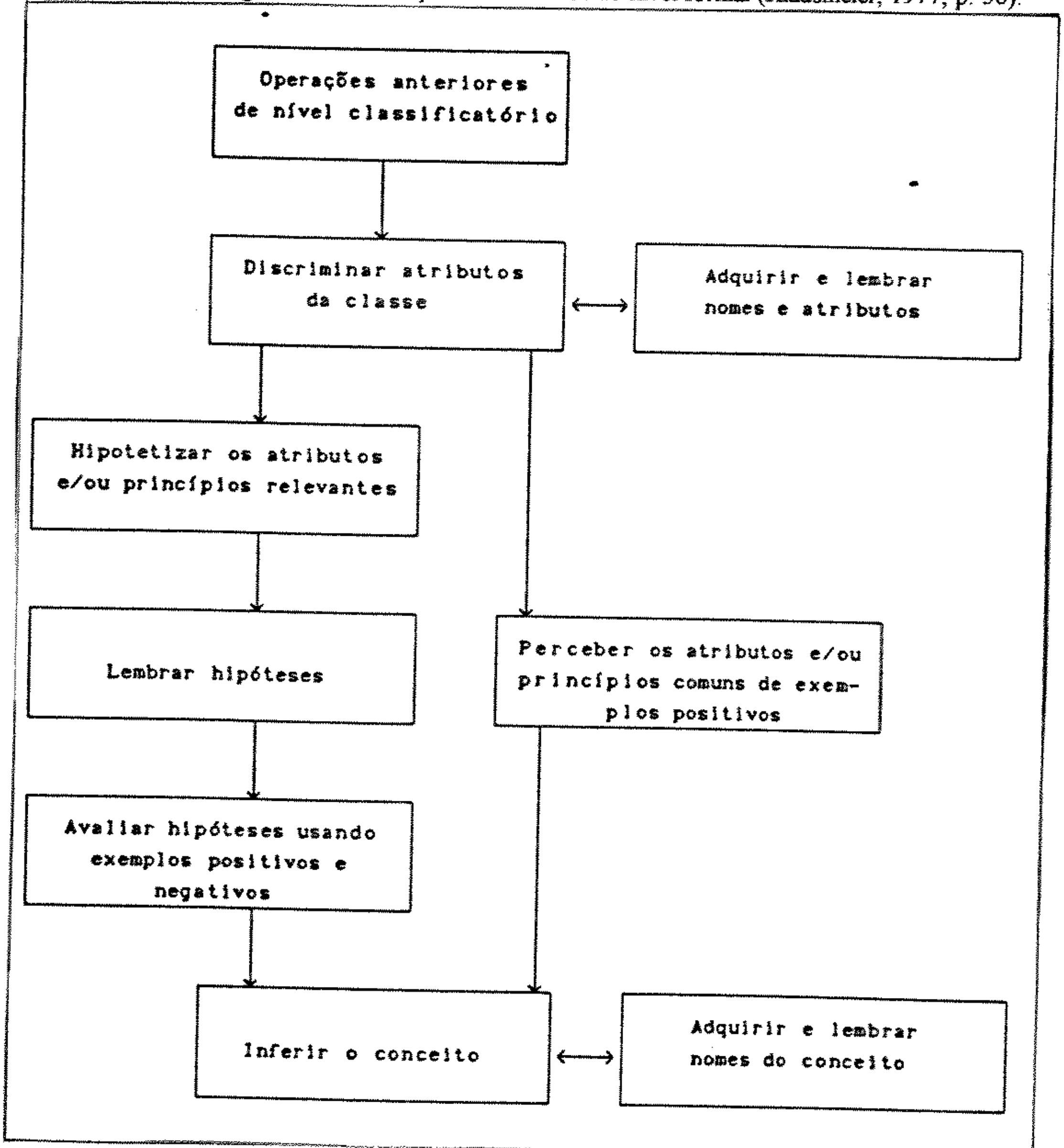
d) **Formal** - Este é o nível mais elevado dentro da formação de conceitos onde o aluno é capaz de fazer definições, levando em consideração os atributos definidores, exemplos e não-exemplos e as relações entre os conceitos.

Para Klausmeier (1977):

> *"A formação de um conceito no nível formal é inferida, quando o indivíduo sabe dar o nome dos conceitos, sabe definir o nome em termos dos seus atributos definidores, sabe discriminar e nomear seus atributos e sabe diferenciar entre exemplos e não-exemplos em termos dos atributos definidores".* (p. 55)

Figura 19

Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível formal (Klausmeier, 1977, p. 56).



No caso do triângulo, se mostrarmos a uma criança um triângulo e, depois de algum tempo, mostrarmos a mesma figura e ela reconhecê-la, então, essa criança formou o conceito de triângulo no nível concreto.

Se apresentarmos um triângulo a uma criança, como na figura X, variando a posição dos triângulos como na figura Y, e ela reconhecer que é a mesma figura, então, esta criança formou o conceito no nível identidade.

Figura X

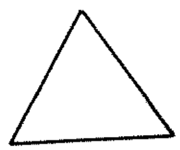
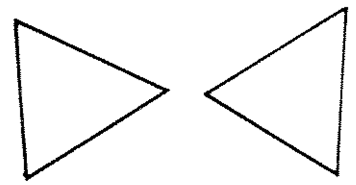
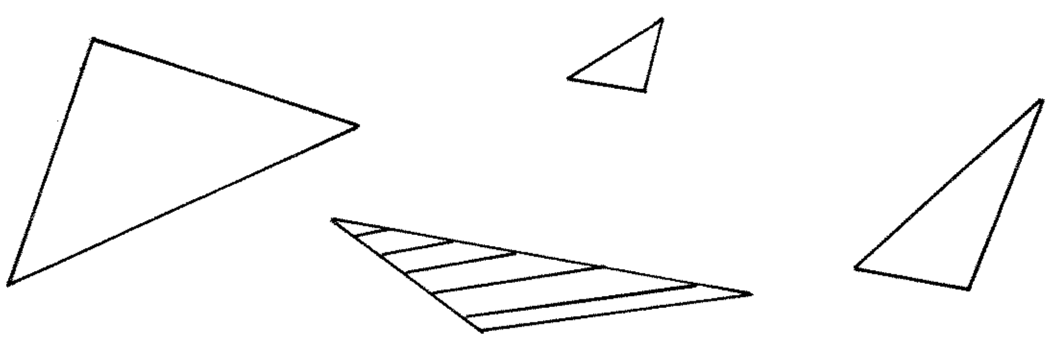


Figura Y



Uma criança forma o conceito de triângulo no nível classificatório, quando frente a vários tipos de triângulos, ela os reconheçe como sendo figuras pertencentes a uma mesma classe.

Figura 20



No nível formal, a criança deverá reconhecer exemplos e não exemplos de triângulos, e saber seus atributos definidores, como triângulo é uma figura plana, fechada, simples, formada por segmentos de retas possuindo 3 ângulos.

CAPÍTULO III
O CONCEITO MATEMÁTICO

TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO: ALGUNS ASPECTOS CONCEITUAIS

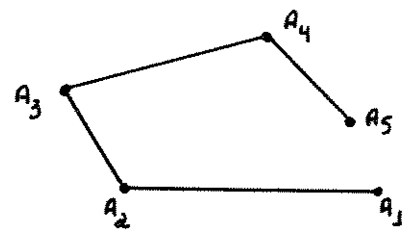
Triângulo e paralelogramo são figuras geométricas contidas no conjunto dos Polígonos. Para compreender os atributos que definem essas duas figuras, como fechada, simples e segmento de reta é necessário analisar a definição matemática de Polígonos.

Neste capítulo, serão apresentadas a definição de Polígonos e a construção, com régua e compasso, do triângulo e dos quadriláteros notáveis.

Definição de Poligonal

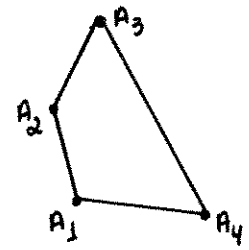
Uma poligonal é uma figura formada por pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$ todos distintos, e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$. Os pontos são chamados de vértices da Poligonal e os segmentos são os seus lados. Quando A_1 não coincide com A_n, temos uma poligonal aberta.

Figura 21



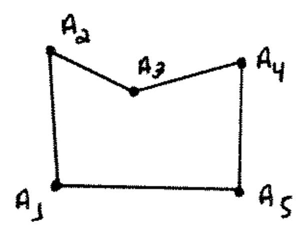
Quando A_1 coincide com A_n, a figura é uma poligonal fechada.

Figura 22



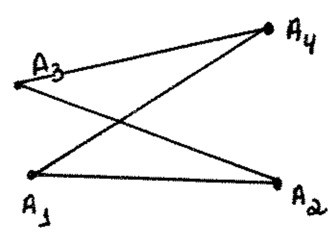
Uma Poligonal é chamada de simples quando não apresentar cruzamento.

Figura 23



Se a Poligonal apresentar cruzamento, é uma Poligonal não simples.

Figura 24



Definição de Polígono

A palavra Polígono é de origem grega: (Poli = muito, gono = ângulo). Um Polígono é uma Poligonal quando as seguintes condições forem satisfeitas:

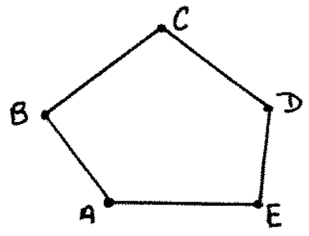
a) $A_n = A_1$.

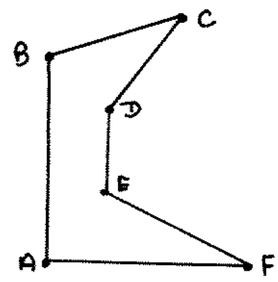
b) Os lados da Poligonal se interceptam somente em suas extremidades.

c) Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Exemplos:

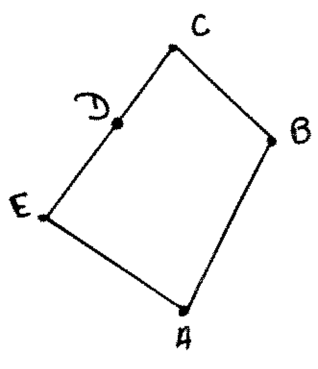
Figura 25

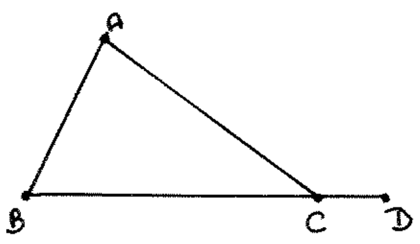




Contra-Exemplos:

Figura 26





Tipos de Polígonos:

Seja um polígono qualquer. Se qualquer que seja A e B pertencentes a P, o segmento AB estiver inteiramente contido em P, então P é chamado **convexo**. Caso contrário, P será chamado **não convexo**.

Figura 27

Convexo | Não Convexo

Os polígonos são classificados de acordo com o número de lados e assim apresentam a seguinte designação:

número de lados	nome do Polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

Em síntese:

Polígono é a figura geométrica plana formada por uma linha poligonal fechada, simples e pela região do plano limitada por esta linha.

Os polígonos podem ser classificados como regulares e irregulares. Um polígono P é regular, se possuir lados e ângulos congruentes, como mostrados abaixo:

Figura 28

Polígono Regular

$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{AD}$

$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$

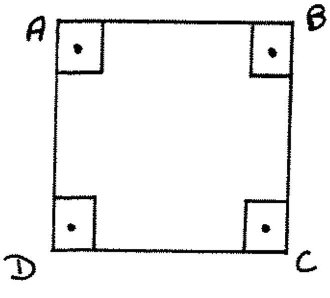
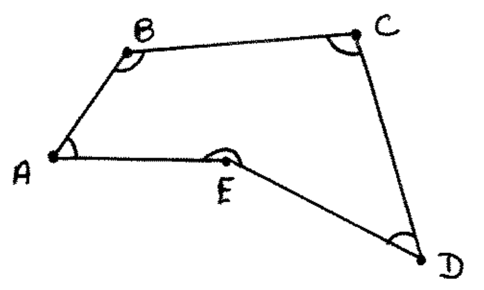


Figura 29

Polígono Irregular

$\overline{AB} \not\equiv \overline{BC} \not\equiv \overline{CD} \not\equiv \overline{DE} \not\equiv \overline{AE}$

$\hat{A} \not\equiv \hat{B} \not\equiv \hat{C} \not\equiv \hat{D} \not\equiv \hat{E}$



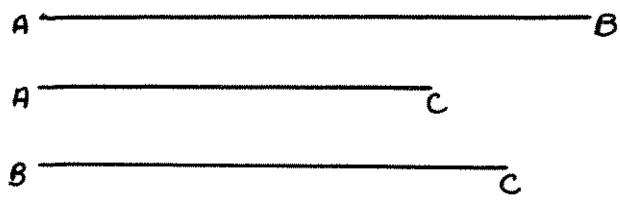
TRIÂNGULOS

Definição: Triângulo é uma figura geométrica plana, simples e fechada que é formada por três segmentos de reta e três ângulos. Isto pode ser dito de outra maneira:

Triângulo é um Polígono que possui três lados.

Construção do triângulo

1 - São traçados os lados do triângulos.



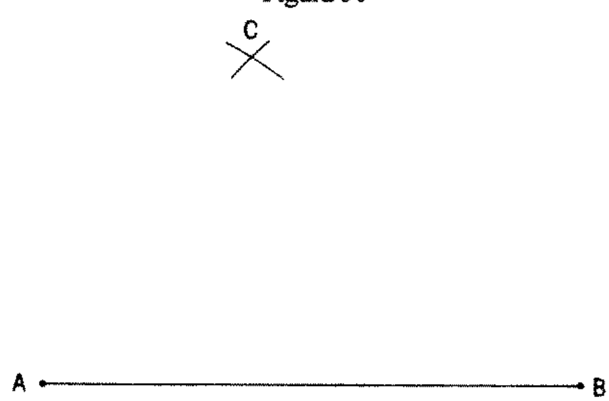
2 - É traçado o lado que servirá de base - $\overline{AB}$

Com a abertura do compasso correspondendo ao lado $\overline{BC}$, o centro em A, é traçado um arco.

Com a abertura do compasso correspondendo ao lado $\overline{AC}$, o centro em B, é traçado outro arco.

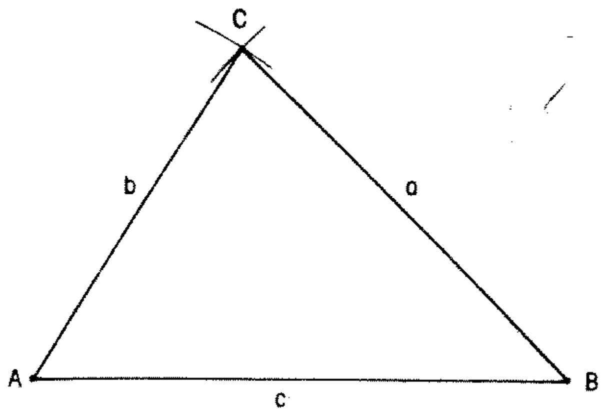
Os dois arcos se interceptam e determinam o terceiro vértice, que define o triângulo desejado.

Figura 30



Ligando os vértices, é obtido o triângulo ABC.

Figura 31



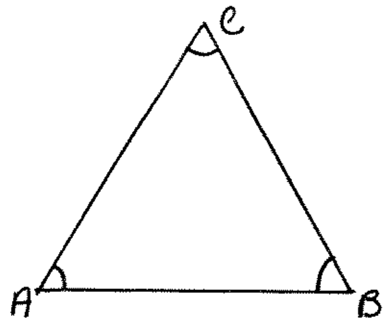
Classificação dos triângulos quanto aos lados

- **Eqüilátero:** É o triângulo que possui todos os lados congruentes, sendo que os ângulos também são congruentes.

Figura 32

$\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$

$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$

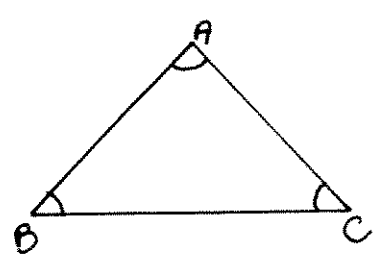


- **Isósceles:** É o triângulo que possui dois lados congruentes.

Figura 33

$\overline{AB} \equiv \overline{AC} \not\equiv \overline{BC}$

$\hat{B} \equiv \hat{C}$



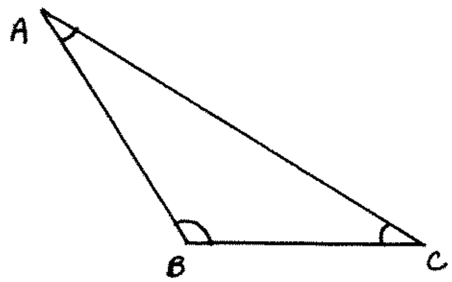
Observação: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Pelas características de triângulo eqüilátero e isósceles, pode ser afirmado que todo triângulo eqüilátero é isósceles.

- **Escaleno:** É o triângulo que possui três lados não congruentes.

Figura 34

$\overline{AB} \not\equiv \overline{BC} \not\equiv \overline{AC}$

$\hat{A} \not\equiv \hat{B} \not\equiv \hat{C}$

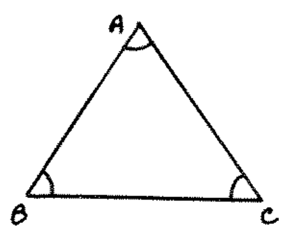


Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

- **Acutângulo:** É um triângulo que possui os três ângulos agudos (menores que o ângulo reto).

Figura 35

$\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos.

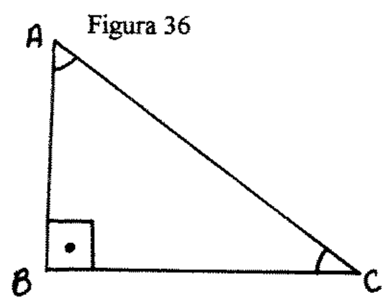


- **Retângulo:** É um triângulo que possui um ângulo reto.

Figura 36

$\hat{B}$ é reto

$\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos

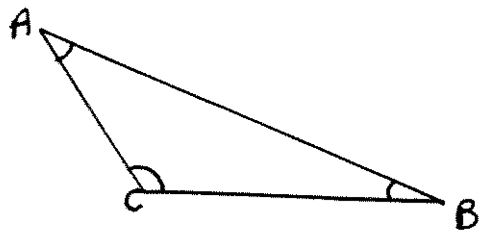


- **Obtusângulo:** É um triângulo que possui um ângulo obtuso (maior que o ângulo reto).

Figura 37

$\hat{C}$ é obtuso

$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos



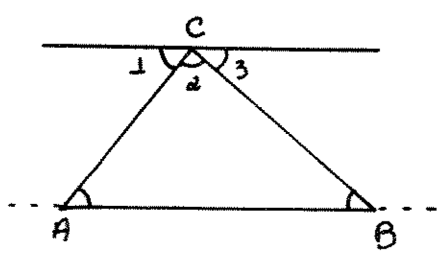
Soma dos ângulos internos de um triângulo

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Prova: Seja ABC é um triângulo. Pelo vértice <u>C</u>, traçamos uma reta paralela ao lado AB.

Numeramos os ângulos formados como indica a figura.

Figura 38



Tem-se:

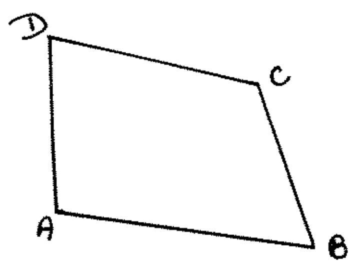
$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$. Como $\overline{AC}$ é transversal às duas paralelas, $\hat{1}$ e $\hat{A}$ e $\hat{3}$ e $\hat{B}$ são alternos, portanto congruentes.

Logo: $\hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = \hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180°$.

QUADRILÁTEROS

Definição: Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três deles não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um **quadrilátero**.

Figura 39



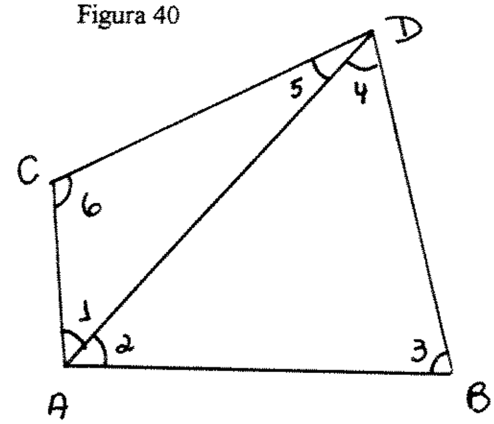
Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

Prova: Seja ABCD um quadrilátero qualquer e AD uma de suas diagonais.

Enumeramos os seus ângulos como mostra a figura de modo que:

Figura 40



$\hat{1} + \hat{2} = \hat{A}$

$\hat{3} = \hat{B}$

$\hat{4} + \hat{5} = \hat{D}$

$\hat{6} = \hat{C}$

no triângulo ACD temos:

$\hat{1} + \hat{6} + \hat{5} = 180°$ ①

no triângulo ABD temos:

$\hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180°$ ②

somando ① com ② vem:

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} = 360°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°$

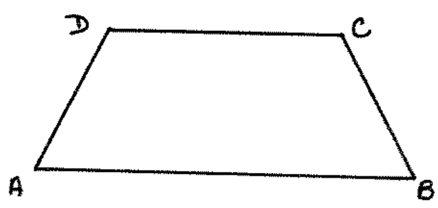
Conclusão: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trapézio

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, somente se, possui dois lados paralelos. Os lados paralelos são as bases do trapézio.

Figura 41



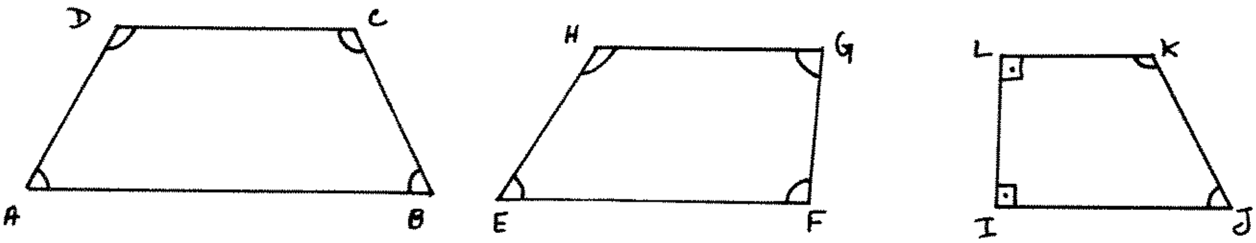
Tipos de Trapézios

Os trapézios podem ser classificados em:

Trapézio isósceles: possui os dois lados não paralelos congruentes.
Trapézio escaleno: possui os dois lados não paralelos não congruentes.
Trapézio retângulo: possui dois ângulos retos.

Figura 42

Trapézio Isósceles Trapézio Escaleno Trapézio Retângulo

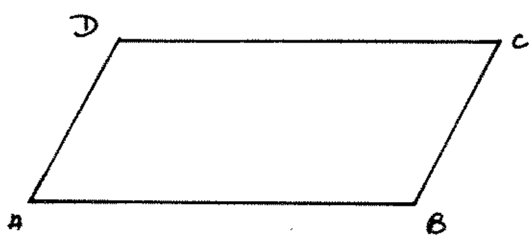


PARALELOGRAMOS

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possuir os lados opostos paralelos.

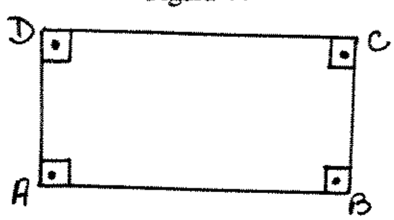
Exemplos:

Figura 43



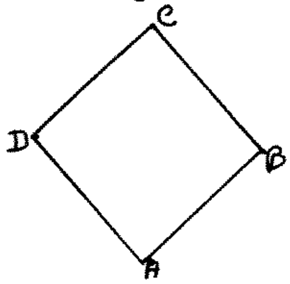
O retângulo é o paralelogramo que possui os 4 ângulos retos.

Figura 44



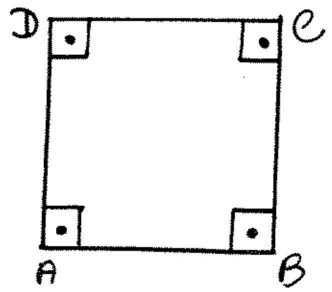
O losango é o paralelogramo que possui os 4 lados congruentes.

Figura 45



O quadrado é o paralelogramo que possui os 4 ângulos retos e os 4 ângulos congruentes.

Figura 46



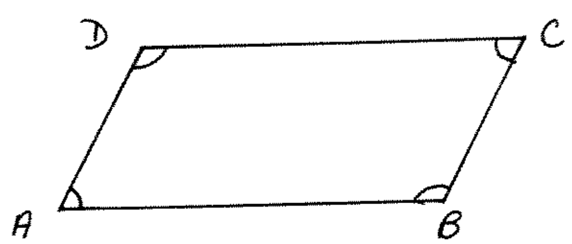
Propriedades dos paralelogramos

P_1 - Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Figura 47

$\hat{A} \equiv \hat{C}$

$\hat{B} \equiv \hat{D}$

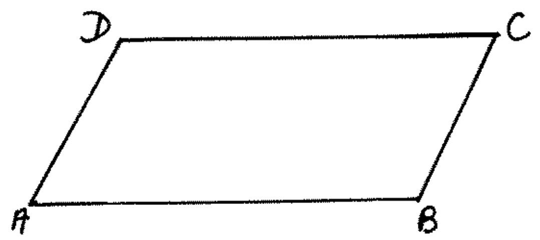


P_2 - Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Figura 48

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

$\overline{BC} \equiv \overline{AD}$



Conclusões:

Os seguintes princípios podem ser colocados:

- Todo quadrado é um losango e um paralelogramo.
- Todo quadrado é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um quadrado.
- Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.
- Todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo.

Construção dos Quadriláteros Notáveis

Através da construção das figuras geométricas, utilizando-se a régua e o compasso, é possível visualizar e compreender as propriedades e atributos definidores destas figuras.

O Desenho Geométrico é ensinado em nossas escolas com o objetivo de levar o aluno a representar figuras geométricas planas e a resolver, com o auxílio da régua e do compasso, problemas de Geometria plana, visando sempre à formação significativa dos conceitos geométricos que devem ser apresentados aos alunos, de modo a facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa.

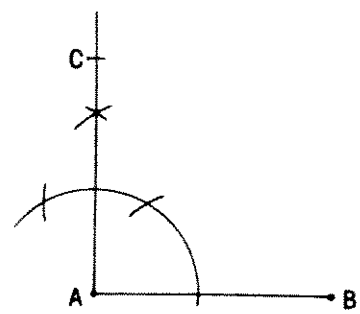
Construção do quadrado

Seja o lado $\overline{AB}$ dado:

Numa das extremidades do lado, é construído um ângulo de 90° (ver em anexo II a construção do ângulo reto).

Com a medida do lado $\overline{AB}$, obtemos o ponto C.

Figura 49

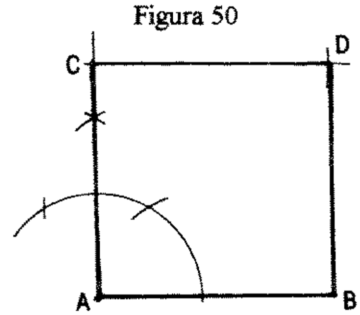


Com a abertura $\overline{AB}$, centro do compasso em B, é traçado um arco.

Com a mesma abertura, centro do compasso em C, é traçado outro arco obtendo o ponto D.

Ligando os pontos, é obtido o quadrado ABCD.

Figura 50

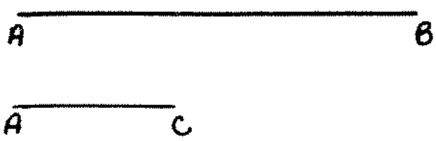


Através dessa construção, podemos notar que, para se obter o quadrado, foi necessário a construção do ângulo reto, utilizando-se a medida do lado $\overline{AB}$.

Ao construir a figura, o aluno é levado a compreender esses dois atributos que definem o quadrado, que são os seguintes: “ângulo reto” e “lados iguais”.

Construção do Retângulo

Sejam os lados:



Sobre uma reta suporte r, é marcado o lado AB e construído em A um ângulo reto.

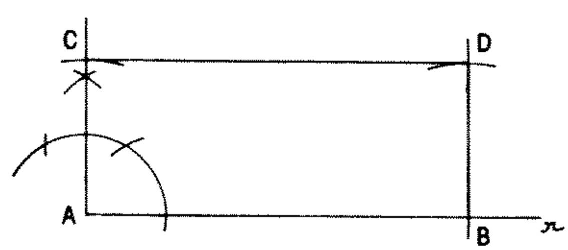
Centrando o compasso em A, com medida $\overline{AC}$, é obtido o ponto C.

Centro do compasso em B, medida $\overline{AC}$, é traçado um arco.

Centro do compasso em C, medida $\overline{AB}$, é traçado um outro arco, sendo obtido o ponto D.

Ligando os pontos, é obtido o retângulo ABCD.

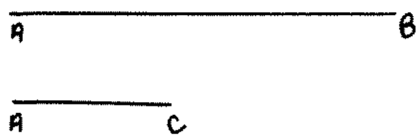
Figura 51



Através desta construção, o aluno pode compreender que o **atributo ângulo reto** está presente tanto no quadrado como no retângulo. O aluno, também, é levado a compreender que: 1) aquilo que os diferencia são somente os lados; 2) o quadrado tem os lados iguais e 3) o retângulo não precisa, necessariamente, ter os lados iguais.

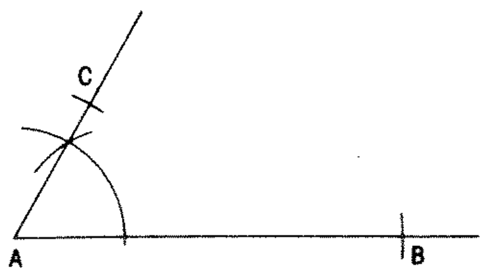
Construção do Paralelogramo

Sejam dados os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e um ângulo (exemplo 60°) (ver construção do ângulo de 60° no anexo II).



Em primeiro lugar, é construído o ângulo de 60°.

Figura 52

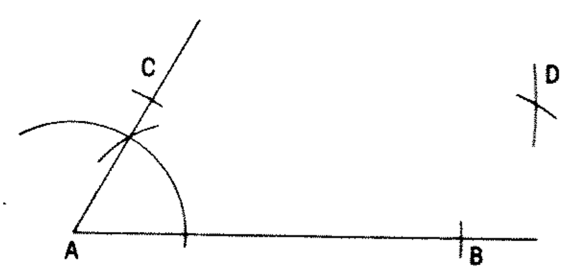


Nos lados desse ângulo, são marcados os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Centro do compasso em C, abertura $\overline{AB}$, é traçado um arco.

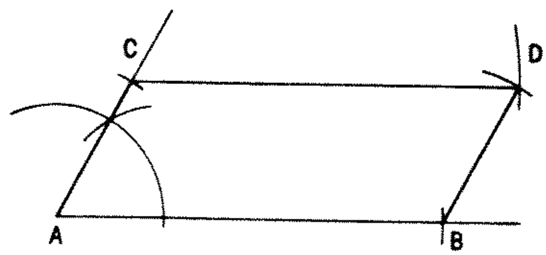
Centro do compasso em B, abertura $\overline{AC}$, é traçado um outro arco cruzando com o primeiro em D.

Figura 53



Ligando os pontos, é obtido o paralelogramo ABCD.

Figura 54

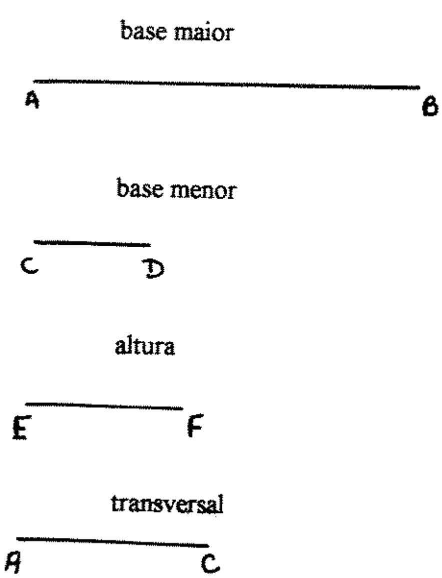


Construímos, portanto, um paralelogramo com as 4 medidas iguais. Logo, o paralelogramo construído é um **Losango**.

A partir dessa construção, o aluno deverá ser levado a compreender que: a) O losango possui, necessariamente, todos os lados iguais e b) O paralelogramo não possui, necessariamente, todos os lados iguais.

Construção do Trapézio

Sejam as medidas:



1 - São traçadas duas retas paralelas r e r', paralelas e distantes entre si de uma medida EF (altura) (ver construção de retas paralelas no anexo II).

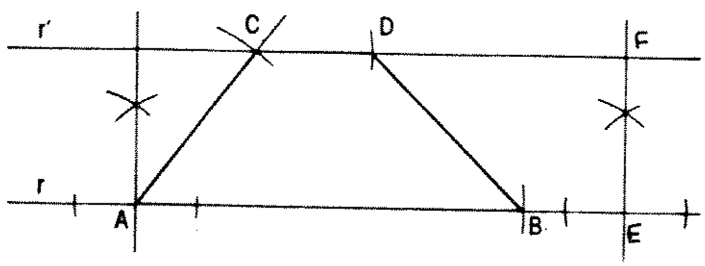
2 - Sobre r, é marcada a base $\overline{AB}$.

3 - Centro do compasso em A, abertura AC, é obtido o ponto C em r'.

Centro do compasso em C, abertura $\overline{CD}$, é traçada sobre r' a base menor obtendo o ponto D.

Ligando os pontos ABCD, é obtido o trapézio desejado.

Figura 55



Por esta construção, pode ser observado que a classe dos trapézios não possui os atributos definidores do paralelogramo. O trapézio possui somente um par de retas paralelas, ao passo que o paralelogramo possui dois pares de retas paralelas.

CAPÍTULO IV

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A ordenação dos textos relacionados a este trabalho foi feita de modo a descrever os artigos considerados mais significativos em relação a dois aspectos: 1) os níveis de aprendizagem, que dizem respeito às pesquisas relacionadas aos níveis de aprendizagem de conceitos e, 2) a aprendizagem de conceitos que são textos referentes ao desenvolvimento dos mesmos através de métodos instrucionais.

Algumas dessas pesquisas não tratam especificamente do conceito de triângulo e paralelogramo, mas são importantes, pois permitem uma melhor observação dos métodos utilizados.

Com relação à influência da série na formação de conceitos (desempenho dos alunos em diferentes séries), objeto do presente trabalho, foi encontrado apenas um trabalho citado por Klausmeier, Sipple e Allen, 1977, embora a pesquisa bibliográfica tenha sido feita usando o sistema ERIC, com relação aos últimos 6 anos.

NÍVEIS DE APRENDIZAGEM

Em um estudo realizado com o objetivo de observar a validade de alguns princípios, Klausmeier, Sipple e Allen apud Klausmeier, 1977, estudaram a formação de conceito em 62 alunos de Jardim de Infância, 86 alunos de terceira série, 92 alunos de sexta série e 84 alunos de oitava série. Os conceitos utilizados foram: triângulo eqüilátero, instrumento cortante e substantivo. O primeiro princípio que os autores tentaram demonstrar referia-se ao fato de muitos conceitos serem formados de acordo com quatro níveis sucessivos (concreto, identidade, classificação e formal), numa seqüência invariável. Cinco padrões de domínio dos quatro níveis foram observados: a) fracasso em todos os níveis (FFFF), b) Domínio do primeiro nível e fracasso dos outros três (DFFF), c) Domínio nos níveis concreto e identidade e fracasso nos outros dois (DDFF), d) Domínio nos três primeiros níveis e fracasso no nível formal (DDDF) e e) Domínio nos quatro níveis (DDDD). Os resultados mostraram que 94% de todas as crianças seguiram os cinco padrões domínio/fracasso para o conceito de triângulo eqüilátero. A porcentagem alta dos resultados evidenciaram claramente esse princípio. Foi verificado, também, que nenhuma criança de jardim de infância formou o conceito de triângulo eqüilátero no nível formal e, igualmente, algumas crianças de Jardim de Infância atingiram o conceito de triângulo eqüilátero no nível classificatório, mas não foi atingido por todas as crianças de oitava série. Os autores tentaram, além disso, verificar se os conceitos formados nos quatro níveis poderiam levar os estudantes a: a) discriminar as relações supra-ordenadas-subordinadas, b) entender os princípios e, c) solucionar problemas. Verificaram que quanto mais elevado o nível do aluno, melhor é seu desempenho nos três itens citados (a, b, c). Buscando verificar se o conhecimento dos nomes dos conceitos e seus atributos facilitava a formação desse mesmo conceito, bem como as três aplicações acima (a, b, c), as crianças foram submetidas a esta situação e correlações, com resultados de melhoria no vocabulário, mostraram a validade desse princípio. Foi verificado, desse modo, que crianças da mesma idade variam em relação ao nível de formação e aplicação dos conceitos formados. Os autores verificaram que 18% dos alunos de terceira série formaram o conceito de triângulo eqüilátero no nível formal enquanto que 82%, não. Constataram, também, que algumas crianças de terceira série tiveram um desempenho melhor que algumas crianças de 8ª série. Um outro princípio validado referia-se ao fato de os conceitos serem formados pelas mesmas crianças em diferentes ritmos e foi verificado que 30% dos alunos de oitava série formaram o conceito de substantivo no nível formal, ao passo que 90% desses mesmos alunos atingiram o mesmo nível para o conceito de instrumento cortante.

Nelson e Klausmeier, apud Klausmeier, 1977 trabalhando com crianças pequenas, verificaram que algumas crianças de 3 anos de idade e muitas crianças de 5 anos podiam classificar blocos de forma quadrangular, triangular e retangular bem como as figuras desses ao nível classificatório. Mostra ainda que muitos professores tendem a subestimar as capacidades dos alunos para classificação, quando dispõe de materiais reais do conceito aplicados ao ensino. Os autores concluíram que a apresentação de exemplos e não-exemplos, no ensino, propiciam a mudança do nível classificatório para o formal em crianças mais velhas.

Burger e Shaughnessy (1986) estudaram os níveis do pensamento geométrico segundo Van Hiele, de acordo com as respostas dadas por estudantes, sobre triângulos e quadriláteros. Os sujeitos, para o experimento final, foram constituídos de 45 estudantes distribuídos em algumas categorias: grau K1 (graus 2-3), grau K2 (graus 4-8), Álgebra 1 (pré-geométrico), geométrico, Álgebra 2 (pós-geométrico) e Júnior (matemático superior). As atividades propostas aos alunos incluíram: a) **Desenhos** - Os alunos deveriam desenhar um triângulo e, em seguida, outros tipos de triângulos que se diferenciassem de alguma maneira. Esta atividade tinha como objetivo verificar quais propriedades os alunos variavam ao desenhar alguns tipos de figuras. b) **Identificação e definição** - Dado um conjunto de quadriláteros, os estudantes deveriam identificar quais eram quadrados, losangos, paralelogramos e retângulos. Esta atividade tinha como objetivo verificar a definição dos estudantes e a inclusão de classes. c) **Classificação** - Um conjunto de triângulos era colocado sobre a mesa e o entrevistador pedia para que fossem separados os triângulos que tivessem alguma semelhança. d) **Forma misteriosa** - Consistia na chamada atividade "Qual é minha forma?" na qual o entrevistador dizia algumas características de uma determinada figura, e os estudantes deveriam descobrir a forma relacionada às características. Os resultados mostraram que o comportamento dos estudantes nas atividades foram consistentes com os níveis originais descritos por Van Hiele, embora a distinção dos níveis, em particular da análise e abstração, não tenham sido confirmada. O uso da dedução formal entre os estudantes que haviam cursado ou estavam cursando uma escola secundária em Geometria, foi bem menos ausente.

Feldman e Klausmeier (1974) trabalharam com 59 alunos de quarta série e 60 alunos de oitava série em duas escolas de uma pequena cidade do meio oeste dos Estados Unidos, com o objetivo de se determinar os efeitos de dois tipos de informações fornecidas por uma definição do conceito. Dois tipos de definições foram utilizados para o conceito de triângulo equilátero: a **definição técnica**, que era aquela que apresentava todos os atributos definidores do conceito e definição do uso comum, que era aquela que apresentava uma definição encontrada em um dicionário. Os autores verificaram que o alunos de quarta série tiveram um desempenho expressivamente melhor nas atividades que envolviam a definição do uso comum, enquanto que alunos de oitava série tiveram um desempenho melhor nas tarefas que envolviam a conceituação técnica. A partir dos resultados obtidos, concluíram que, para os estudantes mais jovens, é mais importante fornecer uma definição escrita em um nível apropriado que uma definição onde todos os atributos definidores estejam especificados.

Nelson e Klausmeier (1974) pesquisaram a maneira como estudantes de baixo nível sócio-econômico indicavam semelhanças e diferenças de algumas formas geométricas como quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, quadrilátero, triângulo, círculo e cubo. Noventa e nove estudantes provenientes de famílias de baixa renda, alunos de 5ª, de 8ª e de 11ª séries, sendo 32 sujeitos de cada série (16 homens e 16 mulheres) provenientes de várias escolas serviram de sujeitos para o trabalho. O material utilizado consistia em duas atividades. Na primeira delas, as figuras eram apresentadas para cada aluno individualmente, para que eles indicassem as semelhanças e diferenças. Já, a segunda atividade era constituída de 26 cartões com desenhos dos oitos conceitos, apresentando variação na forma e orientação, sendo que os alunos eram solicitados a formar 7 grupos diferentes. As respostas dos estudantes foram categorizadas em perceptibilidade e atributos nominais. A comparação dos resultados obtidos pelos alunos de classe baixa com alunos em melhores condições sócio-econômicas mostra que, diferentemente dos estudantes de média e alta situação sócio-econômica os de baixa situação sócio-econômica tiveram um desempenho significativamente melhor na categoria percepção de semelhança e diferenças entre exemplos do conceito que atributos definidores e nomes dos exemplos. Além disso, os alunos de quinta série de condição sócio-econômico mais elevada tiveram uma média maior que alunos de oitava série de baixa situação sócio-econômica.

Friedman (1976), trabalhando com 13 professores, estudou o desenvolvimento de um sistema para analisar questões orais de professores de Geometria. As respostas foram analisadas de acordo com os seguintes aspectos: **Memória** (o professor formula questões que requerem ou exigem do aluno os processos de memória e lembrança); **Compreensão** (o professor formula questões que exigem que o aluno estabeleça relação entre as idéias); **Aplicação** (questões onde se solicita ao aluno que aplique o conceito em situações novas) e **Nível mais elevado** (questões que envolvem imaginação, insight e criatividade). O pesquisador procurava determinar qual ênfase relativa era utilizada no ensino de demonstrações de alguns teoremas, tais como "se dois lados de um triângulo são congruentes, os ângulos da base também são congruentes", "A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°" ou ainda "se a hipotenusa e um lado de um triângulo retângulo são congruentes às partes correspondentes de um triângulo retângulo, então os triângulos são congruentes". As questões eram gravadas em fitas cassetes e posteriormente analisadas. O resultado mostrou que foram utilizadas mais questões que exigiam a compreensão por parte dos alunos que aquelas que exigiam memória e aplicação.

Woodson (1974) realizou uma pesquisa com 14 estudantes de graduação e, para tal, cada estudante foi levado a aprender sete conceitos por um dos sete seguintes métodos de instrução: apresentando a definição, instrução projetada para identificar atributos relevantes do conceito, instrução projetada para identificar atributos irrelevantes do conceito, mostrando exemplos do conceito, mostrando não exemplos do conceito, descrição do domínio do conceito e uso de analogias para descrever o conceito. Os conceitos ensinados referiam-se ao "significado" de caracteres chineses: madeira, roda, pequeno, azul, duro, valioso e comestível e os exemplos envolviam um conjunto de palavras em inglês. A mensuração foi realizada através de 4 métodos e destes métodos, três requeriam respostas escritas e o quarto método envolvia a classificação da instância em exemplos e não-exemplos do conceito. O estudo mostrou que a identificação de atributos relevantes é a estratégia mais efetiva para o ensino de conceitos e, em seguida, a estratégia mais efetiva é o ensino apresentando a definição.

Klausmeier e Feldman (1975) pesquisaram os efeitos da definição e a variedade de exemplos e não exemplos na obtenção do conceito de triângulo equilátero, utilizando como sujeitos 134 estudantes da quarta série de duas escolas elementares de Wisconsin, distribuídos em três grupos, cuja atividade consistia em ler 4 lições experimentais. As lições envolviam a definição do conceito, um conjunto de 3 exemplos de conceito e 5 não-exemplos do conceito, a definição e um conjunto de exemplos e não-exemplos e a definição e três conjuntos de exemplos e não-exemplos. O desempenho de cada grupo experimental foi comparado com o desempenho dos sujeitos de seu grupo controle e os resultados mostraram que as crianças que leram a lição com a definição juntamente com três conjuntos racionais de exemplos e não-exemplos tiveram um desempenho melhor na atividade proposta que aqueles que receberam somente a definição. Foi observado também que o grupo experimental sempre obtinha um desempenho melhor que o grupo controle.

Tennyson, Steve e Boutwell (1975) realizaram dois experimentos com o objetivo de verificar se a aquisição de conceitos é facilitada pela estratégia de delineamento instrucional onde são focalizados os atributos críticos de exemplos. O primeiro experimento foi realizado com 87 estudantes (homens e mulheres) de graduação de Psicologia, e consistia na apresentação de exemplos de acordo com relações definidas: organizada versus causal. O segundo experimento consistia em uma explicação analítica de uma afirmação verbal apresentada com cada exemplo, em que era observada a presença ou não dos atributos críticos. Este segundo experimento teve como sujeitos 135 estudantes universitários de uma fundação educacional, sendo que esses alunos deveriam ser capazes de classificar exemplos e não exemplos de um cristal RX2. O resultado deixou evidente que uma seqüência organizada de exemplos foi mais efetiva que a seqüência aleatória e mostrou, também, que os grupos que receberam uma explicação analítica tiveram maior média em relação àqueles que não tiveram acesso a esse tipo de explicação.

Houtz e Moore (1973) analisaram os efeitos de dois tipos de exemplos positivos e negativos na aprendizagem "não dimensionada" de conceitos nos quais esses eram definidos apenas pela presença ou não de atributos distintos. Os sujeitos da pesquisa foram 171 estudantes de oitava série de uma pequena escola rural da Pennsylvania. Os sujeitos foram distribuídos aleatoriamente em 6 grupos de tratamento e todos receberam a tarefa de aprender quatro conceitos diferentes. Os grupos 1 e 2 receberam 8 exemplos positivos e negativos para cada conceito e os grupos 3, 4, 5 e 6 receberam 4 instâncias positivas e negativas para cada conceito. Os resultados indicaram que os sujeitos devem usar instâncias negativas para gerar hipóteses de possíveis atributos relevantes. Os autores concluíram, também, que os sujeitos que receberam instâncias positivas diferenciadas somente por um número de atributos irrelevantes juntamente com instâncias negativas (grupos 3 e 5) tiveram desempenho melhor que os sujeitos que receberam somente instâncias positivas.

Tagatz (1967) investigou a influência da estratégia, do sexo e da idade no comportamento conceitual de crianças (5ª e 6ª séries) de uma escola de primeiro grau. O estudo constou de uma amostra total de 40 estudantes, envolvendo alunos de 5ª e 6ª séries, sendo compostos por 10 homens e 10 mulheres de cada série. Os alunos eram instruídos, antes de começar a aprender os conceitos, a examinar os atributos comuns aos exemplos positivos. Cada aluno recebeu exercícios práticos nos quais deveriam ser aplicados as instruções recebidas. Os conceitos envolviam características definidoras como lados (1 ou 2), continuidade dos lados (linha contínua ou interrompida) e número de figuras (1 ou 2), cor (roxo ou amarelo) e forma (quadrado ou triângulo). Os resultados demonstraram que, quando eram fornecidas instruções aos alunos sobre o que deveriam procurar, isto facilitava a formação de conceitos. Os resultados mostraram que mesmo com estratégias diferenciadas ocorreram soluções comuns e mostraram que o sexo feminino teve um desempenho melhor, além de constatar que alunos de 6ª série foram menos eficientes que os da 5ª série.

Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1987) estudaram exemplos de imagens de conceitos geométricos em estudantes e professores. A pesquisa foi realizada com estudantes de 5ª e 8ª séries e com professores de escola elementar (sendo 145 professores "preservice" e 25 professores in-service em Israel. As respostas serviram de base para comparar imagens dos conceitos geométricos presentes na estrutura cognitiva de estudantes e professores. Em 1° lugar, foi fornecida uma figura de **ângulo** com alguns pontos interiores à região angular e outros exteriores e a tarefa dos estudantes e professores consistia em reconhecer quais pontos eram os interiores. O resultado mostrou que menos da metade dos estudantes conceituam um ângulo como sendo uma entidade infinita (as semi retas não têm fim) e as médias foram 25% na 5ª série e 50% na oitava série. Com relação aos professores, um pouco mais da metade deles, 68% pre-service e 55% dos professores in-service tinham o conceito correto de ângulo. Com relação à altura do **triângulo e a diagonal do polígono**, foi dada uma atividade que consistia em fornecer um triângulo obtusângulo, para que os sujeitos traçassem a altura e também traçassem diagonais em um polígono não convexo. Nesta atividade, muitos alunos e professores desenharam medianas ao invés de alturas e também traçaram diagonais internas no polígono não convexo (53% de estudantes e 49% dos professores desenharam uma semi-reta unindo um vértice ao lado oposto num determinado polígono não convexo). Na atividade relacionada ao **fator orientação**, foram dados triângulos retângulos com três orientações diferentes e os professores e os alunos deveriam identificá-los a partir de uma coleção de triângulos. Os resultados mostraram que os professores tiveram o mesmo desempenho na identificação do triângulo na forma convencional (100%), enquanto os alunos de 5ª série tiveram 80% de acertos, os de 6ª série tiveram 87% de acerto e os alunos de 8ª série aproximadamente 94% de acerto. Em uma última tarefa cujo objetivo era verificar a capacidade dos sujeitos para identificar exemplos e não-exemplos de conceitos através de uma definição verbal, foi dada a definição de "bitrian" como sendo uma figura geométrica, que consistia de dois triângulos, tendo um vértice comum (um ponto serve como vértice dos dois triângulos). Logo em seguida, uma série de exemplos foi dada para possibilitar a identificação dos "bitrian". Metade do grupo de professores e metade do grupo de estudantes foram solicitados a identificar "bitrian" enquanto a outra metade era solicitada a desenhar "bitrian". O resultado para professores e alunos foram muito parecidos em ambas as atividades e, em relação a algumas figuras, os estudantes tiveram uma média de acerto maior que os professores.

Davis e Klausmeier (1970) estudaram, através de dois experimentos, estilos cognitivos de alunos e a identificação de conceitos como função do procedimento de complexidade e treino. O primeiro experimento envolveu 310 estudantes do sexo masculino de uma escola secundária, sendo que o objetivo era examinar a extensão nas quais os estilos cognitivos influenciavam o desempenho destes alunos em problemas de identificação de conceitos com vários graus de complexidade. Neste experimento, foi aplicado o teste de figuras de Hidden e os resultados mostram que os estilos cognitivos (alto, médio e analítico baixo) influenciam o desempenho de identificar conceitos. A interação entre estilo cognitivo e complexidade não foram suportados pelos dados e nenhum resultado aparece. O segundo experimento procurava determinar se o déficit na identificação dos conceitos pelo estilo analítico-baixo, no primeiro experimento, seria superado pelo uso de dois treinos, um treino de verbalização e outro de pontidão. Os sujeitos foram 323 alunos do sexo masculino de uma escola secundária que foram também submetidos aos testes das figuras de Hidden. Foi observado que os sujeitos que receberam o treino de prontidão identificaram o conceito com um número menor de erros que os que não receberam esse tipo de treino. Os sujeitos que receberam o treino de verbalização identificaram conceitos com menor número de erros que sujeito sem esse tipo de treino.

Lemke, Klausmeier e Harris (1967) realizaram um estudo, com o objetivo de estabelecer as relações entre as habilidades cognitivas, o processamento de informações e a obtenção de conceitos. Os sujeitos foram 94 graduados e estudantes em formação, do sexo feminino, que assistiam a aulas em duas classes de Psicologia Educacional. Uma bateria de 16 testes de habilidades, 2 para cada uma das 8 habilidades (pensamento geral, compreensão verbal, indução, dedução, exploração espacial, rapidez perceptual, memória inconsciente e extendida) foram ministrados aos sujeitos pelos pesquisadores. Concluíram que várias habilidades como a habilidade verbal e habilidade de compreensão, o pensamento geral e a indução estão consistentemente correlacionadas com fatores de obtenção do conceito e do processamento de informações.

Tennyson, Chao e Youngers (1981) estudaram a aprendizagem de conceitos como uma aquisição de protótipos e o desenvolvimento da generalização e da discriminação nessa aprendizagem. Os participantes foram 120 estudantes de 4ª série de uma escola elementar e o conceito selecionado para estudo foi o conceito de triângulo eqüilátero. Os resultados mostraram que a aprendizagem, em alunos de 4ª série, foi facilitada pela forma de apresentação que combinava definições expositivas de exemplos com a apresentação interrogativa. Esse tipo combinado foi mais efetivo que a apresentação somente expositiva ou somente interrogativa. Foi verificado, também, que na obtenção do conceito no nível concreto e de identidade, o protótipo foi aprendido independente da forma de apresentação: ser expositiva, interrogativa ou expositivo-interrogativa. Já no nível classificatório e formal, as habilidades foram desenvolvidas e mantidas somente com a forma de apresentação expositivo-interrogativa. Neste estudo, são apresentados 5 processos para o ensino de conceitos: 1) usar a taxonomia para identificar os atributos críticos; 2) usar a definição do conceito em termos de seus atributos definidores; 3) usar exemplos organizados em um conjunto racional, para manipulação apropriada dos atributos; 4) apresentar exemplos de acordo com as respostas dos alunos e, 5) a forma de apresentação deve incluir conjuntos expositivos seguidos dos conjuntos interrogativos.

Stanners, Brown, Price e Holmes (1983) pesquisaram a relação entre o desempenho nos testes de ensaio e a medida da qualidade da organização conceitual, derivada das atividades de comparação dos conceitos. Um primeiro experimento considerou a relação entre três tipos de questões de ensaio (definição, aplicação e comparação) e um outro estudo utilizou diferentes amostras de sujeitos para fazer medidas derivadas de atividades de comparação de conceitos. Os sujeitos foram 64 estudantes de um curso introdutório de Psicologia e os conceitos utilizados referiam-se a conceitos da Psicologia da percepção. Análise de correlação canônica indicou uma forte correlação positiva entre o desempenho de ensaio e o desempenho de atividades de comparação de conceitos. Foi constatado, também, que as atividades de comparação de conceitos levam o conhecimento conceitual a trilhar um caminho não trivial.

Tennyson, Youngers e Suebsonthi (1983) estudaram a aprendizagem de conceitos por crianças, usando formas de apresentação instrucional para a formação de protótipos e desenvolvimento de habilidades de classificação. Os participantes foram 107 estudantes de terceira série e o conceito de polígono regular foi selecionado para o programa de aprendizagem. Os resultados mostraram que a apresentação de melhores exemplos (best examples) acompanhados de definição facilitava mais a formação de protótipos que a apresentação da definição acompanhada de uma afirmação clarificando a relação entre os atributos críticos. Os autores concluíram também que a habilidade de classificação foi facilitada mais pela apresentação de exemplos de comparação e interrogação que pela apresentação isolada dos exemplos de interrogação.

Hirumi e Bowers (1991) estudaram o aumento da motivação e a aquisição de conceitos coordenados através do uso de árvores de conceitos. Os sujeitos eram 73 estudantes de graduação que receberam aproximadamente 1.300 palavras que descreviam as categorias da aprendizagem significativa de Ausubel, sendo que metade dos estudantes (grupo experimental) receberam uma árvore de conceitos que ilustrava a relação entre os mesmos. Os resultados mostraram que os alunos que utilizaram a árvore de conceitos tiveram um desempenho melhor que os alunos do grupo-controle que não a utilizaram. Além disso, os alunos do grupo experimental demonstraram atenção, confiança e satisfação maior com o material instrucional que os alunos que tiveram que realizar a tarefa sem receber a árvore de relações conceituais.

Bar, Zinn, Goldmuntz e Sneider (1994) estudaram os conceitos de peso e queda livre que determinadas crianças apresentavam. Durante um período de 4 meses, os pesquisadores entrevistaram 400 crianças, com idades que variavam entre 4 e 13 anos, que estudavam em escolas da região de Jerusalém. Cada criança foi entrevistada cerca de meia hora. Durante esse período, eram dados objetos para comparação de massas e também eram feitas perguntas sobre o que as crianço entendiam por queda livre. Os autores concluíram que as idéias das crianças podem ser interpretadas em termos da teoria significativa do uso comum e que os conceitos dos estudantes de 2° grau, com relação à matéria, à gravidade e ao "porquê de as coisas caírem" não são facilmente modificados. É interessante notar que as crianças mais jovens observaram que as coisas do mundo, ao redor delas, caem, porque não têm suporte. Além disso, os resultados também evidenciaram que as crianças acima de 9 anos eram capazes de discriminar a conservação de massa.

Gliessman e Pugh (1994) estudaram a relação entre a aprendizagem de conceitos e o uso de habilidades de ensino em treinamento de professores. Os dados foram analisados em 14 estudos onde a aprendizagem de conceitos e a habilidade foram mensurados. O método de instrução incluía apresentação, discussão em pequenos grupos e módulos de auto-instrução. Os resultados mostraram uma relação significativa entre a aprendizagem de conceitos e as variáveis de habilidades, evidenciando que a aprendizagem de conceitos e o uso de habilidades estão diretamente conectadas durante o treinamento.

CAPÍTULO V

PROCEDIMENTO, MATERIAIS E MÉTODO

A presente pesquisa foi realizada em uma escola padrão de Vargem Grande do Sul, da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo.

A escola padrão faz parte de um projeto de reformas da escola pública, iniciado em 1991, onde os professores possuem uma carga horária reduzida em sala de aula, complementando sua jornada com H.T.P. (Hora de Trabalho Pedagógico). Nessas H.T.P., os professores, orientados por um coordenador, além de discutirem temas relevantes ao trabalho pedagógico em sala de aula, trocam experiências, de maneira a tornar o trabalho de sala de aula mais produtivo.

Os professores da escola padrão são motivados a seguir a Proposta Curricular elaborada pela CENP (Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas) e são também incentivados a desenvolver projetos junto aos alunos com a finalidade de tornar a aprendizagem mais significativa. Dentro dessas possibilidades, é que o presente estudo foi desenvolvido.

1 - SUJEITOS

A amostra foi constituída por 137 alunos de primeiro grau, de 5ª a 8ª séries e constituiu-se em uma amostra de conveniência.

Para evitar a variação devido aos turnos, o trabalho foi desenvolvido junto às séries de um mesmo turno. Foram escolhidas as séries do período da manhã, pois o período da tarde não possui todas as séries do 1° grau.

O turno da noite não foi escolhido pelo fato de incluir outras variáveis, como a idade, que não havia sido selecionada previamente para estudo e, além disso, as séries do período noturno apresentavam grandes disparidades em relação às idades.

A amostra foi constituída por 137 sujeitos de 5ª a 8ª séries e são distribuídas conforme a tabela abaixo:

Tabela 7
Distribuição dos sujeitos por série (N = 137)

SÉRIE	F = Nº ALUNOS	F ACUMULADA	%
5ª	32	32	23
6ª	33	65	24
7ª	34	99	25
8ª	38	137	28
TOTAL	137		100

É conveniente observar que a professora é a mesma para todas as séries e a mesma utilizava a Proposta Curricular. Além disso, é importante destacar que o conteúdo de Geometria, no momento da aplicação dos testes, não havia ainda sido trabalhado nas séries.

2 - Materiais

Os materiais utilizados no presente trabalho foram os seguintes:

a) Questionário (Anexo):

Foi aplicado um questionário, que além de informações sobre os sujeitos, apresentava questões sobre triângulo e paralelogramo, além de solicitar a construção dessas duas figuras com régua. Essa atividade foi construída com base em atividades apresentadas em uma pesquisa realizada anteriormente por Burger e Shaughnessy (1986).

O *objetivo desse questionário foi investigar o conhecimento* que os alunos já possuíam sobre os atributos definidores de triângulo e paralelogramo, observando particularmente quais as palavras que esses utilizam para definir os conceitos solicitados.

ERRATA

página 52. linha 5

em vez de: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°$

leia-se: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

página 59. linhas 2 e 3

em vez de: Construímos, portanto, um paralelogramo com as 4 medidas iguais. Logo, o paralelogramo construído é um **Losango**.

leia-se: Construímos. portanto. um paralelogramo com as 4 medidas não todas iguais. Logo. o paralelogramo construído não é um **Losango**.

página 61. linha 11

em vez de: Klausmeier. Sipple e Allen. 1977

leia-se: Klausmeier (Klausmeier. Sipple e Allen apud Klausmeier. 1977)

página 126. linha 2 (anexo)

em vez de: distância entre a e b

leia-se: distância entre r e r'

Através da atividade de construção de figura com régua, foi possível analisar os tipos mais freqüentes de triângulos e paralelogramos construídos pelos alunos.

b) Testes de atributos definidores (Anexo):

O teste de atributos definidores consta de várias afirmações sobre os atributos de triângulo e paralelogramo e, neste teste, são apresentadas várias afirmações e os alunos assinalam verdadeiro ou falso na frente de cada afirmação.
O teste de atributos definidores não apresentava as figuras, porque o teste subseqüente a esse era o teste de exemplos e não-exemplos e a apresentação de figuras poderia levar a uma aprendizagem que, talvez, influenciasse no desempenho do aluno no teste seguinte.
O teste foi elaborado a partir dos atributos de triângulo e paralelogramo e também de *definições dadas por alunos e que foram extraídas do estudo exploratório, descrito no* capítulo 1.

c) Testes de exemplos e não-exemplos (Anexo):

Este teste de exemplos e não-exemplos é baseado no trabalho desenvolvido por Feldman e Klausmeier (1974). Ao instrumento utilizado por esses dois autores, foram introduzidas as seguintes modificações:

a) No trabalho de Klausmeier, referente à formação de triângulo eqüilátero, era dada a definição da figura a ser aprendida, enquanto, no presente estudo, não foram fornecidas as definições dessas figuras.
b) Foram acrescentadas, no final do teste de triângulo, os três seguintes elementos - prisma triangular, triângulo de papel e tetraedro regular - sendo que esses elementos não constavam do trabalho original.

No teste de paralelogramo, foram acrescentados os três seguintes elementos: prisma triangular, quadrado de papel e cubo. Esses foram acrescentados com o objetivo de verificar o atributo "figura plana" e "figura não plana".

As figuras foram selecionadas de acordo com os atributos de cada uma delas (triângulo e paralelogramo). No caso do triângulo, foram colocadas figuras abertas, fechadas, com segmentos de retas e curvas.

Algumas figuras foram elaboradas apresentando atributos irrelevantes como hachuras e bordas espessas e isso foi baseado em Feldman e Klausmeier (1974). O objetivo foi verificar se o aluno assinalava a figura sem levar em consideração o atributo irrelevante. Klausmeier utilizou atributos irrelevantes em suas pesquisas para evitar a má compreensão que, segundo ele, ocorre quando os não-exemplos são identificados como exemplos e um exemplo do conceito é identificado como não-exemplo do conceito.

3 - TESTAGEM PRÉVIA DOS INSTRUMENTOS

Os instrumentos (questionário, teste dos atributos definidores e testes de exemplos e não-exemplos) foram inicialmente aplicados em alunos de outras escolas, com o objetivo de verificar a compreensão das instruções e também das palavras envolvidas nas afirmações do teste de atributos definidores.

Os testes foram aplicados em uma escola não padrão da rede oficial de ensino de Vargem Grande do Sul - S.P., tendo sido sorteados 5 alunos de cada série, todos do período da manhã, que era o único que possuía todas as séries. Foi submetido a esta pré-testagem um total de 20 alunos, sendo que esta aplicação foi coletiva.

A primeira explicação foi que os testes não seriam utilizados para notas e eles poderiam perguntar todas as palavras que não entendessem.

Todos os alunos receberam uma régua e com o auxílio da professora de matemática da escola, os alunos responderam primeiramente ao questionário, depois ao teste de atributos definidores e, finalmente, fizeram os testes de exemplos e não-exemplos, sendo que esses alunos levaram, aproximadamente, 50 minutos para responder a todas as questões.

A única pergunta feita pelos alunos foi:

O que é um quadrilátero?

Esta pergunta foi respondida após o término das atividades. Foi verificado que os alunos não tiveram dificuldades na interpretação das instruções, nem nas afirmações dos atributos definidores de triângulo e paralelogramo.

4 - PROCEDIMENTO PARA COLETA DOS DADOS

Os testes foram aplicados com o auxílio de uma professora de matemática, sendo que esta professora não lecionava para as classes onde os testes foram aplicados.

Os alunos recebiam uma régua e a folha do questionário e o aplicador lia as instruções em voz alta, tendo sido enfatizado que as figuras deveriam ser feitas com o auxílio da régua.

Quando todos os alunos terminavam de responder, as folhas eram recolhidas e era entregue o teste de atributos definidores. As instruções eram lidas em voz alta e ressaltado que deveriam tomar cuidado para não assinalar duas respostas, isto é, escolher verdadeiro e falso ao mesmo tempo.

Ao término desta etapa, as folhas eram recolhidas e era distribuído o teste de exemplos e não-exemplos de triângulo e, em seguida, as folhas com os testes de exemplos e não-exemplos de paralelogramo.

Com relação ao tempo total gasto para realizar todas as provas, cada classe levou, aproximadamente, 50 minutos para responder aos testes e ninguém ultrapassou esse tempo.

É importante deixar claro que cada um dos instrumentos anteriores não foram aplicados simultaneamente, porque se assim fossem, os alunos poderiam utilizar algumas afirmações do teste de atributos definidores e alguns exemplos do teste de exemplo e não-exemplos para responder às perguntas do questionário.

Na aplicação dos testes de exemplos e não-exemplos, após todos os alunos terem respondido até o teste nº 12 (no caso do triângulo) e até o nº 13 (no caso do paralelogramo), era mostrado aos alunos o elemento 1 (prima triangular), seguido da pergunta "Este elemento é um triângulo?". Após a pergunta, os alunos assinalavam verdadeiro ou falso na folha de respostas. Em seguida, era mostrado o elemento seguinte e assim por diante, e este procedimento foi realizado com os elementos 1, 2 e 3 de triângulo e também 1, 2 e 3 de paralelogramo.

Durante a aplicação dos testes, não foi permitido ao aluno nenhuma consulta e os sujeitos foram solicitados a não se comunicar com os colegas.

É interessante notar que, ao aplicar os testes na quinta série, alguns alunos diziam frases como: "O que é um paralelogramo?", "A professora ainda não ensinou", "Eu não sei o que é um paralelogramo". Essas perguntas foram respondidas pela professora de Matemática da classe, após o término da aplicação dos testes.

Análise Estatística dos dados

Os dados foram processados, utilizando o programa estatístico SAS e os gráficos foram feitos pelo programa CSS ou SAS segundo o detalhamento do tipo de análise de cada um dos instrumentos.

Análise do Questionário

Em primeiro lugar, foram elaboradas tabelas de contingência dos atributos da pergunta, de acordo com a codificação previamente estabelecida (anexo 1). Em seguida, para cada tabela, foi utilizado o teste Qui-quadrado de Pearson e Kruskal-Wallis, com a finalidade de verificar se as séries eram ou não homogêneas, sendo que os resultados mostraram que não havia homogeneidade nas séries. O passo seguinte foi investigar a natureza da relação entre as séries, aplicando a Análise de Correspondência.

A correção das questões do questionário foi processada da seguinte maneira: A cada aluno foi atribuída uma nota de zero a cem distribuída de acordo com as respostas. Assim, se o aluno respondeu à questão, utilizando algum atributo definidor (lados, ângulos, vértices ou outros), obteve nota 100; se a resposta foi dada através de uma definição de um caso particular (respondeu como triângulo eqüilátero, por exemplo) obteve nota 60; se respondeu com palavras, evidenciando uma dificuldade de expressão (ou verbalização), obteve 30 e se o aluno não respondeu ou respondeu incorretamente, obteve nota 0 (zero).

Com relação ao número de triângulos desenhados, foram atribuídas as seguintes notas: zero para o aluno que não desenhou nenhum tipo de triângulo; um, dois e três para os alunos que desenharam, respectivamente, um, dois e três tipos de triângulos.

O mesmo procedimento foi utilizado para a análise do número de paralelogramos desenhados.

Análise do teste de atributos definidores

Foi elaborada uma tabela de médias e erros-padrão do número de acertos e erros por série para triângulo e outra para paralelogramo. Foi verificado, mediante o teste estatístico de Kruskal-Wallis e a aplicação da Análise de Variância, ANOVA, se as séries eram ou não homogêneas. Com a constatação da não-homogeneidade das séries, foi aplicado o box-plot com a finalidade de investigar a natureza da relação entre as séries.

Análise do teste de exemplos e não-exemplos

Os instrumentos utilizados para a análise do teste de exemplos e não-exemplos foram os seguintes: Teste de Kruskal-Wallis e ANOVA para verificar se as séries eram homogêneas e Análise de Correspondência para a análise da natureza da relação entre as séries e as figuras indicadas como exemplos e não-exemplos.

Caracterização da Análise de Correspondência

A presente pesquisa utiliza como instrumento estatístico para a análise dos dados a Análise de Correspondência.

A Análise de Correspondência (AC) estuda tabelas de freqüências cruzadas também chamadas de tabelas de contingência e se constitui numa técnica de análise exploratória onde, a partir da análise de tabelas, podemos gerar hipóteses para associar variáveis categóricas envolvidas na tabela de contingência e a relação entre linhas e colunas, o que é essencialmente útil, quando as tabelas são grandes. Logo, com experimentos confirmatórios posteriores, estas podem ser testadas, com o uso de metodologias usuais da Estatística.

A AC é considerada como um algorítmo de redução de dados que fornece imagens simplificadas da realidade multidimensional e a busca da melhor representação simultânea que indica a dependência de dois conjuntos de categorias, compreendidos pelas linhas e colunas da tabela de contingência. As regras de interpretação estão ligadas aos princípios geométricos das transformações efetuadas sobre os dados e permitem remontar às estruturas reais a partir de estruturas representadas.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS, ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO

ANÁLISE DOS DADOS REFERENTES AO QUESTIONÁRIO

Com relação aos atributos definidores do triângulo, pode ser observado que o atributo mais utilizado pelos alunos foi "3 lados", deixando evidente que este foi o único atributo que apresentou diferenças significativas ($p < 0.05$) entre as séries, sendo que as outras características apareceram com uma porcentagem pequena em determinadas séries. Por exemplo, somente 1.5% dos alunos das quatro séries identificaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e esta identificação apareceu em 5.9% de alunos de 7ª série.

É conveniente observar que somente 5.8% dos alunos forneceram a definição de triângulo eqüilátero para o conceito de triângulo, sendo esta definição mais freqüente em alunos da 6ª série (9.1%).

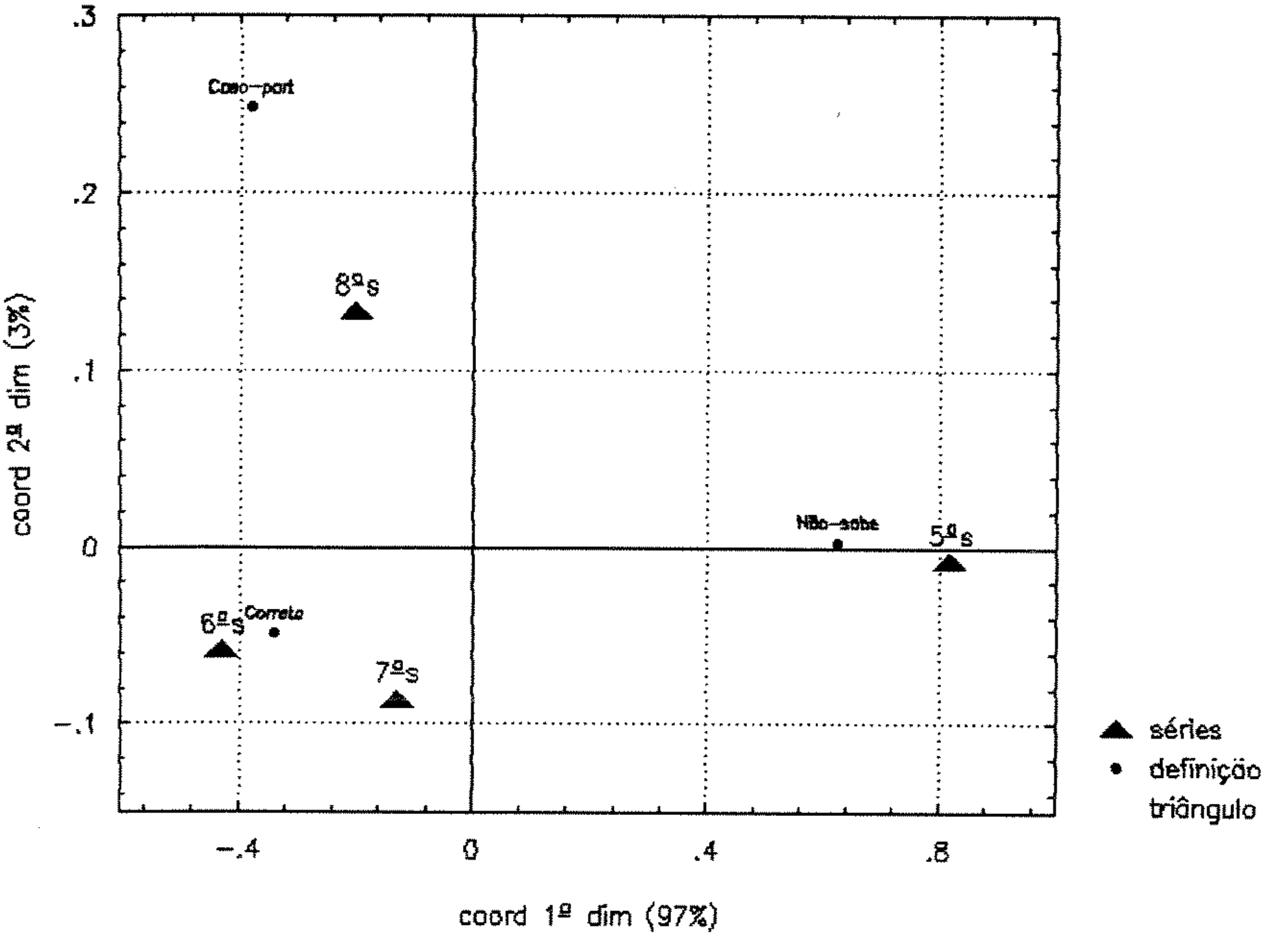
O gráfico 1 a seguir mostra o desempenho das três séries em relação à definição de triângulo onde o eixo horizontal pode ser interpretado como um fator de definição de triângulo, mostrando, pelo lado esquerdo, os grupos que conseguiram definir de forma mais completa e, pelo lado direito, os grupos que não conseguiram. Vemos, então, que entre as quatro séries, a sexta série foi a que obteve um melhor desempenho, seguida da 7ª, da 8ª e da 5ª séries.

Por outro lado, o eixo vertical pode ser interpretado como um fator de tipos de respostas dadas por alunos das quatro séries em relação ao triângulo.

Esses tipos de respostas podem ser agrupadas em: a) respostas como conseqüência da definição e b) respostas como caso particular (ao invés de terem dado a definição geral de triângulo, os alunos definiram um caso particular).

Gráfico 1

Análise de Correspondência das séries e a definição de triângulo



A oitava série apresenta uma tendência em definir o conceito de triângulo, através de casos particulares, enquanto a 6ª e a 7ª séries definem em termos de um único atributo (3 lados), aparecendo um pequeno número de alunos dessa série que definem o triângulo como casos particulares (triângulo retângulo, isósceles, escaleno e eqüilátero). Os dados obtidos dos alunos da 5ª série permitem afirmar que esses alunos não conseguem definir o triângulo em termos dos seus atributos definidores (gráfico A_1, Anexo IV), havendo uma grande dificuldade de verbalização e expressão do conceito. Uma porcentagem de 6,2% dos alunos de 5ª série utilizaram palavras como: ponta, objeto, gráfico, pirâmide para definir o triângulo, ou seja, palavras que não fazem parte da definição, mas que, pelos desenhos, indicaram que esses alunos têm uma visão clara de alguns exemplos dessas figuras, embora não consigam verbalizar o conceito (ver algumas respostas de alunos das 4 séries no Anexo III).

É conveniente notar (tabela A_1 do Anexo IV) que a característica "dificuldade de verbalizar" também aparece na 7ª e na 8ª séries com porcentagens de 8.8% e 2.6%, respectivamente.

Com relação aos tipos de triângulos desenhados, o gráfico A_2 do Anexo IV, elaborado a partir da tabela A_2 do Anexo IV, mostra que alunos de 8ª série desenharam uma porcentagem de 66% de triângulos retângulos e isso, talvez, se deva ao fato de terem estudado o Teorema de Pitágoras na série anterior. A sétima série desenhou, com maior freqüência, triângulos isósceles (76,5%) e eqüiláteros (70,6%), enquanto os alunos da sexta série desenharam mais triângulos isósceles (81,8%). Já, a 5ª série não conseguiu desenhar tipos diferenciados de triângulos.

Analisando as respostas referentes ao conceito de paralelogramo, observamos que o atributo "4 lados" foi o mais indicado pelos alunos das quatro séries (27% do total), constituindo-se numa característica que apresentou diferenças significativas ($p < 0.05$) entre as séries, ao passo que "lados opostos paralelos" e "dificuldade de verbalização" não apresentaram diferenças expressivas entre as séries.

Na categoria de "dificuldade de verbalizar", foram incluídas as respostas dos alunos que conceituaram paralelogramo como: "Figuras com linhas paralelas", "Quadrilátero de alturas caídas", "Quatro retas paralelas".

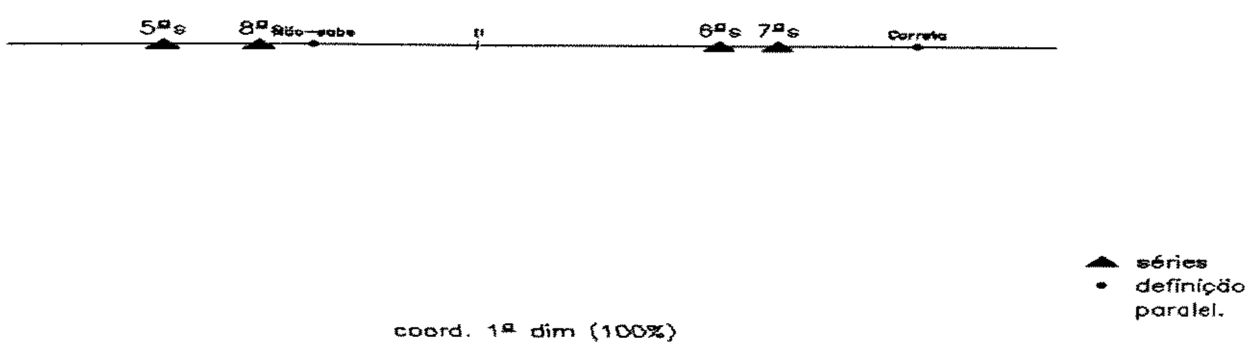
Os alunos que responderam, fazendo uso dessas definições, conseguiram desenhar algum tipo de paralelogramo. Outros tipos de respostas podem ser observadas no Anexo III.

Ainda pode ser verificado que a 5ª série obteve uma porcentagem muito baixa para o atributo 4 lados (3%) (90.6% dos alunos de 5ª série responderam "Não sei" para a pergunta "o que é um paralelogramo"). Houve, também, em outras séries, uma porcentagem alta de respostas "Não sei", sendo que 36.3% dos sujeitos da 6ª série, 63% dos sujeitos da 8ª série e 26.4% dos sujeitos da 7ª série forneceram essa resposta.

O gráfico abaixo mostra as séries que conseguiram conceituar o paralelogramo de forma mais completa.

Gráfico 2

Análise de Correspondência das séries e a definição de paralelogramo



Com relação ao desenho elaborado pelos sujeitos, o gráfico A_3 do Anexo IV mostra que a 6ª e a 7ª séries conseguiram desenhar algum tipo de paralelogramo (losango, retângulo e outro tipo de paralelogramo), enquanto a 5ª e a 8ª séries não desenharam muitos exemplos desta figura. Apenas 12.5% dos sujeitos da 5ª série e 24% dos sujeitos da 8ª série desenharam algum exemplo de paralelogramo.

Com os resultados gerais desta primeira parte, foi elaborado o gráfico A_4 do Anexo IV com a finalidade de mostrar o desempenho das quatro séries, indicando as que tiveram o melhor desempenho, sendo que essas foram a 7ª e a 6ª séries seguidas da 8ª e da 5ª séries.

Análise do teste de atributos definidores

A tabela abaixo mostra as porcentagens de acertos de atributos definidores de triângulo paralelogramo.

Tabela 8

As séries e os atributos definidores de triângulo e paralelogramo

(Resumo da 2ª parte dos testes)

Série		Acertos atr triângulos (%)		Acertos atr paralelogramos (%)		Acertos atributos (%)	
	Número	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão
Série							
5-s	32	53.53	2.12	54.66	2.24	54.13	1.52
6-s	33	63.91	3.36	64.24	2.95	64.12	2.18
7-s	34	73.15	2.92	69.74	2.69	71.18	2.38
8-s	38	65.55	2.15	61.82	2.65	63.37	1.60
Total	137	64.23	1.44	62.69	1.39	63.33	1.09

Há evidências de que as séries se distinguem pelos atributos de triângulos do teste de verdadeiro e falso (Kruskal-Wallis: $X^2 3=22.825$ p-v=0.0001, ANOVA: F= 8.796 p-v=0.0001)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos atributos de paralelogramos do teste de verdadeiro e falso (Kruskal-Wallis: $X^2 3=14.386$ p-v=0.0024, ANOVA: F= 5.326 p-v=0.0017)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos atributos em geral do teste de verdadeiro e falso (Kruskal-Wallis: $X^2 3=28.607$ p-v=0.0001, ANOVA: F=12.362 p-v=0.0001)

É importante observar que a série que ficou abaixo da média foi a 5ª série. A sexta série apresentou pequena diferença em relação à porcentagem geral de acertos (63.9%).

Alguns atributos tiveram uma porcentagem muito alta de acertos, como é o caso de "figura fechada" (tabela A_6 do Anexo IV). Os resultados mostraram que a afirmação com menor acerto foi "Triângulo é um ângulo que possui 3 lados". É válido ressaltar que no atributo "Figura Plana", a sexta série obteve um desempenho inferior à 5ª série.

A tabela A_7 do Anexo IV mostra o desempenho das quatro séries com relação aos atributos definidores de paralelogramo.

A única série que obteve uma porcentagem de acertos abaixo da geral foi a 5ª. O atributo "Figura Plana" teve a maior porcentagem de acertos (90.5% dos sujeitos) e o atributo de menor acerto foi "possui 2 lados inclinados" (26.3% do total dos sujeitos).

O gráfico A_5 do Anexo IV resume o desempenho dos alunos em atributos definidores de triângulo e paralelogramo, onde temos a maior porcentagem presente na 7ª série, seguida da 6ª, da 8ª e da 5ª séries.

Análise do teste de exemplos e não-exemplos

As tabelas A_8 e A_9 do Anexo IV mostram as respostas de todos os sujeitos com relação ao acerto de exemplos de triângulo e paralelogramo.

Em relação ao triângulo, a sétima série obteve a maior porcentagem seguida da 8ª, da 6ª e da 5ª séries. Já em relação à identificação de exemplos de paralelogramo, a 7ª série obteve a maior porcentagem de acertos seguida da 5ª, da 6ª e da 8ª séries.

Apenas uma pequena parte dos estudantes conseguiram identificar sólidos geométricos como uma figura espacial, tendo sido obtido os seguintes resultados: 32% para prisma triangular, 26% para pirâmide, 16.8% para prisma com faces em forma de paralelogramos e 58.4% para cubo, do total dos alunos.

Esses elementos (prisma e pirâmide) são considerados como exemplos para a grande maioria dos alunos e não como um não-exemplo. Pode ser observado, também, que uma grande parte dos sujeitos identificaram o trapézio como exemplo de paralelogramo e não como um não-exemplo desse conceito.

O gráfico A_6 do Anexo IV mostra o desempenho das quatro séries em relação às figuras geométricas (triângulo e paralelogramo). A sétima série obteve o melhor desempenho seguida da sexta, da quinta e da oitava séries.

Resumindo as três partes dos testes (questionário, teste de atributos definidores e teste de exemplos e não-exemplos), construímos, a partir da tabela abaixo, o gráfico 3 o qual mostra que a sétima série desempenhou-se siginificativamente melhor ($p < 0.05$) que as outras séries, seguida da sexta, da oitava e da quinta séries.

Tabela 9

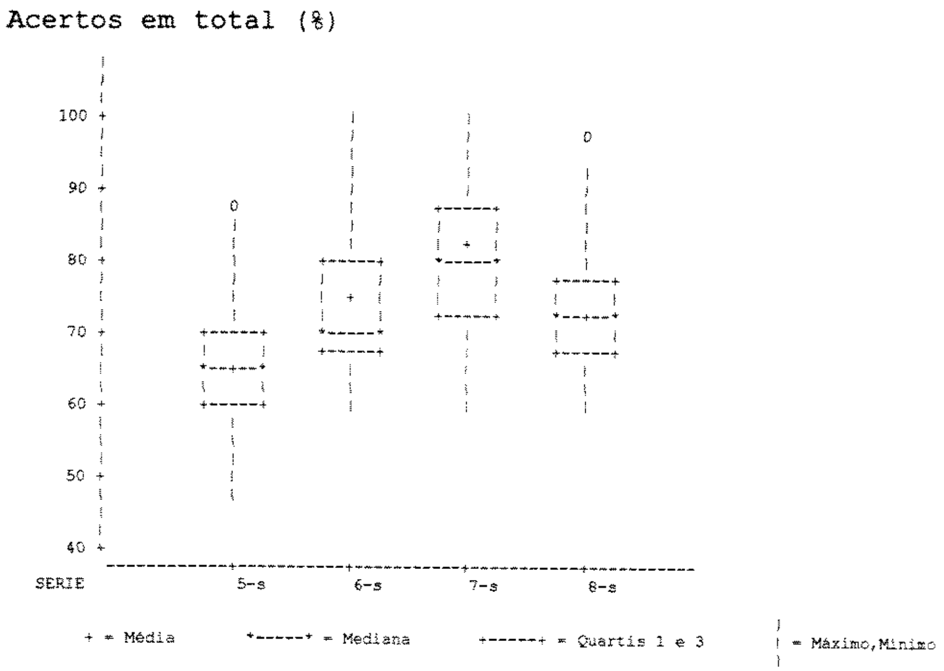
Resumo geral das três partes do instrumento (questionário, teste de atributos definidores e testes de exemplos e não-exemplos) com relação ao conceito de triângulo e paralelogramo

Série	Número	Acertos triângulos (%)		Acertos paralelogramos (%)		Acertos em total (%)	
		Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão
5-s	32	62.44	1.60	68.94	2.33	65.81	1.60
6-s	33	71.45	1.80	77.42	2.97	74.64	1.79
7-s	34	78.53	1.97	83.88	2.71	81.26	1.97
8-s	38	72.58	1.57	74.29	2.32	73.50	1.43
Total	137	71.42	0.99	76.18	1.36	73.91	0.96

Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos em triângulos, em geral nas 3 provas (Kruskal-Wallis: $X^2 3=32.148$ p-v=0.0001, ANOVA: F=13.984 p-v=0.0001)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos em paralelogramos, em geral nas 3 provas (Kruskal-Wallis: $X^2 3=16.350$ p-v=0.0010, ANOVA: F= 5.635 p-v=0.0011)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos em geral, nas 3 provas (Kruskal-Wallis: $X^2 3=30.325$ p-v=0.0001, ANOVA: F=13.366 p-v=0.0001)

Gráfico 3

Resumo geral das três partes do instrumento (questionário, teste de atributos definidores e teste de exemplos e não-exemplos) com relação a triângulo e paralelogramo



Discussão

Os resultados da análise estatística evidenciaram diferenças significativas ($p < 0.05$) entre as séries em termos dos atributos definidores e dos exemplos e não-exemplos. A série que obteve um melhor desempenho nos testes foi a 7ª, seguida da 6ª, da 8ª e da 5ª séries.

Isso mostra que alunos, em séries mais adiantadas (8ª série), tiveram um desempenho inferior aos alunos em séries menos adiantadas (6ª e 7ª séries). Em outras palavras, alunos de 6ª e de 7ª séries conseguem definir o conceito de triângulo e paralelogramo em termos de seus atributos definidores, discriminando exemplos e não-exemplos do conceito de forma mais completa que os alunos de 5ª e de 8ª séries.

Com relação aos sujeitos da quinta série, os dados indicam que a grande maioria desses alunos não conhecem a figura paralelogramo nem os seus tipos, o que permite pensar que a geometria de 1ª a 4ª série não tem conseguido levar os alunos a *construir significativamente os conceitos e, aparentemente, esses mesmos alunos não foram ensinados a discriminar os atributos criteriais das figuras.*

O currículo de Matemática para o ensino de 1ª e 4ª séries consta do tópico "Áreas de figuras planas". Os alunos que estão na quinta série e que foram submetidos aos testes podem ter calculado áreas e perímetros de figuras planas sem o conhecimento dos seus atributos definidores, e o ensino desse conteúdo pode ter sido levado a efeito apenas através de fórmulas, com poucos exemplos e sem o uso de não-exemplos, que, segundo Klausmeier (1977), gera uma má compreensão do conceito.

Pela presente pesquisa, pode ser constatado que o trapézio é uma figura que 65,6% dos alunos de 5ª série indicam como exemplo de paralelogramo, evidenciando que pouco se valoriza o ensino dos não-exemplos do conceito.

Com relação aos sólidos geométricos, os resultados mostraram que 25% dos alunos de 5ª série reconhecem o prisma triangular como não-exemplo de triângulo. Esse fato está de acordo com os resultados obtidos por Klausmeier (1977), pois esse autor verificou que, quando alunos reconhecem exemplos como não-exemplos e vice-versa, está *ocorrendo uma má compreensão do conceito. Esta má compreensão, também, foi detectada em alunos de 8ª série, pois 24% dos estudantes dessa série identificaram* o prisma triangular como sendo um não-exemplo de triângulo, o mesmo ocorrendo com a pirâmide (10.5% dos sujeitos). Tal fato permite que esses alunos saiam do primeiro grau apresentando dificuldades para diferenciar as figuras planas das figuras não planas.

É conveniente observar que os alunos de 5ª série não conseguem identificar os atributos criteriais do conceito de triângulo e paralelogramo, mas identificam exemplos e não-exemplos do conceito de uma maneira mais adequada e completa que alunos da 8ª série.

Com relação ao desempenho dos sujeitos da 8ª série, pode ser verificado que esses estudantes, teoricamente, deveriam apresentar um nível conceitual mais elevado que alunos da 5ª, da 6ª e da 7ª séries em relação ao conceito dessas duas classes de figuras que foram investigadas e a razão disso é que esses alunos tiveram mais contato com essas figuras, pois, de acordo com a professora da série, a geometria é trabalhada na escola em todas as séries.

Foi verificado que esses alunos não conseguiram escrever ou verbalizar as definições e, tampouco, desenhar muitos tipos de paralelogramos. A ocorrência desse fenômeno pode ser explicada de duas maneiras: ou os alunos aprenderam os conceitos através da valorização dos aspectos visuais (que indica o Nível 0 de Van Hiele), sem estabelecer relações com as propriedades que os mesmos possuem (que indica o Nível 1 de Van Hiele) e sem relacionar com a construção da figura utilizando a régua e o compasso, *ou os alunos aprenderam os conceitos e, pelo fato de não utilizar esses, esqueceram-nos.*

Embora a professora dessa série considerasse os alunos como tendo um bom desempenho, os mesmos apresentaram relativa dificuldade, para verbalizar os atributos criteriais do conceito, o que pode indicar que grande parte desses sujeitos da 8ª série não atingiram o nível formal do conceito, segundo os propostos por Klausmeier (1977).

Os alunos de 7ª e de 6ª séries tiveram desempenhos superiores à 5ª e à 8ª séries nos testes, conseguindo dar uma definição adequada para triângulo e paralelogramo, desenhar diferentes figuras, além de reconhecer um ou mais atributos definidores do conceito.

Essas duas classes também conseguiram discriminar entre os exemplos e não-exemplos das figuras, com uma porcentagem relativamente alta de acertos (68% dos alunos de 6ª série e 74% dos alunos de 7ª série).

Os resultados desse grupo mostraram que a série não é o melhor parâmetro para estabelecer o grau de aprendizagem dos alunos e o nível no qual esses alunos se encontram com relação aos conceitos de triângulo e paralelogramo em termos de seus atributos definidores, quantidade de exemplos e não-exemplos, pois alunos de séries menos adiantadas mostraram aprendizagens mais completas que alunos de séries mais adiantadas.

A partir dos resultados obtidos, podemos inferir que o ensino de Geometria, nessa escola, está sendo processado sem uma maior preocupação com a aprendizagem significativa dos conceitos, evidenciando que, muitas vezes, os alunos calculam áreas e perímetros, sem conhecer os atributos e exemplos e não-exemplos diferenciados das figuras, trabalhando apenas com fórmulas memorizadas e problemas-tipo.

Embora os resultados do presente trabalho não possam ser generalizados para todas as escolas, pode ser inferido que é possível que os mesmos resultados apareçam em escolas com as mesmas características. Entretanto, outros procedimentos, além dos aqui utilizados, deveriam fazer parte de um estudo que envolvesse um maior número de sujeitos e grupos mais homogêneos, possibilitando uma maior generalização dos resultados.

CAPÍTULO VII

DESENVOLVIMENTO DE UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE CONCEITOS EM SALA DE AULA

Não é excessivo reafirmar que o estudo da formação de conceitos é de fundamental importância para os educadores, pois permite identificar os níveis conceituais em que os alunos se encontram e assim propor atividades de acordo com esses níveis. A importância da aprendizagem de conceitos é evidenciada por Klausmeier (1977, p. 310).

> *"A aprendizagem de conceitos é um objeto educacional muito importante em todos níveis escolares. De acordo com isso, professores, especialistas em currículo e planejadores de materiais de ensino estão envolvidos na identificação de conceitos que os alunos podem aprender em níveis sucessivamente superiores; também trabalham regularmente, visando o aprimoramento de materiais e procedimentos para ensinar conceitos".*

A realidade descrita acima é importante e mostra que estudos têm sido realizados no campo da formação de conceitos, principalmente no que diz respeito a utilização de materiais para se ensinar significativamente os conceitos. O que se presencia, atualmente, é que os resultados desses estudos, muitas vezes, não são utilizados pelo professor e isso se deve, em grande parte, ao desconhecimento e falta de divulgação dessas pesquisas.

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns pontos importantes no ensino de conceitos de triângulo e paralelogramo, bem como algumas atividades que poderiam ser utilizadas pelo professor em sala de aula. Os resultados da pesquisa, relatados no capítulo anterior, revelaram que muitos alunos que estão terminando o primeiro grau têm grande dificuldade de identificar o conceito de triângulo e paralelogramo em termos de seus atributos definidores. Isso evidencia que durante os oito anos de vida escolar desses alunos a compreensão dos conceitos geométricos elementares foi pouco enfatizada.

As atividades que serão apresentadas visam, à luz da teoria de Klausmeier, a auxiliar o professor a ensinar, de modo a propiciar a aprendizagem significativa dos conceitos, levando em consideração os atributos definidores dos conceitos que estão sendo ensinados, bem como um ensino planejado que leve em consideração tanto os exemplos (que devem ser bem fixados inicialmente) como os não-exemplos do conceito (que devem ser apresentados após o aluno dominar o conceito).

A TEORIA DE KLAUSMEIER SOBRE O ENSINO DE CONCEITOS

Ao ensinar os conceitos de triângulo e paralelogramo, o professor precisa, em primeiro lugar, identificar o nível em que o aluno pode formar estes conceitos. É muito importante que o professor saiba também o que o aluno já sabe em relação a estas duas figuras em termos de seus exemplos, dos não-exemplos e dos atributos definidores.

Podemos também verificar se o aluno consegue identificar uma taxonomia a qual o conceito pertence, de maneira a detectar as relações supra-ordenadas e subordinadas.

As relações supra-ordenadas dizem respeito à compreensão do conceito, partindo dos casos particulares para os casos mais gerais. Por exemplo: Se mostrarmos aos alunos vários tipos de quadriláteros onde a soma dos seus ângulos é sempre 360°, é de se esperar que o aluno, através do raciocínio indutivo, conclua que para todos os quadriláteros a soma dos seus ângulos será 360°. O professor, também, pode verificar a existência de relações supra-ordenadas-subordinadas, que dizem respeito à compreensão do conceito mais geral para o mais específico. Por exemplo: polígonos, quadriláteros, paralelogramos, retângulos, quadrados, cada conceito sucessivo é menos inclusivo que o precedente. O professor pode também, nesta parte de investigação a respeito do conceito, propor alguns problemas cuja solução envolva o uso do mesmo, no presente caso, o conceito de triângulo e paralelogramo, verificando, ainda, se os alunos possuem os nomes dos atributos definidores de triângulos e paralelogramo, lembrando que essa atividade preliminar no ensino de conceitos é de grande importância para a aprendizagem posterior e conseqüente retenção desse conceito.

Após essa primeira investigação a respeito daquilo que o aluno já sabe sobre o conceito a ser estudado, Klausmeier (1977) enuncia alguns aspectos sobre o procedimento do professor para com o ensino de conceitos em geral:

1. **Identificar o nível em que o aluno pode formar o conceito**. Isso implica em verificar se o aluno é capaz de formar o conceito no nível concreto, identidade, classificatório ou formal. No caso das figuras geométricas, os alunos vão para a escola com algumas noções, por exemplo, sobre triângulo e quadrado em termos visuais e, muitas vezes, em termos de nomenclatura dessas figuras, isto é, são capazes de denominá-las.
   O que se pretende na escola é que o conceito seja ensinado no nível classificatório e formal, pois segundo Klausmeier (1977, p. 52):

   > *"Conceitos adquiridos nos níveis classificatório e formal, mais maturos, podem ser usados na identificação de instâncias recentemente encontradas, tais como exemplos e não exemplos do conceitos".*

2. **Ensinar uma estratégia para atingir o conceito**. Os alunos precisam ser ensinados a perceber as características que distinguem exemplos de não exemplos. À medida que os estudantes ficam mais velhos, devem ser ensinados a procurar não apenas propriedades perceptíveis que diferenciam um conceito do outro, mas também os atributos definidores.

Programar uma seqüência adequada de conjuntos de exemplos e não exemplos para o ensino e avaliação do conceito. Esse aspecto tem como objetivo evitar erros de subgeneralização, supergeneralização e má concepção. A subgeneralização ocorre, quando são usados exemplos que são excessivamente parecidos ou são usados poucos exemplos do conceito. Se muitos triângulos são mostrados aos alunos, sendo todos na forma de eqüilátero, o aluno pode não identificar um triângulo obtusângulo como sendo também pertencente ao conjunto dos triângulos.

A supergeneralização ocorre, quando são apresentados não-exemplos muito parecidos e/ou em pouca quantidade, por exemplo, se os prismas ou pirâmides não são dados como não-exemplos de Polígonos, o estudante pode supergeneralizar que esses dois sólidos são Polígonos.

A má concepção ocorre, quando alguns exemplos do conceito são identificados como não-exemplos e não-exemplos são identificados como exemplos. Segundo Klausmeier (1977), a má concepção ocorre, quando um atributo irrelevante de um não exemplo é considerado como atributo definidor, por exemplo, quando está presente um quadrado pintado de vermelho e o sujeito assume a cor como sendo um atributo definidor de quadrado, um trapézio vermelho pode ser chamado de quadrado, e um quadrado verde pode não ser identificado como quadrado.

Em síntese, esses exemplos mostram que o professor deve estar sempre atento para esses tipos de erro, que, muitas vezes, levam os alunos a formar conceitos errôneos.

4. **Tornar claro os atributos definidores do conceito**. Os alunos devem ser incentivados no sentido de sempre verificar os atributos definidores do conceito, e não aceitá-los prontos e na forma final e acabada. No caso do triângulo e paralelogramo, os alunos deverão prestar atenção às características dessas duas figuras e enumerá-las.

5. **Estabelecer a terminologia correta para o conceito e seus atributos**. A definição de um conceito deve ser fornecido aos alunos num nível apropriado de aprendizagem. Neste aspecto, o nome do conceito e de seus atributos definidores facilitam a aprendizagem dos conceitos.

6. **Fornecer "feedback informativo"**. O feedback deverá estar presente depois de cada resposta dada pelos alunos, mas deve aparecer, principalmente, depois de respostas erradas, porque permite ao aluno refazer os passos percorridos e reorganizar adequadamente a estrutura cognitiva.

7. **Propiciar o uso do conceito**. A aprendizagem de conceitos deve estar direcionada para a solução de problemas, pois não teríamos resultados satisfatórios de aprendizagem se fornecêssemos somente as definições do conceito a ser estudado.

8. **Encorajar e orientar a descoberta e a auto-avaliação do aluno**. O professor deve encorajar os alunos a descobrir caminhos para a solução de problemas e suas descobertas deverão ser valorizadas. Klausmeier (1977, pp. 341-342) afirma que:

> *"Livros de texto, filmes e materiais de ensino encorajam o estudante a descobrir generalizações do conceito".*

Isso não quer dizer que os alunos terão que descobrir sozinhos, todos os elementos pertencentes ao conceito, mas que contarão com a direção do professor, de forma a tornar a aprendizagem mais significativa.

Livros, filmes e outros materiais não devem ser encarados como os agentes mais eficazes para a formação significativa do conceito, devendo ser vistos como elementos motivadores, para que os alunos façam suas próprias descobertas.

Esses passos propostos por Klausmeier são apenas sugestões para o ensino de conceitos e deverão ser combinados com outros tipos de materiais (jogos, manipulação e confecção de materiais concretos, etc..) para se obter uma aprendizagem mais significativa. Para que ocorra o ensino-aprendizagem efetivo, será necessário que o professor faça um planejamento para ensinar conceitos e princípios.

> *"Não esperamos que a maioria dos professores seja capaz de colocar todos os passos precedentes em ação, sem que tenham excelentes materiais de ensino e bastante tempo para planejar e se preparar para ensinar conjuntos específicos de conceitos e princípios" (Klausmeier, 1977, p. 343).*

De acordo com essa afirmação de Klausmeier, pode ser verificado que o professor necessita de tempo para preparar atividades que motivem a aprendizagem de conceitos e planejar ações que possibilitem uma maior compreensão dos princípios.

Se a escola não possui materiais apropriados, esses poderão ser construídos pelos alunos com o auxílio do professor que poderá, a partir dessas construções, ensinar, de forma mais adequada, alguns conceitos e princípios.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DO CONCEITO DE TRIÂNGULO E PARALELOGRAMO

Objetivo:

As atividades que serão apresentadas têm como objetivo levar o aluno a formar significativamente o conceito de triângulo e paralelogramo, levando-se em consideração três aspectos: atributos definidores, exemplos e não-exemplos.

Materiais:

Figuras de papel coloridas em forma de triângulo (eqüilátero, isósceles, escaleno, retângulo), paralelogramos (quadrado, retângulo, losango, e outros tipos de paralelogramos). Essas figuras deverão ser variadas e feitas com diferentes tipos de papéis, diferentes cores e tamanhos.

As atividades poderão ser introduzidas em sala de aula, sendo que o professor deverá adaptar esses exercícios de acordo com o nível conceitual dos alunos. Também, é muito importante que o professor utilize sua criatividade para elaborar novas atividades.

No caso dos paralelogramos, dependendo do nível conceitual dos alunos, poderão ser propostos problemas como os seguintes:

– Provar que as diagonais de um paralelogramo são congruentes e se interceptam ao meio.
– Provar que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é 360°.

Através de pequenas demonstrações, os alunos poderão utilizar as propriedades das figuras já estudadas (Nível 3 de Van Hiele - Dedução).

Primeira Atividade: Investigação sobre os conceitos disponíveis na estrutura cognitiva

O professor, através de um questionário, deverá investigar o que os alunos já conhecem a respeito de triângulos e paralelogramo e, para isso, poderá elaborar um instrumento com perguntas do tipo:

1. O que é um triângulo? Desenhe três tipos diferentes, com régua e compasso.
2. O que é um paralelogramo? Desenhe três tipos diferentes, com régua e compasso.

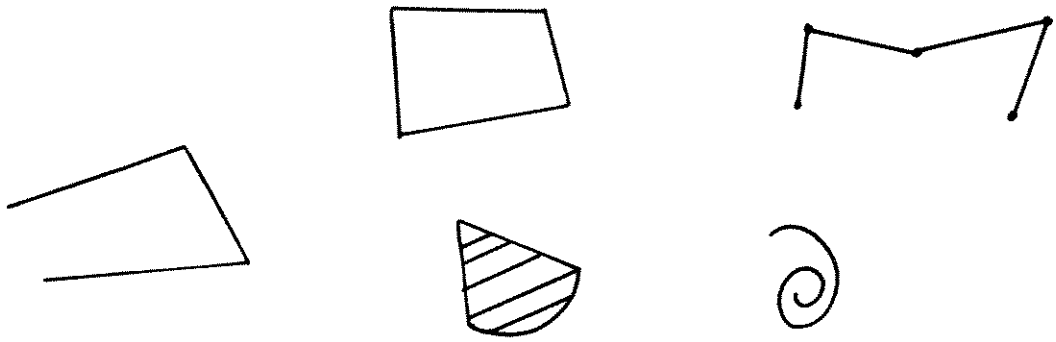
Com esta atividade, o professor poderá verificar quais os atributos que os alunos possuem em relação a essas duas classes de figuras, sendo que os que forem identificados com menor freqüência nas respostas, poderão ser trabalhados com mais afinco pelo professor.

Segunda Atividade: Compreensão de alguns atributos

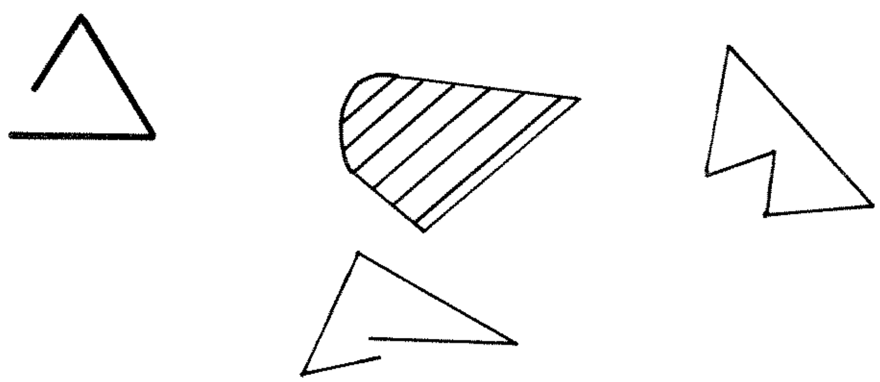
- Figura fechada e aberta

De modo geral, a maioria dos alunos que chegam à quinta série, já possuem alguma noção sobre aberto e fechado: porta aberta, porta fechada, janela aberta, janela fechada, caixa aberta, caixa fechada.

Relações com esse tipo de exemplos podem ser feitas com figuras geométricas:



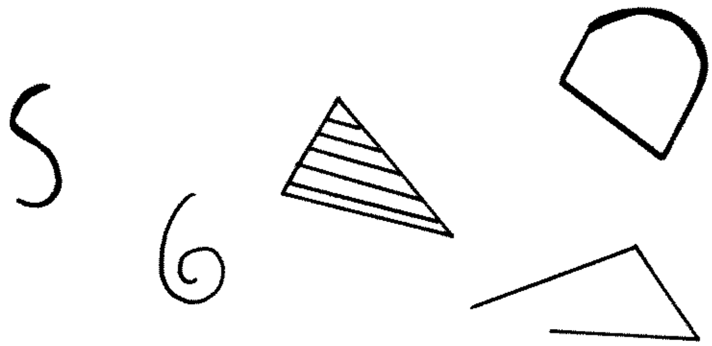
Pode ser desenhado um conjunto de figuras e, a partir dessas, os alunos devem identificar aberto ou fechado, levando-se em consideração, se existe ou não menção aos atributos relevantes e irrelevantes.



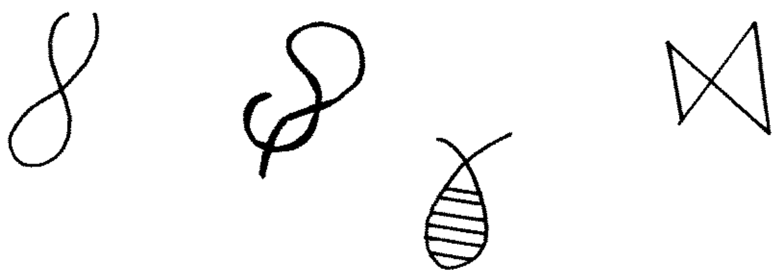
- Figuras simples e não simples:

Esse tipo de atributo nem sempre é ressaltado pelo professor. Podem-se dar alguns exemplos e não-exemplos, para que o próprio aluno identifique em figuras simples e não simples.

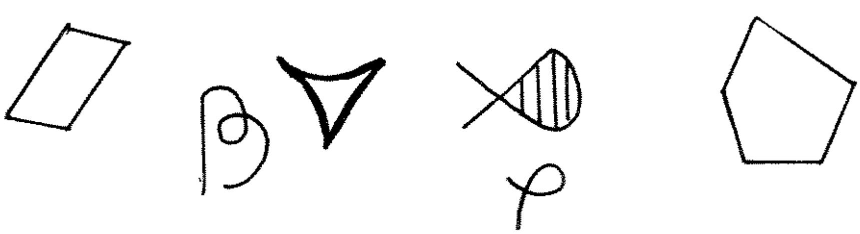
Estes são exemplos de figuras simples:



Estas são não-exemplos de figuras simples:



Quais são figuras simples?



Esta atividade utiliza elementos da teoria de Gagné (1975) que define um conceito como "disposição dos requisitos para a discriminação", ou seja, é um processo que permite classificação de objetos ou propriedades. Para Gagné, um conceito concreto é aquele que deve ser ensinado não com enunciados verbais, mas com exemplos concretos através dos quais o aluno irá observar o objeto e identificar as suas características relevantes. Foi o que propusemos nesta atividade número dois com figuras simples e não simples.

Após a identificação dos atributos criteriais do conceito, podemos passar para o conceito **definido** (definição) que utiliza a linguagem verbal para descrever o conceito. Através desse tipo de conceito, o indivíduo torna-se capaz de demonstrar o "significado" de alguma classe de objetos, eventos ou relações. Essa demonstração consiste em identificar aquilo a que as palavras se referem, mostrando suas relações e estabelecendo distinções. No caso da atividade de simples e não simples, após o aluno ter identificado os atributos criteriais que diferenciam esses dois conceitos, o professor passa para o conceito definido de figuras simples e não simples.

- Figuras planas e não planas:

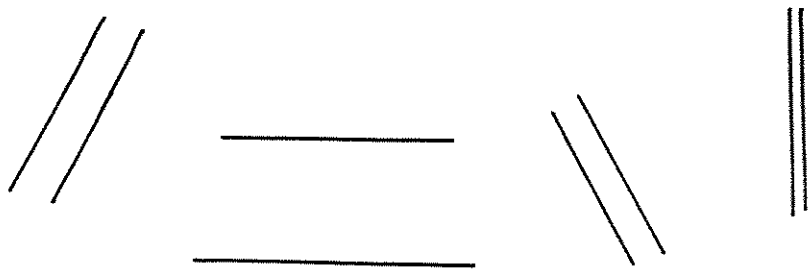
No estudo exploratório mostrado anteriormente, pode ser observado que 75% dos alunos de quinta série, 24% dos alunos de sexta série, 55% dos alunos de sétima série e 33% dos alunos de oitava série identificaram o prisma triangular como sendo exemplo de triângulo. Uma porcentagem de 37% de alunos de quinta série e 35% de alunos de sétima série indicaram a pirâmide como sendo exemplo de triângulo. Isso mostra que muitos alunos não estão fazendo as discriminações necessárias entre plano e não plano e, por isso, não podemos apresentar uma definição que mostra que o triângulo é uma figura plana.

É necessário analisar algumas atividades para a compreensão do conceito de plano e não plano e essas podem consistir em mostrar aos alunos várias figuras planas e vários sólidos geométricos, para se chegar à conclusão de que as figuras planas possuem duas dimensões e que os sólidos geométricos possuem três dimensões. Através dessas tarefas, o aluno deverá compreender, por exemplo, que não é possível colocar uma pirâmide (tridimensional) num plano (bidimensional).

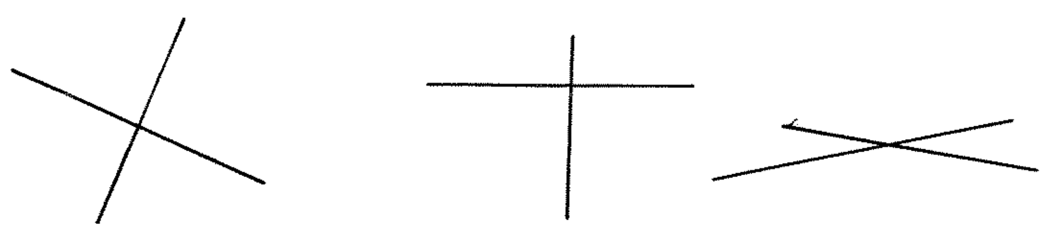
- Retas paralelas:

Atividades envolvendo retas paralelas também se fazem presentes, principalmente no estudo dos paralelogramos.

Estas são retas paralelas:



Estas não são retas paralelas:



A partir dessas características de exemplos e não exemplos, o professor pode perguntar quais as características de retas que são paralelas (retas paralelas são coplanares e não possuem ponto em comum).

- Ângulo reto, acutângulo e obtusângulo:

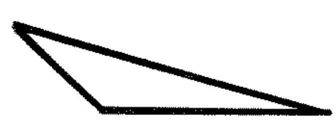
O mesmo tipo de atividade de exemplos e não exemplos feito para figuras simples e não simples pode ser fornecido aos alunos, para se chegar ao conceito de tipos de ângulos. É importante que o aluno saiba construir com régua e compasso o ângulo reto e alguns outros ângulos com o objetivo de se detectar suas características.

- Convexo e não convexo:

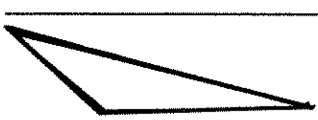
A partir de exemplos e não exemplos de figuras convexas e não convexas, podem ser identificados os atributos definidores dessas duas classes de figuras.

ENSINO DO CONCEITO DE TRIÂNGULO

Após a aplicação dessas duas atividades, podemos passar à atividade através da qual o conceito de triângulo e paralelogramo serão ensinados. Em primeiro lugar, os alunos são divididos em grupos e vários tipos de triângulos de diversas formas, cores e de diferentes papéis são apresentados aos mesmos. A primeira fase da atividade consiste numa "tarefa livre", ou seja, os alunos poderão manusear os triângulos e formar figuras com eles. Após essa etapa, cada figura é analisada. Por exemplo, supondo que a primeira figura a ser analisada seja um triângulo verde, como o da figura:



O professor pergunta aos alunos as características da figura, formando uma tabela, do seguinte tipo:

Figura	Atributos Gerais	Atributos Relevantes	Atributos Irrelevantes
			

Os alunos deverão enumerar todas os atributos gerais das figuras e, se algum atributo não for mencionado, o professor poderá interrogá-los, para obter informações sobre o conhecimento que os alunos apresentam sobre aquele conceito.

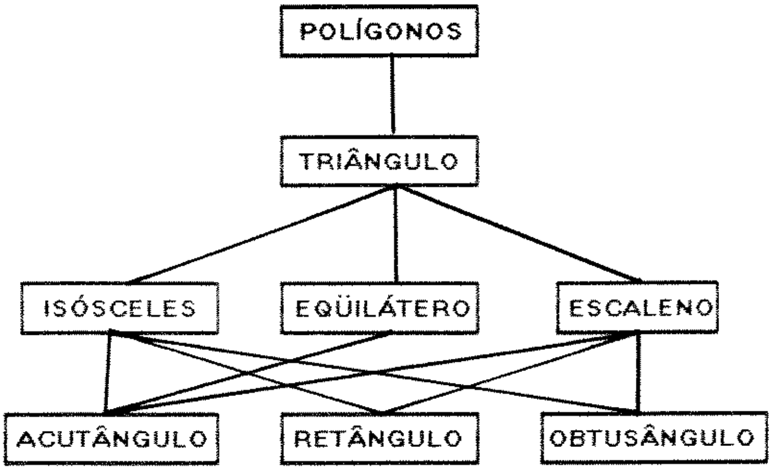
Suponhamos que os alunos tenham enumerado: Três pontas, três lados, verde, cartolina, três ângulos. O professor poderá perguntar: É uma figura plana? É uma figura simples? É uma figura fechada? É uma figura convexa?

Para se verificar se a cor verde é um atributo relevante ou irrelevante, poderão ser mostrados triângulos com o mesmo formato da figura analisada, com cores diferentes. É importante destacar que, se for modificado um atributo irrelevante, a forma da figura permanece a mesma e, se aumentarmos o número de lados, a figura ficará completamente modificada. Logo, lado é um atributo relevante. Se o tipo de papel usado for cartolina e mostrarmos a figura em papel sulfite, verificaremos que a forma não se modificou. Logo, tipo de papel é um atributo irrelevante, assim como a cor.

Vários outros tipos de triângulos podem ser analisados (eqüilátero, acutângulo, obtusângulo, escaleno, isósceles). O objetivo dessa atividade (mostrar vários tipos de triângulos) é observar que as características plana, fechada, simples, três segmentos de retas, aparecem em todos os tipos analisados. Com essas características, podemos dizer que as figuras que possuem esses atributos são chamados de triângulo. O que aparece modificado, de uma figura para outra, pode ser o lado ou ângulo. De acordo com os lados, há uma nomenclatura (eqüilátero, isósceles e escaleno) e de acordo com os ângulos também há uma nomenclatura (acutângulo, obtusângulo e retângulo). Com o uso da tabela, o aluno pode chegar à conclusão de que um triângulo escaleno pode ser retângulo, acutângulo ou obtusângulo, e um triângulo acutângulo pode ser equilátero ou isósceles. Esse tipo de relação é muito importante e deve ser alcançada, pois ângulos e lados devem estar sempre relacionados, para se ter uma visão geral da figura. A partir desse momento, um conjunto de figuras podem ser apresentadas aos alunos, para que esses as identifiquem ou não como triângulos.

Não pode ser deixada de lado a construção do triângulo com régua e compasso, pois é através dessa construção que os alunos começam a perceber quais os atributos que são utilizados na construção. Por exemplo, os alunos podem ser solicitados a traçar um triângulo eqüilátero. Construindo essa figura, o aluno percebe que deverá traçar os três lados iguais, tendo a oportunidade de medir os seus ângulos internos e chegar à conclusão de que cada ângulo interno de um triângulo eqüilátero é sempre 60°.

Pode ser mostrado, também, que o triângulo pertence a uma classe maior chamada **Polígono** (taxonomia).



Pela taxonomia, acima, podemos analisar as relações existentes entre os diversos tipos de triângulos. Por exemplo, um triângulo que é isósceles pode ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo, mas, se um triângulo é retângulo, podemos perceber pelo gráfico que ele poderá ser apenas isósceles ou escaleno.

Deve-se também mostrar aos alunos que uma pirâmide quadrangular é formada por 4 triângulos e que um prisma triangular é formado por 2.

Atividades do tipo "Qual é minha forma?" também podem ser exploradas em sala de aula. Nessa atividade, o professor diz várias características da figura a ser descoberta: "É uma figura plana."; "Possui os lados com a mesm medida."; "É uma figura simples e fechada."; "É uma figura convexa (neste momento pode-se perguntar aos alunos se eles já sabem qual é a figura)."; "É uma figura formada por três segmentos de retas."

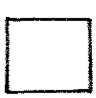
É importante enfatizar que, nesta atividade, os alunos poderão construir a figura descrita com régua e compasso.

ENSINO DO CONCEITO DE PARALELOGRAMO

Várias figuras de quadriláteros de cores e formas diferenciadas (quadrados, retângulos, losângos, quadriláteros não convexos, etc.) são fornecidos aos alunos, para que eles em um primeiro momento realizem a "tarefa livre", e, nessa atividade, os alunos poderão fazer figuras observando suas características.

A seguir, é solicitado aos alunos, previamente distribuídos em grupos, que separem as figuras em dois grupos. Por algum critério, eles poderão separar, por exemplo, o grupo de figuras convexas, do grupo das figuras não convexas; grupos das figuras que possuem ângulo reto, daquelas que não possuem ângulo reto e assim por diante.

Cada grupo verbaliza, em voz alta, para os outros grupos, o critério que utilizou para delimitar a classe de quadriláteros. Com esta atividade, os alunos poderão observar que existem quadriláteros com ângulos retos, convexos, não convexos, com lados iguais, com lados desiguais, e assim por diante. Após essa socialização das informações, os atributos criteriais de cada figura são analisados por toda a classe e, em seguida, os atributos relevantes e irrelevantes são identificados. Após, os alunos, juntamente com o professor, constroem uma tabela que envolve e mostra os atributos criteriais.

Figura	Atributos Gerais	Atributos Relevantes	Atributos Irrelevantes
			

As características gerais são enumeradas pelos alunos com o objetivo de analisar características comuns entre as figuras.

Observando os atributos das figuras, pode ser notado que o quadrado, o losango e o retângulo possuem lados opostos paralelos com a mesma medida, sendo figuras planas, fechadas e simples. As figuras com essas características recebem o nome de paralelogramo e o paralelogramo não precisa ter, necessariamente, todos os lados iguais. O retângulo é um paralelogramo, mas não precisa ter todos os lados iguais. O que diferencia os paralelogramos são os lados e os ângulos. Se a figura apresenta lados iguais com ângulo reto, essa é chamada quadrado ou losango, enquanto para lados iguais, sem a presença de ângulo reto, temos o losango.

Os paralelogramos devem ser construídos com régua e compasso, para que seja percebida a relação entre os atributos criteriais de cada exemplo de paralelogramo.

Após a identificação das características gerais dos paralelogramos, um conjunto de figuras devem ser fornecido, para que o aluno efetue a classificação entre exemplos e não exemplos.

A atividade "Qual é minha forma?" também é muito interessante para os paralelogramos.

Exemplo:

- É uma figura de 4 lados (o professor interroga os alunos no sentido de saber se é possível só com esta afirmação determinar a figura que o aluno deve discriminar).
- Seus lados opostos são paralelos e iguais.
- É uma figura plana, fechada, simples, formada por segmentos de reta (até esse momento, o professor pode pedir para que os alunos desenhem as possíveis figuras com base nas informações acima).
- Seus lados são iguais.
- Possui quatro ângulos retos.

Com estas informações adicionais, conclui-se que a figura é um quadrado.

Esta atividade pode ser realizada com régua e compasso. Cada grupo, também, pode preparar esse tipo de atividade para que outros grupos descubram qual a forma da figura descrita pelas "pistas".

As atividades que apresentamos são apenas sugestões que poderão servir de base, para que o professor crie outras atividades de acordo com o nível conceitual dos seus alunos. No ensino-aprendizagem dos conceitos de Geometria, o professor não é o único participante e os alunos devem ser constantemente questionados e conduzidos a novas descobertas, para atingir um nível cada vez mais elevado da formação de conceitos. Como os dados do presente trabalho apontaram muitos alunos terminando o primeiro grau sem ter o conceito de um paralelogramo, o ensino das figuras geométricas se constitui em uma base para o desenvolvimento de outros conceitos e, por isso, não devem ser ensinados com ênfase em definições e exercícios, mas de uma forma que conduza à aprendizagem significativa.

BIBLIOGRAFIA

AGRESTI, A. e FENLAY, B. (1986) - Statistical Methods for the Social Sciences. Dellen Publishing Company.

ALBERNAZ, J. M. (1986) - Uma abordagem funcional do desenvolvimento cognitivo: a noção de "semelhança" pelas crianças de 6 a 11 anos. **Arquivo Brasileiro de Psicologia**, Rio de Janeiro, (2):99-114.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. and HANSIAN, H. (1978) - Educational Psychology: A cognitive view, N.Y. Holtz, Hinchart and Winston.

BAR, V.; ZINN, B.; GOLDMUNTZ, R. and SNEIDER, C. (1994) - Children's concepts about weight and free fall - **Science Education**, 78, (2):149-169.

BARBOSA, J.L.M. (1985) - Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro - Sociedade Brasileira de Matemática.

BURGER, F. and SHAUGHNESSY (1986) - Caracterizing the Van Hiele levels of Development in Geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, 17, (1):31-48.

BOAVIDA, A.M. (1992) - O sentido de Resolução de Problemas. **Quadrante**, Lisboa, (1):45-71.

CHENG, P. W. and PACHELLA, R. (1984) - A psychophysical Approach to Dimensional Separability - Cognitive Psychology, 16, (3):279-304.

CRAINE, T.V. and RUBENSTEIN, R.N. (1993) - A Quadrilateral hierarchy to facilitate learning in Geometry. **Mathematics teacher**, 86, (1):30-36.

DAVEY, G. and HOLLIDAY, J. (1992) - Van Hiele Guidelines for Geometry. **The Australian Mathematics Teacher**, 48, (2):26-29.

DAVIS, J. K. and KAUSMEIER, H.J. (1970) - Cognitive Style and Concept Identification as a Function of Complexity and Training Procedures. **Journal of Educational Psychology**, 61, (6):423-430.

DERVILLE, L. (1976) - Psicologia Prática no Ensino. Tradução de José Reis. São Paulo: IBRASA.

DOLCE, O. e POMPEO, J.N. (1985) - Fundamentos de Matemática Elementar - Atual Editora, vol. 9.

DORIN, L. (1975) - Psicologia Educacional; Editora do Brasil.

ECO, U. (1993) - Como se faz uma tese - Tradução de Gilson César Cardoso de Souza - Editora Perspectiva.

EICHELBERGE, R.T. (1989) - Discipline Inquiry: Understanding and doing Educational Research. N.Y. Longman.

FELDMAN, K.V. and KLAUSMEIER, H.J. (1974) - Effects of two Kinds of Definition on the Concept Attainment of Fourth and Eighth Graders. **The Journal of Educational Research**, 67, (5):219-223.

FERREIRA, N.L.A.C. (1967) - Formação e Desenvolvimento de Conceitos. Rio de Janeiro - Editora Nacional de Direito.

FLICK, L. (1991) - Where concepts meet percepts: stimulating analogical thought in children - **Science Education**, 75, (2):215-230.

FRIEDMAN, N. (1976) - Cognitive Emphasis of Geometry Teacher's Questions. **Journal for Research in Mathematics Education**, november:259-263.

GAGNÉ, R.M. (1974) - Princípios básicos del Aprendizaje para la instrucción - Editorial Diana

___________ (1983) - Some issues in the Psychology of Mathematics instruction. **Journal for Research in Mathematics Education**, 14, (1):7-18.

GERDES, P. (1981) - A Ciência Matemática. Moçambique: Núcleo Editorial.

GLASER, R. (1984) - Education and Thinking: the Role of Knowledge. **American Psychologist**, 39, (2):93-104.

GLIESSMAN, D. H. and PUGH, R. (1994) - Concept and skill relationships in a teacher training setting - **The Journal of Educational Research**, 87, (4):211-218.

GOODWIN, W.L. e KLAUSMEIER, H.J. (s.d.) - Facilitating Studente Learning: An Introduction to Educational Psychology - Harper e Row.

GREENO, J. (1978) - Understanding and Procedural Knowledge in Mathematics Instruction. **Educational Psychologist**, 12, (3):262-283.

HAWKINS, W. (1991) - Rectangles. **The Australian Mathematics teacher**, 47, (4):10-13.

HERSHKOWITZ, R.; BRUCKHEIMER, M. e VINNER, S. (1987) - Activitres with Teachers Based on Cognitive Research. **Learning and Teaching Geometry** (K-12) N.C.T.M., pp. 222-235.

HIRUMI, A. and BOWERS, D. (1991) - Enhancing Motivation and Acquisition of Coordinate Concepts by Using Concepts Trees. **Journal of Educational Research**, 84, (5):273-279.

HOFFER, A. (1981) - Geometry is more than Proof. **Mathematics teacher**, 71, (1):11-21.

HOUTZ, J.C. and MOORE, J. (1973) - Effects of Different types of Positive and Negative Instances in Learning "Nondimensioned" Concepts. **Journal of Educational Psychology**, 64, (2):206-211.

JÚNIOR, I.M. (1991) - Curso de Desenho Geométrico. Editora Ática - vol. 1.

KERLINGER, N. (1979) - Metodologia da Pesquisa em Ciências Sociais. Um tratamento Conceitual. Traduzido por Helena Mendes Rotundo, São Paulo: EDUSP.

KLAUSMEIER (1977) - Manual de Psicologia Educacional. Aprendizagem e Capacidades Humanas: Harper e Row. Traduzido por Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu.

KLAUSMEIER and FELDMAN, K. V. (1975) - Effects of a Definition and Varying Number of Examples and Non Examples of Concept Attainment. **Journal of Educational Psychology**, 67, pp. 174-178.

_____________ (1977) - Educational Experience and Cognitive Development. **Educational Psychologist**, 12, (2):179-196.

KLAUSMEIER and SIPPLE, T.S. (1982) - Factor Structure of the Piagetian Stage of Concrete Operations. **Contemporary Educational Psychology**, (7):161-180.

_____________ (1992) - Concept Learning and Concept Teaching - **Educational Psychologist**, 27, (3):267-286.

LENKE, E.A., KLAUSMEIER, H.J. e HARRIS, C. H. (1967) - Relationship of Selected Cognitive Abilities to Concept Attainment and Information Processing. **Journal of Educational Psychology**, 58, (1):27-35.

LIMA, E.L. (1991) - Medida e Forma em Geometria. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.

LORENZATO, S. e VILA, M.C. (1993) - Século XXI: qual matemática é recomendável? A posição do "The National Council of Supervisors of Mathematics". **Zetetiké**, Ano 1, (1):41-49.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. (1986) - Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas - São Paulo - F.P.U..

MANSFIELD, H. and HAPPS, J. (1991) - Concept Maps. **The Australian Mathematics Teacher**, 47, (3):30-33.

MASON, C. (1992) - Concept Mapping: A tool to develop reflective Science Instruction. **Science Education**, 76, (1):51-63.

MATOS, J.R. (1992) - Acomodando a teoria de Van Hiele a modelos cognitivos idealizados. ***Quadrante***, Lisboa, (1):93-112.

MC INTOSH, A. (1992) - Teaching and Learning Geometry. **The Australian Mathematics Teacher**, 48 (1):8-9.

MENDOZA, L.P. (1993) - What is a Quadrilateral? **The Mathematics Teacher**, 86, (9):774-776.

MILLER, L.D. (1993) - Making the Connection With Language. **Arithmetic teacher**, 40, (6):311-316.

N.C.T.M. (1987) - Learning and Teaching Geometry, K12.

NELSON, G.K. and KLAUSMEIER, H.J. (1974) - Classificatory behaviors of low - socioeconomic status children. **Journal of Educational Psychology**, 66, (3):432-438.

NOT, L. (1979) - As pedagogias do Conhecimento. Tradução de Américo E. Bandeira. Difel.

PAPERT, S. (1985) - Logo: Computadores e Educação - brasiliense.

PARK, O.C. and TENNYSON, R.D. (1980) - Adaptative Design Strategies for Selecting Number and Presentation order of Examples in Coordinate Concept Acquisition. **Journal of Educational Psychology**, 72, (3): 362-370.

PAVANELLO, R. M. (1993) - O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Ano 1, (1):7-17.

PEGG, J. (1985) - How children learn Geometry: the van Hiele theory. **The Australian Mathematics teacher**, 41, (2):5-8.

________ (1987) - Developing basic Geometric Constructions With understanding. **The Australian Mathematics teacher**, 43, (2):19-21.

________ and DAVEY, G. (1991) - Levels of Geometry Understanding. **The Australian Mathematics teacher**, 47, (2):10-13.

PENTEADO, W.M.A. (1980) - Psicologia e Ensino, São Paulo: Papelivros.

PINXTEN, R. (1991) - Geometry Education and Culture. **Learning and Instruction**, (1):217-227.

ROTH, W. M. (1994) - Student Views of Collaborative Concept Mapping: an Emancipatory research project - Science Educationa, 78, (1):1-34.

SÃO PAULO (Estado) (1991) - Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 1º grau.

__________________ (1991) - Secretaria da Educação. Programa de Reforma do Ensino Público do Estado de São Paulo.

SIEGLER, R.S. (1983) - How Knowledge Influences Learning. **American Scientist**, (7):631-638.

SOUZA, R.L. (1990) - O método de Análise da Geometria Grega: A questão do justificacionismo na interpretação dos historiadores da matemática. **Cadernos de História e Filosofia da Educação**, 2, (1):67-83.

SOUZA, S.J. (1994) - Infância e Linguagem: Bakhtin, Vigotsky e Benjamin. Papirus Editora.

SOWDER, L. (1980) - Concept and Principle Learning N.C.T.N. - Research in Mathematics Education - Editado por Richard J. Shumway, pp. 244-285.

STANNERS, R.F.; BROWN, L.T.; PRICE, J.M. and HOLMES, M. (1983) - Concept Comparisons, Essay Examinations, and Conceptual Knowledge - **Journal of Educational Psychology**, 75, (6):857-864.

TAGATZ, G.E. (1967) - Effects of Strategy, sex and Age on Conceptual Behavior of Elementary School Children. **Journal of Educational Psychology**, 58, (2): 103-109.

TENNYSON, D.; STEVE, M.W. and BOUTWELL, R.L. (1975) - Instance sequence and Analysis of Instance Attribute Representation in Concept Acquisition. **Journal of Educational Psychology**, 67, (6):821-827.

TENNYSON, R. D.; CHAO, J. N. and YOUNGERS, J. (1981) - Concept learning effectiveness using prototipe and skill development presentation forms - **Journal of Educational Psychology**, 73, (3):326-334.

TENNYSON, R. D.; YOUNGERS, J. and SUEBSONTHI, P. (1983) - Concept learning by children using instructional presentation forms for prototype formation and classification - Skill development - **Journal of Educational Psychology**, 75, (2):280-291.

TENNYSON, D. and COCCHIARELLA, M. (1986) - An Empirically based instructional design theory for teaching concepts. **Review of Educational Research**, 56, (1):40-71.

TESSMER, M; WILSON, b. and DRISCOLL, M. (19) - A New Model of concept teachin and Learning. **Educational Technology Research and Development**, 38, (1):45-53.

THONSON, R. (1958) - The Psychology of Thinking - London: Penguin books.

VEJA (1989) - Ano 22, nº 34, Agosto, Cálculos de roupa nova, pp. 56-63.

WILSON, B. and COLE, P. (1991) - A Review of cognitive teaching models. **Educational Technology Research and Development**, 39, (4):47-64.

WOLLMAN, W. (1983) - Models and Procedures: A classroom study of teaching for transfer. **School Science and Mathematics**, 83, (5):419-429.

WOODSON, M.L.C. (1974) - Seven Aspects of teaching concepts. **Journal of Educational Research**, 66, (2):184-188.

WOODWARD, E.; GIBBS, V. and SHOULDERS, M. (1992) - A fifth grade - Similarity Unit. **Arithmetic teacher**, 39, (8):22-25.

ANEXO I

Instrumentos utilizados na presente pesquisa

Questionário

Nome: ____, Série: _________
Escola: ____
Idade: ______________________________________, Sexo: ________________

Você irá responder a um questionário sobre triângulo e paralelogramo. É importante que você responda às perguntas o mais completo possível. Se não souber alguma, escreva "não sei".

1) O que é um triângulo? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

2) O que é um paralelogramo? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

Codificação do Questionário

Nome: ____, Série: __________
Escola: ____, Idade: __________

1a) O que é um triângulo?

( ) 3 lados, seg. reta ou partes
( ) 3 ângulos
( ) fechado
( ) figura plana
( ) 3 segmentos de reta
( ) resp. como equilátero
( ) outras _____________
( ) resposta errada
( ) não sei

1b) Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

( ) desenhou equilátero
( ) desenhou isósceles
( ) desenhou escaleno
( ) desenhou t. retângulo
( ) modificou ângulo
( ) outro desenho __________

2a) O que é um paralelogramo?

( ) 4 lados
( ) lados opostos paralelos
( ) ângulos opostos congruentes
( )figura plana
( )figura fechada
( ) 4 segmentos de reta/partes
( ) outras ________________
( ) resposta errada
( ) não sei

2b) Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

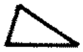
( ) desenhou retângulo
( ) desenhou quadrado
( ) desenhou losango
( ) desenhou paralelogramo
( ) modificou lado
( ) modificou ângulo
( ) outro desenho ________

Testes dos Atributos Definidores

Nome: ____, Série: ____________

O teste que você irá responder consta de afirmações sobre as características do triângulo e paralelogramo. Leia atentamente cada uma delas e marque com um "X" em V se for verdadeira e em F se for falsa.

1) Triângulo é uma figura que possui 3 lados iguais. ( ) V ( ) F
2) Todo triângulo possui um ângulo de 90° (ângulo reto). ( ) V ( ) F
3) Triângulo é uma figura que possui três ângulos iguais. ( ) V ( ) F
4) Triângulo é um retângulo que possui três lados. ( ) V ( ) F
5) Todo triângulo possui dois lados iguais. ( ) V ( ) F
6) Todo triângulo é uma figura plana. ( ) V ( ) F
7) Há triângulos que possuem lados paralelos. ( ) V ( ) F
8) Triângulo é um ângulo que possui 3 lados. ( ) V ( ) F
9) Todo triângulo é uma figura que possui 3 lados. ( ) V ( ) F
10)Todo triângulo é uma figura formada por segmentos de reta. ( ) V ( ) F
11)Triângulo é uma figura fechada. ( ) V ( ) F
12)O paralelogramo é um quadrilátero. ( ) V ( ) F
13)O paralelogramo possui somente dois lados iguais. ( ) V ( ) F
14)O paralelogramo possui os lados opostos paralelos. ( ) V ( ) F
15)Os lados opostos do paralelogramo possuem a mesma medida. ( ) V ( ) F
16)Um paralelogramo pode ter os quatro ângulos iguais. ( ) V ( ) F
17)Um paralelogramo é uma figura com 6 lados. ( ) V ( ) F
18)O quadrado é um paralelogramo. ( ) V ( ) F
19)O losango não é um paralelogramo. ( ) V ( ) F
20)Todo retângulo é um paralelogramo. ( ) V ( ) F
21)Paralelogramo possui os 3 lados iguais. ( ) V ( ) F
22)Paralelogramo é uma figura fechada. ( ) V ( ) F
23)Paralelogramo não é uma figura plana. ( ) V ( ) F
24)O paralelogramo é formado somente por segmentos de reta. ( ) V ( ) F
25)Todo paralelogramo possui 2 lados inclinados. ( ) V ( ) F

9)  ( ) V ( ) F

10)  ( ) V ( ) F

11)  ( ) V ( ) F

12)  ( ) V ( ) F

13) Elemento 1 ( ) V ( ) F

14) Elemento 2 ( ) V ( ) F

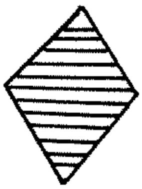
15) Elemento 3 ( ) V ( ) F

Testes dos Exemplos e Não-Exemplos de Paralelogramo

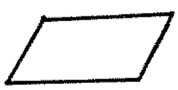
Nome: ____, Série: ___________

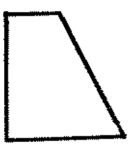
A) Você irá responder um teste que consta de várias figuras. Observe atentamente cada uma delas e assinale com um "X" em V se a figura for um paralelogramo, caso contrário, assinale um "X" em F.

1)  ( ) V ( ) F

2)  ( ) V ( ) F

3)  ( ) V ( ) F

4)  ( ) V ( ) F

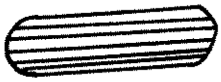
5)  ( ) V ( ) F

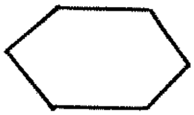
6)  ( ) V ( ) F

7)  ( ) V ( ) F

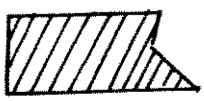
8) ( ) V ( ) F

9)  ( ) V ( ) F

10)  ( ) V ( ) F

11)  ( ) V ( ) F

12)  ( ) V ( ) F

13)  ( ) V ( ) F

14) Elemento 1 ( ) V ( ) F

15) Elemento 2 ( ) V ( ) F

16) Elemento 3 ( ) V ( ) F

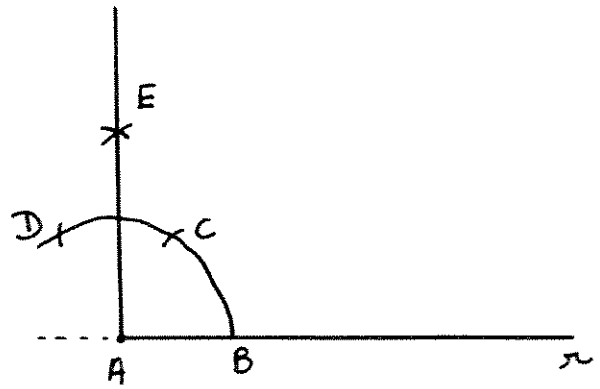
ANEXO II

Construções geométricas com régua e compasso

Construção do Ângulo Reto com Régua e Compasso

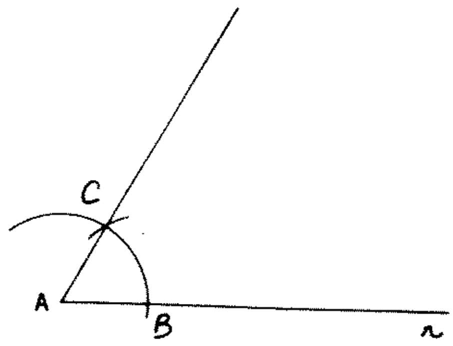
1. Traçamos uma reta **r** e fixamos um ponto A.
2. Centramos o compasso em **A** e, com uma abertura qualquer, traçamos um arco, encontrando a reta **r** em B.
3. Com a mesma abertura do item anterior, centramos o compasso em B e traçamos um arco obtendo o ponto **C**. Ainda com a mesma abertura, centramos o compasso em **C** e traçamos um outro arco obtendo D.
4. Com o compasso em **C** e depois em **D**, traçamos dois arcos e obtvemos o ponto E, como indica a figura abaixo.

   A semi-reta que passa em E e tem extremidade em A, forma um ângulo reto com **r**.



Construção do Ângulo de 60° com Régua e Compasso

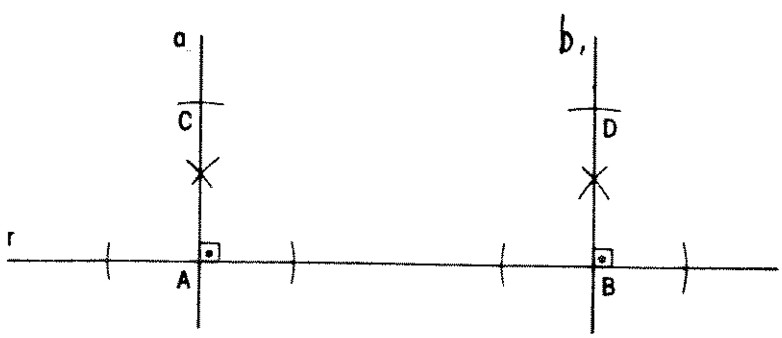
1. Traçamos uma reta **r** e marcamos **A** sobre ela.
2. Com uma abertura qualquer, centramos o compasso em A e traçamos um arco encontrando **r** em **B**.
3. Com a mesma abertura, centramos o compasso em B e traçamos um arco, obtendo **C**.
4. Traçamos a semi-reta AC.
5. $A\hat{B}C = 60°$.

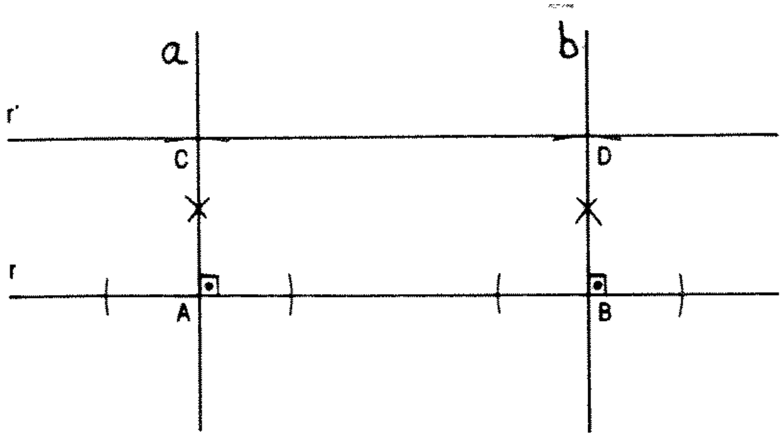


Construção de Retas Paralelas com Régua e Compasso

1. Traçamos uma reta **r** e duas retas auxiliares (a e b) perpendiculares à **r** em A e B.
2. Com uma abertura (distância entre a e b), centramos o compasso em A e traçamos um arco, obtendo o ponto **C**.

   Logo em seguida, centramos o compasso em **B**, traçamos um arco, obtendo D.
3. A reta que passa por **C** e **D** é paralela à reta dada.





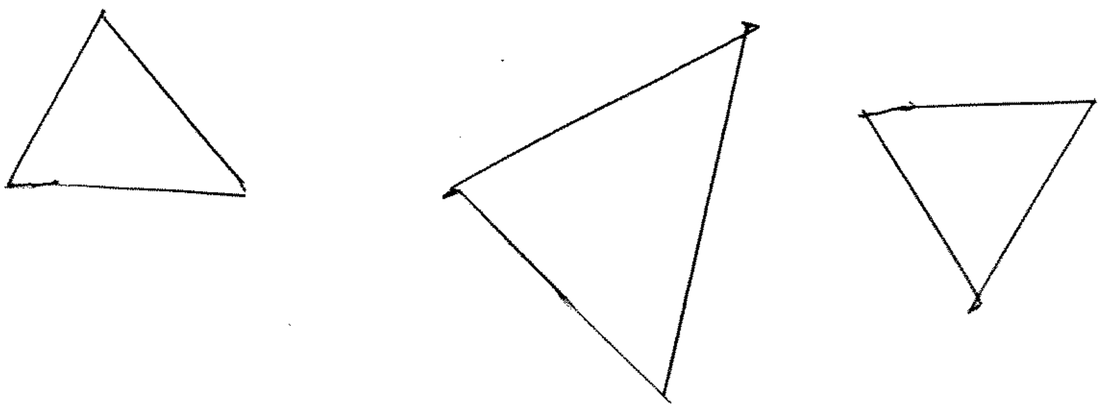
ANEXO III

Respostas de alunos de 5ª a 8ª séries sobre o conceito de triângulo e paralelogramo

Respostas de alunos de 5ª série a respeito do conceito de triângulo e paralelogramo

1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triângulo é uma figura geométrica representado em três partes.

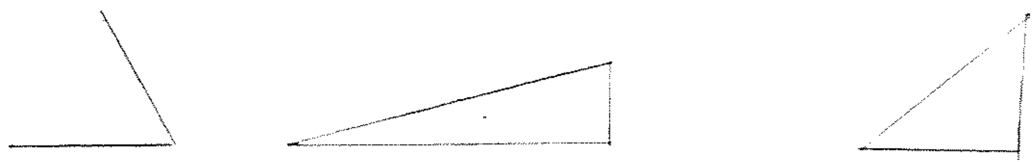


2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

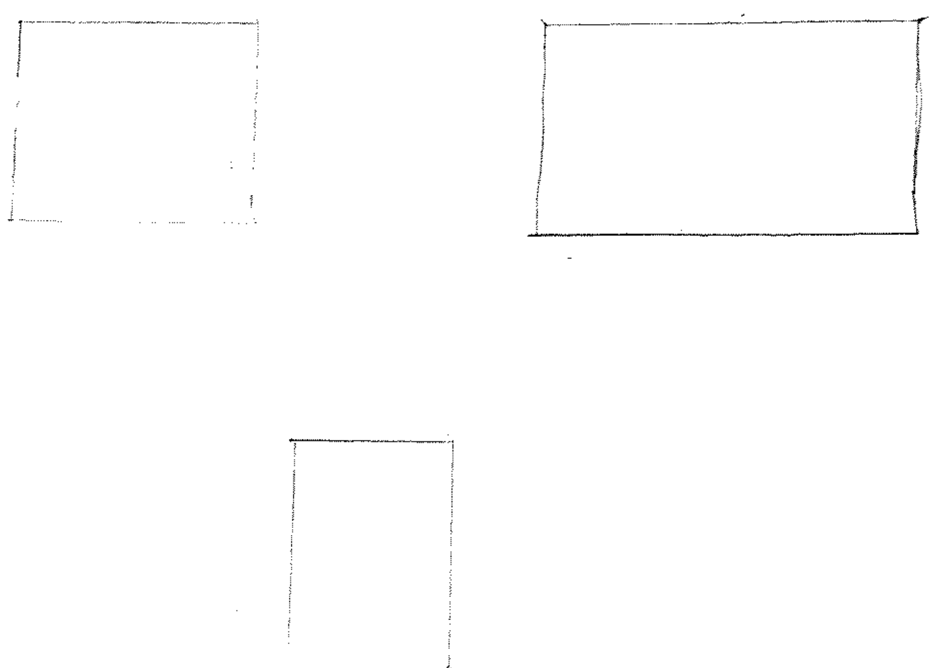
Não Sei!!!!!!!!

1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

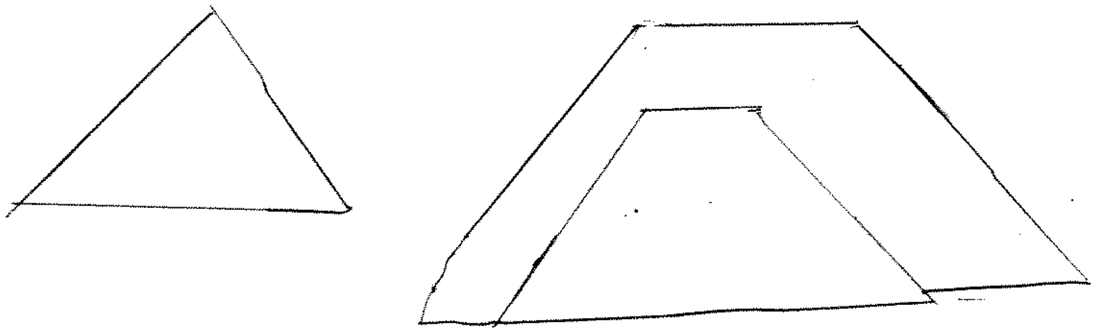
É uma forma geométrica



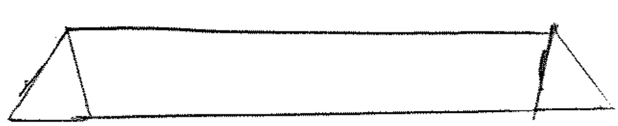
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.



1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.
é um quadro de ponta para cima, esticado em ponta

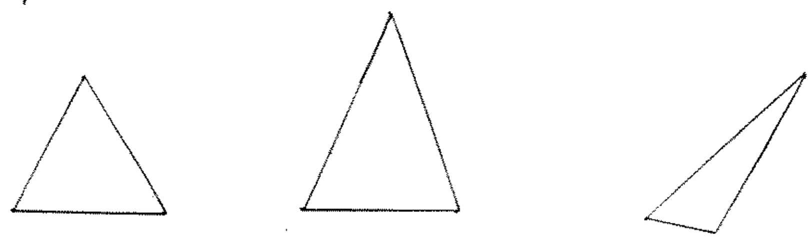


2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.
não sei



1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

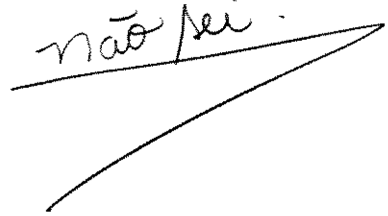
É uma forma ou figura geométrica.
É uma pirâmide e tem três lados.



2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

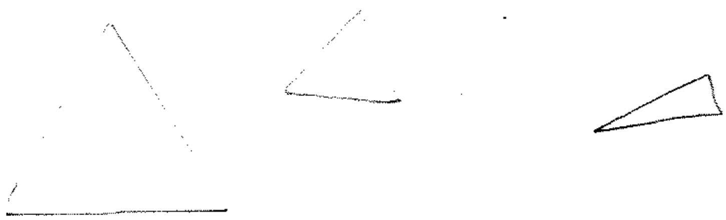
É uma forma ou figura geométrica.

não sei.



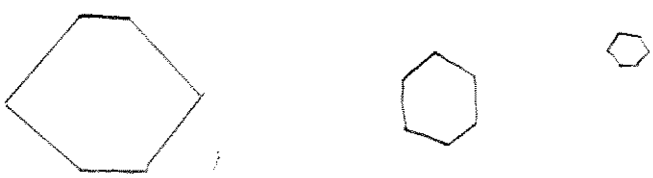
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triangulo é oque agente usa para uma fração; etc.



2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

não sei

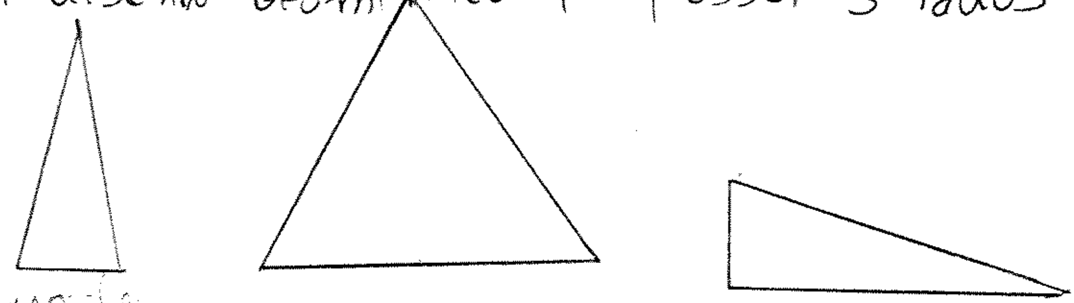


Não sei

Respostas de alunos de 6ª série a respeito do conceito de triângulo e paralelogramo

1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

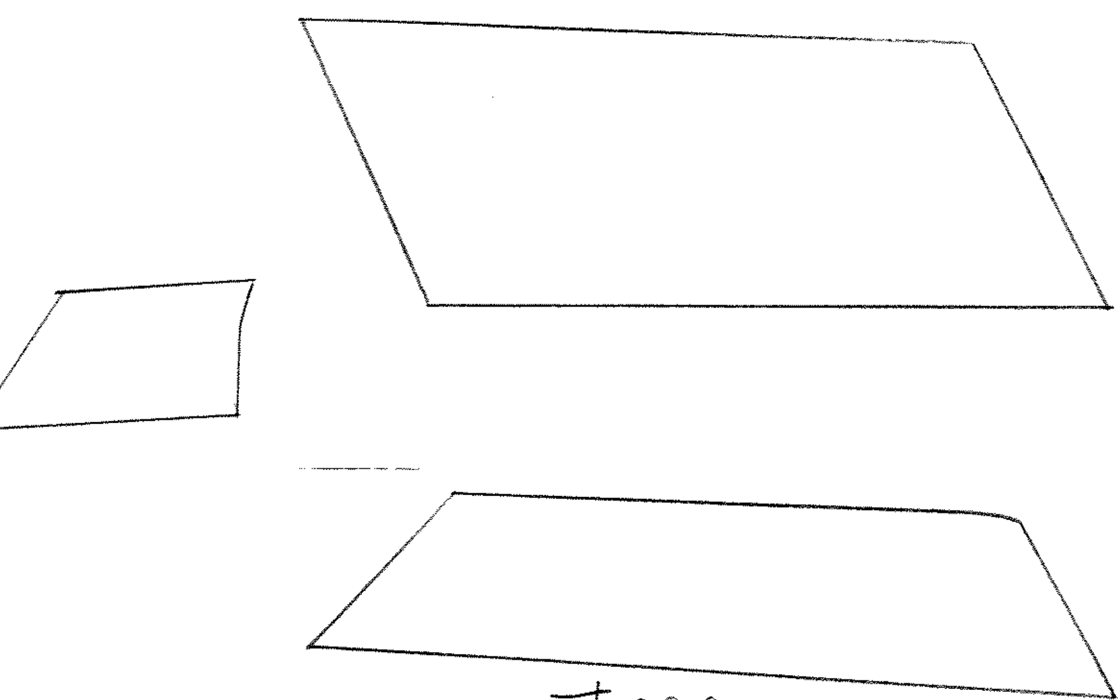
É um desenho Geometrico que possui 3 lados



isoceles escaleno

2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

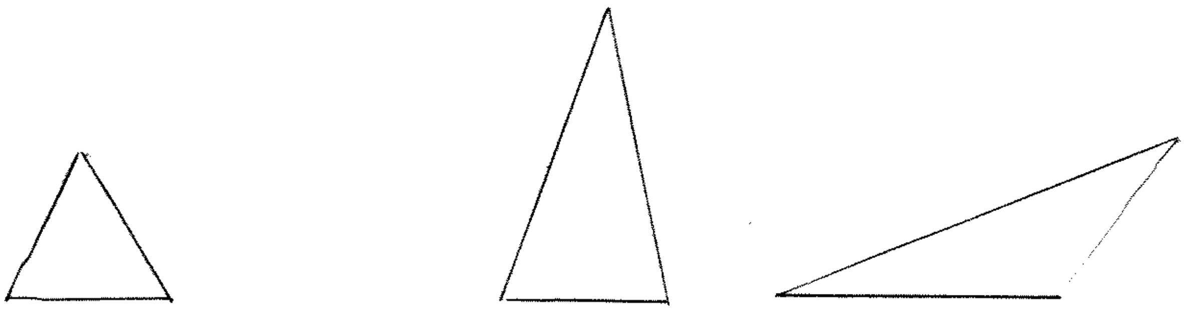
NÃO SEI



trapezio

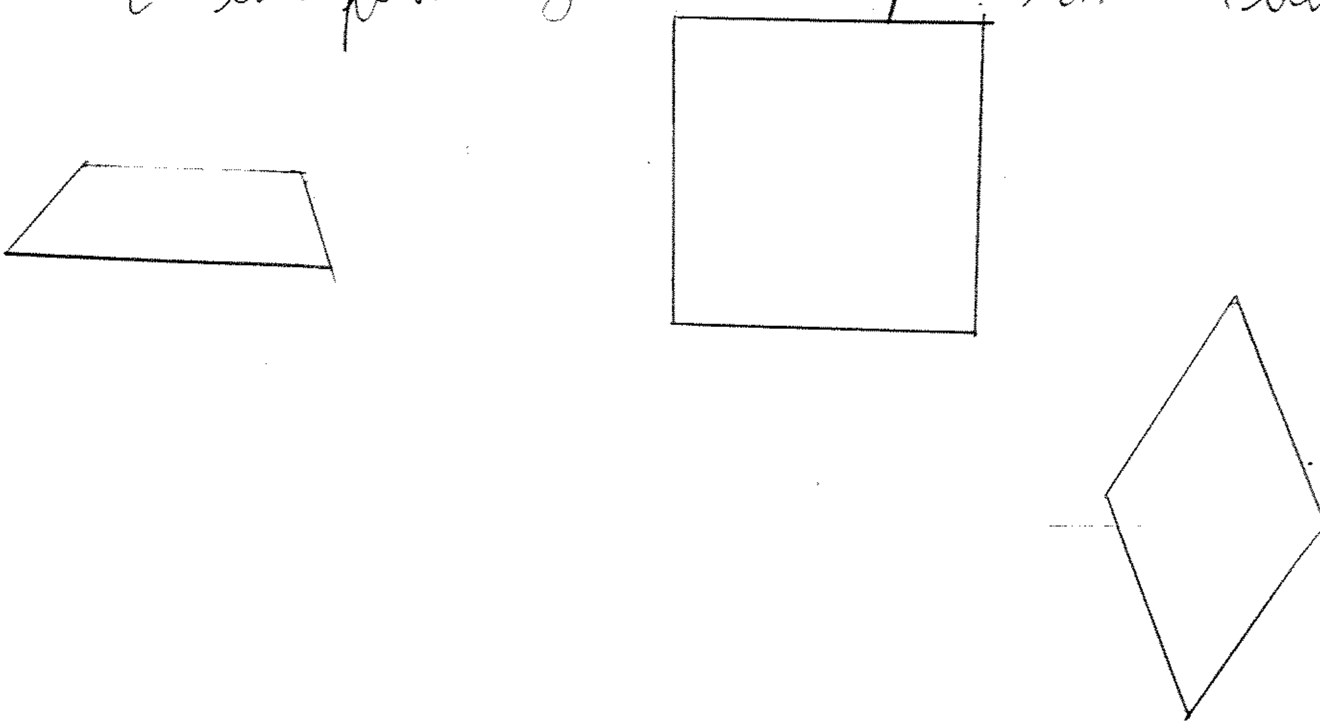
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma forma geometrica que tem 3 lado



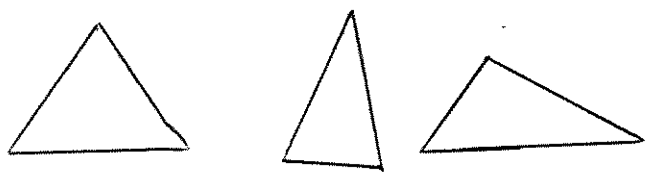
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É uma forma geometrica que tem 4 lado



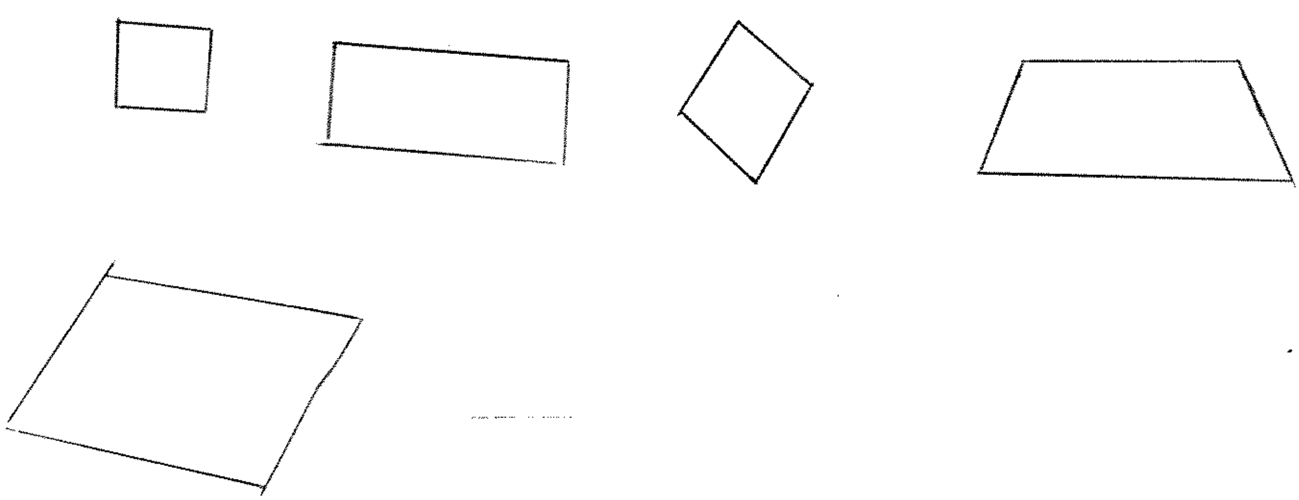
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triangulo é um dezenho geomêtrico de 3 lados e três pontas?



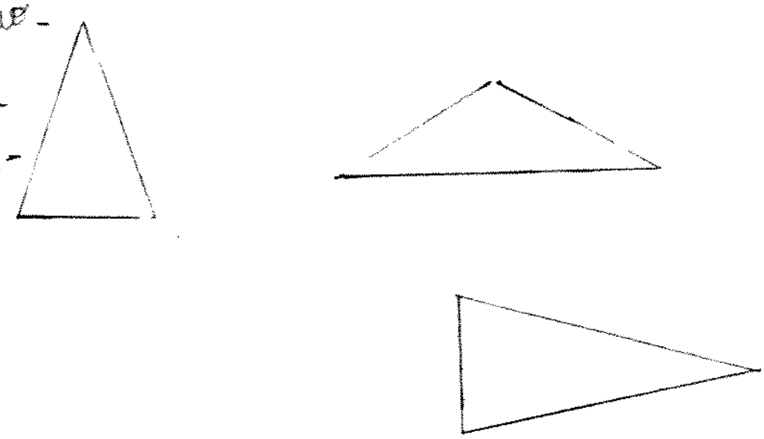
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É uma figura geomêtrica de 4 lados e 4 pontas



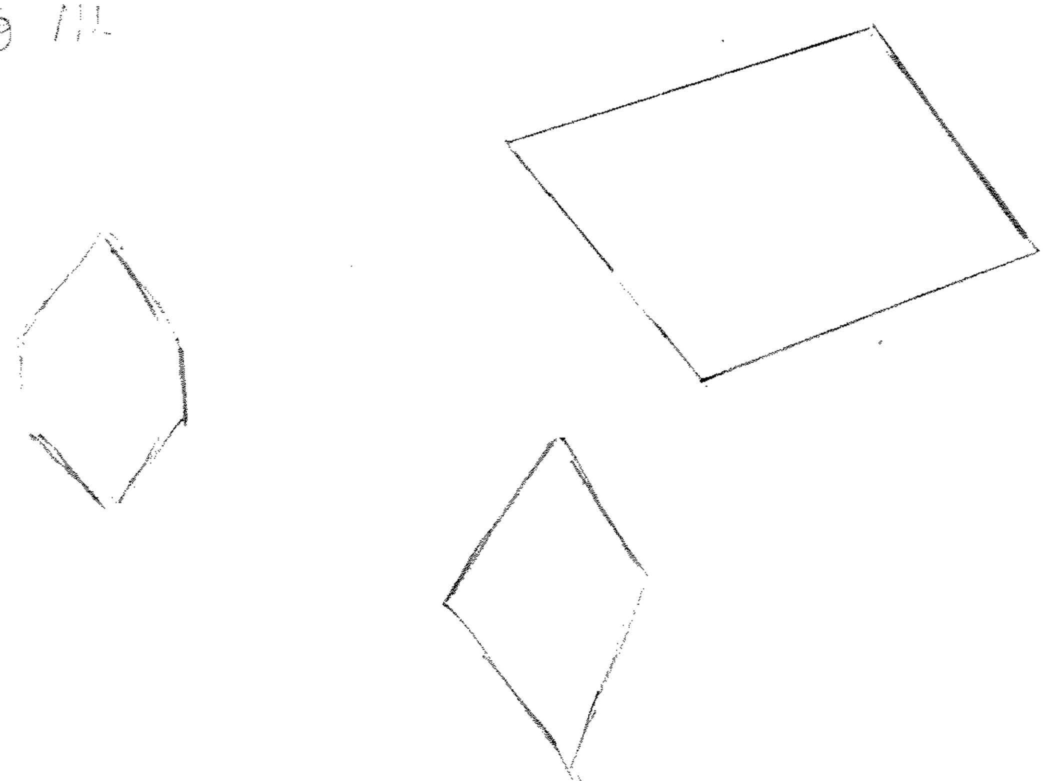
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma forma geométrica que possue o lado diferente



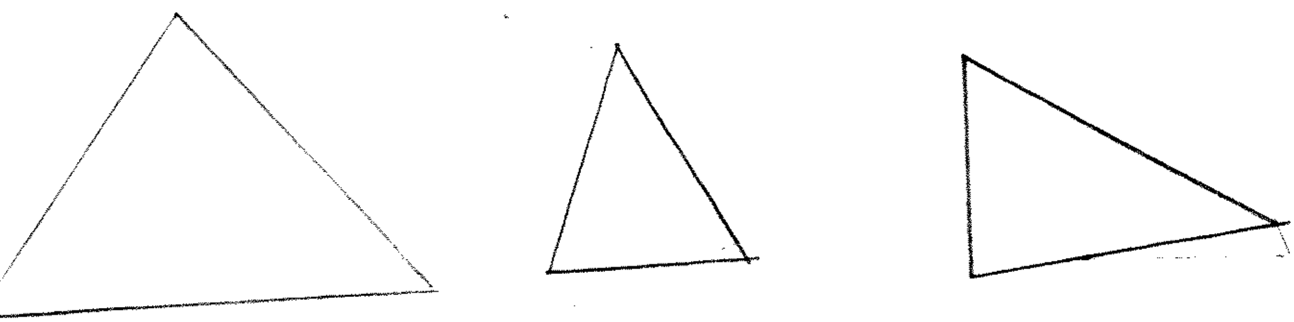
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

Não [illegible]



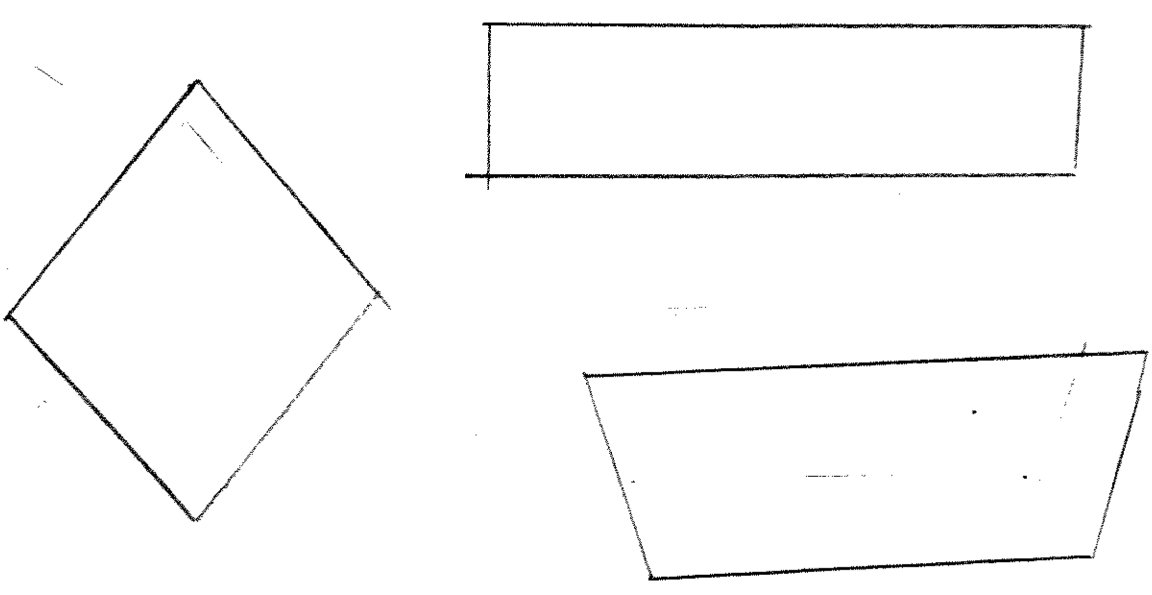
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triangulo é aquele que tem 2 lado iguais e 1 diferente



2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

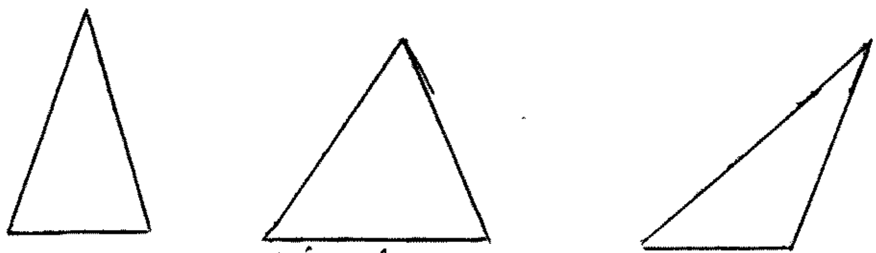
Paralelogramo, é aquele que tem 4 lado, 2 iguais e 2 diferente



Respostas de alunos de 7ª série a respeito do conceito de triângulo e paralelogramo

1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma figura geométria que tem 3 lados e três ângulos onde a soma dos ângulos é = a 180°

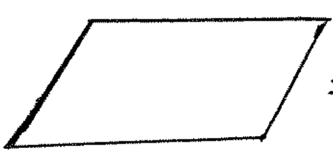


Triágulo isócele

triângulo equilátero

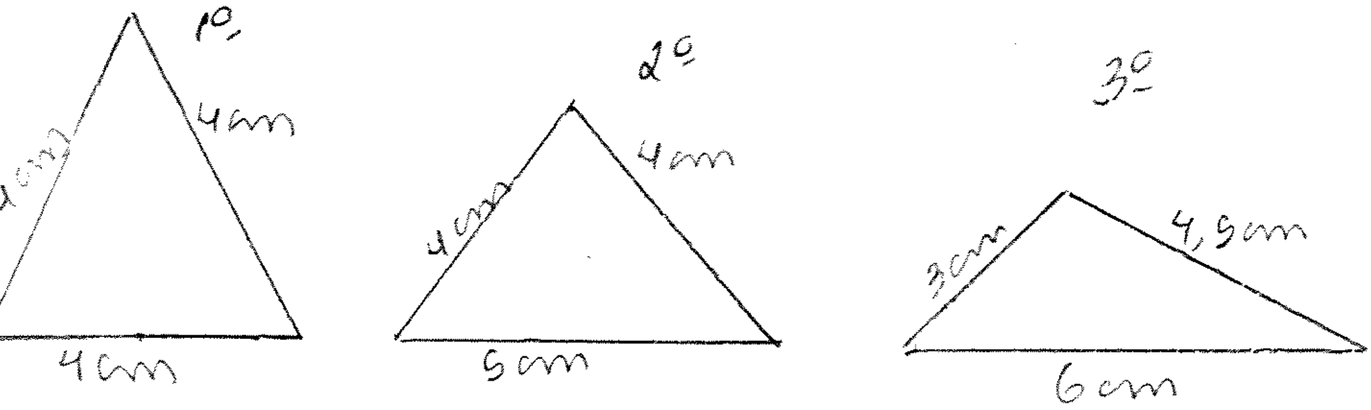
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É uma figura geométria quadrilátera (tem 4 lados), que tem 4 ângulos onde a soma dos ângulos é = a 360°

 ⇒ só conheço esse tipo de paralelogramo

1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

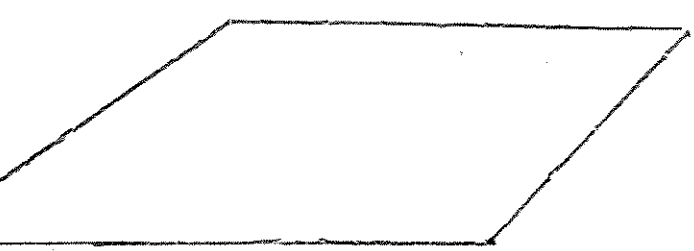
R: É uma figura geométrica de 3 lados



2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

R: Eu acho que é uma figura de 4 lado.

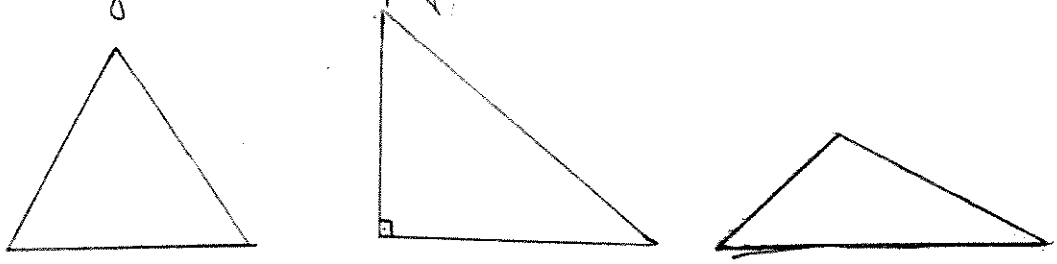
1º 2º 3º



"NÃO SEI" "NÃO SEI"

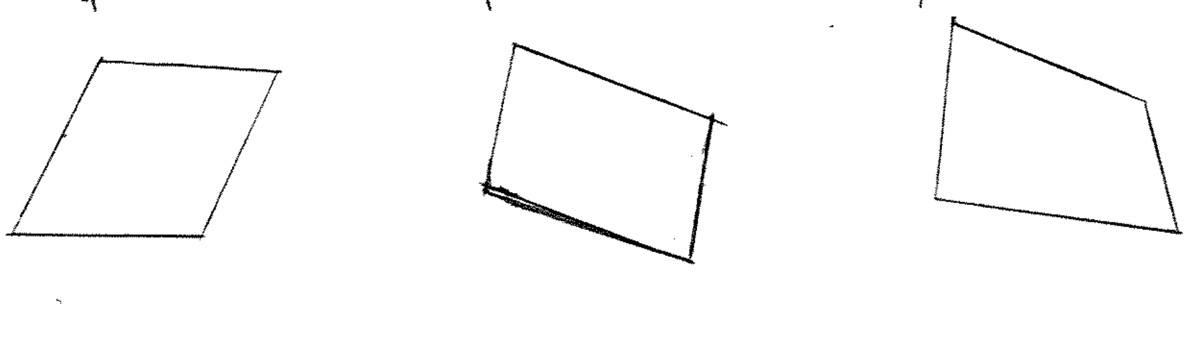
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triângulo é uma figura de três lados.



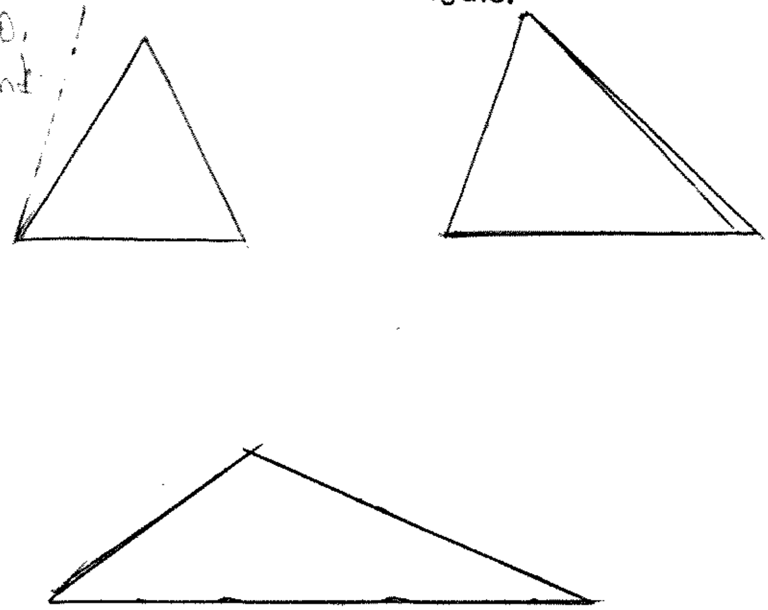
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É um quadrilátero que possue duas retas paralelas.



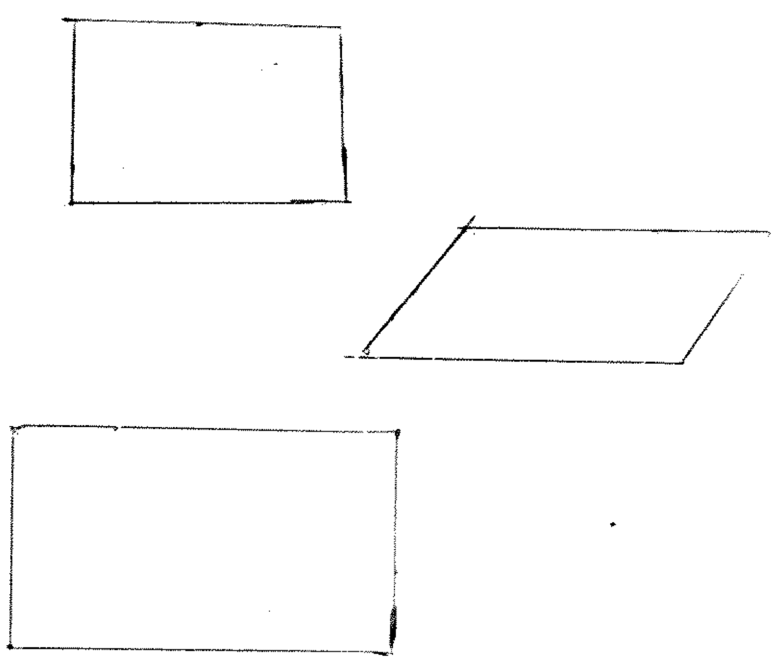
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma figura de 3 lado.
pode ser de lados diferent
ou lados iguais.



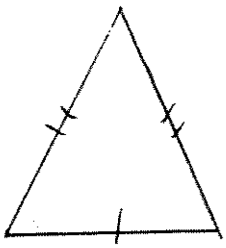
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É um quadrilátero
de 4 lados, pode ser
de " de diferentes
medidas ou iguais

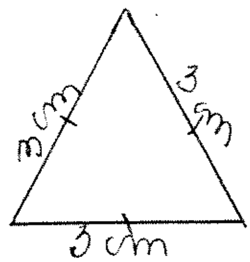


1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

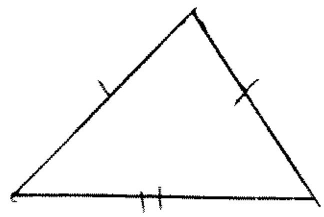
É um polígono de 3 lados.



triângulo isósceles



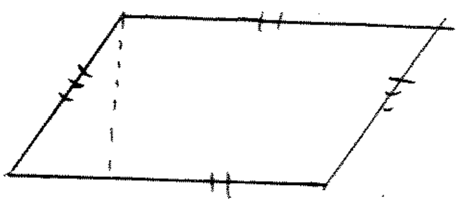
triângulo retângulo



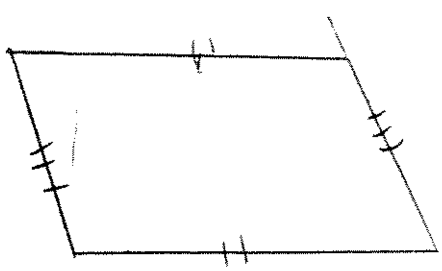
triângulo equilátero

2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

É um quadrilátero que tem 2 lados iguais. ñ sei



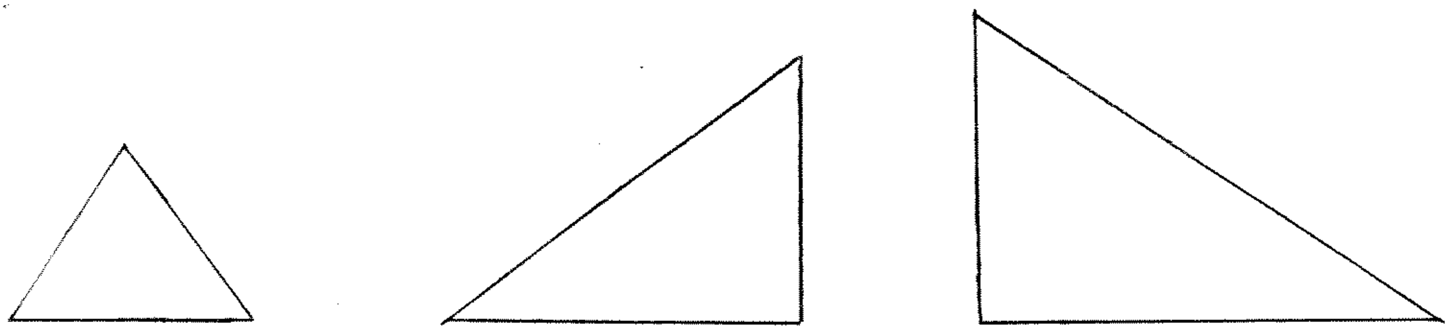
paralelogramo retângulo



Respostas de alunos de 8ª série a respeito do conceito de triângulo e paralelogramo

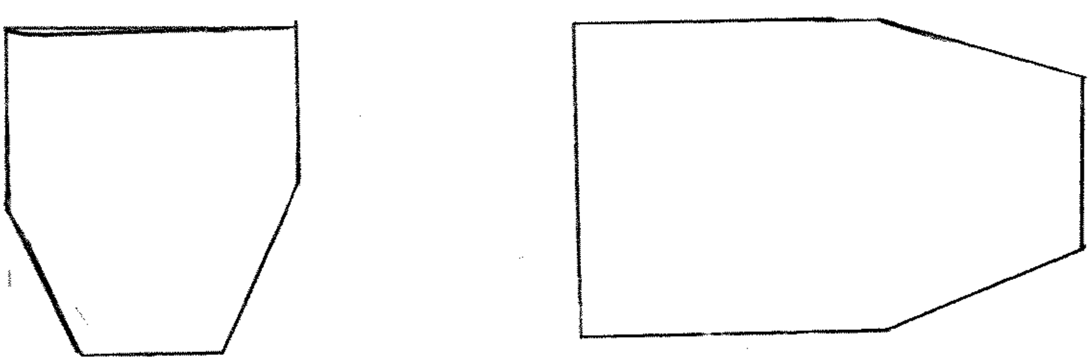
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

riângulo é um figura de 3 lados.



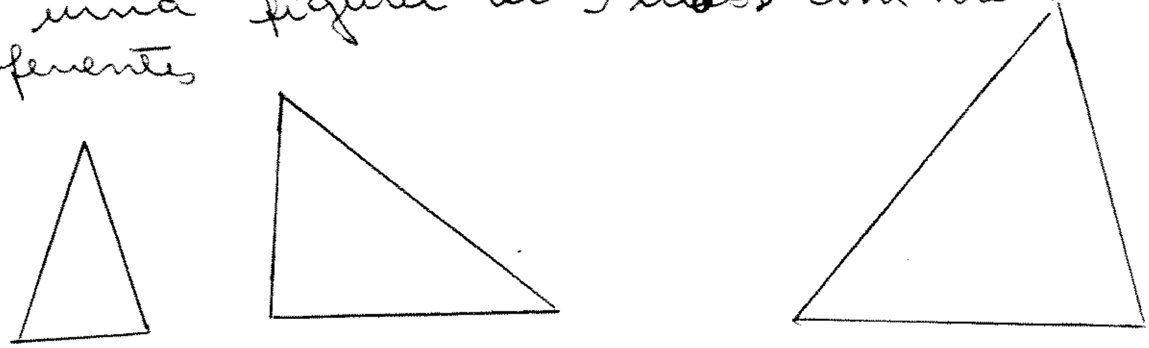
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

Paralelogramo é uma figura de
5 lados



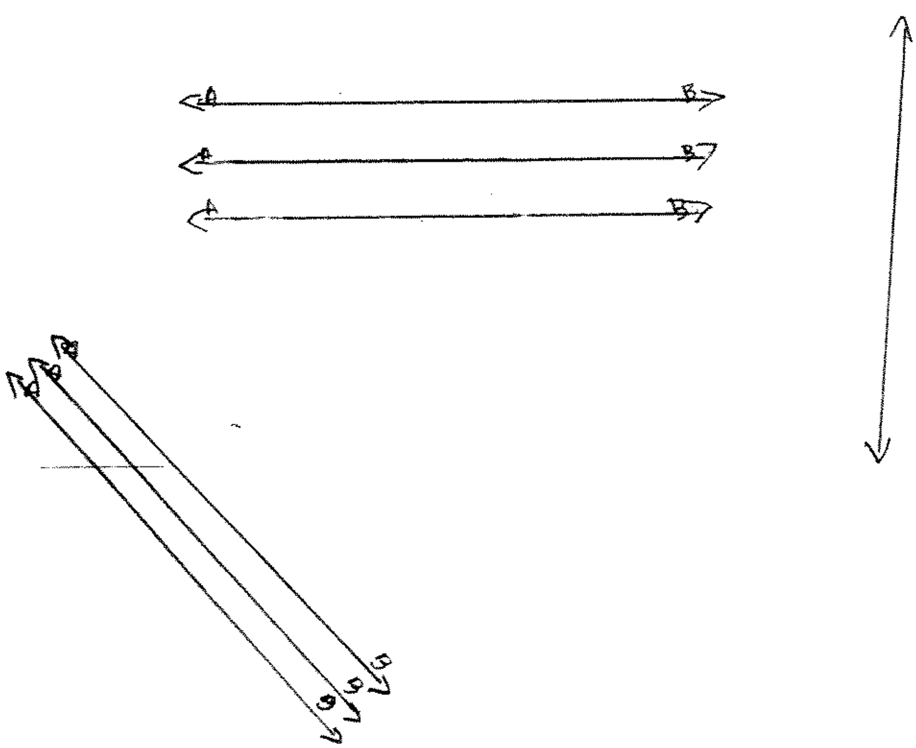
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma figura de 3 lados com medidas diferentes



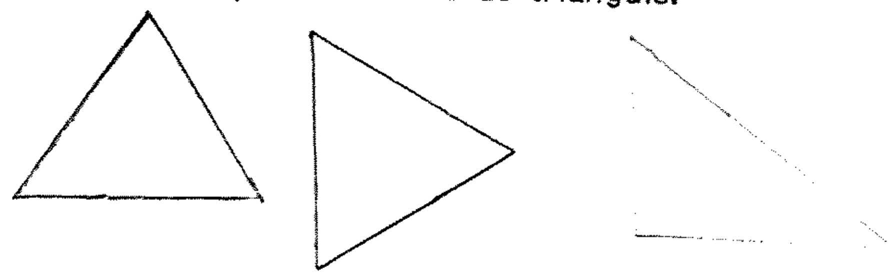
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

Sao duas retas



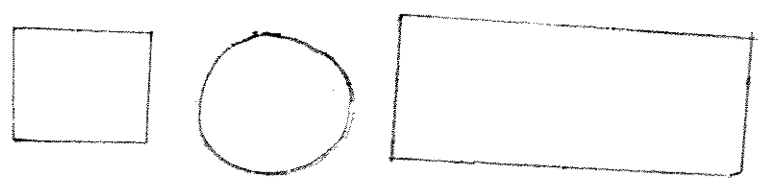
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma esfera triângular



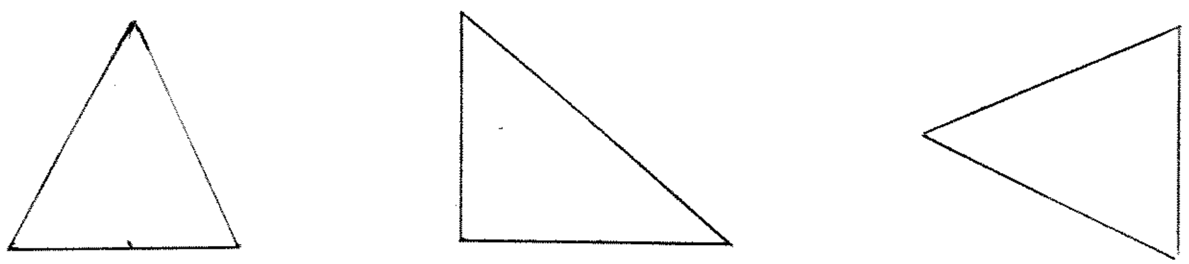
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

não sei



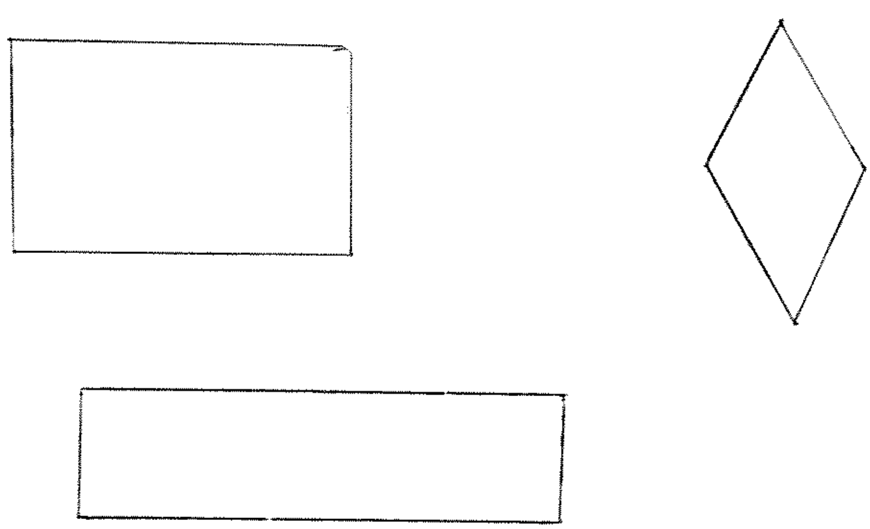
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

É uma forma geométrica que possui 3 lados, quando usada para fazer trabalhos, pesquisas, etc



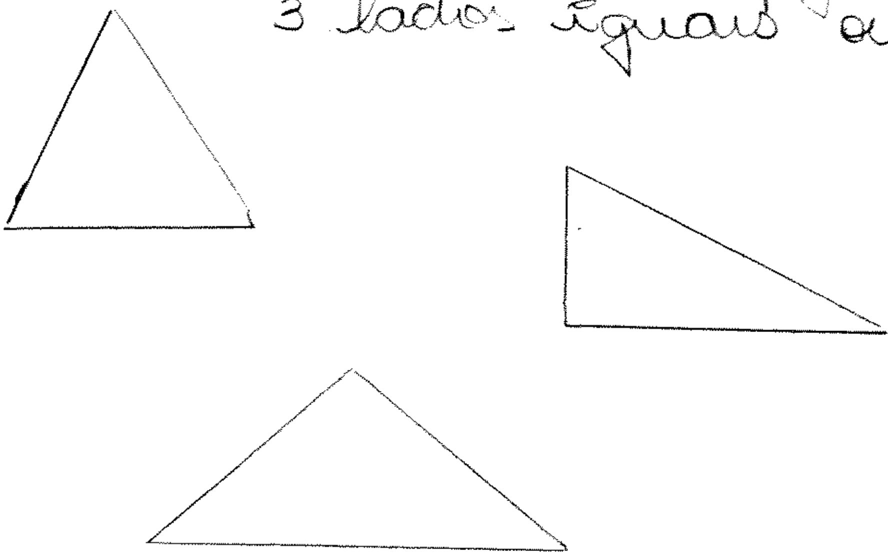
2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

Também é uma forma geométrica que possui mais de 4 lados



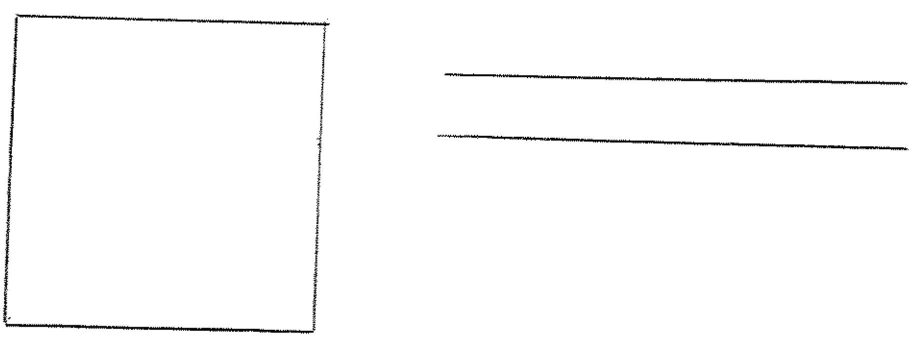
1) O que é um triângulo ? Desenhe 3 tipos diferentes de triângulo.

Triangulo é uma figura que possui o 3 lados iguais ou diferentes.



2) O que é um paralelogramo ? Desenhe 3 tipos diferentes de paralelogramo.

São linhas paralelas



ANEXO IV

Tabelas e Gráficos Estatísticos

Tabela A_1

As Séries e a Definição de Triângulo

Série	Série 5	Série 6	Série 7	Série 8	Total	Teste Chi-Quadrado
	%	%	%	%	%	
Triân: 3 lados, segm., partes	21.9	72.7	61.8	55.3	53.3	$X^2 3$=18.736 p-v=0.000
Triân: 3 angulos	.	6.1	5.9	2.6	3.6	$X^2 3$= 2.352 p-v=0.503
Triân: soma 180°	.	.	5.9	.	1.5	$X^2 3$= 6.149 p-v=0.105
Triân: equilátero	3.1	9.1	5.9	5.3	5.8	$X^2 3$= 1.086 p-v=0.780
Triân: isóceles	.	3.0	2.9	5.3	2.9	$X^2 3$= 1.700 p-v=0.637
Triân: escaleno	.	.	.	5.3	1.5	$X^2 3$= 5.288 p-v=0.152
Triân: dificuldade de verbalizar	6.2	.	8.8	2.6	4.4	$X^2 3$= 3.659 p-v=0.301
definiu triângulo	21.9	72.7	61.8	55.3	53.3	$X^2 3$=18.736 p-v=0.000

Gráfico A_1

Análise de Correspondência das Séries e a Definição de Triângulo

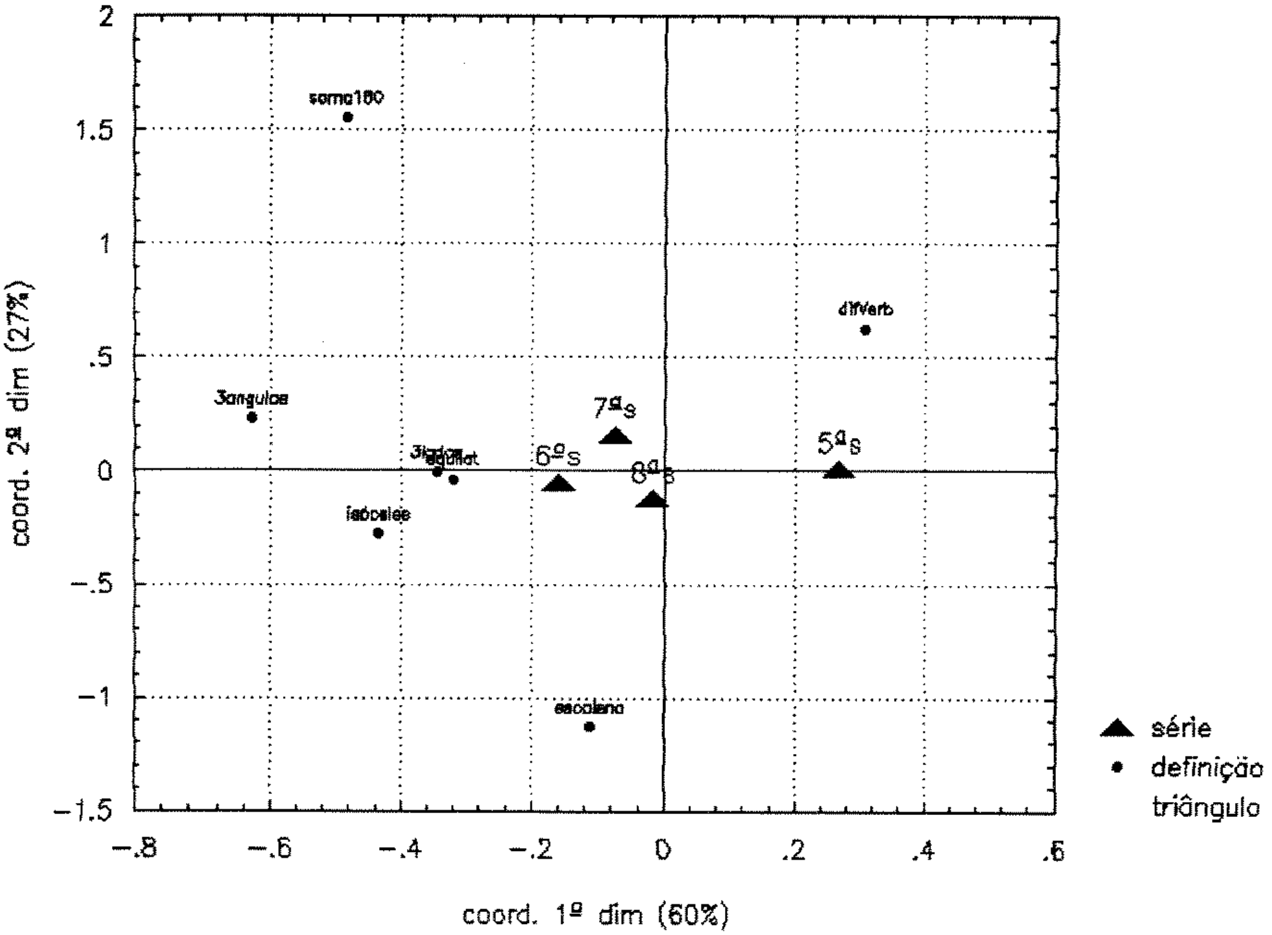


Tabela A_2

As séries e os Tipos de Triângulos Desenhados

Série	Série				Total	Teste Chi-Quadrado
	5	6	7	8		
	%	%	%	%	%	
desenhou triângulo escaleno	53.1	42.4	67.6	57.9	55.5	$X^2 3 = 4.477$ p-v=0.214
desenhou triângulo isósceles	50.0	81.8	76.5	55.3	65.7	$X^2 3 = 10.891$ p-v=0.012
desenhou triângulo equilátero	31.3	54.5	70.6	47.4	51.1	$X^2 3 = 10.582$ p-v=0.014
desenhou triângulo retângulo	28.1	30.3	55.9	65.8	46.0	$X^2 3 = 14.718$ p-v=0.002
desenhou triângulos	53.1	42.4	67.6	57.9	55.5	$X^2 3 = 4.477$ p-v=0.214

Gráfico A_2

Análise de Correspondência das Séries e os Tipos de Triângulos Desenhados

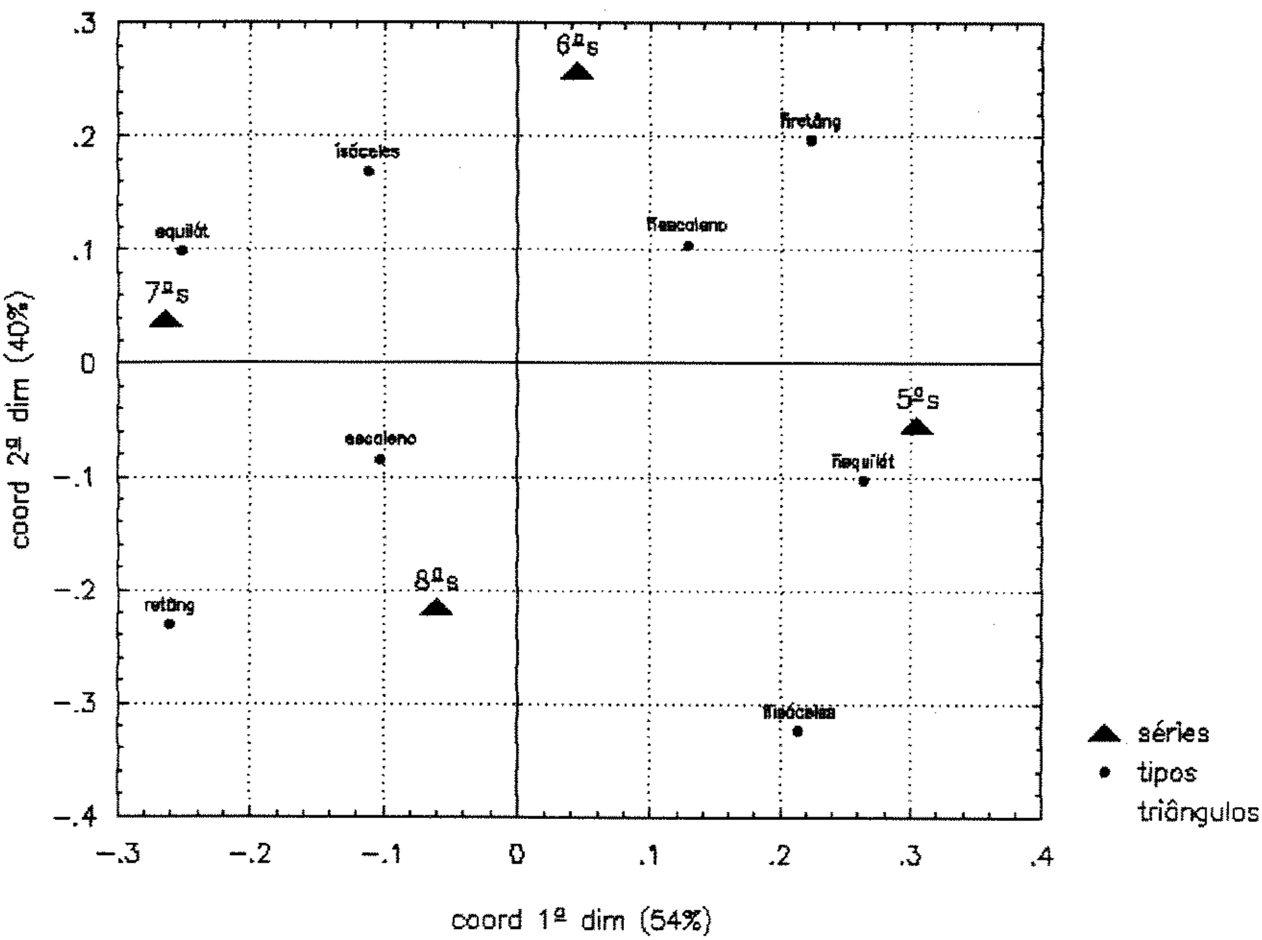


Tabela A_3

As Séries e os Tipos de Paralelogramos Desenhados

Série	Série 5	Série 6	Série 7	Série 8	Total	Teste Chi-Quadrado
	%	%	%	%	%	
desenhou paralelogramo	12.5	42.4	70.6	23.7	37.1	$X^2$3=27.930 p-v=0.000
desenhou retângulo	6.2	30.3	14.7	15.8	16.8	$X^2$3= 6.991 p-v=0.072
desenhou losango	.	51.5	8.8	5.3	16.1	$X^2$3=41.505 p-v=0.000
desenhou quadrado	3.1	21.2	11.8	15.8	13.1	$X^2$3= 4.987 p-v=0.173
desenhou paralelogramo	12.5	42.4	70.6	23.7	37.1	$X^2$3=27.930 p-v=0.000

Gráfico A_3

Análise de Correspondência das Séries e os

Tipos de Paralelogramos Desenhados

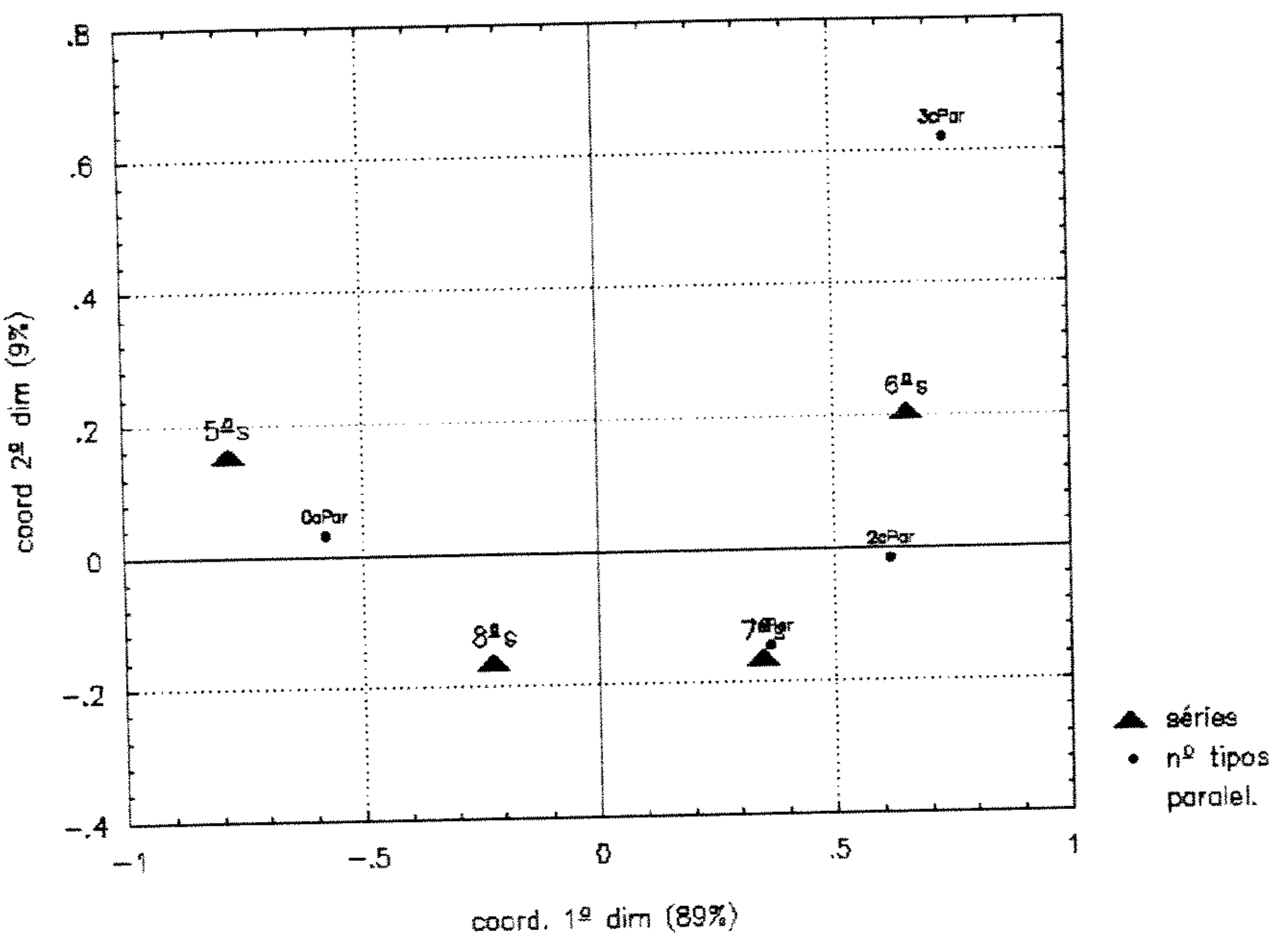


Tabela A_4

As Séries e as Definições de Triângulo e Paralelogramo

(resumo da 1ª parte dos testes)

Série		Definição triângulos (%)		Definição paralelogramos (%)		Acertos questionário (%)	
	Número	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão
5-s	32	39.06	4.63	5.25	2.65	22.16	3.02
6-s	33	75.18	4.54	47.00	6.03	61.09	4.40
7-s	34	78.32	4.59	42.74	5.55	60.56	3.91
8-s	38	71.82	4.02	15.39	3.84	43.68	3.00
Total	137	66.59	2.56	27.42	2.77	47.04	2.22

Há evidências de que as séries se distinguem pela definição de triângulos (Teste de kruskal-wallis: $X^2 3=34.887$ p-v=0.0001, Teste ANOVA: F=16.060 p-v=0.0001)
Há evidências de que as séries se distinguem pela definição de paralelogramos (Teste de kruskal-wallis: $X^2 3=45.876$ p-v=0.0001, Teste ANOVA: F=18.427 p-v=0.0001)
Há evidências de que as séries se distinguem pela definições em geral (Teste de kruskal-wallis: $X^2 3=51.027$ p-v=0.0001, Teste ANOVA: F=24.666 p-v=0.0001)

Gráfico A_4

As Séries e as Definições de Triângulo e Paralelogramo

(resumo da 1ª parte dos testes)

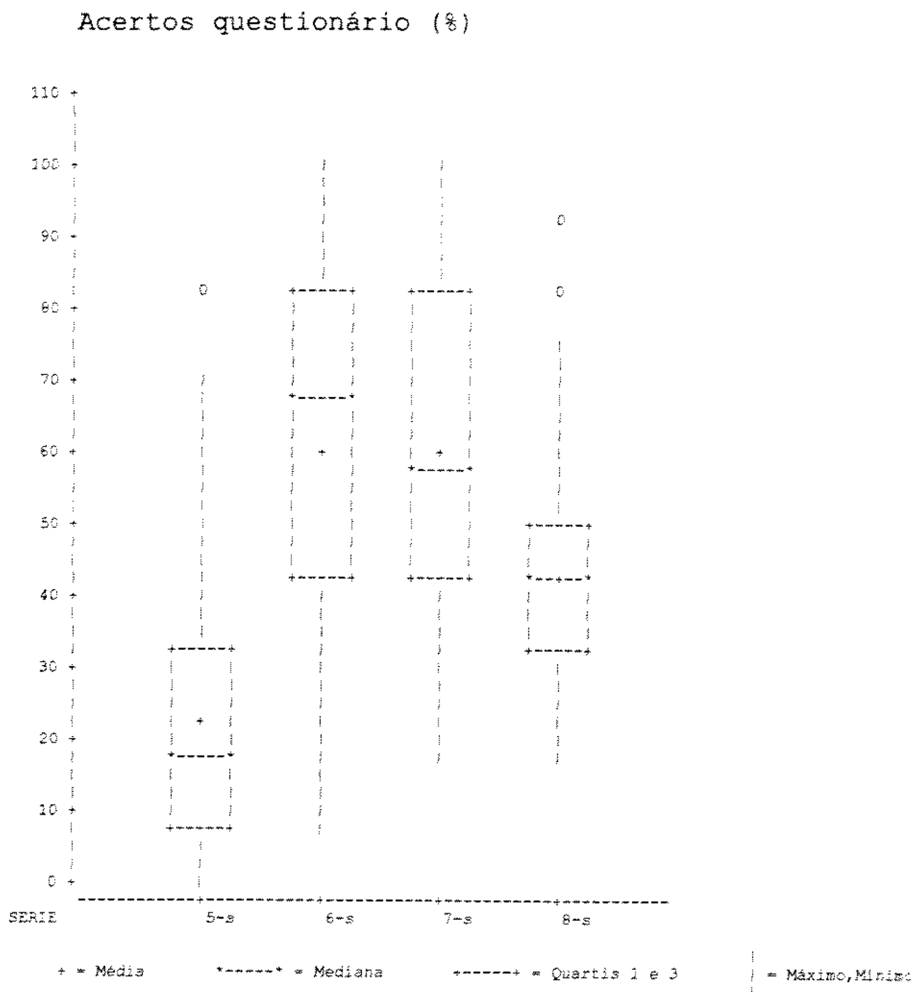


Tabela A_5

As Séries e os Exemplos de Triângulos e Paralelogramos

(resumo da 3ª parte dos testes)

Série	Número	Acertos fig triângulos (%) Média	Acertos fig triângulos (%) Erro Padrão	Acertos fig paralelogramos (%) Média	Acertos fig paralelogramos (%) Erro Padrão	Acertos figuras (%) Média	Acertos figuras (%) Erro Padrão
5-s	32	78.37	1.68	59.53	2.58	68.59	1.72
6-s	33	75.36	2.52	62.03	2.34	68.45	1.80
7-s	34	82.56	1.22	66.71	2.58	74.26	1.53
8-s	38	78.03	1.23	59.03	1.89	68.18	1.23
Total	137	78.59	0.87	61.77	1.18	69.85	0.80

Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos de figuras de triângulos (Kruskal-Wallis: $X^2 3=7.6221$ p-v=0.0545, ANOVA: F=2.974 p-v=0.0341)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos de figuras de paralelogramos (Kruskal-Wallis: $X^2 3=8.4447$ p-v=0.0377, ANOVA: F=2.275 p-v=0.0828)
Há evidências de que as séries se distinguem pelos acertos de figuras em geral (Kruskal-Wallis: $X^2 3=10.920$ p-v=0.0122, ANOVA: F=3.522 p-v=0.0169)

Gráfico A_5

As Séries e os Atributos Definidores de Triângulo e Paralelogramo

(resumo da 2ª parte dos testes)

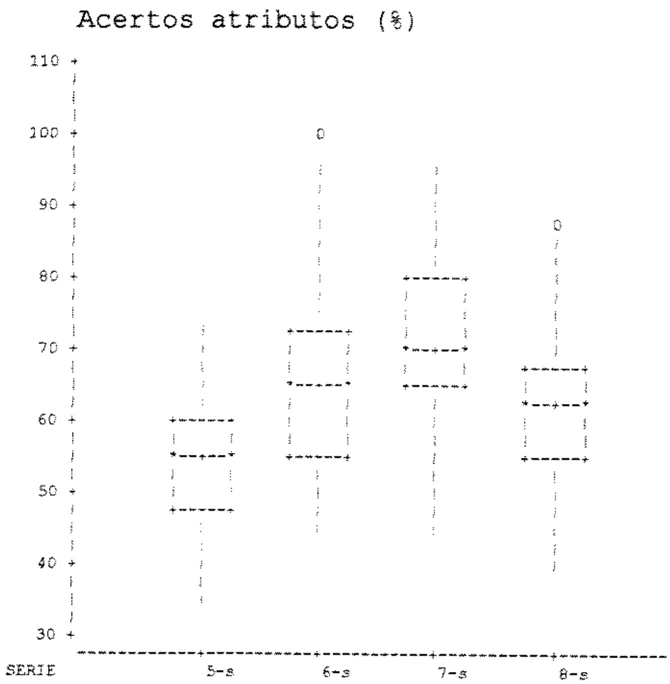


Gráfico A_6

As Séries e os Exemplos de Triângulo e Paralelogramo

(resumo da 3ª parte dos testes)

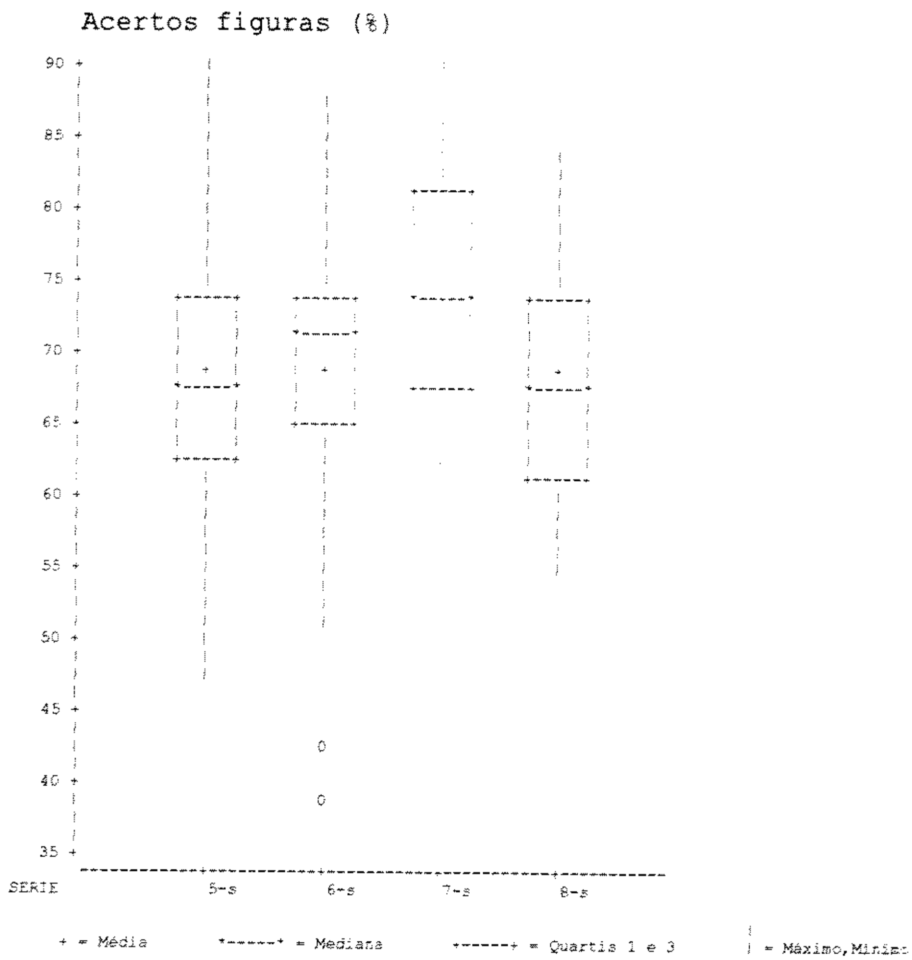


Tabela A_6

As Séries e os Atributos de Triângulo

Atributos de Triângulos	Série				Total	Teste Chi-Quadrado
	5-s	6-s	7-s	8-s		
	%	%	%	%	%	
F: Tr é fig 3 lads =s	21.9	48.5	58.8	60.5	48.2	$X^{2}3=12.733$ p-v=0.005
F: Tod tr pos âng 90	37.5	66.7	82.4	76.3	66.4	$X^{2}3=17.540$ p-v=0.001
F: Tr é fig 3 âng iguais	43.7	63.6	82.4	65.8	64.2	$X^{2}3=10.748$ p-v=0.013
F: Tr é retângulo de 3 lados	78.1	78.8	55.9	57.9	67.2	$X^{2}3=7.206$ p-v=0.066
F: Tod tr pos 2 lads =	56.2	69.7	91.2	71.1	72.3	$X^{2}3=10.298$ p-v=0.016
V: Tod tr é fig plana	43.7	24.2	52.9	42.1	40.9	$X^{2}3=5.959$ p-v=0.114
F: Há tr que pos lads paral	40.6	54.5	64.7	39.5	49.6	$X^{2}3=6.016$ p-v=0.111
F: Tr é um ang q pos 3 lads	6.2	27.3	44.1	23.7	25.5	$X^{2}3=12.550$ p-v=0.006
V: Tod tr é fig q pos 3 lad	87.5	90.9	97.1	94.7	92.7	$X^{2}3=2.623$ p-v=0.453
V: Tod tr é fig form segm r	81.2	78.8	79.4	89.5	82.5	$X^{2}3=1.853$ p-v=0.604
V: Tr é fig fechada	90.6	100.0	94.1	97.4	95.6	$X^{2}3=3.879$ p-v=0.275

Tabela A_7

As Séries e os Atributos de Paralelogramo

Atributos de Paralelogramos	Série				Total	Teste Chi-Quadrado
	5-s	6-s	7-s	8-s		
	%	%	%	%	%	
V: Paral é quadrilátero	75.0	90.9	88.2	71.1	81.0	$X^2 3$= 6.459 p-v=0.091
F: Paral pos só 2 lads =	25.0	48.5	47.1	39.5	40.1	$X^2 3$= 4.693 p-v=0.196
V: Paral pos lads opost //	87.5	66.7	91.2	71.1	78.8	$X^2 3$= 8.851 p-v=0.031
V: Lads opos paral mesm med	62.5	69.7	67.6	71.1	67.9	$X^2 3$= 0.651 p-v=0.885
V: Paral pod ter 4 âng =s	40.6	54.5	52.9	39.5	46.7	$X^2 3$= 2.620 p-v=0.454
F: Paral é fig c/6 lads	53.1	87.9	91.2	76.3	77.4	$X^2 3$=16.552 p-v=0.001
V: Quadr é paral	37.5	45.5	50.0	57.9	48.2	$X^2 3$= 3.042 p-v=0.385
F: Losango ñ é paral	46.9	66.7	58.8	55.3	56.9	$X^2 3$= 2.688 p-v=0.442
V: Tod ret é paral	37.5	42.4	64.7	47.4	48.2	$X^2 3$= 5.629 p-v=0.131
F: Paral pos 3 lads =s	65.6	93.9	94.1	92.1	86.9	$X^2 3$=16.578 p-v=0.001
V: Paral é fig fechada	96.9	87.9	88.2	89.5	90.5	$X^2 3$= 2.028 p-v=0.567
F: Paral ñ é fig plana	46.9	45.5	73.5	60.5	56.9	$X^2 3$= 7.113 p-v=0.068
V: Paral é form só p/segm r	71.9	69.7	76.5	71.1	72.3	$X^2 3$= 0.439 p-v=0.932
F: Tod paral pos 2 lads inc	18.8	30.3	32.4	23.7	26.3	$X^2 3$= 1.992 p-v=0.574

Tabela A_8

As Séries e os Exemplos de Triângulo

Figuras de Triângulos	Série				Total	Teste Chi-Quadrado
	5-s	6-s	7-s	8-s		
	%	%	%	%	%	
V: Triângulo	84.4	97.0	100.0	100.0	95.6	$X^2 3=13.104$ p-v=0.004
F: Quadrilatero	78.1	84.8	91.2	81.6	83.9	$X^2 3= 2.301$ p-v=0.512
F: Quadrilatero	96.9	87.9	97.1	89.5	92.7	$X^2 3= 3.497$ p-v=0.321
V: Triângulo isóceles	90.6	84.8	97.1	94.7	92.0	$X^2 3= 3.931$ p-v=0.269
F: Aberto	87.5	87.9	94.1	89.5	89.8	$X^2 3= 1.012$ p-v=0.798
F: Arco	100.0	90.9	91.2	94.7	94.2	$X^2 3= 3.193$ p-v=0.363
V: Triângulo borda espessa	93.7	90.9	100.0	100.0	96.4	$X^2 3= 6.121$ p-v=0.106
F: 3 arcos fechado	90.6	93.9	85.3	92.1	90.5	$X^2 3= 1.642$ p-v=0.650
V: Triângulo escaleno	100.0	90.9	100.0	97.4	97.1	$X^2 3= 6.430$ p-v=0.092
F: Arco	96.9	87.9	88.2	92.1	91.2	$X^2 3= 2.158$ p-v=0.540
V: Triângulo escaleno	84.4	84.8	94.1	97.4	90.5	$X^2 3= 5.230$ p-v=0.156
V: Arco	12.5	3.0	11.8	7.9	8.8	$X^2 3= 2.335$ p-v=0.506
F: El. 1 prisma triângular	25.0	24.2	55.9	23.7	32.1	$X^2 3=11.729$ p-v=0.008
V: El. 2 triângulo de papel	96.9	97.0	97.1	100.0	97.8	$X^2 3= 1.180$ p-v=0.758
F: El. 3 pirâmide	37.5	24.2	35.3	10.5	26.3	$X^2 3= 8.444$ p-v=0.038

Tabela A_9

As Séries e os Exemplos de Paralelogramos

Figuras de Paralelogramos	Série				Total	Teste Chi-Quadrado
	5-s	6-s	7-s	8-s		
	%	%	%	%	%	
F: Triângulo	100.0	97.0	97.1	97.4	97.8	$X^2$3= 0.950 p-v=0.813
V: Losango	21.9	75.8	50.0	52.6	50.4	$X^2$3=18.982 p-v=0.000
F: Trapezio	53.1	9.1	38.2	28.9	32.1	$X^2$3=15.262 p-v=0.002
V: Paralelogramo	84.4	100.0	100.0	89.5	93.4	$X^2$3= 9.956 p-v=0.019
F: Trapezio	65.6	42.4	58.8	47.4	53.3	$X^2$3= 4.475 p-v=0.215
V: Retângulo	34.4	60.6	32.4	44.7	43.1	$X^2$3= 6.761 p-v=0.080
V: Retângulo	21.9	54.5	41.2	52.6	43.1	$X^2$3= 9.102 p-v=0.028
F: Retas paralelas	87.5	90.9	94.1	68.4	84.7	$X^2$3=11.256 p-v=0.010
F: Aberto	65.6	66.7	85.3	73.7	73.0	$X^2$3= 4.170 p-v=0.244
F: 2 // e 2 arcos	84.4	93.9	91.2	86.8	89.1	$X^2$3= 1.874 p-v=0.599
F: 6 lados	65.6	60.6	91.2	55.3	67.9	$X^2$3=12.114 p-v=0.007
V: Retângulo	37.5	66.7	50.0	52.6	51.8	$X^2$3= 5.597 p-v=0.133
F: 6 lados	96.9	81.8	100.0	92.1	92.7	$X^2$3= 9.297 p-v=0.026
F: El. 1 prisma paralelogramo	18.8	15.2	26.5	7.9	16.8	$X^2$3= 4.585 p-v=0.205
V: El. 2 quadrado de papel	15.6	51.5	32.4	52.6	38.7	$X^2$3=13.155 p-v=0.004
F: El. 3 cubo	96.9	24.2	76.5	39.5	58.4	$X^2$3=45.518 p-v=0.000