

ANNA REGINA LANNER DE MOURA

A MEDIDA E A CRIANÇA PRÉ-ESCOLAR

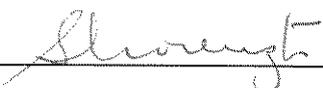
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
CAMPINAS - 1995

Tese apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO na Área de Concentração de *Metodologia de Ensino* à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. *Sérgio Aparecido Lorenzato*.

Este exemplar corresponde a redação final da Tese defendida por *Anna Regina Lanner de Moura* e aprovada pela Comissão Julgadora em _____

23 de fevereiro de 1995

Data: 23/02/95

Assinatura: 

Comissão Julgadora:

Maria

Estefânia

Alcides

Quintana

Flávio

Oferecimentos

Ao Otávio, Marcos, Marina e Ori que (con)viveram comigo no cotidiano deste trabalho.

A meus pais e irmãos que sempre me apoiaram.

Às crianças da creche central da USP que me concederam a oportunidade de aprender como elas aprendem.

ERRATA

Houve um erro técnico na impressão final dos textos, ficou suprimido o a craseado das páginas: 5 à 42; 53 à 67; 80 à 106. Assim, nas páginas indicadas, leia-se àquela e àquelas em lugar de quela e quelas; às em lugar de s; à em lugar de espaço para uma letra;

Página 2, 3º parágrafo, 3ª linha leia-se têm centrado em lugar de tem centrado;

Página 7, 1º parágrafo, 1ª linha leia-se à criança em lugar de a criança;

Página 9, 2º parágrafo, 3ª linha leia-se geneticamente preestabelecido em lugar de um preestabelecido geneticamente preestabelecido;

Página 22, 4º parágrafo, 5ª linha leia-se tanto mais estará ampliando em lugar de mais está ampliando;

Página 22, 4º parágrafo, 7ª linha leia-se permite à criança em lugar de permiti criança;

Página 29, 2º parágrafo, 11ª linha leia-se em que os significados culturais em lugar de os significados culturais;

Página 34, 3ª linha leia-se destacamos em lugar de destacamo, e 4ª linha, conceito de medida em lugar de conceitos medida;

Página 43, 1º parágrafo, 5ª linha leia-se a novas situações em lugar de à novas situações;

Página 45, 2º parágrafo, 1ª linha leia-se A comissão de estudos em lugar de comissão de estudos;

Página 50, 2ª linha leia-se imaginarmos em lugar de imaginar-se;

Página 76, 2º parágrafo, 2ª linha leia-se educacional e matemático em lugar de educacional e matemática;

Página 151, 3º parágrafo, 2ª linha leia-se significados evidenciados em lugar de significados evidenciadas;

Página 164, 4ª coluna após a última linha acrescenta-se a expressão uma unidade inteira;

Páginas 182 e 185, respectivamente 2º e 1º parágrafo, e 2ª e 3ª linha leia-se expectativa em lugar de espectativa.

Página 198, 1º parágrafo, 5ª linha leia-se propiciar à criança em lugar de propiciar a criança;

Página 207, 3ª linha leia-se FAZENDA em lugar de AZENDA.

Agradecimentos

A todos aqueles que contribuíram para que eu pudesse experimentar as hesitações e as alegrias na construção deste saber coletivo.

Ao Prof. Dr. Sergio Lorenzato por ter acompanhado e incentivado este trabalho e por acreditar que a construção do conhecimento se dá também nas dúvidas e convicções do fazer escolar.

Ao Ori, companheiro sabiamente vigilante, por acreditar na possibilidade deste trabalho, e pela ajuda sobretudo no momento final da tese.

Aos colegas da Oficina Pedagógica de Matemática com quem tivemos a oportunidade de discutir e ampliar o alcance deste trabalho para a Educação Infantil.

À Coordenação e às professoras da creche central da USP com quem dividimos as dúvidas e as certezas de cada momento de elaboração e apreensão dos significados advindos das interações da pesquisa com o cotidiano da sala de aula.

Aos Profs. Drs. Ubiratan, Pino e Antonio Miguel, que me orientaram e mostram novos rumos na leitura e organização desta pesquisa por ocasião do exame de qualificação.

A Profa. Dra. Elza e à Marta pelas sugestões e leitura de trechos deste trabalho.

Aos que de alguma forma colaboraram para que fosse possível a elaboração e sistematização deste trabalho e que por sua ação solidária tornam evidente o caráter social da produção de conhecimento.

Ao Prof. Dr. Nilson, à Vera e Márcia, ao Antonio José Lopes por terem-me alcançado bibliografias pertinentes;

à Profa. Dra. Mary Julia e à Bel por terem auxiliado em traduções de citações e do resumo.

À Maria José por ter conseguido a câmara videográfica para o registro dos dados e por ter sido prestativa nas necessidades eventuais;

Ao Aurélio pelo auxílio nas correções dos textos;

À Tania por prestar sua valiosa ajuda nos afazeres de casa;

Às bibliotecárias da FEUSP, em especial à Lina, pela disponibilidade em auxiliar na pesquisa bibliográfica;

À Márcia por ter auxiliado na formatação dos textos;

Resumo

Este trabalho estuda as ações de medir de crianças pré-escolares, em situações interativas de ensino, em que são submetidas a situações-problema que envolvem a necessidade de medir o espaço unidimensional. A metodologia fundamenta-se numa perspectiva etnográfica com enfoque participativo. O estudo se baseia numa análise interpretativa das noções que são manifestas em episódios de ensino, transcritos de registros videográficos das atividades de ensino e pesquisa.

Para a elaboração das atividades considerou-se a gênese da medida unidimensional e para a análise interpretativa, aspectos matemáticos e aspectos educacionais com enfoque na teoria sócio-histórica.

Da análise dos episódios, ficou evidenciado como as crianças elaboram os três aspectos que, constituem a idéia matemática da medida: a seleção da unidade de medida, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida, e a expressão numérica da comparação. Foram levantadas, também, conjecturas sobre possíveis contribuições de elementos educacionais e de elementos emergentes da estrutura da atividade na formação dos processos de medir.

Abstract

This study is concerned with the pre school children's notions about measurements in situations of interactive teaching. The main purpose was to analyze the children's actions when faced with the necessity to measure unidimensional space. The methodology is based on an ethnographical perspective emphasizing the children/children and children/teacher interactions. Children's actions manifested during the teaching episodes were videotaped and submitted to an interpretative analysis. This analysis focused mathematical elements and data interaction taking place in the research activities. The interactions were analyzed from a socio-historical perspective. The organization of the research activities was planned considering the genesis of unidimensional measurement. From the analysis it was possible to make clear how children construct the three constitutive aspects of the mathematical idea of measurement: selection of the unity of measurement, the comparison of the unity with the size to be measured, the numerical expression of comparison were evidenced.

ÍNDICE

Introdução	001
Em busca das bases teóricas	005
A área educacional da pesquisa: A Educação Infantil	005
Os aspectos do enfoque educacional da análise	008
As dimensões desenvolvimento/aprendizagem/ensino	008
As interações de aprendizagem	014
Os significados culturais como mediadores da aprendizagem	016
As representações simbólicas no processo de aprendizagem	019
O imaginário	021
O papel do jogo na aprendizagem	024
Os estágios cognitivos da medida	030
O enfoque genético piagetiano do desenvolvimento da medida	032
O desenvolvimento da distância	037
Os aspectos do enfoque matemático da análise	043
As diferentes formas de medida	044
O metro como unidade padrão	045
A medida como interação entre a geometria e a aritmética	046
A noção de grandeza	048
Um dia o homem começou a medir	053
A medida na pré-história	056
A medida na história antiga	058
A medida no Egito	060
A medida na Mesopotâmia	062
A medida na Grécia	064
Metodologia: o problema e a solução construída	068
Construindo nosso caminho	070
Os instrumentos	072
A análise	075
Os episódios de ensino e suas análises	077

"O que significa medir?"	079
"Quem consegue encontrar objetos do mesmo tamanho?"	085
"Lança moeda"	091
"Quem andou mais"	101
"Saltou em distância"	107
"A feira de objetos"	122
"Concurso de altura"	129
"Curupira"	137
As ações de medir sob o enfoque matemático e educacional	151
A análise sob os aspectos matemáticos	152
As ações de medir sob o enfoque da escolha da unidade de medida	154
As ações de medir sob o enfoque da comparação da unidade com a grandeza a ser medida	157
As ações de medir sob o enfoque da expressão numérica da comparação entre a unidade e a grandeza a ser medida	160
Uma amostragem dos três aspectos matemáticos nas ações de medir das crianças	164
Os aspectos que nos diferenciam das pesquisas anteriores	167
As ações de medir sob o enfoque educacional	170
Os elementos da análise com enfoque educacional	178
O alcance da pesquisa: a relação pesquisador-professor-escola	181
Processo interativo pesquisador-professor	184
Os avanços a médio e longo prazo	192
Um olhar sobre os caminhos da pesquisa	196
As representações simbólicas	198
O aspecto lúdico	201
Construindo novos problemas	202
Processos e mudanças	203
Bibliografia	206

Introdução

A Educação Infantil, área educacional em que está inserida a ação específica desta investigação, recentemente, tem sido alvo de estudos e pesquisa com o intuito de concretizar a intencionalidade da ação educativa junto à criança em idade pré-escolar. Da mesma forma, a Educação Matemática vem fazendo parte desses estudos.

Nosso trabalho se situa nesse âmbito, com a preocupação de estar contribuindo para a formação matemática da criança na iniciação escolar. Para darmos respostas às questões fundamentais sobre o ensino de matemática, para essa faixa etária, achamos necessário inserir nosso estudo na realidade escolar de forma que nosso trabalho de investigação fizesse parte do cotidiano pedagógico-educacional em que a criança se encontra envolvida. Tornou-se necessário perscrutar a realidade multifacetária do ensino de matemática na Educação Infantil e abordar a iniciação matemática situando-a numa perspectiva da educação escolar em que a interdependência dos conteúdos, métodos e objetivos que concretizam a ação pedagógica junto à criança, deve ser planejada de forma a possibilitar ao aluno a ampliação de suas capacidades individuais e sociais.

Assumimos como tema matemático a medida. Os motivos que nos levaram à essa escolha residem em experiências anteriores que tivemos na pré-escola, ao acompanharmos um projeto de atividades de marcenaria desenvolvido com as crianças. Tivemos a oportunidade de observar as formas espontâneas que as crianças encontravam para medir e expressar o tamanho dos pedaços de madeira que usavam para construir seus projetos inicialmente desenhados no papel. Foi então que se manifestou originalmente o interesse por estudar as ações de medir das crianças, neste período escolar.

Aliado a esse interesse está o argumento que buscamos na função pedagógica da história da matemática: a significação humana da origem da

medida. A história nos mostra que o cálculo, a medida e as formas estão na origem do pensamento matemático do homem.

Acreditamos que colocando para a criança problemas que a desafiem a controlar as variações de tamanho ela possa realizar experiências de medir partindo dos conhecimentos que tem elaborado cotidianamente em seu meio cultural. Bem como, supomos que, propondo esses desafios a partir de situações planejadas de ensino em que, interagindo com o professor e os colegas, ela possa apropriar-se dos significados de medir construídos pelo grupo envolvido e progredir em seus conhecimentos.

Um outro dado importante advindo da observação das crianças em atividades de marcenaria, e que contribuiu para a definição de nossa proposta, consistiu na percepção que tivemos das ajudas espontâneas que as crianças se dispensavam diante das dificuldades de medir.

As pesquisas que nos precedem sobre a noção de medida da criança e sobretudo a pesquisa desenvolvida por Piaget e seus colaboradores que, sem dúvida, consiste numa referência inegável para os trabalhos sobre esse tema, tem centrado seu interesse nas estruturas operatórias que precedem a formação dessa noção. Essas pesquisas não têm buscado seus dados em situação real de ensino, seu enfoque metodológico, mesmo que privilegie a instrução, tem criado uma situação ideal para a intervenção. Os pressupostos teóricos dessas investigações contribuíram para delimitar nosso tema e orientar, inicialmente, a elaboração dos objetivos das atividades de ensino e pesquisa que definimos para este trabalho, conjuntamente com as professoras.

Decidimos restringir o tema da investigação ao aspecto da medida do espaço unidimensional, tendo como referência as pesquisas de Piaget e de seus colaboradores em que constatam que a criança constrói primeiramente a noção de medida desta dimensão.

Colocamos porém, nosso enfoque metodológico da construção dos dados numa situação real de ensino porque postulamos que ensino, aprendizagem

e desenvolvimento estão intimamente ligados. Por este motivo, acreditamos que a pesquisa deve propor-se a construir as contribuições teóricas para a educação, também, no ambiente onde o ensino acontece naturalmente.

A natureza do nosso objeto de pesquisa requereu a interpretação das ações partilhadas no processo de ensino. Fundamentamo-nos na teoria sócio-histórica do desenvolvimento humano, já que esta releva o papel das interações mediadas por significados construídos socialmente na aprendizagem e desenvolvimento dos conteúdos escolares. Buscamos nesta teoria as referências para a análise das ações de medir. Estas ações se evidenciam da leitura dos episódios de ensino, os quais destacamos dos registros videográficos da aplicação das atividades de ensino e pesquisa.

A questão que se nos coloca inicialmente e que norteou as nossas ações de investigação tem a seguinte formulação: *quais são as noções manifestas pelas ações de medir da criança, construídas interativamente em situações planejadas de ensino?*

Conferimos a atividade de ensino o caráter de desencadeadora de problemas de medir de forma a orientar as ações da criança segundo um objetivo comum ao grupo classe. Sendo o jogo a atividade fundamental para o desenvolvimento da criança, nos apoiamos nesse pressuposto para proporcionar às atividades o caráter de jogo de medir. O professor com quem iríamos trabalhar tinha, portanto, um papel importante para que o desempenho do trabalho de sala de aula atendesse aos propósitos da pesquisa. Desenvolvemos um trabalho interativo de elaboração, aplicação e discussão das atividades de ensino objetivando um conhecimento progressivo das ações pedagógicas e educacionais junto à criança, tanto do professor quanto do pesquisador.

Da análise dos episódios foi possível fazer suposições sobre as ações de medir da criança com enfoque nos aspectos matemáticos da medida, bem como sobre as contribuições dos aspectos educacionais na formação dessa noção.

Relevamos a manifestação de aspectos como o lúdico, o emocional, o imaginário, e o simbólico na construção dos significados de medir.

Desta forma, nosso trabalho pode estar contribuindo para a organização das ações pedagógicas que visam a iniciação matemática da criança, e para novos estudos que venham a se configurar nesta área.

Em busca das bases teóricas.

A área educacional da pesquisa: A Educação Infantil.

É notório que, nestes últimos anos, se vem configurando, entre teóricos e educadores, uma preocupação maior com o caráter educacional da formação da criança de 0 a 6 anos. A educação infantil, em nosso país, teve seu reconhecimento constitucional apenas em 1988, quando foi definida como um direito da criança, um dever do Estado e uma opção da família. Embora, já na década de 30, tivesse início sua implementação nas instituições públicas educacionais quando, segundo Kishimoto, (1988), Lourenço Filho iniciou a instalação de classes de Jardins anexas a grupos escolares. Pode-se considerar esta uma tentativa de popularizar a educação pré-escolar, que até então só existia para a elite cultural e econômica do país.

As classes implantadas não tiveram muita aceitação na época, tanto que os próprios diretores das escolas acabavam por desativá-las. Além disso, não havia nenhum compromisso formal do Estado com a educação infantil, nem mesmo um corpo docente preparado e suas finalidades eram desconhecidas. Desde então, e até hoje, a educação infantil se constitui, sob o aspecto da formação, uma área de flutuação, pois faltam idéias claras e coerentes sobre sua função. Por um lado, julga-se suficiente prover as necessidades físicas da criança, cuidar da aquisição de bons hábitos de higiene, saúde e boa conduta, assumindo um caráter preponderantemente assistencial; por outro, introduz-se elementos de instrução dando-lhe o caráter sobretudo de período preparatório para a escolarização formal.

A importância da infância para o indivíduo e para a sociedade exige que se faça qualquer coisa a mais e melhor, de forma que a educação da criança vá além de esgotar sua finalidade em fornecer-lhe hábitos de disciplina e higiene e de prontidão para a educação formal. Acreditamos que a finalidade da educação

das crianças menores de seis anos consiste não em acelerar mas em *ampliar* o desenvolvimento infantil, o que significa dizer, possibilitar o enriquecimento e o máximo desdobramento daquelas qualidades específicas desta idade. O segredo, afirma Vénquer (1988), não está, de forma alguma, em ensinar criança algo extraordinário, mas em ampliar e aprofundar os aspectos e as vias de desenvolvimento naturais para cada idade especificamente. É necessário considerar as possibilidades da criança, seus interesses e inclinações e lembrar que ela não somente se prepara para a vida se não que já a vive. É preciso ter presente que a tarefa da educação escolar consiste em proporcionar-lhe esta vida de forma interessante e feliz. Sem dúvida, o caráter espontâneo, não consciente das influências pedagógicas provoca uma enorme diferença no nível do desenvolvimento das capacidades cognitivas de cada criança. Por outro lado, pode-se elevar, substancialmente, este nível, substituindo a orientação pedagógica não consciente por um projeto educacional que envolva um amplo movimento de estudos e pesquisas, objetivando definir e organizar o caráter pedagógico-educacional da educação infantil.

Recentemente, segundo Machado (1994), profissionais da educação infantil têm procurado determinar, com bases em estudos e pesquisas, a natureza da instituição voltada ao atendimento de crianças de 0 a 6 anos. Entre estes, representantes de outras culturas como Luçart (1982) e Bartolomeis(1982), e da nossa realidade escolar como Kramer et alii (1989) Machado (1994) Oliveira et alii (1992), Moura (1992), Kishimoto (1994), que propõem em seus estudos uma forma de concretizar um trabalho educativo na educação infantil.

Através deste estudo queremos acrescentar elementos que possam contribuir para definir a finalidade da educação infantil e organizar a ação pedagógica no interior de suas instituições.

Para fundamentarmos nosso trabalho de pesquisa, partimos de princípios sobre a construção do conhecimento na criança que têm suas raízes teóricas nos pressupostos sócio-históricos do desenvolvimento. O que, em

essência, significa dizer que é na interação com outros indivíduos que a criança aprende e se desenvolve. A possibilidade de apropriação de conhecimentos se faz presente, desde que a criança vem ao mundo, nas interações sociais mediadas pelos significados culturais de seu meio e orientadas pelas pessoas mais experientes. É, a partir destas referências teóricas, que postulamos que os aspectos que constituem as noções de medir da criança podem manifestar-se e progredir através das construções da solução de situações-problema, em situações interativas de ensino. Quando nos referimos a noções o fazemos tal como a define Freudenthal (1989, isto é, como o objeto mental, a idéia ainda impregnada da concretude do objeto percebido. Nos propomos revelar as ações de medir e os possíveis aspectos educacionais que as desencadeiam, buscando esclarecer como nestas ações, se mesclam aspectos cognitivos, afetivos, imaginários, simbólicos, bem como os conceitos cotidianos e científicos.

Neste trabalho nos referimos a ação da criança na conotação de Moreira (1990: 32). Ele define a ação como sendo o comportamento mais as interpretações dos significados atribuídos por quem atua e por aqueles com os quais interatua. Desta forma, em nossas análises, relevamos o comportamento físico, isto é aquele perceptível, bem como, os significados individuais e sociais que supostamente o produzem. A seguir, faremos uma exposição dos aspectos que constituem o enfoque educacional mediante o qual nos propomos analisar os dados da pesquisa.

Os aspectos do enfoque educacional da análise

As dimensões desenvolvimento/aprendizagem/ensino.

A formulação de uma perspectiva sócio-interacionista, coloca-nos diante da impossibilidade de desvincular, seja na prática, seja na teoria, os significados da aprendizagem, do desenvolvimento e do ensino. Vygotsky (1984, 1987, 1988, 1989) afirma que o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental quando coloca em movimento vários processos de desenvolvimento que de outra forma seriam impossíveis acontecer. Assim, o ensino é um fator necessário para o processo de desenvolvimento da criança, não sob os aspectos das características naturais, mas das características históricas.

O autor concebe a teoria educacional como uma teoria de transmissão cultural, e também como uma teoria de desenvolvimento. A educação para ele, comenta Moll (1993), é a quintessência da atividade sócio-cultural, pois, na sua concepção, não implica somente o desenvolvimento do potencial do indivíduo, bem como o crescimento histórico da cultura humana da qual surge o homem. Se o adulto não guia a criança, convertendo-a num "objeto da pedagogia", a criança nunca chegará a adulto, observa o mesmo autor.

A escola enquanto instituição social de transmissão de cultura, afirma Moll (1993), é a realidade fértil para se estudar o desenvolvimento da criança. A escola enquanto o único lugar reconhecido socialmente onde o indivíduo pode aprender o conhecimento formal é uma necessidade construída historicamente. O que determina esta natureza da escola é, porém, uma verdade incontestável: em qualquer organização humana o caminho do aprender é aquele que passa dos indivíduos mais velhos para os mais jovens, do adulto para a criança. Pois, irrevogavelmente, são aqueles que detêm os saberes culturais já construídos. Em qualquer organização social, o processo de aprender a cultura estabelecida é instituído através de um ritual próprio de cada cultura.

Queremos dizer que nenhum tipo de organização social tem relegado este processo a um espontaneísmo absoluto, no sentido de os indivíduos jovens aprenderem os conhecimentos sistematizados apenas pelo movimento das relações espontâneas com o meio. É deles, dos indivíduos mais experientes, que o jovem indivíduo aprende. Vygotsky (1989) destaca a organização social da instrução como a forma única de cooperação entre a criança e o adulto, a qual é o elemento central do processo educativo, e como, por este processo interativo, se transfere conhecimento a criança em um sistema culturalmente definido.

Por este motivo, acreditamos que a aprendizagem escolar não acontece apenas num vazio cognitivo, como se o desenvolvimento cognitivo fosse um preestabelecido geneticamente preestabelecido, observa Valsiner (1993), que vai maturando gradativamente, medida que a escola solicita as estruturas cognitivas individuais já estabelecidas. Segundo a teoria sócio-histórica, a educação não implica somente o desenvolvimento do potencial do indivíduo, mas também a expressão e o crescimento sócio-cultural do coletivo no qual se articulam os indivíduos. O indivíduo se desenvolve enquanto se torna expressão da cultura de seu coletivo e esta se configura como historicidade humana medida que possibilita ao indivíduo desenvolver-se enquanto indivíduo (Heller, 1975). Um dos problemas da pesquisa educacional consiste exatamente em como captar o processo individual e ao mesmo tempo sua vinculação com o coletivo pelo qual ele ocorre e com a totalidade em que se insere.

Uma decorrência deste enfoque para a pesquisa em educação é avaliar o desenvolvimento da criança através de atividades de colaboração em que pode ser orientada pelo adulto e interagir com seus pares e que lhe permitam intercambiar com seu meio cultural, e não, apenas através de atividades independentes ou isoladas despidas de significados sociais. É com esse entendimento que elaboramos as atividades de ensino e pesquisa que propomos neste trabalho.

A aprendizagem, segundo Davis e Oliveira. (1990), é o processo através do qual a criança se apropria ativamente do conteúdo da experiência humana, daquilo que o seu grupo social conhece. Para a criança aprender é necessário interagir com os outros seres humanos, especialmente com os adultos e com outras crianças mais experientes. Nas inúmeras interações em que se envolve, no meio onde vive, a criança vai ampliando sua capacidade de lidar com o mundo medida que se apropria dos significados partilhados e construídos culturalmente pelo seu grupo social

A fundamental contribuição de Vygotsky s questões escolares comenta Freitas (1994), consistiu na concepção de que as funções psíquicas do indivíduo se desenvolvem medida que são utilizadas sempre, na dependência da apropriação, do legado cultural da humanidade, através do uso de signos e instrumentos, .Assim, a construção das funções psíquicas da criança está vinculada apropriação da cultura humana, através de relações interpessoais dentro da sociedade qual pertence.

Vygotsky considerou essa apropriação como se construindo através da Educação em seu meio e do ensino. O desenvolvimento cognitivo foi compreendido como uma consequência do conteúdo a ser apropriado e das relações que ocorrem ao longo do processo de educação e de ensino. Nesse sentido, o aprendizado precede o desenvolvimento, a criança vai se desenvolvendo medida em que, orientada por adultos ou companheiros, apropria-se da cultura elaborada pela humanidade.

Sob este ponto de vista, o desenvolvimento cognitivo pode ser compreendido como consequência da apropriação dos conteúdos e das relações que ocorrem ao longo do processo de ensino. A criança, segundo Vygotsky (1984, 1987, 1988, 1989), vai-se desenvolvendo medida que a aprendizagem desperta uma série de processos evolutivos internos capazes de operar somente quando a criança está em interação com as pessoas de seu meio e em cooperação

com algum semelhante, de forma a reelaborar significativamente os conteúdos, tornando-se assim, aquisição individual e transformando-se em ganho evolutivo.

A aprendizagem, portanto, só é possível através de interações com os outros porque o conhecimento passa, necessariamente, pela mediação do outro. "*O caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa através de outra pessoa*", Vygotsky (1984: 33). Este caminho mediado acontece, como já vimos, espontaneamente ou naturalmente no meio onde a criança vive. Do ponto de vista escolar porém, existe a possibilidade de planejá-lo, premeditá-lo de forma que aconteça a aprendizagem desejada. A este respeito, comenta Machado. "*A intencionalidade educativa na instituição de educação infantil deve assumir um caráter de **premeditação** - planejamento prévio, acompanhamento e avaliação - que vai muito além daquele encontrado na família ou outras instâncias educativas.*" (Machado, 1994: 39).

Na verdade, para Vygotsky, a aprendizagem e o desenvolvimento estão inter-relacionados desde que a criança nasce. A aprendizagem infantil começa muito antes de a criança ingressar na escola. Ao imitar e ao ser orientada pelo adulto a criança desenvolve um verdadeiro "armazém" de habilidades. Esta aprendizagem espontânea, antes da escola, difere da escolar. A diferença entre uma e outra está nos elementos especificamente novos que a aprendizagem escolar introduz.

Para poder elaborar as dimensões da aprendizagem escolar Vygotsky, descreve um novo conceito excepcionalmente importante, sem o qual não seria possível resolver o problema da relação aprendizagem e desenvolvimento, o conceito teórico de *zona de desenvolvimento proximal*.

Rivière (1985) traduz este importante conceito de Vygotsky, ao comentar que reduzir as relações entre aprendizagem e desenvolvimento a uma direção única, como se toda a aprendizagem se revertesse em desenvolvimento, seria sem dúvida uma simplificação. Afirma ser evidente que as possibilidades de que a criança incorpore as ferramentas e os signos, que são construídos

culturalmente, estão presentes em suas relações com os outros, e dependem do grau de desenvolvimento anterior. A aprendizagem, para o autor, se produz somente quando os instrumentos, signos e símbolos dos companheiros de interação são incorporáveis pela criança na função de seu grau de desenvolvimento prévio. Porém, não só isto, a aprendizagem depende também de um outro nível interno das funções do sujeito, ou seja, do nível que Vygotsky (1984) chamou de *desenvolvimento proximal*.

Para definir a relação entre a evolução da criança e sua aprendizagem, diz Rivière, não é suficiente estabelecer o nível evolutivo a partir de tarefas ou atividades que a criança é capaz de realizar sozinha, mas também é preciso determinar as que é capaz de fazer com a ajuda de outros. A humanização, segundo Vygotsky, se realiza em contextos interativos nos quais as pessoas que convivem com a criança não são objetos passivos, porém, companheiros ativos que orientam, planejam, regulam, questionam os comportamentos e as ações dela.. Por este motivo, são necessariamente agentes do desenvolvimento. Ao conjunto de atividades que a criança é capaz de realizar com a ajuda, colaboração, dicas, orientação de outros Vygotsky chamou de *nível de desenvolvimento proximal*, diferenciando-o do *nível de desenvolvimento atual*, que é aquele que corresponde aos ciclos evolutivos já formados e que são definidos operacionalmente pelo conjunto de atividades que a criança é capaz de realizar por si mesma, sem a orientação e a ajuda de outras pessoas.

O conceito de *zona de desenvolvimento proximal*, observa o mesmo autor, sintetiza a concepção de desenvolvimento como apropriação e internalização de instrumentos proporcionados por agentes culturais de interação. Define as funções que ainda não estão desenvolvidas, mas que estão em processo de desenvolvimento. Diferentemente do nível de desenvolvimento atual, que permite uma caracterização retrospectiva do desenvolvimento.. O nível de desenvolvimento proximal possibilita uma definição prospectiva do desenvolvimento sendo, portanto, sua importância prática, do ponto de vista

educacional, muito maior. Além disso, a noção de desenvolvimento proximal é decisiva para analisar o papel da imitação e do jogo no desenvolvimento da criança.

Com relação à imitação, pode-se dizer que possibilita a transformação do desenvolvimento proximal em atual, pois uma pessoa pode imitar somente aquilo que está de acordo com seu nível evolutivo. A este respeito, diz Vygotsky que *as crianças podem imitar uma série de ações que superam amplamente o limite de suas próprias capacidades. Através da imitação são capazes de realizar mais tarefas em coletividade ou com a orientação de um adulto.* (Vygotsky, 1989: 136).

Com relação ao jogo, pode-se afirmar que este cria uma zona de desenvolvimento proximal. De fato, no jogo social que envolve parceria as crianças têm a possibilidade de ações que exigem seu nível atual, como também, de incorporar significados culturais evoluindo em seus conhecimentos. Diferentemente, acontece com o jogo que desenvolve sozinha, onde realiza somente as tarefas que estão ao alcance de seu nível atual de desenvolvimento.

Em síntese, o conceito de zona de desenvolvimento proximal é uma construção teórica chave que coloca o indivíduo dentro de uma situação social concreta de aprendizagem e desenvolvimento. Segundo Valsiner, (1988), a mensagem básica da zona de desenvolvimento proximal é a interdependência do processo de desenvolvimento infantil e dos recursos proporcionados socialmente para este desenvolvimento.

O conceito de zona de desenvolvimento proximal é uma referência fundamental para esta pesquisa quando relevamos que o conhecimento de medida, que a criança tem elaborado é fruto das experiências de medir vivenciadas em seu meio. A partir deste pressuposto, supomos que as atividades de ensino e pesquisa, devam desencadear interações na zona de desenvolvimento proximal, o que significa dizer, colocar em movimento os possíveis níveis de avanço a partir dos conceitos cotidianos das crianças. Neste trabalho, não temos a

espectativa, que a criança elabore, através das atividades o conceito operacional de medida, mas queremos revelar, da leitura das ações de medir, sua disponibilidade cognitiva, imaginativa, afetiva para a aprendizagem e desenvolvimento deste conceito. Supomos que esta disponibilidade deva manifestar-se através do crescimento gradativo do conceito cotidiano em direção ao científico, passando por representações do conceito que fossem despidendo-o de seu significado, imediato, de sua forma perceptiva e conferindo-lhe aspectos sempre mais generalizáveis. É evidente que não estamos nos referindo a um movimento de melhoria do conceito, como se este fosse algo tratável objetivamente, moldável como uma argila. Falamos, porém, de uma interação entre sujeito e objeto de forma que, segundo (Kopnin, 1979; Vygotsky, 1987), o sujeito que conhece se modifica ao modificar o objeto de conhecimento, da mesma forma que o homem ao modificar a natureza modifica o seu comportamento.

As interações de aprendizagem.

A interdependência entre aprendizagem, desenvolvimento e ensino acontece na interação, definida como atividade humana que se desenvolve somente quando mediada por instrumentos e signos, cujos significados são comuns aos indivíduos do mesmo grupo social. O aspecto interativo consiste num dos elementos que buscamos focalizar nas ações de medir da criança, porque este se faz presente no jogo com parceria como atividade de ensino.

O conceito de zona de desenvolvimento proximal estabelece a diferença entre o desempenho com ajuda e aquele sem ajuda e que tem profundas consequências para a prática educativa. É a partir da zona de desenvolvimento proximal que se pode definir o ensino em termos de desenvolvimento infantil. O ensino só é bom quando desperta e dá vida aquelas funções que estão em um estado de desenvolvimento e que poderão ser atingidos pela criança. Ensinar portanto, significa oferecer ajuda em alguns pontos de possíveis avanços e serão

indicativos destes aqueles que a criança manifesta já ter alcançado, passando a constituir-se a base para novas aprendizagens. Ao atender a esse princípio, a escola estará orientando a criança para aquilo que ela ainda não é capaz de fazer, dando ênfase em direção s potencialidades a serem desenvolvidas e desta forma ampliando sua capacidade de desenvolvimento. Com enfoque no conceito de zona de desenvolvimento proximal é possível observar que, medida que a criança interage com outros em busca de pistas para solucionar algum problema que esteja além de sua capacidade momentânea, aos poucos organiza seu pensamento e sua ação de forma a determinar a solução sozinha.

Uma característica central de um processo interativo de ensino na atividade conjunta consiste que cada participante recebe influência de muitos aspectos da interação assim como: os significados e os símbolos desenvolvidos através da linguagem; o desenvolvimento da compreensão comum dos propósitos e sentido da atividade; as estratégias cognitivas na solução dos problemas; a influência proporcionada pela ajuda dos companheiros mais experientes e pela orientação do professor. Sem dúvida, desde que seja um participante ativo desse processo, a criança terá avançado qualitativamente em seu nível de conhecimento de forma a dispor-se internamente para novos avanços.

Sob esta perspectiva educacional, fica evidente a importância do papel do professor enquanto aquele que planeja as atividades de ensino e as desenvolve de forma a orientar e possibilitar ao aluno a passagem das experiências coletivas para a experiência pessoal, apropriando-se dos conhecimentos elaborados pelo grupo. A atividade de ensino programada de modo a possibilitar interações que permitam compartilhar o conhecimento é significativa e produtiva porque diz respeito aos interesses de um grupo. A construção do conhecimento tem caráter cooperativo ao ser útil não só a uma única pessoa, mas ao grupo como um todo.

Quando o professor está imbuído de uma visão desenvolvimentista da criança, em termos de estágios, - acredita que ela tem de apresentar e conquistar, de uma forma fechada, determinados estágios de desenvolvimento, - ele fica

muito preocupado em desenvolver suas ações junto à criança de modo a não se adiantar ao amadurecimento dos estágios, ou então em transformar em ensino as características operacionais destes. Esta postura, segundo Freitas (1994), advém de uma preocupação de encaixar a teoria na criança. Sob um enfoque sócio-histórico, por sua vez, é possível aproximar-se da criança com a expectativa de que ela tem algo a revelar porque é um sujeito que tem uma história e que se processa num contexto cultural definido. Este enfoque possibilita ao professor a contextualização do desenvolvimento infantil. Muda também, o papel do aluno, que é visto normalmente como um sujeito individual, responsável pelo desenvolvimento ou não de suas aptidões, para um sujeito social que, porque dotado de uma história particular, pode contribuir com as suas particularidades de indivíduo para o desenvolvimento do grupo e cujos avanços podem reverter-se em ganhos de evolução individual.

Embora o desenvolvimento possa ser compartilhado, como discutimos anteriormente, Góes (apud Freitas, 1994) chama a atenção para o fato que nem toda a experiência de aprendizagem gera desenvolvimento. *"Para que isso aconteça, a experiência tem que ser tal que permita conhecimentos de um grau maior de generalidade em relação a um momento dado do desenvolvimento do sujeito."* (Freitas, 1994: 100).

Os significados culturais como mediadores da aprendizagem.

Uma das questões principais da teoria do desenvolvimento de Vygotsky é a mediação, observa Wertsch (1993). Os processos mentais superiores podem ser entendidos somente através da mediação de instrumentos e signos. Vygotsky, afirma Freitas (1994), define desenvolvimento em termos de emergência ou transformações de formas de mediação, e sua noção de interação social em relação aos processos mentais superiores necessariamente envolve também mecanismos de mediação.

Para ele a consciência e as funções superiores se originam no espaço exterior, na relação com os objetos e as pessoas, nas condições objetivas da vida social. "*Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes, primeiro, no nível social, e depois, no nível individual, primeiro **entre** pessoas (interpsicológica), e depois **no interior** (intrapsicológica).*" (Vygotsky 1984, p.64)

Ele chama de internalização a reconstrução interna da atividade externa. Sem os signos externos, especialmente a linguagem, não seria possível a internalização e a construção das funções superiores.

Do ponto de vista educacional abordamos o aspecto da mediação que faz a aproximação do conceito cultural para o conceito científico. Segundo Vygotsky, a estrutura da aprendizagem escolar proporciona o tipo de experiência cultural na qual se formam os processos psicológicos superiores, como a atenção voluntária e a memória lógica. Consequentemente a distinção entre conceito espontâneo e científico é essencial na análise da natureza da mediação na aprendizagem escolar.

Um conceito espontâneo forma-se segundo as propriedades perceptuais e contextuais de seu referente. Por sua vez, a relação do conceito científico, com o objeto é mediada por algum outro conceito. Panofsky (1993) diz que a própria noção de conceito científico implica uma posição determinada em relação a outros conceitos, isto é, uma localização dentro de um sistema de conceitos. Desta forma, segundo o mesmo autor, para Vygotsky o desenvolvimento dos conceitos sistemáticos não depende do desenvolvimento prévio das classes lógicas, mas se apóia na experiência social dentro de um contexto que seja relevante para o domínio do conhecimento. A aprendizagem de conceitos sistemáticos precede o desenvolvimento de uma estrutura lógica elaborada. A diferença qualitativa entre os conceitos está centrada não na estrutura interna destes, mas no contexto de sua aquisição.

Segundo Moll (1993), a aprendizagem dos conceitos científicos fundamenta-se num conjunto de significados previamente desenvolvidos, que têm sua origem nas experiências cotidianas da criança. Este conhecimento adquirido espontaneamente media a aprendizagem do novo. Deste modo, os conceitos cotidianos localizam-se, segundo Vygotsky (1984), entre o sistema conceitual e o mundo dos objetos. O desenvolvimento dos conceitos científicos depende e, ao mesmo tempo, se constrói sobre um conjunto de significados culturais que constituem o conceito cotidiano já existente. No pensamento da criança, diz o autor, não se pode separar os conceitos que ela aprende na escola daqueles que aprende fora dela. Quando isto acontece, ou seja, quando a escola ensina os conceitos científicos ignorando os significados culturais que a criança já tem elaborado, afirma Driver (1992), ela conserva o conceito científico e o conceito cultural como duas verdades independentes. Quando é solicitada a definir o conceito científico, quase sempre nas explicações se sobrepõe o significado cultural que tem deste, apesar de todo o trabalho do ensino sobre o conceito científico.

No caso em que o ensino é desenvolvido de forma que os significados culturais de um conceito possam servir de mediadores para a apropriação dos significados científicos, os conceitos científicos terminarão adquirindo significados concretos, aproximando-se dos significados culturais. Segundo Vygotsky (1989), os conceitos científicos crescem para baixo, em direção ao cotidiano, no sentido do domínio da experiência pessoal, adquirindo sentido e significado. Esse movimento marca o caminho para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos em direção para cima, no sentido do conceito científico, facilitando o domínio das características superiores dos conceitos cotidianos.

Sob este ponto de vista, destaca-se a importância das atividades e dos conteúdos do cotidiano proporcionando sentido "matéria conceitual" para o desenvolvimento dos conceitos escolarizados. Para que a aprendizagem escolar seja significativa é necessário ir mais além dos muros formais da aula, ir mais

além do verbalismo vazio, dos enunciados pomposos, das definições mágicas. O conhecimento formal cresce a partir da análise do conhecimento cotidiano. Segundo Moll (1993), a percepção e o uso dos conceitos cotidianos, por parte das crianças mediam os significados dos conceitos escolarizados e desta forma, passam a fazer parte de um sistema de conhecimento que constitui a base da autodeterminação de pensamentos e ações subsequentes.

A distinção entre a noção construída a partir de um contexto, ou seja, construída por um processo exógeno, e aquela derivada de estruturas internas, construída por um processo endógeno, tem implicações significativas na forma pela qual os conceitos adquiridos tem influência na vida do educando, comenta Coll (1994).

Certamente, a educação formal proporciona novos instrumentos intelectuais os quais, supõe-se, estariam contribuindo para uma leitura e interpretação da realidade e que, pudessem ser a força motriz de desenvolvimento e mudanças políticas e econômicas da sociedade. Porém, o que se pode constatar é que estes instrumentos intelectuais adquiridos de forma aculturada, sem o contexto para o seu emprego parecem enferrujar-se e tornar-se obsoletos. A partir de uma perspectiva vygotskiana, o papel essencial da escolarização consiste em criar contextos sociais para que o educando possa dominar e ser consciente do uso dos conhecimentos construídos socialmente na escola.

Observamos que em nosso trabalho usamos indistintamente conceito cultural, conceito espontâneo, conceito cotidiano por entender que são construídos a partir das interações espontâneas que ocorrem cotidianamente no meio cultural da criança, e que têm o significado do discurso cotidiano. A diferença do conceito científico que é construído a partir de situações planejadas de ensino e é definido pelo discurso escolar.

As representações simbólicas no processo da aprendizagem

Uma das premissas fundamentais da teoria de Vygotsky é a de que a transformação dos processos básicos em funções psicológicas superiores se

produz no seio da interação social da criança e através do emprego de instrumentos e de símbolos culturalmente determinados

É sob a conotação de símbolo enquanto instrumento de mediação de significados, enquanto representação e comunicação de significados convencionados que buscamos interpretar as representações que as crianças constroem em seus processos de medir.

Ao interpretarmos as representações simbólicas de medir usamos símbolo sob duas conotações, no nosso entender não excludentes, uma do ponto de vista da mediação enquanto instrumento que tem a função de mediar os significados comuns ao grupo; a outra sob o ponto de vista da representação, que tem a função de representar a medida. Não a entendemos enquanto representação direta da realidade, na qual não há lugar para o imaginário, mas como representação da realidade imaginada. Assim, quando a criança representa a distância por uma linha reta, esta linha é uma representação não de uma realidade imediata, perceptível, mas imaginada, pois na natureza as distâncias não estão representadas por linhas retas, da mesma forma o comprimento ou altura de um objeto.

Na elaboração das representações, a criança pode passar por realidades imaginadas mais próximas de seu conceito cotidiano de espaço. Quando representa o tamanho de um objeto por um tamanho de barbante, ela pode estar imaginando, no barbante, o traçado da dimensão chamada tamanho do objeto. Esta imagem está imbuída da concretude do objeto, não é generalizável como a linha reta.

Um símbolo, segundo Peirce (1980, 1984), é um representamen (aquilo que representa), cujo caráter representativo consiste precisamente em ser uma regra determinada pelo seu interpretante. Ele opera segundo a adoção de uma regra de uso. Portanto, se relaciona a seu objeto (aqui tomado no sentido amplo, uma pessoa, um sintoma, uma ação, um som, uma idéia e outros) por força da idéia do "espírito-que-usa-o-símbolo" (Peirce, 1984:129), Sem esta idéia

uma conexão de tal espécie não poderia existir. Assim, um símbolo e seu significado não diferem sob qualquer outro aspecto, a menos que um sentido especial seja atribuído a "significado".

A quase totalidade da linguagem usual, falada e escrita, é de natureza simbólica. Sob este ponto de vista, consideramos as elaborações que as crianças apresentam, através da fala, da escrita, das ações, buscando representar as suas soluções das situações-problema de medir. Mesmo que estas representações tenham significados convencionados apenas pelo grupo de crianças envolvido no episódio de ensino, o que significa dizer, que a regra de uso tem validade somente para este grupo.

Sob o aspecto da mediação entendemos que as representações são resultado dos significados de medir comum ao grupo que as convencionam. Entendemos que a validade destas enquanto símbolo-representação-mediação está em constituir-se num conceito cotidiano que cresce no sentido do conceito científico. No caso da medida, o conceito cotidiano deixa de atuar somente como discurso cotidiano, apenas como elemento de comunicação (tal coisa mede tanto), mas passa a fazer parte do discurso escolar enquanto se torna objeto de estudo. Como tal, está voltado para as suas relações com o conceito científico (como se mede o comprimento de tal coisa)

O imaginário

Nas análises que desenvolvemos neste trabalho, consideramos o imaginário do ponto de vista da criação das representações simbólicas. Quando a criança cria um símbolo gráfico ou uma palavra para representar uma idéia, um objeto, uma ação, estão presentes além dos elementos que, anteriormente consideramos constitutivos da natureza do símbolo, também a imaginação. A imaginação não como uma atividade mental inconsciente, de caráter não-social, mas como a considera Vygotsky (1982), como uma função vitalmente necessária. Concebemos a imaginação como forma humana de apreensão do real, buscando

compreendê-lo e comunicá-lo, pois como diz Pino (1991), uma vez que o real não se apresenta de uma forma direta e imediata, mas na sua representação, a qual é uma formação imaginária.

A imaginação é a base de toda a atividade criadora, aquela que possibilita a criação artística, científica, e técnica. Neste sentido, tudo o que nos rodeia e que não é natureza é fruto da imaginação humana.

A imaginação não está em oposição ao real como se fosse uma função do irreal, do que não existe realmente. O irreal, ou seja, o real imaginado, segundo Vygotsky (1982), tem suas raízes na realidade, nas experiências anteriores do homem. *"A análise científica das elucubrações mais fantásticas e afastadas da realidade, como por exemplo os mitos, os contos, as lendas, os sonhos etc convence.-nos de que as maiores fantasias não são outra coisa que novas combinações dos mesmos elementos tomados, afinal de contas, da realidade, submetidos simplesmente a modificações ou reelaborações em nossa imaginação."* (Vygotsky, 1982: 16).

Quando a criança elabora representações simbólicas da medida ela poderá combinar elementos advindos do conhecimento cultural que tem da medida, buscando assim em suas experiências espontâneas as bases imaginárias de sua criação. Do ponto de vista educacional, torna-se importante proporcionar criança este tipo de experiência, de forma a possibilitar-lhe a projeção de suas experiências em novas experiências.

Decorre daí uma conclusão pedagógica sobre a necessidade de ampliar a experiência da criança, se se quer proporcionar-lhe bases sólidas para a sua atividade criadora. Quanto mais ela é solicitada a recriar os signos culturais, a representar as suas idéias, ou aquelas construídas na interação com outros, a representar a realidade com a qual interage, mais está ampliando suas potencialidades imaginárias. Quando o desenvolvimento da linguagem é vinculado ao exercício da imaginação permiti criança liberar-se de suas

impressões imediatas e de expressar-se num plano desvinculado da realidade, podendo imaginar e criar além do real imediato.

Neste sentido, a imaginação tem um papel importante no desenvolvimento da criança, de forma a ampliar sua capacidade humana de projetar suas experiências, de poder conceber o relato e experiências dos outros.

Para Vygotsky (1982), não é possível conhecer a realidade sem uma certa dose de imaginação, sem o distanciamento da realidade, das impressões individuais concretas que representam esta realidade nas ações elementares da nossa consciência.

Um outro aspecto importante a ser considerado nas análises e que acompanha a imaginação é o emocional.

A separação intelecto e afeto não explica o pensamento em sua plenitude de vida. As necessidades e os interesses pessoais, as inclinações daqueles que pensam influenciam a sua capacidade intelectual e o seu desenvolvimento. Entretanto, como observa Machado, "*a emoção, junto com as demais funções psicológicas, nas interações sociais, perde seu caráter instintivo para dar lugar a um nível mais complexo de atuação do ser humano, consciente e autodeterminado*". (Machado, 1994: 32).

Referimo-nos ao emocional que se manifesta através da satisfação, alegria, ou insatisfação perante o ato de criar. A criança participa integralmente de seus feitos. Não é incomum vê-la vibrar, saltar, sorrir, quando percebe que construiu algo novo.

Vygotsky (1982) afirma que todas as formas de criar encerram em si elementos afetivos. Isto significa dizer que tudo o que a fantasia produz influencia reciprocamente nossos sentimentos. mesmo que o que foi produzido não tenha referência direta na realidade, porém todos os sentimentos experimentados pelo criador são reais, vividos intensamente por ele.

Quando, em sala de aula, a criança tem a possibilidade de participar ativamente da construção da solução dos problemas propostos, o que significa

participar dos diálogos, das ações, que se desencadeiam, supomos que seu pensamento, suas ações estão sendo movidos pelos seus sentimentos e pela sua imaginação.

Nas situações interativas de ensino, ao confrontar seu pensamento, sua ação com os dos colegas ou do professor, pode experimentar a dúvida, a hesitação, o medo do erro, a expectativa do acerto, a certeza da descoberta. Todas estas tensões internas colocam em movimento uma complexidade de funções psicológicas cujas características são peculiares história de cada indivíduo e que contribuem juntamente com a função cognitiva para a aprendizagem e desenvolvimento da criança

Coll (1994) diz que a motivação de uma criança perante uma atividade de aprendizagem é, por sua vez, o resultado de uma série de processos que é necessário indagar. O fato importante, no entanto, a ser destacado é que esta interpretação tem um caráter dinâmico, não é possível dá-la como acabada, mas é forjada e modificada no próprio decorrer da atividade de aprendizagem. Isto significa que o sentido que a criança atribui a uma atividade escolar e, conseqüentemente os significados que pode construir a respeito, não estão determinados apenas por seus conhecimentos, habilidades, capacidades ou conhecimentos prévios, mas também pela complexa dinâmica de intercâmbios comunicativos que se estabelecem a múltiplos níveis entre criança/criança e entre criança/adulto.

Mediante o jogo das representações mútuas, das expectativas, do intercâmbio de informações, do consenso de regras de atuação, em suma, mediante os processos psico-sociológicos presentes na situação de ensino, a criança aprende e desenvolve suas capacidades mentais, afetivas e imaginárias.

O papel do jogo na aprendizagem.

Teóricos como Piaget, Vygotsky, Elkonin, Leontiev têm destacado o papel fundamental do jogo no desenvolvimento da criança. Vygotsky (1984)

afirma que é no brinquedo que a criança aprende a agir numa esfera cognitiva, ao invés de uma esfera visual externa. Para ele no jogo as ações da criança dependem de motivações e tendências internas, e não dos incentivos recebidos pela situação externa. No brinquedo, os objetos perdem sua força, determinada pela percepção imediata deles. A criança enxerga o objeto mas age de maneira diferente da visão perceptual do objeto. No jogo, ela consegue atribuir aos objetos, através de sua ação lúdica, significados diferentes; se desenvolve a sua capacidade de abstração, e ela começa a agir independentemente daquilo que vê, e a operar com significados diferentes da percepção imediata do objeto.

Ao propormos jogos envolvendo situações de medir, estamos pensando também nesta característica peculiar da ação lúdica. É possível que a criança ao ter que avaliar quantitativamente uma distância para definir qual a equipe que ganhou, ela ressignifique objetos disponíveis atribuindo-lhes significados operacionais de medir.

O brinquedo, como afirma Leontiev (1988), é realmente o caminho pelo qual as crianças compreendem o mundo em que vivem. Ele denomina a brincadeira como atividade principal da criança, o que significa dizer que é aquela atividade em conexão com a qual ocorrem as mais importantes mudanças psicológicas do desenvolvimento da criança e dentro da qual se desenvolvem processos psíquicos que preparam o caminho da transição da criança para um novo e mais elevado nível de desenvolvimento. Argumenta que isto acontece porque é um tipo de atividade cujo motivo está no próprio processo, o brinquedo tem como alvo o processo dinâmico de seu desenvolvimento, e não o resultado da ação. Isto é em geral para qualquer tipo de brincadeira e para qualquer jogo. "*A forma geral da motivação dos jogos é **compertir e não , vencer***" (Leontiev 1988: 123). Por isso, quando, no jogo, a vitória, mais do que a participação, torna-se o motivo principal, este deixa de ser brincadeira. Isto significa que o próprio processo do jogo, o seu desenvolvimento, as regras, as trocas de estratégias

deixam de ser a motivação principal do jogo, passando a dominar a burla e a obsessão pela vitória.

Neste trabalho, assumimos jogo com a conotação de jogo com regras que, segundo Leontiev, surgem num estágio posterior brincadeira de enredo. Piaget (apud Garvey, 1978) afirma que o jogo de regras é o estágio mais maduro, na classificação dos jogos. Na sua concepção, são jogos organizados, frequentemente realizados em equipe, estruturados por regras que especificam os participantes e os movimentos obrigatórios ou proibidos, conforme a característica que define a realização do jogo.

Vygotsky (1984) afirma que o desenvolvimento que delinea a evolução do jogo junto criança acontece desde de uma fase em que há uma situação imaginária s claras e regras ocultas para outra na qual as regras estão s claras e a situação imaginária oculta. Em essência muda o conteúdo do jogo. Inicialmente a ação lúdica surge com a necessidade básica de a criança dominar o mundo dos objetos culturais. A característica principal do jogo de papéis, no qual a regra é oculta, é a descoberta da realidade objetiva. Já, o traço marcante do jogo de regra, no qual esta é explícita, é a inclusão de um certo objetivo mediante o qual a criança se conduz no jogo avaliando o próprio desempenho. Este processo de avaliação desenvolve a capacidade de controlar o próprio comportamento em função de um objetivo definido externamente, como afirma Leontiev (1988: 139).

Nos jogos de regra, os jogadores estão, não apenas, um ao lado do outro, mas "juntos". As relações entre eles é explícita pelas regras do jogo. O conteúdo e a dinâmica do jogo não determinam apenas a relação da criança com o objeto, mas também suas relações em face a outros participantes do jogo. Estes últimos se tornam também conteúdo da atividade lúdica e neles se fixa o motivo do jogo. Assim, o jogo de regras possibilita o desenvolvimento das relações sociais da criança. Devido a sua dinâmica ser regida por um conjunto de regras que orienta as ações dos jogadores, colocando-os em situações de interação, em

função do objetivo do jogo, que ele se torna um possível desencadeador de aprendizagens. A este respeito, Vygotsky afirma, o jogo cria uma zona de desenvolvimento proximal da criança. *"No brinquedo, a criança sempre se comporta além do comportamento habitual de sua idade, além de seu comportamento diário; no brinquedo é como se ela fosse maior do que é na realidade. Como no foco de uma lente de aumento, o brinquedo contém todas as tendências do desenvolvimento sob forma condensada, sendo, ele mesmo, uma grande fonte de desenvolvimento.* (Vygotsky, 1984: 117).

As situações de jogo possibilitam a criança interagir com os conhecimentos dos parceiros de forma a aprender dos mais experientes. É comum observar as atitudes espontâneas de um parceiro ensinar o outro a jogar bem, esclarecendo as regras, apontando estratégias para uma melhor jogada.

O aspecto social do jogo de regras possibilita a criança estar em contato com níveis diferentes de entendimento e resolução do jogo. Isto faz com que possa relacionar essas diferenças e optar pela melhor, para ela.

Leontiev (1988) comenta que é preciso acentuar que a ação, no brinquedo, não provém da situação imaginária, não é porque a criança imagina que ela toma a iniciativa de brincar, mas, pelo contrário, a operação implícita na proposta do jogo solicita condições de ação que tornam necessária a imaginação e dão origem a ela. A imaginação, diz Vygotsky (1984), é um processo psicológico novo para a criança. Desta forma a situação imaginária é uma característica definidora do brinquedo.

Como temos comentado anteriormente, a situação imaginária de jogo surge como resultado das operações com os objetos. O objeto do jogo retém seu significado, mas as operações sobre ele possibilitam imaginar e atribuir-lhe diferentes sentidos conforme o objetivo do jogo.

A relação particular entre o sentido e o significado do objeto, no jogo, não é dada antecipadamente, ela surge ao longo do jogo, como resultado da imaginação. Desta forma, supomos que o jogo de medir, proposto nas atividades

de ensino e pesquisa, cria o movimento, de colocar as crianças numa relação imaginária entre o objeto e a operação de forma que a interação entre as noções cotidianas de medir, disponíveis no grupo, proporcione uma aproximação maior do conceito científico.

O reconhecimento do papel dominante do brinquedo na atividade da criança, fica evidente. Acreditamos, porém, que para acompanhar o processo de desenvolvimento da criança não é certamente suficiente apenas reconhecer este papel da atividade lúdica. É necessário compreender claramente em que consiste o papel essencial da brincadeira; como a criança compreende as regras do jogo e o seu desenvolvimento. A essência do brinquedo é a criação de uma nova relação entre o campo do significado e o campo da percepção, o que possibilita o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Dado o jogo consistir numa atividade que possibilita o desenvolvimento da criança por ser para esta uma atividade principal, é interessante propô-lo como atividade também na educação formal. Para tanto, torna-se necessário saber como submeter a criança às leis de desenvolvimento próprio do brinquedo. Caso contrário, o jogo pedagógico pode tornar-se uma atividade de sala de aula, no sentido de a criança estar ativa, ou seja apenas ocupada, sem que exista relação entre a ação lúdica da criança e a intencionalidade pedagógica.

Devido ao caráter social da atividade lúdica desenvolvida com objetivos de ensino, as crianças conseguem através dela realizar o que provavelmente não o fariam sozinhas, operando conjuntamente, partilhando e convergindo pontos de vista, negociando significados, dividindo tarefas, desempenhando papéis *"Sendo assim, os conhecimentos advindos de uma interação lúdica, com toda a gama de aspectos afetivos e cognitivos que os caracterizam, têm um valor especial para a criança pequena, visto que o caráter de genuidade da interação torna-os também mais genuínos, pois emergem das possibilidades concretas e virtuais dadas pelos parceiros."* Machado (1994: 43).

Concluindo, podemos dizer que usamos o jogo, nas atividades propostas neste trabalho, por apresentar características peculiares que possam contribuir para o desenvolvimento da criança em situações de ensino, como as características que indicamos a seguir:

- é uma atividade principal da criança;
- desenvolve uma zona de desenvolvimento proximal na criança;
- cria uma nova relação entre o campo do significado e o campo da percepção.
- a situação imaginária é uma característica definidora do jogo;
- através do jogo a criança aprende a agir numa esfera cognitiva, ao invés de numa esfera visual externa.

Os aspectos que tornam indissociáveis a relação fundamental entre a aprendizagem, desenvolvimento e ensino que analisamos anteriormente, orientam a nossa investigação. Esta fundamentalmente analisa se as situações interativas criadas pelo ensino proporcionam à criança ações de medir que manifestam como acontecem e progridem a partir dos conceitos cotidianos, as noções de interdependência entre os três elementos constitutivos da idéia matemática de medir: a seleção da unidade de medida, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica desta comparação. Supomos que as ações de medir que as crianças apresentam devam acontecer dentro de um contexto educacional planejado e organizado de forma que a criação de significados de medir aconteça a partir de situações interativas, os significados culturais, as representações simbólicas, o imaginário e o lúdico estejam presentes.

Os estágios cognitivos da medida

Sob o aspecto do enfoque educacional a que nos referimos para a análise dos episódios, incluímos também os estágios cognitivos do desenvolvimento da noção de medida, definidos pela teoria piagetiana. Embora a teoria genética de Piaget e de Vygotsky tenham diferenças marcantes no empreendimento intelectual que deu origem a cada uma delas, como afirma Oliveira, (1993), nos referimos a uma e a outra sob os aspectos complementares que possibilitam um maior aprofundamento do problema que estudamos. Não se trata, portanto, de estabelecer um confronto ou equivalência entre as duas teorias como argumenta Oliveira. Sob este ponto de vista, estamos de acordo com Kopnin (1972), quando se refere a ciência do objeto, dizendo que esta se constitui de diferentes teorias sobre o objeto.

Referimo-nos aos estágios cognitivos não como um pressuposto básico para a análise dos episódios, postulando que a criança atinja os correspondentes níveis de maturação, mas como uma referência teórica que possa esclarecer os níveis já atingidos. Nossa proposta de análise das ações de medir parte do pressuposto vygotskiano sobre o desenvolvimento dos conceitos sistemáticos. Para Piaget, o desenvolvimento de estruturas mentais precede a aprendizagem de conceitos organizados lógica ou sistematicamente. Para Vygotsky, a aprendizagem de conceitos sistemáticos precede o desenvolvimento de uma estrutura lógica elaborada, comenta Panofsky et alii (1993). Por este motivo, e dado o enfoque sócio-interacionista da análise deste trabalho, não partimos do pressuposto piagetiano que postula que a formação das estruturas lógicas operacionais de conservação de tamanho e de transitividade precedem a formação do conceito de medida, mas supomos que se formam num processo de crescimento do conceito cultural em direção ao científico.

Para Vygotsky *"o conjunto científico é transmitido sistematicamente por instituições disseminadoras de conhecimentos dentro de uma sociedade em*

particular, e não é tanto uma elaboração de classes lógicas verdadeiras no plano do pensamento reflexivo" (Panofsky et. alii, 1993: 295).

Não há dúvida que Piaget foi pioneiro na pesquisa, com enfoque genético, sobre a formação do conceito de medida na criança. Ele, porém, analisa a relação da criança com esta noção - como objeto de conhecimento - independente das condições da interação social e das situações de ensino. Ao falar da construção da noção de medida, sob o ponto de vista educacional, e com enfoque piagetiano, teríamos de enfatizar o ponto de vista da criança que aprende. Já com enfoque vygotskiano, a ênfase deve ser dada na internalização das formas culturais de comportamento, ou seja, na reconstrução interna de uma operação elaborada socialmente. Daí decorre a importância essencial do papel do outro na aprendizagem.

A este respeito, comenta Smolka, *"as implicações pedagógicas se distinguem e se esclarecem quando Piaget nos diz, por exemplo, que quando se ensina alguma coisa à criança, a impedimos de realizar uma descoberta por si mesma, enquanto Vygotsky, elaborando o conceito de **zona potencial de desenvolvimento**, (interpreta-se da mesma forma que zona de desenvolvimento proximal, ver Oliveira, 1993), afirma que a criança fará amanhã, sozinha, o que hoje faz em cooperação"* (Smolka, 1989: 58).

A contribuição que buscamos na teoria piagetiana serviu basicamente como referência para elaborarmos as atividades de pesquisa e ensino supondo quais poderiam ser as características do pensamento de medir na faixa etária que estamos abrangendo e a partir destas definir os objetivos das atividades de ensino e pesquisa. Esta sistematização teórica possibilita prever nos objetivos das atividades o possível nível de conhecimento que a criança traz elaborado a partir de seu meio, isto é, os conceitos espontâneos, tanto da medida quanto da representação da distância.

Por outro lado, o fato de a pesquisa piagetiana ter como enfoque os conceitos espontâneos de medida, aqueles que a criança já tem elaborado, não diz

respeito aos processos de medir possíveis de serem desencadeados numa situação de ensino, mesmo porque, em sua pesquisa, Piaget foi em busca de resultados que evidenciassem os estágios atingidos pelas crianças.

Partimos do pressuposto que o conhecimento de medida construído em sala de aula, não é resultado de uma elaboração primeiramente individual e só posteriormente socializada, mas de um processo, primeiramente social, por ser construído pela influência dos conhecimentos externos ao indivíduo, e posteriormente apropriados por ele. Sob este aspecto, a teoria de Piaget sobre o desenvolvimento da noção de medida que tem como pressuposto a passagem gradativa do pensamento egocêntrico para o social, postulando uma construção própria da relação objeto e criança, sem que haja mediação ou influência de qualquer outro aspecto externo, pode não explicar suficientemente as ações que queremos observar numa situação de ensino.

O enfoque genético piagetiano do desenvolvimento da medida

A seguir discutiremos o enfoque genético piagetiano do desenvolvimento da noção de medida, unidimensional, no qual incluímos, por decorrência da própria pesquisa de Piaget, alguns aspectos do desenvolvimento da representação da distância.

Piaget e seus colaboradores em *La Géométrie spontanée de L' Enfant* (1948), desenvolveram, segundo Flavell (1965), um engenhoso estudo sobre a avaliação da capacidade da criança para conservar, medir entidades geométricas euclidianas como distância, comprimento, coordenadas retilíneas, ângulo, área e volume. Grande parte da pesquisa apresentada nesta obra trata da concepção, do ponto de vista da mensuração, que a criança desenvolve gradualmente do espaço uni, bi e tridimensional no qual vive e se movimenta.

Piaget et alii (1948) tinham por objetivo examinar os comportamentos de medir, no estágio de formação, de maneira a graduar, enquanto fosse possível, as operações que intervêm nesta construção. Os pesquisadores supõem que a evolução que conduz, num primeiro momento, da comparação por transporte

perceptivo ao transporte manual dos objetos a serem comparados, e posteriormente, ao transporte de um objeto que serve de medida comum, não é outra coisa que a passagem de um estágio inicial, no qual as relações entre as grandezas dos objetos distantes se estabelecem de maneira imediata por falta de uma estruturação do espaço, segundo um sistema de coordenadas.

Segundo os autores, a criança passa por uma evolução gradativamente complexa na elaboração das operações de medir o espaço unidimensional. Para comprovar esta suposição os pesquisadores apresentaram s crianças, numa faixa etária de 4 a 7 anos, uma atividade na qual deveriam construir com blocos uma torre da mesma altura de outra dada como modelo, também construída com blocos. A tarefa deveria ser desenvolvida pela criança sem que houvesse nenhuma intervenção externa que pudesse influenciar o seu raciocínio.

Para evitar que ela reproduzisse a altura da torre modelo apenas por transporte perceptivo, a plataforma onde deveria construir a outra torre foi colocada uma determinada diferença de altura da torre modelo. Para evitar que a criança construísse fazendo correspondência um a um, entre os elementos de cada conjunto de blocos, para construir a torre foram alcançados blocos menores do que constituíam a torre modelo. Após a construção, foi colocado um anteparo entre uma e outra torre e deixados disposição alguns bastões e tiras de papel. Perguntou-se para a criança se a torre que havia construído era da mesma altura da outra e que justificasse sua resposta.

Podemos verificar como foram eliminadas aquelas interferências que pudessem trazer ajuda externa elaboração do pensamento da criança. A suposição dos pesquisadores é que o que a criança apresentar deverá ser resultado de uma elaboração genuína das estruturas internas de seu pensamento de medir.

Os dados desta pesquisa contribuíram fundamentalmente para a elaboração de uma classificação dos estágios, pelos quais é possível que as crianças passem ao construir a noção de medida de uma grandeza linear. Piaget et

alii (1948) denominam de níveis de desenvolvimento, aqueles estágios que se diferenciam pelas características maturacionais das estruturas operacionais que apresentam. Destacamo os níveis, subestágios e estágios que contribuem para elucidar a evolução do conceitos medida a que o nosso trabalho se refere.

O Níveis I e IIA se caracterizam pelos “procedimentos diversos de comparação, anteriores transitividade e medida” e pela não-conservação de comprimento. A causa essencial destas características reside no fato de que, ao deslocar a unidade sobre a dimensão da grandeza a ser medida, a criança não coordena a subdivisão da grandeza com os deslocamentos da unidade. Podemos exemplificar com a reação da criança quando tenta medir uma dimensão linear com o metro. Sua ação de medir consiste em deslocar o metro ao longo da dimensão, como se fosse apenas o movimento como tal que servisse intuitivamente de medida, sem que fosse necessária a subdivisão. O outro exemplo consiste em ela efetuar subdivisões intuitivas, mas sem o deslocamento do metro sobre o objeto.

Piaget atribui este tipo de raciocínio ausência de coordenação entre os deslocamentos no espaço livre e aqueles efetuados no espaço ocupado por objetos. Nos testes da comparação de distâncias entre objetos, quando era colocado um terceiro objeto entre outros dois imobilizados, a criança deste estágio, respondia que a distância entre os dois havia aumentado. Isto significa que neste estágio ela não observa o espaço a partir de um sistema de coordenadas que relaciona os objetos entre si, e estes com o espaço livre entre os objetos.

O Subestágio IIB é caracterizado por reações intermediárias. Estas reações consistem muito mais em um começo, ou seja, numa estréia de síntese da subdivisão e dos deslocamentos. Neste subestágio, os sujeitos começam a entrever a conservação e a compreender a transitividade próprias da mensuração, mesmo sem ter elaborado a noção do papel da unidade. Essa noção é expressa por múltiplas apalpadelas que escorregam pelo objeto, sem que isto signifique uma composição operatória. Neste nível de compreensão, contar os passos a

título de medida não implica que esses sejam do mesmo tamanho. Medir o espaço com passos, significa aplicar um passo depois do outro, mas não necessariamente de dimensões constantes. Isto pode significar que a dimensão do objeto depende não da unidade com a qual foi medido, mas somente do número de vezes que qualquer unidade é aplicado a ele, dois objetos são diferentes se medidos de um certa maneira e iguais se medidos de outra.

O Estágio III consiste na medida operatória. Segundo os pesquisadores, os sujeitos desse estágio têm elaborado a fusão operatória da subdivisão e do deslocamento. Descobrem, de um lado, que a unidade de medida pode ser submúltipla de uma maior, e de outro, que as dimensões a serem medidas podem ser múltiplas da unidade. Ou seja, nesta fase, a criança alcança um nível de desenvolvimento cuja característica está na relação operatória entre a dimensão da unidade e o número de subdivisões aplicáveis grandeza a ser medida. Do ponto de vista operatório, este estágio subtende a formação das estruturas operatórias de conservação de comprimento e de transitividade da unidade, o que isto significa que a criança percebe que a unidade permanece sempre idêntica a si mesma, ao longo dos deslocamentos. A subdivisão é assim generalizada por redução a um elemento móvel e único, e esta generalização, porque entendida como parte comum a todas as totalidades, não pode representar o seu papel de unidade a não ser por transportes sucessivos, isto é por deslocamentos segundo uma remarcação precisa de seus pontos limites.

Para Piaget et alii (1948), os resultados evidenciaram um progresso gradativo, que categorizado em fases de desenvolvimento consiste na transformação de intuições perceptivas em operações propriamente ditas.

No trecho que citamos a seguir consideramos uma importante síntese das conclusões dos autores sobre a medida espontânea das alturas das torres e que permite esclarecer a análise que fazem sobre a gênese desta noção.

*“No início desta evolução, a medida se reduz à comparação visual, isto é, ao **transporte** pelo olhar, e o egocentrismo espacial se encontra na*

maneira em que a criança acredita poder ligar diretamente as duas torres, isto é, o ponto de partida e o ponto de chegada dos movimentos cujo trajeto lhe parece tão desprovido de interesse com os possíveis sistemas de referência: tampouco se preocupam com o fato de que as torres estejam colocadas em planos diferentes e preocupando-se inicialmente, somente, com a altura absoluta de suas extremidades superiores. Na fase final do mesmo desenvolvimento, isto é, em torno do nível III B, a medida é, ao contrário, realizada pelos deslocamentos de uma unidade repetida servindo de termo intermediário, isto é, por deslocamentos que dão lugar à representação precisa de um grupo que se apóia sobre um duplo sistema de referência: as coordenadas que estruturam o conjunto da configuração formado pelas duas torres e os objetos vizinhos ou intercalados e os pontos de referência situados sobre o próprio termo intermediário mas colocados em coincidência com as referências exteriores. Assim, a medida, em seu acabamento, supõe, ela própria, uma inversão de sentido em relação ao egocentrismo espacial inicial: atividade própria que consiste em transportes visuais, manuais, e corporais, e que pouco a pouco é descentrada em favor dos termos intermediários exteriores à atividade, aos quais esta delega seus poderes o que os objetiva transformando-a em operações coerentes e que converte o egocentrismo em agrupamentos; reciprocamente os objetos são situados dentro de um sistema de referências compreendendo os movimentos do próprio sujeito, tornando um corpo em movimento entre os outros dentro de um quadro espacial imóvel e coordenado" (Piaget et alii, 1948: 89-90).¹

Segundo os autores, portanto, a noção do conceito de medida, no caso da comparação das dimensões lineares de dois objetos, evolui, na criança, a partir de uma fase inicial. Isto se dá desde uma comparação grosseira por transporte perceptivo de natureza sensório-motora, que advém do egocentrismo espacial caracterizado pela maneira como a criança acredita ligar as extremidades dos

¹Texto traduzido por nós.

objetos, sem que haja uma preocupação com um sistema de referência que relacione os objetos no espaço. Numa segunda fase, um estágio intermediário, no qual há uma primeira tentativa de esboçar a unidade, servindo-se de objetos intermediários para comparar. Na fase final, ao contrário, se serve de uma unidade repetida que se desloca segundo um sistema de coordenadas que estrutura o conjunto de configuração espacial entre os objetos e seus vizinhos e os pontos de referência situados no objeto intermediário.

Esta evolução acontece, diz Piaget, devido a uma inversão de sentido em relação ao egocentrismo espacial inicial, que pouco a pouco é transformado pela atividade que lhe é própria em operações coerentes pelas quais os objetos são situados dentro de um sistema de referência externo. Fica assim, evidente, na construção do conceito, a estruturação interna deste em consequência de uma relação direta sujeito-objeto.

A evolução da concepção da unidade passa, ao mesmo tempo, pela evolução da concepção de espaço. Este progresso é devido primeiramente a uma observação sincrética do objeto, segundo uma interpretação própria do pensamento egocêntrico da criança no estágio pré-operacional sensório-motor, e posteriormente ao desenvolvimento da análise de detalhes do objeto de forma a distingui-lo dos outros objetos, localizando-o no espaço. Trata-se de uma concepção que vai emergindo de uma visão egocêntrica espacial para uma tomada de consciência do espaço organizado em coordenadas de referência, que significa a superação da não-conservação em favor do pensamento transitivo, e portanto o domínio operatório da unidade de medida.

O desenvolvimento da distância

Como a medida do espaço unidimensional envolve a medida de distância e a consideramos como conteúdo e objetivo nas atividades de ensino e pesquisa, buscamos também na pesquisa piagetiana as referências teóricas que

possam contribuir para esclarecer os conceitos espontâneos de distância que a criança venha manifestar nas atividades de medida que propusemos.

A dimensão e a distância são dois aspectos distintos do comprimento. As dimensões referem-se a objetos “cheios”, assim chamados por Piaget et alii (1948), em contraposição ao espaço vazio compreendido entre os objetos. O comprimento que se refere dimensão de um objeto é mais perceptível do que o comprimento que se refere distância entre dois ou mais objetos. O objeto é definido espacialmente pelos seus contornos, seu comprimento vai desde onde “começa” até onde “acaba” o objeto. A distância, mesmo que definida de um objeto ao outro, é um espaço que não tem contornos.

Já que estas duas noções apresentam uma diferença qualitativa, é suposto que a criança não se aproximará delas de forma idêntica. As noções serão complementares, mesmo porque diz Freudenthal (apud Chamorro, 1988), pode-se considerar o comprimento de um corpo como sendo a distância entre dois pontos extremos.

Desta forma, segundo Piaget et alii (1948), a noção de distância será importante não só para a compreensão da medida de comprimento, mas também para a construção da própria noção de espaço, já que a criança é obrigada a passar da percepção de um espaço topológico para a construção de um espaço euclidiano. Ela deverá construir sistemas de referência, ou sistemas de coordenadas para localizar os objetos uns em relação aos outros. Pelo fato de a distância expressar uma relação entre objetos no espaço, parece necessário para a construção deste espaço a aquisição progressiva da idéia de distância.

Sob este ponto de vista, segundo Chamorro (1988), apresenta-se o problema da representação da distância, que é uma questão independente tanto da distância perceptiva quanto do caráter propriamente métrico dela. Entendemos que este problema está localizado exatamente na superação do limite da percepção apenas topológica para uma construção coordenada do espaço. E, segundo supõe Piaget et alii (1948), não se resolverá antes de que a criança

consiga a representação da linha reta, já que evidentemente a distância está ligada totalmente a este conceito.

No processo de desenvolvimento psicológico da noção de distância na criança, segundo Piaget distinguem-se duas questões: a conservação da distância e o seu caráter simétrico. Os resultados de suas pesquisas e de seus colaboradores têm evidenciado que as crianças, até atingir mais ou menos 6 anos, acreditam que, quando se interpõe um terceiro objeto entre outros dois, a distância entre os dois objetos iniciais diminui. Este fato é evidente desde que se trate de crianças não-conservadoras. As razões pelas quais as crianças não são conservadoras podem ser resumidas como estão definidas abaixo e que o fizemos a partir de Chamorro (1988).

- Numa primeira etapa, a criança considera somente um dos dois intervalos de distância que surgem ao intercalar um terceiro objeto, ela desconsidera os extremos iniciais e logicamente, acredita que a distância diminuiu.

- Numa segunda etapa, a criança considera a distância entre os objetos extremos iniciais, mas afirma que esta distância diminuiu porque o objeto intercalado, qualquer que seja, ocupa espaço. No início da etapa a criança demonstra não considerar o aspecto simétrico da distância, para ela a distância varia mudando a ordem de seus extremos. No final, pode-se observar reações intermediárias. Algumas destas reações se apresentam não-conservadoras, mas a distância é considerada simétrica independentemente da colocação dos objetos; outras, pelo contrário, negam o caráter simétrico, porém reconhecem a conservação independentemente dos objetos intercalados.

- Numa terceira etapa, a criança manifesta ser conservadora com relação distância, não obstante os elementos que são intercalados entre os extremos. Além do mais, considera sempre a relação simétrica da distância. Este nível normalmente não é atingido antes de a criança completar 7 anos.

Em síntese, segundo Piaget, a criança tem elaborado a noção de distância quando chega a três conclusões:

1. A conservação da distância entre dois objetos A e B mantém-se apesar da interposição de qualquer quantidade de objetos.

2. A conservação da distância entre dois objetos A e B mantém-se mesmo invertendo a ordem dos objetos considerados extremos: A por B e B por A.

3. Existe a desigualdade entre as distâncias, ou seja, $d(A,B)$ é maior que $d(A,C)$ se C está colocado entre A e B.

Piaget considera que estes três resultados são anteriores a toda a métrica. Antes ainda de a criança elaborar a medida da distância ela chega a elaborar uma representação euclidiana da distância, pois é capaz de individualizá-la através de pontos de referência no espaço.

Portanto, no que diz respeito ao desenvolvimento da idéia de medida unidimensional, Piaget et alii (1948) consideram tanto a capacidade de apreciar a conservação do comprimento como a de agrupar mudanças de posição e referi-las a uma estrutura espacial coordenada. Não se pode falar de conservação de comprimento, e nem tampouco de distância, a menos que exista um sistema de referência que proporcione um padrão comum para todos os objetos, móveis ou fixos, o qual, por sua vez, implica que deva haver composição entre objetos e suas partes e lugares vazios.

Muitas pesquisas em Educação Matemática com enfoque na medida unidimensional fundamentam-se nas pesquisas de Piaget, Inhelder e Szeminska (1948/1960) que investigaram o desenvolvimento da noção de medida na criança. Podemos citar o trabalho de Beilin e Franklin (1962), que estudaram o desenvolvimento da noção de transitividade relacionado formação da idéia de unidade de medida unidimensional. Na discussão de seus resultados apresentam uma categorização de seus sujeitos muito próxima da de Piaget e seus colaboradores. Hiebert (1981) desenvolva uma pesquisa sobre a instrução, tendo

como objetivo a construção das noções de transitividade e de conservação de comprimento. Philips (1982) reaplicou o experimento das “torres” de Piaget com o objetivo de verificar o desenvolvimento da noção do “meio intermediário” unidade. Usou, durante os testes, varetas para medir as torres. Nos resultados, categorizou seus sujeitos em três grupos: a) aqueles que não usam nenhuma das três varetas para comparar as duas torres; (b) aqueles que usam pelo menos uma das varetas; e (c) aqueles que usam com sucesso as três varetas. Kamii (1992) investigou o desenvolvimento da habilidade da criança para comparar indiretamente dois comprimentos com um terceiro termo. Seus resultados mostraram que o conceito de transitividade e de unidade se desenvolvem gradualmente, sendo que a unidade supõe a transitividade.

Estas pesquisas têm contribuído para evidenciar que a formação do conceito da medida unidimensional segue um caminho de complexidade crescente, passando pela construção de noções subjacentes, de forma que cronologicamente aparecem como estágios de desenvolvimento do conceito. A predominância de um e outro subestágio é portanto a manifestação de uma construção, de um caminho do pensamento, e não como costuma ser considerado comumente pela prática pedagógica, como uma forma errada de expressar a medida.

A contribuição destas pesquisas, consiste exatamente em possibilitar uma reflexão sobre a aprendizagem do conceito matemático da medida unidimensional. De fato, segundo Hiebert (1981), muitas tentativas de aplicar a psicologia cognitiva no ensino de matemática fundamentam-se na premissa de que o domínio de certas tarefas matemáticas depende do desenvolvimento de habilidades cognitivas já prontas. A criança que não tem desenvolvido estas habilidades, presumivelmente estará inábil a beneficiar-se do ensino de certo tópicos.

Sendo nosso objetivo observar as ações de medir da criança a partir de situações interativas de ensino, nos situamos dentro de uma perspectiva

metodológica que nos leva a considerar não só os processos já completados, mas também aqueles que se acham em estado de formação, que estão começando a amadurecer e a desenvolver-se com a ajuda de outros

Nossos pressupostos de aprendizagem estão em concordância com a teoria vygotskiana, que postula que as experiências de aprendizagem podem gerar desenvolvimento e não somente supô-lo. E que Vygotsky fundamenta com o conceito de zona de desenvolvimento proximal, do qual referimos a interpretação de Góes: *“Esse conceito refere-se a funções emergentes no sujeito (capacidades que se apresentam a partir da ajuda do outro) e funções consolidadas (capacidades que já refletem o desenvolvimento). A característica desse conceito é a capacidade que surge e se desenvolve na ação partilhada. É nesse sentido que ela é mais prospectiva do que retrospectiva, dirigindo-se ao que é potencial. Essa potencialidade, no entanto, não consiste numa pressuposição de funções psicológicas, mas realiza-se a partir da influência social do plano intersubjetivo”* (apud Freitas, 1994, p.100). Vygotsky (1989), dessa maneira, não exclue a possibilidade de que a aprendizagem possa desempenhar um papel no curso do desenvolvimento ou maturação daquelas funções ativadas ao longo da aprendizagem. Estes princípios configuram a metodologia utilizada em nosso trabalho.

Os aspectos do enfoque matemático da análise

As crianças podem encontrar situações de medir dentro e fora da escola. Por esse motivo, a medição, na escola, deve possibilitar uma exploração ativa do mundo real. À proporção que a criança adquire a capacidade de usar ferramentas apropriadas para medir objetos partindo do que ela já sabe, ela poderá ampliar seus conhecimentos aplicando-os à novas situações de medir.

Admitindo-se que a fonte primeira de conhecimento é a realidade na qual estamos imersos, é a partir dela que o conhecimento se manifesta na sua totalidade, (D'Ambrósio, 1993). Na vida real, a medida surge a partir das muitas demandas de controle das variações das dimensões dos objetos sobretudo nas construções, nas produções artísticas, nos deslocamentos; surge da necessidade de estimar valores e grandezas; está presente, nas compras, na culinária, nas ciências, nos esportes, indiretamente na leitura de tabelas, gráficos, mapas, notas de testes padronizados e outros. É nas relações do dia-a-dia que a medida aparece impregnada dos significados culturais das relações humanas que representa e comunica, assim como: a beleza na arte e arquitetura, o equilíbrio na engenharia, a comunicação de fenômenos sociais na estatística e outras. Do ponto de vista educacional é interessante observar que, como fonte de comunicação, ela pode servir de meio de manipulação da verdade de fenômenos sociais.

Todos estes aspectos, no entanto, não estão presentes quando a medida é ensinada na escola. Na sala de aula, é considerada um componente curricular, um conhecimento isolado dos significados da realidade sociocultural do aluno, justificado pela lógica de sua estruturação dentro da área de conhecimento matemático, como pré-requisito a outros conhecimentos e compartimentalizado em disciplinas. Desta forma, a apredizagem deste conteúdo não só, se torna árida como subtrai à criança a oportunidade de apropriar-se de um instrumento intelectual que lhe possibilite a compreensão da realidade social em que vive (Dugas, 1991).

As diferentes formas de medida

A medida é a forma de expressar quantitativamente acontecimentos, fenômenos, objetos de nossa vida diária. Diz Frankestein (1989) que a medida é a descrição numérica de alguma coisa. Goblot (1927) afirma que toda a medida consiste em apropriar-se da qualidade sob forma de quantidade.

As maneiras de medir a variedade de grandezas são quase inumeráveis. Às vezes uma só coisa pode ser medida de diferentes maneiras. Vejamos um exemplo ilustrado por Bendick (1960)

Vamos supor que você trabalhe numa serraria. Compre toros de pinho de um madeireiro. Os toros são medidos em metro cúbico. Estes toros são transportados por trem até a sua serraria, para tanto eles tem de ser pesados, porque o preço do frete é por quilo. Suponhamos que você exporte esta mercadoria e ela vai ser transportada por navio, o frete oceânico é pago por tonelada. A mercadoria chega a um porto dos Estados Unidos, aí você paga o armazenamento no cais pela área que os toros ocupam. O americano que comprou seu lote não usa o seu sistema métrico, ele vai medir os troncos em pés cúbicos. Finalmente, você é pago com a moeda do país para aonde seus troncos foram embarcados.

Os troncos até serem transformados numa casa, em móveis, ou num barco serão medidos e pesados de várias maneiras diferentes. A mesma coisa acontece com quase tudo ao redor de nós.

Esta história serve para ilustrar como o homem é versátil na diversidade de formas que criou para medir. Desde os primórdios da civilização, convivemos com uma infinidade de padrões de medida, alguns variando, inclusive, de acordo com regiões e culturas. Hoje contamos com um sistema de medidas internacional, baseado no sistema de numeração decimal. Além deste temos unidades de medida não-decimais, as quais utilizamos em nosso cotidiano como, por exemplo, a unidade de tempo. A unidade de medida do tempo é o **segundo**, e a estrutura de seus múltiplos e submúltiplos não está baseada no

sistema decimal, mas sim no sistema sexagesimal. Os babilônios introduziram esta divisão do tempo. Eles conseguiram medir o tempo com precisão maior do que a que foi alcançada por outros povos vários milênios depois (Bendick, 1965).

A criação de um sistema universal de medida não foi obra do acaso. Em fins do século XVIII, com o avanço do comércio e da indústria, na Europa, tornava-se necessário que se afirmasse um linguagem universal de medida destinada a harmonizar a produção e as trocas. Foi na França que se iniciou o movimento pela uniformização dos padrões de medida. Lá se conhecia uma diversidade extrema de padrões, tanto que, afirma Saint Paul (1989), assim como existiam na França "tantos domínios, tantos lugares", existia "outro tanto de medidas". Foi uma lenta caminhada na França e no mundo para a criação e implantação do sistema métrico. Assim, após a Revolução Francesa, a Academia de Ciência de Paris, em 1790, criou uma comissão para decidir sobre a elaboração de um sistema padrão de medida. Em 1884 foi oficializado o uso do Sistema Métrico, na França. A aventura do metro se impôs e se transformou no curso do século XIX e XX em epopéias internacionais, graças à sua adoção por muitos países (Fauroux, 1989). O Congresso Americano, em 1866, permitiu ao povo o uso do sistema métrico mas não o tornou oficial no país. No Brasil, o sistema métrico foi adotado efetivamente em 1938.

O metro como unidade padrão

comissão de estudos, segundo afirma Fauroux, definiu que se deveria estabelecer uma unidade de medida em relação a uma entidade natural e universal: a Terra e seus meridianos, porque cada povo pertencia a um dos meridianos da Terra. O Sistema Métrico teve em suas origens os ideais universais da Revolução Francesa e por isso é considerado uma de suas grandes obras. O metro nasceu como uma fração de um meridiano terrestre. Com o tempo os cientistas se depararam com algumas dificuldades ao tentar medir um dos meridianos terretres. Adotou-se,então, um metro provisório, representado pela

distância entre dois traços marcados numa barra de platina conservada no Pavillon de Breteuil, sob a custódia do governo da França. A última definição do metro data de 1983 e conceitua o metro tomando como referência a velocidade da luz (Machado, 1993). Uma das principais vantagens do Sistema Métrico Decimal, que favoreceu sua difusão quase universal, consiste em apresentar a mesma estrutura decimal que é própria do sistema de numeração decimal hindu-arábico, conhecido universalmente.

As transformações nas formas e padrões de medida foram decorrência das mudanças no modo de produção e de vida do homem. Tudo indica que futuramente ainda poderão ser modificadas

A medida como interação entre a geometria e a aritmética

A Proposta Curricular, para o ensino de Matemática para o Estado de São Paulo, mais recente, deixa clara a importância do ensino da medida para a Iniciação Matemática. Considera que tanto o estudo dos números como o da geometria resultam mutilados sem um tratamento adequado da noção de medida nas séries iniciais. *"Tal noção é o fio que tece a junção dos dois grandes temas geradores, é o cimento na construção da noção de número e na arquitetura das relações geométricas mais básicas. Prescindindo-se dela ou relativizando demasiadamente seu papel, a noção de número carece de consistência, passando a se constituir apenas a partir de grandezas discretas, enquanto a geometria frequentemente tende a limitar-se aos aspectos lúdicos ou a um formalismo extemporâneo"* (São Paulo SE/CENP, 1988).

O National Council of Teachers of Mathematics faz referência à relação existente entre medida, número e geometria. A geometria e a medida estão conectadas entre si e se apóiam de diversas maneiras. O conceito de semelhança, por exemplo, pode ser usado como medida indireta para se determinar perímetro e área de figuras irregulares. A medida está também

conectada com o conceito de número. Para representar medidas utilizam-se frações, decimais e números racionais (NCTM, 1990).

É a partir da inter-relação *espaço-número-medida* que os conceitos matemáticos ficam impregnados de sentido. Durante o processo de construção do conhecimento de medida a criança experimenta concretamente a relação (espaço-medida) aplicando a extensão da unidade sobre a extensão da grandeza; realiza contagens (número), contando os deslocamentos da unidade sobre a grandeza.

Aleksandrov et alii (1988) considera que a medida de uma grandeza unidimensional pode representar a fusão de conceitos aritméticos e geométricos. Para medir o comprimento de um objeto, faz-se necessário dois tipos de operação: uma de caráter geométrico, a que aplica a unidade ao longo da grandeza a ser medida; a outra de caráter aritmético, a que calcula quantas vezes é possível repetir a operação anterior. Uma está estritamente relacionada à outra, dando lugar a uma nova operação: medir.

No processo de medida, nem sempre o cálculo aritmético será expresso por um número natural. Pode ocorrer, dizem os autores, que a unidade escolhida não esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Surge, então, a necessidade de fracionar a unidade para expressar exatamente a dimensão da grandeza em partes da unidade, o que não é possível fazer com números inteiros, mas com números fracionários. Novamente, fica evidente a interdependência entre as duas operações, a expressão numérica depende da operação de aplicação da unidade. Foi assim, segundo Aleksandrov et alii, que surgiram as frações, a divisão e a comparação de grandezas contínuas, ou seja, a medida. A interação entre a geometria e a aritmética, isto é, a medida contribuiu para a formação de um novo conceito de número como ampliação do número natural.

Dividir a unidade em partes significa que se pode dividir as partes novamente em partes e assim sucessivamente, até ser possível expressar exatamente a grandeza. Até quanto se pode dividir a unidade? Para se formular

uma resposta adequada deve-se recorrer a uma concepção de grandeza contrária àquela de grandeza discreta. A possibilidade da divisão ilimitada de uma grandeza sem que esta perca seu caráter essencial lhe dá o caráter de uma grandeza contínua. Encontram-se dessa forma, duas classes de grandezas, a discreta e a contínua, e suas respectivas representações matemáticas: o número e a extensão geométrica. Como vimos, anteriormente, o processo da medida consiste na interação operacional entre estas duas classes.

O modelo matemático original, fundamental, da continuidade é a figura geométrica: a linha reta, afirma Aleksandrov. Caraça (1975) aponta imagens da vida real que possam nos dar a noção intuitiva de continuidade. Sugere que podemos imaginá-la ou como o movimento de um carro sobre uma estrada, oposto ao movimento de um canguru; ou como a variação de uma barra metálica quando submetida à alta temperatura, oposta à variação que se teria cortando ou soldando pedaços à barra. Qualquer imagem que podemos subtrair dos fenômenos trará em si a noção de continuidade, sempre como variação por graus insensíveis, sem que haja saltos ou descontinuidades.

Por mais que busquemos ilustrar a noção de continuidade com imagens desse tipo, nenhuma delas satisfaz plenamente quanto a imagem da linha reta, introduzida pelo matemático Ricardo Dedekind, em 1872. Ele definiu-a através do seguinte postulado: *"Todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A,B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)"* (Caraça, 1975: 60)

Acreditamos que, à medida que a criança realiza, também na escola, experiências de medir ela poderá construir intuitivamente a noção do contínuo, distinguindo-a da noção de discreto, da qual se apropria bem mais cedo.

A noção de grandeza

Caraça (1975) afirma que medir envolve comparar. É relativamente fácil comparar dois objetos longos e retilíneos, como, por exemplo dois cabos de

vassoura, dois palitos, dois canudos, dois pedaços de barbante, dois sapatos, duas garrafas. Dependendo da forma do objeto, pode-se colocar um sobre o outro, fazendo coincidir uma de suas extremidades. Se os dois objetos não são transponíveis como, por exemplo, os dois pés de uma mesa, não se pode colocar um sobre o outro, pode-se então verificar sua igualdade ou não usando um terceiro objeto. Situações como esta, que solicitam o uso de um terceiro objeto para comparar as dimensões de outros dois, podem possibilitar o desenvolvimento da noção da propriedade transitiva.

Enquanto se trata de comparar objetos manipuláveis e possíveis de se sobrepor é razoavelmente fácil, mas como podemos imaginar, comparar objetos muito grandes, como as montanhas, os astros, ou muito pequenos, simplesmente imperceptíveis, como uma célula, uma molécula; ou comparar temperatura, calor, luz etc.? É claro que são necessários meios mais elaborados.

Fica evidente que, quando se trata de comparar para medir, não se pode fazê-lo sempre sobrepondo os objetos. É preciso estabelecer algo, comum aos objetos e comparável, sem precisar transpô-los uns sobre os outros. Como diz Rouche (1990), pode-se comparar aquela qualidade que os objetos têm em comum, e que dividem com exclusividade com todos aqueles que lhes são declarados iguais, do ponto de vista desta qualidade. Mas como descobrir esta qualidade, que não é nem a cor, nem a forma, nem o material de que é feito? Será que num objeto alongado existe um comprimento falante, que fala por si só? A noção de comprimento só é possível a partir de um conjunto de objetos. No pensamento de senso comum, afirma Rouche, existem primeiro os objetos, a grandeza é considerada como propriedade deles. A noção de grandeza pode ser dissimulada, pela experiência com os objetos, por trás de uma regra evidente: em todas as comparações de dois objetos, pode-se, sem alterar o resultado da comparação, substituir cada um dos dois objetos por um objeto equivalente.

A grandeza é algo que é comum aos objetos, ela não existe sozinha num objeto. Não existe a grandeza absoluta. O comprimento só existe na

comparação entre os comprimentos dos objetos. Para convencer-mo-nos disto, Rouche propõe imaginar-se, por exemplo, que na próxima noite, enquanto todos dormem, as dimensões de todas as coisas, aquelas do universo e ele próprio, serão diminuídas pela metade. Fica evidente a impossibilidade de verificar o acontecido através da medida. Esta, diz o autor, é a razão pela qual se matematiza a grandeza. O valor de uma grandeza pode ser estabelecido somente quando comparada com outra grandeza de mesma natureza. As grandezas variam uma em comparação a outra..

É preciso partir da experiência que a criança tem de medida, mesmo aquela implícita em locuções da língua materna e compreendida dentro de sua utilização familiar, como: maior, menor, dois, três, metade, três quartos, somar, colocar lado a lado, encher pouco a pouco, equilibrar uma balança etc., que podemos considerar meandros da realidade, subjacentes aos números e às medidas. Diz Rouche que se deve a Freudenthal o fato de ter chamado a atenção sobre o papel dos "fenômenos" na formação do pensamento matemático. Freudenthal chama de fenômeno todas as relações frequentemente familiares, entre os conjuntos de grandezas, de formas, de números e que se apresentam ao espírito como material e ponto de apoio para a formação do pensamento matemático em seu início. Ele chama estas noções, que se encontram no senso comum, de objetos mentais, que poderão auxiliar a aprendizagem da matemática mais desenvolvida.

Todas essas reflexões servem como referencial teórico para analisarmos e levantar suposições a partir das ações de medir das crianças. Com esta finalidade, focalizamos também a definição matemática de medida dada por Caraça pelo fato de encontrar nela uma representação de definições de vários autores, como Aleksandrov et alii (1985), Frankenstein (1989). E incorporando os elementos desta mesma definição, encontramos outras propostas: Estandares Curriculares y de Evaluacion para la Educacion Matematica (1991); Troutman

(1991); a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para o Estado de São Paulo.

O que nos chamou a atenção na argumentação da definição de Caraça é a forma de explicitar a relação de interdependência dos três aspectos constitutivos da idéia matemática de medir, enunciados por ele, que, em síntese, traduz a relação aritmética e geométrica de Aleksandrov. Foi este um aspecto inspirador para a análise, com enfoque na matemática, das noções supostamente expressas nas ações de medir das crianças.

Para se medir os objetos, diz Caraça, nem sempre é suficiente a simples avaliação **é maior que** ou **menor que**. Na maioria dos casos é preciso saber **quanto mede**, e para tanto, procede-se da seguinte maneira:

1º - estabelecer um padrão único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie; este padrão chama-se de unidade de medida da grandeza com a qual se está tratando;

2º - responder à pergunta quantas vezes?, o que se faz dando um número que expresse o resultado da comparação com a unidade. Este **número** chama-se a **medida** da grandeza em relação a **unidade** estabelecida.

No problema de medir, portanto, podemos considerar três fases, três aspectos distintos:- a **escolha** da unidade; a **comparação** com a unidade; a **expressão numérica** do resultado dessa comparação por um número.

Continua o autor, "*o primeiro e o terceiro aspectos do problema estão intimamente ligados e cada um deles condiciona o outro*" (p.30). A unidade pode ser escolhida arbitrariamente, mas, na prática, o número que se obtém como resultado da medição condiciona a escolha da unidade. Isto depende da natureza das grandezas que se quer medir. Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas quantas forem as unidades com as quais será medida.

Como se manifesta esta interdependência entre os três aspectos constitutivos da medida nas ações de medir da criança, esta é uma das questões de nossa investigação.

Um dia o homem começou a medir

O desenvolvimento da matemática não consistiu algo parte da vida comum do homem. A história da matemática, no período de seu surgimento, é praticamente inseparável de toda a história da humanidade. As formas e os caminhos do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos são diferentes, apresentam as características culturais próprias de cada povo. Não obstante esta diversidade, afirma Ribnikov (1974), é comum a todos os povos que os conceitos básicos da matemática, como o conceito de número, figura, área, medida, prolongação infinita da série natural e outros, têm sua origem nas atividades práticas e atravessam um longo período de aperfeiçoamento. D'Ambrosio (1993), ao analisar a origem etimológica da palavra "matemática", propõe que a Matemática pode ser considerada como a arte ou a técnica de explicar, de conhecer, de entender, de agir numa situação cultural em que se situa esse modo de pensar.

Os motivos que nos levam a abordagem histórica da medida são sobretudo de ordem pedagógica. São aqueles apontados por Miguel (1993), ao discutir a função pedagógica da história levantada por Jones, por quem a função pedagógica possibilita desenvolver um ensino de matemática com compreensão e significação. *"É claro que, subjacente a todo processo de ensino-aprendizagem que visa à compreensão e à significação, está o levantamento e a discussão dos porquês, isto é, das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios, procedimentos etc. por parte do estudante"* (Miguel, 1993: 124).

Os "porquês pedagógicos", comenta Miguel, são aqueles procedimentos operacionais que geralmente utilizamos em sala de aula, que se justificam mais por razões pedagógicas do que históricas. Entendemos que estes procedimentos não repetem a história e nem se constituem em informações isoladas desta, mas trazem implícitos em sua intenção pedagógica as razões históricas. Um exemplo disso seria a resposta que daríamos s questões

relacionadas ao enfoque pedagógico desta pesquisa: por que ensinar a medida através de atividades interativas, nas quais é dada a possibilidade à criança de controlar variações de tamanho usando, para medir, o próprio corpo ou outro instrumento de sua escolha; por que não ensiná-la diretamente como medir com os instrumentos convencionais, por exemplo com a régua? Não o justificamos somente porque este possa ser um possível caminho natural pelo qual a criança aprende a medida, mas porque acreditamos que desta forma problematizamos para a criança o controle de variações de tamanho, dando-lhe a possibilidade de significar culturalmente as suas ações de medir. Esta significação, nos parece, é que está na origem do processo histórico de medir.

Fazendo um percurso pela História da Matemática percebemos que medida e geometria estão dentro de uma relação de interdependência desde as suas origens. Eves (1992) se refere às primeiras considerações que o homem faz da geometria dizendo que parecem ter sua origem em simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Inúmeras circunstâncias da vida devem ter levado o homem às primeiras elaborações geométricas como, por exemplo, a noção de distância, a necessidade de delimitar a terra, a construção de muros e moradias e outras. Podemos afirmar que na origem de problemas geométricos concretos, com os quais o homem se envolve desde suas primitivas atividades práticas, está a necessidade de controlar as variações de dimensões com as quais se defronta ao delimitar seu espaço físico para morar e produzir. Struik, ao comentar sobre a tendência à abstração da ciência que surge em cada civilização, como tarefa de aplicação prática, afirma que desta forma *"a medição deu origem aos começos - mas não mais do que isso - da geometria teórica"* (Struik, 1989: 40).

Aleksandrov referindo-se à origem da geometria nas atividades práticas e nos problemas da vida cotidiana cita um trecho do sábio grego Eudemo Rodas: *"A geometria foi descoberta pelos egípcios como resultado das medidas de suas terras, e estas medidas eram necessárias devido as inundações do Nilo,*

que constantemente apagavam as fronteiras. Não existe nada notável no fato de que esta ciência, da mesma forma que as outras, tenha surgido das necessidades práticas do homem. Todo o conhecimento que surge de circunstâncias imperfeitas tende por si mesmo a aperfeiçoar-se. Surge das impressões dos sentidos, porém gradativamente se converte em objeto de nossa contemplação e finalmente entra no campo do intelecto" (Aleksandrov, 1988: 39)¹. Vemos na perda periódica da demarcação dos limites das terras para o plantio, imposta ao agricultor egípcio pelas cheias do Nilo, um elemento natural que coloca ao homem a necessidade de aprimorar suas técnicas de medir. A solução dos problemas concretos de medir levam o homem, também, a conhecimentos geométricos, medida que, para medir o espaço, é preciso representá-lo mesmo que intuitivamente.

Embora saibamos que a medição de terra não foi o único tipo de problema do cotidiano que contribuiu para as primeiras elaborações geométricas, contudo, queremos mostrar como a história releva a interdependência entre a medida e a geometria, já nas suas origens. O que nos leva a crer que o controle das variações das dimensões do espaço, as representações que o homem elabora dele e as relações entre elas tiveram em suas origens o mesmo tipo de necessidade prática.

A seguir, pretendemos reconstruir, dentro dos limites possíveis, a história da medida, buscando revelar suas origens culturais e modos de pensá-la e de fazê-la. Para nós, este é um caminho importante, que dá um significado mais amplo para uma investigação em ensino de medida do que apenas os resultados imediatos que dela possam advir. Estaremos nos restringindo pré-história e história da antiguidade, por acreditarmos que nestes primórdios encontraremos a base histórica da medida elementar.

¹ texto traduzido por nós.

A medida na pré-história

As primeiras concepções de número, de forma e de tamanho datam de tempos tão remotos quanto o da idade da pedra. Neste período, denominado paleolítico, os homens viviam em cavernas e em condições pouco diferentes dos animais, e com estes compartilhavam as necessidades de sobrevivência e de continuidade da espécie. Sua atividade principal consistia em recolher alimento onde fosse possível encontrá-lo. Dos animais se diferenciavam pelo aproveitamento de experiências anteriores e uso da memória para prover as suas necessidades. Confeccionavam os instrumentos para caçar e pescar. Ao fazê-lo, devem ter desenvolvido a percepção das diferenças de tamanhos, formas e espessura dos instrumentos. Desenvolveram a comunicação através de sons e sinais. Nos últimos tempos deste período, apresentaram sinais de evolução na comunicação e enriqueceram suas habitações com objetos e pinturas.

As pinturas, encontradas em cavernas da França e da Espanha (com mais de 15000 anos), segundo Struik (1989), revelam, sem dúvida, uma notável compreensão da forma e, matematicamente falando, uma compreensão de uma descrição bidimensional dos objetos no espaço. Supomos que pelo simples fato de reproduzir figuras que representavam objetos reais, desenvolveram também uma percepção intuitiva de redução proporcional das dimensões do objeto. Segundo D'Ambrosio (1993), o desenvolvimento mental do homem, neste período, é evidente, e a busca de explicações é inevitável. Isso faz com que ele procure conhecer e explicar não só o que pode tirar da realidade para a sobrevivência, mas também a própria vida em si e a morte. A busca da transcendência é expressa nos rituais religiosos, na arte, nos ornamentos do próprio corpo e nas danças.

Naquela época, porém, os homens fizeram poucos progressos quanto ao conhecimento de números e relações espaciais, até se dar a transição do tipo de atividade de mera coleta, reduzidas caça e pesca de alimentos, para a atividade de produção, a agricultura. Esta passagem significa um grande avanço

do homem, no qual sua atitude perante a natureza deixa de ser passiva, recolhendo dela apenas o que lhe oferece, e torna-se ativa, provedora de sua subsistência. Inicia-se um novo período, o neolítico, há provavelmente 10000 anos.

Hogben relata (1952) que no novo período, antes ainda do surgimento das antigas civilizações egípcias e sumérias, grandes descobertas acompanharam o homem. A gradativa substituição da atividade da caça e da coleta pela domesticação de animais e pelo plantio e a colheita de cereais proporcionaram ao homem a conquista de conhecimentos relativos ao controle da periodicidade, tanto da fertilidade do animal quanto do amadurecimento do plantio. O reconhecimento e o controle da passagem do tempo tornaram-se, assim, uma necessidade primordial na vida social do homem e impulsionaram o seu desenvolvimento cultural. O pastoreio e a agricultura assumiram papel essencial no desenvolvimento de técnicas de medir o tempo e o espaço. Os registros de tempo que datam deste período denotam conhecimentos dos movimentos do sol, da lua e das estrelas, e o uso do calendário está ligado às variações da vegetação com as fases da lua (Struik, 1989).

Além disso, o homem fixando-se na terra precisou construir sua moradia. A lida com o plantio deve ter-lhe ensinado que se tornava necessário fazer reservas de alimento para os tempos hostis à plantação, e que também era necessário construir celeiros. Escavações mostram que em alguns povoados o ritmo de aperfeiçoamento técnico foi muito acelerado. Desenvolveram a cerâmica, a carpintaria e a tecelagem. Trabalharam com a fundição de cobre e bronze. Tornou-se necessário medir o comprimento ou o volume de certos objetos. Os padrões eram grosseiros e muitas vezes provinham de partes do corpo humano, o que deu origem às unidades de medida como o dedo, o pé e a mão. Os nomes de "vara", "braça" e "cúbito" recordam este costume.

Existia uma atividade comercial considerável, o que supõe a determinação de valores padrão para efetuar trocas de víveres ou utensílios. Isto

promoveu também a formação de linguagens que exprimiam coisas muito concretas, mas já havia lugar para alguns termos numéricos simples e algumas relações entre as formas. As ocorrências numéricas inicialmente apresentaram um caráter mais qualitativo do que quantitativo, marcando somente a distinção entre um, dois e muitos. Mais tarde o conceito de número se desenvolveu devido as atividades comerciais e os números maiores são formados por um princípio aditivo

Nas construções de casas e celeiros, de cercados para os animais, o homem deve ter aprimorado as técnicas de medir, pois fazê-lo significava delimitar e cobrir um espaço onde pudesse abrigar-se; levantar com pedras ou com sarrafos algo parecido com as cavernas que seus antepassados habitavam. O que se transformou certamente no desafio de controlar as variações de tamanho e de distância, de desenvolver, entre outras, técnicas para comparar e medir alturas, comprimentos, e superfícies. Segundo Eves (1992), contribuiu ainda para o desenvolvimento de conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela e perpendicular.

Struik comenta que quando as casas dos agricultores indianos ou as casas de madeira dos habitantes da Europa Central eram construídas estabeleciam-se regras para a construção ser feita segundo linhas retas e ângulos retos. A palavra "reta" relaciona-se com "esticar", indicando a operação com uma corda; a palavra "linha" relaciona-se com "linho", o que mostra uma certa ligação entre a tecelagem e as origens da geometria. Isto foi também um dos modos pelos quais o interesse pela medição se desenvolveu.

A medida na história antiga

Nos períodos anteriores, que são caracterizados como pré-históricos, o homem acumulou experiências e conhecimentos, dos quais restam poucos documentos de forma a se poder reconstruir originalmente os modos de fazer e de pensar a matemática. Mas, sem dúvida, os grandes avanços que a história registra

nos períodos posteriores não deixam de ser documentos do que foi o acúmulo de conhecimentos anteriores e que dão origens a esses novos conhecimentos. As civilizações consideradas responsáveis pelos primeiros avanços históricos, como formas de sociedades tecnicamente mais evoluídas são as que surgiram durante o quinto, quarto e terceiro milênios a.C., afirma Struik. São as que se localizavam s margens dos grandes rios da Ásia, África e no Mediterrâneo.

As terras situadas ao longo desses rios podiam produzir colheitas abundantes, desde que as cheias fossem devidamente controladas e os pântanos drenados. O controle destes problemas exigiu a coordenação de uma administração central. A administração das obras públicas estava nas mãos de uma burocracia permanente, um grupo conhecedor do ciclo das estações do ano, do movimento dos astros, da arte de dividir os campos, do armazenamento dos alimentos e do estabelecimento de impostos. Usava-se uma escrita para codificar as exigências da administração. Os seus conhecimentos técnicos incluíam a medicina e a metalurgia, assim como as artes do cálculo e da medição.

As matemáticas orientais surgiram como uma ciência de caráter prático atendendo ao objetivo de facilitar o cálculo do calendário, administração das colheitas, organização e construção das obras públicas e cobrança de impostos. A ênfase inicial foi dada naturalmente aritmética prática e medição. Em decorrência da natureza das necessidades práticas que, em todas as culturas, estão na origem da organização das relações entre os homens, o cálculo e a medição foram as primeiras criações matemáticas. Struik observa que uma ciência cultivada durante séculos, cuja tarefa não é somente a aplicação em atividades práticas mas também a transmissão de seus segredos, desenvolve tendências para a abstração. A aritmética transformou-se em álgebra porque se tornou uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pela mesma razão, a medida deu origem aos começos da geometria teórica.

Apesar de ter um comércio bem desenvolvido a economia destas sociedades antigas era essencialmente a agricultura e estava centralizada nas

aldeias, que normalmente eram auto-suficientes e caracterizavam-se pelo isolamento e tradicionalismo. Apesar das semelhanças existentes na estrutura econômica e nos traços essenciais do conhecimento científico, permaneceram sempre diferenças notáveis entre as diferentes culturas

A medida no Egito

A civilização egípcia desenvolveu-se s margens férteis do rio Nilo, ao norte da África. As terras de cultivo eram localizadas numa faixa estreita, ao longo do rio. Todos os anos as inundações invadiam estas terras, destruindo as demarcações. Os medidores oficiais eram obrigados a medir cada parcela de terreno, anualmente, após as cheias. Ao que parece, a quantia do tributo sobre o terreno era proporcional a sua dimensão. Em decorrência desta prática, desenvolveram técnicas de medição de área, entre elas a da *triangulação*, método seguido por topógrafos de todas as épocas. Se pensarmos, como observa devidamente Hogben (1952), sobre o quanto deveriam entender de formas e áreas de triângulos, podemos compreender o muito que os matemáticos dos tempos posteriores devem aos conhecimentos práticos dos egípcios.

Através da arte da agrimensura desenvolveram uma geometria prática. Caraça, fazendo referência origem da geometria, cita um trecho do Livro II (Euterpe), da obra do historiador Heródoto *"Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos"* (Caraça, 1975: 32).

Eves (1992) comenta a respeito dizendo que este relato localiza na agrimensura prática dos egípcios os primórdios da geometria como ciência.

A maior parte dos conhecimentos que se tem hoje sobre a matemática egípcia é proveniente de dois papiros: o Papiro de Rhind, que contém 85 problemas, e o Papiro de Moscovo, com 25 problemas. A matemática neles desenvolvida tem o caráter de uma aritmética baseada num sistema de numeração decimal aditivo, a multiplicação está reduzida a adições sucessivas. Alguns problemas neles desenvolvidos são de natureza geométrica, relacionada, na sua maior parte, com a medição.

As construções monumentais como as pirâmides constituem documentos vivos da engenharia egípcia. Bem mais recentes do que os papiros, são uma demonstração do domínio do cálculo e da medida, além de conhecimentos físicos que esta civilização atingiu em torno do ano 3000 a.C. O sistema rudimentar de medida que bastava a seus antepassados já não era suficiente para os construtores de grandes templos e pirâmides. A respeito, Hogben comenta que um lavrador, ao projetar seu abrigo, poderia dizer: *"Farei minha cabana com 6 pés de fundo, 4 de largura, e o teto colocarei a um palmo acima de minha cabeça"* (Hogben, 1970: 17).

O construtor egípcio precisava saber traçar ângulos sobre um terreno plano para obter o quadrado de cimentação. Também precisava saber traçar ângulos no ar para comprovar se as paredes estavam totalmente retas. E, para tanto, não poderia servir-se de qualquer ângulo, era necessário que tivesse conhecimento do ângulo reto. *"Como é sabido que os egípcios usavam cordas para medir terrenos, é de se supor que, de algum modo, eles devem ter observado que unindo cordas de certa dimensão obtinham triângulos com ângulos retos"* (Hogben, 1970: 16).

Para edificações de grande escala, era necessário adotar medidas que fossem sempre iguais, sem importar quem as medisse. Em princípio, fundamentavam-se em proporções do corpo do homem. Estes padrões de medida

achavam-se marcados em réguas de madeira e de metal. No Egito, a medida principal de comprimento foi o cotovelo, era o comprimento do antebraço de um homem medido desde o cotovelo até o dedo médio estendido, que evoluiu para o cúbito padrão, representado por barras de pedra com o mesmo comprimento. Medir diretamente com estas barras os extensos terrenos não era prático e nem cômodo, por isso os agrimensores do rei passaram a utilizar cordas. Estas continham nós igualmente espaçados. O intervalo entre dois nós poderia corresponder a alguns cúbitos. É de se supor que as cordas para medir deram origem às trenas que usamos hoje. Através da luta constante com as enchentes que inundavam as terras demarcadas para o plantio desenvolveram as técnicas da medição de terras, que evoluíram para a forma de dividir os terrenos em figuras geométricas, a fim de determinar sua área e delimitar suas fronteiras.

Desta forma, o material contido nos papiros e em outros documentos, permitem afirmar que, conforme comenta Ribnikov (1987), por volta de 20 séculos antes de nossa era, no Egito começam a se formar elementos da matemática como ciência. Estes elementos apenas começam a se separar dos problemas práticos embora estejam inteiramente subordinados a estes conteúdos.

A medida na Mesopotâmia

A 1000 quilômetros do delta do Nilo, na Ásia, confluem outros dois rios, o Tigre e o Eufrates. A Mesopotâmia, região localizada entre os dois rios, é o berço de outras civilizações quase tão antigas quanto a egípcia. Estas civilizações passaram por várias fases de desenvolvimento, entre elas a babilônica, que consideramos aqui pela evidência de seus intercâmbios com os gregos e os egípcios.

As matemáticas, na Babilônia, atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias, comenta Struik. Textos datados como sendo do terceiro milênio a.C. revelam um sistema sexagesimal e posicional de numeração que supera o sistema egípcio aditivo. Este sistema parece ter-se

desenvolvido como resultado de técnicas administrativas relacionadas com a distribuição do gado e dos produtos agrícolas, como o trigo. As características estruturais do sistema persistem até hoje. O valor de posição está presente em nosso sistema decimal. A divisão atual das horas em 60 minutos e a divisão do círculo em 360 graus provém do sistema sexagesimal.

A geometria babilônica, assim como a egípcia, se desenvolveu a partir de problemas de caráter prático relacionados sobretudo medição. Na astronomia, que era também uma mescla de ciência e magia, igualavam-se ao nível do conhecimento dos egípcios. Um trabalho de astrologia inclui um estudo sobre a periodicidade dos eclipses (Hogben, 1970).

diferença dos egípcios, os babilônios desenvolveram uma considerável atividade comercial. Não possuíam madeira apropriada para construir, nem seda para vestir seus reis e príncipes, condimentos especiais para a corte, possuíam apenas metais preciosos para os ornamentos. Para suprir estas necessidades os mercadores atravessavam desertos e montanhas em busca de mercadorias. Em decorrência desse fato, a Mesopotâmia desenvolveu um sofisticado sistema de medidas. Chegaram a fazer o uso de balança e pesos padrão. Inicialmente usavam a cevada como moeda, por ser de múltiplas utilidades, servia para fazer pão, a cerveja e era consensualmente aceita em troca de mercadorias. Posteriormente, descobriram que a prata era mais prática para carregar e aceita por todos. Foram moldadas barrinhas de prata cujo valor era determinado pelo peso e vinha cunhado na barra. Pode-se dizer que a forma de troca estabelecida por eles constituiu o primeiro sistema monetário, como supõe Hogben.

Struik comenta que nas matemáticas orientais, incluindo as da Mesopotâmia, não se encontram tentativas de "demonstrações". Não era apresentada nenhuma argumentação, mas somente prescrição de regras para resolver problemas práticos. A matemática oriental parece nunca ter-se emancipado da influência de suas origens nos problemas de ordem tecnológica e

administrativa. Contribuíram, porém, para o avanço posterior da matemática como ciência. Através da intensa atividade comercial dos babilônios as suas tradições matemáticas se expandiram fora dos limites dos estados do Oriente Médio. Desta forma, por volta do primeiro milênio a.C., em vários países do Mediterrâneo, criaram-se condições tais que a matemática pôde chegar ao status de uma ciência autônoma. Ribnikov (1987), ao comentar isso faz , observações sobre a natureza desta transformação. Os conceitos, as proposições fundamentais tornaram-se objetos independentes do pensamento humano, e resultaram em formas suficientemente gerais e abstratas para introduzir demonstrações lógicas. Esta fase do desenvolvimento da matemática tem a sua maior força de determinação na Grecia Antiga, por volta dos séculos VI e V a.C.

A medida na Grécia

Em decorrência de guerras e migrações, acontecem neste período grandes mudanças socioeconômicas. O poder do Egito e da Babilônia ficou reduzido e novos povos passaram para o primeiro plano. Entre eles destacam-se os gregos. Struik (1989), ao comentar as razões dessas mudanças, afirma que a substituição do bronze pelo ferro baixou o custo dos instrumentos de produção, aumentou o excedente social, estimulou o comércio e permitiu uma maior participação do cidadão nas questões econômicas e de interesse público. Surgiram as cidades comerciais nas quais os cultos religiosos e os conhecimentos acumulados culturalmente não pertenciam mais ao domínio exclusivo de uma burocracia oriental. A nova organização social criou uma nova mentalidade, um novo tipo de homem, uma nova forma de pensar indepem das atividades práticas e teve o auge de seu desenvolvimento entre os gregos.

"O império grego, estabelecido mais que tudo por força de uma poderosa arma intelectual, pela capacidade de pensar de modo abstrato e definir estratégias de ação, caracteriza-se pela atração pelo intelectual, pelos jogos de

pensamento, pela linguagem e respeito por todas as formas de pensar" (D'Ambrosio, 1993: 101).

Com a fundação de Alexandria no século III a.C., intensificaram-se os contatos com o pensamento egípcio e babilônico, que tiveram influência nas mudanças do pensamento grego, o qual tinha como objetivo principal compreender, através de esquemas racionais, o lugar do homem no universo. Struik comenta que a matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. Neste contato com a cultura oriental, os gregos descobriram que os orientais tinham deixado de fazer a racionalização de sua ciência. Segundo D'Ambrosio, matemática grega com características de jogo intelectual incorporam-se o caráter de praticidade das matemáticas orientais.

Sob o pensamento grego, a geometria sofre transformações, deixa de ser um conjunto de procedimentos e conclusões de caráter empírico e se torna um conjunto de fatos geométricos que devem ser estabelecidos através de demonstrações por raciocínios dedutivos. Os gregos transformaram a geometria empírica dos egípcios e babilônios em geometria demonstrativa.

Com o avanço da geometria, a medida escapa ao campo dos números conhecidos até então, ao campo dos números racionais. Pitágoras descobriu os irracionais por meio da comparação de segmentos de reta incomensuráveis. Esta questão conduziu ao estudo da razão entre a diagonal e o lado do quadrado e descobriu-se que esta razão não podia ser expressa por números inteiros ou fracionários, únicos números conhecidos como tal. Esta descoberta perturbou a harmonia entre geometria e aritmética. A idéia de que este quociente entre duas grandezas incomensuráveis podia ser um número não vingou entre os gregos. O conceito de número irracional não se originou entre eles, foi uma contribuição de matemáticos orientais, afirma Aleksandrov (1988). Uma definição matematicamente rigorosa do número real só tem sido dada recentemente. Desta forma, o conceito de medida relacionado a grandezas incomensuráveis está

totalmente abstraído de sua natureza concreta. É tornado um fato puramente racional

Apesar de, as informações que se tem de documentos históricos serem descontínuas e escassas comparativamente ao acúmulo de conhecimentos construídos durante milênios, pode-se inferir a partir delas, algumas leis que sempre atuaram na construção contextualizada dos conhecimentos matemáticos. Para defini-las nos inspiramos na síntese apresentada por Ribnikov (1987) e que elaboramos conforme segue:

- As matemáticas têm origem em problemas práticos que envolvem a necessidade de cálculos aritméticos, medidas e construções geométricas;
- Pouco a pouco estes problemas se desprendem da natureza específica da realidade em que surgem e dão lugar s abstrações numéricas e geométricas com a qualidade de um ramo independente do conhecimento humano;
- Em decorrência destas abstrações, forma-se um sistema lógico que possibilita uma nova interpretação e aplicação destas abstrações a problemas práticos.

Os exemplos que a história nos transmite sobre as origens da matemática, e da medida mostram que o desenvolvimento que geralmente é dado ao ensino desta ciência, está despido da natureza humana de sua atividade criadora. Na verdade, a matemática é ensinada como um conhecimento absoluto justificável em si mesmo. Os conceitos matemáticos são ensinados isolados de significados contextuais, explicados segundo uma estrutura lógica justificada por uma exigência curricular de pré-requisitos. Este conhecimento compartimentalizado, árido e sem história subtrai do aluno a possibilidade de indagar e explicar a origem e a evolução das coisas.

A história da matemática está impregnada de razões humanas, e é nestas razões que buscamos também os fundamentos teóricos de nosso trabalho. Os modos de fazer e pensar, mediante os quais foi sendo construída a medida nos

diferentes contextos sociais, podem ser uma referência para o estudo das ações de medir da criança numa proposta de ensino. Fazendo uma analogia entre o elemento humano que está na origem do número e aquele que pode estar na origem da medida, podemos dizer que, assim como a necessidade de controlar a variação das quantidades levou o homem a criar o número, a necessidade de controlar as variações das dimensões dos objetos levou-o a medir o espaço. Este elemento, que surge das relações dos homens entre si e com a natureza ao construir a medida, consideramos como sendo um princípio orientador de como colocar o problema de medir para a criança.

Um outro aspecto importante, que depreendemos da história, é que a medida constituiu um caminho que contribuiu para a ampliação do conceito numérico do homem. Supomos que a criança, ao realizar experiências de medir a sua realidade circunstante, possa ser questionada sobre seu conhecimento numérico restrito, até então, aos números inteiros. O significado da fração, como um novo número, pode estar sendo colocado no momento em que a unidade escolhida não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Buscamos na história um substrato que dê significado humano à matemática ensinada em sala de aula, ou seja, aquele que dá movimento à criação de novos conhecimentos.

Metodologia: o problema e a solução construída

O nosso objeto de estudo, dada a peculiaridade de sua natureza de se caracterizar como uma pesquisa em ensino, exige a nossa inserção no ambiente onde o ensino acontece naturalmente, isto é, na instituição escolar. O ensino e a aprendizagem não ocorrem numa relação fechada e direta professor-aluno. As ocorrências do dia-a-dia, as relações interpessoais, os sentimentos, o que acontece dentro e fora da sala de aula, tudo influencia os eventos de ensino e aprendizagem. O que ocorre em sala de aula é influenciado pelo que acontece fora dela. Em decorrência, o objeto de estudo voltado para o ensino inclui o contexto sociocultural, no qual ele acontece. A criança deixa de ser um sujeito abstrato de pesquisa, e é considerada dentro do seu ambiente escolar natural.

Entendemos que a inserção no ambiente escolar requer do pesquisador uma ação participativa não apenas de observador do fenômeno ensino-aprendizagem. Ele deve agir como o mentor do ensino, planejá-lo, interferir na sua execução e observar. Neste caso, o pesquisador utiliza a intervenção objetivando a construção dos dados relevantes para a pesquisa. O pesquisador, nessa modalidade de pesquisa, comenta Oliveira (1993), coloca-se como elemento que faz parte da situação que está sendo estudada e sua ação tem influência sobre os dados, bem como se constitui um material importante para a pesquisa.

Tendo como objeto de estudo as ações de medir da criança pré-escolar em atividades interativas de ensino, este trabalho assume características de uma pesquisa interpretativa. Segundo Moreira (1990), a distinção analítica essencial que caracteriza a pesquisa interpretativa está entre o *comportamento*, considerado como o ato físico, e a *ação*. Ele define a ação como sendo o comportamento mais as interpretações de significados atribuídas por quem atua e por aqueles com os quais interatua. Neste trabalho nos referimos à ação de medir da criança

na conotação de Moreira. Como já afirmamos, as ações de medir não serão somente o comportamento físico perceptível, mas também os significados individuais e sociais que supostamente o produzem.

A sala de aula, o ambiente natural das ações de ensino, é vista como um ambiente organizado social e culturalmente, no qual ações mudam constantemente, significados são construídos e apropriados, trocados e compartilhados. Novamente vemos aqui que o contexto assume um papel relevante na pesquisa em ensino, dado os significados e as ações terem proveniência contextuais.

A preocupação primordial da pesquisa interpretativa é a particularização, ao invés da generalização. A busca não é de *universais abstratos*, aos quais se chega através de generalizações estatísticas, mas sim de *universais concreto*, que se atinge através do estudo detalhado de um caso específico, localizado culturalmente (Moreira, 1990).

A leitura exaustiva dos dados registrados deve chegar ao que Michelat chamou de "impregnação" de seu conteúdo (André, 1989). É através das leituras sucessivas que é possível perceber as evidências, os elementos mais significativos e as tendências dos fatos que estão sendo analisados. A organização das categorias, a partir das evidências, permite comunicar os resultados da pesquisa além da informação imediata dos dados.

Para atingir resultados que possam contribuir para o avanço da área de conhecimento em que se insere o problema, é necessário haver uma estreita articulação entre conteúdo e metodologia, de forma a se conceber que se a teoria vai sendo reconstruída no processo da pesquisa, movimento idêntico deverá acontecer com a metodologia. Esta estreita vinculação é a vida da pesquisa. O método não é algo externo à pesquisa, é constituído das idéias e ações que vão transando seus elementos. É ele que preserva a não-separação entre o conhecedor (o pesquisador), o conhecimento (o que será construído através da pesquisa) e o conhecido (os conhecimentos já produzidos a respeito do tema da pesquisa) de

forma que conjugue todos estes elementos num conhecimento não-fragmentado da realidade investigada.

Construindo nosso caminho

A entrada na escola significou inserir a pesquisa na rotina escolar. Estabelecemos contato com a Coordenação Pedagógica da escola que escolhemos, na fase do planejamento escolar, para que nosso trabalho viesse a fazer parte do planejamento no segundo semestre do ano letivo. Todas as classes de jardim e pré iriam trabalhar as atividades de medida naquele semestre. Escolhemos uma creche da rede oficial para desenvolver o trabalho e na qual já tínhamos mantido contatos anteriores com os educadores e com a Coordenação Pedagógica. Das quatro classes de jardim e pré, selecionamos as duas que, no planejamento diário, desenvolviam as atividades de matemática no período da manhã.

Fizemos a pesquisa em duas classes que apresentavam uma frequência média diária de 19 alunos por classe. Por se tratar de uma situação de sala de aula, estávamos condicionados à variação diária do número de presenças, fenômeno intrínseco a esta realidade, o que nos impossibilitava obter dados referentes sempre à mesma criança. Acompanhamos uma classe de jardim que abrange a faixa etária de 5 a 6 anos e uma classe de pré com uma faixa etária de 6 a 7 anos.

A inserção na realidade escolar significou também participar da rotina do professor e da criança. O que exigiu a participação da pesquisadora nos seguintes momentos dos trabalhos da escola:

planejamentos das atividades;

Foram realizadas quatro reuniões com as professoras das quatro classes. As reuniões tinham o caráter de planejamento das atividades de ensino e pesquisa, de discussão sobre os dados da aplicação e de orientação sobre as intervenções

junto às crianças. Além disso, discutia-se o conteúdo matemático da medida e os pressupostos psicogenéticos da formação da noção de medida na criança.

desenvolvimento da atividade em sala de aula;

As atividades foram desenvolvidas pela professora da classe com a presença e a participação da pesquisadora. A pesquisadora manejava a filmadora e fazia intervenções quando entendia que era necessário aprofundar e ampliar a ação de medir da criança. Estar em sala de aula significou familiarizar-se com o vai e vem das crianças dentro do espaço escolar, com seus comportamentos implícitos e explícitos, e com sua afetividade

reuniões com a Coordenação Pedagógica;

Com uma frequência quase semanal, fazíamos a avaliação do trabalho com a Coordenação Pedagógica avaliando sobretudo os avanços das professoras.

participação em reuniões de pais;

Participamos das reuniões de pais para comunicar e discutir a aplicação das atividades da pesquisa. Houve interesse por parte dos pais sobre o trabalho, tanto que, no decorrer do semestre em momentos ocasionais de encontro, relatávamos os comentários que as crianças faziam, em casa, sobre os jogos e histórias relativos às atividades;

conversas ocasionais;

Os encontros informais ocorridos antes e após o trabalho de sala de aula, foram momentos ricos de informação para a pesquisa. É nesses momentos que o professor faz os desabaços ou comentários sobre seus sucessos de sala de aula despidos das formalidades de reuniões e encontrávamos, neste ambiente descontraído, uma maior disponibilidade para as intervenções relativas ao trabalho da pesquisa.

Os instrumentos

Destacamos dois tipos de instrumentos que usamos na pesquisa, aqueles que contribuíram para a construção dos fatos, chamados de atividades, e aqueles que serviram para o registro destes fatos: a filmadora e o registro escrito. Na construção deles, era preciso levar em consideração o movimento mais geral do ensino, as múltiplas relações que o constitui e, ao mesmo tempo, o movimento particular da aprendizagem, as ações da criança. A melhor forma que encontramos para fazê-lo foi usar o registro video-gráfico combinado com o registro escrito. Tivemos o cuidado de particularizar cenas, buscando-as a partir do quadro mais geral em que se encontravam inseridas. Era preciso gravar os dois movimentos, o geral e o particular, a classe como um todo ativa frente à proposta da atividade e a criança que pergunta ou é perguntada, a criança que está concentrada em sua ação, a criança que está discutindo com a outra, ou seja, aquelas cenas que emergem do conjunto da classe como um fato que contribui para uma maior evidência das ações de medir das crianças. Muitas vezes deixamos de lado a câmara para fazer o registro escrito, porque se tornava impossível fazer simultaneamente uma interferência na atividade da criança e a gravação do fato.

As sessões de registros videográficos foram realizadas no período de setembro, outubro e novembro de 1993, numa frequência de 5 sessões semanais, conforme o calendário de atividades da creche.

A atividade de ensino e pesquisa

Nesta pesquisa, procuramos estabelecer a coerência entre conteúdo e a metodologia através da atividade de ensino e pesquisa. Referimo-nos à atividade segundo a concepção de Leontiev (1988), aquela que resulta de ações planejadas e atuações coletivas com um objetivo comum, incluindo tanto o indivíduo como seu ambiente culturalmente definido. Planejamos as atividades de forma que estas constituíssem, também para a criança, uma atividade. Era, portanto,

imprescindível que medir fosse uma necessidade real para ela e não uma tarefa com configuração de teste. Queríamos que as ações de medir acontecessem não sob o unidirecionamento da entrevista adulto-criança, mas como resultado de interações criança/criança, criança/adulto. A atividade deveria possibilitar que as ações fossem construídas a partir dos conhecimentos culturais sobre medida, e que possibilitasse o avanço para conhecimentos mais elaborados.

Como já temos argumentado, a atividade deve ter características tais que, segundo Moura (1992), coloque o pensamento da criança em movimento. Por meio dela, a criança será estimulada a manifestar seu conhecimento primeiro sobre medida, aquele que vem elaborando a partir do meio cultural no qual cresce e se desenvolve. O meio cultural, em que as crianças de nossa sociedade se encontram inseridas logo ao nascer, está impregnado da matemática dos números de contar e de medir. Devido a isso, fato, a criança adquire certamente uma experiência própria sobre medida, antes mesmo de aprendê-la na escola. Nossa intenção, mediante a atividade não consiste em reduzir as ações das crianças ao que elas já conhecem, mas oferecer-lhe situações que solicitem a reelaboração deste nível para um mais elaborado. Em decorrência, a atividade terá a característica de ser realizável pela criança através de interações com o adulto e com outras crianças. Uma modalidade que encontramos e que confere estas características à atividade é o jogo. Este, já experimentado por Moura (1992), com crianças pré-escolares e com a mesma função desencadeadora do pensamento, aproxima-se do que Leontiev (1988) chama de jogo didático e que nesta faixa etária se caracteriza como atividade principal da criança. O espaço vivencial que o jogo oferece à criança pode ser considerado como um bom indutor da manifestação de estratégias que ela elabora para resolver o problema ou questão colocada pelo jogo. Ao jogar, a criança está inteira, ela se envolve e se manifesta espontaneamente, sem as pressões que podem ser causadas quando a tarefa se estabelece numa relação direta com o adulto, como acontece com entrevistas ou testes.

Em síntese, em nosso experimento a atividade, como desencadeadora de aprendizagem, cumpre três funções essenciais:

- estimular a elaboração de estratégias para resolver questões relacionadas à medida;
- possibilitar que se estabeleça uma relação entre as estratégias de medir e o pensamento da criança;
- constituir-se num instrumento de ensino e pesquisa, isto é, ser planejada juntamente com o educador tendo por meta o ensino e a obtenção de dados reveladores das ações das crianças.
- ser instrumento de formação do professor ao orientar as ações deles tendo por base pressupostos teóricos que sustentem o ensino e a aprendizagem objetivados nesta pesquisa.

As atividades de ensino e pesquisa foram elaboradas visando orientar o professor no acompanhamento do processo de pensamento da criança e a fazer as intervenções de forma coerente aos objetivos da pesquisa. Tendo esta característica de orientação e de formação do professor, foram chamadas também de Atividades Orientadoras. Embora fossem planejadas pelo pesquisador, juntamente com os educadores, a configuração mencionada acima tornou-se necessária devido ao fato de as professoras não terem formação específica em matemática e nem experiência com pesquisa em sala de aula. Para garantir a uniformidade do trabalho por manter a estrutura geral da atividade, fizemos um caderno das Atividades Orientadoras de Medir, no qual incluímos todas as atividades elaboradas em conjunto com as professoras. Na atividade orientadora estão explícitos os conteúdos e os objetivos daquela atividade, o material alternativo a ser usado, a proposta de desenvolvimento e uma discussão sobre as possíveis ações das crianças e consequentes intervenções tal como descrevemos na apresentação de cada episódio. A discussão objetiva manter o educador atento às manifestações das crianças, a fim de que possa estabelecer uma relação de interação construtiva entre estas, o objetivo da atividade e sua intervenção.

Os episódios

Segundo Moreira (1990), os elementos focalizados pela pesquisa em ensino constituem episódios, ou seja, acontecimentos relativos ao ensino. Optamos por selecionar do registro videográfico episódios que, segundo a definição de Moura, constituem "*o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão*" (Moura, 1992: 77).

A leitura dos episódios consiste em reunir aquelas ações, palavras ou gestos que podem contribuir para explicar os significados das estratégias e ações que a criança constrói para solucionar os problemas relacionados à medida. É esta, sem dúvida, a tarefa mais difícil da pesquisa devido a forma sincrética de a criança se manifestar diante de um problema. Muitas vezes uma palavra ou um gesto contém um significado e um sentido possíveis de serem desvendados, proporcionando à criança outros momentos nos quais possa se manifestar. É preciso muitas vezes dar oportunidades diferentes para a criança manifestar o mesmo conteúdo. Frequentemente, as ações que ocorrem num episódio terão explicadas as relações que lhe deram origem noutros episódios.

A análise

Já que nos propomos estudar as ações de medir da criança em situações interativas de ensino, não podemos nos deter somente na observação dos fatos e numa consequente descrição deles. Este tipo de análise poderia levar-nos a deduções ingênuas, como a de tomar a aparência pela essência dos fatos (Kopnin, 1972), uma vez que dois processos que se manifestam ao observador atento, de forma semelhante, podem apresentar diferenças profundas na sua essência. Assim, duas crianças que medem igualmente, contando seus passos, podem apresentar diferença substancial na compreensão da medida. Enquanto uma pode estar simplesmente contando passos - como se estivesse contando

objetos inteiros -, a outra pode estar aplicando a dimensão do passo sobre uma grandeza, usando-o, portanto, como unidade de medida.

O fato de buscarmos construir, com a atividade de ensino e pesquisa, uma situação educacional que favoreça o estabelecimento das propriedades psicológicas que caracterizam a zona de desenvolvimento proximal, afasta-nos da possibilidade de uma análise de fatos isolados ou de objetos estáticos. Pelo contrário, a própria natureza dos processos, que se estabelecem numa situação de ensino, requer que se revelem os significados e as relações subjacentes às ações de medir da criança.

A análise dos episódios fundamenta-se nos dois enfoques educacional e matemática, que já discutimos. Buscamos nas ações das crianças, manifestas nos episódios, os elementos cognitivos relacionados ao conceito de medir, construídos interativamente. Ficou evidente que as ações de medir das crianças estavam impregnadas de outros aspectos que não só o cognitivo e que, por conseguinte, deveriam ser relevados na análise. As evidências de aspectos como o imaginário, o simbólico, os significados culturais e o lúdico nos levaram a considerá-los sob um enfoque mais geral, que denominamos de educacional. Estes aspectos são colocados em movimento através de uma situação educacional de ensino, e ao mesmo tempo contribuem para a formação integral da criança, não só intelectual. Fundamentamos o aspecto educacional da análise na teoria sócio-histórica do desenvolvimento e aprendizagem.

Para termos uma leitura mais clara dos aspectos matemáticos que supomos presentes nas ações das crianças, destacamos na análise estes elementos e os organizamos numa tabela, de forma a evidenciar sua evolução na sequência dos episódios. Este destaque tem apenas uma conotação metodológica de comunicação.

Os episódios de ensino e suas análises

É sobretudo na análise dos episódios que nos encontramos diante do desafio de responder à questão central de nosso trabalho, ou seja, quais são as noções manifestas pelas ações de medir da criança, construídas interativamente em situações planejadas de ensino.

As evidências das idéias de medir serão buscadas em todas as formas de comunicação, através das quais supomos que a criança esteja manifestando um processo de solução da situação-problema com a qual estiver envolvida. Assim, serão focalizadas ações, falas, gestos, manifestações de emoções, omissões e envolvimento da criança e do adulto que atuam na atividade.

Para buscar as evidências das ações de medir das crianças vamos analisar os episódios a partir dos enfoques fundamentados no referencial teórico. Estes estão definidos do ponto de vista da matemática, e do ponto de vista educacional. As análises serão assim enfocadas nos elementos matemáticos da idéia de medir e nas interações que propiciam a construção coletiva dos significados de medir e a apropriação destes pelas crianças envolvidas na construção

A referência ao termo episódio está na definição usada por Moura (1992), que o define como "*o conjunto de ações que desencadeia o processo de busca da resposta do problema em questão*" (Moura, 1992: 77) Fazendo uma interpretação segundo as características deste trabalho, definimos episódio como sendo o momento que se caracteriza pelo conjunto de interações que propiciam a construção da solução da situação-problema de medir.

Teoricamente, a análise é fundamentada na concepção sócio-histórica da origem do conhecimento, que, aplicada à educação, postula o processo de aprendizagem/desenvolvimento como consequência do conteúdo a ser apropriado, mediado por signos e instrumentos com significados comuns ao adulto e à criança.

As possibilidades de aprendizagem sob este enfoque teórico não estão na dependência do nível de desenvolvimento da idéia de medir, alcançado pelas crianças, mas dependem principalmente daqueles que ainda estão em formação. Desta forma, os estágios cognitivos da medida, postulados por Piaget, contribuem para este trabalho apenas como referência teórica de definição de níveis pelos quais a criança pode passar, e não como um pressuposto básico para análise dos processos de desenvolvimento da noção de medir.

Apresentamos a análise de oito episódios que selecionamos, segundo as características definidas acima, de oito atividades de ensino e pesquisa aplicadas na ordem em que vêm relacionadas a seguir. Na forma de apresentá-los destacamos o objetivo da atividade a que se refere o episódio, uma breve descrição da atividade, a descrição da situação-problema desencadeada pela atividade e a descrição da situação interativa na busca da solução. Fazemos a discussão buscando revelar as ações de medir sob três aspectos: o cultural, o matemático, o educacional. Posteriormente, na síntese dos resultados, esses ficam reunidos em dois enfoques de definição e organização dos dados: o matemático e o educacional. Nos diálogos dos episódios abreviamos os nomes das crianças e as indicações P e P2 referem-se respectivamente à professora e à pesquisadora.

A sequência dos episódios e das respectivas atividades é a seguinte

Episódios	Atividades:
Episódio 1	- "O que significa medir?"
Episódio 2	- "Quem consegue encontrar objetos do mesmo tamanho?"
Episódio 3	- "Lança moeda"
Episódio 4	- "Quem andou mais?"
Episódio 5	- "Salto em distância"
Episódio 6	- "A feira de objetos"
Episódio 7	- "Concurso de altura"
Episódio 8	- "O Curupira"

Episódio 1

"O que significa medir?"

O objetivo desta atividade consistiu em tomar conhecimento das noções culturais de medir que a criança traz elaboradas no início da aplicação das atividades.

Antes de desenvolver a primeira atividade sobre medida, a professora dispõe as crianças em semicírculo e inicia uma discussão sobre o que significa medir.

Episódio

P - Hoje, a gente vai tá conversando um pouco sobre o que é medir, alguém sabe o que é?

Várias crianças levantam a mão.

P - Fale, Mel.

Mel - Medir é quando a gente come alguma coisa, a gente vai medir, vai ver quanto pesa.

Raf - É, tem que pesar o frango.

P - Então, o peso é medida?

- Onde mais a gente usa a medida? Algumas crianças levantam a mão.

- Fale, Jul

Jul - Ó, o bebê não vai pra medir? É pra saber o tamanho. Quando a gente quer saber assim se ele pesa 5 quilos, então ele vai medir quanto tá lá.

P - Mas para a gente saber o quilo a gente tem que medir, como?

Jul - Isso daí eu não sei, não.

P - Mas para saber o tamanho?

Jul - É preciso medir, medir..., (e faz um gesto como quem está pensando), e depois acrescenta. - com uma régua.

P - A régua a gente usa pra que então?

Rafel - pra cortar papel.

P - Pra que?

Rafel - Também pra medir o papel.

Ae - Uma vez, né, eu ganhei um chinelo que ficou muito grande. Então minha mãe deu para minha prima, que calçava o número 27.

P - É, o número que a gente calça é pra saber o tamanho do sapato.

Neste momento, as crianças, tiram ou olham por baixo de seus calçados, para saber que número calçam.

Discussão

Aspectos culturais

Muitos autores compartilham da idéia que a aprendizagem infantil começa muito antes de a criança ingressar na escola. Assim, podemos supor que ela traz para a escola um conhecimento de medida adquirido culturalmente do que ouve e vê em seu meio ambiente. Neste episódio, as crianças manifestam, através da linguagem oral, o conhecimento cultural de medida que têm elaborado e que é definido por "ver lá", num instrumento, "quanto mede", e que parece advir da observação do uso que os adultos fazem da medida. Para elas, medir significa saber o peso, o tamanho, o número que calça, significa usar uma régua. Mas este conhecimento, como parece evidente no diálogo, não é um conhecimento matemático da medida. Ao ser perguntada "como medir o peso", Jul expressa que "isso daí" ela não sabe. Estes conhecimentos, sem dúvida evidenciam que a noção de medir está associada a um número. Medir, para Me, é saber quanto a gente comeu, para Jul, é saber quanto pesa e mede o bebê, para Rafa, é quanto pesa o frango, e, para ele mesmo, a régua "de cortar papel" serve também para dizer quanto mede o papel.

Há outros dois aspectos que podemos relevar das falas das crianças. Um é definido pela noção de que medir representa ações que têm algo em comum, isto é, a quantidade, e estas ações não estão necessariamente relacionadas somente pessoa humana. De fato, de suas falas advém que pesa-se tanto o bebê quanto o frango, mede-se tanto o tamanho do bebê quanto o do papel, tanto do pé quanto do sapato. O outro está relacionado idéia de que

medir refere-se a propriedades diferentes dos objetos: mede-se peso, tamanho, a quantidade que se come. Contudo, estas idéias não expressam um nível de abstração a ponto de conceber estas propriedades intelectualmente, independente do objeto, e poder representá-las por uma quantidade de unidades pertinentes e universais. Jul não sabe que para “determinar o quilo” é preciso medir.

As crianças manifestam através de colocações orais que medir está relacionado com um número, sem que saibam como. Mais uma evidência deste fato pode-se encontrar no relato de Ae, do qual se depreende que ela está entendendo que número do sapato e tamanho do pé têm alguma relação com a medida. Este conhecimento primeiro parece generalizar-se pelo grupo quando a professora confirma que o número do sapato está relacionado ao tamanho do pé. A informação parece interessar a todos porque a ação da grande maioria é verificar o número de seus calçados. Não se pode inferir deste fato que o grupo tenha avançado para um novo conhecimento. A colocação de Ae veio reforçar e ampliar o conhecimento que já possuíam, através de uma nova ilustração, dando um novo sentido para a noção de medida relacionada a um número, ou seja, a medida do pé-número do sapato.

Aspectos matemáticos

Analisando a manifestação da noção do ponto de vista matemático, nos parece que, das ações de medir com as quais eventualmente estas crianças tenham tido contato, tem ficado mais evidente, para elas, a “expressão numérica da medida”. Esta aparece como um conhecimento isolado, deslocado das relações operacionais de medir. Para as crianças está claro que medir é dizer quanto mede, mas não está claro como medir. Saber que a medida é um número é um conhecimento matemático da medida necessário, mas não suficiente. É preciso que a criança elabore este número expressando a comparação da unidade de medida escolhida com a grandeza a ser medida. Certamente, através de vários desafios para controlar variações de tamanho ela poderá construir gradativamente

a qualidade do número que expressa a medida e portanto as relações geométricas e aritméticas que levam a este número. O que queremos mostrar também é que este processo se potencializa a partir do conhecimento cultural da medida que a criança traz para a escola.

Das falas das crianças podemos destacar também aquelas expressões que envolvem símbolos matemáticos relacionados a medida, como "medir o peso", "medir o tamanho", "pesar 5 quilos", "medir com a régua", "número do chinelo". Já vimos, que estas expressões não correspondem ao significado matemático da medida, mas são indícios de que a criança já percebe que existem duas formas de operações sobre as coisas, a de contar e a de medir, e que ambas são representadas por um número. A criança ainda não percebe que o número que expressa a medida é diferente do número que expressa um conjunto de objetos. Neste caso, podemos dizer que o domínio da linguagem não está garantindo o domínio do seu significado operacional, no entanto, o domínio da linguagem tem um determinado significado de medida que permite a criança comunicar-se através dele, como podemos perceber na discussão com a professora.

Este conhecimento da medida, como sendo um número, que a criança traz da vivência de seu meio, deve estar impregnado do conhecimento de número que ela tem. Pesquisas têm mostrado, Piaget (1975), Moura (1992), Sinclair (1990), Kamii (1986, 1984), Rangel (1992), Carraher e Schiliemann (1988) que a criança inicialmente constrói a noção de número contando a realidade discreta, daí então elabora as estruturas operacionais do número, a ordenação e a inclusão hierárquica. E segundo Carraher (1986), só terá condições de entender o número fracionário como representação de grandezas contínuas bem mais tarde, em torno dos 9 anos.

Sob o ponto de vista do enfoque cultural, ou seja, como a criança aprende o número a partir das vivências numéricas em seu meio, acontece o que dizem os autores: estas vivências estão centradas na contagem da realidade discreta, porque, em geral, as suas interações de contagem com pessoas mais

experientes estão quase que circunscritas ao campo dos números naturais, com uma vivência muito restrita dos números fracionários. Diante destas considerações, podemos deduzir que o número que representa a medida, para as crianças que fazem parte deste episódio, é o que advém da contagem de objetos discretos. E este pode ser o conhecimento cultural que possibilitará as primeiras ações de medir destas crianças, mesmo que estas não decorram de uma compreensão operacional da medida.

Aspectos educacionais

Este aspecto cultural do conhecimento se constitui uma importante pista metodológica para a iniciação medida. Pois, sob um enfoque cultural do desenvolvimento aplicado educação, poderíamos considerar este conhecimento como um indicador de um desenvolvimento em potencial da noção de medir destas crianças. É possível sugerir a elas ações de medir, porque tentarão de alguma forma obter um número, ou seja, de alguma forma contar a grandeza que deverá ser medida. É dentro deste espaço de significação cultural da idéia de medir que a intervenção pedagógica poderá possibilitar a aproximação do conceito cultural do científico, como argumenta Wertsch (1990).

É importante relevar, também, uma das limitações que a estrutura desta atividade pode oferecer ao pensamento de medir destas crianças. Na verdade, esta atividade se desenvolve com base no discurso. A única forma de comunicação da idéia de medir é a fala. Nesta fase, em que a criança está construindo a linguagem, pode ocorrer que, ao tentar expressar sua idéia de medir mediante a fala, ela se sinta aprisionada por uma rede de regras da expressão lingüística que ainda não domina. Por este motivo, a manifestação de sua noção de medir pode estar aquém da que se pudesse expressar através de linguagens mais concretas, com o auxílio de instrumentos e demonstrações. Estas suposições nos levam a considerar que as idéias que levantamos neste episódio, certamente,

não representam o alcance das noções originais de medir que estas crianças possam ter construído a partir de seu meio cultural.

Observamos que este episódio serviu como um desencadeador de aprendizagem para o professor. Discutimos, a partir dele, o que podemos definir como conhecimento cultural, na concepção de Snyders (1985), e que Moura (1992) chama de “conhecimento primeiro”, ou seja, aquele que a criança já tem estabelecido e que contribui para a construção de um conhecimento mais elaborado, quando aprofundado, até atingir seu nível de superação. Assim, a concepção de que medir é ler um número nos aparelhos vai ser questionada durante o desenvolvimento das atividades, quando a criança será solicitada a medir com instrumentos que não trazem um número escrito, como o é medir com a palma da mão, com o pé, com um barbante e outros.

Concluindo, podemos dizer que neste episódio detectamos, apesar das limitações que a estrutura da atividade possa estar impondo ao pensamento da criança, que estas crianças conhecem um aspecto matemático da medida, que a define como expressa por um número. Embora deixem claro que entendem que este número tem sua origem da leitura de um instrumento, para nós, esta noção é um indicador prospectivo do desenvolvimento da idéia de medir, desde que seja possível fazer-lhes a pergunta, "quanto mede?", e que, certamente, lhes sugerirá uma ação de contagem.

Episódio 2

Quem consegue encontrar objetos do mesmo tamanho?

O Objetivo desta atividade consiste em comparar tamanhos de objetos com o auxílio de um terceiro objeto.

O jogo consiste em conseguir objetos que tenham o mesmo tamanho de um objeto modelo escolhido, dentre outros, por uma criança. São colocadas disposição das crianças caixas contendo objetos de formas e tamanhos diferentes, de onde podem selecionar o objeto que estimarem ter o mesmo tamanho do objeto modelo. Este, a cada jogada, é representado por um objeto diferente. As crianças estão divididas em duplas, cada dupla que conseguir um objeto do mesmo tamanho acumula um ponto no placar. Os objetos podem ser medidos com o auxílio de um barbante e são submetidos a avaliação da professora ou da pesquisadora.

Situação problema:

Duas crianças devem medir, com o barbante, o tamanho do canudo que escolheram como tendo o mesmo tamanho do objeto modelo.

Episódio

Durante o jogo, foi apresentado como objeto modelo um canudo de papelão. O educador organiza o jogo de modo que uma dupla por vez escolha o seu objeto.

Mi e Aman escolhem, um outro canudo e levam-no para a pesquisadora avaliar. Esta, enquanto posiciona a filmadora no tripé, dirige-se a uma das crianças perguntando:

P2 - Mi, você pode medir com o barbante o tamanho do objeto de vocês?

Mi retira da mesa o objeto modelo e segura-o na mão, em posição horizontal, e estica, ao longo do mesmo, o barbante deixando-o sobrar em ambas as extremidades, conforme mostra a figura 1.

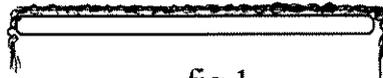


fig. 1

P2 - Qual é o tamanho? Mostre.

Mi retira o barbante e mostra o próprio canudo.

A Pesquisadora segura então o barbante na vertical e diz: - Mostre no barbante qual é o tamanho do canudo.

Mi mostra o conjunto canudo-barbante, onde o barbante é visivelmente maior do que o canudo, como se pode ver na figura 2.



fig. 2

P2 - Marque com o dedo, no barbante, até aonde vai o tamanho do canudo.

Mi passa o dedo ao longo do canudo. Neste instante Aman, que está próxima acompanhando o diálogo, espontaneamente indica com o dedo no barbante o ponto que coincide com a extremidade inferior do canudo. Mi, então, afasta a mão de Aman e segura o barbante no mesmo ponto.

P2 - Mi, mostre agora, no barbante o tamanho do canudo.

Mi afasta o barbante do canudo, e segurando-o nos dois pontos que representam as extremidades do canudo, estica-o e mostra conforme figura 3.



fig. 3

P2 - Agora, pode medir o objeto que vocês escolheram?

Mi solta um dos pontos do barbante.

P2 - E agora Mi, você perdeu o tamanho do canudo!

Mi pega rapidamente o canudo modelo e mede novamente seu tamanho com o barbante mas, desta vez, sem qualquer ajuda. Mostra então para o pesquisador o barbante esticado. Aman pega o canudo que haviam escolhido e aproxima-o paralelamente do barbante encostando uma extremidade num dos pontos aonde Mi está segurando. Sobra, então, um pedaço de barbante, (o que evidencia que o objeto escolhido era menor do que o modelo). Neste momento, a pesquisadora pergunta:

- Então, vocês escolheram um objeto do mesmo tamanho do modelo?
Mi acena com a cabeça que não.

Discussão

Os aspectos culturais

Neste episódio, podemos observar a evolução da noção de comparação de tamanhos de objetos, evidenciada no processo de Mi. Ela evolui de uma noção de identificação do tamanho com o próprio objeto para a noção da representação deste por um outro objeto diferenciado do primeiro. Isto é, Mi e Aman inicialmente concebem o tamanho do objeto como sendo o próprio objeto e, posteriormente, o representam com o auxílio de um barbante. A dificuldade inicial de Mi em representar o tamanho do objeto através do barbante parece decorrente da convicção de que o tamanho é algo do próprio objeto, definido pelos contornos deste e que, por isso, não é possível representá-lo a não ser através dele mesmo. Este fato fica evidente quando Mi, solicitada a mostrar o tamanho do objeto no barbante, insiste em mostrar o próprio objeto. Esta forma de conceber o tamanho do objeto advém de uma apreensão das propriedades perceptíveis do espaço e das poucas oportunidades que a criança tem em colocá-las em relação de maneira a abstraí-las intelectualmente. Atribuímos este modo de ver o espaço, nesta faixa etária, a um processo espontâneo da criança advindo das relações com o espaço que o meio lhe possibilita, e não como o produto de um processo endógeno, de uma capacidade natural de ela ver o espaço. Vemos aqui a importância da instrução informal enquanto perceber a qualidade do conhecimento que a criança traz e propiciar uma aproximação gradativa deste daquele científico. Acreditamos que o conceito espontâneo de tamanho é puramente denotativo já que é definido segundo as propriedades perceptivas, funcionais e contextuais do objeto a que se refere. A diferença deste, do conceito científico, segundo Panosfky (1992), implica uma posição determinada em

relação a outros conceitos. Isto é a relação do conceito científico com o objeto é sempre mediada por algum outro conceito. Desta forma o conceito espontâneo é sempre um mediador da aprendizagem do conceito científico. Assim, entendemos que o conceito perceptivo que a criança apresenta de tamanho, isto é o próprio objeto definido pelos contornos topológicos, pela fronteira que o distingue espacialmente de outros objetos circunstantes, é um ponto de partida para que o represente por um outro objeto da mesma forma, como no caso, o pedaço de barbante. Entendemos que a relação entre estas representações possibilitará a aproximação da uma noção geométrica da dimensão linear tamanho.

Os aspectos educacionais

No decorrer da atividade, as interações que vão acontecendo propiciam Mi a elaboração de novos significados da noção de comparação de tamanho. O posicionamento do barbante na vertical, pela pesquisadora, as questões colocadas e a demonstração de Aman, marcando no barbante a outra extremidade do canudo, são elementos externos que podem ter contribuído para que Mi elaborasse uma representação do tamanho do objeto através do barbante. De fato acreditamos que não é no vazio que acontece a aprendizagem, ou seja, não foi por um passo de mágica, que Mi passou do não saber para o saber.

Este fato evidencia que realmente houve um avanço na concepção de tamanho que Mi apresentava no início da atividade. Podemos dizer, apoiando-nos na teoria vygotskyana que ela internalizou um outro modo de representar a dimensão do objeto. Este processo acontece pela mediação dos significados que foram sendo desenvolvidos com o auxílio do barbante e das falas e que, internalizados, resultam na representação do tamanho do objeto. Este, que anteriormente não era concebido senão como sendo o próprio objeto, aparece agora diferenciado deste e, portanto, possível de ser representado por outro objeto que deslocado mantém-se igual a si mesmo.

Entendemos que a elaboração significativa da representação do tamanho, por parte de Mi, torna-se evidente na sua autodeterminação em representá-lo novamente, sem qualquer ajuda através da comparação com o tamanho de outro objeto, mesmo após perder a medida do canudo.

Um outro aspecto que nos chama atenção é o envolvimento das duas crianças e a receptividade em serem orientadas pelas questões que vão sendo colocadas pelo adulto. Mi e Aman estão envolvidas no jogo de medir querem verificar se fizeram um ponto, por este motivo, comparam os tamanhos dos objetos. É a partir deste envolvimento que elaboram a representação do tamanho de um objeto através do barbante. Todos os elementos que as envolvem no jogo, contribuem para esta elaboração. por este motivo supomos que as questões colocadas incidem numa situação de aprendizagem que Vygotsky teoriza como zona de desenvolvimento proximal. Onde os processos de mudança de um a outro nível é geralmente resultado dos esforços das crianças em estabelecer e manter coerência entre a sua própria ação e aquilo que o adulto lhe fala, Coll (1994), até conseguir realizar por si só a tarefa.

A origem desta incidência, nós a atribuímos ao clima de envolvimento que o jogo cria na ação individual da criança. Ela passa a ter significado porque está orientada por um objetivo coletivo. Supomos que a real necessidade de comparar o tamanho dos objetos, provocada pelo objetivo do jogo, contribuiu para a construção social de um significado específico de tamanho e para apropriação individual do mesmo. O novo significado do tamanho do canudo criado, neste episódio, certamente constitui para estas crianças um elemento que possibilita conhecer melhor a realidade tamanho do objeto.

Os aspectos matemáticos

O problema que Mi tem para resolver é mostrar o tamanho do canudo no barbante, a sua forma de resolvê-lo não é aceita pelo adulto e certamente percebe que a que sugere Aman é melhor do que a sua. Neste momento, ao

decidir pela forma mostrada pela colega, Mi constrói uma nova representação do tamanho do canudo, diferenciada deste, um tamanho de barbante que se sobrepõe exatamente ao tamanho do canudo. O pedaço de barbante passa a ter o novo significado de tamanho do canudo, assim interpretado pelo consenso de Mi, Aman e a Pesquisadora. Tendo esta conotação simbólica, é possível conservá-lo idêntico a si mesmo, mesmo quando transportado sobre outro canudo. Mi compara o tamanho do canudo modelo, representado no barbante, com o tamanho do canudo escolhido e verifica que não são iguais.

Não podemos porém, somente a partir destes dados, afirmar que as duas crianças tenham elaborado um símbolo que tenha a qualidade intelectual de uma representação generalizada da noção de dimensão linear, mas mesmo assim, consideramos uma primeira aproximação desta, que pode ser usada como referência, por parte do adulto que orientará subseqüentes ações de comparação de tamanho com estas crianças.

Concluindo, a análise deste episódio revela que a criança, ao comparar tamanho, pode apresentar um conhecimento inicial caracterizado por concebê-lo idêntico ao próprio objeto; e evoluir deste para um nível mais próximo da representação matemática, mas ainda perceptivo, onde representa o tamanho do objeto por um outro diferenciado e de forma mais linear que o original. Supomos que esta nova forma se manifesta uma apropriação da criança porque, posteriormente, ela soluciona sozinha o problema.

Episódio 3

Lança moeda

O objetivo desta atividade consiste em escolher uma unidade de medida para verificar um valor estimado de distância.

A classe é dividida em duas equipes. Duas crianças, uma de cada equipe, lança uma moeda em direção a uma trave, colocada no chão, a uma distância de mais ou menos 3 m de uma barreira de lance. O objetivo é estimar, em unidades estabelecidas pelos jogadores, a distância da trave até o ponto onde caiu a moeda lançada. Quem estimar um valor igual ou muito próximo do real, ganha um ponto para sua equipe. A forma de medir é discutida pelos jogadores e escolhida por eles. No caso, foi escolhido medir com a mão.

Nesta atividade, as intervenções se centram na forma como comparar a unidade escolhida, segundo a concepção da criança, com a grandeza a ser medida. Por exemplo, uma das crianças que se manifestou, Iva mostra sua maneira de medir. Usa uma mão só, mantendo os dedos paralelos, fazendo deslocamentos sucessivos, mas não adjacentes, da moeda até a trave, seguindo em linha reta (acompanhando uma mesma fileira de lajotas da pavimentação). Ao mesmo tempo, conta o número de vezes que coloca a mão no chão. Questionado pela professora sobre como poderia proceder para medir esta distância sem deixar espaços, Iva, repete a demonstração anterior, diminuindo, porém, o espaço entre uma mão e outra e obtendo um resultado numérico bem maior do que o primeiro.

Durante a discussão, a professora pergunta a Cel se teria uma sugestão para medir, ele acena com a cabeça que não. Uma outra criança, Jac, coloca uma mão paralela outra, seguindo em linha reta, da moeda até a trave. Quando a professora lhe pergunta se desta forma estaria medindo toda a distância da moeda até a trave, ele modifica a posição das mãos encostando uma na outra. O educador propõe então para a classe medir usando a maneira de Jac. Esta breve

descrição da discussão geral situa a forma de medida e a participação das crianças no episódio.

Situação problema

Uma criança verifica, medindo com a mão, o valor da distância que havia estimado.

Episódio

Três crianças participam deste episódio, Cel, Ander e Iva. Destacamos anteriormente a participação delas na discussão geral, para proporcionar uma leitura coerente da análise dos dados.

Ander joga a moeda, aproxima-se do ponto onde esta caiu, observa por alguns instantes e, percorrendo com os olhos o espaço entre a moeda e a trave, diz: - Nove, dá nove mãos.

P - Então meça.

Ander mede, enquanto a professora se ausenta para dar ajuda a outra criança. Começa a medir desde a moeda até a trave seguindo em linha reta. Após contar seis, distancia mais as mãos de tal forma que o número de mãos coincida com o valor que estimou e então diz dirigindo-se ao educador: - Mei, eu medi, deu nove.

P - Deu nove!, então anote seu ponto.

Enquanto Ander marca o ponto, Cel, fazendo uma expressão de choro, como quem está contrariado, diz: - Mei, o Ander não fez ponto.

P - Por que Cel, o que aconteceu?

Cel. estica as mãozinhas paralelas e distantes uma da outra e diz: - Ó, ele deixou pedaço.

P - Deixou pedaço como? Mostre como ele mediu.

Cel coloca as duas mãos no chão, paralelas e distanciadas.

Iva que estava próximo, acompanhando o que estava acontecendo, afasta as mãos de Cel e coloca as suas no chão, paralelas e juntinhas, e fala: - Ander é assim ó, sem deixar buraco. - E vai escorregando uma mão paralela e adjacente outra, mostrando para Ander como deve fazer para medir.

Discussão

Aspectos culturais

Do ponto de vista cultural, o fato de as crianças deste episódio contarem o número de vezes que colocam a mão no chão pode ser decorrente do conhecimento que têm elaborado a partir do meio, isto é, a medida corresponde a um número, como já observamos no episódio 1 (O que significa medir?). Portanto, é preciso contar para medir. Culturalmente, em geral, a criança conta objetos discretos, por este motivo supomos que sua primeira iniciativa, ao medir, é contar o número de vezes que coloca as mãos no chão, independente de manter uma regularidade na posição delas. Este conhecimento passa a constituir um patamar favorável à construção de novos conhecimentos, como comparar ponto a ponto a unidade-mão com a grandeza a ser medida, de forma a construir a representação geométrica da distância.

Durante a discussão geral sobre como medir com a mão o espaço da moeda até a trave, Cel não tem proposta; já Iva apresenta uma forma que consiste em fazer deslocamentos da mão, ao mesmo tempo que conta estes deslocamentos. Contar o número de vezes que coloca a mão no chão, desde a moeda até a trave, sem a preocupação de realizar deslocamentos, regulares é uma primeira idéia de medir que Iva manifesta ter elaborado até aquele momento. Esta idéia apresenta duas características do estágio pré-operacional da medida, caracterizado por Piaget (1948), pela ausência de conservação de comprimento e, conseqüentemente, pela ausência da noção de um espaço coordenado. Estas características se manifestam pelos deslocamentos irregulares da mão, embora, como comenta o próprio Piaget, possa ser este um primeiro “ensaio da elaboração da unidade”.

Acrescentamos a esta interpretação uma outra fundamentada nos conhecimentos culturais de medida que a criança possa já ter elaborado a partir do meio em que vive, sobre a aprendizagem que acontece anteriormente na escola

(Rey 1987) Nos parece que a criança aprende do mundo adulto, como já manifestado no episódio 1, que medir significa dizer “quanto é”. Medir é dizer um número. E para dizer “quanto é”, dado sua concepção de número, torna-se necessário contar. E como, nesta faixa etária, a maioria das crianças conta culturalmente objetos inteiros (Piaget et alii 1975; Kamii, 1984; Moura 1992), topologicamente bem definidos (quantidades discretas), do mesmo modo Iva conta quantas vezes coloca a mão no chão, percorrendo o espaço entre a moeda e a trave, sem que esta ação seja orientada pelo pensamento operacional de medir.

Portanto, do ponto de vista educacional, considerar o conceito cultural que a criança traz como mediador da aprendizagem do conceito científico é supor um desenvolvimento prospectivo deste. Acreditamos que o desenvolvimento do processo de medir não supõe em seu início as estruturas operacionais já formadas, mas a formação destas.

Aspectos matemáticos

O aspecto matemático relevado pela professora, neste episódio, refere-se à comparação da unidade com a grandeza a ser medida. Tanto que a sua intervenção sobre as ações de medir de Jac e de Iva parece subtender que estas crianças saibam reconhecer geometricamente a distância da trave até a moeda e entendam que para medi-la é preciso comparar a unidade, ponto a ponto, com esta grandeza. Iva, após a intervenção da professora, procura diminuir o espaço entre as mãos. Mas não apresenta uma forma correta de comparar a unidade-mão com a distância. Jac, porém, corrige a posição das mãos, e se aproxima da forma matemática de comparar a unidade-mão com a distância. E deve ser por este motivo que a professora sugere para a classe medir a exemplo de Jac. Podemos observar que Iva parece perceber uma regularidade na forma proposta de medir, que ele expressa corrigindo Ander, somente depois da intervenção de Cel, que se refere a “deixar pedaço” entre as mãos, como sendo o erro de medir de Ander. Cel, por sua vez, também apropriou-se da forma sugerida para medir, pois não

tendo anteriormente uma sugestão para medir com a mão, agora corrige Ander. Pode-se dizer que a partir da intervenção da professora sobre as ações de medir de Jac e de Iva, Cel tenha percebido que a regra para medir corretamente é fazer deslocamentos da mão sem “deixar pedaços”.

Quanto representação da distância, as crianças deste episódio parecem orientar-se perceptivamente para deslocar a mão, pela direção da fileira de lajotas, pois o fazem sem que isto tenha sido sugerido. Na verdade, o espaço entre a moeda e a trave é algo difuso, sem características topológicas perceptíveis ao nível da criança. Podemos dizer que a fileira de lajotas funciona como um traçado concreto da distância, como uma representação do espaço que deve ser medido.

Um outro elemento matemático, presente nas ações de medir destas crianças, consiste em expressar a comparação da unidade com a distância através de um número e que, no caso deste episódio, é expressa por um número inteiro de mãos. Contam cada deslocamento de mão e o número que resulta desta contagem é reconhecido como a medida da distância. No entanto, estes elementos matemáticos, embora constitutivos da medida, aparecem isolados, não-imbricados operacionalmente. A comparação da unidade-mão com a grandeza distância não é decorrente de uma comparação de grandezas contínuas. A necessidade de fracionar a unidade não está presente, bem como a questão da unidade padrão, pois cada criança usa a própria mão como unidade. Por estes motivos pode-se dizer que as ações de medir destas crianças não são decorrentes de uma compreensão matemática da medida.

O fato de Iva e Ander deslocarem suas mãos, desde a moeda até a trave, em linha reta, não é condição suficiente para que possamos dizer que esta é uma manifestação de que as crianças já tenham elaborado a representação euclidiana da distância. Para tanto, seria necessário verificar se, para elas, medir entre outros dois pontos distantes destes, mas pertencentes a retas representadas pela trave e pela linha da moeda, significaria estar medindo a mesma distância.

No entanto, se espontaneamente, orientaram-se pela fileira de lajotas no chão para manter-se em linha reta, consideramos também este um aspecto importante na evolução da compreensão da medida destas crianças. Pois, recorrer espontaneamente fileira de lajotas como orientação do percurso da mão, pode estar manifestando a necessidade de representar o espaço que não está topologicamente definido, para poder, então, medi-lo.

O perceptível é o espaço entre a moeda e a trave que, por não ter contornos topológicos definidos, é ao mesmo tempo difuso. Este espaço é chamado de distância. A proposta da atividade é medi-la. Como é que a criança vai desempenhar a ação de medir sobre um "objeto" que não tem contornos definidos? Percebe-se que sua primeira tentativa é representar este objeto e, no caso deste episódio, ela se orienta pela fileira de lajotas como representação da distância. A fileira de lajotas passa a ser o símbolo da distância que ela deve medir. A presença das lajotas, na atividade, foi um elemento não-planejado, apenas aleatório, porém, no processo de medir da criança, se constituiu um elemento essencial, percebido e transformado por sua imaginação em um símbolo da distância, um objeto concreto, "fileira de lajotas", que define topologicamente o espaço difuso entre a moeda e a trave. A fileira de lajotas adquire então um novo sentido, não é apenas pavimento, mas quando relacionada a medir distância pode estar representando esta, e orientando a transladação da unidade de medida da mesma forma que a mão está relacionada unidade de medida. Sob este ponto de vista, a mão também é um símbolo, o real que tem uma função específica, pela transformação simbólica passa a ter um novo sentido.

Podemos supor que experiências similares, em que a criança aplica medida sua noção cultural de contagem, e cria representações para poder aplicar este seu conhecimento, no caso deste episódio, para poder contar o espaço como um conjunto de objetos discretos, estariam contribuindo para que fosse construída a representação matemática da distância e a sua medida.

Segundo a teoria piagetiana, existe uma diferença qualitativa do ponto de vista psicológico na aproximação da criança da noção de distância e da noção de dimensão dos objetos. A dimensão é entendida como ligada a objetos “cheios” (Piaget 1948), onde tem algo a se apoiar. A distância, ao contrário, não se refere a objetos, mas ao espaço vazio compreendido entre eles. Segundo o pesquisador, se apresenta então o problema da representação da distância, questão independente tanto da distância perceptiva quanto do caráter propriamente métrico desta, que é não se resolverá antes que se consiga a representação da linha reta, conceito ao qual a distância está totalmente ligada. No caso deste episódio, não temos conhecimento se estas crianças tem elaborada a representação da linha reta, mas podemos conjecturar que a tendência a seguir a fileira de lajotas, sem que isto lhes tenha sido sugerido, pode ser uma tentativa de se orientar em linha reta, de um ponto ao outro do espaço a ser medido.

Aspectos educacionais

Podemos observar, porém, que mesmo estes elementos que aparecem isolados podem contribuir para o avanço do conhecimento de medida, quando a solução do problema de medir pode ser construída de forma interativa. Iva e Cel parecem se apropriar de uma nova forma de medir com a mão - deslocar uma mão paralela e adjacente a outra de modo a não deixar espaços entre uma e outra -, pois tomam a iniciativa de interferir e corrigir a maneira de medir do colega. Mesmo que esta apropriação tenha apenas a qualidade do entendimento de uma regra de medir corretamente, pode ser um conhecimento inicial que possibilite perceber que, numa situação de medir, em que a unidade escolhida não está contida um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida, é preciso fracionar a unidade, porque dada a regra, não é possível fazer nenhum ajuste de intervalos entre as mãos para que se obtenha sempre um número inteiro de mãos.

Cel reclama sobre o ajuste que Ander faz do número de vezes que coloca a mão no chão com o número que estimou, para conseguir ponto. Cel

deixa transparecer, de sua intervenção sobre a ação de medir do colega, que entende como medida correta a que é feita mantendo uma mão paralela e adjacente outra.

Mas o que aconteceu com Iva quando espontaneamente corrige a maneira de Ander colocar as mãos para medir, mostrando-lhe que deve deslocar uma mão adjacente outra “sem deixar buraco”? Nossa hipótese é que a reclamação de Cel, dizendo que Ander mediu errado porque “deixou pedaços” entre as mãos, fez com que Iva percebesse que deveria, então, colocar uma mão encostada na outra. Podemos dizer que Iva, neste momento, apropriou-se desta maneira de medir porque explica-a significativamente para Ander. Embora este avanço não seja caracterizado pelo uso operacional da mão como unidade de medida, por ele não questionar a aplicação de um tamanho padrão de mão para medir, fica evidente que efetua deslocamentos corretos com respeito a transladar a unidade ponto a ponto sobre a grandeza. Mesmo que esta ação possa ter o caráter psicológico da imitação, consideramos-na um aspecto importante no seu processo de construção da medida, pois, do ponto de vista de Vygotsky (1989) uma pessoa consegue imitar somente o que está presente em seu nível evolutivo.

Encontramos também um avanço em Cel que, não tendo inicialmente uma idéia para medir com a mão, mostra apropriar-se daquela do jogo, demonstrada por Jac na discussão geral desencadeada pela professora, de forma a usá-la para corrigir o erro do colega. Percebe-se que Cel não somente adaptou-se regra do jogo, bem como a internalizou, usando-a como referência para avaliar o resultado de Ander

A reclamação de Cel, de que falamos anteriormente, acompanhada de uma expressão de emoção no seu rosto, evidencia o seu envolvimento afetivo deste com o jogo. O fato de Ander ter arranjado o espaçamento entre as mãos, para conseguir pontos, significou para Cel uma transgressão da regra do jogo, pois a regra consistia em medir corretamente. O mesmo podemos dizer de Iva, quando reage imediatamente interferindo no erro transgressor de Ander, ao

perceber a expressão contrariada de Cel. O envolvimento afetivo com o problema faz com que estas crianças estejam atentas aos elementos cognitivos que envolvem a solução do problema, - medir o espaço entre a moeda e a trave - colocando uma mão paralela e adjacente a outra para que a contagem da distância seja correta e então comparar esta medida com aquela estimada. São muitas as relações que é preciso fazer para cumprir a regra com conhecimento, mesmo que este conhecimento não seja um conhecimento operacional de medida. Nos parece que a natureza lúdica da atividade proposta, é o elemento desencadeador do envolvimento afetivo que aqui foi evidenciado.

Brincar, para a criança, é o jogo sério do aprender, costuma-se dizer, "a criança leva a sério sua brincadeira". É o que seria este levar a sério? Nos parece que é também o que acontece com Cel e Iva, no jogo. A professora havia confirmado o ponto de Ander sem conferir se ele havia medido corretamente. Isto não pareceu um jogo sério para Cel, pois a transgressão da regra fica tacitamente aprovada pelo adulto. A evidência destes aspectos, no jogo de aprender, nos leva a entender que a criança participa de seu processo de aprendizagem e desenvolvimento integralmente.

No jogo as crianças exercitam sua imaginação. No jogo individual, normalmente a criança não faz o que não entende. No jogo social, segundo Vygotsky (1984), as crianças interagem, mediando cada um a aprendizagem do outro, aprendem a compreender significados do mundo, que, no nosso entender, até então não conheciam. Jogando, a criança pode avançar além do conhecimento cultural que tem dos conceitos envolvidos no jogo.

Do ponto de vista do ensino, podemos dizer que quando a criança experimenta situações de medir distância, ela pode estar interagindo com elementos que lhe possibilitam uma representação de distância que não supõe necessariamente a linha reta, como no caso da fileira de lajotas. Não se torna necessário esperar que a criança já tenha elaborado a noção de distância e de sua representação para propor-lhe situações-problema de medir distância. Se a

situação-problema lhe é proposta a partir de atividades lúdicas que lhe possibilitem colocar o seu conhecimento cultural em interação com o da classe, de forma que em suas ações e em suas falas estejam articulados alguns elementos como o simbólico, o real e o afetivo (que destacamos neste episódio), podemos dizer que esta situação de ensino é favorável ao avanço do conhecimento de medida da criança.

Ainda que não possamos afirmar, a partir deste episódio, que a criança tenha elaborado um significado matemático de medir com a mão, vemos que a intervenção dos “amplificadores culturais” (Mortimer, 1994), presentes no desenvolvimento da atividade (jogo, problema, experiência, as falas dos adultos e das crianças e os instrumentos), coloca em jogo elementos favoráveis aprendizagem, como o afetivo, o simbólico, o real e o cognitivo. E este movimento trouxe modificações na concepção inicial que Iva e Cel apresentavam. Pois Cel, que inicialmente não tinha elaborado uma estratégia, relaciona expressão “medir com a mão” o ato de efetuar transladações, com a mão paralela, entre a moeda e a trave; Iva, que fazia deslocamentos irregulares, corrige-os para transladações. Embora, sob o ponto de vista de Piaget, estas modificações não signifiquem desenvolvimento cognitivo da noção de medida, elas se constituem um novo patamar de conhecimento, para este tipo de problema.

Concluindo, na análise deste episódio revelamos: que estas crianças, ao medir a distância com a mão, apresentam um conhecimento inicial que consiste em contar o número de vezes que colocam a mão no chão independente de transladá-la regularmente; posteriormente, devido as interações que ocorrem mediadas pelo significado da regra de medir, apropriam-se de uma forma regular de medir com a mão, ou seja, fazer transladações da mão sempre idêntica a si mesma. Manifestam também uma noção espontânea de distância representada pela fileira de lajotas da pavimentação; e associam a comparação da unidade-mão com a distância medida a um número sempre inteiro de mãos.

Episódio 4

Quem andou mais?

O objetivo desta atividade consiste em comparar a medida da distância percorrida.

As crianças estão divididas em duas equipes. Duas crianças, uma de cada equipe, colocam-se de costas uma para a outra, posicionadas num ponto localizado mais ou menos, no centro de um espaço determinado como pista. Uma criança coordena a brincadeira e dá a largada gritando "já", e enquanto conta baixinho até cinco as duas crianças correm em sentidos opostos e param quando o juiz grita: "pare". Medem quanto percorreram e quem percorreu a maior distância, no intervalo de tempo da largada até a ordem de parar, ganha ponto para a sua equipe.

Antes de começar o jogo, a professora coloca em discussão como será medida a distância percorrida. Entre as sugestões dadas pelo grupo, com a mão, com um bastão, com uma régua grande, com passos, as crianças escolhem medir com passos.

Situação problema

Duas crianças percorreram, visivelmente, quase a mesma distância, mas as medidas apresentam valores discrepantes. O que pode ter acontecido?

Episódio

Para dar a largada, Be e Ma andam em direções opostas e em linha reta. Usam espontaneamente, como direção, as fileiras de lajotas da pavimentação e percorrem quase a mesma distância, sendo que Ma, percorre um pouco a mais.

Ro mede a distância percorrida por Be, com passos pequenos e de tamanho variável. Ca mede a distância percorrida por Ma com passos grandes e constantes, abrangendo em cada passada duas lajotas, sendo que, no final, ao sobrar uma lajota, conta como sendo um passo.

P chama a atenção da classe para os resultados das medidas dizendo: - Gente, Ro contou 12 passos para Be e Ca, 5 para Ma, quem ganhou?

Crianças em coro: - Ma. - Segue um pequeno tumulto. Dré e Fep discutem o problema. A professora percebe e pede a opinião de Dré.

P - O que você acha Dré.? - Fep, que discutia com Dré, toma a palavra e em voz alta continua a discussão com o colega.

Fep fala dirigindo-se a Dré: - Ele (Ro) contou tudo na linha, né Dré? Ele fez tudo errado. - Dré acena com a cabeça confirmando o que Fep diz.

P - Fez errado por que, Dré?

Fep - Porque ele ficou pisando na linha, né Dré?

Dré levanta-se e diz: - É assim, ó.- E vai colocando um pé e outro, centro a centro em cada lajota, tomando o cuidado para não "pisar na linha", partindo do ponto onde está Be, deslocando-se em linha reta até o ponto de partida e, ao mesmo tempo, contando os passos. Refaz depois a contagem, andando da mesma forma, no sentido inverso, do ponto de partida até Be e obtém o mesmo resultado de Ro. Enquanto Dré mede novamente o espaço percorrido, Mi aproxima-se do grupo que está discutindo e espontaneamente coloca: - Foi a Ma que ganhou.

P - Mi, por que você acha que foi ela quem ganhou?

Mi - Porque a Ca (que mediu a distância percorrida por Ma), andou com as pernas mais abertas e ele (aponta para Ro, que mediu a distância percorrida por Be), fez (o passo) mais pequeno, então dá mais.

Discussão

Aspectos culturais

Neste episódio, Fe, Dré e Ca recorrem espontaneamente contagem das lajotas para medir a distância, pois esta estratégia não foi discutida e nem sugerida anteriormente e nem mesmo fica assumida explicitamente por eles. Fep e Dré parecem deixar evidente que medem a distância fazendo corresponder um pé a uma lajota e para que seja a lajota inteira eles têm o cuidado de pisar no centro dela. Por isso, o erro de Ro, ao medir a distância percorrida por Be, consistiu em "pisar na linha", isto é, na emenda entre as lajotas, o que significaria não contar a lajota inteira.

Percebemos que as duas crianças medem a distância percorrida relacionando a frequência com que colocam o pé no espaço, definido entre o ponto de largada e o de chega, com o número de lajotas inteiras onde vão apoiando o pé. Este é o conhecimento de medir com passo que manifestam inicialmente, nesta atividade.

O outro aspecto espontâneo de medir a distância, que consiste em seguir a mesma fileira de lajotas, parece ter um duplo sentido, o de orientar os passos em linha reta, do ponto de largada ao ponto de chegada, ou vice-versa, e o de auxiliar na contagem dos passos, isto porque "por o pé na linha" significou, para Fep e Dré, contar errado.

Aspectos matemáticos

Analisando as ações de medir de Fep, Dré e Ca sob o ponto de vista matemático da seleção da unidade de medida, podemos observar que, embora tenha sido tirado no grupo que seria usado como unidade de medida o passo, eles, na verdade, contam as lajotas fazendo coincidir pé com lajota. Desavisadamente poderíamos dizer que fazem coincidir tamanho do passo com quantidade de lajota. Mas o número que resulta de suas medições corresponde quantidade de vezes que colocam o pé no centro de cada lajota. É evidente que esta forma de medir não é resultado da comparação da extensão do passo com a extensão da lajota. A unidade passo corresponde a unidade pé, que por sua vez corresponde a uma lajota inteira. Pé e lajota inteira estão sendo usados como objetos discretos e não como unidade de medida. Portanto o resultado da medida é expresso em um número inteiro de unidades passo.

Nesta situação-problema, a fileira de lajotas passa a ser uma representação da distância percorrida, no sentido de se constituir num traçado perceptível desta. A distância do ponto de largada ao ponto de chegada é um espaço definido apenas por estes dois pontos, e a fileira de lajotas define melhor, para estas crianças, este espaço. É esta, portanto, uma representação comum aos

três e que é comunicada através das ações de medir. O diálogo entre Fep e Dré demonstra que os dois usam a mesma linguagem de medir, tanto que Fep pede sempre a confirmação de Dré, quando expõe seu raciocínio.

Ao mesmo tempo que há um entendimento entre os dois, ao corrigirem Ro, parece lhes passar despercebido a forma de contar de Ca que, diferente deles, em cada passada, abrange duas lajotas, e, no último passo, uma. Pode-se conjecturar que Ca, contrariamente a Fep e Dré, esteja relacionando o tamanho de uma unidade-passo com o tamanho de duas lajotas. Para ela, medir a distância percorrida com passos é deslocar o tamanho do passo, sempre constante, ponto a ponto, ao longo desta distância. No entanto, quando sobra passo e falta lajota, Ca reduz o passo a uma lajota e conta-o como uma unidade-passo. Isto evidencia que Ca, embora esteja comparando extensão com extensão, não expressa numericamente a distância em partes de unidade.

Retomando a análise do episódio, no momento em que Mi entra em cena podemos inferir, da colocação dela, um avanço na noção de medir. Mi, ao ouvir o resultado de Dré, o que, após medir novamente, continuava sendo o mesmo de Ro, responde questão colocada inicialmente pela professora dizendo que "foi a Ma que ganhou". A razão de sua resposta está na relação que faz entre o tamanho do passo de Ro e o de Ca. A diferença de seu raciocínio para o dos outros dois consiste em comparar a extensibilidade do passo com a extensibilidade da distância. O tamanho do passo abrange o tamanho da lajota. O número de passos de Ro é maior, mas o tamanho dos passos de Ca é maior do que os de Ro. Parece que o caminho que Mi usou para explicar a veracidade dos resultados, não obstante sua aparente discrepância, é o de demonstrar que o número que expressou as medidas é relativo ao tamanho da unidade.

Podemos dizer que aparece, neste episódio, os primeiros rudimentos do pensamento de proporcionalidade de Mi. Como a questão colocada pela professora incidiu sobre a comparação dos valores das medidas, primeira vista incompatíveis com as distâncias percorridas, supõe-se que um provável

raciocínio tenha sido o estabelecimento da relação inversa entre número de passos e a sua dimensão. Ou seja, quanto menor o passo, maior é o número de passos que cabe naquela distância, que é o que acontece com a medição de Ro. A recíproca também é verdadeira, por isso 5 pode expressar uma dimensão maior que 12 porque representa uma quantidade de passos maiores, e por esta razão pode-se afirmar que Ma percorreu a maior distância. Mas, mesmo assim, Mi não dá conta, como Ca, de fracionar a unidade.

Fica evidente na ação de medir que Mi apresenta como estão relacionados os aspectos geométricos e aritméticos que, segundo Aleksandrov (1988), envolvem a medida. Aplicar os passos sobre a distância é uma ação que envolve noções geométricas, já contá-los advém de uma operação aritmética. A operação medir consiste em discretizar o contínuo geométrico, sem que sua natureza desapareça, para poder representá-lo mediante um número que corresponde exatamente às suas partes. No nosso caso, parece que Mi apresenta uma tentativa de discretizar a distância a ser medida, fazendo-se valer das lajotas da pavimentação. Mas não mantém constante a unidade de contagem das unidades discretizadas.

Aspectos educacionais

Estas crianças poderiam aceitar os resultados 5 e 12 sem questioná-los. Mas a intervenção da professora, chamando a atenção para os resultados, desencadeou o diálogo entre Fep e Dré, que perceberam um erro na medição de Ro e concentram-se em corrigir este erro. Mesmo que a correção dos dois não estivesse atingindo a questão central do problema, certamente contribuiu para que Mi, após se certificar que a solução dos dois não satisfazia, buscasse outra forma de solucionar o problema.

Fazendo uma análise do ponto de vista educacional podemos dizer que estas crianças participam da solução do problema como se este fosse uma situação real de medir, como se partissem de uma necessidade real de medir. Supomos que este envolvimento decorre da situação de jogo em que a atividade

os coloca. O jogo então tornou-se, para elas, uma atividade com as características que Leontiev (1986) define, em que existe um objetivo coletivo e todos se empenham em realizá-lo, cada um contribuindo com os seus conhecimentos culturais. Por este mesmo motivo ação individual adquire significado, o que provavelmente faz com que Mi, acompanhando atenta os diálogos, elabore a sua solução.

Estes conhecimentos colocados em movimento pela ação de jogar medindo, evoluem ao nível coletivo porque apreendidos ao nível individual. O que se pode inferir da solução elaborada por Mi, após perceber que a dos colegas não respondia questão do problema.

Concluindo, na análise deste episódio revelamos que, quando a unidade de medida proposta é o passo, as crianças podem apresentar uma concepção de passo que não corresponde dimensão (extensibilidade) de sua abertura, mas colocação de um pé ou outro no chão. Neste caso a quantidade de passos que medem uma distância corresponde frequência com que põe o pé no espaço delimitado como distância. Revelamos também a suposta relação entre o aspecto contínuo e discreto da medida que se manifesta na ação de medir de uma das crianças e como esta pode estar sugerindo os primórdios do pensamento de probabilidade.

Episódio 5

Salto em distância

O objetivo desta atividade consiste em medir a distância saltada com um instrumento não convencional.

As crianças vão participar de uma olimpíada, cujas atividades serão desenvolvidas durante as aulas de Educação Física e ao ar livre. A atividade "Salto em distância" faz parte das competições. As crianças, organizadas em duplas, recebem uma prancheta com papel e lápis para registrar a distância do salto de cada um. A professora propõe medir a distância com canudos. São colocados à disposição das crianças dois tipos de canudos: canudos pretos, de plástico, e canudos cinzas, de papelão e de diâmetro e comprimento maiores do que os dos anteriores.

As crianças, uma por vez, correm e saltam a partir de uma barra traçada no chão. Em seguida, marcam com giz onde caíram e medem a distância da barra até a marca.

Situação problema

Duas crianças saltaram e tentam medir com os canudos a distância saltada e registrar o resultado da medida.

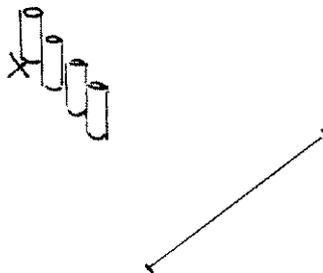
Episódio

É a vez da dupla Gui e Alê; Gui salta, Alê faz um X no chão, no ponto onde o parceiro caiu.

Gui mede a distância que saltou. Pega dois canudos pretos (iguais) e coloca-os em posição vertical, isto é, perpendicularmente ao chão a partir do X, deixando um espaço entre eles, como mostra a figura 1.

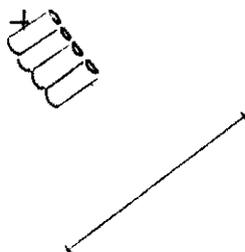


Alê vai trazendo mais canudos e colocando-os da mesma forma em continuação aos anteriores e da mesma forma. Gui acerta o arranjo, deixando os canudos igualmente espaçados, como mostra a figura 2.



P2 - Gui, não tem outro jeito de medir com os canudos?

Gui - Sim. E coloca a mão esticada por cima dos canudos, mostrando que são do mesmo tamanho e continua colocando os canudos como anteriormente, na posição vertical. Neste momento, o vento derruba os canudos. Gui abandona a forma anterior. Deixa os canudos como caíram, na posição horizontal, colocando-os, porém, um por um, a partir do X, paralelamente à barra, e emparelhando as extremidades com as duas mãos, conforme figura 3.



Neste momento, a professora pergunta:

P - Será que assim, vai (vão) dar os canudos?

Alê continua acrescentando mais canudos ao arranjo de Gui.

P - Será que vocês vão ter canudos suficientes para chegar até lá? (apontando para a barra de onde saltaram).

Gui - Tem.- E continua colocando os canudos, na mesma posição. Primeiro coloca todos os pretos e, em seguida, os cinzas, até acabarem todos os canudos. Então a professora pergunta:

P - Deu para chegar até lá? (apontando para a barra)

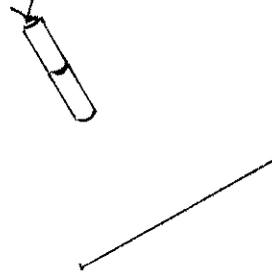
Gabi, que se aproximou espontaneamente da dupla Alê e Gui ajudando-os a trazerem canudos, diz: - Não.

↳ - Será que tem outro jeito de você medir com os canudos que dê para chegar até lá? (apontando para a barra de onde saltaram).

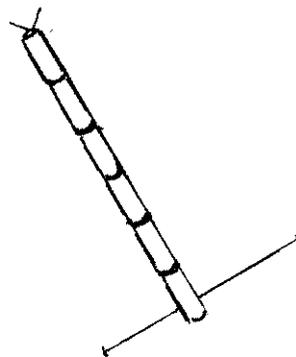
Iva, que se aproximou do grupo e vem acompanhando atentamente o que está acontecendo, diz espontaneamente: - Eu tenho um jeito que dá pra medir até lá.

P - Você tem um jeito? Qual é seu jeito Iva?

Iva pega dois canudos, coloca-os um em continuidade do outro, enfileirados pelo comprimento, perpendicularmente à barra, em posição horizontal e segurando-os nesta posição levanta-os para que todos vejam o seu jeito de medir (veja figura 4).



Gui, sentado sobre os calcanhares, acompanha atento a demonstração de Iva. Assim que este ergue os dois canudos enfileirados, Gui subitamente levanta-se, toma os canudos das mãos de Iva, coloca-os no chão na mesma posição em que o colega os segurava, desfaz o arranjo anterior afastando decididamente todos os outros canudos e vai preenchendo a distância do X até a barra posicionando os canudos da forma que Iva sugeriu. Escolhe somente os canudos cinzas (canudos iguais), deixando o último canudo avançar além da barra de salto, um pouco mais da metade de seu tamanho. Obtém, assim, uma *linha de canudos* que vai desde o X até a barra, passando desta, aproximadamente de metade de um canudo, conforme figura 5.



Afasta-se então um pouco, e sentado sobre os calcanhares, põe-se a observar o seu feito. Imediatamente é interrompido pela professora, que lhe pergunta:

P - Agora, como é que você vai marcar?

P2 - Quanto foi Gui, quanto foi que você saltou?

Gui conta todos os canudos um por um inclusive o que passa da barra e diz:

- Seis.

P2 - Este aqui (mostrando o último canudo) que não está inteiro, como é que você conta?

Gui permanece um instante olhando para os canudos.

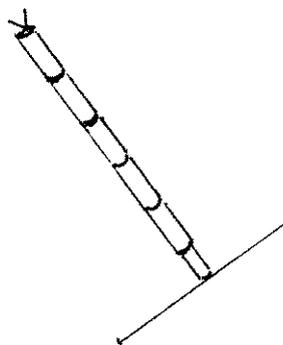
P - Você saltou até este último canudo?

Gui - Não.

Cel, que acompanha o diálogo, retira o último canudo. Fica, então, um espaço vazio, um "buraco" entre o último canudo e a barra.

Gui, que permanece olhando para os canudos, diz: - Então, precisa de um pequeno.

Cel - Tem um pequeno aqui, enquanto coloca um canudo do mesmo tamanho dos outros mas de diâmetro menor, introduzindo-o na cavidade do anterior até encostar a extremidade livre deste na barra de salto, conforme figura 6.



P, voltando-se para Gui e apontando para o último canudo, pergunta: -Você usou este canudo inteiro?

Gui responde: - Não.

P - Como é que você usou?

Gui - Um pedaço.

P2 - Então marque quanto você pulou.

Gui conta os canudos inteiros até cinco, suspende, então, a contagem apontando para o último (um pedaço), olha para a professora como quem está com dúvida.

P - Você usou este canudo inteiro? Os outros você usou, por isso que você (os) contou, e agora como é que você conta este?

Gui - Um pedaço.

P2 - Cinco e um pedaço?

Gui pega a prancheta e permanece pensando por um instante, enquanto bate repetidamente com o lápis no papel.

P - Como você pode marcar cinco e um pedaço?

Gui faz cinco tracinhos verticais ||||| e volta a bater repetidamente com o lápis na prancheta, enquanto permanece absorto olhando para a folha.

P - Como é que você marca um pedaço?

Gui - Um risquinho menor.

P - Então marque.

Gui marca, ao lado dos cinco tracinhos, um traço menor do que os anteriores. Em seguida, resbala o lápis por baixo dos tracinhos, como quem está lendo e, enquanto sorri, olhando para a filmadora diz: - Cinco e um pedaço.

||||| |

Discussão

Introdução

Para analisarmos as ações de medir de Gui, distinguimos três momentos. No primeiro, consideramos o que vai desde o salto em distância até a construção de uma linha de seis canudos: quando Gui, parece tentar medir fazendo diferentes posicionamentos dos canudos, à medida que o conjunto dos aspectos perceptivos destes (a forma, a cor e o tamanho) o possibilitam. Assim, o vemos colocar os canudos do mesmo tamanho e de mesma cor igualmente espaçados em posição vertical e posteriormente agrupá-los por tamanho e espessura, um paralelo ao outro e em posição horizontal. Este momento de construção da medida através do posicionamento dos canudos, caracterizamos de construção *espontânea*, quando Gui trabalha interagindo com os elementos externos e seu conhecimento primeiro de medir. O segundo momento abrange desde a sugestão de Iva até a contagem dos canudos. A característica principal é a construção de uma forma mais adequada de medir a distância saltada, criando uma *representação* da distância. O terceiro momento inclui desde a intervenção sobre a contagem de seis canudos até o registro do número e caracteriza-se pela construção do *novo número*.

O primeiro momento do processo

Aspectos matemáticos

Analisando o primeiro momento de medir de Gui, sob o enfoque da seleção da unidade de medida, podemos observar que ele usa, primeiramente, canudos de mesmo tamanho e quando estes acabam coloca, em continuidade, canudos de tamanho diferentes dos anteriores, porém todos iguais entre si. Nossa hipótese sobre esta tentativa de medir é que se houvesse mais canudos de tamanhos diferentes dos anteriores, mas iguais entre si, ele os usaria em continuidade aos já colocados, até preencher o espaço a ser medido. Isto porque nos parece evidente de suas ações a concepção de que é preciso manter uma certa regularidade dos canudos, ou sempre iguais ou sempre na mesma posição. Primeiramente coloca-os em pé e depois deitados. Mas observamos, também, que ele não hesita em transgredir esta regularidade, quando acabam os canudos iguais.

O avanço da noção de Gui pode estar em perceber que a sugestão do colega Iva, de enfileirar canudos pelo comprimento, é melhor do que as posições que vinha experimentando, pois desta forma, tem canudos suficientes do mesmo tamanho para medir a distância saltada. Podemos dizer que, quanto à seleção da unidade, Gui tem a idéia de que é preciso manter uma determinada regularidade do objeto que mede.

Analisando, do ponto de vista da comparação da unidade com a grandeza a ser medida, a linha de canudos que constrói do X até a barra de salto parece estar representando uma possibilidade de contar a distância saltada. Isto ele demonstra quando, perguntado quanto saltou, responde contando todos os canudos da fileira. Podemos inferir, como nas ações deste primeiro momento, que os três elementos que constituem a idéia da medida - a seleção da unidade, a comparação desta com a grandeza e a expressão numérica da comparação -

podem estar interligados. A proposta da atividade é que cada criança meça e escreva quanto saltou.

Parece evidente, na concepção de Gui, que medir é contar a distância saltada. Ele conta, então, os canudos que são colocados no espaço entre o X e a barra. Mas o posicionamento dos canudos não é aleatório, ele segue uma regra de posição. A posição escolhida deve ajustar-se à quantidade de canudos disponíveis, de forma que o espaço esteja preenchido conforme a regra de posição, e só então será possível contar este espaço.

Gui conta todos os canudos, mesmo o último que ultrapassa a barra. E quando lhe é feita a pergunta se saltou até o último canudo, está lhe sendo sugerido que o número de canudos deve ser ajustado à quantidade de espaço saltado. Isto requer que se ajuste a fileira de canudos entre uma extremidade e outra da distância saltada. O que não parece tão óbvio para Gui que só consegue elaborar a solução para o problema com a ajuda do colega. Então refaz a contagem expressando-a com um novo número: “cinco e um pedaço”, que vem substituir o anterior, de “seis canudos”.

O segundo momento do processo

Aspectos matemáticos

Poderíamos dizer que a diferença de compreensão que existe entre o primeiro e o segundo momento do processo de Gui reside no fato de, ao ter que medir a distância saltada, não encontrar no espaço entre o X e a barra o referente topológico que lhe possa representar a distância, como o encontra quando compara tamanho de objetos. O espaço saltado é um espaço difuso, sem vizinhanças perceptivelmente definidas. O tamanho do canudo é possível perceber, vai de uma extremidade a outra dele mesmo, está incluído no espaço limitado pelos contornos do canudo. A dificuldade de Gui parece ser como medir o que não está topologicamente definido.

Para estabelecer a distância, a criança precisa definir uma relação entre os objetos, que implica estabelecer pontos de referência. A este respeito,

Chamorro (1988) explica que a criança se vê obrigada a passar de um espaço topológico elementar, cuja estrutura possibilita definir os contornos e as vizinhanças dos objetos “cheios,” para a interpretação do espaço do ponto de vista euclidiano, cuja estrutura possibilita perceber o espaço como um todo homogêneo, onde os objetos estão posicionados um relativamente ao outro. Entendemos que a criança vai elaborando esta concepção à medida que desenvolve experiências de medir.

Entendemos que esta lacuna é superada quando Gui passa a construir a linha dos canudos que, para ele, representa a distância e não mais um outro arranjo de posicionamento dos canudos, como vinha fazendo, pois dispensa o restante dos canudos, alinhando somente os necessários para chegar até a barra.

Aspectos culturais

Quando atribuímos a Gui a ação de medir, estamos-nos referindo ao nível da compreensão possível dentro de seu desenvolvimento cultural e que pode ter as características que, segundo Piaget (1948), são anteriores à elaboração operacional da noção de medida, quando a noção de unidade de medida é resultado da coordenação das operações psicológicas da medida, a conservação e a transitividade. Concordamos que a elaboração a que chegou Gui, não tem a qualidade de linha reta. Trata-se de uma “representação objetal”, assim chamada, por ter sua origem na concepção topológica de espaço que a criança traz elaborada e cujas características culturais já nos referimos no episódio 2. A representação que Gui elabora tem a configuração de uma fileira de canudos que se ajustam mais ou menos desde o X até a barra, e não de uma linha reta contínua com extremidades definidas pela sua posição relativa no espaço.

Entendemos que se trata da apropriação de um novo significado, da criação de uma representação da distância mesmo que não tenha a qualidade do pensamento operacional de medir, ou seja, não tenha a qualidade de ser generalizável para todos os casos de medir distância. Consideramos-na um

símbolo matemático da distância cujo significado está restrito ao objeto unidade de medida que, no caso, é o canudo. Supomos que esta elaboração é um avanço porque seu significado foi possível construir a partir da concepção de espaço que a criança tem, ressignificando-a na interpretação da distância. Acreditamos que a noção cultural de espaço que a criança traz de seu meio media a elaboração de novos significados desta noção, como no caso deste episódio, em que foi possível elaborar uma representação objetual da distância. Na verdade, o canudo colocado em qualquer posição do espaço tem o significado de canudo em relação a outros objetos que não são canudos, mas posicionados enfileirados num espaço difuso entre duas marcas com o intuito de medi-lo, passa a sinalizar este espaço como distância.

Aspectos educacionais

O segundo momento é desencadeado pela nova questão colocada pela professora, que aliada à constatação do número insuficiente de canudos para preencher o espaço possibilita a Iva pensar noutra forma de colocar os canudos. A intervenção de Iva auxilia Gui a apropriar-se de uma nova forma de medir com os canudos. O significado de medir a distância saltada a partir da sugestão de Iva manifesta-se ligado diretamente ao tamanho dos canudos. Gui constrói uma fileira de canudos que, pela sua configuração, pode estar auxiliando uma representação desta distância. A *linha de canudos*, enfileirados longitudinalmente, com as extremidades adjacentes e em posição horizontal, passa a ser para Gui o símbolo que representa o espaço, que é chamado de *distância saltada*. Isto parece estar de acordo com Vygotsky (1987), quando faz referência à mediação como um processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação.

No caso deste episódio, entendemos que a relação a ser mediada é a resposta ao objetivo medir a distância saltada, e o elemento intermediário, o arranjo dos dois canudos enfileirados apresentado por Iva. A mediação se

estabelece quando Gui percebe na demonstração de Iva uma forma de representar a distância com os canudos. Imediatamente ele desenvolve uma sequência de ações para construir a resposta. Entendemos que a conotação de mediação, dada por Vygotsky como sendo um processo essencial para tornar possível atividades psicológicas controladas pelo próprio indivíduo e que explica a repentina autodeterminação de Gui ao construir a resposta. Isto acontece porque o significado de distância vem mediando as falas e as ações dos adultos e crianças envolvidos com a solução do problema.

Consideramos esta representação uma aproximação do conceito matemático da distância. E do ponto de vista educacional esta suposição dá sustentação para desenvolver atividades de medida com crianças pré-escolares. Pois incide na concepção prospectiva do desenvolvimento da noção de medida, como produto de intervenção exôgena, de tal maneira que as relações interpessoais não dependem do nível ou do estágio cognitivo já alcançado, mas que estejam na sua origem, em seu processo de desenvolvimento. São portanto as relações interpessoais que determinam os processos cognitivos e não o inverso.

O terceiro momento do processo

Aspectos matemáticos

O terceiro momento Gui é envolvido com a relação que diz respeito à expressão numérica da medida e à comparação da unidade com a grandeza da distância a ser medida. Mais uma vez podemos confirmar que quando Gui responde “seis” à pergunta da pesquisadora sobre quanto havia saltado, ele representa a distância mediante uma figura com características topológicas, formada por seis canudos inteiros, e não através da linha geométrica contínua, ou pelo segmento de reta cujas extremidades estão definidas pelo X e pela barra.

Ao ser questionado sobre a inclusão do último canudo, no total seis, que não faz parte por inteiro da distância saltada, Gui é ajudado a reconstruir a

sua contagem de forma coerente ao processo de medir. E desta forma necessariamente modifica a representação que havia feito até então, quando propõe preencher com um "canudo pequeno" a lacuna deixada ao ser retirado o último canudo pelo colega. É esta, supomos, uma tentativa de reconhecer os dois pontos de referência que definem as extremidades de uma reta representativa da distância, o que parecia não estar definido na representação anterior. Mas, ainda, recorre a um canudo inteiro, mesmo que pequeno. A representação apresenta características topológicas de um todo discreto, pois não parece pensar numa fração de canudo.

Certamente, esta concepção é questionada quando, na ausência de um canudo pequeno, o colega elabora outra solução, encurta o último canudo, usando somente uma parte deste para completar a fileira de canudos até a barra. Gui não deixa de evidenciar sua perplexidade diante de um conhecimento que ainda não havia elaborado. Solicitado a contar novamente, ele conta os cinco canudos inteiros e silencia ao apontar o último, que está representado somente por uma parte. Ou seja, o número de que dispõe não dá conta de representar partes (pedaço de canudo). Gui parece vivenciar, neste momento, o mesmo impasse presente e apontado por Hogben (1970), quando o homem percebeu que o número de contar carneiros não servia para representar o tamanho da sombra solar de um objeto, colocado perpendicularmente ao chão, com a qual marcava as horas do dia. Não se trata aqui de afirmar que a criança, ao aprender, repete de forma idêntica o caminho da humanidade. Mesmo porque lá, há muito tempo, o homem teria que *criar* um novo número, e aqui a criança precisa apropriar-se do que já foi criado. Queremos dizer outrossim, que a disponibilidade epistemológica pode ser a mesma, isto é, aquela que surge da limitação do conhecimento que se tem. Sob este aspecto, podemos conjecturar que ele esteja preparado psicologicamente para compreender o novo número que lhe é apresentado, "cinco e um pedaço". A apropriação desta outra qualidade

numérica, é de se supor que traz consigo uma nova elaboração da representação da distância.

A função do número, na medida de grandezas lineares, é dizer quantas vezes cabe a unidade na dimensão a ser medida. Isto requer a escolha de uma unidade coerente, de mesma natureza da grandeza a ser medida, passível de ser comparada quantitativamente com esta. Gui, ao elaborar a leitura numérica “cinco e um pedaço”, deve estar, ao mesmo tempo, reelaborando a configuração da fileira de canudos de que se apropriara anteriormente. É provável que vá modificando a concepção topológica da representação da distância, que pode ir adquirindo a qualidade de extensibilidade. A nova leitura numérica de Gui pode ter possibilitado um significado funcional dos canudos diferente daquele anterior. Deixam de ser objetos discretos, indivisíveis, e passam a assumir a característica de *tamanhos contáveis* e, por isso, pode-se contar parte deles.

Aspectos culturais

O passo seguinte é um novo desafio: como escrever o numeral “cinco e um pedaço”? Parece ser esta a questão com a qual Gui se envolve enquanto bate repetidamente na prancheta e de forma desapercibida. Certamente, não está encontrando em seu conhecimento numérico uma escrita que possa representar o número que acabou de ler. Parece ter percebido, porém, que se trata de um número, pois desenha cinco traços verticais do mesmo tamanho, suspende o lápis e permanece pensativo como quem não acabou a sua obra.

A escrita cinco traços verticais do mesmo tamanho e um traço menor está carregada de significado, porque, segundo Moura (1992), representa em seus “rabiscos” a realidade contada e sendo ao mesmo tempo, a imitação da realidade constitui uma abstração, uma elaboração intelectual desta. A lei da correspondência um a um, que está na origem do número de contar a realidade discreta, é aplicada para criar o número que pode representar pedaços desta realidade. Isto evidencia que, mesmo estando, ainda, num estágio inicial da

construção do número natural, a criança pode estar construindo também o número não natural.

A criação do novo número foi condicionada pela natureza da realidade contada, mesmo que esta criação não tenha sua origem na noção operatória de medir distância, a qual Caraça (1975) vincula a relação expressão numérica-unidade escolhida. O fato que acabamos de analisar mostra que esta relação pode existir em estágios anteriores à elaboração do conceito operacional de medir.

O fato de Gui ter atribuído à quantidade de canudos da fileira a expressão "cinco e um pedaço" denota a criação de um significado numérico diferente daquele do número natural que é de seu conhecimento. Por isso, hesita quando percebe que não pode contar seis canudos porque não tem seis canudos inteiros. Para este significado construído, para esta expressão verbal, é preciso atribuir um símbolo gráfico, ele deve registrar a medida da distância saltada. Gui procura, manifestadamente, em seus conhecimentos sobre símbolos numéricos o que representa "cinco e um pedaço", e certamente não estaria escrevendo cinco em numeral porque o rabisco 5 representa cinco canudos inteiros e mais nada. De fato, ele escreve cinco traços verticais maiores que representam os cinco canudos inteiros, e um traço menor que representa um pedaço. O novo símbolo numérico que cria traz, em sua estrutura de formação, a lei da correspondência um a um e talvez esta tenha sido uma forma perceptível de representar cinco canudos inteiros (pelos traços maiores) e um pedaço (pelo traço menor ou "pedaço" de traço).

Aspectos educacionais

A intervenção da professora, sugerindo-lhe marcar "um pedaço," contribuiu para que ele criasse um símbolo numérico. Este fato parece estar de acordo com a teoria de Vygotsky (1989) sobre a presença de um nível possível de desenvolvimento, aquele que pode acontecer com a ajuda externa pela interação. Pois, segundo o autor, para melhor compreender o desenvolvimento da criança, não é suficiente considerar o nível de elaboração das tarefas que é capaz

de desempenhar sozinha, a partir de habilidades intelectuais que já são de seu domínio, mas também a capacidade de desempenhar tarefas, com a ajuda de pistas fornecidas por pessoas que estão em um nível mais elaborado do que o seu.

Entendemos que a elaboração da nova escrita numérica foi possível devido à interação de Gui com o objeto social, aqui representado pelas questões colocadas por pessoas mais experientes quanto ao assunto. Ao conjunto de questões está subjacente a noção operacional da medida linear que, como já vimos em Caraça (1975), condiciona a expressão numérica à escolha da unidade, e que manifestadamente não é do domínio cognitivo de Gui; e, portanto, possível de ser questionada somente por quem já a tem elaborada. Por isso, neste caso, as questões colocadas comportam-se no processo de Gui como ‘amplificadores culturais’ que, segundo Mortimer (1994), funcionam como um sistema de suporte no meio social do processo de aprendizagem.

Do ponto de vista educacional, podemos dizer, a partir dos fatos acima, que estas crianças estão ativamente envolvidas na construção da solução do problema de medir a distância saltada, pois vão modificando sua forma de medir a partir dos elementos externos que ocorrem e que julgam favoráveis à esta construção. A criação do símbolo da distância envolveu experimentar diferentes posições dos canudos, mesmo que a mudança de uma para a outra tenha sido sugerida por fatores como queda pelo vento, número limitado de canudos, a questão da professora solicitando outra forma de medir com os canudos. Isto é, envolveu a construção de um consenso de que a fileira de canudos a que chegaram é a melhor forma de medir a distância saltada. Este consenso, no nosso entender, é o significado, socializado por estas crianças, do símbolo "fileira de canudos", que adquire o valor de significante porque interpretado por elas como um "jeito de medir a distância saltada".

Podemos dizer que estes momentos de criação simbólica estão presentes nestes fatos porque a própria intencionalidade da atividade coloca a

criança numa situação de medir a partir do "Jogo do salto em distância", em que a necessidade de medir não tem uma ligação direta com o objetivo do adulto, como no caso de testes e entrevistas que acabam impondo à criança uma necessidade artificial de medir, mas surge do envolvimento da criança com o jogo e, portanto, de uma necessidade real de medir. A necessidade de medir é real porque a criança vive uma situação imaginária do faz-de-conta criada pelo jogo. E é nesta situação de fusão do real e imaginário que o significado de medir é interpretado através de um símbolo que, por ter sido o resultado de um consenso, passa a ter a função de mediar o conhecimento de medir a distância saltada.

Por estes fatos serem provenientes de uma situação de ensino, em que a intencionalidade do adulto carrega a atividade de ensino de elementos culturais e científicos, podemos conjecturar que a observação e análise destes fatos nos mostram que não é possível considerar o avanço gradativo do conhecimento de medir da criança somente sob o enfoque cognitivo, como se o ato de conhecer acontecesse somente por este caminho.

Concluindo, na análise deste episódio revelamos que, diante da proposta de medir uma determinada distância com canudos, as crianças manifestam um certa regularidade quanto à posição e tamanho do canudo, embora transgridam esta regularidade quando faltam canudos do mesmo tamanho; que evoluem para uma forma de posicionar os canudos que lhes possibilitam, representar a distância e, ao mesmo tempo, contá-la; criam um símbolo numérico cuja grafia representa o valor numérico não-inteiro da medida da distância; que os conceitos e as noções culturais, que têm elaboradas a partir de seu meio, de espaço e número mediam as elaborações de distância e de número não natural, nesta atividade; que as interações adulto-criança e criança-criança mediadas pelos significados de medir possibilitam a apropriação destes significados; e que a natureza lúdica da atividade possibilita o envolvimento das crianças com a situação problema.

Episódio 6

A feira de objetos

Esta atividade tem por objetivo medir o tamanho de objetos com uma régua numerada de forma não convencional.

As crianças vão participar de uma feira de objetos em que o valor destes é conferido pelo tamanho. Todos medem seus objetos com uma régua não-convencional, graduada de 1 a 20 espaços iguais. Posteriormente, escrevem o valor correspondente numa tabela previamente traçada na lousa. Quando todas as medidas estiverem registradas na tabela é feita a discussão sobre os valores dos objetos.

Situação problema

Alguns objetos foram medidos por mais de uma criança e na tabela apresentam valores diferentes. Ocorreu que um mesmo canudo, medido por cinco crianças, constava na tabela com tamanhos 10 e 11 espaços de régua. As crianças devem explicar o que aconteceu.

Episódio:

P, apontando para a tabela, diz: -Aqui o mesmo canudo tem medidas diferentes.

E segurando o canudo em posição vertical, coloca a régua paralela a ele e pergunta para a classe:

P - O que vocês acham desta medida aqui? (apontando para a régua).

Crianças (em coro): dez..., onze...

(As crianças repetem os valores que estão na tabela.) A professora dirige-se a uma delas que se aproximou da régua para ler e pergunta:

P - O que você acha Dré?

Dré escorrega o dedo, percorrendo os espaços da régua, enquanto conta: - Dez, on....ze, é onze, eu acho.

P - Dá 11 espaços inteiros, Dré? - Ro e Fe apontam com o dedo na régua e Ro diz:

Ro - Ó, tem mais um pedacinho.

Dré - Há! aqui ó, mostrando na régua, tem dez e um pedacinho.

P pergunta, dirigindo-se a Rafa e Me: - E como a gente marca dez e um pedacinho?

Rafa aponta com o dedo para a régua e diz: - Aqui é metade, ó.

P perguntando para os outros: - Vocês concordam que é dez e mais metade?

As três crianças acenam que sim.

P - Então, como é que fica marcar dez e metade?

Rafa acena com a cabeça que não sabe.

P - Quem vai mostrar?

Dré levanta a mão e dirige-se à lousa. Escreve o valor da medida e volta para seu lugar.

P - O professor olha para a lousa e, não percebendo que Dré já havia registrado o valor, diz: -Vai Dré, marcar.

Dré - Já marquei - e aponta para a lousa.

Havia escrito na lousa o numeral dez precedido de um traço: "-10".

P - Mas eu não leio, aí, "dez e metade", na marca tem que aparecer que é metade, vai lá marcar. - Neste momento a classe se volta atenta acompanhando a escrita numérica do colega.

Dré retorna para a lousa e mostra o traço que marcou antes do numeral dez e diz: - Aqui, ó.

P - Mas aí (apontando para a lousa) eu leio 10 e um pedaço, como é que este pedaço pode indicar metade?

Dré apaga o traço e desenha outro maior e divide-o ao meio com um traço inclinado (mede com os dedos para acertar o meio): "10 -/"

P, apontando para a escrita de Dré, pergunta para a classe: - Gente, aqui, podemos ler dez e uma metade? Todos concordam?

As crianças confirmam.

P - Dré, você acabou de inventar uma escrita para representar a metade!.

Dré sorri e afasta-se esfregando as mãos, satisfeito.

Discussão

Aspectos matemáticos

Do ponto de vista do conceito matemático da medida, podemos dizer que a discussão da situação-problema colocada pela professora está centrada na

expressão numérica da comparação da unidade com a grandeza a ser medida. A unidade “espaço de régua” não está contida um número inteiro de vezes na dimensão do objeto. O fato de um mesmo objeto apresentar, na tabela, medidas variando entre dois números inteiros consecutivos sugere uma possível dificuldade das crianças em ler ou representar numericamente a medida deste objeto. Num primeiro momento as crianças resolvem o problema lendo, na régua, um número inteiro de unidades que indica um valor mais próximo do tamanho do objeto, ou para menos (dez) ou para mais (onze).

Observamos que na leitura das crianças não aparece, espontaneamente, a necessidade de fracionar a unidade para fazer uma comparação exata dessa com o tamanho do objeto. Temos, neste caso, alguns elementos externos que não favorecem o aparecimento desta necessidade, como pode ser o fato de já estar definida, na régua, a unidade de medida e, ao mesmo tempo, não vir indicadas subdivisões da unidade. A partir deste fato, levantamos a seguinte hipótese: se a estas crianças for sugerido medir com um terceiro objeto, de tamanho menor do que o do canudo e que não fosse contido um número inteiro de vezes na dimensão do objeto, apresentariam elas a necessidade de fracionar a unidade? E o mesmo aconteceria se fossem indicadas na régua as subdivisões da unidade?

Uma resposta a essas perguntas são os dados que já temos analisado sobre o pensamento de medir destas crianças em outros episódios como o referente à atividade “Quem andou mais ?” Quando, ao usar o passo como unidade de medida, contam o meio passo como uma unidade inteira de passo e procedem da mesma forma que neste episódio. Podemos então afirmar que a tendência a expressar o valor numérico da aplicação da unidade sobre a grandeza a ser medida com um número inteiro de unidades é decorrente de uma compreensão não operacional da medida. A expressão numérica não surge da comparação, da divisão de grandezas contínuas, mas da contagem da “aplicação discreta” da unidade sobre a dimensão do objeto.

Quando conseguem fazer a leitura correta, na régua, do tamanho do objeto, a professora coloca outra questão, como escrever dez e um pedacinho. Neste momento a participação de Dré tem grande importância do ponto de vista matemático, enquanto supera seu próprio conhecimento cultural de símbolos numéricos criando uma grafia para escrever e ler "dez e metade".

Analisando o processo de Dré, ao criar o símbolo, podemos observar que ele atribui ao símbolo dez, cujo significado parece ser de seu domínio, um novo significado, 10 e metade, e que representa por -10, em que o traço quer dizer metade. A intervenção da professora que indaga como pode comunicar metade de uma maneira mais clara, com o auxílio do traço, Dré dá a forma para o símbolo metade, mais próxima da realidade que ele representa. Na verdade, o traço que acompanha o numeral é uma representação geométrica do espaço de régua, portanto já é um símbolo, e que cortado, ao meio, por um outro traço deve significar a metade deste espaço.

Embora não possamos afirmar pelos dados que temos que o símbolo criado tenha a qualidade de símbolo matemático, que encerra em seu significado os princípios que o tornam elemento de um conjunto numérico e nem mesmo, no sentido mais restrito, que tenha um significado generalizável para representar qualquer situação quantitativa que indica metade, podemos afirmar porém que se trata de um símbolo gráfico da leitura quantitativa feita neste episódio e que para este grupo ele passa a comunicar a idéia numérica da medida do objeto em questão. Este fato tem importância educacional enquanto pode mostrar que os números naturais que as crianças conhecem não representam todas as realidades.

Aspectos culturais

Do ponto de vista cultural, porém, podemos avaliar que este episódio reforça a hipótese que formulamos a partir da análise de outros episódios, como os que se referem às atividades: "Salto em distância", "Lança moeda", "Quem andou mais?"; onde conjecturamos que, o fato destas crianças contarem o

número de vezes que colocam a mão no chão, ou o número de passos, sem que isto seja a expressão do pensamento operacional de medir, está relacionado com a concepção de medida como contagem de objetos discretos. E nos parece que este primeiro conhecimento de medida que ela tem elaborado é que define seu potencial de avanço para um conhecimento mais elaborado.

Neste episódio, consideramos um avanço quando Ro e Dré reconhecem que o tamanho do objeto não corresponde somente a dez espaços inteiros mas que abrange mais “um pedacinho”. Ao fazer uma leitura que extrapola o discreto e se aproxima de um conceito de extensibilidade do espaço-unidade, podemos dizer, interpretando o que diz Wertsch (1990) sobre o papel da educação no desenvolvimento da criança que acontece uma aproximação do conhecimento cultural que estas crianças têm elaborado do conhecimento científico da medida.

O conhecimento cultural que Dré tem do número e de sua grafia e da noção de metade juntamente com o incentivo da professora sugerindo-lhe fazer uma marca para indicar metade parece contribuir para que ele crie um símbolo para representar a leitura da régua.

Do ponto de vista histórico (Ifrah, 1987; Dantzig, 1970; Boyer, 1974) e psicológico (Piaget, 1975; Kamii, 1984, 1986; Sinclair, 1990; Moura, 1992, Ferreiro, 1990) estes autores têm mostrado que existe uma diferença na apreensão da oralidade do número e de sua representação. Ambos afirmam que não há simultaneidade no domínio de um de outro aspecto do número. As crianças deste episódio apresentam um avanço na leitura do numeral que está representando a medida do objeto na régua, ou seja, conseguem fracionar a unidade, mas, ao mesmo tempo, afirmam que não sabem escrever este número.

Entre encher o tamanho do objeto representado por dez espaços e meio de régua e representá-lo por uns “rabiscos” (Moura, 1992) há um caminho a percorrer que é aquele da criação do símbolo. Neste exemplo, as crianças lêem da régua o símbolo 10, mas o comprimento do canudo alcança uma parte do espaço

de régua que está compreendido entre a marca 10 e 11 e atribuem a esta marca o símbolo "metade". Este símbolo não está grafado na régua e as crianças não conhecem a sua grafia. A pergunta da professora sobre "como fica marcar 10 e metade" parece convencer Dré que ele pode criar este símbolo.

Aspectos educacionais.

Um "rabisco" tão simples, mas para a classe que acompanha atenta a criação de Dré, é carregado de expectativa, de emoção e de imaginação. O semblante e o gesto de satisfação de Dré ao retornar para seu lugar evidencia o quanto ele aprecia conhecer, o quanto ele está envolvido com o seu próprio processo de construção do saber e espontaneamente comunica sua satisfação para a classe que o acompanha. A intervenção da professora, afirmando para Dré que havia criado uma escrita numérica, evidencia a percepção da importância daquele momento para a aprendizagem da classe. Do ponto de vista educacional, esta confirmação pode estar propiciando a estas crianças uma maior disponibilidade a participar do processo de construção dos conceitos matemáticos.

Os avanços que relacionamos certamente têm sua fundamentação também na intencionalidade da atividade e nas interações entre os pares e o professor, representadas pelas ajudas, orientações e dicas que ocorrem durante o desenvolvimento da atividade. Do ponto de vista do ensino, podemos dizer que a intervenção pertinente, a partir de resultados que normalmente são considerados como erro, como no caso, o tamanho de um mesmo objeto, quando medido com as mesmas unidades, ser representado por números diferentes, contribuiu para desencadear um processo construtivo da leitura e escrita de um valor fracionário da medida.

A colocação do problema pela professora, chamando a atenção para a incoerência das medidas na tabela; a exibição do objeto paralelamente à régua solicitando uma nova leitura da medida do objeto; a pergunta do pesquisador: "dá 11 espaços inteiros?", que deve ter possibilitado o aparecimento de um

elemento novo na leitura de Ro, e a Dré avançar para uma nova leitura numérica; a pergunta do educador, "como se marca dez e um pedacinho?" que deve ter propiciado uma leitura mais precisa de Rafa: "dez e metade"; e novamente a pergunta: "como se marca dez e metade?"; todas estas interações ocorridas é que proporcionaram a Dré a elaboração de um signo numérico para representar metade da unidade. A última questão, "mas aí eu leio um pedaço, como é que esse pedaço pode indicar metade?", incide sobre a possibilidade de Dré avançar na representação da idéia de metade. E a confirmação do adulto de que aquele rabisco é um símbolo, por ele criado, para representar metade, confere-lhe autoconfiança e satisfação, pois esta aparece estampada no sorriso de Dré.

Concluindo, na análise deste episódio revelamos: que as crianças, ao medirem o tamanho dos objetos com uma régua graduada de forma não convencional, manifestam uma tendência a fazer coincidir a dimensão do objeto com uma quantidade de espaços inteiros de régua, expressos por um número natural que se aproxima por excesso ou por falta do tamanho deste; que, com a contribuição das interações mediadas pelo significado cultural do número e pelos significados de medir que ocorrem no grupo, algumas crianças apresentam avanços na leitura do valor fracionário da medida e que uma criança inventa um símbolo gráfico para representar este valor.

Episódio 7

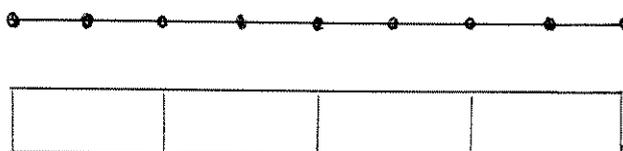
Concurso de altura

O objetivo desta atividade consiste em entender que o valor numérico da medida é relativo à dimensão da unidade de medida.

A professora conta para as crianças uma história que aconteceu há muito tempo, num país muito distante. Nesse país, o rei resolveu fazer um concurso de altura para que todos participassem do embelezamento da cidade que era iluminada por lampeões espalhados pelas calçadas e pelos muitos e lindos canteiros ornamentais. Para que a cidade ficasse limpa e bem iluminada, para uma grande festa que iria acontecer, todos deveriam participar de sua limpeza conforme suas alturas.

Os mais altos iriam limpar os lampeões das ruas, os mais baixos os canteiros e os de estatura média dariam os instrumentos de limpeza a uns e a outros. As escolas procederiam da mesma forma.

As crianças são convidadas a participar do concurso do rei. Organizadas em duplas, uma mede a altura da outra. Uma mede a altura de seu parceiro com um barbante e a outra, com uma tira graduada, de cartolina. As 8 unidades do barbante são representadas entre nós e as 4 unidades da tira entre dobras. Cada unidade da tira corresponde a duas do barbante. Os instrumentos de medir barbante e tira são do mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.



Situação-problema

As crianças devem descobrir porque, na tabela, os valores das alturas das duplas são discrepantes com relação ao valor perceptivo das alturas invertidos.

Episódio

As crianças mediram suas alturas. A tabela dos valores está na lousa, na coluna à esquerda estão os valores que representam as alturas medidas com barbante e à direita, com tiras. Na coluna à esquerda estão relacionadas as crianças mais altas da dupla e na direita as mais baixas.

barbantes		tiras	
Ae	10	Jul	7
Mi	12-	Dré	7-
Ia	12	Me	7
Ma	10	Car	8
Ca	16	Vi	8
Rafel	12	Be	6
Fep	14	Rafa	6
Ro	10	Palo	8
Pala	9	Hu	6
Fer	8	Fem	-

Obs.: É preciso lembrar que os mais altos iriam limpar os lampeões. Na tabela, aparece uma aparente discrepância entre os valores das alturas das duplas. Isto ocorreu porque crianças mais altas foram medidas com a tira e crianças mais baixas com o barbante e, dada a razão de 1 para 2 entre as respectivas unidades, pode ocorrer que o número que representa a altura de uma criança menor pode ser maior do que o que representa a altura de uma criança maior.

A professora aponta para a tabela e ilustra com o exemplo de uma dupla em que a discrepância entre os valores das alturas é muito evidente. Na dupla Jul e Ae, Jul é bem mais alta do que Ae e, no entanto, na tabela os valores aparecem invertidos. A professora chama a atenção para este fato.

P - Parece que nós temos um problema, olhem na tabela. Vejam só, da dupla Ae e Jul quem vai limpar os lampeões?

Ae (a mais baixa) - Eu.

P - Mas o rei não falou que os mais altos iriam limpar os lampeões?

P - Quem é a mais alta de vocês duas?

Jul - Eu

P - E como está lá, na tabela, Ae 10 e Jul 7?

Ju - Porque mediu com o cordão.

P - E você (dirigindo-se a Ae), mediu Jul com o que?

Ju. - Com a tira.

P - Então o que aconteceu?

Dré - Há! Foi por causa do papel!

P - Explique melhor Dré.

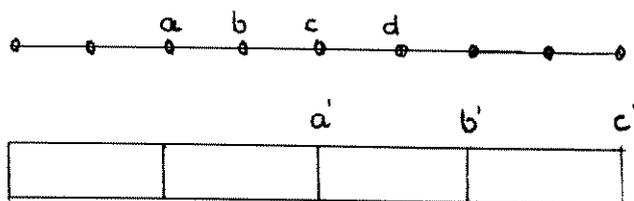
Há um pequeno tumulto, as crianças conversam todas ao mesmo tempo

P sugere à professora que coloque no chão, o barbante e a tira, esticados, um paralelo ao outro.

P - Gente, quem sabe explicar, aqui na tira e no barbante, o que é que está acontecendo nesta tabela?

Dré aproxima-se, espontaneamente, e senta-se próximo ao barbante e a tira e faz a correspondência entre o número de nós e o número de dobras enquanto diz:

- Ó, aqui tem três, (contando três nós no barbante incluindo o ponto a) e aqui tem três (contando três dobras na tira, incluindo a dobra a'), aqui tem quatro, (contando quatro nós, incluindo o ponto b), e aqui também tem quatro, (contando quatro dobras incluindo a quarta dobra, b'). Mas o cinco tem aqui (mostra na tira a quinta dobra c') - e acrescenta,- mas o seis não tem (não tem a sexta dobra correspondente ao sexto nó). Então o cordão tem mais nós e daí a Mi ficou com mais nozinhos do que eu, ficou com seis, quer dizer, ficou com quatorze.



P - Dré, então explique qual foi a confusão que deu.

Dré pega o barbante e coloca ao longo do comprimento de Mi e diz: - Ó como eu fui medir a Mi, não dá, a gente tem que usar ou o papel ou o nó. A gente não podia usar o papel junto com o nó porque ia dar muito errado, a gente tem que usar ou o cordão ou o nó, sempre (e faz um gesto reforçando o sempre)

P - Dré, como você pode corrigir então?

Dré pega a tira e diz: - Eu queria medir a Mi com a tira (ele havia medido a altura de Mi com o barbante e ela a dele com a tira).

Discussão:

Neste episódio, Dré assume o problema colocado pela professora. Ele quer buscar as razões da discrepância entre os valores da tabela, ou seja, porque a tabela não confere com a realidade. Sua primeira resposta dizendo que foi "por causa do papel" mostra que ele percebeu que aqueles números não resultavam de uma medição errada, mas do fato de usar instrumentos diferentes para medir um e outro da dupla, então, a primeira verificação que faz é dos instrumentos.

Ao fazer a comparação entre um instrumento e outro, faz a correspondência nó e dobra e, então, percebe que do 6º nó em diante não há tem na tira o correspondente em dobras. Por isso, medir com o cordão vai dar um número maior de nós do que de dobras, ou seja, percebe que para um determinado número de dobras corresponde um maior número de nós. Quando Dré falou que o problema estava no papel, certamente quiz dizer que a parceira, que é visivelmente mais baixa do que ele, tinha maior altura porque ele foi medido com a tira de cartolina (o papel). Ele confirma isso através da análise que faz dos instrumentos, quando percebe que para um determinado número de dobras na tira há um maior número de nós, e por isso afirma que Mi ficou com "mais nozinhos" do que ele. Desta forma, consegue justificar porque, na tabela, a altura de Mi consta como sendo maior do que a dele. Acrescenta que para resolver o problema é preciso medir os dois da dupla ou só com a tira, ou só com o barbante.

Aspectos culturais

Do ponto de vista cultural, o fato de Dré contar os nós e as dobras, embora tenha esticado a tira e o cordão para medir a altura do colega, como se estivesse comparando grandezas contínuas, mostra que ele concebe a expressão numérica, nesta situação de medida, como um conjunto de nós e dobras. Esta dupla interpretação do uso do instrumento de medir, uma que envolve a idéia de extensão, porque cobre com o comprimento do cordão a altura da colega; a outra que envolve um conjunto de nós, porque conta os nós e não os espaços entre eles, evidencia novamente a hipótese que já formulamos nos episódios das atividades "O que é medir?", "Lança moeda", "Curupira", e "Salto em distância", ou seja, medir, para ele, está relacionado a um número e sua experiência de construir um número está fundamentada na contagem de objetos discretos.

Esta experiência, provavelmente, será ampliada para o número não natural, quando, através de vivências de medir, for orientado a contar os espaços entre nós. Quando então, certamente, surgirá a necessidade de fracionar os espaços. Através deste caminho, supomos que duas noções poderão estar sendo construídas, a do número não natural e a de extensibilidade do objeto-unidade e da grandeza que está sendo medida.

Aspectos matemáticos

A construção destas noções envolve também a elaboração da representação do que é extenso e do que está sendo contado. O comprimento do cordão é representado por ele próprio, a altura da criança é representada pela própria criança. Mas, no momento da medida, estas representações, inicialmente concebidas isoladamente uma da outra e ligadas perceptivelmente à forma particular de cada objeto, precisam ter uma nova elaboração, precisam ser abstraídas simbolicamente e como tal ser concebidas como uma qualidade

comum aos dois objetos, ao que vai ser medido e ao que mede, de modo a poder transportá-las sem alterá-las e compará-las através de um terceiro objeto.

Quando Dré faz a relação entre número de nós e número de dobras e não entre os espaços, de um e de outro instrumento, mostra que não está trabalhando com a representação da extensão destas grandezas, com a representação matemática delas. Porém, mesmo a comparação apenas entre quantidade de nós e de dobras proporciona-lhe uma justificativa satisfatória para a causa da discrepância entre os valores da tabela, bem como para encontrar uma solução para o problema, ou seja, medir cada dupla com um só instrumento.

O fato de Dré comparar o número de nós com o número de dobras leva-o a concluir que sempre vai ocorrer a inversão dos valores das alturas da dupla, porque sempre vai ter mais nós que dobras. E coerentemente a esta conclusão afirma que, para "dar certo", deve-se medir com o mesmo instrumento. Esta solução denota a percepção de que é preciso usar o mesmo instrumento para medir duas grandezas que se queira comparar. Podemos dizer que Dré chega à conclusão, através da comparação dos dois instrumentos, que para poder comparar as medidas das alturas é preciso que estejam expressas com a mesma unidade. Ele percebe que se deve manter uma determinada regularidade e que mantendo o instrumento para medir os objetos, na sua concepção, mantém esta regularidade porque somente, desta forma, poderá fazer correspondência um a um entre os nós ou uma à uma entre as dobras.

Aspectos educacionais

Dizíamos anteriormente que Dré tomou a iniciativa de resolver o problema. A questão deste seu envolvimento mostra que o elemento fantasioso da tabela do rei passa a ser o seu jogo. A tabela não pode constar com valores errados. Por outro lado Dré, diante da insinuação da professora que os valores da tabela estariam errados, não propõe medir tudo de novo para corrigir o suposto erro. Sua atitude em buscar na comparação dos instrumentos a possível causa do

problema, mostra que ele tinha certeza de que havia medido sua parceira corretamente.

A intervenção da professora colocando a tira e o barbante em comparação foi sugerida pela questão levantada por Dré, quando disse que "foi por causa do papel" que os valores da tabela não correspondem à realidade. Esta intervenção contribuiu para o avanço do raciocínio do próprio Dré, justamente porque colocada a partir dele. Certamente deveria ser, através da comparação dos dois instrumentos, que ele poderia analisar o problema causado pela tira. A tira e o barbante esticados, no chão, e paralelos um ao outro, consistem numa representação que pode sugerir comparação. Tratava-se, então, de estabelecer qual a relação entre os dois instrumentos que, por sua vez, explicaria a relação entre os valores da tabela. Dré percorreu exatamente este caminho. Não podemos dizer que este caminho lhe foi ensinado, mas apenas sugerido por uma dica que, colocada em continuação ao seu raciocínio, proporcionou-lhe o avanço de modo a construir a solução. Esta solução, mesmo que matematicamente muito restrita, deve ser aceita como correta, porque construída a partir de seu nível de compreensão da medida e de cuja veracidade ele está convencido, pois diz que para corrigir o erro precisaria medir Mi também com a tira com a qual foi medido.

Novamente podemos observar aqui que, quando as interações são mediadas por significados construídos coletivamente, não estão colocadas numa relação mecânica adulto-criança, criança-criança, mas acontecem na zona de desenvolvimento proximal, em que o processo de interiorização é definido pela transformação dos significados construídos externamente ao nível interpessoal, mediante a linguagem, e as ações dos outros em significados individuais, ao nível intrapsicológico, que se revela na autodeterminação da construção da solução do problema.

A forma como foi colocada a questão para a classe, "aqui temos um problema", parece estar induzindo que os dados da tabela estão errados. Talvez seja este um motivo que leve Dré a buscar a causa do erro.

Concluindo, neste episódio, revelamos que, quando as crianças medem com instrumentos em que a unidade é múltipla de outra, não questionam espontaneamente os valores obtidos, mesmo que estes apresentem um aparente discordância com a realidade. Mas, diante do questionamento da professora, uma criança consegue explicar a aparente discordância comparando a quantidade de unidades dos dois instrumentos usados para medir e propõe que para medir certo teria que ser sempre com o mesmo instrumento.

Episódio 8

O Curupira

Esta atividade tem por objetivo colocar para a criança uma situação-problema sobre a unidade de medida.

A atividade se desenvolve através da narração da lenda do Curupira adaptada para a situação de medir. Nesta adaptação o indiozinho não tem os pés voltados para trás. O Curupira convidou o gigante e o anão, para tomarem uma sopa de cogumelos em sua casa e explicou que ela estava distante daquele lugar onde se encontravam, 30 passos, nem mais e nem menos, seguindo sempre em frente, por aquele mesmo caminho. Dito isto, o Curupira desaparece pela floresta.

Situação problema

O professor termina a história dizendo que, embora os dois tenham dado os 30 passos não conseguiram chegar à casa do Curupira. Depois coloca o seguinte problema para as crianças. - O que vocês acham, por que eles não conseguiram chegar à casa do Curupira?

Episódio

O episódio foi dividido em cenas que foram selecionadas de forma a evidenciar o processo de construção da solução do problema.

Cena 1

Yag - Eu sei, é porque o passo de um é maior e o do outro é menor.

P - Então venha aqui e mostre para nós o que aconteceu.

Yag - Mas eu não consigo, o passo do gigante é maior do que o meu.

P - Quem tem outra idéia sobre porque eles não chegaram?

As crianças falam ao mesmo tempo.

P - Vamos ouvir a Bia.

Bia - Eles tinham um passo maior do que o outro.

Rafa - Eu acho que o anão dá um passinho porque ele é muito pequeno mas mesmo assim, se os dois ficam juntos, e o gigante vai seguindo o anão e faz passo pequeno, os dois chegam juntos.

P - Então o gigante fez passos do tamanho do passo do anão?

Rafa - É, e mostra como o gigante diminui o passo.

P - Quem tem mais alguma idéia?

Jul levanta-se e caminhando em direção a lousa diz: - Vou explicar na lousa. -Desenha uma casa, e explica: -Esta é a casa do Curupira. Enquanto, encena o passo do gigante e do anão, diz: - O gigante deu passos tão grandes que passou da casa. O anão deu passos tão pititinhos que errou o caminho.

Cena 2

A professora propõe para Vit dar um passo de gigante e, ao lado dele, ajusta o passo de anão encenado por Paul. Os passos, assim representados, ficam visivelmente defasados em tamanho. Pede para as crianças observarem e após pergunta: - Como eles podem chegar ao mesmo lugar deste jeito?

Algumas crianças levantam e dão passos grandes e pequenos andando pela sala. A professora, inicialmente, tenta impedir mas, diante da insistência das crianças resolve orientar a brincadeira e diz: - Agora, todos vão dar uma volta fazendo passos de gigante. - Depois muda a ordem: - Agora, fazendo passos de anão. Feliz, cada criança esforça-se em dar o maior e o menor passo possível. Em seguida, convida a todos a se sentarem em seus lugares e pergunta: - Que passo, então, a gente tem que dar para chegar à casa do Curupira?

Algumas crianças respondem isoladamente: - Médio, médio.

Cai - O passo do Curupira.

P - Por que tem que ser o passo do Curupira?

Rafa- Porque o passo do Curupira é médio.

P2 - Por que, Cai? Como você teve a idéia de que tem que ser o passo do Curupira?

Cai - Porque ó, o do gigante não é grande e do anão não é pequeno? Então, tem que ter o médio do Curupira!

Cena 3

P2 - Como é que o Curupira sabia que eram 30 passos?

Yag - Porque foi ele que deu os 30 passos.

A professora dirige-se a Yag pedindo que explique para todos como está pensando.

Yag - O Curupira mediu primeiro, só que a medida do passo do Curupira não serviu nem para o anão nem para o gigante, o do gigante passava e do anão faltava, então, nenhum conseguiu chegar.

P - E agora, com o passo de quem eles vão medir?

Yag- Há, isto eu não sei.

Fep - O gigante deu passos assim, e mostra, apoiando em cima da perna, uma abertura grande de mão, o anão deu assim, mostra um abertura bem menor, - então o Curupira tem que dar assim - mostra uma abertura média. Após, levanta-se, caminha em direção à professora e diz pausadamente: - Eu acho que o anão e o gigante têm que ir depressa se não vão comer a sopa fria.

P - Mas então Fep, qual é a medida de passos que eles têm que dar?

Fep olha admirado para a professora e repete baixinho, - “me...dida” - depois diz: - Com o passo do Curupira.

P2 - Dré, o Fep acabou de dizer que eles devem medir com o passo do Curupira, você concorda?

Dré fala compassadamente - Eu acho que o Curupira devia mostrar o passo dele para o gigante e para o anão para eles darem o passo igual ao dele.

Cena 4

P, dirigindo-se a Dré: - E como vamos fazer isto?

Dré coloca-se no centro da sala e diz: - Eu acho que o Curupira devia de dar um passo assim. - Dá um passo e permanece com um pé lá e outro cá, e continua dizendo: - E depois marca aqui (apontando para as extremidades de cada pé) e depois mede. - A professora marca com giz, onde ele aponta. Permanecem no chão as marcas do tamanho dos dois pés de Dré, conforme a figura abaixo.



A professora chama Vit, que representa o gigante, para medir o passo. Ele ajusta corretamente calcanhar com calcanhar. Depois, é a vez do anão. Pau coloca um pé e outro no espaço das marcas, mas seus pés são bem menores. A professora pede que ajuste com o tamanho do passo. Pau não sabe como

ajustar. Rodrigo vem e ajuda e ajusta os calcanhares de Pau com os das marcas.

Algumas crianças reclamam dizendo que “assim vai sobrar”. Foi então que a professora percebeu que estas crianças estavam entendendo o tamanho do passo como sendo o tamanho do pé, ou seja, o tamanho do passo não estava sendo entendido como a distância entre um pé e outro mas como o tamanho de um e de outro pé. A professora chama algumas crianças para mostrarem, no desenho, o tamanho do passo do Curupira e elas apontam para um pé e outro.

P2, indignada, diz: - É o tamanho do passo e não do pé.

P - Quem vem mostrar, no desenho, o tamanho do passo do Curupira?

Dré ajusta novamente seus pés sobre as marcas. Fep e Ro aproximam-se do desenho, Jul pega um pedaço de giz, contorna os pés de Dré, mostrando como sendo o tamanho do passo.

P - Jul este é o tamanho do pé, mostre o tamanho do passo. Jul resbala o giz de um risco a outro qualquer.

P - Jul, quando você anda, o que você coloca primeiro no chão?

Jul - O pé.

P - Mas que parte do pé.

Jul experimenta caminhar e diz: - O calcanhar - e dirige-se novamente ao desenho e faz um traço horizontal ao lado de cada traço que representa a extremidade dos calcanhares de Dré.

P - Isto Jul, este é o tamanho do passo. Apague agora os outros riscos para não confundir.

Jul apaga os riscos que representam as pontas de cada pé. Permanece o desenho dos dois traços que representam a distância de um calcanhar ao outro.

As crianças agora experimentam medir seus passos com o tamanho do passo do Curupira.

/
/

Discussão

Aspectos culturais

Analisando o aspecto matemático das colocações das crianças para resolver o problema, na Cena1, parece que Yag, Bia, Rafa, Jul justificam da mesma forma o fracasso dos dois personagens, isto é, o anão e o gigante não conseguiram chegar à casa do amigo porque um tem o passo muito maior do que o do outro. Por sua vez, Bia, Rafa, Jul elaboram o mesmo tipo de solução: os dois personagens devem fazer passos do mesmo tamanho para chegar à casa. Este raciocínio pode decorrer de uma interpretação do problema de forma diferente da proposta, ou seja, como que o gigante e o anão devem fazer para chegar *juntos* à casa do Curupira. Esta interpretação pode advir da noção de medida como contagem de grandezas discretas, segundo a qual os passos iguais não são unidades de medida mas unidades discretas que perfazem o conjunto de 30 passos. De fato, parece que, para as crianças, 30 passos não estão representando uma distância e os passos iguais não representam a possível unidade com a qual foi comparada a distância. O raciocínio, que definimos fundamentado na contagem, é expresso por Rafa quando sugere que o gigante deveria diminuir o passo de forma a igualar em tamanho ao do anão. É a primeira idéia que elas tem de medida e é este um elemento que pode contribuir para o avanço dessa idéia.

Aspectos educacionais

Na Cena2, a professora, ao ilustrar a desigualdade entre o passo do anão e o passo do gigante, parece estar reforçando a idéia de que para medir a distância até a casa do indiozinho o anão e o gigante devem eliminar a desigualdade entre seus passos, a maior razão, quando coloca a questão de como eles poderiam chegar ao mesmo lugar com passos tão desiguais. A intervenção do professor decorre, nos parece, de uma tentativa de tornar mais evidente para as crianças os elementos da solução que construíram até o momento, a de igualar os passos entre si. A intervenção da professora despertou nas crianças o aspecto imaginário do problema, o “fazer de conta” de anão e de gigante. Andar imitando o tamanho de passos de um e de outro personagem parece ter possibilitado a Cai, Rafa e outras crianças a evocação da relação entre tamanhos, definida por tamanho pequeno, médio e grande.

O conhecimento desta relação contribuiu para a elaboração de uma solução que, para eles, está perfeitamente coerente com o problema. Cai verbaliza esta coerência quando justifica para a professora sua solução. São três personagens, entre dois dos quais já está definida a relação de tamanho. Por decorrência desta relação, o terceiro será de tamanho médio em relação aos outros dois.

Diante do raciocínio de Cai, teríamos duas hipóteses: uma, refere-se à possibilidade de o passo médio estar sendo sugerido como unidade-passo, à qual devem ser igualados os outros dois passos. Neste caso, a solução teria uma qualidade operacional diferente daquela manifesta na Cena1. A idéia de igualar os dois passos a um terceiro tamanho pode advir do entendimento de que este tem a qualidade de unidade de medida, e a idéia de igualar os passos entre si, pode advir de um entendimento de medida como contagem de 30 passos iguais, como já argumentamos anteriormente. A a outra hipótese refere-se à possibilidade de o passo médio estar sendo sugerido por decorrência de um raciocínio de justaposição de elementos da relação de tamanho a elementos semelhantes do problema como, passo de anão e de gigante à pequeno e grande,

mas para estabelecer uma relação de pequeno, médio e grande falta o passo médio que, por decorrência, passa a ser o do Curupira.

Para a confirmação da primeira hipótese não temos dados suficientes. Faltaram questões que possibilitassem a explicitação ou não do suposto pensamento de unidade-passo. Uma destas questões poderia ser expressa da seguinte forma: “Como é que você sabe que o Curupira mediu com passo médio e não com o passo do gigante e nem com o do anão?”. A segunda hipótese nos parece confirmada pela justificativa que Cai dá à sua solução. Não se trata, porém, de duas hipóteses excludentes, pois a idéia de tamanho médio, mesmo que lembrada apenas pela relação de tamanho, apropriada em bloco, como uma tríade inseparável do pequeno, médio e grande, poderia ser aplicada ao problema como uma unidade de medida. Contudo, a predominância de uma ou de outra hipótese é que define a qualidade do pensamento de medida envolvida na solução do problema.

Cena 3

Nesta cena, temos mais dados para avaliar o raciocínio de Yag que já havia se manifestado na Cena1. A nova questão colocada pelo educador possibilita a Yag expressar um pensamento com elementos operacionais da medida. Supor que foi o próprio Curupira que deu os 30 passos é a idéia suporte para a solução do problema. A ela está subentendida a questão: qual pode ser a unidade com a qual foi medida a distância de 30 passos, e que está implícita na questão colocada pela professora pois, igualando ou fazendo passos proporcionais à unidade, chega-se a percorrer a mesma distância. Yag tem a noção de que a medida do passo do Curupira é a que deve ser imitada, tanto que, na sua concepção, isto não pode ter sido feito nem pelo anão nem pelo gigante, por isso que “nenhum conseguiu chegar.”

O fato de Yag ter avançado no raciocínio de medir e, ao mesmo tempo, não conseguir formular a solução nos leva a supor que o elemento

imaginário do contexto da história pode ter-se tornado, para ele, um impedimento para raciocinar independente da natureza do passo muito grande do gigante e do passo muito pequeno do anão. Duas falas de Yag nos levam a esta suposição. Uma ocorre na Cena1, quando solicitado pela professora a demonstrar que um passo é bem maior do que o outro, como ele acabara de afirmar, Yag se recusa dizendo que não vai conseguir fazer o passo do gigante, porque é bem maior do que o seu; a outra colocação está nesta Cena, quando diz que a medida do passo do Curupira não serviu nem para o anão e nem para o gigante e explica porque. Isto demonstra que para ele o tamanho muito grande e muito pequeno dos passos dos dois personagens imaginários é invariável portanto, não se ajustam ao passo do Curupira. Esta suposição tem sua fundamentação também em outras situações de sala de aula que pudemos observar e que não faziam parte da pesquisa. Para trabalhar o mesmo objetivo desta atividade uma professora contou a história do anão, do gigante e da bruxa, em que o passo da bruxa deveria ser a unidade de medida. Algumas crianças se recusaram a medir seu passo com o tamanho do passo da bruxa que estava traçado no chão, pois diziam que não queriam “ser bruxa”.

Esse é um momento em que, segundo Held (1980), o imaginário e o real se fundem e acrescentaríamos, o momento em que a criança escapa aparentemente do real pedagógico, o objetivo da atividade. Mas, segundo a mesma autora, é através desta alternância do real e do imaginário que a criança vai construindo gradativamente o conhecimento do real. Encontramos uma manifestação da complementação entre o real e o imaginário apontada por Held, na fala e na intonação de Fep. Ele constrói a solução do problema com a expectativa de que o gigante e o anão cheguem cedo para tomar a sopa ainda quente. Parece que a fusão do real com o imaginário contribuiu para envolver Fep com o problema proposto, quase como se fosse um personagem da história que não gostaria de tomar uma sopa fria. O aspecto do envolvimento com o

problema, como se este fosse uma necessidade real da criança, é uma condição necessária para que ela se disponha a participar da busca de solução.

No caso desta atividade, a construção da solução envolve muito pouco a ação da criança, pois trata-se de um problema cuja solução deve ser construída a partir de relações entre tamanho de passos e o número de passos que representa uma distância, ou seja, uma solução que envolve símbolos matemáticos como o número, grandezas contínuas e relações operacionais entre eles. A discussão da solução acontece no nível do simbólico e no nível do discurso.

Os símbolos matemáticos aparecem como conhecimento espontâneo cujo significado não está construído a partir das relações operacionais de medir. Assim, na Cena1 aparece nas falas o símbolo grande com o significado de pés bem distanciados e o símbolo pequeno, de pés bem pouco distanciados; na Cena2, o símbolo médio, com significado de pés mais ou menos distanciados; na Cena3, 30 passos com o significado de distância, medida do passo com o significado de tamanho do passo, abertura da mão com o significado de tamanho de passo. Podemos observar que os três elementos, o imaginário, o real e o simbólico aparecem imbricados nos diálogos, nas ações e contribuem também para a construção da solução do problema.

Aspectos matemáticos

Retomando a análise da colocação de Fep, do ponto de vista matemático, sua solução parece ter a mesma qualidade daquela que Cai elabora, na Cena1. A demonstração que ele faz, com a mão, de como deve ser o tamanho dos passos dos personagens evidencia um raciocínio de transposição da relação de tamanho pequeno, médio, grande para os passos dos personagens. Esta demonstração evidencia o caráter não operacional de sua resposta, no qual propõe medir com o passo do Curupira. Sua resposta pode ser, portanto, uma imitação da resposta de Cai e Jul, dadas na Cena1.

A solução colocada por Dré parece atingir a qualidade operacional da idéia de medir, para esta situação. Ao afirmar que o Curupira deve mostrar o passo dele para os outros dois personagens, parece supor uma unidade de medida, ou seja, uma unidade que tem a característica de manter-se constante em tamanho, no passo dos outros dois, enquanto é aplicada para medir a distância de 30 passos. Enquanto as outras propostas defeniam o tamanho do passo do Curupira como médio, movidos pela necessidade de reproduzir a relação de tamanho pequeno, médio e grande, Dré está convicto que o tamanho do pé do Curupira pode ser qualquer valor que se estabeleça, desde que este tamanho seja usado pelos outros dois, e é exatamente o que faz, como vem ilustrado na Cena4. A sua iniciativa em definir o tamanho do passo evidencia que sua idéia não está vinculada a um tamanho médio, ou a igualar um passo ao outro, mas a um terceiro que deve ser estabelecido como o passo padrão, a unidade-passo, tal que, uma vez estabelecido seu tamanho, a ele se ajustam os passos dos outros dois personagens.

Na Cena4, Dré faz uma demonstração do possível tamanho do pé do Curupira. Ele solicita à professora que marque, no chão, o tamanho de seu passo. No momento em que Dré dá o passo fazendo de conta que o seu passo é o do Curupira ele está assumindo o papel do personagem que detinha o segredo do tamanho da unidade-passo e, ao mesmo tempo, contribuindo para quebrar o encanto do mítico, distante, impossível de ser imitado. Ele torna real o imaginário, tanto que agora todas as crianças experimentam o tamanho real do passo do Curupira. A iniciativa de Dré desencadeia um elemento novo na solução do problema a representação simbólica do tamanho do passo.

Dré poderia dar o passo, mostrar que aquele era o tamanho do passo do Curupira e se retirar, mas certamente sabia que, ao fazê-lo, desapareceria o passo que ele havia criado, era preciso que o passo permanecesse, mesmo desfazendo-o, assim todos poderiam ver e igualar o seu ao dele, como projetou

para a solução do problema dizendo que o Curupira deveria mostrar o seu passo para que os outros dois personagens pudessem copiá-lo.

Ao solicitar para a professora que passasse um risco marcando até onde chegava a ponta de cada pé, e outro, até onde chegava o calcanhar, conforme figura 1, Dré está fazendo uma representação do tamanho do passo. As marcas no chão passam a ser um símbolo matemático do comprimento do passo. Para algumas crianças, como no caso de Pau, este símbolo é apenas o desenho de um pé e outro, apoiados no chão, ou seja, o desenho real da posição dos pés; para outras crianças, como no caso de Vit, que ajustam seu calcanhar ao traço que o representa, aquele símbolo tem o mesmo significado de tamanho que Dré lhe conferiu. Assim, na mesma atividade, um símbolo criado conjuntamente com a classe para ilustrar a solução do problema assume dois significados, um de desenho da realidade e outro de representação de uma propriedade matemática daquele passo específico, ou seja, do comprimento. Nos parece que esta interpretação advém da noção de medir que estas crianças têm elaborado até então.

A elaboração de significados tem sua raiz naqueles já construídos. Poderíamos dizer que a interpretação do símbolo traçado no chão, como sendo o desenho de um pé e outro, advém da noção de medida como contagem de objetos discretos, no caso, a contagem de quantas vezes coloca o pé no chão até atingir a distância dada; e a interpretação do símbolo como representação do tamanho do passo advém da noção de medida que envolve a comparação entre tamanhos, a unidade-passo e a distância. Todo o desenvolvimento posterior é um trabalho de construção do significado do símbolo desenhado no chão, que matematicamente consiste em apropriar-se do significado da unidade-passo.

Analisando sob o ponto de vista dos elementos *constitutivos* da idéia de medir, segundo Caraça e outros, o processo do raciocínio destas crianças, percebemos que o fato de, nesta situação problema, já estar definida a expressão numérica relacionada à comparação da unidade com a grandeza distância,

contribuiu para a elaboração de dois tipos de interpretação do problema de medir: um que relaciona a medida com a contagem de grandezas discretas e outro que decorre da idéia de medir com o tamanho de passo com o qual foi medida a distância dada. Não podemos concluir que esta última interpretação tenha atingido a complexidade operacional da noção de medida pelo fato de não estar evidenciada uma relação de proporção entre a unidade de medida e a expressão numérica dada.

Aspectos educacionais

Do ponto de vista educacional, consideramos que houve um avanço no processo de medir da classe desde o nível que define que é preciso percorrer 30 passos iguais para atingir a distância dada e que provém da noção de medir como sendo a contagem de um conjunto de objetos dicretos, representado pelas colocações de Yag, Bia, Ju, Rafa, Cai, Fep, Pau, até o nível que define o tamanho do passo com que o Curupira contou os 30 passos como unidade padrão para medir a distância dada, representado pelas elaborações de Yag, Dré, Ju e Vit. Não podemos dizer que esta evolução tenha acontecido, como um todo, no nível individual de cada criança porém, cada uma evoluiu dentro de um nível possível a partir de seu conhecimento inicial, como foi sendo evidenciado na análise de cada Cena.

Neste episódio, podemos relevar o fato da contribuição dos elementos externos como as questões levantadas pelo professor e pelas crianças, a encenação dos passos, para a construção da solução e para o avanço da idéia de unidade de medida. A solução, num primeiro momento, estava sendo discutida apenas no nível da imaginação e falas das crianças e que visivelmente apresentou um limite. Num segundo momento, o elemento perceptivo advindo da experimentação dos passos parece ter acelerado a solução. Foi experimentando o passo grande do gigante e o passo pequeno do anão que Cai percebeu que poderia ter o passo médio e relacionou este ao passo do Curupira. O elemento

imaginário, experimentando ser personagem da história, contribuiu para agilizar o raciocínio da solução. Fantasia e raciocínio estão interligados e contribuem para a criação da solução. A brincadeira da criança une-se ao sério do professor e esta unidade pode estar fertilizando o raciocínio de Cai, Jul, Fep, Yag e Dré. O fantástico e o real, cuja unidade possibilita à criança, segundo fala Snyders (1993) sobre o conhecimento escolar, deitar o seu conhecimento cultural da medida na cultura científica deste. Aproximação esta que fica sempre ao encargo de um exercício escolar amargo e difícil para a criança.

A certeza da descoberta faz com Cai salte diante do professor para dar a sua resposta. Jul tenta ilustrar com um desenho, na lousa, a sua solução. As crianças se permitem encenar passos pela sala. Todo este conjunto de ações representa uma situação de ensino, em que a criança está inteira para pensar, não só o cognitivo está em jogo mas o emocional, a fantasia, o cultural na busca da solução do problema de medir.

Do ponto de vista educacional, pode-se dizer que fica manifesta nas questões que vão sendo colocadas pelos adultos envolvidos na atividade uma progressiva aprendizagem deles em avaliar o pensamento da criança. Nas Cenas 1 e 2 as intervenções possibilitam a manifestação da aplicação do conhecimento cultural que a criança tem de medida na construção da solução, pois são feitas a partir deste conhecimento. Percebe-se uma postura por parte dos adultos de questionar dentro do limite de um possível avanço da criança, ou seja, a partir de seu conhecimento primeiro de medida.

Concluindo, revelamos na análise deste episódio que as crianças, ao terem que medir uma distância, cujo valor é conhecido em número de passos, espontaneamente sugerem medir com um passo médio, entre um passo muito grande e um muito pequeno; e posteriormente, mediante a contribuição das interações mediadas pelos significados de medir que emergem das discussões e demonstrações do grupo, algumas crianças sugerem que o tamanho do passo para

medir a distância dada deve ser igual ao tamanho do passo que a mediu e que obteve o valor de 30 passos.

As ações de medir sob o enfoque matemático e educacional

Objetivamos nesta investigação estudar as ações de medir que são construídas através das interações, em situação de ensino, quando as crianças buscam solucionar situações-problema de medir o espaço unidimensional.

Partimos do pressuposto que o conjunto de ações das crianças, representadas nos episódios, revelam os procedimentos definidores de suas concepções de medir construídas a partir das interações na busca da solução do problema colocado. Bem como tentamos revelar que esta busca de solução é mediada por símbolos cujo significado é construído socialmente e apropriado individualmente.

Neste capítulo reuniremos sob o enfoque matemático e educacional as ações e seus significados evidenciadas na análise de cada episódio.

O enfoque matemático é centrado nos três aspectos constitutivos da idéia matemática de medida:

- a seleção da unidade de medida;
- a comparação da unidade com a grandeza a ser medida;
- a expressão numérica da comparação.

A análise matemática considera a interdependência entre estes aspectos e como a manifesta nas suas ações de medir.

A análise educacional está centrada nos aspectos educacionais da teoria sócio-histórica e suas possíveis contribuições na formação das ações de medir das crianças:

- interações mediadas pelos significados de medir;
- as representações simbólicas;
- a imaginação;
- o envolvimento lúdico.

A análise sob os aspectos matemáticos

Para elaborarmos as atividades de medir e para fazermos a análise dos episódios, assumimos basicamente como definição de medida aquela discutida por Caraça (1975), pelo fato deste autor relevar a interdependência dos três aspectos constitutivos desta idéia. Um outro autor que tomamos como referência, Aleksandrov et alii (1988), releva a combinação dos aspectos geométrico e aritmético da medida e que caracterizam a interdependência entre aqueles destacados por Caraça.

Segundo Caraça, medir é basicamente *comparar* duas grandezas da mesma espécie, dois comprimentos, dois volumes, duas superfícies, dois pesos, etc. Observa que: *Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos - escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número.* (Caraça, 1975: 30). Enfatiza o autor que o primeiro e o terceiro aspectos do problema estão intimamente ligados e cada um deles condiciona o outro.

Aleksandrov observa que a simples medição de uma linha representa a fusão de aspectos geométricos e aritméticos. De fato, para medir o comprimento de um objeto aplica-se a este uma determinada unidade de comprimento e, ao mesmo tempo, calcula-se quantas vezes é possível repetir esta operação. O autor diz que o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, e o segundo (cálculo), de caráter aritmético e ilustra com um exemplo: quem conta seus passos enquanto anda está unindo estas duas operações.

No processo de medir ocorre geralmente que a unidade não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida, surge então a necessidade de fracionar a unidade de medida para poder expressar a grandeza com maior exatidão em frações de unidade, o que não é possível através do número natural. Daí a necessidade de ampliar o campo numérico. Observa-se então que a ação mútua da aritmética e da geometria contribui para o surgimento de um novo

número. Segundo o autor, os dados históricos mostram que foi da comparação de grandezas contínuas, ou seja, das medições que surgiram as frações.

Para podermos trabalhar a análise e as conclusões de forma mais evidente, escolhemos focalizar, isoladamente, cada aspecto matemático da medida, acima mencionado. É evidente que isto não traduz uma concepção de que este é o caminho de aprendizagem da medida, como se a criança aprendesse cada elemento isoladamente: primeiramente a seleção da unidade; depois a comparação; e finalmente a expressão numérica e posteriormente os juntasse num único conceito. O que queremos é focalizar as ações referentes a cada um para podermos evidenciar como a criança estabelece a interdependência destes aspectos e a possibilidade de avanço de sua compreensão quanto a medir o espaço unidimensional.

Na análise dos episódios, referimo-nos à expressão "unidade de medida" sob a conotação de qualquer instrumento que a criança use para medir: mão, passo, nós e espaços entre nós, dobras da tira e espaço entre as dobras, canudos, espaços de régua, mesmo que estes instrumentos não estejam sendo assumidos pelas crianças com a qualidade matemática de unidade de medida.

Podemos observar que nas situações-problema que possibilitaram a escolha da unidade de medida por parte das crianças, como por exemplo nas atividades "Lança moeda" e "Quem andou mais", elas escolheram, respectivamente, a mão e o passo para medir as distâncias. Este fato está de acordo com Piaget et alii (1948) e seus intérpretes, (Flavell, 1975; Holloway, 1969; Chamorro, 1988) os quais observam que, inicialmente, a criança tende a usar, como um elemento intermediário para medir, partes do próprio corpo. Assim, para comparar as alturas das torres, no experimento de Piaget e segundo o próprio pesquisador, a criança evolui do transporte apenas visual de uma torre, sobrepondo-a à outra, à golpe de vista, para o transporte da altura mediante a abertura dos braços.

O que Piaget diz a respeito de comparar tamanhos dos objetos, podemos dizê-lo, a partir de nossa investigação, a respeito da medida da distância. Quando se trata de escolher, entre outros tipos de unidade de medida, medir com a mão ou com o pé, parece ser preferência da criança. Não porque seja o único tipo de unidade de medida do qual tenha conhecimento, mas porque parece ser o que sabe usar imediatamente. Diante da proposta de medir, a criança não permanece bloqueada ou sem ação como se nada soubesse a respeito. Em nossa pesquisa ela sempre apresentou uma estratégia na qual incluía a escolha de um instrumento para medir.

É importante ter presente, quando nos referimos a situações de evolução, que a sequência enumerada dos episódios corresponde à sequência cronológica da aplicação das atividades. Este aspecto possibilita supor a ocorrência de avanços de uma atividade a outra.

As ações de medir sob o enfoque da escolha da unidade de medida

No nosso entender, supomos que a criança escolhe o que chamamos de unidade de medida por dois motivos: um para ter algo com que contar o espaço a ser medido, o outro por perceber que a contagem na medida tem um aspecto diferente da contagem de objetos de um conjunto. Na ação de medir deve manter uma certa regularidade, que se manifesta por repetir o "objeto-medidor", idêntico a si mesmo, tantas vezes quanto for necessário.

Tanto na contagem dos objetos de um conjunto, quanto na contagem que se refere à medida, para ela os objetos contados representam unidades indivisíveis, e portanto expressa-as com um número inteiro, ao contá-las. Isto pode-se deduzir dos episódios referentes à atividade "Lança moeda", em que as crianças, ao usarem a mão para medir, repetem-na sempre igual, sempre aberta e com os dedos paralelos; referente à atividade "Quem andou mais", onde fazem coincidir o número de passos ou pés ao número de lajotas e a regularidade dos

passos acompanha a regularidade das lajotas enfileiradas; referentes à atividade "O Curupira" em que a regularidade consiste em dar passos, ou só do tipo pequeno, ou só médio, ou só grande. Bem como, em outros episódios, em que usam um instrumento diferente do corpo: barbante, tira de cartolina e régua, em que contam os nós, ou o espaço entre estes; as dobras da tira, ou os pedaços de tiras; os números, ou os espaços de régua.

Pode-se inferir destes episódios que, para a maioria destas crianças, a unidade não é escolhida ou assumida como uma grandeza coerente àquela a ser medida, ou seja, no caso da medida linear, sob o aspecto de sua linearidade. Assim, podemos observar nas atividades "Quem andou mais", e "O Curupira" quando o passo-unidade não está sendo representado pela sua dimensão linear, mas por um pé e outro que é colocado no chão. Nem mesmo a unidade é concebida do ponto de vista de sua extensibilidade e portanto possível de ser fracionada, quando fosse necessário para expressar exatamente a medida.

A unidade de medida concebida como objeto discreto e não como grandeza contínua, fica evidente, ainda, em outros episódios como por exemplo: "Salto em distância" em que Gui conta os 6 canudos inteiros, incluindo o último, mesmo que este esteja avançando além do limite da dimensão da distância a ser medida, ou seja, ele não percebe que deve fracionar a unidade canudo, para expressar exatamente a medida, a menos que isto lhe seja observado; "Quem andou mais" em que Ca mede fazendo corresponder um passo a duas lajotas e, ao sobrar uma lajota, conta como sendo um passo, não fracionando a unidade-passo; "A feira de objetos" em que as crianças contam 11 espaços de régua, quando a medida exata é 10 e meio espaços.

Um outro aspecto que percebemos também ausente na seleção da unidade de medida é o de considerar a relatividade da unidade e portanto a necessidade de estabelecer uma unidade de referência, uma unidade padrão, nos casos de comparação de tamanho e distância. Isto se evidencia em todos os episódios, com algumas exceções. Como exemplos destas exceções têm-se no

episódio "Quem andou mais", em que Mi, ao comparar os resultados das distâncias percorridas por Ma e Be, relaciona-os ao tamanho das unidades-passo usadas por cada um dos medidores, apresentando assim, uma tentativa de relativizar a unidade de medida usada. A forma de Mi solucionar o problema deve ser consequente de uma forma de pensar a medida considerando também a extensibilidade da unidade. Pois, no mesmo episódio, Fep e Dré, que não relacionam a extensão do passo à da lajota, não apresentam em sua solução esta forma de pensar a relatividade da unidade.

Do ponto de vista da compreensão deste aspecto matemático da unidade, podemos observar que Dré manifesta uma determinada evolução. Enquanto que no episódio mencionado acima não apresenta em seu raciocínio indícios da relativização da unidade de medida, no episódio referente à atividade "O concurso de alturas", esboça uma primeira tentativa que se torna convicção, posteriormente no episódio "O Curupira", quando relativiza a unidade de medida àquela que realmente mediu a distância de 30 passos, ou seja, a um determinado tamanho do passo do Curupira.

Algumas crianças, na evolução das atividades passam a apresentar em suas ações de medir, evidências de ter presente os aspectos da unidade de medida que nos casos anteriores supomos ausentes. Temos como exemplos: na atividade "Quem andou mais", Ca e Mi, que relacionam a extensão do passo com a extensão das lajotas; na atividade "Salto em distância", Gui, Cel e Iva que relacionam a extensão da distância com a extensão do canudo; na atividade "A feira de objetos", Ro, Fe, Dré e Rafa que relacionam a extensão dos espaços de régua com a extensão do objeto; na atividade "O Curupira", Yag, Jul, Fep, Dré, Vit, Ro, Rafa que relacionam a extensão do passo com a extensão da distância.

Observamos que, entre estas crianças, algumas evoluíram na concepção da unidade desde concebê-la apenas como um objeto discreto que pode preencher a extensão da distância um número inteiro de vezes, até concebê-la na sua extensibilidade e linearidade possível de ser fracionada. Assim: Dré,

que no episódio "Quem andou mais" faz corresponder o número de vezes que coloca o pé no chão com o número de lajotas, nos episódios "A feira de objetos" e "O Curupira" percebe os espaços de régua e o passo do Curupira sob o ponto de vista de sua extensão linear. Fep que no episódio "Quem andou mais" tem a mesma concepção de Dré e com ele a discute convictamente, no episódio "Curupira" faz uma demonstração do tamanho do passo pequeno, médio e grande usando a extensibilidade da unidade-passo. Cel e Iva, que no episódio "Lança moeda" contam o número de vezes que colocam a mão no chão para medir a distância da moeda até a trave, em o "Salto em distância" mostram considerar a extensão do canudo, quando diminuem o último canudo para expressar corretamente a medida da distância. Gui, que no primeiro momento do episódio "Salto em distância" atribui ao "canudo-unidade" as características de um objeto discreto que só pode ser contado um número inteiro de vezes, no terceiro momento o concebe fracionável. Jul, que no primeiro momento do episódio "O Curupira" usa uma abertura variável de passo, no segundo momento faz corretamente o traçado da extensão do passo do Curupira, concebendo como objeto contínuo.

As ações de medir sob o enfoque da comparação da unidade com a grandeza a ser medida

Do ponto de vista da comparação da unidade com a grandeza a ser medida, as evidências se dão no sentido de um avanço da convivência de noções geométricas e aritméticas que se tornam presentes na ação de comparar e na expressão numérica da comparação. O modo como as crianças têm comparado a unidade com a grandeza evidencia que seu pensamento de medir está intimamente relacionado com a contagem de objetos discretos e conseqüentemente com o número natural. Nossa suposição a respeito é que aplicam à medida o conhecimento cultural de número que têm elaborado a partir de seu meio.

O que podemos observar do uso de senso comum do número, na vida cotidiana, é uma tendência a ajustar as quantidades contadas ou medidas ao número natural e que advém de uma estimativa, por alto, do cálculo, da contagem e da medida, expressa sempre com um número natural. Os números que organizam algumas relações sociais são naturais, como por exemplo os números que indicam denominações dos meios de transportes, das unidades habitacionais, das linhas telefônicas, que identificam as pessoas, em qualquer sociedade, e muitas outras. Segundo Frankenstein (1992), são muitas as situações cotidianas que são comunicadas através da comparação, envolvendo medida. Comparações estas que têm sua expressão numérica quase sempre no campo dos números não-naturais.

Todas aquelas relações que se estabelecem com base em comparações, devido ao caráter de extensibilidade de sua natureza, precisam ser expressas com números não-naturais. Assim é a comparação de valores, de qualidades físicas, de quantidades de objetos e de pessoas e outras. Como por exemplo, o valor das mercadorias, as medidas de tempo, de espaço, de energia, de massa, de densidade, de velocidade e de muitas outras, entre as quais destacamos, ainda, as relações expressas estatisticamente.

Observamos do uso cotidiano destas expressões numéricas uma tendência a "arredondá-las" para números inteiros. Isto parece também contribuir para a pouca experiência que, a partir de seu meio, a maioria das crianças têm do uso de números não-naturais. E é este conhecimento que se manifesta quando busca solucionar um problema de medir.

Do ponto de vista matemático, a idéia de comparação da unidade com a grandeza a ser medida envolve uma concepção de continuidade, de modo a tornar-se possível fracionar a unidade para expressar corretamente a grandeza em partes de unidade. A idéia intuitiva que se tem de continuidade consiste em algo que varia sem interrupções, sem saltos, gradativamente, de forma quase

impercetível. Segundo Caraça (1975), Aleksandrov (1988) e outros a linha reta é a imagem ideal da continuidade.

Ao medir, portanto, faz-se a comparação de duas grandezas contínuas: a unidade e a grandeza a ser medida. Segundo Aleksandrov, em contraste ao contínuo está o discreto, que significa o objeto indivisível e que, quando dividido, perde a qualidade de ser aquele tipo de objeto, o que pode ser exemplificado pelas expressões, um meio de flecha, um terço de homem, um quarto de mão etc.

As ações de medir das crianças, nesta investigação, parecem combinar de forma peculiar estes dois aspectos, o discreto e o contínuo. Quando lhes é sugerido medir a distância percorrida, contam o número inteiro de vezes que colocam a unidade de medida no "espaço" a ser medido. A unidade de medida é aplicada com a qualidade de um objeto discreto, indivisível. Este aparece como conhecimento inicial de comparação que as crianças têm elaborado. Mas, ao mesmo tempo, a criança aplica a unidade sobre uma extensão, a distância, cuja concepção parece estar entre o contínuo e o discreto, porque define como sendo o "espaço distância" aquele que vai desde um ponto de largada até o de chegada e vice versa. Este espaço não é, porém, indivisível porque, facilmente, ela altera seus limites para ajustá-lo a um número inteiro de vezes de unidade.

Destacamos essa forma de pensar a comparação no episódio "Salto em distância", em que, no primeiro momento, Gui conta o número de canudos inteiros que preenchem a distância saltada, mesmo que a fileira de canudos ultrapasse o ponto extremo que delimita a distância. No terceiro momento do episódio, porém, considera em sua contagem a unidade fracionada. Esse pequeno avanço de Gui pode estar representando a percepção de uma nova qualidade da unidade canudo, aquela de ser divisível para expressar exatamente a medida. Neste caso, expressar exatamente a medida significa considerar também os limites que definem a distância, eles não podem ser modificados para serem ajustados a um número inteiro de canudos.

No episódio "Lança moeda", Ander ajusta o número de vezes que coloca a mão no chão, medindo o espaço entre a moeda e a trave, ao número que havia estimado anteriormente como sendo a medida deste espaço. Isto evidencia a concepção de que a aplicação da unidade sobre a grandeza deve resultar num número inteiro de mãos que pode ser ajustado independentemente da forma como é deslocada. Ou seja, na concepção de Ander, não existe uma relação entre a extensão da unidade e a extensão da distância.

Encontramos na ação de Mi, ao medir a distância percorrida na atividade "Quem andou mais?", uma forma de considerar o aspecto contínuo da unidade. Mi conta os passos mantendo uma abertura constante correspondente à extensão de duas lajotas e fraciona a unidade de forma a ajustá-la à extensão exata da distância, porém não expressa o número fracionário correspondente.

No episódio "A feira de objetos", as crianças, inicialmente, dão a medida dos objetos contando espaços inteiros de régua, mesmo que a extensão do objeto esteja abrangendo uma fração de espaço. Posteriormente fazem a leitura da dimensão exata do objeto, fracionando a unidade.

Supomos uma evolução na concepção da unidade de medida de Dré. Nos episódios "Quem andou mais?", "O concurso de altura" ele aplica respectivamente as unidades passo, nó e dobra da tira na qualidade de objetos discretos indivisíveis. Na atividade "O Curupira", porém, soluciona o problema justamente porque faz a relação do aspecto contínuo da unidade-passo com a extensão da distância.

As ações de medir sob o enfoque da expressão numérica da comparação entre a unidade e a grandeza a ser medida

A análise que fizemos de cada episódio, revela também as noções relacionadas à expressão numérica da medida. A esse respeito, Caraça (1975) observa que a expressão numérica condiciona a seleção da unidade. Por exemplo, para medir o comprimento de um objeto, ou de uma distância, torna-se

mais fácil expressar estas dimensões com um número, se a unidade de medida for de natureza linear. A outra condição que advém da expressão numérica é referente à dimensão da grandeza a ser medida, isto é, não é prático comprar tecido, medindo-o em unidades de quilômetro, e nem terreno em centímetros quadrados. Por este motivo, observa o autor, uma grandeza tem tantas medidas quantas forem as unidades com a qual foi feita a sua medição.

A relação entre a expressão numérica da medida, escolha e aplicação da unidade manifestam-se intimamente imbricadas nas ações de medir das crianças em coerência com a concepção de medir que elas trazem e a partir da qual evoluem. Quando a expressão numérica advém da contagem da unidade na qualidade de objeto discreto será sempre um número natural. Esta é a qualidade de número que as crianças envolvidas nesta pesquisa parecem conhecer a qual é construída a partir da contagem da realidade discreta, enquanto indivisível. Segundo a observação de Caraça, é coerente dizer que a concepção de número que estas crianças têm elaborado condiciona sua concepção de unidade.

A relação entre a expressão numérica e a natureza da unidade de medida fica evidente nas ações de medir das crianças na atividade, "Lança moeda", em que nenhuma das crianças presentes, estimou a distância em valor fracionário de unidades. Houve várias tentativas de ajustar o número de vezes que coloca a mão no chão ao número de vezes estimado (sempre um número natural), mesmo que para isso tenha sido necessário espaçar, sempre mais, uma mão da outra, como fica ilustrado no episódio que destacamos desta atividade. Na atividade "Concurso de altura" ao tentar explicar a aparente discrepância entre os valores da tabela, comparando o número de nós com o número de dobras na tira, Dré mostra perceber que existe uma relação entre aqueles valores e o tipo de unidade usada. Por isso, conclui que para corrigir a discrepância deve ser usado o mesmo instrumento para medir a altura de todos.

Mesmo que a comparação que Dré faz seja entre números inteiros, isto é, número de nós ou dobras e o valor numérico da medida da altura, este tipo de

raciocínio é fundamental para a compreensão da medida. Torna-se um raciocínio básico para posteriormente comparar as dimensões das unidades com as respectivas expressões numéricas. Na atividade "A feira de objetos" e "O Curupira" podemos observar uma evolução na representação da unidade em função da expressão numérica. Inicialmente as crianças aplicam a unidade na qualidade de objeto discreto e expressam a comparação através de um número inteiro de vezes, posteriormente fracionam a unidade, quando lhes é possibilitado o recurso ao número não natural.

O processo de medir destas crianças vem apresentando avanços gradativos quanto a conceber a interdependência dos elementos da medida, a seleção da unidade, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica desta comparação.

Fica evidente dos dois últimos episódios o que diz Aleksandrov (1988) sobre o processo de medida, quando este consiste na união de dois contrastes: o discreto e o contínuo. O contínuo é medido por unidades individuais. Porém, estas unidades que em princípio são indivisíveis, não são suficientes; é preciso introduzir partes fracionárias da unidade original. Deste modo, surgem os números fracionários, e o conceito de número se desenvolve precisamente como resultado da união destes dois contrastes.

A questão sobre o fracionamento da unidade pode apresentar para a criança dificuldades relativas à natureza do objeto que usa como unidade. Dado a unidade de medida estar ligada, na concepção da criança, ao objeto como um todo, e não à sua dimensão linear, fracioná-la significaria fracionar o objeto que para ela deixaria de ser o que é. Tomamos como exemplo a mão, quando é usada como unidade de medida. Para a criança torna-se difícil conceber uma fração da mão, quando esta não couber um número inteiro de vezes da dimensão da grandeza a ser medida, a não ser, atribuindo-lhe o símbolo de um ente geométrico de dimensão linear. Mesmo assim, algumas crianças esboçavam uma forma

concreta de fracionar a mão, encolhendo-a quando, no espaço que ainda resta medir, não cabe uma mão inteira.

Estas tentativas estão num nível diferenciado daquele que ajusta os espaços entre uma mão e outra, de forma a conseguir um número inteiro de mãos. Pois as supomos decorrentes da contagem da unidade como objeto discreto, enquanto que a outra advém da forma de medir comparando a extensão da unidade com a extensão da grandeza, .

Consideramos as tentativas de fracionamento, mesmo quando a fração é contada como uma unidade inteira, como no caso de Mi, na atividade "Quem andou mais?", como uma evidência de um potencial de possível avanço, na concepção de medir.

Uma amostragem dos três aspectos matemáticos manifestos nas ações de medir das crianças

Buscamos destacar resumidamente na tabela como aparecem, nas ações de medir das crianças, desencadeadas pela situação-problema, e evidenciadas nos episódios, os três aspectos constitutivos da idéia matemática de medir.

EPISÓDIOS E RESPECTIVA SITUAÇÃO PROBLEMA	SELEÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA	COMPARAÇÃO DA UNIDADE COM A GRANDEZA	EXPRESSIONAMENTO NUMÉRICO DA COMPARAÇÃO
<p>"Lança moeda"</p> <p>As crianças verificam, medindo com a mão, o valor da distância que a criança que está jogando havia estimado.</p>	<p>medir com a mão aberta e dedos paralelos;</p>	<p>desloca a mão sempre idêntica a si mesma comparando seu tamanho, ponto a ponto, com a dimensão a ser medida, considera a extensibilidade da unidade e da grandeza.</p> <hr/> <p>desloca a mão sempre idêntica a si mesma, deixando espaços irregulares entre uma e outra, comparando com o número de vezes que coloca a mão no chão; não considera a extensibilidade das dimensões;</p>	<p>Para a unidade mão a expressão numérica corresponde: à quantidade de mãos deslocadas, regularmente, e sempre idêntica a si mesma; ao longo da dimensão a ser medida;</p> <hr/> <p>—</p> <p>ao número de vezes que coloca a mão no chão de uma extremidade a outra da dimensão.</p>
<p>"Quem andou mais?"</p> <p>Duas crianças percorreram, visivelmente, quase a mesma distância, mas as medidas apresentam valores discrepantes. O que pode ter acontecido?</p>	<p>medir com os passos</p>	<p>desloca-se mantendo os passos regulares comparando-os ponto a ponto com a dimensão a ser medida.; considera a extensibilidade da unidade- passo e da grandeza a ser medida;</p> <hr/> <p>desloca-se diminuindo os passos para ajustá-los à dimensão a ser medida;</p>	<p>Para a unidade passo a expressão numérica corresponde:</p> <p>ao número de passos de tamanho padrão que cobrem a dimensão da grandeza medida;</p> <hr/> <p>—</p> <p>conta o passo diminuídos, como uma</p>

EPISÓDIOS E RESPECTIVA SITUAÇÃO PROBLEMA	SELEÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA	COMPARAÇÃO DA UNIDADE COM A GRANDEZA	EXPRESSÃO NUMÉRICA DA COMPARAÇÃO
<p>"Concurso de altura"</p> <p>por que os valores das alturas das crianças, na tabela, estão discrepantes ?</p>	<p>medir com uma tira de cartolina cujas unidades são marcadas com dobras.</p>	<p>comparando a extensão da tira com a extensão da dimensão a ser medida;</p> <hr/> <p>. contando quantas dobras de tiras preenchem a dimensão a ser medida; não compara a extensibilidade da unidade de tira com a da grandeza a ser medida.</p>	<p>a expressão numérica corresponde:</p> <p>a um número inteiro de unidades de tiras;</p> <hr/> <p>. ao número de dobras que preenchem a dimensão medida</p>
<p>"Concurso de altura"</p> <p>o mesmo problema anterior</p>	<p>medir com um pedaço de barbante cujas unidades são representadas por espaços regulares entre nós.</p>	<p>comparando a extensão do instrumento barbante com a extensão a ser medida;</p> <hr/> <p>. contando quantos nós são abrangidos pela dimensão da grandeza a ser medida;</p> <hr/> <p>considera que para comparar as medidas é preciso medir ou só com o barbante ou só com a tira.</p>	<p>a expressão numérica corresponde:</p> <p>ao número de unidades do instrumento barbante;</p> <hr/> <p>. ao número de nós que preenchem a dimensão medida;</p> <hr/> <p>a expressão numérica é relativa à quantidade de nós ou dobras do instrumento com o qual foi medida a grandeza.</p>

EPISÓDIOS E RESPECTIVA SITUAÇÃO PROBLEMA	SELEÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA	COMPARAÇÃO DA UNIDADE COM A GRANDEZA	EXPRESSÃO NUMÉRICA DA COMPARAÇÃO
<p>"Salto em distância"</p> <p>Duas crianças saltaram e tentam medir com os canudos a distância saltada e registrar o resultado da medida</p>	<p>medir com canudos</p>	<p>compara a dimensão da grandeza a ser medida com a dimensão do canudo, colocando-os em diferentes posições: na vertical, espaçando-os igualmente; na horizontal, deixando-os adjacentes;</p> <hr/> <p>ao longo de sua dimensão maior, enfileirando-os; preenche com unidades inteiras de canudos além do limite da dimensão a ser medida;</p> <hr/> <p>encurta o último canudo, ajustando-o à dimensão da grandeza a ser medida.</p>	<p>a expressão numérica corresponde:</p> <p>ao número de canudos colocados horizontalmente e paralelos às linhas que delimitam a dimensão a ser medida;</p> <hr/> <p>ao número de canudos inteiros enfileirados mesmo que estes ultrapassem a dimensão a ser medida;</p> <hr/> <p>ao número fracionário correspondente a unidades inteiras e frações de unidades</p>

EPISÓDIOS E RESPECTIVA SITUAÇÃO PROBLEMA	SELEÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA	COMPARAÇÃO DA UNIDADE COM A GRANDEZA	EXPRESSÃO NUMÉRICA DA COMPARAÇÃO
<p>"A feira dos objetos"</p> <p>Um mesmo canudo, medido por cinco crianças, consta na tabela com tamanhos 10 e 11 espaços de régua, o que pode ter acontecido?</p>	<p>medir o comprimento de objetos com espaços iguais de régua</p>	<p>compara a extensão da régua com o comprimento do objeto;</p> <hr/> <p>conta a sequência numérica da régua que abrange a extensão do objeto; não considera a extensibilidade da unidade de régua;</p> <hr/> <p>conta os espaços inteiros de régua que abrangem a dimensão do objeto;</p> <hr/> <p>conta os espaços inteiros de régua e a fração de espaço ajustando-o exatamente à dimensão do objeto;</p>	<p>a expressão numérica corresponde: à quantidade de réguas que abrange o comprimento do objeto;</p> <hr/> <p>ao último número inteiro que atinge mais ou menos o comprimento do objeto;</p> <hr/> <p>ao número de espaços inteiros de régua que abrange mais ou menos o comprimento do objeto;</p> <hr/> <p>ao número de espaços inteiros e fração de espaço que abrange exatamente a dimensão do objeto.</p>

Os aspectos que nos diferenciam das pesquisas anteriores

Na essência, os resultados deste trabalho não contradizem aqueles das pesquisas que nos precederem. Pois da mesma forma relevamos que a criança passa por um desenvolvimento gradativo da noção de medir o espaço unidimensional e que a maioria das crianças envolvidas nesta pesquisa não tem elaborado, ainda, a noção operacional de medir, fenômeno previsto pela teoria piagetiana para esta faixa etária. A diferença entre a nossa pesquisa e a piagetiana

é fundamentalmente de natureza metodológica já que a nossa procurou as ações de medir em situações interativas de ensino.

Piaget propôs definir os estágios do desenvolvimento cognitivo da noção de medida na criança, e sob este enfoque buscou revelar as estruturas operacionais de medir que a criança tem construído. Estudou os comportamentos espontâneos de medir, na idade de formação, de maneira a desvendar, a medida do possível, as operações intervenientes nestas construções. Investigou a gênese real da idéia de medir, de forma a poder estabelecer se as condições operatórias de medir analisadas a priori sob sua constituição lógico-dedutiva - ou seja, do ponto de vista do pensamento do adulto -, correspondem às operações efetivas das crianças (Piaget et alii, 1948). Para tanto, o princípio que embasa sua metodologia é o de possibilitar à criança a manifestação de seu pensamento genuíno, reduzindo ao máximo possível as influências externas que possam acelerar ou frear, ajudar ou dificultar o pensamento da criança; de onde decorre a característica de sua metodologia experimental representada pela entrevista clínica cujas perguntas são colocadas para a criança com o objetivo de que estejam fora do alcance da estrutura intelectual da criança de forma que ela não tenha respostas preparadas, aprendidas anteriormente. O experimentador trata de obter as tendências do pensamento da criança em sua forma pura, totalmente independente da aprendizagem (Vygotsky, 1989). Para tanto, são propostas para a criança tarefas que possam realizar por si só, sem qualquer tipo de ajuda.

Em nossa pesquisa, objetivamos avaliar não somente o que a criança já tem construído, e sob este aspecto os resultados de Piaget se constituem um pressuposto básico para este trabalho, mas sobretudo os processos de medir que apontassem para um possível desenvolvimento da noção de medir. Centramos nossa intenção na direção das potencialidades a serem desenvolvidas através do ensino, Desta forma, nossa metodologia é construída visando colocar a criança em situações interativas de resolução de problemas; em situações de jogo em que ela possa resolvê-las com a ajuda dos colegas e dos adultos envolvidos. Este

enfoque metodológico está de acordo, ao postularmos uma relação do sujeito com o objeto de conhecimento mediada pelos significados construídos socialmente e que têm fundamentos teóricos nos pressupostos vygotkianos sobre desenvolvimento e aprendizagem. Segundo este o aprendizado influencia o desenvolvimento de forma que a criança vai se desenvolvendo, à medida que é orientada ou ajudada por pessoas mais experientes. Esta orientação possibilita à criança a apropriação destes significados, somente quando mediada pelos significados da cultura elaborada. Assim o desenvolvimento se processa e se produz também a partir do processo educacional de ensino, constituindo aprendizagem e desenvolvimento uma unidade indissolúvel.

Acreditamos que a característica interativa de nossa metodologia junto à criança possibilitou a emergência dos processos de medir ao nível do conhecimento cultural que a criança tem elaborado e efetivas aproximações sucessivas do conhecimento científico.

Supomos que devido a este fato tenha sido possível revelar aspectos não evidenciados pelas pesquisas anteriores sobre medida unidimensional, os quais destacamos abaixo:

- a contribuição da noção cultural de número, que a criança traz elaborada a partir de seu meio, como resultado de contagens de objetos discretos, e que se manifesta como tendência a discretizar para contar o espaço a ser medido, ao mesmo tempo que usa a unidade como um objeto discreto;
- a necessidade de um novo número, para representar a realidade quantitativa da medida quando a unidade é fracionada;
- a criação do símbolo numérico para representar partes da unidade; a relatividade da expressão numérica;
- a característica das relações entre os três elementos matemáticos da idéia de medir manifesta nos processos das crianças;
- a construção dos significados de medir presentes nas interações de aprendizagem.

Encontramos nestes episódios concepções manifestas, como conhecimento que a criança traz da unidade de medida, a partir de seu meio. Estas concepções, ao mesmo tempo que emergem espontaneamente constituem-se elementos culturais que desencadeiam situações interativas, enquanto apresentam a possibilidade de se tornar mediadoras de avanços gradativos da idéia coletiva do grupo e dos próprios conhecimentos individuais, quando são significativas para os indivíduos que participam da atividade em que elas estão postas.

As ações de medir sob o enfoque educacional.

São nossos pressupostos que as habilidades intelectuais que as crianças adquirem estão diretamente relacionadas com o modo com que interatuam com outros em situações de solução de problemas específicos. As crianças se apropriam e transformam a ajuda que recebem de outros e usam estes meios de guia para dirigir, posteriormente, suas ações na solução de problemas. As interações sociais são mediadas por meios auxiliares que incluem significado e sentido cognitivos.

Entedemos a análise sob o enfoque educacional como a avaliação da interdependência das ações da criança e dos recursos proporcionados socialmente e como esta contribuiu para que ela possa vir a construir a noção de medir. Levantaremos alguns exemplos da análise dos episódios destacando a relação entre as ações de medir da criança e os aspectos que envolvem as interações mediadas pelos significados construídos socialmente pelo grupo.

Na análise com enfoque matemático procuramos relevar, como as noções de medir o espaço unidimensional, estão interligadas do ponto de vista matemático e como a criança elabora esta interdependência. A seguir, destacaremos dos episódios a leitura que fizemos das possíveis contribuições dos aspectos educacionais, como desencadeadores das ações de medir das crianças, nas situações interativas dentro do contexto educacional que planejam.

Observamos que, em vários momentos dos episódios, destacamos as interações adulto/criança e criança/criança que entendíamos mediadas por significados interpretados pelas crianças envolvidas em solucionar o problema de medir proposto.

- Na atividade, "Quem consegue encontrar objetos do mesmo tamanho?" consideramos que as colocações da pesquisadora solicitando a Mi que mostre no barbante o tamanho do objeto, seguida da demonstração da colega, podem ter sido interpretadas por Mi como significando o tamanho do objeto, o que significa dizer, que o tamanho do objeto pode ser representado por um outro objeto.

O fato de Mi, reconstruir sem ajuda a dimensão do objeto no barbante, nos leva a supor que ela se tenha apropriado do significado simbólico do barbante. Significado, este, construído primeiramente pelas ações externas a Mi: a da pesquisadora e a da colega, e posteriormente interpretadas por ela sob o significado de tamanho do objeto. Este fato mostra que quando existe a apropriação do significado a criança adquire condições de orientar os comportamentos subsequentes.

Certamente o avanço de Mi não aconteceu impelido, somente, pela vontade cognitiva de saber mostrar o tamanho do objeto através do barbante. Consideramos que a totalidade dos elementos que constituem a atividade a tornam uma atividade psicológica para as duas crianças, porque lhes possibilita uma participação ativa no jogo, em que acertar o tamanho significa ganhar pontos. Existe uma cumplicidade de ambas com o objetivo do grupo que joga, de forma que comparar o tamanho do objeto torna-se para elas uma necessidade real que move a sua atenção, a sua vontade, a sua imaginação no sentido de atingir o objetivo.

Esta atividade tem as características de atividade principal para a criança porque inclui a sua ação individual em uma ação coletiva, em que a ação individual adquire significado.

★ Na atividade "Salto em distância" Gui, após tentar medir de duas maneiras com os canudos, apropria-se da forma sugerida por Iva. Um conjunto de fatores externos parecem contribuir para que a sugestão do colega adquira o significado de uma forma de medir a distância saltada.

As questões colocadas pela professora sugerindo que poderia haver uma forma melhor para medir do que as que vinha experimentando, a colocação de Iva ao afirmar que tem uma forma para medir, e que ao mesmo tempo a demonstra, são ajudas que parecem possibilitar a Gui a construção do significado de medir a distância com os canudos.

A apropriação deste significado supomos ser manifesta pela autodeterminação dele em representar sozinho a distância com os canudos e efetuar a contagem destes. Esta atitude, como no episódio anterior, pode estar evidenciando que o significado foi apropriado, pois a criança passa a orientar-se sozinha na resolução do problema.

- Ainda, neste episódio, um outro significado que nos parece mediar as interações é o que envolve a relação entre expressão numérica e a comparação da unidade com a dimensão da distância.

A contribuição dos colegas em encurtar o canudo que avançava além do limite da distância foi o elemento desencadeador de um novo problema para Gui. Ele agora tem canudos inteiros e um não inteiro, e esta é a quantidade que corresponde à medida da distância à qual deve atribuir um número.

A confirmação da professora que "cinco e um pedaço" pode ser um número e, ao mesmo tempo, sua interrogação sobre como ele poderia estar escrevendo este número; acrescidas à expectativa dos colegas que aguardavam quietos uma resposta de Gui, devem ter sido os elementos externos que contribuíram para que ele atribuisse a cinco traços verticais inteiros e um menor o significado da quantidade que lia da fileira de canudos.

Gui apropria-se do significado numérico que media as interações do grupo com o qual joga e dá a este uma forma gráfica. O signo numérico que ele

acaba de criar com a ajuda externa, é um símbolo, pois seu significado foi convencionalizado, e interpretado também pela professora, e pela classe como sendo o número "cinco e um pedaço". Ele se mostra satisfeito com a sua criação. A este respeito parecem oportunas as palavras de Vygotsky, o pensamento e o sentimento é que movem a criação humana.

Um dos elementos educacionais que pode estar contribuindo é o envolvimento de Gui com o objetivo do jogo. É provável que ele não esteja comprometido, somente, em responder as questões que vão sendo colocadas pela professora, mas também em comparar com os outros colegas quanto saltou, por isso medir a distância tornou-se, para ele, uma necessidade que, porque coletiva, é também individual. Existe um objetivo, comum ao grupo, a ser atingido e suas ações se orientam segundo ele. Fica evidente do episódio a presença ativa das outras crianças junto ao processo de Gui.

Fazemos referência, neste episódio, à zona de desenvolvimento proximal. As crianças se encontram numa situação cooperativa de aprendizagem (as ajudas, as dicas, as questões orientadoras, as experimentações de Gui, de seus colegas e dos adultos) e de desenvolvimento (os novos significados dos quais Gui e seus colegas foram-se apropriando). Neste caso referimo-nos a desenvolvimento, como sendo as gradativas aproximações do conceito cultural de medir para o científico.

★ Do episódio "A feira de objetos", supomos que as indagações da professora e as respostas dos colegas, são os elementos externos, as ajudas que contribuem para que Dré elabore uma solução para o problema e chega a criar um numeral para representar a leitura numérica da medida do objeto em questão.

Enquanto o grupo envolvido tem uma representação perceptiva para a quantidade de espaços de régua, dez e metade, apenas a indicam na régua, Dré propõe-se a escrever este número.

A intervenção da professora refinando sua representação parece incidir sobre a possibilidade de Dré avançar quanto a representação de dez

inteiros e mais metade. Não estamos nos referindo ao que poderia ser um efeito mecânico ou quase mágico da intervenção da professora, ou seja a resposta de Dré é decorrência unicamente das questões colocadas pela professora. Há todo um conjunto de elementos imbricados que fazem com que Dré se encontre numa situação de aprendizagem favorável a elaborar uma solução para a questão colocada, e que consideramos como sendo: as questões e as respostas anteriores; a expectativa do grupo classe, que em maioria havia afirmado que não sabia escrever este número diante da disponibilidade de Dré que, ao contrário, diz saber escrevê-lo.

A intervenção da professora, neste momento da torcida coletiva pela solução, tem um caráter de interação enquanto é mediada por um significado construído socialmente no grupo, ou seja, o tamanho do objeto medido e lido na régua, e que Dré interpreta-o através de um signo numérico, comunicando-o, também graficamente.

No nosso entender, o rabisco inventado, pode ser denominado de símbolo, porque símbolo é signo que se associa a algo graças a convenções especiais. O significado do rabisco convencionado pelo grupo como sendo metade é interpretado como tal pelo próprio grupo. Neste caso, estamos nos referindo não à conotação de símbolo com significado geral, cuja natureza é uma lei universal, mas a de um significado geral que está restrito a este grupo de crianças. O símbolo é aquilo que concretiza a idéia relacionada com a palavra, pois, por si só não identifica as coisas. Portanto o símbolo sem o interpretante perde a natureza de sua significação, deixa de ser símbolo.

As pessoas se comunicam através de símbolos, as palavras, os sinais são símbolos, as ciências representam as leis dos fenômenos com o auxílio de símbolos. As crianças na escola aprendem estes símbolos e seus significados. É importante, portanto, que a atividade educacional proporcione uma aproximação sucessiva dos significados culturais daqueles científicos. Consideramos, no caso de Dré, que o rabisco que convencionou atribuindo-lhe o significado dez e metade

é uma fusão entre o símbolo numérico convencional "10" e um outro símbolo com raízes nos conhecimentos espontâneos relacionados à grafia do número metade, que Dré traz de seu meio

O simples rabisco criado por ele tem uma dimensão epistemológica que vai além do ato de criar o símbolo. Parabenizado pela professora porque havia acabado de "inventar uma escrita para representar metade", Dré faz gestos de satisfação, é evidente sua alegria. A intervenção da professora confirmando a convencionalidade estabelecida, mostra sua percepção pela importância educacional deste momento.

Os dois elementos, a criação e a confirmação desta pelo adulto, podem despertar nele e nos colegas uma maior disponibilidade para aprender os símbolos numéricos porque, desta forma, eles se apresentam mais próximo dos conhecimentos culturais das crianças. Este fato nos incita a conjecturarmos sobre as possíveis consequências positivas de uma futura e permanente disponibilidade da criança em gostar de aprender matemática. Sorrir, esfregar as mãos, ser confirmado pelo professor e pela classe sobre a beleza e importância de sua criação matemática, certamente é um fértil começo de uma permanente paixão pelo saber matemático. Tivemos esta impressão em vários momentos das atividades:

- Quando a professora permite a Cel explicar e orientar o colega sobre o erro que o havia atingido emocionalmente;
- quando Gui sorri após ler, à meia voz, o número que acabou de inventar como quem está confirmando para si mesmo o seu feito;
- quando Dré esfrega as mãos de contentamento, após ter confirmada a convenção matemática do símbolo que criou;
- Quando as crianças buliçosas experimentam o passo do anão e do gigante ;
- quando Jul faz desenhos na lousa e encena com gestos a sua solução do problema do "Curupira";

- quando Iva mostra para o colega a sua forma de medir com os canudos;

★ Um outro exemplo, que supomos resultado da apropriação dos significados que mediam as interações sociais que acontecem na busca da solução do problema de medir, é ilustrado por Gui no episódio "Salto em distância".

A autodeterminação de Gui em construir com os canudos uma medição da distância de forma diferente das que havia feito até então, parece decorrente da apropriação do que o colega está significando com sua demonstração. Posteriormente, quando cria um símbolo numérico para representar a quantidade fracionária com a qual mediu a distância saltada se evidencia, supomos, novamente a apropriação mediada pela orientação da professora. Quando Gui, passa o lápis por baixo do símbolo numérico grafado, lendo-o à meia voz, parece ressignificar o novo número que criou.

Refletindo sobre as citações que fizemos anteriormente sobre as situações interativas de aprendizagem, evidenciou-se para nós que, numa situação educacional, a unidade básica de análise da aprendizagem e desenvolvimento não é a atividade individual do aluno, mas a atividade articulada e conjunta dos alunos e do professor em torno do problema intencionalmente colocado através da atividade.

A nossa interpretação das contribuições dos elementos educacionais na construção das ações de medir, permite destacar que:

- as interações contribuem para o avanço da criança quando são mediadas por significados socializados no grupo envolvido com o problema;
- a apropriação destes significados se manifesta através da autodeterminação na condução da solução do problema;
- a atividade e a intervenção devem ser planejadas de forma a incidir na zona de desenvolvimento proximal, ou seja, na possibilidade de avanço da criança.

Uma situação educacional que leva em consideração estes três pontos exige do adulto uma avaliação contínua da atividade da criança, uma interpretação de seus erros e do efeito provocado pelas intervenções precedentes, Coll (1994).

O enfoque da contribuição educacional nos processos deixa evidente a importância do papel do professor na aprendizagem efetiva da criança. Segundo Freitas (1994), Vygotsky acentua o seu papel fazendo da atividade de ensino uma das mediações pelas quais o aluno, pela sua participação significativa e pela intervenção do professor, passa de uma experiência social a uma experiência pessoal

Os elementos da análise com enfoque educacional

Na tabela abaixo apresentamos um quadro ilustrativo da análise com enfoque educacional de quatro episódio.

Episódio	Interações: elementos externos	Significados	Sequência de ações das crianças
"Quem consegue encontrar objetos do mesmo tamanho?"	questões do professor	<p>-objetivo: representar o tamanho do canudo através do barbante</p> <p>-intermediários: tamanho do canudo é o próprio canudo. das ações 1. 2.</p>	<p>1 c. A¹-barbante largado por cima do canudo;</p> <p>2 c. A-canudo e barbante na vertical, o barbante sobra numa das extremidades;</p>
	demonstração da colega	<p>tamanho do canudo é representado pelo espaço do barbante entre os pontos que coincidem com as extremidades do canudo das ações 3.,4.,5.</p>	<p>3. c. B-marca no barbante esticado as duas extremidades do canudo</p> <p>4. c. A segura o barbante nos dois pontos;</p> <p>ação autodeterminada:</p> <p>5. c. A mede o segundo canudo com o barbante</p> <p>-</p>

¹ c. lê-se criança e c. A criança A

Episódio	Interações: elementos externos	Significados	Sequência de ações das crianças
"Salto em distância"	<p>colocações dos professores sobre o tipo de representação da distância e a quantidade de canudos disponíveis;</p> <p>colocações dos colegas dando sugestões como dispor o canudo;</p> <p>demonstração do colega;</p>	<p>objetivo: - medir a distância com os canudos.</p> <p>- intermediários:</p> <p>medir a distância é contar os canudos colocados em pé um próximo ao outro</p> <hr/> <p>é contar os canudos colocados deitados um adjacente ao outro;</p> <hr/> <p>é contar os canudos deitados e enfileirados pelo comprimento, perpendicular à barra de salto</p> <p>a distância é representada pela fileira de canudos das ações 3., 4.</p>	<p>1. c. C dispõe os canudos em pé na vertical, igualmente espaçados entre a barra e o ponto de chegada;</p> <hr/> <p>2. c. C dispõe os canudos na horizontal um adjacente ao outro;</p> <hr/> <p>3. c. D dispõe, demonstrando e explicando que é assim que se mede, dois canudos enfileirados horizontalmente ao chão;</p> <p>ação autodeterminada: 4. c. C afasta os canudos que havia enfileirado e coloca-os na posição sugerida por c. D</p>

Episódio	Interações: elementos externos	Significados	Sequência de ações das crianças
"Salto em distância"	<p>questões do professor e pesquisador sobre quanto saltou;</p> <p>colocações das outras crianças;</p> <p>ações das crianças sobre a quantidade de canudos da fileira;</p>	<p>objetivo: ler da fileira de canudos o valor da medida da distância saltada e escrevê-lo.</p> <hr/> <p>intermediários:</p> <p>- a unidade-canudo é um objeto discreto, não concebe uma fração do canudo;</p> <p>- o tamanho da unidade-canudo deve ser ajustado à extensão da distância.</p> <hr/>	<hr/> <p>1. c.C conta todos os canudos inteiros da fileira de canudos que passa maior do que a distância saltada;</p> <p>2. c.E encurta o último canudo ajustando-o à distância saltada;</p> <p>3. c.C conta os canudos inteiros e mais uma parte de canudo;</p> <hr/> <p>4. c.C escreve cinco traços inteiros;</p> <p>ação autodeterminada</p> <p>5. c.C escreve cinco traços inteiros e um traço menor;</p>

Episódio	Interações: elementos externos	Significados	Sequência de ações das crianças
"Feira de objetos"	<p>indagações da professora sobre os valores da tabela dos relativos ao tamanho de um mesmo objeto;</p> <p>diferentes respostas das crianças; expectativa da classe diante da solução do colega;</p> <p>a aprovação da professora; o consenso dos colegas sobre o significado do número criado.</p>	<p>objetivo: ler e escrever o valor do do tamanho do objeto a partir da régua.</p> <hr/> <p>intermediários: - o espaço de régua corresponde a um número inteiro: da ação 1.</p> <p>-ajusta-se o tamanho do objeto a um número inteiro de espaços ou para mais ou para menos: da ação 1.</p> <p>-expressa-se o tamanho do objeto com um número inteiro de espaços de régua e mais parte deste ajustado à dimensão do objeto, o espaço de régua é fracionado. das ações 2, 3.</p> <hr/> <p>pode-se representar o número metade fazendo um traço cortado ao meio por outro.</p>	<p>1. c.F indica na régua espaços inteiros de régua, embora o tamanho do objeto até uma fração de espaço de régua;</p> <p>2. c.F e c.G lêem um número inteiro de espaços e uma fração;</p> <p>3. c.G e c.I concordam com a leitura, mas dizem não saber escrever este número;</p> <hr/> <p>ação autodeterminada: 4. c.F escreve um número que pode representar a medida fracionaria;</p>

O alcance da pesquisa: a relação pesquisador-professor-escola

Entendemos que a pesquisa em ensino, não somente como observação, mas na qualidade de intervenção, passa a ser um elemento interdependente à realidade escolar, pois influencia e é influenciada por esta. Não podemos deixar de relevar este aspecto que é também de nossa pesquisa, ou seja, a relação pesquisa e cultura escolar.

Achamos de grande impotência para uma leitura mais completa dos dados, abordar a interação entre pesquisador e professor. Esta se revelou fundamental na construção das atividades de ensino e pesquisa. Os relatos que exporemos e discutiremos a seguir advém de nossos registros de preparação e desenvolvimento da pesquisa. As expressões que estão em destaque são falas das professoras extraídas destes registros

Num primeiro contato com as professoras que iriam participar da pesquisa percebemos uma grande receptividade e expectativa com relação ao tema por ser esta uma abordagem totalmente nova com a qual ainda não haviam trabalhado. Ao mesmo tempo, porém, percebemos um certo constrangimento diante da possibilidade de serem filmadas e de sua ação pedagógica ser alvo de estudo. Colocamos, então, nossa disponibilidade em estarmos assistindo e discutindo as filmagens com as professoras envolvidas. Os elementos que caracterizamos como possíveis obstáculos ao trabalho foram sendo elaborados e discutidos, ao longo da pesquisa a ponto de se constituírem desencadeadores da disponibilidade do professor em avançar com relação ao conhecimento de sua prática pedagógica de matemática.

A estagiária de Educação Física que fazia parte da pesquisa verbalizou sua ansiedade com relação ao desconhecimento de matemática devido ao caráter de sua formação específica. Mostrou-se, ainda, mais receosa ao considerar-se iniciante no magistério. As outras professoras diziam desconhecer como trabalhar medida com esta faixa etária, e revelavam-se inseguras em abordar o assunto devido a sua precária formação escolar a respeito. Algumas diziam, que sobre este assunto, conheciam apenas o que haviam aprendido na escola primária.

Fizemos, então um estudo sobre observações que havíamos feito, no semestre anterior, sobre o uso espontâneo da medida, nas brincadeiras livres das crianças de Jardim e Pré entre as quais constavam também as crianças alvo da pesquisa. Mostrávamos como as crianças delimitavam os espaços para uma corrida com pneus. A pista de corrida era definida pelos objetos que a

contornavam, como o tanque de areia e o muro: como faziam competições de quem fizesse a mais alta torre de pneus para entrar dentro, comparavam à golpe de vista, ou comparavam o número de pneus independente da espessura destes: como ainda, selecionavam o tamanho do diâmetro dos pneus que se encaixasse na largura da porta da casinha de brinquedo, ou experimentavam o pneu na porta, ou colocavam-no sobre um qualquer que achavam que pudesse encaixar.

A discussão sobre essas observações serviram de referência para a elaboração das atividades de ensino e pesquisa e como um ponto de partida para explicar como se desenvolve a noção de medida na criança nos refazendo aos pressupostos piagetianos. Basicamente o que ficou claro destas discussões é que poderíamos propor para as crianças atividades que as desafiassem a medir distâncias, tamanhos de objetos e altura de objetos.

Elaboramos inicialmente dois exemplos de atividades de medir para discutir com as professoras: "Lança moeda", e "Quem andou mais?", a partir da qual fez-se previsões das possíveis ações das crianças fundamentando-as nas no estudo que havíamos feito sobre o uso espontâneo da medida. Discutimos questões que poderiam ser colocadas diante de possíveis ações da criança como por exemplo, se a criança usasse o passo como unidade de medida e não conservasse uma abertura constante, poderia ser questionada sobre o tamanho de passo que estaria usando e solicitar-lhe uma forma de medir seu passo.

O outro exemplo recaiu sobre a escolha da unidade de medida. No caso da atividade "Quem andou mais?" em que uma criança medisse com o passo quanto andou e outra com um passo bem maior, discutiu-se como fazer a intervenção. Concluiu-se que poderia ser importante deixá-la medir com a abertura de passo que escolhera e quando surgisse um caso perceptivelmente discrepante, fosse colocado o problema para as crianças. Discutimos que essa atividade, apresentava um desafio, que poderia provocar esta situação. Se um dos parceiros avançar, de forma perceptiva, bem mais do que o outro e a medida de

seu percurso for menor, é este um bom exemplo para discutir com as crianças a relatividade da unidade de medida.

Estas primeiras discussões mostraram às professoras como solicitar que a criança manifeste a sua forma de pensar a medida e, ao mesmo tempo, proporcionar-lhe a possibilidade de avanço em sua concepção de medir. O resultado desta discussão manifestou-se no fato de que as professoras tomaram a iniciativa de propor e elaborar, por escrito, um plano de atividades de medir. As suas propostas abrangiam os objetivos de medir a altura das crianças com instrumentos diferentes de forma a possibilitar a comparação das unidades, a distância saltada, e a comparação de tamanhos de objetos. Estas propostas, posteriormente elaboradas por nós, em forma de Atividade Orientadora, resultaram nas atividades: " O concurso de altura", " O Curupira" e "Encontrar um objeto do mesmo tamanho", "Salto em distância", "A feira de objetos".

Processo interativo pesquisador-professor.

Em momentos de conversas espontâneas com as professoras durante a aplicação e após, e nos momentos das discussões coletivas, em reunião, encontrávamos três elementos que se manifestavam com maior frequência, os quais se tornaram para nós alvo de um possível avanço de seus conhecimentos durante a pesquisa. A seguir faremos um relato e análise dos mesmos.

Um primeiro elemento referia-se ao que as professoras entendiam como sendo indisciplina e sua causa. Responsabilizava-se, implicitamente, o caráter de jogo dado à atividade pela indisciplina da classe. Os professores manifestavam muita ansiedade com relação a este aspecto, pois chamavam insistentemente a atenção da criança que demonstrava uma aparente desatenção deslocando-se pela sala ou conversando com o colega.

Um segundo elemento referia-se a sua surpresa diante da inconsistência do conhecimento de medir que a criança apresentava.

Achavam que elas haviam *mostrado muito pouco de medida* que as suas ações não representavam o pensamento de medir, que deslocavam a unidade sem critério. Sua expectativa era de que as crianças aplicassem, ao menos, corretamente a unidade de medida. Ficavam surpresas quando as crianças diminuíam ou aumentavam tranquilamente o passo, ao medir.

Um terceiro elemento consistia em apresentar com insistência as dúvidas sobre como interferir na ação da criança.

Diziam que sua maior dificuldade consistia em saber que tipo de questão colocar sem que esta tivesse o caráter de informar a criança como fazer e como proceder quando a pergunta parece gerar um *vazio no pensamento da criança*. Ao mesmo tempo que tinham o receio de *puxar além da capacidade da criança*, manifestavam a preocupação em ter *perdido muitas questões* que deveriam ser colocadas para elas.

Os três elementos que levantamos eram tratados à medida que se tornavam explícitos em reunião ou quando os percebíamos emergentes das intervenções das professoras. Os discutíamos logo após o desenvolvimento em sala de aula.

Quanto ao primeiro elemento discutimos como segue. Na atividade "Lança moeda" os grupos competidores começaram a ajudar a seus pares a fazer previsões da medida da distância da moeda até a trave objetivando com isto ganhar mais pontos. Esta estratégia provocou uma certa *bagunça* que a professora procurou resolver colocando as crianças sentadas em volta da pista para que acompanhassem o jogo de seus lugares. Esta determinação limitou a possibilidade de as crianças aproximarem-se do jogo do colega, e como vinham fazendo, ajudarem a estimar o valor da medida da distância da moeda.

Discutimos com a professora sobre a possibilidade de aquela aparente desorganização ser uma estratégia para resolver o problema colocado pelo jogo e que poderia, portanto, significar, ao contrário de dispersão, concentração e envolvimento com a solução do problema de medir desta atividade.

Na atividade "O Curupira", a professora, após tentar evitar várias vezes que algumas crianças andassem pela classe dando passos ora de gigante ora de anão, solicitando sua atenção e que ficassem quietos em seus lugares, não conseguindo, resolveu liberar para que todos experimentassem os passos dos dois personagens. Comentando, posteriormente sobre sua decisão, ela observou que imaginar e experimentar a dimensão dos passos, ora do gigante ora do anão, deve ter contribuído para que fosse construída a solução do problema. Pois, após muitas tentativas, esta ocorreu somente depois da experimentação do tamanho dos passos.

Em reuniões gerais retomávamos o assunto disciplina orientando a discussão para questões mais gerais do ensino que respondesse perguntas como, porque e para que e para quem, se ensina este conteúdo de forma que a avaliação da prática junto a criança não fosse reduzida somente ao enfoque da estratégia ou da melhor questão a ser colocada como se o aspecto técnico fosse o elemento essencial do ensino, o único recurso que pudesse resolver o problema da atenção, do envolvimento, da aprendizagem e desenvolvimento da criança, ficando, desta forma, pouca ou nenhuma importância para a questão dos conteúdos e objetivos na tarefa de envolver a criança como cúmplice de seu processo educacional. Desta forma deslocávamos a questão da indisciplina para a intencionalidade da ação pedagógica.

As questões fundamentais que constituem a realidade ensino: o que ensinar, para que, por que e como ensinar uma condiciona a outra de forma que como afirma Snyders (1978), os conteúdos determinam as estratégias e os objetivos. Assim, no caso da medida, chamamos de conteúdo capaz de condicionar os objetivos e a metodologia da ação educacional, não aquele considerado do ponto de vista somente de sua estrutura lógico-matemática mas sobretudo do ponto de vista de seu desenvolvimento histórico (e que não deixa de incluir o aspecto anterior) que revela como, porque e para que o homem pensou e criou a medida e que por isto define porque, para que e como trabalhar

educacionalmente a medida. Desta forma a intencionalidade do ensino que planeja as ações junto à criança é a que define, também, o elemento disciplina, enquanto faz da atividade para a criança uma "atividade humana", cujas raízes estão no desenvolvimento sócio cultural que deu origem a este conteúdo e que dele também se origina, onde a ação individual tem significado porque inserida num contexto social.

Quanto a segundo elemento, ao *pouco conhecimento* que, segundo as professoras, era manifesto pelas crianças, discutimos como sendo este um conhecimento cultural de medir que a criança traz de seu meio. Por este motivo não deveríamos avaliar como *pouco conhecimento*, mas como um nível de conhecimento primeiro que ela tem elaborado e que deve ser considerado pedagogicamente como a base para a aproximação dos significados do conceito científico.

Os dados do episódio "O que significa medir?" contribuíram para esta discussão, pois aí fica evidente que a criança vê a medida, observando como o adulto a usa, ou seja, um número que é lido em algum instrumento. Estes dados contribuíram para que as professoras passassem a considerar a criança como um sujeito que tem conhecimentos já construídos os quais estão impregnados de suas experiências anteriores.

Uma das professoras relatou um episódio de sua classe e comentou sobre os conhecimentos das crianças. Conta que uma das crianças havia dito que para medir um prédio iria ser necessário um vara tão grande que não caberia dentro do prédio. Uma outra criança retrucou dizendo que não precisava nada disso, pois seu pai tinha uma fita que podia puxá-la, de dentro de um estojo e que ficava tão grande que dava para medir a casa toda e que já havia visto seu pai medir com a mesma quando construiu a casa onde mora. A professora comenta dizendo que a criança que construiu a imagem da vara, demonstra conhecer pouco sobre instrumentos de medida linear, embora, nem por isso deixa de ter uma hipótese de como medir um prédio; e que a outra criança retruca com

propriedade que a régua para medir coisas grandes como uma casa, pode caber dentro de um estojo porque já havia visto seu pai usá-la. E acrescenta ainda a professora como é importante, neste tipo de discussão, estar atento ao relato das crianças, porque elas sempre deixam transparecer onde e como aprenderam ou viram o que estão contando.

Ressaltamos também que os resultados das pesquisas piagetianas sobre o desenvolvimento da noção de medida não prevêem o domínio operacional da medida em torno desta faixa etária. Para tanto, discutimos os estágios piagetianos do desenvolvimento evolutivo da idéia de medir, não como um pressuposto do ensino, como se estes fossem condição necessária para se trabalhar medida, mas buscando evidenciar que a criança constrói gradativamente a noção de medida.

Explicamos que o fato de a criança dizer que conhece um instrumento de medida que pode enrolar num estojo, não significa que ela saiba medir. Mas já tem a noção que para medir uma casa não é preciso uma vara de dimensão igual ou maior do que a da casa. Aí reside uma diferença de conhecimento a partir da qual pode ser trabalhada a idéia de transladar a régua quantas vezes for necessário para abranger a dimensão que se quer medir.

Quanto ao terceiro elemento, sobre como fazer as intervenções discutíamos a partir dos exemplos que as professoras traziam e do que observávamos durante a aplicação das atividades. Havia um consenso entre as professoras de que não se deve ensinar a criança, definindo para ela os conceitos, fazendo-a repetir até memorizar, como se fazia no ensino tradicional. A esta convicção junta-se o desconhecimento sobre o assunto, o que faz com que a professora fique insegura diante da reação da criança e adote como opção deixá-la descobrir sozinha. Nestas ocasiões, discutíamos sobre as possíveis intervenções que poderiam ser feitas junto a criança, orientando a professora a incentivá-la a comparar e a discutir seus resultados: a buscar ajuda junto a um colega ou aos

adultos presentes em sala de aula, e posteriormente discutir com as crianças os resultados a que chegaram e como chegaram.

Procurávamos, desta forma, contribuir para que o professor desenvolvesse uma postura de ouvir e discutir com a criança o que ela já sabe sobre o assunto, já que é nosso pressuposto que, quando a criança é solicitada direta ou indiretamente a resolver um problema, ela constrói as estratégias a partir de seu conhecimento cultural e interage com os colegas e com todos os elementos do meio que possam ajudar na construção da solução. Muitas vezes a questão verbalizada pelo adulto é esse tipo de ajuda.

As professoras diziam que a pergunta feita à criança muitas vezes caía no "no vazio". O que significa dizer que a criança não responde, por mais que se reformule a questão. Observamos que algumas vezes isso decorria do fato de a criança ter "escapado", como comenta Held (1977), do real pedagógico para o imaginário que envolve o contexto da atividade. Já os professores afirmavam: "ela está viajando". Este vôo, para os professores, é normalmente considerado como um elemento perturbador da atenção da criança. Mas, concordamos com Held, quando questiona porque nos assustamos quando a criança está longe, imersa em sua imaginação, já que é exercitando-a que ela descobre e constrói pouco a pouco os mecanismos lógicos. Para a autora razão e imaginação não se constrói uma contra a outra, mas, ao contrário, uma pela outra.

Discutíamos com as professoras que atribuímos a característica de jogo às atividades de ensino e pesquisa porque entendemos que não se possibilita à criança o crescimento intelectual tentando extirpar a imaginação. Pelo contrário, é auxiliando-a a exercitar esta imaginação criadora cada vez com mais habilidade, que vamos contribuir para que ela se torne cada vez mais racional. E isto supõe quase sempre a mediação do adulto. Sob este mesmo argumento fundamentávamos o fato de termos atribuído à atividade de ensino e pesquisa o caráter de jogo.

Abordamos a insegurança do professor com relação à qualidade de suas intervenções procurando desmitificar o professor como o único responsável pelo sucesso ou fracasso escolar da criança com a qual trabalha o ano inteiro. Ele também é um ser cultural e como tal se encontra inserido integralmente em sala de aula, e, no nosso caso, com o ônus psicossocial de um trabalhador mal remunerado, com todas as consequências sócio-culturais que daí decorrem, e com a herança de uma formação acadêmica falha e inadequada. É este ser humano na sua totalidade que planeja, propõe, interpela cotidianamente o grupo classe. E que tem, ao mesmo tempo, diante de si todos os dias um coletivo formado pela individualidade de cada criança e que, por sua vez, é resultado de diferentes realidades culturais. Em síntese, professor e aluno fazem parte da cultura escolar, na sua complexidade pedagógica e administrativa. Todos estes elementos, influenciam com maior ou menor intensidade o ato de ensinar e aprender.

Seria pelo menos ingênuo, do ponto de vista científico, acreditarmos que estamos analisando processos de medir das crianças que sejam provenientes exclusivamente de uma construção individual da criança, como se fosse única e exclusivamente o resultado do desdobramento de um plano interno ao indivíduo. Mas como são resultados de uma construção primeiramente sócio-cultural e só posteriormente individual, para manter coerência à sua natureza, torna-se necessário que releemos as implicações sócio-culturais que, supostamente, estão na sua origem.

O aspecto pedagógico da cultura escolar que, no nosso caso, supomos responsável pela tensão das professoras diante da não-competência em colocar a questão correta ou a melhor questão para a criança, ou de não saber interpretar devidamente a ação da criança e proporcionar-lhe avanço, é veículo de uma interpretação no mínimo equivocada da relação teoria e prática. As novas teorias advindas das pesquisas universitárias geralmente chegam à escola com a insígnia de uma verdade já instituída, como afirma Zeichner (1993), se manifesta pelo consenso de que "a teoria reside na universidade e a prática reside na escola".

Na verdade estas professoras têm presentes alguns pressupostos da teoria construtivista aplicada ao ensino. Entendem que a criança não deve ser considerada como um receptáculo passivo do conhecimento, como se tudo devesse ser informado a ela, e sim ser considerada como capaz de participar ativamente do processo de construção de seu conhecimento. Por isso, para as professoras é proibido ensinar a criança no sentido tradicional do ensino. Elas sabem como não fazer, mas com relação à medida, um assunto novo, não sabem como construir uma proposta de ensino conforme os princípios que as novas teorias apregoam.

Um outro aspecto marcante para o grupo de professores foi a possibilidade de discutirem suas dúvidas, hesitações e criações conjuntamente com colegas, coordenadora e pesquisadora. O habitual e viciado isolamento do professor dentro da escola o torna fragilizado profissionalmente e politicamente e, portanto, incipiente em sua competência. Esta situação precária faz com que ele se sinta responsável único pelas suas crianças. Ihe tolhe uma visão de princípios educacionais mais gerais, pulveriza qualquer ação conjunta de inovação e de reivindicação de seus direitos de trabalhador-educador.

A inserção no ambiente cultural das professoras solicitou de nós um exercício contínuo de reflexão sobre como conjugar todos estes elementos com a pesquisa. É neste momento que interatuam os elementos das realidades culturais de um e de outro. Nossa trajetória de coordenação, nossa formação, nossas convicções, nossas hesitações e dúvidas, nosso propósito em não interromper o processo educacional das classes contribuíram para que pudéssemos entender e orientar as professoras.

As colocações anteriores evidenciam o papel do pesquisador na pesquisa de intervenção dentro da escola. Ao planejar a pesquisa torna-se necessário ter presente as questões que a cultura escolar, enquanto organização administrativa e pedagógica, pode levantar pelo fato da inserção da pesquisa em seu meio. Durante o desenvolvimento da pesquisa é preciso considerar também

as possíveis interações mediadas pelos significados culturais do contexto escolar e pelo processo interativo pesquisador-professor-escola, cujas conquistas, supomos, influenciar os dados da pesquisa. Isto porque os fatos que se observam em sala de aula não são constituídos de ações isoladas das crianças, neles estão imbricados, além dos traços individuais de cada criança, todos os elementos que fazem parte da complexa realidade escolar. O pesquisador, até então, uma realidade cultural externa à escola, começa a fazer parte dessa com uma nova ação. Ele portanto torna-se um elemento integrante da situação que está sendo estudada. Sua ação no ambiente e os efeitos dessa ação constituem material importante para a construção dos dados de uma pesquisa de caráter educacional.

Os avanços a médio e longo prazo

Discutimos anteriormente as pequenas conquistas que ocorreram, ao longo da aplicação da pesquisa, no processo interativo pesquisador-professor. Resumiremos, a seguir, os avanços em termos de resultados a médio e longo prazo.

- Um primeiro avanço consideramos o fato de as professoras mostrarem-se disponíveis em elaborar e não só sugerir atividades envolvendo a medida. Atribuímos este resultado às discussões sobre o tema medida que objetivavam o domínio do conteúdo matemático por parte das professoras; e sobre as atividades que havíamos elaborado enquanto desencadeadoras de suas propostas. Acreditamos que um pressuposto básico para que o processo ensino-aprendizagem seja efetivo reside na disponibilidade do professor, em avançar quanto ao conhecimento do que, como e por que ensinar. A intencionalidade da ação pedagógica é construída e envolve a criança quando tem sua origem no conhecimento que o professor desenvolve sobre seu papel de desencadeador e orientador da atividade do aluno.

- Um segundo avanço consistiu no aumento do nível de intervenção da professora junto a criança. As professoras foram percebendo gradativamente os

momentos para fazer as intervenções que Coll (1994) caracteriza como "contingentes", e que nós caracterizamos como sendo aquelas capazes de criar uma interação significativa entre a criança e os significados que estão sendo construídos coletivamente, ou seja, contingente à zona de desenvolvimento proximal. A contribuição para este avanço veio da discussão, em particular ou em reunião, sobre algumas intervenções que apresentavam ou não resultados.

- Um terceiro avanço encontramos como decorrência da intervenção contingente. Gradativamente, foram desaparecendo as queixas sobre "o pouco conhecimento de medir das crianças" e sendo substituídas por admiração, surpresa e confiança diante de suas respostas. Percebíamos no avanço das professoras que não acontece a aprendizagem desejável do aluno, objetivada no plano da atividade de ensino, se não existir uma vontade manifesta do professor de incidir sobre tal aprendizagem.

- Um quarto avanço consistiu no redimensionamento, por parte das professoras, do fator disciplina. Ao invés de caracterizar a criança como desatenta ou bagunceira, como se disciplina fosse um ato de total responsabilidade dela, passaram a identificá-la como envolvida ou não na atividade. Este novo enfoque da participação da criança contribuiu para discutir o porquê de seu não-envolvimento.

- Um quinto resultado, que consideramos atingido a longo prazo, colhemos do relato oral da coordenadora pedagógica da creche. Num encontro informal, relatou-nos sobre a repercussão da pesquisa, na creche, no semestre seguinte à sua aplicação. Uma das professoras, que havia aplicado as atividades de ensino e pesquisa no semestre de 93, comprometeu-se, espontaneamente, em coordenar as atividades de medida nas classes de Jardim e Pré, durante o primeiro semestre de 94. A professora justificava esta sua iniciativa afirmando querer aplicar os conhecimentos obtidos durante o desenvolvimento da pesquisa e poder colaborar com as colegas novas que iriam iniciar o trabalho naquele ano.

Dizia que havia aprendido sobretudo como orientar a criança durante o desenvolvimento da atividade.

Do ponto de vista do processo interativo pesquisador-professor, consideramos que as interações geradas pela pesquisa e mediadas pelos significados relativos aos processos de medir das crianças incidiram como condições ótimas de aprendizagem para esta professora. A sua autodeterminação mostra a apropriação destes significados de forma que ela própria passa a orientar suas ações quanto a coordenar o desenvolvimento do trabalho do qual foi aprendiz no semestre anterior.

- Um sexto avanço que queremos ressaltar é o que diz respeito às conquistas gradativas que fomos obtendo, como pesquisadora, ao longo deste processo interativo. Muitas vezes voltávamos da aplicação das atividades com dúvidas e hesitações sobre o prosseguimento da pesquisa. Sobretudo após as primeiras vezes, quando verificávamos a insegurança das professoras, as suas ingênuas omissões diante das ações de medir das crianças. Mas, ao mesmo tempo que hesitávamos, não podíamos deixar de enxergar os processos das crianças que vinham se manifestando nestas primeiras atividades.

A percepção experimental dos fatos que vinham sendo construídos, o mergulho na literatura, a troca de idéias com colegas e com o orientador, a discussão permanente com as professoras, nos levaram à acreditar que fazer ciência é exatamente um movimento de dúvidas e incertezas, porque é um movimento humano de contínuas modificações e era neste movimento que estávamos inseridos como desencadeadores e, ao mesmo tempo, como observadores. Em síntese, nós também aprendíamos.

Hoje, já em fase de reflexão sobre o processo de pesquisa e seus resultados, consideramos também como resultado as profundas modificações que tivemos como individualidade e como ser histórico. Como indivíduo porque aprendemos com as crianças, com as professoras, com os colegas e isto nos mostra que o que somos e o trabalho que desenvolvemos não é resultado de nós

mesmos, mas de esforços e alegrias coletivas. E como historicidade estamos contribuindo com este trabalho, que se constitui numa síntese individual do trabalho interativo que aqui relatamos.

Um olhar sobre os caminhos da pesquisa

Este trabalho propiciou algumas reflexões sobre possíveis implicações para o ensino da medida unidimensional na Educação Infantil, as quais gostaríamos de registrá-las como sugestões que pudessem alimentar novas reflexões, novas idéias, novos desafios para outras pesquisas. Não se trata de uma conclusão, mas de um olhar para o movimento da pesquisa e a nossa inserção neste movimento. Os pontos que queremos ressaltar serão portanto aqueles que são mais relevantes no nosso processo de descoberta. Consideramos que neste tipo de pesquisa, as conclusões foram sendo construídas ao longo da análise do fenômeno estudado. Os dados que foram nosso objeto de análise poderão propiciar outras conclusões para o leitor.

Ao analisarmos os fatos de ensino registrados nos episódios, percebemos uma forte tendência nossa em focar as ações das crianças somente sob o ponto de vista da cognição e, mesmo que efetivamente pendêssemos para este enfoque até o final do trabalho, em determinado momento percebemos que a sala de aula aparecia-nos, ora do ponto de vista do olhar do educador, com a vida e a simplicidade do cotidiano, ora do ponto de vista do pesquisador, com a complexidade de múltiplas facetas a serem analisadas. Por este motivo, continuar explicando o processo de medir das crianças somente do ponto de vista cognitivo era correr o risco de dar uma versão mutilada do processo de aprendizagem das crianças envolvidas na pesquisa.

Começamos a acreditar que o aspecto cognitivo não é o único caminho pelo qual se explica a aprendizagem e o desenvolvimento da idéia de medir na criança, pois poderíamos estar desconsiderando totalmente a possível participação de outros aspectos, como o cultural, o emocional, a imaginação, o lúdico. Ficou evidente que a pesquisa deve dar conta das múltiplas facetas do processo de aprendizagem e desenvolvimento, porque este é resultado do indivíduo, enquanto individualidade e enquanto ser social.

Como já observamos, podemos não ter atingido esta combinação de forma perfeita, mas acreditamos que, como comenta Peirce (1984), a validade das idéias, num trabalho científico, é determinada pelas consequências que podem ter para dar prosseguimento a outras investigações. Sob este ponto de vista, elas não se constituem como verdades rígidas e acabadas, mas se inserem no movimento geral da construção do conhecimento.

Observamos com relação ao processo interativo de ensino, que a fala e as ações que ocorrem em sala de aula, por si só, não constituem interações de aprendizagem de forma que sempre tenham a qualidade de possibilitar a apropriação dos conceitos envolvidos. Isto somente acontece quando estão sendo usadas como instrumentos, ou como signos, que contribuem para a internalização dos significados elaborados externamente. Foi isso que buscamos exemplificar em vários momentos dos episódios, quando destacamos as possíveis contribuições, nas ações de medir, das intervenções verbais e das ações dos adultos e crianças envolvidos nas atividades.

A reflexão sobre a não-casualidade das interações nos remete a uma importante consequência educacional. As atividades de sala de aula devem ser planejadas em vista das contribuições que possam advir dos processos interativos por elas desencadeados. As interações de aprendizagem não podem ser consideradas como um processo espontâneo, que advém do simples fato de colocar as crianças a trabalhar em grupo, ou a dialogar em sala de aula.

O papel do professor, enquanto aquele que planeja sistematicamente e atua junto aos encontros e aos diálogos de sala de aula, adquire a qualidade de um verdadeiro mediador, orientador, de aprendizagem, já que lhe compete criar as condições ótimas que produzem as interações de aprendizagem. Torna-se necessário que a intencionalidade educativa esteja presente no processo interativo de ensino de forma que o professor assuma o compromisso de levar ao êxito os objetivos aos quais as interações se destinam. Daí a importância do professor em todo este processo, fazendo da atividade de ensino um desencadeador de

processos interativos pelos quais o aluno, nestes envolvido, e pela intervenção do professor, passa de uma experiência social a uma experiência pessoal, apropriando-se dos significados construídos coletivamente.

No que diz respeito ao trabalho sobre a noção de medida na educação infantil, podemos dizer que este é possível desde que planejado segundo uma visão prospectiva da aprendizagem e desenvolvimento desta noção. Nossa investigação tem evidenciado que é possível trabalhar a noção de medida de forma a propiciar a criança gradativas aproximações da noção cultural de medir, que ela traz elaborada, do conceito científico. Vimos que isto acontece quando ela se encontra em situações interativas de ensino. A apropriação dos significados de medir envolvidos nas ajudas externas proporciona-lhe esta aproximação. Utilizando este método podemos considerar não só os conhecimentos de medir que a criança já tem elaborado, mas os processos mediante os quais ela progride gradativamente, apropriando-se do conceito científico.

As representações simbólicas

Na análise dos episódios, buscamos relevar também os momentos em que nos pareceu que a criança recorria à elaboração da representação simbólica para construir a solução da situação-problema de medir. Isto ficou muito evidente quando ela tenta medir a distância fazendo uma representação desta com o próprio objeto de medir, ou quando se refere à fileira de lajotas como sendo a linha que representa a distância a ser medida, ou ainda, quando o pedaço de barbante parece representar o tamanho do objeto, ou seja, a possibilidade de abstrair algo do objeto, mas diferente dele, que pode ser transposto sobre outro objeto sem ser alterado. Embora estas observações tenham o valor de conjecturas, elas nos apontam uma das formas de a criança conhecer a medida, isto é, mediada por representações simbólicas e que entendemos como aquilo que significa algo para alguém, na medida em que este alguém o interpreta.

Evidenciou-se o que afirma Peirce, construir um símbolo significa atribuir a algo um significado de modo que este algo e seu significado não diferem sob qualquer outro aspecto pois o símbolo se relaciona com o seu objeto por força da idéia de quem o usa. Sem o interpretante o símbolo deixa de existir. A fileira de lajotas, por exemplo, por si só significa um elemento da pavimentação, mas as crianças, ao medir, a interpretam como a linha representativa da distância, mesmo que a contem como um conjunto de objetos inteiros, indivisíveis.

Um outro momento dos episódios em que a criança recorre à representação é quando cria o símbolo numérico para representar a realidade quantitativa não-constituída de unidades inteiras. O novo símbolo numérico que cria, certamente não representa a apropriação de uma idéia generalizada do conceito de um novo número, o número não-natural, mas uma aproximação deste, enquanto é verdade para esta situação específica. Certamente as várias experiências epistemologicamente semelhantes a esta, farão com que a criança elabore a noção de um novo número.

Desta forma, quando a criança pode criar um símbolo e usá-lo para comunicar a sua idéia mesmo que esta seja o número que está representando a medida, é possível que esta criação possa mediar o entendimento do significado científico do símbolo numérico. Os símbolos que estas crianças criaram estão estritamente ligados à realidade quantitativa que representam, é como se fossem uma imagem desta, como tivemos oportunidade de comentar na análise dos episódios "Salto em distância" e "Feira de objetos".

Neste processo de criação de símbolos, a criança pode passar desde a relação símbolo-objeto até a relação símbolo-símbolo. Esta passagem, no que diz respeito a construção das representações numéricas e das grandezas envolvidas na noção de medida, se dá gradativamente de um conceito cultural construído através de experiências interacionais imediatas, e que se caracteriza por relacionar a medida com a contagem de objetos discretos e a representação da

grandeza com o próprio objeto-unidade, para um conceito científico que pressupõe a interdependência operacional entre os três elementos constitutivos da idéia de medida.

Colhemos também das imagens videográficas as manifestações de satisfação das crianças ao criarem estes símbolos. Estas evidências parecem nos mostrar que o emocional enquanto expectativa de entender sua própria resposta, enquanto o prazer de conhecê-la, enquanto a certeza de fazer-se entender é uma das fontes motrizes do ato de conhecer. Todas as formas da representação criadora encerram em si elementos afetivos. Isto significa que tudo aquilo que a fantasia edifica influencia os nossos sentimentos. O que confirma que os dois fatores, o intelectual e o emocional, o sentimento e o pensamento, é que movem a criação humana, que existe desde a mais tenra idade.

Do ponto de vista educacional é importante lembrar que falar em aprendizagem equivale, antes de tudo, por em relevo o processo de construção de significados como elemento cultural do processo ensino-aprendizagem. Observamos de nossos dados, que desde a iniciação escolar, a criança pode estar experimentando as alegrias do aprender matemática quando participa ativamente da construção dos significados dos símbolos numéricos. Na medida em que sentir e viver a matemática também do ponto de vista do significado de sua linguagem e se sentir livre podendo recriá-la, estará enriquecendo e afinando as suas possibilidades imaginativas que, por sua vez, dão suporte ao desenvolvimento de suas faculdades intelectuais.

Estamos convencidos de que os conceitos matemáticos não deveriam ser trabalhados pedagogicamente como se fossem recebidos apenas no nível da cognição, tendência esta que vê a matemática exclusivamente sob o aspecto de suas estruturas operacionais. Compreender as significações da linguagem matemática, ou até recriá-las, envolve, além da cognição, sensibilidade e imaginação, que está presente em sua origem, assim como na de outras linguagens. Segundo Davis (1985), os símbolos que constituem parte do registro

escrito da matemática são um acréscimo numeroso e exuberante aos símbolos das linguagens naturais cujas regras de interpretação não podem ser mais precisas do que a comunicação de idéias entre os seres humanos. Quando Machado (1990) comenta sobre a concepção da matemática como um sistema de representações da realidade, construído de forma gradativa, ao longo da história, tal como o são as línguas, nos sugere que trabalhar o aspecto da linguagem matemática com a criança é alcançar-lhe mais um instrumento intelectual, é ampliar, entre outras, a sua capacidade de interpretar, de atribuir significados, de analisar e conhecer e comunicar a própria realidade.

O aspecto lúdico

Destacamos na análise dos episódios o que poderíamos chamar de propriedade pedagógica do jogo enquanto aplicado como atividade de ensino, ou seja, aquela de envolver a criança na atividade coletiva. Isto acontece porque a sua ação individual passa a ter significado, por se orientar segundo regras e objetivos comuns ao grupo de jogadores.

Pudemos destacar, também, momentos de interações, próprias do jogo, que supomos estar contribuindo para que as crianças envolvidas fossem além do nível de sua compreensão real da ação de medir, como nos episódios "Lança moeda", "Salto em distância", "Curupira" e "Feira de objetos".

Quando, nos episódios o jogo assume o caráter de "faz-de-conta", como no episódio "Curupira", nos parece presente nas tentativas de busca de solução a relação entre o fantasioso e o real na medida em que a criança assume o personagem da história desafiado a resolver o problema de medir ou se recusa a assumi-lo, permanecendo fora do processo coletivo da construção da solução do problema proposto. Este ensimesmamento com o personagem da história determina o nível de envolvimento com a tarefa e com o caráter individual e coletivo de sua solução.

Estas reflexões, mesmo que restritas aos dados desta pesquisa, podem contribuir para mostrar a validade pedagógica do jogo enquanto oferece condições que viabilizam as interações que propiciam elaborações de conhecimentos advindos das possibilidades concretas e virtuais das crianças envolvidas no exercício do jogo: enquanto propicia alegria e prazer deixando a criança disponível e espontânea em suas contribuições, liberta do medo do erro e da pressão social da avaliação contínua do adulto.

Sendo assim, o jogo, utilizado como recurso pedagógico, deve ser planejado como uma atividade de ensino de forma a organizar e orientar as ações lúdicas das crianças segundo os propósitos pedagógicos a que se destinam.

Construindo novos problemas

A partir deste trabalho, vemos projetada a possibilidade de dar continuidade à pesquisa realizando um estudo sistemático com enfoque sobre a influência da qualidade das intervenções do professor, nas situações interativas de ensino e na aprendizagem e desenvolvimento da idéia de medir da criança.

O outro enfoque de estudo, talvez complementar ao anterior, poderia estabelecer um paralelo entre as ações de medir que decorrem de situações interativas de ensino adulto-criança e aqueles das interações criança-criança em situações problema de medir.

Como um terceiro tema sugerimos um estudo específico das noções culturais de medida que a criança traz de seu meio, explorando sua origem e a relação desta com possíveis avanços em atividades escolares.

Acreditamos que a partir dos dados desta pesquisa seria possível fazer uma projeção prévia destes estudos, que estariam colaborando, juntamente com o trabalho que concluímos, para esclarecer mais amplamente as possíveis contribuições educacionais na construção do pensamento de medir da criança.

Apesar da versatilidade de análise e de conjecturas que este trabalho possibilitou à interpretação das ações de medir das crianças envolvidas na

pesquisa, não foi possível observar como evoluía a noção de cada indivíduo ao longo do processo de ensino. O que se mostrou possível foi a evolução das noções como consequência da interação social de vários indivíduos, bem como os progressos de determinadas crianças que apresentaram disponibilidade maior de participação.

Mesmo não tendo sido este o objetivo da pesquisa, supomos este um possível limite determinado pela própria natureza do objeto de observação, o episódio de ensino, devido a este estar definido pelo movimento combinado das falas e ações individuais e coletivas e, então, a quase impossibilidade de precisar onde começam umas e outras e onde terminam.

Uma outra determinante deste limite é a flutuação das presenças e ausências das crianças no cotidiano da sala de aula, fenômeno que se mostrou incontrolável mesmo em condições de pesquisa. Por este motivo, nem todas as crianças participaram de todas as atividades. É evidente, porém, que estes não constituíram um impedimento para a análise dos processos individuais e coletivos no tocante à nossa pesquisa. Não era de nosso interesse demonstrar a evolução dos estágios cognitivos de medir das crianças, mas estudar as ações de medir em situação de ensino.

processos e mudanças

Acreditamos que nosso objeto de estudos foi sendo construído ao longo do trabalho da pesquisa. Neste percurso destacamos três processos que interagindo constituem os novos conhecimentos elaborados.

O processo da criança ficou evidenciado na análise das ações de medir e cuja evolução se deu desde um nível cultural do conhecimento de medida até sua aproximação do conhecimento científico.

As experiências imediatas que a criança envolvida neste trabalho tem de medida, adquiridas no seu universo cultural, é a que relaciona a medida à contagem da realidade discreta cuja expressão numérica é sempre um número

inteiro. Se trata, portanto, de uma contagem e não de uma comparação de grandezas contínuas e que está coerente com a visão topológica que manifestam ter dos objetos no espaço.

Passando, outrossim, por níveis de concepção cuja evolução gradativa mostra vislumbrar a possibilidade de fracionar a unidade, e atribuir-lhe uma expressão numérica que, em sua grafia, imita a realidade contada com unidades não-inteiras; bem como a possibilidade de comparar a extensão da unidade com a extensão da grandeza, e a estabelecer a relatividade da expressão numérica da medida. Em síntese, percebemos uma evolução desde estabelecer a interdependência entre os três elementos constitutivos da medida através de uma relação de contagem de grandezas discretas até estabelecer uma relação de comparação de grandezas contínuas de forma a discretizar o contínuo, sem que este perca sua qualidade de continuidade.

O enfoque que demos ao trabalho possibilitou a elaboração de conjecturas sobre a contribuição do que chamamos de elementos educacionais nas ações de medir da criança. Na análise dos episódios os caracterizamos como sendo:

- o conceito cotidiano da medida;
- as interações mediadas pelos significados de medir construídos socialmente no grupo;
- a criação de símbolos e representações da medida e o aspecto imaginário neles imbricados;
- o elemento lúdico como desencadeador do envolvimento da criança com o objetivo comum da atividade.
- a contribuição indireta da intencionalidade planejada e presente na estrutura da própria atividade de ensino e pesquisa, destacando a que chamamos de propriedade pedagógica do jogo.

O processo do professor ficou evidenciado na elaboração das atividades e na aplicação destas em sala de aula. Este se ressalta nos seguintes

aspectos: a apropriação gradativa do conhecimento matemático de medida; a percepção sobre as ações de medir da criança e do valor das interações, que ocorrem na atividade de ensino, tanto para a sua aprendizagem quanto para a da criança; a compreensão da importância da organização do ensino através do planejamento das atividades.

O processo do pesquisador se evidencia nas ações organizadoras da pesquisa e nas intervenções junto ao professor e junto à criança. Os aspectos que mais se ressaltam são: a compreensão do fenômeno educativo que evolui da ótica do professor para a do professor-pesquisador; o aprofundamento da visão do fenômeno ensino/aprendizagem como multifacetário; a ampliação do significado da formação do professor concebendo-a como um processo interativo da construção do conhecimento sobre a ação educativa a partir da prática escolar cotidiana; a elaboração da concepção de pesquisa como um fenômeno de construções interativas de conhecimento e como um processo humano de hesitações e dúvidas próprias da descoberta e do novo.

Os dois últimos processos não constituíram o enfoque de nossa investigação. Devido, porém, a sua importância na totalidade do trabalho e a influência que exercem sobre os resultados, fizemos questão de ressaltá-los acreditando possibilitar a apreensão do contexto da pesquisa.

Queremos destacar que a sugestão de inclusão de atividade de medida para a Educação Infantil, como consequência educacional desta pesquisa, se refere à necessidade pedagógica de ampliar as experiências de medir da criança para que gradativamente, sob a orientação do professor, a criança possa aproximar o conceito de medida elaborado cotidianamente, no seu meio cultural, do conceito científico, como vimos ser possível através desta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. e LAURENTIEV, M. A. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid, Alianza editorial, 1988.
- BALACHEFF, N. Future Perspectives for research in the psychology of Mathematics Education. *PME*, 135-148, 1989.
- BARTOLOMEIS, F. de. *A nova Escola Infantil.* Lisboa, Livros Horizonte, 1982.
- BOYER, C.B. *História da Matemática.* S.P., Edgar Bücher, 1974.
- BEILIN, H., & FRANKLIN, I. C. *Logical operations in area and length measurement: Age and training effects.* Child Development, 33, 607-618.
- BENDICK, J. *Pesos e Medidas.* S.P. Editora Fundo de Cultura S.A., 1965
- CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da matemática,* Lisboa, 1975.
- CARRAHER, T. N. *Na Vida Dez na Escola Zero.* S.P., Cortez, 1988.
- CARRAHER, T. N. *Aprender Pensando.* R.J., Ed. Vozes, 1986.
- CHAMORRO, C. & BELMONTE, J. M. *El Problema de la Medida, didáctica de las Magnitudes lineales.* Madrid, Editorial Síntesis, 1988.
- D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática.* S.P., Ed. Ática, 1990.
- D'AMBROSIO, U. WEIL, P. e CREMA, R. *Rumo à Nova Transdisciplinaridade.* S. P., Summus Editorial Ltda, 1993.
- DANTZIG, T. *Número, a linguagem da ciência.* R.J., Zahar, 1970.
- DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A Experiência Matemática.* R.J., Francisco Alves, 1985.
- DRIVER, R.; GUESNE, E. e TIBERGHIE, A. *Idéias científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid, Ediciones Morata, S.A. 1992.
- DUGAS, L. S. *A Problemática das Pesquisas Político-Eleitorais: O Currículo de Matemática para a compreensão social.* (trad. de Dagmar M.L. Zibas) In Cad. Pesq., São Paulo (76): 18-23, fevereiro 1991.
- ELKONIN, D. B. *Psicología del juego.* Havana, Editorial pueblo y educación, 1984.

- EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para o uso de sala de aula. Geometria*. S.P. Atual Editora Ltda., 1992.
- AZENDA, I. *Metodologia de Pesquisa Educacional*. S.P., Cortez Editora, 1989.
- FLAVELL, J. H. *A Psicologia do Desenvolvimento de Jean Piaget*. (trad. de Maria Helena Souza Patto) São Paulo, ed. Livraria Pioneira, 1975.
- FRANKESTEIN, M. *Relearning Mathematics. A Different Third R-Radical Math(s)*. London, Free Association Books, 1989.
- FREITAS, M. T. de A. Vygotsky e Bakhtin, *Psicologia e Educação: Um intertexto*, S.P., Ed. Ática S. A., 1994.
- FERREIRO, E. *A Escrita antes das letras*. In SINCLAIR, H. (org.) *A produção de notações na criança*. S.P., Cortez, 1990.
- GARVEY, C. *El Juego Infantil*. Madrid Ediciones, Morata S.A., 1978.
- GOBLOT, E. *La logique des Jugements de Valeur. Theorie et applications*. Paris, Libraire Armand Colin, 1927.
- HELD, J. *O Imaginário no poder: as crianças e a literatura fantástica*. (trad. de Carlos Rezzi). S.P., Summus editorial, 1980.
- HIEBERT, J. *Cognitive development and learning linear measurement*. Journal for Research in Mathematics education. 12. 197-211. 1981.
- HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática. Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos*. Porto Alegre, Editora Globo, 1958.
- HOGBEN, L. *El Maravilloso Mundo de las Matematicas*. Madrid, Aguilar, 1970.
- HOGBEN, L. *O Homem e a Ciência. O desenvolvimento científico em função das exigências sociais*. Porto Alegre, Editora Globo, 1952.
- HOLLOWAY, G.E.T. *Concepcion de la Geometria en el Niño segundo Piaget*. Argentina, Editorial Paidós, 1969.
- IFRAH, G. *Las Cifras: história de una gran invencion*. Madrid, Alianza Editorial, 1987.
- KAMII, C. *Measurement of length: Its Development and implications for Teaching*. Alabama, The University of Alabama at Birmingham, 1991.
- KAMII, C. *A criança e o número*. Campinas, Papirus, 1984.
- KAMII, C. & DECLARK, G. *Reinventando a aritmética*. Campinas, Papirus, 1986.

- KAMII, C. & DE VRIES, R. *Jogos em grupo na Educação Infantil*. S.P., Trajetória Cultural, 1991.
- KISHIMOTO, T. M. *Pré-Escola e Democratização do Ensino*. In *Idéias 2*, FED, S.P., 1988.
- KOPNIN, P. V. *A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento*. R. J., Editora Civilização Brasileira, 1978.
- KOPNIN, P. V. *Fundamentos Lógicos da Ciência*. R.J., Editora Civilização Brasileira, 1972.
- LEONTIEV, A.N. *Uma contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil*. In Vygotsky, L. S. et alii, *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. S.P., Ícone, 1988.
- LUÇART L. *Uma Escola Pré-Primária*. Lisboa. Livros Horizonte, 1982.
- MACHADO, L. de A. *Educação Infantil e Sócio-Interacionismo*. In Oliveira de Z. de M. R. (org.) *Educação Infantil: muitos olhares*. S.P., Cortez editora, 1994.
- MACHADO, N. J. *Medindo Comprimentos*. S.P., Scipione, 1993.
- MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua)*. S.P., Cortez, 1990.
- MIGUEL, A. *Três Ensaio sobre História e Educação Matemática*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, UNICAMP-Campinas, 1993.
- MOREIRA, M. A. *Pesquisa em Ensino: o vê Epistemológico de Gowin*. S.P., E.P.U., 1990.
- MOLL, L. C. (comp.) *Vygotsky y la Educación*. B. Aires, Aique Grupo Editor, 1993.
- MORTIMER, E. F. *Evolução do Atomismo em Sala de Aula: Mudança de Perfis Conceituais*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, USP - S.P., 1994.
- MOURA, M. O. *A Construção do Signo Numérico em Situação de Ensino*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, USP-São Paulo, 1992.
- MOURA, M. O. *O Professor em Formação*. In: *Universidade e Aprendizado Escolar de Ciências, Projeto USP/BID - Formação de Professores de Ciências*, São Paulo, 1993.

- Estandares Curriculares y de Evaluacion para la Educacion Matematica National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Sevilla S.A. em Thales, 1991.
- OLIVEIRA, M., K. *Vygotsky, Aprendizado e Desenvolvimento, um Processo Sócio-Histórico*. S.P., Editora Scipione, 1993.
- PANOFSKY, C.P; STEINER, J.V. e BLACKWELL, P.T. *Desarrollo de los conceptos científicos y discurso*. In MOLL, L.C. (Comp.) *Vygotsky y la Educacion*. B. Aires, Aique Grupo Editor, 1993.
- PEIRCE, C. S. *Semiótica e Filosofia*. S.P., Editora Cultrix, 1984.
- PEIRCE, C. S. In *Os Pensadores*. Escritos Coligidos. S.P. Abril Cultural, 1980.
- PHILLIPS, D. G. *Measurement or Mimicry?* *Science and Children*. 20(3), 32-34.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. and SZEMINSKA, A. *La Geometrie Spontanée de L'Enfant*. Paris, Universitaires de France, 1948.
- PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. R.J., Zahar, 1975.
- PIAGET, J. *O Desenvolvimento do Pensamento. Equilíbrio das Estruturas Cognitivas*. Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1977.
- RIBNIKOV, C. A. *História de las Matematicas*. Moscú, Editorial Mir, 1987.
- RIVIÈRE, A. *La Psicologia de Vygotski*. Madrid, Aprendizaje Visor, 1985.
- RONAN, C. A. *História Ilustrada da Ciência*. vol. I, S. P., Círculo do Livro, 1987.
- ROUCHE, N. *Le Sens de le Mesure*. Paris, Didier Hatier, 1981.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular de Matemática*. São Paulo, SE/CENP, 1988.
- SALVADOR, C.C. *Apendizagem Escolar e Construção do Conhecimento*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1994.
- SINCLAIR, H. (org.) *A Produção de notações na criança, linguagem, número, ritmos e métodos*. S.P., Cortez, 1990.
- SMOLKA, H.L.B. *A criança na fase inicial da escrita. A alfabetização como processo discursivo*. 2ª edição, S.P., Campinas, Cortez Editora, 1989.

- SNYDERS, G. *Para onde vão as Pedagogias não-diretivas*. Lisboa, Moraes editores, 1978.
- SNYDERS, G. *Alunos Felizes: Reflexão sobre a alegria na escola a partir de textos literários*. R.J., Paz e Terra, 1993.
- SPRADLEY, J.P. *Participant Observation*. New York, Holt, 1980.
- STRUICK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Trad. do original inglês de 1948. Lisboa, Gradiva Publicações, Ltda., 1989.
- TROUTMAN A. P. & LICHTENBERG B.K. *Mathematics a good Beginning Strategies for Teaching Children*. California, Brooks/Cole Publshin Company, 1991.
- VALSINER, J. *Child Development. In Cultural Context*. United State., Hogrefe and Huber publishers, 1989.
- VÉNGUER, L., & VÉNGUER A. *El hogar: una escuela del pensamiento*. Moscú, Editorial Progreso, 1988.
- VYGOTSKY, L.S. *A Formação Social da Mente*. S.P. Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1984.
- VYGOTSKY, L.S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, Critica Grupo editorial Grijalbo, 1989.
- VYGOTSKY, L.S., LURIA, A. R. e LEONTIEV, A. N. *Linguagem Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo, Ícone Editora, 1988.
- VYGOTSKY, L.S. *Historia del Desarrollo de las Funciones Psíquicas Superiores. Haba*. Editorial Científico-Técnica, 1987.
- VYGOTSKY, L.S. *La Imaginacion y el arte en la Infancia*. Madrid, Akal bolsillo, 1982.
- ZANKOV, L. *La enseñanza y el desarrollo*. Moscú, Editorial Progreso, 1984.
- WERTSH, J. V. *Culture, Communication and cognition. Vygotskian perspectives*, New York, Cambridge Universitu Press, 1992.
- WERTSH, J. V. In MOLL L.C. (Comp.) *Vygotsky y la Educacion*. B. Aires, Aique Grupo Editor, 1993.