FLAVIO FRANCISCO ORLANDI

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA
COMO UM PRODUTO DE UMA EXPERIÊNCIA DEFINIDA

CAMPINAS (SP)

2002

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

Aprendizagem matemática como um produto de uma experiência definitiva

Autor: Flávio Francisco Orlandi
Orientador: Antonio Miguel

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por **Flávio Francisco Orlandi** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 25/02/2002

Assinatura:...
Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

2002

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Unicamp.

~~Or18a~~
Or5a

Orlandi, Flavio Francisco.
Aprendizagem matemática como um produto de uma experiência definida. / Flavio Francisco Orlandi. -- Campinas, SP : [s.n.], 2002.

Orientador: Antonio Miguel
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Matemática. 2. Filosofia. 3. Epistemologia. 4. Aprendizagem. 5. Ensino. I. Miguel, Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

À **Vânia**

... cujo trabalho inestimável permitiu a realização deste.

Agradecemos especialmente ao Prof.

Antonio Miguel

... sem o qual a realização deste trabalho não teria sido possível.

Agradecemos encarecidamente a todos os nossos amigos, colegas e professores, com os quais, e em alguma medida, pudemos compartilhar da execução deste trabalho. E agradecemos, também, à Faculdade de Educação da Unicamp, particularmente na pessoa de cada um de seus professores e funcionários, por esta oportunidade inestimável.

"Como disse Lalande, a ciência não visa unicamente "à assimilação das coisas entre si, mas sobretudo à assimilação dos espíritos entre si". Sem essa última assimilação, por assim dizer, não haveria problema. Entregues a nós mesmos, ante o mais complexo real procuraríamos o conhecimento pelo lado do pitoresco, do poder evocador: *o mundo seria nossa representação.* Se, ao contrário, estivéssemos inteiramente entregues à sociedade, buscaríamos o conhecimento pelo lado do geral, do útil, do convencionado: *o mundo seria nossa convenção.* De fato, a verdade científica é uma predição, ou melhor, uma predicação. Chamamos os espíritos à convergência anunciando a novidade científica, transmitindo ao mesmo tempo a uma só vez um pensamento e uma experiência, ligando o pensamento à experiência numa verificação: *o mundo científico é portanto nossa verificação.* Acima do *sujeito*, além do *objeto* imediato, a ciência moderna funda-se no *projeto.* No pensamento científico, a meditação do objeto pelo sujeito toma sempre a forma de projeto."

Gaston BACHELARD(1934, p. 95-6)

RESUMO

Intentamos, neste trabalho, defender a tese de que a apreensão das formulações matemáticas assenta-se como um produto de uma *experiência definida*. Inicialmente, sustentamos que a Matemática não se determina exatamente em uma atividade matemática, não se restringindo, portanto, às suas aplicações. Para isso, desenvolvemos um ensaio acerca da natureza da Atividade Matemática, tratando especialmente da Matemática Pura e da Matemática Aplicada. Posteriormente, sustentamos que a Matemática não se reduz exatamente a uma linguagem, não se individualizando, portanto, em qualquer uma de suas manifestações. Para tanto, desenvolvemos um ensaio acerca da natureza dos sistema conceituais, considerando particularmente as noções de metalinguagem e de verdade. Após um estudo sobre a natureza do objeto matemático, desenvolvemos uma configuração conceitual para as três dimensões da Matemática, atestando a necessidade da instituição de duas outras dimensões, além da dimensão lingüística, para que possamos ter acesso à Matemática. Por fim, perante a imperiosidade de uma inserção conceitual, em um confronto de idéias, e ante a exigência de que uma experiência definida presida uma experiência primeira em uma aprendizagem matemática, pudemos assentar a tese de nosso trabalho. Não será, portanto, nos âmbitos específicos de um *fazer matemático* ou de uma *linguagem matemática* que teremos acesso ao Conhecimento Matemático.

ABSTRACT

With this work, we have intended to defend the thesis that apprehension of mathematic formulations is laid as a product of a *defined experience*. Initially, we stated that Mathematics is not exactly determined in a mathematic activity, not limiting itself, thus, to its applications. To that purpose, we have developed an essay about the nature of the Mathematic Activity, especially addressing Pure Mathematics and Applied Mathematics. Afterwards, we attested that Mathematics is not exactly reduced to a one language, not particularizing itself, thus, to any of its manifestations. Therefore, we have developed an essay about the nature of conceptual systems, taking particularly into account the notions of meta-language and of truth. After studying the nature of the mathematic object, we have developed a conceptual configuration for the three dimensions of Mathematics, certifying the need of establishing two other dimensions, beyond the linguistic dimension, so that we have access to the Mathematics. Finally, in view of the urge of a conceptual insertion in a confrontation of ideas and, in the face of a claim that a defined experience presides over a previous one in a mathematic learning, we have been able to lay the thesis of our work. It will not be, therefore, in the specific ambits a *mathematic doing* or of a *mathematic language* that we will have access to the Knowledge of Mathematics.

SUMÁRIO

ÍNDICE

CAPÍTULO II

Da Configuração das Três Dimensões da Matemática: o Conhecimento Matemático não se reduz a uma linguagem

CAPÍTULO III

Apontamentos acerca da Aprendizagem Matemática como um produto de uma Experiência Definida

INTRODUÇÃO

Intentaremos assentar, nesta introdução, os pressupostos básicos que serão tomados como os sustentadores das conseqüentes considerações. Para tanto, explicitaremos inicialmente o problema de investigação que culminou em nossa *tese principal*, observando rapidamente como se manifestou nosso interesse pela investigação em questão e como situamos a importância desta para a Educação Matemática. A seguir, passaremos a especificar o âmbito em que se insere a presente investigação, evidenciando a sua natureza, e faremos algumas considerações acerca do modo pelo qual esta investigação se encontra desenvolvida. Posto isso, apresentaremos algumas das afirmações fundamentais de nossa Dissertação de Mestrado, para que possamos estabelecer, mesmo que de um modo sucinto e insatisfatório, a perspectiva, o "*modo de olhar*", o "*ponto de vista*" a partir dos quais nos debruçamos sobre o problema de investigação e segundo os quais pretendemos firmar as conseqüentes considerações. Antes disso, porém, discorreremos rapidamente acerca da metodologia que implementamos na condução desta mesma investigação.

1. Problema de Investigação

Não seria um exagero afirmar, sobretudo no que se refere ao ensino do Conhecimento Matemático, que nos deparamos contemporaneamente com os desdobramentos e com as conseqüências remanescentes de um confronto entre duas tendências supostamente declaradas antagônicas, uma marcadamente "*teórica*" e outra marcadamente "*prática*", um confronto que colocaria em disputa um *status* de legitimidade ou um *status* de importância sobre a Matemática. No entanto, e embora se possa observar presentemente uma certa inclinação ou preferência para a "*prática*", principalmente em publicações destinadas aos Ensinos Fundamental e Médio, parece-nos que esse confronto se coloca como possivelmente irrelevante, de modo específico, no que concerne às preocupações relativas à construção ou à aprendizagem do Conhecimento Matemático.

Com efeito, e mesmo admitindo-se que haja alguma conseqüência em se incentivar escolas que privilegiem uma disposição claramente "*teórica*" ou uma disposição claramente "*prática*, entendemos que esta marcada distinção é completamente inconseqüente e perniciosa, caso a tomemos apenas no âmbito de um confronto que tenderia a afastar uma tendência em função da importância ou da legitimidade da outra e caso aceitemos que o desenvolvimento da Matemática não se encontre inerentemente ligado a qualquer uma dessas tendências. No entanto, e ilustrativamente, devemos dizer que os desdobramentos e as conseqüências remanescentes desse embate antagônico podem ser observados manifestando-se, basicamente, na instituição e na manutenção de dois campos de ação, nos quais têm fluência as concepções matemáticas e dos quais dependem as conseqüentes promoção e sustentação do Conhecimento Matemático, a saber, os dos já assentados Departamentos de Matemática Pura e de Matemática Aplicada.

Por conseguinte, o que nos levou a desenvolver este trabalho foi a intenção de questionar, por um lado, a propriedade dessa distinção notoriamente antagônica, que pode ser assinalada também como a contraposição "dimensão teórica" *versus* "dimensão prática", e, por outro lado, de determinar se essa tendência "*prática*" consegue alcançar o seu objetivo final, isto é, ensinar Matemática. No Ensino de Matemática, essa tendência "*prática*" pode ser reconhecida por reclamar da falta de significado dos conceitos matemáticos para os alunos, quando o ensino se preocupa excessivamente com as "*abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática*" [PCN: Matemática(2000), p. 21], por sugerir que a construção de significado e a compreensão dos conceitos matemáticos devem partir daqueles aspectos que vinculam a Matemática a uma "*prática cotidiana*" e por pretender que o Ensino de Matemática seja mais agradável ou mais atraente, através do incentivo das aplicações da Matemática ao "*cotidiano*" ou à "*realidade do aluno*". Como veremos, e segundo as concepções que adotamos, mostraremos neste trabalho que não haverá nenhuma garantia de que estaremos tratando de concepções matemáticas quando estivermos lidando com estas mesmas noções no âmbito de suas aplicações ao nível da "*utilidade ordinária*" [DAVIS(1982), p. 112-3] ou ao nível das demais Ciências.

Assim, motivados por esse embate antagônico e pela relevância de sua resolução para a Educação Matemática, formulamos o seguinte problema de investigação:

No que diz respeito à concepção ou à apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático, haveria procedência em se colocar a dimensão teórica e a dimensão prática como campos que pudessem ser distinguidos autônoma e independentemente?

Permitir-nos-emos considerar, antes de prosseguirmos, e como uma rápida observação, a expressão '*concepção ou apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático*', na qual destacaremos as noções de "*concepção*", "*apreensão*" e "*formulação*", para que nos possamos apontar para o sentido em que estamos empregando essas noções, embora esperemos efetivá-lo, com maior propriedade, no conjunto do presente trabalho, evidenciando uma pretendida e oportuna correlação dessas mesmas noções.

Inicialmente, asseveramos que a noção de concepção diz respeito não só ao ato que nos permitiria criar ou engendrar alguma idéia ou conceito, que pudesse ser pertinente ao Conhecimento Matemático, mas também às próprias idéias ou conceitos matemáticos que já merecessem este *status*, num sentido que pudesse evocar também, além de uma referência imediata a uma representação ou a uma imagem mentais, o movimento ou o processo de elaboração, de geração dessas mesmas idéias ou conceitos matemáticos, no que concerniria àquilo que lhes seria específico. Por isso, adotamos a noção de concepção ao invés das noções de "*idéia*" ou "*conceito*", porque, embora se possa usar a noção de concepção na mesma acepção ou significado das noções de idéia ou conceito, estas, e contrariamente àquela, poderiam não nos dar o ensejo da evocação do campo de constituição das noções matemáticas, não abrangendo o seu processo gerador e não indicando, desse modo, alguma especificidade em sua determinação. Assim, enunciaremos '*concepção das formulações matemáticas*' para nos referirmos ao processo de engendramento conceitual dessas formulações, e enunciaremos '*concepções matemáticas*' para nos referirmos às idéias matemáticas, tomando-as na peculiaridade de sua constituição conceitual. Ademais, aproveitamos esta ocasião para assentar também uma noção que se colocará como fundamental neste trabalho, a noção de *concepção conceitual*: que trata da geração ou da concepção de algum conceito[1] que teria como referência uma dada instância conceitual. Portanto, uma concepção conceitual diz respeito à geração de uma representação com a qual iremos compor um objeto, para fazer cair sobre ele os processos operacionais lógicos de constituição do Conhecimento. A noção de concepção conceitual será considerada, com maior cuidado, no Capítulo II.

Por outro lado, a noção de apreensão, enquanto "*ação de tomar, de segurar*" [HOUAISS(2001), p. 261], supostamente derivada do verbo latino "*apprehendĕre*", pela adjunção do prefixo "*ad*", exprimindo "*movimento para, aproximação*"[2], ao substantivo "*praehensione*", diz respeito à apropriação mental das concepções matemáticas, que se efetiva num procedimento cognitivo que aproxima uma formulação matemática em apreensão de outras formulações matemáticas anterior e distintamente determinadas. Assim, estamos concebendo a *apreensão das formulações matemáticas* como uma *apropriação mental das concepções matemáticas* correspondentes. Como veremos no Capítulo II, esse modo de conceber a apreensão matemática correlaciona-se ao modo pelo qual estamos concebendo o Conhecimento Matemático, que pretende negar a suficiência de uma concepção que intenta reduzir a Matemática a uma linguagem pertinente. Nessa medida, e antes de efetivá-la no conjunto deste trabalho, é possível assinalar também que há uma correlação fundamental entre as noções de concepção e de apreensão, que nos remeterá para uma delas quando quisermos implementar a outra, isto é, não nos seria dado apreender uma nova noção se esta não pudesse ser concebida ou engendrada a partir de um processo desenvolvido no interior de um Sistema Conceitual[3] previamente distinguido, mediante uma atividade discursiva que lhe fosse reconhecidamente própria, e não nos seria dado conceber uma nova noção se esta não pudesse ser apreendida ou apropriada enquanto o produto de um processo desenvolvido, também, no interior de um sistema conceitual

---

[1] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 193 — "Conforme a la segunda interpretación, el Concepto es un *signo* del objeto (cualquiera que sea éste) y se encuentra en relación de *significación* con el objeto."; part. FERREIRA(1975), p. 445 — "Representação dum objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais."; e part. HOUAISS(2001), p. 783 — "Representação mental de um objeto abstrato ou concreto, que se mostra como um instrumento fundamental do pensamento em sua tarefa de identificar, descrever e classificar os diferentes elementos e aspectos da realidade."

[2] Cf. **DICIONÁRIO GRAMATICAL**. 3.ed. Porto Alegre: Ed. Globo, 1962. 856p.; p. 701.

[3] **Sistema Conceitual**. Diz respeito a uma coleção de objetos ideais ou de representações que se inter-relacionam e que têm a função de constituir-se em um veículo de intermediação entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, na fluência de uma totalidade continente.

previamente distinguido, ou seja, enquanto um produto de uma atividade discursiva peculiar.

Ademais, preferimos a expressão '*apreensão*' ao invés de '*aprendizagem*', nesta perspectiva filosófica ou epistemológica que adotamos, primeiramente, para evitarmos uma circunstancial e particular instância que, eventualmente, poderia ser evocada pela expressão, por exemplo, "*aprendizagem matemática*", na qual haveria um aprendiz destacado ensejando algum processo psicológico particular, na tentativa de fazer sua algumas formulações desse conhecimento, ou seja, para evitarmos a instância social de uma sala de aula. Não será a esse "*processo psicológico particular*", casualmente desenvolvido em uma sala de aula, que daremos nossa atenção. Daremos atenção a um presumível processo psicológico associado a um suposto ente humano onipresente chamado "*sujeito epistêmico*", tomando-o como a Humanidade e concebendo-o como a entidade que conhece, por excelência, como a entidade que constrói conhecimento, exatamente no que diz respeito à generalidade da apreensão e da concepção das formulações do Conhecimento Matemático, que é concebido, então, como um produto culturalmente instituído. Em segundo lugar, e principalmente, porque a idéia de uma apreensão genérica, desenvolvida na perspectiva de um sujeito epistêmico, impõe o pressuposto de que essa mesma apreensão seja normatizada segundo os preceitos e prerrogativas que são peculiares ao conhecimento em apreensão, e não às formas de aprendizagem, eventualmente circunstanciadas ou institucionalizadas, que são desenvolvidas no âmbito escolar. Preferiremos, no entanto, a expressão '*aprendizagem matemática*' quando estivermos nos referindo às implicações genéricas envolvidas na determinação de uma dada ação pedagógica.

Por conseguinte, interessar-nos-á a perspectiva sob a qual se impõem percepções, concepções, formulações e apreensões humanas, da Humanidade, relativamente à construção de Conhecimento, e não a perspectiva de qualquer "*sujeito psicológico particular*". Conquanto nos fosse dado afirmar que haveria algum significado e algum propósito em se trabalhar ou em se considerar, em alguma pesquisa, os resultados ou os acidentes que poderiam ser tomados em alguma aprendizagem desenvolvida em sala de aula, de tal modo que nos fosse possível apontar algumas inconveniências e sugerir algumas modificações, eventualmente, parece-nos que não estaríamos produzindo, assim, nenhuma mudança essencial nessa mesma aprendizagem, uma vez que, e se dessa maneira procedêssemos, não a estaríamos desvelando fundamentalmente e, por isso, não estaríamos, também, eliminando pela raiz os antigos hábitos ou padrões desta relação que nós, circunstancialmente, pretenderíamos ver modificados.

Por fim, a noção de formulação diz respeito à enunciação necessária de alguma ação, idéia ou sentimento, uma enunciação que possa ser tomada, no âmbito de uma atividade discursiva, como uma representação lingüística apropriada que nos permita apreender, rigorosamente, uma dada concepção, uma enunciação que seja designada, então, por uma seqüência de elementos lingüísticos, isto é, por uma seqüência de pequenas coleções de impressões diagramáticas ou pictóricas. Intentamos, assim, que a uma formulação conceitual seja permissível relacionar alguma noção de "*verdade*", no interior de um sistema conceitual. Não obstante, gostaríamos também de assinalar qualquer coleção de símbolos do alfabeto de uma linguagem como sendo uma "*fórmula*", ou seja, gostaríamos de assentar a noção de fórmula[4] como algo que diz respeito a uma coleção ou combinação quaisquer de símbolos ou a uma cadeia de combinações de símbolos, que fossem próprios para assentar as representações lingüísticas correspondentes às concepções de um dado sistema conceitual. Do mesmo modo, e nós teremos a oportunidade de mostrá-la no Capítulo II, é possível assinalar que há uma correlação fundamental entre as noções de concepção e de fórmula, que nos remeterá para uma delas quando quisermos implementar a outra, isto é, uma dada concepção somente poderá ser desenvolvida conceitualmente, no interior[5] de um dado sistema conceitual, se ela puder ser formulada segundo os processos operacionais lógicos que são próprios a esse mesmo sistema, e uma dada fórmula somente poderá ser desenvolvida operacionalmente, no interior de um dado sistema conceitual, se a ela puder ser associada alguma noção ou algum conceito segundo

[4] Cf. part. HEGENBERG(1995), p. 86 — "Em um sistema logístico, qualquer seqüência (finita) de símbolos se chama <u>expressão</u>. As expressões ou são mal formadas (e, por isso, ignoradas) ou são bem formadas, caso em que recebem, freqüentemente, o nome de *fórmulas*."; part. BLACKBURN(1994), p. 159 — "Em termos muito gerais, uma fórmula pode ser concebida, na teoria lógica, como qualquer sucessão de símbolos que pertençam ao léxico da teoria. Uma fórmula bem-formada (abreviada como fbf) é aquela que obedece às regras de formação do sistema. Uma vez que as outras sucessões não costumam ser relevantes, as fórmulas bem-formadas são muitas vezes referidas simplesmente como fórmulas."; e part. NAGEL(1998), p. 33 — "Os enunciados metamatemáticos são enunciados acerca dos signos que ocorrem dentro de um sistema matemático formalizado (isto é, um cálculo) – acerca dos tipos e arranjos de tais signos quando eles se combinam para formar cadeias mais longas de marcas denominadas fórmulas ou acerca das relações entre fórmulas obteníveis como conseqüência das regras de manipulação especificadas por elas."

[5] Cf., no Capítulo II, Seção 3, com a noção de "*aspecto interno*" relativa a um sistema conceitual.

os quais nos fosse permitido determinar em que circunstâncias tal fórmula poderia ser invocada[6].

2. Da Especificidade da Investigação

Queremos crer que a natureza da presente investigação seja de caráter epistemológico ou filosófico. Podemos dizer também que esta investigação determinar-se-á estritamente sobre o "*Conhecimento Científico*", que é alvo da "*Epistemologia*" ou da "*Filosofia da Ciência*", em sua acepção contemporânea[7]. Nessa medida, e ilustrativamente, permitir-nos-emos observar, em uma pequena nota, quais são os "*campos fundamentais de aplicação da filosofia da ciência*" [8]: (*vide* Anexo, p. 241, para considerar uma tradução das citações apresentadas ao longo do texto e nas notas de rodapé)

1. "*Problemi relativi a quella che può essere chiamata un'opera di chiariamento e di precisazione delle nozioni strutturali del discorso scientifico. Uno dei compiti principali della filosofia della scienza è infatti quello di offrire una delucidazione dei concetti basilari e più generali (ossia comuni alle varie discipline) in cui si articola il discorso scientifico.*";
2. "*Un secondo gruppo di argomenti riguarda la classificazione delle diverse discipline scientifiche e i fondamenti delle varie scienze. Rientra in questo ambito la questione se, ed eventualmente come, sia possibile tracciare una distinzione fra le scienze cosiddette «formali» (la logica e le varie branche della matematica) e le scienze empiriche o «reali», a loro volta distinte in scienze della natura (fisica, chimica, biologia ecc.) e in scienze umane (psicologia, antropologia, sociologia, storiografia ecc.).*";

---

[6] Cf. part. KNEALE(1962), p. 459 — "Frege não nega que poderia ser possível efectuar todas as deduções necessárias para a derivação de uma fórmula no seu próprio sistema dedutivo sem pensar no significado dos símbolos; mas diz que longe de isso produzir uma maior simplificação, a recusa de atribuir um significado aos símbolos torna as coisas ainda mais difíceis. Uma vez que o interesse das fórmulas matemáticas reside na sua aplicação, mais vale ser franco e admitir que as regras do cálculo não foram escolhidas arbitrariamente mas antes que dependem do sentido que queremos atribuir aos símbolos. Se se inventasse um jogo para jogar em papel com símbolos sem sentido de acordo com regras arbitrárias certamente que ninguém pensaria que se tratava de uma disciplina matemática."

[7] Cf. part. **ENCICLOPEDIA GARZANTI DI FILOSOFIA**. 2.ed. Milano (Italia): [?], 1988. p. 841-4. p. 841 — "**scienza, filosofia della**, particolare branca della ricerca filosofica avente a oggetto i problemi più generali posti dal sapere scientifico, tanto nella forma delle discipline logiche e matematiche, quanto nella forma delle scienze naturali e umane (fisica, chimica, biologia, psicologia, sociologia, storiografia ecc.). Intesa in senso rigoroso, come indagine di natura essa stessa scientifica, la filosofia della scienza o epistemologia è una disciplina relativamente recente (sec. XIX); [...]."

[8] Cf. **ENCICLOPEDIA GARZANTI DI FILOSOFIA**. 2.ed. Milano (Italia): [?], 1988. p. 842-4.

3. "*Un terzo gruppo di problemi concerne il rapporto teoria-esperienza nella ricerca scientifica. Rientrano in tale settore tanto le discussioni sull'esistenza di una dicotomia tra linguaggio teorico e linguaggio osservativo, quanto le ricerche volte a chiarire la natura dell'esperimento scientifico ([...]) e della struttura logica dell'inferenza scientifico-sperimentale con le contrapposizioni, divenute ormai classiche, fra razionalismo ed empirismo e fra deduttivismo e induttivismo a proposito dei criteri di valutazione e di accettazione delle ipoesi scientifiche ([...]) e della giustificazione dell'induzione*";

4. "*Un ulteriore gruppo di problemi, oggi strettamente collegati tra loro, riguarda il processo di sviluppo della conoscenza scientifica e la portata conoscitiva delle teorie scientifiche: ci si chiede, cioè, se le construzioni teoriche della scienza vadano considerate descrizioni più o meno accurate e particolareggiate dell'effettiva costituizione della natura, oppure, al contrario, comodi strumenti intellettuali con cui gli uomini hanno ritenuto utile e opportuno organizzare le loro rappresentazioni mentali della struttura interna del cosiddetto mondo reale.*"; e

5. "*Infine, l'ultimo gruppo di problemi concerne i rapporti intercorrenti tra la scienza da una parte e le altre forme della cultura (arte, religione, politica, morale ecc.), nonchè l'organizzazione economico-sociale dall'altra. Rientrano in questa temática la trattazione dei problemi concernenti i condizionamenti storici dell'opera degli scienziati, le implicazioni sociali dell'organizzazione e dei risultati del lavoro scientifico e, più in generale, il rapporto fra l'atività scientifica e il mondo dei valori e della prassi.*"

Assim, conquanto pretendamos que nossa investigação seja de cunho marcadamente epistemológico, o nosso intento e objetivo eminentes é o de oferecer uma formulação efetiva para algumas das possíveis implicações pedagógicas advindas da resolução de nosso problema de investigação. Para tanto, reservamos um Capítulo III, intitulado "*Apontamentos acerca da Aprendizagem Matemática como um produto de uma Experiência Definida*", no qual pretendemos desenvolver algumas destas possíveis implicações pedagógicas. E para assegurar a realização de nosso intento e objetivo, a nossa escolha fundamental recaiu, portanto, sobre Gaston BACHELARD[9].

[9] Cf. part. D'AMBRÓSIO(1990), p. 29 — "Sabemos que a epistemologia básica, corrente e aceita, na prática da educação matemática é apriorística. A abordagem bachelardiana, que timidamente contesta isso, tem sido ignorada na educação matemática."

Ademais, gostaríamos de oferecer um pequeno esboço acerca do modo pelo qual esta investigação encontra-se desenvolvida, dizendo que este trabalho apresenta-se em três capítulos: nos Capítulos I e II argumentamos em favor de duas *teses intermediárias*, que servirão de premissas fundamentais para a *tese principal* de nosso trabalho, que é desenvolvida no Capítulo III.

No Capítulo I, a primeira de nossas *teses intermediárias* consiste na afirmação de que *o Conhecimento Matemático não se determina exatamente em uma atividade matemática*. Neste capítulo, desenvolvemos rapidamente os aspectos fundamentais da atividade matemática, tratando especialmente da Matemática Pura e da Matemática Aplicada, para mostrar que uma atividade matemática não se confunde com o próprio Conhecimento Matemático, não sendo possível, portanto, restringi-lo às suas aplicações. Podemos observar que isso se dá simplesmente porque em uma atividade matemática, mesmo que seja específica a um dado campo da Matemática, e no qual possamos desenvolver a Aritmética, nós nos valemos apenas de uma certa região do Conhecimento Matemático e não da totalidade dele. O resultado fundamental que nos permite afirmar isso advém dos "*teoremas da incompletude de Gödel*"[10], que atestam, basicamente, que em qualquer sistema formal, ou em qualquer linguagem matemática com uma estrutura exatamente especificada, que seja consistente e na qual possamos desenvolver a Aritmética, não será possível derivar a totalidade das formulações matemáticas "*verdadeiras*" utilizando-se somente dos meios desse mesmo sistema, ou dessa mesma linguagem. Ou seja, nós somente poderemos lidar com uma certa região do Conhecimento Matemático que possa ser legitimada por esse mesmo formalismo.

No Capítulo II, a segunda de nossas *teses intermediárias* consiste na afirmação de que *o Conhecimento Matemático não se reduz exatamente a uma linguagem*. Neste capítulo, desenvolvemos, também rapidamente, a noção de sistema conceitual, tratando especialmente das noções de "*metalinguagem*" e de "*verdade*", para mostrar que o Conhecimento Matemático não se confunde com uma linguagem pertinente, não sendo possível, portanto, individualizá-lo em qualquer uma de suas manifestações, a exemplo das

[10] Cf. part. NAGEL(1998), p. 56 — "Gödel mostrou que os *Principia*, ou qualquer outro sistema dentro do qual a aritmética possa ser desenvolvida, é *essencialmente incompleto*. Em outras palavras, dado *qualquer* conjunto consistente de axiomas aritméticos, há enunciados aritméticos verdadeiros que não podem ser derivados do conjunto."

variadas interpretações que se poderiam associar a um formalismo. Também podemos observar que isso se dá simplesmente porque, em uma linguagem, a designação dos objetos correspondentes não começa por intermédio das palavras dessa linguagem, tomadas eventualmente como um conjunto de átomos, mesmo que combinadas rigorosamente, mas sim em uma atividade discursiva considerada em sua totalidade. Entendemos que uma linguagem constitui-se como um sistema simbólico que dá forma à manifestação empírica possível de um sistema conceitual, não se confundindo com este, mas determinando-se como uma de suas dimensões, e, por isso, podemos afirmar que o Conhecimento Matemático é, antes de tudo, um sistema conceitual. Para tanto, desenvolvemos, ainda neste Capítulo II, um ensaio acerca da configuração fundamental do que nós estamos denominando de as três dimensões do Conhecimento Matemático, a saber, as dimensões Normativa, Formal e Substancial, considerando também, e inicialmente, uma pequena configuração fundamental acerca da natureza dos objetos matemáticos.

Por fim, no Capítulo III, desenvolvemos a *tese principal* de nosso de trabalho, que consiste na afirmação de que *a apreensão das formulações matemáticas assenta-se como um produto de uma "experiência definida"*. Inicialmente, é imediato observar que uma aprendizagem matemática somente poderá efetivar-se mediante uma atividade matemática, embora esta atividade não se confunda com a Matemática, como estamos admitindo. No entanto, devemos dizer que esta atividade matemática não se constituirá nos moldes das atividades desenvolvidas por um "*matemático puro*" ou por um "*matemático aplicado*", uma vez que, por um lado, a atividade ensejada por um matemático puro centra-se em uma investigação relativa a determinados sistemas conceituais, com o propósito específico de desenvolver a própria Matemática, e, por outro lado, a atividade ensejada por um matemático aplicado centra-se em uma investigação relativa a determinados "*sistemas materiais*", com o propósito específico de desenvolver as aplicações da Matemática. Nestas atividades matemáticas, o que se põe em questão não é a objetivação de qualquer formulação matemática pertinente a elas, mas a propriedade de sua operacionalização no âmbito destas mesmas atividades, para a resolução de algum problema matemático. Assim, um estudo desenvolvido no âmbito de um sistema conceitual ou um estudo desenvolvido no âmbito de um sistema material, cujo propósito seja o da resolução de algum problema matemático, não nos garantirá uma apreensão efetiva daquelas formulações matemáticas que são pertinentes para esse fim, porque, para a aplicação destas formulações, será necessário tomá-las, em alguma medida, previamente.

Por outro lado, já foi observado anteriormente que não nos seria dado apreender uma nova noção se esta não pudesse ser concebida ou engendrada a partir de um processo desenvolvido no interior de um sistema conceitual previamente distinguido. Esse processo será desenvolvido, então, mediante uma atividade discursiva que seja reconhecidamente própria àquele sistema conceitual. Queremos dizer que estamos admitindo que a base empírica dos sistemas conceituais assenta-se em uma atividade discursiva cuja manifestação deverá se dar, necessariamente, segundo uma linguagem pertinente. Por isso, como estamos admitindo em nossa segunda *tese intermediária* que a Matemática não se reduz exatamente a uma linguagem que lhe seja própria, deveremos admitir também que, para uma adequada determinação desse conhecimento, necessitaremos de outros aspectos além de uma linguagem na qual ele se manifeste. Estes aspectos, que serão apontados como as dimensões normativa e substancial, somente poderão ser tratados em uma atividade matemática que nos permita transcender uma dada linguagem. Por outras palavras, um estudo ou um "*treinamento*" lingüístico não nos garantirá uma apreensão efetiva das concepções matemáticas correspondentes, uma vez que este estudo apenas nos capacitará a lidar com uma linguagem matemática num contexto que por nós possa ser reconhecido.

Portanto, restar-nos-á engendrar uma atividade discursiva que seja específica à aprendizagem matemática, uma atividade discursiva que lhe seja reconhecidamente própria. Essa atividade discursiva será alcançada, então, e necessariamente, quando a pudermos determinar como um produto de uma "*experiência definida*".

3. Da Metodologia de Pesquisa

Permitir-nos-emos desenvolver algumas considerações acerca da postura metodológica de pesquisa que suportará as conseqüentes formulações. Asseveramos prontamente que a determinação destas mesmas formulações colocar-se-á a partir da implementação de "*nossas perquirições dentro das fronteiras da chamada **filosofia científica***" [Da COSTA(1979), p. 5], a qual será comungada completamente com as concepções de Da COSTA(1979), a exemplo da orientação geral associada à constituição de sua obra denominada "*Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*", e, dessa maneira, faremos nossas as suas palavras a esse respeito.

Com efeito, e dentre as possibilidades metodológico-filosóficas que nos seriam concedidas para enfrentar questões ou problemas que tivessem naturezas eventualmente distintas, seguiremos aquela orientação filosófica que nos faculta classificar os problemas filosóficos, no que se refere, particularmente, ao seu tratamento, em duas classes fundamentais, a saber, os de caráter "*científico*" e os de caráter "*especulativo*"[11]. Todavia, não se pretende estabelecer com isso qualquer distinção essencial entre os problemas ditos científicos e os problemas ditos especulativos, mas sim estabelecer a possibilidade de distingui-los quanto ao método ou ao processo que viesse a ser empregado em seu enfrentamento. Conseqüentemente, pode-se dizer que um dado problema filosófico terá um tratamento "*científico*" na medida em que se proceder cientificamente[12] em seu equacionamento.

Sob essa condição, e em linhas muito gerais, pode-se delinear a "*posição científica, em filosofia*" [Da COSTA(1979), p. 6 e 7], como segue:

1. "*Na formulação e na solução (mesmo aproximada) de problemas filosóficos de cunho científico, o pesquisador adota atitude de trabalho semelhante a do cientista, em sentido estrito. Não há realmente, no fundo, qualquer diferença entre a atividade do filósofo, ao fazer filosofia científica, e a do cientista, ao tratar de sua ciência, salvo no que diz respeito à generalidade do domínio estudado, o que irá implicar, por seu turno, uma certa diversidade apenas de detalhe entre o resultado da perquirição filosófica e o da científica, em sentido estrito. Em particular, a verdade, em filosofia científica, como nas ciências especiais, é atingida em etapas sucessivas, sempre suscetível de reconsideração e nunca definitiva e completa.*";

---

[11] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 10-1 — "Mas qual é, no fundo, a distinção que há entre os conceitos científicos e os especulativos? Sem se apelar para concepções especulativas, aparentemente a única resposta possível é a seguinte: tal distinção depende da história da ciência. [...] Vale a pena observar que um conceito, depois de passar por uma fase científica, pode ser enquadrado entre as idéias especulativas e, enfim, voltar a ter *status* científico."

[12] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 7-8 — "[...] o investigador, na ciência, aceita certos *critérios*, alguns implicitamente, que regulam a pesquisa e que servem para *testar* os resultados obtidos, confirmando-os ou invalidando-os. De modo mais exato, a atividade científica regula-se por meio de princípios e de convenções, implícitos ou explícitos, que a moldam e lhe dão forma."

2. "*Todo conhecimento positivo, particular e definido, na medida em que é possível, pertence a uma ciência especial. Os conhecimentos proporcionados pela filosofia científica, ou se referem à ciência propriamente dita, como objeto de estudo, ou se limitam à prática da* ***análise crítica****. A análise, na verdade, constitui efetivamente um método de trabalho e o resultado de sua aplicação consiste em* ***esclarecimentos*** *que nos fornece relativamente a determinados tópicos. A análise, praticada dentro da filosofia científica, serve para* ***aclarar*** *certas situações complexas ou confusas e nada mais.*"; e

3. "*No seu labor quotidiano, o filósofo-cientista deve adotar uma posição de independência completa no tocante às relações entre suas pesquisas e a práxis política, a religião, a filosofia especulativa, ou outra forma qualquer das atividades humanas, com exceção da ciência.* [...] *Tais concepções não se justificam no que tange à filosofia científica. No entanto, esta última acha-se intimamente ligada à ciência, e deve ser cultivada sempre tendo em vista os progressos das diversas ciências especiais. A esse respeito, a ciência é a fonte inspiradora do filósofo.*"

Posto isso, acreditamos que seja adequado considerar também, e rapidamente, os métodos principais dos quais se vale a Filosofia Científica para atingir os seus objetivos, dentre os quais "*se enquadra o exercício da reflexão analítica e crítica*" [Da COSTA(1979), p. 12-5]:

1. A análise semiótica: "*A análise semiótica se efetua de duas maneiras: com ou sem o uso de técnicas formais.* [...] *A análise semiótica sem o expediente de técnicas formais, por seu turno, se processa pela análise do significado e do uso de termos e estruturas lingüísticas, da linguagem comum ou da ciência, ao se procurar esclarecer o sentido real de símbolos vagos e das estruturas lingüísticas nas quais eles aparecem. A importância da análise, do ponto de vista racional, advém da conexão já mencionada que existe entre razão e linguagem*";

2. O recurso às ciências especiais: "*Em filosofia científica, recorre-se, muitas vezes, às diversas disciplinas positivas especiais. Suponhamos que se estuda o conceito de espaço. Após ter-se verificado que há vários espaços – o psicofisiológico, o físico e o geométrico puro – admitamos que se quer tratar da gênese do primeiro. É ele fruto da experiência? Ou é uma forma de nossa sensibilidade externa, como pensava Kant? Ou talvez seja o produto* *da experiência e da razão? Neste problema, o recurso à psicologia e à fisiologia mostra-se indispensável. Vê-se, pois, que as ciências especiais podem auxiliar a filosofia científica*";

3. A exemplificação histórica: "*A exemplificação histórica também constitui método excelente de esclarecimento de idéias. Se o nosso intento é, v.g., entender o papel do conceito de lei nas ciências naturais, nada melhor do que apelarmos à história da ciência, ensaiando constatar como essa idéia evoluiu.* [...] *A história nos mostra que, com os progressos da técnica e a evolução da ciência, as leis deixam de ser exatas e transformam-se em enunciados válidos apenas em primeira aproximação.* [...] *Como a história é uma ciência, poder-se-ia indagar por que o método que acabamos de debuxar foi separado do segundo.* [...] *No entanto, a separação é lícita, pois existe, como é patente, uma diferença entre os dois: o método da exemplificação histórica contribui apenas indiretamente para a elucidação de problemas da filosofia científica, ao passo que o contributo das ciências particulares é direto e construtivo,* [...]"; e

4. A elaboração de modelos hipotéticos: "*Poincaré, por exemplo, empregou-o com freqüência; para mostrar a possibilidade real do uso das geometrias não euclidianas, na sistematização da experiência, imaginou mundos hipotéticos e logicamente possíveis, satisfazendo condições tais, que os seres que neles habitassem seriam naturalmente conduzidos a criar uma geometria não euclidiana, ao contrário de nós. Por outro lado, Einstein, como se sabe, repetidamente se valia desse método com a finalidade de fixar idéias e tornar mais intuitivas suas concepções* [...]. *O método dos modelos ajuda muito a elucidação de certas concepções intrincadas, bem como constitui processo fornecedor de contra-exemplos, para patentear que posições que assumimos, consciente ou inconscientemente, acham-se destituídas de fundamento.*"

Finalmente, gostaríamos de destacar uma última pequena nota de rodapé, posta no final da Introdução da já referida obra de Da COSTA(1979, p. 16): "*De tudo que se escreveu, infere-se que a filosofia científica nada tem a ver com o* ***cientificismo****, nem mesmo com as correntes positivistas, quer na forma de Comte, quer na do neopositivismo contemporâneo. Contudo, ela engloba, entre outros, temas epistemológicos, semióticos, metodológicos e gnosiológicos*".

4. Pressupostos Básicos

Devemos dizer, sobretudo, que esta Seção e a Seção subseqüente não são fundamentais para a compreensão dos capítulos seguintes. Elas poderão ser retomadas após a leitura do trabalho propriamente dito, caso haja alguma dúvida sobre os pressupostos fundamentais em que se assenta o mesmo.

Por conseguinte, a partir da consecução, da aprovação e da publicação de nossa Dissertação de Mestrado, presumimos estabelecida, mesmo que de modo incidental, uma vinculação estrita e indeclinável entre uma constituição epistemológica relativa ao Conhecimento Matemático e uma correspondente constituição de apreensão de suas concepções. Devemos dizer que esta vinculação desenvolveu-se a partir da configuração de uma adequada instância epistemológica, isto é, segundo o estabelecimento de um foro ou de um âmbito nos quais teria fluência uma determinada epistemologia correspondente ao Conhecimento Matemático, efetivada mediante o desvelamento do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas. Podemos dizer que esse universo de referência encontrar-se-ia imerso no insondável oceano da realidade psicológica humana engendrada histórica e culturalmente, uma realidade na qual se dá a emersão da totalidade das representações humanas, na qual se contrapõem o "vivo e o não-vivo", o "pleno e o não-pleno", o "imediato e o mediato", o "total e o parcial", o "universal e o local", isto é, "o que não-pode-ser-conhecido e o que pode ser conhecido", o "imensurável[13] e o mensurável".

Nessa medida, permitir-nos-emos reconsiderar, inicial e sucintamente, algumas afirmações que nos darão conta da natureza especial do Conhecimento, tomado aqui como o Conhecimento Científico. Com efeito, essas afirmações, tendo sido evidenciadas por algumas proposições fundamentais que assinalam o caráter eminentemente construtivo do Conhecimento, são constituídas de tal forma que nos dão o ensejo para determinar o lugar próprio desse mesmo Conhecimento, que é designado, então, como um *expediente operacional por excelência*, como um instrumento de mediação entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, um mundo que diz respeito ao mundo

---

[13] Cf. part. BOHM(1980), p. 48 — "[...] o imensurável é, se é que de fato ele é algo, justamente aquilo que não pode ser colocado dentro de limites determinados pelo conhecimento e pela razão do homem."

fenomênico, ao mundo culturalmente instituído, e que pode ser objeto de alguma "*experiência possível*"[14]. Observamos, no entanto, que, ao qualificarmos o Conhecimento como um expediente operacional, isto é, enquanto um meio que se destina a alguma realização, não pretendemos com isso aproximá-lo, em absoluto, de qualquer corrente filosófica que esteja vinculada ao "*Operacionalismo*"[15], mas sim sugerir que o seu lugar próprio e a sua importância estão, exatamente, em sua destinação pragmática, ou seja, que o Conhecimento deverá ser tomado enquanto um expediente que se distinguirá como uma disposição "*relativa aos atos que se devem praticar*" [FERREIRA(1975), p. 1376].

Dessa maneira, nos foi possível estabelecer, como adequada e conveniente, uma perspectiva de especificação do Conhecimento Matemático que vem qualificá-lo como um Sistema Operacional. Em particular, a designação que distingue e qualifica eminentemente o Conhecimento, enquanto um expediente operacional por excelência, foi tomada a partir da pretensão de estabelecermos, como uma noção fundamental, o conceito de "*ação*"[16], uma noção que aqui poderá ser tomada enquanto um fim, enquanto uma destinação, que não poderiam ser alienados da natureza do Conhecimento.

Ademais, e considerando-se as circunstâncias que nos dariam a oportunidade da manifestação, efetiva e propriamente dita, das concepções matemáticas, trataremos de assentar um outro aspecto particular da natureza especial do Conhecimento, a saber, o da resolução de seu campo operacional. E, com efeito, presumimos que tal campo operacional constitui-se em um espaço de representação, em um "*espaço de configuração*" [BACHELARD(1934), p. 138] que, na medida em que amplia ou ultrapassa os limites de

---

[14] Cf. part. FERREIRA(1975), p. 769 — "**fenômeno.** [...] **10.** *Filos.* Tudo o que é objeto de experiência possível, i. e., que se pode manifestar no tempo e no espaço segundo as leis do entendimento."; e part. MORA(1998), p. 107 — "**coisa em si** Kant chamou "coisa em si" (*Ding an sich*) — às vezes "coisas em si" (*Dinge an sich*) — ao que se encontra fora do âmbito da experiência possível, isto é, ao que transcende as possibilidades do conhecimento, tal como se encontram delineadas na "Estética transcendental" e na "Analítica transcendental" da *Crítica da Razão Pura*."

[15] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 874 — "La doctrina según la qual el significado de un concepto científico consiste únicamente en un determinado conjunto de operaciones."; e part. BLACKBURN(1994), p. 274.

[16] Cf. part. D'AMBRÓSIO(1986), p. 38 — "Colocamos como ponto focal de nossas discussões o conceito de *ação*, como o mecanismo próprio de nossa espécie para modificar a realidade no seu sentido mais amplo, seja realidade social e material, na qual estamos inequivocamente inseridos, seja a realidade psíquica, resultante de inúmeros fatores ainda insuficientemente identificados no estado atual de nossos conhecimentos científicos. Embora distinguindo uma ação modificadora da realidade social e material de uma ação puramente cognitiva, não erraremos ao considerar ação, no seu sentido amplo, como a estratégia própria de nossa espécie para impactar a realidade."

alguma experiência possível, põe-se enquanto uma realidade postulada, na qual encontraremos uma instância adequada para a preparação do domínio ou campo de definição, em que serão produzidas as definições, do domínio ou campo de operação, em que serão determinadas as operações, relativamente às concepções matemáticas que se pretenderiam implementar. Sob essa disposição, por um lado, intentamos evidenciar uma espécie de *incorporação* das condições de definição e das condições de operação dos objetos matemáticos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais, e, por outro lado, intentamos impor um caráter funcional ou operacional dos objetos matemáticos, que se contrapõe frontalmente ao absoluto de um "*substancialismo*", uma vez que é, rigorosamente, por ocasião de alguma ação que se impõe a pertinência ou a adequação de uma dada concepção matemática.

Pode-se dizer que os partidários da concepção de um substancialismo absoluto atribuiriam ao Conhecimento alguns predicados que os conduziriam, inevitavelmente, a tomar os objetos que lhe seriam próprios como se estes mantivessem uma espécie de substância ou essência absolutas, uma espécie de suporte sempre idêntico e permanente, além de quaisquer qualidades que a eles fossem associadas, enquanto um produto de eventuais transformações. Tais predicados seriam facilmente reconhecidos quando se atribuísse ao Conhecimento, para a sua legítima instituição, a capacidade de efetivar previsões, a possibilidade de antecipar experimentos ou verificações e a inevitável inclinação para a "*verdade absoluta*", atestadas a partir de uma "*metodologia estatística usual*" que colocaria, além disso, suas fortuitas "*falsificações*" ou "*refutações*" como um produto circunstancial de suas próprias "*aplicações*".

5. Quadro Sinóptico de nossa Dissertação de Mestrado

A fim de que nos seja possível apreender, um tanto mais clara e distintamente, o contexto, o domínio ou o campo no qual estamos nos movimentando, e a partir do qual pretendemos assentar as prometidas e conseqüentes considerações de nosso trabalho, permitir-nos-emos apresentar um tipo primário de quadro sinóptico de nossa Dissertação de Mestrado, considerando, em especial, o que nela há de fundamental. Para tanto, valer-nos-emos de um expediente que consistirá, basicamente, no seguinte:

- Formulação básica;
- Configuração de uma instância epistemológica acerca do Conhecimento Matemático; e
- Estabelecimento de uma correlação entre Epistemologia e Aprendizagem.

5.1. Formulação Básica

A consecução de uma constituição normativa de apreensão das concepções do Conhecimento Matemático assentar-se-á em alguma instância epistemológica correlativamente determinada.

Intentamos estabelecer com esta formulação, por um lado, que toda consideração que nós queiramos instituir em relação à apreensão das concepções matemáticas exigirá um exame correlativo dos pressupostos fundamentais e da natureza especial da realidade conceitual geradora de tais concepções. Por outro lado, queremos sugerir que toda consideração que nós queiramos desenvolver em relação a alguma epistemologia que seja própria ao Conhecimento Matemático exigirá um exame correlativo que possa assegurar a apreensão das concepções matemáticas que se pretenderiam ver fundadas em tal epistemologia.

Oportuna e rapidamente, a referência feita acima a uma realidade conceitual geradora está ligada aos pressupostos que nos permitiriam tocar na "*gênese*" do Conhecimento, admitindo-se que esta se determine como uma "*interface*" entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, constituídos, tão-só e contingentemente, na perspectiva e na possibilidade objetivas de uma diferenciação correlativa ensejada na fluência de uma totalidade continente. Nessa medida, permitimo-nos distinguir o Conhecimento enquanto uma realidade virtual, enquanto uma realidade conceitual, a exemplo de PIAGET(1970, p. 6) em "*A Formação dos Conhecimentos (Psicogênese)*": "*De uma parte, o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que a ele se imporiam. O conhecimento resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre os dois, dependendo, portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em decorrência de uma indiferenciação completa e não de intercâmbio entre formas distintas. De outro lado, e, por conseguinte, se não há* *no início, nem sujeito, no sentido epistemológico do termo, nem objetos concebidos como tais, nem, sobretudo, instrumentos invariantes de troca, o problema inicial do conhecimento será pois o de elaborar tais mediadores. A partir da zona de contato entre o corpo próprio e as coisas eles se empenharão então sempre mais adiante nas duas direções complementares do exterior e do interior, e é desta dupla construção progressiva que depende a elaboração solidária do sujeito e dos objetos*".

5.2. Configuração de uma Instância Epistemológica

Inicialmente, devemos dizer que a pretendida configuração fundamental de uma instância epistemológica relativa ao Conhecimento Matemático somente será alcançada na medida em que pudermos apontar para uma objetivação possível desse mesmo conhecimento, para uma distinção possível do campo operacional no qual teriam manifestação suas correspondentes concepções, para os objetos sobre os quais operaria esse conhecimento e para aqueles procedimentos que seriam próprios, peculiares ou específicos a esse mesmo conhecimento. Conseqüentemente, indicaremos algumas proposições fundamentais que tenderiam, por um lado, a apreender a natureza do Conhecimento, e, por outro lado, a assentar os "*fundamentos da Matemática*", de tal modo que nos seja possível apreender, na medida exata e suficiente, uma epistemologia que seja própria ao Conhecimento Matemático. Ademais, impõem-se estas proposições como fundamentais para que possamos estabelecer, mediante as suas formulações, o que nós pretendemos ver assinalado como *o caráter eminentemente construtivo* do Conhecimento Matemático, isto é, intentamos estabelecer com esta noção que as formulações ou reformulações do Conhecimento Matemático determinam-se em formulações anteriormente assentadas, o que nos permitirá observar, antecipadamente, que a distinção dos objetos matemáticos será engendrada a partir do próprio campo de ordem do Conhecimento Matemático, ou seja, mediante a constituição destes mesmos objetos a partir de uma rede de concepções conceituais desenvolvida em uma atividade discursiva reconhecidamente matemática.

5.2.1. Objetivação

Diz respeito aos processos cognitivos mediante os quais um conjunto de concepções pode configurar-se a partir de um conjunto de objetos previamente distinguidos, segundo alguma experiência possível.

A noção de objetivação, que é tomada a partir de sua concepção nas "*correntes dialéticas contemporâneas*", corresponde ao "*processo pelo qual a subjetividade ou consciência humana se corporifica em produtos avaliáveis para ela e para os outros como elementos de um mundo comum*" [FERREIRA(1975), p. 1208]. Contudo, talvez nos fosse mais proveitoso apelarmos para um confronto entre as noções de "*sujeito*" e de "*objeto*", uma vez que estas noções possuem a mesma raiz latina referenciada por '*jact*', segundo HOUAISS(2000, p. 1667). Nessa medida, podemos observar que a fórmula 'sujeito' vem do latim "*subjicĭo*" significando "*lançar ou pôr debaixo; ocultar, esconder, submeter, subordinar, sujeitar*" e a fórmula 'objeto' vem do latim "*objicĭo*", significando "*lançar ou pôr diante; apresentar, propor; opor; exprobar, lançar em rosto, acusar de*". Assim, a idéia de objetivação coloca-se, imperiosamente, a partir de dois aspectos básicos: o primeiro, determinado por alguma experiência possível, mediante a qual o novo objeto possa ser distinguido a partir de um conjunto de outros objetos tomados como um substrato empírico apropriado, isto é, *lançados ou postos debaixo*, e o segundo, determinado por um conjunto de objetos previamente distinguidos, isto é, *lançados ou postos diante*, relativamente aos quais o novo objeto em apreensão possa ser constituído.

Por conseguinte, a realização possível da objetivação do Conhecimento Matemático nos será permitida mediante a configuração da totalidade dos objetos matemáticos, desenvolvida a partir de um conjunto de noções de base tomado como um sistema de predicados, de tal modo que cada um dos objetos matemáticos possa ser determinado como uma composição de outros objetos anteriormente configurados. E, assim, a realização efetiva da objetivação do Conhecimento Matemático é alcançada mediante uma rede de concepções conceituais, fundada em um conjunto de noções de base e subordinada ao âmbito de alguma experiência possível, uma rede de concepções na qual cada objeto matemático emergirá como uma composição de um conjunto de outros objetos matemáticos previamente distinguidos.

5.2.2. Campo Operacional

Diz respeito ao espaço de configuração no qual são assentados os domínios ou os campos de definição e de operação dos objetos de um dado conhecimento.

A noção de campo operacional pode ser tomada enquanto referindo-se a um "*mundo*", a um "*ambiente*" ou a uma "*realidade*" na qual teriam forma e fluência os objetos de um dado conhecimento. Desse modo, um campo operacional determinar-se-á enquanto uma "*realidade virtual*", enquanto uma "*realidade conceitual*" que será sustentada em um conjunto de "*postulados*", em um conjunto de concepções postuladas como primordiais. Assim, a idéia de campo operacional coloca-se, basicamente, a partir da instituição de uma rede de concepções conceituais na qual se dará a manifestação efetiva das concepções que seriam próprias a um dado conhecimento.

Por conseguinte, a realização possível do campo operacional do Conhecimento Matemático nos será permitida mediante a *incorporação* das condições de definição e das condições de operação dos objetos matemáticos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais. E, assim, a realização efetiva do campo operacional do Conhecimento Matemático é alcançada mediante a observância de que qualquer objeto matemático seja tomado na perspectiva das diversas operações que teriam ensejado a sua concepção.

5.2.3. Objetos

Diz respeito à configuração de alguma ação, idéia ou sentimento.

A noção de objeto é decididamente tomada de sua concepção latina indicada como "*objicĭo*", significando "*lançar ou pôr diante; apresentar, propor; opor; exprobar, lançar em rosto, acusar de*", de acordo com HOUAISS(2000, p. 1667). E, conquanto entendamos que seja suficiente fazer referência à noção de objeto apenas indicando-a como a *configuração de alguma ação*, uma vez que a noção de ação, que presentemente adotamos, pressupõe[17] as noções de "*idéia*" e de "*sentimento*", acrescentamos estas noções para evitar a sugestão exclusiva de uma "*ação material ou física*". Assim, a noção de objeto de um conhecimento, ou sobre o qual opera um conhecimento, coloca-se prontamente na medida em que uma ação puder ser distinguida a partir de uma totalidade e puder ser determinada como uma composição de relações, de caráter predicativo, e como uma estrutura operacional fundamental.

Por conseguinte, a realização possível dos objetos do Conhecimento Matemático nos será permitida mediante a determinação da totalidade dos objetos matemáticos, a partir de um confronto entre suas relações conceituais e suas relações operacionais, por ocasião de sua concepção. Ilustrativamente:

Objeto → RELAÇÃO ← Objeto	→	**OBJETO**
estrutura operacional fundamental		composição de relações

E, assim, a realização efetiva dos objetos matemáticos é alcançada mediante a sujeição da determinação genérica desses mesmos objetos a sua condição exclusivamente formal, isto é, à condição que vem predeterminada naquelas categorias que nos permitiriam uma abstração constitutiva de alguma generalidade, casualmente derivada de alguma das destinações desses mesmos objetos em um dado campo referencial. Por outras palavras, e por exemplo, assumindo-se que "*o objeto das matemáticas não existe por si só e nem faz parte de uma instância física do real*" [MIGUEL(1993), p. 72], o que nos interessará não serão, propriamente, alguns aspectos particulares das eventuais manifestações dos objetos matemáticos em um dado campo referencial, mas exatamente aqueles aspectos que provocarão "*no sujeito a abstração do geral*" [MIGUEL(1993), p. 72], aqueles aspectos

[17] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 867 — "Objeto es o fin al que se tiende, la cosa que se desea, la cualidad o la realidad percibida, la imagen de la fantasía, el significado expreso o el concepto pensado."; e p. 868 — "Así el Objeto del conocimiento puede ser considerado como una idea (según quería Berkeley) o una representación (de acuerdo con Schopenhauer), como una cosa material (según quería la escuela escocesa del sentido comúm) o un fenómeno (como quería Kant), pero siempre es, como Objeto, el término o límite de la operación cognoscitiva. [...] Lo que en todo caso constituye el Objeto es su función de límite o término de una actividad o de una operación cualquiera."

que nos desvelarão a maior abrangência possível de aplicabilidade de suas concepções, uma vez que "*o compartimento do real a que as matemáticas se referem é aquele ao qual se aplica, de algum modo, a categoria do geral*" [MIGUEL(1993), p. 72][18].

5.2.4. Procedimentos

Diz respeito aos posicionamentos ou às posturas mentais que têm lugar na sustentação e na promoção da totalidade dos objetos de um dado conhecimento.

A noção de procedimento, derivada do verbo "*proceder*", é também tomada de sua concepção latina, indicada por HOUAISS(2000, p. 2302) como "*procēdĕre*" e significando "*ir na frente, avançar, progredir, sair de, aparecer*". Os procedimentos ou os atos que se levam a efeito no interior de um dado conhecimento distinguem-se, então, como modos ou como maneiras de nos posicionarmos mentalmente, de forma que possamos nos movimentar no interior desse mesmo conhecimento, *ascendendo* ou *descendo* no interior de sua edificação. Assim, a noção de procedimento coloca-se, marcadamente, na medida em que pudermos instituir os tipos de raciocínios ou as posturas mentais que sejam próprios e peculiares a um dado conhecimento.

Por conseguinte, a realização possível dos procedimentos que são próprios ao Conhecimento Matemático nos será permitida mediante a determinação da totalidade dos objetos matemáticos, a partir de dois tipos de raciocínios que virão assinalados por uma postura analítica[19] e por uma postura sintética[20]. E, assim, a realização efetiva dos procedimentos que são próprios ao Conhecimento Matemático é alcançada mediante a observância de um conjunto de formulações conceituais previamente assentadas, isto é, por

[18] Cf. part. MIGUEL(1993), p. 72 — "[...] o objeto das matemáticas não existe por si só e nem faz parte de uma instância física do real. Ele só se manifesta no seio da relação epistemológica mutuamente condicionada que se estabelece entre o sujeito epistêmico e o objeto. Além disso, não são os aspectos particulares dessa manifestação os visados, mas apenas aqueles que provocam no sujeito a abstração do geral. Daí o "compartimento" do real a que as matemáticas se referem é aquele ao qual se aplica, de algum modo, a categoria do geral."

[19] **Postura Analítica.** Diz respeito ao posicionamento mental que nos permite considerar ou pensar um objeto como uma totalidade que está separada em partes que se determinam, de algum modo, autonomamente.

[20] **Postura Sintética.** Diz respeito ao posicionamento mental que nos permite considerar ou pensar um conjunto de objetos como constituindo-se em uma totalidade que se determina, de algum modo, autonomamente.

intermédio de uma postura analítica, e a observância de um conjunto de "*inferências válidas*" ou argumentos válidos, isto é, por intermédio de uma postura sintética.

5.3. Sobre a Natureza do Conhecimento

Passaremos a enunciar a seguir, e rapidamente, algumas proposições fundamentais que evidenciam a natureza do Conhecimento, de tal modo que elas nos permitam apreender, na medida exata e suficiente, uma epistemologia que seja própria ao Conhecimento Matemático.

P01 — Todo Conhecimento é Ordem.

O Conhecimento determina-se como um movimento descentrado, integrado, que inter-relaciona a totalidade dos objetos de um universo de referencia, ordenando-os, fundamentalmente, por intermédio de um conjunto de princípios, mediante o qual se atribui a todo objeto algum antecedente e algum conseqüente. Portanto, o Conhecimento, enquanto esse tipo de ordem, é uma ordem que opera em seu próprio campo de ordem, em vez de operar sobre algum objeto.

Esta proposição

- Revela a natureza mais fundamental do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas; e
- Impõe a distinção dos objetos matemáticos a partir de seu próprio campo de ordem.

P02 — Todo Conhecimento é Histórico-Temporal.

O Conhecimento emerge em uma esfera espaço-temporal enquanto se corporifica em um mundo, em uma realidade conceitual. O Conhecimento determina-se enquanto histórico-temporal na medida em que puder ser definido como uma série de sucessões a partir de um passado e puder ser concebido como tendo um início e um fim.

Esta proposição

- Revela o universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas como constituindo-se em uma rede de concepções conceituais, erigindo-se e realimentando-se em uma sucessão de formulações conceituais; e

- Funda qualquer formulação matemática em formulações anteriormente determinadas.

P03 — Todo Conhecimento é Empírico[21]**.**

O Conhecimento funda-se na experiência possível e não na intuição. A intuição coloca-se, no âmbito de apreensão ou de concepção dos objetos do Conhecimento, simplesmente, a partir de uma perspectiva marcadamente inspiradora. Nessa medida, pode-se fazer referência a uma espécie de conhecimento intuitivo ou de intuição mediata quando se quiser fazer referência à intervenção da intuição como um sinal manifesto de um amplo trabalho consciente anterior.

Esta proposição

- Revela a fundação do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas; e
- Funda o Conhecimento Matemático na experiência possível.

Permitir-nos-emos, excepcionalmente, abrir uma pequena nota para observarmos que a concepção de "*empírico*", à qual nos reportamos, não se aproxima, em absoluto, de qualquer concepção que venha reduzir todo Conhecimento a apenas os efeitos de alguma experiência material possível, contrapondo-nos, por isso, veementemente aos "*empiristas, que subordinam o conhecimento a formas situadas de antemão no indivíduo ou no objeto*"[22].

---

[21] Cf. part. FERREIRA(1975), p. 637 —"Diz-se de conhecimento que provém, sob perspectivas diversas, da experiência."; part. ABBAGNANO(1961), p. 503 — " "Nos ocupamos solamente de la Experiencia posible — decía Peirce —, de la Experiencia en la plena acepción del término como algo que no solamente impresione a los sentidos, sino que también es el sujeto del pensamiento" [...]."; e part. MORA(1998), p. 205 — "O termo "empirismo" deriva do grego ἐμπειρία, que se traduz por "experiência" [...]."; e p. 266 — "Kant admite, com os empiristas, que a experiência é o ponto de partida do conhecimento. Mas isso apenas significa que o conhecimento começa com a experiência, não que proceda dela (quer dizer, que obtenha sua validade mediante a experiência). [...] a experiência apresenta-se em Kant como a área dentro da qual o conhecimento torna-se possível. Segundo Kant, não é possível conhecer nada que não esteja dentro da "experiência possível"."

[22] Cf. part. PIAGET(1970), p. 3 e 6 — "A se restringir às posições clássicas do problema, não se pode, com efeito, senão indagar se toda informação cognitiva emana dos objetos e vem de fora informar o sujeito, como o supunha o empirismo tradicional, ou, se, pelo contrário, o sujeito está desde o início munido de estruturas endógenas que ele imporia aos objetos, conforme as diversas variedades de apriorismo ou de inatismo. [...] Ora, as primeiras lições da análise psicogenética parecem contradizer essas pressuposições."

P04 — Todo Conhecimento é Iterativo.

O Conhecimento determina-se enquanto um movimento que se impõe como uma trajetória mental, enquanto um conjunto de procedimentos que se configura em uma rede de concepções conceituais, de causas e efeitos, suportada em uma enunciação consecutiva de formulações conceituais.

Esta proposição

- Revela a dinâmica mais fundamental do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas; e
- Impõe a incorporação das condições de operação dos objetos matemáticos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais.

P05 — Todo Conhecimento é Operacional.

O Conhecimento é essencialmente operacional, isto é, o lugar, o significado e a importância do Conhecimento estão, eminentemente, em sua destinação pragmática.

Esta proposição

- Revela o universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas como constituindo-se de modo contingente, erigindo-se e sustentando-se, circunstancialmente, na fluência de seu próprio campo de ordem; e
- Impõe o caráter funcional ou operacional dos objetos matemáticos.

P06 — Todo Conhecimento é Formal.

O Conhecimento é simplesmente uma construção formal que não tem correspondente material. Conseqüentemente, o Conhecimento impõe-se como uma realidade conceitual.

Esta proposição

- Revela a natureza mais fundamental dos objetos do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas; e
- Impõe a condição exclusivamente formal dos objetos matemáticos.

5.4. Sobre os "Fundamentos" do Conhecimento Matemático

Analogamente às proposições anteriores, passaremos a enunciar, a seguir, o que pretendemos que seja assentado como os "*fundamentos*" do Conhecimento Matemático.

P07 — Os objetos matemáticos são estruturas operacionais fundamentais.

Os objetos matemáticos são concepções conceituais e, portanto, estruturas operacionais fundamentais, isto é, relações constituídas quase que compulsoriamente como invariantes tomados em "*abstrações construtivas*"[23].

Esta proposição

- Revela a natureza mais fundamental dos objetos matemáticos; e
- Funda os objetos matemáticos como uma composição de outros objetos.

P08 — A estrutura operacional lógica da Matemática é o Raciocínio por Recorrência.

O raciocínio por recorrência[24] condensa, em uma dada formulação, "*uma infinidade de definições distintas e cada uma delas só tem sentido quando se conhece a que a precede*"[25]. Nessa medida, a estrutura operacional lógica do Conhecimento Matemático, que determina o modo pelo qual se constituem, se organizam e se relacionam seus subsistemas, é o raciocínio por recorrência.

Esta proposição

- Revela a estrutura de edificação da totalidade do Conhecimento Matemático; e
- Funda os procedimentos de edificação do Conhecimento Matemático.

---

[23] Cf. Da COSTA(1979), p. 109 — "Lukasiewicz distingue três tipos de objetos: *a*) as abstrações construtivas, livres criações do espírito, como, por exemplo, os objetos da matemática ortodoxa: *b*) as abstrações reconstrutivas, que são conceitos elaborados para representar cosias reais; *c*) os objetos reais."

[24] **Raciocínio por Recorrência**. O Raciocínio por Recorrência impõe-se como uma postura analítica fracionativa ou seletiva, que procede por fracionamento ou seleção, tendo como substrato um núcleo primário de noções ou conceitos, constituídos como um conjunto de premissas, e que se instala na concepção ou apreensão dos objetos matemáticos a partir de uma perspectiva marcadamente consubstanciadora.

[25] Cf. POINCARÉ, Jules-Henri. **A ciência e a hipótese**. 2.ed. Tradução Maria A. Kneipp. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1984. 181p. (Pensamento Científico, 19.) (©1902). p. 24.

P09 — O processo operacional lógico da Matemática é o Raciocínio por Dedução.

O raciocínio por dedução[26] funda-se em um conjunto de princípios que direciona a construção de "*argumentos válidos — a falsidade da conclusão é incompatível com a verdade das premissas*"[27]. Nessa medida, o processo operacional lógico do Conhecimento Matemático, que determina o modo pelo qual se constituem e se relacionam seus objetos, é o raciocínio por dedução.

Esta proposição

- Revela o processo de constituição da totalidade dos objetos matemáticos; e
- Funda os procedimentos de constituição das formulações matemáticas.

5.5. Epistemologia *versus* Aprendizagem

Com efeito, atestamos que a conveniência e a propriedade da sujeição de alguma apreensão das concepções matemáticas a uma correspondente instância epistemológica, colocar-se-á, sobretudo e de modo imperioso, no desvelamento do universo referencial engendrador da totalidade de tais concepções. Esse desvelamento deverá vir configurado a partir da explicitação, sumária e continuada, dos pressupostos fundamentais e da natureza especial de sua constituição, de modo correspondente ao que foi explicitado acima na consideração das proposições postas anteriormente, sob pena de, se assim não fosse, cairmos num hábito que poderia tratar uma determinada concepção matemática como tacitamente advinda de uma outra realidade conceitual, induzido-nos a tomá-la, em qualquer medida que nos fosse possível, como derivada desta mesma realidade conceitual *alienígena*, o que acabaria por afetar a sua apreensão e a sua operacionalização enquanto uma noção de base.

[26] **Raciocínio por Dedução.** O Raciocínio por Dedução determina-se como uma postura sintética derivativa ou relacional, que procede por derivação ou relação, tendo como fundação um conjunto de regras ou princípios, e que se instala na concepção ou apreensão dos objetos matemático a partir de uma perspectiva marcadamente legitimadora.

[27] Cf. part. SALMON(1963), Cap. I — (p. 31) "Se um argumento dedutivo é logicamente correto, as premissas sustentam de modo completo a conclusão; em outras palavras, a conclusão não pode ser falsa quando as premissas são verdadeiras."; e Cap. II, Seção 5 — (p. 34) "Dizer que um argumento dedutivo é "válido" significa dizer que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que *a conclusão precisa ser verdadeira quando as premissas são verdadeiras*."

Assim, relembrando-nos da formulação fundamental apontada anteriormente — *"A consecução de uma constituição normativa de apreensão das concepções do Conhecimento Matemático assentar-se-á em alguma instância epistemológica correlativamente determinada"* —, restar-nos-á evidenciar um pequeno arranjo sumário deste suposto confronto entre epistemologia e aprendizagem.

P01 — Todo Conhecimento é Ordem.

Esta proposição revela a natureza mais fundamental do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas.

Aprendizagem

Portanto, na aprendizagem matemática, impõe-se a apreensão de qualquer novo objeto matemático como derivada de seu próprio campo de ordem.

P02 — Todo Conhecimento é Histórico-Temporal.

P03 — Todo Conhecimento é Empírico.

Estas proposições remetem-nos para a objetivação do Conhecimento Matemático.

Aprendizagem

Portanto, na aprendizagem matemática, impõe-se a apreensão de qualquer novo objeto matemático como um produto de alguma experiência possível, idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado.

P04 — Todo Conhecimento é Iterativo.

P05 — Todo Conhecimento é Operacional.

Estas proposições revelam-nos o campo operacional no qual se dará a manifestação efetiva das concepções matemáticas.

Aprendizagem

Portanto, na aprendizagem matemática, impõe-se a apreensão de qualquer novo objeto matemático sob a condição de afirmar-se dele alguma destinação (operação), isto é, mediante a indicação das circunstâncias em que este objeto poderá ser invocado.

P06 — Todo Conhecimento é Formal.

P07 — Os objetos matemáticos são estruturas operacionais fundamentais.

Estas proposições revelam-nos a natureza mais fundamental dos objetos matemáticos.

Aprendizagem

Portanto, na aprendizagem matemática, impõe-se a apreensão de qualquer novo objeto matemático sob a condição de sua determinação genérica (formal), o que poderá ser alcançado mediante um confronto sempre crescente entre as relações conceituais e as relações operacionais que o poderiam constituir.

P08 — A estrutura operacional lógica da Matemática é o Raciocínio por Recorrência.

P09 — O processo operacional lógico da Matemática é o Raciocínio por Dedução.

Estas proposições revelam-nos a natureza fundamental dos procedimentos que têm lugar na sustentação e na promoção das formulações matemáticas.

Aprendizagem

Portanto, na aprendizagem matemática, impõe-se a apreensão de qualquer novo objeto matemático mediante uma conseqüente reconstrução formal de sua concepção, ativando um conjunto de recorrências e de deduções ensejadas pelo raciocínio por abdução[28].

Dessa maneira, delineada uma instância epistemológica relativa ao Conhecimento Matemático, mediante a especificação de sua objetivação, de seu campo operacional, de seus objetos e de seus procedimentos, a partir da determinação de seus pressupostos fundamentais e de sua natureza especial, restar-nos-á, então, e tão-somente, subordinar uma eventual apreensão de suas concepções a essa referida instância epistemológica. Por conseguinte, pode-se afirmar que uma das implicações mais contundentes de nossa Dissertação de Mestrado, que propõe a vinculação entre uma concepção de aprendizagem matemática e a correlativa determinação de uma instancia epistemológica acerca do Conhecimento Matemático, é aquela que nos remete para a

[28] **Raciocínio por Abdução.** O Raciocínio por Abdução constitui-se como uma postura imagética abstrativa ou combinatória, que procede por abstração ou combinação, tendo apenas como limitante a consideração de algum conjunto de formulações possíveis, e que se instala na concepção ou apreensão dos objetos matemáticos a partir de uma perspectiva marcadamente inspiradora.

Postura Imagética. Diz respeito ao posicionamento mental que nos permite conceber ou compor um objeto a partir de um conjunto de objetos previamente distinguidos.

relatividade e circunstância de um dado conhecimento. Se assim não fosse, negar esta relatividade e circunstância do Conhecimento significaria, também, mas não só, apontar para uma "*realidade última*", determinar alguma comunhão com essa mesma generalidade e instituir a possibilidade de sua objetivação indiscriminadamente.

CAPÍTULO I

DA CONFIGURAÇÃO FUNDAMENTAL DA ATIVIDADE MATEMÁTICA

o Conhecimento Matemático não se reduz às suas aplicações

1. Preliminares

Neste capítulo inicial, e tendo em vista o nosso problema de investigação, pretendemos desenvolver algumas considerações acerca de um suposto embate antagônico[29] entre a "*Matemática Pura*" e a "*Matemática Aplicada*", no sentido de determinar se haveria alguma propriedade em colocá-las como campos que pudessem ser distinguidos autônoma e independentemente, especificamente no que diz respeito à concepção ou à apreensão das formulações matemáticas. Por outras palavras, interessar-nos-á considerar se a correspondente repercussão, que essa distinção notoriamente antagônica vem infligindo ao Ensino de Matemática, é adequada, uma vez que, a partir deste suposto embate, vem-se sugerindo, por um lado, que o Ensino de Matemática deveria ter um caráter "*mais prático*"[30], e, por outro lado, que as possíveis

---

[29] Cf. part. LIN(1974), p. 6 — "The differences in motivation and objectives between pure and applied mathematics – and the consequent differences in emphasis and attitude – must be fully recognized. In pure mathematics, one is often dealing with such abstract concepts that logic remains the only tool permitting judgment of the correctness of a theory. In applied mathematics, empirical verification is a necessary and powerful judge."; e part. LIN(1976), p. 543 — "I think it is time that we should recognize applied mathematics as an independent discipline, fairly distinct from pure mathematics. The difference in spirit between pure and applied mathematics is clear and often very great. In a very interesting and important article [13], Professor J. Schwartz warned mathematicians against the danger of single-mindedness, literal-mindedness, and simple-mindedness in dealing with scientific problems."

[30] Cf. part. LIN(1976), p. 547 — "Clearly, we do not advocate the education of applied mathematicians by first training them as pure mathematicians. Such a training has the danger of introducing a frame of mind which is disadvantageous to their creative activities."

"*aplicações práticas*"[31] da Matemática não deveriam ser tratadas pela Matemática, mas por outra ciência qualquer.

Intentar-se-á evidenciar, contudo, e anteriormente, a partir da configuração fundamental das atividades matemáticas desenvolvidas por um matemático puro e por um matemático aplicado, que o Conhecimento Matemático não se confunde com as suas aplicações, e, por isso, não se determina exatamente em uma atividade matemática. A pretensão de distinguir o Conhecimento Matemático de suas aplicações, mediante a instituição de uma primeira tese intermediária, põe-se como uma contraposição e como uma alternativa à insuficiência de uma concepção que pretende restringir a Matemática às suas atividades. A expressão '*fazer matemático*' é pertinente para qualificar especialmente as atividades matemáticas desenvolvidas por um matemático puro ou por um matemático aplicado, mas é insuficiente para promover o Conhecimento Matemático à condição de uma realidade conceitual instituída culturalmente, à condição de um sistema interpretativo que transcende qualquer uma de suas manifestações.

Antes disso, no entanto, iniciaremos este capítulo tratando da noção de "*modelo*" em Matemática, para que nos seja possível, posteriormente, diferenciarmos as várias dimensões contidas na expressão 'aplicações da Matemática'. Com isso, estaremos em condições de avaliar em que medida as aplicações da Matemática se manifestam no Ensino de Matemática e como estas se apresentam naquelas publicações que se destinam a atender um ensino "*mais prático*" ou um ensino "*mais teórico*". Nesse sentido, examinaremos duas coleções de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, uma cujo caráter pode ser tomado como sendo "*mais prático*", e outra, como sendo "*mais teórico*".

2. Modelo Matemático

A noção de modelo, no âmbito da Matemática, ou mesmo no âmbito da Ciência, excetuando-se os "*modelos mecânicos*", correlaciona-se estritamente à noção de

[31] Cf. part. LIN(1974), p. 34 — "To a large extent, the community of core mathematicians has decided that it is not its responsibility to provide instruction related to the application of mathematics; to the same large extent, much of the instruction in methodology has become the responsibility of the applied mathematics community. [G. F. Carrier, "Heuristic Reasoning in Applied Mathematics", in the special issue, "Symposium on the Future of Applied Mathematics", 1972.]"

teoria. Conceberemos, então, um modelo como uma *"estrutura de interpretação"* mediante a qual a totalidade das sentenças de um sistema formal serão simultaneamente verdadeiras.

Não nos interessará considerar o que se poderia chamar de *"modelos mecânicos"*[32], comumente tomados na Ciência como uma *"representação de um sistema por outro, usualmente mais familiar, cujo funcionamento se supõe ser análogo ao do primeiro"* [BLACKBURN(1994), p. 252], a exemplo de um modelo do comportamento das *"ondas sonoras"* por meio de *"ondas na água"*, porque deles não se ocupa a Matemática. Interessar-nos-á considerar a noção de modelo que vem associada à noção de teoria, na medida em que será esta a concepção que nos permitirá correlacionar um sistema conceitual e um sistema material[33]. E, em adiantamento a algumas considerações que serão desenvolvidas adiante, pode-se afirmar que, no âmbito de um sistema conceitual, a noção de teoria será tomada como um modelo a partir do qual nos será dado estabelecer, obrigatoriamente, uma destinação operacional para um dado subsistema conceitual, e, no âmbito de um sistema material, a noção de teoria será tomada como um modelo mediante o qual nos será dado determinar, basicamente, os pressupostos fundamentais e sustentadores de um dado subsistema material.

Por conseguinte, a noção de modelo coloca-se como pertinente para que possamos, numa última subseção, cotejar as noções de Matemática Pura e de Matemática Aplicada. Examinemos rapidamente, então, a nossa concepção de modelo, que diz respeito a uma *"estrutura de interpretação"* que se acha correlacionada a algum sistema formal, para que nos seja possível evidenciar a sua pertinência. Segundo SALEM(1990, p. 361), em Lógica costuma-se usar a denominação 'modelo' com relação a um sistema formal ou a uma teoria matemática formalizada, e, para que tenhamos uma definição precisa do termo 'modelo', deve-se supor conhecida a definição de *"estrutura de interpretação"*, ou *"realização"*, que é simplesmente o que em Lógica se chama de uma *"semântica"* ou de

[32] Cf. part. MORA(1998), p. 481 — "Falou-se, por vezes (vagamente), de modelo como um modo de explicação da realidade, em especial da realidade física. Por exemplo, falou-se em "modelo mecânico" equivalente ao mecanicismo e considerou-se que autores como Galileu e Newton seguiram esse modelo. É possível que fosse esse o sentido e que Lorde Kelvin indicou que só podia entender-se uma classe de processos físicos quando se podia apresentar um "modelo mecânico" dos mesmos."

[33] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 222 — "Nas ciências reais, procuramos apreender o contorno pela construção de teorias ou, o que dá no mesmo, de modelos, via processos lógico-matemáticos que constituem sistemas conceituais organizados, isto é, formas ou estruturas."; e part. SALEM(1990), p. 360-1 — "De fato, muito freqüentemente, chama-se modelo uma teoria concebida para explicar um conjunto de fenômenos."

uma "*interpretação*" para um sistema formal[34]. Uma "*estrutura de interpretação*", segundo SALEM(1990, p. 428), é determinada, basicamente, a partir de 1) "*um conjunto não-vazio, chamado universo ou domínio de base*", no qual as variáveis e as constantes de indivíduos de um sistema formal (supostamente tendo como linguagem lógica o cálculo de predicados[35] de primeira ordem) tomarão seus valores, os quais serão os elementos ou os objetos desse universo ou domínio de base; 2) "*uma interpretação para cada um dos símbolos de predicado*", que serão interpretados como uma das possíveis relações (*e.g.*, x "é maior do que" y) que puderem ser estabelecidas entre os elementos ou objetos do domínio de base; 3) "*uma interpretação para cada um dos símbolos de função*", que serão interpretados como uma das possíveis operações (*e.g.*, x "é a soma de" y e z) que puderem ser estabelecidas entre os elementos ou objetos do domínio de base; e 4) uma interpretação das constantes individuais pelos elementos ou objetos do universo ou domínio de base ("*por exemplo, se o universo é o conjunto dos números inteiros, na fórmula* $\forall x(x + c = c + x = x)$, *onde* c *é uma constante, a interpretação de* c *é evidentemente o número 0*"). Assim, uma "*estrutura de interpretação*" será um modelo para um sistema formal se todas as sentenças desse sistema forem simultaneamente verdadeiras nessa interpretação [SALEM(1990), p. 361].

Como exemplo de aplicação da noção de modelo considerada acima, podemos mencionar as "*provas relativas de consistência*"[36], que são empregadas para demonstrar a consistência de uma dada teoria a partir de um modelo desenvolvido em outra teoria, a exemplo da prova relativa de consistência da geometria euclidiana, na qual se toma como modelo a "*álgebra elementar*", a partir de um universo ou domínio de base

[34] Cf. part. SALEM(1990), p. 496 — "Um sistema formal pode ser interpretado de várias maneiras segundo o sentido que é convencionado dar aos símbolos do alfabeto. Chama-se *semântica do sistema* o conjunto de regras de interpretação que determina o sentido desses símbolos primitivos."

[35] Cf. part. SALEM(1990), p. 427 — "Linguagem lógica necessária à formalização do discurso matemático. [...] O alfabeto do cálculo de predicados, além dos símbolos $\forall$ e $\exists$ dos quantificadores universal e existencial que traduzem, respectivamente, as expressões "para todo" e "existe", compreende também os símbolos dos conetivos proposicionais (por exemplo, aqueles da negação $\neg$ e da implicação $\rightarrow$) e um conjunto de variáveis de indivíduos denotadas por x, y, z, ... A estes é necessário acrescentar os símbolos de predicados P, Q, ..., os símbolos de funções ou operadores f, g, ... e os símbolos de constantes. No caso mais usual, que é aquele do cálculo de predicados de primeira ordem, as únicas variáveis são as variáveis de indivíduos e os quantificadores não podem atuar sobre os símbolos de predicados ou funções."

[36] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 121 — "Ya que la prueba de la no contradicción es imposible de obtener en el interior de un sistema (*véase* AXIOMÁTICA), nos valemos habitualmente del sistema de la *reducción* a una teoria anterior, cuya coherencia nos parece como bien estabelecida, por ejemplo, a la aritmética clássica o a la geometria euclidiana."

constituído por um conjunto de pares de coordenadas[37]. Assim, a geometria euclidiana será consistente se a "*álgebra elementar*" o for. Um outro exemplo é a prova de consistência relativa da geometria não-euclidiana bidimensional, que toma como modelo a superfície de uma esfera da geometria euclidiana tridimensional, interpretando cada "*ponto*" da geometria não-euclidiana como um par de pontos antípodas sobre a esfera e cada "*reta*" como um círculo máximo sobre ela[38].

E, com efeito, o que há de interessante a notar nesses exemplos é que um modelo ou uma interpretação matemáticos estão correlacionados estritamente a uma teoria matemática[39], e, por isso, para que nos seja possível interpretar um sistema formal, é necessário que se considere, imperiosamente, alguma teoria que lhe seja correspondente, já que uma formalização é um passo posterior na elaboração de uma teoria[40]. Assim sendo, quando quisermos erigir um modelo para um dado sistema formal, mediante um outro sistema formal, estaremos confrontando necessariamente as duas teoria correspondentes, a partir das quais esses dois sistemas formais foram constituídos, e, neste caso, um sistema formal não poderá ser tomado como "*um desenho abstrato ou um mosaico dotado de determinada estrutura*" [NAGEL(1998), p. 32] sem qualquer significado. Estamos sugerindo que um sistema formal, mesmo que desenvolvido a partir de uma teoria

[37] Cf. part. DAVIS(1982), p. 263-4 — "A cada ponto do plano podemos associar um par de números: suas coordenadas x e y. Então, a cada reta ou círculo podemos associar uma equação: uma relação entre as coordenadas que é satisfeita somente pelas coordenadas dos pontos sobre aquela reta ou aquele círculo. Desta maneira, estabelecemos uma correspondência entre a geometria e a álgebra elementar."

[38] Cf. part. DAVIS(1982), p. 256 — "Temos assim uma demonstração *relativa* de consistência; se a geometria euclidiana tridimensional é consistente, então, o mesmo acontece com a geometria não-euclidiana bidimensional. Dizemos que a superfície da esfera euclidiana é um modelo para os axiomas da geometria não-euclidiana."

[39] Cf. part. SNAPPER(1979), p. 552 — "When we practice mathematics, we always have a world of realities in front of us. This world depends on the branch of mathematics being practiced, be it Euclidean geometry, number theory, or what have you."; e p. 553 — "Finally, logicians may wonder why the author is using the phrase "world of realities" instead of the standard term "model" of mathematical logic. The reason is that, although a world of realities is often a model in the logician's sense, this in not always the case. For example, the world of realities of intuitionism (Section 6) is not such a model."

[40] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 22 — "O resultado da axiomatização de A [teoria] é a obtenção de um sistema axiomático S, do qual A é uma das possíveis "realizações". (É sabido que os sistemas axiomáticos podem receber as mais variadas interpretações.) [...] Elaborado S, o passo seguinte para a investigação de suas propriedades relevantes consiste na sua formalização [...]."; e part. SALEM(1990), p. 497 — "A formalização de uma teoria matemática tem, em princípio, duas vantagens: mecanizar os procedimentos da demonstração e generalizar a teoria, sendo o sistema formal correspondente construído de forma conveniente às diversas interpretações (conhecidas ou possíveis)."

matemática já reconhecida, como é o caso das geometrias não-euclidianas[41] a partir da Geometria Euclidiana, somente poderá ser reconhecido como um novo ramo da Matemática quando for reconhecida uma interpretação ou uma concepção para os seus objetos.

Por outro lado, é oportuno que desenvolvamos também algumas observações relativas às "*estruturas de interpretação*" cujos universos ou domínios de base sejam idealizados a partir de sistemas materiais. Nesse sentido, DAVIS(1982, p. 106) afirma que "*a teoria de Newton para o movimento planetário foi um dos primeiros modelos modernos. Sob a hipótese simplificadora de um sol e de um planeta, Newton conseguiu demonstrar matematicamente que o planeta descreverá uma órbita que obedecerá às três leis inferidas por Kleper a partir do estudo de uma quantidade considerável de observações astronômicas*". Ademais, segundo Da Costa(1997, p. 213), à época da "*descoberta*" do planeta Netudo por Leverrier e Adams, "*sabia-se que a órbita calculada de Urano não batia com os dados experimentais*", ou seja, havia uma discrepância entre o "*modelo matemático*", que dependia, basicamente, da "*mecânica clássica de partículas*" e da "*ley de la gravitación universal de Newton*" [BELL(1940), p. 171-2], e o "*modelo físico*" pressuposto para o nosso sistema solar: "*não haveria nenhum planeta depois de Urano*". Assim, "*dado que as previsões não se verificavam, alguma das hipóteses aceitas tinha que ser incorreta, necessitando ser descartada*", e, num novo modelo físico para o nosso sistema solar, "*Leverrier e Adams supuseram que havia um planeta transurânico; trataram de calcular sua órbita pelas perturbações provocadas na de Urano e fizeram as previsões quanto ao seu aparecimento em zonas apropriadas da abóbada celeste*" [Da COSTA(1997), p. 213].

Por conseguinte, quando se busca um modelo matemático[42] de alguma "*situação física*", no âmbito da Matemática Aplicada, deve-se, segundo DAVIS(1982,

[41] Cf. part. SNAPPER(1979), p. 555 — "As long as these axiomatic investigations [da geometria plana hiperbólica] were not backed up by an appropriate world of realities, they could not be considered as constituting a new branch of mathematics, but had to be considered as strictly axiomatic investigations arising from the world underlying plane Euclidean geometry. [...] The sword [de Democles] was removed only when Poincaré, Beltrami, and Klein found appropriate worlds for the new set of axioms, and only then could one claim that a new branch of mathematics had been born."

[42] Cf. part. DAVIS(1982), p. 107 — " "Um modelo matemático", diz Aris, é "qualquer conjunto de equações matemáticas, completo e consistente, que é elaborado para corresponder a alguma outra entidade, seu protótipo. O protótipo pode ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceitual, talvez mesmo outro modelo matemático". Pode-se substituir a palavra "equações" por "estruturas", pois nem sempre se trabalha com um modelo numérico."

p. 421), comparar efetivamente estas duas "*entidades*", o "*modelo matemático*" e o "*modelo físico*"[43] idealizado a partir dessa mesma "*situação física*", a fim de decidir-se se o primeiro "*descreve*" aceitavelmente o segundo. Essa comparação deve ser feita estudando-se cada um deles "*como uma realidade distinta com suas propriedades próprias*": o estudo do modelo matemático deve ser feito com "*a matemática tão rigorosa quanto possível*", com a "*matemática não-rigorosa*" (com raciocínios plausíveis, com métodos baseados na experiência geral e sem demonstração rigorosa) sempre que necessário, com "*simulações computacionais*" etc.; o estudo do modelo físico pode ser desenvolvido em laboratório, quando possível, ou pode ser simulado por um computador. Neste último caso, "*estamos realmente comparando dois modelos matemáticos distintos*" [DAVIS(1982), p. 422], ou seja, nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências devemos pressupor, ao menos, uma realidade conceitual autônoma e independente, mediante a qual possamos configurar uma dada realidade material. Desse modo, os objetivos que se procuram alcançar com a construção de modelos matemáticos são os de 1) "*obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico*"; 2) "*influenciar a experimentação ou as observações posteriores*"; 3) "*promover o progresso e a compreensão conceituais*"; 4) "*auxiliar a axiomatização da situação física*"; e 5) "*incentivar a matemática e a arte de fazer modelos matemáticos*" [DAVIS(1982), p. 107-8].

3. Matemática Pura

Como um aspecto básico e distintivo da atividade matemática, diremos que a "*matemática pura é, essencialmente, a investigação abstrata e formal dos sistemas conceituais módulo uma lógica*" [Da COSTA(1997), p. 143], desenvolvida segundo os

[43] Cf. part. DAVIS(1982), p. 421 — "O modelo físico *não* corresponde exatamente ao objeto físico real, uma coisa observável em qualquer tempo ou local. É uma idealização ou uma simplificação. [...] A fim de desenvolver uma *teoria*, um ajuste com alguma aplicabilidade geral, o físico isola algumas características particulares como "variáveis de estado" e as usa para representar o objeto físico real infinitamente complexo. Desta maneira, ele cria um modelo físico – algo que já é uma simplificação da realidade física."

procedimentos do "*método axiomático*"[44], ou mais propriamente, nos moldes de uma "*linguagem com uma estrutura exatamente especificada*"[45]. Conceberemos a Matemática Pura, então, como dizendo respeito ao estudo matemático originário das indagações relativas aos sistemas conceituais, mediante uma disposição axiomática, que intentará tomar estes sistemas como campos próprios da Matemática ou como campos potencialmente matemáticos, na medida em que o propósito desse estudo assenta-se exclusivamente no desenvolvimento do próprio Conhecimento Matemático. Reconhecemos, assim, no que se refere à atividade matemática, a Matemática Pura como a *dimensão teórica* associada ao Conhecimento Matemático.

A noção de sistema conceitual será tratada, mais propriamente, no Capítulo II. É suficiente dizer que esta noção se presta para qualificar, basicamente, a natureza do Conhecimento Matemático, diferenciando-o de qualquer sistema material que puder ser correlativamente determinado, mediante uma concepção que pressuporá, para a sua adequada constituição, a distinção de três aspectos fundamentais. Assim, e na medida em que pretendemos que um sistema conceitual seja tomado como uma *realidade conceitual*[46], como uma realidade distinta e independente de uma *realidade material* ou de uma

---

[44] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 143 — "Se S for um sistema conceitual e L sua lógica subjacente, sem sabermos quais são suas figurações simbólicas primitivas e as regras de L, não é factível trabalhar-se, propriamente, com S. Ou seja, S deve, pelo menos em princípio, ser formulado axiomaticamente, em linguagem bem precisa, para que tenham sentido rigoroso as noções de demonstração, de definição etc."; e p. 34 — "A alma da matemática é o rigor e ele tem-se transformado ao longo da história. [...] Boa parte do rigor, atualmente está relacionada com a formulação explícita das suposições que servem de base às teorias matemáticas."

[45] Cf. part. TARSKI(1944), p. 19-20 — "Para especificar la estructura de un lenguaje debemos, por ejemplo, caracterizar inequívocamente la classe de las palabras o expresiones que hayan de considerarse *significativas* [*meaningful*]. En particular, debemos indicar todas las palabras que hayamos decidido usar sin definirlas, y que se llaman '*términos indefinidos* (o *primitivos*)'; y debemos dar las llamadas *reglas de definición* para introducir *términos definidos* o nuevos. Más aún, debemos establecer criterios para distinguir, dentro de la clase de expresiones, aquellas que llamaremos '*oraciones*' ['*sentences*']. Por último, debemos formular las condiciones en que puede *afirmarse* una oración del lenguaje. En particular, debemos indicar todos los *axiomas* (u *oraciones primitivas*), esto es, oraciones que hayamos decidido afirmar sin prueba; y debemos dar las llamadas *reglas de inferencia* (o *reglas de prueba*) mediante las cuales podemos deducir nuevas oraciones afirmadas a partir de otras oraciones afirmadas previamente. Los axiomas, así como las oraciones que se deducen de ellos mediante las reglas de inferencia, se denominan '*teoremas*' u '*oraciones comprobables*'."

[46] Cf. part. DAVIS(1982), p. 453 — "A matemática é uma realidade objetiva que não é nem subjetiva nem física. É uma realidade ideal (isto é, não física) que é objetiva (externa à consciência de qualquer pessoa)."; e part. SNAPPER(1979), p. 556 — "Mathematical activity always springs from a world of realities."; e p. 553 — "The word "realities" in the phrase "world of realities" does not signify that this world necessarily consists of objects in the physical world outside of us as in the case of three-dimensional Euclidean geometry. These objects may be mental constructs, as in the case of number theory."

realidade psicológica, conceberemos estes três aspectos fundamentais como sendo aqueles aspectos imperiosos e necessários não só para fundar um dado sistema conceitual, mas também para estabelecer uma "*equivalência*"[47] ou uma distinção entre dois ou mais sistemas conceituais. Um exemplo muito oportuno a considerar, posteriormente, será o da Geometria Euclidiana Plana.

O primeiro aspecto fundamental, o aspecto constitutivo de uma realidade conceitual, será nomeado *Axiomática*. Uma axiomática determina-se como uma disposição predicativa fundamental que, por meio de uma coleção de axiomas[48], estabelece, basicamente, a natureza de um dado subsistema conceitual, mediante a enunciação de alguns de seus objetos e de suas relações fundamentais[49], que serão tomados como necessários e suficientes para assegurar a reconstituição da realidade conceitual que se pretende ver assentada[50]. O segundo aspecto fundamental, o aspecto "*externo*"[51] de uma realidade conceitual, será denominado *Formalismo*[52]. Um formalismo assenta-se como uma disposição lingüística apropriada que, por meio de uma linguagem com uma estrutura

---

47 Cf. part. Da COSTA(1997), p. 217 — "As teorias comuns edificadas funcionalmente, dão origem numerosas vezes a mais de uma teoria axiomatizada, posto que não são rigorosa e perfeitamente caracterizadas. Ademais, a axiomatização pode produzir estruturas diferentes, embora matematicamente equivalentes (a geometria elementar possui diversas axiomáticas, todas equivalentes entre si)."

48 Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 123 — "La característica fundamental de la Axiomática es la elección y la clara enunciación de las proposiciones primitivas de una teoría, es decir, de los axiomas que introducen los términos indefinibles y establecen reglas de uso indemonstrables."

49 Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 773 — "Resulta, entonces, un sistema axiomático (*véase* AXIOMÁTICA) en el cual: 1) todos los conceptos de base y todas las relaciones de base estén completamente enumerados y se remita a ellos, mediante una definición, todo concepto ulterior; 2) se enumeren completamente los axiomas y de ellos se deduzcan todos los demás enunciados, conforme a las relaciones de base."

50 Cf. part. Da COSTA(1997), p. 71 — "Para se estudar uma teoria pelo método axiomático, procede-se assim: escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações [...]."; e p. 73 — "O método axiomático, portanto, se converte no instrumento por intermédio do qual o matemático puro edifica os seus sistemas hipotético-dedutivos."

51 Cf. part. Da COSTA(1997), p. 143 — "Externamente, confrontamo-nos com sistemas combinatórios de símbolos, que traduzem os sistemas conceituais; pois, sem combinatórias simbólicas (linguagens), não existe adiantamento matemático exeqüível."

52 Cf. part. HEGENBERG(1995), p. 86 — "Chama-se *formalização* a elaboração de um sistema logístico para o qual a interpretação pretendida transforme verdades (de um dado assunto sob exame) em teoremas do sistema."; part. ABBAGNANO(1961), p. 569 — "Con "Formalización de una teoría" se entiende el procedimiento mediante el qual se construye un sitema meramente sintáctico de símbolos *S*, regido por algunos axiomas [...]. Este sistema sintáctico puro, *S*, constituye una Formalización de una determinada teoría *T* [...], cuando *T* resulta ser una interpretación verdadera [...] de *S*."; e part. Da COSTA(1979), p. 22 — "O produto oriundo da formalização, isto é, o sistema grafomecânico obtido, denomina-se *formalismo* ou *sistema formal*."

exatamente especificada, estabelece, contingentemente, uma determinação operacional[53] capaz de suportar o subsistema conceitual que se pretende constituir, mediante uma lógica de base. E, por fim, o terceiro aspecto fundamental, o aspecto "*interno*"[54] de uma realidade conceitual, será denominado *Teoria*. Uma teoria constitui-se como uma disposição interpretativa necessária que, por meio de uma *estrutura de interpretação* ou de um *modelo*, estabelecerá, obrigatoriamente, uma destinação operacional para um dado subsistema conceitual, mediante a enunciação da totalidade dos objetos desse subsistema e de suas relações possíveis.

Tomando-se como exemplo a Geometria Euclidiana Plana, uma axiomática determinará a natureza desse sistema conceitual, mediante a enunciação de alguns de seus "*entes geométricos*" e de suas relações fundamentais — por exemplo, ponto, linha, figura etc.; e "*é possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer*", "*é possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio*" [EVES(1953), p. 180] etc. Um formalismo determinará uma disposição operacional necessária para a reconstituição desse sistema conceitual, mediante uma lógica de base — por exemplo, além de permitir a obtenção de todos os "*entes geométricos*" desejáveis, deverá assegurar suas possíveis relações conceituais e operacionais. E uma teoria determinará uma destinação operacional para esse sistema conceitual, mediante uma estrutura de interpretação — por exemplo, instituindo uma concepção, um sentido ou um significado para cada um de seus "*entes geométricos*" e para cada uma de suas relações conceituais ou operacionais. Assim, podemos afirmar que o *aspecto externo* — a linguagem — de um dado subsistema conceitual dirá respeito a uma espécie de fluência de representações simbólicas que virá distinguir e implementar o *aspecto constitutivo* — as noções de base — desse mesmo subsistema, de modo que seja possível àquele promover e sustentar a manifestação de um

---

[53] Cf. part. BACHELARD(1934), p. 117 — "[...] é o esforço matemático que forma o eixo da descoberta, é a expressão matemática que, sozinha, permite pensar o fenômeno. Há alguns anos, Langevin nos dizia: "O Cálculo Tensorial conhece melhor a física do que o próprio físico". O cálculo tensorial é verdadeiramente o quadro psicológico do pensamento relativista. É um instrumento matemático que cria a ciência física contemporânea como o microscópio cria a microbiologia. Não há conhecimentos novos sem o domínio deste instrumento matemático novo!"

[54] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 144 — "No entanto, os sistemas conceituais da matemática encerram, também, uma dimensão interna: eles possuem conteúdo conceitual abstrato, como interpretações e modelos, que lhes são intimamente associados e que, muitas vezes, constituem sua razão de ser. Em outras palavras, eles abrangem determinada dimensão semântica, interna."

mundo, de uma *realidade conceitual* potencialmente existente e tomada, então, como o *aspecto interno* — as concepções conceituais— desse mesmo subsistema conceitual.

Usamos a fórmula 'subsistema' e não 'sistema' porque ainda cremos que não seria possível dispor de uma axiomática capaz de abarcar a totalidade de um sistema conceitual, uma vez que "*a importância das conclusões de Gödel é de longo alcance, embora não tenha sido ainda plenamente compreendida. Tais conclusões mostram que a perspectiva de encontrar para todo sistema dedutivo (e, em particular, para um sistema em que se possa expressar o conjunto da aritmética) uma prova absoluta de consistência que satisfaça as exigências finitárias da proposta de Hilbert, embora não seja logicamente impossível é altamente improvável. Mostram também que há um número infinito de enunciados aritméticos verdadeiros que não se podem deduzir formalmente de qualquer conjunto dado de axiomas mediante um conjunto cerrado de regras de inferência. Segue-se que uma abordagem axiomática da teoria dos números, por exemplo, não é capaz de esgotar o domínio da verdade aritmética*" [NAGEL(1998), p. 87-8].

Posto isso, e de modo a evidenciar a peculiaridade dos procedimentos desenvolvidos na Matemática Pura, apelaremos para o campo de investigação denominado "*Semiótica Pura*"[55], a fim de estabelecer uma analogia entre os procedimentos destas duas disciplinas. Deste modo, no âmbito da "*moderna teoria da linguagem*", pode-se afirmar que na "*semiótica pura, consideramos linguagens ideais, estabelecidas mediante regras algo arbitrárias, e o tema desenvolve-se num plano abstrato. As reflexões desta ordem sempre começam pela construção de sistemas lingüísticos teóricos, com auxílio de axiomas ou postulados e definições convenientes; em seguida, procuramos as conseqüências de nossas suposições iniciais, interessando, principalmente, as de caráter semântico e sintático. Todos os resultados são hipotéticos e só valem, realmente, na medida em que se verificam as premissas assentadas na elaboração das hipóteses que serviram de ponto de partida*" [Da COSTA(1961), p. 52]. Assim, o aspecto básico que nos permitirá distinguir uma atividade matemática, como uma atividade desenvolvida, inequivocamente, no âmbito da Matemática Pura, será uma opção clara e fundamental pelos procedimentos do "*método*

[55] Cf. part. Da COSTA(1961), p. 58 — "A relação entre essas ciências seria, então, caracterizada assim: na matemática, construir-se-iam "linguagens objeto" ideais e estudar-se-iam suas propriedades "internas", enquanto que, na semiótica pura, investigar-se-ia a matemática como tal."; e part. Da COSTA(1979), p. 25 — "A semiótica pura tem por finalidade o estudo de linguagens ideais, construídas axiomaticamente."

axiomático"[56], ou mais propriamente, por uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, enquanto uma prerrogativa sobre a qual se assentará a propriedade[57] da construção conceitual pretendida. Intencionamos assentar com isso que a Matemática Pura diz respeito à atividade ou ao estudo matemáticos originários das indagações relativas aos sistemas conceituais.

Por fim, para corroborar a concepção que determina uma axiomática como uma elaboração fundamental e posterior à constituição de uma teoria[58], podemos dizer que, segundo ABBAGNANO(1961, p. 122), "*axiomatizar una teoría significa considerar en primer lugar, en el puesto de objetos o classes de objetos provistos de caracteres intuitivos,* ***símbolos*** *oportunos, cuyas reglas de uso son fijadas por las* ***relaciones*** *enunciadas por los* ***axiomas****. Ya que tales símbolos están privados de toda referencia intuitiva, la teoría formal así obtenida es susceptible de múltiples interpretaciones, que se denominan* ***modelos****. Pero aquí el modelo no es un arquetipo preexistente a la teoría; es incluso la teoría concreta original que al suministrar los datos para el esquema lógico de la axiomática, no es mas que uno de tales modelos. La carcterística de la Axiomática es la de prestarse a interpretaciones o realizaciones diferentes, de las cuales constituye la estructura lógica común*".

Por conseguinte, reconhecemos, dentre os aspectos básicos da atividade matemática, a Matemática Pura como a dimensão teórica associada ao Conhecimento Matemático, na medida em que essa atividade mesma não está interessada na consideração

---

[56] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 70, 71 — "Para se estudar uma teoria pelo método axiomático, procede-se assim: escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se, dessa maneira, uma axiomática material da teoria dada; deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. Procuram-se, então, as conseqüências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes. Estrutura-se, assim, o que se denomina uma *axiomática abstrata*."; e p. 72; e part. BLACKBURN(1994), p. 33 — "O método axiomático consiste em definir um conjunto de proposições deste tipo [axioma], assim como os processos de demonstração ou as regras de inferência que são permitidas, para derivar então os teorema que daí resultam."

[57] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 221 — "Com efeito, segundo se viu no capítulo sobre as ciências formais, a matemática se compõe de sistemas conceituais, erigidos módulo uma lógica; ela, por assim dizer, é hipotético-dedutiva, no sentido de que sua finalidade consiste em extrair conseqüências, de acordo com uma lógica fixa, de corpos de hipóteses ou de postulados dados. Então, para que se proceda de modo apropriado, torna-se necessário codificar axiomaticamente as hipóteses iniciais e a lógica empregada."

[58] Cf. part. BACHELARD(1934), p. 106 — "Como observa com muita justiça Juvet, "construindo-se uma axiomática, procura-se não dar a aparência de utilizar o que a ciência que se fundamenta já ensinou, mas verdadeiramente é só a propósito de coisas conhecidas que se estabelece uma axiomática"."

de qualquer aplicação "*prática*" ou na admissão de qualquer conotação "*concreta*" com relação às formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático.

4. Matemática Aplicada

Como um segundo aspecto básico e distintivo da atividade matemática, diremos que a "*applied mathematics is a disciplined activity which lies between the empirical sciences and pure mathematics*" [LIN(1976), p. 533], "*guided by the spirit of and belief in the* ***interdependence*** *of mathematics and the sciences*" [LIN(1974), p. 4] e desenvolvida segundo "*an attitude, an approach, a way of thinking*" [LIN(1976), p. 533]. Conceberemos a Matemática Aplicada, então, como dizendo respeito ao estudo matemático originário das indagações relativas aos sistemas materiais, mediante uma disposição interpretativa, que intentará oferecer um modelo matemático a estas indagações, a partir de uma interpretação possível, e cujo propósito assenta-se, basicamente, nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências. Reconhecemos, assim, no que se refere à atividade matemática, a Matemática Aplicada como a *dimensão prática* associada ao Conhecimento Matemático.

A noção de sistema material, que pretendemos desenvolver rapidamente, foi tomada a partir das noções de "*sistema*", "*processo*" e "*estrutura*" pertencentes à Matemática Aplicada[59]. Nessa medida, um "*sistema é qualquer coleção de elementos materiais que interagem e que têm alguma função ou propriedade comum capaz de individualizar-se em um todo*"; um "*processo é qualquer transformação de matéria, energia ou informação que ocorre num sistema ou por causa dele*"; e uma "*estrutura é o que há de permanente, estável ou duradouro, em um sistema, principalmente no que diz respeito às relações entre seus subsistemas*".

Um exemplo de um sistema material, que já se poderia dizer *clássico*, é o "*exemplo do relógio*". Assim, um relógio se constitui em um sistema material na medida em que se determina enquanto uma coleção de elementos materiais que interagem e que têm a função de "*marcar o tempo*", função essa que o distingue de outros sistemas e o

[59] Cf. part. PORTO Da SILVEIRA, José Francisco. Notas de aula da disciplina "Aplicações da Matemática às demais Ciências". Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre, 1985.

individualiza. Se este mesmo relógio fosse *desmontado*, ele não seria mais um sistema, pois não haveria interação entre os seus componentes que pudesse caracterizar alguma função ou propriedade individualizadora.

De modo análogo ao que foi feito com relação aos sistemas conceituais, e também para que possamos correlacionar um sistema conceitual e um sistema material, conceberemos um sistema material como sendo distinguido por três aspectos fundamentais, a partir dos quais poderemos ensejar a sua adequada constituição, mediante uma estrutura de interpretação derivada dos sistemas conceituais. Concebemos, então, um sistema material como uma *realidade material*, cujos objetos apresentam-se munidos de caracteres sensíveis, isto é, que podem ser percebidos pelos sentidos, e cujos aspectos fundamentais, que nos permitirão distingui-lo, podem ser notados como *Teoria*, *Método* e *Prática*.

Por conseguinte, uma teoria, enquanto o aspecto constitutivo, ideal e indicador de uma realidade material, determina-se como uma disposição interpretativa necessária que, por meio de uma estrutura de interpretação ou de um modelo, estabelece, basicamente, a natureza[60] de um subsistema material, mediante a enunciação de alguns de seus objetos e de suas relações fundamentais, que serão tomados como os pressupostos básicos e sustentadores da realidade material que se pretende ver assentada. Por sua vez, um método[61], enquanto o aspecto "*externo*", ideativo e ordenador de uma realidade material, assenta-se como uma disposição tecnológica[62] apropriada que, por meio de uma "*técnica*"[63], estabelece, contingentemente, uma determinação operacional capaz de suportar o subsistema material que se pretende constituir. E, por fim, uma prática, enquanto o

[60] Cf. part. BOHM(1980), p. 22 — "Assim, poder-se-ia dizer que uma teoria é, basicamente, uma forma de *insight* [ou introvisão], ou seja, um modo de olhar para o mundo, e não uma forma de *conhecimento* de como ele é."; e p. 24 — "Quando olhamos para o mundo por intermédio de nossos *insights* teóricos, o conhecimento factual que obtemos será, evidentemente, moldado e formado pelas nossas teorias."

[61] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 226 — "Naturalmente, por método, em geral, entende-se um modo de bem ordenarmos as diversas etapas para a consecução de determinada tarefa, *v.g.*, a de atingirmos o conhecimento."; part. FERREIRA(1975), p. 1128 — "Caminho pelo qual se atinge um objetivo. **2.** Programa que regula previamente uma série de operações que se devem realizar, apontando erros evitáveis, em vista de um resultado determinado."; e part. HOUAISS(2001), p. 1911 — "[...] de *metá* 'atrás, em seguida, através' *hodós* 'caminho'; [...]."

[62] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 31 — "A tecnologia ocupa-se de técnicas, isto é, de métodos, para a consecução de tarefas precisas, via de regra assentadas na ciência, quer pura, quer aplicada."; e part. FERREIRA(1975), p. 1656 — "Conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade [...]."

[63] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 1117-8 — "El sentido del término coincide con el sentido general de *arte* (*véase*): comprende todo conjunto de reglas aptas para dirigir eficazmente una actividad cualquiera."

aspecto "*interno*", ativo e destinador de uma realidade material, constitui-se como uma disposição operacional efetiva que, por meio de uma "*realização*"[64], estabelece, obrigatoriamente, uma condição possível para um subsistema material, mediante a enunciação da totalidade dos objetos desse subsistema e de suas relações possíveis.

No caso de nosso "*exemplo do relógio*", a teoria determinará a natureza desse sistema material, mediante a enunciação de alguns de seus "*elementos materiais*" e de suas relações fundamentais — por exemplo, mola, disco dentado, eixo, ponteiro e interação mecânica; o método determinará uma disposição operacional necessária para a reconstituição desse sistema material, mediante uma técnica — por exemplo, além de permitir a obtenção de todos os "*elementos materiais*" necessários, deverá assegurar a sua adequada "*montagem*"; e a prática determinará uma condição possível para esse sistema material, mediante uma realização efetiva — por exemplo, construindo-se o relógio *A*. Também podemos afirmar que o *aspecto ordenador* — o método — de um dado subsistema material dirá respeito a uma espécie de fluência operacional que virá distinguir e implementar o *aspecto constitutivo* — a teoria — desse mesmo subsistema, de modo que seja possível àquele promover e sustentar a manifestação de uma *realidade material* atualmente existente e tomada, então, como o *aspecto destinador* — a prática — desse mesmo subsistema material.

No "*exemplo do relógio*", o aspecto destinador desse sistema material serão as relações operacionais ou a interação entre os seus "*elementos materiais*", "*que têm alguma função ou propriedade comum capaz de individualiza-se em um todo*". Usamos, novamente, a fórmula 'subsistema', e não 'sistema', porque ainda cremos que não seria possível dispor de uma teoria capaz de abarcar a totalidade de um sistema material, já que, e além das considerações desenvolvidas acerca da noção de modelo, "*todas as leis e teorias até hoje formuladas têm-se mostrado unicamente capazes de captar, de maneira aproximada, aspectos do real ou, quiçá, tão-somente de nossa experiência*" [Da COSTA(1997), p. 160].

[64] Cf. part. BACHELARD(1940), p. 5, 19, 20, 21, 29, 34 e 35 — "O real não é mais do que uma realização. Parece até que um real só é instrutivo e seguro se tiver sido realizado, e sobretudo se tiver sido colocado na sua correta vizinhança, na sua ordem de criação progressiva."

Posto isso, e por outro lado, pode-se afirmar que há uma certa concordância tácita em se admitir que a Matemática teria se originado a partir de "*problemas práticos*"[65], como é o caso, em especial, da Geometria[66]. Admite-se, também, que alguns dos principais campos da Matemática, como a Análise e a Teoria das Probabilidades, teriam se originado a partir de algumas concepções matemáticas desenvolvidas para atender a alguns problemas práticos [BERNSTEIN(1979), p. 247-51]. Mas foi somente a partir do século XIX [BOYER(1968), p. 1] ou início do século XX [BERNSTEIN(1979), p. 246] que esse "*fluxo*" teria sido invertido[67], as ciências empíricas passam a buscar na Matemática modelos que pudessem servir de base para as suas teorias. Por exemplo, foi o que se deu com Albert EINSTEIN, que "*looking for a basis for his general theory of relativity, found it in the geometry of Riemann*" [BERNSTEIN(1979), p. 246], e com Werner HEISENBERG, que tomou a concepção matemática de "*matriz*" como "*the tool he needed to describe his conception of atomic structure-so-called matrix mechanics*" [BERNSTEIN(1979), p. 250]. Desse modo, surge a expressão "*matemática pura*", na medida em que se tornava inegável que "*an increasing portion of mathematics was developed in a manner independent of theoretical sciences*" [LIN(1974), p. 4]. Por outro lado, a Matemática Aplicada[68] se apresenta como a disciplina que estava ligada diretamente ao estudo dos problemas

[65] Cf. part. BOYER(1968), p. 1 — "Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem, e foi somente no século dezenove que a matemática pura libertou-se das limitações sugeridas por observações da natureza. É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem [...]."; e part. LIN(1974), p. 4 — "Mathematics began with simple practical problems such as division of a flock of animals among family members (number theory) and the measurement of land area (geometry). Gradually, elementary ideas were organized, and they evolved into logical structures."

[66] Cf. part. BERNSTEIN(1979), p. 246 — "As its name indicates, it began as an empirical science, that of land measurement by the Egyptians."

[67] Cf. part. AMOROSO COSTA(1981), p. 328 — "A fecundidade prática da matemática moderna data do dia em que os fundadores das geometrias não-euclidianas abandonaram resolutamente o modelo que lhes indicara a experiência ingênua."

[68] Cf. part. DAVIS(1982), p. 112 — "A atividade em que a matemática é aplicável, fora de seus próprios interesses, é geralmente chamada de *matemática aplicada*. A matemática aplicada é automaticamente interdisciplinar, e, teoricamente, deveria ser exercida por alguém cujos interesses principais não fossem a matemática. Se o assunto interdisciplinar for, por exemplo, a física, pode ser difícil saber o que classificar como matemática aplicada ou física teórica."; e part. BELL(1940), p. 170 — "Las modernas matemáticas aplicadas se originaron en la teoría de la gravitacíon universal que Newton desarrolló en sus *Principia*. Antes de Newton la astronomia era puramente descriptiva."

científicos, uma vez que ela era guiada pela crença na interdependência[69] da Matemática e da Ciência, e, assim, caberia a ela dar prioridade àquelas partes da Matemática que enfatizassem essa interdependência. Por exemplo, segundo LIN, atribui-se à crença de que "*there is a basic harmony and order in nature*" [LIN(1974), p. 5] o suposto "*intimate relationship between mathematics and the physical sciences*" [LIN(1974), p. 4], e, por conseguinte, que "*the description of natural phenomena can be organized by the logical discipline of mathematics*" [LIN(1974), p. 5].

Nessa medida, e de modo a evidenciar essa espécie de ligação entre a Matemática e as Ciências Empíricas, ensejada por intermédio[70] da Matemática Aplicada, podemos dizer que, e de acordo com BELL(1940, p. 397), "*lo más difícil en qualquier matemática aplicada es privar a un problema científico tecnológico sólo de suficientes detalhes para ponerle al alcance de las capacidades de matemáticos hábiles, pero que conserve todavía una proporción suficiente del problema real para hacer que la solución no sea absolutamente inaplicable a la práctica.* [...] *El problema de una importancia capital de decidir qué conceptos deberán hacerse centrales en la descripción matemática de los fenómenos naturales, tiene carácter análogo y para su solución afortunada exige la misma combinación rara de visión científica y cálculo matemático*".

Conseqüentemente, podemos afirmar que a Matemática Aplicada desenvolve-se segundo uma atitude, uma abordagem e um modo de pensamento, observando que a atenção do matemático aplicado estaria voltada para os "*conceitos científicos e para os fenômenos científicos*". Nesse sentido, a Matemática Aplicada viria para elucidar tais conceitos e descrever estes fenômenos em termos matemáticos, tendo em vista, prioritariamente, extrair da Matemática as implicações e as conclusões que fossem

[69] Cf. part. LIN(1974), p. 4 — "Historically, the development of mathematics and physics had a very close connection. Classical examples may be found in the work of Newton (see Chapter 2), Gauss, Euler, Cauchy, and others."; e part. BELL(1940), p. 169 — "El balancete histórico indica, como más adelante se verá en detalhe, que la ciencia y las matemáticas modernas están tan íntimamente relacionadas que ninguna debe nada a la outra, y que ambas toman libremente lo que necessitan de la outra pagando sus deudas com creces."

[70] Cf. part. LIN(1974), p. 31 — "I ... describe applied mathematics as the bridge connecting pure mathematics with science and technology. I have deliberately described this bridge as *connecting* two areas of activity rather than *leading* from one to the other, because the bridge carries two-way traffic. Its importance to science and technology is obvious, but it is not less important to pure mathematics, which would be poorer without the stimuli coming from the applications. [W. Prager, "Introductory Remarks" in the special issue, "Symposium on the Future of Applied Mathematics", 1972]."

corretas para uma posterior "*verificação empírica*"[71]. Ademais, "*in common with the pure mathematician, the applied mathematician is interested in the stimulation of the development of new mathematics (see [2]), – but with primary emphasis on those aspects* ***directly*** *or at least very strongly motivated by scientific problems. In common with the theoretical scientists, the applied mathematician seeks knowledge and understanding of scientific facts and real world phenomena through the use of mathematical methods*" [LIN(1976), p. 533]. Para tanto, e com efeito, "*antes de a matemática pura ser aplicada à experiência sensorial, deve ser primeiramente estendida pela introdução de novos conceitos e postulados que rejam seu uso. De acordo com Russell, a matemática pura é estendida à dinâmica racional pela introdução de conceitos tais como "massa", "velocidade" etc. e novos postulados correspondentes*" [KÖRNER(1960), p. 184][72].

Resta-nos, então, evidenciar em que se constituí essa atitude ou esse modo de pensamento que viria qualificar a atividade matemática denominada Matemática Aplicada. Relativamente aos problemas científicos, a Matemática Aplicada desenvolve-se basicamente a partir de três aspectos: "*formulação*", "*solução*" e "*interpretação*". Segundo LIN(1976, p. 534) e LIN(1974, p. 5), o primeiro aspecto da atividade do matemático aplicado trataria da (1) formulação de problemas e conceitos científicos em termos matemáticos; o segundo aspecto, da (2) solução do problema matemático resultante; e o terceiro, da (3) interpretação da solução e de sua verificação empírica, ou seja, da discussão, interpretação e avaliação dos resultados de sua análise, incluindo a feitura de predições específicas. Admite-se, também, um quarto[73] aspecto nessa atividade, segundo LIN, afirmando-se que "*the solution of specific problems often serves merely as a focus and an aid in reaching a deeper understanding*" [LIN(1976), p. 534-5], e que o objetivo final do esforço de um matemático aplicado coloca-se, então, na (4) "*creation of ideas, concepts,*

[71] Cf. part. LIN(1974), p. 5-6; e part. KÖRNER(1960), p. 183-4 — "O procedimento da física teórica e da matemática aplicada em geral é *substituir* proposições empíricas por matemáticas, deduzir conseqüências matemáticas das premissas matemáticas e substituir algumas dessas conseqüências por proposições empíricas."

[72] Cf. part. AMOROSO COSTA(1981), p. 329 — "Assim, por exemplo, para que o sistema de conceitos da geometria euclidiana pura se aplique aos objetos físicos que nós chamamos corpos sólidos ou praticamente rígidos, é preciso acrescentar uma proposição como a seguinte (A. Einstein, "Discurso na Academia das Ciências de Berlim, 27/01/1921". La Géometrie et L'Expérience, p. 6.): "Os corpos sólidos se comportam, relativamente às suas possibilidades de posição, como corpos de três dimensões da geometria euclidiana". [...] Mas a geometria assim completada é uma ciência física."

[73] Cf. part. LIN(1974), p. 7 — "There are those who regard this fourth part as the *only* applied *mathematics* and consider the first three parts as science, not mathematics."

and methods that are of basic significance and general applicability to the subject in question, including the formulation of general principles" [LIN(1976), p. 535], ou seja, na "*generation of scientifically relevant new mathematics through creation, generalization, abstraction, and axiomatic formulation*" [LIN(1974), p. 7], o que poderia levar o matemático aplicado, como resultado desse mesmo esforço, à (5) criação de novas idéias e teorias matemáticas, o que poderia, também, ser tomado como um quinto aspecto de sua atividade.

Por outro lado, para acentuar que a Matemática Aplicada é uma atividade que correlaciona a Matemática e as Ciências Empíricas, poder-se-ia reescrever estes quatro aspectos, a partir das considerações de KÖRNER(1960, p. 185), dizendo que "*a "aplicação" à percepção da matemática pura, que é logicamente dissociada da percepção, consiste numa atividade mais ou menos estritamente regulada que envolve* (i) *a substituição de conceitos e proposições empíricos por matemáticos,* (ii) *a dedução de conseqüências a partir de premissas matemáticas assim obtidas e* (iii) *a substituição de algumas das proposições matemáticas deduzidas por proposições empíricas*", às quais também poderia ser acrescida "(iv) *a confirmação experimental das últimas proposições mencionadas*", embora possamos concordar que "*isso seria tarefa mais para cientistas experimentais que para teóricos*". Poderíamos, então, reescrever a fase (i) como dizendo respeito, inicialmente, à idealização de um modelo físico [DAVIS(1982), p. 421], e, posteriormente, à substituição desse modelo físico por um modelo matemático [DAVIS(1982), p. 107] correspondente. Assim, o aspecto básico que nos permitirá distinguir uma atividade matemática, como uma atividade desenvolvida, inequivocamente, no âmbito da Matemática Aplicada, será uma opção clara e fundamental pelo "*valor de predição ou de explicação*"[74] das formulações matemáticas com relação a um problema científico, enquanto uma prerrogativa sobre a qual se assentará a propriedade da construção conceitual pretendida. Intencionamos assentar com isso que a Matemática Aplicada diz respeito à atividade ou ao estudo matemáticos originários das indagações relativas aos sistemas materiais.

[74] Cf. part. DAVIS(1982), p. 421 — "Em muitos casos, a equação diferencial cuja solução ele calcula é proposta como modelo de alguma situação física. Então, naturalmente, o teste definitivo de sua utilidade ou validade provém de seu valor de predição ou de explicação daquele problema físico."

Por fim, para evidenciar a peculiaridade da atividade desenvolvida pelo matemático aplicado, em um claro contraste[75] à do matemático puro, gostaríamos de notar a ênfase dada por aquele, quando do desenvolvimento de sua atividade. Por exemplo, a motivação básica do matemático aplicado é a da resolução de algum problema científico, originado em algum sistema material, em termos matemáticos. Nessa medida, na segunda fase de sua atividade descrita acima, a da resolução do problema matemático correspondente, sua ênfase primária estará dirigida para a solução do problema. Para tanto, ele usará algum tipo de "*raciocínio científico heurístico*", sendo muito mais receptivo a uma solução que considere a introdução de aproximações ou de argumentos tomados como plausíveis e não sendo rigorosamente dedutivo ou interessado somente no poder da abstração[76]. Nas fases primeira e terceira, a da formulação do problema em termos matemáticos e a da sua interpretação e possível verificação empíricas[77], respectivamente, o matemático aplicado aproximar-se-á mais das práticas de um cientista teórico, e a esse respeito, "***the construction of an idealized mathematical model is indeed the most important and the most difficult phase***, *especially in a new field of application of mathematics*" [LIN(1976), p. 535-6].

Em conseqüência, e como já foi observado anteriormente, na Subseção 2, o estudo de um modelo matemático[78] será desenvolvido tanto com uma "*matemática tão rigorosa quanto possível*" quanto com uma "*matemática não-rigorosa*", com raciocínios plausíveis, com aproximações, com métodos baseados na experiência geral e sem demonstração rigorosa, sempre que necessário [DAVIS(1982), p. 418-22].

E, com efeito, examinemos rapidamente uma situação que seria típica ou "*quase-padrão*" na Matemática Aplicada, segundo DAVIS(1982, p. 418-22).

[75] Cf. part. LIN(1976), p. 535 — "*The basis difference in motivation between pure and applied mathematicians* is reflected in the habits and practices of their activities. Although the applied mathematician understands and appreciates the nature of a rigorous demonstration, he cannot be made inactive by these considerations."

[76] Cf. part. LIN(1976), p. 535 — "In particular, when he is engaged in the creation of new mathematics, the applied mathematician should follow the practices (including the degree of rigor) used in pure mathematics in the *formulation* of his results. Because of his background, heuristic reasoning leading to the final form of the theory will doubtlessly be emphasized."

[77] Cf. part. LIN(1976), p. 536 — "With complementary theoretical and empirical efforts, a deeper and more penetrating understanding may be achieved."

[78] Cf. part. LIN(1976), p. 536 — "It usually requires a comprehensive knowledge and a deep understanding of the empirical facts related to the particular phenomenon under consideration as well as penetrating insight and mature judgement."

Consideraremos uma situação em que um matemático aplicado esteja interessado na solução de uma certa equação diferencial. Ele sabe que a solução de sua equação diferencial, a função $u(t)$, "*existe*", uma vez que os "*teoremas de existência*" padrão de equações diferenciais incluem o seu problema. Assim, ele passará a tentar descobrir tudo o que puder a seu respeito, e, para isso, ele usará métodos ou teoremas matemáticos, como a "*série de Taylor*" e como os teoremas de convergência para a solução $u(t)$, quando t for "*pequeno*". Nessa medida, ele "*é guiado pelo senso comum e não pela lógica rigorosa*", já que, não dispondo de nenhum método que lhe mostre quantos termos da série ele deverá tomar, a fim de obter a exatidão desejada, e não podendo demonstrar que os termos de ordem superior da série que forem desprezados são, de fato, negligenciáveis, ele deverá parar, eventualmente, em algum momento, e, assim, "*na falta de um raciocínio completamente rigoroso, usa um raciocínio plausível para tomar a decisão*".

No caso em que t tenha um "*tamanho moderado*" — "*nem muito pequeno nem muito grande*" — ele calculará $u(t)$ por meio de um processo de recursão que substituirá a equação diferencial por uma sucessão de equações algébricas, e, para isso, ele usará um algoritmo computacional. No entanto, neste caso, também, não há uma demonstração lógica rigorosa que ateste que os números obtidos por intermédio de um computador sejam corretos. E, finalmente, para a solução $u(t)$, fazendo t tender para o infinito, é freqüentemente possível usar métodos especiais de cálculo ditos "*métodos assintóticos*", que aumentam a exatidão à medida que t se torna maior. Neste caso também, mesmo que algumas vezes estes métodos possam ser justificados rigorosamente, eles são freqüentemente usados na ausência de demonstrações rigorosas, tomando-se como referência a "*experiência geral*" e observando-se os resultados para ver se "*parecem razoáveis*". Portanto, e nos casos em que a equação diferencial, cuja solução o matemático aplicado calcula, é proposta como um "*modelo de alguma situação física*", "*naturalmente, o teste definitivo de sua utilidade ou validade provém de seu valor de predição ou de explicação daquele problema físico*".

Por conseguinte, reconhecemos, dentre os aspectos básicos da atividade matemática, a Matemática Aplicada como a dimensão prática associada ao Conhecimento Matemático, na medida em que essa atividade mesma, quando da indisponibilidade de métodos ou teoremas matemáticos que legitimem seus resultados, pode basear-se no uso de testes empíricos ou no valor de predição ou de explicação de seus resultados para assegurar a validade de seus procedimentos[79], relativamente às formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático.

5. Aplicações da Matemática

Parece-nos oportuno considerar, nesta seção, a abrangência da noção de "*aplicações da Matemática*", uma vez que, e contrariamente ao que é tacitamente acordado, algumas referências genéricas, tais como "*situações práticas*" geradoras de concepções matemáticas, "*aplicações ao cotidiano*" de determinados conceitos matemáticos e "*ligação da Matemática à realidade*", podem significar mais uma inclinação particular para um dado tipo de atividade matemática do que um uso efetivo da Matemática ao nível da "*utilidade ordinária*", como veremos adiante. Assim, tendo em atenção que a noção de *aplicação* [DAVIS(1982), p. 108-16] pode referir-se ao emprego ou ao uso de algumas concepções de um dado conhecimento, enquanto um expediente metodológico destinado à solução de algum problema, no âmbito desse mesmo conhecimento ou no âmbito de outros conhecimentos[80], distinguiremos, então, e rapidamente, três aspectos específicos e atinentes às aplicações da Matemática, apontando-os como 1) aplicações da Matemática *no âmbito da própria Matemática*, 2) aplicações da Matemática *no âmbito das demais Ciências* e 3) aplicações da Matemática ao nível da "*utilidade ordinária*" [DAVIS(1982), p. 112-3]. Diremos, também, que a noção tácita de *aplicação*, tomada como a "*execução prática de uma teoria ou disciplina*", a exemplo de "*a **aplicação** do pensamento de Einstein*" [FERREIRA(1975), p. 143], não será adotada para qualificar, indistintamente, a noção de

[79] Cf. part. LIN(1978), p. 555 — "Another example which shows the difference in character between applied mathematics and pure mathematics is numerical analysis and machine computation. Since one cannot analytically solve the partial differential equations necessary for numerical weather forecasting, one has to do it by numerical methods. Furthermore, one does not have existence theorems for these systems of partial differential equations; one cannot prove that the process converges in the asymptotic limit of infinitesimal steps. But one must continue with a confidence based on the use of empirical tests for assuring the validity of the procedures."

[80] Cf. part. SIMMONS(1985), p. 146 — "Nossas primeiras aplicações baseiam-se na interpretação da derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto. O objetivo desse trabalho é dar condições para usarmos a derivada como ferramenta com o fim de descobrir rapidamente os aspectos mais importantes de uma função e esboçar seu gráfico. A arte de esboçar gráficos é essencial nas ciências físicas. É também uma das habilidades mais úteis que o Cálculo pode fornecer para os que necessitam da Matemática em seus estudos de Economia, Biologia ou Psicologia."

aplicações da Matemática, uma vez que aquela noção é insuficiente para abranger todos os aspectos desta, além de somente presumir, implicitamente, uma correlação entre *teoria* e *prática*.

Ademais, e para podermos avaliar com mais propriedade em que medida as aplicações da Matemática se manifestam no Ensino de Matemática, será necessário acrescentarmos mais um aspecto atinente às aplicações da Matemática, aos três já apontados acima, a saber, 4) aplicações da Matemática *ao nível do Ensino de Matemática*.

5.1. Aplicações da Matemática no âmbito da própria Matemática

Pretendemos apontar com a denominação '*aplicações da Matemática no âmbito da própria Matemática*' para um tipo de atividade matemática cujo interesse básico, sobre qualquer formulação matemática, assenta-se na propriedade de sua operacionalização no âmbito da própria Matemática, sugerindo que a aceitabilidade das concepções matemáticas coloca-se na fecundidade que estas mesmas concepções possam apresentar quando do enfrentamento de determinados problemas emergidos no âmbito do próprio Conhecimento Matemático. Assim, e por exemplo, podemos nos referir às aplicações da "*derivada de uma função*", lembrando-nos de que sua concepção pode ser associada ao "*problema das tangentes*": "*o conceito de derivada foi introduzido no século XVII por Fermat, Newton e Leibniz, e foi o coroamento de uma grande quantidade de pesquisas para determinar a tangente a uma curva qualquer em um dos seus pontos*" [CATUNDA(1973), p. 31]. Com efeito, e a partir destas considerações, interessa-nos evidenciar, basicamente, que a noção de *aplicações da Matemática* abrange também as aplicações[81] de qualquer concepção matemática no interior do próprio Conhecimento Matemático, as quais, observadas sob a óptica da atividade matemática, atendem a uma abordagem "*teórica*" associada à Matemática e filiam-se à Matemática Pura.

---

[81] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 119 — "A teoria dos modelos (ou semântica matemática) originou-se das investigações tarskianas sobre o conceito de verdade e converteu-se em uma das partes da lógica mais fecundas. Possui aplicações não apenas nas disciplinas formais, mas, também, na teoria da ciência e em diversas ciências empíricas."; e part. DAVIS(1982), p. 110 — "Uma aplicação da teoria A à teoria B, na matemática, significa então que os materiais, a estrutura, as técnicas, as percepções de A são usados para iluminar ou deduzir inferências sobre os materiais e as estruturas de B. Se uma parte é usada ou está relacionada com uma outra parte da matemática, então, este tipo de aplicação é freqüentemente chamado "puro"."

5.2. Aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências

Apontaremos com a denominação '*aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências*' para um tipo de atividade matemática cujo interesse básico, sobre qualquer formulação matemática, assenta-se na sua capacidade elucidativa e na sua propriedade descritiva de conceitos e de fenômenos científicos, respectivamente, no âmbito das demais Ciências, sugerindo que a aceitabilidade das concepções matemáticas coloca-se no seu "*valor de predição ou de explicação*" com relação a um problema científico emergido no âmbito de outra Ciência, para uma posterior "*verificação empírica*". Desse modo, e por exemplo, podemos observar que "*Curry sustenta que "a aceitabilidade da análise clássica para os propósitos da aplicação na física é [...] estabelecida sobre bases pragmáticas, e nem a questão da evidência intuitiva nem a de uma prova de consistência têm algo a ver com esse assunto. O critério básico de aceitabilidade é empírico; e as considerações mais importantes concernem à adequação e à simplicidade*" " [KÖRNER(1960), p. 89]. Por conseguinte, interessa-nos acentuar com estas considerações que as aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências[82], observadas sob a óptica da atividade matemática, atendem a uma abordagem "*prática*" associada à Matemática e filiam-se à Matemática Aplicada.

5.3. Aplicações da Matemática ao nível da Utilidade Ordinária

A intenção de reservarmos um terceiro aspecto atinente às aplicações da Matemática, apontando-o como *aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária*, deve-se à necessidade de considerarmos o emprego ou o uso de algumas concepções matemáticas pelo "*homem comum*", em contraposição ao emprego ou ao uso delas pelo "*homem de ofício*", a exemplo dos dois aspectos anteriormente tratados. Segundo DAVIS(1982, p. 112-3), "*convencionaremos chamar a utilidade que atinge o homem comum de* ***utilidade ordinária*** *(Isso supõe que sabemos em que o homem comum está*

[82] Cf. part. DAVIS(1982), p. 112 — "A atividade em que a matemática é aplicável, fora de seus próprios interesses, é geralmente chamada de *matemática aplicada*. A matemática aplicada é automaticamente interdisciplinar, e, teoricamente, deveria ser exercida por alguém cujos interesses principais não fossem a matemática. Se o assunto interdisciplinar for, por exemplo, a física, pode ser difícil saber o que classificar como matemática aplicada ou física teórica."

realmente interessado, o que é mais uma vez uma hipótese questionável.). [...] Mas como a vida é constituída, em grande parte, pelas atividades de fazer e de consumir, comprar, vender e trocar, deveríamos ter uma percepção tão clara quanto possível da relação de nosso assunto com estas atividades básicas". No entanto, não nos interessará considerar como as aplicações da Matemática "*de um nível mais abstrato*"[83] afetam o "*homem comum*" ou chegam até ele, mas sim quais seriam as aplicações da Matemática ao nível da *utilidade ordinária*[84].

Assim, intencionamos apontar com a denominação '*aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária*' para um tipo de atividade matemática cujo interesse básico, sobre qualquer formulação matemática, assenta-se na propriedade de sua operacionalização no âmbito de problemas de "*contagens*", "*medidas*" e "*transações comerciais*", enfrentados pelo "*homem comum*", sugerindo que a aceitabilidade das concepções matemáticas coloca-se na fecundidade que estas mesmas concepções possam apresentar quando do enfrentamento de determinados problemas emergidos no âmbito de algumas atividades cotidianas. Por conseguinte, podemos dizer também que as aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária, observadas sob a óptica da atividade matemática, atendem a uma abordagem "*prática*" associada à Matemática, mas filiam-se a uma "*matemática informal*".

---

[83] Cf. part. DAVIS(1982), p. 114 — "Em um livro típico de matemática aplicada encontra-se, por exemplo, uma discussão do problema de Laplace para regiões bidimensionais. Ele tem aplicações importantes, segundo o autor, na eletrodinâmica e na hidrodinâmica. Pode ser, mas gostaríamos de ver as aplicações indicadas precisamente, ao nível da utilidade ordinária, em vez de contentar-nos com potencialidades devotas."

[84] Cf. part. DAVIS(1982), p. 113 — "Que aplicações da matemática têm utilidade ordinária? [...] Alguns exemplos de utilidade ordinária são tão claros quanto o dia. Quando o caixa no supermercado totaliza os preços das compras de um carrinho, ou quando, em um escritório de arquitetura, chega-se ao preço de um projeto, temos uma aplicação clara da matemática ao nível da utilidade ordinária. Estes cálculos podem ser triviais e podem ser efetuados por pessoas matematicamente não sofisticadas; no entanto, são matemática, e os cálculos relativos a contagens, medidas e preços constituem a grande maioria da operações matemáticas ao nível da utilidade ordinária. Quando passamos a considerar a matemática superior, tais aplicações são mais difíceis de observar e verificar."

5.4. Aplicações da Matemática ao nível do Ensino de Matemática

A escolha e a determinação deste quarto aspecto atinente às aplicações da Matemática, apontando-o como *aplicações da Matemática ao nível do Ensino de Matemática*, deve-se à necessidade de considerarmos o emprego ou o uso de algumas concepções matemáticas que são tratadas especialmente nos livros didáticos. Nessa medida, e tão-somente, ser-nos-á possível dar algum sentido àquelas afirmações que pretendem relacionar as aplicações da Matemática a "*situações práticas*" ou a "*situações problema*", ao "*cotidiano*" ou à "*realidade*" dos alunos, particularmente no que diz respeito à Educação Matemática. Por via de regra, nestas aplicações da Matemática, faz-se um apelo a "*situações problema*" que são tomadas a partir de "*estados de coisas*" ou a partir de circunstâncias que têm como referência atividades ou práticas sociais, que envolvam contagem, medida e transações comerciais, ou que têm como referência fenômenos naturais ou fenômenos sociais, que envolvam o uso de concepções ou de práticas de outras Ciências.

No entanto, a consideração destas "*situações problema*", que são apresentadas nos livros didáticos lembrando-nos de "*estados de coisas*" ou de "*situações físicas*", limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente, sem qualquer referência ao "*modelo físico*" idealizado a partir dessa mesma "*situação física*", ou mesmo sem qualquer referência a uma "*estrutura de interpretação*", cujo universo ou domínio de base é idealizado a partir de um sistema material determinado sobre esta mesma situação. Assim, presumem-se um modelo físico, cujos valores das "*variáveis de estado*" são apresentados previamente, e um modelo matemático correlato, de tal modo que as soluções para os problemas matemáticos, que substituiriam os problemas empíricos descritos nesse suposto modelo físico, são derivadas em termos estritamente formais, determinando-se mais como uma ilustração das possibilidades de aplicação da Matemática do que como uma efetiva aplicação além de seu próprio campo de ordem, que tratasse, também, da introdução de "*aproximações não-rigorosas*" ou de "*verificações empíricas*", de "*predições*" ou de "*explicações*", por exemplo.

Assim, intencionamos apontar com a denominação '*aplicações da Matemática ao nível do Ensino de Matemática*' para um tipo de atividade matemática cujo interesse básico, sobre qualquer formulação matemática, assenta-se na propriedade de sua operacionalização no âmbito de problemas tomados ao nível da utilidade ordinária ou no âmbito de problemas tomados das demais Ciências, sugerindo que a aceitabilidade das concepções matemáticas coloca-se na fecundidade que estas mesmas concepções possam apresentar quando do enfrentamento de determinados problemas, originários de algumas atividades cotidianas ou de algumas atividades relacionadas a outras Ciências, no âmbito de Ensino de Matemática. Por conseguinte, podemos dizer também que as aplicações da Matemática ao nível do Ensino de Matemática, observadas sob a óptica da atividade matemática, atendem a uma abordagem "*prática*" associada à Matemática, mas filiam-se a uma "*matemática escolar*".

A tempo, não desconhecemos que há problemas que são tomados no âmbito da própria Matemática. Para estes, podemos dizer que as aplicações da Matemática ao nível do Ensino de Matemática atendem a uma abordagem "*teórica*" associada à Matemática, mas filiam-se a uma "*matemática escolar*".

6. As Abordagens Teórica e Prática da Matemática nos Livros Didáticos

Examinaremos, nesta seção, alguns livros didáticos destinados ao Ensino Médio. A escolha destes livros foi determinada pelo tipo de abordagem que é apresentada por eles com relação aos conteúdos matemáticos tratados. O tipo de abordagem que nos interessava considerar foi qualificado em dois grupos, a saber, uma abordagem *teórica* e uma abordagem *prática* com relação à Matemática. A distinção entre as abordagens teórica e prática foi estabelecida a partir das concepções de Matemática Pura e de Matemática Aplicada desenvolvidas nas Seções 3 e 4, respectivamente. Assim, segundo o que foi considerado na Seção 3, podemos dizer que um livro didático será qualificado como apresentando uma abordagem teórica da Matemática quando a sua ênfase fundamental tiver em atenção a promoção ou o desenvolvimento do próprio Conhecimento Matemático, numa disposição metodológica tomada nos moldes de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada e concebida como uma prerrogativa sobre o qual se assentará a propriedade da construção conceitual pretendida. Nessa medida, podemos dizer também que em uma abordagem teórica da Matemática, num livro didático, não se estará interessado na consideração de qualquer *aplicação prática* ou na admissão de qualquer conotação "*concreta*" com relação às formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático, embora eventuais aplicações práticas da Matemática, em exemplos ou em exercícios propostos, possam ser consideradas. E, de acordo com o que foi considerado na Seção 4, podemos afirmar que um livro didático será qualificado como apresentando uma abordagem prática da Matemática quando a sua ênfase fundamental tiver em atenção a promoção ou o desenvolvimento das aplicações do Conhecimento Matemático a outras Ciências, numa disposição metodológica tomada segundo o "*valor de predição ou de explicação*" das formulações matemáticas, focalizadas com relação aos problemas científicos, e concebida enquanto uma prerrogativa sobre a qual se assentará a propriedade da construção conceitual pretendida. Desse modo, podemos afirmar também que em uma abordagem prática da Matemática, num livro didático, quando da indisponibilidade de métodos ou teoremas matemáticos que legitimem os resultados das resoluções dos problemas matemáticos correspondentes, poder-se-á usar "*testes empíricos*", além do valor de predição ou de explicação desses resultados, para assegurar a validade dos procedimentos ensejados nessa abordagem.

Posteriormente, pretenderemos contrastar esses mesmos livros didáticos mediante um outro exame que será desenvolvido a partir de um confronto entre as abordagens neles apresentadas, de modo que possamos angariar alguns subsídios para referendar alguns dos aspectos pertinentes à contraposição entre Matemática Pura e Matemática Aplicada, que será considerada em uma seção posterior. Ademais, o exame destas duas abordagens, apresentadas nestes mesmos livros, nos ajudará a enfrentar o problema de investigação deste trabalho, isto é, o de determinar se haveria alguma procedência em se colocar a dimensão teórica e a dimensão prática como campos que pudessem ser distinguidos autônoma e independentemente, no que diz respeito à concepção ou à apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático.

A escolha dos livros examinados manteve em atenção algum indicativo, contido nos próprios livros, que pudesse colocá-los como apresentando-se numa abordagem teórica ou num abordagem prática para os conteúdos matemáticos neles propostos. O indicativo eminente, que nos permitiu qualificar o conteúdo da coleção de livros de Omar CATUNDA como pertencente a uma abordagem teórica da Matemática, foi a intenção de seus autores em apresentar um livro que pudesse atender a um programa que teria como "*objetivo principal, no que diz respeito à Matemática, preencher algumas lacunas de conhecimento e dar a orientação que será usada no estudo da Matemática superior*" [CATUNDA(1971), p. vi]. Por outro lado, o indicativo evidente, que nos permitiu qualificar o conteúdo da coleção de livros de Fernando TROTTA, Luiz M. P. IMENES e José JAKUBOVIC, como pertencente a uma abordagem prática da Matemática, foi o próprio título desses mesmos livros, a saber, "*Matemática Aplicada*", além da alegada preocupação dos autores com as "*situações práticas*", da atestada ênfase dada às "*aplicações destes assuntos ao cotidiano*" e, também, da alegada "*preocupação de ligar a Matemática à realidade*" [TROTTA(1980), p. 339].

Intentaremos desenvolver, então, uma análise acerca dos conteúdos matemáticos apresentados nesses dois conjuntos de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, observando detidamente a ênfase dada pelos seus autores aos conteúdos destes livros e apontando, especificamente, para a apresentação de suas correspondentes abordagens conceituais, definições[85] dadas e exemplos ou exercícios propostos. Correlativamente, ou sempre que possível, buscaremos destacar ou distinguir, nesses conteúdos, alguns aspectos que poderiam qualificá-los como estando associados a uma abordagem teórica ou a uma abordagem prática da Matemática, ressaltando-os como um abono ou como uma contradição às presumíveis intenções dos autores.

Em uma última nota, devemos dizer, no entanto, que também seria possível considerar uma concepção de "*Matemática Informal*" para qualificar uma abordagem prática da Matemática, em alguns livros didáticos, embora acreditemos que esta atividade matemática ainda não esteja suficientemente institucionalizada para assegurar-nos um exame generalizado. Enquanto a "*Matemática Informal*" não se constituir em um campo de estudos matemáticos, cujo propósito possa ser determinado claramente, como por exemplo, a promoção e o desenvolvimento das aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária, haverá alguma dificuldade em especificar uma disposição metodológica que possa ser tomada e concebida como uma prerrogativa sobre a qual se assentará a

[85] Como ficará claro nas considerações que oportunamente serão estabelecidas acerca das noções de "conceito" e de "definição", estas duas noções, em absoluto, não poderão ser tomadas como sinônimos, embora haja conceitos que sejam determinados, exatamente, como uma disposição operacional, confundido-se, assim, com a sua própria definição.

propriedade de uma construção conceitual pretendida, isto é, a construção de uma "*Matemática Informal*". Ainda assim, queremos crer que a anunciada preocupação "*de ligar a Matemática*" a "*situações práticas*", ao "*cotidiano*" ou à "*realidade*", também possa ser considerada, inicialmente, como um indicativo para qualificar um livro didático de acordo com uma abordagem prática da Matemática.

6.1. Matemática — 2°. Ciclo - ensino atualizado: Omar Catunda et alii

Esta coleção compõe-se de três volumes, publicados no Rio de Janeiro pela editora Ao Livro Técnico, em 1971, 1972 e 1973, respectivamente. Seus autores são o Prof. Omar Catunda, naquela época Professor Catedrático da Universidade de São Paulo e Professor Titular do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, e as Profas. Martha Maria de Souza Dantas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da Conceição Guimarães e Neide Clotilde de Pinho e Souza, naquela mesma época, Professoras da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia e do Ensino Médio do Estado da Bahia.

Segundo admitem os autores, na Introdução e em uma seção denominada "*Justificativa do Programa*", apresentadas em cada um dos três volumes, a coleção em questão destina-se a atender às exigências do ensino atualizado da Matemática, tendo em vista o Ensino Secundário (hoje Ensino Médio) durante o qual os estudantes, em geral, se preparam para entrar na Universidade, de tal modo que esses estudantes possam adquirir um pleno domínio dos novos princípios da Matemática que estão sendo difundidos em todos os países (no início da década de 70). Com isso, os autores esperam preencher algumas lacunas do Conhecimento Matemático e dar uma orientação que será usada no estudo da Matemática superior [CATUNDA(1971), p. v-vi].

6.1.1. Volume 1 — 1971

Com a disposição de oferecer aos estudantes que não tiveram uma preparação supostamente ideal no Ensino Fundamental, os autores resolveram apresentar, no Capítulo I deste volume, as noções básicas e imprescindíveis para a compreensão dos conteúdos que nele se seguiriam. Assim, nesse capítulo são desenvolvidas algumas considerações acerca de "*Noções de Lógica e Conjunto*", "*Relações*", "*Aplicações*" e "*Estruturas Algébricas*". Esse 1°. volume se completa com o estudo das "*Funções de* 1°. *e* 2°. *Graus*", da "*Geometria Afim do Espaço*", da "*Geometria Euclidiana do Espaço*" e da "*Trigonometria*".

Dentre as noções da Lógica apresentadas no Capítulo I, destacamos as noções de "*Funções Proposicionais*" e de "*Operações Lógicas*". O tipo de Funções Proposicionais apresentadas é marcadamente matemático, *e.g.*, "$x^2-1=3$", tanto nos exemplos como nos exercícios propostos. As Operações Lógicas são apresentadas mediante suas definições marcadamente lógicas[86], são acompanhadas por suas correspondentes "*tabelas-verdade*" e os exemplos e os exercícios propostos são de tipo matemático. Observa-se, no entanto, uma pequena exceção quando se trata da noção de "*Implicação*", à qual foi reservada uma seção específica. Ao contrário das operações dadas anteriormente, a Implicação é apresentada a partir de sua noção ou conceito, e não a partir de sua definição lógica, mediante uma noção que não é uma noção decididamente lógica, isto é, constituída a partir de outras noções lógicas. Assim, é através da proposição condicional "*se o pássaro canta, então ele esta vivo*" que são tomados os "*valores-verdade*" da implicação $p \Rightarrow q$, a partir das proposições constituintes que, posteriormente, são qualificadas, de um modo evidente, como "*condição suficiente*" e "*condição necessária*" associadas à mesma implicação, respectivamente. Os exemplos e os exercícios propostos são marcadamente matemáticos.

Permitimo-nos essa pequena observação a respeito da Implicação para sugerir que, por um lado, embora as noções ou conceitos matemáticos devam ser desenvolvidos a partir de outras noções ou conceitos matemáticos já postos anteriormente, não significa isso, necessariamente, que essas noções ou conceitos devam ser tomados sem qualquer apelo a alguma experiência não propriamente matemática, e, por outro lado, embora falemos de "*pássaros*" e "*cantos*" num sentido matemático, não significa isso, necessariamente, que estejamos fazendo matemática de pássaros e cantos. Ademais, e

[86] Cf. part. CATUNDA(1971), p. 10 — "Dadas duas proposições p e q à operação que ao par (p, q) faz corresponder a proposição "p ou q", chama-se *disjunção inclusiva* a qual só é verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira."

segundo uma afirmação dos próprios autores, que nos dá conta de que "*em geral, os teoremas se apresentam sob a forma de uma implicação,* $p \Rightarrow q$ *, "p" chama-se* ***hipótese*** *e "q" ,* ***tese***" [CATUNDA(1971), p. 34], podemos entender, com maior clareza, porque seria legítimo derivar uma tese de uma hipótese tomada como verdadeira e como condição suficiente para essa mesma tese, a partir da consideração dessa mesma proposição condicional — "*se o pássaro canta, então ele esta vivo*" — que toma "*pássaros*" e "*cantos*" para ilustrar os "*valores-verdade*" da implicação $p \Rightarrow q$.

Por fim, podemos notar que, em uma seção denominada "*Axiomatização e Dedução Lógica*", são dadas as noções de "*Axioma*", "*Teoria*" e "*Axiomática*", e, na seção destinada às Estruturas Algébricas, são consideradas as noções de "*Monóide ou Semigrupo*", "*Grupo*", "*Anel*" e "*Corpo*". E, assim, podemos afirmar que este Capítulo I atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo II, Funções de 1°. e 2°. Graus, a "*Função do 1°. Grau* $y = ax+b$" é definida, a partir de seu gráfico, como "*uma translação de vetor paralelo a* Oy *e de medida algébrica* b*, da reta "*$y = ax$*"* [CATUNDA(1971), p. 63], e, de modo análogo, a "*Função do 2°. Grau* $y = ax^2+c$ *, com* $a \neq 0$" , é definida a partir do gráfico de $y = ax^2$ [CATUNDA(1971), p. 69]. A "*Função do 2°. Grau ou Trinômio do 2°. Grau* $y = ax^2+bx+c$*, com* $a \neq 0$" é definida a partir do gráfico da função "$y = ax_1^2+m$" , na qual "$x_1 = x+b/2a$" e "$m = (4ac-b^2)/4a$" , como "*uma translação de vetor* $-b/2a$ *que leva cada ponto* (x_1, y) *em* (x, y) *e, portanto, leva toda a parábola de equação* $y = ax_1^2+m$ *no gráfico procurado*" [CATUNDA(1971), p. 70-1]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, isto é, são formulados no âmbito exclusivo do campo de ordem do Conhecimento Matemático. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo II atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

Os Capítulo III e IV, Geometria Afim do Espaço e Geometria Euclidiana do Espaço, respectivamente, ocupam cerca de cinqüenta por cento deste 1°. volume. O Capítulo III inicia-se com uma consideração acerca das "*translações*", a fim de sugerir a pertinência de um estudo sobre os "*Espaços Vetoriais*" e, posteriormente, desenvolver o estudo do "*Espaço Afim de Três Dimensões*" a partir de um instrumental conceitual associado à noção de "*vetor*"[87]. Neste capítulo surgem as primeiras formulações explícitas de teoremas e são consideradas as suas correspondentes demonstrações. As definições são o aspecto marcante na introdução de qualquer nova noção matemática, e aparecem os primeiros exercícios propostos solicitando que se "*mostre*" ou que se "*prove*" uma dada propriedade. O Capítulo IV baseia-se nas noções de "*simetria*", "*ortogonalidade*" e "*movimentos rígidos*", para desenvolver o estudo da Geometria Euclidiana do Espaço. As noções matemáticas introduzidas são constituídas a partir de suas definições, e os teoremas, e suas respectivas demonstrações, são o aspecto marcante deste capítulo. É comum também a solicitação de provas ou demonstrações de propriedades nos exercícios propostos. Destacamos, neste capítulo, as noções de "*Produto Escalar*" e "*Base Ortogonal*" associadas a um Espaço Vetorial. Ademais, observamos que os autores alegaram na Introdução que o estudo da Geometria Afim do Espaço seria realizado "*de modo análogo ao que foi feito para o plano, no curso ginasial*", e que da "*geometria euclidiana foi retirada toda a parte relativa às medidas de áreas e volumes, que será dada posteriormente, quando se fizer o estudo de elementos de Cálculo Integral*". Os conceitos matemáticos considerados, em ambos os capítulos, são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, tanto os exemplos como os exercícios propostos, são marcadamente matemáticos. E, assim, podemos afirmar que os Capítulos III e IV atendem, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

Finalmente, no Capítulo V, Trigonometria, as relações fundamentais entre as funções trigonométricas "*Seno*" e "*Co-seno*", como algumas fórmulas relacionando essas duas funções e os valores dessas funções para alguns ângulos especiais, são derivadas da periodicidade e da simetria dessas mesmas funções circulares. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente

[87] Cf. part. CATUNDA(1971), p. 78 — "A introdução dos vetores como representando translações no plano se aplica, sem alteração, ao caso do espaço ordinário (chama-se, assim, o meio onde estão imersos todos os corpos da natureza). As translações se compõem no espaço da mesma maneira que no plano, e essa composição satisfaz às mesmas propriedades já vistas. [...] Em conclusão, o conjunto das translações do espaço ordinário tem a estrutura de espaço vetorial, razão pela qual cada translação é representada por um vetor."

matemáticos. Destacamos, neste capítulo, a apresentação de uma "*Tábua de Funções Trigonométricas*" e algumas noções sobre a determinação dos valores de tais funções, quando os valores de seus "*argumentos*" não forem inteiros, por meio de uma "*Interpolação Linear*". E, assim, podemos afirmar que o Capítulo V atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

6.1.2. Volume 2 — 1972

Neste 2°. volume, desenvolve-se o estudo da "*Geometria Analítica Plana*", das "*Matrizes e Determinantes*", do "*Corpo dos Números Complexos*", dos "*Polinômios e Equações Algébricas*", das "*Seqüências Numéricas e Progressões*" e das "*Funções Exponencial e Logarítmica*".

No Capítulo I, estuda-se a Geometria Analítica Plana baseando-a na noção de espaço vetorial de duas dimensões, através da qual se expõe o estudo analítico da reta [CATUNDA(1972), p. v]. Destacamos, neste capítulo, um estudo relativo às "*Cônicas*", no qual aparecem alguns teoremas. Há também alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo I atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo II, estudam-se Matrizes e Determinantes objetivando ao estudo dos "*sistemas de equações do 1°. Grau e à sua interpretação em espaços vetoriais. Ressaltam-se as estruturas de conjuntos de matrizes e a utilização dos determinantes*" [CATUNDA(1972), p. v]. A noção de Matriz é considerada a partir da noção de sistema de equações e concebida, então, como "*um conjunto de números dispostos de maneira retangular*" [CATUNDA(1972), p. 56], uma vez que foi exatamente sobre tais números que todas as operações para a resolução do correspondente sistema de equações foram efetuadas. Há a formulação de alguns teoremas e, também, há alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, tanto os exemplos como os exercícios propostos, são marcadamente matemáticos. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo II atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo III, a noção de Corpo dos Números Complexos é tratada usualmente, ou seja, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, tanto os exemplos como os exercícios propostos, são marcadamente matemáticos. A noção de "*número imaginário*" emerge de alguns problemas associados à resolução de "*equações algébricas*" e, então, defini-se o conjunto dos números complexos como um corpo. Há alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo III atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo IV, Polinômios e Equações Algébricas, "*introduz-se a noção de polinômios e estuda-se a estrutura de anel dos polinômios com coeficientes inteiros, racionais ou reais. Estendendo-se o estudo para o campo complexo enuncia-se o "teorema fundamental da álgebra" com as suas conseqüências. Estudam-se, também, alguns casos particulares de equações algébricas: equações recíprocas, binômias e do* 3°. *grau*" [CATUNDA(1972), p. v]. A noção de polinômio é introduzida por definição. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há a formulação de vários teoremas, destacando-se o "*Teorema Fundamental da Álgebra*", embora a sua demonstração não seja dada, e há vários exercícios propostos solicitando que se demonstre algumas propriedades. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo IV atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo V, Seqüências Numéricas e Progressões, considera-se a "*noção de seqüência dando ênfase ao estudo das progressões e dá-se a primeira idéia de convergência*" [CATUNDA(1972), p. v]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, tanto os exemplos como os exercícios propostos, são marcadamente matemáticos. Destacamos, neste capítulo, a formulação das primeiras noções de "*Limite*" e as demonstrações de alguns "*Lemas*". Há a formulação de alguns teoremas e, também, há alguns exercícios propostos solicitando que se demonstre algumas propriedades. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo V atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

Por fim, no Capítulo VI, Função Exponencial e Função Logarítmica, consideram-se tais funções "*ressaltando a sua significação como isomorfismos entre o grupo multiplicativo dos números reais positivos e o grupo aditivo dos números reais*" [CATUNDA(1972), p. v]. Destacamos, neste capítulo, a formulação de alguns "*Lemas*" e a introdução de algumas noções sobre o uso de "*réguas de cálculo*"[88], instrumento matemático construído a partir das propriedades dos logaritmos e baseado na "*representação da adição por meio de translação*" [CATUNDA(1972), p. 184]. Notamos, também, que os autores observam que a invenção dos logaritmos foi "*realizada com objetivos essencialmente práticos, pois transforma a operação produto, que pode ser bastante complicada quando os seus fatores são números grandes, na operação soma que é muito mais simples*" [CATUNDA(1972), p. 184]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há vários exercícios propostos solicitando que se demonstre algumas propriedades. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo VI atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

6.1.3. Volume 3 — 1973

Neste 3°. volume, desenvolve-se o estudo de "*Noções de Topologia, Continuidade e Limite*", das "*Derivadas e Aplicações Elementares*", das "*Equações Diferenciais*", da "*Integral e Aplicações ao Cálculo de Áreas e Volumes*" e das "*Noções de Estatística e Probabilidade*".

No Capítulo I, Noções de Topologia, Continuidade e Limite, são considerados os "*conceitos de estrutura topológica da reta, assim como as noções de continuidade e limite, aplicadas às funções elementares*" [CATUNDA(1973), p. v]. Os autores iniciam suas considerações referindo-se a dois problemas clássicos, o problema da determinação da "*tangente*" a uma curva em um ponto dado e o problema da determinação

[88] Observamos que em 1972 surgiram as primeiras "minicalculadoras eletrônicas numéricas".

da "*velocidade*" com a qual um ponto passa de uma posição a uma outra "*arbitrariamente próxima*", os quais contribuíram para o surgimento de um novo ramo da Matemática, o "*Cálculo Infinitesimal*". A noção de continuidade é, então, discutida e, em seguida, definida em termos de ε e δ. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há a formulação de alguns teoremas e há, também, alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. E, assim, podemos afirmar que este Capítulo I atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo II, Derivadas e Aplicações Elementares, iniciam-se as considerações da noção de derivada afirmando-se que "*o conceito de derivada foi introduzido no século XVII por Fermat, Newton e Leibniz, e foi o coroamento de uma grande quantidade de pesquisas para determinar a tangente a uma curva qualquer em um dos seus pontos*" [CATUNDA(1973), p. 31]. Posto isso, a derivada é definida a partir de uma interpretação geométrica associada ao "*problema das tangentes*". Há a formulação de alguns teoremas e há, também, alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. No entanto, nos exercícios propostos são apresentadas várias situações que nos lembram de "*estados de coisas*", às quais é aplicada a noção de derivada, *e.g.*, "*Dizer a que altura do centro de uma mesa redonda de raio r se deve colocar uma lâmpada de modo que uma folha de papel colocada na beira da mesa tenha claridade máxima*" [CATUNDA(1973), p. 53]. Ainda assim, podemos afirmar que este Capítulo II atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática, uma vez que a consideração destas "*situações-problema*" limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente, sendo as soluções, para os seus problemas correlatos, derivadas em termos estritamente formais e determinando-se mais como uma ilustração das possibilidades de aplicação da noção de derivada do que como uma aplicação prática propriamente dita, que tratasse, também, da introdução de aproximações ou de verificações empíricas, por exemplo. E, com efeito, em uma nota sugerida logo abaixo do exercício citado acima, os autores propõem a consideração da seguinte equação: "*A claridade é proporcional ao* *co-seno do ângulo de incidência dos raios luminosos e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao foco de luz*" [CATUNDA(1973), p. 53].

No Capítulo III, Equações Diferenciais, "*são estudados alguns tipos elementares de equações diferenciais, como aplicações simples às ciências naturais e humanas*" [CATUNDA(1973), p. v]. Nos exercícios propostos, estas equações são consideradas em situações que nos lembram de "*estados de coisas*", situações que aparecem na quase totalidade daqueles, *e.g.*, "*Em 1960 a população do Brasil era de aproximadamente 71.000.000; em 1970, ela era de 92.200.000. Se a taxa de crescimento da população é proporcional à população, qual será a população do Brasil no ano 2000?*" [Resposta: 202.000.000] [CATUNDA(1973), p. 67]. Este capítulo ocupa apenas nove páginas, e inicia-se considerando a noção de equação diferencial por sua definição. Os autores apontam a equação diferencial "$y' = ay$" como sendo "*importantíssima em muitas ciências — Física, Química, Biologia, Sociologia etc.*" [CATUNDA(1973), p. 61], cuja solução, "$y = Ce^{ax}$", por exemplo, "*traduz uma lei geral das ciências humanas: "em condições normais, a população cresce exponencialmente em função do tempo"*" [CATUNDA(1973), p. 62]. Lembremo-nos de que, na Seção 4, observou-se que uma situação típica ou "*quase-padrão*" na Matemática Aplicada é aquela em que um matemático aplicado está interessado na solução de uma certa equação diferencial. No entanto, como já foi observado anteriormente, neste capítulo, a consideração destes "*estados de coisas*" limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático correspondente, sendo as soluções para os seus problemas correspondentes derivadas em termos estritamente formais, embora haja um pequeno exemplo acerca da "*Lei de Weber*" sobre a "*sensação de luminosidade*", no qual os autores descrevem rapidamente a elaboração de um modelo físico, sugerindo o modelo matemático e a solução da equação diferencial correspondente e derivando do modelo matemático alguma interpretação possível para o modelo físico [CATUNDA(1973), p. 62-3]. Contudo, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Assim, podemos afirmar que este Capítulo III atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

No Capítulo IV, Integral e Aplicações ao Cálculo de Áreas e Volumes, "*é dada a noção de integral, com aplicações ao cálculo de áreas e volumes de figuras do* *espaço, completando-se assim o estudo da Geometria Elementar*" [CATUNDA(1973), p. v]. A noção de integral é desenvolvida a partir do problema da determinação da área de uma figura plana constituída em um "*sistema de coordenadas ortogonais*" por uma "*curva*" dada, pelo "*eixo* Ox" e as retas "$x = a$" e "$x = b$". Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há a formulação de alguns teoremas e há, também, alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades. Assim, podemos afirmar que este Capítulo IV atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

Finalmente, no Capítulo V, Noções de Estatística e Probabilidade, "*são expostas as noções introdutórias de estatística e de probabilidade, que hoje se tornaram indispensáveis para o estudo de qualquer ciência em nível superior*" [CATUNDA(1973), p. v]. As noções estatísticas consideradas são desenvolvidas por meio de situações que nos lembram de "*estados de coisas*": "*altura*" e "*cor de olhos*", o que é referendado amplamente nos exercícios propostos, *e.g.*, "*As idades das crianças que brincam em um parque, em um certo dia, são fornecidas pela série: 5, 6, 5, 7, 9, 5, 7, 9, 10, 6, 7, 8, 10, 6, 5, 9, 4, 8, 6, 4, 9, 6, 5, 4, 6, 8. Classificar estes valores de 3 em 3 e dar: a freqüência absoluta e a freqüência relativa de cada classe; a freqüência absoluta das crianças com menos de 8 anos; e um gráfico das freqüências absolutas acumuladas*" [CATUNDA(1973), p. 115]. E, de modo análogo, as noções associadas à probabilidade também são desenvolvidas segundo "*estados de coisas*": "*moedas*", "*bolas em urnas*", "*dados*" etc., o que é referendado amplamente tanto nos exemplos como nos exercícios propostos, *e.g.*, "*Entre as lâmpadas produzidas por uma fábrica, sabe-se que em cada lote de 100 há, em geral, 5 defeituosas. Examinam-se, sucessivamente, 4 lâmpadas tiradas de um lote de 100 e repostas imediatamente. Qual a probabilidade de a) saírem todas defeituosas?; b) não sair nenhuma defeituosa?; e c) sair uma defeituosa?*" [CATUNDA(1973), p. 132-]. Há alguns exercícios propostos solicitando que se prove algumas propriedades e há uma seção destinada às noções de "*Cálculo Combinatório*". Embora os exemplos e os exercício propostos, em sua grande maioria, nos lembrem de "*situações práticas*", a consideração destas circunstâncias limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático correspondente, sendo as soluções para os seus problemas correspondentes derivadas em termos estritamente formais. Assim, podemos afirmar que este Capítulo V atende, inequivocamente, a uma abordagem teórica associada à Matemática.

6.2. Matemática Aplicada — 2°. Grau: Fernando Trotta et alii

Esta coleção compõe-se de três volumes, publicados em São Paulo pela Editora Moderna, em 1979, os dois primeiros volumes, e em 1980, o terceiro volume. Seus autores são os Profs. Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic.

Contrariamente à coleção apresentada anteriormente, não há qualquer referência ao programa adotado para esta coleção, assim como não há nenhuma nota introdutória, exceto por uma pequena nota colocada, a título de introdução, no último capítulo do 3°. Volume, "*Matrizes*", como veremos oportunamente. Por outro lado, parece-nos conveniente observar que os autores apelam freqüentemente, ao longo dos três volumes, para alguns "*estados de coisas*" ou circunstâncias que seriam próprios de algumas atividades humanas, assim como para pequenas notas históricas a respeito dos temas matemáticos em consideração, sempre que estes se prestem a essas correlações. Segundo o que nos é possível perceber, isso se dá para que lhes seja possível sugerir um certo sentido de cotidianidade aos conceitos matemáticos considerados, ou seja, para sugerir um certo contexto subjacente aos conceitos matemáticos, que estaria ligado ou ao cotidiano daquelas pessoas que se dispusessem a lidar com estes conceitos ou ao cotidiano daquelas pessoas que se dispuseram a lidar com eles em algum momento histórico. Esse modo de proceder, que se constituirá em uma abordagem didática sistemática, relativamente aos conteúdos matemáticos considerados, apresentar-se-á, ao longo da coleção em questão, como um expediente oportuno para sugerir a necessidade do estudo de alguns conceitos matemáticos que serão imprescindíveis para enfrentar determinados problemas, os quais serão tomados de tais atividades rotineiras ou de pequenos embates historicamente apresentados. Ademais, observamos que os autores evidenciam uma certa inclinação para justificar a propriedade ou a necessidade dos estudos matemáticos a serem desenvolvidos, ou das inevitáveis "*teorizações*", apelando basicamente para a importância das *aplicações práticas* da Matemática e observando que os "*processos ou métodos práticos*", sugeridos eventualmente, também "*têm suas limitações e imprecisões*" [TROTTA(1980), p. 124].

6.2.1. Volume 1 — 1979

Neste 1°. volume, o Capítulo I inicia-se com uma "*Revisão (Porcentagens e Médias)*", seguindo-se um estudo de "*Progressões Aritméticas e Geométricas*". Posteriormente, desenvolve-se o estudo das "*Funções — Equações — Inequações*", da "*Geometria Plana*", de "*A Trigonometria do Ângulo Agudo*", dos "*Logaritmos*" e do "*Binômio de Newton*".

No Capítulo I, a noção de Porcentagem é introduzida mediante um exemplo que ilustra uma situação que nos lembra de um "*estado de coisas*": "*Se o preço de uma mercadoria sofrer um aumento de Cr$ 162,00, a população, em geral, considerará este aumento grande ou pequeno?*" [TROTTA(1979a), p. 1]. A partir daí, a noção de porcentagem é apresentada como "*uma maneira de comparar números*" [TROTTA(1979a), p. 1]. Todos os exemplos e os exercícios propostos são apresentados ilustrando "*estados de coisas*" e uma certa parte deles é tomada de provas de vestibulares. A seguir, a noção de Progressão Geométrica é introduzida como uma seqüência de tipo numérico a partir da consideração de dois exercícios propostos anteriormente. Segue-se, então, uma definição de Progressão Geométrica dizendo-se que "*é toda seqüência onde cada termo é obtido do anterior, multiplicando-o por um número fixo*" [TROTTA(1979a), p. 14]. Nesta seção, ao contrário da anterior, os exercícios propostos são todos marcadamente matemáticos, isto é, sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e há alguns exercícios propostos tomados de provas de vestibulares. Em seguida, apresenta-se uma definição de Progressão Aritmética, introduzindo-a como um outro tipo de seqüência numérica. Os exercícios propostos são todos marcadamente matemáticos, exceto 7 (sete) dentre os 42 (quarenta e dois) apresentados, *e.g.*, "*Num salão há 800 pessoas. Se todas resolverem cumprimentar-se, quantos cumprimentos serão trocados?*" [TROTTA(1979a), p. 30]. Os conceitos matemáticos considerados neste capítulo são desenvolvidos a partir da resolução de problemas enunciados em exemplos ou em exercícios propostos, e, somente após, são oferecidas definições ou deduzidas algumas fórmulas. Embora a maior parte dos exemplos ou dos exercícios propostos ilustre situações que nos lembram de "*estados de coisas*" e, por isso, enfatize as aplicações práticas da Matemática, não podemos atestar que este Capítulo I atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática, uma vez que a consideração destas "*situações-problema*" limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente, sendo as soluções para os seus problemas correlatos derivadas em termos estritamente formais, o que determina estes "*estados de coisas*" mais como uma ilustração da possibilidade de aplicação das noções matemáticas enfatizadas do que como uma aplicação prática propriamente dita, que tratasse também de predições ou explicações, por exemplo.

No Capítulo II, Funções, Equações e Inequações, o estudo das Funções inicia-se com o exame de alguns gráficos que são apresentados apelando-se para exercícios que ilustram situações que nos lembram de "*estados de coisas*". Em seguida, é dada, inicialmente, uma definição de Função a partir da consideração especial de dois gráficos examinados anteriormente, e, posteriormente, passa-se ao tratamento da noção de "*lei de uma função*" [TROTTA(1979a), p. 47] a partir da consideração de algumas leis que descreveriam fenômenos naturais, relacionando matematicamente as variáveis envolvidas. Trata-se de dois exemplos nos quais se consideram uma correlação entre "*pressão e volume*", à temperatura constante, tomando-se em um deles uma "*massa de gás*" e no outro a "*água do mar*". Sugere-se, a partir daí, uma "*forte ligação existente entre disciplinas como Matemática, Física e Biologia*" [TROTTA(1979a), p. 52], através da apresentação de um pequeno trecho do livro "*Tratado de Fisiologia Médica*", de autoria de Arthur C. Guyton. Em particular, destacamos uma observação apontada após a resolução do exercício "*construa um esboço do gráfico da função* $f: \Re \rightarrow \Re$ *dada por* $y = 2^x$" [TROTTA(1979a), p. 56]: "*Neste último exercício, a função já foi apresentada de uma maneira mais abstrata, pois não se mencionou a que fenômeno ela se refere (ela pode, até mesmo, não se referir a fenômeno algum). No estudo matemático das funções, estas abstrações serão muito freqüentes*" [TROTTA(1979a), p. 57]. Há uma clara disposição dos autores em apresentar qualquer novo conceito através de exemplificações que ilustrem situações que nos lembram de "*estados de coisas*". Na caracterização dos tipos de funções, "*constante*", "*linear*" etc., os exemplos e os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, e tais funções são introduzidas por definição. O estudo das Equações do 2°. Grau inicia-se pela proposição de exercícios especificamente matemáticos e, após, apresenta-se uma dedução da "*fórmula de Bhaskara*", enfatizando-se a importância da determinação de uma "*fórmula geral*" para a resolução das Equações do 2°. Grau. Há algumas notas históricas a esse respeito. As Inequações do 2°. Grau são apresentadas por meio da resolução de um problema que ilustra um "*estado de coisas*", e os exercícios propostos são especificamente matemáticos. Neste capítulo, perece-nos que os autores mantêm a disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, quando não é possível aplicá-las a "*estados de coisas*". Por isso, não podemos atestar que este Capítulo II atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo III, o estudo da Geometria Plana inicia-se com a noção de soma dos ângulos internos de um polígono a partir de "*O problema dos ladrilhos*" [TROTTA(1979a), p. 113], o qual explora a questão do revestimento de paredes ou pisos. A partir daí, oferece-se uma fórmula para o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer a partir da divisão de alguns polígonos em um certo número de triângulos. Passa-se, então, à noção de semelhança explorando-se, inicialmente, a noção de "*maquete*" e, posteriormente, define-se, especificamente, polígonos semelhantes. Por fim, e a respeito do "*teorema de Pitágoras*", os autores sugerem, como "*uma aplicação prática, bastante interessante*", o uso do triângulo de lados 3, 4 e 5 pelos carpinteiros — chamado "*esquadro dos carpinteiros*" — para demarcar no terreno da construção, através de "*fios de linha*", a "*planta*" e a perpendicularidade das paredes de uma casa, por exemplo [TROTTA(1979a), p. 168]. Os exercícios propostos são todos marcadamente matemáticos, isto é, desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, exceto alguns que ilustram situações que nos lembram de "*estados de coisas*", *e.g.*, "*Para fotografar uma pessoa de 1,8 m de altura, o fotógrafo coloca a máquina fotográfica a 3,0 m da mesma. O diafragma desta máquina está a 20 mm do filme. Revelado o filme, qual será a altura da imagem daquela pessoa?*" [TROTTA(1979a), p. 160]. Há uma clara disposição dos autores em apresentar qualquer novo conceito através de exemplificações que ilustrem situações que nos lembram de "*estados de coisas*". Há uma subseção tratando, particularmente, das propriedades do "*Teodolito*" [TROTTA(1979a), p. 131], e há algumas atividades sugeridas envolvendo o "*recorte de papel*", uma para resolver uma questão associada ao problema dos ladrilhos e outra para deduzir o teorema de *Pitágoras*. Os conceitos matemáticos considerados neste capítulo são desenvolvidos a partir da resolução de problemas apresentados em exemplos ou em exercícios propostos, e, somente após, são oferecidas definições ou deduzidas algumas fórmulas. Neste capítulo, também, os autores mantêm a disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, uma vez que a ilustração de suas aplicações a "*estados de coisas*" são muito reduzidas. Por isso, também, não podemos atestar que este Capítulo III atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo IV, o estudo de A Trigonometria do Ângulo Agudo, isto é, das funções tangente, seno e co-seno, associadas ao triângulo retângulo, é introduzido a partir da determinação de distâncias inacessíveis, tomadas de problemas que ilustram situações que nos lembram de "*estados de coisas*". Após apresentar as noções de tangente, seno e co-seno como uma característica constante que relaciona dois lados e um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, os autores passam a explorar rapidamente algumas correlações entre essas funções, especificamente sobre o triângulo retângulo. Em uma subseção denominada "*Problemas Práticos*", encontramos três problemas do tipo: "*Deseja-se vencer o desnível seguinte (medidas em cm):* [dois patamares distando 225 cm verticalmente e distando 758 cm horizontalmente]. *A rampa de ligação deverá concordar suavemente com os dois patamares, através de dois arcos de circunferência de raios iguais a 50 cm*". *Calcular o comprimento do trecho retilíneo da rampa e o ângulo de inclinação da mesma*" [TROTTA(1979a), p. 213]. Os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, exceto alguns que nos lembram de aplicações a "*estados de coisas*", *e.g.*, "*Para obter a altura de uma torre, um topógrafo estaciona o teodolito a 200 m da base da mesma; o ângulo indicado na figura mede 30°. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do solo, qual é, aproximadamente, a altura da torre?*" [TROTTA(1979a), p. 192]. Há, também, alguns exercícios propostos solicitando que se "*mostre*" ou que se "*prove*" uma dada propriedade. Os autores apresentam uma "*Tabela Trigonométrica*" e sugerem um método de construção de tabelas que eles alegam ter sido utilizado, provavelmente, pelo grego Hiparco. Os conceitos matemáticos considerados neste capítulo são desenvolvidos a partir da resolução de problemas apresentados em exemplos ou em exercícios propostos, e, somente após, são oferecidas definições ou deduzidas algumas fórmulas. Os autores mantêm a disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, quando não é possível aplicá-las a "*estados de coisas*". Por isso, não podemos atestar que este Capítulo IV atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo V, o estudo dos Logaritmos inicia-se com uma pequena nota histórica, na qual se sugere que no século XVI já se enfrentavam "*longos e trabalhosos cálculos aritméticos*" [TROTTA(1979a), p. 221], e aponta-se, como exemplo, o caso de uma pessoa que empregou uma certa quantia Q de dinheiro a juros compostos de 12% ao ano, o que geraria, após 2 anos e 197 dias, um "*montante*" de

$$Q \times 1{,}12^{2+197/360} = Q \times 1{,}12^{2} \times 1{,}12^{197/360} = Q \times 1{,}12^{2} \times \sqrt[360]{1{,}12^{197}} .$$

Assim, os autores afirmam que, naquela época, procurava-se um processo que permitisse reduzir as operações de potenciação e radiciação ou multiplicação e divisão às operações de adição e subtração, respectivamente. A partir daí, passa-se a uma definição de logaritmo, às suas condições de existência e às suas propriedades operatórias. Os autores apresentam, então, uma "*Tábua de Logaritmos*" e sugerem um método de construção de tábuas atribuído a Henry Briggs, por via de "*aproximações sucessivas*" baseada na "*média geométrica*" de dois números. Os exercícios propostos são marcadamente matemáticos e vários deles são tomados de provas de vestibulares. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Há uma clara disposição para enfatizar a noção de logaritmo como um expediente operacional no âmbito do próprio Conhecimento Matemático. Ademais, na última seção deste capítulo, denominada "*Aplicações dos Logaritmos e da Função Exponencial*", os autores sugerem que a descoberta dos logaritmos, além de tornar mais simples alguns cálculos trabalhosos, "*possibilitou a resolução de outros problemas, extrapolando a sua utilidade inicial*" [TROTTA(1979a), p. 260]. Segue-se, então, um exemplo[89] de um "*fenômeno biológico retratado matematicamente por uma lei*

[89] Cf. part. TROTTA(1979a), p. 260-1 — "Vamos no exercício que segue, mostrar um fenômeno biológico retratado matematicamente por uma lei exponencial. **Exercícios** 74. Considere um recipiente contendo, no instante $t = 0$, um número N_0 de bactérias se reproduzindo normalmente. Suponhamos que, a cada instante, os nascimentos de novas bactérias sejam proporcionais ao número de bactérias existentes no recipiente naquele instante. Note que esta hipótese é bastante razoável, pois ela pressupõe que quando tivermos, por exemplo, o dobro do número de bactérias teremos também o dobro do número de nascimentos; além disso, sob certas condições, esta hipótese pode ser verificada experimentalmente. A partir desta suposição pode-se demonstrar que o número de bactérias num certo instante $t > 0$ é dado por: $N(t) = N_0 \times K^t$ [...]".

exponencial" do tipo $N(t) = N_0 \times K^t$. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo V atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

Por fim, no Capítulo VI, Binômio de Newton, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos e uma certa parte deles são tomados de provas de vestibulares. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo IV atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

6.2.2. Volume 2 — 1979

Neste 2°. volume, desenvolve-se o estudo da "*Análise Combinatória*", de "*A Área de uma Superfície*", de "*A Trigonometria da Primeira Volta*", da "*Geometria Analítica: a reta*", dos "*Sistemas Lineares e Determinantes*" e da "*Trigonometria Generalizada*".

No Capítulo I, o estudo da Análise Combinatória inicia-se com a consideração de alguns problemas que ilustram situações que nos lembram de "*estados de coisas*" envolvendo a necessidade de alguma contagem, *e.g.*, "*Atualmente as chapas dos automóveis possuem duas letras seguidas de quatro algarismos. Considerando que o nosso alfabeto possui 23 letras e que nas chapas ainda podem ser utilizadas as letras K, W e Y, pergunta-se: a) quantas placas podem ser construídas dessa maneira?; b) quantas placas diferentes podem ser construídas dessa maneira, sem contarmos aquelas cujos quatro algarismos são iguais a 0?; e c) quantas placas diferentes podem ser construídas sem que haja repetição de letras e de algarismos?*" [TROTTA(1979b), p. 6]. A partir daí, sugerem os autores que haveria algo em comum entre os diversos exercícios propostos, o que nos permitiria "*criar alguns modelos*" que pudessem ser "*aplicados*" na resolução de diversos outros problemas [TROTTA(1979b), p. 9]. Segue-se, então, uma definição de "*Arranjos*", e sugerem-se, analogamente, as noções de "*Permutações*" e "*Combinações*" como dois novos "*modelos*". Predominam claramente, nos exercícios propostos, situações que nos lembram de "*estados de coisas*", e vários deles são tomados de provas de vestibulares. Há uma clara disposição dos autores em apresentar qualquer novo conceito através de exemplos ou exercícios propostos, sempre que possível, e preferencialmente por meio daqueles que ilustrem situações que nos lembrem de "*estados de coisas*". Neste capítulo, os autores mantêm a disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas a situações que ilustrem "*estados de coisas*". Mesmo assim, não podemos atestar que este Capítulo II atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática, uma vez que, como já foi observado anteriormente, a consideração destas aplicações a "*estados de coisas*" limitam-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente.

No Capítulo II, o estudo de A Área de uma Superfície é introduzido com uma seção denominada "*Problemas Cotidianos Envolvendo Áreas*", *e.g.*, "*Uma vez elaborado o projeto de uma casa é necessário preparar seu orçamento. Um dos itens do mesmo exige que se saiba qual a quantidade de tijolos a ser usada na obra e para tanto devemos saber quantos metros quadrados de parede a casa terá*" [TROTTA(1979b), p. 53]. Segue-se a observação de que "*estes e muitos outros exemplos, que serão mencionados neste capítulo, mostram que o cálculo da área de uma superfície faz parte do cotidiano de muitos profissionais*" [TROTTA(1979b), p. 53]. Numa seção seguinte, "*Métodos Práticos para Calcular Áreas*", a noção de área é desenvolvida a partir da noção de "*medida*" de uma grandeza por comparação a outra de mesma espécie e que é tomada como unidade. Assim, os autores propõem dois "*métodos práticos*", sendo que o primeiro deles consiste em transportar para um papel quadriculado a planta de uma região qualquer da qual se pretende determinar a área e, posteriormente, "*estimar quantos quadradinhos estão nela contidos*" [TROTTA(1979b), p. 54-5]. O outro método consiste em desenhar a região, da qual se deseja determinar a área, em uma "*folha de papel de boa qualidade*" e, recortando-se a região, determina-se "*sua massa usando uma balança de grande sensibilidade*". Repete-se o mesmo procedimento para um quadrado de área igual a 1 dm^2, por exemplo, e, em seguida, determina-se a área da região através da proporção constituída pelas razões das massas e pela razão das áreas. As áreas do quadrado e do retângulo são dadas a partir de exemplos e por comparação de áreas. A área do círculo é dada pelo "*método de aproximações sucessivas*" [TROTTA(1979b), p. 84], através da determinação das áreas de "*polígonos inscritos e circunscritos*" a um círculo até a generalização para um polígono de n lados. Os autores apresentam, então, o "*número* π" [TROTTA(1979b),

p. 90] como um número para o qual convergem as seqüências das razões entre a área do polígono inscrito e o quadrado do "*raio*" do círculo e as seqüências das razões entre a área do polígono circunscrito e o quadrado do raio do círculo, sugerindo a fórmula conhecida da área do círculo como sendo πr^2 . A fórmula do "*perímetro da circunferência*" [TROTTA(1979b), p. 102] é determinada de modo análogo ao desenvolvido para a área do círculo. Os conceitos matemáticos considerados neste capítulo são desenvolvidos a partir da resolução de problemas apresentados em exemplos ou em exercícios propostos, e, somente após, são oferecidas definições ou deduzidas algumas fórmulas. Não há predominância, nos exercícios propostos, de situações que nos lembram de "*estados de coisas*" sobre aquelas marcadamente matemáticas e há uma grande quantidade deles que são tomados de provas de vestibulares. Os autores mantêm a disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, quando não é possível aplicá-las a "*estados de coisas*". Por isso, não podemos atestar que este Capítulo II atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática, uma vez que os métodos de aproximação sugeridos são legitimados pelo formalismo dos raciocínios matemáticos.

No Capítulo III, o estudo de A Trigonometria da Primeira Volta inicia-se com uma seção denominada "*Triangulação Topográfica*", na qual destaca-se que "*o triângulo é, pois, a figura chave da Topografia*" [TROTTA(1979b), p. 122]. A seguir, passa-se à determinação de algumas fórmulas que servirão para o cálculo de um lado desconhecido do triângulo ou da área do triângulo, conhecendo-se dois lados e o ângulo determinado por eles, e para o cálculo de dois lados desconhecidos do triângulo, conhecendo-se um lado e os ângulos adjacentes ao mesmo. Na próxima seção, dedicada a "*algumas aplicações da Trigonometria à Física*" [TROTTA(1979b), p. 129], sugere-se que há muitas aplicações à Física, como a determinação da "*intensidade da resultante de duas forças aplicadas em um ponto*", uma "*interpretação trigonométrica da velocidade média*", a "*lei da refração, decomposição de forças, estudo dos movimentos harmônicos etc.*", e atesta-se que a "*trigonometria é fundamental na Astronomia, na Navegação Marítima e Aérea, na Geodésia, na Cartografia etc.*", afirmando-se que o "*seu estudo é, portanto, de grande utilidade*" [TROTTA(1979b), p. 131]. Na seção seguinte, intitulada "*A Necessidade de Ampliar as Idéias*", os autores sugerem, em um pequeno texto, que "*premido por suas* *necessidades, o Homem cria suas ferramentas e, quando estas se mostram eficientes, o próprio uso das mesmas gera o seu aperfeiçoamento.* [...] *Assim também se passa com as ferramentas matemáticas. A Trigonometria, que foi criada para resolver um determinado problema (cálculo de distâncias inacessíveis), hoje encontra muitas outras aplicações. Para que isso fosse possível, as suas idéias foram obrigadas a evoluir*" [TROTTA(1979b), p. 131]. Numa subseção chamada "*A negação da dificuldade no processo de criação da Matemática*", afirma-se que "*existem muitos problemas, para cuja solução seria útil que se dispusesse de uma Trigonometria que não ficasse restrita aos ângulos agudos*", e que "*para conseguir isto é preciso libertarmo-nos do triângulo retângulo posto que no mesmo não existem ângulos obtusos*" [TROTTA(1979b), p. 133]. A partir daí, introduz-se a noção de "*Circunferência Trigonométrica*", mediante a qual se sugere a necessidade da ampliação das noções de seno, co-seno e tangente, para além dos ângulos agudos, e redefinem-se as noções de seno, co-seno e tangente, dadas antes no Volume 1, no capítulo Trigonometria do Ângulo Agudo. Numa última seção, "*Um Pouco de História*", os autores consideram a "*invenção*" da Geometria Analítica, a partir de um texto de Tobias Dantzig, "*Número – a linguagem da ciência*" [TROTTA(1979b), p. 168]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e há uma clara disposição dos autores em enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático e em mostrar a "*grande utilidade*" das mesmas em outros campos de atividades, como se pode observar pelas citações acima. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos e há vários deles que são tomados de provas de vestibulares. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo III atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

O Capítulo IV, Geometria Analítica, inicia-se com a observação de que "*alguns tópicos da Geometria Analítica já foram estudados no decorrer dos capítulos anteriores*" [TROTTA(1979b), p. 171]. Como já foi observado, para sugerir a propriedade e a importância da Geometria Analítica, os autores, na última seção do capítulo anterior, oferecem-nos uma pequena incursão histórica, na qual a Geometria Analítica é apresentada como uma espécie de comunhão entre a Álgebra e a Geometria [TROTTA(1979b), p. 168]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Por isso, não podemos atestar que este Capítulo IV atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo V, o estudo dos Sistemas Lineares e Determinantes é introduzido com a resolução de um exercício que ilustra uma situação que nos lembra de um "*estado de coisas*", na qual um "*sitiante*" pretenderia distribuir, numa certa área, uma plantação de "*arroz*" e outra de "*milho*", sob certas condições. A partir daí, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, embora sejam apresentadas, em alguns exercícios, situações que ilustram "*estados de coisas*", tantos os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Assim, também não podemos atestar que este Capítulo IV atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

Finalmente, no Capítulo VI, o estudo da Trigonometria Generalizada é introduzido com a observação de que os "*estudos realizados na Mecânica com movimentos periódicos (que de tempos em tempos passam a se repetir), como o movimento de um pêndulo, de uma mola pulsando, de uma corda em vibração e outros, mostraram a necessidade de serem ampliadas as noções de seno, co-seno e tangente de um ângulo, tanto para ângulos maiores que 360° como para ângulos negativos*" [TROTTA(1979b), p. 232]. Na Seção 3, "*Uma Justificativa para as Definições Dadas*", os autores observam que, além de já terem mostrado, no início do capítulo, que "*as definições generalizadas de co-seno, seno e tangente surgiram em função de necessidades aparecidas no estudo de movimentos periódicos*", "*podemos também "justificar" as definições apresentadas dentro de uma visão puramente matemática*" [TROTTA(1979b), p. 241]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e, embora sejam apresentadas, em alguns exercícios, situações que ilustram "*estados de coisas*", tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há alguns exercícios propostos que são tomados de provas de vestibulares e há alguns exercícios solicitando que se mostre ou que se prove algumas propriedades. Embora haja uma seção tratando de "*Aplicação da Trigonometria a Correntes Alternadas*" [TROTTA(1979b), p. 266], não podemos atestar que este Capítulo VI atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática, uma vez que, como já foi observado anteriormente, a consideração destas aplicações práticas limitam-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente.

6.2.3. Volume 3 — 1980

Neste 3°. volume, desenvolve-se o estudo das "*Probabilidades*", dos "*Limites e Derivadas*", de "*O Volume de um Sólido*", de "*As Figuras no Espaço*", dos "*Polinômios — Equações Polinomiais (1ª. parte)*", dos "*Números Complexos — Equações Polinomiais (2ª. parte)*", de "*As Cônicas*" e das "*Matrizes*".

No Capítulo I, o estudo das Probabilidades inicia-se considerando que há alguns "*fenômenos aleatórios*" nos quais a determinação da probabilidade de ocorrência de um dado "*evento aleatório*" é feita, inicialmente, mediante um levantamento estatístico de informações, como no caso da probabilidade de morte de uma pessoa em uma certa idade. Contudo, observa-se, logo em seguida, que "*as probabilidades de inúmeros outros eventos podem ser calculadas teoricamente, sem necessidade de realização de experiências*", como no caso da probabilidade de se obter a "*face 2*" no lançamento de um "*dado não viciado*" [TROTTA(1980), p. 1]. E essa abordagem "*teórica*" será o caminho seguido pelos autores quando da determinação de algumas fórmulas ou definições. Na última seção, "*Comentários Finais*", são oferecidas algumas notas históricas acerca da "*Teoria das Probabilidades*", e, no final, é destacada "*uma enorme variedade de aplicações*", no âmbito da própria Matemática, como na Teoria dos Conjuntos, no Cálculo e na Estatística, e em outras ciências, como na Biologia, Física e Economia [TROTTA(1980), p. 21]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. A maior parte dos exercícios propostos ilustram situações que nos lembram de "*estados de coisas*" e, uma certa parte deles, são tomados de provas de vestibulares. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo I atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo II, o estudo dos Limites e Derivadas é introduzido com a resolução de 10 (dez) exercícios, que "*utilizarão conceitos da Matemática e da Física*" [TROTTA(1980), p. 23] e que consideram algumas questões relativas ao movimento de uma "*partícula*", mediante algumas funções que determinam a sua "*posição*" ou a sua "*velocidade*" em relação ao "*tempo*". Posteriormente, sugerindo que "*nos 10 exercícios propostos e resolvidos neste capítulo utilizamos sempre o mesmo "raciocínio"* ", e, após apresentarem uma "*ilustração*" e um "*aprofundamento*" desse "*raciocínio*", "*dividindo-o em cinco etapas*" [TROTTA(1980), p. 28], os autores enunciam uma definição para a derivada de uma função em um dado ponto, usando a "*linguagem dos limites*" [TROTTA(1980), p. 30]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, embora haja uma clara disposição dos autores em apresentar ilustrações das aplicações das noções matemáticas tratadas, enfatizando-as no âmbito do próprio Conhecimento Matemático e em situações que nos lembram de "*estados de coisas*". Por isso, não podemos atestar que este Capítulo II atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo III, o estudo de O Volume de um Sólido é introduzido com uma seção denominada "*Problemas Práticos Envolvendo o Cálculo de Volumes*", a qual é apresentada afirmando-se que "*existem muitos problemas que envolvem o cálculo de volumes*" e que "*eles estão ligados ao cotidiano de diversas atividades*" [TROTTA(1980), p. 119], como, por exemplo, no revestimento de um piso com uma camada de argamassa de areia e cimento, na construção de estradas, prédios, barragens e muros de arrimo, na determinação da quantidade de água represada na construção de uma usina hidroelétrica etc. No final desta seção, justifica-se o estudo do volume de um sólido dizendo-se que "*estes e muitos outros exemplos, que serão mencionados neste capítulo, mostram que o Homem, para atingir seus objetivos, foi obrigado a desenvolver uma ferramenta – o cálculo de volumes – que o ajudaria a resolver determinados problemas. É este fato que justifica o estudo que ora faremos*" [TROTTA(1980), p. 121]. Na seção seguinte, "*Métodos Práticos para Calcular Volumes*", os autores apresentam dois "*métodos práticos*": um deles consiste em mergulhar um dado objeto em um recipiente contendo água, no qual já está inscrita uma escala que faz corresponder um certo volume de água à altura da água nele contida, de tal modo que a diferença entre duas leituras possa fornecer o volume do corpo imerso; e o outro, avalia a capacidade de um dado recipiente mediante o conhecimento da capacidade de outro recipiente. Assim, os autores admitem que "*os processos até aqui descritos têm suas limitações e imprecisões. Por nenhum deles saberíamos determinar o volume de uma prancha de madeira, ou o volume de concreto necessário para construir a* *usina hidroelétrica de Itaipu, ou o volume de terra a ser movimentado na construção de uma estrada ou mesmo estimar o volume de água a ser armazenado por uma barragem num rio. A teorização se faz necessária para que possamos resolver estes problemas*" [TROTTA(1980), p. 124]. A exemplo do que foi feito no Capítulo II, do Volume II, A Área de uma Superfície, a noção de volume é desenvolvida a partir da noção de "*medida*" de uma grandeza por comparação a outra de mesma espécie tomada como unidade [TROTTA(1980), p. 125]. Numa seção posterior, "*Um pouco de História da Matemática*", os autores apresentam, por exemplo, alguns pequenos textos extraídos do livro de Paul Karlson, "*A Magia dos Números*", tratando de "*A Exaustão do Espaço*", do "*Método de Arquimedes*", de "*A Geometria dos Tonéis de Vinho*" etc. [TROTTA(1980), p. 133-8]. Numa subseção intitulada "*A Flexibilidade do método Científico*", na seção "*O Princípio de Cavalieri*", os autores observam que "*em ciência, não se aceita ou rejeita uma idéia pela análise pura e simples da mesma, mas sim pelas conseqüências que ela acarreta*", e atestam que, "*embora a Matemática, dentro das ciências, tenha as suas características próprias, e não costume prestar contas à experimentação, vamos aqui colocá-la em pé de igualdade com as demais ciências. O princípio de Cavalieri será aceito sem mais considerações. Vamos pô-lo a funcionar. As conseqüências do mesmo serão submetidas à experimentação*" [TROTTA(1980), p. 142]. Nas seções seguintes, são determinados os volumes do "*Cilindro*", do "*Cone*" e da "*Esfera*", e nelas reserva-se uma subseção intitulada "*Comprovação Experimental*", na qual se põem em "*funcionamento*" ou se submete à "*experimentação*" o Princípio de Cavalieri. Isso se dá através da sugestão da construção de alguns objetos materiais, como por exemplo, a construção de duas "*canecas*", uma "*prismática*" e a outra "*cilíndrica*", de bases equivalentes e alturas iguais, a fim de verificar-se se os seus volumes são equivalentes, segundo o Princípio de Cavalieri, mediante o enchimento de uma delas com água e, em seguida, despejando esse conteúdo na outra [TROTTA(1980), p. 156]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. A maioria dos exemplos e dos exercícios propostos ilustra aplicações a "*estados de coisas*" e uma certa parte deles são tomados de provas de vestibulares. Embora haja uma clara disposição dos autores em enfatizar as aplicações das noções matemáticas a situações que nos lembram de "*estados de coisas*", assim como de enfatizá-las, também, no âmbito do próprio Conhecimento

Matemático, não podemos atestar que este Capítulo III atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática

No Capítulo IV, o estudo de As Figuras no Espaço é introduzido com uma seção denominada "*A Preocupação com o Espaço: Forma, Tamanho e Posição das Coisas*". Nesta pequena seção, que se inicia apresentando a Ciência e a Geometria como ferramentas para enfrentar essas preocupações, segue-se evidenciando que, neste capítulo, se estudará "***as posições das figuras no espaço***", as quais são tratadas mediante idéias ou conceitos marcadamente matemáticos, o que pode ser observado quando os autores afirmam que "*uma característica da ciência é que, sendo às vezes impossível captar a realidade na íntegra, ela cria* ***modelos****. Estabelece conceitos e idéias que, às vezes, não têm correspondentes na realidade. Às vezes, a ciência estuda o que não existe para compreender o que existe. Assim, por exemplo, quando se estuda a queda de um corpo, nas proximidades da Terra, desprezando a resistência do ar, está-se fazendo algo que na verdade não ocorre. No entanto, isto é necessário para que se possa compreender o que de fato acontece*" [TROTTA(1980), p. 215]. No final da seção, após sugerir-se que "*a Geometria também lança mão desses artifícios*", e considerar-se as noções de "*ponto*", "*reta*" e "*plano*" como noções "*puramente ideais*" [TROTTA(1980), p. 215-6], é apresentado, pelos autores, uma espécie de resumo conclusivo a respeito das noções básicas da Geometria: "*o* ***ponto****, a* ***reta*** *e o* ***plano*** *são noções geométricas ideais; são modelos criados por nossa imaginação, que não encontram correspondentes no mundo em que vivemos e que, no entanto, são usados justamente para podermos compreender certos aspectos da realidade*" [TROTTA(1980), p. 216]. A partir daí, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, sendo que uma certa parte deles são tomados de provas de vestibulares. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo IV atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

O Capítulo V, Polinômios — Equações Polinomiais (1ª. parte), inicia-se com a seção "*Divisão pelo Método da Chave*" [TROTTA(1980), p. 241], na qual apresenta-se um método marcadamente matemático. Da seção seguinte, "*Definições*", destacaremos um pequeno texto, relativamente à definição de "*divisão de polinômios*", que nos parece muito sugestivo: "*Observando cuidadosamente a definição anterior, você poderá perceber que ela envolve inúmeros conceitos. Por exemplo, a* 1^a*. condição,* $Q(x) \bullet B(x) + R(x) = A(x)$*, envolve o conceito de igualdade de polinômios. Já a* 2^a*. condição abrange o conceito de grau de um polinômio. Esta definição menciona ainda o "polinômio nulo". Perguntamos-lhe, então:* ***O que são polinômios iguais? O que é grau de um polinômio? O que é o polinômio nulo? Aliás, o que é um polinômio?*** *Você pode tentar descobrir outros conceitos matemáticos envolvidos na definição de divisão de polinômios. Como estamos vendo com esta definição, para explicar um novo conceito fazemos uso de inúmeros conceitos* ***anteriores****. Neste momento, sua tarefa consiste em responder às perguntas feitas e em fazer uma* ***montagem*** *deste capítulo de polinômios, até o item de divisão, colocando seus conceitos em* ***ordem lógica****, de modo que cada conceito possa ser definido a partir de outros anteriormente definidos*" [TROTTA(1980), p. 243]. Isso ilustra claramente o que queremos dizer quando afirmamos, e este é, também, o caso deste capítulo, que os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Há, também, a formulação e a correspondente demonstração do "*Teorema de D'Alembert*" — "*O resto da divisão do polinômio* $P(x)$ *por* $x - a$ *é* $P(a)$" —, tratado numa seção homônima [TROTTA(1980), p. 250]. Por isso, não podemos atestar que este Capítulo V atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo VI, no estudo de Números Complexos — Equações Polinomiais (2^a. parte), os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. No entanto, observamos que os autores apresentam, neste capítulo, a exemplo de muitos outros, alguns conceitos matemáticos como uma necessidade teórica surgida de um embate histórico motivado pela proposição de alguns problemas[90], que inicialmente teriam promovido o aparecimento desses mesmos

[90] Cf. part. TROTTA(1979a), p. 228 — "Os logaritmos foram descobertos por volta de 1620 por John Napier e por Jost Bürgi, cada um desconhecendo totalmente o trabalho do outro. O fato de uma descoberta científica ser feita por duas ou mais pessoas, independentemente uma das outras, é muito comum na história da ciência; isto nos mostra que as descobertas, assim realizadas, correspondem às soluções de problemas importantes, com os quais várias pessoas, muitas vezes em diferentes lugares, vinham se preocupando."

conceitos. Assim, a seção "*A Insuficiência dos Números Reais*" inicia-se com a formulação de um problema que envolve a determinação da "*aresta*" x de um cubo para que o seu volume seja equivalente ao volume de um prisma de igual altura e de "*área da base*" igual a 3. Para a determinação da solução deste problema, necessitaremos resolver a equação do 3°. Grau $x^3 - 3x - 1 = 0$, que sabemos ter uma "*raiz real*" entre 1 e 2, e, para tanto, os autores sugerem a fórmula de Cardano-Tartaglia apresentada na seção anterior, "*Considerações sobre Equações do 3°. Grau*": "*num livro publicado em 1545, Cardano (1501-1576) mostra que, sob certas condições, uma das raízes da equação de 3°. Grau, desprovida do termo em x^2, $x^3 + ax + b = 0$ é dada por*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

" [TROTTA(1980), p. 260].

Na aplicação dessa fórmula, deparamo-nos com uma "*raiz quadrada de um número negativo*", da qual depende a resolução do problema anterior e para a qual não existe um número real equivalente. Assim, a dificuldade é contornada com a concepção dos "*Números Complexos*". Voltando-se ao problema, na seção "*Retomando o Problema Inicial*", recai-se num novo problema: a "*radiciação de números complexos*" [TROTTA(1980), p. 272]. E, finalmente, "*o problema da radiação de números complexos só foi solucionado depois que se deu uma* ***representação geométrica*** *para os números complexos*" [TROTTA(1980), p. 273]. E, assim, não podemos atestar que este Capítulo VI atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

No Capítulo VII, o estudo de As Cônicas é introduzido com uma seção denominada "*A Elipse, a Parábola e a Hipérbole: presença no dia a dia*", a partir do exame de algumas situações que ilustram "*estados de coisas*", a fim de sugeri-las como uma possível exemplificação de tais curvas, *e.g.*, a "*parábola e os projéteis*", a "*elipse e as órbitas planetárias*" e a "*hipérbole e o abajur*" [TROTTA(1980), p. 309-15]. A partir daí, os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, sendo alguns destes tomados de provas de vestibulares. Assim, também não podemos atestar que este Capítulo VII atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

Por fim, no Capítulo VIII, o estudo das Matrizes é apresentado com uma seção introdutória, na qual os autores oferecem algumas considerações acerca da disposição pedagógica que teria orientado a elaboração dos três volumes em questão. "*Alguns dos assuntos tratados ao longo dos três volumes de nosso curso poderiam ter sido apresentados através de uma abordagem* ***lógico-dedutiva****. Procedendo desta maneira, não nos preocuparíamos com as situações práticas que fizeram surgir as definições dadas e as propriedades mais importantes, e nem daríamos ênfase, como o fizemos, às aplicações destes assuntos ao cotidiano; desapareceria a preocupação de ligar a Matemática à realidade. Ao invés disso, nos preocuparíamos, se adotássemos a abordagem lógico-dedutiva, em sofisticar, formalizar e em tornar mais rigorosa a linguagem matemática utilizada; nos preocuparíamos também em apresentar os assuntos da forma mais econômica possível, sem que com isto perdêssemos em rigor ou em encadeamento lógico. Um dos assuntos que poderia ser apresentado segundo a bordagem lógico-dedutiva é o que trata dos* ***números complexos****; e, a título de ilustração vamos fazer para você esta apresentação de forma sucinta*" [TROTTA(1980), p. 339].

Feito o que foi prometido, os autores encerram esta seção afirmando que no "*estudo das matrizes, vamos adotar a abordagem lógico-dedutiva, e o faremos por duas razões principais: 1) os alunos que, ao concluírem o 2º grau, pretendam se dedicar de forma especializada à Matemática, ingressando nesta área na universidade, vão deparar com freqüência com raciocínios lógico-dedutivos e achamos interessante que então já tenham visto algo nesse sentido; 2) as motivações e aplicações práticas mais interessantes das matrizes são de nível superior, e acreditamos que fogem bastante ao que pretendemos realizar neste curso. Assim, as matrizes serão apresentadas como um jogo lógico-dedutivo cujas regras rígidas e inflexíveis você conhecerá e, a partir delas, será convidado a jogar (através da resolução dos exercícios). Esperamos que você não se chateie muito com este convite*" [TROTTA(1980), p. 342]. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, e tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos. Por isso, não podemos atestar que este Capítulo VIII atenda, inequivocamente, a uma abordagem prática associada à Matemática.

6.3. Abordagem Teórica: Matemática — 2°. Ciclo - ensino atualizado

Por intermédio das considerações desenvolvidas anteriormente, relativamente aos três volumes desta coleção, podemos afirmar, inequivocamente, que a abordagem apresentada nesta coleção é uma abordagem *teórica* da Matemática, lembrando-nos, para tanto, de que a sua ênfase fundamental tem em atenção o desenvolvimento do próprio Conhecimento Matemático, numa disposição metodológica tomada nos moldes de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada e concebida como uma prerrogativa sobre o qual se assentou a propriedade da construção conceitual pretendida.

6.3.1. Aspectos Marcadamente Teóricos

1. Os conceitos matemáticos são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático, ou seja, cada conceito matemático é constituído a partir de outros conceitos matemáticos considerados como anteriormente dados.
2. Tanto os exemplos como os exercícios propostos são marcadamente matemáticos, isto é, são formulados no âmbito exclusivo do campo de ordem do Conhecimento Matemático, e em alguns deles solicita-se que se "*mostre*" ou que se "*prove*" uma dada propriedade.
3. Há formulações explícitas de teoremas e são consideradas as suas correspondentes demonstrações.
4. Há conceitos matemáticos que são considerados a partir de suas definições.
5. Há conceitos matemáticos que emergem da resolução de problemas tomados no âmbito da própria Matemática.

6.3.2. Aspectos Ligeiramente Práticos

1. Há alguns exercícios propostos nos quais se apresentam situações que nos lembram de "*estados de coisas*", no entanto, a consideração destas "*situações-problema*" limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente,

sendo as soluções para os seus problemas correlatos derivadas em termos estritamente formais e determinando-se mais como uma ilustração das possibilidades de aplicação da Matemática do que como uma efetiva aplicação além de seu próprio campo, que tratasse também da introdução de aproximações ou de verificações empíricas, por exemplo.

2. Há 1 (um) exemplo no qual os autores descrevem, rapidamente, a elaboração de um modelo físico, sugerindo o modelo matemático e a solução da equação diferencial correspondentes, e derivando do modelo matemático alguma interpretação possível para o modelo físico.

6.4. Abordagem Prática: Matemática Aplicada — 2°. Grau

A partir das considerações desenvolvidas anteriormente, relativamente aos três volumes desta coleção, *não* podemos afirmar, inequivocamente, que a abordagem apresentada nesta coleção é uma abordagem *prática* da Matemática. É isso o que devemos dizer, embora haja uma clara disposição dos autores em enfatizar as aplicações da Matemática no âmbito de outras Ciências e ao nível da "*utilidade ordinária*", destacando-se as suas declaradas preocupações com "*as situações práticas que fizeram surgir as definições dadas e as propriedades mais importantes*", com as "*aplicações destes assuntos ao cotidiano*", e a sua alegada "*preocupação de ligar a Matemática à realidade*" [TROTTA(1980), p. 339]. Justificamos essa afirmação, porém, dizendo, principalmente, que a propriedade da construção conceitual pretendida não se assenta no "*valor de predição ou de explicação*" das formulações matemáticas ou em "*verificações empíricas*", uma vez que o interesse básico da presente coleção não é a solução de algum problema científico ou o desenvolvimento de alguma "*matemática informal*", mas sim a consideração de uma "*matemática escolar*", mediante a óptica de suas aplicações. Em particular, e segundo a concepção de Matemática Aplicada considerada neste trabalho, devemos dizer que a presente coleção não é um texto de Matemática Aplicada, uma vez que ela não apresenta, por exemplo, as sugestões de elaboração de um modelo físico, a partir do qual se iria propor um problema científico, e as sugestões de elaboração um modelo matemático correspondente, a partir do qual se iria "*predizer*" ou "*explicar*" alguns aspectos da "*situação física*" correlata, e, também, ela não apresenta as sugestões de "*verificações empíricas*" para as resoluções propostas. A esse respeito, podemos destacar as observações finais de LIN(1978) acerca de "*Education of Applied Mathematicians*", nas quais ele considera que a "*emphasis should be placed on the solution of real-world problems. The applied mathematician must be able to produce a real* ***impact*** *on science [4] and be ready to compete with theorists otherwise educated in this effort*" [LIN(1978), p. 560], e que, "*in the development of general mathematical methods and theories, the applied mathematician should place emphasis on those directly related to applications. Leave most (if not all) pure mathematical issues to pure mathematicians interested in applications*" [LIN(1978), p. 560].

6.4.1. Aspectos Marcadamente Teóricos

1. Há conceitos matemáticos que são desenvolvidos sem qualquer apelo exterior ao campo de ordem do Conhecimento Matemático.
2. Tanto há exemplos como há exercícios propostos que são marcadamente matemáticos, e há alguns em que se solicita que se "*mostre*" ou que se "*prove*" uma dada propriedade.
3. Há formulações explícitas de teoremas e são consideradas as suas correspondentes demonstrações.
4. Há conceitos matemáticos que são considerados a partir de suas definições.
5. Há conceitos matemáticos que emergem da resolução de problemas tomados no âmbito da própria Matemática.
6. Há uma disposição clara de enfatizar as aplicações das noções matemáticas no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, quando não é possível aplicá-las a "*estados de coisas*".
7. Há uma referência clara acerca da necessidade de uma "*ordem lógica*", uma vez que, para explicar um conceito, impõem-se apelar para outros conceitos dados anteriormente, "*de modo que cada conceito possa ser definido a partir de outros anteriormente definidos*" [TROTTA(1980), p. 243].
8. Há conceitos matemáticos que são apresentados como uma necessidade teórica motivada pela proposição de alguns problemas matemáticos.

9. Há a introdução de alguns métodos de aproximação, para a determinação de áreas e volumes, que são legitimados pelo formalismo dos raciocínios matemáticos.

6.4.2. Aspectos Ligeiramente Práticos

1. Há alguns exercícios propostos nos quais se apresentam situações que nos lembram de "*estados de coisas*", no entanto, a consideração destas "*situações-problema*" limita-se, especificamente, ao âmbito de um modelo matemático presumível e correspondente, sendo as soluções para os seus problemas correlatos derivadas em termos estritamente formais e determinando-se mais como uma ilustração das possibilidades de aplicação da Matemática do que como uma efetiva aplicação além de seu próprio campo, que tratasse também da introdução de "*aproximações não-rigorosas*" ou de "*verificações empíricas*", por exemplo.
2. Há uma referência clara acerca da necessidade da criação de modelos, como idealizações "*que não encontram correspondentes no mundo em que vivemos*" [TROTTA(1980), p. 216], a exemplo da Geometria Plana, que ajudariam na resolução de diversos problemas, num sentido específico que destaca as aplicações da Matemática.
3. Há uma clara disposição dos autores em apresentar qualquer novo conceito matemático a partir da resolução de exemplos ou de exercícios propostos que ilustram situações que nos lembram de um "*estado de coisas*", e, somente após, são oferecidas definições ou deduzidas algumas fórmulas.
4. Há referências às aplicações da Matemática ao nível da "*utilidade ordinária*", a exemplo do "*teorema de Pitágoras*", que é sugerido como "*uma aplicação prática, bastante interessante*", do uso do triângulo de lados 3, 4 e 5 pelos carpinteiros, e que é chamado "*esquadro dos carpinteiros*" [TROTTA(1979a), p. 168].
5. Há referências a "*métodos práticos*", associados às aplicações da Matemática ao nível da "*utilidade ordinária*", para a resolução de alguns problemas, a exemplo da determinação de áreas, através de desenhos e recortes em papel, e de volumes, através da imersão em água.

6. Há uma clara disposição dos autores em justificar a necessidade do estudo de algumas noções matemáticas enfatizando as aplicações dessas noções no âmbito da própria Matemática e mostrando a "*grande utilidade*" das mesmas em outros campos de atividades.

6.5. Abordagem Teórica *versus* Abordagem Prática

Especificamente, no que diz respeito à concepção ou à apreensão das formulações matemáticas, a questão básica que se colocará, nesta subseção, é a seguinte: Sob que aspectos as *abordagens teórica e prática* da Matemática são, efetivamente, distintas?

Com efeito, podemos atestar que, se há alguma distinção efetiva entre as duas abordagens consideradas nestas coleções, elas se distinguem, tão-somente, por uma diversidade de ênfase sobre os conteúdos tratados. Na coleção de CATUNDA, as formulações conceituais das concepções matemáticas são propostas enquanto um produto de uma necessidade teórica, cuja motivação é interna à própria Matemática, mediante algumas correlações conceituais e operacionais motivadas eminentemente pelo próprio Conhecimento Matemático. Na coleção de TROTTA, as formulações conceituais das concepções matemáticas são propostas enquanto um produto de uma necessidade teórica, cuja motivação é supostamente externa à própria Matemática, mediante algumas correlações conceituais e operacionais motivadas eminentemente pelas aplicações da Matemática, quando possível. No entanto, o produto final destas duas elaborações conceituais é equivalente, e é sobre a promoção ou sobre o desenvolvimento de uma "*matemática escolar*" que recaem todas as atenções dos autores destas duas coleções. No caso da coleção de CATUNDA, a alegação básica e a motivação para a introdução dos conteúdos matemáticos tratados é a de "*preencher algumas lacunas de conhecimento e dar a orientação que será usada no estudo da Matemática superior*" [CATUNDA(1971), p. vi]. No caso da coleção de TROTTA, a alegação básica e a motivação para a introdução dos conteúdos matemáticos tratados é a "*preocupação de ligar a Matemática à realidade*" [TROTTA(1980), p. 339], evidenciando a "*utilidade*" da Matemática por meio de suas "*aplicações práticas*".

Por conseguinte, podemos afirmar, também, que mesmo a suposta e tácita distinção antagônica entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada, que as coloca em um confronto irreconciliável, pondo uma como "*teórica*" e outra como "*prática*", e que serviria de sustentáculo para um discurso que pretenderia ver o Ensino de Matemática tendo um caráter "*mais prático*"[91], não caberia com relação às duas coleções consideradas, porque ambas têm em atenção a promoção de uma "*matemática escolar*". Contudo, se com esse caráter "*mais prático*" pretende-se evidenciar que o Ensino de Matemática deva enfatizar as aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências, é ao Ensino destas outras Ciências que o Ensino de Matemática deveria aliar-se. Se com esse caráter "*mais prático*" pretende-se incentivar o ensino de uma "*matemática informal*", será necessário, antes, identificar e, posteriormente, desenvolver essa "*matemática informal*", inequivocamente interessante a uma dada comunidade. Mas nenhum destes dois interesses legítimos será motivo bastante para preterir-se uma "*matemática escolar*".

Nessa medida, e mesmo não nos sendo possível qualificar a coleção de TROTTA como uma abordagem *prática* da Matemática, segundo as concepções anteriormente apresentadas, podemos afirmar que, mesmo nessa tentativa de abordar a dimensão prática da atividade Matemática, não foi possível aos autores prescindir de sua correlata dimensão teórica, uma vez que os "*processos ou métodos práticos*", sugeridos eventualmente, "*têm suas limitações e imprecisões*" [TROTTA(1980), p. 124]. Assim, atestamos que, ao menos no que diz respeito à coleção de TROTTA, não é possível tomar a dimensão prática da atividade Matemática como um campo que pudesse ser distinguido autônoma e independentemente, no que diz respeito, especificamente, à concepção ou à apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático. E, com relação à coleção de CATUNDA, mesmo que não possamos estabelecer uma contraposição entre as dimensões teórica e prática da atividade Matemática, porque as aplicações da Matemática, nesta coleção, limitam-se ao âmbito do próprio Conhecimento Matemático, podemos

[91] Cf. part. LIN(1978), p. 556-7 — "How can we arrange an educational program in applied mathematics to achieve the objectives described above? First, this education process must be started in the undergraduate years, during the formative period of the youth. If a person has formed an attitude to consider it far more valuable to prove an elegant theorem in algebra than to study the exploration of oil fields, or to explain a phenomenon observed in the atmosphere or in the galaxies with the help of mathematical methods (or to consider the latter as "somebody else's business"), it would be very difficult to convert him to another set of beliefs."

atestar a inalienável importância das aplicações para a concepção ou para a apreensão das formulações matemáticas tratadas, como é possível observar na análise proposta para essa mesma coleção.

7. Matemática Pura *versus* Matemática Aplicada

Partindo-se das considerações precedentes, podemos afirmar que somente nos é possível estabelecer a contraposição "dimensão teórica *versus* dimensão prática" no âmbito de uma *atividade matemática*, uma vez que, como já foi observado, a "*applied mathematics is a disciplined activity which lies between the empirical sciences and pure mathematics*" [LIN(1976), p. 533]. Ademais, e como veremos no Capítulo II, o Conhecimento Matemático determina-se mediante três dimensões inalienáveis, de tal modo que nenhuma delas poderá receber os qualificativos 'dimensão teórica' ou 'dimensão prática'. Nessa medida, intentaremos, nesta seção, desenvolver uma contraposição entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada, especificamente na esfera de abrangência de suas atividades, para que nos seja possível apontar para alguma vinculação que possa ser estabelecida entre estas duas dimensões associadas ao Conhecimento Matemático, já que, como podemos observar a partir das Seções 3 e 4, a Matemática Pura e a Matemática Aplicada determinam-se como dois campos de pesquisa independentes no âmbito da Atividade Matemática.

Com efeito, e oportunamente, podemos afirmar, então, a partir das considerações anteriores, que uma atividade matemática não poderá ser tomada como o próprio Conhecimento Matemático. Poderíamos dizer que a Matemática Pura e a Matemática Aplicada[92] são "*o que os matemáticos fazem*", sua atividade mesma, mas não poderíamos dizer que o Conhecimento Matemático é uma fluência ideativa circunstanciada e limitada a uma atividade ensejada por alguns seres humanos e distinguida como "*fazer matemático*". Pretendemos, com isso, efetivar a primeira de nossas *teses intermediárias*, que consiste na afirmação de que *o Conhecimento Matemático não se determina*

[92] Cf. part. LIN(1974), p. 32 — " 'Applied Mathematics' is what 'applied mathematicians' do, while 'applied mathematicians' are people who go out and talk to those in other disciplines who are attempting to use mathematics, and who know enough about the discipline itself to understand the problems on a deeper level."

exatamente em uma atividade matemática, não se reduzindo, portanto, às suas aplicações, oferecendo alguma substância àquelas rápidas considerações, propostas na Introdução deste trabalho, com respeito a essa mesma tese.

Nessa medida, podemos dizer, também segundo as considerações anteriores, que o âmbito da Atividade Matemática abrange quatro campos de atividades, a saber, a atividade desenvolvida no campo da Matemática Pura, a atividade desenvolvida no campo da Matemática Aplicada, a atividade desenvolvida no campo da Matemática Informal e a atividade desenvolvida no campo da Matemática Escolar. Nenhuma dessas atividades lida com a totalidade do campo do Conhecimento Matemático, mas apenas com uma certa região dele, uma vez que todas essas atividades pressupõem um Conhecimento Matemático já posto previamente, para o qual elas se voltam, buscando desenvolvê-lo, aplicá-lo ou apreendê-lo. No âmbito da Matemática Pura e da Matemática Escolar, valemo-nos de uma certa região da Matemática que possa ser abrangida por uma axiomática e por um formalismo correspondente, e, no âmbito da Matemática Aplicada e da Matemática Informal, valemo-nos de um modelo matemático a partir do qual possamos enfrentar algumas "*situações-problema*". Ademais, a pressuposição de um Conhecimento Matemático, já posto anteriormente ao desenvolvimento de qualquer atividade matemática ou de qualquer aplicação da Matemática, sugere que esse mesmo conhecimento seja um bem cultural da humanidade que transcende qualquer manifestação empírica que pretenda evidenciá-lo.

7.1. Matemática e Realidade

Queremos crer que o êxito[93] extraordinário da atividade matemática, que põe o Conhecimento Matemático e alguns sistemas materiais de nossa *realidade material*

[93] Cf. part. AMOROSO COSTA(1981), p. 327 — "Não se compõe um texto literário, tocando às cegas nas teclas de uma máquina de escrever: assim também, toda a construção matemática digna de interesse revela a atividade de uma inteligência que efetua certas combinações privilegiadas, entre as combinações simplesmente possíveis. Não se compreende que o espírito eleja por simples acaso uma matemática tão admiravelmente adequada aos fatos externos."

continente em uma correlação isomorfa[94], assenta-se em uma concepção que presume uma analogia estrutural[95] entre o modo de conceber e entre o modo de apreender tanto os objetos matemáticos como os objetos desses sistemas materiais. Segundo o que se pode observar das seções anteriores, é na atividade matemática que se determina essa correlação isomorfa, mediante a constituição de um modelo matemático correspondente a um modelo físico, idealizado a partir de uma dada "*situação física*", pressupondo que seja possível estabelecer um isomorfismo[96] entre os objetos matemáticos e os objetos desse modelo físico. Embora essa atividade matemática possa apresentar-se munida de certos traços perceptíveis sensorialmente, ela desenvolve-se, especificamente, no âmbito de uma *realidade conceitual*, mediante o uso de métodos que atendem, principalmente, aos interesses do matemático aplicado, isto é, dos métodos desenvolvidos nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências, os quais podem ser apresentados rapidamente como "*formulação*", "*solução*" e "*interpretação*", como já vimos.

Inicialmente, trataremos, então, de apresentar os aspectos fundamentais de uma atividade matemática que entendemos necessária e suficiente para permitir-nos o acesso ao Conhecimento Matemático, a qual se desenvolverá, basicamente, sobre um modo de conceber os objetos matemáticos. Posteriormente, indicaremos rapidamente em que medida nos é possível apreender os objetos de um dado sistema material, buscando evidenciar essa suposta correlação isomorfa entre os objetos matemáticos e os objetos de um sistema material, por via de algum modelo físico.

Destarte, partindo-se das considerações desenvolvidas em nossa Dissertação de Mestrado, podemos afirmar que a possibilidade da apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático põe-se, basicamente, na pertinente

[94] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 209 — "Um sistema é isomórfico a outro se existe uma correspondência biunívoca que associe as propriedades do primeiro com as propriedades do segundo. Dizer que existe um isomorfismo entre dois sistemas é, portanto, dizer que eles têm a mesma estrutura. A medição é o processo de encontrar um isomorfismo entre as grandezas reais e as relações na série dos números."

[95] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 214 — "A matemática aplica-se convenientemente à realidade por esta achar-se constituída de tal forma que, em nossas inter-relações com ela, há certos invariantes suscetíveis de "captação" pelas estruturas matemáticas. Em casos simples, porque as estruturas matemáticas constituem abstrações de situações reais."

[96] Cf. part. FUCHS, Walter Robert. **A matemática moderna**. Tradução Marianne Arnsdorff e José Manasterki. São Paulo: Ed. Polígono, 1970. 290p.; p. 174-5 — "Quando existem duas totalidades isomorfas, o conhecimento das condições em uma totalidade implica o conhecimento das condições na segunda, se se restringe essa proposição a fatos com respeito aos quais existe isomorfismo. Vistas dessa forma, as totalidades isomorfas devem ser consideradas equivalentes. Se se abstrai tudo o que muda no passar de uma totalidade para a outra isomorfa, o que resta é a *estrutura* incorporada às duas totalidades."

explicitação de uma instância epistemológica própria a esse mesmo conhecimento, ou seja, põe-se na explicitação da natureza especial e dos pressupostos fundamentais do Conhecimento Matemático. Por outras palavras, concebemos o Conhecimento Matemático como uma realidade conceitual já posta no âmbito da realidade psicológica humana engendrada histórica e culturalmente, a exemplo da música, das artes plásticas, das "filosofias religiosas" etc., e, com isso, queremos dizer que a possibilidade de acesso a essa realidade conceitual determinar-se-á, necessariamente, na possibilidade de sua objetivação. Ademais, e para tanto, deveremos especificar o campo no qual opera o Conhecimento Matemático, além de especificar os objetos e os procedimentos que lhes são próprios.

Nessa medida, a explicitação dessa instância epistemológica, tomada, sobretudo, do desvelamento do universo referencial engendrador da totalidade das concepções matemáticas, revela-nos a natureza especial do Conhecimento Matemático como sendo um tipo de ordem[97] que opera em seu próprio campo de ordem, impondo-nos a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como derivadas desse mesmo campo ordem. Por conseguinte, na objetivação do Conhecimento Matemático desenvolve-se uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como um produto de alguma experiência possível, idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado, segundo uma rede de concepções conceituais erigida e realimentada em uma sucessão de formulações conceituais, isto é, segundo uma atividade discursiva. Assim, essa objetivação será alcançada a partir da observância de que qualquer objeto matemático deverá emergir enquanto uma composição predicativa de um conjunto de outros objetos matemáticos previamente distinguidos. Como exemplo, basta-nos lembrar da "*divisão de polinômios*" considerada na Seção anterior, na qual TROTTA(1980, p. 243) afirma que "*observando cuidadosamente a definição anterior, você poderá perceber que ela envolve inúmeros conceitos. Por exemplo, a 1^a. condição, $Q(x) \bullet B(x) + R(x) = A(x)$, envolve o conceito de igualdade de polinômios. Já a 2^a. condição abrange o conceito de grau de um polinômio.*

[97] Cf. part. CARNAP, Rudolf, HAHN, Hans e NEURATH, Otto. A concepção científica do mundo – o círculo de viena, 1929. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, [Campinas], [s.v.], n. 10, p. 5-20, [s.m.], 1986; p. 14 — "A possibilidade de conhecimento não mais se baseia em que a razão humana imprima sua forma ao material, mas em que o material seja ordenado de um determinado modo. Nada se pode saber de antemão sobre a espécie e o grau desta ordem. O mundo poderia ser muito mais ou muito menos ordenado do que é, sem que se perdesse a cognoscibilidade."

[...] *Como estamos vendo com esta definição, para explicar um novo conceito fazemos uso de inúmeros conceitos* ***anteriores***". Analogamente, também poderíamos explicar o que é este novo objeto tecnológico chamado "*toca MP3*", apelando-se para outros objetos como os "*toca discos*", "*toca fitas*" e "*toca CDs*", por exemplo.

Na especificação do campo operacional do Conhecimento Matemático, o caráter funcional ou operacional dos objetos matemáticos determina-se mediante a incorporação das condições de operação desses objetos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais, desenvolvendo-se uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático sob a condição de afirmar-se dele alguma destinação operacional, isto é, segundo a indicação das circunstâncias em que este objeto poderá ser invocado. Assim, esse campo operacional, que se determina como um "*espaço de configuração*", constituir-se-á mediante a observância de que qualquer objeto matemático seja tomado na perspectiva das diversas operações que teriam ensejado a sua concepção. Como exemplo, basta-nos lembrar da noção de "*número imaginário*", também considerada na Seção anterior, que emerge de alguns problemas associados à resolução de "*equações algébricas*". Numa tentativa de solucionar um de tais problemas, através da aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia, deparamo-nos, segundo TROTTA(1980, p. 260), com uma "*raiz quadrada de um número negativo*", da qual depende a resolução desse problema e para a qual não existe um número real equivalente. Essa dificuldade somente é contornada, por fim, com a concepção dos "*Números Complexos*". Desse modo, o caráter operacional ou funcional do objeto "*número imaginário*" será tomado a partir de sua própria concepção em uma rede de concepções conceituais. Analogamente, para que possamos entender ou desfrutar do "*toca MP3*", deveremos aprender acerca de sua funcionalidade, incorporando as condições de sua operação às condições de sua concepção no "*mundo dos computadores*".

Na especificação dos objetos e dos procedimentos que são próprios ao Conhecimento Matemático, e que nos revelam os pressupostos fundamentais desse mesmo conhecimento, por um lado, estabelece-se a condição exclusivamente formal dos objetos matemáticos, mediante a determinação destes objetos como uma composição de outros objetos matemáticos e como uma estrutura operacional fundamental, desenvolvendo-se uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático sob a condição de sua determinação genérica, o que poderá ser alcançado mediante um confronto, sempre crescente, entre as relações conceituais e as relações operacionais que o poderiam constituir. Por outro lado, assentam-se os procedimentos que têm lugar na sustentação e na promoção das formulações matemáticas, desenvolvendo-se uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático segundo uma conseqüente reconstrução formal de sua concepção, ativando um conjunto de raciocínios por recorrência e de raciocínios por dedução ensejados pelo raciocínio por abdução. Assim, os procedimentos que são próprios ao Conhecimento Matemático serão alcançados a partir da observância de um conjunto de formulações conceituais previamente assentadas, por via de análise, e a partir da observância de um conjunto de "*inferências válidas*" ou de argumentos válidos, por via de síntese.

A propósito da associação entre Matemática e Realidade, gostaríamos de salientar que, a exemplo da associação entre "*razão e experiência*"[98], não nos será possível estabelecer qualquer tipo de precedência de uma em relação à outra. Como observa AMOROSO COSTA(1981, p. 328), "*as dúvidas desse gênero se dissipam quando nós acompanhamos o desenvolvimento histórico da ciência. Incontestavelmente, ela procurou antes de tudo ser uma representação do real. A noção de número modelou-se sobre as grandezas que aparecem no campo da experiência, e impregnou-se dos seus caracteres. Cada categoria de número é o arquétipo de uma categoria de grandezas. Sobre o número fracionário, símbolo da grandeza divisível, sobre o número real, símbolo da grandeza contínua, nós reconstruímos a cadeia das relações entre as grandezas divisíveis ou entre as grandezas contínuas. Mas as generalizações superiores da idéia de número nem sempre nasceram da consideração das grandezas às quais se vieram a aplicar, e precederam, ao*

---

[98] Cf. part. Da COSTA(1993), p. 52 — "A experiência, como salientou Popper muito bem, é sempre algo teorizada. Na realidade, razão e experiência se completam e se interferem profundamente. Não há razão sem experiência e não há experiência sem razão."; part. BACHELARD(1971), p. 108 — "Em outras palavras, o físico moderno precisa de uma dupla certeza: 1) A certeza de que o real está em conexão direta com a racionalidade, merecendo por isso mesmo o nome de *real científico*. 2) A certeza de que os argumentos racionais referentes à experiência são já momentos dessa experiência. Em resumo, nada de racionalidade no vazio; nada de empirismo desconexo, eis as duas obrigações filosóficas que inauguram a estreita e rigorosa síntese da teoria com a experiência na Física contemporânea."; e part. BOHM(1980), p. 25 — "Evidentemente, a clareza de percepção e de pensamento requer que geralmente estejamos conscientes de como a nossa experiência é moldada pelo *insight* (nítido ou confuso) proporcionado pelas teorias implícitas ou explícitas em nossos modos gerais de pensar. Com esta finalidade, é útil enfatizar que a experiência e o conhecimento são um só processo, em vez de pensar que o nosso conhecimento é *sobre* algum tipo de experiência separada."

contrário, muitas vezes, qualquer interpretação concreta. De posse da noção indefinidamente generalizável de número, a matemática pura prescinde da noção de grandeza concreta. A intuição e a experiência podem escolher a classe de números apta a representar cada classe de grandezas; dizer que entre essas classes há identidade de estrutura, é, porém, enunciar um postulado que escapa ao domínio da matemática propriamente dita".

Por conseguinte, no que diz respeito a nossa *realidade material* continente, queremos crer que a possibilidade de apreensão de qualquer um de seus sistemas materiais determina-se, também, como um produto de alguma experiência possível, idealizada anteriormente em um dado sistema conceitual[99] e realizada num certo "*ambiente*", no qual cada um dos objetos desses sistemas materiais emergirão enquanto uma composição[100] predicativa. Como exemplo, podemos afirmar que somente é possível percebermos uma "*caneta esferográfica*" a partir do ambiente, do meio ou do contexto no qual ela se acharia imersa, parecendo-nos impraticável *desprendê-la* ou *descolá-la* do fundo a partir do qual ela pudesse ser distinguida[101]. Queremos crer que a "*caneteidade*" manifesta-se, tão-somente, como uma composição predicativa, isto é, na apreensão de uma caneta esferográfica, o que vemos distinguir-se como tal nada mais é do que, por exemplo, uma dada forma geométrica, uma dada cor, uma dada textura, uma dada composição de elementos materiais etc., passíveis somente de serem destacadas ou separadas do ambiente que lhes seria comum. Assim, estamos admitindo que haja um isomorfismo entre os sistemas conceituais e os sistemas materiais destacados de nossa *realidade material*

[99] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 15 — "Se o real perde a individualidade fisicamente seguindo no sentido dessas regiões profundas da física infinitesimal, o cientista irá dar mais importância à organização racional de suas experiências na medida em que fizer aumentar o rigor dela. Medida rigorosa é sempre medida complexa; trata-se pois de uma experiência organizada racionalmente. [...] O conhecimento científico é sempre a reforma de uma ilusão. Portanto, não mais podemos ver na descrição, mesmo na descrição minuciosa do mundo imediato, senão uma *fenomenologia de trabalho* no próprio sentido em que se falava antigamente de *hipótese de trabalho*."

[100] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 83 — "Para compreender essa inversão deve-se dizer: as qualidades substanciais estão *acima* da organização estrutural; não estão *debaixo*. As qualidades materiais são fatos de composição, não fatos de uma substância íntima dos componentes. Atingimos um limite em que o realismo não mais se interioriza, onde precisamente o realismo se exterioriza."

[101] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 14-5 — "É inútil levar mais longe a análise ao ponto de isolar sob todos os pontos de vista um objeto único, porque parece claro que no mundo da microfísica o único e peculiar perde suas propriedades substanciais. A partir de então, o que existe são propriedades substanciais por cima — e não por baixo — dos objetos microscópicos. A substância do infinitamente pequeno é contemporânea da relação."

continente, um isomorfismo que diz respeito a uma analogia estrutural entre esses dois sistemas, um isomorfismo que se coloca no sentido específico da *concepção* e da *apreensão* dos objetos de cada um deles, de tal modo que qualquer um desses objetos deva ser tomado ou deva emergir como uma *composição predicativa*[102] derivada do respectivo campo referencial continente desses mesmos sistemas.

Segundo Da COSTA(1997, p. 30), "*quando se recorre ao sistema conceitual S no terreno da experiência, pressupõe-se que S* ***capta*** *traços da realidade, de certa região objetiva R. Se S não tivesse nada de estruturalmente comum com R, não seria instrumento pelo qual procuramos conhecer R. A ciência empírica busca basicamente obter relações constantes no contorno, através de teorizações, previsão e explicação*". Assim, é bastante dizer, e como veremos mais especificamente no Capítulo II, que a possibilidade de uma correlação isomorfa, entre um sistema conceitual e um sistema material, assentar-se-á exatamente na instituição de um outro sistema conceitual[103], previamente desenvolvido e capaz de suportar esse mesmo sistema material como um de seus subprodutos.

Nessa medida, podemos afirmar que a possibilidade da especificação de uma atividade matemática, que nos permitirá correlacionar o Conhecimento Matemático e algum sistema material destacado de nossa *realidade material* continente, pôr-se-á exatamente na possibilidade da constituição de um modelo matemático correspondente a um dado modelo físico, idealizado a partir desse mesmo sistema material[104]. Como já observamos na Seção 2, quando buscamos um modelo matemático de alguma "*situação física*", no âmbito da Matemática Aplicada, deveremos elaborar, efetivamente, esse modelo matemático pretendido a partir de um modelo físico correspondente a essa mesma

---

[102] Cf. part. LE GOFF, Jacques. **História e memória**. 3.ed. Tradução Suzana Ferreira Borges. Campinas: Ed. da Unicamp, 1994. 553p.; p. 541 — "Da confluência das duas revoluções [do "alargamento do conteúdo do termo documento" e a "revolução tecnológica, a do computador"] nasce a *história quantitativa*, que põe novamente em causa a noção de documento e o seu tratamento. [...] "O documento, o dado já não existem por si próprios, mas em relação com a série que os precede e os segue, é o seu valor *relativo* que se torna objetivo e não a sua relação com uma inapreensível substância real" [Furet, 1974, pp.47-48]."

[103] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 222 — "Nas ciências reais, procuramos apreender o contorno pela construção de teorias ou, o que dá no mesmo, de modelos, via processos lógico-matemáticos, que constituem sistemas conceituais organizados, isto é, formas ou estruturas."

[104] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 164 — "Para autores como Russell, na ciência, nomeadamente na física, buscam-se modelos teóricos que sejam isomorfos a estruturas do mundo real (ver Russell, 1954)." [Conquanto esta citação, algo interessante, nos sirva como ilustração, se nos fosse possível distinguir, apontar e configurar as supostas "*estruturas do mundo real*" não seria preciso "*buscar*" por "*modelos teóricos*", pois, assim, nós já as teríamos constituído.]

"*situação física*", lembrando-nos de que esse "*modelo físico* ***não*** *corresponde exatamente ao objeto físico real, uma coisa observável em qualquer tempo ou local. É uma idealização ou uma simplificação. Em qualquer instante ou local particular, há infinitamente muitos tipos diferentes de observações ou medidas que poderiam ser pedidos. O que está acontecendo em um local e instante particular pode sempre ser distinguido do que está acontecendo em algum outro lugar e instante. A fim de desenvolver uma* ***teoria****, um ajuste com alguma aplicabilidade geral, o físico isola algumas características particulares como "variáveis de estado" e as usa para representar o objeto físico real infinitamente complexo. Desta maneira, ele cria um modelo físico — algo que já é uma simplificação da realidade física*" [DAVIS(1982), p. 421]. Por conseguinte, admitindo-se que possamos ensejar "*a substituição de conceitos e proposições empíricos por matemáticos*" [KÖRNER(1960), p. 185], e que possamos tomar, como um "*universo ou domínio de base*", um conjunto de formulações matemáticas, nas quais as "*variáveis ou constantes de indivíduos*", desse modelo físico, tomarão seus valores, deveremos estar prontos para admitir, também, nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências, que estaremos lidando, efetivamente, com duas realidades conceituais[105], em alguma medida autônomas e independentes, mediante as quais pretenderemos configurar uma dada realidade material, a saber, um modelo físico e um modelo matemático correspondente.

7.2. Atividade Matemática

A possibilidade de uma contraposição entre "teoria e prática", no que diz respeito ao Conhecimento Matemático, coloca-se no âmbito das aplicações da Matemática às demais Ciências, ou eventualmente, no âmbito das aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária, e, portanto, fora de seu próprio campo de ordem. Assim, é no âmbito da

[105] Cf. part. AMOROSO COSTA(1981), p. 328 — "A fecundidade prática da matemática moderna data do dia em que os fundadores das geometrias não-euclidianas abandonaram resolutamente o modelo que lhes indicara a experiência ingênua."; e part. Da COSTA(1997), p. 45 — "O cientista é construtor de estruturas conceituais; procura mapear o real por intermédio das configurações que inventa. Deixa o conteúdo concreto de lado, buscando o universal e o estrutural. Por essa rota, ele chega normalmente à matemática, pois esta última, em certo sentido, identifica-se com a teoria geral e abstrata dos sistemas conceituais ou, o que significa a mesma coisa, das estruturas matemáticas."

atividade matemática que deveremos buscar pela contraposição "Matemática Pura *versus* Matemática Aplicada".

Podemos observar inicialmente que "*na ciência pura buscamos o conhecimento pelo conhecimento. Não estamos interessados em aplicações, em obtenção de resultados que julgamos proveitosos em algum sentido. A ciência aplicada não difere intrinsecamente da ciência pura, mas apenas em seus objetivos: nesta última, não contam primariamente as aplicações, embora na primeira estas sejam prioritárias. Nas disciplinas aplicadas, estudamos métodos, teorias, que sejam relevantes para determinadas aplicações. Assim, não há separação completa entre ciência pura e ciência aplicada; há, tão-somente, diversidade de ênfase nos temas que se investigam*" [Da COSTA(1997), p. 30].

Não nos é difícil admitir e reconhecer completamente, à luz das considerações de LIN(1974), que há diferenças na motivação, nos objetivos, na ênfase e na atitude entre os matemáticos puros e os matemáticos aplicados, basicamente, quando aceitamos que, na Matemática Pura, a "*logic remains the only tool permitting judgment of the correctness of a theory*" [LIN(1974), p. 6], e que, na Matemática Aplicada, a "*empirical verification is a necessary and powerful judge*" [LIN(1974), p. 6]. No entanto, devemos reconhecer, também, que, nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências, o esforço desenvolvido pelo matemático aplicado, em sua atividade, tanto se aproxima da atividade de um cientista teórico como da atividade de um matemático puro, por um lado, quando ele busca pela *formulação de problemas e conceitos científicos em termos matemáticos* e pela *discussão, interpretação e avaliação dos resultados de sua análise, incluindo a feitura de predições específicas*, e, por outro lado, quando ele busca pela *criação de idéias, conceitos e métodos que são de significação básica e de aplicabilidade geral para o assunto em questão, incluindo a formulação de princípios gerais*, e pela *criação de novas idéias e teorias matemáticas*, respectivamente.

Queremos evidenciar, com isso, que o matemático aplicado, ou a Matemática Aplicada, agrega em si, digamos assim, o "*melhor de dois mundos*"[106],

[106] Cf. part. LIN(1976), p. 537 — "Indeed, the education of an applied mathematician must provide him with a breadth of knowledge in both mathematics and the fundamentals of the sciences. He is then in the best position to advance a specific subject by the creation of suitable mathematical model, by his critical and precise thinking, and by transferring the mathematical knowledge gained through the study of another scientific discipline."

buscando, ao mesmo tempo, uma incisiva disposição pragmática e uma generalizante incursão teórica, ou seja, "*the applied mathematician should examine his results to reach a deeper understanding of the problem at hand, and attempt to abstract the essentials to form concepts which are of more general applicability. At the same time, his conclusions must, of course, be checked against the existing body of knowledge. Any new inferences or predictions from his results are also subject to verification by further experimentation and observation, since their truth cannot be determined by purely logical means. With complementary theoretical and empirical efforts, a deeper and more penetrating understanding may be achieved*" [LIN(1976), p. 536]. E, com efeito, queremos crer que será com relação a essa postura do matemático aplicado, de uma incisiva disposição pragmática e de uma generalizante incursão teórica, que poderemos ensejar a contraposição "Matemática Pura *versus* Matemática Aplicada", exatamente com respeito à concepção ou à apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático.

Por conseguinte, intentamos assentar que a contraposição "Matemática Pura *versus* Matemática Aplicada" não se coloca além do âmbito da atividade matemática, não se colocando, por isso, no campo de ordem do Conhecimento Matemático, embora possam haver divergências quanto ao lugar que seria próprio para a Matemática Aplicada e quanto ao seu "*educational process*". A respeito da natureza e do papel da Matemática Aplicada, LIN(1978, p. 553) aponta para três abordagens, basicamente: "*one is centered on pure mathematics, with the field of application as an extension or specialization (and hence occupying a secondary role); another is essentially to leave the subject to the theorists in the individual scientific disciplines and not to think of applied mathematics as a separate profession (obviously, this position cannot be advocated at a meeting of SIAM*[107]*); third is to look at all branches of applied mathematics as interrelated – similar to the various branches of pure mathematics – and to encourage a comprehensive understanding of these subjects by talented young students, with the hope that the interrelationship between all these subjects will become strengthened through cooperative efforts of all applied mathematicians*". Quanto às divergências entre matemáticos puros e matemáticos aplicados acerca do "*educational process*", LIN(1978, p. 555) sugere que "*many pure mathematicians would insist that a person must first become a pure mathematician before*

[107] Society for Industrial and Applied Mathematics.

learning about applications. However, mathematics is not an easy subject. Learning applications is another difficult matter, especially the processes of formulation and interpretation, as we have noted".

Posto isso, podemos afirmar que, no que diz respeito, especificamente, à concepção ou à apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático, a possibilidade de estabelecer-se alguma vinculação estrita entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada colocar-se-á exatamente sobre as aplicações da Matemática, seja no âmbito da própria Matemática ou no âmbito das demais Ciências, sempre que pudermos manter uma incisiva disposição pragmática e uma generalizante incursão teórica, por ocasião da concepção ou da apreensão de qualquer formulação matemática. Nesse sentido, pode-se dizer que a concepção de qualquer formulação matemática não será, então, somente um privilégio do matemático puro ou somente um privilégio do matemático aplicado, uma vez que ambos, embora com motivações distintas, buscam dar respostas a determinadas indagações, em suas atividades, valendo-se, para tanto, e inicialmente, de qualquer teoria matemática já assentada. Desse modo, a formulação de qualquer concepção matemática poderá ser ensejada a partir da solução de quaisquer problemas, tomados no âmbito da própria Matemática ou tomados no âmbito das demais Ciências, uma vez que, na atividade matemática desenvolvida por matemáticos puros ou aplicados, a formulação de qualquer concepção matemática deverá atender aos cânones contemporâneos do Conhecimento Matemático[108].

Por conseguinte, observamos que, em uma última nota, ao concebermos a noção de teoria, enquanto o aspecto constitutivo, ideal e indicador de uma realidade material, tomando-a como uma disposição interpretativa necessária que, por meio de uma estrutura de interpretação ou de um modelo, estabelece, basicamente, a natureza de um

---

108 Cf. part. BERNSTEIN(1979), p. 249 — "One can describe the motion of a point in the plane by a simple system of differential equations which represent the components of force applied to the x and y coordinates, and get solutions of the form $(x(t), y(t))$. Early in the twentieth century, Poincaré made a revolutionary study of the path of such a point considering the solutions as giving parametric equations of the path. He was particularly interested in its asymptotic behavior — what happens as t becomes large — and showed that in general it led to either singular points or limit cycles. The study of such singular points and limit cycles, called the Poincaré-Bendixson theory, has led to solution of many engineering problems in servo-mechanism and automatic control. It has also had a profound effect on what has come to be called the qualitative theory of differential equations and the theory of differential equations in the large. In fact, this is one area where the distinction between pure and applied mathematics disappears completely, as anyone recognizes who has been at the Center for Dynamical Systems at Brown."

dado subsistema material, interessa-nos enfatizar que o valor objetivo de qualquer "*fato científico*" coloca-se exatamente em uma rede de concepções conceituais, ou seja, assenta-se exatamente em uma atividade discursiva[109]. E, por sua vez, ao concebermos a noção de prática, enquanto o aspecto ativo e destinador de uma dada realidade material, tomando-a como uma disposição operacional efetiva que, por meio de uma *realização*, estabelece, obrigatoriamente, uma condição[110] possível para um dado subsistema material, interessa-nos enfatizar que o "*nosso contato imediato com o real só vale como um dado confuso, provisório, convencional e esse contato fenomenológico exige inventário e classificação*" [BACHELARD(1971), p. 15].

Apregoaremos, então, mais por uma "*fenomenotécnica*" do que por uma "*fenomenologia*", nas aplicações da Matemática no âmbito das demais Ciências, insistindo que a noção de método, enquanto o aspecto ideativo e ordenador de uma dada realidade material, deva assentar-se como uma disposição tecnológica apropriada que, por meio de uma *técnica*, estabelecerá, contingentemente, uma determinação operacional capaz de suportar um dado subsistema material que se pretenda constituir. "*Como a aplicação está sujeita a aproximações sucessivas, pode-se dizer que o conceito científico correspondente a certo fenômeno particular é o* ***grupamento*** *das aproximações sucessivas bem ordenadas. A conceptualização científica precisa de uma série de conceitos em via de aperfeiçoamento para adquirir a dinâmica que temos em vista, para constituir um eixo de pensamentos criativos.* [...] *Na experiência, ela procura ocasiões para* ***complicar*** *o conceito, para o* ***aplicar****, não obstante a resistência do conceito, para realizar as condições de aplicação que a realidade não reunia. É então que nos apercebemos de que a ciência* ***concretiza*** *seus objetos, sem jamais os encontrar inteiramente feitos. A fenomenotécnica* ***estende*** *a*

[109] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 29 — "Desse modo, os fatos se encadeiam tanto mais solidamente quanto estão implicados numa rede de *razões*. É pelo encadeamento, concebido racionalmente, que os fatos heteróclitos adquirem o estatuto de *fatos científicos*. Que a Terra gira, eis pois uma *idéia* antes de ser um *fato*. Este fato não tem primitivamente qualquer traço empírico. É preciso situá-lo em seu lugar num *domínio racional de idéias* para ousar afirmá-lo. É preciso compreendê-lo para o apreender. Se Foucault procura, com o pêndulo do Panteon, uma prova *terrestre* desse fato *astronômico*, é porque um longo preâmbulo de pensamentos científicos lhe deu a idéia dessa experiência."

[110] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 34 — "Com efeito, é sem razão que se quer ver no real a *razão* determinante da objetividade, ao passo que não se pode jamais contribuir senão com a *prova* de uma objetivação correta. [...] Se quisermos ficar na claridade, é preciso colocar o problema sistematicamente em termos de objetivação mais que em termos de objetividade. Determinar um caráter objetivo, não significa pôr a mão num absoluto, é provar que se aplica corretamente um método. [...] Cremos pois que é preferível não falar de uma objetivação do real, mas antes de objetivação de um pensamento em busca do real."

fenomenologia. Um conceito tornou-se científico na proporção em que se tornou técnico, em que foi acompanhado de uma técnica de realização" [BACHELARD(1971), p. 127]. E é exatamente nessa medida, enquanto assentirmos em "*incorporar* ***as condições de aplicação de um conceito no próprio sentido do conceito***" [BACHELARD(1938), p. 76], que poderemos conceber o Conhecimento Matemático como tendo um caráter eminentemente operacional, como sendo um expediente operacional por excelência, como sendo um instrumento de mediação entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, constituídos, tão-só e contingentemente, na perspectiva e na possibilidade objetivas de uma diferenciação correlativa, ensejada na fluência de uma totalidade continente.

CAPÍTULO II

DA CONFIGURAÇÃO DAS TRÊS DIMENSÕES DA MATEMÁTICA

o Conhecimento Matemático não se reduz a uma linguagem

> "O conhecimento a que falta precisão, ou melhor, o conhecimento que não é apresentado junto com as condições de sua determinação precisa, não é conhecimento científico O conhecimento geral é quase fatalmente conhecimento vago."
>
> **Gaston BACHELARD(1938, p. 90)**

1. Preliminares

Tendo-se evidenciado, no Capítulo I, que o Conhecimento Matemático não se confunde com uma atividade matemática, determinar-nos-emos a apontar, neste segundo capítulo, algumas considerações acerca de configuração fundamental das três dimensões do Conhecimento Matemático. A imposição destas três dimensões constituintes do Conhecimento Matemático assentar-se-á, a partir da instituição de nossa segunda tese intermediária, como uma contraposição e como uma alternativa à insuficiência de uma concepção que pretende reduzir a Matemática a uma linguagem[111]. Admitindo-se, então, que a Matemática não se reduz a um "*fazer matemático*" ou a uma "*linguagem matemática*", estaremos em condições de desenvolver, no capítulo seguinte, um pequeno

[111] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 24 — "O aspecto sintático, formal, da linguagem matemática é tão importante, que há pensadores, como certos formalistas, que tentam reduzir a ciência de Gauss a um mero estudo de formalismos: o conteúdo das teorias matemáticas não interessaria fundamentalmente ao matemático, mas tão só àquele que as aplicasse. O matemático e o lógico, enquanto tais, limitar-se-iam a tratar da sintaxe das teorias, ventilando questões formais de caráter relevante (concepção análoga era a de Carnap em suas obras iniciais)."; e p. 27 — "Para alguns, a parte sintática é suficiente para explicar e justificar a natureza das ciências lógico-matemáticas, como é o caso, por exemplo, de alguns formalistas, em especial de Curry e da escola Bourbaki."

ensaio relativo às possíveis implicações pedagógicas advindas destas duas teses, dentre as quais encontra-se a tese principal deste trabalho.

Nessa medida, e na circunstância deste ensaio preliminar, entendemos como oportuno que toquemos em algumas questões relativas aos sistemas conceituais e à natureza dos objetos matemáticos, o que nos parece fundamental para que possamos levar a termo a intenção de instituirmos, o mais firmemente possível, uma pretendida inseparabilidade das três dimensões do Conhecimento Matemático. Com relação aos sistemas conceituais, examinaremos duas noções básicas, as noções de "*metalinguagem*" e de "*verdade*", exame esse que nos permitirá mostrar que a Matemática não se reduz a uma linguagem, e, com relação à natureza dos objetos matemáticos, examinaremos o objeto matemático "*derivada de uma função*", para que nos seja dado ilustrar a necessidade da distinção de três dimensões para a adequada formulação de qualquer concepção matemática.

Por certo, estas considerações não interessarão ao matemático de ofício, enquanto um pesquisador de novas formulações matemáticas, que poderá desempenhar, a contento, suas atividades, independentemente de quaisquer considerações filosóficas, uma vez que a ele importa, simplesmente, a correção formal de suas formulações. Não vemos nisso qualquer inconveniente. No entanto, queremos crer que a um professor de matemática não poderá ser dado o direito de evitar qualquer consideração filosófica acerca do Conhecimento Matemático, a menos que ele esteja meramente interessado em algum tipo de adestramento.

2. Sistema Conceitual

Dentre as noções fundamentais que nos permitiriam desenvolver uma pretendida consubstanciação das três dimensões do Conhecimento Matemático, colocar-se-á a noção de sistema conceitual como uma noção genérica que, qualificando basicamente a natureza do Conhecimento Matemático, nos possibilitará diferenciar qualquer conhecimento, tomado, então, como um sistema conceitual, dos sistemas materiais correlativamente determinados, exatamente a partir de uma concepção que vinculará àquele uma peculiar e inseparável constituição ensejada por três dimensões complementares. Nessa medida, concebemos um sistema conceitual como uma coleção de objetos ideais ou de representações que se inter-relacionam e que têm a função de se constituir em um veículo de intermediação[112] entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, na fluência de uma totalidade continente.

Parece-nos oportuno, primeiramente, que nos permitamos examinar, com alguma atenção, a noção de sistema que presentemente adotamos. Devemos dizer, como já foi observado anteriormente, que essa noção inicialmente foi tomada por empréstimo da Matemática Aplicada, porque de sua concepção pudemos destacar três outras noções fundamentais, a saber, as noções de "*coleção*", "*totalidade*" e "*finalidade*", que nos possibilitaram distinguir o Conhecimento Matemático enquanto um sistema operacional e fundá-lo, assim, em seus objetos e em seus processo e estrutura operacionais lógicos subjacentes. Então, e desse modo, foi possível concebermos um sistema conceitual como uma coleção de objetos ideais ou de representações, ou seja, de conceitos, que se inter-relacionam em uma totalidade discursiva e que se constituem teleologicamente, a exemplo das concepções clássicas de sistema[113], que o colocam, além disso, como "*una totalidad deductiva de discurso*" [ABBAGNANO(1961), p. 1081], uma vez que estas concepções clássicas teriam se modelado segundo as peculiaridades dos procedimentos matemáticos. Ademais, cabe especificar, em alguma medida, as noções de conceito, totalidade e finalidade, para que nos seja dado evidenciar e assentar claramente a noção de sistema conceitual de que estamos dispondo.

A noção de conceito que pretendemos adotar coloca-se como designando, mais propriamente, um objeto concebido, uma vez que estamos tomando os objetos de um sistema conceitual como uma composição predicativa ensejada a partir de outros objetos anteriormente distinguidos. Por isso, um conceito institui-se como uma representação,

---

[112] Cf. part. Da COSTA(1993), p. 11 — "O conhecimento científico é um conhecimento conceitual. Tentamos compreender e explicar a realidade por meio de conceitos que relacionamos nas teorias, nas hipóteses e nas leis. Toda a ciência é um vasto sistema conceitual que nos permite, entre outras coisas, sistematizar o real. Daí podermos efetuar previsões e melhor nos adaptarmos ao contorno. O próprio senso comum se articula por meio de conceitos. Não há razão sem conceituação."; e p. 45; e part. Da COSTA(1997), p. 91 — "Nas ciências empíricas e, em geral, no tocante ao pensamento racional, procuramos classificar e organizar nossa experiência e conhecer o mundo por meio de sistemas conceituais. Estes são utilizados como redes que lançamos no universo para compreendê-lo, para nos orientarmos, com a finalidade, entre outras coisas, de prevermos e provermos."

[113] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 1082 — "Dijo Croce: "Pensar un determinado cocepto puro significa pensarlo en su relación de unidad y distinción con todos los otros y, de tal manera, lo que se piensa nunca es en realidad un concepto particular, sino el Sistema de los conceptos, [...]" (*Logica*, 4a. ed., 1920, p, 172)."

como uma referência semântica incorporada a uma realidade conceitual fundadora. Por outras palavras, nessa realidade geradora e referencial, a coleção dos conceitos determina-se como a dimensão semântica associada ao sistema conceitual correspondente, na qual cada conceito será tomado como uma concepção conceitual do objeto concebido, num sentido, como já foi observado anteriormente, que pudesse evocar, também, o movimento ou o processo de elaboração, de geração, desses mesmos objetos, para que nos seja dado designar um objeto concebido, por um lado, e para que possamos fazer cair sobre ele os processos operacionais lógicos de constituição dessa mesma realidade conceitual, por outro lado. Assim, cada um dos conceitos desenvolvidos em um dado sistema conceitual determinar-se-á enquanto uma referência semântica normativa acerca do objeto concebido, especificando as possibilidades de suas relações conceituais e operacionais, mediante as condições de sua própria concepção. Nessa medida, alguns objetos poderão ser de tal modo engendrados que eles serão concebidos exatamente a partir de uma dada disposição operacional, não sendo possível, nestes casos, distinguir o conceito de um objeto de sua própria definição, a exemplo do que ocorre com o conceito de "*razão de variação*", como veremos na seção seguinte. Nessa mesma seção, na qual trataremos da natureza dos objetos matemáticos, trabalharemos para instituir o caráter funcional ou operacional destes mesmos objetos, evidenciando uma espécie de *incorporação* das suas condições de definição e das suas condições de operação às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais.

E, com efeito, a noção de conceito que pretendemos fundar como uma concepção normativa do objeto concebido, ensejada no interior de um sistema conceitual, afasta-se de uma noção que diria respeito à "*essência do objeto concebido*" e aproxima-se da noção que diz respeito ao caráter funcional ou operacional desse mesmo objeto, uma funcionalidade conceitual que dispõe os elementos de uma realidade conceitual em uma totalidade, organizada dedutivamente mediante uma lógica de base e desenvolvida discursivamente, tendo como ponto de partida uma axiomática[114], a exemplo do que observa DA COSTA(1997, p. 143), quando ele afirma que se "*S for um sistema conceitual e L sua lógica subjacente, sem sabermos quais são suas figurações simbólicas primitivas e as regras de L, não é factível trabalhar-se, propriamente, com S. Ou seja, S deve, pelo menos em princípio, ser formulado axiomaticamente, em linguagem bem precisa, para que tenham sentido rigoroso as noções de demonstração, de definição etc. A parte sintática e combinatória é absolutamente fundamental para a individualização de S. A dimensão externa de S consiste no seu aspecto combinatório, sintático*".

Por sua vez, a noção de totalidade, no âmbito dos sistemas conceituais, é concebida como uma totalidade discursiva, ordenada e dedutiva, uma totalidade de discurso que se afasta da noção que põe cada um dos objetos de um sistema conceitual como partes distintas, embora interagentes, que possam ser separadas como uma unidade semântica autônoma, e aproxima-se da noção que põe essa totalidade discursiva como um todo indiviso e fluente, que opera em um campo de ordem que submete cada um dos objetos de um sistema conceitual a não ter uma existência independente, determinando-os como padrões abstraídos do processo total de movimento deste mesmo campo e conferindo-lhes apenas uma relativa independência ou autonomia de movimento. O tipo de ordem, que condiciona essa totalidade discursiva a movimentar-se em seu próprio campo de ordem, é uma ordem que inter-relaciona a totalidade dos objetos de um sistema conceitual por intermédio de um conjunto de princípios lógicos marcadamente dedutivos. Queremos crer que a necessidade específica de uma ordem, que opera por meio de um conjunto de princípios lógicos marcadamente dedutivos, põe-se como uma exigência contemporânea para a instituição social de qualquer sistema conceitual. Ademais, e antecipando algumas considerações posteriores, cada concepção conceitual relativa a um certo objeto, em um dado campo referencial, somente nos oferecerá esse objeto, em algum aspecto destacado, a partir dessa mesma manifestação conceitual, não permitindo que nos seja dado apreendê-lo

[114] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 195 — "La tercera función del Concepto es la de *organizar* los datos de la experiencia, de tal manera que se establezcan entre ellos relaciones de naturaleza lógica. Un Concepto, un Concepto científico sobre todo, no se limita por lo común a describir y clasificar los datos empíricos, sino que posibilita la derivación deductiva de ellos (Duhem, *La théorie physique*, [...].). Es éste o aspecto por el que la formulación conceptual de las teorías científicas tiende a la axiomatización, ya que la generalización y el rigor de la axiomatización tienden a llevar al límite al caráter lógicamente organizador del concepto."

completamente, mas só implicitamente, mediante um conjunto sempre crescente de novas relações conceituais ou operacionais que pudessem ser constituídas. Desse modo, interessa-nos enfatizar basicamente que é necessário tomar essa totalidade dedutiva de discurso como um processo em efetividade que, instituído e desenvolvido propriamente, engendrará uma realidade conceitual ordenada e presumivelmente consistente, "*incorporando tanto o pensamento como aquilo que é pensado num único movimento, no qual a análise em partes separadas (p. ex., pensamento e coisa) não tem qualquer sentido*" [BOHM(1980), p. 86][115].

Por fim, a noção de finalidade, relativamente aos sistemas conceituais, será tomada de modo correlativo à noção de destinação, pondo-se, então, imperiosa e eminentemente, segundo a peculiaridade de uma determinação instituída previamente, isto é, segundo uma destinação prévia. Deste modo, a noção de finalidade, pretendida aqui, assenta-se como uma noção fundamental que nos permitirá não só identificar, mas também distinguir os variados subsistemas conceituais, na medida em que nos for dado estabelecer, obrigatoriamente, uma destinação para cada um deles, o que nos dará a oportunidade de evidenciar, marcadamente, a intenção de fazer corresponder à finalidade dos sistemas conceituais o seu caráter funcional[116], assinalando-o enquanto uma disposição operacional possível que se funda na correlação inalienável de um sujeito epistêmico e de um mundo mediato, ensejada na fluência de uma totalidade continente. Assim, a noção de finalidade, que desejamos associar aos sistemas conceituais mediante seu próprio caráter funcional, vincula-se à intenção de assentarmos o lugar próprio e a importância dos sistemas conceituais exatamente em sua destinação pragmática, ou seja, intenta-se impor um caráter funcional ou operacional ao Conhecimento Matemático, que se contrapõe frontalmente a uma concepção que colocaria esse conhecimento como detentor de um "*substancialismo*"

---

[115] Cf. part. BOHM(1980), p. 10, 42-50, 94-96, 171, 182 e 194-198.

[116] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 575-6 — "El término tiene dos significados fundamentales: 1) Operación. En este significado el término corresponde a la palabra griega *ergon*, tal como la usa Platón al decir que la Función de los ojos es ver, la Función de los oídos oír [...]. En este sentido la Función es la operación *propria* de la cosa, en el sentido de que es lo que ésta hace mejor que las otras cosas [...]. Por lo demás, insiste [Aristóteles] sobre el carácter finalista y realizador de la Función: "la Función es el fin – ha dicho – y el acto es la Función" [...]. En este sentido, la palabra tiene uso frecuente, tanto en el lenguaje científico como en el común. [...] 2) Del significado precedente se ha separado el significado matemático a fines del siglo XVII por obra del grupo de matemáticos del que formaba parte Leibniz [...]."

absoluto, uma funcionalidade que se impõe enquanto um expediente notadamente indicador de uma disposição "*relativa aos atos que se devem praticar*".

Posto isso, e no âmbito dos sistemas conceituais, passaremos a considerar duas noções básicas, as noções de "*metalinguagem*" e de "*verdade*", que entendemos como adequadas para podermos realizar esta pretendida configuração fundamental das três dimensões do Conhecimento Matemático. Nessa medida, e observando que uma "*definição de verdade*" não pode ser dada na sintaxe[117] de uma linguagem, mostraremos que há uma certa impropriedade quando se diz que essa definição deverá ser dada em uma metalinguagem, tornando-se imprescindível, assim, que tenhamos, pelo menos, duas outras dimensões, além da dimensão sintática, para que uma noção de verdade possa ser concebida e para que uma definição de verdade possa ser determinada de modo operacional. Posteriormente, passaremos a desenvolver algumas considerações primárias acerca da presumível base empírica dos sistemas conceituais.

2.1. Metalinguagem

Intentaremos, a partir desta subseção, e mediante algumas considerações acerca da noção de metalinguagem, evidenciar, por um lado, a insuficiência de uma concepção de linguagem que determina uma metalinguagem como uma outra linguagem qualquer na qual se fazem, meramente, observações sobre uma dada linguagem, e, por outro lado, mostrar a impropriedade dessa mesma concepção que, tomando uma linguagem tão-somente como "*um desenho abstrato ou um mosaico dotado de determinada estrutura*" [NAGEL(1998), p. 32], sem qualquer significado, impõe que qualquer referência semântica deva presumir uma necessária ascendência hierárquica nos níveis lingüísticos, ou seja, deva presumir uma metalinguagem.

A partir das investigações desenvolvidas por Charles W. MORRIS, por volta de 1938, o termo metalinguagem passou a ser tomado como uma das noções da

[117] Cf. part. Da COSTA(1961), p. 54 — "Assim, *exempli gratia*, a idéia de *verdade*, no tocante às ciências dedutivas, só pode ser tratada, como demonstrou Tarski, no domínio das perquirições semânticas; além do conceito anterior, há vários outros, intimamente ligados à consideração metateórica da matemática, que não se enquadram nos limites sintáticos, pertencendo à classe das idéias semânticas."

Semiótica[118], dizendo respeito à "*linguagem utilizada para descrever outra linguagem ou qualquer sistema de significação: todo discurso acerca de uma língua, como as definições dos dicionários, as regras gramaticais, etc.*" [FERREIRA(1975), p. 1126]. Conquanto esta questão esteja longe de ser determinada de um modo tão simples, o que nos interessa, inicialmente, com a apresentação desta noção semiótica, é sugerir exatamente que uma metalinguagem diz respeito a uma outra linguagem[119], mas não necessariamente a uma descrição qualquer ou a qualquer discurso[120] acerca de uma dada linguagem, uma vez que, por um lado, uma descrição ou um discurso quaisquer poderiam não abranger a totalidade das concepções correspondentes a uma linguagem, e, por outro lado, poderiam ser insuficientes para patrocinar a objetivação dessa mesma linguagem. Por exemplo, no que diz respeito às indagações relativas à "*definição de verdade*", TARSKI(1944, p. 27) sugere, como veremos adiante, que "*toda oración que figure en el lenguaje-objeto también debe figurar en el metalenguaje; en otras palabras, el metalenguaje debe contener al lenguaje-objeto como parte de él*". E ademais, como seria possível correlacionar uma linguagem, dita metalinguagem, a outra linguagem, dita linguagem-objeto, se ambas são tomadas, meramente, como "*desenhos abstratos sem qualquer significado*"?

Com efeito, e ilustrativamente, consideremos um exemplo sugerido por NAGEL(1998, p. 33), em uma tentativa de evidenciar a distinção proposta por David HILBERT(1862-1943) entre matemática —"*um sistema de signos sem significação*" — e

[118] Cf. part. HEGENBERG(1966), p. 17 — "Embora o vocábulo seja bem mais antigo, 'semiótica' passou a ser usado, na atualidade, principalmente depois das investigações feitas por C. Morris, para indicar o estudo dos sinais."; part. Da COSTA(1979), p. 25 — "Morris ainda sugeriu que se denominasse semiótica a ciência da linguagem."; e part. BLACKBURN(1994), p. 355 — "O estudo geral dos sistemas simbólicos, entre eles a linguagem."

[119] Cf. part. Da COSTA(1961), p. 47 — "O exame de uma linguagem faz-se com os recursos de outra. Nas indagações semióticas, a linguagem estudada intitula-se "linguagem objeto" e à linguagem no âmbito da qual se investiga a linguagem objeto, dá-se o nome de "metalinguagem"."

[120] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 247 — "**metalinguagem** [...] O termo é abusivamente usado quando se diz que um discurso sobre outros discursos (e.g., o discurso da crítica literária) se exprime numa metalinguagem, quando na verdade não há qualquer razão para que esse discurso não se exprima na mesma linguagem que o original, tal como em geral acontece."

metamatemática[121] — "*enunciados significativos sobre a matemática, os signos que ocorrem no cálculo, seus arranjos e relações*". NAGEL(1998, p. 33) considera que a sentença '2 + 3 = 5' é uma expressão que pertence à Aritmética, uma vez que ela é "*inteiramente constituída de signos aritméticos*", e que a sentença ' '2 + 3 = 5' é uma fórmula aritmética' "*não expressa um fato aritmético e não pertence à linguagem formal da aritmética; pertence `a metamatemática*". É interessante observar que essas afirmações são insuficientes para oferecer-nos uma apreensão inequívoca do que se está apontando como "Aritmética", já que nenhuma dessas duas afirmações nos ajudará a dizer se a sentença '2 = 3 + 5', embora formalmente correta, é uma "*expressão aritmética*" ou se a sentença ' '2 = 3 + 5' é uma fórmula aritmética', embora não sendo formalmente correta, pois ela não é constituída "*inteiramente por signos aritméticos*", dirá respeito, como ela própria parece sugerir, à Aritmética. Como é possível observar neste exemplo, a insuficiência dessas afirmações, todas elas supostamente pertencentes a uma "metamatemática", coloca-se exatamente como um subproduto de uma concepção que pretende que a Matemática se determine enquanto um mero formalismo, como veremos adiante.

Nessa medida, o que estamos querendo sugerir, com essas observações, é que as considerações relativas a uma concepção de metalinguagem não podem ser desenvolvidas mediante afirmações isoladas acerca de expressões de uma dada linguagem, a menos que, nessa metalinguagem, possa ser desenvolvida uma dada concepção dessa mesma linguagem, a exemplo daquelas considerações que nos dão conta de que não há uma dialética que possa ser desenvolvida sobre proposições isoladas, a menos que esta dialética

[121] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 247 — "A teoria das linguagens formais com poder suficiente para servir como linguagem da matemática. Num tratamento metamatemático formal, as próprias fórmulas que ocorrem na matemática (axiomas, teoremas e demonstrações) são tratadas como objetos matemáticos, estabelecendo-se teoremas sobre elas."; e part. NAGEL(1998), p. 32-3 — "Uma página coberta com marcas "sem significado" de uma tal matemática formalizada não *afirma* nada – é simplesmente um desenho abstrato ou um mosaico dotado de determinada estrutura. Todavia, é possível descrever claramente as configurações de semelhante sistema e efetuar enunciados acerca das configurações e de suas várias relações entre si. [...] Cumpre observar, entretanto, que tais enunciados significativos sobre um sistema matemático (ou formalizado) sem significação evidentemente não pertencem eles próprios ao sistema. Eles pertencem ao que Hilbert chamou de "metamatemática", a linguagem que versa *sobre* a matemática."

seja uma dialética de uma dada concepção de conhecimento[122]. Assim, é insuficiente conceber uma linguagem como um registro pictórico tão-somente, sem qualquer significado, e determinar uma metalinguagem, meramente, como uma "*linguagem na qual se fazem observações sobre outra linguagem*" [BLACKBURN(1994), p. 247], porque, e se essa concepção for tomada estritamente, ainda que nos seja possível suspeitar em qual das linguagens se fazem observações sobre a outra, ela não nos permitiria determinar qual seria o teor dessas mesmas observações.

Posto isso, e mediante o exame de um pequeno e rápido esboço da possível origem histórica da noção de metalinguagem, pretendemos evidenciar a impropriedade de uma concepção de linguagem que, tomando uma linguagem tão-somente como um sistema simbólico sem significado, atesta que "*os enunciados matemáticos devem ser vistos como sucessões não-interpretadas de símbolos*", que "*a matemática tem uma sintaxe, mas não tem uma semântica*" [BLACKBURN(1994), p. 158], e que, por isso, impõe que qualquer referência semântica deva presumir uma necessária ascendência hierárquica nos níveis lingüísticos, ou seja, deva presumir uma metalinguagem.

A nossa intenção não é a de considerar a totalidade das *vertentes* históricas que poderiam ter contribuído para o surgimento dessa notória concepção de metalinguagem, o que está além de nosso alcance, neste trabalho, mas sim, e tão-somente, a de apontar para alguma possível confluência histórica que culminou na suposta e atual concepção de metalinguagem. Essa confluência histórica, à qual afluíram algumas das grandes inquietações filosóficas, advindas com o surgimento de novas concepções matemáticas, será assinalada como o advento das "*provas de consistência*".

E, com efeito, o aparecimento das Geometrias não-Euclidianas, no início do século XIX, tornou duvidoso o que anteriormente se admitia como um fato inquestionável, que os postulados da Geometria Euclidiana, considerada como um "*sistema*

[122] Cf. part. Da COSTA(1979), Capítulo I, Seção 1 — (p. 19) "Uma *dialética* de certa concepção A é um todo ordenado de considerações críticas elaborado com o intuito de dialetizar A. Não existe dialética de proposições isoladas; não há, portanto, dialética de "2 + 2 = 4", a não ser que esta dialética seja uma dialética de determinada concepção da aritmética. Só se dialetizam concepções, sistematizações racionais e teorias."

interpretado"[123], eram verdadeiros, e, em conseqüência, que o sistema euclidiano correspondente deveria ser, obviamente, consistente — "*se os postulados são verdadeiros, os teoremas que deles são deduzidos também são verdadeiros, de modo que um teorema não pode contraditar outro*" [BARKER(1964), p. 66]. Por outro lado, com o surgimento da Teoria dos Conjuntos, atribuída a Julius Wilhelm Richard DEDEKIND(1831-1916) e a Georg CANTOR(1845-1918), no final do século XIX, e a conseqüente "*descoberta de seus paradoxos*", como o "*Paradoxo de Russell*", por exemplo, pôs-se em evidência que mesmo aqueles princípios tomados como básicos, aparentemente simples ou "*auto-evidentes*", poderiam esconder contradições.

Assim, porquanto o aparecimento, ao longo do século XIX, das diversas estruturas abstratas, sem relação com a realidade sensível, pusesse claramente a liberdade do matemático com relação à escolha dos axiomas de uma teoria, deveria permanecer uma restrição básica a essa liberdade, sob qualquer circunstância, como já havia sido assinalado pelo próprio CANTOR, em 1883: a condição de que "*los conceptos introducidos no pueden ser contradictorios*"[124]. Desse modo, "*esse fato fez que se voltasse a dar atenção ao problema da consistência. Seria possível estabelecer que os sistemas novos para a teoria dos conjuntos e para a teoria dos números — como o dos* ***Principia Mathematica*** *e a sua teoria dos tipos — estariam livres de inconsistências?*" [BARKER(1964), p. 122].

Nessa medida, duas grandes teses foram propostas para enfrentar a crise provocada pelos paradoxos da Teoria dos Conjuntos, uma associada à "Escola Logicista", cuja expressão monumental é os "*Principia Mathematica*" (1910-1913) de Bertrand Arthur Willian RUSSELL(1872-1970) e Alfred North WHITEHEAD(1861-1947), e a outra à "Escola Formalista", fundada por volta de 1910[125], cujo maior expoente foi David HILBERT(1862-1943), proponente do conhecido "*programa de Hilbert*", que é

---

[123] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 207; part. ABBAGNANO(1961), p. 137 — "Carnap distingue entre el Cálculo y el sistema semántico, en el sentido de que "en tanto los enunciados de un sistema semántico son interpretados, afirman alguna cosa y en consecuencia son verdaderos o falsos; en cambio, en un cálculo los enunciados son considerados desde un punto de vista puramente formal"."; e part. BARKER(1964), p. 41 — "A Geometria de Euclides era aceita como um corpo de conhecimentos científicos acerca da natureza do espaço — um conhecimento perfeitamente assentado e real."

[124] Cf. DIEUDONNÉ, Jean. **En honor del espíritu humano**: las matemáticas hoy. Tradução Mirnaya Chabás e José Chabás. Madrid (Espanha): Alianza Universidad, 1989. 373p. (Pour l'Honneur de l'Esprit Humain. Les Mathématiques Aujourd'hui, ©1987). p.310.

[125] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 569, verbetes "**formalismo**" e "**formalización**", e p. 800, verbete "**metalenguaje**"; part. HEGENBERG(1995), p. 85, verbete "**formalismo**", e p. 136, verbete "**metamatemática**"; part. SNAPPER(1984), p. 91-3; e part. NAGEL(1998), Cap. III.

considerado como uma das principais tentativas de demonstrar a ausência de contradições dos vários sistemas ou teorias matemáticos.

A primeira delas, a tese do logicismo, que surgiu de um esforço de sistematização que intentava reassentar os fundamentos da Matemática em uma base mais consistente e aparentemente livre de contradições — a Lógica —, pode ser reconhecida na observação que atesta que a Matemática é apenas um ramo da Lógica, ou seja, que "*todos os conceitos da matemática têm de ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática têm de ser desenvolvidos como teoremas da lógica; a distinção entre matemática e lógica passa a ser uma questão de conveniência prática*" [EVES(1953), p. 677]. Observamos, ademais, que esse esforço de sistematização é sugerido por uma importante tendência histórica, a saber, a da aplicação do "*método axiomático*", e que RUSSELL mantinha uma atitude comparativamente otimista em relação à importância dos paradoxos, acreditando que a Teoria dos Conjuntos poderia voltar a ser consistente, e, ao mesmo tempo, manter uma forma suficientemente forte para continuar sendo adequada aos matemáticos [BARKER(1964), p. 114].

A segunda delas, a tese formalista, poderia ser reconhecida na observação que atesta que a Matemática é essencialmente o estudo dos "*sistemas simbólicos formais*", ou seja, a escola formalista considera a Matemática apenas como uma coleção de enunciados abstratos, nos quais os seus termos seriam meros símbolos destituídos de significado, e as suas sentenças, meras fórmulas envolvendo esses símbolos: "*Na tese formalista se tem o desenvolvimento axiomático da matemática levado ao seu extremo*" [EVES(1953), p. 682]. Assim, considerando que somente as demonstrações de consistência poderiam atestar a ausência de contradições de qualquer teoria matemática, já que as concepções anteriores que atestavam a consistência, baseando-se em "*interpretações*" ou em "*modelos*"[126] que pudessem ser associados a alguma teoria, simplesmente transferiam a questão da consistência de um domínio da Matemática para um outro, HILBERT concebeu, então, uma nova abordagem direta para o problema da consistência: "*Em grande parte, assim como se pode provar, pelas regras de um jogo, que certa situação não pode ocorrer*

[126] Cf. part. Da COSTA(1961), p. 35-6 — "Em muitos casos, a prova da consistência de uma teoria A pode ser reduzida à da consistência de outra, B, da seguinte maneira: dentro da teoria B, elabora-se um modelo de A, ou seja, escolhe-se um sistema conveniente, S, de objetos de B, de tal forma que para esse sistema sejam satisfeitas as proposições primitivas de A; S constitui, assim, um modelo da teoria A. Então, constata-se imediatamente que se B for consistente, A também o será."

dentro desse jogo, Hilbert esperava provar, mediante um conjunto de regras de procedimento para a obtenção de fórmulas aceitáveis a partir de símbolos básicos, que nunca poderia ocorrer nenhuma fórmula contraditória" [EVES(1953), p. 682-3]. Mas, para isso, era necessária a completa formalização das teorias matemáticas, postas em um sistema dedutivo a partir de um conjunto de axiomas.

Nessa perspectiva, para o exame dos sistemas dedutivos "axiomatizados", exige-se a adoção de um ponto de vista estritamente formal, isto é, não se dá atenção aos significados de quaisquer um dos símbolos ou termos que se apresentem no sistema, o qual será encarado "*de um modo integralmente **formalizado**: prestamos atenção apenas ao arranjo das cadeias de sinais que constituem os teoremas do sistema — negligenciando, por completo, o significado de qualquer dos sinais e a verdade daquilo que, eventualmente, poderiam querer dizer*" [BARKER(1964), p. 123]. Um sistema formalizado, assim considerado, assemelha-se a um jogo em que as peças são os sinais, um jogo para o qual dispomos de certas combinações iniciais de sinais, os "*axiomas*", e de certas regras de transformações ou combinações de sinais, com a intenção de obter novas combinações de sinais, os "*teoremas*". Entretanto, as afirmações que poderiam ser feitas acerca do jogo não são movimentos do próprio jogo, fazendo parte de uma outra linguagem, dita "*metalinguagem*", da qual nos servimos para estudar o jogo, descrevendo os movimentos que poderiam ou não ser feitos no jogo, segundo regras anteriormente especificadas. O desenvolvimento dessas idéias, em um método que visava a determinar a pronta consistência das teorias matemáticas, ao qual HILBERT chamou de "*teoria da demonstração*", veio a ser conhecido como "*Metamatemática*".

Por conseguinte, podemos afirmar que foi a partir da concepção de metamatemática da Escola Formalista, que, "*por analogía, ou mejor dicho por extensión del término, los lógicos polacos y Carnap denominaron Metalenguaje a todo sistema lingüístico (por ejemplo, el lenguaje de la lógica, de la gramática, etc,) que no lleva sus denotaciones extralingüísticas, sino que semánticamente lleva a símbolos y hechos lingüísticos*" [ABBAGNANO(1961), p. 801], mantendo-se a tese formalista de que a Matemática deveria ser tomada como um sistema simbólico formal e impondo, por conseqüência, que qualquer referência semântica fosse desenvolvida em uma metalinguagem. E, para os formalistas, essa é exatamente a relação que se estabelece entre o que eles chamam de matemática ou "*formalismo*" e metamatemática ou "*metateoria sobre o formalismo*", uma vez que "*a matemática deve ser restringida — inteiramente e sem qualificação — à descrição de objetos concretos de certo tipo e às relações lógicas entre tais descrições*" [KÖRNER(1960), p. 75]. Esses "*objetos concretos de certo tipo*" nada mais são do que seqüências de marcas ou fórmulas do tipo "1 + 1 = 2"[127], por exemplo.

Assim, foi a partir das concepções formalistas, que consistiam basicamente em expurgar os símbolos matemáticos de todo conteúdo *intuitivo* ou de todo significado, que a Matemática também passou a ser concebida como um mero formalismo ou como um sistema dedutivo meramente sintático[128], relegando-se para o âmbito de uma metamatemática quaisquer "*enunciados significativos sobre a matemática,* [sobre] *os signos que ocorrem no cálculo,* [sobre] *seus arranjos e relações*" [NAGEL(1998), p. 33].

Contudo, é exatamente neste momento, quando se impõe que em uma linguagem seus símbolos devam ser expurgados de qualquer significado e exige-se que uma metalinguagem, além de se determinar como um sistema simbólico, se constitua como um sistema semântico também, que se introduz uma impropriedade: ao mesmo tempo, os símbolos de uma linguagem não devem manifestar qualquer denotação semântica, para que a metalinguagem correspondente as possa declarar, e eles devem manifestar alguma denotação semântica, para que na metalinguagem seja possível determiná-las. Por outras palavras, e, por um lado, se os elementos de uma linguagem-objeto devem ser considerados como não tendo qualquer conteúdo *intuitivo* ou qualquer significado, para que na metalinguagem se possa constituir algum significado, por outro lado, será necessário que esses mesmos elementos sejam signos de denotações extralingüísticas, ou seja, que eles tenham como referentes objetos de alguma realidade material, para que na metalinguagem seja possível determinar esses significados. Isso será necessário, ao menos, no âmbito dessa

[127] Cf. part. KÖRNER(1960), p. 101 — "Como vimos, o formalista distingue a seqüência de marcas ⟨1 + 1 = 2⟩ (a fórmula) do enunciado verdadeiro *de que* essa fórmula ou o processo pelo qual é produzida possui certas características literalmente formais – como assinalamos, a característica de ser uma fórmula-teorema. A seqüência ⟨1 + 1 = 2⟩ não é um enunciado, mas um objeto físico e, desse modo, não é verdadeira nem falsa. O que é verdadeiro ou falso é o enunciado de que essa seqüência ⟨1 + 1 = 2⟩ é uma fórmula-teorema."

[128] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 24 — "O aspecto sintático, formal, da linguagem matemática é tão importante, que há pensadores, como certos formalistas, que tentam reduzir a ciência de Gauss a um mero estudo de formalismos: o conteúdo das teorias matemáticas não interessaria fundamentalmente ao matemático, mas tão só aquele que as aplicasse."

concepção de linguagem, para uma adequada *"definição de verdade"*, segundo a concepção aristotélica clássica, como veremos na subseção seguinte.

Antes disso, porém, poder-se-ia questionar sobre qual é o cerne desta questão que, reduzindo drasticamente o Conhecimento Matemático a sua dimensão sintática, impõe que qualquer referência às suas fórmulas deva ser tomada como pertencendo a uma metamatemática? Acreditamos que a questão fundamental, que se coloca prontamente, é aquela que trata, por um lado, de uma concepção de linguagem que, além ser explicitada, pudesse mostrar alguma propriedade e eficiência operacionais, e, por outro, da relação entre linguagem e *"realidade material"*. Assim, no que se constituiria uma linguagem? No entanto, antes de respondermos a esse aspecto da questão, gostaríamos de considerar, inicialmente, o outro aspecto, aquele que diz respeito à relação entre linguagem e *"realidade material"*.

Essa relação pode ser colocada, basicamente, a partir de duas questões correlatas: 1) Os nomes ou termos de uma linguagem reproduzem os objetos da realidade material aos quais eles se referem?; e 2) Sempre que houver um nome ou um termo em uma linguagem, haverá um objeto da realidade material designado por eles? Em ambos os casos, queremos crer que a resposta seja negativa.

Por um lado, assim como uma imagem fotográfica não reproduz a realidade material que ela vier a ilustrar, um nome ou um termo não reproduz o objeto material denotado[129]. Se um nome ou um termo reproduzisse um objeto da realidade material ao qual ele, supostamente, se referisse, neste caso, não seriam nomes ou termos, mas um objeto próprio desta mesma realidade material [MORA(1998), p. 422-7], embora reproduzido. E mesmo que admitíssemos que os nomes ou termos reproduzissem objetos materiais, teríamos de dar conta de um outro *"elemento"* que se imiscui nesta relação entre linguagem e *"realidade material"*. *"Foi um traço comum a todas essas doutrinas (ao menos, às de Aristóteles e dos estóicos) a introdução de outro elemento, além da linguagem*

[129] Cf. part. BOHM(1980), p. 83 — "Assim, costuma-se acreditar que o pensamento encontra-se em numa espécie de correspondência reflexiva com "as coisa reais", talvez como uma espécie de cópia, ou imagem, ou imitação dos objetos, talvez um "mapa" das coisas, ou ainda (em conformidade com o que foi sugerido por Platão) uma apreensão das formas essenciais e mais íntima das cosias."; e p. 84-5 — "Evidentemente, está implícito que aquilo sobre o que se pensa tem uma existência independente do processo do pensamento, ou, em outras palavras, que enquanto criamos e sustentamos uma idéia como uma imagem mental pensando nela, não criamos e sustentamos uma "coisa real" deste modo."

e da "realidade": referimo-nos ao conceito, ou noção, que pode ser entendido como um conceito mental, ou como um conceito lógico (ou, como se disse oportunamente, "formal"). Os problemas da linguagem complicaram-se a partir dessa época com a questão da relação entre expressão lingüística e conceito mental, expressão lingüística e conceito formal, e entre cada um desses conceitos, na medida em que são lingüisticamente expressados, e "a realidade" " [MORA(1998), p. 423].

Por outro lado, se em toda a ocasião em que nós dispuséssemos de um nome ou de um termo, em uma linguagem, houvesse um objeto na realidade material a ele correspondente, essa mesma linguagem poderia ser tomada, então, mais como uma mera coleção de "palavras-objetos"[130], do que como um sistema conceitual ordenado e normatizado significativamente. Essas "palavras-objetos" poderiam, assim, ser justapostas anteriormente a qualquer discurso, constituindo-se em um sistema significativo mediante qualquer configuração arbitrária, a exemplo de qualquer conjunto de objetos materiais[131], e não teríamos que nos preocupar com as "palavras-conceitos", mesmo que determinadas como um produto de uma fluência discursiva privilegiada, e desenvolvida a partir da totalidade de um sistema conceitual. Por outras palavras, uma linguagem não é a realidade material eventualmente designada por ela, simplesmente porque os objetos de uma realidade material não dependem de qualquer significação pretendida que os possa sustentar em sua própria totalidade continente. E, "*assim, a palavra deixa de ser tomada como "um átomo indivisível de significado" e passa a ser vista como não mais que um indicador conveniente no movimento total da linguagem, nem mais nem menos fundamental que a oração, a sentença, o parágrafo, o sistema de parágrafos etc.*" [BOHM(1980), p. 68-9].

Conseqüentemente, de nossa parte, entendemos que uma linguagem se constitui enquanto um sistema simbólico que dá forma à manifestação empírica possível de

---

[130] Cf. part. BOHM(1980), p. 68 — "Em todo caso, uma vez formada as palavras, a tendência predominante tem sido perder de vista o fato de que isso aconteceu e considerar cada palavra como uma "unidade elementar", de modo que sua origem numa construção é, com efeito, tratada como se não tivesse relação alguma com o seu sentido."

[131] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 730 — "Buena parte del empirismo lógico y de la filosofía contemporánea en general, comparte o há compartido esta doctrina del Lenguaje como imagem lógica del mundo. La objeción fundamental en su contra há sido muy bien expresada por Max Black: "No hay más motivo para que el Lenguaje deba 'corresponder' o 'semejarse' al 'mundo', que para que el telescopio con el cual el astrónomo estudia el mundo deba semejarse a éste" (*Language and Philosophy*, [...])."

um sistema conceitual, não se confundindo com este, mas determinando-se como uma de suas dimensões. Pretendemos, com isso, afastar-nos de qualquer concepção[132] que tome uma linguagem como uma *reprodução pictórica de alguma realidade material* [ABBAGNANO(1961), p. 729] e aproximar-nos de uma concepção que ateste que uma "*Lenguaje no es un conjunto atómico de palabras sino discurso organizado*" [ABBAGNANO(1961), p. 731]. Com efeito, "*Humboldt expresó claramente este concepto. "No podemos concebir el Lenguaje — decía — como empezando por la designación de los objetos mediante las palabras y procediendo, en un segundo tiempo, a la organización de las palabras mismas. En realidad, el discurso no está compuesto de palabras que lo preceden, sino que, por el contrario, las palabras nacen en el discurso en su totalidad*" [ABBAGNANO(1961), p. 731].

Por fim, podemos afirmar que, de acordo com KNEALE(1962, p. 459), "*Frege não nega que poderia ser possível efectuar todas as deduções necessárias para a derivação de uma fórmula no seu próprio sistema dedutivo sem pensar no significado dos símbolos; mas diz que longe de isso produzir uma maior simplificação, a recusa de atribuir um significado aos símbolos torna as coisas ainda mais difíceis. Uma vez que o interesse das fórmulas matemáticas reside na sua aplicação, mais vale ser franco e admitir que as regras do cálculo não foram escolhidas arbitrariamente mas antes que dependem do sentido que queremos atribuir aos símbolos. Se se inventasse um jogo para jogar em papel com símbolos sem sentido de acordo com regras arbitrárias certamente que ninguém pensaria que se tratava de uma disciplina matemática.* [...] *Frege chama a atenção para o facto de em certos pontos críticos os formalistas inconscientemente introduzirem um sentido para os símbolos que eram supostos não ter sentido*". Ademais, SNAPPER(1984, p. 91) não hesita em sugerir que Giuseppe PEANO(1858-1932) teria tido idéias equivocadas sobre a finalidade real da formalização, e afirma que ele teria publicado "*uma de suas descobertas mais importantes sobre as equações diferenciais em linguagem formalizada muito semelhante a uma linguagem de primeira ordem, com o resultado de que ninguém a leu, até que uma alma caridosa traduzisse o artigo para a linguagem comum*".

[132] Cf. part. MORA(1998), p. 424 — "Uma dessas armadilhas foi incansavelmente denunciada pelos empiristas, em particular pelos nominalistas: a que consiste em fazer-nos crer que, por haver um termo ou uma expressão na linguagem, existe uma realidade designada por esse termo ou expressão."

Assim, poder-se-ia assentir, quase que prontamente, que há uma certa insuficiência relativamente à concepção formalista, que pretenderia reduzir a Matemática a sua dimensão sintática, e que, se levada ao extremo, nos colocaria em um estado de inquietação e de impotência, a exemplo de uma "*máquina eletrônica*" diante de uma variável não "*declarada*". Se fosse bastante desenhar "*Derivada de uma função é o limite da razão do acréscimo da função para o acréscimo da variável independente, quando este último tende a zero*"[133] — e uma vez satisfeita a correção formal, um desenho é tão bom quanto outro —, é certo que em todo o planeta a Educação se veria aliviada, ao menos, de qualquer preocupação com o Ensino de Matemática.

2.2. Verdade

Para considerar a noção de "*verdade*", nesta subseção, iniciaremos observando que uma "*definição de verdade*" não pode ser dada no âmbito de uma linguagem-objeto, e que a tentativa de defini-la em uma metalinguagem, mediante a alegada imprescindibilidade de uma hierarquia[134] lingüística, determinará o surgimento de certas impropriedades insuperáveis. Para tanto, examinaremos, basicamente, a "*teoria semântica da verdade*" de Alfred TARSKI(1901/2-1983). Posteriormente, e de modo a assentar firmemente a necessidade de que tenhamos, pelo menos, duas outras dimensões, além da dimensão sintática, mediante as quais uma noção de verdade possa ser concebida e uma definição de verdade possa ser determinada de modo operacional, passaremos a desenvolver, primariamente, uma noção e uma definição de verdade no âmbito dos sistemas conceituais.

[133] Cf. GRANVILLE, Willian A., SMITH, Percey F. e LONGLEY, Willian R. **Elementos de cálculo diferencial e integral**. Tradução J. Abdelhay. Rio de janeiro: Ed. Científica, [1961]. 730p. p. 25.

[134] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 173 — "De modo geral, o estabelecimento de hierarquias lingüísticas constitui artifício para se evitar os paradoxos semânticos como já observamos na seção 4 do primeiro capítulo. Daí, ser hoje natural recorrer-se a hierarquias de linguagens em lógica e, além disso, particularmente nas investigações semióticas."

2.2.1. As Três Principais Concepções de Verdade

Inicialmente, e antes de examinarmos o trabalho de TARSKI, faremos algumas considerações preliminares. Pode-se atestar prontamente que a noção de verdade se constitui em uma das categorias centrais em que se assentam a Lógica e a Filosofia da Ciência, ou Teoria da Ciência, segundo Da COSTA(1997)[135], uma vez que seria difícil negar que o raciocínio por dedução se apoie em um conjunto de princípios que serviriam para orientar a construção de *argumentos válidos*, o que significa dizer que *a falsidade da conclusão é incompatível com a verdade das premissas* [SALMON(1963), p. 31 e 34]. Nessa medida, permitir-nos-emos retomar, e de um modo rápido, algumas das considerações de Da COSTA(1979)[136] acerca das três principais concepções de verdade: a "*Teoria da Correspondência*", a "*Teoria da Coerência*" e a "*Teoria Pragmatista*".

Consideremos inicialmente as duas últimas teorias mencionadas afirmando que, para os adeptos da Teoria da Coerência, uma proposição é verdadeira sempre que esta se coadunar, e de modo necessário, a uma totalidade "*coerente*" de proposições. "*Existe apenas uma totalidade coerente e completa de proposições, **T**, que reflete o **absoluto**, e estritamente falando só os elementos de **T** é que são verdadeiros.* [...] *A verdade significa **coerência sistemática**, não se identificando com a consistência, mas se confundindo com a propriedade de pertinência ao todo proposicional que traduz o absoluto*" [Da COSTA(1979), p. 171]. Por outro lado, e para os adeptos da Teoria Pragmatista, uma proposição é verdadeira, e "*em linhas muito gerais*", se ela vier constituída de tal modo que a sua aceitação nos seja útil, isto é, que essa aceitação tenha conseqüências satisfatórias para nós ou que a proposição venha "*funcionar*" em alguma medida.

Devemos dizer, no entanto, que, a exemplo de Da COSTA(1979), trataremos especialmente da Teoria da Correspondência, uma vez que "*as descrições anteriores da teoria da coerência e da teoria pragmatista não almejam ser, nem de longe, corretas ou rigorosas. Aliás, para nosso objetivo, essas teorias carecem de relevância, pois, **dentro** do âmbito da lógica, a concepção que impera, de modo único, é a teoria da correspondência.*

135 Cf. part. Da COSTA(1997), p. 18 — "O conceito nuclear da teoria da ciência é o de verdade. Nas várias ciências procura-se algum tipo de verdade. [...] A partir, então, da noção de verdade, pode-se definir, com o auxílio de outros conceitos complementares, a idéia de conhecimento científico [...]."

136 Cf. part. Da COSTA(1979), Capítulo II, Seção 9; part. Da COSTA(1997), p. 114-26; part. ABBAGNANO(1961), p. 1180, verbete "**verdad**"; e part. BLACKBURN(1994), p. 401-3.

Isto não quer dizer, no entanto, que não seria frutífero procurar-se "combinar" as teorias delineadas, devidamente "matematizadas", com as idéias fundamentais da lógica. Também não quer dizer que na filosofia da lógica não se haja assumido posições filiadas às teorias da coerência e pragmatista. Apenas significa o seguinte: os sistemas lógicos até agora desenvolvidos de maneira rigorosa e formal pressupõem ***tecnicamente*** *uma teoria da verdade que é a da correspondência. De modo mais geral, desejamos frisar o fato de terem as idéias e métodos semânticos invadido a metalógica; ora, entre as noções semânticas figura a de verdade, a qual, pela própria natureza da semântica (§ 4 do primeiro capítulo), unicamente pode significar verdade concebida como correspondência*" [Da COSTA(1979), p. 171-2].

2.2.2. Teoria da Correspondência

No entanto, e admitindo-se que dentre as noções semânticas figura a noção de verdade, esta somente pode significar, pela própria natureza da semântica, verdade concebida como correspondência. Assim, a Teoria da Correspondência é a teoria clássica da verdade, cuja concepção já se encontraria em ARISTÓTELES: " "*Dizer do é, que é, e do que não é, que não é, é verdadeiro; dizer do que não é, que é, e do que é, que não é, é falso*" " [Da COSTA(1979), p. 172]. Desse modo, e de acordo com as concepções desta teoria, uma dada proposição é verdadeira se corresponder a um "*estado de coisas*", e falsa em caso contrário. Essa teoria mantém em TARSKI[137] o seu maior expoente contemporâneo, o qual, tendo reformulado a teoria clássica de verdade, e batizando-a de "*Teoria Semântica da Verdade*", afirma que a "*teoria da verdade*" depende de relações entre a linguagem e os "*estados de coisas*" ou fatos aos quais essa linguagem se refere [Da COSTA(1979), p. 170-80].

[137] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 172 — "A teoria da correspondência tem em Tarski o seu maior defensor contemporâneo. Como nessa teoria a verdade depende de relações entre a linguagem e estados de coisas ou fatos aos quais a linguagem se refere, Tarski batizou sua reformulação da teoria clássica de teoria semântica da verdade."

2.2.3. A Concepção Semântica de Verdade

Antes de prosseguirmos, porém, passaremos a examinar o trabalho de TARSKI(1944), intitulado "*The Semantic Conception of Truth*", buscando apresentá-lo em seus aspectos fundamentais, para que, posteriormente, nos seja dado evidenciar algumas impropriedades. Com efeito, TARSKI(1944, p. 9) inicia sua exposição dizendo que o problema principal, quanto à noção de verdade, é o de que sua definição seja uma "*definición satisfactoria*", ou seja, que sua definição seja "*materialmente adecuada* y *formalmente correcta*". Podemos dizer que uma definição de verdade é materialmente adequada se dela pudermos derivar todas as "*equivalencias de la forma* (T)" [TARSKI(1944), p. 15-6], ou seja, se a classe de todas as sentenças que admitirem o termo 'verdadeiro' puderem ser enunciadas na forma "*X es verdadera si, y sólo si, p*", que, segundo TARSKI(1944, p. 12 e 51), faz justiça às intuições vinculadas à "*concepción aristotélica clásica de la verdad*" por ele adotada[138]. Essa concepção clássica, ainda segundo TARSKI(1944, p. 12), e adaptada à terminologia filosófica moderna, pode ser expressa mediante a fórmula familiar "*La verdad de una oración consiste en su acuerdo (o correspondencia) con la realidad*". Para a condição de uma definição de verdade ser formalmente correta, TARSKI(1944, p. 10) sustenta que deveremos "*describir la estructura formal del lenguaje en que se dará la definición*" de verdade.

Por um lado, como já foi observado, a concepção de verdade em TARSKI é a concepção aristotélica clássica, e, assim, uma definição de verdade que se conformar a essa concepção deverá implicar, por exemplo, a seguinte equivalência: "*La oración 'la nieve es blanca' es verdadera si, y sólo si, la nieve es blanca*" [TARSKI(1944), p. 14]. Segundo as convenções que regulam o uso de uma linguagem, TARSKI(1944, p. 14) admite atribuir o predicado 'verdadeiro' ao nome de uma sentença e não à própria sentença, em primeiro lugar, porque "*el sujeto de una oración sólo puede ser un nombre o una expresión que funcione como nombre*", e, em segundo lugar, porque, para que nos pronunciemos acerca de um objeto, é necessário que empreguemos o nome do objeto e não

---

[138] Cf. part. DA COSTA(1997), p. 116-7 — "O esquema T reproduz bem a conceituação aristotélica de verdade. Ele nos informa que, ao se afirmar a verdade de uma sentença (crença etc.), está-se, essencialmente, afirmando a própria sentença. O esquema T não constitui, propriamente, uma definição de verdade, mas nos fornece condição *sine qua non* que qualquer definição deve satisfazer."

o próprio objeto[139]: "*si deseamos decir algo acerca de una oración — por ejemplo, que es verdadera — debemos usar el nombre de esa oración y no la oración misma*" [TARSKI(1944), p. 14-5].

Nessa medida, TARSKI propõe o nome '*concepção semântica de verdade*' para a sua concepção de verdade e alega que a relação lógica existente entre a sentença '*X é verdadeira*', na qual '*X*' é o nome de uma sentença p arbitrária, e a própria sentença p, de acordo com a sua concepção, é uma relação de equivalência, denominando-a de "*equivalência da forma (T)*", e notando-a por "*X é verdadeira se, e somente se, p*". TARSKI não admite que o esquema de sentenças (T), e nenhum caso particular qualquer da forma (T), possam ser considerados como uma definição de verdade, afirmando que um caso particular da forma (T) pode ser considerado apenas como uma "*definición parcial de la verdad*" [TARSKI(1944), p. 16], que explicaria em que consistiria a verdade de uma sentença em particular.

Por outro lado, e de modo a evitar a possível aparição de antinomias, TARSKI(1944, p. 19-20) passará a distinguir uma linguagem que seja própria para um discurso científico de uma linguagem cotidiana. Assim, ele introduz a noção de "*estrutura exatamente especificada de uma linguagem*", sugerindo que, para caracterizá-la de um modo inequívoco, deveremos 1) determinar a classe das palavras significativas que serão introduzidas por definição, uma vez que se espera que uma definição explique "*el significado del término que se define en términos cuyos significados parecem completamente claros e inequívocos*" [TARSKI(1944), p. 29], 2) indicar as palavras que serão usadas sem definição, sem qualquer atribuição de significado, chamadas "*termos indefinidos*", 3) explicitar as regras de definição, que indicarão como "*introduzir*" termos novos, 4) determinar a classe de expressões ditas sentenças ("*sentenças enunciativas*") a partir da classe de expressões da linguagem, 5) determinar as sentenças fundamentais que serão admitidas sem prova, chamadas "*axiomas*", e 6) explicitar as "*regras de inferência*", regras que nos permitirão deduzir novas sentenças, ditas "*teoremas*", a partir de outras sentenças afirmadas anteriormente.

[139] Cf. part. HEGENBERG(1966), p. 268 — "Um enunciando a respeito de algum objeto contém um nome do objeto e não o próprio objeto. Com objetos físicos, isso é óbvio, pois o enunciado não pode conter o objeto."

Assim, e para determinar as condições ainda mais específicas que devem satisfazer as linguagens para as quais se pretenda dar uma definição de verdade, TARSKI(1944, p. 22) propõe que consideremos a "*antinomia do mentiroso*", atribuída a J. LUKASIEWICZ: "*la oración impresa en la página 22, línea 5 de este trabajo, no es verdadera*". A sentença à qual se refere a afirmação entre aspas é ela própria, ou seja, é essa mesma sentença que está na página 22 e na linha 5 do trabalho de TARSKI, num exemplo típico daquelas antinomias constituídas mediante o recurso a uma sentença auto-referente. Daí, TARSKI(1944, p. 22-3) propõe que nomeemos a sentença em questão por '*s*' e construamos, assim, uma "*equivalência da forma* (T)" para ela, respeitando, naturalmente, e segundo sua concepção, o uso adequado do termo 'verdadeiro': " *'s' es verdadera si, y solo si, la oración impresa en la página 22, línea 5 de este trabajo, no es verdadera*". Note-se que, no segundo membro desta equivalência, temos a sentença em questão, e que " *'s' es idéntica a la oración impresa en la página 22, línea 5 de este trabajo*". Portanto, chegamos a uma contradição evidente, " *'s' es verdadera si, y solo si, 's' no es verdadera*", mediante o uso de uma lei ordinária da lógica, a "*Lei de Leibniz*": "***x = y* se e somente se *x* tiver todas as propriedades de *y* e *y* tiver todas as propriedades de *x*** (*Lei de Leibniz*)" [HEGENBERG(1966), p. 266].

TARSKI(1944, p. 24) afirma, então, que o surgimento da "*antinomia do mentiroso*" se deve a duas suposições, basicamente: uma que toma a linguagem na qual construímos essa antinomia como uma linguagem "*semanticamente fechada*", e outra que considera que valem nesta linguagem as leis ordinárias da lógica. Como uma linguagem semanticamente fechada é uma linguagem que admite, além de suas expressões, nomes para estas expressões, assim como termos semânticos (como o termo 'verdadeiro' referindo-se à suas sentenças), e todas as sentenças que determinam o uso adequado destes termos, TARSKI(1944, p. 25) admite que é muito mais fácil rechaçar as linguagens semanticamente fechadas do que mudar a lógica[140] em questão, mesmo que somente em suas leis ordinárias. E com efeito, basta não permitir que nomes de expressões, termos

[140] Cf. part. TARSKI(1944), p. 28 — "Los términos 'lógica' y 'lógico' se usan en este trabajo en un sentido amplio, que se ha tornado casi tradicional en las últimas décadas; la lógica comprende – según se supone aquí – toda la teoría de las classes y relaciones (esto es, la teoría matemática de los conjuntos). Por muchas e diferentes razones, me inclino personalmente a usar el término 'lógica' en un sentido mucho más estrecho, a saber, de manera que sólo se aplique a lo que a veces se llama a la "lógica elemental", es decir, al cálculo proposicional y al cálculo (restringido) de predicados."

semânticos e quaisquer sentenças que determinem os seus usos, pertençam a uma linguagem para que possamos evitar as antinomias desse tipo. Os nomes de expressões de uma linguagem podem ser elementos claramente não pertencentes a ela, como, por exemplo, "a oração impressa na página 22, linha 5 deste trabalho", assim como termos semânticos usados para qualificar suas sentenças, como por exemplo, "2 + 3 = 5 é verdadeiro" não é uma sentença matemática, porque 'verdadeiro' não é um termo matemático, ou seja, "2 + 3 = 5 é verdadeiro" não pode ser derivada de outras sentenças matemáticas postas previamente. Isso também se verifica para as sentenças que determinam o uso destes termos semânticos, como por exemplo, "*X* é verdadeira se, e somente se, *p*", que claramente não pertence à linguagem matemática. Evitando-se que elementos claramente não pertencentes a uma linguagem a integrem, estaremos evitando a possibilidade da construção de sentenças "auto-referentes", no interior dessa mesma linguagem, e evitando, assim, as antinomias correspondentes.

Por conseguinte, e considerando que uma definição de verdade não pode ser dada no âmbito de uma linguagem, ou seja, uma vez que aceitemos que em uma "*linguagem com uma estrutura exatamente especificada*" não devem figurar quaisquer termos semânticos, restar-nos-á, então, e tão-somente, tomar essa linguagem, especifica e estritamente, como uma sintaxe, como um formalismo, e pressupor uma semântica correspondente fora dela. Daí, TARSKI(1944, p. 26-7) propõe que deveremos usar linguagens diferentes para tratar do problema da definição de verdade, e de qualquer problema semântico, distinguindo-as como "*linguagem-objeto*", uma linguagem acerca da qual "*se fala*", e como "*metalinguagem*", uma linguagem na qual "*falamos acerca da*" da primeira linguagem. É interessante observar que, para TARSKI(1944, p. 27), os termos "*"lenguaje-objeto" y "metalenguagje", sólo tienen um sentido relativo. Por ejemplo, si nos interesa la noción de verdad aplicada a oraciones, no de nuestro lenguaje-objeto originario sino de su metalenguaje, este último se convierte automáticamente en el lenguaje objeto de nuestra discusión; y para definir la verdad para este lenguaje, debemos ir a un nuevo metalenguaje, a un metalenguaje, por así decir, de un nivel superior. De esta manera llegamos a toda una jerarquía de lenguajes.*"

Nessa medida, e sobretudo, devemos dizer que estamos diante de duas linguagens, das quais se exige que elas sejam linguagens com uma estrutura exatamente especificada, ou seja, que sejam dois formalismos[141]. A diferença entre elas esta na exigência de que em uma delas, tomada como a metalinguagem, seja possível construir nomes para cada uma das sentenças da outra, tomada como a linguagem-objeto, e que os termos semânticos referentes à linguagem-objeto sejam introduzidos na metalinguagem somente por definição, além de admitir todas as sentenças que determinem o uso adequado destes termos [TARSKI(1944), p. 27-9]. Mesmo com estas exigências, e segundo TARSKI(1944, p. 30), "*es posible formular una interpretación del metalenguaje en el lenguaje-objeto; es decir, cualquier término dado del metalenguaje puede correlacionarse com un término bien determinado del lenguaje-objeto, de manera tal que las oraciones afirmables [assertible] de uno de los lenguajes resulten correlacionadas com oraciones afirmables del outro. De resultas de esta interpretación, la hipótesis de que en el metalenguaje se há formulado una definición satisfactoria de verdad implica la posibilidad de reconstruir, en ese lenguaje, la antinomia del mentiroso*", o que deve ser evitado[142].

Assim, TARSKI(1944, p. 30) exige, também, que a parte lógica, relativa à metalinguagem, seja "*esencialmente más rico*" que a da linguagem-objeto, o que nos garantiria a impossibilidade da interpretação da metalinguagem na linguagem-objeto, afirmando que "*la condición de "riqueza esencial" del metalenguaje resulta ser, no solo necesaria, sino también suficiente para construir una definición satisfactoria de la verdad*" [TARSKI(1944), p. 31]. E, a essa altura da exposição, TARSKI(1944, p. 29) sugere que a solução do problema da definição de verdade não é, de maneira alguma, óbvia, e que ele não poderia dá-la em detalhes "*sin usar toda la maquinaria de la lógica contemporánea*". Para os nossos interesses, será bastante apontar para a definição de verdade segundo TARSKI(1944, p. 34) — "*una oración es verdadera si es satisfecha por todos los objetos, y falsa en caso contrario*"[143] — e dizer que ele preferiu escolher a noção de satisfação, como

---

141 Cf. part. TARSKI(1944), p. 20 — "Si, al especificar la estructura de un lenguaje, nos referimos exclusivamente a la forma de las expresiones que comprenden, se dirá que el lemguaje está *formalizado*. En tal lenguaje, los teoremas son las únicas oraciones que pueden afirmarse."

142 C. part. TARSKI(1944), p. 29 — "Ahora ya tenemos una idea clara, tanto de las condiciones de adecuación material a que se sujetará la definición de la verdad, como de la estructura formal del lenguaje en que haya de construirse esta definición. En estas circunstancias, el problema de definir la verdad adquiere el caráter de un problema determinado de natureleza puramente dedutiva."

143 Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 1182 — "Utilizando la noción semántica de *satisfacción*, entendida como la relación entre los objetos arbitrarios y determinadas expresiones llamadas "funciones enunciativas" del tipo "*x* es blanco", "*x* es más grande que *y*", etc., Tarski há dado la seguiente definición de la verdad: "*Un enunciado es verdadero si es satisfecho por todos los objetos y falso en caso contrario*"."

uma noção básica a partir da qual seria definida a noção de verdade, exatamente porque essa escolha é consistente com sua concepção de semântica. Para ele, as noções semânticas expressam relações "*entre certas expressões e os objetos a que se "referem" estas expressões*"[144], como a noção de satisfação, por exemplo, e à qual, também, se conforma a sua concepção de "verdade": "*Una oración es verdadera si designa un estado de cosas existente*" [TARSKI(1944), p. 13]. E essa concepção de semântica em TARSKI será o cerne de nossa crítica a seguir.

Lembremo-nos, inicialmente, de que concebemos uma linguagem como um registro simbólico, como um *quadro pictórico*, correspondente a uma dada manifestação empírica possível de um sistema conceitual[145], que nos dará conta dos objetos e das relações entre esses objetos, com respeito a este mesmo sistema conceitual. Tomaremos essa linguagem, esse registro simbólico, então, como a dimensão sintática de tal sistema conceitual, marcada por uma "*estrutura exatamente especificada*", ou seja, tomada nos moldes de um formalismo *a la* TARSKI. Contudo, e como veremos na Seção 4 deste capítulo, esse acordo não se dá com relação à dimensão semântica, que, para TARSKI(1944, p. 18, 38, 45 e 58), determina-se como uma disciplina, uma disciplina baseada na lógica e construída de maneira puramente dedutiva, quando considerada sobre as linguagens formalizadas, como um campo próprio e específico de investigação que poderia ser nomeado "*semântica teórica*", com aplicabilidade inegável às ciências empíricas. Para TARSKI(1944, p. 17), "*La semántica es una disciplina que — pra dicirlo sin gran precisión — se ocupa de ciertas relaciones entre las expresiones de un lenguaje y los objetos (o "estados de cosas") a que se "refierem" esas expresiones*". Vemos que se a semântica se coloca numa posição intermediária entre uma linguagem e os objetos referidos por ela, para TARSKI, não podendo, por essa razão, ser um dos constituintes de tal linguagem, então ela deverá ser tomada como uma metalinguagem que tenha como referentes às expressões dessa linguagem.

---

[144] Cf. part. TARSKI(1944), p. 17 — "Mientras que las palabras '*designa*', '*satisface*' y '*define*' expresan relaciones (entre ciertas expresiones y los objetos a que se "refierem" estas expresiones), la palabra '*verdadero*' posee una naturaleza lógica diferente: expresa una propriedad (o denota una clase) de ciertas expresiones, a saber, de oraciones."

[145] Cf. part. Cf. part. Da COSTA(1997), p. 143 — "Externamente, confrontamo-nos com sistemas combinatórios de símbolos, que traduzem os sistemas conceituais; pois, sem combinatórias simbólicas (linguagens), não existe adiantamento matemático exeqüível."

2.2.4. Unicidade da Condição de Adequação Material da Noção de Verdade

Inicialmente, observamos que, para TARSKI(1944, p. 10), a condição de adequação material, que deve caracterizar a noção de verdade "*com la suficiente precisión para que cualquiera pueda determinar si la definición desempeña realmente su tarea*", impõe à definição de verdade que esta implique todas as "equivalências da forma (T): *X* é verdadeira se, e somente se, *p*". Essa condição, segundo TARSKI(1944, p. 35), é única para qualquer definição de verdade, ou seja, "*las condiciones de adecuación material de la definición determinam unívocamente la extensión del término 'verdadero'. Por esto, toda definición de la verdad que sea materialmente adecuada es necesariamente equivalente a la que hemos construido. La concepción semántica de la verdad no nos da, por así decir, ninguna posibilidad de elección entre diversas definiciones no equivalentes de esta noción*".

2.2.5. Linguagem-objeto e Metalinguagem

Como já foi observado, os termos " *"lenguaje-objeto" y "metalenguagje", sólo tienen um sentido relativo* [...] *y para definir la verdad para este lenguaje* [metalinguagem], *debemos ir a un nuevo metalenguaje, a un metalenguaje, por así decir, de un nível superior. De esta manera llegamos a toda una jerarquía de lenguajes*". Contudo, imaginando que a definição de verdade, para uma certa linguagem-objeto, deva ser tomada a partir de uma metalinguagem continente dessa mesma linguagem-objeto — na qual tanto a definição de verdade quanto as equivalências implicadas por ela, segundo o "esquema (T)", devem ser expressões dessa metalinguagem —, isso deverá valer, também, para essa mesma metalinguagem continente daquela linguagem-objeto, quando, para ela, quisermos definir uma noção de verdade, nas mesmas condições em que TARSKI considera a sua definição materialmente adequada e de acordo com o esquema (T), para que, assim, essa mesma definição possa conformar-se à própria concepção de verdade de TARSKI. Daí, contida numa metalinguagem 2, deveremos ter a linguagem-objeto e a própria metalinguagem 1 — com o esquema (T) e todas as equivalências implicadas —, e, além disso, o próprio esquema (T) — e todas as equivalências implicadas — que deverá, agora, servir de referência para a definição de verdade para as sentenças da metalinguagem 1. Em que medida diferem as definições parciais de verdade da metalinguagem 1 e da metalinguagem 2, se ambas devem conformar-se à concepção de verdade de TARSKI, que se apresenta como única, pelo menos, em relação às suas condições de "*adecuación material*"? Como dispor de uma "*semântica S*", configurada sintaticamente na metalinguagem 2, uma vez que tanto a linguagem-objeto, a metalinguagem 1 e a metalinguagem 2 são linguagens com estruturas exatamente especificadas — isto é, formalismos —, que afirme a verdade do esquema (T), por exemplo, que, também, é uma sentença da metalinguagem 1, a partir do próprio esquema (T), que, neste caso, é tomado como uma sentença da metalinguagem 2? Se admitirmos ser possível construir uma linguagem, isto é, uma sintaxe, um formalismo, dita metalinguagem — na qual se tenham todas as expressões que queiramos de uma linguagem-objeto, os nomes de suas expressões, o termo 'verdadeiro', todas as sentenças que determinem o uso adequado deste termo e as "*leis ordinárias da lógica*" —, tomando-a como uma "*semântica S*" para uma linguagem-objeto, por que não admitir, simplesmente, que, em um sistema conceitual, possa haver pelo menos duas dimensões, uma semântica e uma sintática?

Ademais, há algo ainda mais interessante. Admitindo-se que uma linguagem-objeto seja parte integrante de uma metalinguagem correspondente, e, também, que os nomes das expressões dessa linguagem-objeto, o termo 'verdadeiro' e todas as sentenças que determinem o uso adequado do termo 'verdadeiro', pertençam a essa mesma metalinguagem — uma vez que é nela que se impõe definir uma noção de verdade —, chegamos, então, à constrangedora constatação de que, pelo menos, em uma região dessa metalinguagem, é possível reconstruir a "*antinomia do mentiroso*", ou seja, há uma região dessa metalinguagem que é inconsistente, pois nela convivem uma linguagem semanticamente fechada e as "*leis ordinárias da lógica*". Isso ainda é válido mesmo quando seja "*deseable que el metalenguaje no contenga términos indefinidos, a excepción de los involucrados explícita o implicitamente en las observaciones precedentes (es decir, términos del lenguaje-objeto), de los términos referentes a la forma de las expresiones del lenguaje-objeto, de los términos que se usan para construir nombres de estas expresiones, y de los términos lógicos*", e ainda, e em particular, que "***los términos semânticos*** *(referentes al lenguaje-objeto)* ***se introduzcan en el metalenguaje sólo por definición***" [TARSKI(1944, p. 28-9].

Com efeito, vejamos. A construção da "*antinomia do mentiroso*" dá-se mediante uma sentença auto-referente, ou seja, por meio de uma sentença que, neste caso, afirme de si própria não ser verdadeira. Assim, quando "*p*" é uma sentença do tipo " '*q*' não é verdadeira", na qual '*q*' é um nome que nos remete a uma sentença da qual ele próprio é um de seus elementos, e, também, '*q*' é um nome para a sentença "*p*", teremos que "*p*" será uma sentença que afirmará algo acerca de si própria, isto é, será uma sentença auto-referente, e, segundo a "*Lei de Leibiniz*", '*q*' é idêntico a '*p*'. No entanto, e de acordo com o "esquema (T)", teremos as seguintes equivalências: " '*p*' é verdadeira se, e somente se, *p*", ou, " '*p*' é verdadeira se, e somente se, '*q*' não é verdadeira", e, por fim, " '*p*' é verdadeira se, e somente se, '*p*' não é verdadeira", o que é uma contradição inaceitável, a exemplo daquela construída por TARSKI(1944, p. 21-3).

2.2.6. Riqueza Essencial

A exigência de que a metalinguagem, correspondente a uma linguagem-objeto, seja "*esencialmente más rico*" parece não evitar a possibilidade de uma interpretação de alguns aspectos da metalinguagem na linguagem-objeto, uma vez que, o "*hecho de que el metalenguaje, en su parte no lógica, sea comúnmente más amplio que el lenguaje-objeto, no afecta la posibilidad de interpretar el primero en el segundo. Por ejemplo, los nombres de las expresiones del lenguaje-objeto figuram en el metalenguaje, aunque en su mayor parte no figuran en el lenguaje-objeto; sin embargo, es posible interpretar estos nombres en términos del lenguaje-objeto*" [TARSKI91944), p. 30-1]. Todavia, TARSKI(1944, p. 30) afirma ser demonstrável que seria possível formular uma interpretação da metalinguagem na linguagem-objeto se a condição de "*riqueza esencial*" não fosse satisfeita, isto é, "*cualquier término dado del metalenguaje puede correlacionarse com un término bien determinado del lenguaje-objeto, de manera tal que las oraciones afirmables [assertible] de uno de los lenguajes resulten correlacionadas com oraciones afirmables del outro*", o que nos lavaria à possibilidade, em função desta interpretação, de reconstruir, na linguagem-objeto, a "*antinomia do mentiroso*", admitindo-se que formulamos, na metalinguagem, uma "*definición satisfactoria de verdad*".

Interessa-nos observar, especificamente acerca desta questão, que a definição de uma linguagem, que será tomada como uma metalinguagem adequada para uma dada linguagem-objeto, exige que essa linguagem seja, em sua parte lógica, "*esencialmente más rico*" que a linguagem-objeto dada, para a qual se pretenda uma definição para uma noção de verdade. Essa exigência, por si só, torna muito delicada, ou pelo menos muito limitada, a escolha ou a definição de uma metalinguagem, a fim de que não se permita a interpretação de uma linguagem na outra e a conseqüente reconstrução da "*antinomia do mentiroso*". Por outras palavras, não será qualquer metalinguagem que servirá propriamente para a definição de verdade de uma certa linguagem-objeto, ao menos enquanto nós quisermos manter as pretensões de TARSKI quanto a uma definição de verdade que satisfaça a condição de ser "*materialmente adecuada*". Assim, se a distinção entre linguagem-objeto e metalinguagem "*sólo tiene un sentido relativo*" e se, para definir a verdade para uma metalinguagem, deveremos ir a uma "*metalenguaje de un nivel superior*", então poderemos chegar, deste modo, à constatação de que não nos será praticável conceber, para uma dada metalinguagem, tomada como linguagem-objeto, uma outra linguagem que pudesse ser "*esencialmente más rico*" em sua parte lógica[146]. Nessa medida, e com respeito a essa metalinguagem, não seria possível conceber uma outra metalinguagem na qual se pudesse definir uma concepção de verdade para a primeira. E, então, essa aparente solução para o problema da definição de uma noção de verdade para uma dada linguagem, apelando-se para uma outra linguagem, para uma metalinguagem, mostrar-se-á completamente inadequada.

2.2.7. Abrangência da Concepção Tarskiana

Parece-nos que um dos pressupostos fundamentais de toda essa construção, dita "*teoria da verdade*" de TARSKI, assenta-se na noção de "*riqueza esencial*", que nos obrigaria a admitir a impossibilidade de interpretar uma metalinguagem a partir de sua

[146] Cf. part. BACHELARD(1940), p. 76 — "Uma organização lógica é uma simples distribuição do verdadeiro e do falso. Não é uma construção em ação permanente como a matemática ou a física."

linguagem-objeto, uma vez que, em conseqüência desta interpretação, "*la hipótesis de que en el metalenguaje se ha formulado una definición satisfactoria de verdad implica la posibilidad de reconstruir, en ese lenguaje, la antinomia del mentiroso; y esto nos obliga, a su vez, a rechazar la hipótesis en cuestión*" [TARSKI(1944), p. 30]. Por outro lado, pode-se observar que a "*teoria da verdade*" de TARSKI(1944, p. 36), embora possa aplicar-se a "*lenguajes formalizados de cierta clase muy amplia de disciplinas matemáticas*", não tem uma aplicabilidade irrestrita, uma vez que "*se excluyen de esta clase disciplinas de un carácter elemental y de una estructura lógica muy elemental*".

Por conseguinte, pode-se afirmar que a "*teoria da verdade*" de TARSKI somente poderá aplicar-se a uma determinada classe de linguagens, exatamente a uma classe de linguagens que possam ser tomadas como linguagens intermediárias, que não tenham um "*carácter elemental*" e uma "*estructura lógica muy elementar*", e que não tenham, em sua parte lógica, uma "*riqueza esencial*" insuperável.

2.2.8. A Noção de Satisfação

Uma vez que não fizemos qualquer observação acerca dos procedimentos desenvolvidos por TARSKI, que o levaram a construir uma "*definición de verdad*", gostaríamos de fazê-las agora. TARSKI(1944, p. 32) inicia a Seção 11 — "*La construcción de la definición (bosquejo)*"[147] — sugerindo que a "*definición de verdad*" será obtida de uma "*forma muy sencilla*" se apelarmos para a definição de uma outra noção semântica, a de "*satisfacción*". No entanto, para obter tal definição, TARSKI percorre um longo caminho, no qual inúmeras outras noções necessitaram ser definidas antes que ele pudesse chegar à "*forma muy sincilla*" de sua "*definición de verdad*".

Rapidamente, TARSKI(1944, p. 32-4) necessitou definir pelo menos as seguinte principais noções — embora ele não tenha feito isso para todas —, para que ele pudesse chegar à "*definición de satisfacción*": "*función proposicional*", "*procedimiento recursivo*", "*variables libres*", "*sucesión infinita*" ou "*sucesión finita con un número arbitrario de términos*" e "*relación entre funciones proposicionales e sucesiones de*

[147] Cf. TARSKI(1944), p. 32 — "El método de construcción que esbozaremos puede aplicarse – mediando cambios apropiados – a todos los lenguajes formalizados que se conocen en la actualidad; sin embargo, no se sigue que no podría construirse un lenguaje al que no pudiera aplicarse este método."

objetos". Assim, as "*oraciones*" seriam definidas "*ahora simplemente como una función proposicional que no contiene variables libres*", ou seja, a classe das "*oraciones*", dita na Seção 2 — "*La extensión del término 'verdadero'* " — como "*oración enunciativa*", estaria contida na classe das "*funciones proposicionales*", supostamente nem todas "*enunciativas*".

Conseqüentemente, TARSKI(1944, p. 32) sugere que a noção de satisfação é uma relação entre "*objetos arbitrarios y ciertas expresiones llamadas '**funciones proposicionales**' [sentential functions]*", e diz, então, que resulta disso, para uma sentença, que "*hay sólo dos casos posibles: una oración o bien es satisfecha por todos los objetos, o no es satisfecha por objeto alguno*" [TARSKI(1944), p. 33]. E, assim, "*llegamos a una definición de verdad y de la falsedad diciendo simplemente que **una oración es verdadera si es satisfecha por todos los objetos, y falsa en caso contrario***" [TARSKI(1944), p. 33-4]. E, para enfrentar uma certa dificuldade com relação à noção de "*función proposicional*", que é coloca como podendo conter um número arbitrário de variáveis livres, TARSKI(1944, p. 34] apela para a "*noción matemática de sucesión infinita (o, posiblemente, de sucesión finita con un número arbitrario de términos)*" [TARSKI(1944), p. 34], admitindo "*considerar la satisfacción, no como una relación de ordem superior entre funciones proposicionales y un número indefinido de objetos, sino como una relación binaria entre funciones y sucesiones de objetos*" [TARSKI(1944), p. 34]. Podemos imaginar, a partir disso, que esse procedimento seria adequado para qualquer metalinguagem, na qual se quisesse "*construir*" uma "*definición de verdad*", *a la* TARSKI, para uma dada linguagem-objeto que viesse a nos interessar. Simples?

É possível, também, observar alguma dificuldade na própria definição de "*satisfacción*", considerando que, de acordo com TARSKI(1944, p. 33), para "*obtener una definición de satisfacción debemos aplicar nuevamente un procedimiento recurrente. Indicamos cuáles son los objetos que satisfacen las funciones proposicionales más simples; y luego enunciamos las condiciones en que los objetos dados satisfacen una función compuesta (suponiendo que sabemos cuáles son los objetos que satisfacen las funciones simples a partir de las cuales se construye la compuesta). Así, por exemplo, decimos que ciertos números satisfacen la disyunción lógica '**x es mayor que y o x es igual a y**' si satisfacen por lo menos una de las funciones '**x es mayor que y**' o '**x es igual a y**'* ". Vemos, assim, TARSKI apenas transferir o problema da "*definición de verdad*" para o problema da "*definición de satisfacción*"[148]. Então, e por exemplo, supondo que a sentença '*a neve é branca*' é verdadeira, dizemos que '*neve*' satisfaz à função proposicional '*x é branca*', ou seja, a noção de satisfação, enquanto uma "*relación entre objetos arbitrarios y ciertas expresiones llamadas '**funciones proposicionales**' [sentential functions]*" [TARSKI(1944), p. 32], pressupõe alguma outra noção, que possa servir como um meio para determinar, com anterioridade, se essa relação é própria ou não, isto é, que possa nos dizer se a sentença '*a neve é branca*' é verdadeira. Com efeito, para que noções deveremos apelar ou sob que condições poderemos indicar "*cuáles son los objetos que satisfacen las funciones proposicionales más simples*" [TARSKI(1944), p. 33]? Podemos observar que, relativamente às concepções matemáticas, pode não ser suficiente afirmar "*que una cosa no es blanca porque se afirma con Verdad que es tal, sino que se afirma con Verdad que es tal porque es blanca*" [ABBAGNANO(1961), p. 1180], ou seja, e a exemplo dos "*parâmetros arbitrários*" ou das "*constantes fundamentais*" de uma teoria científica, que não podem ser explicados por ela, como a "*velocidade da luz*" na Teoria da Relatividade, a "*concepción semántica de la verdad*" de TARSKI não pode explicar porque determinados objetos "*satisfacen las funciones proposicionales más simples*".

Portanto, como garantir que um objeto satisfaz a uma função proposicional, sem apelar para noções anteriores? A noção de satisfação é uma noção semântica que depende de outras noções, as quais determinarão se uma função proposicional é passível de ser satisfeita ou não. Por exemplo, para afirmar que $x = 5$ e $y = 2$ satisfazem '*x é maior do que y*', devemos apelar, pelo menos, para a noção de "*sucessor*", tomando-a como algo dado anteriormente. Assim, a noção básica, que poderia determinar a noção de satisfação, com muito maior simplicidade, é a noção de verdade, bastando dizer que uma função proposicional é satisfeita se a sentença correspondente admitir o termo 'verdadeiro'. E, assim, poderíamos partir para a condição básica de admissibilidade de sentenças em uma linguagem: a noção de verdade — e não a noção de satisfação[149].

---

148 Cf. part. TARSKI(1944), p. 33 — "En lo respecta a la noción de satisfacción, podríamos tratar de definirla diciendo que ciertos objetos *satisfacen* una función dada si ésta se convierte en una oración verdadera cuando reemplazamos sus variables libres por nomes de los objetos dados. En neste sentido, por ejemplo, la nieve satisface la función proposicional '*x es blanca*', ya que la oración '*la nieve es blanca*' es verdadera. Pero, aparte de otras dificultades, no podemos emplear este método porque deseamos usar la noción de satisfacción para definir la verdad."

149 Cf. part. Nota de Rodapé 144, p. 136. ("Mientras que las palabras ... (TARSKI(1944), p. 17).).

Além de outras dificuldades, muitas delas apontadas pelo próprio TARSKI, gostaríamos de considerar, por fim, que a questão de se apelar para uma classe infinita de objetos poderá gerar, ao menos, dúvidas ou inseguranças quanto a possibilidade do surgimento de contradições. Em uma nota de rodapé associada a sua definição de verdade, TARSKI(1944, p. 34) afirma que "*al llevar a la práctica esta idea surge cierta dificultad técnica. Una función proposicional puede contener un número arbitrario de variables libres; y la naturaleza lógica de la noción de satisfacción varía com este número. Así, por ejemplo, la noción en cuestión, aplicada a funciones de una variable, es una relación binaria entre esta funciones y objetos singulares; aplicada a funciones de dos variables se convierte en una relación ternaria entre funciones y pares de objetos; y así sucesivamente. Por consiguiente, estrictamente hablando no se nos presenta una sola noción de satisfacción sino infinitas nociones; y resulta que estas nociones no pueden definirse independientemente entre sí, sino que deben introducirse simultáneamente*". Estas dúvidas ou inseguranças colocam-se exatamente sobre aquelas teorias que permitem a formulação de enunciados acerca de todos os elementos de classes finitas ou infinitas.

Para evidenciarmos a pertinência destas objeções, podemos considerar algumas observações de KÖRNER(1960, p. 68), acerca da antinomia associada à existência da classe de todos os números cardinais, no âmbito da "*teoria de Cantor*": "*A importância dessa antinomia, tanto para a teoria de Cantor quanto para a sua versão logicista, é bem descrita pelo autor de uma obra clássica sobre a teoria de Cantor* [F. HANSDORFF, *Mengenlehre*]. *"O desconcertante nessa antinomia", diz o autor, "não é que surja uma contradição, mas que não se esteja preparado para enfrentá-la: a classe de todos os números cardinais parece* ***a priori*** *tão insuspeita quanto a classe de todos os números naturais. Conseqüentemente, dá origem à insegurança com relação à possibilidade de outras classes infinitas, talvez todas, não serem pseudoclasses afetadas por contradições [...] e, por conseguinte, à tarefa de eliminar essa insegurança [...]"* ".

2.2.9. Aplicações da Concepção Semântica de Verdade

Com efeito, o que dizer, então, deste novo campo derivado dos trabalhos de TARSKI, denominado "*Teoria dos Modelos*" ou "*Semântica Matemática*"? Segundo

Da COSTA(1997, p. 119), tal campo originou-se "*das investigações tarskianas sobre o conceito de verdade e converteu-se em uma das partes da lógica mais fecundas. Possui aplicações não apenas nas disciplinas formais, mas, também, na teoria da ciência e em diversas ciências empíricas. Tudo isso evidencia o enorme significado tanto teórico quanto prático da conceituação de verdade à la Tarski. De fato, as indagações de Tarski sobre a verdade constituem uma das maiores realizações no campo da lógica em nosso século*". O que dizer, também, das novas concepções matemáticas ou lógicas tomadas do "*conceito de verdade*" de Tarski, como, por exemplo, atesta-nos o próprio TARSKI(1944, p. 68-70)? Não creio que, em princípio, o fato de se estabelecer algumas realizações num âmbito marcadamente sintático ou formal, como o estabelecimento de um formalismo, aparentemente consistente e próprio, correspondente a uma concepção de verdade, e usado para referendá-la, atestem suficientemente a propriedade dessa mesma concepção que se pretenderia ver assentada.

Para ilustrar a pertinência desta questão, é interessante observar algumas afirmações de KÖRNER(1960, p. 52), acerca dos "*sistemas logicistas*", quando ele diz que "*temos de considerar qualquer sistema logicista tanto do ponto de vista matemático quanto do filosófico. Matematicamente falando, devemos indagar se seu simbolismo é tão preciso quanto possível e se suas deduções são, dentro do que se pode razoavelmente exigir, suficientemente rigorosas, tendo em vista as técnicas matemáticas existentes, ou se o sistema representa de fato um progresso com relação a elas. Filosoficamente falando, devemos confrontar e comparar o sistema logicista com as teses e programas filosóficos logicistas, como enunciados por Leibniz, Frege, Russell e outros. Devemos julgar o sistema à luz da tese de que a matemática é lógica (em vários sentidos desse aforismo), como também até que ponto tal tese é esclarecida por tal sistema ou, possivelmente, obscurecida por ele. Se o sistema é falho* ***qua mathematica****, sua confrontação com as teses e programas filosóficos pode ocasionalmente não ser interessante. Todavia, a mera perfeição matemática do sistema não é suficiente para validar a filosofia logicista da matemática.*" Assim, aceitar a matemática de TARSKI, embora rejeitando sua tese filosófica de que "*la verdad de una oración consiste en su acuerdo (o correspondencia) con la realidad*" [TARSKI(1944), p. 12], nada mais é que, por exemplo, "*aceitar a matemática de Euclides,* *questionando todavia a tese filosófica de que o espaço perceptual é euclidiano*" [KÖRNER(1960), p. 52].

2.2.10. Teoria da Correspondência: considerações finais

Por conseguinte, a questão que nos parece mais sugestiva, acerca da noção de verdade, coloca-se com relação à Teoria da Correspondência. Nessa medida, Da COSTA(1997, p. 114)[150] observa que a "*concepção clássica, tradicional, da correspondência mantém que uma sentença (podendo exprimir uma crença) é verdadeira caso reflita o real, retrate aquilo que é; se isto não se der, ela é falsa. As crenças ou as sentenças apontam para estados de coisas; se eles existem, elas são verdadeiras; em hipótese contrária são falsas*". Assim, gostaríamos de apontar para alguns problemas que nos parecem fundamentais para elucidarmos alguns aspectos pertinentes a essa questão. Esses problemas são formulados pelo próprio Da COSTA(1997, p. 114)[151], a exemplo das considerações, postas na subseção anterior, acerca da relação entre linguagem e realidade material: 1) Em que medida nos seria possível "*estabelecer as relações vigentes entre linguagem e realidade*"?; e 2) Admitindo-se que "*copiamos algo do real ao formularmos sentenças verdadeiras, qual a natureza dessa cópia? O que liga esta e o objeto original?*"[152]

No entanto, e antes de tentarmos responder a essas questões, observamos que HEGENBERG(1975a, p. 17-24) afirma que qualquer teoria acerca da verdade não poderia deixar de ter em conta, ao menos, dois princípios: 1) "*Nenhum enunciado* **P** *pode ser*

[150] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 114 — "Uma teoria da correspondência, para ser filosoficamente satisfatória, carece deixar clara a índole da correspondência que deve existir entre sentenças ou crenças, de um lado, e a realidade, de outro, que assegure a verdade."

[151] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 115 — "Obviamente, só parece possível comparar sentenças ou crenças com nosso corpo de crenças ou de experiências *sobre* o real. Estritamente falando só há comparação possível entre pensamento e pensamento."

[152] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 115 — "Para nós, as indagações de A. Tarski sobre o assunto fornecem uma saída, como veremos."; e p. 116 — "Não obstante o caráter primitivo da verdade correspondencial, torna-se possível caracterizá-lo formal e matematicamente entre amplos limites. Além disso, esse procedimento elimina inteiramente os paradoxos. Com efeito, essa foi a notável façanha de Tarski. Não há inconveniente em se cognominar a caracterização de Tarski de definição de verdade (como correspondência), desde que se tenha em mente não se tratar de definição em sentido estrito – acima apontado –, formulada via noções mais simples e fundamentais; porém, consiste em artifício lógico-matemático que individualiza extensionalmente a verdade em determinados contextos, particularmente apropriados para aplicações nos domínios abstratos da lógica e da matemática."

verdadeiro e falso", conhecido como a "*Lei da não-Contradição*"; e 2) "*Qualquer que seja o enunciado* **P**, *se* **P** *descreve um estado de coisas* **M**, **P** *é verdadeiro se, e somente se,* **M**", conhecido como "*Lei de Tarski*". Assim, com respeito da "*Lei de Tarski*", e uma vez que é nela que reside uma das condições básicas para o estabelecimento da noção de verdade na "*Teoria da Correspondência*"[153], HEGENBERG(1975a, p. 22-3) afirma que essa lei "*traduz a noção intuitiva de que existe conexão entre as sentenças (entidades lingüísticas) e o "mundo" (entidades extralingüísticas). Ela traduz a idéia intuitiva de que a sentença o corvo é negro é verdadeira se e somente se, efetivamente, o corvo é negro (como questão de fato, algo visto no mundo, algo que se constata na circunstância). Em outras palavras, o enunciado 'o corvo é negro' é verdadeiro se e somente se o corvo é negro.*"

Como é possível observar, podemos reconhecer, na "*Lei de Tarski*", o próprio "*esquema* (T)"[154], de TARSKI, considerado anteriormente. Com efeito, e apelando-se para a forma deste esquema, apresentada acima por HEGENBERG — "*se* **P** *descreve um estado de coisas* **M** , **P** *é verdadeiro se e somente se* **M**" —, observa-se que **P** é uma sentença que se acha associada ao estado de coisas **M**, na medida em que pretendermos que **P** descreva um certo "*estado de coisas*" denotado por **M** . E, assim, a verdade de **P** depende da correspondência de **P** com a existência do "*estado de coisas*" **M**. Portanto, a relação entre **P** e **M** vincularia, supostamente, dois domínios intangíveis, um "*conceitual*" e outro "*material*", respectivamente[155], de tal modo que **P** é um nome que denota um objeto lingüístico — uma sentença — e **M** é nome que denota um objeto extralingüístico — um "*estado de coisas*" —, embora ambos sejam elementos de um mesmo sistema conceitual, uma vez que eles têm um mesmo enunciado ou um enunciado equivalente como referente, isto é, um enunciado que distingue um mesmo "*estado de coisas*". Essas considerações poderiam nos dar uma compreensão mais clara acerca das

---

[153] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 116 — "Lembramos, no entanto, que qualquer definição de verdade, como correspondência, deve satisfazer, indubitavelmente, a condição: se S for uma sentença e $\underline{S}$ for o seu nome, então: (T) $\underline{S}$ é verdadeira se e só se S. Se $\underline{S}$ não for verdadeira, ela é falsa (quando não houver margem para dúvidas utilizaremos S como seu próprio nome)."

[154] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 175 — "Ficou patente que o esquema (T) acima, discutido pela primeira vez por Lesniewski, constitui condição que qualquer teoria da verdade de índole clássica deve satisfazer. Aliás, parece difícil imaginar-se uma teoria da verdade a qual não acarrete suas instâncias, isto é, que não seja materialmente adequada."

[155] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 119 — "A verdade correspondencial vincula linguagem e *realidade*. Na teoria dos modelos, substitui-se porções da realidade por estruturas conjuntistas elaboradas em sistemas tradicionais de teoria dos conjuntos, e linguagens naturais ou das ciências por linguagens formalizadas. Semelhante substituição pressupõe que não nos afastamos demasiadamente da situação real."

razões que teriam levado TARSKI a exigir que qualquer noção semântica fosse tratada em outra linguagem, já que, para podermos dispor destas noções, não é possível tomar os próprios objetos da linguagem em questão, mas sim, e tão-somente, um conjunto de outros objetos que se constituiriam como seus nomes ou que os pudessem representar, ou seja, teríamos que tratar destas atribuições em uma outra linguagem[156], segundo TARSKI. Por outras palavras, não é suficiente tomar o próprio objeto e, mostrando-o, pronunciar sua concepção, como não bastaria, para pronunciar qualquer uma de suas qualidades ou atributos, tomar um objeto e mostrá-lo. Por exemplo, é possível que algumas pessoas, que atualmente se deparassem com uma "*pena*" sobre uma escrivaninha, não a tomassem como um sinal de um instrumento de escrita, ou seja, não bastaria mostrar uma "*pena*" para estas pessoas, mesmo sobre uma escrivaninha, para pronunciar: "*isto é uma instrumento de escrita*". Ou ainda, uma letra 'v' somente se distingue do numeral romano 'v' na medida em que a concepção do objeto, cujo sinal é 'v', puder ser depreendida do sistema conceitual continente do sinal 'v', isto é, se admitirmos, ao menos, uma outra dimensão além da dimensão sintática, para um dado conhecimento. Contudo, em que medida a relação entre **P** e **M** é efetivada, e de que natureza é essa relação?

Para nós, interessar-nos-á buscar uma resposta no âmbito das perquirições deste trabalho. Inicialmente, e segundo HEGENBERG(1975a, p. 3-5), dentre as variadas teorias, que pretenderiam explicar o modo pelo qual seriam atribuídos significados à multiplicidade de termos ou sentenças de uma dada linguagem, trataremos rapidamente da "*Teoria da Referência*". De acordo com esta teoria, "*um termo seria dotado de significado se representasse um objeto*", e, a fim de evitar-se confusões entre "*entidades lingüísticas*" e "*entidades extralingüísticas*", HEGENBERG(1975a, p. 4) sugere que se adote uma pequena convenção: "*Usaremos aspas simples em volta de uma palavra para indicar que o foco de nossa atenção é a palavra, a entidade lingüística; a ausência dessas aspas significará que nos estamos referindo ao objeto (e não à palavra)*". Por conseguinte, e por exemplo, em "*a neve é branca*" estaríamos nos referindo ao objeto supostamente

[156] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 117 — "A verdade, em geral, da sentença S da linguagem L depende de circunstâncias que estão fora de L, não sendo função simplesmente de manipulações simbólicas, isto é, do nível sintático de L. Ou seja, a definição tarskiana é de índole semântica, como não poderia deixar de ser. Daí ela se denominar definição semântica de verdade."; e part. Da COSTA(1961), p. 54 — "Assim, *exempli gratia*, a idéia de *verdade*, no tocante às ciências dedutivas, só pode ser tratada, como demonstrou Tarski, no domínio das perquirições semânticas; [...]."

representado — isto é, a neve —; porém, em "*a sentença 'a neve é branca' é verdadeira*", não estaríamos nos referindo ao objeto representado, mas tão-somente à sentença 'a neve é branca'. Esse é exatamente o caso da relação entre **P** e **M**, ou analogamente, entre X e p do "*esquema* (T)", ou seja, **P** e X referem-se a uma sentença e **M** e p referem-se a um objeto representado.

Assim, a efetivação da relação entre uma sentença, de uma linguagem, e um "*estado de coisas*", de uma realidade material, é desenvolvida em um sistema conceitual, continente da linguagem em questão, mediante uma atribuição predicativa que distingue um "*estado de coisas*", em uma realidade material supostamente correspondente, enquanto um objeto de uma sentença ou de um conjunto de sentenças dessa mesma linguagem. A natureza desta atribuição predicativa será normativa, ou seja, ela se constituirá a partir da determinação de uma coleção de concepções conceituais, mediante a qual se tornará efetiva a composição e a distinção do próprio "*estado de coisas*", nessa mesma realidade material, isto é, a natureza da relação entre **P** e **M** é de caráter semântico. Por outras palavras, a possibilidade de estabelecer-se uma relação entre uma linguagem e uma realidade material assenta-se na possibilidade da instituição de um sistema conceitual que possa apreender essa mesma realidade material, de tal modo que os objetos dessa realidade e as suas relações possam ser "*copiados*" naquela mesma linguagem. Com efeito, a natureza dessa "*cópia*" é especificamente conceitual, determinando-se como uma composição predicativa, e o que "*liga essa cópia e o objeto original*" é exatamente a própria concepção do "*objeto original*", que deverá ser a mesma tanto no sistema conceitual como na realidade material supostamente correspondente, ou seja, a possibilidade da distinção de uma dada realidade material será determinada na medida em que ela puder ser constituída como um subproduto de um sistema conceitual previamente desenvolvido.

2.2.11. Uma Definição de Verdade no Âmbito dos Sistema Conceituais

Embora não nos seja possível delinear formalmente uma concepção de verdade, pretendemos estabelecer que essa concepção deverá constituir-se mediante a determinação de seu caráter marcadamente *normativo*, ou seja, a noção de verdade que se pretenderá definir emergirá exatamente a partir de uma "*postulação de princípio*", como uma disposição operacional capaz de implementar a sua concepção no âmbito de um dado campo referencial, mediante uma petição que recaia sobre a aceitação de um pressuposto que a determinará no interior da dimensão semântica dos sistemas conceituais.

Não pretendemos defender uma noção de verdade como estando conforme aos "*teoremas fundamentales de la concepción dela verdad como correspondencia*" de ARISTÓTELES, *apud* ABBAGNANO(1961, p. 1180): "*El primero es que la verdad está en el pensamiento o en el lenguaje, no en el ser o en la cosa (Met.,* [...]*). El segundo es que la medida de la Verdad es el ser o la cosa, no el pensamiento o el discurso: de tal manera que una cosa no es blanca porque se afirma con Verdad que es tal, sino que se afirma con Verdad que es tal porque es blanca (Met.,* [...]*)*". Diremos que a verdade não está nem no pensamento nem na linguagem, e menos ainda que está no ser ou na coisa. Queremos defender uma concepção que colocará a noção de verdade como emergindo da correlação entre um "*observador*" e a "*coisa observada*", entre "*aquele que constrói conhecimento*" e "*aquilo que é construído*", entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, e, dessa forma, defender que não há uma medida para a verdade que se coloque no ser ou na coisa, no pensamento ou no discurso. Diremos que, se houver alguma medida, esta tomará como substrato o campo no qual se inter-relacionam um sujeito epistêmico e um objeto, como aspectos distintos de uma mesma totalidade continente. Rechaçaremos, também, as idéias de conformidade, correspondência e todas aquelas que impuserem, implícita e anteriormente, a idéia de um objeto e de um sujeito autônomos e independentes um do outro.

Não nos interessará, também, defender uma concepção de verdade que a tome como um "*termo indefinido ou um conceito primitivo*"[157], como uma "*relação entre as sentenças de uma linguagem e a realidade material*"[158] ou "*como um predicado ou uma*

---

[157] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 115 — "Por tudo isso, consideramos o conceito clássico de verdade como primitivo. Ele se acha pressuposto em todas as nossas atividades práticas e teóricas. Filosoficamente, verdade é conceito último, indefinível por meio de outros mais simples, se utilizarmos o termo *definição* na acepção de proposição que *caracteriza* e *esclarece*, sem petição de princípio, um conceito. A própria sentença expressando a definição, em sentido estrito, de verdade teria de ser "verdadeira"."

[158] Cf. part. Da COSTA(1997), p.114 — "A concepção clássica, tradicional, da correspondência mantém que uma sentença (podendo exprimir uma crença) é verdadeira caso reflita o real, retrate aquilo que é; se isto não se der, ela é falsa."

propriedade de sentenças"[159]. E, com efeito, a noção de verdade que pretendemos determinar não se constitui como um objeto, como um "*termo indefinido*" ou como um "*conceito primitivo*", não se constitui como uma relação qualquer entre objetos lingüísticos e extralingüísticos, e não se constitui como um predicado ou uma propriedade de sentenças de uma dada linguagem, constitui-se, simplesmente, como uma atribuição de direito a qualidades ou predicados, por uma concessão imperiosa e contumaz, transferidos aos objetos de um dado subsistema conceitual por meio de um conjunto de princípios. Portanto, a noção de verdade que queremos adotar, e que será tomada como uma atribuição predicativa dirigida aos objetos de um subsistema conceitual, põe-se de modo normativo quando qualifica um enunciado, que, por sua intercessão, passa a exibir uma configuração simbólica apropriada e legítima.

Assim, e contrariamente a TARSKI(1944), quando afirmamos que um enunciado é verdadeiro não estamos nos referindo aos objetos acerca dos quais o enunciado "*fala*" ou acerca dos "*estados de coisas*" descritos por ele — porque a aceitabilidade da existência destes objetos ou "*estados de coisas*" não depende do predicado verdade —, mas sim, e tão-somente, ao próprio enunciado, afirmando que ele é formalmente correto, uma vez que a sua configuração simbólica *corresponde* àquilo que se impõe enunciar, ou seja, à proposição correspondente. Nessa medida, delegar a um enunciado a condição de verdadeiro é admitir, como norma, que a sua configuração simbólica *corresponde a* ou *reflete perfeitamente* aquilo que se quer enunciar ou aquilo que se impõe enunciar. E o que se impõe enunciar é a efetividade da atribuição de um predicado a um objeto, que, desse modo, passa a incorporar este predicado em seu *patrimônio*, em sua *herança ancestral*.

Por conseguinte, podemos especificar a concepção de verdade que estamos defendendo dizendo que a "*verdade*" será tomada como uma intuição necessária, mediante a qual se torna possível efetivar uma atribuição predicativa pertinente aos objetos de um dado subsistema conceitual. Obviamente, esta idéia de conceber a "*verdade*" como uma intuição necessária somente terá sentido no âmbito de um sistema conceitual previamente distinguido — distinção esta que se dará basicamente por intermédio de um conjunto de

[159] Cf. part. TARSKI(1944), p. 17-8 — "[...] a palabra '*verdadero*' posee una naturaleza lógica diferente: expresa una propriedad (o denota una clase) de ciertas expresiones, a saber, de oraciones. Sin embargo, se ve fácilmente que todas las formulaciones que se dieron anteriormente (cfr. las secciones 3 y 4) y que tenían por finalidad explicar el significado de esta palabra, no se referían a las oraciones mismas sino a objetos "acerca de los que hablan" estas oraciones, o posiblemente a "estados de cosa" descritas por ellas."

objetos e de suas relações fundamentais, a exemplo de uma boa concepção de axiomática, como já vimos no Capítulo I. Assim, essa concepção de verdade deverá nos permitir propor, também, uma definição de verdade, segundo essa mesma concepção e no âmbito dos sistemas conceituais, ou seja, dizer que uma sentença é verdadeira é dizer que a sua configuração simbólica corresponde àquilo que se impõe enunciar, o que implicará, certamente, a própria "*equivalência da forma* (T)" — "*X* é verdadeira se, e somente se, *p*" — de TARSKI(1944). Ademais, e segundo TARSKI(1944, p. 16), considerando-se um caso particular para o "*esquema* (T)", como "*una definición parcial de la verdad, que explica en qué consiste la verdad de esta oración individual*", poder-se-ia questionar, assumindo-se de fato que esse esquema particularizado define, mesmo que "*parcialmente*", a verdade, que tipo de explicação nos é dada por esse esquema que nos mostre em que consiste a verdade de uma sentença em particular?

Nessa medida, se pudermos manter que uma dada definição apenas dispõe algum objeto operacionalmente, ou seja, que apenas nos permite instituir ou assentar esse objeto num dado campo operacional — contrariamente às concepções de TARSKI(1944) e de Da COSTA(1997)[160], uma vez que estas concepções não abrangeriam, por exemplo, a definição de "*Derivada de uma Função*" —, então afirmaremos, efetivamente, que essa explicação nos é dada na medida em que pudermos aceitar que esse mesmo "*esquema* (T)" possa ser reescrito do seguinte modo: dizer que uma sentença é verdadeira, a partir de seu nome, é dizer que a sua configuração simbólica — a própria sentença — *corresponde a* ou *reflete perfeitamente* aquilo que se impõe enunciar, ou seja, a proposição correspondente. No entanto, deveremos separar aqueles enunciados que dizem respeito a um sistema conceitual daqueles enunciados que se estabelecem na tentativa de correlacionar um sistema conceitual e um sistema material, caso este sugerido pelas formulações associadas à "*Teoria da Correspondência*", como, por exemplo, na formulação "*A verdade de uma oração consiste em seu acordo (ou correspondência) com a realidade*" ou na formulação "*Uma oração é verdadeira se designa um estado de coisas existente*". Isso nos parece

[160] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 115 — "Filosoficamente, verdade é conceito último, indefinível por meio de outros mais simples, se utilizarmos o termo *definição* na acepção de proposição que *caracteriza* e *esclarece*, sem petição de princípio, um conceito."; e part. TARSKI(1944), p. 29 — "[...] la definición de la verdad, o de cualquier otro concepto semántico, cumplirá lo que esperamos intuitivamente de toda definición; es decir, explicará el significado del término que se define en términos cuyos significados parecen completamente claros e inequívocos."

conveniente para evitarmos transferir a verificação da propriedade de uma concepção, desenvolvida num certo âmbito, para um outro âmbito independente do primeiro. Em outras palavras, dizer que a "*verdade*", relativa ao âmbito dos sistemas conceituais, dependa de uma certa "*circunstância*" associada ao âmbito dos sistemas materiais significaria condicionar essa noção à variabilidade e à relatividade das percepções sensoriais ensejadas em cada um desses mesmos sistemas materiais, e, simplesmente, significaria trocar o problema da determinação da noção de verdade por um outro, cuja dificuldade talvez seja incomensurável. Por exemplo, "*para os Esquimós existem mais de uma dezena de tons de branco*".

Posto isso, parece-nos oportuno dizer, então, que a concepção de verdade que defendemos deverá ser instituída no interior da dimensão semântica de um dado sistema conceitual, de tal modo que, e a partir de sua intercessão, seja possível instituir a legitimidade ou a consistência de algumas configurações simbólicas no interior da dimensão sintática desse mesmo sistema, isto é, de modo a evidenciar que uma dada concepção conceitual é adequada ou está propriamente configurada, por meio de um conjunto de símbolos e de regras operacionais, a partir de outras formulações conceituais previamente assentadas no âmbito desse mesmo sistema.

Poder-se-ia considerar, por fim, e a exemplo de J.-L. Lévy-Leblond, *apud* Da COSTA(1997, p. 151), que "*um enunciado, por mais elementar e compacto que seja, tem sentido unicamente dentro de um arcabouço conceitual global. Ele não é "verdadeiro" (ou "falso") por ele mesmo. Contrariamente à opinião comum, o grande* ***affaire*** *da ciência não é a produção de verdades absolutas e universais, ou o reconhecimento de erros redibitórios, mas sim a delimitação das condições de verdade de enunciados que o cientista hesita um pouco a asseverar que são "verdadeiros" ou "falsos" sem qualificação (...). É "verdadeiro" que a luz se compõe seja de ondas, seja de partículas, se fazemos somente certas experiências particulares nas quais aparecem um ou outro desses aspectos; do mesmo modo, é "falso" que a luz se compõe de ondas e de partículas,* ***mas*** *qualquer uma dessas concepções é, em certas condições, aceitável e fecunda*".

É interessante observar que, se admitirmos que a noção de verdade mantenha um caráter normativo, configurado a partir da dimensão semântica de um dado sistema conceitual, a idéia de que a "*verdade tem sentido unicamente com relação a um sistema de* *referência*" [Da COSTA(1997), p. 151] parece-nos imediata. No entanto, e é isso que queremos destacar, esse sistema de referência, seja uma linguagem ou uma "*porção*" da realidade material, constitui-se tão-somente como um registro simbólico, como um quadro pictórico, como uma representação escultórica ou plástica, de um sistema conceitual previamente distinguido. Por outras palavras, quer tratemos de preparar uma linguagem, que seja adequada para corroborar as concepções conceituais que queremos implementar em uma dada realidade conceitual, quer tratemos de preparar toda uma "*fenomenologia de laboratório*"[161], que seja adequada para referendar algumas concepções teóricas que, também, nos interessa implementar a partir de uma realidade conceitual dada, tanto a linguagem como o fenômeno de laboratório determinam-se, simplesmente, como um "*espaço de configuração*"[162], como um espaço de representação. Não há "*mais*" realidade na manipulação de marcas ou símbolos inscritos em uma superfície do que há na manipulação de esculturas ou artefatos esculpidos sobre uma superfície, ou seja, e de acordo com BACHELARD(1940, p. 43), trata-se antes de "*estabelecer **uma supremacia da representação sobre a realidade**, uma supremacia do espaço representado sobre o espaço real, ou mais exatamente sobre o espaço que se considera real, porque este espaço primitivo é uma organização de experiências primeiras*".

Assim, parece-nos imediato conceber uma noção de verdade como uma intuição necessária, a partir da qual se torne possível efetivar uma atribuição predicativa pertinente aos objetos de um dado sistema conceitual, de tal modo que nos seja dado delegar a um enunciado a condição de verdadeiro, admitindo, como norma, que a sua configuração simbólica *corresponde a* ou *reflete perfeitamente* aquilo que se quer enunciar ou aquilo que se impõe enunciar.

[161] Cf. part. BACHELARD(1940), p. 44 — "O fenômeno científico é verdadeiramente configurado, reúne um complexo de experiências que não se encontram efetivamente configuradas na natureza."

[162] Cf. part. BACHELARD(1940), p. 43 — "[...] as intuições ditas reais se expõem e se discutem num espaço *representado*. Pouco importa que se veja o movimento no espaço real. Só o podemos estudar se examinarmos muitos outros da mesma espécie, se distinguirmos as suas variações, se lhe *representarmos* o tipo."; e p. 44 — "Por outras palavras, nós refletimos, não num espaço *real*, mas num verdadeiro *espaço de configuração*. [...] A representação traduz, pois, num espaço de configuração, aquilo que a percepção recebeu num espaço sensível."

2.2.12. A Verdade em Matemática

A verdade em Matemática não é uma verdade "*fatual*", não é uma verdade que "*consista em algum acordo ou correspondência com a realidade material*" ou que denote algum "*estado de coisas*"[163]. A verdade em Matemática define-se como uma equivalência entre uma enunciação pretendida, conforme uma linguagem anteriormente dada, e a propriedade de sua instituição, conforme uma "*demonstração*"[164]. Ou seja, a verdade em Matemática é uma verdade que se põe em um discurso, a partir de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, por força daquilo que se impõe enunciar no âmbito do Conhecimento Matemático.

Por um lado, não nos pareceria muito produtivo, ou pelo menos seria muito penoso, e a despeito da uniformidade de discursos informando-nos acerca das "*ciências naturais*", tomar o Conhecimento Matemático como uma "*ciência natural*". A esse propósito, por exemplo, Da COSTA(1997, p. 91) sugere-nos que, de modo geral, "*podemos definir a matemática como a teoria geral e abstrata de sistemas conceituais módulo dada lógica*", atestando que, se "*aceita essa concepção generalizada de matemática parece não haver pensamento racional sem esta ciência. Racionalidade e cientificidade, sendo eminentemente conceituais, significam, na maior parte, matemática, utilização de sistemas conceituais convenientes*". Já vimos, no entanto, no Capítulo I, que essa concepção *descreve* uma atividade matemática mais propriamente, correspondente à Matemática Pura, do que o próprio Conhecimento Matemático.

Por outro lado, parece-nos difícil não admitir que a verdade em Matemática "*radica na demonstração*". Assim, a idéia de associar a verdade à demonstração em

[163] Cf. part. HEGENBERG(1966), p. 342 — "Está mais ou menos assentado que a matemática é uma ciência abstrata, isto é, desligada dos fatos. A sua verdade não é, portanto, uma verdade que se comprove mediante análise de fatos, não é uma verdade fatual."

[164] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 94 — "De conformidade com a exposição feita, a verdade matemática radica, por assim dizer, na demonstração. E o critério dessa verdade é a evidência: quando seguimos os passos de uma demonstração, seja de matemática abstrata, em princípio formalizável, seja de matemática construtiva, aferimos a perfeição da mesma passo a passo, intuitivamente, aceitando a correção das várias etapas pela evidência."; p. 143-4 — "A idéia nuclear da matemática é a da demonstração, que somente se torna precisa via o plano sintático. Logo, um dos alicerces da matemática reside em certa combinatória intuitiva e construtiva, originadora de verdades correspondenciais."; e p. 145 — "[...] a verdade interna, em matemática, é sempre abstrata, fruto de definições e de postulados [...]."

Matemática parece-nos imediata[165], uma vez que, sempre que estivermos lidando com uma demonstração em Matemática, estaremos considerando a propriedade ou a adequação da instituição de algum enunciado, tomado como verdadeiro, no âmbito de um discurso matemático. Nessa medida, podemos considerar, de acordo com HEGENBERG(1966, p. 346), que é interessante "*acentuar que no estágio formal de puro cálculo, em que a verdade se associa com uma espécie de fidelidade no dizer, com uma espécie de cuidado nas transformações que efetuamos sobre os símbolos, evitando dizer "tolices", isto é, usar transformações ilícitas (no sentido de que não são permissíveis dentro do sistema) estamos estreitamente presos àquela concepção de verdade como "veritas"* "[166], ou seja, "*caberia lembrar que 'veritas' se liga ao discurso da Matemática, onde existem critérios rígidos para "dizer" o que deva ser dito*" [HEGENBERG(1995), p. 219]. E, portanto, não nos parece sem propósito admitir uma definição de verdade em Matemática, segundo a concepção de verdade que defendemos, nos moldes de uma equivalência: um enunciado é verdadeiro se, e somente se, sua configuração simbólica corresponde àquilo que se impõe enunciar. Essa imposição enunciativa se coloca, como já foi dito, no âmbito de uma realidade conceitual, por força de uma estrutura e de um processo operacionais lógicos, que nos permitam conceber ou apreender um objeto dessa mesma realidade conceitual como uma composição predicativa, a partir de um conjunto de outros objetos previamente distinguidos.

Ademais, e em uma última nota, observa-se, de acordo com TARSKI(1944, p. 36), que "***la noción de verdad nunca coincide com la de comprobabilidad [provability]****; pues todas las oraciones comprobables son verdaderas, pero hay oraciones verdaderas que no son comprobables*", pelo menos com relação a qualquer sistema formal que possa conter a Aritmética, como Kurt GÖDEL(1906-1978) o demonstrou em seu "*primeiro teorema da incompletude*", ou seja, "*a verdade ultrapassa de certa maneira a demonstrabilidade, pelo*

---

[165] Cf. part. ORLANDI(1996), p. 116-26; e part. TARSKI(1944), p. 36 — "Un enunciado de una disciplina formalizada dada es comprobable si puede obeterse a partir de los axiomas de esta disciplina por la aplicación de ciertas reglas de inferencia sencillas y puramente formales, tales como las de separación y sustitución. Por consiguiente, para mostrar que todos los enunciados comprobables son verdaderos, basta probar que todos los enunciados aceptados como axiomas son verdaderos, y que las reglas de inferencia, cuando se las aplica a enunciados verdaderos, producem nuevos enunciados verdaderos; y por lo común esto no ofrece dificultades."

[166] Cf. part. HEGENBERG(1995), p. 219 — "Do latim, herdamos 'veritas'. Intuitivamente, 'veritas' associa-se ao dizer, a uma fidelidade no dizer. Dizemos a verdade quando reportamos algo (passado), evitando omissões, acréscimos e distorções."

menos quando é considerada em termos formais" [BLACKBURN(1994), p. 379]. Nessa medida, se uma linguagem, ou um formalismo, é insuficiente para apreender a totalidade das verdades que podem ser associadas a um dado sistema conceitual[167], é imediato admitir que um sistema conceitual não possa ser reduzido a uma linguagem ou a um sistema formal correspondente, e admitir, também, que este sistema deva ter pelo menos uma outra dimensão, além da dimensão sintática, uma vez que ele não se reduz a esta. Por outro lado, pode-se dizer que a noção de verdade, relativamente aos sistemas conceituais, antes de associar-se a um tipo de "*correspondência ou acordo com a realidade material*", deveria associar-se a um tipo de intuição necessária, que, por intermédio de um conjunto de noções de base, nos daria o ensejo para efetivar uma atribuição predicativa pertinente aos objetos desse mesmo sistema conceitual, uma vez que, na óptica de uma noção de verdade tomada como "*correspondência com uma realidade material*", seria mais extravagante aceitarmos um sistema conceitual no qual se pudesse formular uma sentença verdadeira e, ao mesmo tempo, aceitarmos que esta sentença não poderia ser demonstrada no âmbito desse mesmo sistema.

Queremos crer que as considerações precedentes, postas neste capítulo, sejam suficientes para atestar a propriedade de nossa segunda tese intermediária, isto é, *o Conhecimento Matemático não reduz exatamente a uma linguagem*. Por conseguinte, se a Matemática não se reduz a uma linguagem, não é suficiente contemplar uma formulação matemática para apreendê-la, a exemplo de um neófito que seria arremessado, em estado de êxtase, sobre uma "*realidade última*", por obra e graça da persistente contemplação de um "*símbolo sagrado*". A apreensão de uma formulação matemática exigirá, sobretudo, uma apropriação mental da concepção matemática correspondente, a qual se constituirá a partir da objetivação da própria formulação matemática em apreensão, no âmbito de uma atividade discursiva, mediante um conjunto de formulações matemáticas anteriormente determinadas e tomadas como um substrato empírico adequado.

---

167 Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 379 — "Gödel definiu uma fórmula *P* que, apesar de ser indemonstrável, se vê que é verdadeira, dada a maneira como é construída. [...] Gödel codificou as fórmulas lógicas em números, de maneira que a um enunciado na metateoria sobre a demonstrabilidade corresponde, por essa codificação, um enunciado simples da matemática elementar. O formalismo da aritmética contém assim frases que, consideradas do ponto de vista da codificação, exprimem proposições da sua própria metamatemática. A fórmula *P* é uma dessas frases: exprime, se a interpretarmos através da codificação, a sua indemonstrabilidade."

2.3. Atividade Discursiva

Temos afirmado que admitimos conceber o Conhecimento Matemático como uma realidade conceitual, como um sistema conceitual, uma vez que admitimos, também, que o Conhecimento Matemático não é um realidade material, no sentido de ser um sistema material, e que ele não é uma realidade psicológica, no sentido de ser um estado psicológico eventualmente correlacionado a algum indivíduo ou ente humano. Nessa medida, podemos afirmar, também, que a base empírica dos sistemas conceituais, ou se preferirmos, do Conhecimento Matemático, é uma atividade discursiva, uma atividade estruturada que se apoia em seu próprio movimento, manifestando-se ou expondo-se[168] em uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada e determinando-se em um "*procedimiento racional que prosigue, derivando conclusiones de premisas, por sucesivos e concatenados enunciados negativos o afirmativos*" [ABBAGNANO(1961), p. 348], ou seja, estruturando-se segundo os procedimentos do "*método axiomático*"[169]. Por conseguinte, é mediante uma atividade, uma atividade discursiva, um "*discursus*", tomado como um "*deslocamento de um lugar para outro*" [BLACKBURN(1994), p. 105], que nos será dado ter acesso ao Conhecimento Matemático, para apreendê-lo, para aplicá-lo ou para desenvolvê-lo.

A partir das considerações postas anteriormente, devemos dizer prontamente que essa atividade discursiva, mediante a qual se torna possível ensejar a objetivação de alguma *região* do Conhecimento Matemático, não deverá ser tomada como o próprio Conhecimento Matemático, mas exatamente como a base ou o fundamento sobre o qual se assenta toda atividade matemática, a exemplo das atividades desenvolvidas na Matemática Pura, na Matemática Aplicada, na Matemática Escolar e na Matemática Informal. Por outras palavras, a base empírica, a partir da qual nos é dado "*aprender matemática*", "*fazer matemática*" ou "*aplicar matemática*", será constituída e determinada em uma atividade

[168] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 226-7 — "As dimensões dedutiva e indutiva da racionalidade pressupõem, necessariamente, pelo menos no tocante ao contexto da exposição, certos métodos, inspirados na lógica, encarada como órgão das inferências dedutivas e indutivas. Assim, por exemplo, no contexto da exposição, imperam as normas do método axiomático."

[169] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 121 — "Según el punto de vista formalista, ahora aceptado casi universalmente, los Axiomas de la matemática non son ni verdaderos ni falsos: han sido adoptados convencionalmente, por motivos de conveniencia, como fundamentos o premisas del discurso matemático (Hilbert, "Axiomatischen Denken" ["Pensamientos Axiomáticos"], en Math. Annalen, 1918)."

discursiva. A questão fundamental, que não nos permite reduzir o Conhecimento Matemático a uma atividade discursiva reconhecidamente matemática, relaciona-se, marcadamente, a exigência de que devamos eleger um campo referencial sempre que quisermos conceber ou aprender um dado objeto matemático e aplicar uma dada concepção matemática.

No entanto, permitamo-nos lembrar rapidamente de algumas dessas considerações. Comecemos com a própria noção de sistema conceitual, que foi tomada como uma coleção de objetos ideais ou de conceitos que são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva. Essa totalidade discursiva, ordenada e dedutiva, opera em um campo de ordem que submete cada um de seus objetos a não ter uma existência independente e os determina como padrões abstraídos do processo total de seu próprio movimento. Desse modo, cada concepção conceitual relativa a um certo objeto, em um dado campo referencial, somente nos oferecerá esse objeto em algum aspecto destacado, a partir dessa mesma manifestação conceitual, não permitindo que nos seja dado apreendê-lo completamente, mas só implicitamente, mediante um conjunto sempre crescente de novas relações conceituais ou operacionais. Por isso, afirmamos que, em uma atividade discursiva, somente nos é possível ensejar a objetivação de uma certa *região* do Conhecimento Matemático, uma vez que, ao tomarmos uma teoria matemática, quer seja no sentido de desenvolver o próprio Conhecimento Matemático, empenhando-nos em uma atividade da Matemática Pura, quer seja no sentido de implementar sua aplicação no âmbito das demais Ciências, empenhando-nos em uma atividade da Matemática Aplicada, não estaremos lidando com a totalidade das formulações que seriam pertinentes a essa teoria, mas somente com aquelas formulações que puderem ser determinadas a partir de uma dada axiomática correspondente a essa mesma teoria, se essa teoria puder conter a Aritmética[170].

Ademais, afirmamos, também, que na objetivação do Conhecimento Matemático, desenvolve-se uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como um produto de alguma experiência possível, idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico

[170] Cf. part. NAGEL(1998), p. 87-8 — "Mostram também [as conclusões de Gödel] que há um número infinito de enunciados aritméticos verdadeiros que não se podem deduzir formalmente de qualquer conjunto dado de axiomas mediante um conjunto cerrado de regras de inferência. Segue-se que uma abordagem axiomática da teoria dos números, por exemplo, não é capaz de esgotar o domínio da verdade aritmética."

adequado, segundo uma rede de concepções conceituais erigida e realimentada em uma sucessão de formulações conceituais, e insistimos que é na determinação do caráter funcional ou operacional dos objetos matemáticos, mediante a incorporação das condições de operação desses objetos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais, que especificaremos o campo operacional do Conhecimento Matemático, desenvolvendo, também, uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático sob a condição de afirmar-se dele alguma destinação, isto é, segundo a indicação das circunstâncias em que este objeto poderá ser invocado. Pretende-se, então, que essa mesma atividade, tomada como um substrato empírico, assente-se como uma atividade discursiva.

Por conseguinte, para referendarmos que essa atividade discursiva se determina enquanto uma atividade estruturada que se apoia em seu próprio movimento, lembremo-nos de que concebemos uma linguagem como um sistema simbólico, que dá forma à manifestação empírica possível de um sistema conceitual, não se confundindo com este, mas determinando-se como uma de suas dimensões, e de que, a exemplo de TARSKI(1944, p. 19 20), preferimos distinguir uma linguagem que seja própria para um discurso científico, distinguindo-a de uma linguagem cotidiana, determinando a noção de "*estrutura exatamente especificada de uma linguagem*". Nesse sentido, lembremo-nos, também, de que a verdade em Matemática é uma verdade que se põe em um discurso, a partir de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, por força daquilo que se impõe enunciar no âmbito do Conhecimento Matemático.

Por outro lado, permitamo-nos considerar rapidamente, nesta subseção, a peculiaridade da atividade que dá ensejo à concepção dos objetos matemáticos, para referendarmos, também, a atividade discursiva como a base empírica dos sistemas conceituais. Podemos afirmar que, na aproximação discursiva relativa à concepção de um dado objeto matemático, o que se procura descrever, nessa concepção específica a um dado campo referencial, não é tanto o objeto concebido em sua suprema determinação conceitual, mas sim os procedimentos que tiveram como resultado a particular concepção do objeto em consideração. Assim, troca-se a substancialidade do objeto concebido pela substancialidade dos métodos de sua concepção, e o objeto, assim concebido, passará a determinar-se, tão-somente, como um produto preliminar de um método de concepção. O objeto concebido pode, então, manifestar-se com qualidades supostamente mais abrangentes, quando esses mesmos procedimentos forem estendidos para outros campos que sejam continentes daqueles tomados como originários, e a objetivação desse objeto será, então, alcançada aquém de uma determinação imediata ou direta desse mesmo objeto e será instituída enquanto um produto de um método discursivo.

Por fim, se pudermos aceitar que a objetividade na Ciência se põe na razão direta de sua socialização, isto é, e antes de tudo, que a objetividade científica é a objetivação[171] social das concepções científicas, não será difícil admitirmos, também, que essa objetividade científica é necessariamente discursiva. Sob esse aspecto, podemos observar que "*para deslocar um objeto de um décimo de milímetro, é preciso um aparelho; logo, um corpo de técnicos. Se prosseguirmos até as decimais seguintes, se procurarmos, por exemplo, saber a largura de uma franja de interferência e determinar, pelas mensurações conexas, o comprimento de onda de uma radiação, então precisamos não apenas de aparelhos e de conjuntos de técnicos, mas ainda de uma teoria e, por conseguinte, de uma Academia de Ciências. O instrumento de medida acaba sempre sendo uma teoria, e é preciso compreender que o microscópio é um prolongamento mais do espírito que do olho. Assim, a precisão discursiva e social destrói as insuficiências intuitivas e pessoais. Quanto mais apurada é a medida, mais indireta ela é. A ciência do solitário é qualitativa. A ciência socializada é quantitativa. A dualidade Universo e Espírito, quando examinada no âmbito de um esforço de conhecimento pessoal, aparece como a dualidade do fenômeno mal preparado e da sensação não retificada. A mesma dualidade fundamental, quando examinada no âmbito de um esforço de conhecimento científico, aparece como a dualidade do aparelho e da teoria, dualidade já não em oposição mas em recíprocas*" [BACHELARD(1938), p. 296-7].

Impenderá, então, não só na concepção, mas também na apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático, preparar o domínio ou campo

---

[171] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 34 — "Com efeito, é sem razão que se quer ver no real a *razão* determinante da objetividade, ao passo que não se pode jamais contribuir senão com a *prova* de uma objetivação correta. "A presença da palavra real", diz muito bem Campbell, "é sempre o sinal de perigo de confusão de pensamento". Se quisermos ficar na claridade, é preciso colocar o problema sistematicamente em termos de objetivação mais que em termos de objetividade. Determinar um caráter objetivo, não significa pôr a mão num absoluto, é provar que se aplica corretamente um método. [...] Cremos pois que é preferível não falar de uma objetivação do real, mas antes de objetivação de um pensamento em busca do real."

de definição antes de definir, o domínio ou o campo de operação antes de operar, ou seja, será preciso preparar as formulações matemáticas que se quererão produzir. E essa preparação requererá uma determinada e específica atividade discursiva, na qual qualquer nova formulação matemática possa ser inserida, para ser compreendida, uma atividade discursiva que deverá constituir-se como uma base empírica a partir da qual possam emergir as intuições matemáticas que nos encaminharão para as almejadas formulações. E é exatamente na medida em que pudermos tornar claramente discursivo aquilo que surge na mais básica das intuições, correlacionando-se as noções e variando-se as destinações operacionais, que poderemos reconhecer a insuficiência e a impropriedade daquelas concepções que apregoam que *"verdades necessárias e a priori"*, tidas como incondicionais, possam ser colocadas como um produto de um ato de pensamento que se basta a si mesmo e ao mesmo tempo servir a algum propósito sequer anunciado.

3. Os Objetos do Conhecimento Matemático

Intentaremos, nesta seção, desenvolver uma configuração fundamental acerca da natureza dos objetos matemáticos, de tal modo que nos seja dado vislumbrar um caminho adequado para determinar a pretendida consubstanciação das três dimensões do Conhecimento Matemático. Embora acreditemos que uma pequena configuração já se encontre esboçada em nosso trabalho de mestrado, de um modo menos detido e específico, implementaremos, nesta ocasião, algumas formulações que objetivarão agregar e, eventualmente, estender aquelas considerações preliminares, nos limites que nos seriam permitidos alcançar segundo nossa concepção de Conhecimento.

A proposição fundamental, que intenta apreender a natureza dos objetos matemáticos, responde, basicamente, à indagação que questiona sobre quais são os objetos de que se ocupa o Conhecimento Matemático:

Os objetos matemáticos são contingências que persistem circunstancialmente na fluência de seu próprio campo operacional, isto é, são estruturas operacionais fundamentais ensejadas predicativamente mediante composições de relações. Por conseguinte, o Conhecimento

Matemático não opera sobre objetos, de modo específico, mas na totalidade de seu próprio campo[172] de ordem.

Pretendemos estabelecer, com esta formulação, uma implicação de sentido duplo, ou seja, qualquer preocupação que viéssemos a ter em relação à configuração, à operacionalização ou à apreensão de um dado objeto matemático, esta preocupação nos imporia uma outra preocupação correlativa, que indagaria acerca dos pressupostos fundamentais e da natureza especial da realidade conceitual engendradora de tal objeto. Nessa medida, afirmamos que somente nos é dado configurar ou conceber algum objeto quando nos for possível configurar ou conceber, correlativamente, algum movimento em relação a um dado campo referencial, ou seja, somente nos seria permitido distinguir um dado objeto na medida em que a constituição deste mesmo objeto pudesse ser engendrada a partir de uma rede de concepções conceituais anteriormente determinada. Lembremo-nos de que concebemos o conhecimento enquanto um expediente operacional por excelência, enquanto um meio que se destina a alguma realização, e, com isso, queremos sugerir que o seu lugar próprio e a sua importância estão, exatamente, em sua destinação pragmática, isto é, que o conhecimento é um expediente que se distingue como uma disposição *"relativa aos atos que se devem praticar"*. Intenta-se, assim, por um lado, evidenciar uma espécie de *incorporação* das condições de definição e das condições de operação dos objetos matemáticos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais, e, por outro lado, impor um caráter funcional ou operacional dos objetos matemáticos, uma vez que é rigorosamente por ocasião de alguma ação que se nos impõe a pertinência ou a adequação de uma dada concepção matemática.

A exemplo dos objetos da microfísica contemporânea [BACHELARD(1971), p. 14-5], não será a tentativa de isolar um objeto matemático que nos permitirá apreendê-lo efetivamente. A tentativa de isolá-lo, anunciando uma definição,

[172] Cf. part. EINSTEIN(1938), Cap. III — (p. 125) "No início, o conceito de campo nada mais era do que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para a compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ofuscada pelo campo."; e part. BOHM(1980), p. 68 — "Assim, a atitude "atomística" em relação às palavras foi abandonada e, em seu lugar, nosso ponto de vista assemelha-se mais ao da teoria do campo, na física, onde as "partículas" são apenas abstrações convenientes do movimento total."

somente o dispõe operacionalmente, mas a sua substancialidade se mantém inacessível. A substancialidade do objeto matemático é contemporânea de suas relações, tanto conceituais como operacionais. A realidade conceitual na qual está imerso um objeto matemático perde a sua individualidade quando tentamos isolá-lo em uma fórmula auto-suficiente, e somente a submissão desse objeto ao campo de ordem daquela realidade nos permite a determinação distinta desta e a apreensão efetiva e rigorosa daquele. E permaneceremos, assim, ligados a essa realidade conceitual enquanto nos mantivermos no âmbito de um substrato empírico pertinente a esse mesmo sistema conceitual, isto é, enquanto nos mantivermos no âmbito de um discurso matemático.

A peculiaridade específica da natureza dos objetos matemáticos, apontada acima como uma contingência que persiste circunstancialmente na fluência de seu próprio campo operacional, advém, fundamentalmente, da pressuposição que concebe o Conhecimento Matemático como um tipo de *ordem*, um tipo de ordem que opera na totalidade de seu próprio campo de ordem, em vez de operar sobre algum objeto. Em conseqüência, nos veríamos enredados, sempre que nos dispuséssemos a apreender a natureza dessa mesma totalidade, com a questão da natureza do movimento[173], e vice-versa. Neste sentido, a relatividade do movimento engendrador dos objetos matemáticos, associada ao campo de ordem do Conhecimento Matemático e ligada à totalidade desse campo, é determinada na condição que submete cada um desses mesmos objetos a não ter uma existência independente. Essa condição é aquela que coloca os objetos matemáticos como padrões abstraídos do processo total do próprio movimento do campo de ordem do Conhecimento Matemático, conferindo-lhes apenas uma relativa independência ou autonomia de movimento e configurando-os enquanto uma contingência que persiste circunstancialmente na fluência de seu próprio campo de ordem, "*em vez de uma existência*

[173] Cf. part. BOHM(1980), p. 10 — "Está claro que, ao refletir sobre a natureza do movimento, tanto no pensamento quanto no objeto do pensamento, chega-se inevitavelmente à questão da totalidade."; e part. EINSTEIN(1956), p. 45 — "O nome "Teoria da Relatividade" está conectado com o fato de que o movimento do ponto de vista da experiência possível sempre aparece como o movimento relativo de um objeto em relação a outro (por exemplo, de um carro em relação ao chão, ou a Terra em relação ao Sol e às estrelas fixas). O movimento nunca é possível de ser observado como "movimento em relação ao espaço" ou, como já foi expresso, como "movimento absoluto"."

absolutamente independente enquanto substâncias fundamentais" [BOHM(1980), p. 77-8][174].

Posto isso, passaremos, então, a sugerir em que medida seria possível conceber ou apreender os objetos matemáticos, evidenciando, destacadamente, a peculiaridade de uma atividade ou de um movimento engendradores que viriam configurá-los. Sob este aspecto, e tendo em atenção a pretendida consubstanciação das três dimensões do Conhecimento Matemático, desenvolveremos um pequeno e incipiente modelo hipotético acerca desse suposto movimento configurador. Permitir-nos-emos, assim, ensaiar a respeito de um possível movimento que poderia nos levar à concepção, e à conseqüente apreensão, do objeto matemático chamado "*Derivada de uma Função*"[175], enquanto um produto de alguma experiência possível que virá idealizada como uma ação desenvolvida no interior do campo de ordem do Conhecimento Matemático, através de um conjunto de outras concepções instituídas como fundamentais e tomadas como um substrato empírico apropriado. Observamos, no entanto, que esta exemplificação não terá um caráter especificamente didático, isto é, não terá como preocupação uma ação que pudesse ser desenvolvida, "*ipsis verbis*", em alguma "*sala de aula*".

Advertimos, também, que deveremos manter, sempre presente, duas disposições fundamentais: a primeira, é a de que trataremos de uma *ação positiva*, quando estivermos lidando com o Conhecimento Matemático, isto é, de uma ação afirmativa que se determinará como um movimento conceitual configurador, desenvolvido como um produto de um sistema conceitual; e a segunda, é a de que, para podermos implementar essa mesma ação positiva, será imperioso localizá-la, anteriormente, em um dado campo referencial, no qual ela se desenvolverá através da determinação adequada e própria de uma instância epistemológica relativa ao Conhecimento Matemático. Essa instância epistemológica deverá ser ensejada a partir da objetivação, do campo operacional, do objetos e dos procedimentos próprios a esse mesmo conhecimento, segundo o que foi sugerido na Introdução deste trabalho.

[174] Cf. part. BOHM(1980), p. 77-9; e part. PEIRCE(1868), p. 73-80 — (p. 77) "Determinação é negação; para atribuir uma característica a um objeto é necessário compará-lo com outro que a não possua. Uma concepção universal em todos os aspectos seria irreconhecível e impossível." ; e (p. 79) "A "imagem" daquilo que está diante de nós é uma construção da mente sugerida por sensações anteriores."

[175] Formulações desenvolvidas a partir das obras de LANG, S., LEITHOLD, L. e SIMMONS, G. F.

Para os fins que nos interessam presentemente, observamos que as referidas concepções, que serão instituídas como fundamentais, determinar-se-ão no âmbito de um campo referencial que será tomado, então, como um substrato empírico apropriado, a partir do qual faremos emergir a noção de derivada de uma função e sobre o qual implementaremos a sua concepção. Rapidamente, consideraremos como contidas no âmbito desse presumível campo referencial algumas noções básicas, tais como *número, variável, equação, curva, conjunto, relação, limite, razão de variação instantânea* etc., as quais serão consideradas como previamente distinguidas ou serão distinguidas eventualmente.

Consideraremos, também, como já constituída, no âmbito desse mesmo campo, a noção de "*função*", dizendo, contudo, que uma função não é, tão-somente, "*uma regra ou lei que nos diz como uma quantidade variável depende de uma outra*" [SIMMONS(1985), p. 1] ou "*um conjunto de pares ordenados de números (x, y) no qual dois pares ordenados distintos não têm o primeiro número do par em comum*" [LEITHOLD(1968), p. 50], mas também um tipo muito especial de "*relação*", que pode ser estabelecida entre dois conjuntos numéricos. Por outras palavras, não devemos confundir a representação de uma função — quer seja geométrica, como uma *curva*, quer seja analítica, como uma *equação* ou como um *conjunto de pares ordenados* — ou qualquer interpretação que possa ser relacionada a esta, com a idéia, a noção ou o conceito de função, os quais, e muito claramente, não podem ser tomados como uma "*regra*" ou como um "*processo – [...] – que se aplica a qualquer número x para produzir o número correspondente y*" [SIMMONS(1985), p. 36]. Isso se dá simplesmente porque uma *regra* ou um *processo* se aplicam a objetos anteriormente dados, associando um ou mais desses objetos a um terceiro, e não produzem ou não constituem um novo objeto, diferentemente do que se dá quando se institui um novo conceito ou uma nova concepção. No entanto, uma função também é uma *regra* ou um *processo*, que se torna disponível operacionalmente através de uma de suas representações lingüísticas. Mas somente é possível diferenciar uma regra qualquer — como as equações "$y = 2x$" ou "$y = x + 1$", por exemplo —, e reconhecê-la como uma função, quando for possível concebê-la como uma *relação* de um tipo muito especial entre conjuntos numéricos, ou seja, o objeto *função* compõem-se, também, além dos predicados *equação*, *curva*, *conjunto* etc., do predicado *relação*[176].

Assim, e positivamente, pode-se questionar sobre o que é o objeto matemático derivada de uma função? Em que medida nos é possível distingui-lo? Como é possível apreendê-lo genericamente? Para que nos seja possível distinguir ou apreender esse objeto, em alguma generalidade e além do campo a partir do qual ele será ocasionalmente constituído, mostraremos que a configuração do objeto derivada de uma função determinar-se-á, inalienavelmente, mediante a *consubstanciação de três dimensões complementares*, ou seja, por meio da disposição de três *pólos*[177] ou de três *oposições*, que se constituirão, iminentemente, como os aspectos fundamentais de um campo ou de um domínio de referência. Nessa medida, essa complementaridade não será tomada como o efeito de uma concepção que coloque cada uma destas dimensões ou pólos como aspectos separados, que possam ser iluminados distintamente, mas, antes, essa complementaridade se constituirá mais como um expediente metodológico adequado em uma confrontação conceitual, a partir do qual se pretenderá que a simples menção de um de seus "*pólos*" possa nos levar para o contexto ou para o campo referencial no qual o objeto intentado tiver movimento, do que como um predicado intrínseco do objeto considerado.

Inicialmente, faremos referência a uma possível qualificação destas três dimensões do objeto derivada de uma função: a primeira delas dirá respeito à *concepção conceitual* de derivada, isto é, à idéia, à noção ou ao conceito de derivada; a segunda, à *representação lingüística* da derivada, isto é, ao "*desenho*" ou a qualquer disposição diagramática, simbólica ou pictórica, que nos remeta à derivada; e a terceira, à *destinação operacional* da derivada, isto é, ao campo ou à instância de procedimentos que serão próprios e adequados ao desenvolvimento conceitual ou operacional do objeto derivada. Notemos que há uma distinção marcante, ainda sob esta inclinação metodológica, entre

[176] Cf. part. SALEM(1990), p. 249 — "Uma função f é portanto uma relação que a todo número x, contido no domínio de definição, associa um único número $y = f(x)$."

[177] Cf. part. FERREIRA(1975), p. 1358: "**pólo.** [Do gr. *pólos*, 'eixo em torno da qual uma coisa gira', [...].]".

conceito e *definição*[178]: uma definição diz respeito, então, e especificamente, ao estabelecimento de uma disposição operacional para um dado conceito, no âmbito de seu campo referencial, ou seja, uma definição simplesmente dispõe operacionalmente um dado objeto, mediante uma de suas possíveis configurações simbólicas, uma vez que, e segundo BLACKBURN(1994, p. 13), "*os conceitos adquirem a sua identidade não tanto através de sua estrutura interna, mas através do seu lugar numa teoria mais vasta, ou numa rede de doutrinas e práticas com as quais estão associados*". Assim, no âmbito dos sistemas conceituais, pretendemos que a fórmula 'definição' seja tomada como "*la declaración del **significado** de un término, o sea del **uso que del término se puede hacer en un determinado campo de investigación***" [ABBAGNANO(1961), p. 289].

3.1. Concepção Conceitual do Objeto Matemático

Para que nos seja dado ensaiar a respeito de um possível movimento que poderia nos levar à concepção, e à conseqüente apreensão, do objeto matemático derivada de uma função, admitiremos nos colocar no âmbito de dois subcampos referenciais, a saber, um associado à Geometria Analítica[179] e o outro, às aplicações da noção de função no âmbito das demais Ciências, como a Física, a Química, a Biologia e a Economia.

Por exemplo, e por um lado, tendo em vista o desenvolvimento conceitual da noção de função, poderíamos ser levados a examinar a determinação do "*gráfico de uma função*", buscando por seus "*valores máximos e mínimos*", por seus "*extremos absolutos e relativos em dados intervalos*", por seus "*pontos de inflexão*", por sua "*concavidade*", por seus "*intervalos de crescimento ou decrescimento*", por sua "*continuidade*" etc., o que nos

[178] Cf. part. CORNU(1983), p. 9 — "Une définition est mathématiquement suffisante pour restituer une notion; mas sur le plan de la connaissance, elle ne rend pas compte de tous les aspects de la notion."; e part. BACHELARD(1934), p. 112 — "O relativista nos provoca: Como vos servis de vossa idéia simples? Como provais a simultaneidade? Como a conheceis? Como vos propondes fazer com que nós a conheçamos, nós que não pertencemos ao vosso sistema de referência? Numa palavra, como fazeis funcionar vosso conceito?"; e p. 113 — "A experiência portanto forma um todo com a definição do Ser. Toda definição é uma experiência; toda definição dum conceito é funcional."

[179] Cf. part. SIMMONS(1985), p. 80 — "O que pensamos acerca da Fig. 2.8 constitui uma *interpretação geométrica* e mesmo que possa ser importante como auxiliar para a compreensão, não é parte essencial do conceito de derivada. Na secção seguinte encontraremos outras interpretações igualmente importantes que não têm nada a ver com geometria. Devemos, portanto, estar preparados para considerar $f'(x)$ puramente como uma função e reconhecer que ela tem diversas interpretações, sem existir necessariamente nenhuma conexão entre elas."

levaria a examinar a inclinação da reta tangente em cada um dos pontos da curva que viesse a representar uma dada função. Por outro lado, e também tendo em vista o desenvolvimento conceitual da noção de função, poderíamos nos interessar por examinar as aplicações possíveis da noção de função às demais Ciências, examinando alguns problemas relacionados à "*razão de variação entre duas grandezas*", uma dependente da outra, tais como o problema de calcular a "*velocidade de um móvel*"[180], o que nos levaria a examinar as variações da distância percorrida pelo móvel em cada instante de seu movimento.

Assim, por um lado, conceberemos a derivada de uma função como um *coeficiente da inclinação de uma curva em um dado ponto*, dito "*coeficiente angular*" ou "*declividade*", e, por outro lado, como um *coeficiente da razão de variação instantânea de duas grandezas relacionadas*, duas grandezas cuja determinação dos valores de uma depende dos valores da outra. No primeiro caso, pode-se observar que o objeto derivada se apresenta, então, e iminentemente, como uma composição predicativa de outros objetos que, supostamente, viriam previamente distinguidos, a saber, *inclinação* e *curva*, não nos esquecendo, para os fins desta pequena ilustração, mas não tratando diretamente, do contexto ou do campo referencial no qual eles se achariam imersos. O segundo caso será tratado adiante.

3.1.1. Derivada como um Coeficiente da Inclinação de uma Curva em um dado Ponto

Gostaríamos de destacar, particularmente, as noções de *inclinação* de uma curva e de *reta tangente* a uma curva, ambas em um dado ponto, destacando inicialmente a noção de *curva*: uma curva diz respeito à expressão ou à representação gráfica de uma equação, isto é, à coleção de todos os pares ordenados (x, y) do Plano Cartesiano que satisfizessem a essa equação. Assim, a noção de *inclinação* de uma curva será tomada, por analogia, da noção de *inclinação de uma reta* — um caso particular de curva —, que é assinalada por um número real que mede o quanto uma reta está inclinada ou o quanto uma reta está desviada da direção horizontal. Quanto à noção de *reta tangente* a uma curva, interessa-nos estabelecê-la enquanto aquela noção que corresponda a uma posição-limite de

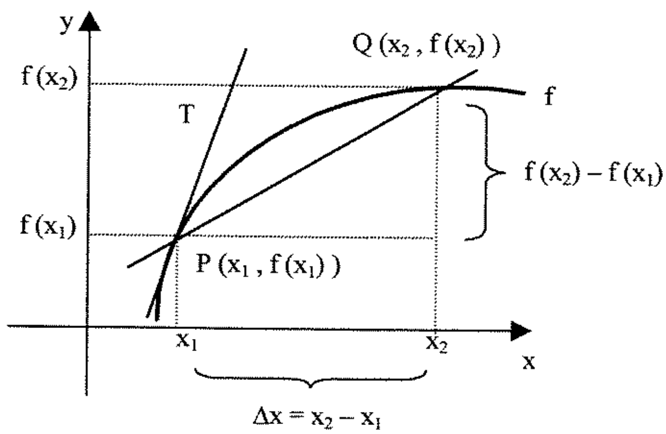
[180] Cf. part. SIMMONS(1985), p. 86 — "Foi esse fato que tornou o Cálculo um instrumento de pensamento essencial para Newton, em seus esforços para descobrir os princípios da Dinâmica e compreender os movimentos dos planetas."

uma coleção de retas secantes que passam por um dado ponto P e qualquer outro ponto Q "próximo" a P. Nessa medida, pode-se dizer que uma reta tangente a uma curva, em um dado ponto P, terá com essa curva um único e mesmo ponto em comum nas "proximidades" do ponto P, a saber, o próprio ponto P. Ademais, e anteriormente, devemos dizer que partimos de uma presumível correlação fundamental entre *inclinação* e *reta tangente*: a inclinação de uma curva em um dado ponto P corresponde à inclinação da reta tangente à curva no mesmo ponto P.

Com efeito, há dois aspectos desse problema que devem ser considerados: um deles será o de estabelecer uma concepção geométrica adequada, que nos permita *definir* a reta tangente a uma curva, isto é, determiná-la operacionalmente, e o outro será o de verificar se essa concepção geométrica nos permitirá uma determinação analítica da reta tangente, isto é, a determinação da equação desta mesma reta.

3.1.1.1. Definição de Inclinação

Assim, consideremos inicialmente a seguinte figura, na qual se apresentam uma curva f, a reta secante PQ a essa curva e a reta tangente T a essa mesma curva no ponto P.



- Seja f uma função contínua em x_1:
  — $\Delta x = x_2 - x_1$;
  — coeficiente de inclinação da reta secante PQ: $m_{PQ} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$;

— Se $\Delta x = x_2 - x_1$, então $x_2 = x_1 + \Delta x$;

— E daí, $m_{PQ} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

- Fixemos P e imaginemos Q movendo-se em direção a P, ou seja, Q aproximando-se de P:

  — Assim, $\Delta x \to 0$;

  — Estamos supondo $P \neq Q$ e Q um ponto "arbitrariamente próximo" de P ;

  — Supondo-se que a reta secante PQ tenha uma posição-limite, a qual, uma vez sendo um limite, não será atingida, intencionamos estabelecer essa posição-limite exatamente como a reta tangente à curva em P .

- Definição: Dada uma curva $y = f(x)$ e um ponto P sobre ela, o coeficiente de inclinação da curva em P será o limite da inclinação das retas secantes que passam por P e outro ponto Q da curva, quando Q se aproxima de P. Assim,

$$\text{'inclinação de } f \text{ em } P\text{'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \, .$$

(OBS.: leia-se "coeficiente de inclinação de f " em vez de "inclinação de f ").

3.1.1.2. Definição de Reta Tangente

Se f é uma função contínua em x_1 .Então, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ será:

i) a reta que passa por P, tendo coeficiente de inclinação $m(x_1)$ dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ , se esse limite existir; ou}$$

ii) a reta $x = x_1$ se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty$.

- OBS.: Se não ocorrer *i*) ou *ii*), não há reta tangente à curva f no ponto P .

3.1.2. Derivada como um Coeficiente da Razão de Variação Instantânea

Neste segundo caso, observa-se que o objeto derivada se apresenta, basicamente, como uma composição predicativa de outros objetos, suposta e previamente distinguidos, a saber, *limite* e *razão de variação instantânea*, considerados no âmbito de um campo referencial continente. Nessa medida, podemos dizer que a noção de *limite* é tomada como aquela que diz respeito a um número ou a uma quantidade fixa da qual uma quantidade variável aproxima-se indefinidamente e sem atingi-la. Assim, o limite de uma quantidade variável X é indicado por um número L, para o qual aquela tende, sem atingi-lo, ou seja, e já próximos de uma definição de limite, para qualquer quantidade ε positiva, por menor que ela seja, sempre será possível obter uma diferença entre X e L, em valor absoluto, que seja menor do que ε. Por outro lado, para determinarmos a noção de *razão de variação instantânea* de duas grandezas relacionadas, diremos inicialmente que esta noção é tomada como aquela que diz respeito a um quociente entre as variações de duas grandezas, cuja determinação dos valores de uma dependa dos valores da outra, um quociente da variação da grandeza dependente para variação da grandeza independente. Observamos que, neste caso, a noção ou o conceito de razão de variação confunde-se como sua própria definição, ou seja, com sua própria disposição operacional. Por outras palavras, o movimento ou a ação que nos permitiu engendrar o objeto *razão de variação*, a partir de uma rede de concepções conceituais anteriormente determinada, configurou esse objeto exatamente como um produto da composição das operações que se podem realizar com o objeto *grandeza*. Assim, uma razão de variação de duas grandezas relacionadas é assinalada por um número que indica em quantas unidades varia a grandeza dependente para cada unidade de variação da grandeza independente. Contudo, antes de considerarmos a noção de razão de variação instantânea, trataremos da definição de limite de uma função.

3.1.2.1. Definição de Limite de uma Função

Interessa-nos, para a definição de derivada de uma função, apresentar uma definição[181] para o limite de uma função. Neste caso, o limite de uma função é indicado por um número L, do qual os valores $f(x)$, do conjunto imagem da função, se aproximam indefinidamente, sem atingi-lo, quando os valores x, do domínio da função — $Df(x)$ —, se aproximam indefinidamente de um dado número x_0. Observa-se que, e segundo CORNU(1983, p. 23), *"pour la notion de limite, il y a un écart dû au concept même de limite et à la façon dont on en donne la définition. L'aspect "dynamique" (tout ce qui est lié au fait de 'tendre vers", au fait de "se rapprocher de") n'est pas restitué par la definition, qui est statique. La définition a transformé une notion extrêment complexe où se mêlent l'infini, l'idée d'approximation, l'dée de se rapprocher de quelque chose, sans l'atteindre ou en l'atteignant, en un objet d'une autre nature, où se mêlent des quantificateurs et des inégalités*".

Assim, seja S um conjunto de números, seja $y = f(x)$ uma função definida em todos os números de S — isto é, $S = Df(x)$ —, e seja x_0 um número dado. Admitiremos que S esteja "*arbitrariamente próximo de* x_o ", isto é, para qualquer quantidade ε positiva, por menor que ela seja, sempre será possível obter um elemento x de S tal que $|x - x_0| < \varepsilon$, ou seja, a diferença entre x e x_0, em valor absoluto, será menor do que ε.

Dada uma função $y = f(x)$ qualquer, diremos que o limite de $f(x)$ é o número L, quando $x \to x_0$, se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in Df(x)$ que satisfaça $|x - x_0| < \delta$, se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja,

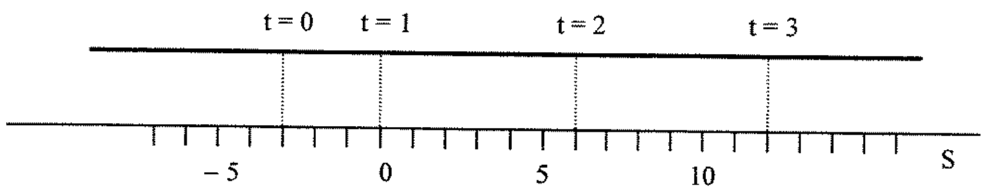
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$

[181] Cf. part. CORNU(1983), p. 23 — "Même si mathématiquement, toute la notion de limite est contenue dans sa définition en (ε, η), il y a un écart entre la notion de limite en tant que concept, et la définition de la notion de limite. Cela est vrai en général pour beaucoup de notions mathématiques."

3.1.2.2. Definição de Razão de Variação Instantânea

De forma a introduzir uma definição de razão de variação instantânea de duas grandezas relacionadas, tomaremos como ilustração o movimento de um móvel, buscando descrever uma equação para o seu movimento. Essa ilustração apresentar-se-á como própria, para os nossos interesses, uma vez que para tal descrição necessitaremos considerar apenas as variações de duas grandezas relacionadas, uma dependente da outra.

Consideremos um móvel movendo-se ao longo de uma reta.



- Seja f a função que determina a distância orientada do móvel, desde 0 (zero), num tempo t :

— Assim, $s = f(t)$ é a equação de movimento;

— Sendo $s = f(t)$ e $s_1 = f(t_1)$, $Vm = \dfrac{s - s_1}{t - t_1}$ é a equação da Velocidade Média do móvel, a qual nos dá a razão de variação de s unidades de distância orientada pela unidade de tempo;

— Como a Velocidade Média do móvel não é constante, pois de $t = 0$ a $t = 2$, $V_m = 4{,}5$, e de $t = 1$ a $t = 3$, $V_m = 6$, não é possível determinar quais são as peculiaridades do movimento do móvel num dado instante;

— Velocidade instantânea: são equivalentes

$Vm = \dfrac{s - s_1}{t - t_1}$ e $Vm = \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$, pois $s = f(t)$, $s_1 = f(t_1)$, $\Delta t = t - t_1$ e $t = t_1 + \Delta t$.

- Assim, pode-se dizer que quanto menor for o intervalo de t a t_1 , ou seja, quando $t \to t_1$ ou quando $\Delta t \to 0$, mais próximo estará a V_m daquilo que nós poderíamos considerar como a "velocidade instantânea" em t_1 .

- Definição: Seja f uma função definida pela equação de movimento $s = f(t)$, então a *velocidade instantânea* de um móvel, no instante t_1 , será $V(t_1)$ unidades de velocidade, de tal modo que, para $t = t_1 + \Delta t$,

  $V(t_1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$, caso este limite exista.

Pode-se observar, então, que a noção de velocidade instantânea corresponde a noção mais geral de razão de variação, tendo como variável independente exatamente o tempo. Assim, a noção de *razão de variação instantânea* de duas grandezas relacionadas, que se confunde, também, com a sua própria definição, é tomada como o limite do quociente entre as variações de duas grandezas relacionadas, sendo uma delas o tempo ou uma grandeza dependente do tempo, quando a variação da grandeza independente tende a 0 (zero), ou seja, $\lim\limits_{t \to t_1} \dfrac{x - x_1}{t - t_1}$. Lembremo-nos de que esse limite é equivalente a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$, uma vez que $\Delta t = t - t_1$, $x = f(t_1 + \Delta t)$ e $x_1 = f(t_1)$, por exemplo.

De modo análogo, e genericamente, para qualquer função $y = f(x)$, podemos definir a *razão de variação instantânea* de y por unidade de variação de x , como o limite do quociente entre a variação de y e a relacionada variação de x , num dado instante. Nessa medida, uma razão de variação instantânea indicará com que "*rapidez*" varia a grandeza dependente em relação a cada unidade de variação da grandeza independente, em todos os instantes assinalados por cada um dos possíveis valores da variável independente.

3.1.3. Concepção Conceitual da Derivada de uma Função

Podemos observar, portanto, que tanto na determinação do coeficiente da inclinação de uma curva em cada um de seus pontos como na determinação do coeficiente da razão de variação instantânea de duas grandezas relacionadas, marcada em cada um dos possíveis valores da variável independente, valemo-nos do mesmo expediente operacional, ou seja, valemo-nos de uma razão de variação entre as variáveis envolvidas na determinação de cada um destes coeficientes, tomado-a de modo "*instantâneo*" quando fazemos a variação da grandeza independente "*tender para 0 (zero)*". Queremos crer, então, que não erraremos se concebermos a *derivada de uma função* como uma função que é tomada como um indicador da razão de variação instantânea entre a grandeza dependente e a grandeza independente de sua função primitiva.

3.2. Representação Lingüística do Objeto Matemático

A derivada de uma função será disponibilizada operacionalmente como $f'(x)$, como uma curva ou como um conjunto de pares ordenados, ou seja, e de acordo com SIMMONS(1985, p. 80), "*devemos, portanto, estar preparados para considerar $f'(x)$ puramente como uma função e reconhecer que ela tem diversas interpretações*". E com efeito, chegamos até aqui para podermos afirmar que serão nestas "*diversas interpretações*" que poderemos distinguir o objeto "derivada de uma função" de um objeto "função" qualquer, ou seja, somente ser-nos-á possível reconhecer um objeto derivada de uma função se, além de reconhecê-lo como uma composição dos predicados *equação, curva, conjunto, relação* etc., pudermos reconhecer nele o predicado "razão de variação instantânea". Por outras palavras, somente poderemos reconhecer uma função $f'(x)$ como a derivada de sua função primitiva $y = f(x)$ se pudermos reconhecê-la como um indicador da "*rapidez*" com que varia a grandeza dependente em relação a cada unidade de variação da grandeza independente, em todos os instantes assinalados por cada um dos possíveis valores da variável independente.

3.2.1. Definição de Derivada

Como já foi observado anteriormente, em ambas as concepções de derivada, como um *coeficiente da inclinação de uma curva em um dado ponto* ou como um *coeficiente da razão de variação instantânea de duas grandezas relacionadas*, há uma única disposição operacional que nos permite determinar a derivada de uma função, que é a fórmula que nos dá o coeficiente da inclinação da reta tangente ou o coeficiente da razão de variação instantânea.

Assim, dada uma função $y = f(x)$ qualquer, diremos que a deriva de f, indicada por $f\,'$, em qualquer número x do domínio de f, será dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, se esse limite existir.

3.3. Destinação Operacional do Objeto Matemático

Inicialmente, é possível afirmar que a noção de derivada é distinta da definição de derivada, a exemplo das considerações de CORNU(1983, p. 9-10) acerca da noção de limite, que nos dá conta de que "*l'objet mathématique que constitue la notion de limite ne doit pas être réduit à la définition de la limite. Une définition est mathématiquement suffisante pour restituer une notion; mas sur le plan de la connaissance, elle ne rend pas compte de tous les aspects de la notion. Pour avoir une idée complète de ce qu'est la notion de limite, il faudrait examiner en détail les différentes façons dont on l'utilize dans tous les secteurs des mathématiques, examiner le calcul des limites, les démonstrations par "passage à la limite", les résultats sur l'approximation, etc.... C'est le fonctionnement de la notion qui détermine l'objet mathématique*".

E, com efeito, o aspecto fundamental que determina a substancialidade de um objeto matemático é o *funcionamento* de sua própria concepção, ou seja, é a destinação possível de sua concepção, no âmbito de um dado campo referencial eleito como um foro de procedimentos adequados ao exercício peculiar dessa mesma concepção. Por outras palavras, posta uma dada concepção matemática, é obrigatório afirmar-se dela alguma destinação operacional, isto é, deve ser possível indicar as circunstâncias em que esta concepção possa ser invocada. Por conseguinte, a destinação possível de um objeto matemático será determinada mediante a *incorporação* das condições de sua concepção às condições de operação de um dado campo referencial, ou seja, a realização efetiva da destinação operacional de um objeto matemático será alcançada mediante a observância de que esse mesmo objeto seja tomado na perspectiva das diversas operações que teriam ensejado a sua concepção.

Para exemplificar, mais especificamente, algumas formas de abordar o objeto derivada de uma função, THURSTON(1994, p. 5) observa que "*existem diferentes maneiras de compreender partes específicas da matemática. Para ilustrar isso, é melhor tomar um exemplo de um conceito que os matemáticos compreendem de várias maneiras, mas que oferece grandes dificuldades aos nossos estudantes: a derivada de uma função. Esta pode ser vista como*: (1) *Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal da variável;* (2) *Simbólica: a derivada de* x^n *é* nx^{n-1} , *a derivada de* $sen(x)$ *é* $cos(x)$, *a derivada de* fog *é* $f'og \bullet g'$ *etc.;* (3) *Lógica:* $f'(x) = d$ *se e somente se para cada* ε *existe um* δ *tal que quando,* $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \varepsilon$; (4) *Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente;* (5) *Taxa: a velocidade instantânea de* $f(t)$ *quando* t *é o tempo;* (6) *Aproximação: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto;* (7) *Microscópica: a derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com um microscópio cada vez mais poderoso.* [...] *A lista continua; não há razão para que ela termine. Uma amostra de um item que ocorre bem abaixo na lista pode servir como ilustração. Podemos achar que sabemos tudo o que se pode dizer sobre certo assunto, mas novas percepções estão logo ali.* [...] (37) *A derivada de uma função real* f *num domínio* D *é a secção Lagrangeana do fibrado cotangente* $T*(D)$ *que dá a forma de conexão para a única conexão plana do fibrado real trivial* DxR *para a qual o gráfico de* f *é paralelo.*"

Assim, o objeto derivada de uma função, ou se preferirmos, a sua concepção conceitual, poderá ser invocado sempre que pudermos incorporar a razão de variação instantânea entre duas grandezas relacionadas, às condições de operação de um dado campo referencial. Nessa medida, esse campo referencial se converterá em uma instância própria e adequada para o desenvolvimento conceitual ou operacional do objeto derivada de uma função.

3.4. Epílogo

Lembremo-nos de que no início da subseção 3.1, para que nos fosse dado ensaiar acerca de uma atividade ou de um movimento engendradores que nos permitisse conceber e apreender o objeto matemático derivada de uma função, admitimos nos colocar no âmbito de dois subcampos referenciais, um associado à Geometria Analítica e o outro, às aplicações da noção de função no âmbito das demais Ciências. Para tanto, dissemos, também, que nestes dois campo focaríamos a nossa atenção no desenvolvimento conceitual da noção de função, buscando pelas correlações conceituais que poderiam ser estabelecidas quando do estudo do gráfico de uma função, no âmbito da Geometria Analítica, ou pelas correlações conceituais que poderiam ser estabelecidas quando do estudo da possíveis aplicações da noção de função no problema da determinação da velocidade de um móvel, no âmbito da Física.

No campo da Geometria Analítica, optamos por examinar a inclinação da reta tangente em cada um dos pontos da curva que viesse representar uma dada função, e, no campo da Física, optamos por examinar as variações da distância percorrida pelo móvel em cada instante de seu movimento. A partir destas duas análises, uma desenvolvida no âmbito da própria Matemática e a outra, no âmbito das demais Ciências, anunciamos que conceberíamos, por um lado, a derivada de uma função como um *coeficiente da inclinação de uma curva em um dado ponto*, e, por outro lado, como um *coeficiente da razão de variação instantânea de duas grandezas relacionadas*, respectivamente.

Assim, e como um desenlace de toda essa trama conceitual, temos:

1) *concepção conceitual* de derivada — idéia, noção ou conceito de derivada —:
   É uma função que é tomada como um indicador da razão de variação instantânea entre a grandeza dependente e a grandeza independente de sua função primitiva;
2) *representação lingüística* da derivada — "*desenho*" ou qualquer disposição diagramática, simbólica ou pictórica, que disponha operacionalmente a derivada —:
   $f'(x)$. E sua definição é dada por $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

3) *destinação operacional* da derivada — campo ou instância de procedimentos que são próprios e adequados ao desenvolvimento conceitual ou operacional da derivada —:

Cálculo, Geometria Analítica, Física, Química, Biologia, Economia etc.

Por fim, observamos que, em uma aproximação discursiva que nos leve à concepção de um dado objeto matemático, tomado, em princípio, como circunstancialmente definido, o que se procura descrever, nessa concepção específica a um dado campo referencial, não é tanto o objeto concebido em sua total determinação conceitual, mas sim os procedimentos que tiveram como resultado a particular concepção desse mesmo objeto. Como já observamos anteriormente, o objeto concebido poderá, então, manifestar-se com qualidades supostamente mais abrangentes, quando esses mesmos procedimentos forem estendidos para outros campos que sejam continentes daqueles tomados como originários. E a objetivação do objeto concebido é, então, alcançada aquém de uma determinação imediata ou direta desse mesmo objeto e é instituída enquanto um produto de uma atividade discursiva, a base empírica dos sistemas conceituais.

4. Das Três Dimensões do Conhecimento Matemático

A pretensão básica desta seção é a de instituir a concepção ou a apreensão do Conhecimento Matemático como uma atividade ou como um movimento engendradores dos próprios objetos matemáticos. Esta atividade ou este movimento engendradores, desenvolvidos no âmbito de um dado campo referencial, serão determinados por três *pólos* através dos quais nos será permitido desenvolver uma atividade discursiva pertinente ao Conhecimento Matemático. Estamos admitindo, como já foi considerado no Capítulo II, Subseção 2.3, que a base empírica do Conhecimento Matemático é uma atividade discursiva, uma atividade estruturada que se apoia em seu próprio movimento, manifestando-se ou expondo-se em uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, ou seja, estruturando-se segundo os procedimentos do "*método axiomático*". Por isso, podemos dizer que é mediante uma atividade discursiva ou um "*discursus*" — como um "*deslocamento de um lugar para outro*" [BLACKBURN(1994), p. 105] —, que nos será dado ter acesso ao Conhecimento Matemático, para apreendê-lo ou para desenvolvê-lo. Este acesso, que será marcado pela engendração dos próprios objetos matemáticos, determinar-se-á segundo a instituição de três pólos, que serão tomados, então, como as três dimensões do Conhecimento Matemático.

4.1. Preliminares

Nesta subseção introdutória, apresentaremos algumas notas distintivas, mediante as quais pretendemos evidenciar porquê não usaremos as expressões 'semântica', 'sintaxe' e 'pragmática' para qualificar as três dimensões do Conhecimento Matemático. Consideraremos principalmente, nesse sentido, as concepções destas três expressões no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, visto que as suas concepções no âmbito da Semiótica[182] não constituem o centro de nossas atenções.

Poderíamos começar estas notas apresentando uma etimologia para estas expressões. Segundo HOUAISS(2001, p. 2540), observamos que a expressão '*semântico*' vem do grego '*sēmantikós*', correspondendo a '*que significa, que indica, que faz conhecer, que é um índice de*', a expressão '*sintático*'[183] vem grego '*suntaktikós*', correspondendo a '*que põe em ordem, ordenado*' [HOUAISS(2001), p. 2581], e a expressão '*pragmático*'[184] vem grego '*pragmatikós*', correspondendo a '*que concerne à ação, próprio da ação; capaz de agir, eficaz; relativo á negócios; próprio para manejo de negócios; relativo a assuntos judiciais; que se refere a fatos (por oposição a palavras)*' [HOUAISS(2001), p. 2276]. Interessa-nos sugerir, com estas observações, que, se nos fosse dado referenciar as três dimensões associadas a um sistema conceitual, mediante essas mesmas expressões,

[182] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 355 — "O estudo geral dos sistemas simbólicos, entre eles a linguagem. A disciplina é tradicionalmente dividida em três áreas: a sintaxe, o estudo abstrato dos signos e de suas inter-relações; a semântica, o estudo da relação entre os signos e os objetos a que se aplicam; e a pragmática, o estudo das relações entre os que utilizam o sistema e o próprio sistema (C.W. Morris, Foundations of the Theory of Signs, 1938)"; part. ABBAGNANO(1961), p. 1036; e part. Da COSTA(1961), p. 49 — "Para conveniência de estudo, a semiótica divide-se em sintática, semântica e pragmática. Como veremos adiante, a primeira versa sobre os diferentes métodos de combinar objetos e, em particular, sobre as combinações de sinais, abstração feita de quem os utiliza e do conteúdo; a semântica trata, englobadamente, dos sinais e dos objetos denotados; e, por fim, a pragmática leva em conta, além dos símbolos e suas significações, as pessoas ligadas à semiose."

[183] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 1077 — "Cualquier ordenamiento, combinación o sistematización de partes."

[184] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 940 — "En el lenguaje contemporáneo la palavra há vuelto a su sentido originario. Cuando no se refiere a pragmatismo, designa simplemente lo que es acción o lo que pertenece a la acción."

veríamos a dimensão semântica constituir-se em uma coleção de noções, de idéias, de conceitos ou de concepções, que *indicariam* ou que *assinalariam* os objetos de um sistema conceitual, veríamos a dimensão sintática determinar-se em uma coleção de símbolos e de regras operacionais, que *disporiam ordenadamente* esses mesmos objetos, e veríamos a dimensão pragmática assentar-se em uma coleção de *procedimentos*, que se destinariam a operar com os objetos de um sistema conceitual. Rapidamente, o que assinala ou o que indica um objeto é a concepção desse mesmo objeto, em um dado campo referencial, e não a sua representação lingüística, que é ligada a esse mesmo objeto exatamente por sua concepção. Uma representação lingüística apenas dispõe operacionalmente um objeto em um dado discurso, permitindo-nos, então, correlacioná-lo à totalidade dos objetos de um dado campo referencial, segundo uma dada ordem.

No entanto, queremos crer que o uso das expressões semântica, sintaxe e pragmática é inadequado para qualificar as três dimensões do Conhecimento Matemático, sobretudo, porque intencionamos romper com a concepção de semântica adotada especialmente em Lógica[185], rompendo, também, com a concepção de semântica adotada por TARSKI(1944, p. 17): "*La semántica es una disciplina que — pra dicirlo sin gran precisión — se ocupa de ciertas relaciones entre las expresiones de un lenguaje y los objetos (o "estados de cosas") a que se "refierem" esas expresiones*".

Como já vimos na Seção 2, para TARSKI(1944, p. 18, 38, 45 e 58), a semântica determina-se como uma disciplina baseada na Lógica. Ela é construída de maneira puramente dedutiva, quando considerada sobre as linguagens formalizadas, e tomada como um campo próprio e específico de investigação, que poderia ser nomeado "*semântica teórica*", com aplicabilidade inegável às ciências empíricas. O aspecto fundamental que nos impõem esse rompimento pode ser ilustrado, além do que já foi observado nas seções anteriores, considerando-se que, segundo Niels BOHR (1885-1962), *apud* BLACKBURN(1994, p. 207), "*não existe qualquer realidade quântica profunda, i.e., não existe qualquer mundo de elétrons e fótons. Existe apenas a descrição do mundo através desses termos: a mecânica quântica nos oferece um formalismo que podemos usar*

[185] Cf. part. SALEM(1990), p. 496 — "Um sistema formal pode ser interpretado de várias maneiras segundo o sentido que é convencionado dar aos símbolos do alfabeto. Chama-se *semântica do sistema* o conjunto de regras de interpretação que determina o sentido desses símbolos primitivos."; e part. ABBAGNANO(1961), p. 1034, verbete "**semántica**", e p. 1077, verbete "**sintaxis**".

para prever e manipular certos acontecimentos descritos nas linguagens habituais ou na linguagem da física clássica. Não faz sentido e não é correto postular uma realidade quântica que corresponda a essa descrição". Por outras palavras, queremos romper, basicamente, com essa idéia, aparentemente vigente, que coloca a semântica como uma "*teoria da referência*", pertinente ao estudo dos signos tomados em suas relações com objetos extralingüísticos[186]. Mais do que caracterizar qualquer propriedade de uma realidade material, as "*leis*" ou "*princípios*" desenvolvidos em um sistema conceitual descrevem as propriedades de uma realidade conceitual, de nosso "*mapa conceitual*".

Assim, não nos interessará manter uma concepção de semântica que pretenda estabelecer qualquer tipo de correlação entre os sistemas conceituais e os sistemas materiais, destacados de alguma realidade material continente, e, por isso, preferimos evitar o termo 'semântica' para qualificar uma das dimensões dos sistemas conceituais, evitando, também, o uso dos termos 'sintática'[187] e 'pragmática'[188]. Contudo, e mesmo quando fizermos qualquer enunciação contendo o termo 'semântica', estaremos somente admitindo conceber e determinar uma concepção de semântica no âmbito de um dado sistema conceitual, como uma de suas inalienáveis dimensões.

---

186 Cf. part. Da COSTA(1979), p. 24-5 — "Uma linguagem, não obstante, refere-se a objetos e a situações: alguns de seus símbolos denotam determinadas entidades e suas sentenças relacionam-se com fatos. Restringindo-nos ao aspecto sintático de L, não se pode tratar de noções como as seguintes: os conceitos de verdade, de denotação, de sentido e outros similares. Em resumo, como evidenciaram especialmente Carnap e Tarski, devemos levar também em conta a dimensão *semântica* da linguagem. Na semântica, pesquisamos as inter-relações existentes entre as linguagens e os objetos e as situações às quais elas se referem."; e p. 174 — "Na semântica pura, por seu turno, as linguagens abstratas (ou reformuladas de maneira abstrata e matemática) são tratadas em suas relações com objetos extralingüísticos, como tais."

187 Cf. part. Da COSTA(1979), p. 174 — "[...] na sintaxe, como em parte já vimos, estudamos sistemas simbólicos quaisquer, reduzindo-os a estruturas matemáticas e aplicando os métodos dessa ciência. Portanto, em certo sentido, a sintaxe converte-se em matemática – em aritmética ou em teoria dos conjuntos."

188 Cf. part. Da COSTA(1961), p. 54 — "Com efeito, se tomarmos qualquer disciplina matemática, por exemplo a aritmética formalizada pelos postulados de Peano, vê-se, imediatamente, que devemos apreciar, para a perfeita análise dos fundamentos da disciplina em apreço: 1) a estrutura simbólica da aritmética (plano sintático); 2) as categorias dos objetos aos quais as leis da aritmética se aplicam ou podem se aplicar (plano semântico); 3) determinados princípios e proposições que implicam a consideração do matemático, encarado como o "criador", o manipulador, em última análise, da aritmética (plano pragmático)."

4.2. Dimensão Normativa

A dimensão normativa do Conhecimento Matemático constitui-se como um *pólo* no qual são instituídas, basicamente, as concepções conceituais relativas aos objetos matemáticos. Estas concepções conceituais serão tomadas como uma coleção de normas ou de preceitos operacionais que, no âmbito de um dado campo referencial, se aplicam em uma atividade ou em um movimento engendradores que nos permitirá compor os objetos matemáticos. Assim, a dimensão normativa diz respeito à determinação de uma coleção de representações mediante a qual se torna efetiva a composição dos objetos do Conhecimento Matemático.

Já é lugar-comum, neste trabalho, afirmar que estamos concebendo o Conhecimento Matemático como um sistema conceitual, como um sistema cujos aspectos básicos são determinados como Axiomática, Formalismo e Teoria, de acordo com o que foi considerado no Capítulo I, Seção 3. Destarte, conceber o Conhecimento Matemático como um sistema conceitual, como uma coleção de objetos ideais que se inter-relacionam em uma totalidade discursiva, é fundamental para que possamos impor a necessidade de que a constituição desse conhecimento seja marcada por três dimensões. Além da pressuposição inicial que não admitia o Conhecimento Matemático como uma realidade material ou como uma realidade psicológica, essa opção pode ser agora justificada, também, à luz de nossas teses intermediárias, pela insuficiência das concepções que tomam o Conhecimento Matemático unicamente como uma atividade matemática ou como uma linguagem. Queremos salientar que não será por intermédio de uma atividade discursiva, determinada sobre as aplicações matemáticas ou sobre uma linguagem matemática[189] e a elas circunscrita, que teremos acesso ao Conhecimento Matemático.

Quando nos voltamos para o Conhecimento Matemático, na tentativa apreendê-lo ou desenvolvê-lo, centramo-nos exatamente na apreensão ou na concepção dos objetos matemáticos que possam ser distinguidos em um dado campo referencial, uma vez que é somente com respeito a objetos que se podem estabelecer relações conceituais ou

[189] Cf. part. Da COSTA(1961), p. 54-5 — "Na própria matemática ordinária aparecem noções semânticas; como exemplos sugestivos, familiares aos estudiosos de matemática moderna, citaremos as noções de categoricidade de um sistema axiomático, de isomorfismo entre dois anéis ou entre dois sistemas algébricos quaisquer, etc. Tudo isto evidencia a impotência das concepções que reduzem a matemática ao âmbito formal, para explicar e justificar o estado presente da ciências dedutivas."

relações operacionais, ou seja, pressupomos uma teoria matemática já posta — mediante uma axiomática e um formalismo — e buscamos, nesse âmbito, pelas denotações conceituais ou pelos significados daquelas entidades lingüísticas que são apresentadas em um discurso matemático. No Capítulo I, Seção 3, afirmamos que, no âmbito de um sistema conceitual, uma teoria constitui-se como uma disposição interpretativa necessária que, por meio de uma *estrutura de interpretação* ou de um *modelo*, estabelece obrigatoriamente uma destinação operacional para um dado subsistema conceitual. Nessa medida, quando nos questionamos acerca do que é uma teoria matemática, podemos dizer, então, que uma teoria matemática é um recorte conceitual tomado no âmbito do próprio Conhecimento Matemático, ou seja, é uma região desse sistema conceitual. Sendo uma teoria matemática um subsistema conceitual, portanto, ela se manifesta em uma atividade discursiva — também ordenada e dedutiva — reconhecida como um discurso matemático, no qual se deverão tomar como verdadeiras, segundo uma lógica de base, a totalidade daquelas concepções matemáticas enunciadas mediante as sentenças de uma linguagem ou de um sistema formal apropriados. E, com efeito, vale lembrar que não estamos concebendo a verdade em Matemática como uma verdade "*fatual*" ou como algo que denote algum "*estado de coisas*", mas como uma verdade que se põe em um discurso, a partir de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, por força daquilo que se impõe enunciar no âmbito do Conhecimento Matemático.

Por conseguinte, se para lidarmos com o Conhecimento Matemático devemos lidar com uma teoria matemática, esta deverá manifestar-se como um discurso que transcenda sua dimensão meramente lingüística, já que a estamos concebendo como um modelo para um formalismo apropriado. Não nos parece possível estabelecer um modelo ou uma estrutura de interpretação, para um formalismo matemático, que não admita conceitos para denotar as *variáveis* e as *constantes de indivíduos* desse mesmo sistema formal. Se os objetos dos quais tratam uma teoria não puderem ser engendrados conceitualmente, não nos será possível distingui-los uns dos outros, mesmo que admitamos a possibilidade de sua existência.

Com efeito, para que nos seja dado determinar os objetos matemáticos, assumindo-os como uma composição predicativa em um dado campo referencial, deveremos designá-los a partir de suas próprias concepções conceituais. Aos objetos matemáticos, devemos nos lembrar, estamos admitindo imputar uma condição exclusivamente formal, tomando-os como concepções conceituais, como representações ideais ou imagéticas, ou seja, como composições predicativas[190] desenvolvidas a partir de um conjunto de outros objetos previamente distinguidos. Na Introdução, e no Capítulo II, discutimos as noções de concepção e de conceito, respectivamente. A noção de conceito foi tomada decididamente como uma referência semântica incorporada a uma realidade conceitual fundadora. Nesta realidade geradora e referencial, cada conceito é determinado, exatamente, como uma concepção conceitual, para que a ele possamos associar a evocação de um movimento ou de um processo de elaboração, de geração, dos objetos de um sistema conceitual, além de apresentá-lo como a referência imediata de uma representação — como idéia ou como imagem[191] — do objeto concebido. Por meio de sua concepção conceitual, nos será dado designar, então, um objeto matemático concebido[192], engendrado a partir de um conjunto de noções tomadas como fundamentais, no âmbito de um campo referencial, e faremos cair sobre ele os processos operacionais lógicos de constituição do Conhecimento Matemático. Nessa medida, a concepção conceitual de um objeto matemático, apresentada como dizendo respeito à geração de uma representação, de uma imagem, mediante a qual será composto esse mesmo objeto, é tomada como uma norma ou como um preceito

[190] Cf. part. BACHELARD(1934), p. 153 — "Só há qualidades secundárias, uma vez que toda qualidade é solidária duma relação."; e p. 156 — "Não somos capazes de descer mais baixo pela imaginação do que pela sensação. Em vão se liga um número à imagem dum objeto para marcar a pequenez desse objeto: a imaginação não segue o pendor matemático. Não podemos pensar se não matematicamente; do próprio fato da desconfiança da imaginação sensível passamos para o plano do pensamento puro onde os objetos só têm realidade em suas relações. Eis portanto um limite humano do real imaginado, em outras palavras, um limite à *determinação* figurada do real."

[191] Cf. part. ABBAGNANO(1961), p. 1015 — "Occam distinguió tres significados fundamentales. "Representar – dijo – tiene muchos sentidos. En primer lugar, se entiende com este término aquello mediante lo cual se conoce algo y, en este sentido, el conocimiento es representativo y representar significa ser aquello com que se conoce algo. En segundo lugar, se entiende por representar el conocer algo, conocido lo cual se conoce outra cosa; en este sentido la imagen representa aquello de que es la imagen, en el ato de recuerdo. En tercer sentido, se entiende por representar el causar el conocimiento del mismo modo como el objeto causa el conocimiento" [...]. En la primera acpción, la Reprentación es la *idea* en el sentido más general, en la segunda es la *imagen* y en la tercera es el *objeto* mismo. Éstes son en realidad todos los posibles significados del término, [...]".

[192] Cf. part. BOHM(1980), p. 27 — "Está claro que podemos ter inúmeros tipos diferentes de *insights*. O que se quer não é uma *integração* do pensamento, ou uma espécie de unidade imposta, pois qualquer ponto de vista imposto seria apenas um outro fragmento. Em vez disso, todos os nossos diferentes modos de pensar devem ser considerados como diferentes modos de olhar para a realidade una, cada um acompanhado de um certo domínio onde ele é nítido e adequado. Pode-se de fato comparar uma teoria com uma determinada visão de algum objeto. Cada visão dá apenas uma aparência do objeto em algum aspecto. O objeto todo não é percebido em nenhuma visão mas, em vez disso, é apreendido só *implicitamente* como aquela realidade única que é mostrada em todas as visões."

operacionais, no âmbito de um campo referencial, que disponibiliza operacionalmente o objeto concebido.

A necessidade de que tomemos uma concepção conceitual como um preceito operacional, determinante da composição dos objetos matemáticos em decorrência da própria disposição operacional desses mesmos objetos, desdobra-se como uma implicação inalienável da noção de sistema conceitual, quando admitimos concebê-lo como uma coleção de objetos ideais que são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva, ordenada e dedutiva. Esta totalidade de discurso, como já foi observado no Capítulo II, Seção 2, afasta-se da noção que põe cada um de seus objetos como partes distintas, embora interagentes, que possam ser separadas como uma unidade semântica autônoma, e aproxima-se da noção que põe essa totalidade discursiva como um todo indiviso e fluente[193], que opera em um campo de ordem que submete cada um de seus objetos a não ter uma existência independente, determinando-os como padrões abstraídos do processo total de seu próprio movimento e conferindo-lhes apenas uma relativa independência ou autonomia de movimento.

Assim, as concepções conceituais dos objetos matemáticos determinar-se-ão enquanto uma referência semântica normativa acerca do objeto concebido, exatamente na medida em que, por força dessas mesmas concepções, são especificadas as possibilidades de relações conceituais e de relações operacionais dos objetos matemáticos concebidos, as quais são determinadas a partir das próprias condições de concepção desses mesmos objetos em um dado campo referencial. Essas condições de concepção assentam-se, exatamente, na objetivação desses mesmos objetos, na qual se desenvolverá uma atividade que imporá a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como um produto de alguma experiência possível, idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado, segundo uma rede de

[193] Cf. part. BOHM(1980), p. 31-2 — "A nova forma de *insight* talvez possa ser melhor chamada de *Totalidade Indivisa em Movimento Fluente*. Esta visão implica que esse fluxo, em certo sentido, é anterior ao das "coisas" que podem ser vistas formando-se e dissolvendo-se nesse fluxo. Pode-se talvez ilustrar o que se quer dizer com isso considerando-se o "fluxo da consciência". Esta fluidez da consciência não é definível de maneira precisa, sendo, porém, evidentemente anterior às formas definíveis dos pensamentos e das idéias que podem ser vistos formando-se e dissolvendo-se no fluxo, como pequenos encrespamentos ou ondulações, ondas e vórtices num curso fluente. Como acontece com tais padrões de movimento numa torrente, alguns pensamentos reaparecem e persistem de um modo mais ou menos estável, enquanto que outros são evanescentes."; e p. 54.

concepções conceituais erigida e realimentada em uma sucessão de formulações conceituais. Deste modo, será mediante a incorporação das condições de operação desses objetos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais que teremos a indicação das circunstâncias em que este objeto poderá ser invocado.

Nessa medida, por ocasião da configuração ou da concepção conceitual de um objeto matemático, num certo campo referencial, pode-se dizer que o resultado de toda essa "*operação de composição*"[194] não nos informará sobre o objeto matemático propriamente dito, mas tão-somente sobre "*algo*" distinguido como uma idéia ou como uma representação, e imerso em uma totalidade fluente. De um modo ilustrativo, podemos observar que, segundo BOHM(1980, p. 35), "*cada estrutura relativamente autônoma e estável (p. ex., uma partícula atômica) deve ser entendida não como algo que existe de modo independente e permanente, mas, antes, como um produto formado no movimento fluente total e que finalmente voltará a dissolver-se nesse movimento. Como ele se forma e mantém a si próprio depende, então, do seu lugar e da sua função no todo*". E, portanto, se admitirmos tomar os objetos matemático como padrões abstraídos de um processo total de movimento de seu próprio campo de ordem, não nos será difícil, também, tomá-los como uma contingência que persiste circunstancialmente na fluência desse mesmo campo, isto é, como estruturas operacionais fundamentais ensejadas predicativamente mediante composições de relações.

Por fim, na concepção ou na apreensão do Conhecimento Matemático, concebido como um sistema conceitual cujos objetos são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva, deveremos preparar as formulações matemáticas que se quererão produzir, a partir do desenvolvimento de uma atividade ou um movimento engendradores dos próprios objetos matemáticos, instituindo, marcadamente, no âmbito de uma atividade discursiva, um pólo ou uma dimensão que nos permita compor esses mesmos objetos a partir de suas próprias concepções conceituais. Esta dimensão de concepção dos objetos

[194] Cf. part. BOHM(1980), Cap. I — (p. 27) "[...] todos os nossos diferentes modos de pensar devem ser considerados como diferentes modos de olhar para a realidade una, cada um acompanhado de um certo domínio onde ele é nítido e adequado. Pode-se de fato comparar uma teoria com uma determinada visão de algum objeto. Cada visão dá apenas uma aparência do objeto em algum aspecto. O objeto todo não é percebido em nenhuma visão mas, em vez disso, é apreendido só *implicitamente* como aquela realidade única que é mostrada em todas essas visões."

matemáticos deverá colocar-se, então, como a dimensão normativa do Conhecimento Matemático.

4.3. Dimensão Formal

A dimensão formal do Conhecimento Matemático constitui-se como um segundo *pólo* no qual são instituídas, basicamente, as representações lingüísticas relativas aos objetos matemáticos. Essas representações lingüísticas serão tomadas como uma coleção de estados ou de condições "*topológicos*" que, no âmbito de um dado campo referencial, se aplicam em uma atividade ou em um movimento engendradores que nos permitirá dispor dos objetos matemáticos. Assim, a dimensão formal diz respeito à configuração de uma coleção de fórmulas mediante a qual se torna efetiva a disposição dos objetos do Conhecimento Matemático.

Considerando-se que, para a constituição de um sistema conceitual, é necessário distingui-lo através de três aspectos fundamentais — axiomática, formalismo e teoria —, não é difícil admitir que é somente com respeito a uma teoria ou com respeito a um conjunto de concepções que são desenvolvidos uma axiomática e um formalismo correspondentes[195]. Nessa medida, e após a axiomatização de uma teoria ou de uma disciplina, o passo seguinte para a ampliação da investigação de suas propriedades relevantes, e, sobretudo, para a legitimação ou para a instituição daquelas concepções que se tencionam assentar, consistirá na sua formalização. Como já observamos, concebemos um formalismo como uma disposição lingüística apropriada que, por meio de uma *linguagem com uma estrutura exatamente especificada*, estabelece, contingentemente, uma determinação operacional capaz de suportar o subsistema conceitual que se pretende constituir, por intermédio de uma lógica de base. No que concerne ao Conhecimento Matemático, um formalismo matemático constitui-se, por excelência, no instrumento de legitimação das concepções matemáticas que se quererão instituir. É mediante um formalismo que se deverão instituir socialmente aquelas concepções matemáticas que se

[195] Cf. part. KNEALE(1962), p. 459 —"Uma vez que o interesse das fórmulas matemáticas reside na sua aplicação, mais vale ser franco e admitir que as regras do cálculo não foram escolhidas arbitrariamente mas antes que dependem do sentido que queremos atribuir aos símbolos. Se se inventasse um jogo para jogar em papel com símbolos sem sentido de acordo com regras arbitrárias certamente que ninguém pensaria que se tratava de uma disciplina matemática."

julgarem pertinentes. Assim, as representações lingüísticas, relativas aos objetos matemáticos, deverão assentar-se como aquelas representações que se põem em uma atividade discursiva, ou em um "*discursus*" matemático, que se manifestam ou que se expõem em uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, ou seja, que se inter-relacionam segundo os procedimentos do "*método axiomático*".

Estamos admitindo que, para a adequada formalização de uma teoria, posta e reconhecida em um discurso matemático, é necessário dispormos de uma linguagem e de uma lógica de base. A questão de um formalismo, ou de um sistema formal, correspondente a um discurso matemático, coloca-se como fundamental, por um lado, para assegurar a pertinência e legitimar a instituição daquelas concepções matemáticas que se pretendem assentar, e, por outro lado, para evitar a possível aparição de antinomias. Para que nos seja dado dispor de uma linguagem e de uma lógica de base, será bastante determinarmos algumas condições gerais, a partir das quais se considerará como exatamente especificada a estrutura de uma linguagem que seja própria a um formalismo. Basicamente, para especificar a estrutura de uma linguagem, devemos "*caracterizar inequívocamente la classe de las palabras o expressiones que hayan de considerarse* ***significativas [meaningful]***" e devemos "*indicar todas las palabras que hayamos decidido usar sin definirlas, y que se llaman 'términos* ***indefinidos*** *(o* ***primitivos****)'*" [TARSKI(1944), p. 19-20].

Ademais, excetuando-se alguns reparos que poderiam ser feitos, podemos descrever um sistema formal, ou uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, observando que "*um sistema formal S é definido pela tripla dada por um alfabeto, uma morfologia e uma sintaxe. O alfabeto é um conjunto não vazio de símbolos cujo sentido é,* ***a priori****, indeterminado. A morfologia de S é constituída por um conjunto finito de regras de boa formação que determinam o conjunto das combinações viáveis de símbolos do alfabeto. Estas combinações viáveis são chamadas de fórmulas de S. A sintaxe de S é constituída por um conjunto finito de regras chamadas "regras de inferência" que determinam o conjunto das fórmulas demonstráveis em S. Por convenção, este conjunto compreende inicialmente os axiomas aceitos sem demonstração. Ele contém, além disso, todas as fórmulas obtidas por um número finito de aplicações aos axiomas das regras de inferência. Estas fórmulas são os teoremas. Toda fórmula demonstrável é portanto um* *axioma ou um teorema. E uma demonstração é uma seqüência finita de fórmulas onde cada uma é um axioma ou um teorema*" [SALEM(1990), p. 496]. De um modo especial, no alfabeto dessa linguagem, constarão aqueles símbolos que terão como denotações as concepções conceituais dos objetos matemáticos e todos aqueles símbolos lógicos que são admitidos no "*cálculo de predicados*"[196], tais como os "*quantificadores universal e existencial*", os "*conectivos proposicionais*", as "*variáveis e as constantes de indivíduos*", os "*símbolos de predicados*" e os "*símbolos de funções*". No entanto, no âmbito dessa mesma linguagem, deveremos distinguir aqueles elementos que se constituem em expedientes especificamente lingüísticos, tais como os símbolos lógicos mencionados acima, daqueles elementos ou daquelas representações lingüísticas que disponibilizam operacionalmente os objetos matemáticos, tais como aquelas combinações de símbolos que determinam, eventualmente, as próprias definições desses mesmos objetos.

É certo que, de posse das regras operacionais instituídas em uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, dentre as quais encontram-se as definições dos objetos denotados por esta linguagem, admitimos que seria possível efetuar todas as deduções necessárias para a derivação de uma dada fórmula, atestando a sua propriedade neste mesmo sistema, e explorar todas aquelas relações operacionais, que eventualmente nos interessariam, sem pensar ou atentar para o significado dos símbolos ou para a concepção dos objetos denotados, num claro e exploratório "*jogo lingüístico*", através de símbolos fixos e regras bem definidas. Podemos dizer que este é, sem dúvida, um dos procedimentos auxiliares em qualquer atividade matemática, quando nos voltamos para apreensão, para o desenvolvimento ou para a aplicação do Conhecimento Matemático. No entanto, nenhuma nova concepção, que se pretenda instituir como matemática, emergirá desse jogo lingüístico, a menos que possamos apontar claramente para as denotações conceituais de cada uma de suas fórmulas. Dificilmente "*um jogo com símbolos sem sentido*" poderá ser usado para legitimar e instituir socialmente qualquer concepção matemática.

E, com efeito, na apreensão ou na concepção dos objetos matemáticos, distinguidos em um dado campo referencial, a partir uma atividade ou um movimento

[196] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 50 — "O cálculo de predicados é o cerne da lógica moderna, e demonstrou ser capaz de formalizar os processos de raciocínio centrais da ciência e da matemática modernas."

engendradores, é imperioso que possamos disponibilizar operacionalmente esses objetos concebidos, para que nos seja dado operar com eles em um discurso matemático. Esta disposição operacional demandará, então, a distinção de dois aspectos fundamentais. O primeiro deles, que se põe como um norma operacional, como já vimos na seção anterior, diz respeito a concepção conceitual do objeto pretendido, a qual será determinada segundo uma rede de concepções conceituais, erigida em um discurso matemático, a partir de elementos lingüísticos decididamente matemáticos. Assim, o objeto concebido será apresentado, inicialmente, mediante uma representação lingüística que será tomada como a referência imediata da concepção conceitual desse mesmo objeto. Esta representação lingüística deverá apreender, de maneira adequada, essa mesma concepção conceitual, pondo-se segundo uma formulação ou segundo uma enunciação lingüísticas necessárias que nos permitam apreendê-la rigorosamente, de acordo com uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada.

Como exemplo, podemos citar a concepção conceitual do objeto derivada de uma função, tratada no Capítulo II, Seção 3: *a derivada de uma função é uma função que é tomada como um indicador da razão de variação instantânea entre a grandeza dependente e a grandeza independente de sua função primitiva*. Para que esta representação lingüística possa ser tomada como uma referência imediata do objeto derivada, como uma necessária enunciação lingüística de sua concepção, mesmo que eventualmente inadequada, nenhum de seus elementos lingüísticos deverá ser tomado com denotações conceituais que não sejam decididamente matemáticas. Ou seja, pode-se dizer, na Física, que a derivada da função "*espaço*" $S(t)$ é a função "*velocidade*" $V(t)$, mas não na Matemática, a menos que convertamos o "*tempo*" em uma noção matemática, por exemplo.

O segundo aspecto fundamental a ser distinguido, que se põe como uma disposição operacional efetiva, diz respeito à representação lingüística propriamente dita, ou à fórmula do objeto concebido, a qual, combinada com outras representações lingüísticas, constituirá a própria definição desse mesmo objeto e o disporá operacionalmente. Deste modo, o objeto concebido será apresentado, agora, mediante uma fórmula que será tomada como a definição desse mesmo objeto. Esta fórmula deverá dispor, segundo às condições de concepção do objeto concebido, as quais são desenvolvidas em uma rede de concepções conceituais, as condições de operação desse mesmo objeto, indicando as circunstâncias em que ele poderá ser invocado.

Como exemplo, podemos citar a definição do objeto derivada de uma função, tratada no Capítulo II, Seção 3: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Esta fórmula, que é tomada como uma disposição operacional relativa ao objeto derivada de uma função, no âmbito de um dado campo referencial, pôr-se-á, em um discurso matemático, como um estado ou como uma condição "*topológicos*"[197], segundo uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada. Esta inclinação, para apresentar uma fórmula como uma condição topológica, advém de nossa intenção correlativa de apresentar a concepção conceitual de um objeto como um preceito operacional. Esse preceito operacional, que é contemplado na definição desse mesmo objeto, é marcado, então, por uma configuração simbólica que deverá preservar, ou deverá manter invariantes, as propriedades do objeto concebido, sob determinadas transformações operacionais pertinentes a um dado campo referencial. Assim, mediante está fórmula mencionada acima, se tornará efetiva a disposição operacional da derivada de uma função, a qual poderá ser invocada sempre que pudermos incorporar a razão de variação instantânea entre duas grandezas relacionadas às condições de operação de um dado campo referencial.

E, para que possamos reforçar esta correlação fundamental entre a concepção e a fórmula de um objeto concebido, em um discurso matemático, lembrando-nos de que, como já foi observado na Introdução, Seção 1, essa correlação sempre nos remeterá para uma delas, para a concepção ou para a fórmula, quando quisermos implementar a outra, observaremos, novamente, que não será a tentativa de isolar um objeto matemático que nos permitirá apreendê-lo efetivamente, uma vez que a tentativa de isolá-lo, anunciando uma definição, somente o dispõe operacionalmente, mas a sua substancialidade se mantém inacessível. A substancialidade do objeto matemático é contemporânea de suas relações, tanto conceituais como operacionais, e "*une définition est*

---

[197] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 110 — "Desse modo, quando interpretamos sistematicamente o conhecimento racional como a constituição de certas *formas*, como simples aparelhagens de *fórmulas* próprias para informar uma experiência qualquer, instituímos um *formalismo*."; e part. BACHELARD(1934), p. 153 — "Para explicar a confiança indevida que temos no absoluto da localização, basta, aliás, lembrar-nos de que essa localização está na base da linguagem e que toda sintaxe é de essência topológica."

mathématiquement suffisante pour restituer une notion; mas sur le plan de la connaissance, elle ne rend pas compte de tous les aspects de la notion" [CORNU(1983), p. 9].

Por fim, na concepção ou na apreensão do Conhecimento Matemático, concebido como um sistema conceitual cujos objetos são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva, deveremos preparar as formulações matemáticas que se quererão produzir, a partir do desenvolvimento de uma atividade ou um movimento engendradores dos próprios objetos matemáticos, instituindo, marcadamente, no âmbito de uma atividade discursiva, um pólo ou uma dimensão que nos permita dispor desses mesmos objetos a partir de suas próprias definições. Esta dimensão de formulação dos objetos matemáticos deverá colocar-se, então, como a dimensão formal do Conhecimento Matemático.

4.4. Dimensão Substancial

A dimensão substancial do Conhecimento Matemático constitui-se como um terceiro *pólo* no qual são instituídos, basicamente, os procedimentos que se levam a efeito relativamente aos objetos matemáticos. Estes procedimentos serão tomados como uma coleção de relações conceituais e de relações operacionais que, no âmbito de um dado campo referencial, se aplicam em uma atividade ou em um movimento engendradores que nos permitirá operar com objetos matemáticos. Assim, a dimensão substancial diz respeito à determinação de uma coleção de relações funcionais mediante a qual se torna efetiva a operacionalização dos objetos do Conhecimento Matemático.

Para a instituição de uma realidade conceitual, a partir da concepção e da apreensão de seus próprios objetos, queremos crer que é imperioso delegar a esses mesmos objetos alguma substancialidade. A exemplo das considerações acerca da substancialidade dos objetos materiais, postas no Capítulo I, Subseção 7.1, nas quais se pressupõe uma analogia estrutural entre o modo de conceber e entre o modo de apreender tanto os objetos matemáticos como os objetos dos sistemas materiais, deveremos tomar a substancialidade dos objetos matemáticos como o produto de suas próprias relações funcionais[198], e a partir destas instituir a efetiva operacionalização[199] daqueles.

Quando pressupomos uma analogia estrutural entre um sistema conceitual e um sistema material, para que nos fosse dado legitimar uma correlação isomorfa entre eles, mediante a constituição de um modelo matemático correspondente a um modelo físico, idealizado a partir de uma "*situação física*", impôs-se a necessidade de que os objetos materiais fossem concebidos como uma composição predicativa em que as "*qualidades substanciais estão **acima** de qualquer organização estrutural*" [BACHELARD(1971), p. 83], e não "*debaixo*", ou seja, as qualidades substanciais não são concebidas como aspectos de uma natureza íntima dos objetos materiais, sendo, sobretudo, funções de sua própria vizinhança material. A partir desta substancialidade, um suposto "*realismo*" não mais se interioriza, mas se exterioriza, definindo-se mais de maneira funcional do que estruturalmente. Por conseguinte, na aproximação discursiva relativa à apreensão ou à concepção de um dado objeto matemático, como já foi observado, o que se procura descrever não é tanto o objeto concebido em sua suprema determinação conceitual, mas sim os procedimentos que tiveram como resultado a particular concepção do objeto em consideração. Intenta-se, assim, tomar a substancialidade dos métodos de concepção do objeto matemático em lugar de uma substancialidade do objeto concebido.

Devemos observar inicialmente que os métodos de concepção dos objetos matemáticos assentam-se, efetivamente, na medida em que for distinguido um campo operacional que seja próprio ao Conhecimento Matemático. Lembremo-nos de que será em um substrato empírico, desenvolvido como uma atividade discursiva, que se deverá constituir um campo operacional a partir do qual serão preparadas as formulações matemáticas que se quererão produzir. Nesse espaço de configuração, nessa realidade

[198] Cf. part. BACHELARD(1940), p. 41 — "[...] a química contemporânea é levada a considerar um *pluralismo horizontal*, muito diferente do pluralismo realista das substâncias fixas na sua unidade, definidas pelas suas irregularidades. Mostraremos que este pluralismo nasce com efeito da incorporação das condições de detecção na definição das substâncias, de forma que a definição de uma substância é, em determinados aspectos, função de uma vizinhança substancial. Dado que as condições de detecção intervém para definir as substâncias, pode-se dizer que estas definições são mais funcionais do que realistas. Daqui resulta a relatividade fundamental da substância; esta relatividade vem, de forma muito diferente da precedente contrariar o absoluto das substâncias consideradas pela química lavoisieriana."

[199] Cf. part. BACHELARD(1940), p.41-2 — "A química clássica, totalmente imbuída de realismo, pensou, sem pôr isso em causa, que era possível definir com precisão as propriedades de uma substância sem ter em conta as operações mais ou menos precisas que permitem isolar a substância."

conceitual sustentada em um conjunto de concepções postuladas como primordiais, serão assentados os domínios ou os campos de definição e de operação dos objetos matemáticos, por ocasião de sua apreensão ou de sua concepção, a partir da instituição de uma rede de concepções conceituais. E, com efeito, o aspecto fundamental que especifica a substancialidade de um objeto matemático é o *funcionamento* de sua própria concepção conceitual, ou seja, é a destinação possível de sua concepção no âmbito de um campo referencial eleito como um foro de procedimentos adequados ao exercício peculiar dessa mesma concepção. Assim, a substancialidade dos objetos matemáticos, cuja realização é alcançada mediante a observância de que qualquer objeto matemático seja tomado na perspectiva das diversas operações que teriam ensejado a sua concepção, determinar-se-á mediante a incorporação das condições de definição e de operação desses mesmos objetos às condições de sua concepção em uma rede de concepções conceituais.

Conseqüentemente, para que nos seja possível afirmar de uma concepção matemática alguma destinação, isto é, para que seja possível indicar as circunstâncias em que esta concepção poderá ser invocada, é necessário que delineemos os posicionamentos ou as posturas mentais que têm lugar na sustentação e na promoção da totalidade dos objetos matemáticos, ou seja, é necessário que demarquemos os procedimentos que se levam a efeito relativamente aos seus objetos. Os procedimentos peculiares ao Conhecimento Matemático, que se apresentam como constituintes em um discurso matemático, permitindo-nos "*ir para adiante*", ascendendo ou descendo no interior de sua edificação, serão tomados, então, como uma coleção de relações funcionais. Estas relações funcionais podem ser apresentadas, para efeito de exposição, subdividindo-se em dois grupos: em um deles tratam-se das relações conceituais e no outro, das relações operacionais. Tal subdivisão não é exclusiva, uma vez que, por exemplo, dentre as "*propriedades relevantes*"[200] que se buscam desenvolver com relação a uma dada teoria matemática, como, por exemplo, assentar determinadas "*conjecturas*"[201] matemáticas,

[200] Cf. part. Da COSTA(1979), p. 22 — "O resultado da axiomatização da disciplina ou teoria *A* é a obtenção de um sistema axiomático *S*, do qual *A* é uma das possíveis "realizações". (É sabido que os sistemas axiomáticos podem receber as mais variadas interpretações.) [...]. Elaborado *S*, o passo seguinte para a investigação de suas propriedades relevantes, consiste na sua formalização [...]."

[201] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 70 — "**conjectura de Goldbach** Conjectura feita em 1742 pelo matemático alemão Christian Goldbach, segundo a qual qualquer número ímpar maior do que 2 é a soma de dois números primos. Não se sabe se isso é verdade ou não."

encontram-se teoremas que garantem a existência[202] de soluções para determinadas equações. Por sua vez, dentre os algoritmos ou os métodos computáveis que nos permitem resolver alguns problemas matemáticos, pode-se conceber um conjunto de regras ou de instruções que nos permitam decidir[203] se uma fórmula "*bem-formada*" de um sistema formal é um teorema desse mesmo sistema, bastando para isso que seja apresentada uma demonstração de que tal processo ou algoritmo existe.

Por um lado, pode-se dizer que as relações conceituais entre os objetos matemáticos, cujos aspectos básicos podem ser assinalados pela composição de novos objetos, pelo desenvolvimento de propriedades relevantes, postas em teoremas, e pelas aplicações de determinadas concepções no âmbito da própria Matemática e no âmbito das demais Ciências, serão implementadas de acordo com os procedimentos que se assentam em uma atividade ou em um movimento que têm lugar na sustentação e na promoção da totalidade das concepções matemáticas. Estes procedimentos são definidos por meio de um caráter consubstanciador e por meio de um caráter legitimador, com respeito às concepções matemáticas. A especificidade do caráter consubstanciador destes procedimentos, que marca a sustentação das concepções matemáticas, diz respeito à abrangência do "*contexto da edificação*", no sentido de construção ou estruturação, do Conhecimento Matemático, determinando-se em uma postura analítica[204] e desenvolvendo-se segundo o raciocínio por recorrência[205]. Por sua vez, a especificidade do caráter legitimador destes procedimentos, que marca a promoção das concepções matemáticas, diz respeito à abrangência do "*contexto da justificação*", no sentido de constituição ou determinação, do Conhecimento

[202] Cf. part. DAVIS(1982), p. 418 — "Um matemático está interessado na solução de uma certa equação diferencial. Ele sabe que esta solução *u*(*t*) "existe", pois os "teoremas de existência" padrão de equações diferenciais incluem seu problema."

[203] Cf. part. BLACKBURN(1994), p. 318 — "**problema da decisão** O problema de encontrar um algoritmo ou processo de decisão para decidir se uma fórmula bem-formada arbitrária de um sistema lógico é um teorema do sistema. Uma solução positiva é uma demonstração de que tal processo existe; uma solução negativa é uma demonstração de que tal processo não pode existir. As tabelas verdade fornecem um processo de decisão para o cálculo proposicional, ao passo que o teorema de Church é uma solução negativa para o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade."

[204] **Postura Analítica**. Diz respeito ao posicionamento mental que nos permite considerar ou pensar um objeto como uma totalidade que está separada em partes que se determinam de algum modo autonomamente.

[205] **Raciocínio por Recorrência**. O raciocínio por recorrência impõe-se como uma postura analítica fracionativa ou seletiva, que procede por fracionamento ou seleção, tendo como substrato um núcleo primário de noções ou conceitos, constituídos como um conjunto de premissas, e que se instala na concepção ou na apreensão dos objetos do Conhecimento Matemático a partir de uma perspectiva marcadamente consubstanciadora.

Matemático, definindo-se em uma postura sintética[206] e desenvolvendo-se segundo o raciocínio por dedução[207].

Como exemplo de algumas destas relações conceituais, consideraremos o objeto "*diferencial de uma função*", para $y = f(x)$. Este novo objeto matemático, definido por $dy = f'(x)\,dx$, pode ser composto, por exemplo, correlacionando-se as noções de *reta tangente ao gráfico de uma função* e de *derivada de uma função*, tomada como o *coeficiente da inclinação de uma curva em um dado ponto*. Uma propriedade importante associada à noção de diferencial de uma função assegura-nos que, mesmo para aquelas funções "*deriváveis*", cujas variáveis sejam ambas variáveis dependentes de uma terceira, é possível "*obter*" uma função diferencial a partir de sua função primitiva: "*Teorema. Se* $y = f(x)$ *, então, quando* $f'(x)$ *existir,* $dy = f'(x)\,dx$ *, sempre que* x *for ou não uma variável independente*" [LEITHOLD(1968), p. 205]. A diferencial de uma função nos permite determinar o valor do "*incremento de* y " com uma "*boa aproximação*", sempre que o correspondente "*incremento de* x " for "*suficientemente pequeno*". Uma das aplicações da noção de diferencial de uma função, no âmbito da própria Matemática, pode ser ilustrada pela determinação de um valor aproximado para algumas *raízes*, quadradas, cúbicas, quartas: $y = \sqrt[3]{x}$, para $x = 28$, por exemplo. Nas aplicações no âmbito das demais Ciências, destacam-se aqueles problemas nos quais a possibilidade de algum erro na medida de uma grandeza seja permissível: "*Se a possibilidade de erro na medida do volume de um gás é* $0{,}1\ \mathrm{m}^3$ *e o erro permissível na pressão é* $0{,}001\ C\ \mathrm{N/m}^2$ *, encontre o tamanho do menor recipiente para o qual a lei de Boyle seja válida*" [$PV = C$, onde P é a pressão, V é o volume e C é constante, p. 146] [LEITHOLD(1968), p. 204].

Por outro lado, pode-se dizer que relações operacionais entre os objetos matemáticos, cujo aspecto básico pode ser assinalado pelos algoritmos[208] que se destinam

206 **Postura Sintética.** Diz respeito ao posicionamento mental que nos permite considerar ou pensar um conjunto de objetos como constituindo-se em uma totalidade que se determina de algum modo autonomamente.

207 **Raciocínio por Dedução.** O raciocínio por dedução determina-se como uma postura sintética derivativa ou relacional, que procede por derivação ou relação, tendo como fundação um conjunto de regras ou princípios, e que se instala na concepção ou na apreensão dos objetos do Conhecimento Matemático a partir de uma perspectiva marcadamente legitimadora.

208 Cf. part. HEGENBERG(1995), p. 4 — "Em Matemática, na atualidade, a palavra é utilizada para fazer alusão a processos (ou métodos, ou procedimentos) de cálculo com símbolos (não obrigatoriamente numéricos), adotando regras bem determinadas – e que, a par disso, conduza à solução de qualquer problemas de uma certa classe fixa de problemas."

às aplicações que demandam a determinação de constantes de indivíduos, como se dá na resolução de equações do 1°. ou do 2°. graus, ou, mais amplamente, nas técnicas computacionais do cálculo numérico, por exemplo, serão implementadas de acordo com os procedimentos que se assentam em uma atividade ou em um movimento que têm lugar na resolução de problemas matemáticos. Estes procedimentos são definidos através de um conjunto de regras ou instruções que se constituem a partir de um conjunto de *operações matemáticas*. Uma operação matemática pode ser tomada, num sentido amplo, como uma *aplicação* que associa um ou mais elementos de um conjunto a um terceiro elemento. Por exemplo, pode-se considerar a operação de *divisão* sobre o conjunto **Q** dos números racionais como uma aplicação $(a, b) \rightarrow a/b$ de **QXQ*** em **Q** , na qual **Q*** indica o conjunto de todos os números racionais não nulos.

Com efeito, a complexidade funcional dos objetos matemáticos, que dispõe cada um destes objetos como uma unidade analítica, como uma estrutura operacional fundamental, como um núcleo pragmático primário em um dado campo referencial, é tomada a partir de uma rede de concepções conceituais, mediante a integração de cada um dos objetos matemáticos em um conjunto de outros objetos previamente distinguidos. Nessa medida, podemos tomar os objetos matemáticos como padrões abstraídos do processo total de movimento de seu próprio campo de ordem, tomando-os, então, como uma contingência ou como uma estrutura operacional fundamental que persiste circunstancialmente na fluência desse mesmo campo. Por conseguinte, a substancialidade dos objetos matemáticos poderá ser tomada a partir de um conjunto de relações funcionais que se estabelecem sincronicamente, pondo-se como interdependentes ou mutuamente influentes, e determinando-se como a efetiva operacionalização dos objetos do Conhecimento Matemático.

Por fim, na concepção ou na apreensão do Conhecimento Matemático, concebido como um sistema conceitual cujos objetos são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva, deveremos preparar as formulações matemáticas que se quererão produzir, a partir do desenvolvimento de uma atividade ou um movimento engendradores dos próprios objetos matemáticos, instituindo, marcadamente, no âmbito de uma atividade discursiva, um pólo ou uma dimensão que nos permita operar com esses mesmos objetos a partir de suas próprias relações funcionais. Esta dimensão de operação dos objetos matemáticos deverá colocar-se, então, como a dimensão substancial do Conhecimento Matemático.

4.5. Três Dimensões Complementares

Na Seção 3 deste capítulo, observamos que, para que nos seja possível distinguir ou apreender um objeto matemático, em alguma generalidade e além do campo a partir do qual ele seria ocasionalmente constituído, é imperioso que possamos configurá-lo mediante a *consubstanciação de três dimensões complementares*, ou seja, por meio da disposição de três *pólos* ou de três *oposições* que se constituirão, iminentemente, como os aspectos fundamentais de um campo ou de um domínio de referência. Pretende-se que estas três dimensões complementares sejam tomadas como um expediente metodológico adequado em uma confrontação conceitual, a partir do qual se determinará que a simples menção de um de seus *pólos* possa nos levar para o contexto ou para o campo referencial no qual o objeto intentado tiver movimento. Não nos interessará que estas três dimensões sejam tomadas segundo uma concepção que coloque cada uma delas como aspectos separados, que possam ser iluminados distintamente, e que se assentem como um aspecto ou como um predicado intrínseco do objeto concebido.

A imposição de três pólos complementares, instituídos em uma atividade ou em um movimento engendradores dos objetos matemáticos, assenta-se como um método de investigação, a partir do qual, e como um produto de uma eventual ação de seus procedimentos sobre os objetos concebidos, ser-nos-ia possível comprovar uma interferência essencial, uma contaminação iminente, do método e dos objetos concebidos. O objeto concebido apresentar-se-ia, então, como uma realização inacabada, passível de ser "dialetizada"[209]. Assim, admitindo-se que somente nos é possível conceber ou configurar algum objeto mediante a distinção de algum movimento ou de algum processo em relação a um dado campo referencial, pode-se dizer que o objeto concebido não poderia dar-se como completamente determinado ou constituído, uma vez que a sua própria concepção

[209] Cf. part. Da COSTA(1979), Capítulo I, Seção 1 — (p. 18) "[...] *dialetizar* determinada concepção significa apenas questioná-la, reformulá-la, negá-la mesmo, demonstrando que os pressupostos a ela subjacentes são por demais ingênuos, devendo ser, ou já tendo sido, substituídos por outros novos, mais finos e melhor adaptados aos fatos; isto acontece especialmente quando surgem evidências e situações recentes que forçam a alteração dos padrões explicativos antigos."

conceitual, modificando-se ou ampliando-se no exercício de suas próprias destinações, permaneceria como uma concepção meramente pertinente nesse mesmo campo referencial. "*Todavia,* — como nos lembra BACHELARD(1934, p. 103), por exemplo — *se se deseja penetrar o espírito científico na sua dialética nova, é preciso viver essa dialética no plano psicológico, como uma realidade psicológica, instruindo-se na formação primeira dos pensamentos complementares. Em resumo, todo psicólogo do espírito científico deve viver efetivamente este estranho* ***desdobramento da personalidade geométrica*** *que se efetuou no curso do último século na cultura matemática. Compreender-se-á então que as teses mais ou menos céticas do "convencionalismo matemático" traduzem muito mal a dialética violenta dos diversos pensamentos geométricos. Naturalmente, os problemas que dizem respeito à generalidade das noções matemáticas se apresentam sob um aspecto todo outro quando se viveu a dialética geométrica essencial.*"

Ademais, entendemos que a objetivação de qualquer nova concepção matemática somente poderá efetivar-se se esta concepção puder ser desenvolvida a partir de um conjunto de outras concepções que possam ser tomadas como previamente distinguidas, mediante alguma experiência possível na qual essa concepção emergirá como uma composição desenvolvida segundo aquele mesmo conjunto de concepções prévias. Já observamos que, para apreender um objeto matemático, impõe-se distingui-lo a partir de uma totalidade, determinando-o como uma composição de relações, de caráter predicativo, e como uma estrutura operacional fundamental. Pretende-se, então, que esta atividade ou este movimento engendradores dos objetos matemáticos, tomados como um substrato empírico, assentem-se como uma atividade discursiva determinada mediante três dimensões complementares.

Por fim, devemos dizer que não se poderá atribuir aos objetos matemáticos algum significado inequivocamente matemático se insistirmos em determiná-los em um campo operacional que não esteja no âmbito do próprio campo de ordem do Conhecimento Matemático. Queremos crer que o "*golpe final*" na apreensão dos objetos matemáticos somente será dado quando pudermos fazer emergir os predicados básicos desses objetos como um produto de suas relações funcionais, no âmbito de um dado campo referencial. O objeto matemático não poderá mais ser tomado, então, como um objeto isolado, como um objeto autônomo e independente, mas deverá ser tomado como um movimento integrado em uma totalidade, como um movimento que se manifesta a si próprio como uma estrutura operacional fundamental. Os objetos matemáticos não emergirão, então, como um produto acabado e intocável, mas como um subproduto de uma atividade discursiva preparatória e como um subproduto de um conjunto de concepções matemáticas tomadas como fundamentais. As peculiaridades do objeto matemático, deste modo concebido, não poderão, portanto, ser determinadas de modo independente do processo de sua própria concepção. O que vemos emergir, assim, como um objeto matemático não é um objeto constituído em sua mais elevada determinação conceitual, mas um subproduto de nossos modos de questionamento e de nossos modos de investigação, segundo uma atividade discursiva. O objeto matemático, com o qual dos defrontaremos, será, então, e antes de tudo, um objeto concebido.

CAPÍTULO III

APONTAMENTOS ACERCA DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA COMO UM PRODUTO DE UMA EXPERIÊNCIA DEFINIDA

> "As reformas do ensino secundário na França, nos últimos dez anos, ao diminuir a dificuldade dos problemas de física, ao implantar, em certos casos, até um ensino de física sem problemas, feito só de perguntas orais, desconhecem o real sentido do espírito científico. Mais vale a ignorância total do que um conhecimento esvaziado de seu princípio fundamental."
>
> **Gaston BACHELARD(1938, p. 50)**

1. Preliminares

Sobretudo, intentaremos assentar, neste último capítulo, a necessidade de se preparar as formulações matemáticas que se pretenderão produzir, sempre que estivermos interessados na sua concepção ou na sua apreensão, evidenciando que essa preparação exigirá uma determinada e específica atividade discursiva, mediante a qual serão determinados o contexto ou o campo a partir dos quais qualquer nova formulação matemática deverá emergir.

Nessa medida, pretendemos romper com uma espécie de "*continuidade entre o conhecimento comum e o conhecimento científico*"[210], evidenciando, por um lado, a insuficiência do imediatismo de uma aprendizagem matemática derivada de uma

[210] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 174 — "Uma terceira ordem de objeções é tomada pelos continuístas da cultura no domínio da pedagogia. No caso, dado que se acredita na continuidade entre o conhecimento comum e o conhecimento científico, trabalha-se para a manter, toma-se como obrigação reforçá-la. Do bom senso pretende-se fazer sair lentamente, suavemente, os rudimentos do saber científico. Recusa-se a fazer violência ao "senso comum". E nos métodos de ensino elementar atrasam-se, como que de propósito, as horas de iniciações viris, deseja-se conservar a tradição da *ciência elementar*, da *ciência fácil*; é como se fosse um dever mandar o estudante participar da imobilidade do conhecimento primeiro."

"*experiência primeira*", e, por outro lado, especificando a necessidade de que uma aprendizagem matemática seja tomada como um produto de uma "*experiência definida*". Queremos crer que não será possível apreender alguma noção matemática, na amplitude contemporânea de sua abrangência, se nos limitarmos somente a tentar derivá-la de alguma experiência tomada do "*conhecimento comum*". A ordem e a natureza da constituição das experiências que determinam as formulações associadas ao conhecimento comum demandam, apenas, uma inserção em algum *ambiente* ou em alguma *situação* sociais. Nesse *estado de coisas*, as formulações do conhecimento comum emergem como um subproduto de um movimento desenvolvido a partir do empirismo *imediato* de uma realidade material continente, ou seja, o contexto das formulações conceituais enunciadas põe-se com anterioridade quando da inserção de um interlocutor em qualquer ambiente social. Por sua vez, a ordem e a natureza da constituição das experiências que determinam as formulações associadas ao Conhecimento Científico demandam a instituição de uma realidade conceitual separada e anterior a qualquer empirismo *imediato*, ensejado em alguma realidade material continente. Para indagar sobre a natureza das formulações matemáticas, ou mesmo para desenvolver alguma intuição matemática, é necessário, antes, erigir um sistema conceitual a partir do qual essa indagação possa ser formulada e, eventualmente, respondida, a exemplo de um jovem cientista, que deverá passar por inúmeros anos de *treinamento* antes de estar pronto para repetir algum experimento na moderna física subatômica, indagar sobre a natureza de determinada questão e estar em condições de compreendê-la.

E, com efeito, devemos dizer, então, que é preciso privilegiar o Conhecimento Científico, admitindo-o como uma realidade conceitual separada e distinta da realidade conceitual manifesta nas interações sociais desenvolvidas no âmbito do conhecimento comum. A realidade conceitual manifesta pelo conhecimento comum é uma realidade sociocultural previamente dada e anterior à própria inserção de qualquer interlocutor em um dado ambiente social, e a sua constituição põe-se, imediatamente, a partir da distinção dos próprios objetos ou artefatos que compõem esse mesmo ambiente. Por sua vez, a realidade conceitual manifesta pelo Conhecimento Científico não se põe imediatamente pela simples imersão de algum interlocutor em um certo ambiente social, mesmo que eivado por "*artefatos científicos*". Para a sua constituição, como estamos pressupondo, é necessário, sobretudo, eleger um campo referencial, por intermédio de um conjunto de noções de base, a partir do qual essa realidade conceitual possa ser constituída. É necessário, portanto, distingui-la de acordo com uma natureza e com uma estrutura operacional peculiares, que atribuímos à condição especial da própria constituição do Conhecimento Científico, e que negamos ao conhecimento comum.

Assim, é imperioso que, não só na concepção, mas também na apreensão das formulações correspondentes ao Conhecimento Matemático, preparemos o domínio ou campo de definição antes de definir, o domínio ou o campo de operação antes de operar, ou seja, é preciso preparar as formulações matemáticas que se quererão produzir. Novamente, esta preparação requererá uma determinada e específica atividade discursiva, na qual qualquer nova formulação matemática possa ser inserida, para ser compreendida, uma atividade discursiva que deverá constituir-se como uma base empírica a partir da qual possam emergir as intuições matemáticas que nos encaminharão para as almejadas formulações. Por conseguinte, é exatamente na medida em que pudermos tornar claramente discursivo aquilo que surge na mais básica das intuições, correlacionando-se as noções e variando-se as destinações operacionais, que poderemos erigir uma necessária e específica inserção conceitual, inescapável na objetivação do Conhecimento Matemático, uma objetivação impreterível que servirá de instrumento para a realização de um esforço de atualização e de promoção fundamentais de toda investigação científica.

2. A Noção de Experiência Definida

A noção de experiência definida é tomada a partir das concepções de BACHELARD acerca do "*pensamento científico contemporâneo*", quando ele diz, por exemplo, que "*na organização matemática do saber, é necessário preparar o domínio de definição antes de definir, exatamente da mesma maneira que, na prática do laboratório, é preciso preparar o fenômeno para o produzir. O pensamento científico contemporâneo começa, pois, por colocar entre parêntesis a realidade*" [BACHELARD(1940), p. 19-20]. Dessas concepções, pode-se depreender que a preocupação básica de BACHELARD coloca-se, especialmente, sobre a necessidade de que cada afirmação, observação ou resultado experimental sejam indicados na perspectiva das diversas operações que os teriam produzido. Assim, a imposição desta regra metodológica permitirá a BACHELARD negar um racionalismo *a priori* que valha para todas as experiências, "*um racionalismo em retirada da experiência*" [BACHELARD(1971), p. 101], um racionalismo que "*formula as condições de um* ***consenso*** *dos homens de todos os lugares e de todos os tempos diante de qualquer experiência*" [BACHELARD(1971), p. 103]. Trata-se, então, na objetivação[211] de uma atividade científica, de considerar um equívoco, ou uma "*inutilidade espiritual*", toda formulação que não venha sustentada em um sistema conceitual continente, toda experiência que não venha ligada a um método de experimentação, sempre que estivermos interessados em alguma perspectiva de verificação.

Concebemos, assim, no âmbito do Conhecimento Matemático, uma experiência definida como dizendo respeito a uma atividade matemática, desenvolvida segundo uma atividade discursiva, segundo uma atividade estruturada que se apóia em seu próprio movimento, na qual qualquer formulação matemática deverá emergir como um produto de um conjunto de formulações matemáticas postas anteriormente e tomadas como um substrato empírico adequado. Trataremos, pois, quando da implementação de uma experiência definida, de erigirmos uma rede de concepções conceituais, que virá subordinada a alguma experiência possível, na qual cada um dos objetos matemáticos será determinado enquanto uma composição de um conjunto de outros objetos matemáticos previamente distinguidos. E, com efeito, impor-se-á a necessidade da instituição de uma realidade conceitual separada e anterior a qualquer empirismo *imediato*, ensejado em alguma realidade material continente, sempre que estivermos interessados na concepção ou na apreensão das formulações matemáticas, embora possamos admitir que, na ocasião de alguma ação pedagógica[212], esse empirismo imediato possa ser tomado como uma

[211] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 103 — "A cultura é um acesso a certa emergência; no domínio científico essas emergências são efetivamente constituídas socialmente. [...] Em suma, o *consenso* que define socialmente um racionalismo regional é mais que um fato, é o sinal de uma *estrutura*. [...] O racionalismo integral deve pois ser um racionalismo dialético que decida sobre a estrutura em que deve empenhar-se o pensamento para informar uma experiência."

[212] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 50 — "Em resumo, no ensino elementar, as experiências muito marcantes, cheias de imagens, são falsos centros de interesse. É indispensável que o professor passe continuamente da mesa de experiências para a lousa, a fim de extrair o mais depressa possível o abstrato do concreto. Quando voltar à experiência, estará mais preparado para distinguir os aspectos orgânicos do fenômeno. A experiência é feita para ilustrar um teorema."; e p. 292 — "Enfim, acho que o primeiro princípio da educação científica é, no reino intelectual, esse ascetismo que é o pensamento abstrato. Só ele pode levar-nos a dominar o conhecimento experimental. Por isso, não hesito em apresentar o rigor como uma psicanálise da intuição, e o pensamento algébrico como uma psicanálise do pensamento geométrico. [...] A intuição nunca deve ser um dado. Deve ser sempre uma ilustração."

ilustração primeira, especialmente quanto à escolha e à instituição das noções matemáticas de base.

Temos afirmado que o Conhecimento Científico funda-se na experiência possível, e queremos sugerir que em sua concepção ou em sua apreensão torna-se imperioso desenvolver alguma atividade que nos permita engendrar ou adquirir aquelas concepções que lhe seriam próprias. Pretende-se impor, assim, a necessidade inalienável de que qualquer nova formulação, ou de que qualquer formulação já estabelecida, seja determinada ou seja tomada a partir de uma atividade discursiva que possa ser identificada como própria a esse mesmo conhecimento e que possa ser reconhecida como um substrato empírico apropriado para a concepção ou para a apreensão de suas formulações.

Nessa medida, e no âmbito da noção de experiência possível que adotamos neste trabalho, como aquela que diz respeito a um movimento correlativo possível de um sujeito epistêmico e de um mundo mediato, na fluência de uma totalidade continente, intenta-se instituir a noção de experiência definida[213] como a instância empírica adequada para a implementação de uma experiência de aprendizagem matemática. Interessa-nos, então, apresentar uma *fenomenologia* matemática como um produto delineado e ordenado de uma série de *acontecimentos* decisivos, tomados no âmbito do próprio campo de ordem do Conhecimento Matemático, e possivelmente conflitantes com as imagens iniciais subtraídas à intuição primeira das experiências comuns ensejadas em alguma realidade material. Ademais, essa experiência definida determinar-se-á enquanto uma *experiência*

---

[213] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 103 — "Esse racionalismo integral ou integrante deveria ser instituído *a posteriori*, depois que se estudassem os racionalismos regionais diversos, tão organizados quanto possível, contemporâneos do relacionamento dos fenômenos que obedecem a tipos de experiências bem definidas."; e part. BACHELARD(1938), p. 7 — "Tornar geométrica a representação, isto é, delinear os fenômenos e ordenar em série os acontecimentos decisivos de uma experiência, eis a tarefa primordial em que se firma o espírito científico. [...] O pensamento científico é então levado para "construções" mais metafóricas que reais, para "espaços de configuração", dos quais o espaço sensível não passa, no fundo, de um pobre exemplo. O papel da matemática na física contemporânea supera pois, de modo singular, a simples descrição geométrica."

construída[214], enquanto uma experiência que se apresentará voluntariamente desligada das observações isentas, das observações sem intervenção, justapostas e incontroláveis[215]. Assim, impõe-se construir uma experiência de aprendizagem *definida*, de tal modo que ela possa nos oferecer a oportunidade de "*verificar*" ou de engendrar a concepção ou a apreensão de um objeto matemático como uma "*lei*" ou como um padrão inexorável num dado campo referencial.

Pode-se afirmar, então, que "*não vamos pois hesitar em considerar um erro — ou como inutilidade espiritual, o que é mais ou menos a mesma coisa — toda verdade que não faça parte de um sistema geral, toda experiência, mesmo justa, cuja afirmação não esteja ligada a um método de experimentação geral, toda observação que, embora real e positiva, seja anunciada numa falsa perspectiva de verificação*" [BACHELARD(1938), p. 14-5]. E, desse modo, deveremos acentuar tudo o que há de inacabado ou gratuito nas formulações matemáticas devidas às experiências primeiras[216], principalmente com relação às disposições operacionais tomadas por analogia das "*situações reais*". Trata-se, portanto, de determinar as condições experimentais como condições de experimentação[217], exigindo-se uma certa *solidariedade* entre o método de apreensão e a experiência de

[214] Cf. part. BACHELARD(1938), p.14 — "A experiência *científica* é portanto uma experiência que *contradiz* a experiência *comum*. [...] A experiência comum não é de fato *construída*; no máximo, é feita de observações justapostas, e é surpreendente que a antiga epistemologia tenha estabelecido um vínculo contínuo entre a observação e a experimentação, ao passo que a experimentação deve afastar-se das condições usuais da observação. Como a experiência comum não é construída, não poderá ser, achamos nós, efetivamente *verificada*. Ela permanece um fato. Não pode criar uma lei. Para confirmar cientificamente a verdade, é preciso confrontá-la com vários e diferentes pontos de vista. Pensar uma experiência é, assim, mostrar a coerência de um pluralismo inicial."; e p. 18 — "Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído."

[215] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 66 — "Há nisso uma filosofia completa de um *empirismo ativo*, bem diferente de uma filosofia do empirismo imediato e passivo que toma a experiência da observação por juiz. A experiência não mais pronuncia sentenças sem apelação; ou, pelo menos, na medida em que se recusa a sancionar nossa expectativa, apela-se a uma experiência nova. A experiência não mais constitui ponto de partida, nem mesmo é simples guia, ela é um *alvo*."

[216] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 151 — "Na formação do espírito científico, o primeiro obstáculo é a experiência primeira, é a experiência colocada antes e acima da crítica que é necessariamente elemento integrante do espírito científico. Dado que a crítica não agiu explicitamente, a experiência não pode, em caso algum, ser apoio seguro."

[217] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 166 — "Não se pode *completar* uma experiência que não se recomeçou, pessoalmente, de ponta a ponta. Não se *possui* um bem espiritual quando não foi ele adquirido inteiramente por esforço pessoal. O primeiro sinal da certeza científica é o fato de ela poder ser revivida tanto em sua análise quanto em sua síntese."

aprendizagem[218], ou seja, será preciso estabelecer um método de apreensão para adquirir o objeto em apreensão, mediante uma atividade discursiva, mediante uma atividade estruturada que se apóie em seu próprio movimento. Estamos concebendo, por conseguinte, uma experiência definida como uma experiência idealizada a partir de um conjunto de objetos matemáticos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado.

3. Da Primazia da Inserção Conceitual

"Omne symbolum de symbolo." [219]

A exemplo do que foi sugerido acerca da noção de concepção na Introdução deste trabalho, a inserção conceitual de qualquer noção em apreensão põe-se como imperiosa para que nos seja possível abranger o processo gerador dessa mesma noção, no seu próprio campo de constituição, e indicar, com isso, alguma especificidade na sua determinação. Primaremos, então, por uma imperiosa e inalienável inserção conceitual sempre que estivermos tratando da concepção ou da apreensão das formulações matemáticas. Sempre preferiremos a inserção de um conceito em uma "*síntese racional*"[220], e é somente na medida em que uma análise conceitual possa nos permitir essa inserção que

---

[218] Cf. part. BOHM(1980), p. 181 — "Isto significa que a descrição das condições experimentais não desaparece como um mero vínculo intermediário de inferência, mas permanece inseparável da descrição do que é chamado de objeto observado. O contexto "quântico" exige assim um novo tipo de descrição que não implica a separabilidade do "objeto observado" em face do "instrumento de observação". Em vez disso, a forma das condições experimentais e o significado dos resultados experimentais têm agora de ser um todo, no qual a análise em elementos autonomamente existentes não é relevante."

[219] Cf. PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 2.ed. Tradução José T. C. Neto. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1995. 337. p. 73 — "Se alguém cria um novo símbolo, ele o faz por meio de pensamentos que envolvem conceitos. Assim, é apenas a partir de outros símbolos que um novo símbolo pode surgir. *Omne symbolum de symbolo.*"

[220] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 26-7 — "Haverá um capítulo especial para mostrar o *obstáculo verbal*, isto é, a falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa, nessa estranha inversão que pretende desenvolver o pensamento ao analisar um conceito, em vez de inserir um conceito particular numa síntese racional."

buscaremos decompor[221] um conceito. A inserção conceitual constituir-se-á, assim, em um procedimento básico que nos permitirá determinar o rigor do alcance dos conceitos.

A inserção conceitual começará com a determinação ou com a composição do objeto ou do conceito em apreensão, segundo uma concepção conceitual, no âmbito de uma rede conceitual, mediante a especificação de sua representação lingüística e de sua disposição operacional, e culminará com a ilustração de suas destinações ou de suas aplicações. A necessidade de que uma inserção conceitual considere as três dimensões de um conhecimento — as dimensões normativa, formal e substancial — e admita alguma possível ilustração das aplicações do objeto em apreensão a outros campos é imperiosa, embora uma dada ordem nesta abordagem, na implementação de alguma ação pedagógica, por exemplo, não seja obrigatória. Todo objeto ou toda concepção matemáticos são um estado ou uma condição de uma atividade discursiva, um momento de uma composição de formulações, um resultado de um processo de produção. A apreensão de qualquer objeto matemático não deve, então, satisfazer-se apenas em determinar as instâncias operacionais do objeto em apreensão, sem nenhum esforço para inseri-lo em uma rede de concepções conceituais, sem as necessárias e específicas correlações conceituais com outros objetos. Um estudo ou um "*treinamento*" lingüísticos unicamente não garantirá uma apreensão efetiva das formulações matemáticas denotadas por uma linguagem correspondente, pois este estudo somente nos permitirá lidar com essa linguagem num contexto que por nós possa ser reconhecido.

Destarte, devemos dizer que são dois os aspectos básicos que nos impõem a necessidade de uma inserção conceitual, em um dado confronto conceitual: O primeiro assegura-nos que a concepção ou a apreensão conceituais dependem de uma inserção conceitual em um sistema conceitual previamente distinguido; e o segundo garante-nos que a propriedade e a sustentação de uma formulação conceitual dependem de uma inserção conceitual consistente com a totalidade do sistema conceitual continente.

---

[221] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 121-2 — "A aproximação de duas etimologias de origem diferentes provoca um movimento psíquico que pode dar a impressão de que se adquire um conhecimento. Toda designação de um fenômeno conhecido por um nome erudito torna satisfeita a mente preguiçosa. [...] Sutilezas não coordenadas ou apenas solidárias de nuanças lingüísticas não conseguem determinar uma estrutura psicológica. Com mais razão, quando essas sutilezas referem-se à experiência, quando tocam em detalhes empíricos, sua ligação a uma substância ou a um substantivo não pode determinar um pensamento científico."

No que diz respeito ao primeiro aspecto, podemos afirmar que, em quaisquer concepção ou apreensão conceituais, será necessário preparar as formulações conceituais que se quererão produzir[222], para que elas possam ser concebidas ou apreendidas. Justifica-se esta necessidade porque estamos admitindo conceber um sistema conceitual como uma coleção de objetos ideais que se inter-relacionam em uma totalidade discursiva, na qual cada um de seus objetos, submetidos ao próprio campo de ordem desse mesmo sistema, não têm uma existência independente do processo total de movimento desse mesmo campo, e porque admitimos, também, que, para a objetivação de um sistema conceitual, deva-se desenvolver uma atividade discursiva que imponha a apreensão ou a distinção de qualquer um de seus objetos como um produto de alguma experiência possível, idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado. Deste modo, preparar as formulações conceituais que se quererão produzir, por ocasião de sua concepção ou de sua apreensão, significará inseri-las em um sistema conceitual previamente distinguido, sustentando-as em uma determinada e específica atividade discursiva, que se constituirá como uma base empírica mediante a qual se farão emergir aquelas intuições que culminarão nas almejadas formulações conceituais. Se uma dada concepção matemática não puder emergir de um substrato conceitual reconhecidamente matemático, não haverá nenhuma garantia de que estaremos lidando com uma concepção decididamente matemática. Assim, será em uma atividade discursiva preparatória que poderemos implementar a inserção conceitual de um conceito ou de um objeto em apreensão, no âmbito de um sistema conceitual previamente distinguido, para que possamos assegurar a sua adequada e específica formulação conceitual. Sem uma adequada inserção conceitual, torna-se acidental a composição, a disposição e a operacionalização de qualquer objeto concebido, em um certo discurso, e a sua concepção ou a sua apreensão tornam-se eventuais, uma vez que caberá a um aprendiz, por exemplo, por sua conta e risco, forjar uma realidade conceitual geradora que possa sustentar o objeto em apreensão.

[222] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 127 — "De fato, para o espírito científico, todo fenômeno é um momento do pensamento teórico, um estágio do pensamento discursivo, um resultado *preparado*. É mais produzido do que induzido. O espírito científico não pode satisfazer-se apenas com ligar os elementos descritivos de um fenômeno à respectiva substância, sem nenhum esforço de hierarquias, sem determinação precisa e detalhada das relações com outros objetos."

Com efeito, um ensino meramente operacional[223] das concepções matemáticas, ou de suas aplicações, não é um ensino que permita ao aprendiz ter acesso ao Conhecimento Matemático, já que ele pode converter-se num ensino tão-somente lingüístico, não permitindo que o aprendiz compreenda suas concepções como um produto de uma inserção em uma totalidade conceitual geradora. Se não for explicitado o conjunto dos procedimentos que culminaram em uma determinada formulação conceitual, essa concepção conceitual somente poderá tornar-se disponível operacionalmente, ao aprendiz, na medida em que ele puder associá-la a qualquer uma de suas formulações conceituais já conhecidas. Se ao aprendiz não for dada a oportunidade de objetivar essas formulações, a partir de um substrato conceitual reconhecidamente matemático, ele as objetivará mediante seu próprio substrato conceitual pessoal.

Quanto ao segundo aspecto, para que uma formulação conceitual torne-se efetiva, legitimando e sustentando um objeto em apreensão e fazendo-o emergir como um produto de uma fluência discursiva privilegiada, ela deverá inserir-se, de modo consistente, na totalidade de seu correspondente sistema conceitual. A determinação básica, que nos impõe uma inserção conceitual consistente com a totalidade de um sistema conceitual, põe-se na pressuposição que admite que a base empírica de qualquer sistema conceitual assenta-se em uma atividade discursiva, em uma atividade que se estrutura e que se apóia em seu próprio movimento, desenvolvendo-se segundo os procedimentos do "*método axiomático*", ou mais propriamente, segundo uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada. Por isso, admitimos que o Conhecimento Matemático se manifeste em um discurso que subsiste em uma coleção de proposições ou em uma coleção de enunciados, os quais, segundo os raciocínios por recorrência e por dedução, se inter-relacionam, constituindo-se em um sistema conceitual. Deste modo, sempre que quisermos conceber ou apreender um enunciado matemático ou uma formulação conceitual que seja própria à Matemática, deveremos considerar a propriedade ou a adequação de sua instituição no âmbito de um campo referencial pertinente ao Conhecimento Matemático. Assim, deveremos constituir um argumento matemático, a partir de uma coleção de

[223] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 289 — "Mas o ensino dos *resultados* da ciência nunca é um ensino científico. Se não for explicada a linha de produção espiritual que levou ao resultado, pode-se ter a certeza de que o aluno vai associar o resultado a suas imagens mais conhecidas. É preciso "que ele compreenda". Só se consegue guardar o que se compreende. O aluno compreende do seu jeito. Já que não lhe deram as razões, ele junta ao resultado razões pessoais."

enunciados decididamente matemáticos e previamente distinguidos, sempre que quisermos conceber ou apreender um dado enunciado matemático, tomando-o exatamente como a conclusão desse mesmo argumento, para que possamos assegurar a sua consistência com a totalidade do Conhecimento Matemático. Uma inserção conceitual constituir-se-á, então, em uma imposição metodológica a partir da qual se poderá pleitear a consistência de qualquer concepção matemática e garantir a sua pretendida instituição social.

Se estamos admitindo tomar a noção de concepção conceitual como designando, de modo apropriado, um objeto concebido, e, por isso, instituindo-a como uma referência semântica incorporada a uma realidade conceitual fundadora, mediante a qual possamos evocar o movimento ou o processo de elaboração, de geração, desse mesmo objeto concebido, além de apresentá-lo como uma referência imediata de uma representação, uma inserção conceitual torna-se imperiosa para que nos seja dado abranger o processo gerador desse mesmo objeto, e indicar, assim, a especificidade de sua determinação. Para indagar sobre a natureza das concepções matemáticas, ou mesmo para desenvolver alguma intuição matemática, será necessário antes erigir um sistema conceitual no qual esta concepção possa ser inserida e a partir do qual aquela indagação possa ser formulada. Um dado objeto matemático poderá ser invocado, então, sempre que pudermos incorporar a sua concepção conceitual às condições de operação de um dado campo referencial. Realizada uma adequada inserção conceitual, em um dado campo referencial, este mesmo campo se converterá em uma instância apropriada para o desenvolvimento conceitual ou operacional do objeto concebido, e aquela inserção conceitual se converterá em um procedimento que nos permitirá determinar o rigor do alcance da concepção conceitual que pretendemos associar a um sistema conceitual.

4. A Presidência da Experiência Definida sobre a Experiência Primeira

Admitimos, neste trabalho, à luz de nossas teses intermediárias, a insuficiência daquelas concepções que tomam o Conhecimento Matemático unicamente como uma atividade matemática ou como uma linguagem, e estabelecemos que o acesso a esse conhecimento, para apreendê-lo ou para desenvolvê-lo, será marcado pela engendração de seus próprios objetos, mediante a instituição de três dimensões complementares. Com isso, podemos dizer que a ordem e a natureza das experiências que determinam a engendração das formulações associadas ao Conhecimento Matemático demandam a constituição de uma experiência definida, que deverá presidir qualquer experiência primeira ensejada no âmbito de algum empirismo *imediato*. Intentaremos assentar, então, de modo imperioso, a presidência de uma experiência definida sobre as experiências primeiras, para que nos seja dado acentuar e afastar tudo o que houver de inacabado ou de gratuito nas formulações matemáticas devidas às imagens iniciais subtraídas à intuição primeira das experiências comuns ensejadas em alguma realidade material, na ocasião da implementação de alguma experiência de aprendizagem matemática.

Estamos admitindo, como já observamos anteriormente, que a ordem e a natureza da constituição das experiências que determinam as formulações associadas ao Conhecimento Científico[224] demandam a instituição de uma realidade conceitual separada e anterior a qualquer empirismo *imediato*, ensejado em alguma realidade material continente. Por isso, estamos admitindo, também, que a constituição de uma experiência definida deverá presidir qualquer experiência primeira ensejada no âmbito de algum empirismo *imediato*. Basicamente, o requerimento da presidência de uma experiência definida sobre uma experiência primeira justifica-se pela impropriedade das formulações conceituais derivadas de qualquer tratamento dado às concepções matemáticas em outros campos operacionais que não sejam próprios ao Conhecimento Matemático, quando da implementação de uma experiência de aprendizagem matemática. Esta impropriedade é flagrante na medida em que, na tentativa de compor um objeto matemático, em um contexto no qual cada um de seus objetos não sejam objetos decididamente matemáticos, ou seja, objetos cujos predicados não sejam outros objetos matemáticos, exclusivamente, não haverá nenhuma garantia de que a composição do objeto matemático em apreensão contará, necessária e tão-somente, com elementos decididamente matemáticos. Mesmo que nos valhamos de uma experiência primeira para ilustrarmos a concepção de algum objeto

[224] Cf. part. BACHELARD(1971), p. 55 — "A ciência contemporânea exige um novo ponto de partida. Ela suscita ao filósofo o curioso problema de um novo ponto de partida. No caso, é preciso que nos apoiemos em técnicas que não se exprimem totalmente na linguagem de nossos gestos mecânicos e de nossas intuições geométricas. A revolução epistemológica que a microfísica acarreta leva, de resto, a substituir a fenomenologia por uma nomenologia, isto é, por uma organização de *objetos de pensamento. Os objetos de pensamento* tornam-se em seguida *objetos de experiências técnicas*, numa pura artificialidade da experiência."

matemático, deveremos primar, sempre, por um afastamento da impressão e da observação primeiras.

Ao considerar-se uma "*situação real*" como um expediente adequado para incentivar e promover uma aprendizagem matemática, admitindo-se que se possam derivar de uma experiência primeira, imediata[225], não construída ou não elaborada, aquelas formulações conceituais que se buscam apreender, mediante determinadas impressões ou observações subjetivas, primeiras, subtraídas diretamente de um "*dado*" supostamente claro, inequívoco, seguro, constante e sempre ao alcance de um "*espírito aberto*", espera-se apresentar uma fenomenologia matemática complexa[226], inteiramente, como uma doutrina fácil, interessante para o aprendiz e até mesmo divertida. Mas, de fato, na aprendizagem do Conhecimento Matemático é insuficiente apresentar algumas de suas concepções de um modo fácil, interessante ou divertido. E, mesmo que isso fosse possível para algumas destas concepções, a facilidade ou a diversão de um ensino de Matemática dependeriam, em grande medida, da intervenção do próprio aprendiz neste processo.

Queremos crer que o pensamento científico deva constituir-se como um pensamento psicologicamente formador, reformador das intuições e das imagens primeiras. Deveremos, então, objetivar inteiramente a construção de uma fenomenologia matemática complexa, sobrepondo-se ao objeto circunscrito em um empirismo imediato, à experiência primeira, um objeto delineado em um "*racionalismo*" prospector, uma experiência definida. Assim, a objetivação de um objeto imediato, objetivado diretamente a partir de uma experiência primeira, suplantará as atribuições predicativas apressadas ou contraditórias, submetendo-as a uma consubstanciação mediante a instituição de uma realidade conceitual geradora. "*Mas eis que o pensamento abstrato e matemático prolonga a técnica. Eis que o pensamento científico reforma o pensamento fenomenológico. A ciência contemporânea é*

[225] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 259 — "Um conhecimento objetivo imediato, pelo fato de ser qualitativo, já é falseado. Traz um erro a ser retificado. Esse conhecimento marca fatalmente o objeto com impressões subjetivas, que precisam ser expurgadas; o conhecimento objetivo precisa ser psicanalisado. Um conhecimento imediato é, por princípio, subjetivo. Ao considerar a realidade como um bem, ele oferece certezas prematuras que, em vez de ajudar, entravam o conhecimento objetivo. Tal é a conclusão filosófica que pensamos poder tirar dos capítulos anteriores."

[226] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 293-4 — "A nosso ver, é preciso aceitar, para a epistemologia, o seguinte postulado: o objeto não pode ser designado como um "objetivo" imediato; em outros termos, a marcha para o objeto não é inicialmente objetiva. É preciso, pois, aceitar uma verdadeira ruptura entre o conhecimento sensível e o conhecimento científico. Achamos ter demonstrado, ao longo de nossas críticas, que as tendências normais do conhecimento sensível, cheias como estão de pragmatismo e de realismo imediatos, só determinam um falso ponto de partida, uma direção errônea."

cada vez mais uma reflexão sobre a reflexão. Para mostrar o caráter revolucionário dessa complexidade, pode-se retomar todos os temas da evolução biológica, examinando-os apenas do ponto de vista das relações do interno para o externo; ficará evidente que, à medida que se processa a evolução — como tão bem o mostrou Bergson —, o reflexo imediato e local se complica aos poucos, estende-se no espaço, suspende-se no tempo. O ser vivo aperfeiçoa-se na medida em que pode ligar seu ***ponto de vista****, fato de um instante e de um centro, a durações e a espaços maiores. O homem é homem porque seu comportamento objetivo não é imediato nem local. Prevenir-se é a primeira forma de previsão científica. Mas, até a ciência contemporânea, tratava-se de prever o* ***longe*** *em função do* ***perto****, a sensação precisa em função da sensação grosseira; o pensamento objetivo se desenvolvia assim mesmo em contato com o mundo das sensações. Ora, parece que, com o século XX, começa um pensamento científico* ***contra*** *as sensações, e que se deva construir uma teoria do objetivo* ***contra*** *o objeto. Outrora, a reflexão resistia ao primeiro reflexo. O pensamento científico moderno exige que se resista à primeira reflexão*" [BACHELARD(1938), p. 307].

Pretende-se, assim, evitar a generalização fácil[227] daquelas concepções desenvolvidas em outros campos operacionais, alienígenas à Matemática, generalização esta que é determinada pela não limitação da pertinência dessas mesmas concepções ao seu próprio campo referencial originário. Se assim não fosse, poderíamos cair num hábito que tomaria uma dada concepção matemática como tacitamente advinda de uma outra realidade conceitual, induzido-nos a tratá-la, em qualquer medida que nos fosse possível, como derivada desta mesma realidade conceitual *alienígena*, o que acabaria por afetar a sua apreensão e a sua operacionalização enquanto uma noção de base. Com efeito, a importância fundamental de uma experiência de aprendizagem escolar está, exatamente, em não permitir uma generalização fácil daquelas concepções matemáticas que se buscam apreender mediante uma incursão primeira em dados campos que não sejam campos

[227] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 69 — "Nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do *geral*, que dominou de Aristóteles a Bacon, inclusive, e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do saber. [...] Vamos procurar mostrar que a ciência do geral sempre é uma suspensão da experiência, um fracasso do empirismo inventivo. [...] Há de fato um perigoso prazer intelectual na generalização apressada e fácil. A psicanálise do conhecimento objetivo deve examinar com cuidado todas as seduções da *facilidade*."

decididamente matemáticos, isto é, campos cuja totalidade de suas noções, desde as noções de base, não sejam noções decididamente matemáticas.

De fato, a instituição social de uma concepção matemática, orientada segundo um sistema conceitual, exige um confronto conceitual que se constitua a partir de uma instância discursiva, na qual se possa eleger uma teoria como um instrumento de medida. Essa teoria, alicerçada em uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, deverá ser capaz de afastar, por exemplo, as insuficiências daquelas elaborações conceituais intuitivas e pessoais, ensejadas no imediatismo de uma experiência primeira, e que buscam por uma generalização fácil, retificando ou delimitando aquelas formulações conceituais inspiradas por essas mesmas experiências e, eventualmente, não ratificadas. Queremos crer que a condição fundamental que se impõem em uma aprendizagem científica, para evitar-se uma generalização fácil, seja a de que o sujeito desta aprendizagem deva construir cada uma de suas formulações, tendo como perspectiva a necessidade de uma verificação, uma verificação que possa assegurar-lhe a consistência de sua apreensão conceitual. Não nos parece possível, sequer, reconhecer uma "*verdade*" que não faça parte de um sistema conceitual. Não nos parece admissível a instituição social de uma experiência que prescinda de um método de experimentação. Deste modo, nenhuma formulação conceitual que seja anunciada sem uma perspectiva de verificação poderá ser legitimada e instituída socialmente. E, assim, a necessidade desta verificação levará o aprendiz a inserir cada uma de suas concepções conceituais em uma síntese racional consistente.

Lembrando-nos, por fim, de que em um confronto "teoria *versus* prática" estamos concebendo uma teoria como o aspecto constitutivo, ideal e indicador de uma realidade material, tomando-a como uma disposição interpretativa necessária que, por meio de uma estrutura de interpretação ou de um modelo, estabelece, basicamente, a natureza de um dado subsistema material, e que estamos concebendo uma prática como o aspecto ativo e destinador de uma dada realidade material, tomando-a como uma disposição operacional efetiva que, por meio de uma *realização*, estabelece, obrigatoriamente, uma condição possível para um dado subsistema material, podemos dizer que as intuições ensejadas em uma experiência primeira, imediata e presumível, somente deverão ser tomadas como um dado primário e provisório, para o qual se exigirá um inventário e uma classificação à luz do próprio sistema conceitual gerador do subsistema material mantenedor dessa mesma experiência primeira.

5. A Apreensão Matemática como um Produto de uma Experiência Definida

Chegamos, assim, ao ponto de desfechar um ataque explicito em defesa da tese principal deste trabalho. Este ataque, que consolidará algumas posições anteriormente conquistadas, fundar-se-á na guarnição de um "*posto avançado*", a saber: o Conhecimento Matemático põe-se como uma realidade conceitual que transcende um *fazer matemático* e uma *linguagem matemática*. Pleitearemos, então, a partir da consolidação deste "*posto avançado*", a instituição da tese principal de nosso trabalho — *a apreensão das formulações matemáticas assenta-se como um produto de uma experiência definida* —, convidando "*os espíritos à convergência*", mediante a enunciação e a objetivação de uma experiência possível, mediante a enunciação e a verificação de uma doutrina que toma a forma de um projeto.

Diferentemente de uma realidade psicológica particular, que se apresenta vinculada a um estado psicológico de algum indivíduo ou ente humano, e cuja manifestação se desvanece em seu próprio devir, estamos concebendo o Conhecimento Matemático como uma realidade conceitual, como um sistema conceitual cujos objetos são dispostos e correlacionados em uma totalidade discursiva, que se apresenta vinculada a um universo de referência, tomado a partir da realidade psicológica[228] humana engendrada histórica e culturalmente. Nesse universo de referência, concebido como um todo indiviso e fluente, no qual se admite "*que esse fluxo, em certo sentido, é anterior ao das "coisas" que podem ser vistas formando-se e dissolvendo-se nesse fluxo*" [BOHM(1980), p. 31], emerge o Conhecimento Matemático como uma realidade conceitual que se institui culturalmente, que resiste historicamente, e cujos objetos põem-se como contingências que persistem

[228] Cf. part. BOHM(1980), p. 275-6 — "Em relação à mente, também podemos ver que é necessário prosseguir em direção a uma base mais inclusiva. Assim, como já vimos, o conteúdo explícito facilmente acessível da consciência está incluído num *background* implícito (ou implicado) muito maior. Este, por sua vez, evidentemente tem de estar contido num *background* ainda maior, que pode incluir não somente processos neurofisiológicos em níveis dos quais não somos, em geral, conscientes, mas também um *background* ainda maior de profundidades desconhecidas (e, de fato, em última instância, incognoscíveis) em sua natureza interior, que pode ser análogo ao "mar" de energia que preenche o espaço "vazio" sensorialmente percebido."

circunstancialmente na fluência de seu próprio campo operacional, um campo referencial concebido como um espaço de representação, como um espaço de configuração sustentado em um conjunto de "*postulados*", em um conjunto de concepções postuladas como primordiais.

Para considerar a noção de realidade conceitual, assentada como um tipo de ordem que opera em seu próprio campo de ordem, seguimos as considerações de David BOHM, em sua obra intitulada "*A Totalidade e a Ordem Implicada— uma nova percepção da realidade*", na qual aquela noção é tratada com muito mais propriedade e com muito maior aprofundamento. Contudo, podemos dizer que BOHM(1980) nos lembra de que, se admitirmos que o pensamento é uma "*atividade real, que precisa estar embasada numa totalidade mais ampla de movimento e ação reais, que se sobrepõe ao pensamento e o inclui*" [BOHM(1980), p. 89], "*em nenhum estágio podemos dizer propriamente que o* ***processo global*** *do pensamento começa ou termina. Em vez disso, ele deve ser visto como uma totalidade una e ininterrupta de movimento, não pertencendo a qualquer pessoa, lugar, tempo ou grupo de pessoas em particular*" [BOHM(1980), p. 90]. Assim, enquanto nos mantivermos cônscios de que fazemos parte do movimento ou do processo efetivo do Conhecimento, evitando que caiamos num hábito de tratar "*algo que se origina em nosso próprio pensamento como se fosse uma realidade que se originasse independentemente desse pensamento*" [BOHM(1980), p. 97], permaneceremos cientes de que a "*efetividade do conhecimento é um processo vivo cuja ocorrência é* ***exatamente agora*** *(p. ex., nesta sala)*" [BOHM(1980), p. 97], ou seja, que o processo efetivo do Conhecimento "*é uma realidade autêntica para todos nós, uma realidade que podemos observar e à qual podemos dedicar nossa atenção*" [BOHM(1980), p. 97]. Nessa medida, e por conseguinte, BOHM(1980, p. 97) nos apresenta uma questão fundamental: " "*Podemos estar cientes da realidade sempre mutável e fluente desse processo efetivo do conhecimento?" Se podemos pensar a partir dessa percepção atenta, não confundiremos o que se origina no pensamento com o que tem origem na realidade que é independente do pensamento. E assim, a arte de pensar com a totalidade como seu conteúdo pode desenvolver-se de maneira tal que fique livre da confusão inerente àquelas formas de pensamento que tentam definir, de uma vez por todas, "o que é o todo da realidade", e que, portanto, nos levam a* *confundir o conteúdo de um tal pensamento com a ordem global de uma realidade total que seria independente do pensamento*".

Assim, determinado a partir da instituição de uma rede de concepções conceituais, o Conhecimento Matemático institui-se como uma instância conceitual adequada para a preparação do domínio ou campo de definição, em que serão produzidas as definições, do domínio ou campo de operação, em que serão determinadas as operações, relativamente às concepções "matemáticas", digamos assim, que se pretenderiam implementar em alguma atividade matemática. A necessidade e a imperiosidade das concepções matemáticas, engendradas a partir de uma atividade matemática, em um dado e específico campo referencial, condicionam e submetem as posturas ou os procedimentos mentais, peculiares à própria constituição destas concepções, a determinarem-se através de três tipos de raciocínios, responsáveis pela engendração, pela consubstanciação e pela legitimação das concepções matemáticas, quando da concepção ou da apreensão das correspondentes formulações matemáticas. Tais raciocínios[229], isto é, os raciocínios por abdução, por recorrência e por dedução, respectivamente, determinar-se-ão como os procedimentos cognitivos, por excelência, que nos permitirão apreender qualquer concepção matemática, mediante um adequado e específico confronto conceitual. E é exatamente em um confronto conceitual que se colocará a imperiosidade de uma inserção conceitual.

A imposição de um confronto conceitual, por ocasião de uma apreensão conceitual, põe-se, de modo inalienável, na medida em que estamos concebendo a apreensão das formulações matemáticas como uma apropriação mental das concepções matemáticas correspondentes. Para tanto, exige-se uma adequada inserção conceitual, segundo a qual se possa aproximar uma formulação matemática em apreensão de outras formulações matemáticas anterior e distintamente determinadas. Como já vimos anteriormente, a exigência de uma adequada inserção conceitual coloca-se como fundamental para que nos seja dado abranger o processo gerador de uma concepção matemática, no seu próprio campo de constituição, e indicar, com isso, alguma especificidade em sua determinação. Lembremo-nos, também, de que a Seção 4, do Capítulo II, foi desenvolvida com o fim de instituir a concepção ou a apreensão do

[229] Cf. part. ORLANDI(1996), Cap. II, Seção 3 — Sobre a Natureza do Raciocínio Matemático.

Conhecimento Matemático como uma atividade ou como um movimento engendradores dos próprios objetos matemáticos, concebidos, então, como uma estrutura operacional fundamental constituída a partir de uma rede de concepções conceituais anteriormente determinada. Essa atividade, ensejada discursivamente e determinada segundo a instituição de três dimensões complementares, no âmbito de um campo referencial, assenta-se como um método de investigação, como um método de constituição dos próprios objetos matemáticos, mediante o qual se comprovaria uma interferência essencial entre o modo de conceber e os objetos concebidos, postos, então, como um estado ou como uma condição determinados a partir dessa mesma atividade discursiva, como um momento de uma composição de concepções determinadas previamente, como um resultado de um processo de produção.

Por conseguinte, embora estejamos admitindo que o acesso ao Conhecimento Matemático demande uma atividade discursiva, mediante a qual desencadearemos um processo de produção dos objetos matemáticos, devemos reiterar que o Conhecimento Matemático transcende um *fazer matemático* e uma *linguagem matemática*.

Um *fazer matemático*, desenvolvido nos moldes de uma atividade matemática ensejada nos âmbitos da Matemática Pura, da Matemática Aplicada e, também, da Matemática Informal, pressupõe um conhecimento matemático já posto previamente, e admite, por conseguinte, dispor de suas concepções em qualquer um dos âmbitos dessas aplicações. Devemos nos lembrar de que, para caracterizar uma atividade matemática, é suficiente caracterizarmos uma das possíveis aplicações da Matemática. São os diversos âmbitos de aplicação do Conhecimento Matemático que nos permitirão distinguir as diversas atividades matemáticas, exatamente como foi sugerido no Capítulo I. Nesse capítulo, queremos crer que conseguimos mostrar que o Conhecimento Matemático não se determina exatamente em uma atividade matemática, não sendo possível, portanto, reduzi-lo às suas aplicações. Nessa medida, sempre que nos dispusermos a aplicar algumas noções matemáticas, num certo campo referencial, estaremos, digamos assim, pressupondo a sua "*existência*" prévia, e, para isso, bastará dispor de um acordo inicial, tácita ou explicitamente. Por exemplo, há um acordo tácito com relação às aplicações da Matemática ao nível da Matemática Informal. Esse acordo inicial não nos permitirá contar outra quantidade senão 5, quando estivermos considerando duas outras contagens anteriores dadas por 2 e 3, qualquer que seja a natureza dos objetos observados. No campo referencial da Matemática Informal, não será possível a qualquer ser humano, mesmo que não se queira, tendo-se contado 2 e 3, contar outra quantidade diferente de 5. Pode-se dizer que o Conhecimento Matemático permaneceria, assim, em uma espécie de estado latente na psicologia humana, aguardando para ser regenerado tão logo assentíssemos em dispor de algumas noções de base. E essas noções de base seriam escolhidas de tal modo para que pudéssemos preservar, quase como uma necessidade, um conjunto de outras noções que se pretenderiam assentar como noções matemáticas.

Com efeito, um *fazer matemático* apelaria, então, e tão-somente, para uma certa região do Conhecimento Matemático, que pudesse ser legitimada por um dado formalismo, desenvolvido a partir de um conjunto de concepções postuladas como primordiais, como, por exemplo, um formalismo da Matemática Informal, mesmo que acordado tacitamente, permanecendo a totalidade dessa realidade conceitual imersa no insondável oceano da psicologia humana. GÖDEL, *apud* NAGEL(1994), nos deu essa percepção quando mostrou que qualquer sistema formal, ou qualquer linguagem matemática, não poderá nos dar a totalidade das formulações matemáticas "*verdadeiras*", sempre que quisermos preservar a Aritmética[230]. Naturalmente, a escolha das noções de base, mediante as quais se erigirá um formalismo apropriado, permanecerá como uma prerrogativa da atividade matemática que se pretenda implementar. Por exemplo, as atividades matemáticas voltadas para as aplicações da Matemática, no âmbito das demais Ciências ou no âmbito da utilidade ordinária, têm como interesse fundamental a elaboração de um modelo matemático que atenda adequadamente às demandas provenientes de uma dada "*situação-problema*", descrita, inicialmente, por um modelo físico. Nessa medida, a escolha daquelas noções de base poderá contar com algumas noções que não sejam noções decididamente matemáticas, ou, até mesmo, com noções que poderiam ser reconhecidas como noções matemáticas, mas que se apresentariam ligeiramente modificadas, mediante a

[230] Cf. part. NAGEL(1998), p. 87 — "A possibilidade de construir uma prova absoluta finitária de consistência para a aritmética não fica excluída pelos resultados de Gödel. Gödel demonstrou que não é possível qualquer prova desta ordem representável dentro da aritmética. Seu argumento não elimina a possibilidade de provas estritamente finitárias que não possam ser representadas dentro da aritmética. Mas ninguém parece ter hoje uma idéia clara de como seria uma prova finitária que *não* fosse passível de formulação dentro da aritmética."

alteração das características de seus próprios predicados, quando da tentativa de se estabelecer alguma correlação isomorfa entre um modelo matemático supostamente conveniente e o modelo físico pretendido. Essa correlação isomorfa reclamada, podemos dizer, tem por finalidade assegurar a legitimidade e a propriedade operacionais do próprio modelo físico pretendido, exatamente a partir do modelo matemático tomado como conveniente. Pode-se dizer, então, que haveria uma "estrutura matemática" incorporada ao modelo físico, com anterioridade, que teria sido atribuída a ele quando da escolha de seus objetos e de suas relações fundamentais.

Lembremo-nos de que, quando se busca um modelo matemático de alguma "*situação física*", o que estamos considerando não é a "*situação física infinitamente complexa*", mas um modelo físico idealizado a partir dela, um sistema conceitual que circunscreva e simplifique um sistema material, que passará a constituir-se e a fundar-se exatamente na instituição desse mesmo sistema conceitual. Desse modo, a partir de um formalismo pertinente a um modelo físico, desenvolvemos um modelo matemático, substituindo "*proposições empíricas por matemáticas*" [KÖRNER(1960), p. 183-4] e estendendo[231], eventualmente, uma teoria matemática de base com a "*introdução de novos conceitos e postulados*" [KÖRNER(1960), p. 184]. "*Assim, por exemplo, para que o sistema de conceitos da geometria euclidiana pura se aplique aos objetos físicos que nós chamamos corpos sólidos ou praticamente rígidos, é preciso acrescentar uma proposição como a seguinte (A. Einstein, "Discurso na Academia das Ciências de Berlim, 27/01/1921". La Géometrie et L'Expérience, p. 6.): "Os corpos sólidos se comportam, relativamente às suas possibilidades de posição, como corpos de três dimensões da geometria euclidiana". Os enunciados da geometria euclidiana nos ensinarão a maneira de ser desses corpos, pelo menos com certo grau de aproximação. Mas a geometria assim completada é uma ciência física*" [AMOROSO COSTA(1981), p. 329].

Intentamos mostrar que nas aplicações da Matemática, fora do âmbito da própria Matemática, sempre haverá o risco da introdução de noções alienígenas à Matemática ou da modificação das próprias noções matemáticas, e, nessa medida, não

---

[231] Cf. part. KÖRNER(1960), p. 184 — "Poderíamos argumentar que, freqüentemente, antes de a matemática pura poder ser aplicada à experiência sensorial, deve ser primeiramente estendida pela introdução de novos conceitos e postulados que rejam seu uso. De acordo com Russell, a matemática pura é estendida à dinâmica racional pela introdução de conceitos tais como "massa", "velocidade" etc. e novos postulados correspondentes."

haverá garantias de que estaremos lidando com noções, tão-só e decididamente, matemáticas, quando estivermos tratando com elas nessas aplicações. Na citação acima, por exemplo, podemos observar, numa certa medida, a liberdade que caracteriza as aplicações da Matemática além de seu próprio âmbito. Espera-se que os objetos físicos tenham um comportamento análogo ao dos objetos geométricos, tomando-se a Geometria Euclidiana como um modelo matemático para um modelo físico presumível. Contudo, espera-se, também, o contrário, que os objetos geométricos tenham um comportamento análogo ao dos objetos físicos, para que desta forma eles possam nos "*ensinar algo*" sobre estes. Pode-se dizer, então, e imediatamente, que nas aplicações da Matemática além de seu próprio âmbito, busca-se por um modelo matemático que "*descreva aceitavelmente*" um modelo físico pretendido. Nessa medida, a escolha de uma teoria matemática não é obrigatória, do mesmo modo como também não o é, no âmbito de uma teoria escolhida, a escolha da totalidade das características de seus objetos ou da totalidade de suas formulações. O que se procura é um isomorfismo entre os seus respectivos sistemas formais, preservando-se exatamente aqueles aspectos que são tomados como fundamentais no modelo físico e abstraindo-se todas aquelas discrepâncias entre esses dois sistemas, de modo a eleger uma estrutura isomorfa correlacionada aos dois modelos.

Por conseguinte, não será no âmbito específico das aplicações da matemática que teremos acesso ao Conhecimento Matemático, não será mediante um *fazer matemático* que teremos a oportunidade de atestar a propriedade e a legitimidade de uma formulação matemática em apreensão. Para corroborar, com ainda mais força, essas afirmações, além do que já foi observado acima, e, para evidenciar a impropriedade de uma apreensão matemática tomada nos moldes de um *fazer matemático*, reconsideremos as peculiaridades das atividades e dos interesses tanto do matemático puro como do matemático aplicado. O matemático puro desenvolve seus estudos especificamente sobre dados sistemas conceituais, reconhecida ou potencialmente matemáticos, com o propósito estrito de desenvolver à própria Matemática, valendo-se de qualquer teoria matemática e desconsiderando quaisquer aplicações "*práticas*" ou quaisquer conotações "*concretas*". Este *fazer matemático* está voltado estritamente para a formulação de novas concepções matemáticas, que são legitimadas, necessariamente, mediante os procedimentos do "*método axiomático*", ou mais propriamente, de acordo com uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada. Em contraste, o matemático aplicado desenvolve seus estudos especificamente sobre dados sistemas materiais, com o propósito estrito de desenvolver as aplicações da Matemática a partir da resolução de algum problema científico, valendo-se, para isso, de qualquer teoria matemática e admitindo dispor de algum tipo de "*raciocínio científico heurístico*", sendo mais receptivo à introdução de aproximações ou de argumentos tomados como plausíveis. Este *fazer matemático* está voltado estritamente para a resolução de problemas científicos, através do uso de métodos ou teoremas matemáticos que possam legitimar seus resultados, ou, na indisponibilidade destes, por meio do uso de testes empíricos ou mediante o valor de predição ou de explicação desses mesmos resultados. Assim, o que põe em causa nestas atividades matemáticas não é a legitimidade ou a propriedade de qualquer formulação matemática, mas, exatamente, a conveniência operacional destas formulações com relação a resolução daquelas indagações que deram origem a essas mesmas atividades.

Por outro lado, e ainda com a intenção de corroborar aquelas afirmações, reconsideraremos a imperiosidade da objetivação das formulações do Conhecimento Matemático, sempre que estivermos interessados na sua apreensão. Estamos insistindo que o Conhecimento Matemático se põe como uma realidade conceitual, vinculada a um universo de referência fundado na realidade psicológica humana engendrada histórica e culturalmente. Admitimos, então, que a natureza especial do Conhecimento Matemático revela-se como um tipo de ordem que opera em seu próprio campo de ordem, impondo-nos a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como derivadas desse mesmo campo de ordem. Por conseqüência, na objetivação das formulações matemáticas, exige-se uma atividade discursiva que imponha a apreensão ou a distinção de qualquer objeto matemático como um produto de alguma experiência idealizada a partir de outros objetos anteriormente determinados e tomados como um substrato empírico adequado. Nessa medida, cada objeto matemático deverá emergir como uma composição predicativa de um conjunto de outros objetos matemáticos previamente distinguidos. Esta seria a condição fundamental que se imporia em uma experiência de aprendizagem matemática, concebida nos moldes de uma experiência definida, para que nos fosse dado assegurar a legitimidade das formulações matemáticas em apreensão, segundo os cânones contemporâneos, isto é, segundo uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada. Em um *fazer* *matemático*, o que se põe em questão não é a objetivação de qualquer formulação matemática, mas a propriedade de sua operacionalização no âmbito dessa mesma atividade. A aceitabilidade das concepções matemáticas colocar-se-á, então, na fecundidade que estas concepções puderem apresentar quando do enfrentamento de determinados problemas, e não na sua objetivação.

Com efeito, é imperioso que preparemos o domínio ou campo de definição antes de definir, o domínio ou o campo de operação antes de operar, ou seja, é imperioso que preparemos as formulações matemáticas que se quererão produzir. Trata-se, assim, de estabelecer as condições de uma experiência de aprendizagem como condições de experimentação, para que se possa exigir uma certa solidariedade entre o método de apreensão e a experiência de aprendizagem, para que se possa produzir o objeto em apreensão mediante uma atividade que se apóie em seu próprio movimento, ou seja, trata-se, portanto, de exigir que uma "*experiência definida*" presida qualquer "*experiência primeira*", em uma dada aprendizagem matemática. Essa experiência definida, idealizada e delineada como uma série de acontecimentos decisivos, a partir de um conjunto de objetos matemáticos previamente constituídos, determinar-se-á como uma experiência construída, como uma experiência de aprendizagem definida, mediante a qual nos seja dado "*verificar*" ou engendrar a apreensão de um objeto matemático como uma "*lei*" ou como um produto inexorável de uma atividade discursiva, em um dado campo referencial. E, assim, poderemos afastar tudo o que houver de gratuito ou de inacabado nas formulações matemáticas devidas às experiências primeiras, àquelas experiências que são tomadas antes e acima de qualquer consideração ou de qualquer crítica, e cuja afirmação dispense qualquer perspectiva de verificação.

Uma *linguagem matemática*, por sua vez, desenvolvida nos moldes de uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, não poderá abarcar a totalidade das formulações matemáticas, sempre que nela pudermos desenvolver a Aritmética, como o atesta GÖDEL, e, por isso, devemos admitir que o Conhecimento Matemático transcenda uma *linguagem matemática*. Não será, pois, por meio de uma linguagem, tomada como "*um desenho abstrato ou um mosaico dotado de determinada estrutura*" [NAGEL(1998), p. 32], sem qualquer significado, que poderemos instituir e legitimar um conjunto de concepções pretensamente matemáticas. "*Se se inventasse um jogo para jogar em papel* *com símbolos sem sentido de acordo com regras arbitrárias certamente que ninguém pensaria que se tratava de uma disciplina matemática*" [KNEALE(1962), p. 459]. E, com efeito, no Capítulo II, tivemos a oportunidade de mostrar que a tentativa de reduzir um sistema conceitual a uma linguagem pertinente, relegando para uma metalinguagem quaisquer denotações conceituais eventualmente correlacionas a essa mesma linguagem, nos levaria a uma desconfortável impropriedade: teríamos de admitir, a um só tempo, que os símbolos de uma linguagem não deveriam manifestar qualquer denotação semântica, para que a metalinguagem correspondente as pudesse declarar, e que eles deveriam manifestar alguma denotação semântica, para que na metalinguagem fosse possível determiná-las.

Portanto, podemos dizer que uma *linguagem matemática* constituir-se-á apenas como um conjunto de símbolos a partir do qual nos será possível dar forma à manifestação empírica de um sistema conceitual, dispondo-se, para tanto, e tão-somente, de um conjunto de formulações conceituais tomadas como pertinentes e próprias para tornar acessível um conjunto correspondente de concepções conceituais. Queremos salientar que não será por intermédio de uma atividade discursiva, determinada unicamente sobre uma linguagem matemática e a ela circunscrita, que teremos acesso ao Conhecimento Matemático, porque, como já observamos, para apreendê-lo ou para desenvolvê-lo, deveremos nos centrar exatamente na apreensão ou na concepção daqueles objetos matemáticos que possam ser distinguidos em um dado campo referencial, a partir de suas próprias concepções conceituais. Conseqüentemente, não nos será possível reduzir a Matemática a um conjunto de formulações pertinentes, por força da exigência que nos obriga a eleger um campo referencial sempre que quisermos conceber ou aprender um dado objeto matemático. Determinada a escolha de um campo referencial, por intermédio de um conjunto de concepções postuladas como primordiais e de uma lógica de base, o conjunto das formulações matemáticas deriváveis desse sistema permanecerá como uma necessidade alheia a qualquer arbítrio. Nesse campo referencial, as formulações matemáticas, desenvolvidas em uma linguagem apropriada e pertinente aos objetos matemáticos em apreensão, permanecerão como um pálido reflexo da totalidade de uma realidade conceitual imersa no insondável oceano da psicologia humana.

Posto que o Conhecimento Matemático põe-se como uma realidade conceitual que transcende um *fazer matemático* e uma linguagem matemática; posto que é somente por intermédio da inserção conceitual de uma noção em apreensão que nos será dado abranger o processo gerador dessa mesma noção, no seu próprio campo de constituição, e indicar, com isso, alguma especificidade na sua determinação; posto que a ordem e a natureza das experiências que determinam a apreensão das formulações matemáticas vêm marcadas pela engendração dos próprios objetos matemáticos, mediante a instituição de três dimensões complementares; posto que a apreensão das formulações matemáticas deverá ser tomada como uma apropriação mental das concepções matemáticas correspondentes; então, deveremos estar dispostos a admitir que *a apreensão das formulações matemáticas deverá assentar-se como um produto de uma experiência definida*, isto é, que a apreensão matemática demandará a constituição de uma *experiência definida* que deverá presidir qualquer *experiência primeira* ensejada no âmbito de algum empirismo *imediato*. E, com efeito, se não é nos âmbitos específicos de um *fazer matemático* e de uma linguagem matemática que teremos acesso ao Conhecimento Matemático, se é imperioso que ensejemos uma inserção conceitual, sempre que quisermos atestar a propriedade de uma formulação conceitual, em um dado confronto conceitual, se é insuficiente o imediatismo de uma aprendizagem matemática derivada de uma experiência primeira, e se é necessário ligar a uma formulação matemática a sua correspondente concepção matemática, para efetivar a sua adequada apreensão, restar-nos-á, então, e tão-somente, engendrar uma atividade discursiva que seja específica à aprendizagem matemática, uma atividade discursiva que lhe seja reconhecidamente própria, a qual será alcançada, necessariamente, quando a pudermos determinar como um produto de uma *experiência definida*, isto é, como um produto de uma experiência idealizada a partir de um conjunto de formulações matemáticas anteriormente determinadas e tomadas como um substrato empírico adequado.

Por fim, e novamente, queremos crer que o "*golpe final*" na apreensão dos objetos matemáticos somente será dado quando pudermos fazer emergir os predicados básicos desses objetos como um produto de suas próprias relações funcionais, no âmbito de um dado campo referencial e mediante uma experiência definida. O objeto matemático não poderá mais ser tomado, então, como um objeto isolado, como um objeto autônomo e independente, mas deverá ser tomado como um movimento integrado em uma totalidade, como um movimento que se manifesta a si próprio como uma estrutura operacional fundamental, no âmbito de um determinado campo operacional. Assim, as peculiaridades do objeto matemático, deste modo concebido, não poderão, portanto, ser determinadas de modo independente do processo de sua própria concepção e além de sua própria realidade conceitual geradora.

6. Considerações Finais

Nesta última seção, gostaríamos de fazer algumas considerações acerca da implementação de uma possível ação pedagógica que tivesse como interesse específico permitir o acesso ao Conhecimento Matemático, concebido, então, como uma realidade conceitual, como um sistema conceitual subjacente à realidade psicológica humana engendrada histórica e culturalmente. Inicialmente, negaremos qualquer correlação possível entre a afirmação de nossa tese principal e alguns "*estilos de ensinar matemática*". Posteriormente, delinearemos algumas implicações, advindas desta tese, acerca de uma experiência de aprendizagem matemática possivelmente circunstanciada no âmbito de uma ação pedagógica. E, por fim, retomaremos o problema de investigação deste trabalho, intentando respondê-lo.

6.1. A Noção de Experiência Definida e os Estilos de Ensinar Matemática

Decididamente, devemos dizer que uma atividade matemática voltada para uma experiência de aprendizagem matemática, ensejada segundo uma *experiência definida*, não se constituirá nos moldes das atividades desenvolvidas por um *matemático puro* ou por um *matemático aplicado*, não se constituindo, portanto, nos moldes de um ensino meramente formal[232], a exemplo dos estilos "*formalistas pedagógicos*" [MIGUEL(1995)], quer seja o "*Clássico*", quer seja o "*Moderno*" [FIORENTINI(1995)], ou nos moldes de um

[232] Cf. part. DAVIS(1993), p. 184 — "When teaching goes on under the banner of conventional philosophies of mathematics, it often becomes a formalist approach to mathematical education: do this, do that, write this here and not there, punch this button, call in that program, apply this definition and that theorem. It stresses operations. It does not balance operations with an understanding of the nature or the consequences of the operations. It stresses syntactics at the expense of semantics, form at the expense of meaning."

ensino voltado meramente para as aplicações da Matemática, a exemplo do estilo "*Sociocultural*" [FIORENTINI(1995)].

Rapidamente, o estilo de ensino matemático *formalista clássico*, que tem por finalidade o desenvolvimento da *dimensão lógica* da Matemática, pode ser caracterizado por reproduzir as etapas descritivas do "*método axiomático*"[233], as quais podem ser apresentadas como *conceitos primitivos*, *definições*, *axiomas*, *teoremas* e *demonstrações*, e, a partir daí, explorar alguns *exercícios de aplicação*. O estilo de ensino matemático *formalista moderno*, que tem por finalidade o desenvolvimento da *dimensão abstrata* da Matemática, pode ser caracterizado pelo destaque dado aos *conceitos unificadores*, pela ênfase dada aos *aspectos estruturais* (conjuntos, operações, propriedades etc.) e pelas *justificativas baseadas nas propriedades estruturais*, com ênfase na *linguagem* e no *rigor* [FIORENTINI(1995)].

Há uma diferença *monstruosa*, digamos assim, entre conceber um ensino de Matemática que reproduza cada uma das etapas descritivas do "*método axiomático*", através de uma exposição ou de uma conferência didáticas, e aquele que busca fundar cada uma das concepções matemáticas pretendidas sobre esse mesmo método, ou mais propriamente, sobre uma linguagem com uma estrutura exatamente especificada, a partir de uma experiência de aprendizagem definida. No primeiro caso, estamos desenvolvendo um adestramento lingüístico tão-somente, tendo-se como fim último uma linguagem matemática — o que, também, será legítimo, se esse for o nosso interesse —, segundo uma memorização e uma reprodução precisa de raciocínios e de procedimentos[234]; no segundo caso, estamos nos valendo de uma linguagem adequada para assegurarmos a propriedade de uma concepção matemática almejada, de tal modo que essa linguagem matemática será tomada, então, como um pano de fundo sobre o qual se projetarão as concepções

---

[233] Cf. part. Da COSTA(1997), p. 71 — "Para se estudar uma teoria pelo método axiomático, procede-se assim: escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se, dessa maneira, uma axiomática material da teoria dada; deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. Procuram-se, então, as conseqüências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes. Estrutura-se, assim, o que se denomina uma *axiomática abstrata*."

[234] Cf. part. MIGUEL(1993), p. 165 — "É legítimo, portanto, concluir que o método de ensinar matemática que constitui o paradigma do formalismo pedagógico clássico enfatiza a exposição, a imitação, a repetição e a memorização."

matemáticas intentadas. Neste caso, busca-se pela instituição recíproca e flexível da relação professor-aluno: "*A nosso ver, o princípio* ***pedagógico*** *fundamental da atitude objetiva é:* ***Quem é ensinado deve ensinar****. Quem recebe instrução e não a transmite terá um espírito formado sem dinamismo nem autocrítica*" [BACHELARD(1938), p. 300]. E, de fato, "*viver e reviver o momento de objetividade, estar sempre no* ***estado nascente*** *de objetivação, é coisa que exige um esforço constante de dessubjetivação. Alegria suprema de oscilar entre a extroversão e a introversão, na mente liberada psicanaliticamente das duas escravidões — a do sujeito e a do objeto! Uma descoberta objetiva é logo uma retificação subjetiva*" [BACHELARD(1938), p. 305].

Por sua vez, o estilo de ensino matemático *sociocultural*, que tem por finalidade o desenvolvimento da *dimensão sociocultural* da Matemática, pode ser caracterizado pela ênfase dada à *pesquisa*, à *identificação*, ao *estudo* e à *resolução de problemas* que dizem respeito à *realidade sociocultural dos alunos*. Nessa medida, segundo FIORENTINI(1995, p. 26), "*o* ***conhecimento matemático*** *deixa de ser visto, como faziam as tendências formalistas, como um conhecimento pronto, acabado e isolado do mundo. Ao contrário, passa a ser visto como um saber prático, relativo, não-universal e dinâmico, produzido histórico-culturalmente nas diferentes práticas sociais, podendo aparecer sistematizado ou não*".

Com efeito, há dois pontos fundamentais[235] a considerar. O primeiro ponto que devemos destacar é que as noções de rigor e de formalização não são privilégio de nenhuma atividade matemática especificamente, quer seja "*pura*", quer seja "*aplicada*". Cada uma das atividades matemáticas ostenta um rigor e uma formalização próprios, e não nos parece adequado estabelecer qualquer grau de comparação — o que seria um rigor mais rigoroso ou uma formalização mais formal? — ou simplesmente ignorar o rigor e a formalização subjacentes às aplicações da Matemática ao nível da utilidade ordinária[236], por

---

[235] Cf. part. FIORENTINI(1995), p. 2 — "Há, entretanto, diferentes modos de conceber e ver a questão da qualidade do ensino da Matemática. Alguns podem relacioná-la ao nível de rigor e de formalização dos conceitos matemáticos trabalhados na escola. [...] Há ainda aqueles que a relacionam ao uso de uma matemática ligada ao cotidiano ou à realidade do aluno. Ou aqueles que colocam a Educação Matemática a serviço da formação da cidadania."

[236] Cf. part. FIORENTINI(1995), p. 24 — "[...] as crianças que vivem situações de compra-venda (...) *organizam sua atividade de resolução de problemas em situações extra-classe de acordo com os mesmos princípios lógico-matemáticos em que precisam apoiar sua aprendizagem de matemática na sala de aula* ...."

exemplo. O segundo ponto a destacar é aquele que nos lembra de que não há um ensino ou uma educação sem uma "*dimensão teleológica*". Sempre que quisermos, é possível voltar um *ensino de matemática*, digamos assim, para as aplicações da Matemática ao cotidiano, para a formação da cidadania ou para a formação de um matemático puro, por exemplo, mas não devemos, contudo, pressupor ou imaginar que as concepções matemáticas sejam uma espécie de *massa disforme* que possa ser moldada em cada uma destas atividades e, desta forma, assegurar-nos algum acesso ao Conhecimento Matemático, concebido, então, como uma realidade conceitual. Que o Conhecimento Matemático seja um dos instrumentos para a formação da cidadania, não há qualquer dúvida. No entanto, não é demasiado reiterar que não estaremos *ensinando matemática* quando estivermos trabalhando com algumas noções matemáticas ao nível de suas aplicações. De fato, a conveniência e a propriedade da apreensão das concepções matemáticas deverá sujeitar-se à determinação de uma instância epistemológica correspondente ao Conhecimento Matemático, a partir da instituição dos pressupostos fundamentais e da natureza espacial de sua constituição, uma vez que, se assim não fosse, poderíamos cair num hábito de tratar uma dada concepção matemática como advinda tácita ou propriamente de uma outra realidade conceitual[237], o que acabaria por afetar a sua apreensão e a sua operacionalização enquanto uma noção de base. Por isso, a imposição de uma experiência de aprendizagem definida.

6.2. A Noção de Experiência Definida e a Aprendizagem Matemática

Tratar-se-á, decididamente, na ocasião da implementação de alguma ação pedagógica, de erigirmos uma rede de concepções conceituais que virá subordinada a alguma experiência possível, mediante a qual se erigirá uma experiência de aprendizagem definida. Nessa experiência definida, desenvolvida como uma atividade discursiva,

---

[237] Cf. part. RESTIVO, Sal. The social life of mathematics. In: RESTIVO, Sal et al. (Ed.). **Math worlds**: philosophical and social studies of mathematics education. Albany(E.U.A.): State University of New York, 1993. 292p. p. 247-278.; p. 257 — "Some mathematicians and philosophers of mathematics have recognized that abstraction has something to do with iteration. They have expressed this recognition in such ideas as "second-generation abstract models", and "algebras constructed upon algebras". An important instance of invoking the iteration principle is Richard Dedekind's (1956: 529) demand that "arithmetic shall be developed out of itself." One could even claim that mathematics in general is an iterative activity."

qualquer formulação matemática em apreensão deverá assentar-se como um produto de uma construção formal ensejada a partir de outras formulações matemáticas tomadas como um substrato empírico adequado.

Na implementação de uma experiência de aprendizagem definida, por exemplo, poder-se-ia considerar, preliminarmente, uma espécie de resgate do viés sociocultural das formulações matemáticas em apreensão, assinalando-o, eventualmente, pela origem e pelo curso do desenvolvimento destas formulações. Esse viés sociocultural poderia ser delineado, então, pela recuperação das motivações e das circunstâncias históricas[238] que culminaram na formulação "*atual*" das concepções matemáticas correspondentes, destacando-se os envolvimentos pessoais dos que se dispuseram a enfrentá-las, as primeiras formulações, os desenvolvimentos paralelos em outros campos, o aprimoramento de tais concepções ou a sua evolução ao longo do tempo, tendo-se por preocupação e necessidade, continuadamente, alguma concepção declarada de rigor, o que nos daria a oportunidade de investigar a propriedade de sua construção formal[239]. Correlativamente, poder-se-ia evidenciar a pertinência e a necessidade de que essa construção formal fosse tomada como um processo cuja efetividade determinar-se-ia num "*exatamente agora*"[240], como um processo cuja realidade seria sustentada em seu próprio movimento constitutivo e do qual tomaríamos parte, decisivamente, quando nos dispuséssemos a nele intervir, atestando ou reconstituindo, ratificando ou retificando, desde os pressupostos fundamentais, a totalidade da construção[241]. E assim, estaríamos em

---

[238] Cf. part. BACHELARD(1938), p. 303 — "Da mesma forma, os professores substituem as descobertas por aulas. Contra essa indolência intelectual que nos retira aos poucos o senso da novidade espiritual, o ensino das descobertas ao longo da história científica pode ser de grande ajuda. Para ensinar o aluno a inventar, é bom mostrar-lhe que ele pode descobrir."

[239] Cf. part. MIGUEL(1993), p. 180 — "[...] a construção do conhecimento não é nem uma construção estritamente individual e nem uma construção social que se reduza apenas ao âmbito das relações interpessoais que ocorrem na sala de aula. Ela é um diálogo cujos interlocutores são também os produtores históricos daquele conhecimento."

[240] Cf. part. BOHM(1980), p. 97 — "[...] a efetividade do conhecimento é um processo vivo cuja ocorrência é *exatamente agora* (p. ex., nesta sala). Num tal processo efetivo, não estamos apenas falando sobre o movimento do conhecimento, como se o olhássemos de fora. Estamos na verdade tomando parte desse movimento, conscientes de que é isso de fato que está acontecendo. Ou seja, é uma realidade autêntica para todos nós, uma realidade que podemos observar e à qual podemos dedicar nossa atenção."

[241] Cf. part. VYGOTSKY(1991), p. 99 — "[...] *o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam.*"

condições de expor e discutir um "*método de objetivação*"[242] social das concepções matemáticas em apreensão, efetivando e assegurando a adequada instituição destas mesmas concepções.

Conseqüentemente, poder-se-ia dizer que a simples aceitação de uma dada formulação matemática, que viesse divinizada pela força de um formalismo adequado ou pela força de sua aplicação em um contexto que nos fosse familiar, ou até mesmo pela veemência de uma afirmação "*histórica*" que pudesse "*dar sentido*" a essa mesma formulação, impediria a sua adequada apreensão, uma vez que a concepção matemática correspondente permaneceria apenas como uma presunção. Enquanto essa formulação matemática não for *ligada* a algum objeto matemático, pressuposto a partir de sua própria concepção conceitual, ela persistirá tão-somente como um sinal lingüístico arbitrário. "*Ora, como o conhecimento objetivo nunca está terminado, como **objetos** novos vêm continuamente trazer assuntos a discutir no diálogo do espírito e das coisas, todo ensino científico, se for vivo, estará sujeito ao fluxo e refluxo do empirismo e do racionalismo. De fato, a história do conhecimento científico é uma alternativa sempre renovada de empirismo e de racionalismo. Essa alternativa é mais do que um fato. É necessidade de dinamismo psicológico. Por isso, toda filosofia que limite a cultura ao Realismo ou ao Nominalismo representa os mais terríveis obstáculos para a evolução do pensamento científico*" [BACHELARD(1938), p. 302].

Por outro lado, queremos crer que a reconstrução formal de uma formulação matemática em apreensão, mediante o desenvolvimento de uma experiência de aprendizagem definida, assenta-se, basicamente, como um expediente pedagógico que nos permitirá ensejar a objetivação da concepção matemática correspondente a essa mesma formulação, objetivação esta determinada, então, como um "*processo intrapessoal*" [VYGOTSKY(1991)], ou seja, essa reconstrução formal nos permitirá incentivar a

[242] Cf. part. BACHELARD(1934), p. 93, 95 — "Aliás, é na atividade científica que talvez se veja com maior clareza o duplo sentido do ideal de objetividade, o valor ao mesmo tempo real e social da objetivação."; p. 96 — "A objetividade não se pode desligar das características sociais da prova. Não se pode chegar à objetividade a não ser expondo de maneira discursiva e detalhada um método de objetivação."; p. 97, 159, 160, 173 e 174.

constituição de uma apreensão conceitual, em alguma medida, internamente[243], mediante um conjunto de outras formulações matemáticas já objetivadas previamente. Com efeito, a *colagem* de uma formulação matemática em apreensão, em um conjunto de outras formulações matemáticas anteriormente distinguidas, somente poderá ser desencadeada, exatamente, a partir de um "*processo interpessoal*" ou a partir de "*uma operação que inicialmente representa alguma atividade externa*" [VYGOTSKY(1991), p. 64]. Por exemplo, poder-se-ia dizer que o primeiro passo na direção da apreensão de um novo objeto matemático seria aquele que nos remeteria para a sua "*contemplação*" ou para a sua "*observação*", num movimento que nos levasse para fora de nós mesmo. Por isso, destacamos o caráter fundamental de uma experiência de aprendizagem definida, no desencadeamento do processo de apreensão das formulações matemáticas, enquanto um "*processo interpessoal*" que trouxesse em si mesmo a exigência de ser "*transformado num processo intrapessoal*" [VYGOTSKY(1991), p. 64]. Pode-se dizer, ademais, que a apreensão de um objeto matemático não nos será dada de um modo definitivo, já que o estamos assumindo como um produto de uma atividade discursiva, como um produto de uma atividade estruturada que se apóia em seu próprio movimento, constituída no âmbito de um campo referencial e desenvolvida a partir de um conjunto de noções de base.

Por fim, e ilustrativamente, gostaríamos de afirmar, decididamente, que a construção formal de uma dada formulação matemática em apreensão, a partir do

[243] Para ilustrar uma espécie de contraponto entre objetividade e subjetividade, implicado na construção formal de uma formulação matemática, gostaríamos de sugerir uma ilustração conceitual assinalada pela noção de "*internalização*", desenvolvida por VYGOTSKY(1991), a qual corresponderia à "*reconstrução interna de uma operação externa*", e cujo processo pode ser exemplificado a partir do desenvolvimento do gesto de apontar na criança. Rapidamente, para VYGOTSKY, no seu estágio inicial, o gesto de apontar é representado pelo movimento de um dos braços da criança, que permaneceria parado no ar, com um movimento correspondente dos dedos de sua mão, os quais assinalariam uma tentativa, por parte da criança, de apanhar algum objeto que estivesse além de seu alcance. Por ocasião de uma eventual intervenção ou ajuda de alguma pessoa, no sentido de atender a uma presumível intenção da criança, por exemplo, a situação mudaria fundamentalmente, e esse "apontar" tornar-se-ia, para a criança, um gesto para os outros, sendo, portanto, fisicamente significado. Conseqüentemente, o seu significado primário, de um movimento malsucedido de pegar, orientado pelo objeto, torna-se um movimento dirigido para outras pessoas, o que o qualifica como um verdadeiro gesto. Por fim, diz-se que as funções e os significados deste gesto de apontar seriam criadas, a princípio, por uma situação objetiva e, posteriormente, pelas outras pessoas que mantivessem alguma relação com a criança. Com isso, VYGOTSKY(1991, p. 64) sugere que o "*processo de internalização*" consiste em uma série de transformações, a saber: **1)** "*uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente*"; **2)** "*um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal*"; e **3)** "*a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento*".

desenvolvimento de uma experiência definida, não se determinará como um produto definitivo[244], mas como um processo dinâmico e continuado, no qual todas as formulações matemáticas constituir-se-ão simplesmente como conjecturas privilegiadas e em iminente sistematização[245]. E, nas palavras de BACHELARD(1938, p. 301), podemos dizer: "*Se traçamos esse breve esboço de uma utopia escolar, é porque ele oferece, guardadas as devidas proporções, uma medida prática e tangível da dualidade psicológica das atitudes racionalista e empírica. Acreditamos que sempre existe um jogo de tons filosóficos no ensino efetivo:* ***uma lição recebida é psicologicamente um empirismo; uma lição dada é psicologicamente um racionalismo***".

6.3. Respostas ao Problema de Investigação

Partindo-se da admissão da existência de um confronto entre duas tendências supostamente declaradas antagônicas, uma marcadamente "*teórica*" e a outra marcadamente "*prática*", de um confronto que colocaria em disputa um *status* de legitimidade ou um *status* de importância sobre a Matemática, apresentamos, na Introdução deste trabalho, um problema de investigação que questionava se seria possível estabelecer alguma separação irretocável entre "*teoria*" e "*prática*", quando estivéssemos interessados especialmente em conceber ou em apreender alguma formulação que fosse pertinente ao Conhecimento Matemático.

[244] Cf. part. DAVIS(1993), p. 188 — "In my view, knowledge as socially justified belief provides a fair description of how mathematical knowledge is legitimized, but we must keep clearly in mind that perceptions of what "is," theory formation, validation, and utilization are all part of a dynamic and iterative process. Knowledge once thought to be absolute, indubitable, is now seen as provisional or even probabilistic. Science is seen as a search for error as much as it is a search for truth. Eternally valid knowledge may remain an ideal that we hold in our minds as a spur to inquiry. This view fits with the idea of applied mathematics as social contract, with the contractual arrangements being concluded, broken, and renegotiated in endless succession."

[245] Cf. part. PIAGET(1970), p. 40 — "O matemático Pasch sustentou que os empenhos no sentido da formalização se orientam em direção contrária às tendências espontâneas do pensamento natural. Se nos limitarmos a caracterizar este pensamento pelo conteúdo da consciência dos sujeitos, é evidente que ele tem razão, visto que o pensamento comum tende a seguir para a frente, ao passo que a formalização consiste num esforço retroativo para determinar as condições necessárias e suficientes de todas as assertivas e para destacar explicitamente todos os intermediários e todas as conseqüências."; e p. 41 — "Na história das matemáticas, uma teoria formalizada constitui quase sempre a formalização de uma teoria intuitiva ou "ingênua" anterior."

Um dos aspectos fundamentais a ser considerado, com relação ao problema de investigação em questão, era o de saber o que se poderia chamar de "*teoria*" e o que se poderia chamar de "*prática*", relativamente à Matemática. Ademais, estávamos interessados, também, em saber se existiria uma separação inconciliável entre estas duas dimensões ou se elas poderiam ser conciliadas, de alguma maneira, em uma experiência de aprendizagem matemática. Por outras palavras, seria possível ensinar matemática voltando-nos exclusivamente para uma "*matemática teórica*" ou para uma "*matemática prática*"? E, no caso de uma resposta negativa, que relação seria possível estabelecer entre elas, no âmbito de uma ação pedagógica? Contudo, o desenlace dessa trama pode ser resumido assim:

1. concebemos fundamentalmente o conhecimento Matemático como um sistema conceitual, isto é, como uma coleção de objetos ideais ou de representações que se inter-relacionam e que têm a função de constituir-se num veículo de intermediação entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, na fluência de uma totalidade continente;
2. reconhecemos uma "*matemática teórica*" nas atividades desenvolvidas por um matemático puro e reconhecemos uma "*matemática prática*" nas atividades desenvolvidas por um matemático aplicado;
3. admitimos que a distinção entre "*teoria*" e "*prática*" somente poderia dar-se no âmbito estrito das atividades matemáticas desenvolvidas nas aplicações da Matemática além de seu próprio campo de ordem, e, neste âmbito, estabelecemos que estas duas dimensões são complementares e interdependentes;
4. intentamos mostrar que o Conhecimento Matemático não se determina exatamente em uma atividade matemática, não se reduzindo, portanto, às suas aplicações, isto é, insinuamos que a Matemática Pura e a Matemática Aplicada não são o Conhecimento Matemático;
5. estabelecemos que a apreensão das formulações matemáticas deva ser tomada como uma apropriação mental das concepções matemáticas correspondentes, posto que o Conhecimento Matemático não se reduz a uma linguagem pertinente;

6. sugerimos que o Conhecimento Matemático se manifesta mediante três dimensões complementares, a partir da engendração de seus próprios objetos: uma dimensão de concepção, uma dimensão de formulação e uma dimensão de operação;
7. mostramos que a apreensão das formulações matemáticas deverá assentar-se como um produto de uma experiência definida;
8. não será, portanto, no âmbito específico de um "*fazer matemático*", quer seja no âmbito da "*matemática teórica*", quer seja no âmbito da "*matemática prática*", que teremos acesso ao Conhecimento Matemático;
9. posto isso, podemos dizer que a possibilidade de se estabelecer alguma vinculação estrita entre uma "*matemática teórica*" e uma "*matemática prática*", por ocasião de alguma ação pedagógica, colocar-se-á exatamente sobre as aplicações da Matemática, além de seu próprio campo de ordem, sempre que pudermos manter uma incisiva disposição pragmática e uma generalizante incursão teórica.

Assim, como já foi observado no Capítulo I, quando assentirmos em "*incorporar **as condições de aplicação de um conceito no próprio sentido do conceito***" [BACHELARD(1938), p. 76], admitindo, com efeito, que a apreensão de um dado objeto matemático se apresentará o mais claramente possível à medida que nos for permitido confrontá-lo com uma amplitude sempre crescente de relações conceituais e de relações operacionais, poderemos conceber o Conhecimento Matemático como tendo um caráter eminentemente operacional, como sendo um expediente operacional por excelência, como sendo um instrumento de mediação entre um sujeito epistêmico e um mundo mediato, constituídos, tão-só e contingentemente, na perspectiva e na possibilidade objetivas de uma diferenciação correlativa, ensejada na fluência de uma totalidade continente, e apregoar, então, que o seu lugar e a sua importância estão, exatamente, em sua destinação pragmática.

Por conseguinte, conquanto estejamos admitindo que o Conhecimento Matemático guarde uma natureza peculiar e distinta, a partir da qual podemos distingui-lo como um instrumento de mediação, devemos admitir, também, que na implementação de uma experiência de aprendizagem matemática, possivelmente circunstanciada no âmbito de uma ação pedagógica desenvolvida segundo uma experiência de aprendizagem definida, deveremos seguir um caminho que nos conduza às aplicações da Matemática além do âmbito de seu próprio campo de ordem. Nessa medida, acreditamos que os procedimentos peculiares às atividades desenvolvidas por um matemático aplicado, definidos a partir das constituições de um modelo físico e de um modelo matemático correspondente, possam ilustrar adequadamente a postura cognitiva pertinente à apreensão das formulações matemáticas, determinando-a, portanto, como uma incisiva disposição pragmática e como uma generalizante incursão teórica.

ANEXO

Traduções das Citações, exceto as em Espanhol

Página 7

• Rodapé 7 — citação em Italiano

Cf. part. **ENCICLOPEDIA GARZANTI DI FILOSOFIA**. 2.ed. Milano (Italia): [?], 1988. p. 841-4. p. 841 — "**ciência, filosofia da**, ramo particular da pesquisa filosófica, tem como objeto os problemas mais gerais postos ao saber científico, tanto na forma das disciplinas lógicas e matemáticas, quanto na forma das ciências naturais e humanas (Física, Química, Biologia, Psicologia, Sociologia, Historiografia etc.). Num sentido rigoroso, como indagação de natureza científica, a Filosofia da Ciência ou Epistemologia é uma disciplina relativamente recente (séc. XIX); [...]."

• Página 7 e 8 — texto em Italiano

1. "*Problemas relativos àquela que pode ser chamada uma obra de esclarecimento e de precisão das noções estruturais do discurso científico. Uma das tarefas principais da filosofia da ciência é, de fato, oferecer uma elucidação dos conceitos basilares e mais gerais (ou seja, comuns às várias disciplinas) nos quais se articula o discurso científico.*";
2. "*Um segundo grupo de problemas considera a classificação das disciplinas científicas e os fundamentos das várias ciências. Considera-se, no âmbito desta questão, se, e eventualmente como, seria possível traçar uma distinção entre as ciências ditas «formais» (a Lógica e os vários ramos da Matemática) e as ciências empíricas ou «reais», por sua vez distintas como ciências da natureza (Física, Química, Biologia etc.) e como ciências humanas (Psicologia, Antropologia, Sociologia, Historiografia etc.).*";
3. "*Um terceiro grupo de problemas diz respeito a relação teoria-experiência na pesquisa científica. Consideram-se, neste grupo, tanto as discussões sobre a existência de uma dicotomia entre a linguagem teórica e a linguagem de observação, quanto às pesquisas voltadas para um esclarecimento da natureza do experimento científico ([...]) e da estrutura lógica da inferência científico-experimental, com as contraposições, já tornadas clássicas, entre racionalismo e empirismo e entre dedutivismo e indutivismo, à propósito dos critérios de avaliação e de aceitação das hipóteses científicas ([...]) e da justificação da indução.*";
4. "*Um ulterior grupo de problemas, hoje estreitamente correlacionados entre si, considera o processo de desenvolvimento do conhecimento científico e a contribuição cognitiva das teorias científicas, isto é, se as construções teóricas da ciência vão considerar as descrições mais ou menos acuradas e particularizadas da efetiva constituição da natureza, ou, ao contrário, os instrumentos intelectuais cômodos com os quais os homens consideram útil e oportuno organizar as suas representações mentais da estrutura interna do dito mundo real.*"; e

5. *"Enfim, o último grupo de problemas diz respeito às relações intercorrentes entre a Ciência, de uma parte, e as outras formas da cultura (arte, religião, política, moral etc.), **nonché** as organizações econômico-sociais, de outra. Consideram-se, nesta temática, o tratamento de problemas relativos ao condicionamento histórico da obra dos cientistas, a implicação social da organização e dos resultados do trabalho científico, e, mais geralmente, a relação entre a atividade científica e o mundo dos valores e da práxis."*

Página 33

• Rodapé 29 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 6 — "As diferenças na motivação e nos objetivos entre a matemática pura e a aplicada – e as conseqüentes diferenças na ênfase e atitude – devem ser completamente reconhecidas. Na matemática pura, freqüentemente, lida-se com conceitos abstratos tais que a lógica permanece como o único instrumento a permitir o julgamento da correção de uma teoria. Na matemática aplicada, a verificação empírica é um juízo poderoso e necessário."; e part. LIN(1976), p. 543 — "Eu penso que já é tempo de reconhecer a matemática aplicada como uma disciplina independente, claramente distinta da matemática pura. A diferença no espírito entre a matemática pura e aplicada é clara e, freqüentemente, muito grande. Em um artigo importante e muito interessante [13], o Professor J. Schwartz alerta os matemáticos contra o perigo da mentalidade única, da mentalidade literal e da mentalidade simples no tratamento de problemas científicos."

• Rodapé 30 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 547 — "Claramente, nós não advogamos a educação dos matemáticos aplicados mediante o seu treinamento inicial como matemáticos puros. Tal treinamento tem o perigo de introduzir uma disposição de espírito que é desvantajosa para suas atividades criativas."

Página 34

• Rodapé 31 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 34 — "De modo geral, a comunidade dos matemáticos de alma (*core mathematician*) decidiu que não é sua responsabilidade fornecer a instrução relativa às aplicações da Matemática; e, do mesmo modo, grande parte da instrução em metodologia tem-se tornado responsabilidade da comunidade de matemática aplicada. [G. F. Carrier, "Heuristic Reasoning in Applied Mathematics", in the special issue, "Symposium on the Future of Applied Mathematics", 1972.]"

Página 37

• Rodapé 39 — citação em Inglês

Cf. part. SNAPPER(1979), p. 552 — "Quando nós praticamos matemática, nós sempre temos um mundo de realidades a nossa frente. Este mundo depende do ramo da Matemática que está sendo praticado, seja ele Geometria Euclidiana, Teoria dos Números, Teoria dos

Conjuntos ou o que você estiver praticando."; e p. 553 — "Finalmente, os lógicos podem interrogar-se porque o autor está usando a frase "mundo de realidades" em vez do termo padrão "modelo" da Lógica Matemática. A razão é que, embora um mundo de realidades seja com freqüência um modelo no sentido dos lógicos, este nem sempre é o caso. Por exemplo, o mundo das realidades do intuicionismo (Secção 6) não é um modelo desse tipo."

Página 38

• Rodapé 41 — citação em Inglês

Cf. part. SNAPPER(1979), p. 555 — "Enquanto estas investigações axiomáticas [da Geometria Plana Hiperbólica] não fossem sustentadas por um mundo apropriado de realidades, elas não poderiam ser consideradas como constituindo um novo ramo da Matemática, mas elas tinham de ser consideradas como investigações estritamente axiomáticas, originando-se do mundo subjacente da Geometria Plana Euclidiana. [...] A espada [de Democles] foi removida somente quando Poincaré, Beltrami e Klein fundaram mundos apropriados para o novo conjunto de axiomas, e somente então pode-se afirmar que um novo ramo da Matemática havia nascido."

Página 40

• Rodapé 46 — citação em Inglês

... ; e part. SNAPPER(1979), p. 556 — "A atividade matemática sempre provém de um mundo de realidades."; e p. 553 — "A palavra "realidades" na frase "mundo de realidades" não significa que este mundo necessariamente consiste de objetos no mundo físico fora de nós, como no caso da geometria Euclidiana de 3 dimensões. Estes objetos podem ser construções mentais, como no caso da teoria dos números."

Página 45

• Texto em Inglês

Como um segundo aspecto básico e distintivo da atividade matemática, diremos que a "*matemática aplicada é uma atividade disciplinada que se situa entre as ciências empíricas e a matemática pura*" [LIN(1976), p. 533], "*guiada pelo espirito de e pela crença na* ***interdependência*** *da matemática e das ciências*" [LIN(1974), p. 4] e desenvolvida segundo "*uma atitude, uma abordagem e um modo de pensamento*" [LIN(1976), p. 533].

Página 48

• Rodapé 65 — citação em Inglês

... ; e part. LIN(1974), p. 4 — "A Matemática começou com simples problemas práticos, tais como a divisão de um rebanho de animais entre os membros de uma família (Teoria dos Números) e a medida de uma área de terra (Geometria). Gradualmente, as idéias elementares foram organizadas e elas evoluíram dentro de estruturas lógicas."

• Rodapé 66— citação em Inglês

Cf. part. BERNSTEIN(1979), p. 246 — "Como seu nome indica, ela começou como uma ciência empírica, aquela da medida da terra dos Egípcios."

• Texto em Inglês

Por exemplo, foi o que se deu com Albert EINSTEIN, que "*procurando por uma base para a sua teoria geral da relatividade, encontrou-a na geometria de Riemann*" [BERNSTEIN(1979), p. 246], e com Werner HEISENBERG, que tomou a concepção matemática de "*matriz*" como "*o instrumento de que ele necessitava para descrever a sua concepção assim chamada estrutura atômica da mecânica de matriz*" [BERNSTEIN(1979), p. 250]. Desse modo, surge, por um lado, o termo "*matemática pura*", na medida em que se tornava inegável que "*uma porção crescente da Matemática foi desenvolvida de um modo independente das ciências teóricas*" [LIN(1974), p. 4], e ...

Página 49

• Rodapé 69 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 4 — "Historicamente, o desenvolvimento da Matemática e da Física têm uma conexão muito estreita. Exemplos clássicos podem ser encontrados nos trabalhos de Newton (ver Capítulo 2), Gauss, Euler, Cauchy, e outros."; ..."

• Rodapé 70 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 31 — "Eu ... descrevo a matemática aplicada como uma ponte ligando a matemática pura com a ciência e a tecnologia. Eu deliberadamente descrevi esta ponte como *ligando* duas áreas de atividade ao invés de *conduzindo* de uma para a outra, porque uma ponte conduz duas vias de tráfego. Sua importância para a ciência e para a tecnologia é óbvia, mas ela não é menos importante para a matemática pura, que seria mais pobre sem os estímulos vindos das aplicações. [W. Prager, "Introductory Remarks" in the special issue, "Symposium on the Future of Applied Mathematics", 1972]."

• Texto em Inglês

Por exemplo, segundo LIN, atribui-se à crença de que "*há uma ordem e harmonia básicas na natureza*" [LIN(1974), p. 5] o suposto "*relacionamento íntimo entre Matemática e ciências físicas*" [LIN(1974), p. 4], e, por conseguinte, que "*a descrição dos fenômenos naturais pode ser organizada pela disciplina lógica da Matemática*" [LIN(1974), p. 5].

Página 50

• Texto em Inglês

Ademais, "*em comum com o matemático puro, o matemático aplicado está interessado na estimulação do desenvolvimento de novas matemáticas (ver [2]), – mas, primariamente, com a ênfase naqueles aspecto* ***diretamente****, ou pelo menos fortemente, motivados pelos problemas científicos. Em comum com o cientista teórico, o matemático aplicado procura* *conhecer e entender os fatos científicos e os fenômenos do mundo real através do uso de métodos matemáticos.*" [LIN(1976), p. 533].

• Rodapé 73 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 7 — "Há aqueles que observam esta quarta parte como matemática aplicada somente, e consideram as primeiras três partes como ciência, não como matemática."

Página 50

• Página 50 e 51 — texto em Inglês

Admite-se, também, um quarto aspecto nessa atividade, segundo LIN, afirmando-se que "*a solução de problemas específicos freqüentemente serve apenas como um foco e como uma ajuda na busca de um entendimento mais profundo*" [LIN(1976), p. 534-5], e que o objetivo final do esforço de um matemático aplicado coloca-se, então, na (4) "*criação de idéias, conceitos e métodos que são de significação básica e de aplicabilidade geral para o assunto em questão, incluindo a formulação de princípios gerais*" [LIN(1976), p. 535], ou seja, na "*geração de novas matemáticas, relevantes cientificamente, através da criação, generalização, abstração e formulação axiomática*" [LIN(1974), p. 7], o que poderia levar o matemático aplicado, como resultado desse mesmo esforço, à (5) criação de novas idéias e teorias matemáticas, o que poderia, também, ser tomado como um quinto aspecto de sua atividade.

Página 52

• Rodapé 75 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 535 — "*A diferença básica na motivação entre matemáticos puros e aplicados* é refletida nos hábitos e práticas de suas atividades. Embora o matemático aplicado entenda e aprecie a natureza de uma demonstração rigorosa, ele não pode ser paralisado por essas considerações."

• Rodapé 76 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 535 — "Em particular, quando ele está engajado na criação de novas matemáticas, o matemático aplicado pode seguir as práticas (incluindo o grau de rigor) usadas em matemática pura na *formulação* de seus resultados. Por causa de seu conhecimento, o raciocínio heurístico leva-o a forma final da teoria que sem dúvida será enfatizada."

• Rodapé 77 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 536 — "Com esforços teóricos e empíricos complementares, um mais profundo e mais penetrante entendimento pode ser alcançado."

• Texto em Inglês

Nas fases primeira e terceira, a da formulação do problema em termos matemáticos e a da sua interpretação e possível verificação empíricas, respectivamente, o matemático aplicado aproximar-se-á mais das práticas de um cientista teórico, e a esse respeito, "***a construção de um modelo matemático idealizado é, de fato, a fase mais importante e mais difícil****, especialmente em um novo campo de aplicação da Matemática*" [LIN(1976), p. 535-6].

• Rodapé 78 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 536 — "Ela usualmente requer um conhecimento compreensivo e um entendimento profundo dos fatos empíricos relacionados ao fenômeno particular sob consideração, como um insight penetrante e um julgamento maduro."

Página 54

• Rodapé 79 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1978), p. 555 — "Outro exemplo que mostra a diferença nas características entre matemática aplicada e matemática pura é a análise numérica e a computação de máquina. Desde que não se possa resolver analiticamente a equação diferencial parcial necessária para a previsão de tempo por meio de números, tem-se que fazê-la por métodos numéricos. Além disso, não se tem teoremas de existência para estes sistemas de equações diferenciais parciais; não se pode provar que o processo converge no limite assintótico de passos infinitesimais. Mas devemos continuar confiantes, baseando-nos no uso de testes empíricos para assegurar a validade dos procedimentos."

Página 92

• Texto em Inglês

A esse respeito, podemos destacar as observações finais de LIN(1978) acerca da "*Educação dos Matemáticos Aplicados*", nas quais ele considera que a "*ênfase deve ser colocada na solução de problemas do mundo real. O matemático aplicado deve ser capaz de produzir um* ***impacto*** *real na ciência e estar pronto para competir com teóricos educados em outros aspectos neste mesmo esforço*" [LIN(1978), p. 560], e que, "*no desenvolvimento dos métodos e teorias matemáticos gerais, o matemático aplicado colocaria ênfase sobre aquilo diretamente relacionado às aplicações. Deixe-se a maior parte (se não tudo) dos assuntos da matemática pura para o matemático puro interessado em aplicações*" [LIN(1978), p. 560]

Página 95

• Rodapé 91 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1978), p. 556-7 — "Como podemos arranjar um programa educacional em matemática aplicada para alcançar os objetivos descritos acima? Inicialmente, este processo educacional deve ser iniciado nos anos que antecedem a graduação, durante o período de formação do jovem. Se uma pessoa formou uma atitude para considerar muito mais valioso provar um elegante teorema em álgebra do que estudar a exploração dos campos de óleo, ou explicar um fenômeno observado na atmosfera ou nas galáxias com a ajuda de métodos matemáticos (ou considerar os últimos como "somebody else's business"), seria muito difícil convertê-lo para outro conjunto de crenças."

Página 96

- Texto em Inglês

Partindo-se das considerações precedentes, podemos afirmar que somente nos é possível estabelecer a contraposição "dimensão teórica *versus* dimensão prática" no âmbito de uma *atividade matemática*, uma vez que, como já foi observado, a "*matemática aplicada é uma atividade disciplinada que se situa entre as ciências empíricas e a matemática pura*" [LIN(1976), p. 533].

- Rodapé 92 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1974), p. 32 — " 'Matemática Aplicada' é o que os 'matemáticos aplicados' fazem, enquanto 'matemáticos aplicados' são pessoas que saem e falam daquela em outras disciplinas que estão tentando usar Matemática, e que sabem o bastante sobre esta disciplina para entender os problemas em um nível profundo."

Página 100

- Página 100 e 101 — texto em Inglês

Não nos é difícil admitir e reconhecer completamente, à luz das considerações de LIN(1974), que há diferenças na motivação, nos objetivos, na ênfase e na atitude entre os matemáticos puros e os matemáticos aplicados, basicamente, quando aceitamos que, na Matemática Pura, a "*lógica permanece como o único instrumento a permitir o julgamento da correção de uma teoria*" [LIN(1974), p. 6], e que, na Matemática Aplicada, a "*verificação empírica é um juízo poderoso e necessário*" [LIN(1974), p. 6].

Página 105

- Página 105 e 106 — texto em Inglês

Queremos evidenciar, com isso, que o matemático aplicado, ou a Matemática Aplicada, agrega em si, digamos assim, o "*melhor de dois mundos*", buscando, ao mesmo tempo, uma incisiva disposição pragmática e uma generalizante incursão teórica, ou seja, "*o matemático aplicado deve examinar seus resultados para buscar um entendimento profundo do problema em questão, e tentar abstrair o essencial para formar conceitos que são de aplicabilidade mais geral. Ao mesmo tempo, suas conclusões devem, naturalmente, ser verificadas em contraposição ao corpo de conhecimentos existente. Algumas novas predições ou inferências a partir de seus resultados também são assunto para verificação por observações e experimentações posteriores, desde que sua verdade não possa ser determinada por meios puramente lógicos. Com esforços teóricos e empíricos complementares, um mais profundo e mais penetrante entendimento pode ser alcançado*" [LIN(1976), p. 536].

• Rodapé 106 — citação em Inglês

Cf. part. LIN(1976), p. 537 — "De fato, a educação de um matemático aplicado deve fornecer-lhe uma amplitude de conhecimento tanto em Matemática como nos fundamentos das ciências. Ele está, então, na melhor posição para avançar em um assunto específico, mediante a criação de modelos matemáticos adequados, mediante o seu pensamento crítico e preciso, e mediante a transferência de conhecimento matemático obtido através do estudo de outras disciplinas científicas."

Página 106

• Página 106 e 107 — texto em Inglês

A respeito da natureza e do papel da Matemática Aplicada, LIN(1978, p. 553) aponta para três abordagens, basicamente: "*uma, é centrada sobre a matemática pura, com o campo de aplicação como uma extensão ou especialização (e, portanto, ocupando um papel secundário); a outra, é essencialmente levar o assunto para os teóricos em disciplinas científicas individuais e não pensar na matemática aplicada como uma profissão separada (obviamente, esta posição não pode ser advogada em um encontro do SIAM – Sociedade para a Matemática Aplicada e Industrial); a terceira, é olhar para todos os ramos da matemática aplicada como inter-relacionados – similarmente aos vários ramos da matemática pura – e encorajar um entendimento compreensivo desse assuntos por estudantes jovens e talentosos, com a esperança de que o inter-relacionamento de todos esses assuntos torne-se reforçado através do esforço cooperativo de todos os matemáticos aplicados*". Quanto às divergências entre matemáticos puros e matemáticos aplicados acerca do "*processo educacional*", LIN(1978, p. 555) sugere que "*muitos matemáticos puros podem insistir que uma pessoa deve primeiro tornar-se um matemático puro antes de aprender sobre as aplicações. No entanto, a matemática não é um assunto fácil. Aprender sobre as aplicações é outro assunto difícil, especialmente os processos de formulação e interpretação, como nós observamos*".

Página 107

• Rodapé 108 — citação em Inglês

Cf. part. BERNSTEIN(1979), p. 249 — "Nós podemos descrever o movimento de um ponto no plano por um simples sistema de equações diferenciais que representem os componentes da força aplicada às coordenadas x e y, e obter soluções da forma $(x(t),y(t))$. No início do século XIX, Poincaré fez um estudo revolucionário da trajetória de tal ponto considerando as soluções como produzindo equações paramétricas para a trajetória. Ele estava particularmente interessado em seu comportamento assintótico – o que acontecia quando t torna-se grande – e mostrou que em geral ele leva ou para pontos singulares ou para ciclos limites. O estudo de tais pontos singulares ou ciclos limites, chamados de teoria de Poincaré-Bendixon, tem levado à solução de muitos problemas de engenharia em servo-mecanismos e controle automático. Ele também tem tido um profundo efeito sobre o que vem sendo chamado de teoria qualitativa das equações diferenciais e a teoria das equações diferenciais de modo geral. De fato, esta é uma área na qual a distinção entre matemática pura e aplicada desapareceu completamente, como se tem reconhecido no Centro de Sistemas Dinâmicos em Brown."

Página 168

• Rodapé 178 — citação em Francês

Cf. part. CORNU(1983), p. 9 — "Uma definição é matematicamente suficiente para restituir uma noção; mas, sobre o plano do conhecimento, ela não dá conta de todos os aspectos da noção."; e ...

Página 173

• Texto em Francês

Observa-se que, e segundo CORNU(1983, p. 23), "*para a noção de limite, há um afastamento devido ao conceito mesmo de limite e ao modo pelo qual nós demos a sua definição. O aspecto "dinâmico" (todo aquele que está ligado ao fato de "tender para", ao fato de "se aproximar de") não é restituído pela definição, que é estática. A definição transforma uma noção extremamente complexa, na qual se enredam o infinito, a idéia de aproximação, a idéia de se aproximar de alguma coisa, sem o atingir ou o atingindo com isso, em um objeto de uma outra natureza, no qual se enredam os quantificadores e as inegualdades*".

• Rodapé 181 — citação em Francês

Cf. part. CORNU(1983), p. 23 — "Mesmo se matematicamente toda noção de limite está contida em sua definição em (ε, η), há um afastamento entre a noção de limite, enquanto conceito, e a definição da noção de limite. Isso é verdadeiro, em geral, para muitas das noções matemáticas."

Página 177

• Texto em Francês

Inicialmente, é possível afirmar que a noção de derivada é distinta da definição de derivada, a exemplo das considerações de CORNU(1983, p. 9-10) acerca da noção de limite, que nos dá conta de que "*o objeto matemático que constitui a noção de limite não deve ser reduzido à definição de limite. Uma definição é matematicamente suficiente para restituir uma noção; mas, sobre o plano do conhecimento, ela não dá conta de todos os aspectos da noção. Para permitir uma idéia completa do que é a noção de limite, é necessário examinar, em detalhe, os diferentes modos pelos quais nós a utilizamos em todos os setores das matemáticas, examinar o cálculo de limites, as demonstrações por "passagem ao limite", os resultados sobre a aproximação etc. É o funcionamento da noção que determina o objeto matemático*".

Página 193

• Página 193 e194 — texto em Francês

A substancialidade do objeto matemático é contemporânea de suas relações, tanto conceituais como operacionais, e "*uma definição é matematicamente suficiente para restituir uma noção; mas, sobre o plano do conhecimento, ela não dá conta de todos os aspectos da noção*" [CORNU(1983), p. 9].

Página 229

• Rodapé 232 — citação em Inglês

Cf. part. DAVIS(1993), p. 184 — "Quando o ensino acontece sob a bandeira das filosofias convencionais da Matemática, ele freqüentemente torna-se um abordagem formalista para a educação matemática: faça isto, faça aquilo, escreva isto aqui e não ali, aperte o botão, chame aquele programa, aplique esta definição e aquele teorema. Ele enfatiza as operações. Ele não equilibra as operações com um entendimento da natureza ou das conseqüências das operações. Ele enfatiza a sintaxe à custa da semântica, a forma à custa do significado".

Página 232

• Rodapé 237 — citação em Inglês

Cf. part. RESTIVO, Sal. The social life of mathematics. In: RESTIVO, Sal et al. (Ed.). **Math worlds**: philosophical and social studies of mathematics education. Albany(E.U.A.): State University of New York, 1993. 292p. p. 247-278.; p. 257 — "Alguns matemáticos e filósofos da Matemática tem reconhecido que a abstração tem alguma coisa a ver com a iteração. Eles têm expressado este reconhecimento em tais idéias como "modelo abstrato de segunda geração" e álgebras construídas sobre álgebras". Uma importante instância de invocação do princípio de iteração é a exigência de Richard Dedekind (1956: 529) de que a "aritmética seja desenvolvida fora de si mesma". Pode-se declarar como fato que a Matemática em geral é uma atividade iterativa."

Página 236

• Rodapé 244 — citação em Inglês

Cf. part. DAVIS(1993), p. 188 — "Em meu ponto de vista, o conhecimento enquanto crença socialmente justificada fornece uma descrição apropriada de como o Conhecimento Matemático é legitimado, mas nós devemos manter claramente em mente aquelas percepções de que "é", formação da teoria, validação e utilização são todas partes de um processo dinâmico e iterativo. O conhecimento outrora pensado como sendo absoluto, indubitável, é agora visto como provisório ou mesmo probabilístico. A ciência é vista como uma busca por erros tanto quanto uma busca pela verdade. O conhecimento eternamente válido pode permanecer como um ideal se nós o retivermos em nossas mentes como um estímulo para a investigação. Este ponto de vista serve como a idéia da matemática aplicada enquanto um contrato social, com o arranjo contratual sendo concluído, quebrado e renegociado em uma sucessão sem fim."

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. **Diccionario de filosofía**. 13.ed. Tradução Alfredo N. Galletti. México (México): Fondo de Cultura Económica, 1996. 1206p. (Dizionario di Filosofia, ©1961).

AMOROSO COSTA, Manoel. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. 3.ed. São Paulo: Convívio/EDUSP, 1981. 330p. (Biblioteca do Pensamento Brasileiro, Texto 4). (©19--?).

BACHELARD, Gaston. A filosofia do não. Tradução Joaquim J. M. Ramos. In: **Os pensadores, bachelard**. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1978. p. 1-87. (La Philosophie du Non, ©1940).

________. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estela dos S. Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 314p. (La Formation de l'Esprit Scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance, ©1938).

________. **Epistemologia**. 2.ed. Tradução Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983. 196p. (Épistémologie, ©1971).

________. O novo espírito científico. Tradução Remberto Francisco Kuhnen. In: **Os pensadores, bachelard**. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1978. p. 89-179. (Le Nouvel Esprit Scientifique, ©1934).

BARKER, Stephen F. **Filosofia da matemática**. 2.ed. Tradução Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. 141p. (Philosophy of Mathematics, ©1964).

BELL, E. T. **Historia de las matematicas**. 3.ed. Tradução R. Ortiz. México (México): Fondo de Cultura Económica, 1996. 656p. (The Development of Mathematics, ©1940).

BERNSTEIN, Dorothy L. The role of applications in pure mathematics. **The Americam Mathematical Monthly**, [Washinton (E.U.A.)], v. 86, n. 4, p. 245-253, Apr. 1979. (©1979).

BLACKBURN, Simon. **Dicionário oxford de filosofia**. Tradução Desidério Murcho et al. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1997. 437p. (The Oxford Dictionary of Philosophy, ©1994).

BOHM, David. **A totalidade e ordem implicada**: uma nova percepção da realidade. Tradução Mauro de Campos Silva. São Paulo: Ed. Cultrix, [1992]. 292p. (Wholeness and the Implicate Order, ©1980).

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1974. 488p. (A History of Mathematics, ©1968).

CATUNDA, Omar et al. **Matemática** – segundo ciclo – ensino atualizado. Rio de janeiro: Ao Livro Técnico, 1971. vol. 1. 217p. (©1971).

________. **Matemática** – segundo ciclo – ensino atualizado. Rio de janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. vol. 2. 204p. (©1972).

________. **Matemática** – segundo ciclo – ensino atualizado. Rio de janeiro: Ao Livro Técnico, 1973. vol. 3. 150p. (©1973).

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite**: conceptions et obstacles. [Grenoble (França)]: L'Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983. 169p. (Tese, Doutorado em Matemática Pura). (©1983).

Da COSTA, Newton Carneiro Affonso. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. 2.ed São Paulo: Ed. Hucitec/EDUSP, 1994. 255p. (©1979).

________. **Introdução aos fundamentos da matemática**. 2.ed. São Paulo: Ed. Hucitec, 1977. 65p. (©1961).

________. **Lógica indutiva e probabilidade**. 2.ed. São Paulo: Ed. Hucitec/EDUSP, 1993. 89p. (©1993).

________. **O conhecimento científico**. São Paulo: Discurso Editorial, 1997. 278p. (©1997).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Ed. da UNICAMP/Summus Editorial, 1986. 115p. (©1986).

________. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ed. Ática, 1990. 88p. (Série Fundamentos, 74). (©1990).

DAVIS, Philip J. Applied mathematics as social contract. In: RESTIVO, Sal et alii. (Ed.). **Math worlds**: philosophical and social studies of mathematics education. Albany (E.U.A.): State University of New York, 1993. 292p. p. 182-194. (©1993).

DAVIS, Philip J., HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. 4.ed. Tradução João B. Pitombeira. Rio de janeiro: Francisco Alves, 1989. 485p. (The Mathematical Experience, ©1982).

EINSTEIN, Albert. **Albert Einstein**: pensamento político e últimas conclusões. Tradução Maria L. Nogueira. São Paulo: Ed. Brasiliense, 1983. 191p. (Our of my Later Years, ©1956).

EINSTEIN, Albert, INFELD, Leopold. **A evolução da física**. 4.ed. Tradução Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Koogan, 1988. 237p. (The Evolution of Physics, ©1938).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1995. 843p. ([sem título original], ©1953).

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário aurélio da língua portuguesa**. 2.ed. Rio de Janeiro: Ed. Nova Fronteira, 1986. 1838p. (©1975).

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. **Zetetiké**, Campinas, n. 4, p. 1-37, Nov. 1995. (©1995).

HEGENBERG, Leônidas. **Dicionário de lógica**. São Paulo: EPU, 1995. 223p. (©1995).

________. **Lógica simbólica**. São Paulo: Ed. Herder/EDUSP, 1966. 376p. (©1996).

________. **Lógica**: simbolização e dedução. São Paulo: EPU/EDUSP, 1975. 219p. (1975a).

________. **Significado e conhecimento**. São Paulo: EPU/EDUSP, 1975. 185p. (1975b).

HOUAISS, Antônio, VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. 2922p. (©2001).

KNEALE, William Calvert, KNEALE, Martha. **O desenvolvimento da lógica**. 3.ed. Tradução M. S. Lourenço. Lisboa (Portugal): Fundação Calouste Gulbenkian, [1991]. 773p. (The Development of Logic, ©1962).

KÖRNER, Stephan. **Uma introdução à filosofia da matemática**. Tradução Alberto Oliva. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1985. 201p. (The Philosophy of Mathematics, ©1960).

LANG, Serge. **Cálculo**. Tradução Roberto de M. N. Mendes. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981. vol. 1. 388p. (A First Course in Calculus, ©1963).

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. Tradução Antonio Paques, Otilia T. W. Paques e Sabastião A. J. Filho. São Paulo: 1977. vol. 1. 588p. (The Calculus with Analytic Geometry, ©1968)

LIN, C. C. Education of applied mathematicians. In: D. J. Benney, F. H. Shu and C. Yuan (Ed.). **Selected papers of C. C. Lin: fluid mechanics and applied mathematics.** Singapure (China): World Scientific Publishing, 1987. vol. 1. p. 553-560p. (©1978)

________. On the role of applied mathematics. In: D. J. Benney, F. H. Shu and C. Yuan (Ed.). **Selected papers of C. C. Lin**: fluid mechanics and applied mathematics. Singapure (China): World Scientific Publishing, 1987. vol. 1. p. 531-552. (©1976)

LIN, C. C., SEGEL, L. A. **Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences.** Philadelphia (E.U.A.): Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1988. vol. 1. 609p. (Classics in Applied Mathematics). (©1974)

MIGUEL, Antonio. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. **Zetetiké**, Campinas, n. 3, p. 7-39, Mar. 1995. (©1995).

________. **Três estudos sobre história e educação matemática.** Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 1993. 274p. (Tese, Doutorado em Metodologia de Ensino). (©1993).

MORA, José Ferrater. **Dicionário de filosofia.** 3.ed. Tradução Roberto L. Ferreira e Álvaro Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 1998. 741p. (Diccionario de Filosofía, ©19–?).

NAGEL, Ernest, NEWMAN, James R. **Prova de Gödel.** 2.ed. Tradução Gita K. Guinsburg. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1998. 101p. (©19–?).

ORLANDI, Flavio Francisco. **Sobre o sistema operacional conhecimento matemático**: o desenvolvimento de uma constituição normativa de apreensão das concepções matemáticas a partir de uma instanciação epistemológica. Rio Claro, SP: Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP, 1996. 167p. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática). (©1996).

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: matemática, 1-4 séries. 2.ed. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 2000. 142p. vol. 3. (©2000).

PEIRCE, Charles Sanders. Escritos publicados. Tradução Armando M. D'Oliveira e Sergio Pomerangblum. In: **Os pensadores, Peirce/Frege**. 2.ed. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1980. p. 61-83 e 129-138. (©1868).

PIAGET, Jean. A epistemologia genética. Tradução Nathanael C. Caixeiro. In: **Os pensadores, piaget**. 2.ed. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1983. p. 1-64. (L'Épistémologie Génétique, ©1970).

SALEM, Lionel (Dir.). **Dicionário das ciências**. Tradução Mauro M. G. de Carvalho (Coord.). São Paulo: Ed. da Unicamp/Ed. Vozes, 1995. 556p. (Le Dictionaire des Sciences, ©1990).

SALMON, Wesley C. **Lógica**. 6.ed. Tradução Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1984. 143p. (Logic, ©1963).

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. vol. 1. 829p. (Calculus with Analytic Geometry, ©1985).

SNAPPER, Ernst. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. **Humanidades**, [Brasília], v. 2, n. 8, p. 85-93, Jul./Set. 1984. (©1984).

________. What is mathematics? **The Americam Mathematical Monthly**, [Washinton (E.U.A.)], v. 86, n. 7, p. 551-557, Aug./Sep. 1979. (©1979).

TARSKI, Alfred. **La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica**. Tradução Emilio Colombo. Buenos Aires (Argentina): Ediciones Nueva Visión, 1972. 75p. (The Semantic Conception of Truth, ©1944).

THURSTON, William P. Sobre prova e progresso em matemática. **Matemática Universitária**. [Rio de Janeiro]: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 17, p. 1-21, Dez. 1994. (©1994).

TROTTA, Fernando, JAKUBOVIC, José, IMENES, Luiz Márcio Pereira. **Matemática Aplicada** – 2°. Grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1979. vol. 1. 286p. (©1979a).

________. **Matemática Aplicada** – 2°. Grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1979. vol. 2. 290p. (©1979b).

________. **Matemática Aplicada** – 2°. Grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1980. vol. 3. 394p. (©1980).

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4.ed. Tradução José C. Neto, Luis S. M. Barreto e Solange C. Afeche. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 1991. 168p. (Mind in Society – The Development of Higher Psychological Processes, ©19–?).