UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A INTER-RELAÇÃO FORMA E CONTEÚDO NO DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL DA FRAÇÃO

ÉRICA MARIA TOLEDO CATALANI

Profª Drª ANNA REGINA LANNER DE MOURA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Érica Maria Toledo Catalani e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 27 / 02 / 2002

Assinatura: ______________________

Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

CAMPINAS
2002

Catalogação na Publicação elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecária: Rosemary Passos - CRB-8ª/5751

Catalani, Erica Maria Toledo.
C28i A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração / Erica Maria Toledo Catalani. – Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador : Anna Regina Lanner de Moura.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Frações. 2. Ensino. 3. Aprendizagem. 4. Lógica. 5. Dialética. 6. Medição – História. I. Moura, Anna Regina Lanner de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

02-025-BFE

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:

Ao Ernani, companheiro paciente e amoroso que compreendeu, incentivou e sabiamente compensou minha ausência com as filhas, especialmente nestes últimos meses.

Às adoradas filhas Maria Cecília e Fernanda, por entenderem resignadamente a ausência da mãe e, em particular à Cecília, por socorrer-me nas traduções e transcrições de fitas de vídeo.

Aos meus queridos pais José Álvaro Toledo e Carime Mamud Sales Toledo, por acreditarem e incentivarem este trabalho, auxiliando na leitura atenta e valiosa correção dos textos.

Aos alunos do quarto ano da EMEF Raimundo Correia, por me concederem a alegria de poder partilhar a experiência de desenvolver conceitualmente a fração.

AGRADECIMENTOS

À querida Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, educadora e orientadora competente, cautelosa e paciente, em cuja prática encontramos a real corporeificação das palavras pelo exemplo, por acompanhar intensamente este trabalho dando as contribuições essenciais para sua realização.

Ao terno amigo Luciano de Castro Lima, por sua generosa contribuição educacional – a proposta de desenvolvimento conceitual da fração – base fundamental deste trabalho.

Aos amigos educadores dos grupos de estudos: Educação Conceitual, CARAÇA e PRAPEM - Prática Pedagógica em Educação Matemática, com quem tive a oportunidade de discutir as interrogações e convicções inerentes à construção do conhecimento, entre eles Daisy, Dale, Diana, Dulce, Esther, Gilberto, Maria do Carmo, Franciana e Conceição, meus agradecimentos pelo necessário apoio à elaboração da fundamentação teórica e de outros aspectos desta pesquisa.

Aos colegas da Escola Municipal Raimundo Correia, sobretudo à amiga Rosana de Oliveira Nascimento Motta, por confiar neste trabalho compreendendo as necessidades advindas de uma investigação científica.

À professora Ana Maria de Caria Silva, cuja prática docente jamais deu lugar à simples transferência de conhecimento para os alunos.

Aos professores membros da banca examinadora Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, Drª Maria Ângela Miorim, Drª Alexandrina Monteiro e Mestra Celi Aparecida Espasandin Lopes por reconhecerem neste trabalho uma contribuição no campo educacional e apresentarem pertinentes sugestões e críticas. E aos professores Dr. Antonio Miguel, Dr. Dario Fiorentini e Drª Dione Lucchesi de Carvalho pelas contribuições e reflexões propostas nas disciplinas do programa.

Aos queridos irmãos Ana Maria, pelo auxílio na revisão dos textos, e Pedro, por subvencionar a preparação do abstract deste trabalho.

Marco Pólo descreve uma ponte, pedra por pedra.
— Mas qual é a pedra que sustenta a ponte? □ pergunta Kublai Khan.
— A ponte não é sustentada por esta ou aquela pedra □ responde Marco —, mas pela curva do arco que estas formam.
Kublai Khan permanece em silêncio, refletindo. Depois acrescenta:
— Por que falar das pedras? Só o arco me interessa.
— Sem pedras o arco não existe.

Ítalo Calvino – Cidades Invisíveis

RESUMO

Este estudo analisa ações de alunos do 4° ano do ciclo I (10 a 11 anos de idade) submetidos às atividades que problematizam o aspecto contínuo das grandezas quanto à enumeração, com o propósito de perceber *"como suas elaborações sobre o conceito de fração estão relacionadas à proposta do desenvolvimento conceitual tratado sob o enfoque da dialética forma e conteúdo?"* Atuando como professora e pesquisadora, assume-se a perspectiva da pesquisa qualitativa de caráter intervencionista na investigação das ações expressas em episódios de ensino transcritos do registro videográfico e escrito dos alunos de uma escola da periferia da cidade de São Paulo. As análises evidenciam que em suas ações de contar e medir os alunos elaboram pensamento e linguagem matemática. Formalizando juízos e definições de maneira própria, as crianças recriam para si o movimento da forma, enquanto síntese numérica da fração, e do conteúdo: ações de medir aspectos contínuos dos objetos. Sugere-se ainda elementos para discussões sobre o ensino-aprendizagem da fração, baseados na recuperação da dimensão criativa de elaboração conceitual.

ABSTRACT

This study analyze actions of students in the fourth year of cycle I (10 to 11 years old) submitted to activities that transform into problems the continuous aspect of magnitude in enumeration, with the purpose to perceive "how their elaborations of the concept of fraction are related to the proposal of conceptual development treated under the focus of the dialectic form and content?" Working as a teacher and researcher, an interventionist position is assumed in this qualitative research of actions expressed in teaching episodes transcribed from videotape and written student registers from a school located in a poor neighborhood in the city of Sao Paulo. The analysis shows that the students, in their procedures for counting and measuring, elaborate mathematical thought and language. Formalizing their own judgments and definitions, the children recreate for themselves the movement of form, like numeric synthesis of fractions, and of content: actions of measuring continuous aspects of objects. Furthermore, elements for discussions about the teaching-learning of fractions, based on a creative elaboration recovery of concepts are suggested.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.......... xvii

LISTA DE QUADROS.......... xxi

LISTA DE ABREVIATURAS.......... xxiii

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.......... 25

CAPÍTULO 2

INCLUSÃO E AMPLIAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA.......... 31

2.1 Como se configuram as pesquisas sobre frações.......... 31

2.2 Delimitando nossa pesquisa.......... 38

2.3 O enfoque educacional do ensino de fração: nas propostas e guias curriculares e nos livros didáticos.......... 40

CAPÍTULO 3

O DESENVOLVIMENTO DA BASE TEÓRICA.......... 53

3.1 A estreita abordagem da linguagem.......... 53

3.2 A linguagem formalizada da matemática: seu caráter prescritivo para o pensamento.......... 58

3.3 A dinâmica criativa na aprendizagem do conceito – a unidade forma e conteúdo.......... 63

3.4 A inter-relação do lógico e histórico como base para a unidade forma e conteúdo.......... 67

CAPÍTULO 4

AS CONEXÕES DO CONCEITO DE FRAÇÃO.......... 73

CAPÍTULO 5

O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES.......... 91

5.1 A organização das atividades para a análise.......... 93

5.2 A análise dos episódios e suas cenas.......... 97

CAPÍTULO 6

PRIMEIRA UNIDADE DIDÁTICA........ 101

6.1 A unidade natural........ 101

EPISÓDIO 6.1 - O mundo do Vandinho........ 103

EPISÓDIO 6.2 - Identificando o conjunto que conta e o conjunto contado........ 113

EPISÓDIO 6.3 - Observando mudanças no conjunto que conta e no conjunto contado........ 116

EPISÓDIO 6.4 - A unidade natural........ 120

6.2 Conclusões da primeira unidade didática........ 130

CAPÍTULO 7

SEGUNDA UNIDADE DIDÁTICA........ 133

7.1 A unidade artificial........ 133

EPIDÓDIO 7.1 - Qualidade e quantidade........ 136

EPISÓDIO 7.2 - Definindo a grandeza........ 141

EPISÓDIO 7.3 - Percebendo o senso de grandeza........ 149

7.2 Conclusões da segunda unidade didática........ 160

CAPÍTULO 8

TERCEIRA UNIDADE DIDÁTICA........ 163

8.1 A fração........ 163

EPISÓDIO 8.1 - A divisão de terras no Egito antigo........ 165

EPISÓDIO 8.2 - Recuperando o terreno-lote depois da cheia do rio Nilo........ 171

EPISÓDIO 8.3 - A escolha da unidade artificial........ 178

EPISÓDIO 8.4 - Percebendo os limites da unidade na medição de terrenos........ 185

EPISÓDIO 8.5 - Medir as sobras sem criar novas unidades........ 189

8.2 Conclusões da terceira unidade didática........ 198

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS 203

CAPÍTULO 10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 211

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

FIGURA 2.1 – Folhas com desenhos para atividades com blocos.. 43

FIGURA 2.2 – Justiça na divisão dos chocolates.. 45

CAPÍTULO 6

FIGURA 6.1 – Primeiro desenho do grupo do Argi... 105

FIGURA 6.2 – Segundo desenho do grupo do Argi... 107

FIGURA 6.3 – Último desenho do grupo do Argi.. 108

FIGURA 6.4 – Primeiro desenho do grupo do Cari... 109

FIGURA 6.5 – Segundo desenho do grupo do Cari... 110

FIGURA 6.6 – Último desenho do grupo do Cari.. 111

FIGURA 6.7 – Objetos contados.. 117

FIGURA 6.8 – Objetos usados para contar... 117

FIGURA 6.9 – Painel das respostas à questão: o que é unidade natural?............................ 128

CAPÍTULO 7

FIGURA 7.1 – Qualidade e quantidade: altura, velocidade e ferocidade............................. 136

FIGURA 7.2 – Qualidade e quantidade: volume e peso.. 136

FIGURA 7.4 – Definindo a grandeza.. 141

FIGURA 7.5 – Representação dos recipientes... 152

FIGURA 7.6 – Comparação dos recipientes... 153

FIGURA 7.7 – Organização final dos recipientes.. 153

CAPÍTULO 8

FIGURA 8.1 – A história da divisão de terras às margens do rio Nilo.................................. 166

FIGURA 8.2 – A divisão de terras às margens do rio Nilo sugerida por Dama.................... 167

FIGURA 8.3 – Representação da visão geral das terras às margens do rio Nilo.................. 168

FIGURA 8.4 – A divisão de terras às margens do rio Nilo sugerida por Cari...................... 168

FIGURA 8.5 – A divisão de terras às margens do rio Nilo realizada por Dama e Jaque....... 170

FIGURA 8.6-A – Desenho do Edso (primeira questão).. 173

FIGURA 8.6-B – Desenho do Edso (segunda questão).. 173

FIGURA 8.7-A – Desenho do Iv (primeira questão)... 174

FIGURA 8.7-B – Desenho do Iv (segunda questão)... 174

FIGURA 8.8 – Desenho da Prisci.. 174

FIGURA 8.9 – Desenho da Kell.. 174

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO 6

QUADRO I – Síntese das elaborações do episódio 6.1 113

QUADRO II – Síntese das elaborações do episódio 6.2 116

QUADRO III – Síntese das elaborações do episódio 6.3 120

QUADRO IV – Síntese das elaborações do episódio 6.4 129

CAPÍTULO 7

QUADRO V – Respostas dos alunos referentes à altura dos jogadores de basquete 137

QUADRO VI – Síntese das elaborações do episódio 7.1 138

QUADRO VII – Respostas à atividade: definindo grandeza 145

QUADRO VIII – Síntese das elaborações do episódio 7.2 148

QUADRO IX – Síntese das elaborações do episódio 7.3 158

CAPÍTULO 8

QUADRO X – Síntese das elaborações do episódio 8.1 171

QUADRO XI – Respostas referentes ao debate nos grupos 172

QUADRO XII – Soluções individuais às questões sobre o problema da cheia do rio Nilo .. 173

QUADRO XIII – Síntese das elaborações do episódio 8.2 177

QUADRO XIV – Painel das medidas dos terrenos em cúbitos 182

QUADRO XV – Síntese das elaborações do episódio 8.3 184

QUADRO XVI – Síntese das elaborações do episódio 8.4 189

QUADRO XVII – Soluções para medir as sobras sem criar novas unidades artificiais 191

QUADRO XVIII – Registro da medição das sobras 195

QUADRO XIX – Síntese das elaborações do episódio 8.5 197

LISTA DE ABREVIATURAS

Ibid. - na mesma obra

Cf. – confira.

Apud – citado por, conforme, segundo

Sic! – é bem assim, por estranho ou errado que pareça.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O ensino de fração, tema fundamental dessa pesquisa, tem sido freqüentemente foco de estudos e pesquisas que, de modo geral, têm por finalidade trazer contribuições para o processo ensino-aprendizagem desse conceito.

Nossa investigação se situa nesse campo e assumimos investigar com alunos do quarto ano do ciclo I[1] a questão: *"como as elaborações conceituais de fração desses alunos estão relacionadas à proposta do desenvolvimento conceitual tratado sob a inter-relação forma e conteúdo?"*, desenvolvendo com eles atividades que problematizam o aspecto contínuo da realidade no sentido de sua enumeração, considerado essencial para o desenvolvimento do conceito de fração.

Para poder responder a esta questão julgamos necessário inserir nosso estudo na realidade escolar de forma que ele fizesse parte do cotidiano em que o aluno se encontra envolvido. Nessas condições, avaliamos importante intervir como professora de matemática na sala de aula pesquisada e a fim de concretizar, na ação pedagógica, uma proposta de atividades que possibilitasse ao aluno poder buscar suas experiências pessoais, com relação ao conceito de fração, ao mesmo tempo em que refletisse conceitualmente sobre elas, optamos por realizar a pesquisa numa das classes da Escola Municipal Raimundo Correia, localizada na periferia da

[1] Ciclo que na rede Municipal de São Paulo/Capital, compreende as quatro primeiras séries do Ensino Fundamental.

cidade de São Paulo.

Os motivos que nos levaram a essa escolha residem em nossas experiências anteriores tanto atuando como professora de matemática na rede estadual como em cursos para professores.

Durante os dez anos de atuação como professora de matemática para adolescentes nas redes publicas estadual e municipal notamos que os alunos habitualmente apresentavam dificuldades em resolver problemas e dominar os procedimentos de cálculo com frações.

Outro dado revelador de nossa experiência ocorreu na ocasião em que fomos regentes do projeto no PEC[2]. Em razão desse projeto formou-se o grupo de estudos Caraça[3] no qual compartilhávamos o estudo de atividades que recuperavam os movimentos dos conceitos matemáticos oportunizando a reflexão sobre o desenvolvimento conceitual do número inteiro, da fração e da razão que seriam implementadas durante o projeto com os professores da rede.

Durante o trabalho no projeto foi possível observar e acompanhar as reflexões dos professores diante das atividades que problematizavam os conceitos de medida e de grandeza envolvidos no desenvolvimento do conceito de fração. Vimos que o conhecimento de muitos deles sobre frações se restringia às técnicas de cálculo e ao conhecimento de jogos que previam a aplicação desse conceito. Quando os professores interagiram com as atividades, refletindo sobre suas experiências cotidianas com a fração, conferimos o quanto esse conceito havia sido tratado apenas no aspecto de sua operacionalidade.

Durante este período adaptamos algumas atividades da proposta de desenvolvimento conceitual da fração do livro de Lima & Moisés (1998) para desenvolvê-las, a título de revisão, com alunos das 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio da rede estadual. Os resultados não foram diferentes, percebemos que eles também se empenhavam ativamente nestas atividades, pois refletiam sobre os movimentos numéricos da realidade em que estavam inseridos ao mesmo tempo em que pensavam conceitualmente sobre ela.

Foi então que se revelou o interesse em observar sistematicamente as elaborações dos alunos sobre o conceito de fração e daí resolvemos fazê-lo no período em que se inicia a

[2] Projeto de Educação Continuada da Secretaria de Educação de São Paulo realizado em 97/98, que visou a formação continuada dos professores de matemática do Ciclo II (referente aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental) da rede estadual.

[3] Grupo de estudos sobre o ensino da matemática que tem por princípios a educação conceitual, inicialmente formado pela equipe de matemática no PEC 97/98 – Pólo 3.

aprendizagem desse conceito, no caso da escola municipal escolhida para a pesquisa, isto ocorria no quarto ano do Ciclo I.

Aliado a esse interesse encontrava-se a questão do conhecimento matemático e a ênfase dada a seu aspecto lógico e formalizado, ocasionando um ensino que, em geral, prioriza o aspecto da operacionalidade do conceito.

De fato, parecia-nos que o ensino de matemática, continuamente, priorizava essa operacionalidade ao seguir o modelo:

- ❖ Apresentação do conceito em sua expressão simbólica,
- ❖ Demonstração do "funcionamento" desse conceito – a técnica operatória,
- ❖ Aplicação do conceito – o modelo ou problema resolvido pelo professor,
- ❖ Reprodução da técnica e da aplicação – o aluno recebe a lista de exercícios e problemas para reproduzir o aprendido.

De modo equivalente, a aprendizagem da fração e suas técnicas operatórias eram postas como ferramentas para a resolução de problemas e os alunos recebiam o treinamento do algoritmo, o que não permitia sequer que participassem com suas experiências pessoais, elaborando seus próprios procedimentos de resolução. De tal modo, a matemática seguia, sendo tratada como um conhecimento estático, pronto e definido a priori, onde cada problema só pode ter um procedimento de resolução.

Verificamos ainda, que nos últimos anos, os diversos cursos de capacitação ou artigos em revistas voltados para educadores, focalizavam a utilização de materiais manipulativos no ensino do conceito de fração.

Observava-se, no entanto, que embora estes materiais fossem utilizados com maior freqüência, pouco se alterou no desempenho dos alunos. Isto porque, os materiais manipulativos têm sido utilizados freqüentemente na passagem da linguagem cotidiana para a científica, entendendo esta passagem como uma simples transferência de representação de uma para outra, ou seja, de transposição de linguagem. Assim, esse material é empregado como instrumento que tem relação direta com a escrita formalizada do conceito, servindo somente para demonstrar os mecanismos dessa escrita, ou seja, sua operacionalidade.

Em síntese, nossa experiência profissional assinalava que nas práticas escolares, o conceito de fração, repetidamente, era apresentado de forma desvinculada do seu conteúdo, centrando-se na linguagem formal, no treinamento de técnicas operatórias e na manipulação de materiais, sem permitir que os alunos explorassem suas próprias experiências pensando sobre elas, que desenvolvessem os conceitos matemáticos numa interação entre o agir e o pensar de forma crítica e criativa. Inquietados com essa proposição nos colocamos a tarefa de buscar algumas respostas.

Deste modo, em oposição à perspectiva de tratamento que valoriza unicamente o aspecto operacional do conceito, neste estudo abordamos o conceito de fração como movimento que parte do pensar sobre a realidade na qual estamos imersos para, a partir dela, manifestarmos o conhecimento sobre o controle das variações quantitativas de objetos cujo aspecto a ser relevado nessa quantificação é o de natureza contínua. Essa forma de tratamento do conceito, em geral não está presente nas abordagens de ensino da fração nas escolas.

Cumpre observar que, por trás da ênfase do ensino de fração, apenas no seu aspecto simbólico que restringe sua compreensão ao entendimento da organização dessa linguagem enquanto sua gramática, encontramos a fração como a primeira conexão bem sucedida, realizada pela humanidade, entre dois movimentos quantitativos regulares e que constitui o embrião do pensamento do conceito de racionalidade.

Por isso acreditamos que apresentando aos alunos problemas que os desafiem no controle de variações quantitativas, partindo de situações onde se viabilize a re-criação das principais conexões do conceito de fração, em interação com o professor e os colegas, eles se coloquem para pensar o conceito e não somente aplicá-lo tecnicamente.

As pesquisas sobre fração, que nos antecederam, tiveram por base em seus estudos referências das teorias cognitivistas. Seguramente, elas consistem em indicadores importantes sobre este tema ao trazerem contribuições sobre a construção das estruturas do pensamento operatório deste conceito, tanto em situações experimentais, como em propostas de ensino com alunos de diversas faixas etárias. Nas pesquisas mais recentes esse referencial teórico tem fundamentado estudos sobre a importância das diferentes representações da fração na constituição do conceito de racionalidade.

Essas investigações servem para demarcar nossa questão de pesquisa no sentido de diferenciar-nos daquelas que tomaram para estudo o conceito de fração em sua síntese atual, isto é, sua linguagem na forma simbólica $^{a}/_{b}$ que é resultado final das diversas elaborações de pensamento e linguagem na atividade social e histórica da humanidade.

O caráter de nossa pesquisa requereu a interpretação das atividades realizadas pelos alunos na perspectiva da elaboração humana de conhecimentos e, para tanto, buscamos fundamentação teórica em autores que fazem referência ao processo de desenvolvimento de formas de pensamento – juízos e conceitos – integrantes do movimento da forma e do conteúdo do conceito.

Sob esta perspectiva, os juízos e conceitos de medida e grandeza constituem conexões básicas para a elaboração do conceito de fração e são identificados como fundamentais por meio do estudo da história deste conceito. Estas conexões foram buscadas na história do desenvolvimento conceitual da fração por proporcionar o planejamento e organização das atividades e também por se tornarem elementos para analisar as elaborações dos alunos.

Das análises dos episódios[4] foi possível perceber que, na elaboração do conceito de fração, os alunos refletem sobre suas ações cotidianas de contar e medir ao mesmo tempo em que pensam conceitualmente sobre elas, elaborando criativamente a linguagem matemática.

As atividades orientadas pelo desenvolvimento lógico-histórico da fração privilegiaram elaborações que abordam o movimento forma e conteúdo, no sentido do estabelecimento de juízos e conceitos sobre as ações de medir aspectos contínuos, oferecendo elementos para discussões sobre o ensino-aprendizagem da fração. Entendemos que o desenvolvimento da inter-relação conteúdo e forma na aprendizagem da fração pode constituir um meio que possibilita uma aprendizagem significativa da fração.

---

[4]O episódio constitui metodologia de análise dos registros das aulas (em videotapes e escritos) na qual destaca-se de um conjunto de elaborações e ações dos alunos aquelas que compreendem fatores relacionados à questão que move a pesquisa, ou seja, *"o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão"* (MOURA, 1992, p. 77). Esse destaque é necessário, uma vez que se torna impossível abranger todas as relações existentes no fenômeno estudado – a prática em sala de aula.

CAPÍTULO 2

INCLUSÃO E AMPLIAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

2.1 Como se configuram as pesquisas sobre fração

Quando apreendemos, em nossa experiência como professores, a problemática em torno do ensino e aprendizagem do conceito de fração, vemos surgir uma série de questões mais particulares relacionadas a esta problemática. Por esse motivo este tema tornou-se objeto de atentas pesquisas científicas que o abordaram de maneiras tão diferentes.

Sabemos que o processo ensino-aprendizagem de qualquer conceito é complexo e multilateral. Por isso buscamos saber como é que o ensino de fração, considerado enquanto conhecimento matemático, tem sido abordado nas pesquisas. Sem a pretensão de uma análise extensiva, mas com a finalidade de situar um paralelo com nosso estudo, no sentido de perceber quais contribuições nos trazem as pesquisas que abordam esse conceito, examinamos algumas das pesquisas que enfocaram o tema fração, às quais tivemos acesso na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Para o abreviado levantamento das pesquisas que enfocaram o tema fração, especificamente, utilizamos como referência teses do banco de teses do CEMPEM/PRAPEM[1] e

[1] Grupo de Pesquisa sobre a Prática Pedagógica em Matemática (PRAPEM) do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (FE/UNICAMP).

os resumos[2] de artigos disponibilizados em consulta ao sistema ERIC na biblioteca da UNICAMP[3]. Entre as teses do CEMPEM/PRAPEM, destacamos a investigação de Oliveira (1996) que traz uma síntese na qual nos apoiamos e complementamos com a leitura de outras teses e de resumos buscados no sistema ERIC a partir de 1995. Percorrendo estes trabalhos percebemos quatro enfoques distintos: ênfase no uso de materiais manipulativos, pesquisa experimental, seqüências de ensino e formação de professores.

O primeiro se refere aos trabalhos que procuraram mostrar as vantagens do uso de materiais manipulativos no desempenho dos alunos nas atividades de ensino. Estas pesquisas preocuparam-se com o desempenho de estudantes diante das dificuldades em operar com frações e estiveram guiadas por influência de um período marcado pela pedagogia do "concreto". Apoiados no empirismo que se caracteriza pelo recurso à evidência sensível, ou seja, a supervalorização da percepção sensorial na obtenção de conhecimento, essa influência nas pesquisas sobre o ensino de frações é observada, principalmente no final da década de 60 e início da de 70, segundo Oliveira (1996). Observamos nessa perspectiva de estudo os trabalhos de Harrison, Brindley & Bye (1980)[4], Sowell (1989)[5], Trezise (1995), May (1995), Halford (1996), Stix (1997) e Krach (1998).

Vale a pena observar que logo no início de nossa atuação como professora de matemática na rede estadual, também participamos de uma oficina[6] que apresentava claramente essa inspiração. Nela, a orientação para o ensino do conceito de fração consistia em um trabalho com problemas que seriam resolvidos com o auxílio do material para representar as frações $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$ $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, até $^{1}/_{12}$. Confeccionamos discos, simulando a "pizza" e retângulos, simulando a "barra de chocolate", pois neste trabalho acreditava-se que o aluno aprendia o conceito de fração ao manipular e relacionar a figura representativa da parte com a representação numérica da fração.

Não se pode negar a importância do destaque ao aspecto da percepção na aquisição de um conhecimento. O pensamento surge e se desenvolve em base sensório-material e neste caminho esses trabalhos tiveram seu valor. No entanto, a análise detalhada do desenvolvimento

[2] Os títulos dos resumos de artigos encontram-se nas referências bibliográficas desta dissertação.
[3] Biblioteca "Joel Martins" da Faculdade de Educação da UNICAMP.
[4] *Apud* Oliveira (1996).
[5] *Ibid.*
[6] Realizadas pela Oficina Pedagógica do Estado de São Paulo e no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de São Paulo - USP.

filosófico do conhecimento tem nos apontado que as percepções não são sua única fonte e que, nem mesmo, há uma passagem direta do sensório motor para o conceito.

Kopnin (1978) em sua análise da história do desenvolvimento do pensamento científico enfatiza que, movido pela revolução filosófica dos limites dos séculos XVIII e XIX, levantou-se a questão do estudo das peculiaridades do conhecimento e opondo-se à idéia deste conhecimento se fundar direta e unicamente na experiência, volta-se para sua lógica e linguagem.

O enfoque da lógica e linguagem no estudo das peculiaridades do conhecimento pronuncia-se nas pesquisas psicológicas e gnosiológicas que, posteriormente, irão influenciar os sistemas de ensino. É neste cenário que Jean Piaget, baseado em numerosas investigações, elabora a teoria do desenvolvimento cognitivo, revelando a fundo as operações do sujeito em seu pensamento.

Em uma análise do enfoque dado ao conceito por Piaget, Davýdov (1982) sublinha o modo como ele distingue sua posição de orientações da psicologia empírica e associativa do séc. XIX que descreviam o processo de formação de conceitos mediante simples abstração e generalização dos dados perceptíveis e interpretavam o conceito como um resultado abstrato da percepção, generalizado e formulado com ajuda da linguagem[7]. Jean Piaget assinala que o conhecimento reside na interação real e prática do sujeito com o objeto e o desenvolvimento do pensamento humano constitui, de forma geral, a organização e coordenação das ações nesse sistema integrador de suas operações, também identificadas por estruturas operantes.

Acentuando esta oposição à idéia de fundamento do conhecimento na experiência, as modificações trazidas pelas conquistas da Psicologia cognitivista, influenciam o foco das pesquisas realizadas, voltando-as para o desenvolvimento das estruturas cognoscitivas reais com ajuda da lógica matemática. Estas conquistas são percebidas nas pesquisas sobre fração modificando-as substancialmente, fazendo surgir investigações que focalizaram as dificuldades dos alunos tendo por base seu desenvolvimento cognitivo.

Com enfoque psicológico, pesquisas científicas influenciadas pelas teorias construtivistas, propuseram experiências de ensino com alunos de diversas faixas etárias,

[7] Para os empiristas e associacionistas do século XIX, os dados perceptíveis e as imagens de representação eram fontes exclusivas do pensamento uma vez que consideram o pensamento produto da associação das imagens entre si mediante a percepção. (Piaget *apud* DAVÝDOV, 1982)

submetendo-os a métodos e seqüências de ensino realizados de modo experimental. Segundo Oliveira (1996) no ensino de fração, estes estudos surgem a partir de 1973, por influência dos trabalhos de Bloom[8], sobre aprendizagem de habilidades e de Greeno[9], sobre resolução de problemas, onde se passou a examinar os efeitos causados por seqüências orientadas na aprendizagem de fração de crianças, jovens ou adultos. Observamos sob esse enfoque os trabalhos de Aguiar (1980), Lima (1981), Watson & Outros (1995), Bonotto (1995), Putt (1995), Taube (1995), Niemi (1996) e Sophian, Garyantes & Chang (1997).

Pouco tempo depois, provavelmente na intenção de evitar o enfoque puramente experimental sobre o ensino e se valendo do acentuado avanço no conhecimento cognitivo do aluno, ou seja, contribuições acumuladas pelas diversas pesquisas realizadas na área de psicologia e educação, as pesquisas sobre fração são marcadas pelo caráter de proposição de métodos de ensino.

Nestas, a preocupação de forma geral se volta para o processo de ensino e os estudos passam a apontar metodologias e desenvolver métodos, abordagens, modelos e seqüências didáticas que são analisados quanto aos benefícios para o ensino do conceito de fração. Evidenciaram o enfoque na proposição de métodos de ensino os trabalhos de Miguel (1984), Wentworth & Monroe (1995), Cramer & Post (1995), Lachance & Confrey (1995), Caldwell (1995), Mack (1995), Oliveira (1996), Gresham, Sloan & Vinson (1997), Kamii & Warrington (1997), Warrington (1997), Taube (1997), Simmt & Davis (1998), Middleton Van Den Heuvel-Panhuizen & Shew (1998) e Woerle (1999).

Destacamos dentre as pesquisas acima citadas a realizada por Miguel (1984) uma vez que apresenta uma metodologia de ensino do conceito de fração, que segundo o próprio autor, explora dialeticamente as impossibilidades apresentadas pelos alunos. Além disso, também se acentua em seu trabalho uma clara preocupação com uma abordagem crítica das questões sociais colocadas pela situação de aplicação do conceito de fração. Para o autor esta preocupação reside no fato de que *"a 'didática do educador' nada mais é do que o resultado da intersecção de pelo menos três círculos ou dimensões correspondentes a pelo menos três posturas que caracterizam a sua atuação prática, mesmo que ele não tenha consciência desse fato: postura política, epistemológica e psicológica"* (MIGUEL, 1984, p. 4-5).

[8] *Apud* Oliveira (1996).
[9] *Ibid.*

Seria incorreto negar inteiramente, na história da educação matemática ou mesmo da ciência, as contribuições do empirismo e das análises e concepções lógicas sob influências do positivismo e do cognitivismo. Entretanto, uma vez mais, reconhecemos no exame de Davýdov (1982) à teoria cognitiva, que a aceitação da lógica matemática como o único tipo possível de lógica moderna leva ao estudo unilateral do pensamento. Esta lógica matemática capta somente as facetas do conceito e do juízo que são importantes para estruturar a conclusão formal. Com isto o estudo das condições de separação dos invariantes[10], como bases dos juízos, pode motivar a absolutização desta forma de pensamento.

Davýdov (1982) elucida em sua análise que o cognitivismo de Piaget, responsável por influenciar as teorias construtivistas, se interessou somente pelas estruturas lógico-matemáticas concentrado-se nos aspectos estruturais-discursivos do pensamento. Em suas palavras *"... ao investigar o desenvolvimento do pensamento, combina-se a ele um tipo de lógica que, por certo, se abstrai dos complexos processos de desenvolvimento e concentra sua atenção nos aspectos estruturais-discursivos do pensamento".(tradução nossa)*[11]

Ao apresentar críticas à ciência psicológica, Davýdov (1982) assinala que embora Piaget coloque como base do intelecto a atividade objetiva do sujeito, não revela os fundamentos que levam à transição das ações às operações. Piaget omite a própria atividade do sujeito dos processos de interiorização mediante a qual deveriam efetuar a transição, o movimento e desenvolvimento criativo de novos conhecimentos científicos. Não obstante à finalidade de superar a teoria empírica do pensamento, na qual o desenvolvimento do pensamento abstrato depende da acumulação de representações e percepções do sujeito com base na realidade, a teoria cognitivista deixou à margem os nexos internos dos fenômenos/objetos, elementos característicos da unidade dialética no pensamento.

Correlacionando o exame de Davýdov (1982) à interpretação realizada por Kopnin (1978), observamos que também assinalam que, na tentativa de resolver a questão da fundamentação do conhecimento, sem romper totalmente seus laços com o empirismo e o

---

[10] As investigações de Piaget e seus colaboradores estão orientadas a esclarecer etapas formativas da compreensão das crianças. Estas compreensões são baseadas em princípios (invariantes) que se pressupõem separados de toda a diversidade de relações do objeto, por exemplo, o princípio da conservação.

[11] *"El afán de investigar justamente el desarrollo del pensamiento se combina en él con la aceptación de un tipo de lógica que por cierto se abstrae de los enjundiosos procesos del desarrollo y concentra su atención en los aspectos estructurales-discursivos del pensamiento."* (DAVÝDOV, 1982,p.274)

positivismo, a visão denominada neopositivista caracterizou a fase, que se apoiou nas interpretações e análises de sua linguagem. No centro da atenção dessa fase está a concepção de que o conhecimento sempre se apóia na experiência, mas ao mesmo tempo opera com princípios e leis que se distanciam dela e, para resolver o problema da inter-relação dos níveis empírico e teórico do conhecimento, os neopositivistas propuseram circunscrevê-lo à análise lógico-formal da linguagem da ciência.

Parece-nos que também pode ser encontrada em investigações sobre a fração a presença desse novo período. Estas pesquisas examinam as concepções, representações e significações (estratégias, raciocínios, compreensão, conhecimento e entendimento) de alunos e professores com relação a frações e/ou números decimais, tendo como substrato de estudo, sobretudo, os aspectos estruturais discursivos do pensamento, isto é, a forma lógica[12] do pensamento matemático.

Nesta perspectiva encontramos os trabalhos de Llinares & Sanchèz (1988), Smith (1995), Morris (1995), Fuller (1996), Thompson & Walker (1996), Giménez, Llinares & Sanchéz (1996), Lima (1996), Pitkethly & Hunting (1996), Schifter (1997), Sowder (1997) Moloney (1997) Hanselman (1997), Brinker (1997), Pepper & Hunting (1998) e Romanatto (1999) que apresentam preocupações quanto às representações, significações, modos de pensar, compreensão, linguagem usada e percebida, concepções, etc., de alunos ou professores sobre o conceito de fração. Por exemplo, a pesquisa de Romanatto (1999) destaca a complexidade do conceito da racionalidade e sugere que devemos pressupor a plena compreensão dos números racionais a fim de garantir a construção e aquisição deste conceito. O autor entende que esta plena compreensão passa por um trabalho significativo com as múltiplas personalidades que o número racional assume nos diversos contextos em que está presente: relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número.

Especificamente no estudo de Giménez, Llinares & Sanchéz (1996) o problema da abordagem lógico-formal da linguagem é apontado. Ao preocupar-se com as significações de professores das séries iniciais sobre conceito de frações, estes autores ressaltam a importância da

[12] Kopnin (1978) esclarece que não existem formas não lógicas de pensamento, pois para ele a forma lógica mais abrangente é a lógica dialética que inclui todas as formas de pensamento. Porém quando se refere à expressão "forma lógica" quer entender por forma lógica a estrutura constituída de sinais na linguagem artificialmente formalizada, de acordo com as regras da lógica formal.

aprendizagem com significado. Para eles no ensino da matemática e, por conseguinte de frações, encontramos a exagerada ênfase dada ao seu aspecto lógico-formal. Esta evidência é apresentada com a afirmação de que existe: *"uma ênfase excessiva da matemática escolar na formalização e no manejo dos símbolos, junto com a consideração dos objetivos a conseguir (o ser habilidoso no uso dos símbolos e das regras)..." (tradução nossa)*[13]

Pesquisando o conhecimento sobre frações desses professores, os autores concluem que o trabalho com o manuseio de símbolos matemáticos, realizado no momento de sua escolarização, tem por conseqüência a restrição de suas compreensões à análise dos aspectos sintáticos da linguagem matemática.

Em nossa interpretação, isto mostra que o ensino de frações, baseado nas formas gramaticais ou lógicas da linguagem deste conceito, sugere a restrição de sua compreensão significativa. Ou seja, tomando-se para análise somente a organização, combinação ou sistematização de partes/termos de sua linguagem – símbolos matemáticos – percebe-se uma aprendizagem fragmentada e pautada no aspecto mecânico de aplicação do conceito.

Ocorre, porém, que os autores indicam, como forma de superar essa restrição, a retomada dos aspectos semânticos no enfoque da linguagem matemática. Com ela teríamos o estudo do significado dos termos da linguagem como complementar na compreensão/significação do conhecimento sobre fração.

De fato, consideramos inegável a importância da interpretação semântica da linguagem, uma vez que resolve o problema da localização de objetos que existem por trás de certos símbolos de dada teoria ou conhecimento. Mas há ainda uma questão mais profunda além dessa relação que é apontada por Kopnin (1978) em seu estudo da teoria do conhecimento.

Kopnin (1978) analisa para o conhecimento científico e estamos analisando, de modo equivalente, para o conceito de fração, que ao nos voltarmos unicamente para os aspectos sintático e semântico, a compreensão continua circunscrita à interpretação lingüística do conhecimento. Pois, nas palavras do autor,

---

[13] *"El excesivo énfasis de las matemáticas escolares en la formalización y el manejo de símbolos, junto com la consideración de los objetivos a conseguir (el ser diestro en el uso de símbolos y reglas)"*. (GIMÉNEZ, LLINARES & SANCHÉZ, 1996, p. 98)

> [...] tanto a interpretação sintática como a semântica se referem à elucidação apenas do momento formal do conhecimento. Para as expressões lingüísticas da teoria podem-se encontrar os efeitos observáveis correspondentes e interpretá-las por essa via empírica. É evidente, porém, que a interpretação empírica da linguagem da teoria é limitada (KOPNIN,1978, p.307).

Deste modo, podemos considerar que buscar a interpretação semântica da linguagem junto à sintática, para o conceito de fração, ainda figura a interpretação que focaliza apenas a linguagem formal desse conceito e, por este motivo, não resolve o problema de sua apreensão significativa.

A crítica de Giménez, Llinares & Sanchéz (1996) à ênfase no manejo dos símbolos no estudo da fração é prudente, no entanto consideramos que a análise semântica, embora contribua de maneira complementar, se apresenta igualmente insuficiente na resolução do problema da restrição da compreensão do conceito de fração.

Em nossa abordagem do conceito de fração buscamos superar esta restrição com o enfoque dialético de pensamento. Isto significa que nas situações de aprendizagem a elaboração do conceito de fração está fundamentada na lógica dialética, uma vez que resgata não só as formas racionais empíricas do pensamento humano, mas principalmente, o pensar teórico próprio do nosso tempo, revelando os vínculos, transições, movimentos e desenvolvimento.

2.2 Delimitando nossa pesquisa

Na investigação de Prado (2000) encontramos preocupação semelhante às nossas. A autora faz uma crítica às análises que focalizam o conceito em sua operacionalidade, definida por ela como a consideração apenas do aspecto operacional do símbolo matemático que anula toda cultura existente nele.

Como questão central de sua pesquisa Prado busca elementos de modificação da prática docente e desenvolve uma prática de ensino centrada *"na (re)criação dos conceitos matemáticos, destacando como elemento importante para esta o caminho do movimento da história do conceito"* (PRADO, 2000, p.56).

Embora seu trabalho se diferencie do nosso por enfocar a formação do professor, encontramos identidade nos argumentos que destacam a natureza metodológica do caminho do movimento da história do conceito na abordagem do conceito de fração. Este caminho, denominado pela autora como sendo a lógica conceitual, pressupõe a abordagem indireta da história do conceito, visto que "*revela o processo de criação e desenvolvimento do conceito, sintetizando a luta dos contrários – prática social e prática teórica – num único movimento desigual e combinado*" (PRADO, 2000, p.56).

Esta autora concebe que o elevado destaque dado ao aspecto operacional do conhecimento matemático nos leva *à "sua fragmentação, compartimentalização e distanciamento do mundo real"* (PRADO, 2000, p. 9).

Suas afirmações corroboram nossa suspeita de que instituímos na escola uma linguagem dissociada da habitual, dificultando o entendimento dos alunos e espoliando-os da expressão e do pensamento dessa linguagem. Sua argumentação explicita que a fragmentação tem se caracterizado pela intensa ênfase no aspecto da linguagem formal e na operacionalidade da linguagem matemática, reforçando a idéia de que, se apenas nos prendermos a este aspecto operacional do símbolo matemático, desconsideraremos toda cultura existente nele.

Em sua formulação encontramos

> A linguagem matemática não é arbitrária, arbitrários são os seus símbolos que são o suporte, os veículos de linguagem do pensamento. A linguagem matemática é uma criação coletiva, e não de um grupo, que se generaliza e não se prende a um determinado momento e local. Mas isto não implica que o seu ensino também tenha de ser arbitrário, imediatista, e utilitarista. Atrás da aparência aleatória e fortuita existe um movimento histórico e cultural. É este que constitui ao mesmo tempo, o objetivo e a estratégia do ensino. Não nascemos com os símbolos, precisamos de um movimento que os tornem significativos para nós, que os integrem na nossa cultura. É desenvolvendo a cultura do símbolo que este integrará a nossa cultura, a nossa leitura de mundo (PRADO, 2000, p.18).

Prado (2000) propõe um caminho para a superação dessa excessiva ênfase o qual não se limita simplesmente à significação e compreensão do aluno à análise lógico-formal da linguagem, apresentado por Giménez, Llinares & Sanchéz (1996). Deste modo, ao delinear uma proposta de atuação docente, que tende a negar a fragmentação do conhecimento, apoiando a prática pedagógica na aprendizagem conceitual, a investigação da autora aproxima-se da nossa.

Em identidade com a proposta de ensino que se baseia no *caminho do movimento da história do conceito*, ao abordar um tema tão explorado como o ensino de fração, desejamos acrescentar elementos que contribuam para a ação pedagógica, revelando como as manifestações dos alunos sobre o conceito de fração estão relacionadas às atividades de ensino que recuperam o aspecto de organismo vivo, impregnado de condição humana, do conhecimento matemático, ao qual Caraça (1998) faz referência.

Na análise dessas manifestações, observamos o movimento do conteúdo e forma do pensamento, pois ao partir do princípio de que a apreensão de dado conhecimento não pode ser reduzida à análise lógico-formal da linguagem, Kopnin (1978) também aponta que o movimento do conceito, como totalidade, encontra suas bases na dialética entre forma e conteúdo do conceito afirmando que *"a apreensão da passagem do nível empírico ao teórico, ao contrário de uma simples transferência de conhecimento da linguagem cotidiana para a científica, ocorre como uma mudança de conteúdo e forma do conhecimento que não pode ser reduzida simplesmente à análise lógico-formal da linguagem"* (KOPNIN, 1978, p.24, grifo nosso).

De tal modo, neste estudo nos colocamos em oposição à visão positivista que tem o conceito como o resultado de um jogo de linguagem instaurado entre indivíduos cujas necessidades e interesses são considerados isolados do movimento de desenvolvimento da história humana.

2.3 O enfoque educacional do ensino de fração: nas propostas e guias curriculares e nos livros didáticos

É indiscutível a preocupação que se estabelece sobre o ensino de fração entre teóricos e educadores configurada sobretudo em dissertações e teses e em documentos ou propostas oficiais, como exemplo mais recente, os Parâmetros Curriculares Nacionais. É possível também perceber uma certa repercussão, ainda que acanhada, dessa preocupação em alguns livros didáticos mais atuais.

Assim, ao empreendermos nossa pesquisa julgamos necessário evidenciar como, de modo geral, vem sendo tratado o conceito de fração nestes documentos.

Para tanto, partimos da análise realizada por Prado (2000) das propostas curriculares de matemática da Secretaria do Estado de São Paulo e alguns dos livros didáticos de matemática e procuramos ampliá-la, acrescentando a ela elementos que ratificam as fortes evidências da forma fragmentada que vem sendo tratado o conceito de fração, caracterizado pela ênfase dada ao aspecto formal e mecânico da linguagem matemática.

A autora então nos mostra que a visão que predomina nos livros didáticos é aquela que se centra no desenvolvimento do ensino da matemática baseado unicamente no aspecto que nomeou como abordagem de ensino na *lógica matemática* e que denominaremos formalismo lógico, *"nela a Matemática é desenvolvida a partir e para o seu formalismo lógico, expresso por uma linguagem simbólica, priorizando o raciocínio abstrato como começo, meio e fim da aprendizagem de seus conceitos"* (PRADO, 2000, p.38).

A autora, fundamentada principalmente nas argumentações de Lima (1998a), nos mostra que esta abordagem começou a dar sinais de esgotamento frente às diferentes exigências que as modificações sociais apresentam, sobretudo com as publicações de organizações[14] que discutiam o currículo e o ensino de Matemática.

Em relação à ênfase no formalismo matemático, dada no ensino, Lima (1998b) nos aponta que esse modo de administrar o conhecimento matemático acumulado foi motivado pelo estabelecimento da Revolução Industrial e surge para defender as necessidades que emergiam de uma sociedade que necessitava apenas da reprodução de movimentos que obedecessem a um padrão, a um algoritmo. Sendo assim, era desnecessário investir numa maneira de ensinar e aprender matemática que privilegiasse o saber pensar criativo.

Deste modo, Prado (2000) nos confirma que a abordagem exclusivamente formal da matemática focaliza a aprendizagem no produto final do pensamento matemático, em exercícios que exigem treinamento árduo do aluno. Este enfoque da matemática escolar desenvolveu uma forma singular para expressar o desenvolvimento de conceitos através do exclusivismo de um sistema de códigos próprios e movimentos fechados na sua lógica interna e *"baseado nas expressões seja, sabendo, dado, agora você já sabe e exemplos resolvidos como seu eixo central. Dessa forma ela já 'pensa' pelo aluno 'adivinhando' como será o seu raciocínio"* (PRADO, 2000, p 38).[15]

Em análise a livros didáticos, esta autora mostra que as preocupações em sair do exclusivo formalismo lógico da matemática, causaram uma certa dispersão de informações improdutivas, que são identificadas por ela como uma paralisia. Em suas palavras,

---

[14]"NCTM (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS) e ICM, 1986 (INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION)" (Cf. PRADO, 2000, p.40).

[15] PRADO acrescenta um exemplo desse exclusivismo que reproduzimos a seguir:
Dados os números inteiros 15 e 3, sabemos que existe outro número inteiro, o 5, tal que
15 = 5 x 3, isto é, 15 é múltiplo de 3; neste caso, dizemos que 5 é o quociente de 15 por 3, e podemos representá-lo sob a seguinte forma: $5 = \frac{15}{3}$. Esta representação $\frac{15}{3}$ é chamada fração de têrmos (sic!) 15 e 3, os quais são chamados, respectivamente, o numerador e o denominador da fração.
Seja dado um ponto P e uma reta r
Seja an = b, então $\sqrt[n]{b} = a$, com ... (PRADO, 2000, p.38-9).

> Mais recentemente os livros didáticos têm procurado sair do exclusivismo da lógica matemática mas o que vemos é uma paralisia entre informações estéreis, soltas que recorrem a dados da história da Matemática ou fazem referências a atividades que se supõe sejam do dia a dia do aluno, como receitas de massas ou bolos, ou descrições das medidas de parafusos seguidas pelas definições matemáticas na tentativa de eliminar o abismo entre o mundo real e o formalismo matemático (PRADO, 2000, p.40).

Este fato é apontado por Prado (2000) ao analisar um livro didático onde se encontra um problema histórico usado para desencadear o ensino de fração, o problema do rei Sesóstris[16]. No problema apresentado ressalta-se que, embora haja uma preocupação com a medição, não existem outras preocupações essenciais, tais como: a necessidade de criação da unidade de medida em afinidade com a unidade natural e a impossibilidade de se sobrepor a grandeza a ser medida com uma quantidade inteira de unidades de medida, o que inviabiliza corresponder as unidades de medida aos números naturais, substrato para a fração. Sendo assim, o novo número – fracionário – é simplesmente informado pelo autor na definição formal de fração[17] apresentada logo em seguida.

Em outro livro didático, a autora observa que os autores utilizam uma receita culinária onde aparecem a fração e o número decimal, que desempenha apenas papel ilustrativo uma vez que em seguida enunciam *"Agora vamos tratar da fração"* [18] e apresentam, de modo formal, vários exemplos de figuras divididas em partes com as representações fracionárias dessas partes e suas respectivas leituras.

Com base na análise de PRADO (2000) aos dois livros didáticos, assistimos a algo semelhante em artigos da Revista do Ensino Fundamental Nova Escola[19]. No primeiro artigo,

---

[16] *"O Egito é atravessado de ponta a ponta por um dos maiores rios do mundo, o Nilo, com 6741 quilômetros. Há muito tempo, mas muito tempo, um antigo rei do Egito, Sesóstris, repartiu a terra às margens do Nilo entre seus habitantes. Durante as cheias anuais, se o rio levasse qualquer parte do lote de um homem, o rei mandava medidores examinarem e calcularem o tamanho exato da perda. Por causa desses problemas de Geometria, sempre relacionados com medidas, os escribas sentiram necessidade de representar o pedaço de alguma coisa através de um número. Mas para isso os números naturais, criados para contar, não serviam.(...) Estudando esse papiro, que contém problemas de Matemática criados pelos escribas egípcios muito antes de 1650 a.C., descobrimos que eles haviam inventado um símbolo especial para expressar o pedaço de alguma coisa: a fração".* (A Matemática e a vida, 1999 *apud* PRADO, 2000, p.40)

[17] *"Um pequeno agricultor divide um lote de terreno em 6 partes, exatamente iguais. Em uma ele vai plantar tomates, noutra berinjelas, e, nas restantes, alfaces".*

Para descrever o pedaço do terreno onde vão ser plantadas alfaces, o pequeno agricultor necessita de um novo número: um número racional. Para representar esse número racional, o pequeno agricultor vai usar uma fração: $\frac{4}{6}$

Os números naturais 4 e 6 são os termos da fração: 6 é o denominador - expressa em quantas partes foi dividida a unidade; 4 é o numerador - indica quantas dessas partes nós vamos tomar". (PRADO, 2000, p.41)

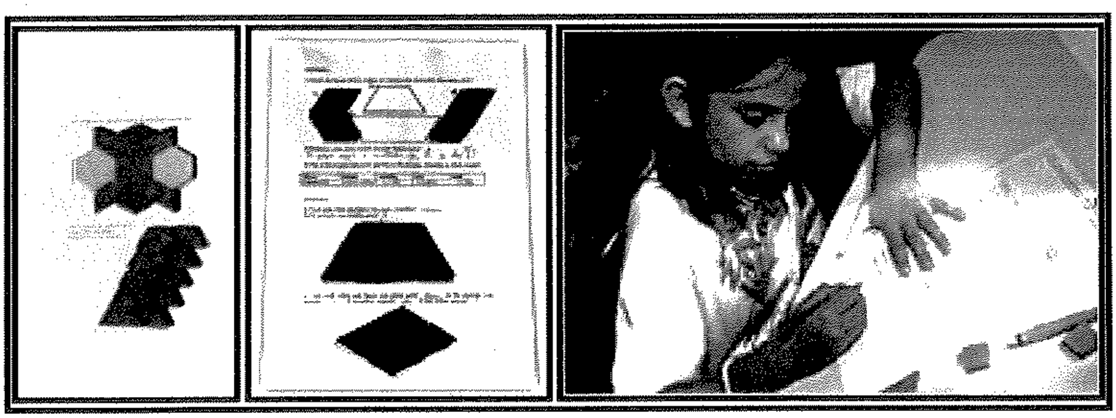
[18] *Ibid.*

[19] Intitulado "Frações: como torná-la um prato apetitoso", edição 113 de junho de 1998.

com destaque a seguir, a paralisia caracteriza-se pela opção por um ensino, que segundo KOPNIN (1978) e DAVÝDOV (1982) é identificado por empirista na medida em que os autores sugerem apoiar o desenvolvimento do "pensamento fracionário" em atividades com materiais manipulativos e assim poder sair do formalismo matemático. Para tal indicam o uso de: blocos padrão, tangran, material dourado e blocos fracionários.

> Depois de um tempo livre para retomar o contato com os blocos, o professor distribui folhas com desenhos que devem ser preenchidos. Desta vez, porém, o enunciado determina quantas peças de cada cor ou formato podem ser utilizadas. Ainda não se têm (sic!) frações propriamente ditas, mas essa restrição já começa a organizar o pensamento fracionário. No exemplo reproduzido ao lado (Fig 2.1 abaixo), a figura superior tem de ser preenchida com 13 blocos, sendo que 4 devem ser vermelhos. Na figura inferior só podem ser usadas 10 peças, vermelhas ou azuis (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, EDIÇÃO 113 , JUNHO, 1998).

Figura 2.1 – Folhas com desenhos para atividade com blocos (exemplo retirado da Revista do Ensino Fundamental Nova Escola, junho, 1998)



Na seqüência desse artigo as atividades sugerem que o material manipulativo serve para relacionarmos a escrita - linguagem fracionária : ½, ⅓, ¼, ¾... - às "peças" ou desenhos que as representam,

> Em atividades posteriores, são apresentadas as primeiras frações.As mais simples, como ½ e ⅓, aparecem primeiro. No exercício ao lado, pergunta-se quais figuras podem ser cobertas com exatamente duas peças azuis. E pede-se que o aluno conclua: "Portanto, a peça azul é metade de quais formas?". Depois, o aluno diz quais blocos têm suas metades representadas por outras peças menores. Em seguida, ele preenche figuras com um só tipo de bloco, o que lhe permite descobrir a qual parte da figura (fração) corresponde esse bloco (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, JUNHO, 1998, grifo nosso).

Percebemos que essa atividade indica que a linguagem matemática é "organizada" a partir da dedução do aluno quando este coloca em comparação um bloco com outro do qual representa uma parte. Neste caso, para que o aluno aprenda as expressões lingüísticas deve relacioná-las aos aspectos observáveis dos blocos e suas metades. Identificamos nesta atividade uma preocupação com o estabelecimento de nexos semânticos e sintáticos que, segundo Kopnin (1978), são considerados limitados na interpretação da linguagem.

Neste mesmo artigo, em uma atividade sugerida para a 4ª série intitulada *"Minha altura é.. "*, os alunos devem comparar um pedaço de barbante correspondente às suas alturas com diversos objetos e registrar o resultado dessa medição numa tabela. Em seguida, solicita-se que dividam o barbante ao meio, em três partes, etc. A cada divisão realizada procura-se novamente comparar com os objetos ao seu redor. Assim, a argumentação de que a fração tem relação com a medição é enunciada, porém, observando as orientações para a atividade, nos parece que essa relação fica a cargo da percepção do aluno: *"Na sala de aula, a classe analisa a tabela comparando os diversos objetos anotados. Os alunos vão perceber que a metade, o terço e o quarto das alturas variam de acordo com o tamanho de cada aluno"* (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, JUNHO, 1998).

De fato o entendimento de que a escolha da unidade de medida interfere nos resultados obtidos é importante. No entanto, o caráter desta tarefa indica que o aluno deve subdividir o barbante e compará-lo, ignorando que o aluno pode atender a tarefa com tendência a considerar como "um" inteiro qualquer subdivisão da unidade de medida sem estabelecer criativamente os vínculos entre essa subdivisão e a representação fracionária. Em Davýdov (1882) encontramos um exemplo dessa tendência. Alunos submetidos à tarefa de medir usando diferentes unidades e subunidades usualmente comparavam os objetos considerando cada subunidade como "um", ou seja, entendiam a subunidade como uma unidade separada, ao contrário de identificá-la mediante correlação com a unidade de medida.

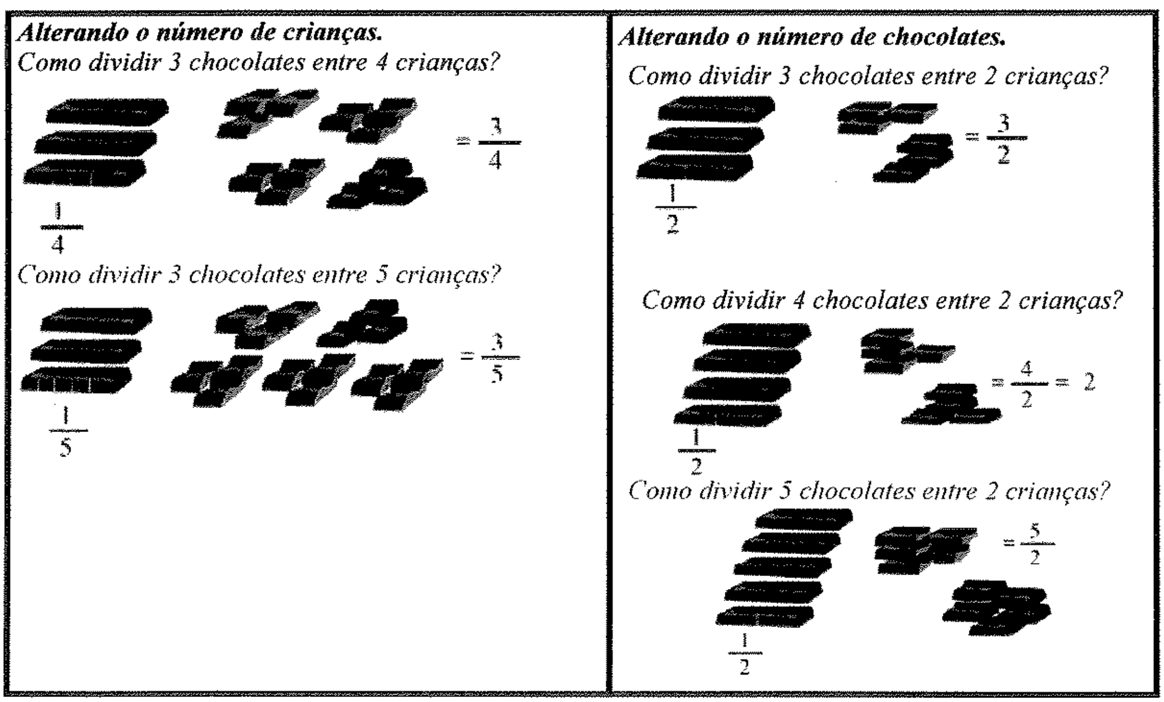
Em nossa concepção o aluno deve participar criativamente do estabelecimento da subunidade de medida a partir da dificuldade, identificada por Caraça (1998), de comparar a unidade de medida com a dimensão a ser medida em situações em que aquela não cabe um número inteiro de vezes nesta. Entendemos que é nesta dificuldade que se estabelece o nexo entre medida e fração[20], é na tentativa de resolver o problema de medir as sobras que ocorre a necessidade de subdivisão da unidade de medida.

[20] Esta conexão foi abordada por Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) como uma inter-relação da geometria e aritmética, citada no quarto capítulo.

Este artigo segue, sugerindo atividades para a 5ª série, tais como: a divisão do chocolate e o jogo da corrida das frações, nas quais o objetivo é retomar exercícios, optando por recursos mais ao alcance do professor. Ao indicarem as atividades, destacadas a seguir, os autores enfatizam que o contexto de uso da linguagem fracionária é importante para sua compreensão. Baseados em Kopnin (1978), denota-se uma interpretação pragmática da linguagem matemática, visto que a solução dada para o enfoque mais amplo da atividade de aquisição de conhecimentos se restringe em corresponder diretamente as divisões das barras de chocolate à complexa linguagem matemática.

> Sua primeira sugestão exige apenas folhas de papel e a imaginação das crianças. A idéia é propor exercícios de distribuição de chocolates entre crianças, em que ora se altera o número de chocolates, ora o número de crianças. Elas trabalham, assim, com frações menores e maiores do que um. Acompanhe abaixo (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, JUNHO,1998).

Figura 2.2 – JUSTIÇA NA DIVISÃO DOS CHOCOLATES - Frações menores do que 1 (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, JUNHO/98)



Não obstante o artigo para a 4ª série, intitulado *"Minha altura é.."*, apresentado anteriormente, não explicite como se realiza a ligação da medida com a fração, ao menos a enuncia, enquanto que em outro artigo intitulado "Na medida certa"[21], não se estabelece nenhuma relação da medição com a fração que, em nossa interpretação é compreendida no problema da

[21] Artigo da Revista do Ensino Fundamental Nova Escola, edição nº122 de maio de 1998.

insuficiência dos números naturais em expressar o resultado da medição – a comparação de uma dimensão tomada como unidade de medida com outra de aspecto contínuo semelhante. A atividade apresentada[22] parece preocupar-se apenas em estimular o desenvolvimento de noções de comparação, com fim em si mesma,

> Esta é uma brincadeira para crianças a partir de cinco anos que tem como objetivo desenvolver a noção de estimativa, equivalência e medida por meio de comparações. Basta usar o material dos próprios alunos para começar a brincar. Segundo Ivana Aranão, educadora e autora do livro A Matemática Através de Brincadeiras e Jogos, de onde essa atividade foi retirada, a dinâmica desse exercício estimula o raciocínio e a percepção das crianças em relação às medidas-padrão (REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA, MAIO, 1998).

Decididamente, concordamos com a conclusão de Prado (2000) de que as tentativas de modificação do ensino de fração mostram dificuldades em dar um outro sentido para o conhecimento de fração, restringindo as atividades à transposição imediata das ações dos alunos de medir, de repartir e de manipular objetos com os símbolos da linguagem matemática formalizada - ½, ¼,etc.

Outro importante dado sobre o ensino de fração indicado nas análises de Prado (2000) refere-se às recentes propostas curriculares estaduais e o modo como destacam o *aspecto histórico na elaboração do conceito.*

De modo semelhante ao que apresenta Prado para as propostas curriculares estaduais, analisamos a proposta da Prefeitura Municipal de São Paulo - Organizadores de Área do Ensino Fundamental e também notamos que destacam a importância da história da matemática no desenvolvimento do conhecimento matemático, conforme podemos observar em um trecho de seus princípios norteadores,

---

[22] "*Para começar a brincadeira, divida a turma em quatro grupos. Escolha para cada um deles um objeto que deve substituir a régua como unidade de medida. Esse objeto pode ser uma caneta, uma borracha, um livro, ou até o próprio palmo das crianças. Em seguida, defina os objetos que cada grupo deve medir — por exemplo, a carteira, a porta, a lousa ou a altura da parede onde começa a janela. Antes que a turma comece a realizar as medições, estimule as crianças a fazer estimativas: quantas borrachas elas acham que seriam necessárias para determinar o comprimento da lousa? E a largura? Como seriam os resultados se, em vez desses objetos, a classe usasse um livro e um caderno para fazer as medidas? E assim por diante. Depois desse aquecimento, peça a eles para fazerem as medições, anotando num papel os resultados encontrados por cada membro do grupo. Enquanto isso, desenhe na lousa uma tabela parecida com a que se vê no quadro a seguir*".

	Borracha	**Caneta**	**Livro**	**Palmo**
Lousa (comprimento)	Luiz: 50 José: 51	Renata: 40 Paulo: 42	Mauro: 15 Edson: 16	Miriam: 17 Silvio: 18
Carteira (altura)	Márcia: 10 Lia: 9	Carlos: 6 Maria: 5	Mário: 2 Beatriz: 2	Fernanda: 3 Igor: 3

> Utilização da História da Matemática como um recurso que pode mediar a construção do conhecimento matemático. Para isso é necessário que em sala de aula se utilize de situações análogas as que se deram no desenvolvimento do conhecimento matemático e vendo esse desenvolvimento como reflexo da história da humanidade (SÃO PAULO. ORGANIZADORES DE ÁREA DO ENSINO FUNDAMENTAL – PMSP, 1996, p. 45).

Embora figure com todas as letras a importância da utilização da História da Matemática como recurso na mediação da construção do conhecimento, o documento não traz, de modo claro, como se realiza esta utilização. Ele faz menção a "situações análogas". Mas quais seriam elas?

Igualmente, em outro item do documento – propostas de trabalho, sub-item a linguagem das frações – encontramos indicação de que devemos dar ênfase ao conhecimento informal da relação parte-todo acumulado pelas crianças. Nas palavras dos organizadores do documento,

> [...] para dotar de significados os símbolos que utilizamos na representação do conceito, é importante dar ênfase ao conhecimento que, de modo informal, as crianças já acumularam em relação à noção parte-todo (SÃO PAULO. ORGANIZADORES DE ÁREA DO ENSINO FUNDAMENTAL – PMSP, 1996, p.45, grifo nosso).

Ocorre porém, que a significação que toma por base a representação simbólica atual da fração não permite ao sujeito que aprende o conceito o estabelecimento de conexões, próprias dos complexos movimentos de sucessivas abstrações que, de um lado, sintetizam as ações práticas em linguagem formalizada e, de outro, distanciam esta linguagem dos contextos de origem.

Davýdov (1982) sublinha, dos estudos de Vygotsky sobre os processos de formação de conceitos e sua inter-relação com a linguagem, que nas situações de comunicação comuns no meio social e cultural, as crianças não criam suas acepções verbais, ou seja, a linguagem. O significado de uma linguagem catalogado pela criança em interação com o adulto não lhe garante a elaboração de significados complexos, não se faz mais que perfilar o conceito na esfera dessa catalogação (DAVÝDOV, 1982, p. 215-6).

Sendo assim, esta significação encontra-se limitada à característica lógico-dedutiva de sua representação, em outras palavras, está restrita aos procedimentos lógico-formais sintetizados na linguagem matemática atual, o que certamente significa uma ênfase no aspecto lógico-formal da linguagem fracionária.

Outros pontos também não são explicitados no documento, por exemplo: de que maneira podemos dar ênfase ao conhecimento informal do aluno? ou, o que é conhecimento informal? e ainda, como articulá-lo com o conhecimento formalizado?

Há ainda, outro ponto que nos parece obscuro. Apresenta-se um rol de atividades que serviriam para ajudar a identificar o nível de conhecimento sobre frações,

> As atividades como repartir folhas entre elementos de um grupo, construir mosaicos, estimar o tamanho de uma foto numa folha de revista em relação à folha inteira. Jogos de tangran, dobraduras de papel e desenhos, nos ajudam a identificar o nível de conhecimento sobre frações que os educandos já possuem. Esse conhecimento informal, junto com a linguagem que os educandos utilizam (metade, terços, quartos, dividir, repartir...) deve ser ponto de partida dessas reflexões (SÃO PAULO. ORGANIZADORES DE ÁREA DO ENSINO FUNDAMENTAL – PMSP, 1996, p.45).

Destas atividades, parece esperar-se que apareçam diversas formas de representação: decimal, fracionária e outras, para serem discutidas. O que aparecer será considerado como um conhecimento informal proveniente da vivência cultural do aluno. Contudo, não se questiona a provável assimilação mecânica destas representações, coloca-se como um conhecimento efetivo de onde se deve partir para a aprendizagem do conceito científico.

Infelizmente, outras questões também não são abordadas no documento. Em primeiro lugar não se esclarecem quais são os "*níveis de conhecimento*" sobre frações que podem ser observados no conhecimento "*informal*", em segundo, não indicam como podemos usar estes níveis para estabelecer uma reflexão em relação à aprendizagem desse conceito e em terceiro, não apontam quais atividades abrangem diferentes aspectos do conceito de fração.

No mesmo sentido, o documento Parâmetros Curriculares Nacionais apresenta a importância da história dos conceitos no trabalho pedagógico ao expressar que "*a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem dos próprios conceitos, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles*" (BRASIL. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1997, p.43). Todavia, a mesma proposta igualmente se furta de esclarecer como essa história pode ser utilizada na sugestão desses caminhos para o trabalho pedagógico.

Percorrendo o documento em busca dessas orientações sobre os caminhos sugeridos pela histórica dos conceitos encontramos, sob o item Orientações Didáticas no bloco de conteúdos "Medidas e grandezas", a única referência à importância da interdependência da medida de uma grandeza e o número para a compreensão e criação da fração, que de certa forma apóia, embora não esclareça como ocorre o vínculo de reflexões sobre a grandeza, às atividades de ensino sobre a fração. Contudo, não se oferecem elementos concretos para a proposição de experiências de ensino,

> Finalmente, o estabelecimento da relação entre a medida de uma dada grandeza e um número é um aspecto de fundamental importância, pois é também por meio dele que o aluno ampliará seu domínio numérico e compreenderá a necessidade de criação de números fracionários, negativos, etc (BRASIL. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1997, p.131)

Ainda que as propostas tenham o objetivo de auxiliar os professores das redes públicas municipais e estaduais para uma nova reflexão sobre a pertinência, relevância e abrangência dos conteúdos ensinados, não podemos deixar de destacar que esses documentos trazem formulações muito genéricas e sendo assim, não influem profundamente nas práticas. De fato, muitas vezes, não satisfazem às reais necessidades da sala de aula e da atuação direta com o aluno.

Portanto, retomando as conclusões de Prado (2000), de que as tentativas de modificação do ensino de fração mostram nossas dificuldades em dar outro sentido para o conhecimento de fração e, considerando que esta forte evidência pode ter como base a visão positivista e neopositivista do conhecimento, que se volta para o estudo da linguagem na análise do conhecimento, buscamos desviar o foco de nossa pesquisa da ênfase na compreensão e significação da linguagem formal.

Seguramente a matemática, de modo geral, vem sendo interpretada como um conhecimento científico, cada vez mais formalizado e artificial. Vista por este lado a matemática, na sua formulação de linguagem, se diferencia dos conhecimentos rotineiros que surgem como resultados da generalização da experiência da vida diária e se encontram mais próximos da linguagem natural.

Retomamos, então, a análise de Prado (2000) das sucessivas propostas e guias curriculares para formação de professores da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo para o Ensino de Matemática do 1° grau. Segundo a autora esses subsídios, adversamente ao que indicam "*uma reorientação (...), procurando integrar outros elementos que não fechassem os conceitos no formalismo matemático e na sua operacionalidade, comumente, observados nas propostas anteriores a 1988*" (PRADO, 2000, p. 43-4), ainda evidenciam uma maneira formal de tratar o conceito de fração justamente porque suas relações são definidas a partir da lógica interna da matemática, auto-estruturada, abstrata e sem a presença de ações humanas do mundo real.

Para interpretarmos a dificuldade nas tentativas de mudança recorremos à observação de Kopnin (1978) sobre a dependência do pensamento com estes sistemas de linguagem. Este autor elucida que a linguagem realmente fixa os resultados alcançados pelo conhecimento, e podemos supor que é nesta dependência que encontra a justificativa para o modo como a filosofia e a lógica moderna, ao analisarem o conhecimento, voltaram-se para a linguagem. Entretanto o autor alerta para o problema da análise estreita dessa linguagem.

Para entendermos a natureza dessa dependência do pensamento com os sistemas de linguagem, Kopnin (1978) nos convida a pensar sobre o conjunto de conhecimentos que constituem uma ciência, em nosso caso a matemática. Para ele é notório que este conjunto de conhecimentos surgem por via histórico-natural e são gerados pelas necessidades práticas. As necessidades de contagem e de medição entre outras exigências da vida real são apontadas por Caraça (1998), Hogben (1970) e Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) como base para o desenvolvimento do conhecimento e linguagem matemática.

Kopnin (1978) explica que o conhecimento originado na realidade é sistematizado e sua sistematização é realizada na forma de sínteses. Em conseqüência dessas sínteses, se produz uma verdade-objetiva considerada mais plena, concreta e profunda sobre a realidade estudada. Tanto na matemática, como em outras ciências, estas sínteses constituem um sistema de conhecimentos que atuam sob a forma de linguagem. Temos um exemplo no desenvolvimento histórico da síntese numérica. Partiu-se da contagem que relaciona um-a-um, objetos usados no controle quantitativo, representados por pedras, nós em cordas e marcas em madeira ou osso, com os objetos que queremos controlar quantitativamente; para atingir um complexo sistema de numeração que envolve agrupamento, representação posicional e símbolos arbitrários. Isto sem citarmos os altos vôos dados, por exemplo, com os números imaginários.

Assim, Kopnin (1978) conclui que podemos admitir que a matemática contém conhecimentos que desempenham função e assumem a <u>forma de linguagem.</u> Não obstante, ele também assinala que, seguramente, estes conhecimentos matemáticos não deixam de expressar seu <u>conteúdo</u> constituído pelas práticas humanas que, de um lado, são origem e, de outro, são objeto de estudo para o desenvolvimento desse conhecimento.

Daí que o ensino da matemática que tem por base de estudo apenas sua forma de linguagem imbuída de seu caráter designadamente algorítmico que enfatiza unicamente o aspecto mecânico e automático desta, se identifica com uma visão positivista de ensino. Visão esta que focaliza toda a problemática do conhecimento na análise estreita de sua linguagem, tanto fazendo uma transposição direta quanto permanecendo apenas em seu significado relativo às regras do formalismo.

Em sentido diverso, esse estudo aborda a aprendizagem do conceito de fração tendo por base o aspecto criativo de desenvolvimento conceitual, caracterizado por uma análise abrangente da linguagem que a concebe como construção humana no movimento de inter-relação de seu conteúdo e forma. Isto porque entendemos que a análise estreita da linguagem matemática de interpretação positivista, melhor caracterizada no capítulo seguinte, se encarrega de solucionar os problemas de compreensão inerentes ao ensino de determinado aspecto do conhecimento e não de sua totalidade.

Ao pensarmos sobre o ensino de fração em sua totalidade buscamos investigar nas ações dos alunos o pensamento sobre o conceito no movimento de sua forma e conteúdo. Em nosso entendimento, o conteúdo do pensamento compreende as conexões fundamentais do pensamento diante das ações práticas de medir aspectos contínuos e, a forma, as definições e formulações que sintetizam o pensamento na forma de juízos e conceitos.

De tal modo, as atividades propostas, ao se apoiarem nas principais conexões do conceito de fração, têm o objetivo de proporcionar momentos para o aluno pensar e agir sobre sua realidade, recuperando o movimento criativo do conceito e elaborando definições consideradas inconvenientes do ponto de vista do enfoque formalista ao expressar juízos, ou seja, relações entre o singular e o universal ainda não deduzidas, mas sincréticas. Observamos estas elaborações quando os alunos explicam pelos exemplos, como no caso da areia e da água no episódio 6.2, apresentado no sexto capítulo, entendemos que estão emitindo juízos sobre a diferença dos aspectos discretos e contínuos na contagem.

No capítulo que segue, apresentamos aspectos que argumentam em oposição ao ensino que se apóia na abordagem estreita da linguagem.

CAPÍTULO 3

O DESENVOLVIMENTO DA BASE TEÓRICA

3.1 A estreita abordagem da linguagem

A formulação de Kopnin (1978) sobre o problema da análise que se centra unicamente na linguagem coloca-nos diante da impossibilidade de vincular o ensino de fração à aprendizagem que aborda a linguagem somente no seu aspecto lógico-formal. O autor afirma a necessidade de esclarecer que a posição que focaliza, unicamente, os aspectos lógico-formais de análise da linguagem no estudo dos conceitos matemáticos, nos apresenta o problema da linguagem enquanto meio de representação da realidade.

Neste caso, existem diferentes modos de abordar a linguagem na representação da realidade. Conforme aponta Kopnin (1978), "*se abordarmos a linguagem estreitamente, ou seja, tomando apenas os símbolos e outros meios que servem de sinal, então é evidente que não se pode afirmar que ela reflete o objeto, mas tomado em conjunto, incluindo o significado dos sinais e suas relações, a linguagem constitui, indiscutivelmente, um meio de representação da realidade*" (KOPNIN, 1978, p.306).

Desta maneira, reconhecendo que a realidade tem seu reflexo no conhecimento e na linguagem que o expressa, o estudo da linguagem deve levar em conta o processo de seu movimento, isto é, valorizar toda a complexidade da linguagem como *forma* de existência do conhecimento e de síntese de seu conteúdo, visto que a linguagem formal do conceito revela unicamente a *forma de seu conteúdo*, e não as suas duas dimensões, de profundidade sócio-cultural (sociológica) e de multilateralidade operacional (lógica).

Em síntese estas idéias também se aplicam para o conceito de fração. Aprender o conceito apenas por este seu aspecto operacional consiste em se apropriar exclusivamente de sua dimensão tecnológica, tendo com ele a mesma relação de funcionalidade que se tem ao apertar um botão. Deste modo, a distância do conceito ao sujeito é comparável a que existe entre disparar um controle remoto de uma arma e as conseqüências extremas do alvo atingido. Esta distância é característica da interpretação lógico formal do conhecimento.

Segundo Kopnin (1978) a lógica formal criou dispositivos para interpretar as regras específicas de emprego de certos termos da linguagem. Esses dispositivos de interpretação sintático, semântico, empírico e pragmático da linguagem da ciência embora, indubitavelmente, contribuam para novos resultados, são avaliados como limitados. Em suas palavras

> A interpretação semântica, por exemplo, resolve o problema da localização dos objetos (coisas e processos, etc.) que existem atrás de certos símbolos de dada teoria, embora se saiba de antemão que nem de longe se podem interpretar de tal maneira todos os termos, pois tanto a interpretação sintática como a semântica se referem à elucidação apenas do momento formal no conhecimento (KOPNIN, 1978, p.307).

Sobre as interpretações empírica e pragmática o autor indica que também não são suficientes. Nas palavras do autor,

> Para as expressões lingüísticas da teoria podem-se encontrar os efeitos observáveis correspondentes e interpretá-los por essa via empírica. É evidente, porém, que a interpretação empírica da linguagem da teoria é limitada. Ela será sempre incompleta, parcial; os mesmos termos podem ser interpretados em diversos objetos acessíveis à observação, e o que é mais importante, muitos sistemas teóricos permanecem fora dos limites dessa interpretação (KOPNIN, 1978, p.307, grifo nosso).
>
> Se a análise lógica do conhecimento se detém apenas nos meios propiciados pelo método lógico-formal e o próprio conhecimento vem a ser abordado como simples operação com sinais segundo regras rigorosamente fixadas, então, evidentemente, se justificam também as concepções intuitivistas. Por isto não é por acaso que ultimamente os pesquisadores tem dado grande atenção à chamada interpretação pragmática; procura-se nela um enfoque mais amplo do conhecimento como forma de atividade do homem. Acontece, porém, que ela também se limita a proporções bastante estreitas: a atitude do sujeito face aos sinais da linguagem, suas reações diante destes (KOPNIN, 1978, p.308, grifo nosso).

As idéias de Kopnin (1978) sobre a interpretação da linguagem científica aplicam-se também à linguagem matemática. Poderíamos exemplificar, como interpretação empírica do desenvolvimento do conceito de fração no ensino, a sugestão de atividade apresentada na revista "Nova Escola" citada no capítulo anterior. Neste artigo, para que o aluno aprenda as expressões lingüísticas $\frac{3}{4}$ e $^{3}/_{5}$ deve relacioná-las aos efeitos observáveis nas barras de chocolate divididas em partes.

O ensino de fração centrado nesta forma empírica limita a qualidade do pensamento numérico ao nexo lógico sintático/semântico – de 4 partes iguais assinalo 3 – ficando excluído de sua formação o nexo da continuidade, da grandeza, da unidade, da racionalidade e da ampliação do número natural. Isto proporciona o distanciamento do sujeito da elaboração de juízos sobre o conceito de fração, podendo usar nesta elaboração a linguagem natural que lhe dá a possibilidade de entender-se, também, no movimento do conceito, enquanto os elabora.

Outra forma de ensino, aquela que entende a aprendizagem de fração pela intuição de seus nexos conceituais mediante as inúmeras formas de representar a fração, sugerindo que o aluno aprende ao ter a possibilidade de trabalhar com vários registros de representações[1], sugere um exemplo de interpretação intuitivista ou pragmática. Esta interpretação é detalhadamente analisada nos trabalhos de Davýdov (1982). Com ela se pretende figurar a *"imagem-representação"* e o *"conceito"* enquanto elementos de uma unidade mental que reflete o nexo do geral ao singular, avaliado por este autor como característico de uma interpretação empírico-sensualista tradicional da ciência (DAVÝDOV, 1982, p.240).

De fato, a aprendizagem do conceito de fração, na perspectiva da lógica dialética, busca relevar a peculiaridade do pensamento teórico ao resgatar não só as formas racionais empíricas do pensamento humano, mas, e, principalmente, o pensar teórico próprio do nosso tempo. Pensar que não se trata somente do estabelecimento de nexos unilaterais, ou seja, que se concentram nos aspectos estruturais (operações) e discursivos do pensamento, observados nas pesquisas de enfoque construtivista. Para estas pesquisas o desenvolvimento do pensamento é o próprio desenvolvimento das estruturas de operação, em outras palavras, não é o conhecimento dos objetos que leva ao desenvolvimento da lógica, mas, ao contrário, é o desenvolvimento da lógica que leva ao desenvolvimento do conhecimento das coisas.

Há ainda outro exemplo que decorre da forma limitada de interpretação da linguagem formal da fração. Na visão de alguns educadores[2] ensinar números decimais é muito mais

---

[1] Cf. Woerle, 1999, p.7.

[2] Apresentamos como exemplo a transcrição de parte do programa TV ESCOLA - "Números e vírgulas", código 298. *"... essas considerações são importantes para o ensino da matemática. Nós estamos vendo que os números decimais são muito mais importantes que as frações nesse mundo em que estamos vivendo, na sociedade de hoje. É*

importante que ensinar fração, em conseqüência das vantagens trazidas pelas máquinas de calcular e pela fácil manipulação desses números na vida diária. Um exemplo do que apresentamos é encontrado em uma investigação sobre os usos das frações por parte de diferentes atividades profissionais, na qual se sugere que seu ensino seja reduzido, enormemente, considerando o aspecto do seu uso social[3]. Sob este ponto de vista, do mesmo modo que a sociedade atual prescinde do ábaco e de outros instrumentos rústicos usados para o cálculo, pois conta com instrumentos avançados como calculadoras e computadores, ela também poderia dispensar o ensino da fração, já que esse instrumento estaria relegado ao passado.

Essas argumentações sobre o ensino do conceito de fração tomam por base unicamente os aspectos *de seu uso social, característico da visão pragmática* de ensino que se baseia no *seu aspecto de técnica operatória* na formação dos alunos e, sob esta ótica, consideram razoável a substituição das frações pelo ensino de decimais, alegando, principalmente, o fato de ser mais coerente ao largo uso das calculadoras ou, em outras palavras, das novas tecnologias.

Quanto à argumentação que defende a substituição da fração pelos decimais no ensino, concordamos com a crítica de Lima & Moisés (1998) de que ela somente se torna verdadeira diante da visão técnica e mecânica do ensino deste conceito. De fato, a visão que focaliza o ensino de fração limitado à linguagem matemática e a seu aspecto, unicamente, de aplicação técnica, visa somente a maestria e a proficiência do estudante na sua aquisição enquanto aplicação imediata. Nesse aspecto, é bem verdade que o desenvolvimento da ciência, capaz de ter como resultado um novo instrumento útil, o número decimal, elimina a utilidade de instrumentos mais rudimentares como a fração.

No entanto, cumpre observar que, por trás da ênfase do ensino de fração no seu aspecto simbólico, o que restringe sua compreensão ao entendimento da organização dessa linguagem apenas enquanto sua gramática, segundo Lima & Moisés (1998), encontramos a fração como a primeira conexão bem sucedida, realizada pela humanidade, entre dois movimentos quantitativos regulares, representando, como já dissemos anteriormente, a primeira tentativa de registrar os movimentos quantitativos dos aspectos contínuos das grandezas na forma

---

preciso que a matemática da escola esteja em sintonia com as necessidades da sociedade em que estamos vivendo. No entanto, o que a gente constata é que no ensino tradicional da matemática se dá muito mais ênfase, muito mais destaque para o trabalho com as frações do que para o estudo dos números com vírgula, os números decimais. Isto é uma contradição".

[3] Fey *apud* Llinares & Sánchez (1988).

de relações entre quantidades. Este movimento, indiscutivelmente, constitui base para o conceito de número racional.

Portanto, embora consideremos o conceito de fração parte da construção do conceito de número racional, nosso estudo entende que a recuperação dessa primeira tentativa de registrar os movimentos quantitativos de aspectos contínuos de grandezas na forma de relações entre quantidades – a fração, em situações de aprendizagem orientadas pela lógica dialética do desenvolvimento conceitual, constitui vínculo essencial para a elaboração do conceito teórico de racionalidade, mais abrangente ainda.

Por isso, neste estudo, destacamos o conceito de fração do movimento mais amplo representado pelo conceito de racionalidade e buscamos, na história, os movimentos de transição dos planos de ação da humanidade envolvidos na constituição dos nexos fundamentais do conceito de fração – seu conteúdo.

Diante da crítica apresentada é preciso esclarecer que embora não possamos nos limitar a esses modos de interpretação da linguagem empírico e pragmático, visto que não esclarecem suficientemente bem seu importante processo de movimento do conceito enquanto forma de existência do conhecimento, não eliminamos a importância da interpretação lógico-formal da linguagem.

Diante do exposto, concordamos com o caminho da lógica dialética como ampliação da lógica formal, apontado por Kopnin (1978), não a excluindo enquanto método de análise da realidade na busca de conhecimento. Avaliada como fundamental para o processo de orientação do sujeito que aprende, essa contribuição não pode ser ignorada quando pensamos no processo de ensino e aprendizagem de um conceito.

Assim, pautados nas proposições de Kopnin (1978), Davýdov (1982) e Lima & Moisés (1998), desenvolvemos esse estudo de modo a não restringi-lo à interpretação lógico-formal da linguagem do conceito de fração, interpretando o desenvolvimento do conceito de fração como movimento dinâmico de sua forma e conteúdo no sentido de incremento do conhecimento. Consideramos este movimento elemento essencial que orienta as atividades de ensino realizadas.

3.2 A linguagem formalizada da matemática: seu caráter prescritivo para o pensamento

Para justificar o ponto de vista adotado neste estudo partimos sobretudo da análise crítica do papel que a lógica formal e, conseqüentemente, a linguagem matemática desempenham no desenvolvimento das sociedades.

A sociedade atual tem presenciado a invasão de seu cotidiano pelos automatismos dos serviços bancários e dos sistemas de comunicação de informação. Esta ocorrência, segundo Lima (1998b), tem significado uma estruturação da sociedade em torno da tecnologia. Já há algumas décadas a transformação tecnológica com a informática, a robótica e a automação, tem provocado alterações nas relações humanas, trazendo um novo dado para o cenário da educação.

Este novo dado consiste na possibilidade atual de tornar externo os processos mentais repetitivos, ou seja, o aspecto operacional e técnico do conhecimento, transferindo-o para a máquina.

Anteriormente, somente era possível tornar externo, transpor em equipamento extracorpóreo, os mecanismos do corpo humano. Foi Childe (1966) quem explicou esse processo de externalização e denominou de equipamento extracorpóreo. Segundo este autor, os seres humanos atuam e reagem ao mundo exterior ajustando-o às suas necessidades e sem dispor de quase nenhum equipamento de defesa contra os perigos do meio, eles os substituíram, num processo longo de experiências e aprendizagem, por instrumentos não-corporais materiais que fabricaram para seu uso. Inicialmente, esse equipamento extracorpóreo criado era constituído entre outras coisas de: pás para cavar, machados para cortar, armas para caçar, roupas para se aquecer, casas para se abrigar.

Para Lima (1998b) a criação dos equipamentos extracorpóreos é possibilitada pelo movimento que torna externo o aspecto repetitivo, mecânico, operacional da atividade orgânica de nosso corpo. Exteriorizamos os mecanismos do andar, das atividades que realizamos com braços e mãos e dos nossos sentidos, visão, audição, tato, etc. No entanto este autor explica ainda que, com o desenvolvimento intenso da produção, não só os processos mecânicos do nosso corpo são externalizados. Ocorreu, também, de modo cada vez mais intenso, a crescente solicitação e desenvolvimento de processos mecânicos do pensamento, passou-se a exigir elaborações técnicas estruturadas do cérebro humano que, conseqüentemente, requeriam que este funcionasse enquanto máquina.

Esses processos operacionais e algorítmicos do pensamento, a princípio, só podiam ser desenvolvidos pelo cérebro humano, pois eram considerados mais complexos e difíceis de serem externalizados. Por este motivo tornou-se necessário o desenvolvimento de formas de pensamento cada vez mais ágeis quanto aos processos operacionais e repetitivos que até então não podiam ser externalizados para a máquina.

De acordo com Kopnin (1978) esta forma operacional de pensamento, que considera apenas a formalização e a simbologia no desenvolvimento do conhecimento, impregnou a matemática no séc. XIX e ao encontrar tamanha identidade com ela se fundiu numa lógica única – a lógica formal – que serviria como modelo para todas as ciências de busca da verdade.

A característica operacional da linguagem matemática a torna uma linguagem técnica por excelência e a partir da fusão entre a matemática e a lógica formal, observada por Kopnin (1978), todos os conceitos, sejam da matemática ou de outras ciências que trabalham com a linguagem matemática, são transformados em mecanismos algorítmicos devido ao seu caráter numérico e aspecto algorítmico, e assim, podem ser exteriorizados para a máquina.

Nesse processo, a matemática e sua formalização constituída de simbologia e regras próprias, influenciou todo o desenvolvimento da sociedade atual ao tornar-se a base da tecnologia. Isto foi possível porque o aspecto algorítmico do pensamento, tornado técnica, pode ser externalizado e colocado na máquina.

Mas através do que apresenta os estudos de Kopnin (1978), sabemos que os conceitos surgem como resultado da atividade humana criativa e que esta atividade não cabe nos limites da análise lógico-formal. Os dispositivos lógicos de análise da linguagem representam indiscutível progresso do conhecimento, mas minam o pensamento, mantendo-o em certos limites e padrões vigentes, *"por isso o pensamento humano sempre carece de novos conceitos que lhe ampliem as possibilidades"* (KOPNIN, 1978, p.31).

Assim, a análise lógico-formal, baseada nas interpretações empírica e pragmática da linguagem, foi considerada limitada por não interpretar o movimento complexo e multilateral do conhecimento resultante da capacidade humana de aumentar suas potencialidades no domínio das leis da natureza e do ser social. E isto significa que nos colocamos diante do problema de vincular o ensino à aprendizagem que aborda a linguagem somente no seu aspecto lógico-formal, privando o sujeito que aprende da liberdade de também pensar os conceitos sem os limites da formalização matemática.

Mas essa limitação envolve implicações ainda mais alarmantes. Para explicitá-las buscamos o que observa Skovsmose (1992) sobre o conhecimento matemático e sua relação com a tecnologia. Este estudioso mostra que o conhecimento matemático circunscrito a sua linguagem formalizada – lógico-formal, pode contribuir para um condicionamento do pensamento humano, trazendo como conseqüências a íntima ligação entre a formalização da linguagem e a formalização das ações. Enquanto tecnologia a linguagem formalizada da matemática intervém nas relações humanas de modo a oferecer não apenas descrições dos fenômenos, mas também modelos para a alteração de comportamentos.

> Assistimos à transmutação de abstrações de pensamento em abstrações da realidade, como resultado da transformação de uma linguagem formalizada na formalização de rotinas. Criamos a semântica para as nossas descrições formais, inventando algoritmos e rotinas, isto é, formas de comportamento que têm a ver com a linguagem formal. A Matemática intervém na realidade ao criar uma "segunda natureza" em nosso redor, oferecendo não apenas descrições dos fenômenos, mas também modelos para a alteração de comportamentos (SKOVSMOSE, 1992, p.153).

Notamos que ele encontra na matemática e nas ciências formais não só formas de descrever e tratar os problemas, como também principal fonte de reconstrução da realidade. Estas ciências configuram a dinâmica da sociedade e caracterizam-se como um princípio para a organização dos processos de trabalho e de gestão. Por essa razão Skovsmose (1992) alerta que,

> É possível formalizar uma linguagem ou uma parte de uma linguagem e a Matemática pode ser interpretada como uma formalização desse tipo. Mas não é apenas a linguagem que pode ser formalizada. As ações e rotinas, isto é, as formas de comportamento também podem ser formalizadas. Neste caso, o resultado do processo de formalização não é uma nova linguagem, mas sim novas estruturas de funcionamento, porventura sobre a forma de 'manuais', isto é, descrições de modos de comportamento de uma forma prescritiva e algorítmica (SKOVSMOSE, 1992, p.152).

A análise da realidade na busca de conhecimento pelo método da lógica formal ignora toda a elaboração humana do conhecimento e transforma tudo em abstrações gerais sem qualquer ligação com a realidade, reduzindo o conhecimento a um modelo ideal, numa linguagem artificialmente criada que utiliza símbolos básicos e precisos.

Este método já foi considerado limitado por utilizar como modelo de investigação da natureza apenas o interesse pela forma lingüística-discursiva de expressão de uma idéia. Ao estudar o pensamento que se reflete na linguagem, a lógica formal procura apenas enumerá-lo e coordená-lo segundo regras próprias que não refletem o movimento da realidade que, em última instância representa.

Mas pensando sobre os limites que os dispositivos lógicos matemáticos impõem ao progresso do conhecimento Kopnin (1978) pondera que, quando o pensamento ultrapassa os limites dos conceitos vigentes torna a cair nos novos conceitos criados, ou seja, em novo dispositivo. O autor continua, mostrando que o pensamento criativo, orientado pela lógica dialética, também é determinado por categorias, todavia *"por categorias que permitem uma grande escolha na solução e não dirigem o pensamento de maneira rígida, mas com certa liberdade" (p.31).*

Estabelecendo, então, uma analogia com o que apresenta Kopnin (1978) para a ciência, nosso objetivo, ao implementar atividades para a aprendizagem do conceito de fração, é permitir aos alunos aprender o conceito, elaborando pensamentos sobre a fração que de certa forma são livres da rigidez dos dispositivos lógicos matemáticos.

Para tanto, sem os limites da linguagem formalizada, recorremos ao desenvolvimento do conceito de fração que considera o enfoque dialético do pensamento, a dialética da forma e conteúdo na sua elaboração, num processo que tem o caráter de método de incremento do conhecimento.

Analisamos os movimentos de sínteses dados ao conceito nesta dialética e os usamos como ponto de conexão para a proposição da atividade. Estes pontos de conexão do conceito também serão usados para analisar os movimentos de síntese dos alunos quando pensam sobre suas próprias experiências de controle dos movimentos quantitativos de grandezas de aspecto contínuo.

Assim, nas atividades organizadas pelo movimento forma e conteúdo do conceito de fração, a linguagem - forma lógico-dedutiva de existência do conceito, não é ponto de partida para aprendizagem, ela vai sendo estabelecida gradativamente em relação aos pensamentos e ações implementados pelos alunos. Contribuímos para o ensino de fração de modo diferente dos estudos que consideraram unicamente o processo dedutivo no ensino desse conceito uma vez que buscamos o enfoque dialético do pensamento do conceito de fração.

Sob este ponto de vista, o conceito de fração deve ser compreendido em suas dimensões sociológica e lógica, pois, segundo o que Kopnin (1978) apresenta para o conceito científico, estes aspectos permitem mostrar as peculiaridades do conceito como formas de atividade dos homens na sociedade, esclarecendo o lugar da síntese do conceito no desenvolvimento do conhecimento e também o modo de sintetizar, no conceito, o conhecimento enquanto forma de movimento do pensamento – o movimento forma e conteúdo.

Dessa maneira, as formas de sistematização das particularidades específicas do conhecimento sobre fração no estudo dos seus aspectos lógico e sociológico, que possibilitam o movimento dinâmico da forma e conteúdo desse conceito, são obtidas pela investigação da inter-relação do lógico e do histórico desse conceito (KOPNIN,1978).

Isto significa que, buscamos estabelecer as principais conexões do conceito de fração com base em autores que já fizeram o percorrido lógico-histórico desse conceito, de modo a perceber como se movimentou e ampliou o pensamento humano sobre a quantificação de grandezas discretas para os de natureza contínua e como isso está relacionado com as sínteses numéricas do número inteiro e fração.

Nesse sentido, nosso objetivo ao estudarmos o surgimento do conhecimento sobre fração, através do lógico-histórico, significa antes de tudo, interpretar seu movimento dinâmico no caráter de incremento do conhecimento, pois, de acordo com o que Kopnin (1978) apresenta para a ciência, *"não importa apenas conhecer algo, mas saber usar esse conhecimento para incrementá-lo" (p. 301).*

Daí, esclarecemos que o estudo de aspectos do desenvolvimento do conhecimento sobre fração e da forma como este foi sintetizado no conceito, tem lugar nas atividades com alunos como método que movimenta o pensamento para novos conhecimentos. Ou seja, na medida em que esse estudo identifica as conexões, transições, contradições e mudanças no pensamento e nas sínteses numéricas e as atividades humanas nas quais se enraízam é entendido por *movimento forma e conteúdo do conceito de fração* e constituirá momento de problematização nas atividades com os alunos e análise de suas elaborações.

A interpretação das ações dos alunos frente às atividades sobre o conceito de fração, organizadas sob esta concepção, nos permite entendê-las como síntese desse movimento dinâmico forma-conteúdo do pensamento. Seus planos de ação, diante das necessidades práticas colocadas pelas atividades, constituem conteúdo no estabelecimento de juízos e conceitos, isto é, formas de pensamento e linguagem.

O estudo do conceito de fração entendido nas dimensões lógica e sociológica que exige a recuperação da dinâmica do movimento conceitual – forma e conteúdo, constituída como método indispensável para o conhecimento desse conceito na perspectiva do incremento do mesmo, restabelece a atuação criativa do sujeito que aprende, pois não o restringe à interpretação estreita ou à simples transposição de linguagem.

3.3 A dinâmica criativa na aprendizagem do conceito – a unidade forma e conteúdo

Ao tomarmos, para o ensino de fração o que apresenta Kopnin (1978) à ciência, podemos afirmar que a ênfase no formalismo lógico, tradicional, oculta os movimentos constitutivos do pensamento do conceito, reduzindo-o à mecanização do pensamento matemático por parte do aluno.

Porém, quando consideramos para o conceito de fração o que Fischer (1959) coloca para o desenvolvimento em geral, temos que em sua *forma desenvolvida* e complexa, o conceito encerra um duplo movimento, um com tendência conservadora de síntese e sistematização – a forma e, outro com tendência de manifestação e superação das dificuldades, portanto, revolucionário – o conteúdo. Deste modo podemos formular que o ensino do conceito que fragmenta esse duplo movimento e que dá à forma maior importância, além de reduzir o pensamento ao aspecto mecânico conforme o que foi enunciado por Kopnin (1978) e Lima (1998b), contribui para a alienação do ser humano da totalidade do processo de produção de conhecimento, conforme o enunciado por Fischer (1959).

O sujeito que aprende sem a possibilidade de formar todos os nexos do conceito se aliena, de um lado, dos processos de constituição do conhecimento e da dimensão ocultada pela forma atual do conceito e, de outro, dos movimentos de identificação e superação de dificuldades, próprio do desenvolvimento criativo do conhecimento – sua dimensão criativa.

O processo que trata *a forma* destacada *do conteúdo* centra-se na apreensão da forma vazia de sentido, determinada apenas pelo puro pensamento de regras e do seu correto emprego. Recorrendo às formulações de Lima (1998b) e Skovsmose (1992) consideramos que o ensino que se centra na forma do conceito fatalmente reproduziria a estrutura prescritiva e algorítmica inerente a ela.

Ensinar um conceito a partir de sua forma atual, representada em linguagem formalizada constituída de símbolos organizados segundo regras específicas, dificilmente daria oportunidade ao aluno de refletir sobre este conceito, criando formas de pensamento que não necessariamente são as do sistema formalizado. Talvez por este motivo, Fischer (1959) nos indique que a idéia de tratar *a forma* como primária e *o conteúdo* como secundário reflete uma reação típica de caráter ideológico e controlador, característica do movimento da ciência em sua tendência em adquirir um caráter neutro, racional e extremamente lógico, distanciado de toda a historicidade do conhecimento.

Interpretamos que a influência desse movimento positivista da ciência no ensino tornou-o fragmentado e centrado na repetição e na forma simbólica. No caso do ensino da fração, não foi diferente, essa perspectiva tolheu do aluno a possibilidade de construir uma nova leitura da realidade e de recriar o movimento crítico e revolucionário do conteúdo desse conceito.

Recuperar a inter-relação entre forma e conteúdo, um que vela e o outro que revela, é inspiradora de um ensino que permite ao aluno uma elaboração do conceito de maneira a participar dos movimentos humanos que o constituíram e também permite o enfoque da lógica dialética das formas de pensamento.

Isto porque, segundo Kopnin (1978), enquanto a lógica formal se interessa pela própria forma lingüística de expressão de uma idéia a lógica dialética estuda, sobretudo, o conteúdo mental – do pensamento – expresso na forma lingüística, dando atenção especial à relação desse conteúdo mental com a realidade objetiva. A lógica dialética, diferente da lógica formal, "*procura penetrar no próprio processo de aquisição do conhecimento, no próprio processo de pensamento, no modo em que nele se reflete a realidade objetiva*" (KOPNIN, 1978, p.85).

Para recriar este movimento de relação do pensamento com a realidade objetiva, adotamos o ponto de vista que resgata a dimensão ocultada, pela forma atual do conceito de fração, numa interação dialética com esta – a dinâmica criativa. Este ponto de vista, equivale a uma visão a partir da qual se amplia a realidade, enquanto espaço de interação social, e se vislumbram as conexões essenciais entre esta realidade e o conceito.

Vale destacar que, de modo geral, é na forma – linguagem simbólica – que reside a aplicabilidade do conceito, ou seja, em seu aspecto de síntese do movimento de criação do conceito e que representa seu retorno transformador sobre a realidade[4]. Este retorno elimina modos de atuar sobre a realidade considerados trabalhosos por serem mais elementares.

Os movimentos educacionais que se concentraram em eliminar ou amenizar a alienação evidenciada por Fischer (1959) e recuperar a complexidade e multilateralidade da linguagem do conceito de fração, cometeram equívocos por continuarem considerando apenas a dimensão simbólica[5] no estudo/ensino do conceito de fração.

Estando a forma organizada pelo formalismo lógico inerente à lógica formal, neste caso, o conceito formalizado-algoritmizado, resultado da exploração até as últimas conseqüências de sucessivas generalizações, ela se torna um instrumento tecnológico. Na visão de alguns educadores esta interpretação do conceito de fração, unicamente, em seu aspecto de aplicação técnica – a *forma*, ou seja, como instrumento tecnológico tem como resultado outro equívoco, o conceito de fração poderia ser substituído, tranqüilamente, pelo ensino de um instrumento mais útil, o número decimal.

Reafirmamos que nossa opção se volta para o movimento do pensamento criativo do desenvolvimento conceitual da fração, ultrapassando o rigor dos dispositivos lógicos formais que reprimem o pensamento e o mantêm em certos limites.

Analisando como o movimento dinâmico mais geral da atividade prática histórico-social que gera o conceito de fração, dirigimos nosso olhar para essa dinâmica, buscando recuperar o aspecto criativo do conhecimento na inter-relação do conteúdo e da forma de pensamento desse conceito. A descrição desta dinâmica em suas principais conexões constitui o quarto capítulo deste estudo.

Em relação ao ensino de fração, a *"forma"* se apresenta como sínteses registradas sob a linguagem numérica fracionária definida por um conjunto de relações lógicas. Esta forma fracionária se diferencia do número natural e, ao ampliar alguns de seus aspectos, contribui para a constituição de um novo conjunto numérico. O "conteúdo", velado por esta forma numérica, retrata a dinâmica das relações e contextos que geraram o conceito, isto é, seu movimento de produção, frente às necessidades de quantificação de aspectos contínuos das grandezas.

---

[4]Estamos considerando a realidade como a realidade objetiva, externa ao ser que conhece.
[5]Não estamos defendendo que existe uma dimensão não simbólica, mas estamos considerando dimensão simbólica, a ênfase no formalismo matemático com seus símbolos e regras organizados rigidamente pela lógica formal.

Abordando a relação conteúdo/forma do conceito de fração, configurando-a no movimento das formas de pensamento que partem da intuição ao juízo/conceito de fração, não nos limitamos às características universais da tecnologia do conceito, a qual se atribui, hoje, o *status* de ciência.

Como é sabido o conceito de fração hoje se apresenta sob a *forma* simbólica $^{a}/_{b}$ cuja condição que determina a existência desse número exige que *a*, chamado de numerador e *b*, chamado denominador, sejam números naturais e, ainda *b* tem que ser diferente de zero. O significado relacionado a esta forma numérica compreende em primeiro lugar, o de número natural se *a* for múltiplo de *b* com a divisão de *a* por *b* e, em segundo lugar, se não for satisfeita a condição de *a* ser múltiplo de *b*, a de fração. Aí o significado fica depositado na idéia de "*algo dividido em partes iguais. Dentre essas partes, consideramos uma ou algumas, conforme nosso interesse. Ex.: Angenor comeu ¾ de um chocolate. Isto significa que, se dividíssemos o chocolate em 4 partes iguais, Angenor teria comido 3 dessas partes (...)*"[6]. Justamente por esse seu alto grau de generalização, hoje, este conceito se ampliou para o conceito de racionalidade e adquiriu alto poder de aplicabilidade tecnológica.

Este conceito, diferente daquele que tinham os egípcios em torno de quatro mil anos a.C., só atualmente é considerado uma tecnologia que se diferencia por sua universalidade de aplicabilidade. Considerando que cada civilização elabora a universalidade tecnológica que lhe convém e lhe é possível pelas condições de conhecimento objetivo da sua época, o que vemos hoje na fração egípcia, e que caracterizamos como rudimento e ferramenta, para eles era a perfeição tecnológica na mesma medida que a nossa forma fracionária atual.

Vale lembrar que cada época considera a sua elaboração a última generalização possível do conceito. Portanto, considerar o conceito de fração na fase que parte da intuição/juízo não para a época, mas para nós hoje, não significa destituí-la do *status* de conhecimento a que chegou na época, mas encontrar, nela, aspectos de sua elaboração que são comuns ao pensamento humano de qualquer época. Pensamento humano enquanto processo individual de desenvolvimento de conhecimento mediante uma visão do conceito em constituição permanente, num processo de elaboração do plano da consciência humana particular/universal e individual/coletiva.

---

[6] Livro didático da 5ªsérie "Matemática e vida", Ed.Ática, 1990.

É neste sentido que se justifica nossa opção por um enfoque de ensino que não prioriza a linguagem simbólica atual e, ao contrário, optamos por estudar o conceito de fração, na perspectiva da recriação de seu conteúdo em caráter dialético com sua forma. Organizar as atividades frente a esta perspectiva criativa do conceito de fração envolve refletir sobre o desenvolvimento desse conceito na perspectiva identificada em Kopnin (1978) por lógico-histórica.

3.4 A inter-relação do lógico e histórico como base para a unidade forma e conteúdo

Com base nas reflexões de Kopnin (1978) sobre o lógico-histórico, consideramos que a história pode contribuir para orientar o trabalho pedagógico visto que permite, ao professor, investigar sobre o movimento de criação e as principais conexões que a humanidade desenvolveu sobre determinados conceitos.

Para abordar o conceito de fração, na perspectiva da recriação do movimento dinâmico de seu conteúdo e sua forma de modo a organizar as atividades usando a dinâmica criativa do conceito de fração, recorremos à reflexão sobre o desenvolvimento desse conceito nesta perspectiva lógico-histórica (KOPNIN,1978).

Sob esta perspectiva, a história não se reduz a fatos, não é ilustrativa e cronológica. Torna-se necessário esclarecer ainda que não estamos entendendo a história como uma sucessão linear em direção à forma mais verdadeira do conceito, assim como também não se pretende definir leis fixas de evolução do conceito, como se existisse uma regularidade evolutiva do conceito a ser formalizada e com ela predizer sua forma futura. Em outras palavras, não se deseja definir leis que pré-determinam a evolução do conceito.

Tendo em vista essas preocupações, partilhamos das considerações que Duarte (1987) explicita em seu trabalho. De acordo com este autor, não podemos desconsiderar a história ao desenvolver a aprendizagem do conceito na prática pedagógica de matemática. Devemos, porém, ter o cuidado para não recair no historicismo. Nas palavras do autor,

> A história freqüentemente se move através..., de avanços e recuos, desvios,..., passa por etapas meramente acidentais. Para conhecer o processo de desenvolvimento de um conhecimento ou de um determinado aspecto da realidade é preciso conhecer a essência da evolução histórica. Isso significa selecionar o que é secundário do que é principal.Essa distinção é decisiva, pois ela mostra o erro do historicismo, que espera conhecer a realidade apenas conhecendo a história da realidade, não fazendo a distinção entre a história e o processo (DUARTE, 1987, p.13, grifo do autor).

Sabemos que existem vários argumentos em favor do uso pedagógico da história da matemática no ensino e que apesar de sua complexidade, a história pode contribuir para orientar o trabalho pedagógico. Antonio Miguel (1997) em seu artigo tece argumentos reforçadores e questionadores das potencialidades pedagógicas da história da matemática. Buscando considerá-los identificamos, nesta pesquisa, que a perspectiva lógico-histórica assume duas funções: uma para o professor e outra para o aluno. Para o professor, a de investigação sobre a criação, evolução e compreensão dos conceitos para constituir a problematização na atividade pedagógica. Para o aluno, a de promoção do pensamento crítico, de conscientização epistemológica e de reconstrução da identidade histórico-cultural, onde este percebe as transições e contradições inerentes à inter-relação sujeito-objeto sem a *"inculcação dos padrões atuais de rigor"*.

Nossos argumentos evidenciam que o conhecimento da história do conceito torna-se fundamental para identificar as conexões importantes do conceito de fração. Por esta razão traçamos o processo de criação do conceito e este é, sem dúvida, um movimento do pensamento sobre a história real, sobre o fato acontecido. É o lógico da história do conceito que chamamos de dinâmica conceitual. Porém, considerando as preocupações sobre o potencial pedagógico da história, esclarecemos que recorremos à dinâmica histórica que representa, em nossa concepção, um entendimento do movimento evolutivo do conceito, na direção de uma maior complexidade, caracterizada pela inter-relação do lógico-histórico.

Essa dinâmica histórica aproxima-se do que Prado (2000) denomina como lógica conceitual. Baseando-se em autores que discutem a abordagem da história no ensino, esta autora identifica o movimento da lógica conceitual como sendo a abordagem indireta da história do conceito visto que este pode revelar o processo de criação e desenvolvimento do conceito, compreendendo a prática social e prática teórica num mesmo movimento.

Sendo assim, a reconstrução da dinâmica do conceito de fração que apresentamos no capítulo a seguir constitui síntese dos principais aspectos do processo histórico do desenvolvimento lógico do conceito numérico da fração e está fundamentada em estudiosos que direta ou indiretamente trazem contribuições para identificarmos as principais conexões que compõem o conceito de fração. Entre eles, Childe (1966), Boyer (1974), Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev, (1988), Hogben (1970) e Caraça (1998).

Para todos eles o conhecimento surgiu como parte da vida cotidiana de homens e mulheres e desta forma, as origens primitivas da matemática, relacionadas com os conceitos de número, grandeza e medida, podem ser encontradas nos primórdios da raça humana.

Ao perscrutar o desenvolvimento do conceito de fração com bases nos autores acima citados, estaremos buscando, na perspectiva da lógica dialética, as conexões na formação de juízos e conceitos sobre a fração que, além de possibilitarem a organização das atividades, constituirão elementos para a análise dos pensamentos dos alunos sobre este conceito, manifestados em seu processo de formação.

Com aportes no trabalho de Kopnin (1978) entendemos a perspectiva lógico-histórica como aquela que identifica a unidade entre o lógico e o histórico no estudo do objeto e, portanto, constitui premissa para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. Nessa identidade temos que o *histórico* aborda o processo de mudança do objeto, suas etapas de surgimento e desenvolvimento, enquanto o *lógico*, reflete os principais períodos da história, é o histórico liberado das casualidades que o perturbam.

Entendemos que a unidade do histórico e do lógico permite ao estudioso de qualquer campo da ciência, definir o começo do estudo do objeto, segundo Kopnin (1978). Usando como fundamento a fase superior, madura de desenvolvimento do objeto – o lógico – fazem-se as definições primárias de sua essência. Essas definições são insuficientemente profundas, mas indispensáveis como linha no estudo do processo histórico de desenvolvimento do objeto. O histórico aprofunda as definições primárias e as enriquece.

O histórico é, segundo Kopnin (1978), todo o processo de mudança do objeto – fenômenos ou processos – em estudo, é o processo histórico real e se constitui de toda a objetividade, complexidade, casualidade, desvios e contrariedade manifestados nele. Notadamente, o autor destaca que é através do lógico que o histórico adquire forma teórica e reproduz a essência do objeto, ou seja, seus principais períodos. Nas palavras do autor *"o lógico atua como meio de conhecimento do histórico, fornece princípio para e estudo multilateral deste"* (KOPNIN, 1978, p.185).

Assim, devemos estudar o histórico do objeto em correlação com o que aponta o lógico. Esse caminho reporta aos principais vínculos estabelecidos entre o movimento do pensamento e o objeto estudado, desvelando as diversas *formas* de movimento do pensamento no processo de aproximação do pensamento ao objeto. Em outras palavras, nesse processo de aproximação ao objeto estabelecem-se certos laços – conexões enquanto formas de pensamento – nos quais se refletem os resultados do conhecimento do objeto. Uma vez que toda forma de pensamento constitui certo elo do movimento no sentido da realidade objetiva, nela se traduzem os resultados do conhecimento.

Sendo o conceito de fração nosso objeto de estudo, essa identidade do lógico com o histórico, tem como base de estudo a fase superior, madura e desenvolvida deste conceito a fim de serem estabelecidas as primeiras definições de sua essência. De posse dessa essência primária, exploramos a história de seu desenvolvimento, criando não só as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, como também percebendo o movimento forma e conteúdo do pensamento sobre a fração, nesse processo.

No estudo do histórico pelo lógico do conceito de fração, desvelamos as diversas *formas* de movimento do pensamento humano no processo de aproximação deste pensamento ao procurar quantificar o aspecto contínuo da realidade. Neste processo de aproximação estabelecem-se os elos/conexões nos quais se refletem os resultados do conhecimento do objeto, isto é, os diversos nexos inerentes ao conceito de fração.

Portanto, não entendemos a história como sucessão de fatos, pois temos conhecimento de que para cada cultura a forma verdadeira do conceito é aquela que satisfaz a sua lida com os movimentos quantitativos que enfrentam na labuta da vida.

No entanto, sabemos que é perscrutando a história do conceito de fração e extraindo dela as principais transições conceituais, que teremos acesso aos avanços e rupturas que foram relevantes para o estabelecimento do conhecimento de fração que temos atualmente. Nesse processo de estudo da história, destacamos a importância de se penetrar profundamente na riqueza do conteúdo do conceito estudado para se apreender as conexões de grau cada vez maior, observando as fases em que o pensamento foi se transformando e se superando.

O conteúdo que observamos ao explorar na perspectiva do lógico-histórico do conceito de fração compreende o pensamento envolvido na medição de aspectos contínuos das grandezas, destacados nos significados das ações práticas de diferentes sociedades diante das diversas necessidades de medição.

Povos antigos, diante de suas necessidades sociais passaram a utilizar o número natural de modo diferente quando precisaram quantificar mais rigorosamente elementos da natureza que não identificavam como organizados naturalmente separados.

Conforme apresentamos no capítulo seguinte, Hogben (1970) marca que essa diferença do uso do número natural na divisão do dia em horas e das horas em segundos compreendia grande avanço nos processos de medir desses povos, visto que "*uma hora não é separada de outra por nenhum acontecimento natural*" diferente de uma ovelha que é separada de outra por uma camada variável de atmosfera. Horas, minutos, metros e centímetros, entre outras grandezas, correspondem a medições que podemos fazer com maior ou menor precisão.

Daí temos que o processo de medição envolve necessariamente, conforme aponta Caraça (1998), a escolha de uma unidade padronizada (unidade de medida artificial) que, quando comparada ao objeto a ser medido tem a função de restabelecer a correspondência biunívoca entre a quantidade de unidades de medida em que se divide o objeto e os números naturais. Com essa nova forma de utilização dos números naturais, esses povos observaram outro problema, que foi essencial para a elaboração da fração: como representar numericamente o resultado dessa comparação, quando a unidade padrão não cabe um número inteiro de vezes no objeto a ser medido.

Esse problema, resolvido pelos povos antigos com a criação da fração, não é tão antigo assim, quando se trata de restabelecer uma relação de ensino, na qual o aluno pense criativamente sobre o conceito de fração, estabelecendo quanto a este, um processo onde se parte da formulação de juízos sobre as ações de medir, ampliando-os.

A história vista assim, assume função de investigação sobre a criação, desenvolvimento e compreensão dos conceitos e a de organizadora da atividade pedagógica.

CAPÍTULO 4

AS CONEXÕES DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Antes de perscrutarmos os nexos conceituais da fração, desejamos esclarecer que o enfoque lógico-dialético do desenvolvimento conceitual permite afirmar que a apreensão do movimento conceitual da fração é base essencial para o conceito de racionalidade.

Por este motivo, nosso ponto de partida é o estabelecimento do desenvolvimento criativo de sua base conceitual – o conceito de fração, diferentemente da abordagem em três das pesquisas[1] apresentadas na seção 2.1 desta dissertação, nas quais o foco recai sobre o estabelecimento de relações lógico-formais, próprias do conceito de racionalidade, que envolvem, entre outras, as idéias de quociente, razão, operador multiplicativo e probabilidade, bem como suas correspondentes representações nas formas decimal e porcentagem.

Nosso propósito não se aplica à aquisição do conceito de racionalidade, ainda que tenhamos assumido que a fração constitui sua base fundamental. Apoiados no enfoque dialético do pensamento, destacamos que a aprendizagem de um conceito ocorre quando participamos dos movimentos de criação deste, numa atividade que incorpora, à prática, o pensar conceitual, nas suas dimensões sociológica e lógica.

Em face ao exposto, consideramos que o estudo da história da fração, que tem como base sua lógica, enriquece o conhecimento sobre este conceito e é fundamental na atividade de

[1] Llinares & Sánchez (1988), Romanatto (1999) e Woerle (1999).

ensino. KOPNIN (1978) evidencia ainda, que a inter-relação dialética do histórico e do lógico não se limita à unidade da teoria do objeto – forma atual do conceito de fração – e sua história. Para ele, o lógico representa não apenas a história do próprio objeto, mas também toda a história de seu conhecimento.

LEFEBVRE (1995) também destaca que ao dirigir-se para o estudo de algo, precisamos apreender suas conexões internas e captar suas transições, seus aspectos contraditórios, representados por unidades de opostos. Entre elas aponta as unidades: "conteúdo-forma" e "lógico-histórico". Para este autor, tudo está ligado a tudo e o processo de aprofundamento do conhecimento é infinito.

Este processo de aprofundamento é interpretado por Kopnin (1978) como o movimento que representa a eterna aproximação do conceito ao objeto, fonte inesgotável da atividade material do sujeito que conhece.

Portanto, para identificar as conexões da fração, tornou-se fundamental o conhecimento de sua história para extrairmos dela as principais transições conceituais, ou seja, os avanços e rupturas que foram relevantes para o estabelecimento do conhecimento de fração que temos atualmente.

Nosso propósito não é decompor o conceito de fração nas partes que o compõem, revelando blocos que o constituem, mas sim mostrar de que elementos e de que modo surge e se desenvolve esse conceito, que papel os elementos – unidade natural, grandeza e medida – desempenham na sua formação e desenvolvimento, considerando-os enquanto formas de pensamento fundamentais para o sujeito que aprende o conceito de fração.

Para captar o processo de desenvolvimento do conceito de fração, sem recair no historicismo, teremos como foco de análise a unidade dialética lógico-histórica do conceito. Nesta unidade dialética, o conceito atual de fração funciona como direcionador do olhar para a história uma vez que é resultado de inúmeras sínteses conceituais, que revelam quais são os aspectos importantes, as transições e as mudanças conceituais para o nosso estudo.

Deste modo, corroborados por autores que fizeram análise lógico-histórica do conceito de fração, compreendemos que, nas atividades desenvolvidas com os alunos, a elaboração conceitual da fração envolve os movimentos de superação essenciais ao seu desenvolvimento.

Estudamos, então, as conexões do conceito de fração com base nos autores que analisaram os momentos contraditórios, os conflitos internos, captando as transições lógico-históricas do conceito de fração e que, de forma dialética, penetraram na riqueza do conteúdo para apreender as conexões e os movimentos de superação deste.

Começando pelos estudos históricos e arqueológicos de Childe (1966) vemos que o homem é a última grande espécie a aparecer e sua sobrevivência e multiplicação na pré-história se deve ao aperfeiçoamento do que este autor chama de "*equipamento artificial transferível*".

Durante milhares de anos, os seres humanos atuaram e reagiram ao mundo exterior ajustando-se e ajustando-o às suas necessidades. Sem dispor de quase nenhum equipamento, tais como: garras, dentes, presas agudas, couraças ou pêlos para o aquecimento do corpo, típicos de alguns animais e tendo ainda perdido alguns recursos que lhes eram naturais na época pré-histórica, com o passar do tempo, o ser humano os substituiu por instrumentos não-corporais que fabrica, usa e despreza segundo sua serventia – "*equipamento artificial transferível*".

Este equipamento "*extracorpóreo material*", inicialmente constituído de pás para cavar, machados para cortar, armas para caçar, roupas para se aquecer e casas para se abrigar, criado pelo ser humano num processo longo de experiências e aprendizagem compostos de tentativas, erros, impressões recebidas, lembradas e comparadas, pôde ser adequado a um número quase infinito de operações.

Para a aprendizagem de tais experiências Childe (1966) distingue uma nova espécie de equipamento extracorpóreo, chamado de *espiritual*, que se constitui à base do desenvolvimento de um sistema de comunicação dotado de significados convencionais – a linguagem do grupo social. O equipamento espiritual inclui não somente a linguagem, que é considerada como veículo de transmissão das idéias que se traduzem em instrumentos e armas, que podem, com êxito, controlar e transformar a natureza exterior, como também a ideologia da sociedade representada por suas crenças, superstições, fidelidades, e ideais artísticos.

O desenvolvimento desses equipamentos extracorpóreos coincidem com a mudança da economia da sociedade humana. De uma comunidade de economia estritamente coletora, cujos modos de vida não diferem de outro animal qualquer e onde se faz uso apenas dos equipamentos corpóreos para a obtenção de alimento e abrigo, para uma economia produtora onde se faz uso de utensílios, ferramentas e armas fabricados, que ajudam na adaptação do meio para a sobrevivência do grupo, incluindo o cultivo de plantas e a criação de animais domésticos.

A revolução neolítica exigiu a invenção de ferramentas e a descoberta de métodos de cultivo e armazenamento da colheita e de criação e reprodução de animais. As bebidas se haviam tornado necessárias na maioria das sociedades da Europa e da Ásia menor, e todo um serviço de vasos, cântaros, copos e taças passou a ser usado para seu consumo. Há indícios de conhecimentos da química da fabricação de cerâmica, da física da fiação, da mecânica do tear e da botânica do linho e algodão.

É nesse período da história, há cerca de cinco mil anos, que a matemática surge, não como conhecimento isolado, mas como parte da criação de instrumentos necessários à vida cotidiana das sociedades. Suas origens primitivas certamente estão relacionadas com as necessidades de contagem e medida encontradas nos primórdios da sociedade de economia produtora. Com cenário demarcado pelos vales aluviais do Nilo, do Tigre-Eufrates, e do Indo, este período é caracterizado pela produção de excedentes às necessidades da aldeia, exigindo inovação científica e modificações sociais e econômicas.

Este milênio, que precedeu o ano 3000 a.C. foi talvez o mais fértil em invenções proveitosas do que qualquer outro período da história humana anterior ao séc XVI de nossa era. As condições geológicas, fisiográficas e climáticas mostraram-se propícias, pois contribuíram com matéria prima, ofereceram estímulos à intensa organização social, proporcionaram comunicação e finalmente os céus apresentaram, à noite, o movimento dos corpos celestes. A faixa árida foi propositor do aldeamento junto de um rio ou fonte de água perene. A comunidade passou a necessitar de irrigação para sua horta, considerada uma tarefa coletiva. Nas regiões de desertos as aldeias se instalaram em volta ou entre eles, onde havia estepes e que ficou chamado de Fértil Crescente.

O Egito fica no extremo ocidente do Crescente e é no vale do Nilo que se forma um cinturão verde através do inóspito deserto. A cheia anual irriga as áreas marginais e o grande Delta ao norte. Ao mesmo tempo, o rio proporciona um caminho móvel pelo qual até cargas pesadas podem ser transportadas.

Nesta nova fase de desenvolvimento das comunidades o cobre é mais comum na aldeia mesmo que usado apenas como uma pedra trabalhada a frio, com golpes. As comunidades possuíam todos os conhecimentos técnicos e o aparato da civilização, como metalurgia e o bronze, o emprego da força de tração animal, veículos com rodas, a roda da cerâmica, tijolos e o selo – marca individual. Apenas a organização econômica e a estrutura social ainda eram deficientes.

Com a adoção de instrumentos de metal, resultando maior durabilidade das ferramentas onde havia escassez da pedra e como armas nas guerras, surge a nova classe de artesãos. Outras classes de artesãos aparecem neste período, 4000 a.C., especialistas em carpintaria para a construção de canoas e barcos e os ceramicistas, depois da invenção da roda.

Assim antes de finalizar o quarto milênio a.C. a força dos bois, cavalos e asnos, conjugada à roda, tinha proporcionado às sociedades orientais uma força motriz, equipamento para transporte terrestre que não foram superados senão no século XIX, segundo Childe (1966). As mudanças nas culturas, decorrentes da revolução urbana, devem ser conseqüência de guerras de conquista que proporcionaram ao chefe a oportunidade de obter poder secular. Os vencidos eram necessariamente exterminados, alguns eram deixados como escravos, o que fez surgir as sociedades estratificadas, divididas em senhores e escravos.

Esse processo longo e gradual de desenvolvimento da sociedade também é cenário para o desenvolvimento do conceito de número. A princípio as noções primitivas de número devem ter surgido das massas de experiências compostas de tentativas, erros, impressões recebidas, lembradas e comparadas. Dessas percepções de semelhanças e diferenças surgem a ciência e a matemática. Assim, "*as próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum – sua unicidade*" (BOYER, 1974, p.01).

A percepção dessa grande propriedade abstrata que nós chamamos de número foi um primeiro passo dado pela sociedade para o conceito numérico que gradualmente se desenvolveu recebendo a contribuição de diferentes povos.

Boyer (1974) aponta que a idéia de número tornou-se suficientemente ampla. Ele nos mostra que a princípio baseou-se somente na linguagem de sinais, usando os dedos das mãos ou montes de pedras para representar a correspondência com os elementos de um outro conjunto, desenvolvendo agrupamentos como forma de organização das quantidades. Posteriormente, quando os grupos de pedras tornaram-se insuficientes para conservar a informação numérica, o homem pré-histórico, por vezes a registrava, fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso. A descoberta desses objetos forneceram provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que os progressos no uso de metais ou de veículos com rodas.

Porém, segundo este mesmo autor, a noção de fração racional teria se desenvolvido muito mais tarde. Entre esses povos primitivos da Idade da Pedra parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de seu desenvolvimento uma vez que, para suas necessidades quantitativas, o homem prático poderia escolher unidades suficientemente pequenas, eliminando a necessidade de frações. Em suma, as frações decimais seriam um produto da idade moderna da matemática e não do período primitivo.

Mas foi em autores matemáticos que investigaram sobre a origem do conceito de fração que pudemos verificar que este conceito tem sua origem na medição. Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) ao fundamentar seus estudos sobre a Matemática, seu conteúdo, método e significado, consideraram que a fração tem origem na medição de uma grandeza e identificam seu primeiro nexo do movimento conceitual na medida.

Perpassando os registros históricos e arqueológicos, embora estes sejam imprecisos, torna-se evidente que a nova organização econômica, delineada pelo surgimento de diversos inventos e associada ao desenvolvimento da escrita, mostram que tanto a idéia de fração como sua notação surgem exatamente nos grandes vales aluviais do Nilo e no sistema Tigre-Eufrates com o desenvolvimento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze.

A fecundidade das invenções e descobertas desses povos dos primórdios das civilizações, diante das necessidades que sua nova economia produtora colocava, resultou em ações de medição que possivelmente eram exigidas em atividades tais como: a construção de sua casa, do cercado dos animais e do armazenamento de alimentos, do fabrico de armas, instrumentos para o transporte, a agricultura, a metalurgia, as vestimentas e cerâmicas, entre outras.

Hogben (1970) faz uma incursão nas antigas civilizações para encontrar os rudimentos do que ele denomina por linguagem das grandezas. Como o próprio autor enfatiza, *"classificar as coisas segundo seu tamanho e grandeza sempre foi tarefa bem mais difícil que reconhecer as várias espécies existentes"* (HOGBEN, 1970, p. 37).

Esclarecendo como foi desenvolvida esta linguagem das grandezas, Hogben (1970) aponta que a princípio, nossos órgãos sensoriais eram capazes de perceber espécies distintas a grandes distâncias, mas eram incapazes de realizar essa distinção quando se tratava de tamanhos diferentes. Assim, quando os olhos não foram mais suficientemente aptos para realizar tal tarefa se fez necessário construir novos "órgãos sensoriais" – *extracorpóreos* – que os substituiriam. Nesse caso, a capacidade humana de invenção criou a unidade de medida que transposta para os instrumentos de medição torna-se um extracorpóreo.

Saber que os egípcios desenvolveram a arte de medir os terrenos das margens do Nilo em função das cheias periódicas[2], desenvolvendo por necessidade desta atividade material, ferramentas numéricas diferentes do número natural, não deveria ser apenas uma informação documental para a educação.

O desenvolvimento da dimensão prática desta criação numérica pode possibilitar ao aprendiz da fração experiências mais significativas do ponto de vista da formação de linguagem e pensamento racional, de modo a fazer conexões entre medida, fração e grandezas do que apenas estudar a fração isolada de sua dimensão criadora.

Justificando a necessidade de medir na impossibilidade sensorial de identificar grandezas, podemos investigar o processo de medição nas explicitações de Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988). Estes autores reconhecem que o processo de medição tem origem na inter-relação entre a geometria e a aritmética. De fato, para medir uma grandeza, seja ela uni, bi ou tridimensional, precisamos aplicar-lhe uma certa unidade de medida, calculando quantas vezes é possível repetir a operação de sobrepor a unidade de medida à grandeza. Ou seja, a medição de qualquer grandeza combina o cálculo da quantidade de vezes que se aplica uma unidade de medida com uma operação de identificação da unidade de medida a ser aplicada, pois que ela deve apresentar características semelhantes à grandeza em questão. Refere-se à aritmética, o cálculo da quantidade de vezes que se aplica a unidade de medida à grandeza. Já a

[2] Caraça (1998) funda-se em Heródoto para mostrar que as relações do indivíduo com o Estado no séc. V antes de Cristo, no que se refere à propriedade da terra, impuseram a necessidade da expressão numérica da medição, em suas palavras *"Disseram-me que este rei (Sesostris) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios; e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos Gregos"* (CARAÇA, 1998, p.32).

escolha/identificação da unidade de medida de mesma espécie da grandeza, envolve conhecimento da geometria.

Apóia-se nesta inter-relação a necessidade de também possibilitar ao aprendiz da fração o desenvolvimento do conceito de grandeza. Ao refletir sobre situações práticas, queremos que identifiquem qualidades comuns aos objetos tais como: peso, altura, velocidade entre outras e pensem sobre sua quantificação. Nestas atividades, conhecimentos de geometria e aritmética se unificam para pensar/conhecer grandezas.

O desenvolvimento da linguagem das grandezas, destacado por Hogben (1970), constitui para nós elemento importante na elaboração do conceito de fração, pois permite pensar sobre a capacidade de perceber diferentes dimensões. Tal desenvolvimento envolve avaliar situações em que os olhos não são suficientes para tal tarefa, colocando-se o problema da necessidade de criação de uma unidade de medida que futuramente se tornaria instrumento – *extracorpóreo* – de medição. A expressão do resultado da comparação da unidade de medida no processo de medição permitiu que se redimensionasse o contexto de utilização dos números naturais.

Quando consideramos o contexto de medição em que a unidade de medida cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser dimensionada, a forma numérica conhecida – número natural – pode ser utilizada para quantificar esse aspecto contínuo, uma vez que a experiência humana, criativamente transforma o aspecto contínuo à semelhança do aspecto discreto. Deste modo, para o estabelecimento da correspondência biunívoca exige-se a superação do problema referente a como traduzir numericamente a variação quantitativa de qualidades comuns.

Com aportes em Caraça (1998) consideraremos qualidade o conjunto de relações possíveis entre os seres/objetos/fenômenos e que são tomadas pelos sujeitos em observação do *conteúdo* desses seres/objetos/fenômenos. Enfatizamos aqui a advertência deste autor de que não se pode considerar qualidades de um ser ou objeto como se elas existissem nele, as qualidades são *relações orientadas* pela multiplicidade de interpretações que se possa fazer do mesmo ser/objeto/fenômeno. Ao fazer esta advertência Caraça (1998) apresenta, para exemplificar como as qualidades são relações orientadas, o seguinte: *"[...] uma folha de amoreira tem, para a árvore, a qualidade de ser um órgão de respiração, para o bicho da seda, a de ser um meio de nutrição, para o homem, a de ser verde, de poder servir de meio econômico, etc.."* (CARAÇA, 1989, p.107). Por esta razão é importante esclarecer que ao considerar qualidades devemos pensar no contexto em que se situa o destaque dessa qualidade.

Agora, a medição de determinada qualidade se estabelece no momento em que se quer conhecer o tamanho, isto é, diferenciá-la de outra quanto a diferentes graus de intensidade. Neste sentido, o termo quantidade é empregado para representar a medida daquilo que queremos conhecer no tamanho ou dimensão.

Por isso, ao pensarmos no desenvolvimento conceitual da medida como base para a fração, não podemos ignorar no desenvolvimento das atividades com os alunos, a variação quantitativa de qualidades como elemento que permite o estabelecimento de juízos de intensidade. Saber se uma qualidade é maior, menor, mais ou menos que outra e, acima de tudo, sobre a possibilidade de medir e traduzir em números essa variação de quantidade constitui juízo importante para proporcionar o movimento do pensamento quanto ao que é necessário para medir uma variação de quantidade.

Neste caso, CARAÇA (1998) novamente nos oferece apoio quando apresenta a conveniente *escolha da unidade* como elemento que possibilita a obtenção, por adição, da medida de determinada qualidade – *estado: "a medição faz-se comparando cada estado com aquele que se tomou como unidade [...]"* (CARAÇA, 1998, p.109).

Acontece que nas situações de medição da vida cotidiana encontramos, na maioria das vezes, grandezas de aspecto contínuo que não contêm um número inteiro de vezes a unidade de medida, fazendo surgir outra conexão importante – a necessidade de fracionar a unidade de medida. O movimento dinâmico do pensamento humano destaca as subunidades de medida.

Esse destaque permitiu o desenvolvimento das frações como linguagem numérica usada para expressar o resultado dessa medição, visto que os números inteiros não são suficientes para exprimir, com maior exatidão, este resultado.

De fato, apresentam Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) "foi assim que surgiram realmente as frações, feito que se tem demonstrado pela análise de dados históricos e de outro tipo. Surgiram da divisão e comparação das magnitudes contínuas: em outras palavras, das medições."[3] (tradução nossa)

Fazemos um parêntese para observar que embora não especifique uma opção pela concepção lógico-histórica da criação de conceitos, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática também mencionam em suas orientações didáticas para o bloco de conteúdos "medidas e grandezas" um destaque para a relação entre a medição de uma grandeza e o resultado numérico dessa medição na proposição de experiências de ensino que ampliem a compreensão numérica de números fracionários.

Propõem seus elaboradores que,

> Finalmente, o estabelecimento da relação entre a medida de uma dada grandeza e um número é um aspecto de fundamental importância, pois é também por meio dele que o aluno ampliará seu domínio numérico e compreenderá a necessidade de criação de números fracionários, negativos, etc. (BRASIL. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1997, p.131).

Neste destaque, mesmo não esclarecendo muito bem a relação entre medida e número, percebemos uma certa concordância com a idéia da interdependência entre aritmética e geometria apontada por Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) citada anteriormente. Não obstante essa referência, o documento não parece explicitar qualquer orientação no sentido de estabelecer uma relação entre os processos de desenvolvimento histórico do conceito e sua aprendizagem.

Em síntese, as idéias apresentadas até aqui nos permitem assegurar que o conceito de fração origina-se na inter-relação entre medir e representar numericamente o resultado desta medida. Esta relação está inscrita nas diversas necessidades e interesses de contagens postas em diferentes contextos históricos e na sociedade atual. Necessidades reveladoras das impossibilidades que o conhecimento numérico – número natural – oferece para a quantificação de aspectos contínuos das grandezas.

Esse entendimento encontra coerência com a posição de Caraça (1998), ao conceber que novos problemas sociais envolvem a criação de novos conjuntos numéricos. Segundo esse autor, esses movimentos se apóiam nas soluções que as sociedades antigas adotaram para

---

[3] "*Fue así com surgieron realmente las fracciones, hecho que se ha demonstrado por el análisis de datos históricos y de outro tipo. Surgieron de la división y comparación de las magnitudes continuas: en otras palabras, de las mediciones*" (Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev, 1988, p.44).

resolver seus problemas. Problemas que surgiam das necessidades de sobrevivência e que provocaram o desenvolvimento do conhecimento das comunidades.

Deste modo, as idéias que deram origem à fração não nascem como fruto de um pensamento puro e intelectualizado ou uma entidade separada, ao contrário, elas surgem da experiência e da relação com objetos concretos, da realização de operações de medir e contar comuns à vida de todos os dias.

Como diz Caraça (1998) o problema da medição aflige desde a dona de casa nas atividades culinárias até um engenheiro num projeto de construção, de alguma forma e nas mais variadas circunstâncias ou profissões nos deparamos com a necessidade de medir.

Sobretudo, com relação ao problema da medição, este autor nos aponta que medir consiste em "*comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc...*" (CARAÇA,1998, p.29). Esta comparação nos remeterá ao problema de determinar quantas vezes cabe um comprimento no outro, vemos este pensamento afinar-se com o estabelecimento da correlação entre geometria e aritmética de Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988) na medição de uma magnitude/grandeza.

Entretanto Caraça (1998) aponta que isto não é tudo ainda, se não se estabelece um termo de comparação comum para todas as grandezas da mesma espécie, haverá complicações nas operações de troca. Ele denomina este termo comum como unidade de medida da grandeza.

Entendemos que o estabelecimento *ou escolha* da unidade de medida comum favorece todas as formas de comunicação do resultado da medição – quantas vezes cabe – atribuindo um significado comum a este.

De acordo com Hogben (1970) foram os costumes sociais e, principalmente, o comércio que impuseram formas e dimensões mais ou menos constantes às unidades de medida. As dificuldades encontradas no intercâmbio entre diferentes grupos estabeleceram unidades de medidas comuns. O autor ilustra, de forma evidente, que a necessidade de padronização da medição emana das relações sociais: "*À medida que o comércio se ia alastrando pelas rotas comerciais sumerianas, a aceitação de um padrão comum com que se pudessem comparar vasilhas de várias capacidades, se foi tornando uma necessidade social*" (HOGBEN, 1970, p.69).

As situações de intercambio até hoje são as responsáveis pelos acordos em se utilizar unidades comuns de medida. Um fato ocorrido recentemente, a perda da sonda "Mars Climate Orbiter"[4], que se espatifou ao entrar desastradamente na atmosfera marciana é testemunho de que ainda são importantes os acordos a respeito das unidades de medida. Enviada ao espaço para estudar o clima de Marte, com custo de 125 milhões de dólares, a única explicação dos cientistas americanos para o desastre se encontra no fato dos computadores terem recebido informações conflitantes dos controladores de vôo, quanto aos sistemas de medidas. Ou seja, o melhor time de navegadores espaciais do mundo abasteceu os computadores da sonda com dados no Sistema Métrico Decimal (metro e quilograma) e também no Sistema Imperial Britânico (pé e libra).

Uma nave caríssima foi destruída por um problema, muitas vezes considerado superado, o uso de um sistema – *forma* – de medidas comum. Diversos países, incluindo a maior potência do planeta, relutam em abrir mão de seu sistema de medidas, pois segundo o professor Giorgio Moscati[5], para a maioria dos americanos e ingleses, o metro não passa de uma abstração.

Vemos aqui que o problema de comunicação e socialização das unidades de medida desenvolvidas historicamente não é tão antigo assim. Estas relações deveriam fazer parte do desenvolvimento da dimensão prática da criação da fração e assim, poder possibilitar a quem aprende a formação de conexões entre pensamento e linguagem.

Também nas atividades desenvolvidas com os alunos surgiu a necessidade de padronização da unidade de medida. A princípio, ao medirem seus terrenos escolheram aleatoriamente suas unidades de medida. Embora tenham recorrido àquelas historicamente utilizadas, relacionadas ao próprio corpo, tais como: palmos, passos e dedos, os alunos as escolheram como quiseram. No momento de socializar os resultados, percebiam que este não era tão evidente. Isto induziu à percepção de que a utilização de diferentes unidades de medida impedia a rápida interpretação do resultado da medida.

A opção foi escolher uma única unidade "passos", mas também esta apresentou o problema inerente aos diversos tamanhos de "passos" usados nessa medição. Tiveram, portanto, de buscar uma unidade de medida que garantisse um padrão único de medição.

---

[4] Reportagem da Revista "Veja" edição de 06/10/1999.

[5] Professor do Instituto de Física da Universidade de São Paulo e membro do Comitê Internacional dos Pesos e Medidas. (Revista Veja, edição de 06/10/1999)

Esta escolha, implicitamente, depende da natureza das medições que haviam de realizar. Escolher uma unidade de medida para a comparação requer que esta unidade tenha a mesma natureza da grandeza a ser medida; ou seja, para medir comprimento uso unidade de comprimento, para medir volume uma unidade de volume, etc. As escolhas, conseqüentemente, estão vinculadas a um processo de reconhecimento de qualidades quantificáveis inerentes à grandeza a ser medida.

Pode parecer tarefa simples, a primeira vista, mas a ação de medir, como assegura Caraça (1989), envolve outras dificuldades. Comparar grandezas e identificar grandezas da *mesma espécie* exigem a observação de um atributo comum aos objetos. Embora apontada por este autor de forma diferente, novamente observa-se necessário o trabalho que se propõe a avaliar qualidades comuns dos objetos, de forma a permitir sua quantificação.

Nesta circunstância, vale a pena ressaltar as observações que Moura (1995) faz em seu trabalho com crianças da pré-escola. Apoiada em Rouche a autora explicita a dificuldade em se observar estas qualidades comuns dos objetos que permitem sua quantificação, ressaltando que elas não são tão evidentes,

> [...] pode-se comparar aquela qualidade que os objetos têm em comum, e que dividem com exclusividade com todos aqueles que lhes são declarados iguais, do ponto de vista desta qualidade. Mas como descobrir esta qualidade, que não é nem a cor, nem a forma, nem o material de que é feito? Será que existe um comprimento falante, que fala por si só? A noção de comprimento só é possível a partir de um conjunto de objetos. No pensamento de senso comum, afirma Rouche, existem primeiro os objetos, a grandeza é considerada como propriedade deles (MOURA,1995, p.49).

Na prática, a escolha da unidade de medição depende tanto da natureza do objeto a ser medido – a grandeza – como também, do resultado numérico desta medição. Ao medirmos as unidades de medida são "proporcionalmente" escolhidas, por isso não se torna coerente medir grandes extensões com unidades de medida muito pequenas (centímetros), do mesmo modo que ao medirmos pequenas dimensões não poderemos utilizar quilômetros.

Colocaremos nossa atenção, agora, no número que se obtém como resultado desta medição. É sabido que a expansão das atividades sociais exigiu que se desenvolvessem, também os processos de medição. As medições tiveram que se tornar mais precisas e o conhecimento numérico, restrito aos números naturais, tornou-se limitado para exprimir os resultados de certas medições.

Hogben (1970) associa à especificidade desse conhecimento numérico às dificuldades encontradas em representar as medições, apresentando que:

> [...] durante várias gerações a humanidade se viu atrapalhada por não poder representar as medições que fazia por intermédio desses números, sexualmente completos, destinados a designar a grandeza de grupos de coisas eminentemente distintas. As inteligências de antanho não podiam conceber a existência de um número como $\sqrt{2}$ que é como que um ôvo gorado. Todos os números tinham de ser ou meninos ou meninas (HOGBEN, 1970, p.49).

Podemos nos espantar com a relação estabelecida por estes povos antigos entre número e sexo. Mas Hogben (1970) esclarece que a escrita numeral destes povos era produto derivado de um calendário organizado diante das preocupações com sua fecundidade e a de seus rebanhos. Deste modo, não poderiam imaginar a existência de um número irracional ou outro tipo qualquer de número que não mantivessem essa estreita relação com o sexo - *"ou meninos ou meninas"*. Esse conjunto numérico era utilizado largamente no estabelecimento da relação biunívoca entre este e os aspectos discretos[6] dos objetos nas ações de contar.

Mas, conforme citamos anteriormente, diante da necessidade de quantificar aspectos contínuos dos objetos a humanidade reelaborou o princípio da relação biunívoca, criando a unidade de medida à semelhança das unidades naturalmente separadas. Sendo assim, a nova unidade – artificialmente criada – permitiu o restabelecimento da relação biunívoca, agora para a relação do conjunto dos números naturais com as unidades de medida contidas na dimensão a ser quantificada.

Façamos aqui um destaque retomando *o conteúdo revolucionário e a forma conservadora* de Fischer (1959). Com o desafio de traduzir numericamente a variação quantitativa de qualidades comuns, problema considerado como o conteúdo revolucionário, a *forma numérica conservadora* – número natural, é reutilizada nos contextos de medição.

Este novo contexto de utilização do número natural, resultante do redimensionamento do conteúdo – aspecto contínuo – em função da forma numérica, foi destacado por Hogben (1970). Ele observa que dificilmente, se distingue esses dois contextos de utilização dos números naturais. Apoiados nesta observação percebemos a necessidade de também possibilitar ao aprendiz da fração a distinção desses dois contextos de utilização dos números naturais. No primeiro, o número natural é usado para fins de contagem, considerando cada elemento da

[6] Característica que se distingue por apresentar uma organização em unidades separadas na ação de contar objetos.

contagem, equivalente a qualquer outro. Neste caso, na contagem de um rebanho de bois, presumimos que cada boi constitui qualitativamente a mesma espécie de indivíduo que seu vizinho e está separado dele por uma camada de atmosfera. No segundo contexto, de modo inteiramente diferente, o número natural é usado quando expressa o resultado da comparação de uma unidade de medida com a grandeza a ser medida, observando que agora expressa o resultado da contagem de um objeto que não apresenta "separações" naturalmente.

Temos esse problema detalhado da seguinte forma por Hogben (1970)

> A grande diferença, quanto à utilização dos números aparece, porém, quando dizemos que o ano tem trezentos e sessenta e cinco dias e este vinte e quatro horas. No dia em que o homem passou a dividir os dias por meio da sombra solar, passou também a usar os velhos números de um modo inteiramente novo. Uma hora não é separada de outra por nenhum acontecimento natural, como o período úmido que separa duas estações secas ou como a sucessão de fases lunares que separam dois plenilúnios. Horas e minutos correspondem tão-somente a medições feitas a régua, medições essas que podemos fazer com maior ou menor precisão, conforme os cuidados tomados na construção da régua e na observação da posição do indicador, isto é, ângulo da sombra (HOGBEN,1970, p. 54).

Neste caso, os números naturais apenas serão eficientes para a expressão do resultado da comparação da unidade de medida com a grandeza, quando a primeira couber um número inteiro de vezes na segunda.

Acontece que, freqüentemente, na medição do ponto de vista prático, *a unidade* de medida não se *contém um número inteiro de vezes na grandeza a se medir*, implicando na impossibilidade de utilização dos números naturais na expressão do resultado dessa medição. Então, conforme assinala Caraça (1998), podemos considerar que surge um novo dilema: *a expressão numérica da medição*. O autor expõe este dilema da seguinte forma:

> Estamos em face de um dilema. Uma de duas:
>
> a)Ou renunciamos a exprimir numericamente a medição de $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$, o que, além de incômodo, levanta novamente questões – se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade e não em relação à antiga, será porque aquela terá algum privilégio especial? Qual? Porquê?
>
> b)Ou desejamos poder exprimir sempre a medida por número – princípio de extensão – e então temos que reconhecer que o instrumento numérico até aqui conhecido – o conjunto dos números inteiros – é insuficiente para tal e há que completá-lo, aperfeiçoá-lo nesse sentido. Como?
>
> (...) Se queremos resolver a dificuldade, devemos criar um novo campo numérico, de modo a reduzir essa impossibilidade (CARAÇA,1998, p.34).

Busca-se, diante da dificuldade em se utilizar o conhecimento numérico limitado à contagem de grandezas discretas, ampliar o campo numérico, criando um "novo" número, que supera as limitações do anterior quanto ao registro do resultado da medição prática de grandezas que não contêm um número inteiro de vezes a unidade de medida, a fração.

Diante do desenvolvimento do conceito de fração apresentado, a fração tem sua fonte conceitual na medida. Esta, por sua vez, desenvolve-se apontando para a enumeração de aspectos contínuos, diferentemente da enumeração de aspectos discretos, dos objetos. O surgimento da presente diferenciação é marcado pelas elaborações conceituais sobre a grandeza como base do novo campo numérico que passa a existir como registro da correlação entre a grandeza e a unidade de medida.

Entendemos que estes aspectos constituem as conexões internas do conceito de fração e por esse motivo organizamos atividades que contemplam as conexões conceituais envolvidas no desenvolvimento do conceito de fração identificadas e apresentadas neste capítulo. Com base nelas problematizamos o conceito de fração, restabelecendo o movimento dinâmico entre sua forma e seu conteúdo. Nos capítulos que seguem focalizamos o conjunto das conexões internas do conceito evidenciando seus principais aspectos, seu desenvolvimento e seu movimento forma-conteúdo nas atividades com os alunos do quarto ano do ciclo I, procurando analisar como são as elaborações conceituais destes alunos em relação às atividades.

Nossas suposições mostravam que o desenvolvimento de atividades preparadas com base nestas conexões possibilita, ao aluno aprendiz, elaborar juízos ou definibilidades do conceito de fração sem a preocupação com o formalismo próprio da linguagem matemática. Na elaboração de juízos sobre a unidade natural, grandeza e medida o aprendiz do conceito pode distinguir e fixar propriedades e indícios do objeto, do fenômeno material, permitindo a formação de abstrações mesmo que elementares.

Em nosso ponto de vista, amparados em Kopnin (1978), é dessa forma que se processa o pensamento, primeiro a expressão na forma de juízos que se manifesta até pela simples exposição dos resultados da contemplação viva, sensorial na qual há o ato de predicação sem a explicação dedutiva. No processo de conhecimento da fração partimos da contemplação viva, sensorial de situações que envolvem a quantificação de aspectos contínuos de grandezas para propor então a formulação de juízos mais gerais sobre unidade, grandeza e medida. Deste modo permite-se refletir diferentes níveis de conhecimento das leis da conexão dos fenômenos inerentes à fração. Propiciamos aos alunos uma reflexão sobre o fenômeno que parte do conhecimento de singularidades deste para seguir com a construção de vínculos que propiciam o desenvolvimento do conhecimento do geral, da lei do fenômeno. Abordaremos as características desse conhecimento geral – teórico no item "A análise dos episódios e suas cenas", que consta do capítulo a seguir.

CAPÍTULO 5

O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Fruto de vertentes epistemológicas e psicológicas que identificam o fazer científico com a resolução de problemas, mais recentemente, temos assistido à notável relevância dada a resolução de problemas, como estratégia que desafia, propõe autonomia de reflexão, estabelecimento de conexões e estruturação de pensamento dedutivo. Depois das propostas pedagógicas, o documento Parâmetros Curriculares Nacionais confere, textualmente, grandes proporções a este recurso, sobretudo no ensino de matemática.

No entanto, em face à nossa questão e ao contexto dessa pesquisa, ao sugerir as atividades na proposta de desenvolvimento conceitual, buscamos a perspectiva de resolução de problemas proposta por Moisés (1999), que se apóia no conceito de *atividade orientadora* apresentado em Moura (1996) e Moura & Moura (1997).

Moura (1996) caracteriza este conceito como a atividade que sintetiza objetivos, conteúdos e concepções epistemológicas tanto na formação do professor quanto do aluno, constituindo a essência da dinâmica ensino-aprendizagem. Sobre a atividade de ensino, Moura (1996) esclarece ainda que, enquanto para o aluno a situação-problema é a aprendizagem, para o professor, é o ensino. De modo que, embora o professor tenha clareza dos objetivos e estabeleça a dinâmica de ensino, ainda assim, poderá não dominar todo o processo de solução da situação-problema colocada. Isto significa que surgem elementos novos fornecidos pelos vários conhecimentos individuais em jogo na solução dos problemas. A resolução e elaboração conceitual não dependem só da dinâmica orientadora da atividade, dependem sobretudo da interação dos vários conhecimentos que passam a fazer parte do processo, desde o momento da colocação da situação-problema (MOURA & MOURA, 1997).

Moisés (1999) incorpora o conceito de atividade orientadora de ensino de Moura ao desenvolver sua concepção de problema e de aprendizagem. Para ele, o problema é definido como uma *necessidade/concreta* identificada no contexto lógico-histórico de desenvolvimento do conceito e a aprendizagem como aquela que compreende o pensar conceitual no movimento de criação de conceitos.

Neste trabalho, além da atividade de ensino e aprendizagem agrega-se um novo elemento a esse processo. A situação-problema para a professora além de ser o ensino era também a pesquisa. Por isso, nosso propósito em observar as elaborações dos alunos e qual a correlação dessas elaborações com a proposta da atividade, nos aproxima do planejamento de atividades que busquem restabelecer, na aprendizagem, o movimento forma e conteúdo do conceito de fração. Entendemos que a participação neste movimento de criação conceitual permite a apreensão não fragmentada do conceito de fração.

Na direção do movimento de criação conceitual da fração, as principais conexões encontradas no desenvolvimento lógico-histórico deste conceito possibilitaram a identificação das *necessidades concretas* que constituiriam as situações-problema a serem resolvidas nas atividades da pesquisa. Os principais nexos do conceito de fração, identificados no capítulo anterior a este, constituem informações que devem fazer parte do conjunto de conhecimentos indispensáveis à ação pedagógica, localizando as necessidades concretas, ou seja, os problemas que permitem a reflexão e o pensar conceitual sobre a fração, articulando dialeticamente linguagem, ação e pensamento.

Estas conexões do conceito foram problematizadas de maneira que os alunos as assumissem como uma situação real para eles e destacamos, para exemplificar o modo como os alunos assumem para si a situação problematizada, a atividade apresentada no episódio 6.2 na primeira unidade didática, na qual podemos perceber como os alunos trazem toda sua vivência na argumentação com os colegas. Dificilmente uma proposta de ensino de frações problematiza os aspectos discretos e contínuos dos objetos em relação à quantificação destes, permitindo ao aluno refletir e desenvolver a capacidade de pensar e elaborar argumentos, como algo de que se apropriou.

Com base na reflexão de MOURA (1996) sobre as características exigidas para o professor na solução do problema da atividade de ensino, esta investigação constitui o caminho percorrido pela professora/pesquisadora na resolução do problema do ensino de fração. Nela confluem os conhecimentos obtidos na fundamentação teórica, na experiência e na análise das elaborações dos alunos com o propósito de se constituírem argumentos em defesa de uma prática pedagógica que prioriza o pensar dialético. Vejamos esta reflexão nas palavras de Moura,

> A atividade do ensino assumida como solução de problema passa a exigir do professor determinadas características de um resolvedor de problema. Ele precisa fundamentalmente aprender a lidar com informações do problema educativo. Quais são os dados do problema do ensino? Informações sobre o homem e os processo como estes criam e resolvem os seus problemas. A resposta. Para esta, encontramos contribuições indispensáveis na psicologia, na sociologia, na filosofia, na antropologia, na epistemologia, na tecnologia etc, que devem fazer parte do conjunto de saberes necessários para empreender com sucesso uma ação educacional (MOURA,1996,p.33).

Seguramente, as conexões anteriormente identificadas no estudo do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de fração, revelando o conteúdo fundamental da forma numérica atual, constituem saber indispensável para o problema do ensino.

Sob este enfoque dialético optamos pela pesquisa em sala de aula com um grupo de alunos do quarto ano do Ciclo I[1] da Escola Municipal de Ensino Fundamental Raimundo Correia, situada num bairro periférico da Zona Leste da cidade de São Paulo. Esta opção deve-se, de um lado, ao fato da pesquisa não se restringir à observação de sala de aula e, de outro, ao envolvimento colaborativo entre pesquisadora, professora da classe e pesquisados na investigação.

O grupo foi escolhido, segundo critérios, dos quais o principal foi o currículo de matemática dessa escola, ou seja, o início dos estudos mais aprofundados da fração que, em geral, ocorre no quarto ano do ciclo I. Um segundo critério diz respeito ao interesse e disponibilidade em participar da pesquisa, manifestados tanto pela professora quanto pelos alunos. Um terceiro critério foi o acesso que temos a esta escola, visto que integramos seu quadro de educadores.

5.1 A organização das atividades para a análise

Desde o primeiro capítulo deste estudo estamos apresentando argumentos que apontam que o ensino do conceito de fração sob o enfoque da lógica formal limita o estudo deste conceito ao seu aspecto lingüístico e empírico. Por outro lado, também apresentamos argumentos que apontam a lógica dialética como abordagem que supera a lógica formal uma vez que se preocupa com o pensar dialético, isto é, se preocupa em revelar as transições, o movimento e o desenvolvimento do pensamento.

Assim, confluindo a análise indicada por autores que se fundamentam no materialismo dialético e os argumentos reforçadores de Moisés (1999), indicando o movimento lógico-histórico do conceito como base para orientar a problematização nas atividades de ensino, avaliamos que as situações-problema desta pesquisa incorporam o enfoque dialético do pensamento na atividade de ensino uma vez que possibilitam aos alunos refletir sobre uma *necessidade/concreta,* identificada conceitualmente no contexto lógico-histórico, considerando as transições e modificações conceituais crescentes da fração. Em outras palavras, a situação problema permite que os alunos elaborem o conceito, participando do processo de seu desenvolvimento – o pensar conceitual, no movimento de criação do conceito de fração.

A atividade de ensino sob o enfoque dialético do pensamento, segundo Davýdov (1982), incorpora a atividade objetiva-transformadora, produtiva, na prática do sujeito. Sob esta perspectiva julgamos que a atividade prática de medir aspectos contínuos permite que os alunos variem seus projetos – planos de ação – à medida que incorporam a eles suas idéias – *esquema idealizado da atividade* (DAVÝDOV,1982, p.294). Esta prática proporciona a análise, a determinação das condições substanciais e a identificação de relações essenciais na solução deste problema. Este processo de construir e transformar o pensamento equivale ao ato de compreendê-lo e explicá-lo, revelando sua essência (Cf. DAVÝDOV,1982, p.301).

Tendo por base as reflexões sobre os principais nexos conceituais da fração e considerando o conceito de situações orientadas de ensino, adaptamos atividades do livro de Lima & Moisés (1998), "*A fração: A repartição da terra*" para esta pesquisa. Cada atividade contou, de modo geral, com uma dinâmica onde o aluno realizava a tarefa individualmente, seguida por discussões em pequenos grupos e posteriormente o debate geral da classe. Realizamos a pesquisa dando cerca de duas a três aulas por semana na classe da Professora Ana Maria de Caria Silva. O período de realização da pesquisa em campo durou aproximadamente

[1] Ciclo de ensino referente aos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental da Lei de Diretrizes e Bases da

oito meses. A fim de organizar os episódios para análise, reunimos as atividades em torno das três unidades didáticas[2] que serão detalhadamente apresentadas nos capítulos: sexto, sétimo e oitavo, a saber,

- A primeira unidade didática – A unidade natural, reúne atividades que colocam em questão os limites do número natural na enumeração de aspectos contínuos da grandeza.

- A segunda unidade didática – A unidade artificial, reúne atividades que problematizam o conceito de grandeza no movimento de criação da unidade de medida – a unidade artificial[3].

- A terceira unidade didática – A fração, propõe o problema da medição de comprimentos no movimento de elaboração da fração enquanto registro numérico da comparação entre unidade de medida e a grandeza a ser medida.

Uma vez que este estudo se insere no ambiente da sala de aula, dada a natureza das relações existentes nela enquanto espaço social de relações humanas e em função da identidade do papel de professora-pesquisadora na atividade desenvolvida com os alunos, caracterizamos nosso estudo como uma pesquisa de intervenção.

Nessa abordagem preocupamo-nos em observar as elaborações[4] que correspondem a elementos mais profundos das relações dos sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem, considerando o princípio de que o aluno interage e percebe o mundo de forma própria, mas que o processo ensino-aprendizagem deve ser orientado e intencional.

Entendemos que a pesquisa científica não reflete a totalidade e complexidade da

---

Educação – LDB nº 9394/96, no qual o aluno se encontra na faixa etária compreendida entre 10 e 11 anos de idade.

[2] Entendemos por unidade didática o conjunto de atividades que possibilitam ao sujeito que aprende o desenvolvimento de um conceito. Cada atividade da unidade didática é proposta a fim de permitir: o momento de localização de uma dificuldade – o inesperado de CARAÇA (1998) – , o momento de superação de tal dificuldade com a criação de um novo conhecimento, o momento da localização histórica deste conhecimento como movimento contínuo, isto é, a constextualização do conhecimento re-criado e o momento de conscientização de que a criação conceitual parte da reelaboração do conceito anterior. Desta maneira o conceito é recriado num patamar de qualidade superior, ou seja, supera-se a dificuldade encontrada. (LIMA, TAKAZAKI & MOISÉS, 1994b, p.16)

[3] *Unidade artificial* é a unidade criada por nós no processo de medição por não estarem organizadas naturalmente em unidades separadas como as unidades naturais. Essa denominação que diferencia a *unidade natural da unidade artificial* é encontrada na fonte de referência das atividades: LIMA & MOISÉS (1998), *"A fração: a repartição da terra"*. Em matemática não existe essa denominação já que ambos os conteúdos, referentes a aspectos discretos e contínuos, estão implícitos na denominação geral de *unidade*.

[4] As elaborações são momentos dos processos e constituem-se das expressões orais e dos textos escritos dos alunos.

dinâmica das relações dos sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem e, concordando com Minayo et al (1999), pretendemos, com esse estudo, contribuir com uma aproximação da dinâmica das relações em sala de aula, restringindo-nos às elaborações relacionadas aos fundamentos da atividade que permitem interpretação da realidade estudada, em função das análises dessas elaborações.

A fim de efetivar essa aproximação selecionamos, para a análise, *episódios* extraídos do registro em *videotape* das discussões e dos registros escritos, individuais e coletivos – painel de respostas, realizados durante o desenvolvimento das atividades com os alunos, nas aulas.

Em nossa acepção, o episódio se configura de modo semelhante à *noção de isolado* de Caraça (1998), isto é, na medida que encontramos a impossibilidade de abranger a totalidade das relações em sala de aula, o pesquisador *destaca* elaborações, do conjunto de todas as outras com as quais estão relacionadas, tomando um *isolado*. Em nosso caso, o episódio constitui um isolado das atividades desenvolvidas; mas, como o próprio autor esclarece é preciso ter o bom-senso de tomar para seu isolado de estudo as relações que de fato compreendem todos os fatores que influem nele. Em suas próprias palavras: *"mas é do bom-senso do observador recortar o seu isolado de estudo, de modo a compreender nele todos os factores dominantes, isto é, todos aqueles cuja acção de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar"* (CARAÇA, 1998, p.105). Neste estudo, este bom-senso caracteriza-se de modo semelhante à definição de Moura (1992), e representa *"o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão"* (MOURA, 1992, p.77).

Em face de se considerar as ações que desencadeiam o processo de busca de respostas para o problema apresentado, constituímos cenas do conjunto de elaborações dos alunos. Aquelas que mostram a interdependência da relação forma e conteúdo do pensamento, pois tendo em vista a questão que move esta pesquisa, esta inter-relação influi sensivelmente no fenômeno a estudar. Conseqüentemente escolhemos momentos de elaboração, que permitem análise do que acontece em termos de mudanças e transições nesta inter-relação, em relação a cada conexão do conceito questionada, na perspectiva de análise da inter-relação *forma e conteúdo* do conceito de fração. Neste sentido, identificamos de um lado, nosso ponto de vista sobre o ensino, caracterizado como a situação-problema da professora de acordo com Moura & Moura (1997) e, de outro, nossa questão fundamental de pesquisa: compreender *como são as elaborações conceituais de fração* *ao analisar os processos de alunos do quarto ano do ciclo I, quando refletem sobre situações-problema sob o enfoque dialético da forma e conteúdo deste conceito.*

Considerando que os registros dos alunos freqüentemente apresentam diferentes tentativas de solução para o problema estabelecido, relacionado à conexão do conceito expressa no episódio, para focalizar esses diferentes momentos da discussão e elaboração, destacamos cenas dos episódios; ou seja, uma vez que o diálogo dos alunos, numa mesma aula, pode apresentar-se em extensas transcrições que dispersam as elaborações e, com o propósito de mostrar o processo de elaboração na aula, de maneira mais concisa, constituímos nos episódios cenas que concentram as diferentes elaborações desses alunos.

Selecionamos, dos registros escritos e transcrições do videotape das aulas, os trechos, que evidenciam elaborações em que podemos observar o movimento forma e conteúdo do pensar sobre ações de quantificação de aspectos contínuos das grandezas. Por exemplo, destacamos no episódio 6.2, um trecho do debate dos alunos sobre a pergunta: onde ocorrem mudanças "no conjunto que conta" ou "no conjunto contado" que indica uma elaboração conceitual na qual pudemos observar o movimento forma e conteúdo na reflexão sobre o contar com pedras.

Este movimento é identificado na tentativa da aluna de imprimir um conteúdo discreto ao aspecto contínuo da água, "*a forma de gotinhas*", para poder quantificá-la de maneira análoga à das pedras. Sua tentativa mostra ser possível intervir no aspecto contínuo do objeto para contá-lo sem alterar sua natureza – ser água/líquido. As observações dos alunos nesta cena evidenciam a existência de dois aspectos diferenciados no conjunto de objetos contados, o aspecto discreto e o contínuo e, por isso, estariam respondendo à questão de mudança de *conteúdo* do objeto a ser quantificado.

Como o episódio constitui um isolado, outros momentos da aula não foram selecionados para compor as cenas, visto que ou não apresentavam diferentes elaborações conceituais ou porque não mostravam formas de pensar sobre aspectos essenciais da grandeza e da medição envolvidos nesta pesquisa, tais como: a escolha de uma unidade de medida de mesma espécie e a comparação da unidade com a dimensão total.

5.2 A análise dos episódios e suas cenas

Buscamos nos dados todas as relações que evidenciam elaborações de juízos e conceitos dos alunos, observando o movimento de superação e transformação da forma e conteúdo do pensamento numérico no desenvolvimento do conceito de fração. Isso implica em superar as impressões primeiras, as representações fenomênicas dos fatos empíricos e chegar a sua compreensão, numa nova síntese no plano do conhecimento e da ação, estabelecendo um diálogo daquilo que as crianças manifestam nos episódios com o referencial teórico.

Neste sentido pretendemos interpretar os processos e elaborações dos alunos, identificando as criações e movimentos do pensamento. No desenvolvimento da prática de medir aspectos contínuos o pensamento desses alunos encontra, permanentemente, algo novo que ainda não é conhecido. Daí que o pensamento lança idéias, cuja realização prática permite criar uma nova interpretação da realidade, correspondente ao objetivo, que mobilizou tal interação e desta maneira evidenciar permanências e saltos, relacionados ao movimento da forma e conteúdo envolvidos no processo de medição.

Para analisar este movimento de elaboração conceitual temos como base as idéias de Kopnin (1978) sobre o desenvolvimento do conhecimento teórico concernente ao *movimento do juízo e do conceito como tipo especial de juízo.*

Diferentemente da teoria que reduz o processo de formação de conceitos ao desmembramento dos indícios particulares dos objetos/fenômenos e que, segundo Kopnin (1978), se detém na comparação do comum entre estes indícios, para a lógica dialética constitui problema central no entendimento da essência do conceito, *"examinar o processo de sua formação e desenvolvimento"* (KOPNIN, 1978, p. 206).

Na lógica formal se considerava o conceito como ponto de partida do conhecimento antes dos juízos e deduções. Em diferente perspectiva, a dialética materialista entende o juízo como o próprio conceito ainda em processo de formação. Para Kopnin (1978) o juízo e a dedução desempenham papel fundamental na formação do conceito. Conforme enuncia o autor,

> Na formação dos conceitos cabe enorme papel à analise enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas. O processo analítico é inconcebível sem indução e dedução. Constituído, o conceito leva implícitos, em forma original, todos os juízos e deduções que se verificaram no processo de sua formação. O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas idéias, o resultado de um longo processo de conhecimento (KOPNIN,1978,p.191).

Para desempenhar seu papel fundamental de refletir sobre os fenômenos, o pensamento pode manifestar-se como juízo, quando reflete todas as conexões e propriedades do objeto ou fenômeno, ou como conceito, quando constitui juízo que revela o essencial, isto é, o geral desse fenômeno. Mas distinguir apenas o geral ainda não esgota a essência do conceito enquanto forma de representação da realidade. Enquanto forma especial de juízo, o conceito não reflete apenas o universal, mas o universal em relação com o singular. O singular é ponto de partida na formação do conceito.

A separação do singular e do universal institui uma das principais fontes do idealismo e leva a que se separe do mundo objetivo o conteúdo dos conceitos. Diversamente, a tese dialética que determina o processo de formação e desenvolvimento dos conceitos estabelece, sobretudo, que a fonte objetiva da formação e desenvolvimento dos conceitos é o mundo real. É justamente a prática histórico-social de homens e mulheres que constitui base material objetiva dos conceitos e é de onde estes extraem seu conteúdo (Cf. KOPNIN, 1978, p.204-8).

Do ponto de vista deste enfoque, elucidamos como se configura o desenvolvimento de juízos e conceitos nas manifestações de medir desses alunos, identificando os vínculos em relação às transições e permanências da forma/linguagem e conteúdo/práticas histórico-sociais de medição, inerentes às conexões do conceito de fração. Ao final de cada episódio sintetizamos um quadro com nossas interpretações. O quadro é uma representação concisa das elaborações de juízos e conceitos dos alunos com o objetivo de conferir uma leitura mais rápida à análise descritiva.

CAPÍTULO 6

PRIMEIRA UNIDADE DIDÁTICA

6.1 A unidade natural

A apreensão do conceito de fração, segundo pressupostos do desenvolvimento conceitual encontrados em Kopnin (1978), está estreitamente ligada à ação de desenvolver formas de resolver problemas orientados pelo movimento forma-conteúdo obtido por meio da abordagem lógico-histórica do conceito de fração.

Nosso propósito, ao propor tais problemas, consiste em estabelecer conexões entre as ações concretas e práticas de resolução e a aquisição de procedimentos de ação mais gerais, característicos do conhecimento teórico, na visão de Davýdov (1982). Por isso, fundamentados nas conexões abordadas no terceiro capítulo deste trabalho, observamos que o conceito de fração tem origem no problema que surge a partir da necessidade de quantificar aspectos contínuos dos objetos, exigindo o desenvolvimento de processos de medição.

É comum utilizarmos o número natural, indiferentemente, para contar duas horas ou dois alunos. No entanto, nessa contagem desconsideramos a grande diferença de *conteúdo* existente na utilização da *forma* numérica – número natural. Dois alunos encontram-se naturalmente separados por uma camada de atmosfera, ao contrário de uma hora e outra. O fato de alunos encontrarem-se naturalmente destacados uns dos outros, característica identificada como discreta – seu conteúdo, possibilitou o desenvolvimento de uma forma numérica de quantificação– o número natural – que inclui características semelhantes ao conteúdo: aspecto discreto. Diferentemente, as horas são separadas por um processo humano que identifica a unidade de tempo – hora – que será colocada em comparação com a totalidade que se quer quantificar – medição. O novo conteúdo, aspecto contínuo dos objetos e fenômenos, exige o desenvolvimento de processos que, dialeticamente, vão modificar a forma – numérica – e o conteúdo – contínuo – articuladamente. Forma e conteúdo, inerentes à quantificação de aspectos discretos, intervêm neste processo. O novo conteúdo para a contagem encontra no velho conteúdo sua essência e a partir dela produz modificações.

Desse modo, consideramos fundamental, para o desenvolvimento dos processos de medição, a reflexão sobre essa grande diferença, na utilização do número natural, apontada por Hogben (1970), que se traduz em atividades de reflexão sobre os aspectos contínuos e discretos dos objetos implicados na contagem.

Assim, esta unidade didática problematiza situações de contagem que oferecem ao aluno a oportunidade de refletir sobre a forma numérica usada na enumeração dos objetos em relação às características referentes aos aspectos discretos dos objetos, que constituem o conteúdo envolvido na contagem. Cada atividade configura um episódio, organizado em cenas para dar melhor destaque às elaborações identificadas:

EPISÓDIO 6.1 – O mundo do Vandinho

EPISÓDIO 6.2 – Identificando o conjunto que conta e o conjunto contado

EPISÓDIO 6.3 – Observando mudanças no conjunto que conta e no conjunto contado

EPISÓDIO 6.4 – A unidade natural

EPISÓDIO 6.1 - O mundo do Vandinho

Objetivo

Permitir ao sujeito que elabora conhecimentos sobre o número, refletir sobre as formas primitivas de contagem e perceber de modo mais evidente o conteúdo da forma numérica atual – a idéia da correspondência ou relação um-a-um. A estratégia de reconstruir, em sua imaginação, o ambiente tecnológico do homem primitivo foi usada para possibilitar o desafio de usar o instrumento numérico desse ambiente. O movimento conceitual do aluno seria culturalmente diferente se lhe fizéssemos a pergunta direta: "imagine como o homem primitivo contava". Sem os elementos abstratos da forma numérica atual pretendemos restituir a inter-relação - forma e conteúdo - envolvida na contagem de aspectos discretos dos objetos.

Descrição

Esta primeira atividade da pesquisa se desenvolve com a narração da História do Vandinho do livro "Momento de criar matemática"[1]. A atividade se constitui de dois momentos distintos. No primeiro, caracterizamos a tecnologia do mundo atual do Vandinho e sugerimos aos alunos que imaginem e desenhem os lugares e objetos presentes na vida deste personagem. Dividimos a classe em seis grupos e cada um desenhou um dos ambientes ou objetos destacados da vida do Vandinho: a vestimenta, a escola, a casa, a rua onde brincava, o supermercado e o escritório, estes últimos considerados locais de trabalho de seus pais.

No segundo momento da atividade sugerimos uma reflexão sobre a destituição dos recursos tecnológicos atuais da vida do Vandinho. Imaginou-se uma "viagem" regressiva no tempo, na qual solicitou-se a retirada gradativa dos recursos tecnológicos desse mundo. A cada recurso retirado, os alunos imaginavam e desenhavam o ambiente escolhido. Assim eles desenharam a casa, num desenho, destituída de eletricidade, noutro, de motor, noutro, de cimento, tijolos e demais vantagens oferecidas pelas construções atuais. Diante do último desenho foi feita a pergunta: como contavam? E o que era contado?

[1] LIMA, Luciano; TAKAZAKI, Mario & MOISÉS, Roberto P. *Momento de Criar Matemática: contando coisas*, São Paulo, SP, CEVEC-CIARTE, 1994a.

Cena 1

Depois de caracterizarem toda a tecnologia do mundo atual do Vandinho citando ou desenhando: elevador, televisão, geladeira, iluminação, computador, vídeogame etc, salientei a presença da eletricidade neste mundo e perguntei para a classe se poderíamos viver sem eletricidade. A grande maioria respondeu que não. A princípio a retirada da eletricidade pareceu não possibilitar condições para a vida. Tali diz: "não dá pra viver sem eletricidade. E a luz?", outros alunos concordaram com ela. Aos poucos os alunos vão citando alternativas. Um aluno fala do fogão à lenha e Eds acrescenta: "dá sim, lá em Pernambuco a gente usa o candieiro (candeeiro) pra iluminar". Pedi a ele que explicasse o que é o candeeiro e, a partir de sua explicação, começaram a discutir várias alternativas que substituem a tecnologia da eletricidade que foi retirada. Observei nos desenhos do grupo de Argi, expressos na Figura 6.2, detalhes da casa do Vandinho, destacando o ferro de passar roupa a carvão, o lampião, o fogão à lenha e o candeeiro.

Cena 2

Na medida que retiram-se os elementos tecnológicos do mundo do Vandinho nota-se que os desenhos passam a incluir animais, plantas, rios etc, conforme observamos nas seqüências de desenhos expressos nas Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 do grupo de Argi e Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 do grupo de Cari. Após o último desenho perguntei "*o que e como contavam as pessoas que viviam neste mundo?*" Os alunos responderam que eles contavam os animais e as frutas. Refiz a pergunta: "*Como contavam?*" Tali respondeu que eles contavam com tinta e Lean com pedrinhas e folhas de árvore... outros alunos acrescentaram: pequenos pedaços de madeira, linhas coloridas, riscos em pedaços de madeira. Pedi que descrevessem como faziam e Tali respondeu: "*eles faziam marquinhas assim [como se segurasse um pincel faz no ar um risco vertical] com tinta colorida na parede*". Pedi a Tali que explicasse melhor como era essa contagem e Lean complementou dizendo: "*pegava um peixe, marcava um risquinho amarelo, pegava outro e marcava com vermelho e outro e outro e vai marcando...*" perguntei porque tinha que usar outras cores e ela não soube explicar.

FIGURA 6.1 – Primeiro desenho do grupo do Argi.

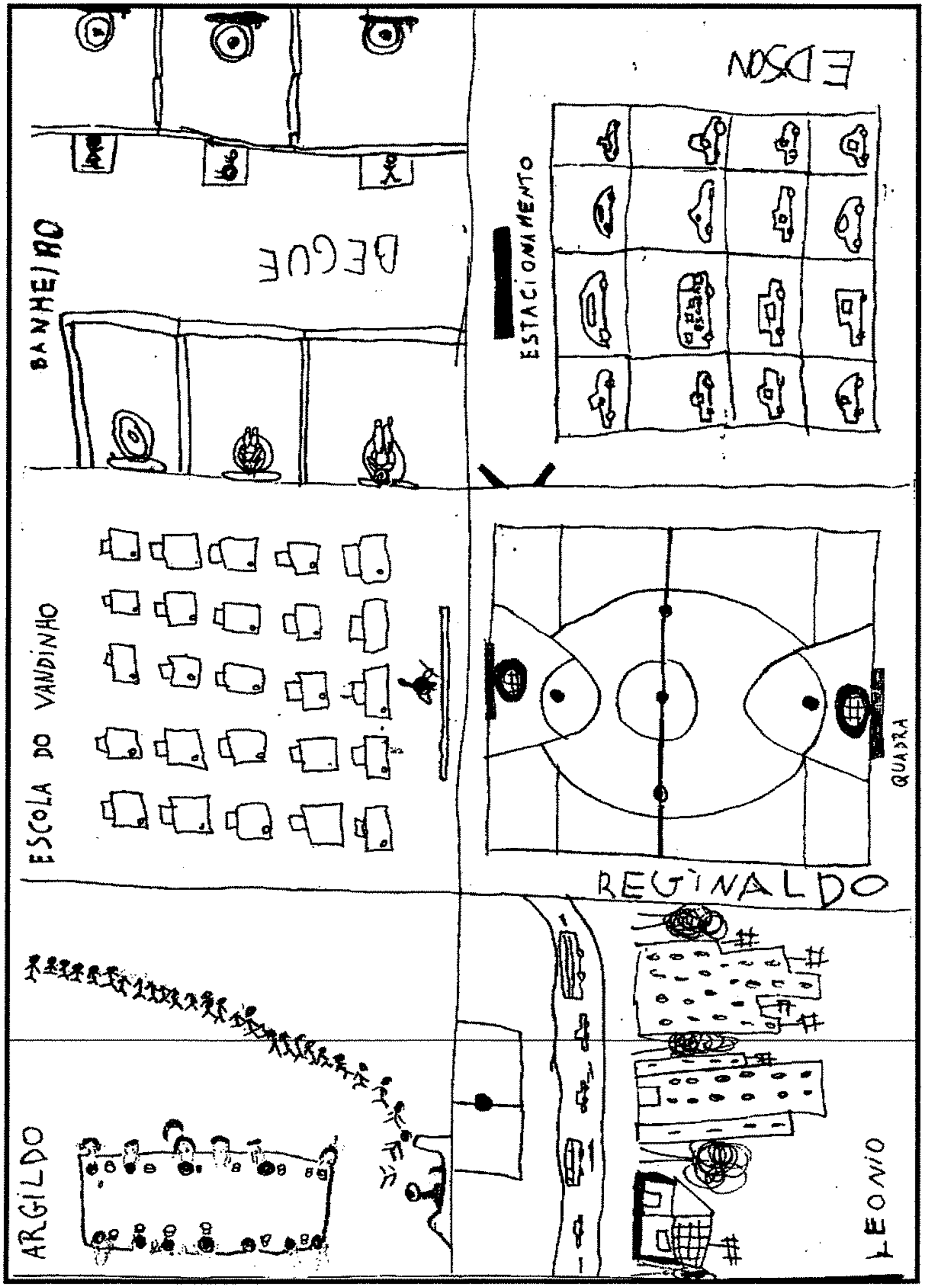
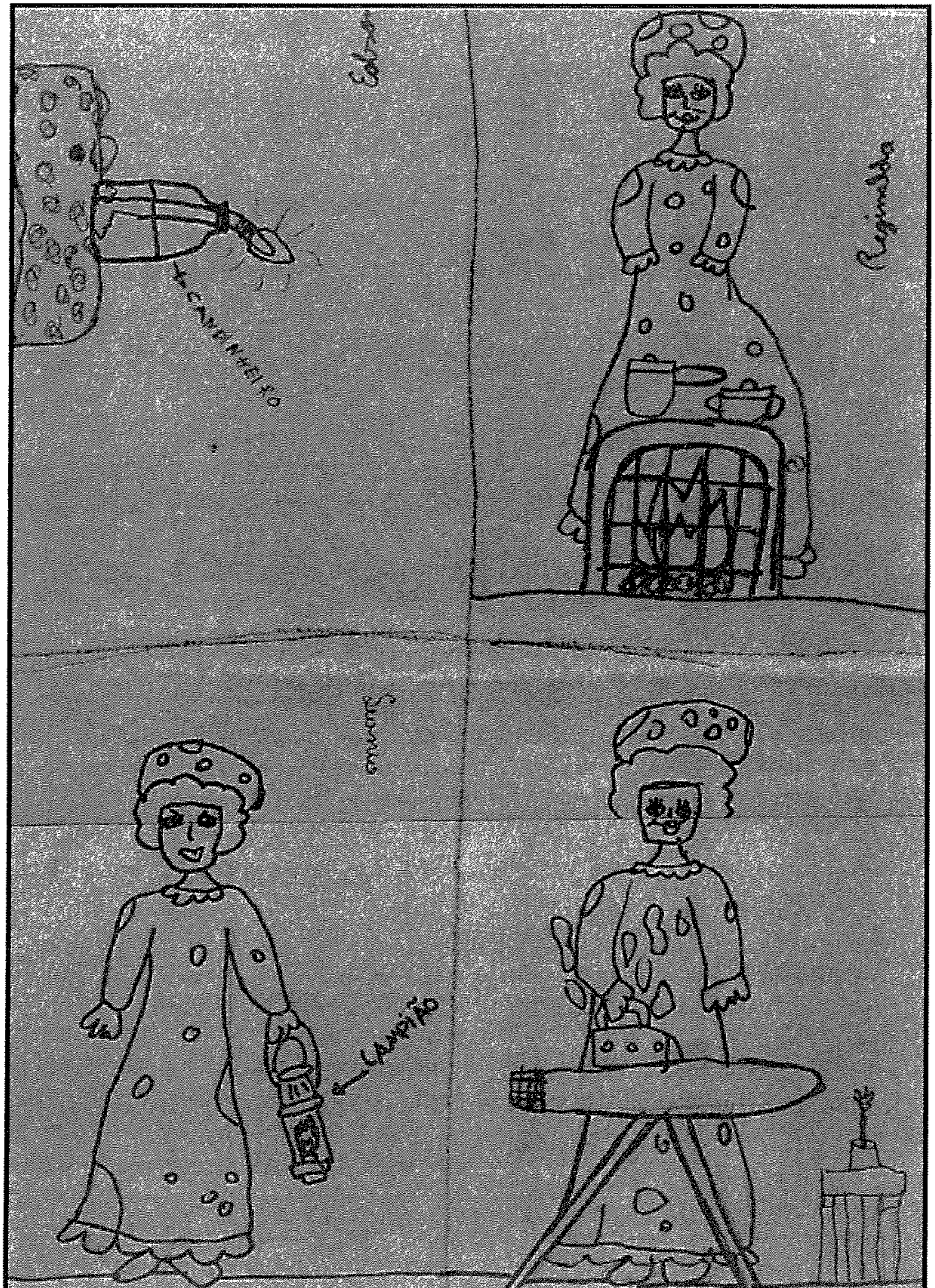


FIGURA 6.2 – Segundo desenho do grupo do Argi.



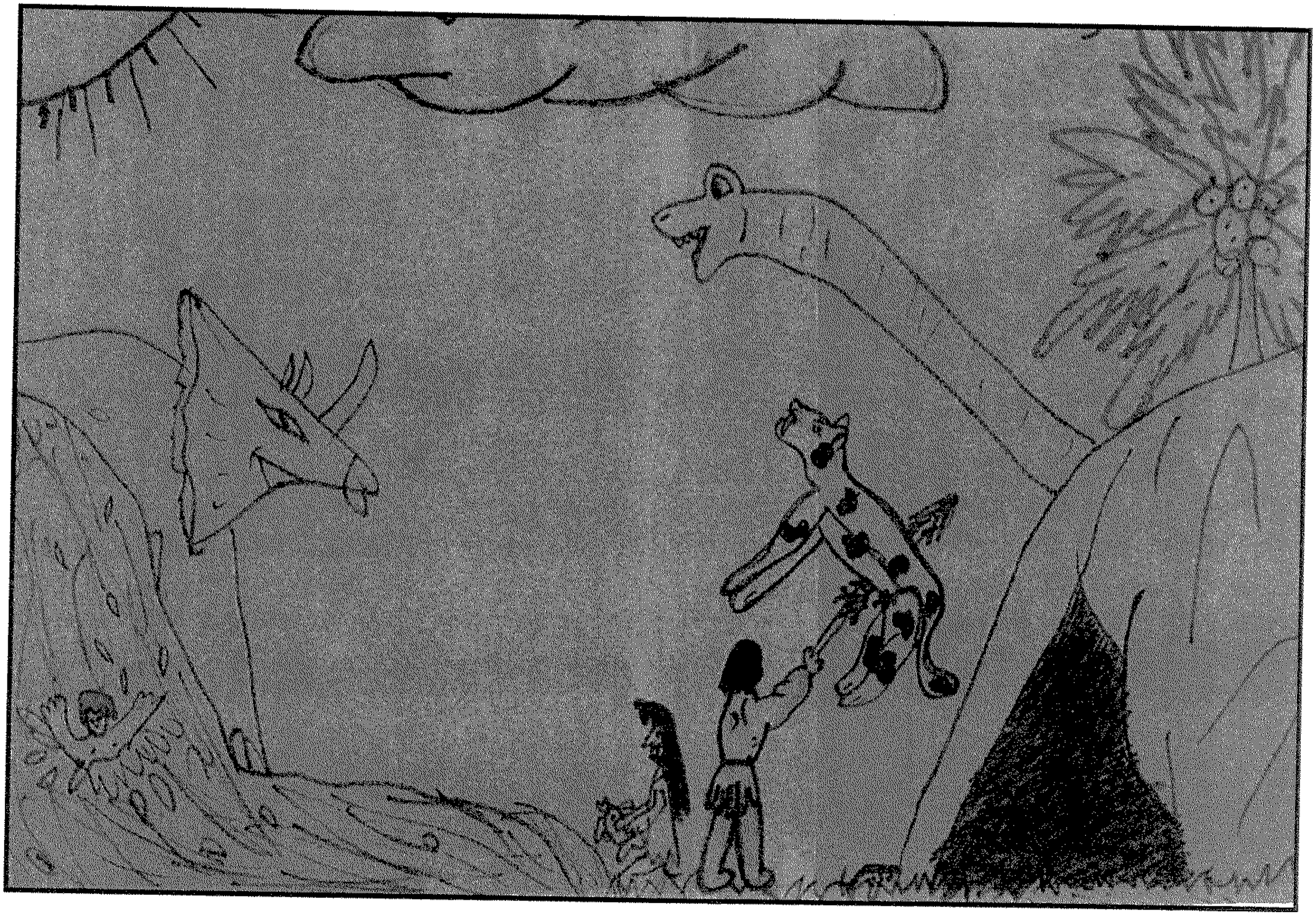


FIGURA 6.3 – Último desenho do grupo do Argi.

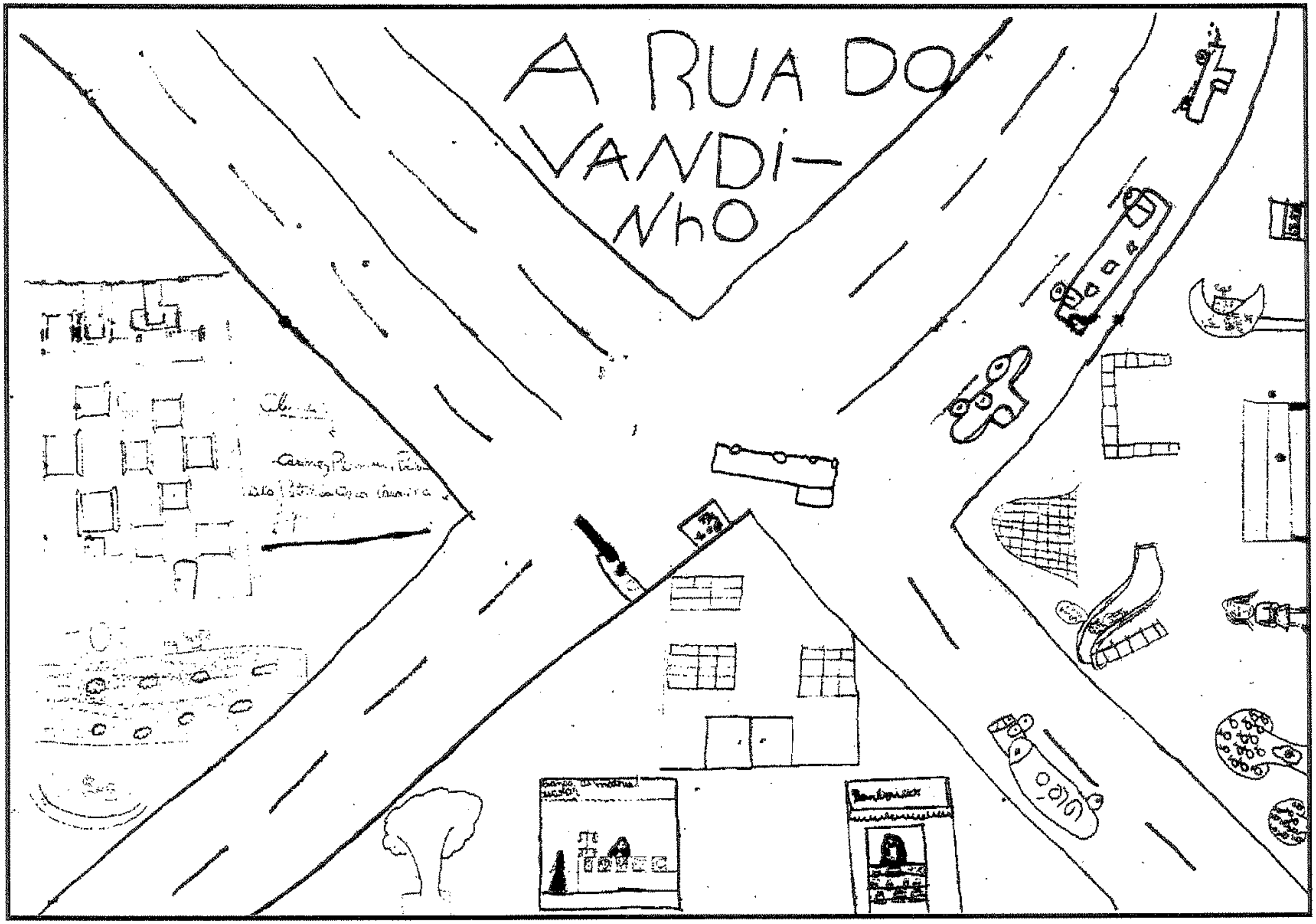


FIGURA 6.4 – Primeiro desenho do grupo do Cari.

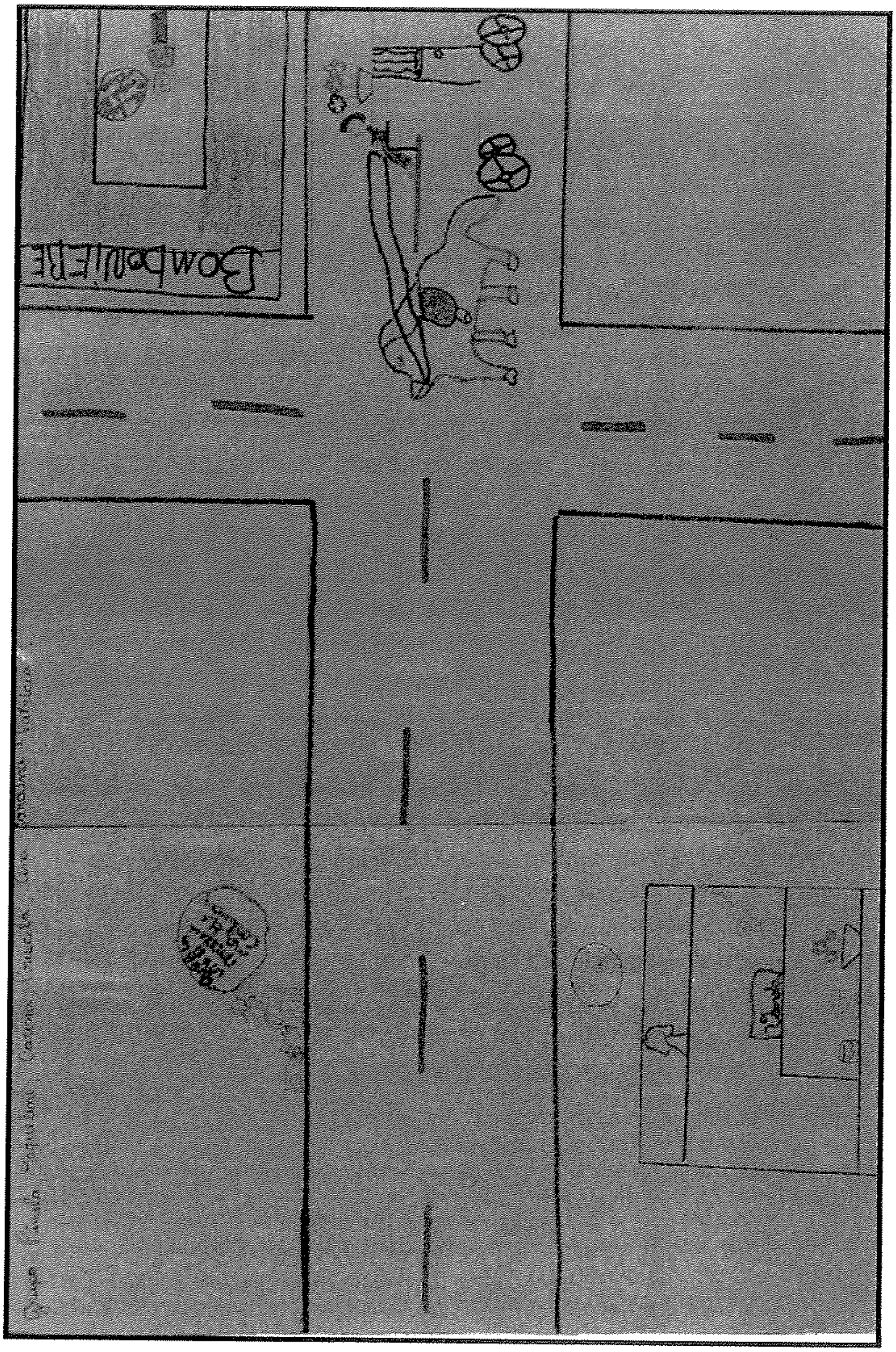


FIGURA 6.5 – Segundo desenho do grupo do Cari.

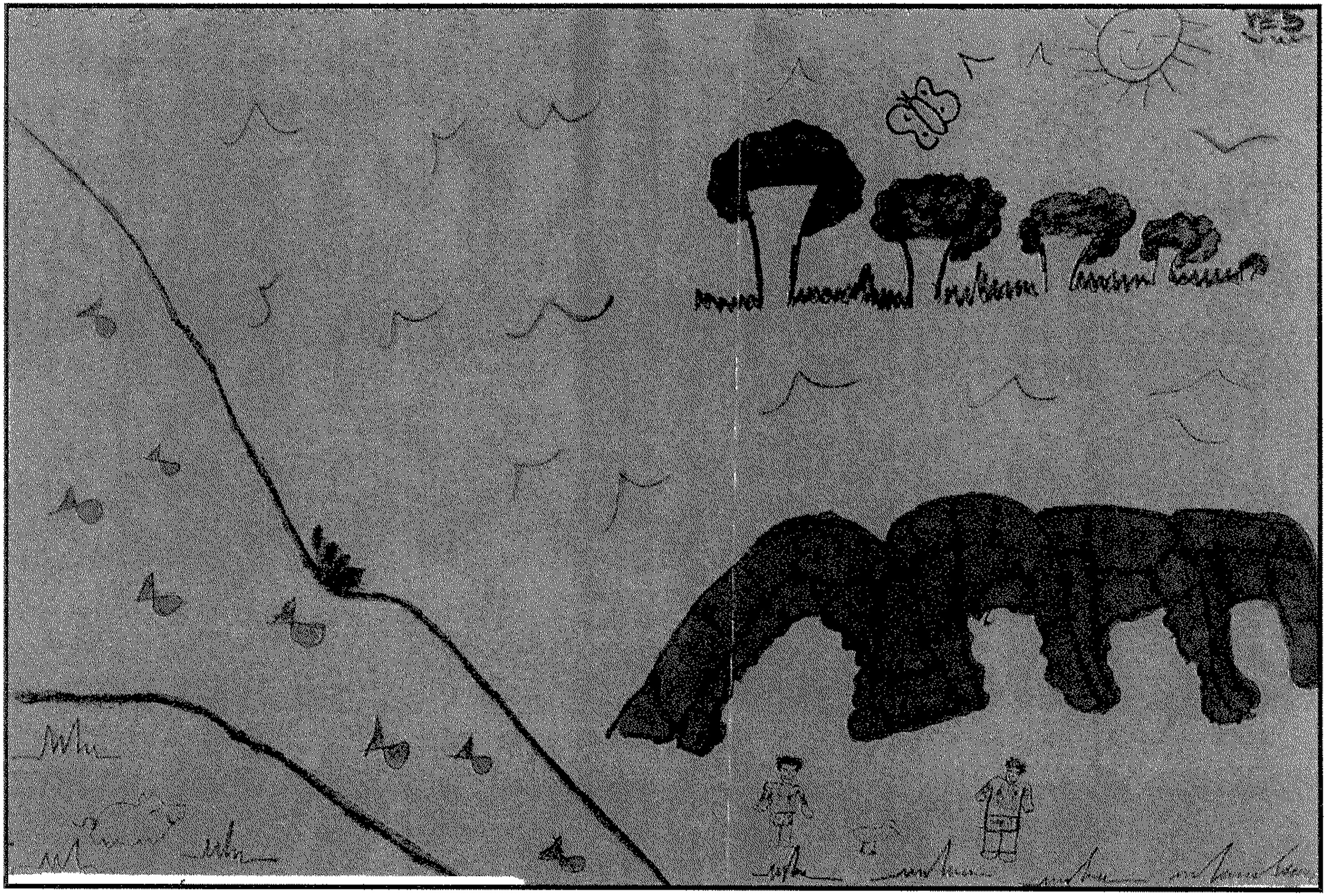


FIGURA 6.6 – Último desenho do grupo do Cari.

Análise

Analisando a atividade percebemos que os alunos identificaram formas de contagens usadas para controlar quantitativamente os objetos como: pedras, pequenos pedaços de madeira, linhas coloridas, folhas de árvores, riscos em pedaços de madeira e outros lugares.

Na medida em que os alunos passaram a pensar em formas de contagem despojadas de elementos tecnológicos da forma numérica atual, que a tornam um ente totalmente abstrato, puderam restituir o princípio da correspondência biunívoca dissimulado nas várias abstrações que modificaram a forma numérica. Lean descreve o procedimento de contagem e evidencia a correspondência um-a-um entre forma de contagem – numeral objeto: pedra, riscos, madeira – e o objeto a ser contado - peixes. Deste modo, restabelece elementos da inter-relação forma e conteúdo intrínsecos ao número como ferramenta tecnológica resultante de sucessivas abstrações histórico-culturais. O recurso numérico recriado, fazer corresponder um-a-um riscos com os objetos que se quer contar, é uma conexão mais simples do conceito de número.

É mais simples, se comparada ao conceito atual de número e, também, complexa por envolver a idéia de correspondência biunívoca, tão fundamental para a formação do conceito matemático de equivalência, que por sua vez, constitui base do conceito numérico. Assim, a forma numérica inclusa na forma tecnológica do mundo atual foi destituída da tecnologia para tornar mais evidente seu conteúdo – a idéia da correspondência inclusa na relação um-a-um, que segundo Caraça (1998), *"ele [estudo da idéia de correspondência] facilitar-nos-á enormemente a compreensão de certas questões que aparecerão adiante, como seja a questão dos irracionais, o conceito de função, etc"* (p.7).

Uma vez que as crianças manifestaram a dificuldade de conceber o mundo sem a eletricidade, podemos assegurar que a conexão conceitual, construída no último estágio do mundo de Vandinho, ou seja, sem a tecnologia da luz, do motor, do concreto e aço, seria impossível sem a imaginação. Proporcionar à criança uma experiência de projeção de suas experiências numéricas no mundo imaginário do Vandinho foi, sem dúvida, fundamental na atividade, pois como nos diz Moura (1995) *"a imaginação tem um papel importante no desenvolvimento da criança, de forma a ampliar sua capacidade humana de projetar suas experiências, de poder conceber o relato e experiências de outros"* (p.23).

A discussão posterior sobre essa forma de contar dos alunos foi caracterizar o conjunto que conta e o conjunto contado.

QUADRO I – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 6.1

		Elaborações analisadas	
Episódio 6.1 **O mundo do Vandinho**	**Cena 1** Imagina-se uma “viagem” regressiva no tempo, na qual solicita-se a retirada gradativa de recursos tecnológicos desse mundo.	**A retirada da eletricidade parece não possibilitar condições para a vida.**	*“não dá pra viver sem eletricidade. E a luz?”*
		Verificam-se alternativas de substituição da tecnologia retirada.	*Um aluno fala do fogão à lenha.* *“dá sim, lá em Pernambuco a gente usa o candieiro (candeeiro) pra iluminar”.*
	Cena 2 Torna-se mais evidente o conteúdo da forma numérica atual – a idéia da correspondência um-a-um ao pensar em formas de contagem sem os elementos tecnológicos da forma numérica atual.	**Restitui-se o princípio da correspondência um-a-um entre forma de contagem – numeral objeto: pedra, riscos, madeira – e o objeto a ser contado - peixes.**	*“eles faziam marquinhas assim (como se segurasse algo faz no ar um risco vertical) com tinta colorida na parede”* *“pegava um peixe, marcava um risquinho amarelo, pegava outro e marcava com vermelho e outro e outro e vai marcando...”*

EPISÓDIO 6.2 - Identificando o conjunto que conta e o conjunto contado

Objetivos

Identificar, na ação de contar, os conjuntos envolvidos na correspondência biunívoca, um denominado por “conjunto que conta”[2], isto é, o conjunto de objetos que se coloca em correspondência com os elementos do conjunto cuja variação quantitativa se quer controlar, e outro denominado por “conjunto contado”, ou seja, o conjunto cuja variação quantitativa se quer controlar.

Descrição

Em continuidade à discussão sobre os objetos que prescindiam de um controle quantitativo por parte do ser humano, enfatizados na atividade "O mundo do Vandinho", propusemos aos alunos três situações de contagem para que identificassem o "conjunto que conta" e "o conjunto contado". Os alunos refletiam individualmente sobre as situações e depois se organizaram em pequenos grupos para estabelecer uma resposta consensual do grupo. Finalmente, realizamos um debate com a classe sobre o quadro de respostas dos grupos, colocado na lousa.

As três situações de contagem propostas eram:

<u>Situação 1:</u> A professora faz a chamada dos alunos do 4° ano C.

<u>Situação 2:</u> Adelino guarda os sacos de milho no paiol da fazenda; para cada saco que guarda joga uma espiga no canto da entrada.

<u>Situação 3:</u> A professora Vitória observa quantos alunos faltaram na aula pelas carteiras vazias da classe.

A cena 1 foi selecionada do debate geral da classe.

Cena 1

Os alunos discutem sobre as diferentes respostas colocadas na lousa.

Cari: Posso falar? É a chamada, a chamada vai fazer assim, faltou Tiago ... na chamada eu não posso falar é a professora que tá contando.
Ever: Mas, só falar o número é o número que conta, a professora usa o número para contar.
Prof pede para os alunos respeitarem a fala dos colegas.
Ever: Eu acho que a professora, ela tá contando só que aí a chamada que tá ajudando ela, que nem tá lá o conjunto que conta, ela usou a chamada para contar.
Dama: É através da chamada que ela vai saber quantos.
Prisci: Ela vai saber quantos alunos que tem.
Prof: A Jaque está falando que a professora conta sem os números. A professora Vitória usou as carteiras.
Dama: Porque na sala tem o tanto de carteira certinha, cada carteira é um aluno.
Ever: [incompreensível] aí é a quantidade de carteiras, o tanto de alunos é o tanto de carteiras.
Cari: Mas é através da chamada que a professora vai contar, porque sem a chamada a professora não vai saber, vai que ela ainda tá no começo do ano, a professora não pegou os mesmos alunos, pegou outros alunos, não sabe o nome dos alunos. Como é que ela vai saber qual faltou? Só através da chamada.
Ever: E se os alunos sabem o nome um do outro?
Cari: Aí, se for pelos números.

[2] A terminologia "conjunto que conta" e "conjunto contado" é utilizada na fonte de referência das atividades, Lima & Moisés (1998).

Dama: Então, tem que ser chamada é... onde é conjunto que conta. E alunos, conjunto contado.
Tali [confirma a fala de Dama]: E alunos conjunto contado.
Prisci: Vai ser o contado [refere-se à chamada], porque os alunos é que vão ser contados e não a chamada que vai ser contada.
Dama: É. A gente tinha colocado isso antes, mas aí a gente pensamos e mudou.

Análise

Notam-se dois movimentos de elaboração neste debate. No primeiro, Dama, Cari e Ever refletem sobre a contagem dos alunos, identificando que é a professora que conta e a chamada ou o número a auxilia nessa contagem quando expressam *"É através da chamada que ela vai saber quantos"*. A idéia de correspondência, implícita nesta expressão, é explicitada quando Jaque apresenta que é possível realizar a contagem sem a chamada, "*com a observação das carteiras vazias*", idéia que se complementa com a manifestação de Dama *"cada carteira é um aluno"*. A ação de fazer corresponder baseia-se na idéia de correspondência que, segundo CARAÇA (1998) constitui uma das idéias basilares da matemática.

Colocar em correspondência biunívoca o conjunto de carteiras com o conjunto de alunos, conforme aponta este autor, exige que haja um *antecedente*, no nosso caso os alunos da professora Vitória e um *conseqüente*, a chamada ou as carteiras. No segundo movimento de elaboração Ever interpreta de forma mais geral e abrangente a relação quantitativa envolvida na idéia de correspondência, *"aí é a quantidade de carteiras, o tanto de alunos é o tanto de carteiras"*. Este aluno elabora argumento que amplia o usado inicialmente por não se restringir às qualidades específicas do conjunto que conta, agora ele coloca em evidência a relação entre dois conjuntos e o foco, na quantidade de forma mais geral. De forma semelhante o pensamento matemático procura abranger todos os casos na definição.

Cari, por sua vez, volta a se preocupar com "qual" aluno faltou, mostrando que só através da chamada é possível obter essa resposta. Os demais alunos concordam com o papel fundamental da chamada e a identificam como conjunto que conta e alunos, como conjunto contado.

Em geral, a qualidade dos objetos interfere nos processos de quantificação destes, entretanto, na atividade, a ênfase é dada à linguagem numérica, enquanto forma de expressão dessa quantidade, desviando-se o foco da reflexão de seu conteúdo fundamental – a correspondência biunívoca entre conjuntos e os aspectos considerados nesta relação.

Usualmente não se questiona porque "nós em cordas", "pedras", "contas", etc, podem contar animais, frutas, pessoas, etc. A qualidade – aspecto discreto – desses objetos e seres constitui de um lado, um empecilho para a criação de nova forma numérica, oferecendo a rigidez do número que conta objetos discretos. Porém, de outro lado, constituirá elemento básico na transposição da idéia de unidade "de medida" para a criação de nova forma numérica, a fração, visto que o conteúdo, por ser revolucionário, modifica a forma mesmo que esta tenha características conservadoras, segundo Fischer (1959). Neste sentido, a forma numérica conservadora – número natural, é redimensionada diante do novo conteúdo – os contextos de medição de aspectos contínuos.

QUADRO II – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 6.2

		Elaborações analisadas	
Episódio 6.2 **Identificando o conjunto que conta e o conjunto contado**	**Cena 1** Identificar, na ação de contar, os conjuntos envolvidos na correspondência um-a-um.	**Identifica-se a idéia de correspondência. Restringe-se às qualidades específicas do conjunto que conta**	*"É através da chamada que ela vai saber quantos"* *"cada carteira é um aluno"*
		Ampliam-se os argumentos anteriores uma vez que evidencia-se a relação mais geral entre os dois conjuntos, o foco é na quantidade.	*"Aí é a quantidade de carteiras, o tanto de alunos é o tanto de carteiras".*

EPISÓDIO 6.3 - Observando mudanças no conjunto que conta e no conjunto contado

Objetivo

HOGBEN (1970) destacou que dificilmente se distinguem os diferentes contextos de utilização dos números naturais. Um, no qual o número natural é usado para fins de contagem, considerando cada elemento da contagem, equivalente a qualquer outro. Outro, no qual ele é usado para expressar o resultado da comparação de uma unidade de medida com a grandeza a ser medida. Apoiados nesta observação, julgamos importante possibilitar ao aprendiz da fração a distinção desses dois contextos de utilização dos números naturais, refletindo sobre os aspectos dos objetos envolvidos nestes contextos, observando que hora ele expressa o resultado da contagem de um objeto que não se apresenta naturalmente "separado".

Com esta atividade, queremos que o aluno pense sobre as mudanças ocorridas em cada um dos conjuntos "que conta" e "contado", possibilitando a reflexão sobre a forma numérica, diante do processo de desenvolvimento tecnológico e sobre o conteúdo, aspectos dos objetos – discretos/contínuos – vinculados à correspondência biunívoca. Assim, pretende-se propor a reflexão sobre as mudanças, que podem ocorrer em cada um deles, quando se quer contar objetos da realidade, aos quais é atribuída a qualidade de serem contínuos, uma vez que, ao refletirmos sobre a forma numérica usada na contagem de aspectos discretos dos objetos, tomando como referência a correlação de seu *conteúdo* discreto e sua *forma numérica*, representados no conjunto que conta e no conjunto contado, permite-se observar as impossibilidades oferecidas por esta forma numérica, quanto à representação de quantidades que não estão organizadas em unidades discretas, ou seja, de vizinhanças definidas.

Descrição

Nesta atividade propusemos que os alunos pensassem sobre a questão: onde ocorreram mudanças? , tendo por base um conjunto de seres representativos do "conjunto contado" expresso na Figura 6.7 e sobre um conjunto de objetos representativos do "conjunto que conta" expresso na Figura 6.8. Em seguida, estabelecemos um debate com a classe a fim de responder a questão. Durante o debate surgiu outra questão: o que se pode contar com a pedra? A cena 1 representa um momento deste debate.

Fig. 6.7 – Objetos contados

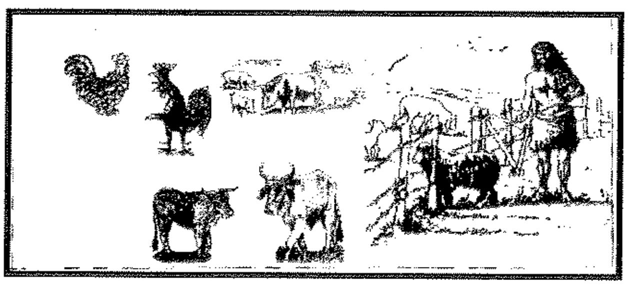


Fig.6.8 – Objetos usados para contar

Cena 1

A professora pergunta aos alunos onde ocorrem mudanças, ao referir-se aos quadros apresentados acima, a cena refere-se ao momento da discussão com a classe.

Dama: Antes era pedra.
Iv: Agora são números.
Prof: Houve uma mudança?

Iv e Iva: Houve.
Prof: Houve uma mudança em qual dos dois conjuntos?
Iva: No que conta.
Dama: No conjunto que conta, foi a mudança, porque eles contavam com pedras e foi mudando e foi é... surgindo o número romano e aí, depois, surgindo o número natural.
Tali: Antigamente era muito difícil, assim, pra contar, mas agora está mais fácil. Pegar pedrinha por pedrinha, tinta por tinta,...
Lean: [incompreensível]
Prof: E se fosse o quê?
Lean: E se fossem cem ovelhas... [faz gestos com a mão na carteira, mostrando a relação uma pedra para cada ovelha]
Dama: Pra contar a água, não dá não... só se for as gotinhas.
Aluna: Nem areia.
Tali: O quê que pode contar e o que não pode.
Damas: Areia não pode,...poder pode, mas só que vai demorar um ano.
Iv: Contar alguma coisa com pedrinha.
Bru: Dona Érica, dá pra contar sim, é só peneirar e o que sobrar...
Prof: Conta só o que sobrar?
Dama: Contar até que dá para contar, mas não vai contar a areia. Cimento também não dá pra contar, é pó.

Análise

Destacamos duas elaborações dos alunos de naturezas diferentes ao refletirem sobre contar com pedras. A primeira elaboração, de Lean, parece explicar que a dificuldade, enunciada anteriormente por Tali, de que era mais difícil contar grandes quantidades com pedra, se caracteriza pela operacionalidade da contagem, ou seja, por seu aspecto funcional. Evidencia-se que é difícil contar uma grande quantidade com pedrinhas, por exemplo, cem ovelhas, e assim pode-se perceber que a mudança é atribuída à *forma do numeral*, significando que o numeral pedra é operacionalmente limitado na contagem de grandes quantidades, não se questiona a característica discreta do conjunto contado.

Em outra elaboração, quando a aluna Tali, diante do questionamento se houve mudanças dos dois conjuntos "o que conta" e "o contado", se faz uma outra pergunta "*o que pode contar e o que não pode contar [com as pedras]*", ocorre uma reflexão sobre a mudança do conteúdo numérico e percebe-se a diferença na qualidade do aspecto contado, diferente da elaboração de Lean, que justifica a dificuldade em contar uma grande quantidade com pedrinhas, por exemplo, cem ovelhas, operacionalmente, cujo conteúdo numérico permanece o mesmo.

Na elaboração da Dama, também há uma percepção de que há na natureza objetos cujos aspectos oferecem fator limitante para o estabelecimento da correspondência biunívoca –

água, areia, cimento – e por isso não podem ser contados com pedras. Para solucionar este problema a aluna mostra uma tendência em modificar o aspecto contínuo desses objetos, adaptando suas características a fim de permitir a contagem com pedras. Na verdade este é o movimento numérico feito ao longo da história, procura-se tornar discreto o aspecto contínuo dos objetos permitindo quantificá-los, criam-se unidades artificiais que precisam ser da mesma espécie do objeto a ser contado. Isto pode ser confirmado por sua tentativa de imprimir um conteúdo discreto ao aspecto contínuo da água, "*a forma de gotinhas*", para poder quantificá-la de maneira análoga à das pedras. Esta tentativa parece ser possível porque não muda a natureza do objeto a ser contado: gota d'água é sempre água. O que não vai acontecer quando se peneira a areia, sugestão dada por Bru, para poder quantificá-la. A sugestão dada por Bru com o objetivo de se obter areia de maneira análoga às gotas e às pedras, do conjunto que conta, é questionado por Dama porque parece apontar como resposta a mudança da natureza da areia que deixa de ser pó como o cimento é pó, contrapondo-se à elaboração de Dama.

Observamos o movimento criativo e a interação completa dos alunos nas suas elaborações conceituais, um aluno questiona a elaboração do outro. Outra observação fundamental nas elaborações dos alunos é que percebe-se o pensar sobre o conceito, fazendo dele um instrumento, como é o caso do Lean, diferente do pensar com o conceito, trazer o conceito para sua subjetividade como nas elaborações da Tali, do Bru e da Dama.

Podemos considerar que as argumentações desta cena residem numa visão intuitiva de que podemos observar dois aspectos diferenciados no conjunto de objetos contados: o aspecto discreto e o contínuo e, por isso, estariam respondendo à questão de mudança de *conteúdo* do objeto a ser quantificado. Consideramos que a atividade cumpriu o propósito de ir além da operacionalidade referente à contagem com pedras, uma vez que ao retomarmos o tempo em que se contava com pedras, os alunos puderam refletir sobre o princípio fundamental da correspondência biunívoca entre objetos e os aspectos fundamentais, que permitem esta correspondência.

QUADRO III – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 6.3

		Elaborações analisadas	
Episódio 6.3 **Observando mudanças no conjunto que conta e no conjunto contado**	**Cena 1** Refletir sobre mudanças: ◆ na forma numérica (conjunto que conta), enfocando seu processo de desenvolvimento tecnológico; ◆ no conteúdo (conjunto contado), enfocando os aspectos discretos/contínuos dos objetos envolvidos no processo de quantificação.	**A dificuldade é definida pela operacionalidade da contagem.**	*"Antigamente era muito difícil, assim, pra contar, mas agora está mais fácil. Pegar pedrinha por pedrinha, tinta por tinta..."* *"E se fossem cem ovelhas".*
		A dificuldade reside na qualidade do aspecto a ser contado/quantificado no objeto.	*"o que pode contar e o que não pode contar [com as pedras]".*
		Tenta-se imprimir um novo conteúdo ao aspecto contínuo para poder quantificá-lo de maneira análoga ao conteúdo discreto das pedras – forma numérica rudimentar do número natural.	*"Pra contar a água, não dá não... só se for as gotinhas."*

EPISÓDIO 6.4 - A unidade natural

Objetivo

❖ Identificar o limite do número natural na enumeração de aspectos contínuos de objetos.

❖ Generalizar características dos objetos que são próprias de sua enumeração com o número natural.

Descrição

Propusemos aos alunos que desenhassem "unidades naturais" e respondessem a questão: O que é unidade natural? Usamos três momentos: individual, em pequenos grupos e debate geral sobre as respostas dos grupos expressas na Figura 6.9. Dos momentos em grupos e debate geral, extraímos as cenas 1 e 2 por revelarem os pontos de vista dos alunos no processo de argumentação e definição da unidade natural.

Na cena 1 destacamos, antes do debate com a classe, um momento de discussão que nos permite identificar como um dos grupos define a unidade natural. Na Figura 6.9 apresentamos o quadro de respostas dos grupos organizado para a discussão final com a classe. As cena 2, 3 e 4 representam momentos de debate entre os diferentes pensamentos e definibilidade da unidade natural.

Cena 1

A discussão num pequeno grupo de alunos sobre: o que é *unidade natural*

Prof: O que vocês acham que é Unidade Natural?
Eve: O sol,... a Lua...
Prof: Por que é que o Sol e a Lua são unidades naturais?
Eve: Porque é só você ver que já sabe quanto é.
Bru: É, mas têm vários planetas. [Têm vários planetas que não se vêem].
Cami: A árvore.
Prof: Por que, a árvore é [unidade natural] e o planeta é?
Bru: A árvore é difícil de contar com as folhas [As folhas das árvores são difíceis de contar], agora, os outros planetas, os países, as pessoas...
Viní interfere (de outro grupo): Sabe o que é que eu acho que é unidades naturais? É o que vem da natureza.
Cami: É que são unidades naturais, são muitas. São as frutas.
Eve: Vêm da natureza só que é muitas.
Cami: As frutas, abacaxi.
Eve: Não existe só uma fruta.
Prof: Você está pensando, por exemplo, que unidade natural é aquela que só existe uma.
Eve: Não, é...., aquele que dá. Quando a gente vê, nós já sabe quanto têm, dez ovelhas se a gente olha assim, dá pra ver quanto tem.
Prof: Então, não é o que existe só um?
Cami: Então, as frutas também dá. Num dá? Na sua casa, sua mãe comprou cinco laranjas e cinco bananas, não dá pra você contar?
Eve: É... dá
Cami: Então?!

Análise

Podemos perceber que as elaborações desta cena incluem duas tendências de pensamento: uma ligada à forma, ao limite visual; a outra ao conteúdo, à qualidade ser objeto que, por si são naturais e vêm da natureza mesmo que em "muitas" quantidades, pois é possível destacar um subconjunto com o "limite visual" que permite enumeração.

Os alunos Bru e Eve destacam elaborações dentro da primeira tendência, visto que a dificuldade na contagem dos elementos da natureza está no sentido do limite visual do conjunto de objetos, parecem admitir que muitos objetos não permitem sua contagem.

Viní faz uma primeira generalização para a unidade natural ao expressar "*Sabe o que é que eu acho que é unidades naturais? É o que vem da natureza*", apresentando a condição "vir da natureza" como generalizadora. O aluno Eve procura satisfazer esta condição em suas argumentações posteriores, porém sua resposta parece evidenciar que a unidade natural não está colocada para um conjunto muito grande. Ele mostra que só se pode contar o que está dentro do limite representado pela forma do campo visual – é o limite visual para a contagem em unidades.

Cami parece querer se contrapor a essa idéia e eliminar esta variável para ficar somente com o aspecto "*vir da natureza*". Para esta aluna, as duas tendências: uma ligada à condição de que é o que se bate o olho e conta, isto é, restrito ao senso numérico, e outra que é o que vem da natureza, parecem estar em oposição para poder definir o que é unidade natural. Cami sugere em sua argumentação que se unidade natural for definida que é o que se bate o olho e conta, não vai entrar nesta definição "*frutas*" uma vez que são muitas, mas que sempre dá para reduzir a um conjunto que torna possível a contagem e, no entanto, vem da natureza. Então o critério não pode ser a forma, essa é maleável. Mas o conteúdo esse é definível. O aluno concorda e parece convencido pela argumentação da Cami.

Cena 2

Percorrendo as respostas dos grupos colocadas na lousa, apresentadas na Figura 6.9, realizou-se o debate sobre a questão "o que é unidade natural". Os alunos apresentam sugestões para a resposta do grupo 1.

Cari: Ela poderia dar exemplos na lousa.
Prisc: Como: copos, ou então,... Flores, árvores.
Tali: Animais.
Prof: Então, eu vou perguntar: ali [na resposta colocada na lousa], eles colocam: qualquer coisa da natureza. O que é a "coisa da natureza"? [Vários falam ao mesmo tempo].
Dama: Qualquer coisa não, porque na natureza tem a terra, né?
Iva: O homem.
Ever: Nem tudo que vem da natureza dá pra se contar, porque tem as estrelas .... não dá pra contar.... a terra...
Prof: Mas na resposta da lousa, está escrito assim "Unidade Natural é qualquer coisa da natureza que podemos contar", vocês acham que precisa modificar alguma coisa?
Dama: Ela podia falar as coisas que dava pra contar.
Cari: Elas se expressaram mal, só que está certa a resposta. Elas colocaram que qualquer coisa da natureza, que podemos contar.
Prof: Elas colocaram: "que podemos contar".

Joy justifica: Não é todas as coisas.

Análise

Nesta cena, o questionamento feito em relação à definição dada pelo grupo evidencia, a princípio, uma contradição entre as duas qualidades apresentadas para a unidade natural: uma consistindo em "*ser qualquer coisa que vem da natureza*" e outra em ser "*[aquelas] que podemos contar*". Posteriormente a contradição é manifestada como uma insatisfação em relação à resposta dada pelo grupo 1. Os alunos parecem revelar em suas argumentações que não aceitam a condição "*qualquer coisa que vem da natureza*", pois não a vinculam à condição "*que podemos contar*".

A insatisfação destes alunos frente à expressão lingüística que restringe a qualidade de "*qualquer coisa*" como aquelas "*que podemos contar*" vai mais além. Não encontrando uma forma, neste caso a forma lingüística, para explicitar satisfatoriamente o conteúdo, entendido como a própria definição de unidade natural, vêem a necessidade de explicitar este conteúdo pelos indivíduos que o formam. Por isso Cari e Dama condicionam, à restrição dada, a citação de exemplos ao expressarem respectivamente *"Ela poderia dar exemplos na lousa"* e *"Ela podia falar as coisas que dava pra contar"*.

Para a formação do pensamento é importante elaborar definições estabelecendo relações entre objetos de uma mesma classe, no caso a classe definida por objetos discretos que se diferencia daquela dos contínuos. A relação entre singular e universal na formação do conceito numérico, nesta cena se manifesta de forma sincrética, relacionando discretamente os exemplos com uma idéia mais geral, intuída e não definida. Para algumas crianças, há algo comum que distingue os objetos para a contagem e os divide em ter vizinhança visualmente definida, como planetas, sol, lua, frutas, animais,... e não tê-las, como água, terra, areia...

Essa forma de pensamento denominada juízo por Kopnin (1978) é uma instância anterior e fundamental para a formulação de uma relação entre o singular – o conjunto dos objetos, e o universal – aspecto discreto e aspecto contínuo – dado pela dedução e então explicação formal que configura o conceito.

Cena 3

Percorrendo a resposta do grupo 2.

Prof: Dá pra saber o que é unidade natural pela resposta que eles deram?
Dama: Olha só...É...Ali.
Prof: Se eu pegar uma coisa que não está colocada ali, por exemplo... Falem pra mim uma dessas coisas.
Cari: As águas, não dá, eles colocaram as águas, mas as águas não dá.
Dama: Só as gotinhas assim, só as gotinhas.
Cari: Só se colocarem as águas em garrafas de litros, aí ...dá pra contar.
Iva: 1,2,3,4,....não dá pra contar. [referindo-se as águas]
Dama: Ali, ele falou que dá pra contar, mas não dá, porque a água é tipo gelo, ela derrete.
Dama: A única coisa que não está dando mesmo é a água e as pedras.
Prisc: As pedras, as pedras dá um jeito.
Dama: É...as pedras dá-se um jeito.
Prof: Aí, foram [incompreensível] Como eu faço para ter uma resposta que não dessem somente exemplos, que apresentasse o quê é a unidade natural e não "mostrassem coisas" que são unidades naturais? Como é que vocês escreveriam? Herb, Thia e Josem... Em vez de dar exemplos do que é unidade natural, eu pergunto, por que vocês escolheram animais, plantas, árvores... como unidades naturais?
Herb: Porque são coisas da natureza.
Prof: Então, vocês, na verdade, pegaram coisas da natureza para ser unidades naturais. É isso?
Herb: É.
Prof: Então, o que é unidade natural?
Herb: É a natureza.

Análise

Nesta cena, se observa que nem todos os grupos enfatizam o aspecto discreto dos objetos ao definirem a unidade natural. Cari ao expressar, *"As águas, não dá, eles colocaram as águas, mas as águas não dá"*, mostra que o grupo considerou suficiente para determinar a unidade natural apenas a característica: estar "*na natureza*", isto é, considera-se unidade natural todo objeto que se obtém da natureza, incluindo aqueles objetos cujo aspecto envolvido na enumeração era o contínuo, como a água. Dama também não concorda com a presença de água como exemplo de unidade natural. Para esta aluna, a impossibilidade de contagem deste elemento parece trazer evidências claras de que não se pode considerá-lo uma unidade natural.

Notamos que o movimento do pensamento das alunas Dama e Cari indicam que a água poderia ser contada mediante adaptações "*na forma de gotinhas*" ou "*em garrafas de litros*". Esta elaboração parece confirmar o movimento que inspira uma forma discreta ao conteúdo contínuo – da água, indicando que pode ser possível intervir no aspecto contínuo desta a fim de atender os limites da forma numérica que enumera aspectos discretos, o número natural. Assim, indica-se que *forma* numérica e o *conteúdo* podem passar por modificações motivadas pelas diferentes situações de contagem. Nesse primeiro movimento, identificado nas elaborações de Dama e Cari nota-se que é o conteúdo que se submete a mudanças para poder ser quantificado com a forma numérica, o número natural. Segundo Fischer (1959) a forma tem tendência conservadora enquanto o conteúdo é revolucionário.

Entretanto, esta adaptação não parece convencer Dama e Iva, apesar de ser possível dar uma forma para a água análoga à das unidades, a própria Dama aponta que não se modifica a sua natureza - ser contínua. De forma similar, Iva parece não inter-relacionar forma e conteúdo ao discordar da possibilidade de usar números naturais na contagem desse objeto contínuo. A elaboração desse aluno pode estar indicando que ao identificar um conteúdo diferente em relação à contagem – aspecto contínuo, se descarta totalmente o uso da forma numérica usada na contagem de aspectos discretos, não admitindo o uso desta forma nem mesmo quando apontam modificações nesse conteúdo.

Nesta cena também encontramos a preocupação da professora com o movimento de generalização do pensamento em relação à resposta dada pelo grupo 2 uma vez que nela não se aponta a percepção de um aspecto comum aos objetos considerados por eles como unidades naturais. O grupo representa sua definição de unidade natural por meio de uma relação de objetos, sem destacar uma proposição que represente, de forma mais geral, suas características.

Cena 4

O debate continua e a discussão focaliza as respostas que consideram unidade natural todas as coisas da natureza.

Prof pergunta ara o grupo do Iva e Iv: Vocês também colocaram: o que vêm da natureza.
Iv: Você planta um pé de laranja no seu quintal e aí, através da natureza, ele vai crescer, vai pegar a laranja [incompreensível] é natural o outro é feito...Assim, na fábrica.
Prof: E esses que são da fábrica, você não considera natural?
Iv: Não.
Quase toda a classe se manifesta quando o grupo 10 faz a leitura de sua resposta e nos exemplos de unidades naturais aparece o lápis.
Cari: Elas colocaram lápis, só que o lápis, dona Érica, não é... Não nasce... Assim... Como... O pé de laranja. O lápis foi feito da natureza, mas ele não é da natureza, ele foi feito.
Jaque: Mato, não dá pra contar...
Prof: Na definição se colocou que é o que vem da natureza. Mas nos exemplos elas escreveram coisas que "dão para contar". Então, vamos ter que definir isto.

Prof: O que é unidade natural? Como fica a resposta?
Cari: Unidade natural é o que é da natureza, só o que não é feito, não é o que é feito com coisas da natureza, é o que é da natureza, ...Nasce...Cresce..., que dá pra se contar, porque gota d'água...Essas coisas.Assim...[faz gesto negativo com a cabeça].
Leô completando a resposta da Cari: Assim, por exemplo, a areia vem da natureza, mas só que não dá pra contar. São as coisas da natureza. Que são da natureza só que não dá pra contar.
Cari: É da natureza, não o que é feito da natureza.

Análise

Nesta cena destacamos uma elaboração que leva em consideração características mais gerais quanto à definição da unidade natural. Consideram-se as duas características já citadas anteriormente: uma, que o objeto deve vir "diretamente da natureza" e outra, que existe o aspecto de poder ser "contável"; no entanto, incrementa-se a estas expressões o sentido de ser um objeto que não passou por manipulação humana. Este sentido, trazido a discussão por Iv, encontra-se expresso na resposta do grupo 9 expressa na Figura 6.9. É este grupo que dá o primeiro passo para o que delineamos um processo de dedução do que é a unidade natural. Neste grupo se buscou uma característica que identifica o que é a unidade e essa característica foi deduzida do conjunto de objetos identificados como unidades: são os seres vivos na sua individualidade.

Enquanto os demais grupos definem intuitivamente a unidade natural, e por vezes não conseguem explicitar a característica principal da unidade, como é visto nas elaborações de outros grupos, o grupo 9 tem clareza da natureza dos objetos que fazem parte do grupo e usam uma resposta que generaliza essa idéia. Cari, mesmo não fazendo parte deste grupo, se apropria de sua generalização quando busca definir, em dois momentos da cena, a unidade natural. No primeiro, Cari enuncia que lápis não é unidade natural porque não nasce, conforme expressa *"Elas colocaram lápis, só que o lápis, dona Érica, não é... <u>Não nasce</u>... Assim... Como... O pé de laranja. O lápis foi feito da natureza, mas ele não é da natureza, ele foi feito"*, logo depois ela esboça a tentativa de definição final: *"Unidade natural é o que é da natureza, só o que não é feito, não é o que é feito com coisas da natureza, é o que é da natureza, ...<u>Nasce...Cresce</u>..., que dá pra se contar, porque gota d'água...Essas coisas.Assim...[faz gesto negativo com a cabeça]"*

O grupo 9 apresenta uma forma de elaboração da definição de unidade natural que consideramos, relativamente às outras expressas na Figura 6.9, ser mais coerente internamente porque mostra uma premissa geral que estabelece condições para que todos os elementos se incluam nela. Não podemos garantir que essa elaboração conceitual foi possível a todos os alunos, mas podemos afirmar que a classe participou do movimento de elaboração e também que partiu dos alunos, em suas interações na atividade e com a professora, a enunciação dos movimentos numéricos entendendo, nesta enunciação, o que é a unidade natural.

O movimento conteúdo/forma é assinalado, nesta cena, pela *forma* de pensamento envolvida na reflexão sobre o *conteúdo* que define a unidade natural. Este movimento é interpretado como a ação de buscar o aspecto mais geral que inclui todos os objetos da categoria: unidade natural. Foi possível perceber esse movimento, observando, sobretudo as argumentações dos alunos sobre a insuficiência de expressões que definem a unidade natural e que constituem juízos mais sincréticos. A possibilidade de construção de uma definição de unidade natural, que relaciona dedutivamente o singular dos objetos e o universal, grandeza discreta, manifesta, de acordo com KOPNIN (1978), uma forma conceitual de definição sobre unidades naturais.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9	Grupo 10
Unidade natural é qualquer coisa da natureza que podemos contar.	Unidade é animais plantas árvores e também as águas e os animais	Unidade natural é coisas que vem da natureza.	Unidade natural é a unidade da natureza que dá para contar. Exemplo: árvores, peixes, pássaros e toda coisa que é da natureza que dá para contar	Unidade natural são as coisas que dem para contar, como exemplo: flores, frutos, legumes, peixes, animais, canetas, copos, pratos e vários objetos.	Unidade natural é maça pêra animais árvores e verduras, tudo que nasce na natural	Unidade natural é as coisas que vem da natureza que nós não podemos fazer com nada. Só mesmo a natureza	Unidade natural é: São as coisas que dar para ser contada como: flor, animais, frutas, sol, peixes e pássaros	Unidade natural é tudo que nasce através da natureza como os animais as plantas, os peixes e outras coisas. Como um animal racional importante que é o homem nasce, cresce e morre, todo tipo de animais é assim.	Unidade natural é o que pode se contar. O sol – árvores – flores – mato – borboleta – peixes – bocas – lápis – e outros.
Jaque, Sola e Joy.	Herb, Thia e Josemb.	Regi, Die e Leô.	Patri, Mar e Bru.	Dama, Tali e Kel.	Ever, Lean e Char.	Samu, Argi e Eds.	Cari, Hele, Pame e Acarol.	Iva e Iv.	Jana, Prisci G. e Rafa.

FIGURA 6.9
PAINEL DAS RESPOSTAS À QUESTÃO: O QUE É UNIDADE NATURAL?

QUADRO IV – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 6.4

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Elaborações analisadas</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="6">Episódio 6.4

A unidade natural</td><td rowspan="2">Cena 1
Discute-se o que é unidade natural e observam-se duas formas de pensamento em relação a sua definição.</td><td>Ligada à forma, ao limite visual da enumeração.</td><td>"Porque é só você ver que já sabe quanto é."
"Não, é...., aquele que dá. Quando a gente vê, nós já sabe quanto têm, dez ovelhas se a gente olha assim, dá pra ver quanto tem."</td></tr>
<tr><td>Ligada ao conteúdo, ser objeto que vem da natureza e, mesmo em "muitas" quantidades, pode-se destacar um subconjunto que permite enumeração.</td><td>"Sabe o que é que eu acho que é unidades naturais? É o que vem da natureza."
"É que são unidades naturais, são muitas. São as frutas."
"Então, as frutas também dá. Num dá? Na sua casa, sua mãe comprou cinco laranjas e cinco bananas, não dá pra você contar?"</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cena 2
Evidencia-se uma insatisfação quanto à forma lingüística que exprime duas qualidades – (conteúdos) para a unidade natural.</td><td>Uma que consiste em "ser qualquer coisa que vem da natureza"</td><td>"Qualquer coisa não, porque na natureza tem a terra, né?"
"Nem tudo que vem da natureza dá pra se contar, porque tem as estrelas .... não dá pra contar.... a terra..."</td></tr>
<tr><td>Outra que consiste em ser somente aquelas "que podemos contar".</td><td>"Ela poderia dar exemplos na lousa."
"Ela podia falar as coisas que dava pra contar."
"Elas se expressaram mal, só que está certa a resposta. Elas colocaram que qualquer coisa da natureza, que podemos contar."
"Não é todas as coisas."</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cena 3
Notam-se duas interpretações diferentes ao inter-relacionar forma numérica e conteúdo – aspecto discreto e contínuo.</td><td>Identifica-se um conteúdo diferente em relação à contagem – o aspecto contínuo, e se descarta o uso da forma numérica usada na contagem de aspectos discretos, o número natural.</td><td>"1,2,3,4,....não dá pra contar. [referindo-se as águas]"
"Ali, ele falou que dá pra contar, mas não dá, porque a água é tipo gelo, ela derrete."</td></tr>
<tr><td>Imprime-se uma forma discreta ao conteúdo contínuo da água, indicando que é possível intervir no aspecto contínuo para atender aos limites da forma numérica que enumera aspectos discretos, o número natural.</td><td>"Só as gotinhas assim, só as gotinhas."
"Só se colocarem as águas em garrafas de litros, aí ...dá pra contar."</td></tr>
</table>

QUADRO IV – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 6.4

		Elaborações analisadas	
Episódio 6.4 **A unidade natural**	**Cena 4** Manifesta-se uma forma conceitual de definição por apresentar a definição que relaciona de forma dedutiva o singular dos objetos e o universal.	**Acrescenta-se o sentido de ser um objeto que não passou por manipulação humana às características já citadas anteriormente de que o objeto deve vir "diretamente da natureza" e que deve ser "contável".**	*"Elas colocaram lápis, só que o lápis, dona Érica, não é... Não nasce... Assim... Como... O pé de laranja. O lápis foi feito da natureza, mas ele não é da natureza, ele foi feito."* *"É da natureza, não o que é feito da natureza."*
		Elabora-se definição que considera características mais gerais quanto à definição da unidade natural.	*"Unidade natural <u>é tudo que nasce através da natureza</u> como os animais as plantas, os peixes e outras coisas. Como um animal racional importante que é o homem nasce, cresce e morre, todo tipo de animais é assim."*

6.2 Conclusões da primeira unidade didática

Podemos dizer que este conjunto de atividades serviu como desencadeador da reflexão dos alunos sobre aspectos contínuos e discretos dos objetos essenciais para a contagem, solicitando, como ponto de partida para esta reflexão, as experiências e vivências dos próprios alunos.

Desse modo, a atividade permitiu que eles elaborassem, intuitivamente, juízos sobre os aspectos envolvidos na contagem com os números naturais, reunindo aspectos de suas vivências culturais como a água, a areia, o cimento, a terra, as estrelas, os planetas, as frutas, etc. para a "percepção da organização natural em unidades" de alguns desses objetos.

Nas definições elaboradas por estes alunos observamos uma forma de definibilidade que podemos caracterizar, segundo Kopnin (1978), como um juízo, por relacionar de forma sincrética o singular dos objetos e o universal – conteúdo essencial que define a unidade natural. Nos exemplos das crianças esses juízos apresentam-se como: *"são as coisas que dem para contar"*, *"é a unidade da natureza que dá para contar"*, *"árvores, peixes, pássaros e toda coisa que é da natureza que dá para contar"*, *"são as coisas que dá para ser contada como: flor, animais, frutas, sol, peixes e pássaros"*; e destacam as características dos objetos observados com definições ainda muito ligadas à percepção e exemplificação.

Outra elaboração, apresentada pelo grupo 9, apresenta uma forma de definição de unidade natural que, embora não se caracterize como uma definição formal por não incluir todos os objetos e seres organizados em unidades, relaciona o singular dos objetos e o universal de forma dedutiva, manifestando, na visão de Kopnin (1978), uma forma conceitual de definição. A partir da proposição dos alunos: "Unidade natural é tudo que nasce através da natureza" podemos deduzir grande parte dos objetos organizados em unidades naturais.

Um processo de desenvolvimento conceitual permite a elaboração de definibilidades/juízos e conceitos sem que estes sejam as definições formais.

É evidente que não podemos afirmar que todos os alunos elaboram formas mais dedutivas como definições, mas o debate permite a manifestação das formas de pensamento sem a desvalorização de nenhuma delas. É interessante perceber que as formas de pensamento vão sendo incorporadas por outros elementos da classe, a argumentação de um é re-elaborada e complementada por outro aluno em momentos diferentes.

A relação forma e conteúdo reside em entender o tipo de grandeza que é posta em correlação entre "conjunto que conta" e "conjunto contado". Há elaboração forma e conteúdo quando percebem e argumentam que pedra não conta água, terra e areia, ou seja, não podem ser colocados em correspondência biunívoca, a não ser que se modifique seus aspectos contínuos – seu conteúdo – à semelhança da pedra – forma numérica que quantifica o aspecto discreto. A relação forma e conteúdo está também em questão na definição de unidade natural quando excluem dessa definição "a terra", "o cimento", "a água" e outros.

CAPÍTULO 7

SEGUNDA UNIDADE DIDÁTICA

7.1 A unidade artificial

Segundo Caraça (1998), um dos autores nos quais nos baseamos para obter as principais conexões do conceito de fração constantes do capítulo 4 deste estudo, outro conjunto de conexões que devem ser constituídas pelo sujeito, que elabora este conceito, se refere ao estabelecimento de um único elemento de comparação, para todas as grandezas de mesma natureza. Este único elemento denomina-se unidade de medida de dada grandeza e é ela a responsável pela quantificação dos aspectos contínuos dos objetos.

Queremos salientar, nesta unidade didática, que não se pode observar um único elemento de comparação sem propor uma discussão sobre qualidades comuns aos objetos. Segundo Caraça (1998), qualidades são relações orientadas pela situação em que as consideramos e não são intrínsecas ao próprio objeto, assim, não se constitui tarefa simples para o aluno destacar de situações cotidianas, relações de comprimento, superfície e volume a partir da observação de qualidades comuns.

Além disso, existem qualidades que admitem graus diferentes de intensidade, ou seja, admitem variação de quantidade. Sendo assim, a quantidade manifesta-se como atributo da qualidade e somente podemos analisá-la em relação a esta. É comum utilizarmos os números naturais para enumerar quantitativamente aspectos dos objetos que se apresentam organizados em unidades discretas ou contornos definidos. Por outro lado, segundo Hogben (1970), para quantificar aspectos contínuos dos objetos, ou seja, comparar diferentes dimensões, utilizamos nossa capacidade de avaliação visual.

Essa capacidade de avaliação ou sensação visual, denominada por Lima & Moisés (1998) como "senso de grandeza", só atua eficientemente na avaliação comparativa de dimensões quando a diferença entre elas for considerável. Para distinguir se um objeto é maior que outro, quando os olhos não são capazes de tal tarefa, tornando o senso de grandeza insuficiente necessitamos desenvolver um instrumento "*extracorpóreo*" – a unidade de medida – por intermédio do qual comparamos as dimensões com maior precisão. A escolha da unidade de medida pode parecer uma tarefa simples, mas como assegura CARAÇA (1998) envolve identificar grandezas de mesma espécie e exige, pela prática de contar, a observação de atributos comuns aos objetos.

Por isso, para elaborar unidades de medidas, consideramos necessário refletir sobre a variação quantitativa de qualidades e assim, julgamos fundamental ao sujeito que aprende fração, explorar a impossibilidade do senso numérico na avaliação e comparação de dimensões, a fim de articular o movimento dinâmico do conceito de unidade natural ao de unidade de medida – denominada pelo grupo de alunos como sendo a "unidade artificial".

Nessa unidade didática, a inter-relação forma e conteúdo se encontra representada pela possibilidade de transpor aspectos característicos da unidade natural para o aspecto contínuo comum àqueles não organizados em unidades naturais, de maneira tal que permita o estabelecimento de formas intuitivas de medição.

Destacamos três episódios nesta unidade didática:

EPISÓDIO 7.1 – Qualidade e quantidade

EPISÓDIO 7.2 – Definindo a grandeza

EPISÓDIO 7.3 – Percebendo o senso de grandeza

EPISÓDIO 7.1 - Qualidade e quantidade

Objetivo

Identificar a variação quantitativa de qualidades comuns na comparação de grandezas ao observar objetos em diferentes situações, tais como altura, velocidade, peso, ferocidade e volume, refletindo sobre o grau de intensidade de tais qualidades.

Descrição

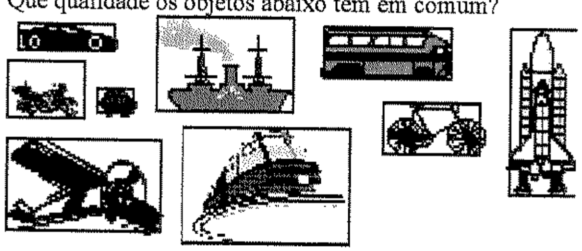
Apresentamos aos alunos as situações indicadas nas Figuras 7.1 e 7.2 e sugerimos que refletissem sobre as questões apresentadas individualmente e em pequenos grupos. Por fim estabelecemos um debate com a classe tendo por base as respostas dos grupos. A primeira questão recomenda a observação de qualidades comuns ao grupo de objetos apresentados na seqüência de quadros, a segunda questão, se refere à possibilidade de variação dessa qualidade e a terceira, indica que se pense sobre como quantificar essa qualidade. Extraímos cenas que representam destaque de momentos da discussão, no interior do grupo e no debate com a classe, apresentados a seguir.

1 2 3 4 5

Imagine uma situação em que você é técnico ou técnica do time de basquete da sua cidade e fará a escolha de dois jogadores para disputar o próximo campeonato. Os atletas acima se apresentaram e todos demonstraram grande habilidade com a bola?

Quais deles você escolheria?
Qual a qualidade que você considerou para esta escolha?
Esta qualidade varia de jogador para jogador? Como?
Como você quantifica (conta) esta qualidade?

Que qualidade os objetos abaixo têm em comum?



Esta qualidade varia?
Como você quantifica esta qualidade?

Observe os animais

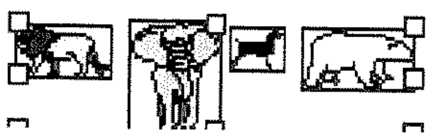
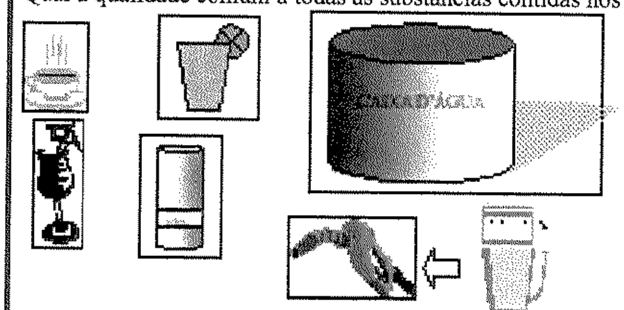


FIGURA 7.1 – Qualidade e quantidade: altura, velocidade e ferocidade

Qual a qualidade comum a esses animais que provoca medo no homem?
Esta qualidade varia?
Como o homem quantifica esta qualidade?

Qual a qualidade comum a todas as substâncias contidas nos objetos abaixo?



Como você quantifica esta qualidade?

Um avião comercial vai levantar vôo. Preparam-se para embarcar os passageiros e as suas bagagens. Você é responsável pela venda de passagens e a fiscalização das bagagens.
Qual deve ser sua preocupação para garantir que o avião decole?

Que qualidade principal você considerou?
Esta qualidade varia? Como?
Como você quantifica (conta) esta qualidade?

FIGURA 7.2 – Qualidade e quantidade: volume e peso.

Cena 1

Os alunos respondem às questões referentes à coleção de figuras de jogadores de basquete, apresentada na Figura 7.1 e, depois de reunirem-se em grupo e discutirem sobre suas respostas, apresentam-nas no painel.

QUADRO V – RESPOSTAS DOS ALUNOS REFERENTES À ALTURA DOS JOGADORES DE BASQUETE

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**	**Grupo 5**
a) O nº 1 e 5 porque são bons e autos b) Os uniformes c) Sim passando de jogador para jogador.	a) Eu escolho 1 e o 5 porque um é alto e o 5 é rápido b)Varia sim pode ter alguns melhores c) Com os números naturais.	a) Eu escolhi 1 e 2 b) Varia c) com os metros das pessoas.	a) Eu escolho o 1 e 2 porque são altos. b) Varia porque todos altos e diferentes c) Eu escolho eles porque são altos e tem habilidades com a bola.	a) Eu escolhi o 1 e o 2 b) A altura c) Sim porque os jogadores não são todos do mesmo tamanho.
Grupo 6	**Grupo 7**	**Grupo 8**	**Grupo 9**	**Grupo 10**
a) A altura b) Varia, porque cada um tem sua altura. c) Dá para se contar com uma fita de medir.	a) O 1 e o 2 b) Altura c) Varia porque cada um tem a sua altura uma diferente do outro d)Sim porque com um metro dá para medir a altura de cada um.	a) O 1 e o 2. b) O tamanho c) Sim, porque para jogar basquete tem que ter tamanho. d) Com os metros das pessoas.	a) O 1 e o 5 b) Rápido c) Sim. d) Por minuto.	a) A qualidade é que o 1 e o 2 é alto. b) Porque nem todos jogadores é gordo e magro. c) [incompreen-sível]

Análise

No quadro apresentado nesta cena, podemos notar que embora todos os grupo identifiquem um elemento único na comparação dos jogadores de basquete, distinguimos duas formas diferentes de interpretar a qualidade dos jogadores. Em uma, a qualidade que é isolada não admite variação quantitativa, é o caso da qualidade comum destacada pelo grupo um, "os uniformes". Caraça (1998) aponta que a variação de quantidade é observada tomando-se, convenientemente, uma qualidade ou *termo de comparação único* como *unidade* e a medição se faz comparando cada qualidade com aquela que se tomou como unidade. O uniforme é perceptivelmente uma qualidade comum dos jogadores, entretanto não varia quantitativamente de jogador para jogador, pois todos vestem um uniforme.

Noutra interpretação os alunos isolam qualidades que permitem graus diferentes de intensidade, é o caso dos demais grupos que identificam a altura, com a expressão "alto" e "tamanho", a velocidade, com a expressão "rápido" e o peso, com a expressão "gordo" e "magro". Quando identificam as qualidades comuns que variam quantitativamente, destacam os instrumentos ou unidades de medida de certa forma coerentes com a qualidade destacada, *fitas de medir e metros* são usados para medir altura ou *tamanho* e minutos, quando colocados em relação à distância percorrida, realmente medem a velocidade. Podemos interpretar que o aspecto discreto guia o processo de separação do aspecto contínuo em unidades de medida, ou seja, as elaborações dos alunos podem significar que o conteúdo discreto que inspirou a forma numérica – número natural – usada para a quantificação de aspectos discretos, vai orientar modificações no conteúdo contínuo.

Nota-se porém que o grupo dois vai além da identificação da unidade de medida. Ao destacar os *números naturais* como resposta à questão: como você quantifica (conta) esta qualidade, este grupo estende o processo de medição e aponta como resposta o resultado numérico da comparação da unidade de medida com a qualidade a ser quantificada. Nesta elaboração a inter-relação forma e conteúdo sugerida pela elaboração anterior parece manifestar-se com projeção uma vez que evidencia o processo de separação do aspecto contínuo em unidades de medida, que de maneira semelhante às unidades naturais, precisam ser traduzidas numericamente por meio da única ferramenta numérica de seu domínio, o número natural.

Cena 2

Depois de discutirem as respostas do painel dos jogadores de basquete, os alunos Herb, Die, Leô e Eds, discutem qual resposta representará o grupo no painel sobre a segunda coleção apresentada na Figura 7.1.

Prof: O que o Die falou?
Leô: Ele falou que a velocidade desses aqui são tudo veloz, mas a tartaruga não.
Prof: Mas o que todos eles têm em comum?
Leô: Tirando a tartaruga, é a velocidade.
Herb: Velocidade, tirando a tartaruga.
Prof: A tartaruga não tem velocidade.

Die e Herb: Não.
Herb: Ela devia estar aqui [aponta para o exercício sobre ferocidade].
Respondem afirmativamente e Prof pergunta: Ela não tem velocidade nenhuma?
Herb: Não, mas ela anda muito devagar e ela não tem velocidade.
Prof: Qual é a velocidade dela, então?
Herb: Ela anda bem devagarzinho.
Prof: Ela tem velocidade, ou não tem?
Herb: Eu acho que ela tem senão ela não conseguiria andar.
Die: É.

Análise

Nesta cena, embora os alunos identifiquem a qualidade comum no início desse diálogo, nota-se a dificuldade em admitir graus diferentes de intensidade. Andar devagar não parece constituir uma velocidade por apresentar um grau de intensidade quase nulo. A quantidade como atributo da qualidade, segundo CARAÇA (1998) admite variação que, por vezes, pode ser traduzível em números, isto vai depender do grau de conhecimento que se tem sobre a qualidade em questão. Velocidade é uma qualidade que, sem dúvida, pode ser traduzida em números, no entanto, ao expressar a dificuldade em admitir a variação quantitativa da velocidade, em situações de velocidades muito baixas, parece que a tradução numérica dessa variação não é tão evidente para eles. O aluno se fixa na variação quantitativa em si, velocidade está ligada a um número, como este é quase nulo para a tartaruga, ele exclui, num primeiro momento, da categoria "ter velocidade".

Quanto à inter-relação forma e conteúdo estabelecida pelas crianças nesta cena prevalece, no primeiro momento, a forma numérica, quase zero, sobre o conteúdo, indicado como sendo o elemento perceptivo da velocidade, ou seja, a mudança de posição no espaço – aspecto contínuo. No segundo momento, Herb parece estabelecer a inter-relação forma numérica e conteúdo, ao argumentar que a tartaruga, mesmo andando "*bem devagarzinho*" também desenvolve uma velocidade. Herb discorda de Leô e Die e convence o grupo de que a tartaruga tem uma velocidade, caso contrário não conseguiria andar.

Apresentamos o quadro a seguir contendo a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO VI – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 7.1

		Elaborações analisadas	
Episódio 7.1 **Qualidade e quantidade**	**Cena 1** Identificam-se qualidades comuns ao comparar as figuras de jogadores e a variação quantitativa dessas qualidades	**A qualidade que é isolada não admite variação quantitativa.**	*"os uniformes"*
		As qualidades identificadas permitem diferentes graus de intensidade.	*"Varia, porque cada um tem sua altura (...) dá para se contar com uma fita de medir".* *"Varia porque cada um tem a sua altura uma diferente do outro (...) com um metro dá para medir a altura de cada um".*
	Cena 2 Percepção de graus diferentes de intensidade de dada qualidade.	**Dificuldade em admitir graus diferentes de intensidade, andar devagar não parece constituir uma velocidade por apresentar um grau de intensidade quase nulo.**	*"Ele falou que a velocidade desses aqui são tudo veloz, mas a tartaruga não. "* *"A tartaruga não tem velocidade".*
		Prevalece a percepção do conteúdo – velocidade como mudança de posição no espaço – aspecto contínuo e a validação de grau baixo de intensidade para a velocidade.	*"Não, mas ela anda muito devagar e ela não tem velocidade".* *"Eu acho que ela tem senão ela não conseguiria andar".*

EPISÓDIO 7.2 - Definindo a grandeza

Objetivo

Elaborar uma definição geral para grandeza, partindo dos aspectos de variação quantitativa de qualidades comuns aos objetos discutidos em situações anteriores tais como altura, peso, velocidades, entre outros.

Descrição

Os alunos responderam duas questões apresentadas na Figura 7.4, elaborando suas respostas individualmente e em pequenos grupos. Finalmente organizamos um painel com as respostas dos grupos que foram debatidas pela classe. Dos momentos de discussão, em pequenos grupos e com a classe, destacamos as cenas 1, 2 e 3.

Nome: ________________________________

A GRANDEZA

1. Escreva se concorda ou não com as afirmações abaixo e justifique sua resposta:
   a) Toda qualidade possui uma quantidade.
   ____
   ____
   b) Toda quantidade tem uma variação.
   ____
   ____
   c) Cada variação é uma grandeza desta quantidade.
   ____
   ____
2. Escreva o que você entende por grandeza.
____
____

Fig. 7.4 – Definindo a grandeza

Cena 1

Os alunos Herb/Eds/Die/Regi/Samu/Argi estão discutindo qual resposta representará o grupo no painel. Cada um está lendo sua resposta. Quatro delas coincidem em que toda qualidade tem quantidade e a do Eds não. Para ele nem tudo tem quantidade:

Eds: Por exemplo, o mar, ninguém sabe a quantidade do mar todo.
Samu: [incompreensível]
Eds: E também ninguém sabe quantas estrelas tem no céu.
Die: Nem os grãos de areia.
Eds: É ninguém sabe...
Prof: Mas é possível saber quanto tem de areia se eu pegar um tanto de areia?
Eds: Depende...
Herb: Tem sim.
Prof: A qualidade areia tem uma quantidade?
Eds: Faz gesto afirmativo.
Herb: Em geral Professora?
Eds: Em geral não tem quantidade não.
Herb: É em geral não dá pra contar, porque tem muita areia.
Prof: Mas se eu pegar um tanto de areia, eu não sei quanto tem?

Herb: Não.
Eds: Depende né, se pegar assim [incompreensível] a pessoa, às vezes, compra mais um metro de areia... Então...
Prof: Então tem quantidade de areia. Você não compra um metro de areia?
Herb: Compra.
Prof: Se você precisar de mais areia, você vai e pode comprar quanto?
Herb: Dois metros.

Análise

Nesta cena as crianças parecem manifestar que a expressão "quantidade" está estritamente relacionada à possibilidade de atribuir, um número, ao todo da qualidade considerada pela contagem natural, acrescentando mais um de modo finito à quantidade já contada e, se este movimento não for possível, a qualidade, embora considerada considerável "*tem muita areia*", não possui quantidade.

Depois de explicitada a posição de Eds, pela professora, este aluno explica aos demais porque não concorda que toda qualidade tem quantidade, revelando uma interpretação de que quantidade significa, antes de tudo, conhecer a quantidade do "todo" daquela qualidade – Eds: "Por exemplo, o mar, ninguém sabe a quantidade do mar todo", "E também ninguém sabe quantas estrelas tem no céu". Nesta fala nos parece que há uma necessidade de poder recorrer a um elemento perceptivo que chamamos de forma, onde começa e acaba o todo da qualidade em questão, para poder considerar que essa qualidade tem quantidade.

A intervenção da professora teve o propósito de possibilitar aos alunos a percepção de que a impossibilidade de contagem da totalidade exige do observador o destaque de um conjunto de objetos perceptíveis que poderiam ser quantificados. Esta noção é denominada por Caraça (1998) de isolado. A noção de isolado é interpretada nesta cena como a necessidade de estabelecer um destaque que possibilite a contagem/quantificação do conteúdo – qualidade de aspecto contínuo. Tal quantificação se dá por meio do estabelecimento de separações que permitam que esta se realize de modo análogo à contagem do aspecto discreto dos objetos.

Observa-se que a incerteza sobre a possibilidade de quantificação das qualidades que a princípio foi levantada por Eds, ao final do episódio passa a ser de Herb. Este aluno considera a elaboração de Eds e hesita quanto à quantificação da totalidade de areia. A intervenção para a noção de isolado ocorre com os dois alunos e é Eds agora que não concorda com a resposta negativa de Herb para a variação de um isolado de areia, apresentando que *"depende né, se pegar* *assim (incompreensível) a pessoa, às vezes, compra mais um metro de areia... Então...".* É possível perceber que para estes alunos a quantidade está relacionada a um número imediato e não a uma relação de variação de intensidade de uma mesma qualidade.

Cena 2

O grupo 4 discute sobre a afirmação "toda qualidade possui quantidade". A professora pergunta se concordam ou não com a afirmação. Cari afirma que não é toda qualidade que possui uma quantidade, porque ferocidade e vento não têm quantidade para ela, Leô e Ever.

Prof: O vento não tem quantidade?
Ever: Não.
Prof: Eu não posso dizer que um dia tem mais vento?
Cari: Ah! Aí pode.
Ever: Aí pode, mas contar não.
Leô: Variar varia, mas contar, assim... Não.
Ever: Variar varia, mas contar não.
Cari: Que nem ..., deixa eu dar um exemplo: a gente pega o vento e coloca num vidro, não vai dar pra saber se um vidro tem mais que o outro não. Não dá pra saber.
Ever: [incompreensível] não vai vê o vento!
Leô: Por exemplo, um jornal, vai lá tá 21 graus e depois, no outro dia, vai tá 24 graus, mas só que eles, tem uma variação, mas só que não dá de contar.
Prof: Como é que eu posso saber que um dia tem mais vento que outro?
Leô: Por exemplo, você viu na televisão que ta com 21 graus o tempo, aí você viu, aí vai... Hoje o tempo pode aumentar, vai passando para 24, pra 25, o tempo vai aumentando, vai aumentando, aí a gente vê que... Não sei como falar que...
Cari: Que nem a temperatura, dá pra gente medir com o termômetro, mas temperatura nunca, nunca casa né? Que nem passa no "jornal nacional", um exemplo, que hoje ia ter 25 graus, mas a gente faz de conta que é 20 e 10 graus, então, às vezes a meteorologia não alcança.

Análise

Este grupo manifesta a impossibilidade de atribuir quantidade às qualidades para as quais não admite grau de variação como a "ferocidade", "vento". A fala inicial de Cari para a afirmação "toda qualidade possui uma quantidade" explicita sua objeção quando demonstra que esta afirmação não esgota todos os casos *"... o queijo tem quantidade, mas a ferocidade não, não se modifica...".* Ever acrescenta o *vento* como qualidade que não possui quantidade e o grupo reconhece que mesmo permitindo variação de quantidade não é possível contá-lo. Para poder contar o vento recorrem à percepção visual, dando-lhe uma forma: Cari *"... a gente pega o vento e coloca num vidro, vão vai dar pra saber se um vidro tem mais que o outro. Não dá pra saber"* e Ever *"...não vai vê o vento!".* Na expressão destes alunos interpretamos a tentativa de estabelecer a relação forma e conteúdo. Colocar o vento no recipiente de vidro permite imprimir-lhe temporariamente um conteúdo – de aspecto discreto – que permite sua contagem, ou seja, a correspondência biunívoca entre algo no recipiente e os números, entretanto o fato de não ser possível "ver" o vento elimina o estabelecimento desta relação, impedindo a contagem.

Essa argumentação denota que a quantidade como atributo da qualidade deve estar diretamente relacionada à possibilidade de sua percepção visual, dada pelo estabelecimento de um aspecto discreto, mas não somente a esta. A exatidão dessa variação também é elemento importante. Isto é observado principalmente nas argumentações de Cari e de Leô "*Por exemplo, um jornal, vai lá tá 21 graus e depois, no outro dia, vai tá 24 graus, mas só que eles, tem uma variação, mas só que não dá de contar*". Estes alunos manifestam em suas falas que embora se possa traduzir em números – medir – a temperatura, a falta de precisão desta medição nos boletins de meteorologia a caracteriza como uma qualidade que não tem quantidade mesmo tendo variação.

Na verdade este ponto de vista é compartilhado por vários outros grupos em outros momentos de discussões e mostra a dificuldade dos alunos em considerar a existência de variações quantitativas, quando não se possuem meios precisos de traduzir esta variação em números, um deles consiste na consideração da forma visual, isto é, a separação do aspecto contínuo da qualidade considerada. Esta precisão pode ser interpretada como a inexistência de uma *separação* da qualidade perceptível para as crianças, ou seja, que lhes permita "estabelecer" a correspondência biunívoca entre número e o elemento a ser contado.

Cena 3

Quadro de respostas a seguir foi elaborado após as discussões em grupo.

QUADRO VII – RESPOSTAS À ATIVIDADE : DEFININDO GRANDEZA[1].

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
1) ❖ Sim, porque cada um tem sua forma e seu tamanho. ❖ Sim, porque temos que saber a variação das coisas. ❖ Sim, porque qualquer coisa tem que ter sua grandeza. 2) É uma coisa grande, maior.	1) a) Sim porque cada um tem sua quantidade certa. b) "Sim, porque o peso pode variar. c) Sim porque tem a variação que é a grandeza. 2) Eu entendi que cada quantidade e qualidade e variação é uma coisa muito rica.	1) a) Não, porque tem qualidade que possui quantidade, como o peso, e outra qualidade como feroz que não tem quantidade. b) Sim, como o peso porque algumas pessoas mais e outras menos. c) [Não responderam] 2) Grandeza vem da qualidade de grande.	1) a) Não, porque o vento não tem quantidade. b) Sim, o vento tem variação, às vezes venta mais e às vezes não venta. c) Sim, porque cada grandeza tem sua variação e quantidade ex.: ovelhas, umas são pretas e possuem em mais lã que as outras. 2) Grandeza são coisas, grandes, boas e em muitas unidades.	1) a) Possui, por exemplo, a altura e dá pra saber com uma fita métrica. b) Sim, tem umas pessoas que são altas e outras são baixas. c) [incompre-ensível] 2) Para mim, grandeza é importante para o homem e para a natureza. É importante para todos nós.	1) a) Não, porque nem tudo dá pra se contar. b) Nem todas, porque se eu tenho um monte de amigos na escola eu não acho que eu gosto de um mais que do outro, todos são iguais. c) Sim, porque se tem um jogador de basquete ele é grande e isto varia é a grandeza deste jogador. 2) Eu entendi que grandeza é uma coisa que a pessoa faz melhor.
Herb, Die, Eds, Argi, Regi, Samu.	Kel, Bru(a), Patri, Prisci, Apau	Pame, Joy, Dama, Sola, Jaque.	Cari,Ever, Leô, Acarol, Hele, Luci	Tali,Cami, Rafa, Jana.	Iva, Iv, Thia, Char, Bru, Viní..

Análise

A atividade proposta buscava o pensamento que generaliza uma definição – mesmo que aproximada – para a grandeza, propondo afirmações sobre a variação quantitativa de qualidades comuns. Na análise do quadro, a cada afirmação, percebe-se a preocupação dos alunos em dar exemplos como justificativas. Isso mostra que embora os alunos evidenciem que a grandeza está relacionada à intensidade de dada qualidade ao expressarem *"É uma coisa grande,*

[1]Questão 1 - Escreva se concorda ou não com as afirmações abaixo e justifique sua resposta: a) Toda qualidade possui uma quantidade; b) Toda quantidade tem uma variação e c) Cada variação é uma grandeza desta quantidade. Questão 2 - Escreva o que você entende por grandeza.

maior", "Grandeza vem da qualidade de grande", "Grandeza são coisas, grandes, boas e em muitas unidades."e"(...)grandeza é uma coisa que a pessoa faz melhor"; o movimento do pensamento não encontra uma relação de dedução entre as singularidades - qualidades dos objetos destacadas por eles em atividades anteriores como: tamanho, altura e peso, e o universal "toda qualidade possui quantidade".

O exercício trabalhou a idéia de que toda qualidade tem quantidade e que a quantidade se refere à grandeza, contudo podemos interpretar que os alunos relacionam a noção intuitiva de grandeza ao significado da palavra grande, mostrando que a atividade realizada não permitiu que as crianças se aproximassem, nem com suas palavras, de uma definição para grandeza. De fato esta experiência mostra bem que a aquisição de uma forma de ação ou definição mais geral constitui um aspecto importante da resolução de um problema de aprendizagem.

Confrontando esta proposta de atividade com as análises de Davýdov (1982) sobre a formação de conceitos, é possível elucidar que a proposta de definir grandeza perseguiu um modelo de pensamento que satisfaz a generalização de conceitos segundo os pressupostos da lógica formal, característicos da Psicologia e Didática tradicionais. Nele se deve efetuar o notável procedimento lógico, mediante o qual se efetua a transição mental do singular para o geral (*Cf.* DAVÝDOV, 1982, p. 47). Tal procedimento lógico exige que se separe, nos objetos, os indícios mais importantes, indispensáveis para distinguir o objeto dado dos demais, conduzindo a uma forma singular de pensamento:o conceito.

Este enfoque do conceito traz em sua essência o seguinte esquema formativo "percepção – representação – conceito", no qual se consubstanciam as situações de: primeiro, distinguir uma classe de objetos dos demais – altura, peso etc; segundo, a expressão verbal do significado – variação quantitativa; e terceiro, este significado não está necessariamente relacionado com a presença de imagens diretas e pode ter um caráter estritamente abstrato – definição. De modo que na concepção da Psicologia e Didática tradicionais, fundamentada em pressupostos lógico-formais, a transição da percepção ao conceito através da representação equivale à transição do sensorial, concreto e singular ao mental, abstrato e geral, procedimento este que corresponde ao modelo empírico, entendido como aquele que se apóia nas evidências sensoriais dos objetos, não revelando tais evidências como base/apoio do pensamento e passando diretamente para uma ótica exterior aos objetos – o formalmente geral.

Assim, confluindo a análise de Davýdov (1982) com os estudos de Garnier (1996), podemos interpretar que a atividade de definir grandeza passou diretamente para a ótica exterior e geral de definição e deste modo, propôs um problema, cuja resolução não possibilitou aos alunos transformar suas ações concretas, relativas a uma determinada classe de situações – identificar a qualidade comum e a variação quantitativa referente a altura, peso, etc – em uma referência/modo de ação básicos ou um novo modo de entendimento da situação, que lhe possibilitasse orientações que integram suas ações no interior de um sistema de situações que o cerca. Sendo assim também não foi possível estabelecer uma certa relação mais geral do que é grandeza, caracterizada por um princípio ao qual se corresponde a situação, deduzindo-se uma característica ou estado concreto dessa situação (KOPNIN, 1978).

Apresentamos o quadro a seguir contendo a síntese do movimento de elaboração deste episódio.

QUADRO VIII – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 7.2

		Elaborações analisadas	
Episódio 7.2 **Definindo a grandeza**	**Cena 1** Refletir sobre aspectos de variação quantitativa de qualidades comuns, discutidos anteriormente e elaborar uma definição geral para grandeza.	**Manifesta-se o entendimento da quantidade relacionada à possibilidade de atribuir um valor numérico ao todo desta qualidade, caso contrário, não possui quantidade.**	*"E também ninguém sabe quantas estrelas tem no céu".* *"Por exemplo, o mar, ninguém sabe a quantidade do mar todo".* *"É em geral não dá pra contar, porque tem muita areia".*
	Cena 2 Refletir sobre aspectos de variação quantitativa de qualidades comuns, discutidos anteriormen-te e elaborar uma definição geral para grandeza.	**Manifesta-se a impossibilidade de atribuir quantidade às qualidades para as quais não se admite grau de variação.**	*"Não é toda qualidade que possui uma quantidade, porque ferocidade não têm quantidade".* *"o vento não [tem quantidade]."*
		Admite-se a existência de qualidades cujo grau de variação não é identificado numericamente.	*"Variar varia, mas contar não".* *"(...) um exemplo: a gente pega o vento e coloca num vidro, não vai dar pra saber se um vidro tem mais que o outro não. Não dá pra saber".*
		Manifesta-se que a falta de precisão da medida de temperatura a caracteriza como uma qualidade que não tem quantidade mesmo tendo variação.	*"(...) tá 21 graus e depois, no outro dia, vai tá 24 graus, mas só que eles, tem uma variação, mas só que não dá de contar".* *"Que nem a temperatura, dá pra gente medir com o termômetro, mas temperatura nunca, nunca casa né? (...), um exemplo, que hoje ia ter 25 graus, mas a gente faz de conta que é 20 e 10 graus, então, às vezes a meteorologia não alcança."*
	Cena 3 Quadro com as elaborações em relação à definição geral para grandeza.	**Relaciona-se grandeza com a intensidade da qualidade, mas as elaborações não relacionam dedutivamente as singularidades - qualidades destacadas, tais como: tamanho, altura e peso e o universal "toda qualidade possui quantidade".**	*"É uma coisa grande, maior"* *"Grandeza vem da qualidade de grande"* *"Grandeza são coisas, grandes, boas e em muitas unidades."* *"(...)grandeza é uma coisa que a pessoa faz melhor."*

EPISÓDIO 7.3 - Percebendo o senso de grandeza

Objetivos

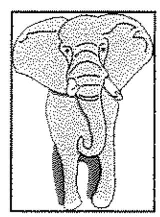
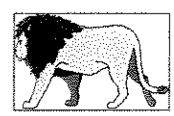
Identificar a insuficiência da capacidade de avaliação visual na comparação de dimensões.

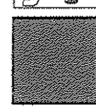
Criar solução para esse problema, desenvolvendo a unidade de medida de mesma espécie para compará-la às dimensões apresentadas, a fim de estabelecer uma reflexão que inter-relacione a geometria e a aritmética.

Descrição

A atividade conta com dois momentos distintos. No primeiro, sugerimos aos alunos as questões apresentadas logo abaixo, nas quais pode-se utilizar, satisfatoriamente, o senso de grandeza na comparação dos seres/objetos.

1) *Qual dos dois é maior?*
   No que ele é maior que o outro?

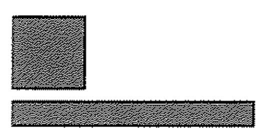
2) *Qual dos dois é maior?*
   No que ele é maior que o outro? *a)*  *b)* 

3) *Qual dos dois é maior?*
   No que ele é maior que o outro? *a)* ______ *b)* ____________

No segundo momento, sugerimos aos alunos refletirem sobre outras situações, apresentadas a seguir. Nelas o senso de grandeza é insuficiente para a diferenciação das dimensões dos objetos.

Utilizando o senso de grandeza indique:

1) *Qual dos dois é maior?*
   No que ele é maior?



2) *Dos recipientes diferentes trazidos para esta atividade, qual deles é maior? Qual a qualidade que consideramos quando vamos compará-los?*

Em seguida, os alunos refletiram sobre estas situações individualmente, em pequenos grupos e finalmente, debatem sobre suas respostas. Destacamos cenas das discussões em grupo e do debate final. A cena 1 representa destaque do primeiro momento da atividade no qual o senso de grandeza era suficiente para comparar as dimensões. As demais cenas são representativas do segundo momento da atividade, no qual o senso de grandeza não era suficiente para avaliar as dimensões dos objetos quanto ao grau de intensidade.

Cena 1

Debate com a classe sobre uma situação em que os alunos comparam a figura do leão e do elefante.

Marc: Altura!
Patri: [incompreensível] um é maior que o outro.
Bru(a): Porque o leão mede maior que o gato né?
Marc: Dá pra vê na altura.
Prof: Fala Jaque.
Jaque: Ela já respondeu.
Iva: Dona Érica, ó o elefante é maior de tamanho, de altura né? Só que o leão também é maior na ferocidade.
Prof: Foi difícil escolher entre o leão e o elefante na ferocidade?
Prisci, Jaque e Cari: Não.
Prof: Mas, por que não foi difícil?
Cari: Ah dona Érica, é só olhar a altura [incompreensível].
Prof: O que foi preciso fazer para saber qual era o maior?
Cari: É só olhar, só precisa olhar, mas a ferocidade... Aí não sei.
Prisci e outro aluno: O leão.
Bru: Eu escolhi o elefante porque ele é o maior e tem presas maiores também.
Ever: Eu acho que cada um escolheu uma qualidade porque os dois têm. O elefante é maior de tamanho e o leão, de ferocidade. Por causa que você vai perguntar pra pessoa, qual é o maior? E ela vai perguntar em quê?
Prof: Mas foi difícil identificar, mesmo que seja em uma ou em outra qualidade?
Ever: Não.

Análise

Notamos duas elaborações diferentes nesta cena. A primeira é observada quando os alunos manifestam a possibilidade de se valer do visualmente observável na comparação da intensidade de qualidades. Eles estabelecem juízo de ser maior ou menor em relação a outro objeto e justificam expressando *"Dá pra vê na altura"* e *"Ah dona Érica, é só olhar a altura [incompreensível]"*. De fato, em determinadas situações, conforme aponta Hogben (1970), a percepção visual é suficiente para uma avaliação comparativa de intensidades. Mas não são em todas as situações que isto é possível. A aluna Cari ao expressar *"É só olhar, só precisa olhar, mas a ferocidade... Aí não sei"* evidencia que a ferocidade é uma qualidade em que a percepção visual não é suficiente na avaliação do grau de intensidade.

A segunda elaboração é observada na manifestação de dúvida sobre a definição do animal maior, visto que numa ocasião, concordam que é o elefante e expressam: *"Porque o leão mede maior que o gato né?"* ou *"Eu escolhi o elefante porque ele é o maior e tem presas maiores também"*; e em outra ocasião, concordam que é o leão e expressam: *"... O elefante é maior de tamanho e o leão, de ferocidade. Por causa que você vai perguntar pra pessoa, qual é o maior? E ela vai perguntar em quê?"* e *"... Só que o leão também é maior na ferocidade"*. Em nossa interpretação, a manifestação desta dúvida representa a observação de uma das duas características fundamentais destacadas por Caraça (1998), a *interdependência de todas as coisas no Mundo*. Para este autor a realidade, cujo principal esforço humano encontra-se em entendê-la, apresenta-se por duas características essenciais: a *interdependência e a fluência* (Cf. CARAÇA, 1998, p. 103). A *interdependência* é a característica que se refere à correlação de todas as coisas umas com as outras e a *fluência* refere-se à permanente evolução que o mundo se encontra, isto é, tudo, a todo o momento, se transforma. Sendo assim, fixar nossa atenção numa única qualidade do objeto é um empreendimento difícil, conforme assegura este autor: *"... a interdependência e fluência – nos colocam sérios embaraços ao pretendermos empreender o estudo de qualquer facto natural"* (CARAÇA, 1998, p.105).

Quando manifestam a dúvida sobre a definição do animal maior estes alunos enfrentam o embaraço da interdependência de todas as coisas. A qualidade não pode ser identificada e comparada sem que se estabeleça o isolado. Quando tomam isoladamente a altura e a ferocidade, recortando-as do conjunto de outras relações entre estes animais, pode-se manifestar o juízo ser maior, sendo que, no caso da altura, podem fazê-lo apenas usando a visada. Ainda que não se estabeleça um instrumento de medida nestas elaborações, separar qual isolado se refere ao juízo – ser maior, exige um cuidadoso exame, por parte dos alunos, a fim de identificar o conteúdo contínuo do objeto em jogo na comparação.

Esclarecemos, com base em Caraça (1998), que uma vez tomado um isolado para estudo, certamente um fator inesperado que estava ignorado passa a se revelar. Este fator conduz para o estudo de outras relações mais abrangentes do objeto. Quer dizer que cada vez se destacam níveis mais largos de isolado que constantemente se encadeiam e abrangem os isolados anteriores. Caraça apresenta como exemplo o seguinte,

> Após ter tomado como isolado cada um dos órgãos duma árvore e estudado a sua fisiologia particular, constitui-se um isolado superior – árvore terreno – no qual se estudará a vida fisiológica da árvore. Por sua vez, a árvore pode ser tomada como uma unidade dum novo isolado mais largo – uma floresta. – a flora duma certa região, etc. Quer dizer, para a recomposição dum certo compartimento da Realidade, é necessário constantemente construir cadeias, e a cada elo da cadeia corresponde um nível de isolado (CARAÇA, 1998, p.106).

Na apreensão da grandeza podemos supor que isso não ocorre de maneira diferente. A percepção sensitiva da intensidade de dada qualidade constitui, a princípio, apenas um senso de grandeza, conforme aponta Lima & Moisés (1998). Vale destacar que o senso de grandeza só pode ser suficiente na tarefa, porque a situação de comparação de graus de intensidade apresentada não exige elementos mais específicos de medição para a definição do grau de intensidade. Mas a atuação limitada do senso de grandeza na comparação do grau de intensidade de dadas qualidades, ou seja, estabelecer comparações usando apenas os sentidos, solicita o desenvolvimento de instrumentos *extracorpóreos*, neste caso a unidade de medida. A unidade de medida, segundo Hogben (1970), exerce a mesma função dos sentidos no senso de grandeza, procura restabelecer a comparação das dimensões, permitindo a identificação do maior.

Cena 2

Esta cena representa a discussão do grupo formado pelos alunos Herb/Die/Eds/Argi, na situação de comparar os recipientes de tamanhos diferentes. O grupo está organizando os recipientes por ordem de altura... A professora pergunta qual recipiente é o maior.

Herb: Esse é o primeiro [mostra o recipiente mais alto] e esse é o segundo maior que o primeiro.

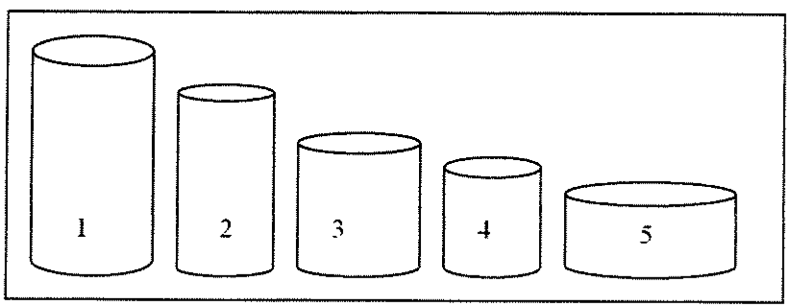


FIGURA 7.5 – Representação dos recipientes.

Prof: É o maior porque cabe mais?
Herb: Ah! Então é esse. [aponta para o recipiente 5]
Die e Eds: É esse. [mostram o recipiente 1]
Herb: É esse. [volta a mostrar o recipiente 1, mas demonstra dúvida ainda, olha para o recipiente 5]
Herb fala para Die: Só que esse também cabe alguma coisa [mostra um recipiente 4]
Eds: É esse daqui ó, é a margarina que é maior. [mostra também o recipiente 5]

Die: [Incompreensível] [enquanto fala com Herb, coloca em comparação as alturas do quarto e do primeiro recipiente]
Herb muda de idéia: Esse é o maior [mostra o 1]. Dona Érica esse daqui é o maior, esse aqui é o segundo. [volta-se para o Die e pergunta:] ou é esse? [mostra o recipiente que está em terceiro lugar]
Die: É esse [mostra o segundo recipiente].
Herb continua: terceiro, quarto, quinto, (incompreensível). Esse aqui é maior [volta a mostrar o recipiente 5].
Die: Não é, ó. [muda a posição do recipiente de margarina – conforme FIG. 7.6 – para poder compará-lo com o recipiente que está em quarto lugar, em seguida, concorda com Herb e troca os recipientes de lugar]

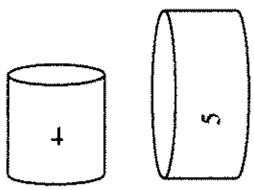


FIGURA 7.6 – Comparação dos recipientes.

Herb mostra a seqüência finalmente organizada.
Die volta a comparar novamente os dois últimos recipientes.

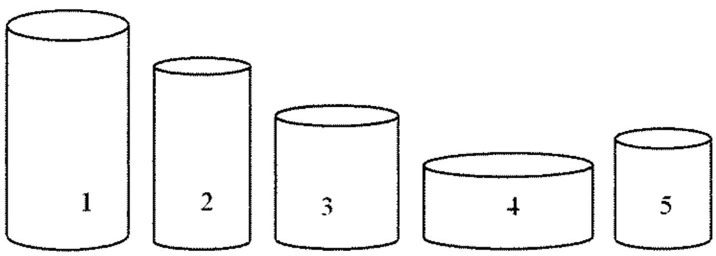


FIGURA 7.7 – Organização final dos recipientes.

Análise

Analisando esta cena notamos que, em função da insuficiência do senso de grandeza na determinação de graus de intensidade muito próximos, os alunos enfrentam a difícil tarefa de abarcar a totalidade de dimensões envolvidas na comparação do grau de intensidade do volume dos recipientes e, assim, isolam a altura.

Nesta elaboração a qualidade altura, primeiramente, permite a comparação dos recipientes. Os alunos a utilizam na comparação direta entre os recipientes, colocando-os lado a lado; porém, quando tomam somente a altura como *isolado* para o estudo do tamanho dos recipientes, estes alunos não compreendem, neste recorte, todos os fatores que influenciam no fenômeno: medida de capacidade.

No caso do estudo da fração, o isolado de uma qualidade comum, representará futuramente a escolha da unidade de medida. Assim, isolando apenas a altura, recortada arbitrariamente do conjunto de outras relações essenciais à comparação de volumes, neste caso: largura e comprimento, percebe-se o surgimento de um fator relevante, anteriormente ignorado: recipientes baixos parecem ser maiores, pois que são também largos e compridos. Por esta razão os alunos Herb e Die apresentam constantes dúvidas e hesitações no momento da organização dos recipientes. As situações em que ser maior em altura não significava ser o maior em volume causou confusão quanto ao estabelecimento de um juízo de ser maior na comparação.

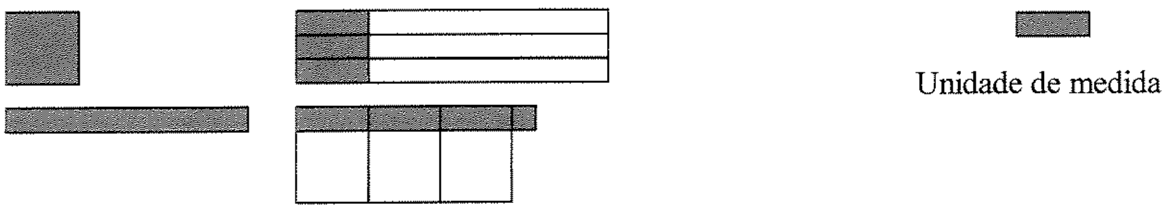
Ao observarmos as manifestações desses alunos percebemos que isolar um aspecto comum dos objetos – recipientes – constitui apreender o conteúdo contínuo que permite uma forma de quantificação – o juízo ser maior. Identificar qual isolado constituirá a unidade de medida, de maneira que atenda a atributos comuns, não é tarefa tão simples uma vez que os alunos hesitam e trocam os recipientes de lugar algumas vezes diante do encontro do *inesperado* nesta comparação.

O encontro do *inesperado* é explicado por Caraça (1998) como o fato comum de revelarem-se fatores que inicialmente estavam ignorados no estabelecimento de isolados e, segundo este autor, "*no aparecimento do inesperado reside um dos motivos principais do progresso no conhecimento da realidade, porque, obrigando a uma melhor determinação do isolado, exige um mais cuidadoso exame das condições iniciais*" (CARAÇA, 1998, p.106).

A intervenção dos alunos no aspecto contínuo – volume – dos recipientes ficou prejudicada pelo destaque de um isolado inconveniente – a altura – para a determinação do maior em volume. Intuitivamente suas ações – provocar rotações no recipiente cinco para compará-lo ao quatro – permitiram formas de medir esse aspecto contínuo a fim de poder estabelecer mais adequadamente um juízo de intensidade.

Diversamente, quando trabalharam na primeira questão desta atividade, aquela que se refere à determinação da maior superfície, colocando em comparação o quadrado e o retângulo, para os alunos foi possível intervir no aspecto contínuo – conteúdo, subdividindo a superfície. Encontraram intuitivamente *formas* – unidades de medida – que auxiliaram na comparação das superfícies para determinação da maior. Os alunos Char e Eds apresentaram para a classe, conforme exemplificamos a seguir, um procedimento que destaca um isolado de mesma espécie –

superfície – da grandeza comparada, permitindo assim uma comparação mais precisa. Quando a visão não é suficientemente capaz de avaliar a diferença de intensidade de grandezas, criam-se extracorpóreos – unidades de medida – para substituir o senso, insuficiente na tarefa de diferenciar quantidades. A unidade de medida foi isolada pelos alunos tomando-se, concomitantemente, a medida do lado que representa o comprimento do quadrado, para estabelecer comparação com o comprimento da tira retangular, e a medida da altura da tira, para estabelecer comparação com a altura do quadrado.



Mesmo após o debate em torno desta primeira questão, sobre superfícies, os alunos deste grupo não identificam uma unidade de medida que seja eficiente para comparar o volume dos recipientes, talvez por não se tratar de grandeza de mesma espécie. Segundo Caraça (1998), o processo de medição, requer que a unidade de medida seja de mesma natureza – *da mesma espécie* – da grandeza que queremos medir e isto envolve determinar uma qualidade comum, isto é, *"um isolado que compreenda nele todos os fatores dominantes cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenómeno a estudar"* (CARAÇA,1998, p.105).

A determinação dessa qualidade comum exige, de acordo com Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988), conhecimentos de geometria.

Cena 3

Debate-se com a classe a organização dos recipientes reunidos dos grupos. Os grupos destacam o recipiente maior e justificam suas escolhas. Um grupo destaca como justificativa a qualidade altura. Três grupos escolhem o recipiente maior pela qualidade largura. Um dos grupos fica em dúvida ao expor sua resposta e um grupo faz sua escolha apoiando-se na altura e largura dos recipientes.

Prof: E qual dos dois é o maior?
Cari mostra o pote de margarina e responde: Largura é esse [o de margarina] e altura é esse [recipiente de vidro].
Prof: Mas pra saber qual é o recipiente maior não dá pra uma hora eu achar que um é maior em largura e outro é maior em altura. Eu tenho que definir qual é o recipiente maior? O que faço para saber isso?

Jaque: Coloca água.
Vários falam ao mesmo tempo.
Jaque: ..., nós enche esse aqui de água e coloca aqui [despeja a água do recipiente de vidro no recipiente de margarina]. Se encher tudo e cair água, esse [recipiente de vidro] é maior.
A aluna sai para buscar água.
Prof: É altura que é importante para saber se o recipiente é maior?
Cami faz gesto negativo com cabeça.
Cari: Não dona Érica, depende. Pode ser a altura, a largura, depende da qualidade.
Ever: O refrigerante, eles vem no vidro. A "coca-cola" vem num vidro mais alto [incompreensível]
Prof: Mais fino.
Cari repete: Dona Érica, um é maior por causa da altura e outro por causa da largura, então, depende da qualidade.
(...)
Iva: Professora, sabe qual é maior, por causa que tem pote que é grande, mas é pequenininho professora. É grande, mas não é largo, porque dá pra ver que o pote de manteiga é mais grande na largura, tem pote que é grande, mas não é largo.
Ever: Essa garrafa de "coca-cola", tem outra de "coca-cola", a outra tem o mesmo tanto que essa, por causa que é fina, é maior, mas não é mais larga.
Prof: Então a largura pode ser um fator uma qualidade impor...
Dama imterrompe: A outra é pequenininha e tem a mesma quantidade, é o mesmo líquido.[sobre a garrafa de refrigerante]
Cari: Dona Érica, também, ó dona Érica, a Jaque ... A senhora falou, não sei se a senhora percebeu, mas ali tem duas qualidades. Dá pra perceber por causa que a senhora não escolheu qual a senhora ia determinar pra ver qual que é maior. Depende também, que nem, depende da largura e da quantidade que pode colocar dentro. Então, a senhora não determinou qual é maior. A senhora não determinou a qualidade pra gente falar.
Prof: Então, o que é mais importante pra gente provar qual é o maior?
Joy: Ver qual que serve mais coisas, que nem a água. Ver qual que serve mais?
Cari: Qual que cabe mais?
Joy: É.
Dama concorda com a Joy.

Análise

Nesta cena distinguimos três elaborações dos alunos. Primeiro Cari manifesta hesitação entre isolar a largura e altura na comparação dos recipientes e solicita à professora o estabelecimento do isolado para esta comparação. Esta hesitação, já evidenciada na cena 1 deste episódio por outro grupo, mostra o embaraço enfrentado pela interdependência da largura, altura e comprimento na comparação de volumes. Diante desse embaraço a aluna, a princípio, mostra que é possível comparar os recipientes, tomando separadamente a altura e a largura, o que leva a uma análise equivocada uma vez que o isolado não compreendeu nele todos os fatores que interferem na comparação de volumes, ou seja, altura, largura e comprimento, por fim ela quer que a professora estabeleça o isolado para a comparação.

Nesta elaboração, identifica-se o conteúdo contínuo do objeto, em jogo na comparação, ao se determinar o isolado referente ao juízo de ser maior que, por sua vez, exige um cuidadoso exame por parte dos alunos. No entanto, o isolado não contribuiu para que se estabelecessem vínculos entre altura e largura, correspondentes a níveis mais abrangentes de isolado, como o manifestado por Ever e Dama no terceiro tipo de elaboração desta cena.

Outra elaboração desta cena encontra-se na escolha da água como medida de capacidade, expressa por Jaque "..., nós enche esse aqui de água e coloca aqui [despeja a água do recipiente de vidro no recipiente de margarina]. Se encher tudo e cair água, esse [recipiente de vidro] é maior.". Também adotada por outros grupos como estratégia de comparação, ainda que de forma não operacional, a água assegura uma maneira de comparar que identifica a variação de dimensões dos recipientes. A segunda elaboração desta cena, manifesta-se por uma intervenção que possibilita a ação de medir o volume dos recipientes. Esta intervenção se apóia na tentativa de adaptar o aspecto contínuo – conteúdo – de forma a poder estabelecer uma unidade de medida de mesma espécie da extensão a ser medida, permitindo a comparação e determinação conveniente do grau de intensidade desta extensão. Joy complementa esta elaboração não só reafirmando o papel da água como auxiliar na medição, como evidenciando seu papel na determinação da capacidade "qual que serve mais", frase que foi interpretada e redimensionada por Cari como "o que cabe mais".

Interpretamos que a medição ocorre aqui de maneira rudimentar, visto que ainda não observamos nas ações dos alunos o estabelecimento de um termo único na medição, a comparação é feita invariavelmente, comparando a capacidade de conter água entre dois recipientes, garantindo a definição do maior entre eles. Podemos considerar que o movimento do pensamento desses alunos buscou organizar o aspecto contínuo do objeto, o conjunto contado, entretanto, ainda não foi possível corresponder seu conteúdo à *forma* numérica, números naturais, conjunto que conta. No entanto, destacamos aqui a observação de Caraça (1998) de que "*poder traduzir em números uma variação de quantidade é uma questão que depende, acima de tudo, do grau de conhecimento momentâneo dos homens; não é, de modo nenhum, uma questão que possa pôr-se em absoluto*" (CARAÇA, 1998, p.109).

A terceira elaboração que podemos destacar nesta cena, manifestada por Ever, traz evidências da determinação da capacidade como elemento de variação de largura e altura de uma garrafa de refrigerante. Ele complementa Iva e expressa *"Essa garrafa de 'coca-cola', tem outra de 'coca-cola', a outra tem o mesmo tanto que essa, por causa que é fina, é maior, mas não é mais larga."*. Percebemos a tentativa de expressar que altura e largura podem variar entre si sem alterar a capacidade. Dama complementa Ever, dizendo: *"A outra [garrafa de refrigerante] é pequenininha e tem a mesma quantidade, é o mesmo líquido"*. Nesta elaboração, o inesperado, comparar recipientes de dimensões variadas, parece possibilitar um progresso no estabelecimento do isolado. O exame cuidadoso das condições da situação problema de comparar recipientes encaminha para uma análise que toma um novo nível de isolado, este que estabelece o elo entre altura e largura como elemento relacionado à medida de capacidade. Dessa maneira, embora estando conceitualmente incorreto associar apenas duas dimensões à comparação de volumes, desenvolve-se a tentativa de restabelecer novo nível de isolado – aspecto contínuo que inter-relaciona largura e altura. A esse novo conteúdo isolado não foi possível corresponder unidades de medida de modo a reutilizar a *forma* numérica conhecida, o número natural.

Apresentamos o quadro a seguir contendo a síntese do movimento de elaboração nos episódios deste conjunto de atividades:

QUADRO IX – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 7.3

		Elaborações analisadas	
Episódio 7.3 **Percebendo o senso de grandeza**	**Cena 1** O senso de grandeza é suficiente para comparar os objetos.	**A percepção visual é suficiente para uma avaliação comparativa de intensidades.**	*"Dá pra vê na altura"* *"Ah dona Érica, é só olhar a altura [incompreensível]"*
		Não se estabelece um instrumento de medida nestas elaborações, separa-se o isolado na definição do juízo – ser maior, mediante cuidadoso exame do conteúdo contínuo do objeto. Enfrentam o embaraço da interdependência das coisas ao estabelecerem o isolado na comparação das qualidades.	*"Porque o leão mede maior que o gato né?"* *"... O elefante é maior de tamanho e o leão, de ferocidade. Por causa que você vai perguntar pra pessoa, qual é o maior? E ela vai perguntar em quê?"*

QUADRO IX – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 7.3

		Elaborações analisadas	
Episódio 7.3 **Percebendo o senso de grandeza**	**Cena 2** O senso de grandeza é insuficiente para comparar os recipientes.	**Tomam somente a altura como *isolado* para o estudo do tamanho dos recipientes. Não compreendem, neste recorte, todos os fatores que influem na medida de capacidade, causando hesitações na organização dos recipientes.**	*"É esse [o maior]. [volta a mostrar o recipiente 1, mas demonstra dúvida ainda, olha para o recipiente 5]"* *"Só que esse também cabe alguma coisa [mostra o recipiente 4]"* *"É esse daqui ó, é a margarina que é maior. [mostra também o recipiente 5]"*
	Cena 3 O senso de grandeza é insuficiente para comparar os recipientes.	**Toma-se separadamente a altura e a largura na comparação de volumes, e realiza-se uma análise equivocada já que não se compreende o isolado em todos os fatores que inferem na medida de capacidade, ou seja, altura, largura e comprimento.**	*"Não dona Érica, depende. Pode ser a altura, a largura, depende da qualidade."* *"Dona Érica, um é maior por causa da altura e outro por causa da largura, então, depende da qualidade."*
		Manifesta-se a ação rudimentar de medir o volume dos recipientes, pois não se estabelece um termo único na medição: compara-se a capacidade de água entre dois recipientes, garantindo a definição do maior entre eles. Busca-se organizar o aspecto contínuo, mas ainda não é possível corresponder seu conteúdo à *forma* numérica, números naturais.	*"..., nós enche esse aqui de água e coloca aqui [despeja a água do recipiente de vidro no recipiente de margarina]. Se encher tudo e cair água, esse [recipiente de vidro] é maior."* *"Ver qual que serve mais coisas, que nem a água. Ver qual que serve mais?"* *"Qual que cabe mais?"*
		Observa-se um progresso no estabelecimento do isolado. As condições da situação – comparar recipientes – encaminham para um novo nível de isolado. Embora ainda incorreto o novo isolado estabelece o elo entre altura e largura como elemento relacionado à medida de capacidade.	*"... É grande, mas não é largo, porque dá pra ver que o pote de manteiga é mais grande na largura, tem pote que é grande mas não é largo."* *"Essa garrafa de 'coca-cola', tem outra de 'coca-cola', a outra tem o mesmo tanto que essa, por causa que é fina, é maior, mas não é mais larga."* *"A outra é pequenininha e tem a mesma quantidade, é o mesmo líquido.[sobre a garrafa de refrigerante]"*

7.2 Conclusões da segunda unidade didática

Baseados nos estudos de Kopnin (1978), podemos perceber que o processo de aprendizagem dos conceitos científicos não consiste em uma simples transferência da linguagem cotidiana para a científica, mas uma mudança de conteúdo e forma do conhecimento. Por este motivo o conjunto de atividades apresentado serviu para nos indicar a importância de se propor aos alunos uma reflexão sobre a variação quantitativa de qualidades comuns, principalmente quando comparam objetos em diferentes situações e constroem articuladamente o movimento dinâmico do conceito de unidade natural ao de unidade de medida.

A definição da unidade de medida pode parecer uma tarefa simples, mas envolve atuar com variações de grandezas de mesma espécie e exige elaborações de generalizações pela prática da contagem. Na proposta de atividades deste conjunto foi possível perceber que os alunos elaboram, de forma própria, juízos sobre a variação quantitativa de qualidades, identificando diferenças entre as possibilidades de quantificação das qualidades; algumas variam e podemos contar como altura, velocidade e peso, outras, mesmo variando o grau de intensidade, não permitem a contagem: água, ferocidade, amizade e vento.

Nas discussões pudemos observar que os alunos mostram o que Caraça (1998) identifica como a impossibilidade de contagem da totalidade de um conjunto, exigindo do observador o destaque de um subconjunto de objetos – um isolado – que permite ser quantificado. Essa noção de isolado é interpretada neste estudo como a necessidade de dar ao conteúdo a ser contado uma *forma perceptível*, porção menor que o destaca do todo contínuo. Os alunos revelam este ponto de vista ao apresentar, por exemplo, que não se pode saber a quantidade de todo o mar e de toda a areia e quando ensaiam a colocação do vento no recipiente de vidro para imprimir-lhe temporariamente uma *forma* que permita a contagem.

Sendo assim, na possibilidade de modificar o aspecto contínuo dos objetos no movimento forma e conteúdo do pensamento, os alunos buscam organizar o aspecto contínuo do objeto, seu conteúdo reconstituindo-o em forma de unidades para fazer correspondê-las aos números naturais.

Conforme afirma Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1988), pensar sobre a organização dos aspectos contínuos dos objetos envolve conhecimento da geometria. Ao organizar os recipientes de vidro os alunos refletem sobre seus aspectos geométricos: altura, largura, comprimento e capacidade, solucionando o problema de diferenciar suas dimensões.

Suas percepções se fixam na observação de um aspecto qualitativo comum que permita visivelmente a diferenciação da dimensão. Mas o aspecto selecionado é insuficiente na determinação do recipiente de dimensão maior e os alunos desenvolvem formas de comparação que constituem medições rudimentares por ainda não estabelecerem a relação biunívoca entre a unidade de medida e um conjunto numérico, conjunto que conta.

As ações para medir aspectos contínuos de objetos, manifestadas pelos alunos, se apóiam no movimento de adaptação de um isolado que compreenda nele todos os elementos que interferem essencialmente na medida de volume. Isto significa que se dá *forma* – estabelecimento de uma unidade de medida – identificada na capacidade de conter água, *"mesma quantidade de líquido"*, que ao ser comparada aos recipientes permite o estabelecimento de juízos de intensidade.

A unidade de medida escolhida pelo grupo tem a mesma natureza – é *da mesma espécie*, do objeto a ser medido (volume do recipiente). Observamos que, embora esses alunos tenham encontrado intuitivamente a água como forma de medir a capacidade ou volume dos recipientes, no controle de variações de dimensões, perceber grandezas de mesma espécie não é tão evidente assim, como exemplifica a dificuldade que apresentaram em assumir a unidade de medida de volume (ml) na quantificação da água e as tentativas de medir os recipientes pela altura e largura.

Podemos observar que os alunos pensam num processo criativo de modificação da forma do objeto – de seu aspecto contínuo. Neste conjunto de atividades, embora os alunos não cheguem a estabelecer definições que ampliem o pensamento sobre a medição de volumes, estendem suas elaborações referentes a níveis mais abrangentes de isolados, quando estabelecem o elo entre largura e altura na constituição desta qualidade.

As ampliações que permitem atribuir um aspecto discreto às dimensões contínuas, ao torná-las uma adição de sucessivas unidades de medida, só são enunciadas intuitivamente para medidas de superfície. Abordaremos mais diretamente a medição de aspectos unidimensionais e bidimensionais no próximo conjunto de atividades, a medição das terras.

Também pudemos perceber que o exercício desenvolvido para ampliar o pensamento que generaliza uma definição para grandeza não permitiu que as crianças se aproximassem de uma definição para grandeza, se limitando na elaboração dessa definição ao significado de senso comum da palavra grande. Podemos atribuir esta limitação à ausência de intervenções que focalizassem melhor a correlação da variação quantitativa de qualidades no exercício.

CAPÍTULO 8

TERCEIRA UNIDADE DIDÁTICA

8.1 A fração

Esta unidade didática tem o propósito de abordar o conceito de fração de modo que o aluno apreenda o seu desenvolvimento a partir de ações de medir aspectos contínuos das grandezas na inter-relação forma e conteúdo. Diferente de quantificar aspectos discretos de objetos como pedra, estrelas, animais, frutas, em se falando da contagem, a dinâmica de criação humana da contagem modifica os aspectos contínuos e institui – a semelhança da unidade natural – a "unidade artificial", como forma usada para quantificar estes aspectos.

Para problematizar as ações de quantificar superfícies sugerimos uma atividade de dividir terrenos simulada a partir da história da divisão de terras às margens do rio Nilo, no Egito antigo. Organizar a distribuição, entre os alunos, de um terreno externo à escola admitiu a definição de planos de ação para a determinação do lote como unidade artificial de superfície. Ao se propor virtualmente a distribuição das terras às margens do rio Nilo, nosso propósito não se restringe ao processo "divisão", mas à possibilidade do estabelecimento de um plano de ação que cria unidades artificiais, conexão conceitual fundamental para a fração.

Destacam-se, portanto, dois momentos distintos desta atividade, isto é, o estabelecimento de duas conexões conceituais. No primeiro, torna-se necessário criar, intuitivamente, uma unidade-artificial de superfície, que denominamos terreno-lote.

No segundo momento da atividade, permite-se ao aluno refletir sobre quais os conhecimentos essenciais para a obtenção do terreno-lote em face ao problema da cheia do rio Nilo, sugerido em continuidade à história da divisão de terras às margens do rio. Com o objetivo comum de recuperar as dimensões e a localização deste terreno-lote, cujas marcas são apagadas pela enchente, manifestam-se soluções que apontam para a necessidade de conhecer as medidas das laterais deste terreno-lote.

A seleção do terreno-lote, como unidade de medida de superfície, também identificada como unidade artificial[1], na divisão das terras às margens do rio e a seleção dos lados do retângulo, forma dada ao terreno-lote, como elementos essenciais na obtenção das dimensões do mesmo, implicaram reflexões de natureza geométrica.

Diante das ações de medir as dimensões das laterais do terreno-lote apresentamos aos alunos um novo problema cuja resolução permite construir outra conexão conceitual: como expressar numericamente uma dimensão menor que a unidade de medida – a "sobra".

De modo abrangente, o conceito de fração envolve uma complexidade de elaborações que não se resumem na associação de uma parte do objeto com o símbolo numérico, outrossim implica em pensar sobre a escolha de uma unidade de medida, resultante de um movimento de atuação que imprime nova forma ao aspecto contínuo do objeto e deste modo, articulam-se, de maneira significativa, formas de pensamento sobre o conceito de unidade natural e de unidade de medida, relação esta constitutiva do conteúdo de fração.

Estes momentos e seus desdobramentos foram sintetizados nos cinco episódios que formam esta unidade didática:

EPISÓDIO 8.1 – A divisão de terras no Egito antigo

EPISÓDIO 8.2 – Recuperando o terreno-lote depois da cheia do rio Nilo

EPISÓDIO 8.3 – A unidade artificial como instrumento de medição

EPISÓDIO 8.4 – Medindo as sobras

EPISÓDIO 8.5 – Medir as sobras sem criar novas unidades

[1] São as unidades de medida, arbitrariamente, inventadas pela humanidade para quantificar aspectos contínuos dos objetos.

EPISODIO 8.1 - A divisão de terras no Egito antigo

Objetivos

- Perceber a necessidade da medição como forma de superar a dificuldade de distribuir igualmente entre famílias as terras às margens do rio Nilo
- Delimitar terrenos em unidades-lote.
- Pensar sobre aspectos essenciais da medição: escolha de uma unidade de medida de superfície e comparação da unidade com a dimensão a ser medida.

Descrição

Para abordar a fração de modo a envolver os alunos no movimento complexo de reflexão sobre uma situação problema, cuja resolução envolve a participação de todos, integrando pensamento, ação e linguagem, a atividade se desenvolve tendo como objetivo comum, dividir igualmente uma porção amorfa de terra, às margens do Nilo, entre um número determinado de pessoas. Uma porção de terra é um contínuo indefinido que não gera imediatamente a percepção de uma porção/unidade como acontece num conjunto de ovelhas. Deste modo cria-se a necessidade de quantificar uma superfície.

Simulamos a divisão dos terrenos, usando a história expressa na Figura 8.1. Com ela, sugerimos a reflexão sobre a criação de unidades de medida de superfície, com a proposta de distribuição das terras às margens do rio Nilo, na qual permite-se criar livremente respostas sem a preocupação de expressá-las em linguagem formal matemática, visto que na atividade não é disponibilizado o conceito formal de medida ou mesmo mostradas tecnologias para medir.

Trata-se de criar uma unidade de medida de superfície a partir do conhecimento de medida que o aluno tem elaborado. Essa tarefa complexa envolveu pensar sobre a forma geométrica, especificando elementos desta para constituição da unidade artificial, a qual foi atribuída a configuração de lotes retangulares.

FIGURA 8.1 – A história sobre a divisão de terras às margens do rio Nilo.

> **UM POUCO DE HISTÓRIA**
>
> Uma das primeiras e mais importantes civilizações que começou a trabalhar intensamente a terra foi a egípcia. Trata-se de um povo que se estabeleceu numa região com características geográficas muito particulares: um amplo deserto cortado por um extenso rio – o rio Nilo – que periodicamente, em suas cheias, fertiliza as suas margens.
>
> Estas terras às margens do Nilo eram propriedade coletiva, do estado egípcio sendo, assim administradas pelo faraó. Para desenvolver a produção de alimentos o faraó Sesóstris resolveu distribuí-las para as famílias do seu povo. Cada família receberia uma porção de terra para trabalhar e produzir os alimentos necessários para a vida de toda a nação. Tornava-se, assim, *proprietária* da terra. Aquela porção de terra seria, dali para frente, a sua *propriedade privada*. Em troca pagaria impostos para o faraó. Foi desta forma, através desta primeira *reforma agrária* que se tem notícia na história, que o homem inventou a propriedade privada dos meios de produção na sua forma mais simples e direta: *a propriedade privada da terra*.

Após conversarmos sobre a história da distribuição de terras no Egito antigo, sugerimos aos alunos que considerassem, virtualmente, um terreno externo à escola, como sendo as terras às margens do rio Nilo. Apresentamos duas questoes para que eles reflitam sobre a divisao destas terras, a saber: As porções de terra que caberão às famílias serão iguais ou diferentes em tamanho? Qual formato deverá ter estas porções de terra?

Inicialmente a aluna Dama sugere a divisão proporcional ao número de pessoas da família, mas os alunos apóiam a proposta de Cari que recomenda a divisão de terrenos iguais e o formato quadrado, expressando: *"Quadrado, porque o quadrado tem as quatro partes iguais"*. Posteriormente a esta demarcação os alunos deveriam identificar os lotes de cada família. Destacamos nas cenas 1 e 2 momentos da divisão do terreno.

Cena 1

As alunas Cari e Dama explicam para os colegas, mostrando no chão, como deve ser a divisão.

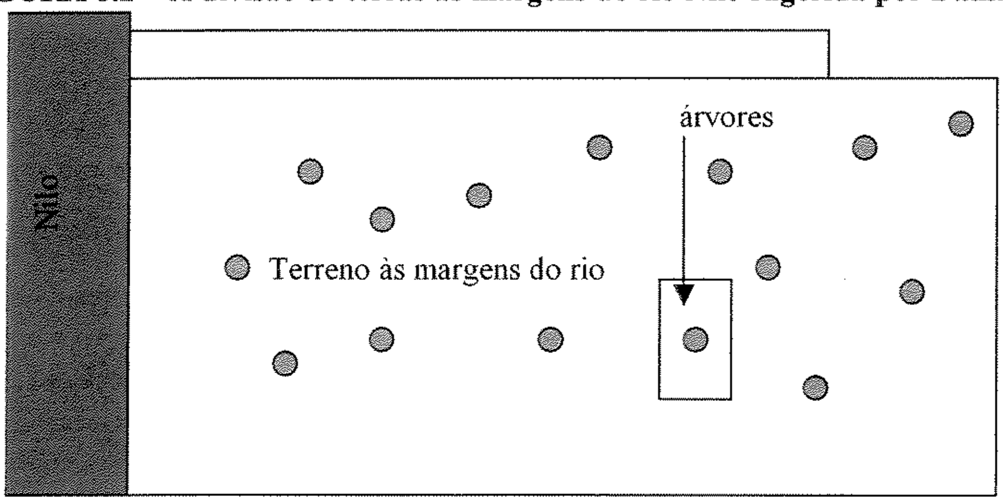
Cari: Aqui são as margens [faz o desenho de um "quadrado" no chão representando o rio]. Aí uma pessoa vai contar os passos. Um exemplo, a Marc... aí ela conta. Desse lado [aponta com um graveto um lado do quadrado] faz de conta que tem 16 passos, como o quadrado é igual, tem 16 em todos os lados. Aí a gente vê quantos alunos tem, professora Ana![a aluna chama a professora da classe para saber o total de alunos]

Dama responde: 38.
Cari: 38, tirando 1, tirando 2 [tira dois alunos que não são freqüentes] são 36. Trinta e seis dividido por...
Professora: Aí como é que marcaria os terrenos?
Cari: Aí a gente faria 36 dividido por... 48, dividido por ...16 mais 16, mais 16 ... péra aí. Ah! É só fazer 16 vezes 4. A gente faria as contas e quanto desse o resultado, seria os passos de cada um. [faz uma conta de divisão no chão]
Dama: os passos.

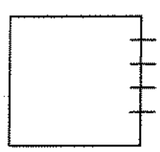
Cena 2

Dama: Cada um fica perto de uma árvore, e marca o seu pedaço.

FIGURA 8.2 – A divisão de terras às margens do rio Nilo sugerida por Dama.

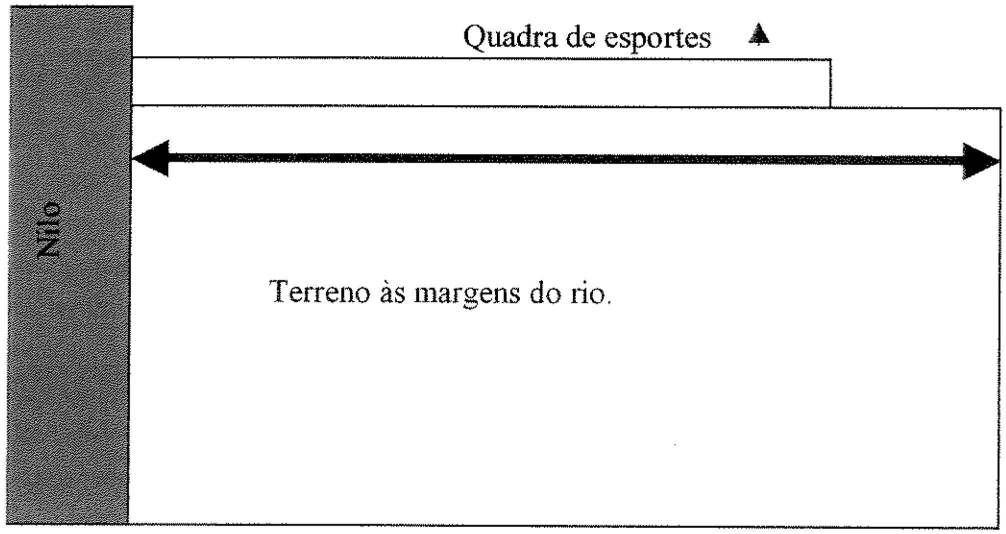


Professora: E como é que faz para os pedaços serem todos iguais?
Dama: Aí tinha que medir.
Cari: Aí a pessoa faz um quadrado [desenha no chão com o graveto um quadrado representando o terreno ao lado do Nilo] e vai contando os passos [marca com riscos a subdivisão da lateral do terreno com o uso de passos].



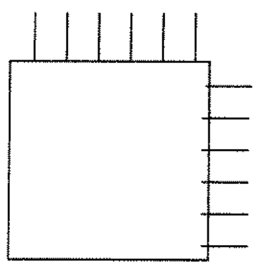
Dama: A gente vai começar dali até o rio, contar os passos até o rio. [mostra a distância indicada pela flecha no desenho abaixo] Aí a gente ia dividir esse espaço por 38 alunos, aí depois a gente ia dividir assim, e ia contando e dividi por 36 alunos.

FIGURA 8.3 – Representação da visão geral das terras às margens do rio Nilo.



Professora: Aí não vai sobrar nada. E se chegar uma família?
Leo: Cada casa dividia.
Jaque: Assim, dona Érica, [faz gesto com a mão mostrando a distancia indicada pela flecha do desenho acima] cada um fica com um pouco e deixava pra lá [extremidade oposta à margem do rio Nilo, indicada pela flecha do desenho acima] um espaço.
Cari: O rio, faz de conta que é um quadrado [fala enquanto desenha com o graveto um quadrado no chão], o quadrado tem quatro lados, a gente usaria só duas [se refere as laterais]. Aí, essas outras duas, Dona Érica, ficaria um espaço para quem chega.

FIGURA 8.4 – A divisão de terras às margens do rio Nilo sugerida por Cari.



Análise

Estas cenas evidenciam duas soluções para o problema da divisão do terreno às margens do rio Nilo. Na cena 1, Cari sugere o formato quadrado para o terreno-lote e propõe a divisão de cada lateral deste quadrado entre os 36 alunos da classe. Ao expor sua proposta, Cari deixa entender que está pensando na divisão do perímetro e não da superfície do terreno. O raciocínio da aluna parece centrar-se numa forma algorítmica de resolução, expressa quando realiza uma operação de divisão entre o número de alunos da classe e a quantidade de passos que sobrepõem os lados do quadrado, de modo a obter um resultado numérico.

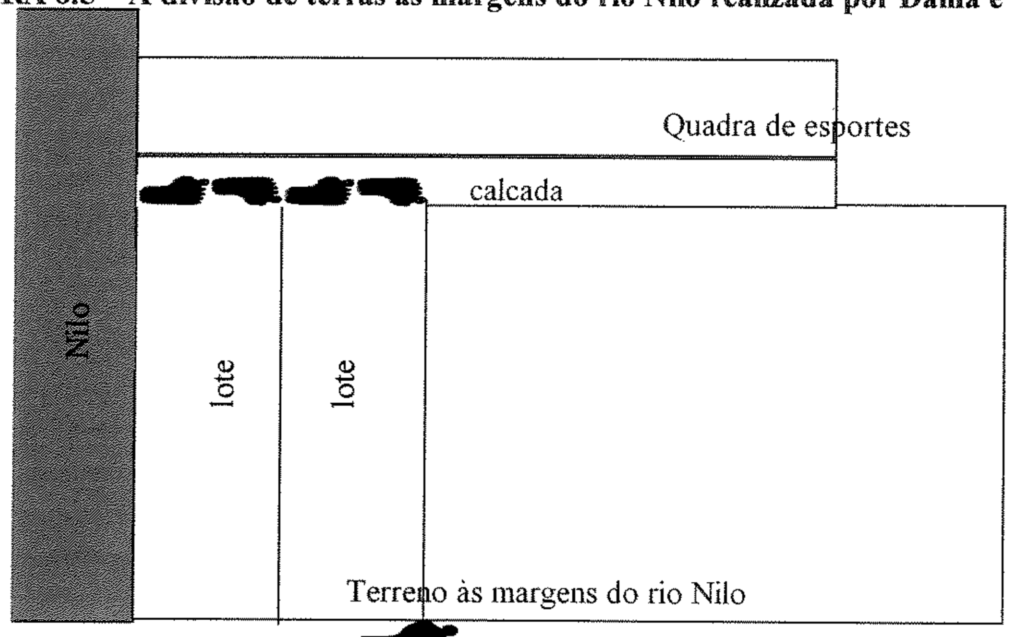
Na cena 2, Dama contribui com outra forma de elaboração ao expressar: "*Cada um fica perto de uma árvore, e marca o seu pedaço*". Sua resolução cria uma unidade visível de terreno-lote, mais ligada a uma noção de medida que, embora primária, acaba dividindo por correspondência um-a-um, ou seja, cada árvore identifica um "pedaço" de terreno que, por sua vez, corresponde a uma criança. Embora haja a criação de uma unidade visível do terreno, expressa na definição de uma unidade de superfície que corresponda com a forma numérica, sua proposta não expressa preocupação em que a soma das porções individualizadas de superfícies seja a totalidade da margem do rio Nilo.

As elaborações das alunas, tanto na cena 1 como na 2, confirmam que as imagens são importantes para comunicar o novo *conteúdo* envolvido na ação de quantificar aspectos contínuos. Durante suas explicações as alunas apresentam traçados e figuras como *forma de linguagem* e evidenciam a importante inter-relação da geometria no estabelecimento de nexos nesta medição. No entanto, na cena 1, os aspectos geométricos não parecem ser relevantes para resolver o problema. Embora sua resposta seja mais adequada, do ponto de vista matemático, na clareza de que é preciso fazer uma conta de dividir, a aluna se fixa no movimento aritmético e despreza o conteúdo geométrico de medir, envolvido na resolução do problema de dividir superfícies, submete assim o conteúdo à forma.

Comparativamente à Cari, Dama, embora tenha uma visão elementar de medida, expressa uma tentativa de resolução que não ignora o conteúdo de medida. Em sua solução encontramos o movimento de criação da unidade artificial na busca de referências em objetos como as árvores, a calçada da quadra, o tamanho do passo para propor sua solução. Neste movimento reside a transição do aspecto discreto, inerente à contagem de unidades naturalmente separadas umas das outras – e conteúdo nesta contagem – para o aspecto contínuo, novo conteúdo, no momento da concepção da unidade artificial. Percebe-se a tentativa de imprimir uma forma antiga a um conteúdo novo, movimento que impele para a criação da unidade de medida.

A proposta que resulta na divisão do terreno é construída por Dama e Jaque. Jaque apresenta a solução apoiando-se na proposta de Dama de subdividir uma lateral do terreno-lote às margens do rio. Para expressar sua proposta utiliza-se de desenhos que mostram a possibilidade de marcar os *terrenos-lote* lado a lado. Dama compreende a idéia de Jaque e a complementa, enunciando a divisão conforme mostra a ilustração a seguir.

FIGURA 8.5 – A divisão de terras às margens do rio Nilo realizada por Dama e Jaque.



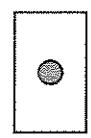
Unidade de medida - Passo(pé)

A unidade artificial, terreno-lote, concepção inicial de Dama, é abandonada para a medida linear da lateral do terreno às margens do rio, a lateral que faz limite com a quadra. Dama parece acreditar não ser necessário medir a lateral oposta quando expressa: *"Conta daquela ponta do cimento até aqui* [ver Figura 8.5], *aí depois daqui até ali, e depois já sabia quanto que tinha ali, porque já tá contando aqui. Aí depois a gente ia dividir o espaço".*

O objetivo de distribuir igualmente as terras às margens do rio Nilo é alcançado. Embora esta distribuição não seja feita com o uso da unidade de superfície, e sim por sua lateral, unidade de medida linear, nota-se que, na solução do problema, cumpriram-se as etapas consideradas por Caraça (1998) como essenciais na medição. A primeira, com a escolha de uma unidade de medida de mesma espécie que a grandeza a ser medida.

Em relação ao procedimento das alunas, usou-se "passo" para comparar a lateral do terreno às margens do Nilo – ambas medidas lineares. A segunda, com a comparação desta unidade, isto é, verificação de quantas vezes cabe esta unidade, na grandeza a ser medida. E a terceira, com a representação do resultado mediante a expressão numérica, "dois passos" por aluno, que permitiu que chegassem ao resultado da distribuição dos *terrenos-lote* entre os alunos da classe. As duas primeiras etapas retratam a atuação relacionada ao conteúdo – aspecto contínuo da lateral do terreno, a terceira, tem relação com a forma numérica que resulta da ação, medir. O quadro a seguir representa a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO X – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.1

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.1 **A divisão de terras no Egito antigo.**	**Cena 1** Delimitar terrenos em unidades-lotes.	**Cari fundamenta a divisão do terreno numa forma algorítmica de resolução, expressa quando divide os lados do quadrado de modo a obter um resultado numérico. Usa-se medida linear e perímetro.**	*"Aqui são as margens [faz o desenho de um 'quadrado' no chão representando o rio]. Aí uma pessoa vai contar os passos". "Aí a gente faria 36 dividido por... 48, dividido por ...16 mais 16, mais 16 ... péra aí. Ah! É só fazer 16 vezes 4. A gente faria as contas e quanto desse o resultado, seria os passos de cada um."*
	Cena 2 Delimitar terrenos em unidades-lotes.	**A solução dada por Dama está mais ligada a uma noção de medida que, embora elementar, divide o terreno, correspondendo uma unidade visível de terreno-lote a cada aluno.**	*"Cada um fica perto de uma árvore, e marca o seu pedaço".*  .

EPISÓDIO 8.2 - Recuperando o terreno-lote depois da cheia do rio Nilo

Objetivos

❖ Reconhecer que basta a dimensão das laterais, altura e comprimento, para recuperar a dimensão da superfície do terreno.

❖ Perceber a necessidade de conhecer a dimensão das laterais do terreno-lote, de modo a recuperá-las após a cheia do rio Nilo.

Descrição

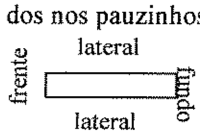
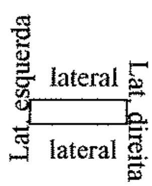
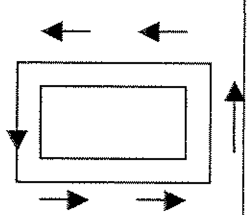
Após medirem com passos e marcarem os terrenos, conversamos sobre o problema das constantes cheias do rio Nilo e sobre suas conseqüências, o desaparecimento dessas marcas.

Deste modo envolvemos os alunos no objetivo comum de resolver o problema de como recuperar o terreno depois da cheia. Primeiro os alunos analisaram os aspectos mais importantes da forma escolhida para os lotes de terra em momentos individuais, em grupo e, em seguida, fizemos um debate final, cujo quadro de respostas constitui a cena 1. Depois sugerimos que os alunos refletissem sobre o problema da cheia, apresentando duas questões. As respostas individuais a estas questões, representativas da classe, constituem a cena 2.

Cena 1

QUADRO XI – RESPOSTAS REFERENTES AO DEBATE NOS GRUPOS.

Questões:
Analisando a forma escolhida para os lotes de terra: quais os aspectos mais importantes desta forma, que são fundamentais para fazer a marcação? Quais os nomes destes aspectos?

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
A repartição dos terrenos foi difícil, porque esta forma é longa, e precisa de uma marcação longa. É preciso de barbantes amarrados nos pauzinhos. 		1) a lateral 2) lateral	 Contorno	Se não houvesse essa divisão, as pessoas tomariam nossos terrenos.	Com as separações dos terrenos marcados por barbante (...) separar o terreno marcando com barbante.
Die,Herb, Eds, Regi, Josem, Samu, Argi	Dama, Apau, Patri, Bru, Kel, Prisci(2)	Pame, Joy, Prisci, Jaque, Sola.	Cari, Ever, Hele, Acarol, Leo.	Cami, Tali, Rafa, Jana.	Iv, Iva, Char, Lean, Vini.

Cena 2

QUADRO XII – Soluções individuais às questões sobre o problema da cheia do rio Nilo.

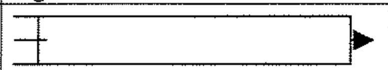
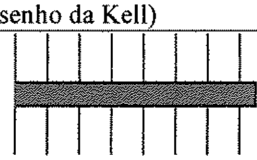
		1) Como foi a divisão do terreno?	2) Como recuperar o terreno depois da enchente do Nilo?
1) Preocupam-se em impedir a cheia.	**Lean:**	Cada um pegou uma parte da terra.	As medidas fica atrás da pirâmide.
	Edso:	Figura 8.6-A – desenho do Edso.	Figura 8.6-B – desenho do Edso.
	Iv:	Figura 8.7-A – desenho do Iv.	Figura 8.7-B – desenho do Iv.
2) Ignoram a medição feita anterior-mente	**Iva:**		Desenhando por exemplo os terrenos. nós catamos os terrenos na nossa frente e desenhamos.
	Tâma:	Marcando de dois em dois passos.	Contando através de passos o seu terreno.
3) Recuperam o que já havia sido feito.	**Helen:**	Foi contado os espaço e dividiu o terreno	Remarque tudo de novo.
	Prisci:	Figura 8.8 – desenho da Prisci.	Começar desde o começo.
	Apaul:	Dividimos com os pés	Fazendo tudo de novo.
	Kell:	A divisão do terreno foi feito com barbante e palitos o terreno foi dividido em dois passos para cada um. (Figura 8.9 – desenho da Kell)	Depois da enchente do rio Nilo é só novamente dividi os terrenos em dois passos para cada um.
	Vini:		Fazendo a medida que eles fizeram antes.

FIGURA 8.6-A – Desenho do Eds. (primeira questão).

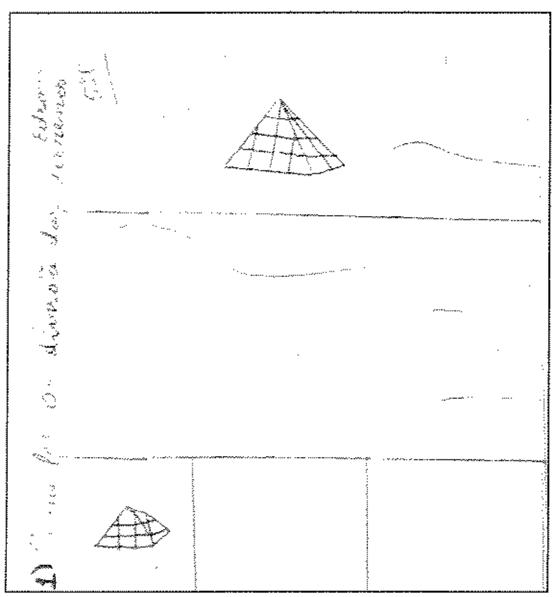


FIGURA 8.6-B – Desenho do Eds. (segunda questão)

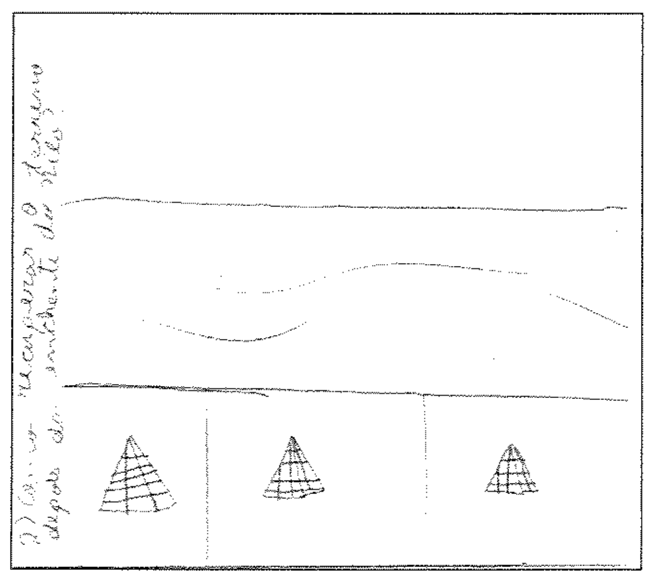


FIGURA 8.7-A – Desenho do Iv. (primeira questão).

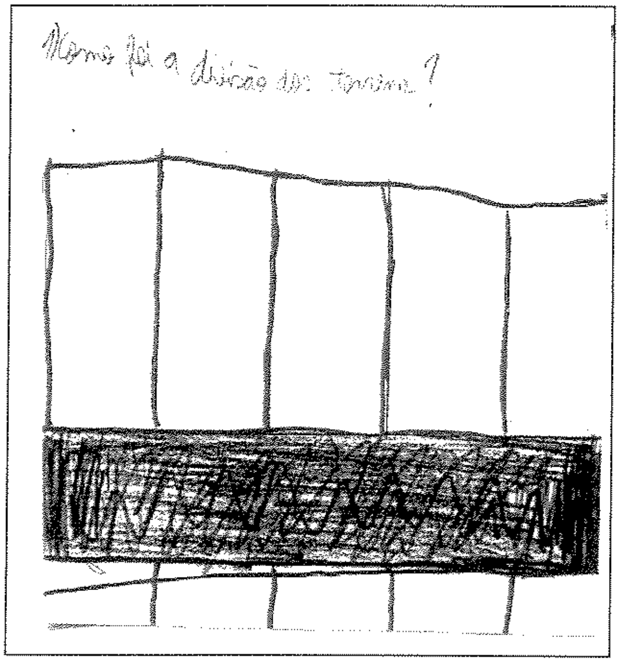


FIGURA 8.7-B – Desenho do Iv. (segunda questão)

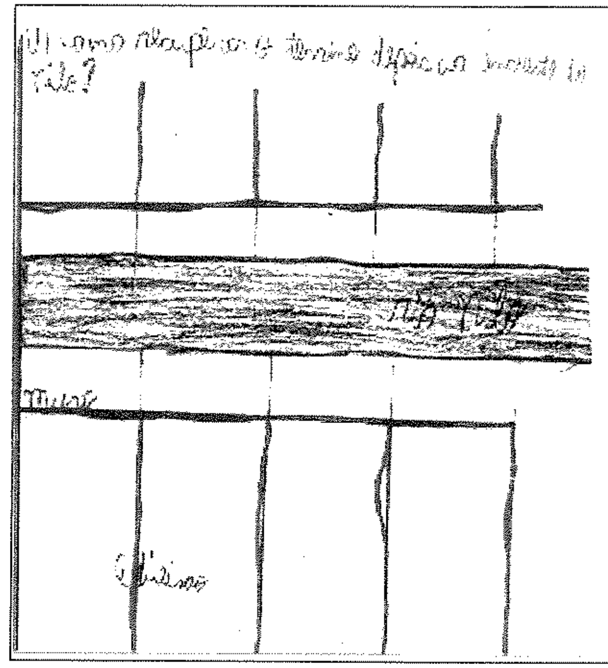


FIGURA 8.8 – Desenho da Prisc.

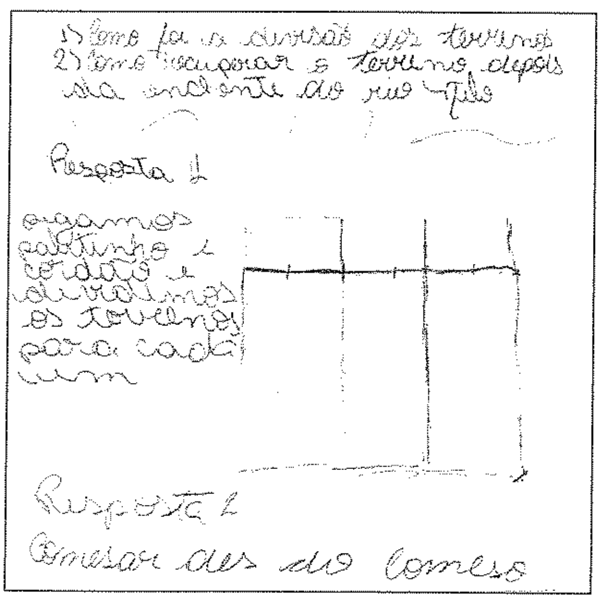
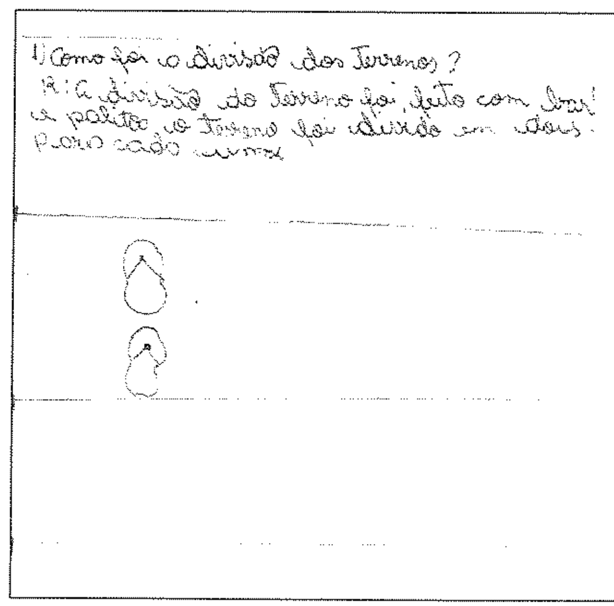


FIGURA 8.9 – Desenho da Kell.



Análise

Destacamos como relevante na cena 1, o fato de haver desaparecido a forma quadrada do *terreno-lote* que aparece nas soluções anteriores. Não há questionamento dos alunos em relação a este fato e percebemos que intuitivamente a forma retangular parece mais eficiente em termos de garantir a divisão das margens do rio Nilo sem que ocorram sobras. A forma fixa e perceptível da calçada, traçado que foi usado como base para a solução geral, impulsiona o conteúdo, o projeto de divisão e a extensão dos terrenos. O conteúdo – medida – ainda não se manifesta elaborado e, embora se encontre uma divisão satisfatória do terreno, a atividade de localizar e remarcar o terreno depois da cheia do Nilo evidenciou a insuficiência do processo de marcação adotado neste primeiro procedimento.

Ainda neste episódio, algumas frases dos registros escritos individuais apontam que o problema apresentado tornou-se real para o aluno uma vez que, em momentos do debate não transcritos, indicaram preocupações com a invasão de terras e a localização do terreno para não prejudicar o plantio. No quadro, estas preocupações são observadas na linguagem usada para denominar as laterais do desenho que representa o terreno, na qual encontramos correlação com a linguagem comum usada para terrenos. O desenho adquire significação real, correspondente à atividade com terrenos, diferente de considerá-lo um retângulo.

No grupo 4 a palavra "contorno" pode estar indicando que ainda prevalece a percepção de que se define a superfície do terreno pelo perímetro, ilustrada pelo uso das flechas. Cari, integrante deste grupo, na cena 1 do episódio 8.1 já manifestava o predomínio deste pensamento.

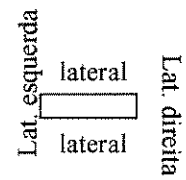
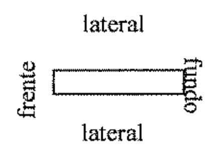
Na cena 2, as respostas representativas da classe, manifestam três tipos de solução para o problema da cheia. O primeiro, propõe impedir que as águas do Nilo apaguem as marcas dos terrenos com pirâmides, muros ou outras construções. Os alunos parecem ignorar as formas de medição na obtenção do terreno-lote. Podemos notar que embora o aluno Lean utilize a palavra "*medida*" na resposta à segunda questão da atividade, sua resposta à primeira questão: "*Cada um pegou uma parte da terra*" parece afastar a possibilidade de medir na obtenção do terreno após a cheia, dando indícios de um ajustamento por ensaio e erro de formas retangulares da distribuição dos terrenos.

Como forma de pensamento prevalece o destaque dos aspectos exteriores acessíveis *"impedir a cheia com pirâmides e muros"*, não essenciais à atividade prática de medir terrenos. Ao se construir algo que impeça a cheia do Nilo, tomaram isoladamente o fenômeno – cheia – e restringiram a solução ao conhecimento de impedir que se apaguem as marcas e não apreender estas marcas como uma dimensão de superfície.

O segundo e terceiro tipos de solução, identificados nesta cena, embora diferentes por considerarem ou não medições anteriores, igualmente identificam um modo de apreender o terreno através do conhecimento de suas medidas. Ao considerarem as unidades de medida, "passos" e "pés" estabelecem o conteúdo fundamental de medir: conhecimento sobre os elementos essenciais para obtenção de uma superfície, ou seja, comprimento e altura e suas respectivas dimensões. Estas respostas são qualitativamente diferentes do primeiro tipo de solução uma vez que percebemos nelas a possibilidade de obter o terreno-lote ao repetirmos o processo da medição.

Estas soluções podem ser consideradas, do ponto de vista da forma de pensamento, mais amplas e multilaterais, visto que interpretam a cheia e a obtenção do terreno-lote, não como pura contemplação isolada, mas como momento de justificação do aspecto abrangente da unidade de medida na medição, compreendendo a unidade de medida como base principal no interior da atividade de dividir terrenos. Assim, percebe-se o elo que liga as manifestações particulares de medição dos alunos e a formação de uma explicação com base na relação de comparação da unidade de medida ao quantificar o aspecto contínuo. O quadro a seguir representa a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO XIII– SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.2

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.2 **Recuperando o terreno depois da cheia do rio Nilo.**	**Cena 1** Analisar a forma escolhida para os lotes de terra, refletindo sobre aspectos fundamentais para a marcação dos terrenos.	**Desaparecimento da forma quadrada, a forma retangular parece mais eficiente em termos de sobras e de traçado. A forma fixa e perceptível da calçada, usada como base para a solução geral, impulsiona o conteúdo, o projeto de divisão e a extensão dos terrenos.**	
		A atividade coloca um problema real para os alunos, pois já há um denotado envolvimento de todos na construção da solução, indicado por suas preocupações com a invasão de terras, com a localização para não prejudicar o plantio e com a linguagem usada para denominar as laterais.	
	Cena 2 Envolver os alunos na resolução do problema em recuperar o terreno depois da cheia do rio Nilo.	**Percebe-se a ausência total da identificação de formas de medição na obtenção do lote-terreno, prevalece o juízo, pois são destacados para a solução os aspectos exteriores e acessíveis do fenômeno.**	Impedir a cheia com pirâmides e muros: *"Pirâmide com buraco para a água entra".* *"Escrever nas pedras da pirâmide".* *"Colocando as pirâmides em volta do rio Nilo".*
		Identifica-se a ação de medir como forma de explicar a obtenção do terreno. Estabelece-se o nexo entre o conteúdo e a forma, enquanto processo de quantificar o aspecto contínuo à semelhança do aspecto discreto, ao se transpor elementos da unidade natural, intrínseca ao processo de quantificação de objetos discretos, para o aspecto contínuo – unidade de medida.	*"Fazendo a medida que eles fizeram antes".* *"Fazendo tudo de novo".* *"Contando através de passos o seu terreno".* *"Depôs da enchente do rio Nilo é só novamente dividi os terrenos em dois passos para cada um".*

EPISÓDIO 8.3 - A unidade artificial como instrumento de medição

Objetivo

A atividade da qual fazem parte as cenas 1, 2 e 3, descritas a seguir, teve por objetivos encontrar unidades de medida unidimensionais padronizadas, para resolver o problema decorrente do uso da unidade não padronizada e desenvolver formas de registrar o resultado da comparação envolvida no processo de medição.

Descrição

Lembramos aos alunos que os terrenos do Egito eram iguais porque os funcionários do faraó faziam as medições depois da cheia do rio Nilo. De comum acordo, os alunos selecionaram uma medida padrão, dois por cinco passos, para remarcar[2] os terrenos. Durante esta demarcação os alunos percebem que seus terrenos apresentam dimensões diferentes e evidenciam suas preocupações conforme expõe a cena 1.

Cena 1

Prisc: Dona Érica, o [terreno] da Bru ficou diferente com o dele, alguns terrenos vão ficar diferentes, porque o pé dele é maior do que o da Bru, então alguns vão ficar diferentes.
Apa: Mesmo que fosse da mesma pessoa, nunca vai ficar igual, só se tivesse outra coisa para ficar igual.
Jaque: Dona Érica, eu acho que uma pessoa marcar o terreno por todos os grupos, aí fica igual.
Prof: Mas olha o que Apa está falando.
Apa: Pode ser a mesma pessoa, nunca fica igual, tem que ter alguma coisa para...
Prof: Pessoal, a Damaris está falando.
Dama: A senhora pode falar assim: (...) mesmo você colocando só uma pessoa, não fica certo, porque eu fiz a medida de todos os terrenos. Acho que a gente devia pegar um pau, e medir com a fita métrica o tamanho daquele pau, e a gente já sabia o tamanho que ele tem, aí a gente media com aquele pau todos os terrenos.

Continuando a discussão, Rica propõe o uso de um pedaço de barbante para medir os terrenos-lote e Dama sugere que o barbante tenha o tamanho da porta. Relatamos que no Egito antigo os funcionários também usavam uma medida padronizada para obter terrenos iguais e conversamos sobre a unidade de medida usada pelos egípcios. Tendo decidido pela unidade

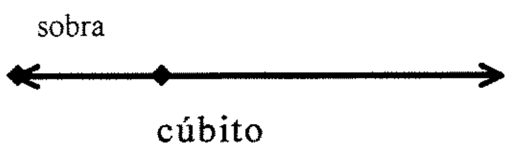
[2] De forma análoga à história da cheia do rio Nilo, a chuva apagou as marcas deixadas pelos alunos no terreno externo ao prédio escolar.

cúbito[3] para medir os terrenos, que por sua vez seria representada pelo cúbito da professora, os alunos remarcaram os terrenos com um comprimento de barbante equivalente ao do cúbito. A cena 2 constitui parte de um diálogo durante esta medição dos terrenos-lote.

Cena 2

Os alunos saem novamente para fazer as marcações no terreno, só que agora com o auxílio de um barbante com a medida do cúbito do Faraó. Jodi mede uma lateral e ignora a sobra em uma das laterais.

Die: Dois e meio.
Prof: Dois e meio?
Die:É.
Dama: Dois assim e cinco assim?
Prof: Não você vai medir o que você já fez, vocês vão para o terreno de vocês e medem.
Tali está comparando o cúbito com a lateral de seu terreno.
Prof pergunta à Tali: E como é que marca esse pouquinho?
Tali: Meio?!... Dois e meio mais ou menos.
Bru: O meu deu dois desse[cúbito] e até aqui [mostra no cúbito a dimensão que corresponde à sobra].



Tali: Esse pouquinho dá isso daqui ó. [Mostra seu pouquinho reproduzindo-o no cúbito como a Bru]
Cari: Três e um palmo.
Dama: Dona Érica deu cinco daqui da lateral direita, cinco da lateral esquerda e quatro da lateral...
Prof: E aí quanto que deu?
Rica e Muri: Dois e dois palmos.

Análise

Na cena 1, a necessidade de uma unidade de medida padrão é percebida em três momentos distintos. No primeiro, os alunos entendem que o uso do passo-pé não padronizado resulta em terrenos de diferentes dimensões após a cheia do Nilo. A observação de Prisc possibilita ao grupo a percepção de que *"alguns terrenos vão ficar diferentes"*, justamente porque existe uma diferença na dimensão usada como unidade de medida, ou seja, seu "passo" é diferente de outro aluno.

---

[3] O mesmo que côvado, antiga unidade de comprimento equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo.

No segundo momento, Jaque manifesta a idéia de um único parâmetro de medida, unidade de medida. A aluna indica que os terrenos ficariam iguais se uma só pessoa marcasse de todos os grupos. Embora sua solução aponte o uso de um único parâmetro, ainda não estabelece um procedimento que permita aos grupos usarem concomitantemente este parâmetro, o que significaria poder transportar a unidade de medida para um objeto, transformando-o em instrumento de medição.

No terceiro momento, Apa e Dama manifestam a necessidade de um *instrumento* de medida quando enunciam que é preciso "*ter alguma coisa*" ou que se "*devia pegar um pau,(...) aí a gente media com aquele pau todos os terrenos*".

De fato, para que haja uma forma mais precisa de medição, as unidades artificiais devem ser padronizadas. A necessidade de padronização das unidades de medida ocorreu, segundo Caraça (1998), especialmente pelo intercambio estimulado pelo comércio.

Na situação de aprendizagem desta pesquisa, os grupos percebem a necessidade e criam meios de resolver o problema decorrente do uso de unidades de medida de comprimento não padronizadas, dando indicações do uso do instrumento de medida, quando sugerem o barbante e a porta como referencial. Essa percepção pode assinalar o entendimento de que o comprimento de dada parte do corpo ou objeto, escolhido como unidade de medida única, pode ser transposto para outro objeto – pedaço de pau ou barbante – com o propósito de servir de instrumento de medida. O instrumento de medida evoca, para a unidade artificial, a forma da unidade natural, isto é, seu aspecto discreto.

Distinguimos quatro elaborações diferentes na análise das ações de medir com o uso do instrumento representativo da unidade de medida – o cúbito, na cena 2.

Na primeira, Jodi reconhece somente os cúbitos que podem ser inteiramente sobrepostos à lateral do terreno ao compará-la com a unidade de medida, tornada um instrumento, o cúbito. Em nossa interpretação, este aluno resolve o impasse da obtenção das "sobras" na comparação, invocando, para o cúbito, o conteúdo da forma numérica - unidade natural. Ou seja, ele interpreta unicamente o aspecto discreto do cúbito e desconsidera seu conteúdo contínuo, de natureza unidimensional, ao ignorar as dimensões menores que esta unidade de medida.

Uma segunda elaboração pode ser observada quando os alunos evidenciam que qualquer comprimento menor que o cúbito é, aleatoriamente, considerado como metade ou meio cúbito. Embora Die e Tali considerem a "sobra" envolvida na comparação do cúbito com a lateral do terreno, quando expressam numericamente o resultado de tal comparação por *"Dois e meio"* e *"Dois e meio, mais ou menos"*, parecem utilizar a expressão "meio" indiscriminadamente para qualquer dimensão que seja menor que o cúbito. Deste modo revelam a instabilidade do significado quantitativo de "meio", visto que não elaboram nenhum procedimento para se certificarem de que a dimensão menor que o cúbito corresponde à metade deste. Assim, o aspecto contínuo, conteúdo da atividade de medir comprimentos, se sobrepõe somente como uma intuição imprecisa, à forma numérica usada na quantificação do aspecto.

O terceiro movimento de elaboração, observado na cena 2, corresponde à concepção de que o comprimento menor que o cúbito não pode ser representado numericamente, no entanto, sua dimensão contínua – seu conteúdo – também não é ignorada ou intuída. Para apropriar-se desse conteúdo Bru representa-o, reproduzindo sua dimensão de modo contemplativo ao expressar *"O meu deu dois desse [cúbito] e até aqui [mostra no cúbito a dimensão que corresponde à sobra]"*.

Diante do novo desafio de registrar a medida de uma dimensão menor que o cúbito, outro movimento de elaboração se manifesta. Os alunos Cari, Rica e Muri trans*formam* a unidade de medida de maneira a permitir a quantificação da sobra. Cria-se uma nova unidade de medida menor que o cúbito para medir as "sobras" – o palmo, conforme enunciam as alunas: *"Três e um palmo"* e *"Dois e dois palmos"*. Esta nova unidade de medida, menor que o cúbito, volta a permitir o uso da forma numérica, correlata à unidade natural.

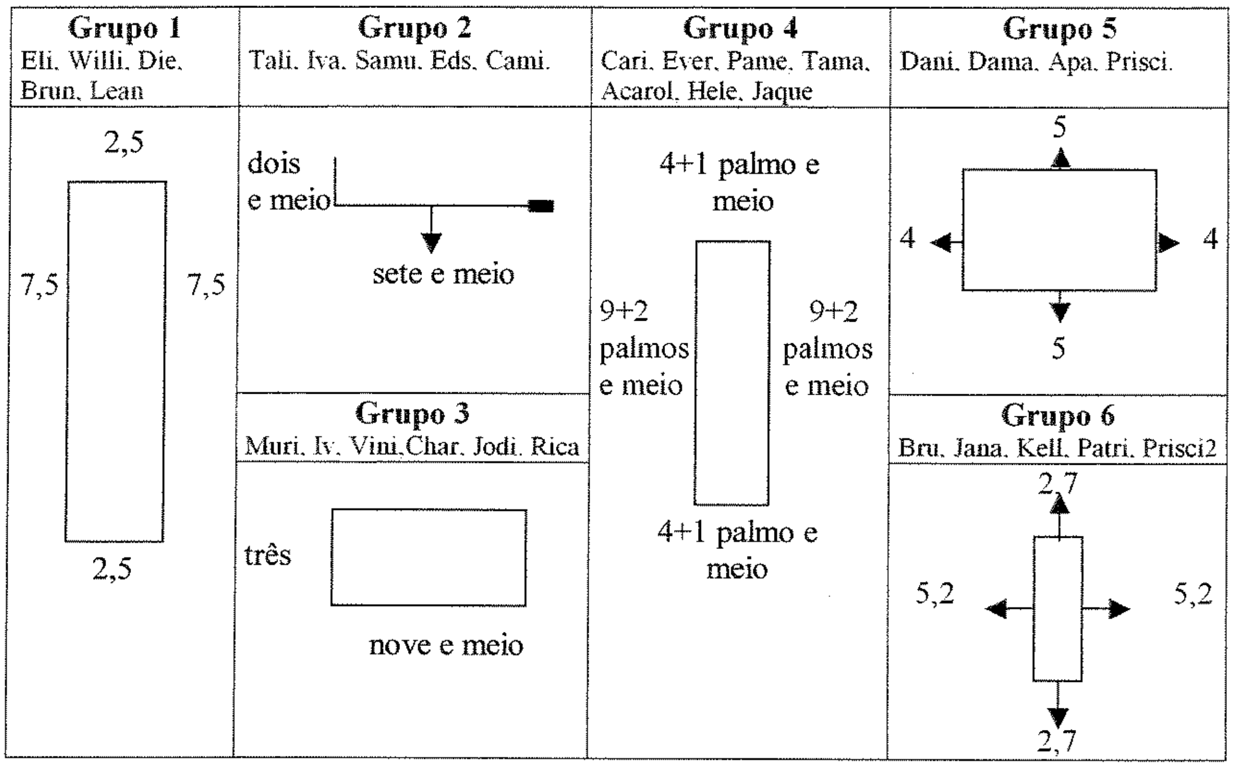
As interpretações destes alunos não ignoram o conteúdo contínuo da "sobra" ao fazê-la corresponder à forma numérica conhecida – o número natural. Esta elaboração parece constituir um salto qualitativo que corresponde ao avanço da idéia particular da criação de uma unidade artificial que permite quantificar uma certa grandeza linear, para a possibilidade de situar a criação de unidades de medida que representem mais plenamente o aspecto contínuo do objeto, inclusive das dimensões menores que a unidade de medida.

Segundo Kopnin (1978), uma vez que esta elaboração reflete a apreensão da idéia essencial da criação da unidade artificial, que admite a utilização da forma numérica conhecida na quantificação de aspectos contínuos de grandezas, constitui o desenvolvimento de um juízo particular para um mais geral.

Cena 3

Nesta cena apresentamos os registros resultantes da marcação e medição dos terrenos, realizadas nas cenas 1 e 2 apresentadas anteriormente.

QUADRO XIV – PAINEL DAS MEDIDAS DOS TERRENOS EM CÚBITOS



Análise

Destacam-se, nesta cena, as formas de elaboração do registro numérico referente às medições realizadas nas cenas anteriores. Observa-se que tanto o grupo 1 como o grupo 6 utilizam a forma de representação decimal: 2,5; 7,5; 5,2 e 2,7 para o registro da comparação da lateral do terreno com o cúbito. Entretanto, ao explicarem suas formas de registro, os alunos evidenciam que a usam de modo totalmente diverso. No grupo 1, embora o número cinco, colocado após a vírgula, seja usado com o significado convencional, ou seja, representando a metade ou meio, este grupo o usou especificamente para representar uma sobra, cuja dimensão era visivelmente maior que a metade do cúbito. O grupo 2 também não utiliza o registro meio em seu sentido matemático, visto que justificam seu uso apenas por não saber registrar numericamente a sobra de *"apenas um pedacinho"*, conforme expressa Tali no momento da explicação. Pode ser este o motivo de reforçarem, no desenho, o traço que corresponde à sobra.

De modo distinto ao grupo 1, o grupo 6 também utiliza em seu registro representações decimais: 2,7 e 5,2. Entretanto, conforme explica a aluna Bru, os números sete e dois, colocados após a vírgula, servem para representar a quantidade de "dedos" sobrepostos à sobra resultante da comparação do cúbito com a lateral. Esta foi a solução encontrada pelo grupo para medir uma dimensão menor que o cúbito: usar outra unidade de medida menor, o "dedo". A vírgula é empregada para diferenciar os numerais que representam diferentes unidades de medida. Observa-se algo semelhante no grupo 4 que emprega o símbolo + para estabelecer a diferenciação entre cúbitos e palmos.

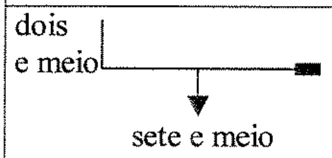
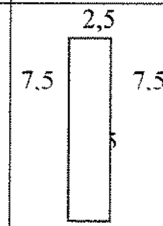
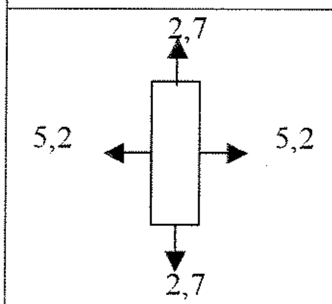
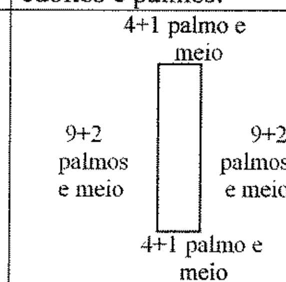
A tensão criativa entre a forma numérica e o conteúdo – dimensão linear, observados nos grupos 1 e 2, manifesta uma tendência em aproximar a dimensão linear da sobra, à forma simbólica conhecida: o meio. Nos grupos 4 e 6 a inter-relação da forma e conteúdo, manifesta-se na criação de novas unidades de medida que constituem coadjuvantes na representação mais precisa das sobras. Percebe-se que a atividade possibilita o duplo movimento de elaboração que correlaciona forma e conteúdo: um, que tende a adaptar a forma numérica convencional, o número decimal ou o sinal (+), de modo a poder representar numericamente os resultados obtidos em cúbitos e dedos e cúbitos e palmos; e outro, que tende a organizar e transformar o conteúdo – dimensão linear, de modo a permitir uma representação numérica. O quadro a seguir representa a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO XV – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.3

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.3 **A unidade artificial como instrumento de medição**	**Cena 1** Perceber a necessidade de encontrar unidades de medida padronizadas para resolver o problema da diferença na dimensão dos terrenos.	**Percepção de diferentes dimensões em função do uso do passo-pé não padronizado.**	*"Alguns terrenos vão ficar diferentes, porque o pé dele é maior do que o da Bru".*
		Percepção da necessidade de unidade de medida padrão	*"Eu acho que uma pessoa marcar o terreno por todos os grupos, aí fica igual".*
		Criação do instrumento de medida – a unidade artificial assume a forma da unidade natural.	*"Pode ser a mesma pessoa, nunca fica igual, tem que ter alguma coisa para...".* *"Acho que a gente devia pegar um pau, e medir (...) aí a gente media com aquele pau todos os terrenos".*
	Cena 2 Desenvolver formas de registrar numericamente o resultado da medição.	**1ª interpretação: as sobras são ignoradas**	Jodi mede seu terreno e desconsidera a pequena sobra de uma das laterais.
		2ª interpretação: compreensão intuitiva da palavra meio.	*"Dois e meio"*.[para a parte da lateral que não foi coberta pela unidade de medida.] *"Dois e meio, mais ou menos".*
		3ª interpretação: o comprimento menor que o cúbito não é representado numericamente e sim pela evidência do objeto.	*"O meu deu dois desse e até aqui".*
		4ª interpretação: se reconfigura a unidade de medida para representar numericamente a dimensão menor que o cúbito.	*"Três e um palmo."* *"Dois e dois palmos."*

QUADRO XV – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.3

<table>
<tr><td></td><td></td><th>Elaborações analisadas</th><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Episódio 8.3

A unidade artificial como instrumento de medição</td><td rowspan="4">Cena 3
Sobre o registro da comparação da unidade de medida com as laterais: comprimento e altura, do terreno.</td><td rowspan="2">O conteúdo, considerado a dimensão linear das sobras, é abordado de maneira aproximada. A forma numérica se sobrepõe ao conteúdo.</td><th>Registro escrito</th><th>Registro numérico</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">A tensão entre forma e conteúdo provoca a criação de novas unidades de medida para representar com maior precisão a sobra. São dois movimentos de elaboração que permitem representar numericamente os resultados obtidos.</td><td>1º) Adaptação da forma: número decimal para representar cúbitos e dedos.</td><td>2º) Adaptação da forma numérica convencional e o sinal (+) para representar cúbitos e palmos.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

EPISÓDIO 8.4 - Medindo as sobras

Objetivos

❖ Implementar formas para medir e registrar as sobras.

❖ Perceber que, na medição experimental, as novas unidades de medida, tais como, palmo e dedo, admitem a persistência de sucessivas dimensões menores que a unidade de medida criada.

Descrição

Os alunos medem os terrenos e apresentam um registro próprio para as dimensões menores que o cúbito – as sobras. Em debate sugerem a criação de outra unidade de medida padrão menor que o cúbito do faraó, o palmo do faraó, com a qual realizam novas medições. Nesta nova medição, mesmo utilizando duas unidades padrão: o cúbito e o palmo, ocorre a reincidência de sobras. Os alunos respondem individualmente e em grupos questões sobre as dificuldades encontradas. As cenas 1 e 2, a seguir, correspondem a dois momentos do debate da classe sobre as questões e as soluções encontradas.

Cena 1

Die: Faz com os dedos fechados, não abertos.
Prof: Por quê?
Die: Porque ali deu nove e meio palmo, e a gente para não marcar meio...
Prof: Para não ter meio? Meio palmo é problema.
Die: Meio palmo dele é diferente dela.
Kell: ...para medir um palmo do faraó, mas quando é menos de um palmo?
Prof: [incompreensível] Fala mais alto Kell a sua questão.
Kell: O problema é o palmo do faraó, e se sobrar meio palmo?
Prof: E se sobrar meio palmo?
Eli: O palmo fechado do faraó.
Lean: O dedo do faraó.
Prof: Pessoal a sugestão aqui é se sobrar menos de um palmo, marcar com o dedo do Faraó, o que a turma acha? E se estiver medindo uma coisa que é menor que o dedo do Faraó? Deu uma sobra que é menor que o dedo?
Die: É um problema.
Dama: Pode pegar o barbante e a gente faz o cúbito do Faraó. A gente pega o barbante, coloca o papel na parede e coloca cúbito, aí a gente pega o palmo e escreve palmo.
Prof: Então a gente vai ficar criando várias unidades artificiais, o cúbito, o dedo, o palmo (...) Pessoal, a Dama está sugerindo que a gente faça um cartaz e coloque o palmo, um cúbito do Faraó desenhado para...
Dama: E quando fosse medir o terreno, sobrasse o espaço ele poderia procurar na tabelinha o tamanho, poderia procurar na tabelinha o tamanho.

Cena 2

Referindo-se às sucessivas criações de unidades artificiais: cúbito, palmo e dedo, a professora pergunta se isso foi suficiente para resolver o "problema das sobras".

Tali: Eu acho que não resolveu o problema, sempre vai estar surgindo coisa nova, antes era só o cúbito, agora o palmo, os dedos. É uma confusão cada um colocou uma coisa. Uns mediu com palmo e meio palmo, outros com dedo...
Dama: Mesmo quando a gente estiver medindo lá (...).
Prof: (...) sempre vão estar surgindo coisas novas? Que coisas, de que tipo, por exemplo?
Dama: Primeiro os passos mesmo, depois a gente viu que não dava certo, aí a gente viu o cúbito. Depois do cúbito a gente está vendo que vai sobrar espaço.
Prof: Então quero saber o seguinte: a Tali comentou que existe um problema, que problema que pode ter?
Tali: ...O problema é que às vezes a sobra é menor do que um dedo.
Cari: Poderia fazer assim: o palmo do Faraó, o cúbito e um espaço pequeno a mais. Quando o funcionário do Faraó fosse medir, ele ia ver se...

Dama: Cada vez que sobra um espaço pequeno, do tamanho do nosso dedo, eu acho que devia fazer como... A gente pegar o metro, e medir o cúbito do Faraó, e colocava na parede. Aí quando uma pessoa estivesse confusa e sobrasse um pequeno espaço menor a gente fosse lá e visse.

Análise

A cena 1, parece apontar que os alunos usam as unidades de medida para evitar resultados não inteiros na comparação da unidade de medida com a dimensão da lateral do terreno. Isto é manifesto por Die quando sugere que usemos os dedos fechados para obter, como resultado da medida da dimensão da lateral, uma quantidade inteira de palmos do faraó e não *"nove e meio palmo"*. Semelhante preocupação é expressa por Kell sobre o fato de obter como resultado meio palmo de faraó. Como solução para este problema os alunos sugerem da criação de uma tabela, apresentada por Dama, que incorpora a proposta de Lean em criar uma nova unidade de medida – o dedo do faraó.

Encontra-se nesta cena uma certa equivalência com a interpretação da unidade de medida feita por Jodi, na cena 2 do Episódio 8.3. Embora não ignorem, como Jodi, o aspecto contínuo de dimensões menores que a unidade de medida, esses alunos correlacionam as unidades de medida às unidades naturais, de modo a fixar nelas o aspecto discreto desta forma numérica. Percebemos que o propósito de tornar possível a generalização da apreensão da quantidade de dada extensão linear, decorre numa análise não abrangente que não possibilita a correlação quantitativa das unidades e subunidades de medida.

Estas unidades de medida menores adquirem o papel de resolver o "problema" do manejo ou representação de dimensões não inteiras, justamente aquelas que serão representadas numericamente pelas frações. Reportar-se ao uso de unidades menores permite uma ampla utilização da representação feita pelo numeral natural, solicitando somente algumas adaptações desta forma numérica, a exemplo das indicadas na cena 3, do episódio 8.3.

Ao aconselhar a tabelinha como forma de medir o terreno, Dama sugere que usemos o cúbito, palmo e dedo de forma semelhante ao procurarmos o tamanho de algo, usando o metro e centímetro, explicitado por ela na cena 2. Cabe aqui uma advertência, as situações de medida solicitadas em atividades de ensino podem atribuir aos centímetros e metros a mesma interpretação dada por estes alunos às diferentes unidades de medida, ou seja, uma interpretação que fixa o aspecto discreto no contínuo e não correlaciona unidade e subunidade. Usar uma régua para medir comprimentos pode significar o entendimento do centímetro e do milímetro, em relação ao metro, de modo idêntico à interpretação do cúbito, palmo e dedo, identificada nesta cena: servir de novas unidades menores, analisadas isoladamente, sem qualquer correlação quantitativa entre estas e a unidade de medida tomada inicialmente.

No movimento de elaboração da cena 2, embora Tali explicite que há uma confusão no uso de diferentes unidades de medida e indique que o problema das sobras não é resolvido com a utilização de novas unidades de medida, como o dedo, não ocorre a sugestão de que é possível estabelecer um vínculo quantitativo entre a dimensão das unidades de medida menores e o cúbito, propondo, isto sim, subdivisões deste em partes – subunidades de medida que, por se apresentarem menores que o cúbito, permitem cobrir as sobras. Confirma-se, na análise desta cena, que a ação de criar sucessivas unidades de medida para medir os aspectos unidimensionais mostra que o modelo de ação de criar unidades foi transformado em uma base - pensamento teórico.

Porém, esta ação de criar unidades ainda não se constituiu enquanto uma forma de ação essencial para a fração uma vez que não se elabora a ligação quantitativa entre a unidade de medida inicial – cúbito – e a unidade de medida menor como parte do cúbito. Esta ligação essencial consiste na dupla representação numérica: a) da relação de comparação das subunidades de medida com o cúbito e, b) da comparação desta subunidade com as sobras, consideradas integrante da criação do sistema de representação fracionário, mais geral que o natural por incorporá-lo e expandi-lo.

As ações no interior desta atividade, embora não resultem no estabelecimento da linguagem fracionária uma vez que não manifesta o vínculo quantitativo entre as unidades de medida criadas e o cúbito, configuram uma orientação comum para ações concretas diante de uma classe de problemas que envolve a necessidade de quantificação de aspectos contínuos unidimensionais: o processo de criação de unidades de medida menores para medir as sobras.

Podemos considerar que o procedimento criado gerou uma mudança do aluno *em si* uma vez que se adquiriu um dado modelo-orientação para suas ações no interior de um sistema de situações que o cercam. Conforme aponta Rubtsov[4], *modificam-se os modos de funcionamento e regulagem das suas próprias ações,* sobre criar unidade de medida para medir dimensões

[4] In GARNIER, CATHERINE (org.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtivista escolar russa.* 1ªEd. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.129-195.

menores que as existentes. O quadro a seguir representa a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO XVI – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.4

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.4 **Medindo as sobras**	**Cena 1** Implementar formas para medir e registrar as sobras.	**Criação de unidades de medida menores para medir a dimensão menor que a unidade de medida existente. Evitam-se resultados numéricos não inteiros por fixar-se no aspecto discreto da unidade de medida.**	*"O problema é o palmo do faraó, e se sobrar meio palmo?"* *"O palmo fechado do faraó".* *"O dedo do faraó".* *"Pode pegar o barbante e a gente faz o cúbito do Faraó. A gente pega o barbante, coloca o papel na parede e coloca cúbito, aí a gente pega o palmo e escreve palmo."*
	Cena 2 Perceber que, as novas unidades de medida, admitem a persistência de sucessivas dimensões menores que a unidade de medida criada.	**A ação de criar sucessivas unidades de medida para medir as sobras, transforma-se em uma base - pensamento teórico. Porém a inexistência do vínculo quantitativo entre a dimensão das unidades de medida menores e o cúbito, impossibilita a criação do sistema de representação fracionário, mais geral que o inteiro por incorporá-lo e expandi-lo.**	*"Poderia fazer assim: o palmo do Faraó, o cúbito e um espaço pequeno a mais. Quando o funcionário do Faraó fosse medir, ele ia ver se..."* *"Cada vez que sobra um espaço pequeno, do tamanho do nosso dedo, eu acho que devia fazer como... a gente pegar o metro, e medir o cúbito do Faraó, e colocava na parede. Aí quando uma pessoa estivesse confusa e sobrasse um pequeno espaço menor a gente fosse lá e visse".*

EPISÓDIO 8.5 - Medir as sobras sem criar novas unidades.

Objetivo

Elaborar criativamente processos para medir e registrar numericamente as sobras, de modo a estabelecer a relação entre as unidades de medida menores e o cúbito, processo integrante da criação do sistema de representação fracionário.

Descrição

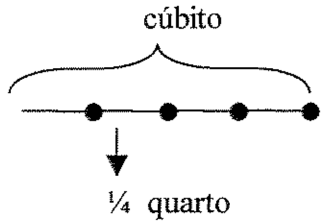
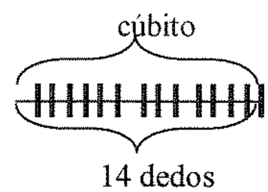
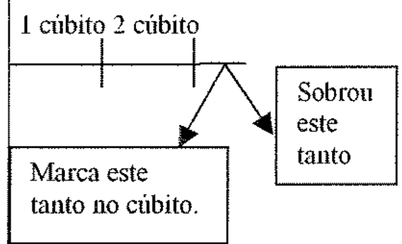
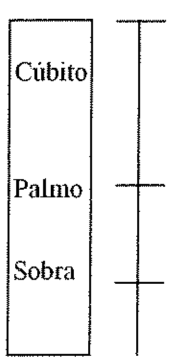
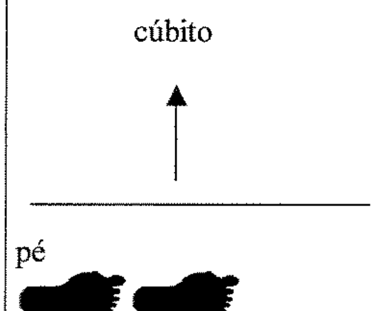
Criar indefinidamente novas unidades artificiais: cúbito, palmo e dedo; desconexas entre si, não oferece campo fértil para a criação da fração uma vez que permite que a fixação do aspecto discreto na unidade artificialmente criada e a permanência na forma numérica que lhe é correspondente, o número natural. De tal modo, para que os alunos refletissem sobre o limite encontrado na medição experimental de uma extensão linear e, estabelecessem a relação entre as unidades de medida menores e o cúbito, embrião do conceito de fração, sugeriu-se a questão: como medir as sobras sem criar novas unidades artificiais?. As respostas em grupo, dadas pelos alunos a esta questão constituem a cena 1.

Decidido o modo de medir sem as novas unidades artificiais, ofereceu-se a cada grupo duas tiras de papel representativas da lateral de um terreno, para que os alunos medissem e registrassem a medição. Estas tiras de papel tinham dimensões diferentes e ambas não comportavam um número inteiro de vezes o cúbito. O quadro contendo o resultado das medições constitui a cena 2.

Cena 1

Após a discussão em grupo sobre as duas questões, que são: 1) para medir as sobras criou-se uma nova unidade artificial – o palmo. Isto foi suficiente? e 2) como medir as sobras sem criar novas unidades artificiais?; os alunos elaboraram o painel que segue, para o debate.

QUADRO XVII – Soluções para medir as sobras sem criar novas unidades artificiais.

Grupo 1 Lean. Die. Eli e Bru(o)	**Grupo 2** Cami. Iva. Tali e Samu	**Grupo 3** Vini. Char. Rica. Iv e Muri
1) Não porque pode sobrar unidades menores que um palmo ou maiores. 2) Dividindo o cúbito em quartos. Ex.: 	1) Porque poderia dar menor que um palmo ou maior que um palmo. 2) Contando com os dedos do faraó. Cada cúbito tem 14 dedos e um terreno, que é dois cúbitos e 7 dedos, deu 34 dedos do faraó. 	1) não, porque (incompreensível) sobrou um pouco mais. 2) Com o cúbito pode marcar o terreno e a sobra nós medi com o cúbito e marcamos com uma *canetinha*. 
Grupo 4 - Cari. Helle. Ever. Jaque. Acarol. Tama. Pame.	**Grupo 5** - Dama. Regi.Regi(2). Apau e Tali(2)	**Grupo 6** - Prisci. Patri. Janai. Apau(2). Kell e Bru(a)
1) Não, porque um palmo de uma pessoa é maior do que o palmo da outra. 2) É que nós usamos o cúbito e o palmo simples o que sobrou medimos com o palmo, assim: 	1) Não, porque sempre dá novas formas de medida para medir terrenos porque sempre sobra espaço. 2) Com o cúbito ou palmo, pé, dá para contar.	1) Não dá para usa essa nova unidade artificial, e se colocar um palmo e sobrar, mas, então, não dá. 2) Com o pé ou o cúbito assim vai dar para contar sem unidades novas. 

Análise

As respostas à primeira questão confirmam o movimento de elaboração de cenas apresentadas em episódios anteriores e referem-se:

- ❖ Primeiro, à possibilidade do uso indiscriminado da nova unidade de medida, ao expressarem : *"Não, porque um palmo de uma pessoa é maior do que o palmo da outra"(grupo 5)*;

- Segundo, à existência de sobra, como é observado nos grupos 1, 2 e 3 e;

- Terceiro, à preocupação com a persistência das sobras, compreendendo-as, de modo mais geral, para qualquer unidade artificial criada, como podemos observar no grupo 6 ao manifestarem: *"Não, porque sempre dá novas formas de medida para medir terrenos porque sempre sobra espaço".*

Quanto às sugestões para a resolução da segunda questão, como medir as sobras sem criar novas unidades artificiais, notamos quatro elaborações diferentes. Na primeira elaboração, observada nos grupos 5 e 6, parece que a forma de solução para o problema está em usar apenas os cúbitos e os "pés" na tarefa de medir, conforme ilustrado no Quadro XVII. Estes alunos observam que a criação de novas unidades artificiais não resolve o problema das sobras, no entanto, não parecem ponderar o problema, avaliando a possibilidade do surgimento de sobras como uma ocorrência possível com o uso de qualquer unidade artificial, ou seja, não a interpretam de modo mais geral e, assim, estabelecem que cúbitos e pés podem dar conta da tarefa de medir a lateral do terreno.

Na segunda elaboração, ocorre a transposição da dimensão da sobra para o cúbito evidenciada quando utilizam as marcas para representá-la. Manifestam a existência da sobra de modo essencialmente externo, caracterizando uma interpretação perceptiva desta dimensão. Esta elaboração é observada no grupo 3, quando manifestam: *"e a sobra nós medi com o cúbito e marcamos com uma canetinha"* e, igualmente, no grupo 4. Observa-se que o conteúdo – aspecto contínuo – se sobrepõe à forma numérica conhecida, o número natural e sem estabelecerem uma correlação forma e conteúdo, representam a dimensão apenas de modo perceptivo.

A terceira elaboração é observada nos grupos 2 e 4. Estes grupos assinalam, para resolver o problema das sobras, respectivamente o dedo e o palmo como unidade artificial complementar ao cúbito, na medição, e estabelecem, diversamente, uma relação entre os cúbitos e essas unidades artificiais complementares, sendo que:

- O grupo 2 estabelece que o cúbito corresponde a catorze dedos e argumenta em favor da utilização de dedos como unidade de medida geral na medição de dimensões. Este grupo sugere que usemos o cúbito para medirmos dimensões muito grandes, fazendo a equivalência do cúbito aos 14 dedos, diminuindo a ocorrência das sobras, conforme evidencia Cami quando expõe "... *cada cúbito é catorze dedos e* *quando a gente medi dois cúbitos são vinte e dois..., não, vinte e oito dedos".* A resolução no interior deste grupo, embora não resulte no estabelecimento da linguagem fracionária, como conhecemos atualmente, manifesta o vínculo que relaciona a dimensão da unidade de medida criada como parte da existente e;

- O grupo 4, embora não explicite a relação do palmo com o cúbito no Quadro XVII, no debate também apontam a relação entre a dimensão da unidade de medida criada como parte da existente, ao evidenciar que cada cúbito equivale a dois palmos. No entanto, considerando que palmos admitem a existência maior de sobras, este grupo propõe que as sobras, menores que o palmo, sejam identificadas de modo perceptível, marcando-as no próprio palmo, conforme ilustram.

O grupo 1 manifesta a quarta elaboração, com a subdivisão do cúbito a partir da sobra obtida. Conforme explicam para a classe, o quarto é resultado da comparação da sobra com o cúbito, ou seja, os alunos obtiveram uma sobra e observaram que ela cabe quatro vezes no cúbito e, deste modo, representa um quarto deste. Também se pode notar que este grupo utiliza uma forma numérica fracionária para representar a medida da sobra.

As ações dos alunos nesta atividade sobretudo nas duas últimas elaborações, parecem indicar modificações que apontam para o estabelecimento de uma relação quantitativa entre as unidades de medida criadas – o dedo, o palmo e a sobra – e o cúbito, havendo a relação de equivalência, respectivamente a catorze dedos, dois palmos e quatro quartos.

Em nossa interpretação, esta modificação configura a existência de uma orientação comum para ações concretas diante de um grupo de problemas que envolvem a necessidade de quantificação de aspectos contínuos unidimensionais, cuja dimensão não comporta um número inteiro de vezes a unidade de medida, essencial para a elaboração conceitual da fração. Podemos considerar que a conexão estabelecida por estes grupos entre a unidade de medida maior e a menor pressupõe mudanças no modo de pensar do aluno uma vez que, ao se modificarem os modos de funcionamento e regulagem de suas próprias ações, se adquire um modelo que as orienta num conjunto de situações semelhantes, caracterizando um pensamento teórico.

Forma e conteúdo se inter-relacionam nesta cena quando se propõe a articulação da forma numérica na representação das sobras. A solução que propõe a medição com a unidade dedo parece ser sugerida para atender ao uso da unidade natural sem qualquer modificação.

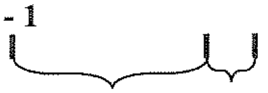
Entretanto o grupo 1 articula a forma numérica e usa a fração ¼ para estabelecer a correlação entre a sobra e a unidade de medida - cúbito.

A fração resulta da comparação da sobra com o cúbito, observando que ela equivale à parte que corresponde à subdivisão deste em quatro unidades. As propostas dos grupos 2 e 4, embora estabeleçam coerentemente a conexão da unidade de medida cúbito com palmos e dedos, não são escolhidas pela classe como modo de resolver o problema das sobras sem criar novas unidades artificiais, depois de um longo debate os alunos votam na proposta do grupo 1.

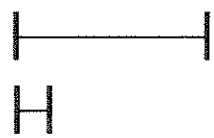
Cena 2

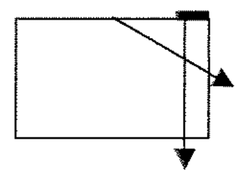
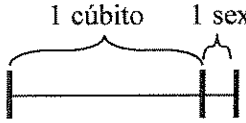
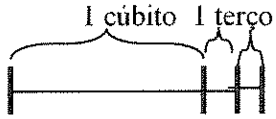
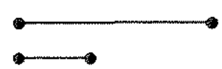
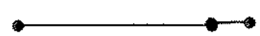
Os alunos apresentam os registros da medição proposta – medir duas tiras representativas de laterais de terrenos cujas dimensões não comportam um número inteiro de vezes o cúbito.

QUADRO XVIII – Registro da medição das sobras.

<table>
<tr><td>Grupo 1
Tama. Cari. Pame.</td><td>Grupo 2
Tali e Iva</td><td colspan="2">Grupo 3
Herb e Eds.</td></tr>
<tr><td>T - 1

1 cúbito ¼

T - 2

1 cúbito ¼
meio quarto</td><td>Nós dividimos o terreno deu um cesto [sexto]. Pegamos um cúbito e o tanto que restou do terreno, dividimos: Exemplo
cúbito

cesto[sexto]
Pegamos o resto e dividimos o cúbito, fomos dividindo e deu um cesto [sexto] .</td><td colspan="2">Herb
R: Um cúbito e um quarto.

Eds
R: Um cúbito e um quinto.

1cúbito
1 quinto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo 4 – Jana e Acarol.</td><td colspan="2">Grupo 5 – Die e Vini.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terreno 1
1 cúbito 1 sexto

Terreno 2
1 cúbito 1 terço e meio quarto
</td><td colspan="2">T1 Deu um cúbito e um terço

T2

Deu um cúbito e um quinto</td></tr>
</table>

Análise

Uma vez que os grupos receberam tiras iguais em dimensão, podemos notar nesta cena que embora ocorra uma preocupação maior com a precisão na medição das sobras, esta ainda se apresenta de maneira experimental resultando em registros diferentes. Ao utilizarem a proposta escolhida pela classe na aula anterior, isto é, a proposta do grupo 1 apresentada no Quadro XVII, observamos que os grupos adotam dois modos diferentes de proceder a medição.

Um deles refere-se à medição por adição de sucessivas subunidades de medida. Neste procedimento podemos avaliar que há a definição a priori da subunidade para posterior comparação com a dimensão da sobra, podendo resultar, para uma única sobra, em um agregado de registros numéricos. Outro procedimento observado refere-se à comparação direta da sobra à unidade de medida com o propósito de identificar a que parte da unidade de medida a sobra corresponde.

Embora se diferenciem estes procedimentos, eles são utilizados conjuntamente pelos grupos. Um exemplo disso é visto no grupo 1. Para medir a sobra, primeiro empreenderam a divisão do cúbito em quartos, demonstrando utilizar o primeiro procedimento na sobreposição de grande parte da sobra. Em seguida, como não puderam sobrepor toda a sobra, para representar a nova sobra obtida, utilizam o segundo procedimento e comparam a nova sobra com a unidade maior – quarto – a fim de perceber que parte desta unidade a sobra representa. Assim, encontram a medida meio quarto. Da mesma forma procedem os alunos do grupo 4 para a medida da lateral do segundo terreno.

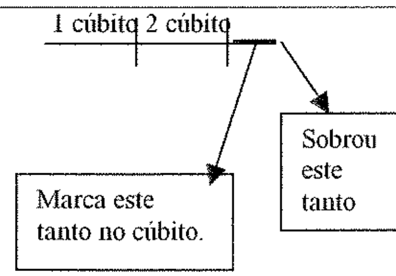
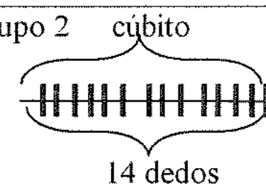
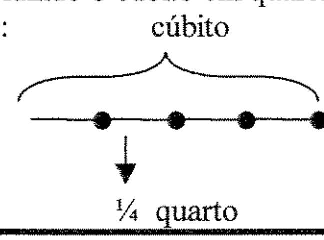
Estes dois procedimentos refletem dois modos de correlacionar forma e conteúdo. No primeiro, a subunidade de medida, objeto de conteúdo contínuo, toma a forma de unidade discreta. À semelhança da pedra na contagem por correspondência um-a-um de aspectos discretos dos objetos, esta subunidade é colocada em correspondência com a sobra de modo que possa sobrepô-la ao máximo. Embora, neste procedimento, a forma se articule ao conteúdo, é ela que direciona a ação de medir.

No segundo procedimento, busca-se uma relação direta da sobra com a unidade maior – unidade de medida. Agora, de modo inverso, é a sobra que assume papel de subunidade discreta (o novo um) e sua representação depende do estabelecimento de uma correlação quantitativa desta com a unidade. Neste procedimento, podemos interpretar que forma e conteúdo se articulam e, a relação quantitativa permitida nesta conexão, caracteriza um conhecimento teórico, pois elucida-se uma inter-relação não óbvia, revela-se uma transformação que expressa um movimento mais geral do fenômeno medição. O juízo particular de medir as sobras com os palmos e dedos transforma-se na possibilidade de estabelecer correlação em qualquer comparação de unidade com subunidade.

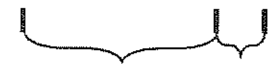
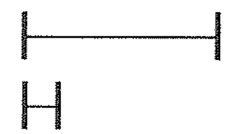
Embora a *forma de subunidade* permita a correspondência um-a-um com os números naturais, os registros dos alunos evidenciam o caráter diferenciado de utilização deste número. Ilustrações e palavras auxiliam a representação da unidade ou subunidade de medida, que ainda ocorre sem o total emprego da linguagem fracionária.

O quadro a seguir representa a síntese do movimento de elaboração neste episódio.

QUADRO XIX – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.5

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.5 **Medir as sobras sem criar novas unidades**	**Cena 1** Criam-se soluções para medir as sobras sem criar novas unidades artificiais	**1ª)Não se pondera que a possibilidade do surgimento de sobras é uma ocorrência possível com o uso de qualquer unidade artificial.**	*Grupo 5 "Com o cúbito ou palmo, pé, dá para contar". Grupo 6 "Com o pé ou o cúbito assim vai dar para contar sem unidades novas".*
		2ª) A dimensão contínua é representada apenas de modo perceptivo ao se identificar a sobra no cúbito. O conteúdo, aspecto contínuo, sobrepõe-se à forma da linguagem numérica conhecida, o número natural.	
		3ª) Assinala-se respectivamente o dedo e o palmo como unidade artificial complementar ao cúbito na medição e se estabelece uma relação entre o cúbitos e essas unidades artificiais complementares	Grupo 2  Grupo 4 *O cúbito é o mesmo que dois palmos.[fala de Cari em debate não transcrito para a cena]*
		4ª)Elabora-se a subdivisão do cúbito a partir da sobra obtida	Dividindo o cúbito em quartos. Ex.: 

QUADRO XIX – SÍNTESE DAS ELABORAÇÕES DO EPISÓDIO 8.5

		Elaborações analisadas	
Episódio 8.5 **Medir as sobras sem criar novas unidades**	**Cena 2** Estabelecem-se procedimentos de medição e registro das sobras.	**1° procedimento: medição por adição de sucessivas subunidades de medida. Forma se articula ao conteúdo, e direciona a ação de medir.**	T - 1  1 cúbito ¼ *"A gente dividiu quatro vezes, aí a gente marcou deu certinho.". [Cari explica seu procedimento em diálogo não transcrito].*
		2° procedimento: é a sobra que assume papel de subunidade discreta (o novo um) e sua representação depende do estabelecimento de uma correlação quantitativa desta com a unidade de medida maior.	Nós dividimos o terreno deu um cesto [sexto]. Pegamos um cúbito e o tanto que restou do terreno, dividimos: Exemplo cúbito  cesto[sexto] Pegamos o resto e dividimos o cúbito, fomos dividindo e deu um cesto [sexto] .

8.2 Conclusões da terceira unidade didática

As análises deste conjunto de atividades apontam que os alunos elaboram juízos sobre os aspectos envolvidos na quantificação do aspecto contínuo de grandezas lineares, ao sugerirem soluções para o problema da divisão do terreno às margens do rio Nilo.

Nas elaborações podemos perceber diversas inter-relações da forma e conteúdo caracterizadas, de um lado, como juízos, por estarem mais ligados aos aspectos perceptíveis e, de outro, como conceitos ou juízos mais amplos, por abrangerem ação e pensamento de forma mais geral (KOPNIN, 1978).

Sendo assim, a primeira elaboração, deste conjunto, que expressa esta inter-relação é assinalada na definição de uma unidade de superfície que possa corresponder um-a-um com a forma numérica. Esta elaboração parece transpor a correspondência um-a-um dos objetos de aspectos discretos, como árvores e alunos, para o pedaço do terreno-lote, ao fazer corresponder uma unidade de superfície para cada aluno, diferente da elaboração mais ligada à forma algorítmica de divisão das terras às margens do rio Nilo, decorrente da procura de um resultado numérico centrado no conhecimento formalizado da aluna.

Outra expressão desta inter-relação forma e conteúdo é encontrada nas imagens usadas para comunicar o novo *conteúdo* envolvido na ação de quantificar superfícies, especialmente, no sentido de assemelhar o aspecto contínuo ao aspecto discreto, com a correlação deste aspecto à unidade artificial. As explicações dos alunos apresentam traçados e figuras como *forma de linguagem* e evidenciam a importante inter-relação da geometria no estabelecimento de nexos na medição do terreno-lote por sua lateral.

A criação da unidade artificial por estes alunos mostra que o novo conteúdo – o aspecto contínuo – se modifica à base do aspecto discreto, inerente à contagem de unidades naturalmente separadas umas das outras. Nas soluções dadas isto pode ser observado quando buscam referência em objetos como: o rio na forma de um quadrado, as árvores, a calçada da quadra, o tamanho do pé na solução que divide satisfatoriamente o terreno.

Ao refletirem sobre os aspectos importantes na marcação dos terrenos, os alunos evidenciam que o problema torna-se real para eles visto que, de um lado, assinalam preocupações com a invasão de terras, localização do terreno e prejuízos no plantio e, de outro, usam para denominar as laterais do terreno uma linguagem própria, apontando que, diferente de ser considerado um retângulo, este desenho adquire significação real, correspondente à atividade com terrenos.

Em outros trabalhos, freqüentemente, é apresentado ao aluno um objeto para ser subdividido, com formato e unidades de medida antecipadamente apresentados ao aluno. Estas atividades centram a aquisição do conceito de fração na aplicação mecânica da unidade de medida, alienando o aluno da reflexão sobre o nexo da criação da unidade artificial e sobre os conteúdos discreto e contínuo inerentes à contagem. Um exemplo deste tipo de atividade encontra-se no segundo capítulo dessa dissertação.

Outro momento em que a atividade proporcionou elaborações conceituais manifesta-se quando os alunos participam criativamente na resolução do problema do uso de unidades de medida de comprimento não padronizadas, dando indicações do uso do instrumento de medida. O entendimento de que o comprimento de dada parte do corpo ou objeto, escolhido como unidade de medida única, pode ser transposto para outro objeto – pedaço de pau ou barbante – com o propósito de servir de instrumento de medida, evoca, para a unidade artificial, a forma da unidade natural, isto é, seu aspecto discreto.

A interpretação da unidade de medida considerando-a unicamente como uma unidade discreta, sem a percepção de qualquer correlação entre as unidades de medida criadas para sobrepor as sobras e aquelas já existentes, equivale a uma análise não abrangente do papel das unidades de medida. Vale a advertência de que o centímetro e o milímetro, em relação ao metro, podem ser interpretados como unidades de medida desconexas, de modo semelhante ao observado no episódio 8.5 para o cúbito, o dedo e o palmo, se analisados isoladamente, sem uma preocupação com o estabelecimento do nexo mais abrangente do papel das unidades de medida.

As atividades, com base no desenvolvimento lógico-histórico, permitiram envolver o aluno no movimento de elaboração deste outro nexo fundamental para a fração, caracterizando a percepção isolada das unidades de medida apenas como um momento de transição das formas de pensamento. Por meio da atividade, desencadeamos a elaboração da nova relação numérica que compreende a unidade de medida menor como parte da maior, permitindo-se o estabelecimento de nexos que caracterizam um pensamento teórico.

Diante do novo desafio: registrar a medida de uma dimensão menor que o cúbito, os alunos transformam criativamente a unidade de medida de maneira a quantificar as sobras. A escolha de palmos e dedos como solução que possibilita representar mais plenamente a dimensão do objeto parece constituir a apreensão da idéia essencial da criação da unidade artificial, interligando a idéia particular, que permitiu a criação de uma unidade artificial, com modos de criação de unidades de medida que concebem mais plenamente o aspecto contínuo do objeto.

Ao apontar-se atividades fundamentadas na inter-relação *forma numérica* e *conteúdo* de desenvolvimento do conceito de fração, possibilitou-se que o registro fosse expresso de maneira criativa, visto que não enfatizamos a linguagem formal da fração. Na criação de novas unidades de medida, elementos coadjuvantes na representação mais precisa das sobras, novamente se nota esta inter-relação, observada ora na tendência em adaptar a forma numérica convencional, o número decimal ou sinais matemáticos, para poder representar numericamente os resultados obtidos em cúbitos, palmos e dedos e, ora na tendência em organizar e transformar o conteúdo – dimensão linear, à semelhança do aspecto discreto inerente à contagem com número natural.

Após diferentes sugestões para a representação de dimensões não inteiras, incluindo a utilização do dedo como unidade menor que o cúbito, os alunos propõem subdivisões deste, em partes – subunidades – de medida que, por se apresentarem menores que o cúbito, permitem cobrir as sobras ao mesmo tempo em que possibilitam estabelecer uma relação quantitativa entre subunidade de medida e a unidade cúbito.

Em nossa interpretação os alunos articulam forma e conteúdo e a relação quantitativa permitida nesta conexão caracteriza o conhecimento teórico uma vez que se revela uma transformação do pensamento e ação articuladamente.

Expressa-se um movimento mais geral do fenômeno medição, o juízo particular de medir as sobras com os palmos e dedos se transforma na possibilidade de correlacionar, de modo geral, qualquer unidade com subunidade de medida, estabelecendo relações quantitativas entre elas, conforme observamos quando os alunos correlacionam o quarto à metade do quarto. A *forma de subunidade* aceita a correspondência um-a-um com os números naturais, no entanto, os registros dos alunos evidenciam o caráter diferenciado de utilização deste número, visto que usam ilustrações e palavras coadjuvantes na representação das subunidades de medida. Do ponto de vista educacional, é nesta conexão que reside a idéia essencial para o novo campo numérico dos racionais.

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, interpretamos a aprendizagem do conceito de fração como movimento amplo e dinâmico. Este movimento estabelece-se, partindo da ampliação da unidade natural, usada na quantificação de aspectos discretos e possibilita a quantificação do aspecto contínuo com a unidade artificial. Esse mesmo movimento tem como resultado a transição e mudança da forma numérica diante do novo conteúdo contínuo, envolvido na contagem.

Este movimento ocorre porque, para quantificar o aspecto contínuo, selecionamos a unidade artificial à semelhança da unidade natural, imprimindo uma separação característica dos aspectos discretos para o aspecto contínuo.

Assim, buscamos restabelecer para o sujeito que aprende o conceito de fração uma unidade dinâmica entre forma e conteúdo, propondo atividades que problematizam esse conhecimento, focalizando dialeticamente a linguagem matemática sem recair somente numa análise lógico-formal desta.

Por reconhecermos que a abordagem estreita da linguagem focaliza somente os aspectos lógico-formais no estudo de conceitos matemáticos, excluindo o aluno do movimento de formação dos nexos essenciais do conceito, desenvolvemos, como base fundamental para as atividades de ensino, a possibilidade de pensar sobre a quantificação de aspectos contínuos dos objetos/fenômenos. Portanto, muito diferente de apenas constituir situações de aplicação deste conceito, as atividades de ensino assumiram papel importante, pois permitiram que os educandos refletissem sobre suas experiências diretas, usando seus próprios conhecimentos e linguagem na elaboração da fração.

Entendemos que a situação de aprendizagem deve proporcionar a abordagem ampla da complexidade envolvida no desenvolvimento do conhecimento sobre a fração e, para tanto, focalizamos os principais nexos identificados através do estudo lógico-histórico do desenvolvimento deste conceito.

O estudo lógico-histórico do conceito de fração inspirou as atividades de ensino, apontando as conexões indispensáveis para uma compreensão mais profunda do movimento da forma numérica e do conteúdo compreendido nas diversas ações de medir aspectos contínuos de grandezas, destacados nos significados das práticas sociais diante das diversas necessidades de medição.

Esse movimento forma-conteúdo permitiu-nos constatar que o conceito de fração é síntese de um movimento de ampliação da síntese numérica envolvida na quantificação dos aspectos discretos - o número natural, tendo por base a reflexão sobre a quantificação de aspectos contínuos dos objetos, mediante o estabelecimento de complexos nexos, como: da continuidade, da grandeza e de unidade de medida que, enquanto pensamento e linguagem, abrangem a apropriação de diferentes significados.

Diante desta consideração a elaboração de conceitos não pode ocorrer apenas como a aquisição de uma escrita numérica. Por envolver pensamento, ação e linguagem estes significados pressupõem restaurar, para a escrita numérica – a forma, o conteúdo relacionado à contagem dos aspectos contínuos, do qual é síntese. Para o conceito de fração, consideramos *forma* os momentos de síntese e sistematização numérica que constituem modos mais formais e estáveis de interpretar o objeto ou fenômeno e o *conteúdo*, as ações de medir que surgem das necessidades práticas de quantificação de aspectos contínuos dos objetos e fenômenos e que imprimem mudanças na *forma* por seu aspecto revolucionário.

É refletindo sobre a dimensão contínua de objetos, conferindo-lhe uma característica semelhante ao aspecto discreto, que desencadeamos um processo de movimento do pensamento na atividade de ensino. Neste processo a *forma numérica* – número natural – é modificada dinamicamente para a fração, no propósito de traduzir numericamente a correlação entre unidade de medida e a extensão do objeto medido, quando esta unidade não lhe cabe um número inteiro de vezes.

Em face à exploração do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de fração desenvolvemos atividades, nas quais os alunos podem refletir: sobre a diferença do contexto de uso do número natural na quantificação de aspectos discretos e contínuos, sobre a quantificação de qualidades comuns - grandeza, sobre o estabelecimento de unidades e subunidades de medida e sobre a comparação da unidade de medida com a grandeza e a síntese numérica dessa comparação como embrião da fração.

A avaliação que apresentamos a seguir reflete a síntese geral dos resultados descritos detalhadamente nos capítulos seis, sete e oito, os quais abordam as unidades didáticas: **a unidade natural, a unidade artificial e a fração.**

Nas análises constatamos que os alunos elaboram conceitualmente e desenvolvem formas de pensar relacionadas ao movimento das ações de medir aspectos discretos e contínuos – conteúdo e das sínteses numéricas – forma, visto que suas reflexões estiveram pautadas em suas próprias experiências. Possibilitamos a elaboração de juízos sobre os aspectos envolvidos na contagem, buscando em seu cotidiano a percepção da organização natural em unidades de alguns desses objetos como a água, a areia, o cimento, a terra, as estrelas, os planetas, as frutas, etc.

As formas de definibilidade das crianças apresentam-se de dois modos diferentes. No primeiro, como proposições ligadas à percepção e exemplificação, que consideram o aspecto discreto dos objetos, sem o expressarem formalmente, uma vez que relacionam o singular e o universal dos objetos de forma sincrética. E no segundo, como forma conceitual de definição onde, seguramente, relacionam o singular e o universal dos objetos de maneira dedutiva, como o caso do grupo de alunos que define a unidade natural como: "Unidade natural é tudo que nasce através da natureza". Podemos deduzir, a partir dessa forma "aproximada" de definição, grande parte dos objetos organizados em unidades naturais.

Na reflexão sobre a variação quantitativa de qualidades comuns, principalmente quando comparam objetos em diferentes situações, observamos que identificam: grandezas que variam o grau de intensidade e que permitem a quantificação desta variação, como altura, velocidade e peso e grandezas que, em suas interpretações, não possibilitam a quantificação do grau de intensidade da variação, como "água", ferocidade, amizade e "vento".

Uma vez que a percepção visual de um aspecto qualitativo comum, que proporciona a diferenciação da dimensão contínua do objeto, é insuficiente na determinação do recipiente de dimensão maior, a atividade sobre o senso de grandeza permitiu a reflexão sobre a possibilidade de conhecer, quantitativamente, o aspecto contínuo dos objetos. Por esse motivo, os alunos puderam elaborar estratégias e articular forma e o conteúdo, ao organizarem os recipientes de vidro, por exemplo.

Solucionar o problema da diferenciação das dimensões de aspectos contínuos dos objetos envolveu percepções e conhecimentos da geometria. Os alunos desenvolveram ações para medir aspectos contínuos dos recipientes que se apóiam no movimento de adaptação do *conteúdo* contínuo do objeto a uma *forma* numérica conhecida que possibilite a quantificação, estabelecendo modos próprios de comparar/medir, tais como a observação da capacidade de conter água, ou mesma quantidade de líquido.

A forma usada por esses alunos para medir segue o critério ter a mesma natureza – *mesma espécie*, do objeto a ser medido, uma vez que buscam, com a sugestão de usar água na comparação, observar o volume do recipiente. Embora as formas de medição desenvolvidas por estes alunos, neste momento, ainda não atribuam um aspecto discreto às dimensões contínuas, pois não as tornam uma adição de sucessivas unidades de medida, percebemos que a atividade desenvolvida possibilitou a reflexão sobre a variação quantitativa de qualidades comuns e a resolução criativa do problema de quantificar aspectos contínuos dos objetos – *seu conteúdo*.

Entendemos que o processo que permite aos alunos argumentarem e definirem nexos do conceito de fração, usando uma linguagem mais natural, constitui legitimamente um processo de aprendizagem que restabelece o pensar criativo. Este processo de elaboração se perde, quando o conceito é apresentado em atividades, nas quais o aluno somente relaciona a linguagem numérica fracionária a uma parte da "pizza" e do "chocolate". Nesta abordagem a aprendizagem é considerada unicamente como uma transposição direta da linguagem rotineira para a linguagem científica.

Também atividades que propõem a interpretação de atitudes do sujeito, face aos sinais da linguagem matemática formalizada, como as descritas no segundo capítulo deste estudo: "Minha altura é..." e "A justiça na divisão de chocolates", em nossa visão, indicam a abordagem do conhecimento apenas em seu significado relativo às regras da lógica formal.

O processo de aprendizagem de conceitos, implementado neste estudo, não consiste em uma simples transferência da linguagem cotidiana para a científica, mas uma mudança de conteúdo e forma do conhecimento.

Por este motivo as atividades apresentadas serviram para nos indicar a importância de se propor aos alunos uma reflexão sobre a variação quantitativa de qualidades comuns, principalmente quando comparam objetos em diferentes situações e constroem articuladamente o movimento dinâmico do conceito de unidade natural ao de unidade de medida, como observamos quando estabelecem as primeiras reflexões sobre a organização dos aspectos contínuos da identificação da unidade artificial. Ao organizar os recipientes de vidro os alunos pensam sobre seus aspectos geométricos: altura, largura, comprimento e capacidade, solucionando criativamente o problema de diferenciar suas dimensões. Suas percepções se fixam na observação de um aspecto qualitativo comum que permita, visivelmente, a diferenciação da dimensão. Primeiro, selecionam aspectos desconexos: somente a altura ou a largura do recipiente, para a determinação daquele de maior dimensão. Depois observam a insuficiência desta seleção e desenvolvem formas de comparação que constituem medições rudimentares, por ainda não estabelecerem a relação biunívoca entre a unidade de medida e um conjunto numérico.

Os alunos manifestam ações para medir os aspectos contínuos apoiadas na adaptação de um isolado cujos elementos interferem necessariamente na medida de volume. Isto quer dizer que se dá *forma* de unidade de medida ao conteúdo contínuo da água, ao se comparar a capacidade de conter água desses recipientes, admitindo o estabelecimento de juízos de intensidade.

Na quantificação das "sobras", os alunos apontam, criativamente, formas de transformar a unidade de medida para possibilitar sua quantificação. A escolha de palmos e dedos admite representar mais plenamente a dimensão linear do objeto, constituindo a apreensão da idéia fundamental da criação da unidade artificial. Esta idéia particular institui o elo que permite a criação de unidades de medida que concebem, mais plenamente, o aspecto contínuo do objeto.

Os alunos sugerem a utilização de unidades de medida menores, para a representação de dimensões não inteiras – as sobras. Estas unidades menores permitem medir as sobras e, ao mesmo tempo, proporcionam a elaboração de uma relação quantitativa entre a unidade de medida menor e a unidade artificial - cúbito.

Forma e conteúdo se articulam na linguagem numérica que representa a quantidade de subunidades sobrepostas à sobra. Ao explicarem suas representações numéricas da medida em cúbito, os alunos mostravam compreender o conteúdo racional representado, correlacionando unidade e subunidade em dois procedimentos:

No primeiro, o conteúdo contínuo da subunidade de medida adquire a forma de unidade discreta, à semelhança da contagem de aspectos discretos dos objetos com a pedra. Neste procedimento os alunos sobrepõem a sobra com a subunidade de medida, resultando numa representação aditiva de subunidades. Esta possibilidade, de sobrepor as sobras com as subunidades, corresponde ao primado da forma na ação de medir.

No segundo procedimento, a correlação quantitativa da sobra com a unidade delega à sobra o papel de subunidade discreta, isto é, se a sobra cabe seis vezes no cúbito, então ela representa a sexta parte deste.

Do ponto de vista das formas de pensamento apontadas por Kopnin (1978), observamos também a elaboração de um conhecimento teórico sobre as ações práticas de medição, uma vez que, ao expressarem um movimento mais geral do fenômeno medição, esses alunos revelam a transição do pensamento; isto é, o juízo particular de medir as sobras com os palmos e dedos se transforma na possibilidade de correlacionar, de modo geral, qualquer unidade com uma subunidade de medida, estabelecendo relações entre elas, como quando correlacionam a sobra à metade de um quarto. A *forma de subunidade* aceita a correspondência um-a-um com os números naturais, no entanto, os registros dos alunos evidenciam o caráter diferenciado de utilização deste número, visto que usam ilustrações e ressignificam sinais comuns da linguagem formalizada na representação das subunidades de medida. Do ponto de vista educacional, é nesta conexão que reside o novo campo numérico racional.

Ao explorar como as elaborações desses alunos estão relacionadas ao desenvolvimento conceitual da fração tratado sob a dialética forma e conteúdo, apresentamos argumentos que apontam a lógica dialética como abordagem que supera a lógica formal uma vez que se preocupa com o pensar dialético, ou seja, se preocupa em revelar as transições, o movimento e o desenvolvimento do pensamento, contrariamente à sua fragmentação.

Nesta acepção, a apreensão do conceito de fração, diferente do que ocorre no ensino centrado nas interpretações empírica, pragmática e discursiva da linguagem, envolve restituir a unidade das duas dimensões da linguagem, a de profundidade sócio-cultural, o conteúdo, e a de multilateralidade operacional, a forma.

No enfoque lógico-dialético abrangemos o conceito de fração de modo a não abordar as relações práticas de medir, enfocando isoladamente as invariantes lógicas, intrínsecas ao processo dedutivo envolvido na apreensão do conceito.

A análise detalhada das elaborações dos alunos frente a atividades orientadas pelo desenvolvimento lógico-histórico da fração privilegiou a abordagem de aspectos do movimento: forma e conteúdo, na elaboração de juízos e conceitos sobre as ações de medir aspectos contínuos, que oferecem elementos para discussões sobre o ensino-aprendizagem da fração. O elo, forma e conteúdo, ficou garantido pela preparação da atividade com base no desenvolvimento lógico-histórico do conceito.

No decorrer de nossas análises evidenciou-se que o trabalho possibilitou a atuação criativa dos alunos na elaboração de soluções para as situações-problema apresentadas, caracterizando a forma do pensamento matemático como construção e não apenas como pura dedução a partir de indícios e repetição do aspecto formal do conceito.

Entendemos que o processo explorado nesta pesquisa é indicativo de que o desenvolvimento da inter-relação conteúdo e forma na aprendizagem da fração pode ser um meio que possibilita uma aprendizagem significativa desta como pensamento e linguagem frente à enumeração de aspectos contínuos da realidade.

CAPÍTULO 10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Maria Cecília Antunes. *A formação dos conceitos de frações e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.* 1980. 91p. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Psicologia da UFPE, Recife)

ALEKSANDROV A. D.; KOLMOGOROV, A.N & LAURENTIEV, M.A.. *La matemática: su contenido, métodos y significados.* Madrid: Alianza Universidad, 1988.

BONGIOVANNI, Vicenzo, VISSOTO LEITE, Olímpio Rudinin & LAUREANO José Luiz T. *Matemática e vida: 5ª série do 1° grau.* São Paulo: Editora Ática , 1990.

BONOTTO, C. *Sull'Integrazione delle Strutture Numeriche nella Scuola dell'Obbligo (Integrating Numerical Structures in Mandatory School).* Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate; *18A* (4): 311- 38, Apr. 1995.

BOYER, Carl. *História da Matemática.* Trad. Elza S. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 1974. 488p.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática:1° e 2° ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática:3° e 4° ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1997. 148p.

BRINKER, Laura . *Using Structured Representations To Solve Fraction Problems: A Discussion of Seven Students' Strategies.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association U.S.; South Carolina , Chicago, IL, March 24-28, 1997.

CALDWELL, Janet H. *Communicating About Fractions with Pattern Blocks.* Teaching Children *Mathematics*; *2* (3): 156-61, Nov. 1995.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática.* 2ª Ed. Lisboa: Gradiva, 1998. 295p.

CHILDE, V. Gordon . *O que aconteceu na história.* 2ª Ed. Trad. Waltensir Dutra. Rio de Janeiro:Zahar, 1966 , 295p.

CRAMER, Kathleen & POST, Thomas. *Facilitating Children's Development of Rational Number Knowledge.* U.S.; Wisconsin - Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (17th, Columbus, OH, October 21-24, 1995). For entire conference proceedings, see SE 057 177. 8; 1

DAVÝDOV, V.V. *Tipos de generalización en la enseñanza.* 1ª ed. 2ª reimpressão. Ciudad de La Habana-Cuba: s.ed., 1982. 485p.

DUARTE, Newton. *A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar.* 1987. 185p (Dissertação de mestrado em Educação, Centro de Educação e Ciências Humanas da UFSCar, São Carlos/SP)

FICHER, Ernest . *A necessidade da arte.* 3ª Ed. Trad. Leandro Konder. Rio de Janeiro: Zahar, 1959. 254p.

FULLER, Roberta Ann. *Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics.* U.S.; Florida - Paper presented at the Mid-Western Educational Research Association Conference (Chicago, IL, October 5, 1996). 32; 1.

GARNIER, CATHERINE (org.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtivista escolar russa.* 1ª Ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. 238 p.

GIMÉNEZ, J. ,LLINARES, Salvador & SÁNCHEZ, Maria Vitória. *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Granada: Editorial Comaris, 1996. 275p.

GRESHAM, SLOAN & VINSON, 1997. *Reducing Mathematics Anxiety in Fourth Grade "At-Risk" Students.* U.S.; Alabama, 1997, EDRS_PRICE: EDRS Price - MF01/PC03 Plus Postage,52; 1.

HALFORD, Graeme S. *Relational Knowledge in Higher Cognitive Processes.* Australia, Paper presented at the Biennial Meeting of the International Society for the Study of Behavioral Development (14th, Quebec City, Quebec, Canada, August 12-16, 1996). 17; 1

HANSELMAN, Cheryl A. *Stop Using Foul Language in the Mathematics Classroom.* Mathematics Teaching in the Middle School; *3* (2): 154-60, Oct. 1997.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da matemática.* 2ª ed.Trad.Paulo M.da Silva, Roberto Bins e Henrique C. Pfeifer. Porto Alegre: Globo, 1970. 762p.

KAMII, Constance & WARRINGTON, Mary Ann . *Multiplication with Fractions: A Constructivist Approach.* Hiroshima Journal of Mathematics Education; *5* : 11-20, Mar. 1997.

KOPNIN, P.V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KRACH, Mike . *Teaching Fractions Using Manipulatives.* Ohio Journal of School Mathematics; Win 1998, n°37, p.16-23.

LACHANCE, Andrea & CONFREY, Jere. *Introducing Fifth Graders to Decimal Notation through Ratio and Proportion.* U.S.; New York - Paper presented at the Annual Meeting of the

North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (17th, Columbus, OH, October 21-24, 1995).

LEFEBVRE, Henri. *Lógica formal, lógica dialética.* Trad. Carlos Nelson Coutinho. 6ª ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995. 312p.

LIMA, José Maurício de Figueiredo. *Desenvolvimento do conceito de fração em quantidade discreta.* 1981. 144p. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Psicologia, UFPE, Recife)

LIMA, Valéria Scomparim. *Mapeamento cognitivo: um estudo do conceito de fração em estudantes de magistério e professores do 1º grau (1ª a 4ª séries).* 1996. (Dissertação de Mestrado da Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas).

LIMA, Luciano C.. *A formação do professor para a educação matemática conceitual* - a experiência do Pólo 3. Mogi das Cruzes, UMC/FAEP/LITTERIS, 1998a.

LIMA, Luciano C.. Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica. *Programa Integrar, Caderno do Professor. Módulo Trabalho e Tecnologia. Confederação Nacional dos Metalúrgicos da Central Única dosTrabalhadores - CNM/CUT*, 95-101, 1998b.

LIMA, Luciano;TAKAZAKI, Mário & MOISÉS, Roberto P.. *Momento de Criar Matemática: contando coisas*, São Paulo, SP, CEVEC-CIARTE, 1994a.

LIMA, Luciano; TAKAZAKI, Mário & MOISÉS, Roberto P.. *Momento de Criar Matemática: contando coisas - livro do professor* , São Paulo, SP, CEVEC-CIARTE, 1994b.

LIMA, Luciano & MOISÉS, Roberto . *A fração: a repartição da terra.* São Paulo: CEVEC/CIART, 1998.

LLINARES, Salvador, SÁNCHEZ, Maria Vitória. *Fraccioes la relacion parte-todo*, Espanha: Editorial Sínteses, 1988. 168p.(Col. Matematicas: cultura y aprendizaje)

MACK, Nancy K. *Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge.* Journal for Research in *Mathematics* Education; *26* (5): 422-41, Nov. 1995.

MAY, Lola. *Extending the Meaning of Fractions.* Teaching PreK-8; *25* (4): 26-27, Jan. 1995.

MIDDLETON, James A.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja & SHEW, Julia A. *Using Bar Representations as a Model for Connecting Concepts of Rational Number.* Mathematics Teaching in the Middle School; *3* (4): 302-12, Jan. 1998.

MIGUEL. Antonio. *Era uma vez ... aquela matemática.* 1984. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas)

MIGUEL. Antonio. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké/Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática,* UNICAMP. Campinas, *5* (8): 73-105, jul./dez.1997.

MINAYO, Maria Cecília S. (Org.). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade.* 11ª Ed.Petrópolis: Vozes, 1999. 80p.

MOISÉS, Roberto Perides. *A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica*: o problema em movimento. 1999. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação, USP, São Paulo)

MOLONEY, Kevin; STACEY, Kaye . *Changes with Age in Students' Conceptions of Decimal Notation.* Mathematics Education Research Journal; *9* (1): 25-38, May. 1997.

MORRIS, Anne. *Meaningful Instruction in Fractions: Implementing a Theory in a Low-Achieving Mathematics Classroom.* Focus on Learning Problems in *Mathematics*; *17* (3): 16-40, Sum. 1995.

MOURA. Manoel O. *A construção do signo numérico em situação de ensino.* 1992. (Tese de doutorado, Faculdade de Educação, USP, São Paulo)

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, São Paulo, *II* (12): 29-43, 1996.

MOURA, Anna R.L. *A medida e a criança pré-escolar.* 1995. 210p. (Tese de doutorado, Área de Metodologia de Ensino de Matemática, UNICAMP,Campinas/SP)

MOURA, Anna R. L. & MOURA, Manoel O. *Escola: um espaço cultural a matemática na educação infantil: conhecer, (re)criar* – um modo de lidar com as dimensões do mundo. Prefeitura Municipal. Secretaria de educação esporte e lazer. Série Formação Permanente. Diadema, 1997.

NIEMI, David. *A Fraction Is Not a Piece of Pie: Assessing Exceptional Performance and Deep Understanding in Elementary School Mathematics.* Gifted Child Quarterly; *40* (2): 70-80, Spr. 1996.

OLIVEIRA, Raquel Gomes de O. *Aprendizagem de frações*: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1° grau. 1996. 165p. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP)

PEPPER, Kristine L.& HUNTING, Robert P. *Preschoolers' Counting and Sharing.* Journal for Research in Mathematics Education; *29* (2): 164-83, Mar. 1998.

PITKETHLY, Anne & HUNTING, Robert. *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts.* Educational Studies in Mathematics; *30* (1): 5-38, Jan. 1996.

PRADO, Esther Pacheco de Almeida. *Uma Reflexão sobre Formação de Professores no Ensino da Matemática.* 2000. (Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, PUC, São Paulo)

PUTT, Ian John. *Preservice Teachers Ordering of Decimal Numbers: When More Is Smaller and Less Is Larger!* Focus on Learning Problems in *Mathematics*; *17* (3): 1-15, Sum. 1995.

REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA. São Paulo, n° 113, jun.1998. Disponível em: http://www.uol.com.br/novaescola/. Acesso e, 19 jan. 2001.

REVISTA DO ENSINO FUNDAMENTAL NOVA ESCOLA. São Paulo, n° 122, mai.1998. Disponível em: http://www.uol.com.br/novaescola/. Acesso e, 19 jan. 2001.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké/Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática*, UNICAMP. Campinas, *12* (7): 37-49, jun./dez.1999.

SÃO PAULO.(município). Superintendência Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica - Gabinete. Currículos e Programas. *Organizadores de área –Ensino Fundamental.* Matemática. Sa 005/96, 1996. 83p.

SÃO PAULO (estado). Secretaria de Estado da Educação. Projeto de educação continuada - Pólo 3. *Apostila básica de matemática: a fração.* Fundação de Amparo ao Ensino e Pesquisa. Universidade de Mogi das Cruzes. Mogi das Cruzes: CEVEC/CIART, 1998. 108p.

SÃO PAULO (estado). Secretaria a educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática: 1° grau.* 4ª Ed. São Paulo: SE/CENP, 1992. 181p.

SÃO PAULO (estado). Secretaria a educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Matemática: 1° grau.* São Paulo: SE/CENP, 1993. Vol. 1. A Prática Pedagógica. 231p.

SCHIFTER, Deborah .*Learning Mathematics for Teaching: Lessons in/from the Domain of Fractions. Center for the Development of Teaching Paper Series.* U.S.; Massachusetts: 1997, Institution : Education Development Center, Inc., Newton, MA. Women's Educational Equity Act Dissemination Center. p. 28; 1.

SEVERINO, Antonio Joaquim . *Metodologia do trabalho científico.* 21ª ed. São Paulo: Ed. Cortez, 1995. 278p.

SIMMT, Elaine & DAVIS, Brent. *Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics.* Teacher; *91* (2): 102-08 , Feb. 1998.

SKOVSMOSE, Olé. Competência democrática e conhecimento reflexivo em matemática. Trad. do artigo Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *Revista For the Learning of Mathematics*, s.l. *12*, (2): jun. 1992.

SMITH, John P. III *Competent Reasoning with Rational Numbers.* Cognition and Instruction; *13* (1): 3-50, 1995.

SOPHIAN, Catherine; GARYANTES, Danielle & CHANG, Chuan . *When Three Is Less Than Two: Early Developments in Children's Understanding of Fractional Quantities.* Developmental Psychology; *33* (5): 731-44, Sep. 1997.

SOWDER, Judith . *Place Value as the Key To Teaching Decimal Operations.* Teaching Children Mathematics; *3* (8): 448-53, Apr. 1997.

STIX, Andi . *Teaching Fractions and Decimals: Fun with Picture Grids.* U.S.; New York, Paper presented at the Nassau County Math Supervisors Conference (Long Island, NY, January 8, 1997). p.26,1.

TAUBE, Sylvia R. *Unit Partitioning as a Mechanism for Constructing Basic Fraction Knowledge: Testing a Hypothesis.* U.S.; Texas. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Chicago, IL, March 24-28, 1997).p.10; 1

TAUBE, Sylvia R. *Reconstructing the Whole: A Gauge of Fraction Understanding.* English , U.S.; Texas, Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (17th, Columbus, OH, October 1995). 9; 1

THOMPSON, Charles S. & WALKER, Vicki. *Connecting Decimals and Other Mathematical Content.* Teaching Children Mathematics; *2* (8): 496-502, Apr. 1996.

TREZISE, Kathy. *Investigations: Food for Thought.* Teaching Children, ISSN-1073-5836.

WOERLE, Nilce Helena. *Números racionais no ensino fundamental:* múltiplas representações. 1999. 130p. (Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da PUC, São Paulo)

WARRINGTON, Mary Ann . *How Children Think about Division with Fractions.* Mathematics Teaching in the Middle School; *2* (6): 390-94, May. 1997.

WATSON, Jane M.; And Others . *Developmental Structure in the Understanding of Common and Decimal Fractions.* Focus on Learning Problems in *Mathematics*; *17* (1): 1-24, Win. 1995.

WENTWORTH, Nancy M. & MONROE, Eula Ewing. *What Is the Whole?* Mathematics Teaching in the Middle School; *1* (5): 356-60, Apr/May. 1995.