UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO DE DIFICULDADES AO APRENDER ÁLGEBRA EM SITUAÇÕES DIFERENCIADAS DE ENSINO EM ALUNOS DA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nathalia Tornisiello Scarlassari

Campinas - SP

2007

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO DE DIFICULDADES AO APRENDER ÁLGEBRA EM SITUAÇÕES DIFERENCIADAS DE ENSINO EM ALUNOS DA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Autor: Nathalia Tornisiello Scarlassari
Orientadora: Anna Regina Lanner de Moura

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Nathalia Tornisiello Scarlassari e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: CAMPINAS, 26 de Novembro de 2007

Assinatura:...

Orientadora

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

2007

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP

Scarlassari, Nathalia Tornisiello.

Sca74e Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental / Nathalia Tornisiello Scarlassari. -- Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador : Anna Regina Lanner de Moura.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Álgebra – Estudo e ensino. 2. Álgebra – História. 3. Dificuldades de aprendizagem. 4. Educação matemática. I. Moura, Anna Regina Lanner de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

07-628/BFE

Título em inglês: A study of difficulties in learning Algebra in different learning situations for sixth-grade students of elementary school

Keywords: . Algebra – Study and teaching; Algebra – History; Difficulties in learning; Mathematics education
Área de concentração: Educação Matemática
Titulação: Mestre em Educação
Banca examinadora: Profª. Drª. Anna Regina Lanner de Moura (orientadora)
Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa
Profª. Drª.Rosana Miskulin
Profª. Drª. Celi Aparecida Espasandin Lopes
Prof. Dr. Dario Fiorentini
Data: 26/11/2007
Programa de pós-graduação: Educação
Email: nathaliats@yahoo.com.br

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos vão a todos que fizeram parte da minha caminhada acadêmica, em especial:

Aos colegas educadores, integrantes dos grupos de estudos em Educação Conceitual: Esther, Érica Catalani, Érica Ferreira, Fabiana, Micheline, Leila, Maria do Carmo, Rute, Miriam, que contribuíram para o desenvolvimento do meu trabalho, possibilitando discussões e dando diretrizes para o caminho que deveria seguir.

Aos professores do CEMPEM – Círculo de Estudos, Memórias e Pesquisa em Educação Matemática e colegas do PRAPEM - Prática Pedagógica em Educação Matemática.

Aos meus alunos, sem os quais seria impossível a realização desta pesquisa.

À querida Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, que me deu o privilégio de contar com sua orientação, não só para a presente pesquisa, mas também como ser humano e como professora, sempre com muita competência e paciência.

Aos meus pais e irmãos que me apoiaram em todos os momentos, dos mais felizes aos mais difíceis, e compreenderam todas as minhas ausências e erros.

RESUMO

Esta pesquisa, de caráter qualitativo, tem como objetivo principal discutir *Que tipo de dificuldades alunos da 6ª série do Ensino Fundamental apresentam em uma situação B de ensino de álgebra, comparativamente a alunos da mesma série que passaram por uma situação A de ensino de álgebra?* As situações de ensino tiveram a seguintes características: A situação A ocorreu em uma escola da rede particular de ensino da cidade de Piracicaba, em 1999, em duas classes de 6ª série e constituiu-se fonte de dados para a nossa pesquisa de Iniciação Científica que versou sobre as dificuldades dos alunos em álgebra. Atuamos como observadoras das aulas de álgebra que foram desenvolvidas numa abordagem tradicional, pela manipulação simbólica, resolução e correção de listas de exercícios na lousa. Os dados foram provenientes das respostas dos alunos a uma lista de exercícios. Dessas respostas analisamos e categorizamos as dificuldades em álgebra, aí manifestas. A situação B de ensino de álgebra ocorreu em uma escola estadual da cidade de Campinas, em duas classes de 6ª série onde atuamos como pesquisadoras e professora das classes pesquisadas. Foram trabalhadas atividades que propunham o desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra elementar, tais como: fluência, variável, campo de variação, linguagem, operacionalidade e unidade. Após esse desenvolvimento solicitamos aos alunos responderem a mesma lista de exercício usada na situação A. Comparamos as dificuldades encontradas nas duas situações para os mesmos exercícios. Esta comparação indica que os alunos da situação B encontraram menos dificuldades para realizar as atividades e que a freqüência dos erros, nessa situação, foi menor. Este trabalho permitiu afirmar que a Situação B de ensino proporcionou uma aprendizagem mais significativa das idéias algébricas correspondentes aos exercícios solicitados do que a Situação A, de abordagem tradicional.

Palavras-chave

Ensino de álgebra, nexos conceituais, dificuldades, história da álgebra, ensino tradicional

ABSTRACT

The main purpose of this research is to discuss under a qualitative aspect *What kind of difficulties the sixth-grade students of Elementary school present with regard to the Algebra learning situation B in comparison with those students from the same grade who have experienced the Algebra learning situation A?* The learning situations had the following characteristics: The situation A occurred in two sixth-grade classes of one private school located in the city of Piracicaba, Sao Paulo, in 1999, and it has constituted data source for the Undergraduate Research that discussed students' difficulties regarding algebra. We have been acting as observers in the algebra classes, which were prepared according to a traditional approach using symbolic manipulation, resolution, and correction of lists of exercises on the blackboard. The data was gathered from the answers given by the students to a list of exercises, from which we were able to analyze and categorize the difficulties in algebra. The algebra learning situation B happened in two sixth-grade classes of public school in the city of Campinas, São Paulo, where we have acted both as researchers and teachers on the researched classes. Working activities proposed the development of the conceptual nexus of elementary algebra, such as fluency, variable, variation field, language, operationability and unity. Afterwards we invited the students to answer the same list of exercises used in situation A. We compared the difficulties found in both situations considering the same exercises. This comparison shows that the students in situation B found less difficulty to solve this list and there was a fewer occurrence of mistakes compared to situation A. This research allowed us to affirm that the learning situation B has brought a more significant understanding of the algebraic ideas related to the given exercises than the situation A, which considered a traditional learning approach.

Key Words

Algebra learning, conceptual nexus, difficulties, history of Algebra, traditional teaching

SUMÁRIO

ÍNDICE DE QUADROS, TABELAS E FIGURAS

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Estudiosos, como Sousa (2004), Miorim et al. (1993), Davidov (1982) e Booth (1995), consideram a álgebra um tema essencial para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem matemática. Ademais, abordaremos esse tema devido ao fato de dar suporte teórico para os alunos durante toda a sua formação escolar, por permitir que estudem os movimentos quantitativos da vida, as regularidades, e por ser de fundamental importância para áreas como a Física e a Engenharia.

Embora muitos professores acreditem que a álgebra só deva ser estudada a partir da 6ª série do Ensino Fundamental, quando os alunos já conhecem os números racionais, acreditamos que eles podem começar a desenvolver um *pensamento algébrico* desde os primeiros anos da escolarização, mesmo sem formalizá-lo, analisando os movimentos da vida, por exemplo. Assim, poderíamos trabalhar questões que instigassem a idéia de que tudo na vida está em movimento, usando perguntas simples, como "Quantas pessoas estão em sua casa agora?" e "Qual o preço de um pãozinho?", que permitem ao aluno trabalhar o pensamento de que nada é fixo, que tudo muda com o tempo. Lins e Gimenez (2005) acreditam que a idéia de que a álgebra só pode ser iniciada de "forma tardia" se deve à crença de que seu aprendizado requer um "pensamento operatório formal", ou ainda, "de que é preciso primeiro aprender aritmética".

A nossa intenção é trabalhar com todos os aspectos da álgebra juntamente com a aritmética sem, necessariamente, formalizar com uma linguagem totalmente simbólica, apenas instigando o pensamento, que pode ser desenvolvido com atividades que levem o aluno a generalizar regularidades, analisar as generalizações, expressar a mesma idéia de maneiras diferentes e calcular o valor numérico para diferentes situações.

A álgebra ainda é considerada um assunto difícil de ser trabalhado em sala de aula porque envolve muitos "conceitos novos" para os alunos do Ensino Fundamental, como no caso do "tal x", como eles mesmos dizem, ou seja, do conceito de variável, de incógnita; e na idéia de movimento, fundamental para a compreensão do conceito de variável, que nem sempre é explorado devido ao fato de os professores não estarem preparados para trabalhar o mesmo em sala de aula, pois não tiveram contato com ele em sua formação acadêmica. Além disso, na sua formalização, a álgebra requer uma linguagem específica, simbólica e rigorosa.

Davidov (1982) alerta que professores de matemática, psicólogos e pedagogos têm prestado pouca atenção ao conteúdo da matemática elementar. Ele defende que seria possível ensinar matemática para as crianças das séries iniciais como uma ciência das leis de relações quantitativas, de dependências de grandezas, técnicas de cálculo e elementos da teoria dos números. Tais itens devem ser trabalhados como uma seção especial e particular desse programa mais abrangente, ou seja, da Matemática. Poderiam ser trabalhadas atividades que permitissem explorar a generalização de padrões e regularidades, as várias maneiras de se representar uma mesma expressão aritmética por meio de igualdades, entre outras. Essa idéia é também compartilhada por Lins e Gimenez (2005), Lima (1998b) e Miorim et al (1993).

Acreditamos que, quando a abordagem em sala de aula é feita do modo como Davidov (1982) propõe, os alunos entendem, desde o início de sua escolaridade, que a Matemática não se restringe aos números e às suas operações. Dessa forma, as idéias de movimento que eles trazem da vida possibilitam rememorar seus conhecimentos prévios a respeito do assunto a ser abordado. Os alunos percebem, assim, que a Matemática está presente no movimento da vida e que uma das hipóteses de seu surgimento está relacionada com a intenção de ajudar a humanidade a resolver seus problemas.

Foi no estágio realizado durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática que se tornou perceptível as dificuldades dos alunos em álgebra, decorrentes de um ensino tradicional e mecanicista, diferente do proposto por Davidov (1982) e Lanner de Moura (2005). Observávamos que as dúvidas manifestadas pelos alunos, dificilmente eram sanadas e que estes apresentavam dificuldades: na tradução de expressões da linguagem retórica para a linguagem simbólica, na resolução de equações e ao fatorar expressões algébricas. Tanto o professor que ministrava aulas para os sujeitos, quanto nós, que ministrávamos os plantões de dúvidas, enfatizávamos um ensino repetitivo, com base em listas de inúmeros exercícios de simples aplicação de regras e conceitos.

Embora o professor fizesse uma abordagem utilizando problemas de contextos ligados a situações reais da vida dos alunos e que poderiam gerar significados para eles, ainda permanecia uma lacuna entre esse contexto e as listas de exercícios que ele trabalhava intensamente com os mesmos. Os problemas trabalhados eram apenas fragmentos da realidade vivida, não davam idéia de movimento e nem das necessidades dos alunos. Para exemplificar, o professor trabalhou com um problema que questiona a quantidade de pessoas que podemos acomodar em mesas quadradas juntas, que será discutido na Metodologia. O problema da aprendizagem, nesse caso, provavelmente está na maneira como a aula é conduzida, pois o professor vai, diretamente, do problema para a resolução de equações com base em regras prontas, sem mostrar a lógica e a operacionalidade integradas aos contextos da realidade do aluno.

Os alunos que procuravam os plantões, na maioria das vezes, voltavam com as mesmas dúvidas em álgebra, todos eles apresentavam dificuldades em traduzir expressões dadas em linguagem retórica para a linguagem simbólica, formal, que será discutida durante o texto e na Metodologia, dentro da categoria de Tradução Literal. Por essa ocasião, percebemos que as dúvidas em álgebra apresentadas pelos alunos, mais especificamente ao traduzir expressões da linguagem retórica para a linguagem simbólica, eram persistentes após as reiteradas explicações. Este fato nos instigou a aprofundar o problema da aprendizagem em álgebra.

As inquietações, fundamentadas, a princípio numa análise observacional, encontraram, durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática da Unicamp e, mais especificamente, na disciplina "Didática Aplicada ao Ensino de Matemática"[1], os referenciais teórico-metodológicos do ensino de Matemática, dentre os quais, o que mais me chamou a atenção foi o Construtivismo[2]. Conversando com a professora da disciplina, decidi pesquisar sobre esta questão que tanto me instigava e, depois de elaborar o projeto de Iniciação Científica, aprofundei meus estudos na abordagem do *desenvolvimento conceitual* com referência na história do conceito, que se centra na criação ou reconstrução do mesmo por parte do aluno, que edifica seus próprios significados a partir das atividades propostas.

Com estas referências e sob apoio e orientação da professora responsável pela disciplina, fui desenvolvendo as condições necessárias para concretizar o meu anseio de aprofundar a compreensão das dificuldades que os alunos apresentavam ao estudar álgebra elementar. Desse processo resultou nossa Pesquisa de Iniciação Científica, intitulada: "*Dificuldades de alunos do Ensino Fundamental em álgebra, e suas possíveis origens*", concluída em 2001.

---

[1] Disciplina ministrada em 1999, tendo como responsável a Profª. Drª. Anna Regina Lanner de Moura.
[2] **Construtivismo** é uma das correntes teóricas empenhadas em explicar como a inteligência humana se desenvolve partindo do princípio de que o desenvolvimento da inteligência é determinado pelas ações mútuas entre o indivíduo e o meio. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Construtivismo_%28pedagogia%29)

Aquela pesquisa, então de caráter qualitativo[3], realizada com 67 estudantes, de duas salas de 6ª série, que eu trabalhava no plantão, permitiu definir oito categorias de dificuldades, a partir dos registros dos alunos.

Diferente da pesquisa anteriormente desenvolvida, nesta utilizaremos as categorias reagrupadas em cinco outras maiores para comparar às dificuldades apresentadas pelos sujeitos da pesquisa de Iniciação Científica e às dos sujeitos da pesquisa atual. As categorias, tanto as utilizadas na pesquisa anterior, quanto nesta, serão discutidas no capítulo da Metodologia e apresentadas no Quadro 8, que se encontra na página 83.

Como o período para o desenvolvimento da pesquisa de Iniciação Científica foi de apenas um ano, limitamo-nos a levantar as principais dificuldades que os alunos apresentavam com relação à álgebra e sugerir como superá-las, embora não tivéssemos tido a oportunidade de verificar a pertinência das suposições no contexto da sala de aula.

Neste trabalho discutiremos o tipo de ensino que muitos alunos são submetidos, para tanto centraremos nossas discussões nas falhas do ensino[4] de fundamentos da aritmética e dos diferentes tipos de linguagem que emergiram da pesquisa de Iniciação Científica e que ainda continuam presentes na pesquisa atual, bem como, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O movimento em sala de aula, no qual o professor explica na lousa o conteúdo a ser desenvolvido, solicita a resolução de uma lista de exercícios e depois avalia a "aprendizagem", é caracterizado por Neves (1995, p. 116), como "um trabalho com ênfase na escrita e na realização técnica" das operações. Nesse método de trabalho, o problema fica deslocado dos exercícios e os alunos apenas treinam a aplicação de regras, deixando de lado o significado dos problemas.

[3] A pesquisa foi desenvolvida sob orientação da Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura e contava com a colaboração de leituras e discussões dos doutorandos Gilberto Francisco Alves de Melo e Maria do Carmo de Sousa, sobre a abordagem da álgebra na perspectiva da história do desenvolvimento de sua linguagem e com fomento do PIBIC-CNPq.

[4] Aqui estamos nos referindo às "falhas" que o ensino tradicional e mecânico deixou na aprendizagem dos alunos sujeitos da pesquisa de Iniciação Científica, o que fica evidente quando analisamos os erros e dificuldades apresentados pelos mesmos.

Klüsener (1999) alerta professores e estudiosos que muitos estudantes alcançam alto nível de escolarização, apesar de serem incapazes de lidar com noções elementares de matemática, e questiona:

> Mas por que será que isso acontece? Será que o fato do ensino da matemática estar tradicionalmente pautado em *manipulações mecânicas de técnicas operatórias*, resolução de exercícios que são rapidamente esquecidos, assim como a memorização de fórmulas, tabuadas, regras, propriedades, pode estar contribuindo para reforçar essa situação? (KLÜSINER, 1999, p. 177, grifo nosso).

Percebemos que o modo como o professor das turmas da pesquisa de Iniciação Científica trabalhava e aquele que nós também trabalhávamos se identificavam com as afirmações feitas por Neves (1995) e Klüsener (1999). A maneira como desenvolvíamos o conteúdo em sala de aula e as listas de exercícios que solicitávamos aos alunos, chamamos de manipulação simbólica, ou seja, um trabalho centrado na resolução de listas de exercícios repetitivos e em regras prontas, sem a participação ativa do sujeito no processo de aprendizagem, que se limitava em aplicar as regras apresentadas pelo professor

Assim, a pesquisa de Iniciação Científica fez com que não nos acomodássemos e permitiu que pensássemos na possibilidade de mudar nossa prática de ensino, pois as dificuldades são decorrentes de uma abordagem de ensino tradicional e mecanicista. Com isso, percebemos a necessidade de dar continuidade aos estudos e investigar, em busca de respostas à nossa problemática sobre as dificuldades dos alunos em álgebra, compreendendo melhor o problema enfrentado por muitos professores com relação a esse conteúdo. Pensamos que o estudo deste problema poderia ser intensificado por uma comparação entre os dados obtidos na pesquisa de Iniciação Científica e os obtidos em outra pesquisa que trabalhasse as lacunas didáticas percebidas na abordagem a que foram submetidos os alunos da Iniciação, sendo que esta outra pesquisa veio a ser a pesquisa atual.

As dificuldades encontradas pelos alunos da pesquisa na modalidade de Iniciação Científica foram manifestadas a partir de um ensino que definimos como ensino tradicional na sua abordagem, caracterizado por Neves, (1995), Lima (2006) e Libâneo (1994), entre outros, como um ensino que informa o conceito e avalia sua reprodução, ou seja, uma manipulação simbólica, como já foi dito anteriormente.

Nossa pesquisa se insere nas discussões atuais de pesquisa em ensino de álgebra, pois notamos que muitas dificuldades encontradas e que compõem nossos dados, também podem ser encontradas nos trabalhos de autores que relevam as questões das lacunas em aritmética e na linguagem algébrica, como Booth (1995), Araújo (1999) e Pinto (1995).

Booth (1995) aponta para as dificuldades que os alunos encontram em estabelecer significados para as letras, em aceitar uma resposta algébrica, ao estudar o princípio de equivalência e a tradução literal, a dificuldade para "transportar" a operacionalidade presente na aritmética para a álgebra, em aceitar a falta de "fechamento" das expressões algébricas. A maioria dessas dificuldades foram encontradas nos nossos dados e, no Capítulo II, faremos uma comparação entre as dificuldades estudadas por Booth (1995), Araújo (1999) e as encontradas em nossa pesquisa.

A pesquisadora Araújo (1999) trata das dificuldades que os alunos apresentam para interpretar, esquematizar e resolver problemas algébricos, para generalizar objetos, relações e operações. Trata, também, da noção de equivalência, da ambigüidade das notações aritméticas e algébricas. A partir dessa análise, afirma que os estudantes apresentam dificuldades de tradução literal, no uso de letras identificando objetos e não nas quantidades associadas a eles, na associação da incógnita de maior valor ao maior coeficiente, dentre outras.

Enquanto Pinto (1995), por sua vez, discute as dificuldades que as professoras enfrentam em sala de aula, as situações de erro ou de dificuldade, particulares dos docentes e dos alunos, que surgem do processo de ensino e aprendizagem de álgebra elementar. Um dos principais resultados de sua pesquisa é que os erros cometidos pelos alunos são conseqüências de um ensino que privilegia mais os processos sintáticos (relativos ao uso de regras), que semânticos (relativos à interpretação de significados).

Buscamos também apoio teórico em Neves (1995), no que diz respeito às abordagens do ensino de álgebra. O autor investigou o pensamento algébrico e discutiu questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de álgebra escolar. Ele defende ainda, que o essencial não é saber se o conhecimento é, ou não, construído, e sim *como* ele é construído. A construção de um conhecimento algébrico na sala de aula exige, além da participação e da atividade dos alunos, uma confrontação entre os significados e suas necessidades de resolver problemas, visando uma articulação entre esses significados atuais e aqueles relativos aos conhecimentos prévios dos alunos.

Os estudos realizados durante essa pesquisa fizeram com que eu questionasse minha concepção sobre álgebra. Convenci-me de que uma lista de exercícios repetitivos e desvinculados de contextos mais amplos do que as definições e propriedades matemáticas não possibilitava uma aprendizagem significativa. Araújo nos ajuda a reforçar essa idéia alertando que

> Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação. (ARAÚJO, 2007, p. 6)

O aluno precisa desenvolver significados próprios dos conceitos algébricos, e não, recebê-los como regras prontas e quase "mágicas", que feito desta maneira resta apenas decorá-las.

Na pesquisa de Iniciação Científica, nossa intenção foi categorizar as dificuldades que os alunos apresentavam ao traduzir expressões que estavam escritas na linguagem retórica para a linguagem simbólica, ou seja, a linguagem formal atual da álgebra, considerada própria da matemática, assim denominada por Smith (1958), Boyer (1968), Eves (2004), Dantizig (1970) e fazer algumas suposições de como trabalhar a álgebra para que as dificuldades dos alunos fossem superadas.

Nossa intenção não era apenas saber ou listar as inúmeras dificuldades que os alunos apresentavam, mas propomos explorar uma maneira mais eficiente de ensiná-los, de modo que compreendessem os conceitos e as dificuldades se amenizassem.

Para tanto, tivemos como base, os princípios do desenvolvimento conceitual, com os quais "procuramos entender o conceito do ponto de vista de sua dinâmica de criação" que se propõe a "tornar o ato de ensinar e aprender matemática um encontro pedagógico com o conceito, de modo que o aprender matemática não se reduza a uma justaposição mecânica entre o sujeito e o objeto científico" (LANNER de MOURA, 2005, p. 02).

O trabalho pedagógico em álgebra, nesta pesquisa, pretende se diferenciar do que temos observado nas salas de aula, mais especificamente, naquelas que envolviam os sujeitos da pesquisa de Iniciação Científica e na prática pedagógica que vínhamos desenvolvendo até o momento. Pretendemos deixar de lado as repetições sistemáticas das explicações e as listas de exercícios repetitivos. A partir dessas observações, surgiu a necessidade de uma proposta para trabalhar as lacunas deixadas por aquela metodologia, acarretando em dificuldades de aprendizagem.

Os autores Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004) propõem uma trajetória, passando pelos diferentes tipos de linguagem que a álgebra apresentou durante seu processo de formalização, ou seja, as fases históricas de sua formação, em específico às linguagens retórica, sincopada e simbólica, que serão detalhadas mais adiante. Por nossa prática de sala de aula e conversas com outros professores, percebemos que, em geral, essas múltiplas linguagens não são abordadas ou mesmo debatidas pelos professores, o que induz a um aprendizado mecanizado.

Lima (1993) indica para o desenvolvimento de atividades que permitem uma aprendizagem mediada pela construção histórica do conceito e um trabalho com os diferentes tipos de linguagem. Apoiamo-nos em seu trabalho a fim de dispor práticas que por seguinte foram desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa.

Com base na trajetória apresentada, para a presente pesquisa, elaboramos atividades que objetivaram a construção da linguagem formal pelos próprios alunos e o desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra, tomando como referencial o trabalho de Sousa (2004). Essa autora define nexo conceitual "como elo entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito" (SOUSA, 2004, p. 53). E ainda, afirma que "a conexão entre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável formam o conceito de álgebra" (Ibidem, p. 62). Em Sousa (2004), o foco são as elaborações que os professores fazem enquanto vivenciam atividades de ensino na perspectiva lógico-histórica (álgebra não-simbólica: retórica, sincopada e geométrica e álgebra simbólica). Para a presente pesquisa, acrescentamos a esses nexos conceituais, a operacionalidade, os tipos de linguagem e o conceito de unidade, pois vamos lidar com expressões algébricas que representam movimentos, ampliando a idéia de variável. Nosso foco são as dificuldades dos alunos enquanto traduzem para a linguagem algébrica simbólica a partir de movimentos no sentido de criar a linguagem das equações, no sentido formal, porém, não trabalhamos com o conceito de equação neste trabalho, apenas com o conceito de movimentação numérica. A inserção da operacionalidade e da unidade está relacionada à linguagem simbólica e à tradução literal que levariam ao conceito de equação propriamente dito.

O que a Matemática Moderna entende como estrutura algébrica, aqui, com base em Lima (2006), chamaremos de operacionalidade, e consideramos o conceito matemático como uma combinação entre linguagem e operacionalidade.

Os tipos de linguagem se referem aos períodos pelos quais a álgebra passou até chegar a sua simbologia atual. Inicialmente, não só a álgebra, como toda a Matemática eram retóricas. Aos poucos, passou a existir uma necessidade de simplificar as escritas dos enunciados e começaram a surgir, depois disso, abreviações que deram um impulso para o simbolismo algébrico. Essa questão da linguagem será discutida no texto, considerando como apoio, principalmente o trabalho de Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004).

Julgamos necessário trabalhar o conceito de unidade no Capítulo I, pois quando analisamos a história desse conceito, percebemos que sua definição nem sempre foi a mesma, ele foi interpretado de maneira diferente em cada época da história.

Antigamente, a unidade era considerada uma fração, uma parte. Diferentemente, hoje ela é tida como um número. Isso pode explicar o motivo das dificuldades apresentadas pelos alunos ao lidar com esse conceito.

Com relação à abordagem didática, usaremos como referência, o trabalho de Sousa (2004) e Lima et al (1993). A autora Sousa (2004) faz um estudo, na formação inicial de alunos, sobre as idéias algébricas que eles constroem a partir de uma abordagem de ensino centrada no desenvolvimento histórico do conceito e da linguagem. A principal diferença entre nossos estudos e o de Sousa (2004) reside no fato que os sujeitos de sua pesquisa já tinham uma formação escolar e os sujeitos da presente pesquisa estavam iniciando seus estudos no campo da álgebra.

A abordagem de ensino que Sousa (2004) trabalha e que nós faremos uso tem como base o trabalho de Lima, Péricles e Takazaki (1993) e trata didaticamente do aspecto histórico da formação da linguagem algébrica: a retórica, a sincopada, a simbólica e a geométrica.

A nossa hipótese é que o aluno, participando do desenvolvimento da linguagem matemática, trabalhando com a idéia de movimento para construção do pensamento de variação e de campo numérico, desenvolva um pensamento algébrico que permita melhor compreensão da álgebra elementar, apresentando menos dificuldades. O trabalho com esse enfoque combina a formação do pensamento e da linguagem algébrica.

O objetivo principal deste estudo é comparar entre as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação A de ensino (Iniciação Científica), com as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos a uma situação B de ensino, desenvolvida nesta pesquisa.

A situação A se caracteriza pelo fato de o professor apresentar o conceito em nível simbólico formal e solicitar o exercício deste, conforme modelos dados e avaliar a reprodução dos movimentos anteriores. Essa abordagem se caracterizou pela repetição da informação do conceito, mesmo que em alguns aspectos, se destituía do padrão da manipulação simbólica, porém, as lacunas reiteradas e persistentes eram visivelmente observadas no trabalho em sala de aula e nos plantões de dúvidas.

Já a situação B de ensino, se caracterizou pelo fato de a professora problematizar alguns dos nexos conceituais (linguagem, fluência, campo de variação e variável), instigar o pensar e a elaboração de definições provisórias (elaboração dos nexos em diferentes linguagens) e avaliar, analisar, discutir e definir um acordo conceitual, ou seja, encontrar uma definição que todos os alunos concordem e que esteja correta. Essa abordagem diz respeito à prática em sala de aula e ao enfoque que damos com o objetivo de obter dados para comparar com os da situação A de ensino. Os dados utilizados para esse fim foram construídos em uma escola da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, na cidade de Campinas.

Para diferenciar da abordagem de ensino centrada na manipulação simbólica assumimos uma prática centrada no desenvolvimento dos conceitos, com ênfase no desenvolvimento das linguagens algébricas (retórica, sincopada e simbólica), desenvolvemos os conceitos algébricos com um trabalho que possibilitou a dinâmica indivíduo-grupo-classe, não mais partindo de definições e propriedades para imediatamente resolver exercícios, mas desenvolvendo junto com os alunos cada conceito, cada idéia presente na álgebra através das atividades elaboradas.

Pretende-se que esse trabalho traga reflexão sobre a prática pedagógica em álgebra e permita ao aluno a construção dos nexos conceituais, para que compreenda o significado dos conceitos e símbolos, além de desenvolver a linguagem matemática, o que possibilita melhor compreensão de outros conceitos matemáticos, de atividades de outras disciplinas e colabore na compreensão da resolução de problemas.

Tendo em vista as considerações apresentadas, propomos a seguinte questão orientadora desta pesquisa: *Que tipo de dificuldades alunos da 6ª série do Ensino Fundamental apresentam em uma situação B de ensino de álgebra, comparativamente a alunos da mesma série que passaram por uma situação A de ensino de álgebra*?

Diante da discussão acima, os capítulos estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo I, cujo título é História da Álgebra e suas relações com as tendências do ensino, pretendemos analisar como a álgebra é trabalhada no Ensino Fundamental e como poderia ser trabalhada para superar as dificuldades encontradas pelos alunos, tanto nessa etapa do ensino, como no Ensino Médio, pois elas vão se acumulando e aumentando com o passar do tempo.

O Movimento em que se Inscreve Nosso Estudo é o título do Capítulo II, que trata de estudos sobre as dificuldades apresentadas por alunos ao aprender álgebra, dos nexos conceituais necessários para a compreensão desse conteúdo e da linguagem e pensamento algébricos.

O Capítulo III traz a Metodologia utilizada para a construção dos dados e o modo como os mesmos serão analisados. Neste capítulo, também detalhamos melhor as situações A e B de ensino de álgebra.

O Capítulo IV traz uma Análise dos dados construídos e coletados, mostrando as dificuldades apresentadas pelos sujeitos pesquisados e algumas suposições de como superá-las.

Com a trajetória indicada, pretendemos contribuir para uma reflexão do ensino da álgebra e da Matemática em geral.

CAPÍTULO I

HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E SUAS RELAÇÕES COM AS TENDÊNCIAS DO ENSINO

CAPÍTULO I

HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E SUAS RELAÇÕES COM AS TENDÊNCIAS DO ENSINO

Com o desígnio de ampliar a compreensão dos conceitos algébricos, acreditamos ser necessário aprofundar os conhecimentos sobre sua constituição histórica. Para tanto, procuramos entender como se deu o processo de surgimento da álgebra, de seus significados e símbolos. Os fundamentos de análise usados bem como o referencial teórico balizador partem da consideração dos estudos de Boyer (1968), Eves (2004), Smith (1958), Lauand (1998), Hogben (1970) e Caraça (1975).

Neste primeiro capítulo, então, abordamos os vários aspectos que a álgebra pode assumir e como este conteúdo é tratado na maioria das salas de aulas. Para isso, faremos um estudo dos elementos históricos constitutivos da álgebra referenciado nos autores supracitados, com o intuito de definir e fundamentar os nexos conceituais abordados na situação B[5] de ensino. No presente estudo destacamos os nexos da *fluência, variável, campo de variação, linguagem, operacionalidade e unidade* para que nos auxiliem na análise das dificuldades apresentadas pelos alunos e nos forneçam indícios de como trabalhar significativamente em sala de aula, a fim de tornar melhor o aprendizado por parte do aluno.

A abordagem histórica da álgebra, aqui proposta, fornece-nos ferramentas para definir os nexos conceituais, tendo-os como referência, inicialmente, no preparo das atividades propostas e, por seguinte, para a definição das categorias de análise do material empírico. Assim, as categorias são definidas a partir de uma combinação dos nexos e das dificuldades emergentes do material empírico.

Os autores Lima (1993) e Sousa (2004), fundamentados em Caraça (1984), entendem que "a fluência se preocupa com a mobilidade do pensamento enquanto que a metafísica se preocupa com a imutabilidade". O nexo da fluência[6] diz respeito ao movimento da vida – nas palavras do filósofo Heráclito de Éfeso: "O mundo está em permanente evolução; todas as coisas a todo o momento se transformam, tudo flui, tudo devém" (CARAÇA, 1984, p. 110).

[5] A situação B se refere ao enfoque e o desenvolvimento das atividades nas salas de aula pesquisadas.

[6] "Fluência: termo usado por Caraça (1998) para designar o fundamental da doutrina de Heráclito: o movimento. A fluência deveria ser o pensamento geral da humanidade sobre a realidade porque contradiz o pensamento de permanência." Sousa (2004, p. 5)

Esse conceito – importante no processo de aquisição das habilidades matemáticas – pode possibilitar ao aluno compreender a idéia de variável, por isso, há relevância em se trabalhar com expressões que possibilitem uma noção desse conceito tanto em linguagem retórica, quanto em linguagem simbólica.

Tal conceito relaciona-se com um segundo e relevante nexo de análise, a *variável,* definida por Sousa (p.82, 2004) como "a fluência, o próprio movimento, o fluxo do pensamento". A autora completa, ainda, dizendo que só há sentido falar em variável, se considerarmos um determinado campo numérico, ou seja, ela está associada a um campo de variação. É este campo que define, dentro de um conjunto numérico, as possibilidades de valores que a variável pode assumir. Ademais, para Caraça (1984, p. 127), a variável pode ser definida como um símbolo "representativo de qualquer dos elementos" de um conjunto qualquer de números. Ou seja, ele representa todos os elementos do campo de variação, mas não coincide "*individualmente* com nenhum" deles.

O campo de variação, por conseguinte, depende do contexto com o qual se está trabalhando, "não há uma resposta pronta e absoluta, embora boa parte dos movimentos da realidade pareça ocorrer no campo dos números reais" (SOUSA, 2004, p. 158).

A variável, portanto, é a fluência, o movimento limitado dentro de um campo de variação que dá qualidade à mesma e indica, segundo Sousa (2004, p. 103), "uma certa movimentação numérica, impossível de ser representada pelo numeral aritmético". Na álgebra simbólica, ela pode ser representada por qualquer letra do alfabeto e pode aparecer de três formas: como parâmetro, incógnita (que é a mais utilizada nas salas de aula) e como variável propriamente dita. Em geral, os professores trabalham apenas com a idéia de incógnita e também de parâmetro, o que dificulta a compreensão do conceito de função quando estudado na 1ª série do Ensino Médio, pois a variável é fundamental no estudo deste conteúdo.

As variáveis podem ser compreendidas como símbolos representativos de campos numéricos determinados (CARAÇA, 1984), assim, todas as propriedades e operações válidas na aritmética, são também válidas na álgebra. As propriedades fundamentais da adição e da multiplicação – pertencentes à aritmética – são a de Fechamento, a Comutativa, a Associativa, o Elemento Neutro e a propriedade Distributiva da multiplicação com relação à adição, além dessas, temos as propriedades Simétrica, Transitiva e Reflexiva da igualdade.

Tais propriedades, abordadas no Ensino Fundamental, se não forem bem trabalhadas durante o desenvolvimento educacional do aluno, quando o mesmo necessitar operar com a linguagem simbólica da álgebra, provavelmente, apresentará dificuldades, pois não entenderá a letra – símbolo – como representativa de um número, no entanto apenas a associará às palavras escritas nos enunciados em linguagem retórica e conseqüentemente será conduzido a uma tradução literal. São as propriedades e as operações realizadas na álgebra e na aritmética que estamos chamando de operacionalidade.

Concordamos com Smith (1958) quando este diz que precisamos definir o que entendemos por álgebra, para demarcar o seu surgimento. Se a considerarmos como uma ciência que nos permite resolver equações, expressas por símbolos ($ax^2 + bx + c = 0$), então, sua história começa no século XVII. Se não formos tão rigorosos e considerarmos "símbolos menos convenientes", podemos dizer que a álgebra começou a existir no século III d.C.. Por outro lado, se entendermos que a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é por métodos geométricos, sem símbolos algébricos, e que faz parte da álgebra, a história da disciplina teria começado com a Escola de Alexandria, ou um pouco antes. E ainda, se considerarmos a álgebra como qualquer problema que agora nós resolveríamos por álgebra, mesmo que primeiramente fosse resolvido por adivinhação ou por algum processo aritmético complicado, então esta ciência ficara conhecida por volta de 1800 a.C. ou provavelmente até antes disso.

Para sabermos, portanto, de modo mais exato quando teve início esta forma matemática é importante explicarmos o que entendemos por álgebra. Pois se percebe que não há ao longo de sua história de formação uma regularidade de definição e conteúdo, o que há nos parece apenas uma tendência.

O ensino de álgebra, atualmente, a trata apenas sob o aspecto do rigor e da formalidade. O que Smith faz, é mostrar que há várias formas de usar a álgebra, conforme a necessidade que se tem. Entendemos que a álgebra não teve início com os símbolos, eles fazem parte de um processo criado para facilitar a comunicação matemática e a resolução dos problemas enfrentados pelo homem. A Educação Conceitual trabalha com essas quatro formas de linguagem que tiveram momentos históricos hegemônicos (retórico, sincopado e simbólico) indicados pelos historiadores Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004), que para a matemática escolar é entendida como formas de linguagem que favorecem o entendimento de como a matemática modela os movimentos da vida. Essas diferentes linguagens podem fazer parte da sala de aula, ou seja, da matemática escolar.

Smith (1958) ainda completa que egípcios, europeus e árabes, por exemplo, usaram palavras para representar e estudar movimentos, enquanto Euclides, por sua vez, fez uso dos segmentos e das figuras; Diofanto[7], palavras e letras e Viète[8] considerou apenas as letras.

Por volta de 2000 a.C., a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida e

> [...] não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrado, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro) (EVES, 2004, p. 61).

Ainda nesse período, os egípcios sentiram a necessidade de superação dos números naturais ao resolver seus problemas de ordem prática, o que pode ser observado no Papiro de Rhind do século dezoito a.C., nele há a utilização da palavra *ahá* para representar quantidades desconhecidas sem a necessidade de recorrer ao numeral. De acordo com Lima, Péricles e Takasaki (1993), foi a partir dessa palavra que os egípcios pensaram sobre o valor desconhecido, ou seja, a *incógnita*.

Já sobre a genealogia da palavra álgebra o autor Boyer (1968, p. 166) diz que ela teve sua origem no título do livro mais importante de Al-Khowarizmi[9]: *Al-jabr wa'l muqabalah*. Apesar de Diofanto ser chamado de o "pai da álgebra", esse título parece mais próprio de Al-Khowarizmi, embora a obra deste teórico tenha representado um retrocesso em relação à álgebra de Diofanto, ele foi o primeiro a desenvolver uma sintaxe ao tratar o caso das igualdades. Esse retrocesso se dá em dois aspectos: primeiro que é de um nível muito mais elementar do que a obra de Diofanto e segundo que a álgebra de Al-Khowarizmi é puramente retórica, isenta de sincopação. Todavia, nem Al-Khowarizmi nem os estudiosos árabes usaram sincopação ou

---

[7] Diofanto de Alexandria teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números. (EVES, 2004, p. 207)

[8] Em seu trabalho mais famoso, *In atrem*, "Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes." (EVES, 2004, p. 309)

[9] Al-Khowarizmi escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus que exerceram enorme influência na Europa quando foram traduzidos para o latim nos século XII.

números negativos, mesmo assim, o *Al-jabr* está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofanto.

Lins e Gimenez (2005, p. 97), importantes estudiosos da educação matemática, completam que “Não é possível ver Al-Khowarizmi nem como uma ‘evolução’ em relação ao trabalho de Diofanto nem como ‘contido’ em Diofanto. Do ponto de vista técnico, a *álgebra* de Al-Khowarizmi é muito mais pobre que a aritmética de Diofanto, mas o que é feito em Al-Khowarizmi não pode ser encontrado em Diofanto.”

Talvez, segundo o filósofo Lauand (1998), Al-Khowarizmi tenha escolhido o termo *Al-jabr* para o procedimento fundamental de sua nova ciência porque “é a operação que soma um mesmo fator (afetado do sinal +) a ambos os membros de uma equação para eliminar um fator afetado com o sinal –“ (ibidem, p. 3). Ifrah (1998, p. 299) torna essa idéia mais clara quando diz que *Al-jabr* é a “operação que consiste em fazer passar os termos de um membro ao outro, de modo a ter apenas termos positivos tanto de um lado quanto de outro do sinal de igualdade”.

Retomando as idéias de Lauand (1998),

> [...] o que a moderna matemática entende por Álgebra pode parecer uma fria e objetiva axiomática-constitutiva de uma sintaxe de estruturas operatórias e destituída de qualquer alcance semântico, mas essa álgebra de hoje é o resultado da evolução – em desenvolvimento contínuo – da velha al-jabr, forjada por um contexto cultural que não são alheios, elementos que vão desde as estruturas gramaticais do árabe à tecnologia muçulmana da época (LAUAND, 1998, p.2).

Ademais, o autor Hogben (1970) acrescenta que a invenção da álgebra entre os hindus e árabes, se deu em três correntes: a necessidade de regras de calcular mais simples; a solução de problemas práticos envolvendo o uso de números, isto é, a solução de equações; e, o estudo das séries. Da álgebra dos egípcios até a simbólica, em sua primeira configuração com Viète, possivelmente, ela tenha surgido para resolver problemas práticos da vida. O mesmo parece não acontecer quando falamos da álgebra abstrata que prescinde dos números. Há uma reorganização interna das estruturas matemáticas em economizar símbolos para dar praticidade à resolução dos problemas.

Lauand (1998) traz uma contribuição interessante no que diz respeito ao surgimento da álgebra. Seus estudos mostram que no Islã a álgebra foi descoberta pela necessidade de dividir as heranças entre os membros da família, e afirma que "uma sociedade sob a forte e urgente necessidade de obedecer à lei do Altíssimo, precisa operacionalizar as soluções dos graves problemas de partilha. A Álgebra surge como uma ciência voltada para a resolução desse problema suscitado pelo Alcorão" (ibidem, p. 5). Cada membro da família recebia uma fração diferente da herança, que variava de acordo com o sexo e com a quantidade de netos, conforme era estabelecido pelo Alcorão.

Essa contribuição trazida pelo filósofo Lauand (1998) nos apresenta como uma versão cultural para o surgimento da álgebra que parece não negar, nem se contrapor, a maneira como Smith (1958) trabalha com a linguagem, nem a idéia de variável, de generalização e de que a matemática necessita de uma linguagem universal. Ao contrário, essas idéias – de Lauand e Smith – se complementam.

Os historiadores Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004) possuem um interessante ponto de convergência, mostram que a álgebra não foi sempre composta por símbolos e diferenciam três fases de seu desenvolvimento: a ÁLGEBRA RETÓRICA, que pertence a um período anterior a Diofanto (cerca de 250 d.C.) caracterizada pela ausência de símbolos matemáticos, as palavras eram escritas na íntegra, mesmo durante a resolução de problemas; a ÁLGEBRA SINCOPADA, pertencente a um período entre 250 d.C. e 1600 d.C., caracteriza-se por usar algumas palavras abreviadas para expressar quantidades e operações que apareciam com maior freqüência e a ÁLGEBRA SIMBÓLICA, que começou no período após Viète (1600 d.C.) e que se estende até os dias atuais, caracterizada pela utilização de símbolos que aparentemente não têm relações com o que se estava representando. A álgebra simbólica surge, portanto, na tentativa de superar as limitações encontradas em resolução de problemas pela álgebra geométrica[10].

Boyer afirma ainda que:

> Não há dúvidas que a álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas da 'álgebra' de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje. A álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz (BOYER, 1968, p. 79).

[10] "Os segmentos de reta são os elementos primários da álgebra geométrica. A partir deles foram se definindo todas as operações do cálculo: adição, subtração, multiplicação e divisão." (SOUSA, 2004, p. 109).

Na presente pesquisa, os tipos de linguagem constituem uma categoria de dificuldade na qual abordamos as dificuldades que os alunos apresentam para escrever as sentenças escritas em linguagem retórica, ou no matematiquês (LIMA, 1993), para uma linguagem completamente simbólica.

Boyer (1968, p. 61) lembra-nos, ainda, que "profundas dúvidas metafísicas impediam que Sócrates se dedicasse à Matemática ou à ciência da natureza", os platonistas gregos tinham horror ao movimento e não fizeram álgebra, acredita-se que por desconhecerem conceitos importantes como o de variável, campo de variação e a linguagem algébrica. Mesmo assim, contribuíram muito para o desenvolvimento da geometria, a começar por Platão que era discípulo de Sócrates, contudo, no campo da álgebra, detiveram-se apenas no desenvolvimento da álgebra geométrica justamente por não conhecer o conceito de variável.

Concordamos com Lima, Péricles e Takasaki (1993, p. 28) quando dizem que "a linguagem Matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos". Essa idéia permitiu que nos libertássemos do numeral e conseguíssemos expressar quantidades desconhecidas.

Talvez se trabalharmos com a idéia de movimento, variável, campo de variação ou conjunto universo e com a linguagem algébrica, os alunos não só desenvolveriam seus próprios símbolos e estratégias para resolver problemas – ou expressar enunciados, mas ainda teriam um melhor entendimento dos conceitos e suas representações, pois, guardadas as devidas proporções, poderiam passar por todas as etapas do desenvolvimento que a álgebra passou ao longo de sua história.

O trabalho com álgebra em sala de aula, deste modo, pode permitir que o aluno faça o mesmo percurso citado pelos autores no que diz respeito ao desenvolvimento da linguagem. Nossa experiência em sala de aula evidencia que o aluno é capaz de construir uma linguagem mais sintética que a retórica e, se conduzido, pode chegar em símbolos bem próximos dos utilizados atualmente na linguagem simbólica.

Acreditamos, dessa maneira, que para fazer álgebra não é necessária uma linguagem estritamente simbólica, o que reafirma nossa hipótese de que a mesma pode ser iniciada com as crianças da pré-escola.

1.1 - O surgimento dos símbolos matemáticos

O simbolismo usado nos textos escolares de álgebra elementar como livros didáticos ainda não têm 500 anos. De acordo com Smith (1958, p. 393), "os símbolos da aritmética elementar são quase todos algébricos, a maioria deles sendo transferido para o campo numérico apenas no século XIX". Por isso, para estudar a origem e o desenvolvimento dos símbolos de operações algébricas, é preciso estudar antecipadamente os símbolos aritméticos.

De acordo com Eves (2004, p. 208), "pode ter sido Diofanto o primeiro a dar os passos iniciais rumo a uma notação algébrica. Esses passos têm a natureza de abreviações estenográficas." E diz ainda que "Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos. Nossa palavra 'aritmética' provém da palavra grega *arithmetike* que se compõe de *arithmos* ("número") e *techne* ("ciência")" (ibidem , p. 208).

Em 1489, Johann Widmann, segundo Eves (2004, p. 298), foi o pioneiro em usar os símbolos + e – "para indicar excesso e deficiência e não com os significados operacionais de hoje". Eves (2004) acredita que o sinal + seja uma contração da palavra latina *et* que era usada para indicar adição e que – decorra da abreviação $\bar{m}$ para menos. Talvez esse símbolo tenha tido influência da prática social dos copistas aliada ao uso cultural feito do + e do –. O matemático holandês Vander Hoecke, em 1514 fez uso dos símbolos "+ e – para indicar operações algébricas, mas é provável que eles já tivessem sido usados antes com o mesmo significado" (EVES, 2004, p. 298).

O estudioso Smith (1958, p.395) completa ainda que "O moderno símbolo de igualdade (=) foi usado pela primeira vez por Robert Recorde, em 1557. Ele justificou a adoção de um par de segmentos de reta paralelos do símbolo de igualdade alegando que 'não pode haver duas coisas mais iguais.'"

Sobre o surgimento da simbologia algébrica, Eves (2004) afirma também que Oughtred (1574-1660) contribuíra com mais de 150 símbolos matemáticos no século XVII, dentre os quais, apenas o de multiplicação (x), o das proporções (::) e da diferença (–), são ainda usados. Por outro lado, o filósofo Leibniz alegou que o símbolo para a multiplicação proposto por Oughtred era muito semelhante ao xis (x), e, por este motivo, preferia o símbolo ($\cap$), o qual atualmente utilizamos para indicar intersecção entre conjuntos. Também no século XVII, o símbolo para divisão (÷), associado à idéia de razão ou fração, apareceu pela primeira vez impresso por Johan Heirinch Rahn (1622-1676).

Este trabalho com o desenvolvimento do significado simbólico da álgebra objetiva contribuir para a elaboração das atividades que foram realizadas com os alunos e para a análise da presente pesquisa.

Para tal execução, buscamos, também, apoio nos historiadores a fim de trabalhar o conceito de Unidade e Smith (1958) nos alerta que só nos tempos modernos a Unidade foi considerada como um número. Antes disso, colocou-se historicamente o debate a cerca da relação unidade - número. Inicialmente com as definições de Euclides: o *número* como sendo uma quantidade feita de unidades e *unidade* considerada qualquer coisa chamada "*um*". Gerou-se com isso uma polêmica, dentre as quais é expressiva a que se encontra referida na obra "República" de Platão, onde este autor questiona "À qual classe a unidade e o número pertencem?". Ao que tudo indica, Platão não se propôs a responder esta questão. Tal tarefa coube posteriormente a outros estudiosos que buscaram, do seu ponto de vista, contribuir para a compreensão da relação número - unidade.

Ainda em Smith (1958) encontramos algo sobre o campo numérico da unidade. Provavelmente, Nicômaco (c. 100) não entendeu a exclusão da unidade do campo de número em geral, mas somente do domínio dos números poligonais. Isso pode ter sido uma má interpretação da passagem de Nicômaco que conduziu Boethius para somar a enorme autoridade de seu nome para visualizar que "*um*" não é um número. Seguindo a conduta de Boethius, os escritores medievais em geral, tais como al-Khowârizmî (c. 825), Psellu (c. 1075), Savasorda (c. 1100), Johannes Hispalensis (c. 1140), e Rollandus (c. 1424), excluíram unidade do campo de número. Um escritor, Rabbi ben Erza (c. 1140), apareceu, entretanto, para aproximar da idéia moderna. Em seu Sefer há-Echad (Livro sobre Unidade) há passagens rigorosas em que ele argumenta que um será visto como um número.

Muitos dos autores de livros impressos inicialmente excluíam as unidades, como é visto nos trabalhos de Pacioli (1494), Köbel (1514), Tzwivel (1505), entre outros. Desta forma, o escritor inglês Backer (1568) nota que "uma unidade não é um número, mas começa e se origina dos números". No século XVI, contudo, surgiu a questão de que essa exclusão da unidade do campo de número, não foi uma disputa trivial de estudiosos, e pelo fim do século foi reconhecido que a antiga definição foi também limitada. Assim, Hyles (1592), falando de "uma unidade ou um inteiro (que algumas vezes também é chamada de *ACE*)", é bastante cauteloso para tomar uma definição padrão no problema, mas diz que "os escritores finais, a saber, Ramus, e assim como tem escrito desde seu tempo, afirmou não somente que uma *unidade* ou *um*, é um número, mas também que fração, ou parte de uma unidade, é um número..." Stevin (1585), usou o argumento de que uma parte é de alguma natureza como o todo, e, portanto, que unidade, que é uma parte de uma coleção de unidades, é um número. Antonie Arnauld (1612-1694), respondeu que o argumento foi imprestável, pois um semicírculo não é um círculo. Stevin também usou o argumento que se de um número não é subtraído nenhum número, o número dado continua igual (permanece); mas se de 3 nós pegarmos 1, 3 não permanecerá; portanto, 1 não é um número. A aritmética escolar conservou a limitação de Boethius até o final do século XVIII. Outra noção comum foi que a unidade é, como um ponto, incapaz de ser dividida, uma idéia também devido aos gregos.

Trazer para a sala de aula o surgimento dos símbolos matemáticos, os seus significados e o das palavras que usamos nas aulas de Matemática, parece facilitar e despertar o interesse do aluno por esse conteúdo. Muitas vezes, a aprendizagem se torna falha devido à falta de entendimento dos porquês do que se está estudando, a história da Matemática, se bem trabalhada, pode contribuir muito para o aprendizado.

1.2 - Como a Álgebra é trabalhada na sala de aula?

Embora as propostas curriculares façam indicações gerais do trabalho com a álgebra, as mesmas limitam-se às linguagens figurada e simbólica, ou seja, ao caráter geométrico da álgebra de Euclides, que nesta pesquisa não será trabalhado. O que se observa na maioria dos livros didáticos e manuais é uma abordagem da álgebra através da geometria, apenas para visualizar o que acontece nas expressões algébricas, mas não se preocupam com a construção da linguagem e com os conceitos envolvidos, provocando, segundo Lins e Gimenez (2005, p. 121) uma "ruptura, e não 'abstração' ou 'passagem'" como imagina a maioria dos professores. A partir da década de 90, começa a aparecer nas aulas de matemática uma relação entre álgebra simbólica e geométrica, tendo como base as Propostas Curriculares, porém essas Propostas não deixam claro que o proposto consiste numa adaptação grosseira da álgebra de Euclides para o qual a variável é o segmento e não a letra. Isso parece confundir o pensamento dos alunos.

Propomos então trabalhar com as linguagens retórica e sincopada na intenção de desenvolver nos alunos suas próprias linguagens antes mesmo de formalizá-las, para que desenvolvam significados conceituais.

As propostas curriculares estão diretamente relacionadas com a prática e o conteúdo trabalhado pelos professores em sala de aula, são elas que dão as diretrizes para que o professor se oriente durante o exercício docente. Porém, de acordo com Sousa (2004), a maioria das propostas curriculares é elaborada sem a participação dos professores, o que os torna passivos em relação aos conteúdos e os modos de trabalhar. Segundo essa mesma autora,

> O não envolvimento dos professores no processo de reformas curriculares faz com que continuem seguindo modelos que tiveram, enquanto estudantes. A maioria deles, ao ensinar os conteúdos algébricos, continua priorizando (...) um ensino de álgebra que não privilegia o entendimento de sua dinâmica histórica e sim o entendimento de suas regras lógicas formais (SOUSA, 2004, p. 12).

Como conseqüência do desconhecimento das intenções dessas propostas, a álgebra é trabalhada como algo imóvel, sem relação com a vida social do aluno, sem relação com os movimentos vivenciados no cotidiano, como se não fizesse parte da história da matemática, ou seja, com uma abordagem tradicional e distante. Em conseqüência dessa abordagem, a álgebra tem sido estudada como se fosse apenas a aritmética generalizada, centrada em regras, algo que possui um caráter instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas, o que deixa a desejar em relação aos conceitos e nexos que essa disciplina nos permite trabalhar.

Desde 1799, momento em que a álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até início da década de 1960, a Matemática foi dividida em compartimentos estanques, de acordo com os autores Miguel, Fiorentini e Miorim (1992). Isso fez com que a matemática fosse interpretada de maneira fragmentada, sem se fazer a relação histórica necessária e, nos dias de hoje, a seqüência dos assuntos estudados se repete: primeiro estudamos a aritmética, depois a álgebra e, quando ainda há tempo, a geometria, que acaba por ser trabalhada de maneira superficial, ainda em segundo plano.

A autora Klüsener (1999), alerta-nos com relação à importância dos símbolos matemáticos, principalmente os algébricos e afirma que:

> A possibilidade de representar com uma letra somente um conjunto de valores e o fato de poder manipulá-los de uma forma simples é, de fato, o que faz a álgebra ser de grande utilidade, muito embora os alunos não cheguem a compreender e aproveitar esta vantagem para poder compreender o sentido dos símbolos é necessário que seja interiorizado a dupla relação entre as situações concretas e as expressões algébricas (KLÜSENER, 1999, p. 184).

Podemos perceber que a álgebra é tida como um dos conteúdos mais complexos e temidos pelos estudantes do Ensino Fundamental devido aos inúmeros símbolos matemáticos utilizados para simplificar e generalizar raciocínios e resultados, muitas vezes aritméticos. Ela carrega os significados e as propriedades da aritmética consigo, utilizando os símbolos da Matemática (+, –, $\times$, $\div$, =, $\sqrt{\ }$, ( ), [ ], { }, ...) e ainda tem o caráter generalizador, que é apenas um dos aspectos da álgebra, além de sua linguagem específica.

Para termos uma idéia da vasta abordagem da álgebra, podemos observar as Concepções da Álgebra discutidas por Usiskin (1995, p.13), as quais resumimos a seguir:

1- A álgebra como aritmética generalizada: aqui está a idéia de que a álgebra pode ser utilizada para generalizar padrões numéricos, o que se espera é que o aluno encontre uma fórmula ou expressão algébrica para representar padrões;

2- A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas: o que se pretende é que o aluno represente o problema numa linguagem simbólica, por meio de equações facilitadoras da resolução;

3- A álgebra como relação entre grandezas: relação entre quantidades que variam e gráficos para representá-las;

4- A álgebra como estudo das estruturas matemáticas: manipulação de símbolos arbitrários sem relação qualquer com um problema, ou função ou padrão a ser generalizado. Treino da operacionalidade presente na álgebra;

Podemos acrescentar, tomando por base a álgebra desenvolvida pelos gregos, o caráter geométrico desta, que utilizava segmentos no lugar das variáveis letras, pois não conheciam tais variáveis. Essa linguagem pode facilitar a resolução de alguns problemas e é uma maneira interessante de trabalhar em sala de aula, pois possibilitaria a visualização das etapas de resolução e auxiliaria a compreensão das operações e regras. Em cada um dos itens citados acima, faz-se necessário pensar no movimento presente nas situações. Mas essa linguagem deve ser trabalhada com cautela, para que o aluno compreenda o que está sendo considerado como variável.

São muitos os aspectos que compõem a álgebra e que precisam de atenção especial por parte dos educadores. O que acontece com freqüência nas salas de aula, é um trabalho com atividades que não permitem que o aluno desenvolva uma idéia ampla dos conceitos algébricos, possibilitando apenas o uso da operacionalidade presente na linguagem algébrica, se o aluno tiver uma boa compreensão da aritmética. A linguagem simbólica específica da álgebra não é tão natural para o aluno quanto a numérica, que é utilizada no cotidiano e, portanto, precisa de atenção especial em sala de aula desde as séries iniciais para que os alunos entendam o seu sentido e a necessidade de sua utilização.

Todas essas abordagens do ensino de álgebra mostram a complexidade dos conceitos algébricos e se entende que para que o aluno seja demovido das dificuldades algébricas que ele acaba levando consigo por todo o seu processo escolar, é preciso que incorpore essa complexidade na sua abordagem. As pesquisas, em particular a nossa pesquisa de Iniciação Científica, mostram que o ensino restrito a um aspecto da álgebra, impede a compreensão ampla e profunda desta área do conhecimento matemático. Esse estudo pretende colocar em comparação as dificuldades decorrentes das duas abordagens diferentes, com o intuito de desvendar esse problema. Uma abordagem tradicional contraposta à abordagem que abrange mais aspectos da álgebra.

Usiskin (1995) acredita que a álgebra só acontece quando se tem contato com a variável, o que segundo ele, só pode ocorrer no Ensino Médio. Essa concepção é muito comum entre os professores do Ensino Fundamental. Mas nós concordamos com autores como Sousa (2004) e Lins e Gimenez (2005) no sentido de que os estudantes tenham contato com os conceitos algébricos desde cedo, assim que começam a trabalhar o conceito de número e com a idéia de número em geral.

Atualmente, nas séries finais do Ensino Fundamental, Médio e até no Ensino Superior, a álgebra ainda é abordada de forma mecânica e repetitiva sem proporcionar reflexões e discussões entre os alunos. Sendo esta abordagem agravada pelo fato de seus significados aritméticos e geométricos serem trabalhados nas séries iniciais dessa mesma forma mecânica, artificial e repetitiva, isto quando são trabalhados. Por exemplo, nos livros atribuídos a essas séries são comuns os exercícios de preencher lacunas, de dar valor ao quadradinho, o problema é o modo como o professor conduz essas atividades, sem explorar seus significados e a idéia de movimento. Para muitos professores, o único “instrumento” de trabalho é o livro didático, o qual trata apenas de exercícios mecânicos, que solicitam a aplicação de regras e conceitos decorados, e aborda os conteúdos de uma forma simplificada porque é destinado aos alunos e não aos professores (SOUSA, 2004).

Segundo Neves (1995), muitos alunos e professores acreditam que a álgebra existe apenas dentro da sala de aula, nas atividades escolares e aprendê-la significa lidar com verdades já estabelecidas. Desse modo, a álgebra tem pouco ou quase nenhum significado para a maioria dos alunos que não vislumbram sua amplitude.

Um dos aspectos que pode contribuir para mudar essa realidade constatada por Neves (1995), é a abordagem da história da álgebra na formação inicial para que o futuro professor possa entender seu desenvolvimento, saber lidar com os conceitos e ter fundamentos teórico-metodológicos para preparar atividades significativas para os alunos, de modo que estas permitam desenvolver os conceitos a partir de seus próprios conhecimentos e a partir da história da matemática.

A visão de que a álgebra é a aritmética simbólica vem desde o início do século XIX e está presente ainda hoje na escola secundária e no nível superior. A álgebra é vista como um conjunto de equações a serem resolvidas através de métodos mecânicos, fórmulas e problemas de cálculo algébrico e aritmético que normalmente vêm acompanhadas de regras decoradas como “mudou de membro muda de sinal”, essa fala que reduz as principais idéias da álgebra árabe, é um enxugamento da construção histórica. Muito comum na sala de aula, ela pode induzir o aluno a erros durante a resolução das equações do tipo: $2x = 10$, então $x = 10 – 2$, pois se troca de sinal, o 2 estava sem sinal, portanto compreendido como positivo, então vai para o segundo membro com o sinal negativo. Esse fato pode ser verificado no material coletado durante os plantões da pesquisa de Iniciação Científica, em nossa prática em sala de aula e no trabalho de Araújo (1999).

Para que o aluno compreenda a linguagem algébrica, é necessário, ainda, que ele tenha tido uma boa aprendizagem em aritmética, pois a operacionalidade presente na álgebra segue as mesmas regras e conceitos da operacionalidade da aritmética.

O teórico Hogben (1970, p. 319) ressalta que “A aritmética escolar compõe-se, em parte de regras de cálculos baseadas nos algorismos árabes e hindus, em parte da solução de problemas numéricos sem o recurso dos símbolos numerais abstratos que constituem a álgebra”. O ensino de álgebra, reduzido a esta abordagem que entendemos ser mecânica, impõe limites à sua aprendizagem, que ainda hoje não estão totalmente superados.

Normalmente os professores “explicam” o que os alunos devem fazer quando encontrarem certos tipos de exercícios ou “problemas” padronizados. Podemos observar isso quando o professor ensina aos alunos a relação: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e diz que sempre que os mesmos encontrarem o quadrado de um binômio, devem utilizar a regra, todavia não mostram o caminho percorrido até chegar nesse resultado e nem uma aplicação prática que ilustre esta afirmação, o que dificulta a compreensão do conceito por parte do aluno, que decora, por não entender, a “fórmula”. O uso de tal procedimento para explicar leva o aluno a um pensamento rígido e pode construir uma falsa idéia de que a álgebra é estática, rígida, sem relação com a vida e com significados que ele possa construir a partir do seu cotidiano.

Para reforçar esse pensamento, Sousa (2004) lembra que na álgebra simbólica “prioriza-se o pronto e acabado”. No contexto da maioria das salas de aula, “o símbolo parece falar por si mesmo, parece ter vida própria” e conceitos fundamentais – como a fluência – não fazem parte das aulas. “É como se a álgebra tivesse tido início a partir do formalismo proposto por Viète”, ignorando o desenvolvimento histórico do conceito de variável. (SOUSA, 2004, p.5).

Em seu artigo, Araújo (2006) acrescenta dizendo que o que acontece na maioria das salas de aula “é encontrar alunos que se frustram e não conseguem ter um desempenho satisfatório nas aulas de Matemática, pois muitas vezes não vêem sentido na sua aprendizagem”. Quando são trabalhados problemas interessantes, que podem despertar o interesse dos alunos ou aproximam-se do seu cotidiano, muitas vezes não é dada continuidade ao trabalho, opta-se por uma lista de exercícios repetitivos. Em Lanner e Scarlassari (2001), verificamos a pertinência dessa observação feita por Araújo (2006) no que diz respeito à aprendizagem da álgebra centrada na manipulação de expressões simbólicas. Algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos decorrentes desse tipo de abordagem foram citadas na Introdução desta Dissertação. As que mais nos chamam a atenção são as referentes à linguagem algébrica e à operacionalidade presente nas equações.

Essas dificuldades, segundo nossos estudos, são provenientes de um ensino que privilegia a repetição de conceitos, a aplicação de fórmulas prontas que o aluno decora sem entender, de um trabalho que privilegia uma avaliação escrita no final do processo de aprendizagem e não uma avaliação contínua durante todo o processo de aprendizagem, e não permite que o aluno crie e desenvolva seus próprios conceitos sobre os temas estudados. Tal prática em sala de aula é caracterizada por autores como Booth (1995), Sousa (2004), Lima (2006) como um ensino tradicional, mecânico, sem relações com as necessidades da vida dos alunos.

O conteúdo algébrico "Função" é o que mais deixa explícito a idéia de movimento, com a qual temos trabalhado. É também um tema muito discutido entre os estudiosos de álgebra, pois trabalha com a idéia de variável e com o aspecto gráfico ademais por desenvolver a idéia de movimento intrínseca à álgebra. Quando o aluno começa a ter contato com a idéia de função, normalmente já está na 1ª série do Ensino Médio e é só nesse momento que ele começa a perceber que as equações expressam os movimentos presentes em situações reais, as diferentes respostas para a mesma pergunta, as diferentes maneiras de representar o mesmo problema. A palavra *variável* está bastante presente no trabalho com função e quase nunca na introdução algébrica. O conceito de função é fundamental para que os alunos coloquem em prática as idéias de movimento que foram adquiridas durante o trabalho com álgebra e deve ser trabalhado tão logo o aluno comece o contato com equações e sistemas de equações. Normalmente o que acontece nas escolas com as funções, é um trabalho restrito à variável letra, sem análise gráfica que contribuiria muito no entendimento do aluno.

Acreditamos que a idéia de movimento presente na linguagem algébrica simbólica, enunciados e equações seja uma das mais importantes no campo da álgebra. Por esse motivo, consideramos que a álgebra administra quantitativamente os movimentos da vida e, portanto, define os valores numéricos dentro de um campo de variação (CARAÇA, 1975).

Juntamente com a idéia de movimento está a noção de campo de variação, pois, quando se fala, por exemplo, da altura de uma criança, não estamos falando de todos os números racionais, mas só daqueles que podem representar esse movimento. 98, por exemplo, não é uma resposta aceitável. O campo de variação para a altura deve ser acordado com os alunos, pode ser considerado um número racional variando de 40 cm a 1m50cm, por exemplo. Outra pergunta que possibilita a idéia de movimento é "Qual é o número de pessoas que podem viajar em um carro?". O aluno tem que perceber que o carro não anda sozinho, desse modo, a resposta não poderia ser zero, e ainda que também não teria possibilidade de 10 pessoas serem acomodadas em um carro de passeio, então, o campo de variação pode ser negociado como um número natural que varia de 1 a 5, por exemplo.

Percebemos que no início do trabalho de álgebra com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental, o pensamento metafísico estava muito presente em todos eles, ou seja, a maioria dos alunos apresentava um pensamento rígido, a idéia de que nada muda, de que temos certeza dos fatos que acontecem na natureza, de que tudo, principalmente na Matemática, está pronto e acabado, sem possibilidades de criação e mudanças. Segundo Sousa (2004), foram filósofos e físicos como Heráclito, Galileu Galilei, Isaac Newton, Einstein que questionaram as verdades absolutas, mostrando que as mesmas são relativas e momentâneas. Dessa forma, é de fundamental importância trabalhar em sala de aula com questões que permitam que o aluno rompa com esse pensamento rígido e comece a ter mais flexibilidade, para possibilitar a compreensão da fluência e posteriormente da variável. Exemplos de atividades que trabalhamos para mudar essa idéia serão explorados no Capítulo III, da Metodologia.

As dificuldades apresentadas pelos alunos são localizadas em cada nexo que compõe o conceito. Esta relação de dificuldades e desenvolvimento do nexo conceitual nos permite trazer as categorias que têm um caráter de emergência porque são indicadas pelas dificuldades dos alunos ao desenvolverem os nexos conceituais. Essas categorias são: 1) Tradução Literal; 2) Variável; 3) Operacionalidade; 4) Unidade; 5) Linguagem; 6) Campo de Variação. Dessa forma é que a revisão da história se constitui como uma referência para esta pesquisa.

Inferimos que o ensino que se restringe a um ou outro aspecto da álgebra é gerador de dificuldades, do mesmo modo, um ensino que abrange os nexos conceituais da álgebra, também gera dificuldades, porém pode proporcionar melhor compreensão dos conceitos, diferente do que ocorre no caso anterior. O ensino que trabalha com uma gama de nexos conceituais, é o que denominamos, com base em Lima (2006), como sendo o de desenvolvimento conceitual que, ainda segundo o autor, combina a formação da linguagem e da operacionalidade do conceito cuja formação é enfoque da linha de pesquisa, Educação Conceitual Matemática[11].

---

[11] Esta linha de pesquisa está em desenvolvimento na Faculdade de Educação da UNICAMP e tem como pressuposto que ensinar matemática é permitir ao aluno a construção de seus próprios significados e conceitos, criando, discutindo e trabalhando idéias.

Nossa proposta é investigar que relação pode haver entre as dificuldades em álgebra de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental apontadas pela pesquisa de Iniciação Científica, vinculadas a um ensino centrado na apresentação do conceito, na manipulação simbólica de técnicas operatórias e as dificuldades decorrentes de um ensino que privilegia o desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra elementar, de acordo com as perspectivas do desenvolvimento conceitual.

Esses pressupostos têm por base o desenvolvimento histórico da linguagem algébrica indicado por Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004) e Dantizig (1970), e que será referencial para a natureza das atividades propostas para o desenvolvimento dos significados da linguagem. Segundo estes autores, a notação algébrica pode ser dividida, embora não haja linhas exatas para a demarcação dessas divisões, em três momentos históricos: o retórico, onde as palavras eram escritas na íntegra; o sincopado, em que foram utilizadas abreviações e o simbólico, onde as abreviações deram lugar para os símbolos usados atualmente, como já foi enunciado anteriormente.

A álgebra, entendida por este desenvolvimento histórico, centra-se numa trajetória de desenvolvimento da linguagem (retórico – sincopado – simbólico). Entendemos que a dicotomia entre as interpretações semântica e sintática, não possibilita o entendimento do modo de administrar quantitativamente os movimentos de nosso entorno e cujo entendimento possibilita o desenvolvimento do conceito de variável.

Klüsener (1999, p. 181) também defende que a linguagem Matemática, como expressão da linguagem simbólica, deve operar nos dois níveis enunciados abaixo:

Semântico	**Sintático**
Onde os SÍMBOLOS, SINAIS e as NOTAÇÕES são dadas como um significado claro e preciso. As palavras são associadas a significados ou as ações que estão associadas às operações ou mesmo relações funcionais.	Em que REGRAS, PROPRIEDADES E ESTRUTURAS podem ser operadas sem a referência direta a nenhum significado: este é o ponto fundamental ao desenvolvimento matemático como área de conhecimento. Neste nível são analisadas, além das linguagens verbais (oral e escrita) também a linguagem ARITMÉTICA, a ALGÉBRICA, a GRÁFICA, etc... É a linguagem matemática como SISTEMA SIMBÓLICO.

Quadro 1: Sintático e semântico (KLÜSENER, 1999. In: NEVES, I.; Souza, J.; SCHÄFFER, N.; GUEDES, P; KLÜSENER, R., 1999, p.175-202).

Embora não usemos, nesta pesquisa, essas duas abordagens como categorias de análise, tomamo-as como referência para uma avaliação geral das duas abordagens de ensino, podemos dizer que a maioria das questões propostas na situação A está na ordem da sintaxe e na situação B combinam esses dois aspectos, além da idéia de movimento.

É importante possibilitar ao aluno uma concepção de álgebra mais ampla do que apenas a manipulação simbólica. Isto é, uma concepção que a desvincule do modo mecânico de resolução de equações, uso de fórmulas e resolução de problemas de puro cálculo algébrico e aritmético. É interessante salientar que quando o aluno inicia o pensamento matemático da álgebra, ele necessita compreender a idéia de movimento que está implícita no movimento da vida, no seu cotidiano, assim como Sousa (2004), apoiada em Caraça (1975), sustenta.

Neste sentido, o desenvolvimento histórico vem mostrando que o homem como ser em devir, busca constantemente a superação de suas limitações, dentre as quais, se inclui a do conhecimento científico e, em especial, de álgebra. Tudo está em constante mudança, constante movimento. O homem constrói sua história passando por mudanças e transformações o tempo todo (CARAÇA, 1975). O domínio do pensamento metafísico, ou seja, de que tudo é fixo, constante, talvez explique esta concepção dominante da álgebra tradicional. Superação que só ocorreria com o desenvolvimento do pensamento de fluência (movimento), legado do filósofo grego Heráclito, no qual o matemático português Caraça (1975) fundamentou-se para conceber a álgebra como representando movimentos quantitativos.

O lógico-histórico, segundo Sousa (2004), "é o processo do vir a ser dos conceitos.", ou seja, o conceito não é algo pronto para ser utilizado, mas sim, algo que "contém dúvidas, incertezas, inesperados, novas qualidades, medos, ousadias, descobertas, relações entre o velho e o novo, imutabilidade, mutabilidade, fluência, movimento" (SOUSA, p. 33, 2004). Pensando nisso, reforçamos ainda mais a necessidade da mudança do ensino de álgebra. A escola não pode privar o aluno dessas descobertas.

No capítulo seguinte tratamos das dificuldades encontradas por alunos ao estudar álgebra elementar, a partir do nosso ponto de vista e de outros estudiosos. Analisamos também a aprendizagem desse conteúdo a partir da linguagem e do pensamento algébrico.

CAPÍTULO II

O MOVIMENTO EM QUE SE INSCREVE O NOSSO ESTUDO

CAPÍTULO II

O MOVIMENTO EM QUE SE INSCREVE O NOSSO ESTUDO

Tanto na minha prática de sala de aula, anterior ao início do mestrado, quanto na prática do professor titular das turmas de Iniciação Científica, como nas práticas dos professores que lecionaram nas salas que estudei durante o Ensino Fundamental e Médio e também pelo que podemos observar dos trabalhos de nossos colegas, o ensino da Matemática não vai muito além das fórmulas e das "continhas", da resolução de problemas inventados com números exatos e da manipulação simbólica, nesta última está incluído o ensino de álgebra.

Nós professores, na maioria das vezes, apresentamos os conceitos que julgamos necessários para o aprendizado do aluno, ou os que constam nas Propostas Curriculares, de maneira mecânica, sem a participação do aluno no processo de construção desses conhecimentos. Tais conceitos são, normalmente, colocados na lousa para que os alunos copiem, em seguida, explicamos como funcionam, apresentamos alguns exemplos e solicitamos que os alunos façam outros exercícios semelhantes ao exemplo. Quase sempre se tratam de exercícios de repetição e memorização dos conceitos. Quando ensinados dessa forma, os alunos aprendem uma matemática ausente de significados e de entendimento dos movimentos quantitativos de sua realidade. Como já dissemos, essa prática é característica de um ensino tradicional, centrado apenas na manipulação de símbolos e consiste, em geral, num treino. Desse modo, a matemática torna-se um assunto exclusivo da escola, o que a torna desinteressante do ponto de vista do aluno, pois este acaba desestimulado.

A autora Klüsener (1999, p. 176), em concordância com essa análise, afirma que a Matemática, "embora de uma forma mais elementar, é ensinada sem a preocupação em estabelecer vínculos com a realidade, nem com o cotidiano do aluno". Essa realidade parece acontecer tanto em escolas da rede pública quanto da rede particular de ensino.

Em álgebra, por exemplo, os alunos que tiveram um ensino proveniente de uma metodologia tradicional, realizam as operações com as letras sem entender o que estão fazendo, os conceitos de variável, campo de variação e fluência, tornam-se sem importância, isso faz com que os alunos passem a julgar importante apenas o ato de resolver equações, aplicando as técnicas operatórias e regras prontas.

Entendemos que a aritmética - com suas operações, símbolos e propriedades - é a base do pensamento algébrico e está estreitamente relacionada ao que chamamos de operacionalidade. Quando nos referimos ao pensamento algébrico, relacionamos a este, além da operacionalidade, a idéias de movimento quantitativo, regularidade, variabilidade, dependência, intervalo numérico e outros. Esses são os nexos da aritmética que compõe a totalidade do pensamento algébrico que devem ser trabalhados em sala de aula por meio de atividades que instiguem o pensamento dos alunos, que possibilitem que eles desenvolvam tais conceitos. Sem o desenvolvimento destes conceitos e suas relações, o aprendizado de álgebra se torna fragmentado, como se fosse apenas aplicações de técnicas, sem a compreensão de que a álgebra é um instrumento muito útil para a resolução de problemas e uma ferramenta que pode facilitar o estudo de outras áreas além da Matemática.

É importante entender as raízes aritméticas do erro para que o professor trabalhe com atividades que permitam uma compreensão, por parte dos alunos, da operacionalidade que será necessária para o aprendizado em álgebra elementar. Além disso, é importante trabalhar com atividades a fim de desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, a compreensão de movimento e variação numérica, bem como a linguagem simbólica.

Assim, para o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébrica é importante propor ao aluno, por meio do desenvolvimento e apropriação da linguagem simbólica, que signifique esta complexidade do pensamento. Entendemos que esta apropriação não se dá por uma correlação direta das estruturas aritméticas a símbolos algébricos, mas orientada por um processo de significação possível de acontecer quando se representam os nexos acima relacionados por meio das linguagens: retórica, sincopada, geométrica e simbólica.

Klüsener (1999) afirma que

> Quando a criança entra na escola, ela sabe falar, tem um vocabulário próprio, mas não sabe escrever. E, nesse contexto, pretende-se que ela escreva utilizando a linguagem simbólica da matemática, não lhe abrindo a possibilidade de desenvolver as expressões e noções matemáticas através de uma linguagem natural – formas descritivas que substituem, num primeiro momento, certos termos próprios da linguagem matemática, evidenciada pela complexidade dos símbolos (KLÜSENER, 1999, p. 179).

O desenvolvimento da linguagem algébrica nos alunos se dá pelo uso das idéias provenientes da aritmética e também pela sua linguagem característica. Analisando este processo de aprendizagem, nota-se que as dificuldades apresentadas pelos alunos se originam na maneira como a álgebra é ensinada: sem fazer referências aos movimentos quantitativos do cotidiano e ao movimento da vida e como algo totalmente novo para quem aprende. Esses e outros significados importantes para o desenvolvimento dessa nova linguagem são esquecidos.

Nesta pesquisa, nos ativemos a um trabalho com as linguagens: retórica, sincopada e simbólica, por estimarmos a possibilidade de serem trabalhadas com as classes de 6ª séries, sujeitas da pesquisa.

A pesquisa de Iniciação Científica contribuiu para que começássemos a nos questionar sobre a maneira como a álgebra e a aritmética são trabalhadas nas salas de aula, principalmente no Ensino Fundamental. Pois, percebemos que as dificuldades apresentadas pelos alunos eram muitas, e gostaríamos de contribuir para um melhor aprendizado, além de evidenciarmos um cenário mais claro para que os professores desse nível escolar se atentassem aos erros que os alunos cometem e aos nexos necessários para o aprendizado ao preparar suas aulas desta disciplina.

Acreditamos que se o professor vir a conhecer as possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar ao estudar determinado conceito, ele atentar-se-á no momento de preparar a aula, ademais, proponha atividades com a finalidade de isentar os alunos de determinados tipos de dificuldades.

Apresentamos alguns autores que tratam do tema dificuldades e alguns resultados da pesquisa de Iniciação Científica com a intenção de contribuir para a análise das dificuldades presentes em ambas as situações de ensino enfocadas neste estudo. Abordaremos também algumas idéias e suposições de como o pensamento e a linguagem podem influenciar no trabalho do professor em sala de aula. Com base nas leituras desses autores, verificamos que dificuldade é um termo comum quando se trata do ensino de álgebra e quando debatido no senso comum. Alguns professores afirmam que as dificuldades em álgebra advêm das dificuldades em aritmética. Além disso, alguns autores também têm tratado as dificuldades na aprendizagem de álgebra elementar, visto que este é um tema que acompanha o aluno por muitos anos durante seu trajeto escolar. Os autores em questão consideram que os alunos são treinados para resolver exercícios padronizados com fórmulas prontas, conforme a forma de abordagem no ensino, isso passa a comprometer a compreensão do conteúdo e a essência da álgebra.

A australiana Booth (1995) afirma que um dos grandes problemas na aprendizagem de álgebra se deve a uma incompatibilidade entre os métodos informais utilizados pelos alunos para resolver os problemas e os métodos formais[12] da álgebra, principalmente a sua linguagem. A linguagem informal[13] estaria mais próxima da linguagem sincopada, na qual o aluno usaria símbolos ou abreviações para expressar os enunciados da maneira que ele compreendeu.

No decorrer da pesquisa de Iniciação Científica, e desta, percebemos que os alunos, em geral, usam uma linguagem mais acessível ao seu entendimento, como a informal e a sincopada para expressar suas idéias e representar expressões que estão escritas em linguagem retórica, podemos dizer que usam símbolos "menos convenientes", como se refere Smith (1958) ao falar de uma linguagem mais concisa que a retórica, porém não tão sintética quanto a simbólica. Guardadas as devidas proporções, hoje, pode-se dizer que, alunos da 6ª série e *internautas* conversam a partir de uma linguagem sincopada. Para tanto, entendemos a informalidade e a sincopação como sinônimos.

A linguagem simbólica, presente na variável letra, se diferencia das demais, dentre elas, a sincopada, justamente porque é apenas nesta linguagem que conseguimos fazer generalizações, a partir de fórmulas e expressões. Há generalizações possíveis de se fazer hoje que não eram possíveis com a linguagem sincopada, como o estudo das funções, por exemplo.

O que acontece, na maioria das salas de aula, é a utilização da linguagem simbólica e formal sem passar pelas outras linguagens, dando um salto no processo de aprendizagem. O que pretendemos fazer, na situação de ensino B, é deixar o aluno trabalhar numa linguagem a ele compreensível.

Muitos autores discutem também a questão do erro na matemática. Podemos citar Moreira e David (2005), eles afirmam que "O erro desempenha, na matemática escolar, um papel positivo importante, fornecendo elementos para o planejamento e execução das atividades pedagógicas em sala de aula". Em Scarlassari (2001) trabalhamos com os tipos de dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Fundamental e observamos que o aluno, diante de um erro, é solicitado a repetir a expressão correspondente de forma correta, o que não acrescenta em nada

[12] Entendemos como método formal, a linguagem simbólica, rigorosa.
[13] Linguagem informal se refere à linguagem sem o rigor e a formalidade da Matemática, seja ela retórica ou sincopada.

para o seu aprendizado. Portanto, não se trata de memorizar a forma correta, mas de significar através de atividades que possibilitem a ele a construção do pensamento matemático e o entendimento da operacionalidade presente nos elementos da matemática.

Em decorrência disso, o aluno que tem dificuldade apresenta uma resposta errada. O erro é um momento do processo de dificuldade que o aluno apresenta, ou seja, é uma qualidade que atribui a uma resposta fechada e definitiva. O erro é a resposta incorreta que o aluno apresenta para o problema, a dificuldade, por outro lado, é uma análise do pensamento que está em andamento, é um processo que apresenta a possibilidade de uma resposta menos errada, mais próxima do certo ou mais distante do certo.

Uma autora que dialoga também com essa idéia é Pinto (1997), que pesquisou o modo como as professoras tratam e enfrentam, durante as aulas, situações de erro ou dificuldade, suas e dos alunos, que surgem no processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar. Seus estudos evidenciam também que os erros cometidos pelos alunos são decorrentes de uma prática escolar que privilegia mais os processos sintáticos que semânticos. E mostraram também a necessidade em olhar o erro não como algo ruim ou negativo, mas como conseqüência de uma tentativa de compreensão e significação e que, por isso, precisa ser explorado pedagogicamente pelo professor.

2.1 - Erros e Dificuldades em Álgebra

Segundo Schoen (1995, p.137), "quando o aluno tem o contato formal com a álgebra ele já tem muitas crenças e preconceitos sobre ela, sobre problemas e conceitos do mundo real descritos nos mesmos." E mesmo os alunos que têm um conhecimento dos conceitos e habilidades algébricas e geométricas básicas, não conseguem aplicá-los na resolução de problemas. A autora Kieran (1992) atenta para o fato de que para superar essa falta de entendimento, os alunos recorrem à memorização de regras e procedimentos e acreditam que essa é a essência da álgebra.

Na aritmética, por sua vez, o aluno aprende que as operações de soma, diferença, multiplicação e divisão são resultados de ações realizadas com dois números que tem como resultado um terceiro número. Quando os alunos são iniciados no trabalho com a álgebra, isso pode levar a uma interpretação de sentenças do tipo 5 + x, que tendem a ser interpretadas como um valor numérico (5 + x = 10 porque o aluno considera x = 5, por exemplo), (MAZA, 1993).

Outro erro muito comum que se remete, em parte à aritmética, cometido por todos os alunos sujeitos da pesquisa de Iniciação Científica foi ao traduzir, por exemplo, "A metade de um número é igual a este número menos quatro unidades." para "2/x = x – 4" ou "2x: = x – 4", por exemplo. Quando questionados com relação às suas respostas, os alunos as julgavam corretas, pois afirmavam que "metade vem escrito primeiro" e é a expressão que está relacionada com o número 2. Esses tipos de erros passam a significar dificuldades, pois ao tentar corrigi-los recaem nos mesmos erros ou em outros semelhantes, o que vai convencendo o aluno de que ele tem "dificuldades" em álgebra.

Nas salas de aula do Ensino Fundamental a álgebra parece se restringir ao uso de letra para representar números desconhecidos (incógnitas) e na operacionalidade presente nas equações. Mesmo quando a idéia de variável está presente, como no caso do estudo das funções, a maioria dos professores a trata como valores a serem descobertos, deixando de lado o caráter de movimento presente nesse conteúdo. No Ensino Médio essa realidade parece se repetir. Cada vez mais, os alunos acreditam que para saber matemática precisam decorar as regras e as fórmulas.

Pesquisas como a de Booth (1995) e a de Araújo (1999) apontam que a falta de fechamento, ou seja, a não aceitação de uma resposta algébrica é uma dificuldade presente em muitos alunos que iniciam seu trabalho em álgebra. Eles acreditam que o que se espera é uma resposta com um único termo e por isso simplificam 2x + 3y para 5xy (Booth, 1995). A ocorrência desse fato deve-se ao fato de, na aritmética, costumamos dar respostas únicas, ou seja, para 10 + 3 colocamos sempre 13 e não uma expressão equivalente como 11 + 2. Além disso, os alunos também têm muita dificuldade em aceitar expressões sem o sinal de igual, de acordo com Kieran (1992), a + 3, por exemplo, não tem sentido porque falta na expressão um sinal de = e o membro do lado direito.

O sinal de igualdade na aritmética é quase sempre unidimensional, da esquerda para a direita, indicando que o resultado da operação será colocado após o sinal de igual. Já na álgebra, esse símbolo indica que foram feitas transformações conceituais, portanto, é bidimensional. Booth (1995), em seu estudo, percebeu que, para os alunos o sinal de igual serve apenas para indicar uma relação entre as etapas do cálculo que está sendo realizado, por exemplo, ao resolver um problema que pede para encontrar a área do trapézio de base maior 10, base menor 8 e altura 6, fazem: $10 + 8 = 18 * 6 = 108 \div 2 = 54$. Ainda considerando os estudos de Booth (1995), encontramos uma observação sobre o fato de que, na álgebra, tem-se uma necessidade de precisão absoluta no registro de afirmações e das etapas realizadas. O mesmo pode ser verificado no trabalho de Araújo (1999).

Podemos observar em Scarlassari (2001) que os alunos consideram a divisão e a subtração comutativas, assim como a multiplicação e a adição. Os alunos acreditam que sempre o maior número deve ser dividido pelo menor, mesmo quando se tem $5 \div 10$ eles consideram como $10 \div 5$.

Nesses casos, quando são questionados a respeito do que escreveram, acham que não precisam mudar nada, pois chegaram à resposta correta e sabiam o que estavam fazendo quando escreveram essas sentenças (ARAÚJO, 1999).

Outra notação que causa conflito entre álgebra e aritmética, segundo Araújo (1999) e Booth (1995) é a justaposição: na aritmética, 21 significa $2 \times 10 + 1$ enquanto que na álgebra, 2x significa 2 vezes x ou o dobro de x. No caso de 21x os dois sentidos aparecem juntos, ou seja, 21 é $2 \times 10 + 1$ e quando justaposto com x, temos o x sendo multiplicado por 21.

Quando se trata de expressões numéricas, os alunos consideram o uso dos parênteses desnecessário porque acreditam que as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem. No caso de $25 + 5 \times 3$, fariam $30 \times 3 = 90$, que estaria correta somente se a expressão estivesse com parênteses: $(25 + 5) \times 3$.

Nesses exemplos supracitados, o problema reside principalmente na operacionalidade devido à ênfase na sintaxe ou nos processos operacionais, e não na semântica, isto é, nos significados das operações. Esse procedimento, acaba levando os alunos a dificuldades em álgebra, pois, na sala de aula, normalmente se trabalha primeiro com a aritmética e depois com a álgebra. Essa idéia de que a atividade algébrica só é possível de forma tardia, em termos de idade, parece equivocada. Segundo Davidov (1988), o pensamento algébrico começa na atividade de lidar com relações quantitativas. O ideal é realizar um trabalho conjunto da álgebra com a aritmética e não tratar esses temas como partes distintas da matemática, mas como complementares.

A seguir apresentamos o quadro 2 com as categorias encontradas nos trabalhos de Booth (1995), Araújo (1999) e no neste trabalho.

Autores	**Booth**	**Araújo**	**Scarlassari**
Categorias de dificuldades	- tradução literal	- tradução literal	- tradução literal
	- "transportar" a operacionalidade presente na aritmética para a álgebra - princípio de equivalência - aceitar a falta de "fechamento" das expressões algébricas -simplificar expressões do tipo a + b para ab - acreditam que a divisão e a subtração, assim como a adição e a multiplicação são comutativas	- noção de equivalência - ambigüidade das notações aritméticas e algébricas, por exemplo, 23 significa 20 + 3, enquanto ab significa a x b	- operacionalidade
	- estabelecer significados para as letras - aceitar uma resposta algébrica (alunos acreditam que se deve dar uma resposta numérica)	- interpretar, esquematizar e resolver problemas algébricos - generalizar objetos, relações e operações - uso de letras identificando objetos e não as quantidades associadas a eles - associam a incógnita de maior valor ao maior coeficiente	- variável - linguagem
			- unidade - campo de variação

Quadro 2: Categorias de dificuldades

Quando analisadas as categorias estabelecidas pelas autoras, percebemos que a maioria delas estão relacionadas. Em todas aparece a tradução literal, nas quais os alunos estabelecem uma relação entre linguagem retórica e linguagem simbólica sem se preocupar com a operacionalidade presente nos enunciados. Na categoria da tradução literal, os alunos traduzem "ao pé da letra", fazendo apenas a correspondência entre palavra e símbolo. As outras categorias apresentadas por Booth (1995) e Araújo (1999) estão contempladas nas categorias operacionalidade e variável dos nossos estudos. Já as nossas categorias como a da unidade, da linguagem e do campo de variação, são emergentes de uma visão de ensino menos tradicional, relacionadas ao desenvolvimento do pensamento, da linguagem e dos conceitos trabalhados e que estão sendo discutidas ao longo do trabalho.

Pudemos perceber, então, que algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos são comuns em ambas as situações de ensino: a centrada na manipulação simbólica e a centrada no desenvolvimento conceitual, porém, como resultado dessa pesquisa, que será melhor discutida nos Capítulos III e IV, percebemos que as dificuldades manifestas na segunda situação apresenta-se em menor escala. As outras dificuldades que aparecem mais na prática centrada no desenvolvimento da linguagem, se referem à maneira como o assunto é abordado, por exemplo, nessa situação trabalhamos com a linguagem sincopada e com campo de variação, elementos que não são explorados em situações de ensino tradicional. Por esse motivo, surgem elementos que se remetem a esses conteúdos na resolução das atividades.

2.2 - Linguagem e Pensamento Algébrico

A primeira necessidade do ser humano foi a comunicação, que se deu na interação com o outro, nesse contato a linguagem exerceu um papel fundamental. Segundo Vygostky (2003, p. 70), "a língua é o instrumento do pensamento". A linguagem começa a ser desenvolvida pela imitação e aos poucos vai tomando a forma da linguagem usual. Depois de adquirida essa habilidade, a comunicação se torna natural e passa a ser realizada sem muito esforço. "No processo de internalização da atividade há a mediação da linguagem, em que os signos adquirem significado e sentido" (VYGOTSKY, 1984, p. 59).

Considerando esses pressupostos teóricos, percebemos que a linguagem matemática, da mesma forma, deveria ser inserida no dia-a-dia do aluno e de maneira gradativa, para que este pudesse, aos poucos, ir conhecendo os símbolos e a operacionalidade presente entre eles. A linguagem Matemática não é natural ao aluno, portanto necessita de ser desenvolvida por meio de um ensino. Os símbolos matemáticos, também, são meios de comunicação, mas não para a comunicação que nos move no dia-a-dia. O desenvolvimento do pensamento e a abordagem das linguagens retórica e sincopada podem permitir ao aluno desenvolver significados, mais próximos do seu entendimento, de movimentos quantitativos do que apenas ter que relacioná-los, muitas vezes com apelo à memória, ou à linguagem simbólica formal.

Consideramos intenção da linguagem matemática simbólica simplificar e facilitar a resolução de problemas. De outro modo, percebemos que durante o trabalho do desenvolvimento da linguagem simbólica com os alunos, eles usavam uma linguagem própria para simplificar as expressões que estavam em linguagem retórica, isso contribuiu muito para a compreensão da linguagem simbólica, posteriormente. Um exemplo disso está na tradução de "A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3" para "idade $\times$ 6 +3".

A criação de uma linguagem simbólica para a matemática tem a intenção de facilitar e auxiliar na resolução de problemas e análise de situações matemáticas. Zuffi e Pacca (2000, p.11) definem linguagem matemática como sendo "um sistema de signos (sinais e palavras) associado a um conjunto de regras de manipulação dos mesmos que tem significados ligados a contextos e a procedimentos para resolver problemas matemáticos ou matematizados". Isso quer dizer que o trabalho apenas com a manipulação dos símbolos, sem fazer relação com o cotidiano ou problemas contextualizados, não possibilita o entendimento dos símbolos operacionais da Matemática, o que leva o aluno a decorar regras e procedimentos que não permitem uma compreensão da operacionalidade.

A aprendizagem centrada no formalismo da linguagem algébrica é apontada por vários autores como Neves, (1995), Booth (1995), Scarlassari (2001), entre outros, como um dos fatores incidentes nas dificuldades e nos erros apresentados pelos alunos. A questão da linguagem é recorrente nas pesquisas e nas experiências de sala de aula, e o que se pretende é estudar aspectos da interferência da linguagem algébrica na aprendizagem.

Tanto nossa experiência quanto o trabalho de Booth (1995) nos permitem afirmar que os alunos, na maioria das vezes, apresentam dificuldades em problemas algébricos simples não por não entenderem o problema, mas por não entenderem a linguagem formal da álgebra, o que se acentua a partir da 6ª série. Segundo essa autora, "o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra" (BOOTH, 1995, p. 35). A autora nos alerta que, em sala de aula, precisamos incentivar os alunos a expressarem os problemas aritméticos numa linguagem correta e rigorosa. Muitas vezes os estudantes acreditam que precisam apenas chegar à resposta correta, sem levar em consideração o procedimento e a linguagem que utiliza para expressar seu raciocínio.

Para Davidov (1988, p. 43), "os significados da linguagem se apóiam em procedimentos de ação socialmente elaborados; neles está representada, [...], a forma ideal dos vínculos e relações essenciais do mundo objetivo e social, descobertas pelo conjunto da prática social." Isso mostra que a linguagem é desenvolvida a partir da interação social, e, assim sendo, não é possível aprendê-la sozinho, a criança precisa estar inserida num meio que possibilite o seu desenvolvimento.

Quando falamos da linguagem matemática, consideramos-na como uma linguagem que é aprendida da cultura do meio, da mesma forma que é a linguagem natural. É uma capacidade que precisa ser desenvolvida, o que só pode acontecer, segundo Davidov (1988), na convivência e comunicação com adultos e sob sua orientação e também na interação com outras crianças. Schoen (1995, p. 138) nos adverte que "deveríamos escrever e falar em nossa língua sobre as idéias matemáticas, antes da introdução do simbolismo e paralelamente a ela".

Já vimos no capítulo anterior que o simbolismo algébrico demorou muito tempo para se constituir. Foram pelo menos três milênios de linguagem retórica e mais um milênio de linguagem sincopada até chegar na linguagem simbólica atual. A álgebra de Al-Khwarizmi, conhecido como o "pai da álgebra", é inteiramente retórica e não emprega símbolos (LAUAND, 1998).

Smith (1958) propõe que antes de iniciar o aluno na linguagem formal, simbólica, devemos deixá-lo trabalhar com a linguagem retórica, passando pela sincopada e só então entrar no simbolismo formal, podendo também trabalhar com as três linguagens concomitantemente. Isso pode contribuir para que o aluno construa o significado de cada expressão e representação matemática. As atividades desenvolvidas com os alunos, a fim de construir os dados da presente pesquisa, foram trabalhadas a partir dessa idéia, tendo como base as atividades de ensino propostas por Lima, Péricles e Takazaki (1993).

Quando pensamos no significado de palavras isoladas, no uso de metáforas e generalizações, percebemos que a tradução simples e direta é bastante equivocada, pois muda o sentido e o significado de uma frase ou idéia. Na álgebra, quando expressões escritas em linguagem retórica são traduzidas para a linguagem simbólica sem se observar a operacionalidade presente no enunciado proposto, as expressões podem se contradizer, expressando resultados bastante divergentes. Em Scarlassari (2001), todos os alunos sujeitos da pesquisa fazem uma "tradução literal", ou seja, uma associação com a ordem em que as palavras aparecem nos enunciados, fato que também pode ser encontrado na pesquisa realizada por Lochhead e Mestre (1995). Para exemplificar, podemos observar a expressão "Um número subtraído de 4", os alunos traduzem para $x - 4$, quando a resposta correta seria $4 - x$ porque a expressão "subtraído de" dá a idéia de tirar um número de 4 e não 4 de um número. A razão da dificuldade, talvez esteja em não interpretar a proposição escrita em linguagem retórica como um todo.

Encontramos em Hogben (1970, p. 321) suporte para as afirmações acima, segundo ele, até mesmo os matemáticos apresentam dificuldades para fazer a transição entre a álgebra retórica, que ele trata como 'linguagem vulgar', e a linguagem matemática. É necessário compreendermos a expressão na linguagem retórica para podermos expressá-la em símbolos e posteriormente resolver a equação encontrada com mais facilidade.

Smolka (2004, p.38), ao concordar com Malinowski, acrescenta ao dizer que "a linguagem é vista como um meio transparente de expressão e comunicação de pensamentos; os pensamentos são concebidos como derivados diretamente de uma impressão sensorial e criados sem qualquer participação da linguagem; a linguagem é considerada como um sistema de signos ligados a princípios universais de raciocínio".

A matemática é uma ciência que usa sistemas de signos criados pelo homem para melhor entender a sociedade onde se vive e para suprir suas necessidades. O uso de signos, segundo Vygotsky (2003, p. 54), "conduz os seres humanos a uma estrutura específica do comportamento que se destaca do desenvolvimento biológico e cria novas formas de processos psicológicos enraizados na cultura". No que diz respeito à atividade de utilização desses signos, o mesmo autor diz que a mesma "*não é inventada e tampouco ensinada pelos adultos*; ao invés disso, ela surge de algo que originalmente não é uma operação com signos, tornando-se uma operação desse tipo após uma série de transformações *qualitativas*" (ibidem, 2003, p. 60).

O mesmo pode se dizer para a álgebra. Na história isso também aconteceu com a linguagem algébrica, que passou por essas transformações qualitativas, as quais pensamos que devem estar presente no ensino da álgebra, possibilitando que o aluno identifique os movimentos quantitativos de seu entorno e os expresse em linguagem natural para posteriormente transpor esses significados para os símbolos formais. Uma maneira de se trabalhar essas transformações seria passar pelos três tipos de linguagem (retórica, sincopada e simbólica) propostos por Smith (1958), Boyer (1968) e Eves (2004). Na pesquisa de Iniciação Científica, mesmo sem ter trabalhado com os diferentes tipos de linguagem, todas elas apareceram nas respostas dadas nas questões de tradução da linguagem retórica para a linguagem simbólica. Observe o seguinte exemplo de respostas dadas por alunos daquela pesquisa: 1) Na linguagem retórica: Ana Lúcia andou hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias; 2) Na linguagem sincopada: A 5 de x + uma U; 3) Na linguagem simbólica: + x/5. Nesses exemplos de respostas ainda há indícios de dificuldades que os alunos apresentaram ao responder as questões propostas, que serão discutidas na Metodologia e Análise.

Para que as aulas de matemática sofram as mudanças necessárias para uma aprendizagem significativa,

> [...] é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico, pois não se pode utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização. Deve-se entender que a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. O pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola; sendo assim, pode-se afirmar que a álgebra perde seu valor como um rico instrumento para o desenvolvimento de um raciocínio mais abrangente e dinâmico (ARAÚJO, 2007, p. 8).

Em vista disso, faz-se necessário tecer algumas considerações que dizem respeito ao pensamento algébrico para podermos entender como se dá o processo da aprendizagem dos conceitos, lembrando que este está estreitamente relacionado à linguagem. Para isso, buscamos apoio em Neves (1995) e Davidov (1988).

Para Neves (1995), um conhecimento pode ser considerado algébrico

> se produzir uma organização de relações existentes entre objetos de conhecimento anteriormente concebidos, permitindo justificar certas relações a partir de outra. Neste sentido, o estabelecimento de relações e a articulação justificada das mesmas formam a essência da atividade algébrica (NEVES, 1995, p.1).

O conhecimento algébrico é produzido a partir de conhecimentos já existentes, é um produto cultural e social no qual o aluno sente interesse em ampliar e aprofundar o que já sabe.

A respeito do pensamento algébrico, Sousa (2004, p.172) parte do pressuposto de que o mesmo "é construído a partir das premissas. Essas premissas são históricas porque contém os conceitos de número, variável e campo de variação". Para a mesma autora, "a compreensão do que venham a ser as premissas é o fundamental para iniciarmos a alfabetização matemática de nossos estudantes no que diz respeito ao pensamento algébrico" (ibidem, p. 176). Isso nos fornece mais elementos para sustentar a idéia de movimento e variação presente na álgebra e que nem sempre é explorada pelos professores.

Sousa ainda discute

> [...] que elaboramos várias premissas ou suposições, ao longo de nossas vidas. Há aquelas que permite-nos construir o nosso pensamento teórico sobre algo, quanto àquelas que servirão de bases para teorias científicas, e, ainda, as que nos ajudam a resolver de forma lógica e quase que precisa, os problemas da vida. Ou seja, as premissas são elaboradas no movimento do nosso pensamento. Nesse sentido, o pensamento pode refletir os aspectos da realidade de que estamos tratando (SOUSA, 2004, p.173).

A autora afirma que o conceito de variável possui alguns nexos conceituais como relação, dependência, movimento, mutabilidade, campo numérico, os quais precisam ser trabalhados pelos professores. Esses nexos podem ser entendidos como a substância, a fluência, o movimento que compõe o pensamento algébrico.

O pensamento algébrico pode se originar a partir da aritmética. Segundo Lins e Gimenez (2005, p. 150) "Pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades e desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas" produzindo significados.

Considerando esse ponto de vista, o pensamento algébrico começa a ser desenvolvido quando novas questões são colocadas a partir de expressões numéricas, até então trabalhadas na aritmética. Podemos observar que isso ocorre quando se introduz numa expressão numérica uma incógnita, ou seja, um valor desconhecido. Neste momento, além do novo elemento "letra" na expressão, o sinal de = passa a ser concebido como uma idéia de equivalência, deixando de lado seu caráter de apenas indicar o resultado das operações realizadas.

Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes mesmo do aluno ter desenvolvido a linguagem simbólica. E completam:

> Isso acontece, sobretudo, quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos [...] ; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente... (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTÓVÃO, acesso em 23 de maio de 2007, p. 5).

Completando esse pensamento, Miorim, Miguel e Fiorentini apontam como elementos caracterizadores do pensamento algébrico, "a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar-se através da linguagem aritmética, geométrica ou de uma linguagem simbólica." (MIORIM, MIGUEL E FIORENTINI, 1993, p.37). De acordo com essa afirmação, atividades de procurar padrões em seqüências e escrevê-las, utilizando a linguagem matemática, possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa é apenas uma das maneiras de auxiliar o aluno no desenvolvimento desse pensamento.

Um outro aspecto que dificulta a compreensão algébrica é a idéia de generalização. Para Davidov (1988, p.101), "a generalização se caracteriza como via fundamental para a formação de conceitos escolares". É a experiência concreta cotidiana que desperta o aluno para as abstrações aritméticas. É enquanto a criança vive de imagens e impressões concretas que sistematiza e generaliza sua experiência sensorial e forma os primeiros conceitos aritméticos.

Com isso, vemos que o pensamento algébrico envolve abstração, criação, entendimento da operacionalidade presente na aritmética, noção de equivalência, de movimento, de variação, entre outras coisas. Assim, o aluno precisa ser orientado a trabalhar com essas idéias, ele não consegue construir esse tipo de pensamento por si só porque não é algo inato.

Para exemplificar, podemos observar a diferença entre as questões: “Quantas pessoas moram em sua casa?” e “Quantas pessoas estão em sua casa agora?”. A primeira pergunta tem uma resposta única, fixa, que representa o número de pessoas que moram na casa. Já a segunda questão, nos permite pensar na variação. Pode ser que todos os que moram na casa estejam lá, ou que alguns tenham saído, ou ainda que tenham recebido visitas, portanto, não há uma única resposta, o que há é uma variação, ou seja, várias possibilidades de respostas.

Consideramos que a idéia de variável é o cerne do pensamento algébrico, ou seja, a idéia de movimento. O matemático Caraça afirma que a variável pode representar infinitos elementos de um conjunto sem coincidir com nenhum deles, “... é o símbolo da *vida coletiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos membros, *mas não se reduz a ela*”. (CARAÇA, 1984, p.127). Esta definição será assumida, nesta pesquisa, como referência para analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos relativamente a este conceito.

A análise da natureza do pensamento algébrico permite uma melhor compreensão dos motivos pelos quais os alunos apresentam tantas dificuldades para aprender álgebra. Ela pode ser trabalhada e construída a partir de diferentes pontos de vista. Na sala de aula, na maioria das vezes, o professor aborda apenas um aspecto do pensamento deixando os outros de lado, a aprendizagem, dessa forma, fica sem sentido e fragmentada.

As dificuldades apresentadas pelos alunos estão diretamente relacionadas com o modo trabalhado do professor em sala de aula, que, por sua vez, está diretamente relacionado com a sua formação acadêmica, por isso é importante conhecer e discutir a prática do professor. Para uma compreensão dos conceitos algébricos é necessário que o aluno comece a desenvolver o pensamento de generalização desde cedo e que ele compreenda os nexos conceituais da aritmética a fim de trabalhar com a álgebra de maneira mais natural.

Para desenvolver o pensamento algébrico, devemos considerar os

> [...] nexos internos dos conceitos de número: qualidade, quantidade, senso numérico, correspondência um a um, ordenação, agrupamento, valor posicional, base e representação, presentes no movimento do pensamento numérico e não apenas os aspectos formais que se apresentam no conceito mais geral do número que se formalizam nas propriedades dos campos numéricos diversos (SOUSA, p. 16, 2004).

As discussões feitas neste capítulo foram consideradas no preparo das atividades trabalhadas com os alunos e na análise dos dados emergentes do material empírico coletado. No capítulo seguinte faremos uma descrição de como se deu esta pesquisa e descreveremos as situações de ensino que compõe nossos dados.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

A preocupação com o ensino de álgebra tem sido freqüente na pesquisa visto que, por sua diversidade e complexidade conceitual, é um tema que aflige professores de matemática desde as séries iniciais. Na verdade, a mesma preocupação moveu-nos a fazer esta investigação, pois, num primeiro momento, enquanto professora-plantonista buscava entender o motivo pelo qual não conseguia sanar as dúvidas dos alunos de modo que eles compreendessem os conceitos e suas aplicações e não apresentassem tantas dificuldades com o tema. E posteriormente, enquanto professora do Ensino Fundamental e Médio, instigava-me o fato de não conseguir propor algo interessante e eficaz para o aprendizado dos alunos.

Esta pesquisa tem caráter qualitativo pois: atuamos como professora e pesquisadora dos sujeitos, ou seja, tivemos uma relação de ensino com os sujeitos; os dados têm origem em registros escritos dos sujeitos sobre as atividades que desenvolveram em sala de aula e não são provenientes de questionários fechados sobre seus conhecimentos conceituais; nosso foco é o processo de ensino e o pensar dos alunos durante a resolução das atividades; as entrevistas realizadas com os alunos partiram de questões abertas; desenvolvemos uma análise qualitativa dos dados e uma parte de estatística descritiva dos mesmos.

Esta pesquisa caracterizou-se por dois momentos distintos: o momento da situação A e o momento da situação B. No primeiro momento, os sujeitos eram alunos de uma escola particular da cidade de Piracicaba, na qual a pesquisadora era a plantonista e apenas assistia às aulas do professor titular, em duas turmas de 6as séries (67 alunos no total). A fonte dos dados constituiu-se do diário escrito pela pesquisadora ao observar as aulas do professor e os plantões de dúvidas que ministrava; do material escrito pelos alunos na resolução das atividades propostas em sala de aula e de uma lista de exercícios proposta no final dos estudos, como forma de avaliação. No segundo momento, os sujeitos eram alunos de uma escola estadual da cidade de Campinas, na qual a pesquisadora era a professora das turmas, o material empírico foi composto: pelo registro das observações da pesquisadora, pela resolução das atividades realizadas pelos alunos, durante as aulas. A partir do material desenvolvido com base em Lima (1993), pela resolução das atividades propostas em sala de aula pela pesquisadora, por um questionário e uma lista de exercícios. A atividade foi aplicada em duas salas de 6ª série, configurando uma amostra de 67 alunos no total. A mesma lista de exercícios, resolvida pelos alunos da situação A, foi também respondida pelos alunos sujeitos da situação B.

Na primeira vez que tivemos a oportunidade de acompanhar a aula do professor nas salas de 6as séries, sujeitas da situação A, o mesmo propôs para os alunos o problema das mesas que será analisado no procedimento 1, com o objetivo de introduzir o conceito de equação. Nesse momento, houve uma contextualização do conteúdo que seria trabalhado, por meio de um problema.

O professor desenvolveu dois procedimentos para resolver o problema com a classe: o primeiro procedimento teve caráter dialógico, ou seja, ao ouvir e discutir as idéias dos alunos, ao construir, ao mesmo tempo, um modelo matemático para o problema, como descrito no item 3.1.1; enquanto o segundo procedimento teve caráter meramente informativo. O professor informou as regras para solucionar a equação que passou a representar o problema como vem ilustrado no item 3.1.2.

Nossa intenção é comparar os erros e dificuldades dos alunos quando submetidos a um ensino tradicional, com ênfase na manipulação simbólica, que chamamos de situação A de ensino, e quando submetidos a um ensino com base no desenvolvimento de significados simbólicos no ensino de álgebra, que chamamos de situação B de ensino.

A partir das considerações feitas, colocamos a seguinte questão norteadora de nossa análise: *Que tipo de dificuldades alunos de 6ª série do Ensino Fundamental apresentam numa situação B de ensino de álgebra comparativamente a alunos de mesma série que passaram por uma situação A de ensino de álgebra*?

Nossa hipótese é de que os alunos que passaram pela situação B de ensino apresentam maior versatilidade que os alunos que passaram por uma situação A. E o nosso objetivo é caracterizar as dificuldades nas duas abordagens, além de compará-las a partir de uma lista de exercícios proposta no final dos estudos da introdução algébrica em ambas as situações. Mais adiante, cada uma dessas abordagens será apresentada detalhadamente. Lembramos que nossa intenção é verificar se a ocorrência e os tipos de dificuldades em ambas as situações, apesar de diferentes, se mantém ou se há melhoras.

A seguir descreveremos cada uma das situações de ensino.

3.1 – Descrição da situação A de ensino

Em 1999 realizamos estágio numa escola particular da cidade de Piracicaba com a intenção de atender às dúvidas dos alunos do Ensino Fundamental e Médio nos chamados plantões de dúvidas. Esses plantões consistiam em horários pré-determinados, fora do horário normal de aula, no período da tarde. A procura por esse atendimento era voluntária e a intenção era contribuir para o entendimento do conteúdo dado em sala de aula pelo professor titular das turmas. Além dos plantões, acompanhávamos as aulas dadas pelo professor das turmas de 6ª e 7ª séries, com a intenção de realizar um trabalho integrado que facilitasse o entendimento dos alunos. Durante os plantões, escrevemos um diário de campo com nossas observações a respeito do modo como o professor trabalhava e sobre os questionamentos feitos pelos alunos.

Nos plantões, o que mais nos chamava a atenção, eram as dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos das 6as e 7as séries. Apesar das reiteradas explicações do professor em sala e das nossas nos plantões, os alunos frequentemente apresentavam as mesmas dificuldades, nas mesmas questões e nos mesmos conceitos. Exemplo disso é quando resolviam equações do tipo $3x = 21$, a maioria dos alunos "passava" o 3 para o segundo membro, subtraindo, pois eles aprenderam, tanto na sala de aula, quanto com a plantonista, que sempre temos que isolar a incógnita, "passando" o coeficiente numérico para o outro membro e trocando o sinal. Além disso, podemos tomar como um outro exemplo as dificuldades de tradução da linguagem retórica para a linguagem simbólica. Todos os alunos das 6as séries tinham dificuldades[14] para traduzir "A metade de um número" para a linguagem simbólica, normalmente, escreviam $2 : x$ ou algo semelhante, com um pensar mecânico, destituído da significação da operacionalidade presente nas expressões escritas na linguagem retórica e simbólica, que, neste caso, não são compatíveis.

Esses fatos nos instigavam cada vez mais e a tentativa de melhor compreender esse fenômeno, como já dissemos, consistiu-se numa pesquisa de Iniciação Científica. Para caracterizar o que estamos chamando de situação A, traremos as observações feitas nas salas de duas 6as séries e durante os plantões de dúvidas.

[14] Caracterizamos como dificuldade pois os alunos nos procuravam no plantão de dúvidas dizendo ter "dificuldades ao resolver os exercícios". Os exercícios já haviam sido resolvidos, mas, ao serem corrigidos em aula, verificavam que suas respostas eram consideradas erradas.

Gostaríamos de enfatizar que na situação A não tomamos a abordagem de ensino como foco, nem o professor das turmas como sujeito da pesquisa. Os sujeitos foram os alunos das duas 6^{as} séries com os quais ele trabalhava, totalizando 67 alunos. Faremos aqui, apenas uma descrição de como procederam as aulas da situação A para contextualizar as dificuldades que serão usadas na pesquisa atual para comparar com as dificuldades aí manifestas.

3.1.1 - Procedimento 1

Ao iniciar a aula, o professor propôs o seguinte problema: "Quantas pessoas podemos acomodar em uma mesa quadrada?" Prontamente os alunos responderam corretamente 4, na verdade, podemos acomodar 1, 2, 3 ou 4 pessoas, mas consideramos que os alunos responderam o máximo possível. Em seguida, ele lançou a segunda questão: "Quantas mesas quadradas eu preciso para acomodar 30 pessoas?" E fez um desenho representativo da junção das mesas, conforme está representado na figura 1:

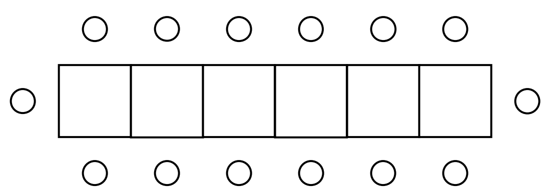


Figura 1 – Desenho feito na lousa pelo professor.

Analisando o problema, verificamos que este possibilita várias explorações, maneiras diferentes de interpretação, por este motivo caracteriza-se como um trabalho com possibilidades. Mas quando o desenho foi colocado na lousa, restringiu-se a exploração do problema que poderia ter tomado rumos de uma aula exploratória. Percebemos pelas falas dos alunos que eles não haviam pensado na possibilidade de juntar as mesas como vinha representado no desenho, e que entenderam, após a observação do desenho, que ao juntar as mesas, em cada delas conseguimos acomodar 2 pessoas e mais 2, uma em cada extremidade. Posteriormente, o professor escreve a "fórmula" para o problema: P = 2.M + 2, e faz uma leitura conduzida com os alunos, dizendo que o número de pessoas que eu consigo acomodar é 2 vezes o número de mesas mais 2 pessoas que serão acomodadas nas duas extremidades. E, por tentativa e erro, determinaram que para acomodar 30 pessoas, eram necessárias 14 mesas.

Entendemos que a generalização proposta pela fórmula mostrou-se precipitada para a maioria dos alunos. Pois, ao resolverem a equação indicavam não ter entendido o significado de cada um de seus termos. Equação, segundo Lima (1993, p. 13) "é a sentença matemática referente a um problema algébrico particular, isto é, é toda sentença matemática que contêm variáveis e é expressa por um sinal de igualdade". A equação é representativa de um movimento que se particulariza quando procuramos o valor da incógnita, do número desconhecido. Percebemos que o professor não julga ser necessário explicar o conceito de variável e tem pressa em fazer com que os alunos compreendam a equação, que representa movimentos regulares, acredita que basta um exemplo do cotidiano, contextualizado para que os alunos compreendam todos os significados da equação e a idéia de movimentação numérica.

Com a equação escrita na lousa, a leitura feita não proporcionou um consenso da classe a respeito da significação dos símbolos representados na equação e nem tão pouco o movimento regular que ela representa. A equação aparece, quase como por encanto, na lousa, após o processo dialógico da solução.

3.1.2 - Procedimento 2

Mesmo já tendo encontrado a solução da equação que se encontrava na lousa, o professor propôs que os alunos a resolvessem conjuntamente. Ele foi enunciando os artifícios de cálculo, regras para a solução como, por exemplo: "mudou de membro, muda de sinal"; "se está multiplicando, passa dividindo"; etc. E assim resolveram a equação, seguindo simplesmente as regras ditadas, sem construírem significados.

Al-Khowarizmi elaborou duas regras para a resolução das equações. A primeira regra é denominada de "al-muqabalah", que significa "redução de termos semelhantes" e a segunda de “al-gebra”, que significa “transferência de quantidade de um para outro membro das equações” (HOGBEN, 1970; LIMA et al, 1993).

Na tentativa de atrair mais a atenção dos alunos, o professor os levou para a sala de informática e com o auxílio do *Power Point*, projetou alguns problemas cujas soluções se davam através de equações. A seguir, um problema para exemplificar: “Márcio, Tânia, e Ana, possuem, juntos, 338 bolinhas. Tânia possui 10 bolinhas a mais que Márcio e Ana possui o dobro de bolinhas que Márcio possui. Determine quantas bolinhas tem cada um.” O procedimento utilizado para a resolução dos problemas foi o mesmo que no caso anterior: apresentação do enunciado na linguagem retórica, discussão dialógica com os alunos, montagem da equação (junto com a classe, o professor escolheu a letra M para representar a quantidade de bolinhas possuídas por Márcio e em seguida montou a equação $M + M + 10 + 2M = 338$) e resolução da mesma utilizando as frases prontas. Neste caso, o uso do *Power Point* apenas substituiu o uso da lousa, pois o professor apenas projetou o problema e logo em seguida as equações, as quais foram resolvidas “mudando-se os termos de membro e de operação”, segundo as regras ditadas anteriormente.

Nas aulas que se seguiram, na própria sala de aula, o professor propôs listas de equações para serem resolvidas em sala e como tarefa de casa. Nas aulas, durante as atividades, os alunos solicitavam a minha ajuda e a do professor. Na aula seguinte, prosseguiram fazendo a correção da lista de exercícios na lousa.

O professor começou, posteriormente, um trabalho com tradução de expressões em linguagem retórica para a linguagem simbólica. Passou listas de exercícios e suas respectivas correções. Lembramos que os alunos que encontravam dificuldades na resolução das listas eram orientados a procurar ajuda nos plantões de dúvidas para aprender o conteúdo que não foi apreendido durante as aulas.

Após várias aulas enfatizando a resolução de equações e tradução de expressões da linguagem retórica para a simbólica, além dos plantões de dúvidas, era significativo o número de alunos que ainda não conseguia resolver as atividades corretamente. A título de exemplos de expressões trabalhadas pelo professor, podemos citar: “O dobro de um número adicionado de 10 resulta em 40”, “A quarta parte de um número somada com a sua metade, resulta em 30.” Foi a partir destas observações que, juntamente com o professor, elaboramos uma lista de exercícios que tanto solicitavam a tradução da linguagem retórica para a linguagem simbólica como também a definição de campo de variação numérica, ou seja, as possibilidades que uma variável pode assumir dentro de um campo numérico, por exemplo, o número de pessoas que pode viajar em um carro de passeio, pode variar, dentro do conjunto dos Números Naturais, de 1 a 6, dependendo do tipo físico das pessoas.

Os alunos responderam as questões da lista individualmente para que se pudesse ter acesso às dificuldades individuais de cada um. A resolução da lista de exercícios fez parte do material empírico coletado para o estudo da pesquisa de Iniciação Científica e faz parte, também, desta pesquisa.

3.1.3 – Comentários sobre a situação A

Ao ter concluído o problema das mesas, julgávamos que o trabalho realizado pelo professor havia sido eficiente, que os alunos haviam compreendido o modo de lidar com quantidades desconhecidas e resolver equações, esperávamos, portanto, pouca ocorrência de dúvidas no plantão. Mas, quando analisamos as dificuldades que os alunos encontravam para resolver as equações nas aulas posteriores e nos plantões de dúvidas, começamos a nos questionar sobre o que poderia ter dado errado.

A intenção do professor quando trouxe o problema descrito no procedimento 1 para ser discutido em sala de aula era tornar o conceito mais fácil e acessível ao entendimento dos alunos. Essa maneira de trabalhar é proposta na maioria dos livros didáticos e professores que desejam rever o ensino de álgebra, acabam seguindo esta proposta. Mas o que observávamos nos plantões de dúvidas era que o modo como as discussões foram conduzidas não possibilitava o entendimento do conceito.

Supomos que faltou um espaço para que os alunos construíssem seus próprios significados para que escrevessem a situação com suas próprias palavras, com sua própria simbologia, ou seja, utilizando a linguagem que fosse a eles mais significativa.

A idéia de equivalência, que seria possível trabalhar com essa situação-problema, foi deixada de lado na resolução da equação, pois esta foi resolvida utilizando regras prontas, como já foi dito anteriormente. Nas resoluções das listas de exercícios, os alunos se baseavam apenas

nas “regras” ditadas pelo professor e quando se deparavam com uma equação um pouco mais complexa, apresentavam dificuldades para resolvê-la.

O modo como o professor concluiu o problema, dizendo que queria saber a quantidade de mesas para acomodar um determinado número de pessoas, não possibilitou o trabalho com o campo de variação, com a idéia de que a “letra”, ou seja, a representação da variável, pode assumir valores diferentes. Ele podia ter perguntado, por exemplo, Quantas mesas são necessárias para acomodar 10 pessoas? E 15? E assim sucessivamente, a fim de possibilitar um pensamento de generalização da regularidade descrita. Também poderia inverter o problema e perguntar a quantidade de pessoas que podem ser acomodadas em 5 mesas, por exemplo.

A intenção do professor era proporcionar a construção de significados pelos alunos, mas acabou dando um rumo à aula que não permitiu tais desdobramentos e o que aconteceu foi uma manipulação simbólica, uma transcrição direta, a título de um exemplo, da linguagem retórica para a simbólica.

3.2 – Descrição, discussão e análise da situação B de ensino.

Em 2006, lecionamos em duas salas de 6ª série totalizando 67 alunos, com média de 12 anos de idade, em uma escola estadual da cidade de Campinas-SP. Esses alunos, desde que entraram no Ensino Fundamental, tiveram uma aprendizagem com base unicamente no livro didático, segundo o modelo tradicional de ensino, com ênfase no treino de exercícios repetitivos. Quando esses alunos ingressaram na 6ª série, tornei-me professora de ambas as turmas e dei continuidade ao ensino tradicional que vinha sendo desenvolvido pois ainda não me sentia preparada para trabalhar de maneira diferente, apesar desse modo de ensino me inquietar e me incomodar como professora e pesquisadora. Durante os três primeiros bimestres dessa série, trabalhei a aritmética, também, com enfoque tradicional que segue o modelo: 1. apresentação do conceito; 2. exercícios de aplicação do conceito com base no livro didático adotado pela escola; 3. avaliação.

Chegado o momento de desenvolver, com esses alunos, o conteúdo da álgebra, decidi com minha orientadora que iríamos constituir este trabalho de forma a obter dados para comparar com aqueles que havíamos obtido na pesquisa da Iniciação Científica.

Queríamos levantar dados sobre a aprendizagem algébrica dos alunos, desenvolvendo uma proposta alternativa à tradicional que, até então adotava nas aulas, e comparar esses dados com os da pesquisa de Iniciação Científica.

Senti-me desafiada ao ter que ensinar álgebra para meus alunos de uma maneira diferente, centrada no desenvolvimento dos conceitos algébricos, segundo uma abordagem que se diferenciasse daquela tradicional com a qual vínhamos trabalhando. Essa maneira diferente de trabalhar em sala de aula se caracterizaria pelo desenvolvimento de atividades que permitissem a construção dos nexos conceituais fundamentais para alunos que estão iniciando a aprendizagem algébrica. Encontrava-me, assim diante do desafio de mudar minha prática e, ao mesmo tempo, avaliar seus resultados comparando com uma prática tradicional.

A possibilidade de mudar minha prática e experimentar uma abordagem alternativa ao ensino tradicional só foi possível por estar dentro de um contexto de escola pública que possibilita uma certa autonomia ao professor em dar a abordagem de ensino que ele julgar mais adequada. Isso não foi possível na pesquisa de Iniciação Científica, por esta ter acontecido numa escola particular que determinava o modo de desenvolver o ensino em sala de aula, o calendário de provas e as datas para cumprir os conteúdos do livro adotado. As defasagens e dificuldades na aprendizagem eram levadas para os plantões de dúvidas para evitar que o professor não conseguisse cumprir o conteúdo estabelecido para aquela série.

Entrei em contato com a Coordenadora da Escola Estadual para apresentar o projeto de pesquisa, ela achou uma proposta muito interessante, apoiou e me incentivou a dar continuidade ao trabalho. Na sala de aula, conversei com os alunos sobre o que eu pretendia fazer, ou seja, que iria trabalhar o novo conteúdo a partir de atividades propostas em uma apostila que eu estava montado, mas que para isso, eu precisava da contribuição financeira deles para tirar as cópias, todos eles aceitaram e contribuíram. Ficaram eufóricos e queriam começar logo o novo trabalho.

Um outro desafio consistiu em fazer com que os alunos que não realizavam as tarefas de matemática, seja em aula ou em casa, se envolvessem com as aulas de álgebra.

Nos meses de Outubro e Novembro, desenvolvemos nas duas salas de 6ª série, atividades de introdução à álgebra com a intenção de trabalhar os seus principais nexos conceituais como: fluência, variável e campo de variação. As atividades foram adaptadas da apostila Lima, Péricles e Takasaki (1993). O conjunto de atividades desenvolvidas foi configurado numa apostila que foi distribuída a cada aluno.

Nesta situação de ensino, à diferença da situação A, a pesquisadora exerceu também a função de professora das turmas e não havia horário extra-classe para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas.

Com as duas salas de 6ª série da situação B, totalizando 67 alunos, trabalhamos com uma abordagem mecanicista e tecnicista durante três bimestres e posteriormente, para efeitos da pesquisa, ao iniciar a álgebra, adotamos uma abordagem com ênfase na construção da linguagem, no desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos nexos conceituais fundamentais, usando a dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe, na qual os alunos pensam nas questões propostas individualmente, depois em pequenos grupos e, para finalizar o trabalho, há uma discussão com a classe toda, onde cada grupo expõe suas idéias e descobertas.

A apostila que preparamos na tentativa de trabalhar nessa perspectiva foi composta por 16 questões que foram discutidas em sala de aula, sem tarefas extra-classe e sem horários extras para tirar as dúvidas. Dentre estas selecionamos quatro questões que trataram dos nexos fundamentais que estávamos tratando nesta pesquisa: fluência, campo de variação, variável e linguagem.

Das respostas dos alunos a essas questões, selecionamos as mais representativas tanto de respostas que consideramos satisfatórias no sentido de atingir o objetivo da questão e insatisfatórias no mesmo sentido.

3.2.1 – Procedimento da situação B

Primeiramente, planejamos trabalhar os diferentes tipos de linguagem (retórica, sincopada e simbólica) abordadas por Smith (1958) e Boyer (1968). Preocupávamos-nos, principalmente, com a formação da linguagem e do pensamento algébrico de cada aluno e de não repetir as dificuldades que os alunos sujeitos da situação A de ensino apresentaram. Em sala de aula, à diferença da situação A, as atividades da apostila foram trabalhadas em três momentos: 1. individualmente, momento dado a cada aluno para fazer uma reflexão individual sobre as questões propostas; 2. em pequenos grupos constituídos de 4 alunos, em média, em que era proposto discutir as reflexões individuais sobre as questões propostas; 3. momento no qual era feita a discussão no grupo classe das reflexões sínteses dos pequenos grupos e sistematizada uma versão de consenso sobre as questões.

Essa dinâmica relacional se diferencia de um ensino que tem uma abordagem tradicional que normalmente apresenta o conceito já definido em linguagem formal, pois nessa dinâmica, o desenvolvimento do conceito é "parte essencial do movimento conceitual em sala de aula", nessa prática, "buscamos fazer surgir no pensamento do outro as imagens, palavras, gestos que queremos comunicar" (LANNER de MOURA, 2005, p. 9).

Nesse modo diferenciado de trabalho, os alunos podem trocar experiências, conhecimentos e formas distintas de pensar, o que favorece a aprendizagem matemática. Momentos individuais também foram importantes para que o aluno avaliasse seu aprendizado e a escrita. Finalmente, os momentos de discussão com a classe permitiram a participação de todos através da comunicação numa linguagem oral. O trabalho em grupo deve ser considerado um fator fundamental nas relações entre as interações sociais e o desenvolvimento cognitivo. Além disso, possibilita ao aluno organizar melhor seu pensamento e desenvolver os conceitos através das relações entre diversos significados, condizentes com o desenvolvimento da linguagem algébrica.

A pesquisa de Ferreira (2005) também foi desenvolvida na perspectiva indivíduo-grupo-classe e a autora afirma que

> A atividade de ensino é desencadeadora quando se torna o meio onde uma necessidade seja provocada, percebida e planejada, permitindo assim, novas elaborações a partir da dinâmica adotada. Deve provocar no sujeito uma necessidade e encorajá-lo a buscar soluções. Considera os conhecimentos que já possui e busca novos – em pesquisas, ou em momentos de trocas com os colegas. Nesse entrelaçamento de idéias, surge um novo patamar de conhecimento, diferente do inicial. A atividade de ensino convida o sujeito a esgotar seus conhecimentos adquiridos anteriormente gerando assim, a busca de um novo referencial. É transformar o objeto a ser conhecido em objeto de ensino, e, na interação entre os sujeitos, partilhar significados. Não é a solução por ela mesma, mas sim todo o processo que gerou a solução e que trouxe significado para o processo educativo (FERREIRA, 2005, p. 43).

A idéia do trabalho em grupo sob o ponto de vista do desenvolvimento da linguagem, tornou-se relevante para abordagem que demos à introdução da álgebra, com ênfase nos diferentes tipos de linguagens e a relação desses com a operacionalidade expressa em linguagem retórica.

O desenvolvimento das atividades em grupo possibilitou o trabalho com a linguagem escrita para resolver os problemas e a linguagem oral para a discussão com os colegas do grupo e com a classe toda de uma maneira que todos pudessem manifestar-se e entender os significados produzidos.

A primeira questão da apostila tinha como objetivo contribuir para mudar a visão de que tudo está fixo, de que nada muda, com a visão de mundo estático, e, portanto, trabalhar a idéia da fluência, pensamento este fundamental para trabalhar com a idéia de variável Como já dissemos anteriormente, a definição de variável que estamos adotando é de Caraça (1984) que diz que a variável pode representar infinitos elementos de um conjunto sem coincidir com nenhum deles. Não são esperadas respostas certas ou erradas a estas questões, o objetivo é que os alunos discutam sobre suas certezas e incertezas, e percebam que não são eternas. Existem movimentos, transformações que estão na nossa vida e não percebemos.

Cada aluno pensou, primeiramente, nas questões individualmente, logo em seguida, houve discussão em pequenos grupos e, finalmente, painel com a classe. A seguir estão os quadros com os itens da primeira questão selecionada que solicitava que os alunos pensassem nas seguintes questões:

Questão	Número de alunos	Exemplos de respostas representativas
a) Quantas pessoas estão em sua casa agora?	7 60	"Acho que ninguém.", "Duas ou três", "0 a 2". "2", "três".
b) Você é o mesmo de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? De um segundo atrás? Por quê?	2 11 54	Em branco "De um ano atrás eu mudei, mas de um segundo, não." "Eu fiz aniversário.", "Eu amadureci.", "Estou sempre aprendendo coisas novas." "Eu furei minha orelha." "Agora eu uso boné."
c) O mundo é o mesmo enquanto eu falo a palavra "mundo"? Por quê?	5 1 61	Em branco "Sim, por que uma palavra não vai mudar o resto, e sim seus atos." "Não, porquê ele está sempre sofrendo modificações.", "Não, porquê você não sabe o que está acontecendo lá fora agora."
d) O prédio da escola permanece o mesmo depois que eu vou embora para a casa? Por quê?	2 9 55	Em branco "Sim, eu não vejo diferença." "A faxineira limpa e arruma as carteiras.", "Alguém pode pixar o prédio.", "O prédio fica vazio.", "O pessoal da noite chega." 1 aluno respondeu: "Mais ou menos, os alunos pixam um pouquinho aqui, quebram um vidro ali..."
e) Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra. É a mesma? Por quê?	4 17 36	Em branco "Não, porque as coisas envelhecem com o tempo.", "Não, depende do ângulo que olharmos." "Sim, porquê ela não muda.", "Os objetos não saem do lugar porque não são vivos, ao contrário de nós."

Quadro 3: Respostas dadas à questão 2 da apostila

Pelas respostas dadas ao item a, podemos perceber, que, a princípio, os alunos tendem a afirmar que sabem exatamente o que está acontecendo em um lugar que não estão naquele momento, que têm certeza de que sabem a quantidade de pessoas que estão em sua casa em todos os momentos. Manifestam uma tendência às respostas exatas, numericamente fechadas. Percebi que se torna necessário trabalhar para a flexibilização de suas formas de pensar a realidade parada e sempre igual a si mesma. Foi depois da discussão nos grupos que começaram a pensar de forma mais flexível, quando lemos pela primeira vez a questão, a maioria dos alunos responderam com uma quantidade exata, sem hesitar. Aos poucos foram percebendo que as respostas não são necessariamente precisas e exatas, o que pretendemos com isso é deixar claro as possibilidades do que pode acontecer ou não. Essa questão pode contribuir para entender que a certeza matemática ao quantificar numericamente um fenômeno é relativa às condições de mudança desse fenômeno.

Após trabalhar com a movimentação numérica e a idéia de variável começamos um trabalho com a variável-palavra. Na quinta atividade da apostila o objetivo era a criação da variável-palavra, então, propusemos que todos os alunos lessem o seguinte texto e procurassem se considerar arquitetos de Ramsés II e sugerimos um roteiro para resolução:

"Estamos há quatro mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó Ramsés II na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:

- Mandou-me chamar, senhor?

- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.

- Temos 60, senhor.

- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?

- 12, senhor.

- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.

- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papéis e pensou:

Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito 60 pedras que podem ser usadas nesta coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Desta forma não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém, eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam".

a) Vamos debater o problema levantando todos os seus aspectos;

b) Cada aluno pensará sozinho, buscando a sua solução pessoal;

c) Após, nos grupos, cada aluno apresenta sua solução, o grupo abrirá debate, analisando cada resposta, vendo os seus acertos e seus erros, criando, assim, a resposta do grupo;

d) Depois, abrir-se-á o painel da classe onde cada grupo apresenta a sua solução que será debatida pela classe que elaborará, assim, a sua resposta para a questão.

Questão proposta	Número de alunos	Respostas representativas
Este é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isto de uma forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?" Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides: Como representar, utilizando a linguagem natural numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?	11 1 1 54	Em branco "Ele tem 60 pedras para usar no total." "0 a 10" - "Colocando possibilidades, do mínimo ao máximo." E ainda completa a resolução do problema proposto: "Tem 12 pedras na coluna, 60 pedras no depósito que podem ser usadas ou não e não sabemos a altura da pirâmide. O máximo que pode ser usado é 72 e o mínimo é 12.". - "Ele não sabe a altura da pirâmide, tem 12 pedras na coluna mestre, tem 60 pedras no depósito. A altura mínima é de 12 e a máxima de 72.", "Mínimo 12 e máximo 72 pedras." Todas as respostas seguiram esse mesmo raciocínio, trabalhando com as possibilidades, sem poder dar uma resposta fixa, exata. Na discussão com a classe toda, chegamos que o arquiteto poderia representar a altura da pirâmide da seguinte maneira: "12 pedras ≤ altura ≤ 72 pedras", ou seja, uma quantidade que varia entre 12 e 72 pedras.

Quadro 4: Respostas dadas à questão 5 da apostila

Percebemos que numa primeira leitura silenciosa, os alunos ficaram sem saber o que o problema estava solicitando, então, lemos em voz alta, pensamos e discutimos sobre ele para posteriormente cada aluno pensar numa resposta individualmente, em seguida nos grupos e enfim na discussão com a classe. Acreditamos que os alunos, que não compreenderam o problema, deixaram de responder, os outros conseguiram perceber que não podiam simplesmente colocar um número para dar a resposta, pois não sabiam a altura da pirâmide, sabiam apenas as quantidades colocadas e disponíveis. Julgamos as respostas "Ele tem 60 pedras para usar no total." e "0 a 10" como insatisfatórias. A primeira por não ter trabalhado com os limites e ter realizado uma subtração aleatória, aparentemente sem sentido e a segunda por não ter levado em consideração as informações dadas nos texto. Percebemos que os alunos, por apresentarem dificuldades em trabalhar com a linguagem simbólica, utilizam a linguagem retórica para expressar suas idéias e responder ao problema.

Após essa atividade, propusemos uma pesquisa sobre o modo de vida dos egípcios, suas necessidades, cultura, escrita, governo, religião, moradia e etc.. Utilizaram a biblioteca da escola, pesquisaram, preparam um trabalho escrito, um pôster e a apresentação que foi feita em sala de aula por todos os grupos. Nessa atividade, mesmo os alunos que não costumavam participar das aulas, queriam expor suas idéias, mostrar para a classe que tinham aprendido algo. Isso aconteceu devido ao empenho de todos os alunos nessa nova maneira de trabalhar, diferente da situação do ensino tradicional ao qual estavam acostumados.

A terceira atividade selecionada foi a décima da apostila e trabalha com o campo de variação ou conjunto-universo (como é chamado nos livros didáticos). O objetivo dessa atividade é discutir a concepção que se tem de que o número só existe a partir da contagem, na forma de numeral, visível, fixo, imutável. Isto é, se o número for desconhecido, não contado, ele não existe. O outro objetivo consiste em trabalhar o campo de variação, ou seja, definir um intervalo numérico para determinada situação.

O enunciado da atividade 10 é o seguinte: “Vamos discutir os campos de variação das sentenças abaixo, indicando os seus limites máximo, mínimo e o número que responde à situação numérica dada:”

Questão	Número de alunos	Respostas representativas
a) A idade de Marcos daqui a sete anos.*	41 18	**Corretas**: "De 7 a 107 anos" **Corretas**: "De 7 a 100 anos."
b) A idade de Ângela há 12 anos atrás.	41 18**	**Corretas**: "De 0 a 88 anos" **Insatisfatória**: "De 12 a 100 anos."
c) O dobro do dinheiro que trago no bolso.	1 2 56	**Em branco** **Incorreta**: Campo numérico dos Naturais, ou seja, discreto O aluno que considerou que pode levar no bolso de R$0,00 a R$50,00, respondeu que teria de R$0,00 a R$100,00. Apareceram intervalos bastante variados dentro desse raciocínio, porém, todos **corretos**.
d) Será que o elevador está com excesso de pessoas ou com um número de pessoas abaixo do seu limite?	1 1 57	**Em branco** **Incorreta**: "Sim." **Corretas**: Consideraram o Campo dos números Naturais e a maioria colocou "De 0 a 8 pessoas".
e) A altura de Daniel.	5 1 1 52	**Em branco** **Incorreta**: Campo numérico dos números Naturais: "0, 1, 2, ..." **Correta**: "Entre 0 e 3 metros." **Corretas**: Campo dos números Racionais em intervalos que variam de 40 centímetros a 3 metros.

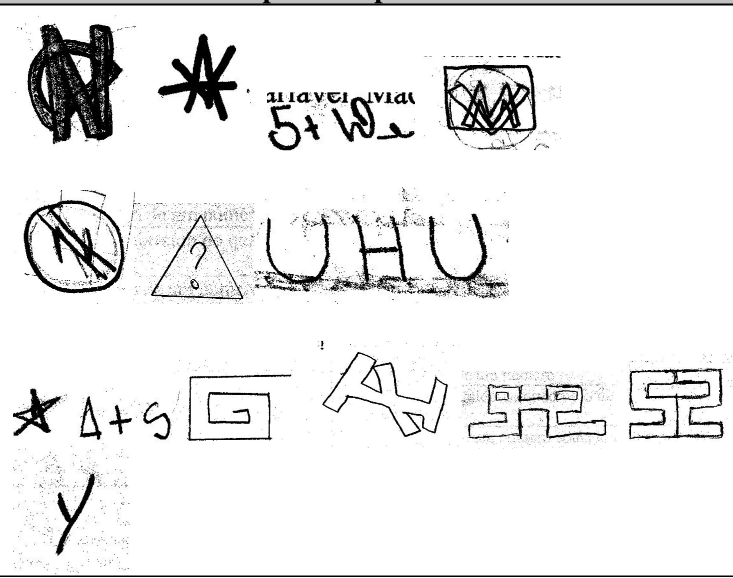
Quadro 5: Respostas dadas à questão 10 da apostila

* Observação: em acordo com a classe, os alunos consideraram que uma pessoa pode ter idade entre 0 e 100 anos, dentro do campo dos Racionais. Todas as respostas a seguir podem ser consideradas corretas, mas, considerando que uma pessoa pode ter idade até 100 anos, daqui a 7 anos deveria ser 107.
** Observação: Não foram os mesmos 18 alunos que responderam de 7 a 100 no item a e de 12 a 100 no item b.

Seis alunos não responderam nenhum dos itens da questão 10, e 2 alunos deram respostas consideradas insatisfatórias por terem apenas grifado as sentenças matemáticas, sem falar do campo de variação e por esses motivos, não foram computados no quadro acima.

Com essa atividade é explorada novamente a idéia de movimento, a idéia de que a variável, ou número desconhecido, deve ser definida num intervalo de um conjunto numérico, não pode ser qualquer número, ele deve ser pensado de acordo com o contexto dado. Do quadro, verifica-se que a maioria dos alunos respondeu à questão de forma matematicamente adequada, percebendo que, para cada situação proposta, deveríamos analisar qual conjunto numérico poderia representá-la, por exemplo, o número que representa a quantidade de pessoas que podem ser transportadas deve pertencer ao campo dos números naturais, pois as pessoas são contadas em unidades, ou seja, dentro do campo dos números naturais. Já a altura de uma pessoa, é expressa do campo dos racionais, e somente dos racionais positivos, por se uma grandeza contínua. Além disso, chamávamos a atenção para os intervalos que essas expressões possibilitavam.

Seguimos com o trabalho de tradução da linguagem retórica para a linguagem simbólica, ou matemática. Em princípio, sugerimos aos alunos que reescrevessem as sentenças em linguagem retórica utilizando abreviações ou palavras que julgassem adequadas, ou seja, que simplificassem a escrita. O objetivo desta atividade era a criação da variável-letra. Propusemos o seguinte problema: “Vamos nos imaginar em pleno Renascimento. Vamos nos dividir em grupos de matemáticos que trabalhavam no comércio da época. O comerciante de móveis e tapetes para o qual trabalham estes matemáticos, explicou-lhes que quer aumentar o seu estoque de mercadorias em cinco unidades para todos os tipos. Assim, cadeiras, mesas, armários, tapetes, independente da quantidade inicial de cada, devem ser aumentadas em cinco unidades. Os grupos-matemáticos têm, assim, um problema: *Como escrever numericamente o pedido do comerciante*?”

Questão	Respostas representativas
1- Os grupos, agora, vão inventar uma variável que seja mais próxima possível do numeral, para escrever a sentença do comerciante. Vão inventar, portanto, uma forma de numeralizar a variável. Mãos à obra, pessoal!! 2- Após cada grupo criar a sua variável-numeral, abrir o painel onde cada grupo apresenta sua criação. 3- Feito o painel, abrir-se-á o debate na classe para a escolha da criação que melhor expresse a numeralização da variável.	

Quadro 6: Respostas dadas à questão 12 da apostila

Pedimos que os grupos criassem uma variável que fosse o mais próximo possível do numeral, para escrever a sentença do comerciante, ou seja, uma forma de numeralizar a variável. Após cada grupo criar a sua variável-numeral, abrimos o painel onde cada grupo apresentou sua criação. Pudemos verificar pelas respostas, que apenas 2 grupos responderam o que o problema solicitava, os outros, se concentraram apenas na criação do símbolo, sem se preocupar em responder o problema.

Houve muitas respostas criativas, algumas com significados interessantes como o grupo que escolheu uma letra N com um D desenhado por cima para expressar um Número Desconhecido, possivelmente tenha ocorrido uma sincopação; a letra V com a letra A sobrepostas, que indicava **VA**riável; M e V sobrepostas para indicar **M**o**V**imento numérico, e ainda, um grupo que escolheu como se fosse uma placa de trânsito: proibido número, para expressar que a variável apenas representa um número, mas não é um número. Outro grupo escolheu um triângulo com um ponto de interrogação dentro, significando que não conheciam o valor. Houve um grupo em cada uma das turmas que escolheu uma letra para representar o número desconhecido (sílaba De de **De**sconhecido, por exemplo) e outro que escolheu a simbologia utilizada atualmente, usando a letra y. Como havíamos estudado o AHÁ, dos egípcios, um grupo utilizou a palavra UHU para expressar a variável. A maioria dos grupos buscou representações nas iniciais de uma palavra que indica algo desconhecido. E ainda houve respostas sem relações com a idéia do problema como uma estrela, um caracol.

Feito o painel, abrimos um debate na classe para a escolha da criação que expressasse melhor a variável, discutimos qual tinha maior proximidade com o numeral e qual era o símbolo mais fácil de ser universalizado. O símbolo eleito, através de votação, não foi escolhido necessariamente pela praticidade e representatividade, mas talvez, pela popularidade do grupo perante a classe. Os símbolos escolhidos, em cada uma das turmas, foram  e .

Dando continuidade ao trabalho, propusemos questões que solicitavam a tradução de expressões em linguagem retórica para a linguagem simbólica, utilizando primeiramente a sincopação, em seguida fomos “enxugando” cada vez mais as expressões e formalizando a linguagem simbólica. Concluímos que na linguagem simbólica, os matemáticos utilizam letras para representar as variáveis, normalmente utilizam o x.

Esse trabalho teve duração de 40 horas-aula. No final aplicamos a mesma lista de exercícios que fora resolvida pelos alunos sujeitos da pesquisa de Iniciação Científica com a intenção de comparar o desempenho individual dos alunos sujeitos frente a essas diferentes situações de ensino A e B. Antes de darmos início ao trabalho com as atividades algébricas, acreditamos que os alunos de ambas as situações estavam no mesmo nível de ensino, uma vez que em ambas as situações, o conteúdo era trabalhado de maneira tradicional. Mas, diferentemente da situação A, a situação B, se desenvolveu em escola pública.

A lista de exercícios é composta por 3 exercícios dos quais, os dois primeiros são típicos do ensino mecânico e tecnicista, com questões que exigem treino. Os resultados nos surpreenderam, pois, os alunos da situação B, que não foram treinados, obtiveram melhor desempenho, ou seja, apresentaram menos dificuldades, como será discutido na análise.

3.2.2 – Comentários sobre a situação B

O trabalho feito em sala de aula, com essa nova abordagem, mudou minha relação com os alunos e entre eles. Todos os alunos se envolveram com o trabalho em grupo. Alguns alunos aproveitaram para se aproximar dos colegas, outros, para discutir as questões propostas, que era nossa intenção. Essa dinâmica permitiu uma interação necessária para os alunos criarem suas próprias respostas, questionar o conteúdo que estava sendo trabalhado e discutir as idéias propostas nas atividades.

A autora Lanner de Moura (2005, p.1) considera que existe "um espaço vazio de compreensão entre a manipulação mecânica e quotidiana de um conceito, e sua apreensão conceitual. Podemos conjecturar que quanto mais intensificamos a prática mecânica, mais o conceito que a embasa se torna invisível, ao nosso pensamento." O que entendemos aqui é que quanto mais o aluno treina os conceitos matemáticos, mais longe do seu entendimento ele se encontra, e se um aluno consegue trabalhar com as operações e algoritmos matemáticos, não significa que ele tenha se apropriado do conceito pode ser que ele esteja apenas operando como se fosse uma máquina.

Na sala de aula, percebi que os alunos se sentiam mais motivados a trabalhar em grupo e com a nova proposta, comparativamente aos primeiros bimestres nos quais utilizávamos apenas o livro didático e a lousa. Quadros com as respostas dos alunos que confirmam essas afirmações estão no Capítulo IV, da Análise.

As primeiras atividades tinham por objetivo questionar a visão estática que o aluno normalmente tem formada sobre os movimentos numéricos. Essas atividades tratavam da idéia de variável (variável-palavra e variável-letra), de campo numérico e da linguagem sincopada.

Tinha também outros objetivos como desenvolver: a idéia de movimento, questionar a visão metafísica, determinística da realidade e a concepção de mundo estático; uma interpretação matemática do movimento pela criação do conceito de variável e de campo numérico; a linguagem sincopada através das abreviações propostas pelos alunos.

Num primeiro momento, a tendência dos alunos era dar respostas únicas, com um número exato, ou dizendo que as coisas não mudam num pequeno intervalo de tempo. Mas alguns alunos questionaram: "Como vou saber quantas pessoas estão em casa neste momento, professora? Pode ser que minha mãe tenha saído, ou que tenha visitas em casa..." E pensavam em estratégias para escrever as respostas. Essas questões surgiram quando os alunos se reuniam nos grupos para discutir as respostas dadas individualmente. A partir dessa discussão, conseguimos trabalhar com a idéia de movimentação numérica (variável) e de que as coisas se modificam a todo o momento (fluência), mudando em alguns aspectos a visão estática de número e sua visão metafísica. A quantidade é e não é, ao mesmo tempo, um determinado número, é impossível vê-lo, pegá-lo, ou seja, ele é relativo. Alguns alunos ficavam surpresos ao perceber a inexatidão da matemática.

Outro aspecto novo para os alunos que fez com que neles despertasse maior interesse pelas aulas foi o fato de poderem criar suas próprias linguagens, símbolos e conjecturas durante a elaboração das atividades. Desse modo, perceberam que a Matemática não é uma ciência morta, pronta, indiscutível, que ela foi desenvolvida com base nas necessidades humanas.

Percebemos que as atividades selecionadas e a dinâmica com que foram desenvolvidas, em grupos, possibilitaram que os alunos construíssem seus próprios significados e novas elaborações a respeito da matemática e da vida.

As atividades tinham a intenção de despertar no aluno um sentimento de capacidade para realizá-las, para que todos tivessem possibilidade de resolvê-las individualmente e assim construir seus próprios significados. Nos grupos, a intenção era de que os alunos discutissem suas respostas, trocassem idéias e formassem novos significados para que, finalmente, na discussão com a classe toda, chegássemos a uma resposta mais adequada, ou seja, entrássemos em acordo conceitual.

Houve momentos também de pesquisa na biblioteca da escola, sobre o modo de vida dos egípcios, que contribuiu para o entendimento do surgimento da variável e da necessidade de estudarmos a álgebra.

Percebemos que muitas das dificuldades que os alunos ainda encontram se remetem ao ensino tradicional que tiveram em aritmética, principalmente com relação à operacionalidade. Fica um novo desafio a partir desta pesquisa: Como trabalhar aritmética nessa perspectiva do desenvolvimento conceitual com a dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe? Quais nexos são necessários trabalhar para que os alunos entendam a operacionalidade presente na aritmética que é utilizado também na álgebra?

Após o desenvolvimento do trabalho, verificamos que o material trabalhado na situação B potencializa um desenvolvimento mais significativo do pensamento e da linguagem algébrica. Há alguns aspectos que podem e devem ser mais bem trabalhados, principalmente, com relação à operacionalidade, aos limites do campo de variação, os conjuntos numéricos e ainda à linguagem simbólica.

3.3 – Descrição da metodologia de análise

Como já foi dito anteriormente, em ambas as situações A e B de ensino, propusemos as mesmas atividades de tradução da linguagem retórica para a simbólica e de campo de variação assim que terminamos o trabalho com equações na situação A e com os nexos conceituais, na situação B. Tínhamos, portanto, a mesma lista de exercícios resolvida tanto pelos alunos sujeitos da situação A, quanto pelos da situação B. Apesar das abordagens em cada uma das situações serem diferentes, solicitamos a mesma lista de exercícios com enfoque tradicional para que pudéssemos comparar mais fidedignamente as dificuldades, tanto qualitativa quanto quantitativamente. Queríamos verificar se, os alunos da situação B conseguiriam resolver as atividades mesmo não tendo sido "treinados" como foram os alunos da situação A.

Gostaríamos de esclarecer que o ensino na situação A se deteve unicamente em exercícios análogos aos da lista que usamos para levantar as categorias e os tipos de respostas dos alunos. Por este motivo, optamos por não descrever os exercícios. Já a situação B buscou superar esse enfoque propondo atividades que trabalhassem os nexos conceituais e, portanto, se fez necessário detalhar essa situação de ensino.

A seguir apresentamos um quadro indicando os elementos constitutivos das situações A e B.

Elementos constitutivos	Situação A	Situação B
Escola	Particular	Pública
Série	2 salas de 6ª série	2 salas de 6ª série
Situação da pesquisadora	Pesquisadora interagindo com o professor da classe	Pesquisadora é a professora da classe
Número de alunos	67	67
Média de idade dos alunos	12	12
Número de aulas	32	40
Dinâmica de aula	Discussão professor e classe.	Momentos de pensar o conceito: Individual, pequenos grupos e classe.
Mediação do professor	Informação e correção de erros.	Elaborações conceituais acordadas com a classe.
Abordagem do conceito	O conceito é trabalhado em sua representação formal O professor ensina a "técnica" de cálculo e solicita a repetição nos exercícios.	São desenvolvidos os nexos do conceito mediante atividades que possibilitam aos alunos construir significados dos nexos.
Fonte de dados sobre as aulas	Observações da pesquisadora na forma de diário de campo e atividades escritas realizadas pelos alunos.	Observações da professora - pesquisadora na forma de diário de campo, atividades escritas e questionário.
Fonte de dados para a comparação	Respostas dos alunos às atividades da lista com exercícios de tradução da linguagem retórica para a simbólica e sobre campo de variação.	Mesma lista.
Análise dos dados	Categorias definidas a partir das dificuldades emergentes do material empírico	Categorias definidas a partir das categorias da situação A
Avaliação	Resultados dos acertos e erros nos exercícios da lista atribuída aos alunos.	Do processo realizado com todos os alunos e de alguns alunos selecionados.

Quadro 7: Elementos constitutivos das situações A e B

Para a realização desta pesquisa, tomamos como base as categorias emergentes do material coletado durante os plantões de dúvidas, na pesquisa de Iniciação Científica, referente à situação A de ensino. Sentimos necessidade ainda de ampliarmos essa caracterização das dificuldades para que pudessem contemplar as dificuldades emergentes do trabalho com os nexos conceituais da situação B. Analisamos cada uma delas levando em consideração as características da linguagem algébrica e da operacionalidade por ela significada presentes nas atividades.

Destacamos que as oito categorias de análise (coluna 1 quadro 8) utilizadas na pesquisa de Iniciação Científica foram agrupadas em 5 categorias mais amplas e uma categoria que foi acrescentada, posteriormente. Essas novas categorias (coluna 2 do quadro 8) serão utilizadas para fim de classificar os tipos de dificuldades apresentadas pelos alunos em cada uma das situações. O quadro seguinte mostra as categorias utilizadas na situação A, como elas foram agrupadas seguidas de uma breve explicação de cada uma delas e exemplos de respostas dadas pelos alunos. Os exemplos foram selecionados de acordo com o que melhor caracteriza a categoria.

Categorias da situação B	Categorias da situação A	Descrição das categorias	Exemplos de respostas dadas pelos sujeitos
1) Tradução Literal	1) Tradução Literal	Passagem, termo a termo da linguagem retórica para a linguagem simbólica. A interpretação do pensamento operacional manifesta-se pela tradução direta dos termos que expressam sinal de operação para a simbologia correspondente.	Questão: "A metade de um número" Resposta: $2 \div x$
2) Variável	2) equivalências de expressões 3) traduções de expressões que indicam movimento ou variação	Tradução de expressões que representam movimentos variáveis, da linguagem retórica para a linguagem simbólica.	Questão: Quatro sétimos do antecessor de um número. Resposta: $4 \div 7 - N$
3) operacionalidade	4) princípio de equivalência 5) significado de operação matemática 6) relação operacional entre as expressões	Relação entre os termos que compõe as expressões em linguagem simbólica não condiz com a expressão em linguagem retórica.	Questão: "A quinta parte do sucessor de um número." Resposta: $\frac{5}{N}(N + 1)$
4) unidade	7) noção de unidade	Dificuldades relacionadas ao conceito de Unidade	Questão: Um número diminuído de quatro unidades. Resposta: *Um x – 4U*
5) linguagem	8) tipos de linguagem	Misto entre as linguagens retórica e simbólica.	Questão: "Ana Lúcia andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias." Resposta: *A 5 de x + uma U*
6) campo de variação		Dificuldade em estabelecer os limites ou o campo numérico dos intervalos que representam os movimentos das sentenças dadas.	Questão: "A temperatura em Campinas." Resposta: *80ºC a 100ºC*

Quadro 8: Categorias de dificuldades

Ressaltamos que essas categorias não são excludentes, ou seja, uma resposta dada pode ser incluída em mais de uma categoria. Não há uma correspondência um a um entre categoria e resposta.

Assim, podemos dizer que as categorias de 1 a 5 se referem às dificuldades na tradução de expressões da linguagem retórica para a linguagem simbólica, porém, a categoria Tradução Literal é mais específica, inclui os casos em que há ênfase na tradução dos termos isolados, na ordem em que aparecem na frase. Muitas vezes, os sinais são postos na expressão, sem que o aluno estabeleça relações com o significado daquela. Dentro dessa categoria, pode ocorrer também o caso da operacionalidade, da linguagem e unidade, ou seja, as categorias não são disjuntas, as separamos dessa maneira para facilitar a análise.

As dificuldades referentes à categoria da Variável se manifestam quando os alunos ignoram a variável por não saber como representá-la ou representam, por exemplo, um número par por x, sem considerar que x pode representar qualquer número, seja ele par ou ímpar. Ou ainda quando respondem 6 para indicar um número par, isso significa que o aluno não está com o pensamento algébrico formado, porém, não se constitui um erro.

A operacionalidade diz respeito à concepção do conceito de subtração, entendido pela equivalência "subtraído (ou diminuído) de" equivale a "menos que" e de "múltiplo de" equivale a "divisor de" ou vice-versa. Ou seja, o aluno não faz distinção entre minuendo e subtraendo, múltiplo e divisor, o que pode denotar a tendência de um trabalho somente pela descrição oral e de exemplos muito evidentes. No caso da divisão, o aluno sempre pensa na qualidade do número Natural, no qual o número maior deve ser dividido pelo menor, pensamento discreto, o que se diferencia da fração que advém do pensamento de medida, ou seja, do contínuo. O que acontece na maioria das salas de aula, é que o professor tenta convencer o aluno das regras da fração sem perceber que o aluno está com o pensamento discreto e tem que passar para o contínuo. Além disso, apresentam dificuldades em usar os parênteses. Este tipo de dificuldade constitui um indicativo de que o aluno não tem compreendido as operações entre os termos, e nem distinguido os termos expressos no enunciado.

Na categoria 4, a unidade é compreendida como se fosse uma variável ou é considerada como elemento neutro na adição e subtração, ou seja, os alunos a ignoram ao traduzir para a linguagem simbólica, muitas vezes por não saber como representá-la.

A categoria 5 nem sempre apresenta erros, é possível que esteja presente uma não compreensão do enunciado que solicitava a tradução para a linguagem matemática, respostas sincopadas não eram previstas.

Ainda podemos observar, que expressões como “Quatro sétimos do antecessor de um número” podem não ser consideradas retóricas, e sim expressões na linguagem do “matematiquês”, segundo Lima (1993). A partir disso, é natural que os alunos apresentem dificuldades pois eles não têm o pensamento algébrico pré-construído.

No capítulo seguinte, apresentaremos uma análise das dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos da pesquisa atual, comparativamente aos dados que foram analisados para a pesquisa anterior.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE

CAPÍTULO IV

ANÁLISE

A análise dos dados foi feita em duas etapas. Na primeira etapa, fizemos uma comparação entre as dificuldades apresentadas pelos sujeitos da situação A e as dificuldades dos sujeitos da situação B, de acordo com as categorias enunciadas no quadro 8 da Metodologia, são elas: Tradução Literal, Variável, Operacionalidade, Unidade, Tipos de Linguagem e Campo de Variação. Essas categorias foram assim agrupadas para facilitar a análise dos dados, além de nos fornecer indícios de melhora ou não do desempenho dos alunos frente às questões algébricas. Essas categorias, como considerado anteriormente, não são excludentes, ou seja, uma resposta do aluno pode ser incluída em mais de uma categoria. Na segunda etapa, por sua vez, fizemos uma análise das dificuldades de alguns alunos da situação B, detalharemos 3 grupos selecionados aleatoriamente.

4.1 – Primeira etapa: Comparação das dificuldades apresentadas nas situações A e B

A Tabela 1, a seguir, mostra uma comparação entre as dificuldades apresentadas pelos alunos das situações A e B. Lembramos que as categorias dos tipos de dificuldades, inicialmente, foram determinadas durante a pesquisa de Iniciação Científica, de acordo com as dificuldades emergentes dos alunos sujeitos da situação A e foram utilizados também na análise os dados da mesma pesquisa.

A tabela mostra o número de alunos que apresentou cada uma das dificuldades, em porcentagem, em cada uma das situações de ensino:

Categorias de dificuldades	**Situação A (total: 67 alunos)**	**Situação B (total: 67 alunos)**
1) Tradução Literal	100%	74,63%
2) Variável	52,23%	37,31%
3) Operacionalidade	80,60%	80,60%
4) Unidade	20,90%	0%
5) Linguagem	11,94%	13,43%
6) Campo de variação	20,90%	17,91%

Tabela 1: Porcentagem das dificuldades apresentadas nas situações A e B.

Para poder comparar melhor as dificuldades apresentadas, em ambos os casos, revelamos e analisamos as manifestações mais freqüentes em operacionalidade e linguagem. O que nos permite perceber que em ambas as situações, as dificuldades em operacionalidade estão diretamente relacionadas com a idéia de variável o que é apresentado no exemplo a seguir: "A metade do antecessor de um número." Muitos alunos, de ambas as situações, traduzem para "$x - 1 \div 2$" sem levar em consideração que, quando não se usa os parênteses, o que estaria sendo divido por 2 seria o 1 e não o antecessor de x. Esse tipo de dificuldade foi encontrado também no trabalho de Booth (1995), quando ela menciona a dificuldade que os alunos apresentam para utilizar os parênteses e mesmo entender o conceito de variável. Acreditamos que esse fato seja resultado do ensino tradicional em aritmética nas duas situações.

Com relação à linguagem, as dificuldades se manifestaram de maneira diferente: na situação A, os alunos que apresentaram esse tipo de dificuldade apenas abreviaram a frase, deixando-a mais simples, copiando algumas partes do mesmo jeito que estavam na frase original, nem os símbolos matemáticos foram usados. O exemplo seguinte mostra a tradução de "Ana Lúcia andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias." para "A 5 de x mais uma U." Esses alunos utilizaram uma linguagem que julgaram mais conveniente do ponto de vista deles e “menos convenientes” segundo Smith (1958), com relação à linguagem simbólica, na tentativa de melhor compreender os enunciados e simplificá-los.

Enquanto na situação B, dentro dessa categoria, a maioria das ocorrências, nem sempre significando uma dificuldade, se manifestaram deixando uma palavra abreviada ou por extenso. Exemplos: Tradução de “Um número acrescido de sete unidades.” para “N + 7 unid.” ou “A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.” para “5 $\div$ número + 1”. Gostaríamos de salientar que houve casos de alunos que utilizaram, na resolução da lista, as duas linguagens, não apresentando erros ao traduzir.

4.2 – Segunda etapa: Análise das dificuldades encontradas pelos sujeitos da situação B

Nesta etapa verificamos as dificuldades individuais de 3 grupos selecionados dentre os 17, segundo os critérios: ótimo, bom e médio de acordo com a participação no desenvolvimento das atividades individuais, em grupos e com a classe toda e também com a freqüência nas aulas. Selecionamos um grupo ótimo, um bom e outro médio em relação ao total e comparamos as dificuldades entre os membros do próprio grupo, essas dificuldades são manifestas nas respostas às atividades desenvolvidas segundo a dinâmica proposta na situação B. O enfoque dado nessa situação consistiu em proporcionar ao aluno uma relação ativa com os trabalhos em sala de aula, em solicitar o seu movimento com as questões conceituais propostas. E por fim, fizemos uma comparação entre o grupo dos menos freqüentes e dos mais freqüentes com o objetivo de fazer conjecturas sobre a influência da abordagem nas dificuldades da aprendizagem algébrica desses alunos.

4.2.2 - Grupo 1

Esse grupo é composto pelas alunas Helo, He, Ell e Ju[15]. As quatro alunas apresentaram boas notas desde o início do ano, desenvolveram 100% das tarefas solicitadas em sala de aula e extra-classe. Em todas as aulas participaram das atividades com a apostila expondo suas idéias,

[15] Nomes fictícios.

tirando dúvidas, apresentando os trabalhos e pesquisas. A freqüência de três participantes do grupo foi integral (100%), apenas a aluna Ju teve 85% de freqüência no último bimestre. Caracterizamos este grupo como ótimo em relação ao total da amostra.

O grupo se destacou por ter formulado questões além das propostas nas atividades. As três alunas freqüentes não demonstraram dificuldades na realização das atividades da apostila e tiravam as dúvidas na discussão do grupo-classe.

4.2.2.1 - Dificuldades individuais apresentadas pelo grupo 1

Os quadros seguintes mostram, na primeira coluna, as questões que os sujeitos apresentaram algum tipo de erro, na segunda coluna a resposta que os mesmos apresentaram individualmente na lista de exercícios proposta no final do desenvolvimento das atividades, como forma de avaliar o nosso trabalho, e por fim na terceira coluna, a categoria em que cada dificuldade se insere.

Questão	**Resposta dada pelo aluno**	**Dificuldade**
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	N – 4	Tradução Literal
2- d) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3 anos.	(i + 3) ÷ 6	Operacionalidade
3- c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra..	De 100 a 1.000.000... N	Campo de Variação (limites)
3- g) A altura de Wagner.	De 1,40 à 2,00 Q	Campo de Variação

Quadro 9: Dificuldades apresentadas pela aluna Helo

Questão	**Resposta dada pelo aluno**	**Dificuldade**
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	n + 1 x 2	Operacionalidade
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$\frac{3}{5}$ x n – 1	Operacionalidade Variável
2 - k) A quinta parte do sucessor de um número.	n + 1 ÷ 5	Operacionalidade Variável
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	$\frac{4}{7}$ x n – 1	Operacionalidade Variável
3- c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra.	100 à 1.000 N	Campo de Variação (limites)
3- g) A altura de Wagner.	1.30 à 1.80 N	Campo de Variação (limites)

Quadro 10: Dificuldades apresentadas pela aluna He

Questão	Resposta dada pelo aluno	Dificuldade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	N – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	- 6 N	Tradução Literal Operacionalidade
2- d) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3 anos.	(N + 3) ÷ 6	Operacionalidade
3- c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra.	de 100 à 100.000 N	Campo de Variação (limites)

Quadro 11: Dificuldades apresentadas pela aluna Ell

Questão	Resposta dada pelo aluno	Dificuldade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	J – 4	Tradução Literal
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	n ÷ 2	Variável
2- h) A metade do antecessor de um número.	n – 1 ÷ 2	Operacionalidade Variável
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	n + 1 x 2	Operacionalidade Variável
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	n – 1 ÷ 5 x 3	Operacionalidade Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	n + 1 x 5	Operacionalidade Variável
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	n – 1 ÷ 7 x 4	Operacionalidade Variável
3- c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra.	1.000 à 2.000	Campo de Variação (limites, campo numérico)
3- g) A altura de Wagner.	0 à 2,00	Campo de Variação (limites, campo numérico)
3- i) A temperatura em Campinas.	5 à 45	Campo de Variação (Unidade de Medida)

Quadro 12: Dificuldades apresentadas pela aluna Ju

No próximo quadro, apresentamos uma comparação entre as dificuldades apresentadas pelos integrantes do grupo 1 em freqüência absoluta da ocorrência dos erros, de acordo com as categorias propostas.

Categorias de dificuldades	**Helo**	**He**	**Ell**	**Ju**
1) Tradução Literal	1	0	2	1
2) Variável	0	3	0	1
3) Operacionalidade	1	4	2	5
4) Unidade	0	0	0	0
5) Linguagem	0	0	0	0
6) Campo de variação	2	2	1	3
Branco	0	0	0	0
Total	4	9	5	10

Quadro 13: Quadro comparativo entre as integrantes do grupo

Observamos no quadro que a aluna (Ju), menos freqüente (85%), apresentou mais dificuldades em relação às integrantes que tiveram freqüência 100%.

Quando comparadas as dificuldades encontradas por esse grupo, que é considerado um grupo bom em relação à classe no que diz respeito ao aprendizado, que realiza e participa das atividades, com os dados da situação A, podemos dizer que houve uma melhora muito significativa no aprendizado. Muitas dificuldades que os alunos apresentaram na situação A, os alunos deste grupo não as apresentaram. Como exemplo, podemos citar o caso das categorias 4) Unidade e 5) Linguagem nas quais não houve ocorrência na situação B, enquanto que na situação A ocorreu 20,9% na categoria 4 e 11,94% na categoria B. A categoria 1) Tradução Literal apresentou apenas 1 ocorrência, enquanto que na situação A, todos os alunos (100%) apresentaram esse tipo de dificuldade.

Outra questão que mostra resultados significativos é a questão do movimento. Não ocorre a esses alunos a idéia de número físico, isto indica que compreenderam que a álgebra estuda os movimentos e que não confere a estes um número físico senão uma variável.

Neste caso estamos comparando o grupo com o rendimento geral da situação A, que não é uma comparação proporcional, pois estamos comparando o grupo com a classe, no entanto trata-se de uma comparação que permite analisar e discutir o trabalho realizado em ambas as situações.

A questão com maior número de erros (4) foi a “3- c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra”. Devido principalmente ao limite mínimo. Os alunos acreditam que como os grãos são pequenos, necessariamente temos que pegar em grande quantidade. Em seguida vem a questão “1- c) Um número diminuído de quatro unidades” (deve-se à expressão “diminuído de” que é mal interpretada com relação à operacionalidade) e “3- g) A altura de Wagner” (devido aos limites) com três erros cada.

4. 2. 3 - Grupo 2

Grupo composto pelas alunas Pam, Rae, Juli, Fer e Gio, com cinco integrantes no total. Caracterizamos este grupo com rendimento médio em relação à classe, pois possui integrantes participativos e com bom rendimento, ao mesmo tempo em que apresenta integrantes que não participaram das atividades.

As alunas Fer e Gio não se manifestaram no grupo sobre as questões propostas e nem nas discussões sobre a resolução das atividades pelo grupo-classe. Não apresentaram nenhuma tarefa extra-classe e não participaram do desenvolvimento das atividades em grupo. Mesmo apresentando freqüência integral nas aulas. E apresentaram soluções muito parecidas nas atividades realizadas.

Já as alunas Pam, Rae e Juli discutiam e respondiam às atividades propostas em sala de aula e no grupo. Participaram da elaboração das respostas do grupo-classe, tiravam suas dúvidas com freqüência e questionavam as questões propostas. Essas três integrantes confeccionaram 100 % das tarefas extra-classe e apresentaram freqüência de 100 % nas aulas.

4. 2. 3. 1 - Dificuldades apresentadas pelo grupo 2

Os quadros que seguem mostram as dificuldades apresentadas individualmente pelas integrantes do grupo.

Questão	Resposta do aluno	Dificuldade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	Nº – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – Nº	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	$\frac{5}{N} + 1 = 5 \div N + 1$	Operacionalidade
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	Branco	
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	$2 \div$ Nº + 9	Tradução Literal Operacionalidade
2- e) Um número par.	Nº + 2	Operacionalidade
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	Branco	
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	$\frac{5}{N}$ (Nº + 1)	Operacionalidade
3- d) O número de pessoas que viajam num carro.	Branco	

Quadro 14: Dificuldades encontradas pela aluna Pam

Questão	Resposta do aluno	Dificuldade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	n – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – n	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	$5 \div n + 1$	Tradução Literal
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	$\frac{1}{2} + n + 9$	Operacionalidade
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	3 x 5 (n – 1)	Operacionalidade
3- e) A velocidade de um carro na rodovia dos Bandeirantes.	50 Q 100	Campo de variação (limites)
3- g) A altura de Wagner.	1m Q 1,70 m	Campo de variação (limites)

Quadro 15: Dificuldades encontradas pela aluna Juli

Questão	Resposta do aluno	Dificuldade
1- a) Um número acrescido de sete unidades.	N + 7 unid.	Linguagem
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	N – 4 unid.	Tradução Literal Linguagem
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – N	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 ÷ N + 7	Tradução Literal Operacionalidade
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – 5 ÷ N	Tradução Literal Operacionalidade
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	8 – 3 ÷ n	Tradução Literal Operacionalidade
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	2 ÷ N + 9	Tradução Literal Operacionalidade
2- h) A metade do antecessor de um número.	2 ÷ n – 1	Tradução Literal Operacionalidade Variável
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	2 x N + 1	Operacionalidade Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	5 N + 1	Operacionalidade Variável

Quadro 16: Dificuldades encontradas pela aluna Era

Questão	Resposta do aluno	Dificuldade
1- b) O quádruplo de um número.	4 + nº	Operacionalidade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	nº – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – nº	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 + nº + 1	Operacionalidade
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – 5	Tradução Literal Variável
2- a) Ana Lúcia andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias.	Cinco quilômetros, 2 km	Variável Linguagem
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	Oito subtraído, 7 dança	Linguagem Variável
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	9 metade, 3	Linguagem Variável
2- d) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3 anos.	Sêxtuplo, 8	Linguagem Variável
2- e) Um número par.	2	Variável
2- f) A multiplicação de um número <u>par</u> por cinco.	2 x 5 = 10	Variável
2- g) O antecessor de um número.	55	Variável
2- h) A metade do antecessor de um número.	3	Variável
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	9	Variável
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$\frac{2}{3}$	Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	5	Variável
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	$\frac{4}{6}$	Variável
3- e) A velocidade de um carro na rodovia dos Bandeirantes.	84 v	Variável Campo de Variação
3- f) O dinheiro que trago no bolso.	50 reais	Variável Campo de Variação
3- g) A altura de Wagner.	80 m	Variável Campo de Variação
3- h) Os dedos de um animal.	3 cm	Variável Unidade de Medida Campo de Variação
3- i) A temperatura em Campinas.	15	Variável Campo de Variação (Unidade de Medida)

Quadro 17: Dificuldades encontradas pela aluna Fer

Questão	Resposta do aluno	Dificuldade
1- b) O quádruplo de um número.	4 + Nº	Operacionalidade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	Branco	
1- d) 6 subtraído de um número.	Branco	
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	Branco	
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	Branco	
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	8 – N x 3	Tradução Literal
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	N x 3 + 6	Operacionalidade?
2- d) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3 anos.	6 + x 3	Operacionalidade
2- e) Um número par.	Branco	
2- f) A multiplicação de um número par por cinco.	N x 5	Variável
2- g) O antecessor de um número.	N x 4	Operacionalidade?
2- h) A metade do antecessor de um número.	- 2	Variável Operacionalidade
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	Branco	
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$\frac{3}{5}$	Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	Branco	
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	Branco	
3- e) A velocidade de um carro na rodovia dos Bandeirantes.	5 k	Variável Campo de Variação
3- f) O dinheiro que trago no bolso.	50 reais	Variável
3- g) A altura de Wagner.	85	Variável Campo de Variação
3- h) Os dedos de um animal.	3 cm	Variável Campo de Variação
3- i) A temperatura em Campinas.	Branco	

Quadro 18: Dificuldades encontradas pela aluna Gio

Acreditamos que muitas dificuldades apresentadas pelas alunas Fer e Gio se remetem ao fato de não terem manifestado compromisso com as aulas de matemática, nem durante o desenvolvimento das atividades algébricas, nem durante o trabalho anterior em aritmética. Analisando as apostilas de ambas, percebemos que estão idênticas, o que nos faz supor que não participaram das aulas como foi proposto, ou seja, foi pedido que cada aluno respondesse, individualmente, as questões da atividade antes de discutir com o grupo. A participação das mesmas nas aulas era quase nula. Não acompanhavam o andamento das atividades, não faziam as tarefas de casa e durante a correção e discussão das atividades, conversavam assuntos alheios às aulas. Apresentaram dificuldades com a idéia de movimento, com a operacionalidade, com a fração, com a variável.

Apesar das dificuldades encontradas por esse grupo, houve uma melhora significativa com relação à concepção de unidade, ao uso das linguagens, da operação entre 2 termos, em relação aos alunos da situação A, mas as dificuldades relativas à tradução literal e à variável ainda são freqüentes.

As questões com maior número de erros foram 1- *d, e* e 2 – *c*. Isso é devido à tradução literal e à operacionalidade. Esse grupo não apresentou dificuldades nos itens a, b e c da terceira questão, que dizem respeito ao movimento e ao campo de variação.

O quadro 19 indica a freqüência de erros apresentados pelas alunas do grupo 2.

Categorias de dificuldades	**Pam**	**Juli**	**Rae**	**Fer**	**Gio**
1) Tradução Literal	3	3	7	3	1
2) Variável	0	0	3	19	7
3) Operacionalidade	4	2	7	2	5
4) Unidade	0	0	0	0	0
5) Linguagem	0	0	2	4	0
6) Campo de variação	0	2	0	5	3
Branco	3	0	0	0	9
Total de dificuldades	7	7	19	33	16

Quadro 19: Quadro geral do grupo 2

Mesmo as integrantes do grupo que manifestaram pouco interesse tiveram um rendimento maior do que os da situação A, por exemplo, enquanto para a situação A na categoria quatro – Unidade – ocorreram erros em 20,9% dos alunos, neste grupo não ocorreu nenhum. Isto mostra que o trabalho com a linguagem e o pensamento algébrico dá mais sustentação para a aprendizagem do que a repetição mecânica de exercícios como ocorria na situação A.

4. 2. 4 – Grupo 3

O terceiro grupo é composto por quatro alunas, são elas: Ing, Jaq, Kam, Let. Caracterizamos este grupo com rendimento bom em relação à classe. As integrantes dele discutiam e respondiam às atividades propostas em sala de aula. Participaram da elaboração das respostas do grupo-classe. Todas confeccionaram 100% das tarefas extra-classe. Apresentaram freqüência 100 %.

4. 2. 4. 1 - Dificuldades apresentadas pelo grupo

Os quadros que seguem apresentam as questões nas quais cada integrante do grupo apresentou dificuldade. Na segunda coluna, estão as respostas dadas e na última coluna estão as categorias nas quais se inclui cada resposta dada.

Questão	**Resposta dada pelo aluno**	**Dificuldade**
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – número	Tradução Literal Linguagem
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 ÷ número + 1	Tradução Literal Operacionalidade Linguagem
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – número x 4	Tradução Literal Operacionalidade Linguagem
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	1 – nº + 9	Variável
2- f) A multiplicação de um número par por cinco.	nº x 2 + 5	Operacionalidade
2- g) O antecessor de um número.	nº + 1	Operacionalidade
2- h) A metade do antecessor de um número.	nº – 1	Operacionalidade
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	2 x nº + 1	Operacionalidade
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$\frac{3}{5}$ – nº + 1	Operacionalidade
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	5 ÷ 1 – nº	Tradução Literal Operacionalidade
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	$\frac{4}{7}$ + 1 – nº	Operacionalidade
3- d) O número de pessoas que viajam num carro.	0 a 5 Q	Campo de Variação
3- f) O dinheiro que trago no bolso.	0, 1, 2, 3, 4,... N	Campo de Variação

Quadro 20: Dificuldades encontradas pela aluna Ing

Questão	Resposta dada pelo aluno	Dificuldade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	J – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – R	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 ÷ K + 1	Tradução Operacionalidade
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – 5 x R	Tradução Literal
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	8 – 3 x m	Tradução Literal
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	C + 9 ÷ 2	Operacionalidade
2- h) A metade do antecessor de um número.	N – 1 ÷ 2	Operacionalidade
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	N + 1 x 2	Operacionalidade
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	N + 1 ÷ 5	Operacionalidade
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	Nº + 1 ÷ 5	Operacionalidade
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	$N - 1 \times \frac{4}{7}$	Operacionalidade

Quadro 21: Dificuldades encontradas pela aluna Jaq

Questão	Resposta dada pelo aluno	Dificuldade
1- b) O quádruplo de um número.	N ÷ 4	Operacionalidade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	N – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – N	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 x N + 1	Operacionalidade
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – N (5 x N)	Operacionalidade Tradução Literal Variável
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	3 x N (8 – N)	Operacionalidade Tradução Literal Variável
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	N ÷ 2 + N + 9	Operacionalidade Tradução Literal Variável
2- h) A metade do antecessor de um número.	N ÷ 2 – N	Variável Operacionalidade
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	2 x N + 1	Operacionalidade
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$\frac{3}{5} - N$	Operacionalidade Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	N + 5 x N	Variável Operacionalidade
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	$\frac{4}{7} - N$	Operacionalidade
3- d) O número de pessoas que viajam num carro.	De 0 à 5 Q	Campo de variação
3- f) O dinheiro que trago no bolso.	0, 1, 2, 3, 4, 5... N	Campo de variação

Quadro 22: Dificuldades encontradas pela aluna Kam

Questão	Resposta dada pelo aluno	Dificuldade
1- b) O quádruplo de um número.	4 – n	Operacionalidade
1- c) Um número diminuído de 4 unidades.	n – 4	Tradução Literal
1- d) 6 subtraído de um número.	6 – n	Tradução Literal
1- e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.	5 – n + n	Operacionalidade Tradução Literal Variável
1- f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.	4 – 5 x n	Tradução Literal
2- b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.	8 – n x 3	Tradução Literal
2- c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.	n ÷ n + 9	Variável Operacionalidade
2- e) Um número par.	5 ÷ 1 – nº	Variável Operacionalidade
2- f) A multiplicação de um número par por cinco.	2 x 5 = 10	Variável
2- g) O antecessor de um número.	-1	Variável
2- h) A metade do antecessor de um número.	÷ 2	Variável
2- i) O dobro do consecutivo de um número.	x 2	Variável
2- j) Três quintos do antecessor de um número.	$-\frac{3}{5}$	Variável
2- k) A quinta parte do sucessor de um número.	5 ÷ 2	Variável
2- l) Quatro sétimos do antecessor de um número.	4 x 7 – 1	Variável

Quadro 23: Dificuldades encontradas pela aluna Let

Esse grupo teve um bom rendimento no aprendizado em relação às unidades, aos diferentes tipos de linguagem e, principalmente, no que diz respeito ao movimento, campo de variação. A questão da operacionalidade continua se manifestando como dificuldade.

Esse grupo apresentou muitos erros nas questões 1 e 2, e quase nenhum erro na questão 3. O que mostra a compreensão da idéia de movimento representado nas sentenças abertas.

O quadro seguinte mostra a freqüência com que cada categoria de dificuldades aparece nas respostas dadas pelas alunas do grupo em questão.

Categorias de dificuldades	Ing	Jaq	Kam	Let
1) Tradução Literal	3	5	5	6
2) Variável	1	0	6	10
3) Operacionalidade	9	7	10	4
4) Unidade	0	0	0	0
5) Linguagem	3	0	0	0
6) Campo de variação	2	0	2	0
Branco	0	0	0	0
Total	18	12	23	20

Quadro 24: Quadro geral do grupo 3

O quadro acima mostra o comprometimento dos alunos desse grupo com o trabalho realizado, não foi deixada nenhuma questão em branco e os integrantes realizaram todas as atividades propostas. Além disso, não houve ocorrência de erros na categoria quatro – Unidade. E na categoria cinco Linguagem, apenas uma aluna utilizou a palavra "número" para representar o número desconhecido, deixando de utilizar a linguagem simbólica, mas, não podemos considerar esse caso como um "erro" propriamente dito, supomos que tenha ocorrido uma interpretação inadequada do enunciado o qual solicitava a tradução para a linguagem simbólica. A operacionalidade continua presente, tanto neste grupo quanto nos outros dois.

4. 3 – Considerações finais

A partir da análise, podemos perceber que as dificuldades apresentadas pelos alunos sujeitos da situação B de ensino são da mesma natureza que as apresentadas pelos alunos da situação A, ou seja, não apareceram novas categorias de dificuldades, na situação B em relação a A.

O número de erros dos alunos sujeitos da situação B, no entanto, é significativamente menor que o número de erros dos alunos sujeitos da situação A. Mesmo o grupo que classificamos de grau médio, comparativamente à ocorrência de dificuldades, apresenta uma ocorrência menor do que na situação A, na maioria das categorias. Os três grupos analisados, portanto, apresentam um grau de dificuldade menor em relação à totalidade da situação A, o que podemos exemplificar com as categorias 1) Tradução Literal, 2) Variável 4) Unidades, 5) Linguagem e 6) Campo de Variação que estão na Tabela 1 e revelam um desempenho melhor dos alunos da situação A, mesmo não tendo sido "treinados" para resolver a lista de exercícios.

A ocorrência de erros de operacionalidade foi igual em ambas as situações, apresentando uma porcentagem alta de 80,6%. Esta ocorrência indica que os alunos apresentam lacunas com relação aos conceitos aritméticos. E, diante deste fato, supõe-se que a aritmética tenha sido trabalhada de maneira mecânica, seguindo o modelo tradicional de ensino em ambas as situações, pois a compreensão significativa das operações e respectivas propriedades não parecem ter-se efetivado ao longo da escolaridade desses alunos. Booth (1995), Neves (1995) e Araújo (1999) também encontraram em seus trabalhos muitos alunos que apresentam dificuldades com a operacionalidade, principalmente ao traduzir expressões da linguagem retórica para a simbólica, que é o caso da atividade proposta.

Por outro lado, na situação B, percebemos que houve uma redução na ocorrência das dificuldades na tradução literal. Atribuímos este fato ao trabalho com os diferentes tipos de linguagem e com a compreensão da variável, bem como com expressões que variam com movimentos numéricos, ou seja, ao desenvolver os nexos conceituais, seguindo a proposta de Sousa (2004).

Na mesma situação, nenhum aluno apresentou dificuldade com a questão da unidade, ou seja, ela não foi considerada como uma variável e nem ignorada como ocorreu na situação A. As dificuldades apresentadas pelos alunos da situação A, demonstram que o conceito de unidade tem várias interpretações, assim como trabalhamos no Capítulo I, fazendo referência a Smith (1958) para esclarecer como este conceito foi construído ao longo da história e os motivos pelos quais os alunos apresentam tantas dificuldades com relação a ele. Segundo o autor, atribuir à unidade, exclusivamente, o significado do número *um* associado a uma coisa, a um objeto, a algo contado, pode impedir a compreensão de sua relativização a um valor variável. O tema Unidade não foi contemplado na apostila, mas foi trabalhado durante as correções das atividades e durante as aulas da situação B.

Acreditamos que a porcentagem de alunos que apresentaram erros com os tipos de linguagem foi maior na situação B porque os três tipos de linguagem (retórica, sincopada e simbólica) foram trabalhados em sala de aula, o que possibilitou aos alunos o uso delas, sem diferenciá-las, na resolução das atividades sem perceber que o exercício solicitava a tradução apenas para a linguagem simbólica, que foi pouco trabalhado em sala de aula.

A linguagem retórica, utilizada pelos alunos da situação B, constitui uma aproximação do que propõe Smith (1958) em relação ao uso de uma linguagem menos conveniente e que seja do entendimento do aluno. Já na situação A, as únicas linguagens enfocadas foram: a retórica na qual vinha enunciada a própria expressão numérica dada pela atividade e a simbólica, na qual era solicitada a resposta do aluno. Na 6ª série, é importante discutir a linguagem retórica para que o aluno perceba as confusões que essa linguagem pode proporcionar e, a partir disso, entender a importância da linguagem simbólica, que não gera dúvidas devido à sua forma precisa de se expressar. Um exemplo é a expressão "subtraído de", que já foi discutida anteriormente, que os livros didáticos não apresentam justamente para não gerar dúvidas entre professores e alunos, mas, que para o trabalho com o desenvolvimento das linguagens, é de fundamental importância que se discuta essas "ambigüidades" em sala de aula.

Os alunos da situação B apresentaram mais dificuldades em estabelecer limites para o campo de variação, embora tenham compreendido a idéia de movimento. Já os alunos da situação A apresentaram mais dificuldades para compreender a idéia de movimento presente nos enunciados das questões. Na situação A não foi trabalhada a questão de que a variável está relacionada a movimentos quantitativos (SOUSA, 2004), por isso a freqüência de erros é esperada. Pois não tendo trabalhado com essa idéia, os alunos entendem a álgebra como algo estático, sem relação com a vida, como regras que devem ser decoradas e aplicadas quando aparecem determinados problemas. A diferença que encontramos nas ocorrências de erro na categoria da variável e do movimento podem indicar que se o aluno não é orientado para a relação da álgebra com os movimentos quantitativos da vida e para a variável como uma representante de qualquer valor e, ao mesmo tempo, nenhum valor correspondente ao enunciado, ele não vai desenvolver espontaneamente esses significados algébricos.

Para que haja entendimento do modelo algébrico da realidade é preciso que o ensino oriente os alunos para os elementos constitutivos dessa realidade. O aluno não apresenta intuições espontâneas para desenvolver esse raciocínio.

As dificuldades referentes à variável, na maioria das vezes, ocorreram quando há alteração na variável, por exemplo, quando se trata da “soma de um número desconhecido com um conhecido” ou quando se trata do “antecessor de um número”. Como já foi dito anteriormente, Booth (1995) afirma que os alunos têm dificuldades em aceitar respostas algébricas e para estabelecer significados para as letras, isso se deve à introdução precoce do uso de letras em sala de aula, sem que o aluno compreenda a idéia de movimento e os diferentes tipos de linguagem.

Comparativamente, os sujeitos da situação B apresentam menos dificuldades e mais respostas corretas na maioria das categorias, apenas na categoria referente à operacionalidade, as freqüências são as mesmas. Atribuímos essas diferenças ao tipo de abordagem em cada situação. A situação B deu ênfase ao desenvolvimento da linguagem, ou seja, foi feito um trabalho gradativo com as diferentes linguagens, como é proposto por Smith (1968) e defendido por Klüsener (1999) e Lins e Gimenez (2005), e com o desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra, como é proposto por Sousa (2004). Faltou, porém, para esta situação, um trabalho que proporcionasse produção de significados às estruturas algébricas e a sua respectiva representatividade nas diferentes linguagens.

Como professora-pesquisadora, e com experiência nessas duas maneiras bem diferentes de trabalhar em sala de aula, posso dizer que o ensino de acordo com a segunda abordagem descrita foi muito gratificante por dois motivos principais: o primeiro, pelo envolvimento dos alunos nas aulas que pode ser visto pelas respostas dadas ao questionário que estão nos quadros seguintes e, o segundo, pelo rendimento que pode ser observado nas análises realizadas. Os alunos participam mais das aulas por se sentirem motivados, tanto pelo trabalho em grupo quanto pelo teor das atividades propostas. Todos se sentiam capazes de responder à maioria das questões, o que não acontecia no trabalho que privilegiava o modelo tradicional de ensino. Diferente da situação A, com base em treinamento de conceitos, na situação B os alunos mostraram envolvimento, com presença mais freqüente em aula e com participação ativa nas atividades propostas. O fator gratificante deveu-se, também, aos resultados obtidos superiores aos da situação A. Tal análise permitiu inferirmos que os alunos são cativados pela possibilidade de pensar nos resultados, de elaborar seus próprios conceitos e de poder discutir em grupo.

Acreditamos que o trabalho em sala de aula deve ter um enfoque histórico para chegar na simbologia matemática, mas, não podemos abrir mão totalmente do simbólico, os alunos precisam aprender o rigor matemático que os auxiliam na resolução de problemas e no estudo das funções.

No quadro seguinte, colocamos algumas respostas dadas pelos alunos frente ao questionamento do que sentiram com relação ao trabalho em grupo:

Questão	**Número de alunos**	**Exemplos de respostas**
O que você achou do trabalho em grupo? Fale um pouco sobre isso.	1	**Em branco**
	1	**Contra**: “Não gostei muito” (Math)
	1	**Insatisfatória**: “Legal, porque deu para conversar!” (Gab)
	64	**A favor**: “Achei ótima a experiência, pois podemos mostrar o que trabalhamos para a classe toda e não só para o professor. (Ing)” “Eu achei isso muito importante, ao mesmo tempo bem legal, nós aprendemos brincando, foi bem divertido.(Fran)” “Eu achei muito legal, saiu um pouco da rotina de lição na sala de aula.(Gle)” “Legal porque cada um deu sua opinião, e chegamos a uma conclusão. (Pa)” “Achei bom porque assim nós aprendemos melhor e rendemos mais.(Tha)” “Eu achei muito bom. Assim a gente pode ver as idéias e montar a resposta.(Jen)” “Achei legal, pois discutimos e assim assimilamos mais as coisas. (Guibe)” “Eu achei bom pois expomos nossas idéias. (Guini)” “Muito legal para todos. Pois o grupo todo aprendeu e todos conseguiram aprender a álgebra. (May)” “Eu achei mais criativo e melhor para discutir e concertar os erros dos outros. (Bia)” “Eu achei bem legal pois podemos abrir nossas dúvidas e conhecimentos de matemática. (Ped)” “Muito bom para o surgimento de idéias, respostas em debate. (Gui)” “Achei legal por poder compartilhar, debater e discutir idéias com os outros membros do grupo. (Lusan) ”

Quadro 25: Respostas dadas pelos alunos ao questionário.

As respostas dos alunos ficaram centradas no fato dessa dinâmica possibilitar uma interação entre os colegas de classe e a troca de idéias e experiências. Math respondeu que não gostou, porém, não argumentou o motivo. Pelo que pudemos observar durante as atividades da apostila, em grupo, comparativamente às atividades com o livro didático, quase sempre individuais, percebemos que os alunos se sentem mais seguros e estimulados a aprender quando precisam expor suas idéias para os colegas de classe. Percebemos que muitos deles se sentem envergonhados por não saber e buscam compreender as atividades para poder discuti-las.

A resposta da aluna Ing ("Achei ótima a experiência, pois podemos mostrar o que trabalhamos para a classe toda e não só para o professor.") mostra que ela se preocupava em aprender de fato e não apenas para satisfazer o professor. Essas falas reforçam o que Ferreira (2005) afirma sobre essa dinâmica relacional: que os alunos se sentem encorajados para buscar suas soluções e desenvolvem suas próprias definições e conceitos, além da troca de idéias e conhecimentos que é fundamental no processo da aprendizagem.

A partir da abordagem alternativa da situação B, pude perceber que desenvolver um ensino com abordagem tradicional é muito mais cansativo tanto para o professor, que fica repetindo várias vezes as mesmas explicações, quanto para o aluno que é obrigado a resolver inúmeros exercícios parecidos, utilizando o mesmo algoritmo sem a possibilidade de criar, sem poder discutir com os colegas. Nesses casos, o que acontece com a maioria das vezes, é que o aluno acaba se afastando da matemática e esta vai se tornando para ele cada vez mais difícil e desestimulante.

Trazemos aqui, alguns depoimentos dados pelos sujeitos da situação B ao comparar as aulas mecânicas que assim caracterizamos por usar o livro didático como suporte para informar o conceito, atribuir exercícios aplicativos deste e avaliar a reprodução desses com as aulas de abordagem alternativa em que desenvolvíamos o pensamento (nas quais utilizávamos o material que chamávamos de apostila):

Questão	**Número de alunos**	**Exemplos de respostas**
Compare as aulas nas quais usamos o livro com as aulas que usamos a apostila.	63	**A favor da apostila**: "Nas aulas em que usávamos o livro, geralmente víamos problemas, resolvíamos contas de mais, menos, divisão, multiplicação e expressões. Já quando começamos a utilizar a apostila, aprendemos a raciocinar, para saber os números desconhecidos e a resolver questões que não tinham uma determinada resposta." (Manes) "Com o livro estava um pouco ruim porque eu não estava entendendo nada! Agora com a apostila eu aprendi mais coisas bem interessantes. (Ana)" "Com o livro a professora tinha que ficar explicando várias vezes, com a apostila não. (Bár)" "É bem diferente: o livro explica mais fácil, a apostila tem que pensar bem. (May)" "Com o livro era mais complicado porque se tivéssemos dúvidas às vezes não conseguíamos tirar a dúvida, e com a apostila discutíamos sobre as dificuldades de cada um. (Tha)" "As aulas do livro eram mais cansativas, não tinham desafios (até mesmo porque a resposta estava no livro) tudo era igual. Aulas com a apostila eram mais interativas, havia movimentação de respostas, discussão com a professora e alunos e haviam obstáculos para os alunos." (Jaq)" "Nas aulas que usávamos o livro eram boas pois estávamos mais 'acostumados', mas a apostila foi ótima pois teve mais questões para resolver e aprendermos. (Ing)"
	3	**A favor do livro**: "Eu acho mais legal com o livro. Não é que eu não gostei com a apostila, aprendi várias coisas." (Let) "O livro era melhor." (Math) "Era mais fácil conseguir a nota e de entender." (Rai)
	1	**Nem contra, nem a favor**: "Não tem uma comparação a não ser a obvia: aprendemos coisas diferentes." (Pam)

Quadro 26: Respostas dadas pelos alunos ao questionário.

Analisando as falas, percebemos que os alunos, mesmo sem saber o que os teóricos como Neves (1995) e Lins, e Gimenez (2005) chamam de ensino tradicional, fazem uma comparação nesse sentido: dizendo que com o livro, "eram mais contas e com a apostila mais raciocínio, discussão". Muitos alunos reclamam das "contas que temos que fazer nas aulas de matemática". Esta reclamação certamente decorre da forma como são atribuídos a eles os exercícios do livro e, por conseguinte, da forma como os exercícios estão nele configurados.

Com a questão do Quadro 25, mais do que levantar a percepção dos alunos sobre a diferença do ensino com a apostila ou com o livro didático, pretendeu-se verificar a percepção dos alunos sobre a forma de abordar os conceitos e os exercícios num e noutro, mesmo por que, pode-se ter uma apostila de abordagem igual a do livro didático. No caso de nossa pesquisa a diferença entre a apostila e o livro didático ficou acentuada, pois a apostila tem uma abordagem bem diferente da do livro e ainda foi trabalhada segundo a dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe. A apostila, por si só, não faria muita diferença, mas como foi trabalhada com essa dinâmica, permitiu o desenvolvimento dos conceitos, o que não acontecia quando trabalhávamos com o livro didático, que se baseava principalmente na repetição de exercícios.

Questão	**Respostas**
Alguma coisa mudou na sua aprendizagem agora que terminamos o trabalho com a apostila? O que? Como você entende a Matemática agora?	"Aprendemos sobre os números que mudam constantemente. Entendo que a matemática pode ter números fixos e não fixos. (Rai)" "Aprendi que matemática não é só números, faz parte um pouco de tudo (Rafa)" "Eu fiquei mais inteligente, eu entendo a matéria melhor com a apostila. (Gle)" "Antes eu não aprendia matemática, eu decorava e não gostava dessa matéria. Agora entendo que para gostar dessa matéria é necessário estudar, agora eu gosto e entendo matemática. (He)" "Agora eu sei que nada é fixo. Entendo que tudo muda, é variável. (Ing)" "Eu aprendi muitas coisas que eu não sabia. Eu entendo agora da matemática que não são só números inteiros, são também números que nós não podemos dizer o resultado exato. (Leo)" "Por exemplo, podemos ter números desconhecidos e mesmo assim saber mais ou menos a resposta. Agora entendo matemática por uma matéria muito mais importante ainda, porque mesmo sem saber os números exatos podemos obter respostas. (Mari)" "Aprendi mais com a apostila, como o ahá que é um número desconhecido, entendo a matemática não só como números e contas mas também como escritas e linguagens.(Cai)" "Sim, mudou, pois agora aprendi uma coisa a mais, a álgebra. A matemática não é só conta e expressão, também é o que tiramos de uma frase, passando para a abreviação e números. (Pri)" "Sim, eu aprendi que uma coisa está sempre mudando. (Era)"

Quadro 27: Respostas dadas pelos alunos ao questionário.

Em todas as respostas pudemos perceber uma grande aceitação por parte dos alunos com relação à apostila. Todos disseram ter aprendido muitas coisas diferentes que não imaginavam existir na matemática como as incertezas, uma nova linguagem, a história dos egípcios, e que tudo muda, alguns até se sentiram “mais inteligentes”. Levando em consideração as conversas com os alunos e as respostas dadas ao questionário proposto, pudemos perceber que eles apresentavam certa rejeição quando se falava em estudar com livros didáticos, ao dizer que as aulas ficam monótonas, que têm que copiar os enunciados, que as atividades propostas pelo livro são cansativas. Já sobre as atividades propostas na apostila, afirmaram que a aula “passa mais rápido”, que as atividades são mais interessantes.

Questão	**Número de alunos**	**Exemplos de Respostas**
O que você entende por variável? E campo de variação?	6	**Respostas insatisfatórias**: “Nada.” (Lusan e Ped) “Números diferentes.” (Mat) “Variável: um número desconhecido.” (Mathg e Pam) “A sentença matemática.” (Lip e Gini)
	61	**Respostas satisfatórias**: “A variável é um número desconhecido, não tem idéia fixa, ou seja ela pode variar no resultado. O campo de variação é o que define a sentença matemática, ou seja os números que poderão estar mais próximos de determinada questão.” (Manes) “Variável é o que muda e campo de variação é a definição de que valores numéricos uma variável pode assumir numa dada sentença matemática.” (Helo) “É o símbolo que representa qualquer elemento do conjunto de seu campo de variação.” (Raph) “Variável é um número ou coisa que varia, muda. Campo de variação são as possibilidades da variação, as possibilidades do resultado.” (Pri) “Variável é o símbolo que representa qualquer elemento de um conjunto que pode ser finito ou infinito. Campo de variação é a definição dos valores numéricos.” (Cai) “É um número desconhecido que existe dentro de uma certa variação numérica; é a definição de valores numéricos.” (Ren) “Variável: variação, mudança. Campo de variação: possibilidades de variação de respostas.” (Thi)

Quadro 28: Respostas dadas pelos alunos ao questionário.

Apenas 6 alunos dos 67 deram uma resposta considerada insatisfatória. Foram selecionadas as respostas representativas, todas as outras não abordaram nada diferente. A partir das respostas, acreditamos que está muito claro, para os alunos, que a variável é definida a partir de um campo de variação que define, por sua vez, as possibilidades críveis dela assumir. Entenderam a definição que Caraça (1958) propõe: de que a variável é definida por um campo de variação e que representa todos os elementos do conjunto, sem coincidir com nenhum deles.

Com base nas observações feitas em sala de aula e a partir da análise das respostas dadas às questões da apostila e ao questionário, verificamos que na abordagem alternativa, os alunos mostravam-se desafiados a criar, inventar, discutir, expor suas idéias, mostravam um envolvimento surpreendente e os alunos que, anteriormente a esta proposta ou ao desenvolvimento da situação B de ensino se mostravam indisciplinados e com baixo rendimento, passaram a se interessar e se envolver e, como eles mesmos afirmam, porque se sentiam capazes de discutir e responder às questões, além de poderem mostrar para o grupo que possuem suas próprias idéias.

Conjeturamos que as atividades permitiram o desenvolvimento de concepções e verdades que trouxeram para a sala de aula as relações dos alunos com suas realidades, possibilitaram, ainda, o desenvolvimento de novos conhecimentos a partir das dúvidas e discussões.

A partir das análises realizadas neste trabalho, podemos inferir que em ambas as abordagens, da situação A e da situação B a aritmética foi desenvolvida segundo o modelo tradicional, com ênfase na repetição de exercícios, por isso, essa categoria teve uma ocorrência bastante significativa em ambas as situações.

Na situação B houve melhora significativa com relação à idéia de Movimento, Variável e Campo de Variação, ao conceito de Unidade, isso se deve a dois fatores principais: a apostila que se configurou num material diferenciado do livro didático, utilizado até o momento da introdução da álgebra na situação B, e à dinâmica relacional que permitiu a participação dos alunos no desenvolvimento dos conceitos e a socialização das idéias de cada aluno. Gostaríamos de esclarecer que a linguagem simbólica proposta na apostila pouco se diferencia do que vem sendo apresentado na maioria dos livros didáticos. O que muda é a dinâmica, onde os alunos têm a oportunidade de refletirem sobre o que estão aprendendo. A linguagem simbólica causa muita dúvida, principalmente para os alunos que estão presos à aritmética, exemplo disso, é que está exposto nos quadros 17 e 23 (“Um número par”, “A multiplicação de um número par por cinco”, “O antecessor de um número”, “O dobro do consecutivo de um número”).

Deixamos aqui uma prescrição para os professores de matemática: Precisamos quebrar o estigma de que ensinar e aprender matemática é uma tarefa árdua e privilégio de poucos. No desenvolvimento desta pesquisa e durante as análises dos resultados, percebemos que os alunos se envolvem quando se sentem capazes e valorizados ao desenvolver as atividades e é isso que deixamos como mensagem deste trabalho: devemos pensar em nossos alunos ao preparar aulas e deixar o caminho aberto para a discussão, criação e elaboração.

A partir desta pesquisa consideramos que ainda podemos preparar uma abordagem semelhante à da situação B para trabalhar a aritmética nas séries anteriores à 6ª série, a fim de que a Operacionalidade na álgebra seja mais bem compreendida e conseqüentemente as dificuldades com esse tema sejam reduzidas ainda mais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, E. A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação á Matemática e a escolha profissional**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. UNICAMP/SP, Campinas.

ARAUJO, E. A. **Contextualização do ensino da álgebra e formação de professores**. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr12c.doc>. Acesso em: 24 de maio 2007.

AZARQUIEL, G. **Ideas y actividades para ensenar álgebra**. Caderno 33 da Colleción Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, 1993.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra.** São Paulo, Atual Editora, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática**, São Paulo, Edgar Blucher, 1968.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Portugal - Gradiva, 1975.

CARRASCO, L. H. **Leitura e escrita na matemática.** In: NEVES, I.; Souza, J.; SCHÄFFER, N.; GUEDES, P; KLÜSENER, R.(Orgs.). **Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas**. 2ª edição. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1999, p.190 - 202.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A.P. **As idéias da álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995.

DANTZIG, T. **Número, A linguagem da Ciência**. Rio de Janeiro: Zahar. 1970.

DAVIDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Havana, 2ª. Reimpresión, 1982.

DAVIDOV, V.V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico**. Editorial Progreso, Moscu, 1988.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas/SP, Editora da Unicamp, 2ª. edição 2004.

FERREIRA, E. M.. **Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação. UNICAMP/SP, Campinas.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L.; CRISTÓVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**.

Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 24 de maio 2007.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos**. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

IFRAH, G. - **Os números**: a história de uma grande invenção. São Paulo/SP: 9ª. Edição, Editora Globo, 1998.

KIERAN, C. **A aprendizagem e o ensino de álgebra escolar.** In: **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Universitè du Québéc à Montréal, 1992.

KLÜSENER, R. Ler e compreender a matemática ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, I.; Souza, J.; SCHÄFFER, N.; GUEDES, P; KLÜSENER, R. (Orgs.). **Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas**. 2ª edição. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1999, p.175-189.

LANNER DE MOURA, A. R., SCARLASSARI, N. T. **Dificuldades de alunos do ensino fundamental, em álgebra e suas possíveis origens**. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP. Relatório final de atividades relativo ao projeto de iniciação científica - CNPQ, 2001.

LANNER DE MOURA, A.R. et al. **O conceito de variação como um dos fundamentos da álgebra elementar** in Coletânea de trabalhos do PRAPEM - VII ENEM. CEMPEM/PRAPEM, Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, p. 98-106, 2001.

LANNER DE MOURA, A.R. **Movimento Conceitual em sala de aula** CD1, CD2 e CD3 GESTORES - Curso de Especialização em Gestão educacional Governo do Estado de São Paulo/Faculdade de Educação/Unicamp. Produzido por Kitmais, 2005.

LAUAND, J. **Ciência e *Weltanschauung* - a Álgebra como Ciência Árabe**. Originalmente, conferência proferida em 14-4-98 na Universidad Autónoma de Madrid - Depto. de Estudios Árabes e Islâmicos. Disponível em <http://www.hottopos.com.br/notand5/algeb.htm>. Acesso em: 24 de maio 2007.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, L. e MOISÉS, R. Péricles. **A variável**: escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1. São Paulo/SP: CEVEC/CIARTE, 1993.

LIMA, L. et al. **Equações**: o movimento se particulariza. São Paulo/SP: CEVEC-CIARTE, 1998a.

LIMA, L. **Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica**. In Programa Integrar. Caderno do professor. São Paulo, CUT, 1998b.

LIMA, L. (Org.). **Currículo: Mecanismo e personalidade na aprendizagem da matemática.** São Paulo: Gestão, Currículo e Cultura, 2006.

LINS, R. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas/SP, Paiprus, 5ª. Edição, 2005.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. **Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas**. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 144 – 154.

MAZA, C. **Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales**. Sevilla: Ediciónes Paidós, 1993.

MALINOWSKI, B. **O problema do significado em linguagens primitivas**, IN Ogden e Richards. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

MIGUEL, A. e FIORENTINI, D. e MIORIM, M.A. - **Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?** Pro-posições, vol. 3 no. 1 [7] , março de 1992.

MIORIM, M. A. e MIGUEL, A. e FIORENTINI, D. - **Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro**. Revista Zetetiké, ano I - no. 1, CEMPEM - Faculdade de Educação - UNICAMP, 1993.

MOREIRA, P.; DAVID, M. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Mimio, 2005.

NEVES, P. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra.** 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – USP, São Paulo.

PÉREZ, J. A. **Ideas geométricas en álgebra elemental** in Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 8, no. 3, p. 72-84, diciembre 1996.

PINTO, R. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras da 7ª série em aula**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNICAMP, Campinas.

SCHOEN, H. Ensinar álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 135 – 143.

SMITH, D.E. **History of mathematics**. Vol I, New York, Dover, 1958.

SMOLKA, A. L. B. Sobre significação e sentido: uma contribuição à proposta da rede de significações. In: ROSSETTI-FERREIRA, M. C. e outros (Orgs.). **Rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SOUSA, M. C. **A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da Delegacia de Ensino de Itu, do Movimento Matemática Moderna e de sua influência no currículo atual**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP/SP, Campinas.

SOUSA, M. C. **O ENSINO DE ÁLGEBRA NUMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental**. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP/SP, Campinas.

SOUZA, E. R. e DINIZ, M. I. S. - **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. IME - USP, São Paulo, 2ª. edição, 1996.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur; SHULTE, Alberto (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9 – 22.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente**. 6ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

VYGOTSKY, L. **Pensamento e linguagem**. 3ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A.. **Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio**. Zetetikè, Campinas, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, 2000.

ANEXOS

Anexo I – Apostila

1º) Atividades dos movimentos numéricos:

- idéia de variável – variável palavra e variável letra
- campo numérico
- linguagem sincopada

OBJETIVOS:

- Desenvolver a idéia de movimento, romper com a metafísica
- Desenvolver o conceito de variável e de campo numérico
- Trabalhar com a linguagem sincopada através das abreviações propostas pelos alunos

1- OBJETIVO: romper com o mundo estático, com a idéia da metafísica. (p. 7)
Responda às questões abaixo:

a) Quantas pessoas estão em sua casa agora?
b) Você é o mesmo de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? De um segundo atrás? Por quê?
c) O mundo é o mesmo enquanto eu falo a palavra "mundo"? Por quê?
d) O prédio da escola permanece o mesmo depois que eu vou embora para a casa? Por quê?
e) Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra. É a mesma? Por quê?

2- OBJETIVO: desenvolver a idéia de fluência, continuidade. (p. 10)
Debata e interprete as seguintes idéias de Heráclito:

a) "O fogo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água."
b) "Tu não podes descer duas vezes o mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti."
c) "As coisas, ao mesmo tempo, são e não são elas próprias; nós somos e não somos."

3- OBJETIVO: Identificar expressões que representam movimentos e expressões que representam um número manual (p. 22)
Indique quais das frases abaixo representam movimentos numéricos e quais não:

a) Viajaram no meu carro cinco pessoas.
b) Alguns alunos chegaram atrasados.
c) Metade dos eleitores votou nulo.
d) A população de São Paulo é muito numerosa.
e) Naquele ônibus cabem dois times completos de futebol.
f) Remilton tem trinta e quatro anos.
g) Aparecida tem a metade da idade de sua mãe.
h) São dezesseis horas.

4- OBJETIVO: Iniciar a idéia de movimento presente nas expressões. (p. 24)
Responda às questões:

a) Qual a sua idade?

b) Quantas pessoas podem ser transportadas num Fusca?
c) Quantas pessoas estão em sua casa agora?
d) Quantos alunos possui a sua classe?
e) Que horas são?
f) Qual o preço de um pãozinho?
g) Quantos são os jogadores de um time de futebol?

Variação e número

FLUÊNCIA: “As coisas, ao mesmo tempo, são e não são elas próprias.”

A variação quantitativa é tão universal, tão generalizada, que temos dificuldade de expressá-lo utilizando os números. Daí as respostas erradas que formulamos no exercício anterior. Ao trabalharmos a variação quantitativa com o "número manual", criamos o "número falso". Isto porque, ao atribuirmos um "número manual", e portanto fixo, a uma quantidade em variação permanente, certamente este número não corresponde mais àquela quantidade.

NÚMERO FALSO é o "*número manual*" errônea e inevitavelmente atribuído a uma quantidade em variação.

Como escrever numericamente uma quantidade que é e não é ela mesma? Certamente não é utilizando o "número manual" comprometido com quantidades fixas, imutáveis.

Como escrever o número desconhecido?

Estamos há quatro mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó Ramsés II. na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60 senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papéis e pensou:

"Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito 60 pedras que podem ser usadas nesta coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Desta forma não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém, eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Este é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isto de uma forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?"

Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides:

Como representar, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?

5- OBJETIVO: Criação da variável palavra.
Os grupos vão tentar solucionar este problema do arquiteto; todos os alunos devem procurar considerar-se arquitetos de Ramsés II:
a) Vamos debater o problema levantando todos os seus aspectos;
b) Cada aluno pensará sozinho, buscando a sua solução pessoa;
c) Após um pequeno intervalo de tempo, suficiente para que cada aluno apresente sua solução, o grupo abrirá debate, analisando cada resposta, vendo os seus acertos e seus erros, criando, assim, a resposta do grupo.
d) Com cada grupo com a sua resposta, abrir-se-á o painel de todos os grupos com cada um apresentando a sua solução que será debatida pela classe que elaborará, assim, a sua resposta para a questão.

6- PESQUISA sobre os hábitos e a vida dos egípcios
- estilo de vida
- roupas
- governo
- medicina
- política
- religião
- que tipo de registros usavam?

CONTAR a história dos escribas egípcios, p. 28.

AHÁ, que significa monte, pilha ou montão, era a palavra utilizada pelos egípcios para escrever **um número** desconhecido; podemos utilizar, portanto, as palavras **um número** que teriam o mesmo papel do **ahá** egípcio na sentença matemática.

LINGUAGEM MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS PALAVRAS é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos matemáticos.

7- OBJETIVO: Criação da linguagem matemática.(p. 31)

Escreva, para os movimentos matemáticos abaixo relacionados, a palavra ou símbolo que melhor os expressam matematicamente:

a) Adição
b) Variável
c) Multiplicação
d) Divisão
e) Potenciação
f) Subtração

8- OBJETIVO: Criação da linguagem matemática.(p. 31)
Abaixo nós temos cinco colunas. Nelas você vai ligar por um risco aquelas que indicam o mesmo movimento e entre elas vai sublinhar aquela que faria parte do vocabulário matemático, isto é, que mais se enquadraria nos critérios da linguagem matemática através das palavras:

adicionado	antecessor	multiplicado	dividido	incógnita
menos	produto	acrescido	ahá	uma parte
um monte	sucessor	quociente	vezes	subtraído
elevado	um número	diminuído	potência	mais

A Sentença Matemática

Uma frase escrita desta forma, com palavras do matematiquês, constitui uma Sentença Matemática.
Assim como a linguagem das palavras se expressa através de sentenças, a linguagem matemática também se expressa através de sentenças matemáticas.

SENTENÇA MATEMÁTICA é a expressão, em linguagem matemática, de um movimento.

9- OBJETIVO: Identificar sentenças matemáticas.
Indique se as sentenças abaixo estão na linguagem usual ou se constituem sentenças matemáticas em palavras:
a) Maria tem o triplo da idade de João.
b) Seis mais nove.
c) A idade de Rosana mais seis anos.
d) o triplo de um número.
e) A metade de oito.
f) O dobro do dinheiro que tenho.
g) Três vezes um número.

O Campo de Variação

Quando falamos uma sentença, por exemplo - *Cecília está sentada lá*. - geralmente a pessoa com quem conversamos sabe a que Cecília estamos nos referindo, de que local estamos falando e, assim entende a sentença. Há, portanto, um contexto para o qual a sentença é válida.

Assim como a *variável*, Cecília tem o seu contexto, a variável-palavra **um número** também tem o seu contexto, no caso, o seu **campo de variação**.

CAMPO DE VARIAÇÃO ou **CONJUNTO-UNIVERSO** de uma variação é a definição de que valores numéricos uma variável pode assumir numa dada sentença numérica.

Definimos um Campo de Variação de uma sentença numérica a partir da situação real que ela expressa. E o fazemos tanto determinando os seus dois limites (máximo e mínimo) quanto o número (se é natural, inteiro, racional ou real) que responde à situação.

Desta forma na sentença: *A idade de Arnaldo há seis anos atrás*.

- o campo de variação teria como limite mínimo 6 anos, pois menos que isto não teria sentido pensar a idade de Arnaldo há seis anos atrás.
- teria como limite máximo, a idade mais alta que uma pessoa poderia viver que, digamos seria 100 anos.
- e o número que contaria o movimento seria o número natural pois as idades das pessoas são contadas em números inteiros positivos. Desta forma o ***campo de variação*** assim ficaria definido:

é um número que pertence ao conjunto dos números naturais tal que é maior ou igual a 6 e menor ou igual a 100.

Os matemáticos convencionaram que quando uma sentença se refere a um número abstrato, o campo de variação a ser pensado será o mais amplo possível, no caso o conjunto dos números reais.

10- OBJETIVO: Discutir campo de variação.

Vamos discutir os campos de variação das sentenças abaixo, indicando os seus limites máximo, mínimo e o número que responde à situação numérica dada:

a) A idade de Marcos daqui a sete anos.
b) A idade de Ângela há 12 anos atrás.
c) O dobro do dinheiro que trago no bolso.
d) Será que o elevador está com excesso de pessoas ou com um número de pessoas abaixo do seu limite?
e) A altura de Daniel.

O Número Desconhecido

Em todos os movimentos de variação quantitativa ocorre o que chamamos de *número desconhecido*. Apontá-lo em seu campo de variação é escrevê-lo mesmo em palavras, na combinação com outros números conhecidos. Esta atividade é fundamental para a formação do pensamento matemático. É o que vamos fazer no exercício seguinte.

APONTAR UM NÚMERO DESCONHECIDO num movimento de variação quantitativa é escrevê-lo na sua expressão com os números conhecidos indicando o seu universo de variação.

Ao representarmos um determinado movimento real através de uma sentença matemática devemos escolher com cuidado qual será o número desconhecido. Este deve ser escolhido de forma que todos os dados numéricos possíveis sejam retirados da situação e expressos na sentença.

Assim na sentença: *A idade de Arnaldo seis anos atrás.*, não basta dizer que o número desconhecido é a idade de Arnaldo; é preciso indicar se se trata da idade atual ou da idade há seis anos atrás.

Se a idade escolhida for à de seis anos atrás, perder-se-á o dado numérico 6 anos, que ficará *embutido* no número desconhecido.

Já escolhendo a idade atual como número desconhecido, o dado numérico 6 precisará ser registrado na sentença matemática subtraído da idade atual. Desta forma é a escolha da idade atual como número desconhecido que propicia a maior presença de dados numéricos na sentença.

11- OBJETIVO: Identificar o número desconhecido.p. 34

Segue, abaixo, uma série de movimentos de variação quantitativa nos quais você procurará apontar o número desconhecido:

a) A idade de Maria do Carmo encontra-se acrescentada de cinco anos na sua carteira de identidade.
b) Edivaldo está com o triplo de dinheiro que tinha ao sair de manhã.
c) Aparecida gastou 300 reais do salário que recebeu.
d) Luiz tem a metade dos livros que tem Reginaldo.
e) A idade de Mário é par.
f) Já a idade de Arnaldo é ímpar.
g) A idade de Mirian daqui sete anos.
h) A idade de Remilton há seis anos atrás.
i) O andar em que Cecília mora é consecutivo ao de Solange.
j) O andar em que João mora é antecessor ao de Fernando.
k) O triplo da idade de Cleusa acrescido de 5 anos.
l) A metade do dinheiro de Daniel da qual se retira 100 reais.
m) O total das patas de cavalo de uma fazenda.

A variável

Ao escrevermos a representação de um número desconhecido o fazemos observando dois movimentos:

- trata-se de um número determinado;
- contudo este número pode ser qualquer um dentro de uma variação quantitativa.

Isto é, trata-se de um número desconhecido que existe dentro de uma certa variação numérica. Chamamos esta idéia de **variável**:

"Seja dado um conjunto qualquer de números, conjunto infinito ou finito, e convencionamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, a este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto, chamamos **variável**."

Desta forma ao trabalharmos com a idéia de variável, necessariamente devemos elaborar:
- o seu campo de variação; "*um conjunto qualquer de números, infinito ou finito*."
- o número desconhecido - "*representativo de qualquer dos elementos do conjunto*" - expresso num símbolo qualquer.

No caso dos egípcios que estamos estudando, o símbolo utilizado é a palavra **ahá**, que significa monte, pilha, etc.é o que chamamos de **variável-palavra**.

VARIÁVEL-PALAVRA é a utilização da palavra para representação da variável.

Escrevemos uma sentença matemática através da variável quando expressamos o número desconhecido através da representação da variável (no caso, variável-palavra) e o seu universo de variação.

11- OBJETIVO: Linguagem sincopada. p. 36

Passe para a linguagem matemática através de palavras utilizando a variável-palavra e a variável egípcia, preenchendo a tabela:

Sentença	Linguagem matemática	Variável egípcia (ahá)
a) Um número acrescido de 7.		
b) O quádruplo de um número.		
c) A terça parte de um número.		
d) Um número diminuído de 4.		
e) 6 subtraído de um número.		
f) A quinta parte de um número acrescida de um.		
g) 4 subtraído do quíntuplo de um número.		
h) Carêncio andou hoje cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias.		
i) Natalício dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.		
j) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3.		
k) Hoje o doutor Ahmon atendeu o triplo de pacientes do dia anterior.		
l) A chuva de ontem derrubou o dobro das árvores que caíram no domingo.		
m) Um número par.		
n) A multiplicação de um número par por cinco.		
o) O antecessor de um número.		
p) A metade do antecessor de um número.		
q) Os três sétimos do antecessor de um número.		

12- OBJETIVO**: Criação da Variável-Letra** p.93

"Vamos nos imaginar em pleno Renascimento. Vamos nos dividir em grupos de matemáticos que trabalhavam no comércio da época. O comerciante de móveis e tapetes para o qual trabalham estes matemáticos, explicou-lhes que quer aumentar o seu estoque de mercadorias em cinco unidades para todos os tipos. Assim cadeiras, mesas, armários, tapetes, independente da quantidade inicial de cada, devem ser aumentadas em cinco unidades. Os grupos-matemáticos têm, assim, um problema:

Como escrever numericamente o pedido do comerciante?

1- Os grupos, agora, vão inventar uma variável que seja mais próxima possível do numeral, para escrever a sentença do comerciante. Vão inventar, portanto, uma forma de numeralizar a variável. Mãos à obra, pessoal!!

2- Após cada grupo criar a sua variável-numeral, abrir o painel onde cada grupo apresenta sua criação.

3- Feito o painel, abrir-se-á o debate na classe para a escolha da criação que melhor expresse a numeralização da variável.

1- Represente utilizando a variável escolhida:

a) A minha idade daqui a 7 anos.
b) O antecessor do dinheiro que tenho no bolso.
c) O par sucesso do dobro da minha idade.
d) O triplo da idade que Eugênio tinha há três anos.
e) O quadrado da altura de Luiz.

13- OBJETIVO: Criação do símbolo numérico não-numeral

Diofante, o Pioneiro

A visão de mundo metafísico, que pregava a permanência de tudo, nasceu de uma sociedade escravocrata, parada, sem transformações e durou cerca de mil anos, sendo superada apenas no Renascimento. Contudo teve um grego que no tempo da metafísica furou o gelo da permanência. Foi Diofante que viveu no período de 409/325 antes da nossa era.

Ao contrario do pensamento dominante, Diofante concebia número como elemento fundamental do pensamento matemático, e não como coisa de escravo. Inspirado por esta idéia ele buscou a representar a variável do modo que mais se aproximasse do numeral. Ora, o símbolo que mais se parece com o numeral é a ***letra***! Esta conclusão era fácil para um matemático grego porque os gregos utilizavam o alfabeto como escrita numeral.

A letra escolhida por Diofante para representar a variável foi a última da palavra número que em grego escreve-se *arithmos*: S. Observe que até na escolha da letra Diofante queria estar próximo do número.

Estava, assim, criada a variável-letra, inspirada na idéia numérica.

VARIÁVEL-LETRA é a forma moderna de representar a variação ou fluência através de uma letra do alfabeto.

Represente utilizando a linguagem criada por Diofante:

a) Um número.
b) Um número acrescido de quatro.
c) O triplo de um número.
d) Três subtraído do quádruplo de um número.
e) O cubo de um número somado com o seu quadrado.
f) O triplo de um número subtraído do quadrado de um número.
g) O sucessor do cubo de um número.

Libertando o pensamento matemático das palavras.

A partir do século XVI, com o incrível desenvolvimento do comércio, no período da história conhecido como Renascimento, a linguagem matemática, junto com todo o pensamento matemático, sofre um incrível desenvolvimento. E é neste avanço que vemos se formar a linguagem matemática moderna, que é conhecida como **linguagem matemática simbólica**, onde pela primeira vez, a matemática se liberta totalmente das palavras, adquirindo símbolos próprios. Temos, assim, uma linguagem matemática voltada especialmente para a expressão e representação do pensamento matemático.

Os séculos XVI, XVII, XVIII e XIX são marcados por uma intensa e rica criação de símbolos para a elaboração de sentenças matemáticas. Isto aconteceria porque a ciência sentia grande necessidade da linguagem. Estes são os ***símbolos numéricos não numerais***, isto é, símbolos, que não são numerais, que expressam movimentos numéricos.

14- OBJETIVO: Escrever equações em linguagem simbólica a partir da linguagem retórica.

Passe para a linguagem matemática simbólica os movimentos abaixo:

a) A idade de Roberto daqui a seis anos será 50 anos.
b) O dobro da quantidade de balas que tenho equivale a duas dúzias.
c) O dinheiro que Dona Lucia tem é igual à quinta parte de 60.
d) Genésio precisa cortar um sarrafo em três pedaços de forma que o segundo seja o dobro do primeiro e o terceiro tenha 20 centímetros a mais que o segundo; escreva o comprimento do sarrafo.
e) Escreva a soma de três números consecutivos.
f) Escreva a soma de três números consecutivos pares.
g) Escreva a soma de três números consecutivos ímpares.
h) Eu vou subtrair o dobro da minha altura do triplo do quadrado da mesma.
i) Duas vezes um número, menos 1.
j) Duas vezes a subtração de um número menos 1.

15- OBJETIVO: Representar o campo de variação utilizando a linguagem simbólica.

Represente utilizando a linguagem matemática simbólica os seguintes campos de variação:

a) Um número pertence ao conjunto dos números naturais tal que é maior que 5 e menor ou igual a 9.
b) Um número pertence ao conjunto dos números inteiros tal que é maior ou igual a -7 e menor que 2.

c) Um número pertence ao conjunto dos números racionais tal que é maior que -1 e menor ou igual a 3.
d) Um número pertence ao conjunto dos números reais tal que é maior ou igual a 2 e menor ou igual a 8.

16- OBJETIVO: Identificar o campo de variação de cada sentença. p. 51
Represente os conjuntos universo dos movimentos abaixo:

a) A idade de uma criança que estuda na pré-escola.
b) A idade de vovô.
c) A profundidade , medida com fita métrica, de um buraco cavado na praia de Santos por uma criança.
d) A altura da areia que a criança do exercício anterior acumulou fazendo o buraco.
e) As ovelhas que não voltaram do pasto ou que apareceram de outros rebanhos.

Anexo II – Lista

2º) Lista de exercícios que solicitamos dos alunos nos plantões

1- Passe para a LINGUAGEM MATEMÁTICA:

a) Um número acrescido de sete unidades.
b) O quádruplo de um número.
c) Um número diminuído de 4 unidades.
d) 6 subtraído de um número.
e) A Quinta parte de um número acrescida de uma unidade.
f) 4 subtraído do quíntuplo de um número.

2- Escreva os **MOVIMENTOS** abaixo utilizando SENTENÇAS MATEMÁTICAS:

a) Ana Lúcia andou, hoje, cinco quilômetros a mais do que anda todos os dias.
b) Sebastião dançou 8 subtraído do triplo de músicas que Severino dançou.
c) Rute cantou a metade da soma das canções do coral com 9.
d) A idade de Roberto é o sêxtuplo da idade de Marcos acrescido de 3 anos.
e) Um número par.
f) A multiplicação de um número par por cinco.
g) O antecessor de um número.
h) A metade do antecessor de um número.
i) O dobro do consecutivo de um número.
j) Três quintos do antecessor de um número.
k) A quinta parte do sucessor de um número.
l) Quatro sétimos do antecessor de um número.

3- Dê o CONJUNTO UNIVERSO ou CAMPO DE VARIAÇÃO para os seguintes movimentos:

a) A idade de uma criança.
b) A idade de um velhinho.
c) O número de grãos de areia que posso pegar da terra.
d) O número de pessoas que viajam num carro.
e) A velocidade de um carro na rodovia dos Bandeirantes.
f) O dinheiro que trago no bolso.
g) A altura de Wagner.
h) Os dedos de um animal.
i) A temperatura em Campinas.

Anexo III – Questionário

1- Como você entendia a Matemática antes de começarmos a trabalhar com a apostila?
2- Alguma coisa mudou na sua aprendizagem agora que terminamos o trabalho com a apostila? O que? Como você entende a Matemática agora?
3- O que você entende por álgebra?
4- O que você entende por variável? E campo de variação?
5- O que você achou do trabalho em grupo? Fale um pouco sobre isso.
6- Compare as aulas em que usávamos o livro com as aulas em que usamos a apostila.
7- Faça uma auto-avaliação escrevendo sobre sua participação nas aulas e sobre o seu aprendizado nesse último bimestre.