UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E FILOSOFIAS SOCIAIS DA MATEMÁTICA:

Um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest

2002

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E FILOSOFIAS SOCIAIS DA MATEMÁTICA:
Um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest

WILSON PEREIRA DE JESUS
ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO MIGUEL

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Wilson Pereira de Jesus e aprovada pela
Comissão Julgadora.
Em 21/02/2002.

Assinatura (Orientador):_______________________________

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

2002

Catalogação na Publicação elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecário: Gildenir Carolino Santos - CRB-8ª/5447

Jesus, Wilson Pereira de.
J499f Educação matemática e filosofias sociais da matemática : um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest / Wilson Pereira de Jesus. – Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador : Antonio Miguel.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951. 2. Lakatos, Imre, 1922-1974. 3. Ernest Paul. 4.Matemática - Filosofia. 5. Educação matemática. I. Miguel, Antonio II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

02-0189-BFE

Resumo

O presente trabalho é uma tentativa de entendimento das filosofias sociais da matemática, a partir do construtivismo social como uma filosofia da matemática segundo Paul Ernest. Busca uma compreensão das interpretações de Ernest acerca das filosofias da matemática de Ludwig Wittgenstein e de Imre Lakatos, considerando estas filosofias juntamente com o construtivismo social de Ernest como filosofias sociais da matemática. A filosofia da matemática é pressuposta então como fundamental para a prática em educação matemática.

Abstract

The present work is an attempt to understand the social philosophies of Mathematics of Paul Ernest's *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. It seeks a comprehension of what Paul Ernest takes into account about both Ludwig Wittgenstein and Imre Lakatos Philosophies of Mathematics. This work calls social philosophy of Mathematics those philosophies close to Social Constructivism according to Paul Ernest. The Philosophy of Mathematics is presuppose as the background to the practice in Mathematics Education.

Para minha mãe
Alzira Carvalho de Jesus
in memoriam

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento do trabalho até aqui realizado e para o meu bem estar no Estado de São Paulo. No entanto eu não poderia deixar de agradecer a alguns, de forma explícita, pois a circunstância em que nos encontramos determinou esse destaque. A ordem aqui não tem nenhuma conotação de prioridade, porque essas pessoas são igualmente fundamentais para mim.

Ao professor Dr. Sérgio Lorenzato, pela sua participação no meu sucesso na vida acadêmica, antes mesmo do meu ingresso no mestrado.

À colega Ema Beraldo, pelo estímulo e participação no meu primeiro contato com o professor Dr. Antonio Miguel.

Aos meus colegas do HIFEM/CEMPEM em especial Flávio Orlandi, Maria do Carmo Sousa e Arlindo Junior pela nossa convivência.

Aos meus colegas de Tai Chi da FEF/Unicamp, em especial ao físico Paulo Sakanaka e a sua filha Tânia Sakanaka, meus companheiros de estudos e prática e de ricas especulações nas manhãs das sextas-feiras na rodovia Bandeirantes.

Aos companheiros de estudos espiritualistas, dentro e fora da UNICAMP, na pessoa de Nora Sakamoto.

Aos amigos Diogo e Simone, Henrique e Fabiana. Rubens e Stela.

Aos amigos baianos e quase baianos Rossine e Natália, Roberval e Bárbara, Dagoberto e Sheila, Neto e Nete, Franceli e Wilson, Fernanda e Zé Mário. Este, fundamental na edição e reprodução do texto final.

Aos meus colegas da UNIBANDA, e das aulas de alemão, especialmente João Petrucio e João Eduardo.

Às professoras do IEL Salette e Rosa.

À professora Laura Sant'ana pela inestimável ajuda em algumas leituras em inglês.

Aos meus filhos Emiliano, Luciana, Sara e Camila, que mesmo fisicamente distantes torceram pelo meu sucesso.

Ao meu filho João, gerado com a Tese.

À Tétis e aos Mori Muniz fonte de inspiração para muitas mudanças, e aquisições.

Ao meu pai Maximiano Pereira de Jesus, o mais antigo membro da minha família. Aos meus irmãos e irmãs, pelos nossos laços.

À D. Lenita e D. Tomiko, minhas vizinhas por quatro anos, pelo nosso comércio de troca de raízes, guloseimas, pão integral e orquídeas.

À Lucilene Reginaldo e à sua família, pela nossa amizade e convívio.

Ao grupo de flauta doce do IA, especialmente ao professor Carlos Rodrigues.

Aos anônimos funcionários da Faculdade de Educação.

À UEFS por permitir através do PICD/CAPES a minha permanência na UNICAMP.

Ao meu amigo lingüista Iderval Miranda por seu zelo rigoroso na revisão do texto final.

Algumas pessoas foram de uma presença inestimável na finalização deste trabalho: Jucineide Moreira e Lívia Cavalcante (Departamento de Educação-UEFS), Nivaldo de Assis S. Filho (Imprensa Universitária-UEFS) e Trazíbulo Henrique Pardo Casas (Departamento de Ciências Exatas/UEFS).

A todos os que verdadeiramente têm esperança e lutam por alguma utopia. Se considerarmos que estamos todos ligados por certos vínculos, as pessoas otimistas me ajudaram sobremaneira nesses meus processos todos que se consumaram neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Antonio Miguel, meu orientador, pelas suas imprescindíveis contribuições para a unidade e coerência do texto final.

Por mais sutil que venha a ser a nossa ciência pura, ela sempre encontrará uma fonte de inspiração no mundo sensível, cuja infinita riqueza ser-lhe-á impossível traduzir integralmente. Mas por mais complexo que seja esse mundo sensível, a nossa capacidade de abstração poderá sempre conceber modelos ideais, que os dados externos reproduzam apenas aproximadamente.
M. Amoroso Cost*a* (1885-1928) *in: As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios* 3ª ed. São Paulo: Convívio/EDUSP, 1981.p.330.

Índice

CAPÍTULO I
À Guisa de Introdução

Talvez as primeiras perguntas que devessem ocorrer a alguém inquirindo acerca de um trabalho de elaboração de Tese de Doutorado fossem: “por que você fez esse trabalho?” ou: “qual a pergunta ou o problema do seu trabalho?”

Gostaríamos de usar da liberdade de não respondê-las de imediato. E podemos apresentar algumas razões para isso. A primeira, é que um trabalho não se resume nunca a uma questão. Em geral, faz-se isso muito mais testando a capacidade de síntese do inquirido do que para qualquer outro fim. Mas acreditamos que, sempre que se pergunta por isso, já se sabe, de antemão, que a resposta não virá.

A segunda razão, é que há muitas coisas não verbalizáveis que envolvem a opção por um determinado tema. Às vezes ocorrem até coisas não muito animadoras como, por exemplo, um tema em moda. E para que não pareça que nós estejamos fugindo de apresentar as nossas reais razões, aqui vão elas.

Fazer este trabalho pode ser visto como mais uma etapa do nosso processo de busca de uma convivência maior com a filosofia na perseguição de uma certa maturidade intelectual. Sempre nos perguntamos sobre a natureza do conhecimento matemático. E achamos que se encontrássemos essa resposta seríamos um professor de matemática mais consistente, e poderíamos auxiliar nossos alunos nesse sentido, porque a história e a filosofia do nosso instrumento de trabalho são fundamentais para a nossa prática. É claro que há muita gente que faz matemática, ensina matemática sem se preocupar com a sua história ou com a sua filosofia. Quanto àqueles que ensinam matemática e dão igual atenção à filosofia e à história, o seu trabalho tem outra qualidade. Outro tom. Eles se sentem mais tranqüilos, mais em paz, mais satisfeitos, pensamos, com a sua prática profissional. Achamos que dificilmente um professor de matemática que domine história e filosofia irá fracassar. Dificilmente, porque ele trafega por dois pólos entre os quais ocorre toda a atividade humana.

Desde o nosso curso de graduação, iniciado em 1974, em uma anônima Faculdade de Educação no interior da Bahia, passamos a nos interessar pela natureza da matemática. Natureza entendida aqui como aquilo que a define, que a destaca ante outros ramos do conhecimento. E naquela época já nos perguntávamos se a matemática era uma invenção ou uma descoberta.

Foi em meio a um processo interno, próprio da adolescência, que fomos tomando consciência do mundo em que estávamos inserido. Não sabemos o motivo pelo qual optamos pela matemática. Mesmo porque, jamais optamos só pela matemática. Optamos pela poesia, pela música, pelo esporte, pela mística e pelo amor.

Durante o nosso curso de mestrado tentamos trabalhar com filosofia, e no doutorado também. Filosofia e história têm sido áreas muito importantes para a nossa vida intelectual. Não somos um pesquisador porque não nos sentimos como tal. Muito mais nos sentimos com vocação de aprendiz do que com vocação de mestre. Por isso, o estarmos imersos nesse processo de reflexão nos agrada muito; e se conseguirmos fazer o mesmo com os nossos alunos será algo muito gratificante. Como professor, sempre nos sentimos felizes ao ver os nossos alunos preocupados com estudar. Nós não ficávamos preocupados com os resultados imediatos dos seus estudos. (Porque se você está procurando, fatalmente você vai achar). Mas o que nos agradava era sabermos das tentativas deles perseguindo determinados fins. Pensamos isso também baseados na nossa experiência, porque procurando muita coisa em determinadas fases deste estudo, acabamos encontrando. E às vezes parecia que nós encontrávamos aleatoriamente.

Antes da década de 80 nós só sabíamos de uma referência em educação matemática no Brasil. Era o GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática) na Universidade Santa Úrsula no Rio de Janeiro. A década de 80 foi extremamente rica para a Educação Matemática no país. As preocupações com a área se institucionalizaram. Só a título de exemplo, gostaríamos de citar alguns fatos marcantes para situar o contexto em que se dá a nossa opção por Educação Matemática: em 1980 a FUNBEC - Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências cria a Revista de Ensino de Ciências; em 1982 a SBM - Sociedade Brasileira de Matemática cria a RPM - Revista do Professor de Matemática, uma iniciativa tímida se pensarmos em Educação Matemática, mas significativa em termos de preocupação com o ensino da matemática nos 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e no ensino médio. 1984 é o ano do início das aulas do Mestrado em Educação Matemática na UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita"; em 1985 a SBM cria a revista Matemática Universitária; e em 1988 A SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática é fundada em Maringá, no estado do Paraná. Consideramos que todos esses fatos apontam para uma efetiva preocupação com o ensino e a aprendizagem da matemática nos seus múltiplos aspectos.

Optamos pela Faculdade de Educação/UNICAMP em março de 94, quando em uma visita com o intuito de sentir se era mesmo esse o curso que gostaríamos de fazer, participamos de uma aula do professor Sérgio Lorenzato e de um Seminário de Tese de Arlete de Jesus Brito.

Uma preocupação que foi se sedimentando em nós, ao longo da nossa vida acadêmica, refere-se à dimensão social do conhecimento. Como nos dedicamos à matemática, o aspecto social desta ciência tem nos preocupado. Apesar de termos nos empenhado em uma reflexão sobre o aspecto formal dessa ciência no nosso mestrado, pensávamos haver encontrado no doutorado a chance, ou melhor, o desafio para refletirmos acerca da dimensão social do conhecimento matemático.

Nosso interesse pela dimensão histórico-social do conhecimento fatalmente nos levou a uma busca por um estudo e compreensão de uma concepção social do conhecimento matemático. Daí a nossa opção por um trabalho examinando filosofias sociais da matemática. Daí o nosso interesse inicial pelas concepções de Paul Ernest e Sal Restivo. E através de Ernest, o nosso interesse pelo pensamento matemático de Wittgenstein e de Lakatos.

Pensávamos nós em escrever um pouco acerca do conhecimento, como ele acontece na opinião de Álvaro Vieira Pinto. Também pensamos em buscar inspiração em André Bourguignon (*História Natural do Homem*). Álvaro Vieira Pinto nos impressionou por ser o autor em quem percebêramos a mais ampla definição de conhecimento. Bourguignon nos atraiu pelas reflexões acerca da hominização do homem e da sociedade.

Felizmente, de forma direta, algumas idéias de Álvaro Vieira Pinto e de André Bourguignon estão aqui presentes, nesse nosso momento de consumação de um trabalho. E para uma grande satisfação nossa.

Não conseguimos ver senão no ensino a integração das várias dimensões que caracterizam o conhecimento. E por ser uma atividade eminentemente social, na qual a formação do ser racional se configura, talvez aí esteja a nossa sorte ao ouvir, do nosso professor orientador, a sugestão para trabalhar com filosofias sociais da matemática.

Por isso a vontade, inicialmente, de trabalhar com Paul Ernest e Sal Restivo.

Temos em nós a vontade de realizar uma elaboração razoável acerca da dimensão social do conhecimento matemático. E se conseguirmos efetivar esse projeto, já nos daremos por satisfeitos. E, se além disso, conseguirmos arregimentar colegas e futuros orientandos para essa reflexão, significará talvez a maior realização na nossa vida de professor universitário.

No nosso diálogo com Paul Ernest nos defrontamos com as bases do seu construtivismo social: Wittgenstein e Lakatos. Estes dois grandes filósofos são demasiado importantes para serem estudados juntos. E ao começar a nossa leitura de Wittgenstein, inicialmente a partir de Ernest, ficamos muito envolvidos por aquele filósofo. Nos libertamos de Ernest e fomos estudar Wittgenstein de forma mais independente. Por isso, tivemos que desistir de estudar Sal Restivo.

Após o estudo de Wittgenstein, nos debruçamos a estudar Lakatos. Uma obra menor, em termos de filosofia da matemática, mas influenciada por três grandes pensadores: Hegel, Polya e Popper. De modo que tivemos de tomar algumas decisões no sentido de restringir e tornar o nosso trabalho exeqüível. Confessamos que o que nos fascinou muito foi o processo de estudos e descobertas, mais do que a própria redação deste trabalho. A convivência com tantas idéias geradas por esses dois filósofos e elaboradas a partir deles foi algo realmente singular.

Assim, um trabalho que inicialmente parecia restringir-se ao pensamento de Paul Ernest e de Sal Restivo, fixou-se inicialmente no pensamento de Ernest. E daí, descambou para um estudo demorado da filosofia de Wittgenstein, seguido de reflexões sobre o pensamento de Lakatos. Mas tudo ainda dispondo da bússola de Ernest, para não correr o risco da perda de rumo. Daí, foi necessário refazer a rota. Porque era um trabalho sobre Educação Matemática e não acerca de Filosofia da Matemática. Mas foi impossível resistir à filosofia da matemática, uma vez que consideramos esta a base de toda a Educação Matemática. De toda e qualquer prática educativa em matemática. Quanto à nossa busca de uma concepção social de conhecimento aplicada à matemática, percebemos que social em matemática não significa o mesmo que social em História ou em Biologia, ou em Economia. Eliminar o platonismo da matemática depois da sua contribuição na constituição da civilização ocidental é uma tarefa quixotesca. É lutar contra o invencível. Mas nós queremos isso, e é o que vamos tentar através do nosso diálogo ao longo deste trabalho com Wittgenstein, com Lakatos e com Paul Ernest, principalmente, e com os demais interlocutores eventuais que permeiam este estudo, de forma implícita ou explícita, simpáticos ou antipáticos a uma busca de compreensão de filosofias sociais da matemática na prática educativa, ou seja, na educação matemática.

Paul Ernest é graduado em matemática, lógica e filosofia pelas Universidades de Sussex e de Londres. Fez seu PhD em Filosofia da Matemática na Universidade de Londres. Foi bolsista do Instituto de Matemática e suas Aplicações. Depois, trabalhando em computadores tornou-se professor de Matemática em uma escola secundária de Londres, em 1976. Ele então trabalhou como conferencista em Matemática e educador matemático no Homerton College, Cambridge, e no Bedfor College de Educação Superior. Foi nomeado como Conferencista em Educação, na Universidade de West Indies, em Kingston, na Jamaica em 1982, e na Universidade de Exeter em 1984. Atualmente é professor Adjunto em Educação Matemática, em Exeter, onde coordena Mestrados e pesquisas de graduação em Educação Matemática. Escreveu vários cursos de educação à distância em Educação Matemática, e o primeiro deles, escrito em 1984, até 1995 ainda era transmitido via satélite no Caribe.

Paul Ernest se insere na tradição, digamos assim, daqueles que, não satisfeitos com as filosofias correntes da matemática, vão à cata de uma filosofia da mesma que dê conta das suas insatisfações. E nessa busca acabam por elaborar uma proposta alternativa às propostas correntes.

Quando o professor Dr. Antonio Miguel sugeriu-nos trabalhar com esse autor, nós estávamos mesmo era atrás de uma concepção social de conhecimento que também pudesse aplicar-se à matemática. Porque, para nós, e aqui queremos abusar do uso de quantificadores, tudo é social. E este enunciado não nega em nada a unidade insofismável das leis físicas, das leis da natureza. Tudo é social porque o Universo, harmônico como é, só deve ser feito de cooperação. Não é à-toa que o maior ideal das filosofias, religiões, ciências e esportes é a solidariedade entre os homens. Acreditamos que existe uma unidade perpassando tudo o que existe. E, como os orientais, gostaríamos de aprofundar-nos nesses sistemas de crenças que admitem que tudo é um, o que existe é o um; e que essa aparente pluralidade do mundo sensível é só uma ilusão. Mas deixemos de lado essas nossas conjecturas mais poéticas do que científicas, e vamos ao fulcro desse nosso trabalho.

A filosofia da matemática de Paul Ernest – construtivismo social – tem por base duas outras filosofias da matemática: uma é o quase-empirismo de Lakatos, a bem da verdade, uma filosofia inacabada; a outra, o convencionalismo de Wittgenstein. Entretanto, Ernest também se utiliza de outras idéias filosóficas na composição do seu trabalho; por exemplo, idéias devidas a Ernest von Glasersfeld e Jean Piaget.

Segundo Ernest, o Construtivismo Social é uma filosofia descritiva da matemática, que tem por objetivo esclarecer a natureza da matemática, entendida em sentido amplo, com base em critérios de adequação por ele estabelecidos para esquadrinhar o que considera *uma filosofia adequada da matemática* (Ernest, *PME*, p.27; *SCPM*, p.56-7).

Achamos um tanto curioso, por um lado, o fato de Paul Ernest considerar o seu construtivismo social como uma filosofia descritiva da matemática, e por outro, estabelecer critérios de classificação para uma filosofia da matemática adequada. Parece-nos que no momento em que ele estabelece tais critérios passa a assumir uma posição prescritiva ou normativa, porque apresenta um modelo, digamos assim, de adequação para uma filosofia da matemática.

Além disso, é o próprio Ernest quem condena as filosofias absolutistas da matemática por serem prescritivas. Parece-nos claro que ele não percebe esse deslize, dado que, em nenhum momento, levanta esse problema ou tenta justificá-lo. Pensamos não haver nenhum problema em sua afirmação de que o construtivismo social é descritivo em vez de prescritivo, o que constitui uma forma de opor-se às correntes absolutistas da matemática. Mas pode ser visto como problema o fato de ele próprio estabelecer *critérios de adequação* para proceder à avaliação de filosofias da matemática. O propósito de evidenciar essa contradição é tão-somente mostrar que há estados de isenção impossíveis de serem alcançados pela razão em seus processos avaliativos. O propósito de Ernest é apresentar uma teoria alternativa ao absolutismo em filosofia da matemática, o qual é por ele julgado como uma teoria prescritiva. Mas não há como não ser prescritivo, de alguma forma, em algum momento. E ele o é quando estabelece critérios considerados adequados para se proceder à avaliação de filosofias da matemática. O que consideramos interessante nisso é que, mesmo ao longo de uma década de reflexões, ele não se dera conta dessa *impossibilidade* da razão, a saber, propor uma filosofia descritiva em oposição a uma prescritiva sem estar sendo também prescritivo.

Estamos partindo de *The philosophy of mathematics education* - (*PME* daqui por diante), publicado em 1991, pela primeira vez. Esse livro é dividido em duas partes. Na primeira, Ernest se dedica ao estudo da Filosofia da Matemática. Como todo bom construtor de um sistema novo, ele se atém a, primeiro, apresentar as inadequações das filosofias tradicionais da matemática, que são filosofias absolutistas. Depois, reconceptualiza as filosofias da matemática, aplicando a cada uma das escolas de pensamento vinculadas o que ele chama de critérios de adequação que uma filosofia da matemática adequada deveria satisfazer. Em seguida, propõe o construtivismo social como uma filosofia da matemática, aplicando também a esta filosofia os seus critérios de adequação. Desenvolve uma teoria da gênese do conhecimento subjetivo e estabelece as relações entre conhecimento objetivo e conhecimento subjetivo da matemática.

A primeira parte do livro, a que estamos nos referindo, encerra com o estabelecimento de paralelismos entre o construtivismo social e outras áreas do conhecimento, tais como a filosofia, a sociologia e a psicologia.

É interessante, num certo sentido, a atitude de Paul Ernest em, ao final de determinados capítulos do seu texto, antecipar e discutir algumas críticas que poderiam advir sobre o seu trabalho. Isso indica que esse trabalho foi realizado de forma antagônica à que Descartes usou para construir o *Discurso do Método*. Descartes se isolou de tudo e buscou esvaziar a sua mente do que houvera adquirido até então; e do limite do próprio esvaziamento, tentou reiniciar a caminhada a partir do seu *cogito ergo sum*. Na verdade, o procedimento de Descartes foi tão-somente uma metáfora muito bem construída, por isso bem sucedida.

Paul Ernest dialoga com a comunidade de matemáticos e de filósofos da matemática ao longo da construção do seu trabalho. E é bem provável que ele tenha revisto muitas partes do seu estudo, antes de publicá-lo, para responder às dúvidas levantadas por seus colegas, primeiros leitores, aqueles que têm o privilégio de ver a obra ainda sendo configurada na oficina do artista. Essa prática é bastante comum no ambiente científico. Foi assim que Feyerabend escreveu *Contra o método*, Thomas Kuhn escrevera *A estrutura das revoluções científicas*, e Fritjof Capra e tantos outros escreveram obras importantes do acervo ocidental. Também se depreende isso, no caso de Ernest, dos agradecimentos que faz no início do seu texto, publicado em 1991, com duas reimpressões: 1993 e 1995.

Em fevereiro de 1998, Paul Ernest publica o livro *Social constructivism as a philosophy of mathematics* – (*SCPM* daqui por diante). Neste volume está presente parte do que ele elaborou na primeira parte do *PME*, e mais os acréscimos, frutos do seu processo de amadurecimento e de sua reflexão, decorrentes do diálogo que estabeleceu com os seus leitores, e com os seus críticos, ao longo dos sete anos que separam as duas publicações. Mas ele afirma que entre o início de suas reflexões e esta publicação de 1998 são decorridos dez anos.

Nossa análise se centra fundamentalmente nessas duas obras, uma vez que é nelas que o autor sistematiza suas reflexões acerca do construtivismo social como uma filosofia da matemática. A obra de Paul Ernest é imensa. Ele é um educador matemático erudito e ativo, e, sobretudo, preocupado com a prática e a teoria no domínio da educação matemática.

O Construtivismo social de Paul Ernest pretende-se uma filosofia não prescritiva, mas descritiva da matemática. Tem a história como central. E considera que a gênese do conhecimento matemático está nas regras presentes na linguagem natural. Da filosofia da matemática de Lakatos, Ernest herda a concepção de que a matemática é um conhecimento falível e sempre sujeito à revisão. Vale ressaltar aqui que o falibilismo de Lakatos, por sua vez, é devedor ao falibilismo de Popper, mais precisamente à filosofia da ciência deste, para quem a ciência é falível porque *nosso trabalho é falível, como todo trabalho humano. Constantemente cometemos erros e há padrões objetivos que podemos não atingir - padrões de verdade, conteúdo e validez e outros* (Popper 1975:22-3). Talvez seja interessante notar aqui que, apesar da dívida, a concepção de falibilidade de Ernest é a mesma que a de Popper; porém, a de Lakatos difere da de ambos. Da filosofia da matemática de Wittgenstein o construtivismo social de Paul Ernest herda o convencionalismo; daí o afirmar que o conhecimento matemático tem a sua origem e está presente nas regras compartilhadas que disciplinam a linguagem natural. A partir de Wittgenstein, Ernest também afirma que o conhecimento matemático está assegurado por provas cujas bases repousam em regras e conhecimentos lingüísticos. O conhecimento matemático é visto como uma construção social.

A filosofia da matemática de Lakatos é um dos pilares da construção de Paul Ernest. O outro pilar é a filosofia da matemática de Wittgenstein. O próprio Ernest confessa estar ciente de que essas duas construções são inacabadas. A maior parte da obra de Lakatos acerca da matemática é de publicação póstuma, e não sofreu o devido burilamento em alguns aspectos, a ponto de os editores de *Provas e refutações* assumirem, na edição do livro, algumas correções do texto alegando que Lakatos o teria corrigido se tivesse tido tempo de revisá-lo. Já Wittgenstein, em sua obra, fala basicamente por epigramas. Não se trata de um texto cursivo, bem sistematizado. Mesmo assim, Ernest usa esses dois autores para fundamentar o seu construtivismo social como uma filosofia da matemática.

Construtivismo social é uma das vertentes do construtivismo. Há também o construtivismo radical, como uma teoria geral do conhecimento, exposta por Glasersfeld, cujas referências que aparecem em Ernest (*PME*: 70-1) são bem esclarecedoras. Também a esse respeito, Lerman (1989) destaca pelo menos dois tipos de construtivismo e afirma que, na teoria da aprendizagem, o construtivismo não traz consigo o mesmo compromisso ontológico que o uso do termo pelos intuicionistas. No Construtivismo social, o conhecimento é social, é óbvio. E repousa em jogos lingüísticos compartilhados (um conceito de Wittgenstein, que abordaremos mais adiante). As regras da linguagem natural é que dão os elementos para a construção do conhecimento matemático. O conhecimento é falível, está sempre sujeito à revisão, e o seu caráter objetivo depende da sua aceitação pública. Assim, um conhecimento só é considerado objetivo após a sua socialização (publicação) e aceitação pública. O conhecimento objetivo e subjetivo estão interligados. Este último sempre dando origem ao primeiro. Sendo assim, o conhecimento que um indivíduo adquire é conhecimento subjetivo. Quando ele se debruça sobre esse conhecimento subjetivo, o transforma e o publica, o mesmo pode vir a ser considerado conhecimento objetivo, a depender da sua aceitação pública. O construtivismo social trata separadamente o conhecimento objetivo e o conhecimento subjetivo e até desenvolve uma teoria da construção social de cada um.

Inicialmente não gostamos de trabalhar com Paul Ernest, que fora a nossa via de chegada a Wittgenstein e Lakatos. Mas, com o passar do tempo, fomos resistindo à nossa resistência e acabamos por começar a gostar, dado que Paul Ernest nos possibilitou acesso a reflexões muito interessantes acerca do conhecimento matemático.

Nosso primeiro contato com Ernest foi através do livro que ele editou em 1991, no qual discorre sobre filosofia da matemática e *en passant* sobre o construtivismo social. E foi a porta através da qual entramos em contato com essa filosofia. Só que, no seu segundo livro do mesmo tema, cujo título (em português) é "Construtivismo Social como uma Filosofia da Matemática", Ernest é muito mais amplo, muito mais profundo e polêmico. Inclusive porque corrige algumas afirmações do livro primeiro, além de desenvolver outras reflexões e apresentar uma bibliografia mais extensa e rica. No Capítulo IV fazemos uma abordagem do pensamento desse autor comparando os dois primeiros capítulos do seu texto de 1991 com os correspondentes do texto de 1998, no intuito de encontrar semelhanças e dessemelhanças nesses dois momentos que consideramos significativos no processo de elaboração do construtivismo social como uma filosofia da matemática. Depois, nos voltamos para um exame da filosofia da matemática de Paul Ernest, propriamente dita, seguido de uma avaliação.

Quando nos dirigíamos a algum autor citado por Ernest nos sentíamos mergulhando num outro campo igualmente vasto e rico. Sentíamo-nos envolvidos pelas questões filosóficas com as quais nos deparávamos. Mas não deixamos de nos dar conta de que o nosso trabalho era afeito à educação matemática e não à filosofia da matemática, embora nos sentíssemos fortemente inclinados para esta última.

Sentimo-nos muito satisfeitos pelo fato de termos podido chegar até onde chegamos em termos da nossa pesquisa, mesmo percebendo que há muito ainda por pesquisar, dado que o construtivismo social não é uma filosofia acabada, e nem há como sê-lo, uma vez que a prática social e a história são centrais na sua constituição.

O nosso trabalho nos leva na direção de algo que queremos alcançar: uma concepção social de conhecimento aplicada à matemática. Paul Ernest tinha uma perspectiva social e falibilista. Estudar o construtivismo social como uma filosofia da matemática implicou, de início, uma compreensão dessa ciência como não mais infalível, pois segundo a concepção de falibilidade de Ernest, tratar-se-ia de um produto humano. Seguramente, pensamos, a matemática é o escol da produção intelectual humana. Na perspectiva construtivista social, tanto as teorias matemáticas quanto o valor de verdade às mesmas atribuído são construções sociais.

Percebemos todo esse corpo conceptual, num certo sentido novo para nós, como a confluência daquilo que estávamos buscando. Se bem que está longe de nós qualquer pretensão de que concluímos este trabalho. Nem mesmo achamos que vamos concluí-lo; pois se trata de um projeto de vida.

Considerado a partir de uma perspectiva construtivista, o conhecimento é uma construção humana cujo locus está na relação do ser com o seu mundo circundante. Por isso, é da sua natureza ser dinâmico, perfectível, falível, e porque no tempo e no espaço, histórico. Essas características possibilitam uma certa estabilidade emocional ao aprendiz, porque parece que ele se identifica mais facilmente com o conhecimento em questão. Quando se consideram os objetos matemáticos, como o faz o platonismo, abstratos, isto é, preexistentes fora do espaço-tempo (Balaguer, 1998), parece que se cria uma barreira entre o aprendiz e o conhecimento, entre o aprendiz e o mestre também, porque a relação com o conhecimento vai se dar por descoberta e não por criação. E será permeada pela concepção do mestre. Nesse sentido, a concepção que se tem acerca do conhecimento ou da filosofia de uma ciência tem um papel decisivo no ensino e na aprendizagem dessa ciência. Abordaremos esse assunto na reflexão acerca das relações entre educação matemática e filosofia da matemática, no capítulo final deste trabalho.

É claro que o processo de produção social de um conhecimento tem características diferentes do processo igualmente social de sua apropriação em outros contextos, particularmente no contexto escolar. Isso porque, as características singulares dos contextos de produção e de apropriação não se reduzem umas às outras. Os propósitos, interesses, estímulos, significações e obstáculos que condicionam o processo de produção são, na maioria das vezes, radicalmente distintos daqueles que envolvem e condicionam os processos de apropriação e ressignificação. Um exemplo que ilustra a incomensurabilidade entre os contextos de produção e os de apropriação do conhecimento matemático é a discussão acerca da natureza da verdade matemática.

Essa discussão acontece dentro da própria matemática, nasce junto com ela, mas parece que só marginalmente e em alguns períodos específicos interfere de forma mais direta e efetiva na produção de tal conhecimento. Já no contexto da educação matemática essa discussão se torna central e orienta incessantemente o processo de apropriação interativa desse saber por parte de professores e alunos. Essa participação diferencial, explícita ou tácita, intencional ou involuntária, da filosofia da matemática na educação matemática mostra-se bastante fértil, uma vez que pode estimular a busca, por parte de professores e alunos, dos significados histórico-epistemológicos de conceitos, métodos e processos nos contextos de produção.

Este trabalho também busca um entendimento do pensamento wittgensteiniano (Capítulo II) acerca da matemática. Foi gratificante estudar Wittgenstein dentro e fora da perspectiva de Paul Ernest. Só o pensamento do segundo Wittgenstein foi o que interessou a Ernest. Mas procuramos conhecer um pouco também acerca do primeiro Wittgenstein. A sua obra acerca da matemática é envolvente, provocativa e polêmica. O próprio Wittgenstein nunca se considerou um filósofo da matemática, mas uma parte considerável de suas reflexões fornece contribuições importantes para a discussão acerca da natureza desse conhecimento.

Nossa atenção também se voltou para a filosofia da matemática de Lakatos (Capítulo III). Buscamos ater-nos mais à filosofia da matemática do que à filosofia da ciência lakatosianas. Ernest aborda essas duas filosofias de forma bastante abrangente e detalhada. Mas não deixamos de consultar também os críticos de Lakatos, aos quais tivemos acesso, procurando identificar e distinguir a natureza das críticas dirigidas à sua filosofia da matemática. E, nesse sentido, *Provas e refutações* é o principal foco.

É verdade que melhor seria se tivéssemos nos voltado apenas para um único filósofo. Ocorre, porém, que Ernest faz apropriações desses dois pensadores na elaboração do seu *construtivismo social como uma filosofia da matemática*. E, além de dar conta dessas apropriações, acabamos nos propondo estudar as filosofias da matemática desses autores, livre da perspectiva de Ernest. E, nesse estudo, as leituras de Wittgenstein e de Lakatos foram muito enriquecedoras para nós. Isso porque, percebêramos o quanto o pensamento desses dois filósofos se torna diretamente importante para a educação matemática, seja na constituição de uma prática, seja na avaliação dessa prática. Porque eles dão contribuições que, de alguma forma, inauguram movimentos originais em filosofia da matemática.

A produção desses dois filósofos, no que tange à filosofia da matemática, é pequena em relação à obra deles como um todo. Mas é suficientemente intrigante e inspirou muitos estudos dentro de uma perspectiva não-absolutista da matemática. A obra lakatosiana e a obra wittgensteiniana são campos férteis para muitas construções e, nesse sentido, constituem fontes de inspiração para o trabalho, tanto em educação quanto em educação matemática. E pensamos que, atrair os matemáticos puros para a discussão da filosofia da matemática fora da perspectiva absolutista, seria uma grande contribuição que a educação matemática daria à matemática. Isso porque, os matemáticos puros, quando discutem filosofia da matemática, quase sempre o fazem a partir de uma perspectiva absolutista. E conseguir que eles convivam com perspectivas falibilistas e sociais, poderia torná-los menos inflexíveis na administração dos conflitos produtores e sustentadores da cisão artificial que ainda persiste entre a matemática e a educação matemática.

Nesse sentido, tentaremos verificar também em que medida as filosofias da matemática de Wittgenstein, Lakatos e Ernest são filosofias sociais da matemática, destacando, ao final dos capítulos dedicados a cada um desses autores, os traços característicos de suas construções que nos levem a concluir a medida do social em suas respectivas filosofias da matemática. Para referenciar essa avaliação, julgamos necessário tecer algumas breves considerações acerca do modo como concebemos o conhecimento em geral e o conhecimento matemático em particular, e também do modo como aplicamos o qualificativo "social" ao conhecimento matemático. Essas concepções sobre o conhecimento e o social estarão de alguma forma servindo como elementos orientadores nas avaliações finais que tentaremos tecer em torno de cada uma dessas filosofias sociais da matemática aqui esboçadas.

Para isso, utilizaremos quatro dos seis critérios de Ernest utilizados por ele para avaliar a adequabilidade de uma filosofia da matemática (*SCPM*, p.56-7). No entanto, nesse processo, estaremos a utilizar tais critérios, um tanto modificados, e com o propósito de verificar os papéis desempenhados pelo contexto social nas respostas dadas por cada uma das filosofias sociais, aqui consideradas, a cada um dos critérios adaptados por nós e adotados como questões orientadoras da avaliação dessas filosofias, a saber:

1) Que papéis o contexto social desempenha na forma de se conceber e explicar a natureza do conhecimento matemático e o grau de objetividade ou "certeza" de seus objetos, proposições e procedimentos?

2) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da natureza e da origem dos objetos da matemática?

3) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da aplicabilidade do conhecimento matemático na ciência, na tecnologia e em outros domínios do saber?

4) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da atividade matemática dos matemáticos no presente e no passado?

Enquanto Ernest utiliza os seus critérios para discutir acerca de explicações que uma *adequada* filosofia da matemática deveria dar, optamos por tentar esboçar, de alguma forma, como o social se manifesta em alguns aspectos centrais das filosofias por nós consideradas neste estudo. Importa-nos lembrar que, nas avaliações das filosofias da matemática de Wittgenstein, Lakatos e Ernest, essas perguntas estarão em perspectiva, e de alguma forma estarão sendo esboçadas algumas respostas ao longo das discussões em torno de cada uma dessas filosofias.

Parece-nos conveniente que a reflexão acerca da atividade matemática deva ser precedida por uma reflexão, tão exaustiva quanto possível, acerca do conhecimento. Porque, pensamos, toda prática social, quando orientada por uma teoria, tem maior chance de mostrar-se fértil. E aquele que, verdadeiramente, teoriza acerca de sua ação, tem a felicidade de entrar num processo cada vez mais refinado, que inevitavelmente o dotará de uma disposição para a crítica e a autocrítica, que se refletirá no burilamento do seu pensamento e, conseqüentemente, na qualidade de sua ação.

Desde as nossas primeiras ações no terreno da formação de professores de matemática, desconfiávamos que, dentre outros expedientes, um consistente conhecimento acerca dessa área de conhecimento, bem como da sua história e filosofia, mostravam-se indispensáveis. A ausência de reflexão histórica e filosófica pode gerar práticas pedagógicas autoritárias.

Acreditamos na existência de três aspectos que caracterizam a existência humana. Chamemos esses aspectos de *dimensões* da existência, a saber - a dimensão histórica, a dimensão filosófica e a dimensão social. Essas dimensões estão presentes em todos os processos de produção e apropriação culturais.

Uma compreensão aprofundada acerca da história, da sociologia e da filosofia possibilita, acreditamos, compreender a ciência e o seu papel na cultura ocidental. E ainda permite detectar tendências e riscos no modo de vida decorrente dessa influência.

Que a valorização da dimensão teórica da ciência é o que caracteriza a civilização ocidental, ninguém duvida; e que essa valorização é uma herança grega, é óbvio. A partir daí, é possível compreender o modo ocidental de pensar. Mas é possível recuar mais e verificar ou especular acerca da gênese dos seres vivos. Este recuo é realizado por Álvaro Vieira Pinto para buscar as origens do conhecimento, já que, para ele, *não há sentido em falar de um 'conceito' de conhecimento. Seria isso uma petição de princípio, pois o conceito se define como produto do conhecimento e a simples possibilidade do enunciado do termo 'conceito' só se verifica no âmbito do conhecimento já realizado* (Pinto, 1979: 15).

Para Pinto,

> *o conhecimento existe desde que a organização da matéria começa a tomar o caráter que a diferenciará, enquanto sistema vivo, do resto da natureza, que permanecerá inerte. É um dado indisputável da ciência que a matéria existe e sempre existiu em estado de transformação permanente, que uma parte dela se diferencia num processo particular, que constitui a evolução biológica, geradora de todos os seres vivos* (Pinto,1979: 16).

A amplitude e beleza de tal concepção dão ao conhecimento limites demasiado amplos. E o caracteriza como uma atividade biológica. E, em sendo biológica, será histórica e social.

> *O conhecimento é, em toda a sua escala, um modo de atuar do ramo do processo da realidade material que se especializou em forma de vida, e se constitui pela evolução biológica. Por isso o grau que o conhecimento atinge em cada etapa dessa evolução, ou seja nas diversas espécies que se sucedem, representa sempre a característica mais saliente da realidade de cada espécie, na posição evolutiva em que se encontra. No homem, tal característica consiste em que o conhecimento só pode existir como fato social* (Pinto, 1979: 18).

A caracterização do conhecimento em Pinto é extremamente ampla. Buscando dar conta do processo do conhecimento, ele o distingue em três grandes etapas. A dos reflexos primordiais; a do saber; a da ciência. E em todas elas a *natureza* intrínseca do conhecimento é sempre a mesma:

> *é a capacidade que o ser vivo possui de representar para si o estado do mundo em que se encontra, de reagir a ele conforme a qualidade das percepções que tem, e sempre no sentido de superar os obstáculos, de solucionar as situações problemáticas, que se opõem à finalidade a princípio inconsciente, de sua sobrevivência como indivíduo e como espécie, mais tarde tornada plenamente consciente na representação do mais desenvolvido dos seres vivos, o homem* (Pinto, 1979: 20).

Para Pinto haveria várias etapas no desenvolvimento do conhecimento, e no homem, outras etapas se proliferariam até o nível superior de conhecimento que é o científico dialético. No entanto, não concordamos com a dialética hegeliana presente nas reflexões desse autor, o que não invalida a sua concepção de conhecimento.

O conhecimento, por ser próprio da matéria orgânica e por ser decorrente do *existir* do ser vivo no mundo, seria um processo biológico para Pinto; mas, também social, como ele mesmo ressalta.

Com a matéria viva surge um processo novo, que é a sujeição da matéria inerte pela matéria viva. O processo de evolução biológica se caracteriza pelo domínio que todo ser vivo, em alguma medida, exerce sobre o meio em que se encontra. E a condição indispensável para que o indivíduo ou a espécie realize o seu *domínio* da natureza é *conhecer o mundo* .

Pinto discorre de modo sistemático acerca do que poderíamos chamar de uma epistemologia de conotação hegeliano-marxista. Nenhum problema vemos aí, uma vez que essa é a concepção que o autor defende; mas alguns elementos da epistemologia evolucionária estão presentes nesse autor. Daí o nosso interesse em destacar alguns aspectos da sua construção intelectual em torno do conhecimento.

Não será negando a contradição que estaremos assentando o conhecimento, mas sim considerando os aspectos contrários de uma situação e buscando a unidade desses contrários na dinâmica das interações que configuram a existência deles, imersos nas estruturas sociais que os ocasionam. Isso porque, não são em momentos distintos que se percebe algo e o seu contrário. No momento em que algo se configura para a mente cognoscente, o faz com sua constituição plena, plena de aspectos contrários entre si.

É inegável o sucesso das ciências formais em dar conta do mundo e do homem no mundo. Mas, a elisão da contradição presente nos fenômenos gerou como que uma confiança inabalável num modelo de ciência que vem sendo cada vez mais questionado. Isso porque, as dimensões não-consideradas dos fenômenos estão, a todo instante, a mostrar as limitações e imprecisões das previsões de tais modelos.

Uma abordagem dialética dos fenômenos caracterizar-se-ia por mostrar que todo modelo seria refutado. Todo modelo estaria condenado ao descarte, porque a dinâmica dos contrários para a geração dos fenômenos mostra que haveria uma alternância entre esses aspectos contrários. E o considerar o aspecto que se mostra não seria, necessariamente, a negação da existência, enquanto fundamento não-aparente, do aspecto contrário. Por isso, quando na história do conhecimento as crises se configuram, elas nada mais são do que a pesquisa mostrando o limite do modelo unidimensional ao encontrar o *inesperado,* o não-previsto por tal modelo.

Uma abordagem dialética busca, desde o início, os aspectos contrários dos fenômenos, e não se assusta quando o modelo não dá conta disso. Afinal, a constituição do ser se dá pela impermanência do seu fundamento, ainda que em nosso modelo predominante de ciência é o ser que é o seu fundamento.

Consideramos que, talvez, o melhor caminho para que um modelo de abordagem do conhecimento seja cultivado, esteja no ensino das ciências. E como o ensino visa a atingir o ser cognoscente no trato com a sua racionalidade, uma formação de característica dialética, já nos primeiros anos de convivência social, num ambiente instigante como é ou pode ser o das nossas escolas, das nossas universidades, acreditamos, seria uma inestimável contribuição para a construção de uma prática de abordagem do conhecimento que desse conta da *unidade* ou interação entre os contrários, em vez da elisão de um contrário.

Para Pinto, quando concebidas de forma correta as relações entre o pensar formal e a dialética, a lógica desta última espécie conciliar-se-ia com o formalismo, exatamente porque o explicaria, o incluiria, definir-lhe-ia o campo de validade, esclareceria as razões que lhe permitiriam desenvolver-se em sua esfera própria, e corrigi-lo-ia nas pretensões excessivas, especialmente na ambição de fundamentar a teoria filosófica da realidade. Tal seria o motivo pelo qual o conhecimento científico se subdividiria, enquanto processo, em duas subfases: uma, corresponde à consciência do tipo ingênuo, que empregaria apenas os recursos metodológicos do formalismo lógico; e outra, que alcançaria a clarividência da consciência crítica e empregaria como instrumento decisivo à lógica dialética.

A historicidade da ciência seria, segundo Pinto, conseqüência da historicidade do método. Esta, por sua vez, seria conseqüência da *historicidade da razão*. Este último conceito poderia não ser aceito por estudiosos aferrados a um ponto de vista filosófico formalista, metafísico ahistórico. O importante é que o filósofo da ciência ou o cientista partiria de um princípio que nos pareceria inamovível: o de que a ciência, e portanto o método, e portanto a razão, seriam produtos do homem real e concreto, isto é, existente em coletividade social. Aqui se perceberia a última conexão entre a ciência e a existência social do homem.

Segundo Pinto, somente quando o pensamento não se desvinculasse do processo natural, biológico, de sua gênese, mas fosse entendido na perspectiva da sua criação no curso histórico da hominização, tornar-se-ia possível apreendê-lo segundo uma perspectiva dialética.

A clareza com que esse autor aborda as questões referentes à teoria do conhecimento, à historicidade da razão e à origem do conhecimento metódico, nos persuade, não pela força dos seus argumentos, mas pela componente dos mesmos: o homem social, histórico, existencial.

A ingenuidade inata das concepções metafísicas, e, por oposição, o caráter crítico da teoria dialética, radica precisamente em que as primeiras abstraem da existência humana, ignoram ou não mencionam, a constante presença do homem real, concreto, histórico, na atividade cognoscitiva, desde a prática metódica mais primitiva até as formulações científicas mais abstratas. A posição dialética permanece centrada no ser criador do conhecimento, e, por isso, nunca deixa de ser concreta, nunca esquece que se trata, aqui, sempre do homem *social*, mesmo quando, para efeito de formulação dos conceitos e doutrinas, esteja obrigada a se manifestar em termos gerais formalizados. Não se deveria, porém, confundir o formalismo desta posição de base dialética com o das concepções que flutuam no espaço metafísico.

O caráter biológico do processo do conhecimento, conforme Pinto, pode ser relacionado também com concepções de André Bourguignon. Este biólogo francês ratifica, em termos biológicos, a evolução do homem na construção da sua racionalidade. Eis o que diz Bourguignon:

> *é quase desnecessário lembrar que é no nível do SNC (Sistema Nervoso Central) que aparecem as maiores especificidades da espécie humana, não tanto do ponto de vista dos constituintes químicos como no da organização. O SNC humano caracteriza-se antes de tudo por uma imensa desproporção entre as vias reservadas às entradas e às saídas do sistema, que comandam a relação com o mundo exterior, e aquelas destinadas ao tratamento e à estocagem de informação* (...) *O SNC do homem permitiu-lhe um novo modo de relação com o mundo, sobre o qual tem um domínio real, ainda que parcial. Graças ao SNC, o homem tornou-se o agente de sua própria evolução, enquanto o animal continua a depender de seu ambiente, sujeito à sua influência e seus imperativos, que comandam sua sobrevivência.*

Quer por sua diversidade genética quer pela organização de seu SNC, o homem adquiriu meios para se adaptar a todos os ambientes, a todas as circunstâncias, mas talvez tenha perdido, ao mesmo tempo, meios de evoluir de outra forma que não no nível cultural (Bourguignon, 1990: 163-4).

Falando acerca da abertura e fechamento do SNC do homem, o autor relata que o SNC do homem exibe o maior fechamento. Pois as vias de entrada e saída que emparelham o organismo com o mundo externo,

não representam mais que 0,02% do conjunto, ao passo que as 99,98% restantes são consagradas aos comportamentos próprios *do sistema, isto é, ao tratamento da informação, à elaboração das necessidades, dos desejos, das intenções e das escolhas, de que dependem as condutas.*(...) *Por esse funcionamento em circuito quase fechado, o SNC do homem criou um mundo psíquico relativamente independente, que controla por meio da consciência do eu, último estádio do fechamento do sistema.*
O fechamento relativo criado pela consciência reflexiva e criativa, está associado no homem à abertura pela linguagem, não mais abertura para o mundo inanimado ou para o dos bichos e das plantas, mas para o mundo social, o da cultura, o de seus semelhantes, abertura que multiplicou as capacidades criativas de seu espírito. Infelizmente, como cada um, em virtude de sua especificidade genética e histórica, possui um sistema de referência e de avaliação muito personalizado, a comunicação pela linguagem continua sendo ainda, com demasiada freqüência, fonte de mal-entendidos entre os homens, mal-entendidos simbolizados pela história da torre de Babel (Bourguignon, 1990: 166).

O casamento entre as idéias de Pinto e Bourguignon é muito interessante. O haver mencionado a dialética no curso dessas nossas reflexões exige que precisemos melhor em que sentido estamos utilizando o termo. Gostaríamos de fazê-lo de uma forma clara e precisa. Mas nos parece que o espírito dialético não comporta essa definição definitiva. E, em se tratando de dialética científica, ficamos com o pensamento de Foulquié quando, no seu pequeno texto, *Dialética,* faz um percurso pelas várias dialéticas, desde a antigüidade grega até o momento atual, durante o qual discorre acerca da dialética científica. Esta última seria, segundo Pinto, a maior manifestação de conhecimento no homem.

Na passagem que se segue, Foulquié, busca refletir acerca da tentativa de se definir dialética:

Parece-nos, contudo, que podemos salientar em todas as formas da dialética um caráter comum: o dinamismo. A lógica é estática: uma argumentação lógica satisfaz o espírito; mas não o arrasta. Para sermos arrastados é-nos necessário um pensamento em movimento e que nos faça sair a nós próprios da inércia (Foulquié, 1978: 117).

Logo em seguida, encerrando o seu opúsculo, afirma Foulquié:

digam o que disserem os marxistas, a dialética não é um método como a lógica: consiste num caráter particular de atividade mental.
É dialético um pensamento que se esforça constantemente por se superar a si próprio, tanto indo até ao extremo das implicações lógicas do que descobriu como atingindo pontos de vista novos que parecem contradizer as suas primeiras afirmações (Foulquié, 1978: 117-8).

As nossas primeiras reflexões sobre o conhecimento matemático foram de conotação kantiana. Em seguida, enriquecemos nosso pensamento a partir de outras perspectivas, tais como a dimensão histórica e a dimensão social, inerentes ao conhecimento humano. Percebemos que o estudo da dialética (no sentido dado acima por Foulquié) poderia instrumentalizar nosso processo de reflexão para um aprofundamento que nos permitisse sínteses que caracterizassem o pensamento como atributo do homem social, histórico, posto no mundo.

Gostaríamos de evocar uma reflexão de Kant quando afirma que:

> *Não resta dúvida de que todo o nosso conhecimento começa pela experiência; efetivamente, que outra coisa poderia despertar e pôr em ação a nossa capacidade de conhecer senão os objetos que afetam os sentidos e que, por um lado, originam por si mesmos as representações e, por outro lado, põem em movimento a nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, ligá-las ou separá-las, transformando assim a matéria bruta das impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência? Assim, na ordem do tempo, nenhum conhecimento precede em nós a experiência e é com esta que todo o conhecimento tem o seu início* (Kant,1989: 36, introd. B).

Mas ao longo da sua reflexão, Kant pondera que se todo o conhecimento se inicia *com* a experiência, não quer isso dizer que todo ele derive *da* experiência. E a reflexão kantiana se dirige no sentido de categorizar o conhecimento em dois tipos: independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos, a que ele denomina de conhecimento *a priori*; e aquele conhecimento cuja origem se dá na experiência, isto é, *a posteriori*.

Muito dessa concepção kantiana permeou a nossa formação em matemática, reforçada, é claro, pelas concepções implícitas dos nossos professores que primavam por uma matemática formalista, ahistórica, isto é, nitidamente apriorística e bourbakiana, como de uma certa maneira observa Silva (1999: 57) discorrendo acerca da sua própria formação.

A nossa primeira pergunta a respeito de a matemática ser uma invenção ou descoberta, já mencionada neste capítulo, é tratada por Rav (1993, *in*: Restivo, 1993), partindo de um fragmento de um diálogo socrático de Alfréd Rényi, em que Sócrates e Hipócrates discutem a questão.

Para Rav, as pessoas concordam, conforme o uso corrente da linguagem, que Colombo não inventou a América, nem Beethoven descobriu a Nona Sinfonia, mas quando uma nova droga é sintetizada comumente fala-se de uma descoberta.

A resposta de um intuicionista, para quem as proposições matemáticas são construções mentais, é que a matemática é uma invenção. Já para o platônico, que crê na realidade matemática existente fora de nós, a nossa função seria, portanto, descobri-la ou observá-la. Já o convencionalista, pensa Rav, embora por razões diferentes, tomaria o partido do intuicionista e consideraria a matemática uma invenção. Quanto ao logicista e ao formalista, pensa Rav que, aparentemente, não estão comprometidos com essa dicotomia invenção/descoberta. *É o debate a esse respeito uma questão fútil ou pode-se usar a distinção do senso comum entre os dois termos no sentido de elucidar os componentes distintos no desenvolvimento do conhecimento matemático?* − Rav se pergunta, e desenvolve uma reflexão em torno do conceito de números primos para elucidar a questão, considerando a história dos números nas antigas civilizações. E conclui que a invenção de conceitos matemáticos está enlaçada na cultura. E utilizando uma citação de White (1956) contra o platonismo, afirma que o locus da realidade matemática é a tradição cultural. A evolução dos conceitos matemáticos, para Rav, pode ser entendida somente no contexto sociocultural apropriado (Rav, 1993: 97).

Ora, as civilizações existem no tempo, e produzem culturas. E é natural que o produto do que está sob o tempo seja histórico, porque as culturas são históricas. Entretanto, para alguns, basta que o conhecimento matemático seja logicamente consistente para ser aceito. E esse referir-se ao crivo da lógica como critério de verdade destitui esse conhecimento da sua historicidade, ou elide, na avaliação, qualquer referência à história. Mas isso não nos impede de considerar que a lógica e os critérios de verdade são produções científicas. E portanto, históricas.

Vale ressaltar que a ordem lógica é a última conquista no desenvolvimento de um conhecimento matemático, e, em geral, a formalização completa sempre se dá por mãos diferentes das do criador daquele conhecimento.

A elisão, no texto matemático, do sentido histórico, ou seja, da dimensão histórica, gerou problemas sérios na aprendizagem matemática. Porque, nos alunos, não se estabeleceu nenhuma empatia com tal conhecimento. E tornou-se sem sentido para alunos e alunas com um mínimo de curiosidade, aceitar passivamente certos conteúdos descontextualizados, apresentados apenas na ordem lógica, como se fora obra pronta e acabada, produto de uma mente singular.

A dimensão social do trabalho criador do matemático se configura de uma forma singular, porque as aplicações de uma teoria ou de um resultado matemático dependem da ação criadora de um segundo matemático em estabelecer as conexões entre aquele conteúdo e uma possível aplicação. Não obstante ocorrer que nem sempre tudo o que é criado encontre uma aplicação. Mesmo assim, tanto o matemático *puro* quanto o *aplicado* fazem parte de mundos muito restritos e a dimensão social se configura não só no fato de que ninguém sozinho se fez matemático, mas só produziu após ter a sua iniciação, a cargo de outros matemáticos, durante a sua formação, o que é um fato social. É claro que a dimensão social do trabalho criador do matemático tem muito a ver com as estruturas nas quais está inserida a vida humana, por tratar-se de estruturas de vida em grupo.

Vivemos em uma cultura, num ambiente permeado de relações sociais. E querer negar ou menosprezar a dimensão social, a componente social da nossa ação, seja na confecção de artefatos seja na de mentefatos (como diz D'Ambrósio), é no mínimo um equívoco. Queiramos ou não, somos frutos da nossa época.

Este é o momento oportuno para tornarmos mais explícita a nossa concepção de social aplicada ao conhecimento matemático. O que queremos dizer quando dizemos que o conhecimento matemático é uma produção social?

Primeiro, queremos dizer que ele é uma produção humana, iniciada e processada num mundo humano (e, portanto, no interior de culturas humanas e dentro da história humana) e, nesse sentido, não é algo que transcende (antes ou depois), em qualquer sentido, o domínio das sociedades humanas.

Segundo, que os objetos a que se refere o discurso matemático não preexistem nem à história humana e nem a qualquer construção social propriamente humana, isto é, que eles são produzidos ou construídos em resposta a problemas humanos/sociais e que não são, portanto, supra-históricos ou supra-sociais.

Em decorrência desses dois argumentos, podemos concluir que:

Terceiro, o universo ou mundo físico (mundo natural/material) não possui, em si mesmo e antes de qualquer construção humana, uma estrutura matemática (seja ela de natureza geométrica, aritmética ou algébrica); que é o homem que, em função de suas necessidades, interesses e problemas, acaba impondo (na medida em que isso seja possível, pois o mundo material também reage às intenções humanas) uma estrutura matemática à natureza (como preconiza o *segundo* Wittgenstein).

Quarto, a mente humana não possui, em si mesma e por força de quaisquer fatores de natureza exclusivamente biológica, uma estrutura matemática que funcione como 'estrutura *a priori* de partida' para a produção do conhecimento matemático ou como 'estrutura e/ou instância última' de explicação ou justificação do conhecimento matemático ou, em outras palavras: que o conhecimento matemático não é explicável em termos exclusivamente biológicos ou mentais; que o biológico não explica porque o conhecimento matemático foi o que foi, é o que é, que venha a ser o que vier a ser; que o domínio do biológico condiciona mas não determina nem a natureza do conhecimento matemático, nem a natureza e a diversidade de seus objetos e nem a objetividade ou uma pressuposta 'necessidade' do valor cognitivo de suas proposições.

Quinto, a linguagem humana pode, no máximo, condicionar, mas jamais funcionar como última instância de justificação do conhecimento matemático.

Em decorrência dos argumentos terceiro, quarto e quinto acima, os objetos a que se refere o discurso matemático não são nem transcendentais, nem preexistentes e nem empíricos; ao contrário, são construtos sociais, e a objetividade, a suposta necessidade, o suposto êxito *a priori* da aplicabilidade do conhecimento matemático ao mundo físico e a norma de verdade do mesmo não são explicáveis em termos exclusivamente empíricos, biológicos, lingüísticos ou transcendentais, mas devem ser encarados, eles próprios, como construções sociais negociadas e estabelecidas com base em critérios tais como: eficácia técnica do instrumento para a resolução de problemas dos quais participa; manutenção da consistência do sistema do qual participa, etc., critérios estes, eles próprios, negociados e estabelecidos, sancionados e revogados (isto é, tornados obsoletos, mas nunca 'falsos' ou 'falseáveis' ou 'descartáveis' por força de alguma norma exclusivamente empírica, biológica, transcendental ou lingüística) por força exclusiva da natureza dos acordos socialmente estabelecidos para se lidar com e solucionar determinados problemas sociais. Nesse sentido, a matemática, como parecia sustentar Wittgenstein sem o dizer completamente e explicitamente, seria uma ciência análoga às ciências nomológicas, isto é, a matemática seria um tipo singular de 'construção jurídica' pelo fato de normatizar o modo dos humanos estabelecerem relações com o mundo material, conceitual e simbólico (e, portanto, com o mundo material, lingüístico e ficcional) a fim de lidar com problemas sociais e humanos.

Pretendemos ainda, em função dessa reflexão acerca do social, considerar, mesmo que não de forma exaustiva, como o contexto social atua na caracterização de alguns elementos constitutivos das filosofias da matemática de Wittgenstein, Lakatos e Ernest como filosofias sociais, conforme critérios que já adotamos nesta introdução. Se bem que, ao longo das nossas considerações acerca das filosofias desses autores possa muito ser depreendido em termos de tais elementos.

As exigências de rigor que instigam os criadores de conhecimento matemático em suas buscas de coerência lógica e de interrelação dos resultados matemáticos com outros no mundo extramatemático imprimem uma dinâmica a este conhecimento, escamoteada pelo rigor da linguagem, mas presente nas suas abordagens históricas e sociológicas.

Torna-se pois extremamente artificial uma abordagem de um conteúdo matemático isolado de seus aspectos históricos. A ordem histórica se faz na dimensão sociológica do conhecimento, pois nele se configura toda a rede de relações pela qual o mesmo passou no processo de sua criação em resposta a determinadas necessidades de uma dada época.

Dentre outros fatores, pensamos que, aquilo que justificaria a ordem lógica predominante nos textos matemáticos seria a necessidade de economia de pensamento. Entretanto, no ensino, não leva a bons resultados a elisão da ordem histórica concomitante com a predominância da ordem lógica. Isso porque, a aprendizagem em si tem as suas peculiaridades, e, no processo de iniciação, que em última análise visa à continuidade da cultura e da espécie, há que se dar conta das principais dimensões do existir, do agir do sentir e do pensar humanos.

A esse respeito, ouçamos as reflexões de Legrand em sua análise da pedagogia da matemática na França, anterior a 1970, que era predominantemente de inspiração racionalista.

> *O universo matemático puro, despojado de todas as avenidas da percepção, é um universo puramente dedutivo em que, sendo o ser matemático rigorosamente definido, as conseqüências racionais decorrem necessariamente. A pedagogia das matemáticas não deve, portanto, trair a natureza daquilo que ensina. Parte dos postulados, dos axiomas e das definições que coloca de saída como evidências racionais e tira disto as conseqüências distanciadas pela adequação abstrata. Sem dúvida, o pedagogo matemático não chega a afirmar a natureza das "verdades eternas" dos postulados, dos axiomas e das definições sobre os quais se apóia: é que raramente ele é também um filósofo. Se o fosse, seu comportamento o comprova, seria discípulo de Platão ou de Descartes. É o que explica o caráter abstrato e gratuito do ensino das matemáticas que nós mesmos ou os nossos filhos recebemos como herança até aqui* (Legrand, 1973: 102).

A contextualização que se faz necessária ao processo de ensino para que a aprendizagem ocorra (e ocorrer é ocorrer de forma significativa para aquele que aprende) diz respeito a vários aspectos, intrínsecos e extrínsecos, do ato de ensinar e do processo de aprender. Com isso, falar de ensino-aprendizagem como de um processo, não sabemos se é adequado. Porque ensinar, pensamos, é uma ação. Aprender, é um processo. E isso não elimina a existência de processos no ensino nem a existência de ações na aprendizagem. Mas não é fácil descrever de forma precisa esses fenômenos que ocorrem nos processos cognoscitivos.

A criação do conhecimento tem características próprias, assim como a ação no ensino. E este tem que dar conta das dimensões do ser cognoscente. Há, pois, a dimensão biológica, a dimensão afetiva e a dimensão cognitiva, a dimensão mística e outras que quisermos elencar. Mas quanto ao viver, sentir e pensar não há dúvida. E no processo de ensino nenhum desses aspectos do ser cognoscente deve ser esquecido.

O nosso modelo de ciência, originário da Grécia antiga, priorizou o domínio do racional, do cognitivo, em detrimento de outros aspectos da totalidade do ser. Somos, portanto, seres como que cindidos ao meio. A tradição judaico-cristã acirrou mais a nossa dicotomia. E com a predominância do nosso modo peculiar de fazer ciência, somos seres profundamente partidos. De modo que o que sabemos acerca do domínio afetivo no processo de aprendizagem ainda não tem um papel significativo no ensino em geral e muito menos no ensino da matemática.

Acreditamos que não seja conveniente ensinar matemática do mesmo modo como se apresentam os resultados da criação matemática – logicamente, de forma asséptica, abstrata, isenta, racional. Como se o que sustentasse o ato criador não fosse uma grande paixão; como se o que sustentasse todo o ato de ensino não fosse um grande sentimento. Com isso não estamos a negar que não haja algum um tipo de paixão na ordem lógica. Mas esse tipo é acessível só aos profundamente vocacionados. De fato, o que está em nossa perspectiva, nesse caso, é o grande público que necessita de uma parcela significativa de matemática em sua formação intelectual para poder dar conta das exigências do mundo presente.

Se as dimensões do ser, presentes no ato criador, elididas do texto final, não forem resgatadas no ato de ensino e se fizerem presentes de alguma forma no processo de aprendizagem, o que poderá ocorrer será tudo, menos aprender. Isso porque, com a padronização do texto científico aumentou sobremaneira o papel do ensino no proporcionar o contexto da criação nos processos de aprendizagem, uma vez que tal contexto tem uma função muito significativa na composição de um ambiente, no ato de ensino, que seja favorável ao processo de aprendizagem.

Aprender é um fato subjetivo na sua consumação. Mas sabemos das condições que favorecem e das condições que desfavorecem a uma aprendizagem autêntica. E há condições objetivas e condições subjetivas que podem favorecer ou desfavorecer ao processo de aprendizagem.

É claro que a história nunca ocorre como se escreve. O papel diretor das concepções do historiador é marcante. Mas há que se compreender que lidar com o passado tem suas singularidades. E há muitas histórias da matemática, com características relativas ao referencial do historiador. Porém, a menos disso, na história se reencontra todo o trabalho artesanal dos criadores de determinados conceitos, o papel dos contextos e de determinadas relações e conexões na configuração do trabalho criador humano. Os erros, as dúvidas, e as limitações, da época ou dos criadores da ciência em questão.

No contexto histórico, ou melhor, na dimensão histórica da criação dos conceitos matemáticos reencontramos os elos perdidos da cadeia criadora, elididos do texto final, acabado. Tais elos nos permitem uma recomposição do contexto, nos possibilitando percorrer os liames do conceito criado com os demais componentes da cultura em questão. E nesse caso, a dimensão ou ordem histórica, não explícita no texto, ocupa o seu lugar singular junto à dimensão lógica e relacionada com as outras dimensões do conhecimento, no processo de ensino, tendo o seu real sentido estabelecido.

Elidir a história no texto técnico, por razões de economia, é algo plausível. Mas a elisão da dimensão histórica do conhecimento, seja no ensino ou no discurso filosófico, não costuma conduzir a bons resultados.

No devenir humano as coisas jamais são. Elas se formam, no processo histórico. De modo que, por trás de cada quadro presente, há uma cadeia genealógica de transformações sucessivas. Contínuas para uns. Descontínuas para outros. A perspectiva dessa cadeia é fundamental no entendimento do quadro atual, ainda que este seja um quadro composto só com relações lógicas, como é o caso do conhecimento matemático em formas usuais de apresentação.

Podemos entender qualquer conteúdo matemático sem nenhum recurso ao contexto histórico de sua criação? Podemos, e isso durante uma certa época foi a regra. Contudo, aprender qualquer conteúdo matemático imerso no contexto de criação do mesmo nos possibilita a percepção de que estamos entrando em contato com um conhecimento que, numa dada época, era a expressão máxima do pensamento racional na cultura ocidental e custara muita energia mental para a sua consumação. E fora o resultado das pressões internas que se estabeleceram no mundo matemático, articuladas com as pressões externas de uma determinada configuração social na época dominante cujo projeto de expansão dependia da ferramenta matemática para produzir os instrumentos que ampliassem o seu alcance.

Saber isso nos alicerça com possibilidades de ações próprias de seres críticos e nos alinha às ações dos homens de ciência e ao alcance das mesmas. E nos esclarece que os construtos de uma cultura são decorrentes da dinâmica das relações nas várias dimensões da vida em grupo no interior das formas de vida das civilizações.

A elisão da dimensão histórica do conceito de verdade, aliada à força da evidência da lógica aristotélica, influenciou, por um tempo longo em matemática, a partir da marcante influência de *Os Elementos* de Euclides, o conceito de ciência. Contudo, a expressão racional da ciência grega não significa que o grego era só razão. Se perscrutarmos a arte grega, perceberemos que o grego era muito mais, ou tanto quanto, um feixe de emoções.

Se tomarmos qualquer texto acerca da origem primitiva dos números nas civilizações antigas, vamos nos defrontar com vários tipos de explicações, plausíveis mas especulativas, acerca do princípio desses entes cuja gênese se perde no passado.

Mas encontraremos nessas explicações algo bem característico – o número sendo produzido nas relações do homem com o seu meio. O número sendo produzido nas relações, nas interações sociais, presentes nas atividades de moldagem do mundo às conveniências dos grupos.

Nesse contexto, a dimensão histórica desse conceito bastante abstrato se configura de forma impressionante. O número está presente nas primeiras percepções da mente cognoscente no seu papel de delimitação entre o eu e o outro. Entre o eu e o que não se identifica com o eu, o diferente. O número emerge, pois, na diferença, ou melhor, na tomada de consciência pela mente cognoscente, do que não é ela mesma.

A origem primitiva do número é tão *simbiotizada* no dia-a-dia das civilizações antigas que está presente de forma marcante nas línguas, indicando assim, até o tipo de sistema de numeração usado por determinados povos. De modo que a língua, e nesta, a linguagem numérica, dá conta de forma razoável do nível de relações que se estabeleciam no âmago das culturas, conforme Boyer (1974, cap.I).

Existem várias construções formais dos números. E é claro que, nessas construções, os aspectos histórico-sociais que geraram nas civilizações a necessidade de construção dessa ferramenta não aparecem de forma alguma. Isso porque, na construção de um determinado mundo da ciência matemática, importa somente as relações lógicas que dão sentido e coerência a esse mundo. De modo que aqueles aspectos da dimensão histórica, da dimensão social, não têm, ao menos nessa construção, nenhuma relevância.

A dimensão social e histórica de um determinado conteúdo matemático tem a sua relevância sobretudo em ações educativas, num modelo de ensino em que a dimensão histórica e social do conhecimento é vista como parte constituinte do saber humano no devir das civilizações. Ou quando se quer contextualizar determinado conteúdo na sua origem e desenvolvimento relacionando-o com outras áreas do conhecimento e aspectos sociais, de forma a tornar claros certos aspectos atuais da dinâmica do conhecimento, seja na sua produção, seja na sua apropriação.

A educação matemática surge, nos parece, como um movimento de dissidência dentro da matemática. Pensamos que os educadores matemáticos poderiam fazer algo para mudar esse quadro. Isso porque, além de terem um conhecimento de matemática, campo em que se deu sua formação, têm procurado também apropriar-se de conhecimentos relativos à história e à filosofia que poucos matemáticos se preocuparam em adquirir, talvez devido ao fato de a matemática pura exigir dedicação exclusiva de seus praticantes. A educação matemática pode fazer isso tomando para si muitas reflexões sobre a filosofia da matemática.

Quanto ao pensamento de Ernest, buscamos ser mais descritivos e menos prescritivos. Confessamos que, num primeiro momento, a nossa leitura desarmada do autor pareceu converter-nos à sua doutrina. Mas, vozes amigas nos convidaram a abordar essa construção com um certo distanciamento, necessário a uma análise crítica. E foi isso o que buscamos fazer num segundo momento, mas estamos cientes da probabilidade de não termos sido convincentes. Fizemos o que nos fora possível e estamos plenamente conscientes de que não esgotamos todos os flancos abertos da construção de Ernest. A riqueza do pensamento de Wittgenstein, nas diversas interpretações dos vários autores que o abordaram, favoráveis ou contrários a ele, nos pareceu um campo riquíssimo e extremamente vasto.

Finalmente, pode ser visto como uma outra razão que nos levou a desenvolver este trabalho o nosso sentimento de falta de mais discussões acerca da participação da filosofia da matemática na educação matemática. Temos colegas que vão se dedicar à educação matemática e é como se tivessem esquecido de que se graduaram em matemática, e não se apercebessem que a educação matemática é, em um certo sentido, e ainda que não exclusivamente, uma metateoria da matemática. É lamentável que isso aconteça. Estamos a especializar-nos dentro da educação matemática, campo que ainda está se expandindo, apesar de já instituído, ora como área nos departamentos de educação, ora como área nos departamentos de matemática. Além disso, trata-se de um campo que se confunde, em sua origem, com o do ensino de matemática. É óbvio que são campos diferentes, mas contíguos. Não dá para dizer onde começa a educação matemática e onde termina o ensino de matemática; o que é um não-educador matemático e o que é um não educador matemático. Trata-se, pois, de um campo multifacetado constituído simultaneamente por vários campos disciplinares, tais como a matemática, a educação, a psicologia, a antropologia, a história, a filosofia, dentre outros.

Na nossa discussão sobre a participação da filosofia da matemática na educação matemática (Capítulo V), procuramos fazer uma reflexão ampla centrada na importância, ou melhor, no papel crucial desempenhado pela filosofia e, particularmente, pela epistemologia no terreno da educação matemática. Para isso, nos ativemos a alguns autores que consideramos satisfatórios para esse nosso início de discussão, cujo foco é o papel fundamental da filosofia da matemática nas práticas pedagógicas da matemática. Finalizamos esse capítulo com sucintas considerações finais que apontam mais para nossa necessidade de aprofundamento do nosso processo de reflexão do que para conclusões. A nossa esperança é que discussões como as que foram evocadas no Capítulo V, possam se tornar comuns nos ambientes de relação entre matemáticos e educadores matemáticos.

O mérito deste trabalho, para nós, está nos muitos caminhos que ele nos aponta no que se refere à importância da filosofia, da história e da educação matemática, não só na prática docente dos educadores matemáticos como também no ambiente dos matemáticos puros. A discussão filosófica acerca da matemática pode ser assentada tanto no seio da comunidade matemática quanto no seio da comunidade de filósofos e educadores matemáticos. Aliás, essa ação já começou a ocorrer. Basta verificarmos o número de educadores matemáticos integrando departamentos de matemática em nossas universidades. A discussão sobre filosofia da matemática raramente encontra espaço entre os matemáticos puros ou aplicados. E levá-la para o centro dos cursos de matemática pode enriquecer em muito a prática docente e, conseqüentemente, a prática discente. Isso porque, consideramos que a discussão filosófica em torno da matemática fortalece os laços do matemático com o seu objeto de trabalho e abre espaço na sua prática para considerações críticas em torno das relações entre a matemática, o matemático e a sociedade. Outro aspecto que consideramos importante diz respeito à necessidade de uma discussão mais ampla e permanente acerca da natureza do conhecimento matemático no seio da comunidade de educadores matemáticos. Isso porque, sendo também a educação matemática um metadiscurso em torno da matemática, deve se reportar sempre a aspectos filosóficos da matemática como constituintes de uma eventual filosofia da educação matemática. Sentimos essa falta desde o nosso mestrado em educação matemática.

Resumindo, este trabalho apresenta-se como um resultado de um processo de estudos acerca da filosofia da matemática tendo em perspectiva a educação matemática. Tem uma tendência forte pelo social e busca, sem desconsiderar as contribuições da matemática absolutista, refletir a partir de uma perspectiva histórico-social da matemática. É ainda um início de processo diante de um campo tão amplo quanto é o da filosofia da matemática. De fato, é também, mas não apenas, uma tentativa de reflexão em torno do pensamento de Paul Ernest a propósito do *construtivismo social como uma filosofia da matemática*.

Esperamos que as nossas crenças, justificadas ou não, possam contribuir de alguma forma, atraindo o rigor de uns sobre a nossa "liberdade" e a solidariedade de outros para com a nossa deliberada "ingenuidade". *Alea jacta est*!

CAPÍTULO II

A Filosofia da Matemática de Ludwig Wittgenstein

A base wittgensteiniana de Paul Ernest está em duas obras. Uma, é o *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicado em 1921; a outra é *Remarks on the Foundation of Mathematics*, publicado postumamente, em 1956, pela primeira vez. Ernest acrescenta mais três obras de Wittgenstein à sua bibliografia, mas a grande maioria de suas citações está nas duas obras citadas.

Wittgenstein é visto por Ernest mais a propósito da sua filosofia da matemática. Entretanto, ele foi além de escritos em torno dessa ciência. Suas idéias mudam em muitos aspectos ao longo de sua vida. Por isso, há quem prefira classificá-lo como o *primeiro* Wittgenstein e o *segundo* Wittgenstein. O que caracteriza o primeiro Wittgenstein é o seu pensamento expresso no *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921). Este é um dos grandes clássicos da filosofia, sendo a única obra filosófica que Wittgenstein publicou em vida. Segundo Glock:

> *A obra marca o ponto em que o debate em torno da natureza da lógica, ocorrido no século XIX entre o empirismo, o psicologismo e o platonismo, funde-se com o debate pós-kantiano em torno da representação e da natureza da filosofia. O ponto de contato é a noção de pensamento. Tanto a discussão acerca da natureza da lógica quanto a discussão pós-kantiana acerca da natureza da representação deram-se em termos de leis do pensamento* (Glock, 1998: 25-26).

Conforme Pears, uma abordagem do pensamento de Wittgenstein deve levar em conta a mudança de filosofia e a mudança de método, que ocorre numa comparação dos *dois* Wittgenstein. Nos *dois* Wittgenstein *o objetivo era o de compreender a estrutura e os limites do pensamento; e o seu método era o de estudar a estrutura e os limites da linguagem* (Pears, 1973: 14).

São duas as principais mudanças que caracterizam os dois Wittgenstein. O *primeiro* assumia que *a estrutura da realidade determinava a estrutura da linguagem*. O *segundo* Wittgenstein, por sua vez, abandona esse pensamento e assume o contrário, isto é, que *nossa linguagem determina a concepção que temos da realidade, porque através da linguagem é que são vistas as coisas.* Tal pensamento tem alguns desdobramentos na doutrina wittgensteiniana, atesta Pears, a saber, Wittgenstein *deixa de acreditar que seja possível deduzir a preexistente estrutura da realidade a partir da premissa de que todas as línguas têm certa estrutura comum*. E essa mudança implica na desautorização de qualquer teoria *que fundamente um padrão de pensamento ou prática lingüística num alicerce independente, posto no real*. E quaisquer justificações que tais padrões de pensamento ou práticas lingüísticas requeiram têm que ser buscadas no seu próprio interior (Pears, 1973: 15).

Outra mudança que Pears assinala diz respeito à teoria da linguagem. O primeiro Wittgenstein sustentava que *as línguas partilhavam de uma estrutura lógica uniforme que poderia ser desvelada pela análise filosófica*. Já o segundo Wittgenstein vai afirmar que *a diversificação das formas lingüísticas põe a claro a estrutura profunda da linguagem (…) a linguagem não tem uma essência comum, ou, se o tiver, será mínima, incapaz de explicar as relações entre suas várias formas* (Pears, 1973: 16).

Pears considera que essa nova teoria da linguagem é uma chave para a compreensão da filosofia do segundo Wittgenstein, porque conduziu-o a uma modificação de método, a saber, deduzir a estrutura e os limites da linguagem não mais a partir de uma teoria lógica abstrata (como pensava o primeiro Wittgenstein), *mas descobri-los através de investigação empírica no contexto da vida humana* (Pears, 1973: 16; 17).

Para Wittgenstein, tanto a filosofia quanto a lógica ocupam-se do pensamento, porque refletem sobre a natureza da representação, *já que é no pensamento que representamos a realidade*. Mas os pensamentos não são entidades abstratas ou mentais, como pensava Kant, e sim *proposições, sentenças que foram projetadas sobre a realidade e que podem*, portanto, ser *completamente expressas na linguagem*. Desse modo, a filosofia estabeleceria os limites para o pensamento ao estabelecer os limites da expressão lingüística do pensamento; delinearia também, por extensão, as regras que estariam subjacentes à representação simbólica (Glock, 1998: 26).

Para o primeiro Wittgenstein, afirma Glock, *a forma lógica essencial da linguagem é idêntica à forma metafísica essencial da realidade, uma vez que encerra os traços estruturais que a linguagem e a realidade precisam ter em comum para que aquela possa representar esta* (Glock, 1998: 26). Aqui há um isomorfismo, digamos assim, entre a estrutura da realidade e a estrutura da linguagem; aliás, há mais do que um isomorfismo; trata-se de uma identidade. Essa identidade lhe pareceu plausível até que o segundo Wittgenstein resolve dissolvê-la ao considerar a relação entre a linguagem e a realidade a partir de um outro ponto de vista segundo o qual é a estrutura da linguagem que dá forma à realidade.

Para Glock, *Wittgenstein deu início à 'virada lingüística' da filosofia analítica do século XX e também à busca contemporânea de uma teoria do significado para as línguas naturais*. Isso devido ao seguinte: a) a concepção wittgensteiniana do pensamento e da representação era não-platônica e não-mentalista; b) Wittgenstein explica a lógica com base em regras para a combinação de signos; c) Wittgenstein concebe a filosofia como análise crítica da linguagem (Glock, 1998: 27-28).

Para Wittgenstein, contrariamente às concepções não-lingüísticas de Frege e Russell a respeito da lógica,

> *a linguagem ordinária disfarça a forma lógica, mas não é imperfeita do ponto de vista lógico. Analisada de forma adequada, não deixará de refletir a estrutura do pensamento. Pois a lógica é uma condição do sentido, e a linguagem ordinária é capaz de expressar todo sentido. A lógica baseada em uma teoria das funções não proporciona uma linguagem ideal, mas sim uma notação ideal que traz à luz a ordem lógica que subjaz a toda representação simbólica* (Glock, 1998:28).

> *Wittgenstein distinguiu três tipos de proposições de acordo com sua possibilidade e modo de verificação. Os enunciados sobre dados dos sentidos, as únicas proposições genuínas, que são verificados pela comparação direta com a experiência imediata. Outras proposições empíricas são hipóteses que jamais podem ser completamente verificadas, podendo só adquirir um grau maior ou menor de probabilidade. E as proposições matemáticas que não são de modo algum passíveis de verificação, uma vez que não estão nem de acordo nem em desacordo com a realidade. Seu sentido é, contudo, fornecido por suas provas* (Glock, 1998: 29-30).

Preconizava Wittgenstein no *Tractatus*, como um princípio norteador, que *as regras da linguagem refletem a estrutura da realidade* (Glock, 1998:31). Posteriormente ele sustenta que *a linguagem é autônoma*. Que a gramática não pode ser justificada através da realidade empírica ou através de significados habitantes de um domínio platônico. Para Wittgenstein *não existe uma única sintaxe lógica permeando todos os sistemas de signos;* mas o que há é sim *uma pluralidade genuína de formas de representação*. Além disso, como observa Glock, ele rejeitou a existência de proposições elementares logicamente independentes nas quais por análise lógica se deveria chegar. *O* *que é necessário para alcançar clareza acerca de questões conceituais não é a análise lógica, mas sim uma descrição de nossas práticas lingüísticas, que constituem um conjunto variado de 'jogos de linguagem'* (Glock, 1998: 31-32).

Nas *Investigações Filosóficas* manifesta-se o segundo Wittgenstein criticando toda a tradição filosófica à qual ele pertencia. Não ataca diretamente a qualquer doutrina específica, mas às pressuposições em que as doutrinas da época se baseavam, a saber, que

> *palavras são nomes, seus significados são os objetos que substituem, aos quais estão correlacionadas ostensivamente. As frases são combinações de nomes que descrevem como as coisas são. As funções essenciais da linguagem são nomear e descrever, e a linguagem vincula-se à realidade por meio de conexões entre as palavras e o mundo* (Glock, 1998: 34).

Wittgenstein rejeita essa visão. Nem todas as palavras se referem a objetos; inexiste tal coisa como *a* relação de nomeação. Mas mesmo no caso de expressões referenciais, dizer que seu significado corresponde ao objeto que substituem é fazer um mau uso do termo *significado*. O significado de uma palavra é antes seu uso em conformidade com regras gramaticais. *O significado das palavras e o sentido das frases só podem ser elucidados ao atentarmos para seu uso no fluxo da vida* (Glock, 1998: 34).

Compreender uma expressão para Wittgenstein é uma capacidade, que se manifesta no uso e na explicação corretos da expressão, e na reação apropriada a esses usos em outras pessoas. As regras lingüísticas não são entidades abstratas, máquinas lógicas que desatam a produzir suas aplicações independentemente de nós. *Seguir uma regra é uma prática: o que está de acordo com uma regra ou a transgride é algo determinado por aquilo que denominamos 'seguir a regra' ou 'ir contra a regra'* (Glock, 1998: 35).

A filosofia, para o primeiro Wittgenstein, *não é ciência da Natureza* (*Tractatus*, 4.111), não é propriamente uma ciência, mas uma atividade. *A filosofia não é teoria mas atividade* (*Tractatus*, 4.112). E em tal atividade se esclarecem as proposições não-filosóficas através de análise lógica. A tarefa legítima da filosofia é, portanto, analítica e elucidativa (Glock, 1998: 164).

> *Seu objetivo é alcançar 'um ponto de vista lógico correto', uma compreensão daquilo que pode ser dito (a saber, proposições empíricas) e de seus limites. A filosofia determina 'limites à esfera disputável da ciência', 'ao que não pode ser pensado a partir do que pode ser pensado'. Sem apresentar proposições próprias, esclarece as proposições significativas e demonstra que as proposições metafísicas violam as regras de sintaxe lógica* (Glock, 1998: 164-5).

Já em *Investigações Filosóficas*, o segundo Wittgenstein afirma:

> *A filosofia não deve, de modo algum, tocar no uso efetivo da linguagem; em último caso, pode apenas descrevê-lo.*
> *Pois também não pode fundamentá-lo.*
> *A filosofia deixa tudo como está.*
> *Deixa também a matemática como está, e nenhuma descoberta matemática pode fazê-la progredir. Um 'problema central da lógica matemática' é para nós um problema da matemática como um outro qualquer* (§124, p. 67).
> *A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamento do nosso entendimento pelos meios da nossa linguagem* (§109, p. 65).

A filosofia simplesmente coloca as coisas, não elucida nada e não conclui nada. – Como tudo fica em aberto, não há nada a elucidar. Pois o que está oculto não nos interessa.
Pode-se chamar também de "filosofia" o que é possível antes de todas as novas descobertas e invenções (§126, p. 67).

As questões filosóficas emergem da linguagem, mas não são *questões lingüísticas*: são questões acerca de realidades que nos põem em confusão por não sabermos como tratá-las adequadamente, por não sabermos como *ver* a *questão*. Por isso, a filosofia tem por missão fazer-nos *ver*. A filosofia não explica, nem deduz e nem infere nada: *põe à vista* as perplexidades nas quais nos tem metido a propensão tenaz a olvidar porque usamos certos conceitos, a pensar que há caracteres comuns às coisas, que há algo que possa chamar-se *realidade*.

Dos anos 60 para cá, ganharam força os estudos wittgensteinianos e o interesse pela obra desse filósofo. Entretanto, a influência do pensamento de Wittgenstein sobre a corrente dominante da filosofia analítica tem decrescido. Isso se deve, em parte, à preponderância de Quine e de sua concepção científica da filosofia nos Estados Unidos, e em parte ao fato de que a concepção de linguagem apresentada nas Investigações tem perdido espaço para teorias do significado desenvolvidas no Tractatus, complementadas pela lingüística chomskiana. Finalmente, a psicologia filosófica de Wittgenstein foi substituída por teorias materialistas, alimentadas por teorias neurofisiológicas e funcionalistas, que são, por sua vez, alimentadas pela ciência da computação. Mas muitos dos argumentos que, nessas áreas, são amplamente admitidos como uma refutação à abordagem de Wittgenstein, na verdade, baseiam-se em equívocos ou são inconclusivos. Além disso, a gradual reconciliação da filosofia analítica com a filosofia continental reacendeu o interesse pela obra desse autor, que fornece argumentos mais do que oportunos contra as concepções reducionistas do ser humano, abominadas, com razão, pela tradição hermenêutica (Glock, 1998: 38).

Antes de discorrer sobre a sua interpretação da filosofia de Wittgenstein, Paul Ernest elenca uma série de dificuldades decorrentes das características do trabalho desse filósofo.

Wittgenstein publicou muito pouco durante a sua vida. De modo que, após a sua morte, muitos livros foram publicados acerca dos seus escritos e cursos de leitura reconstruídos a partir de notas de seus alunos. Embora o número de publicações póstumas de Wittgenstein seja grande, é superado pela torrente de comentários sobre o seu pensamento e a sua vida. Um número considerável de textos trata da sua filosofia da matemática. É difícil para qualquer livro sobre o pensamento de Wittgenstein evitar tratar de filosofia da matemática por causa de sua preocupação central ao longo da vida com a tríade interconectada da lógica, linguagem e matemática.

A causa principal de ele ser muito pouco compreendido é que a maioria de seus escritos são inacabados. Acrescente-se a isso o seu estilo, que evitou a prosa discursiva de natureza narrativa. Em lugar disso, ele escreveu uma série de pequenos parágrafos, normalmente desconectados, notas, problemas, epigramas, vinhetas, experimentos pensados. Dessa forma, ler e compreender a sua filosofia é uma tarefa um tanto quanto difícil.

Algumas considerações preliminares de Paul Ernest acerca do trabalho, estilo e da forma de ser de Wittgenstein são bem interessantes e ajudam a perceber as dificuldades que ele enfrentou no seu processo de aproximação do autor. *De fato, compreender a filosofia de Wittgenstein envolve um mais extensivo ato de construção significativa e interpretativa do que o requerido pela maioria dos outros filósofos* (*SCPM*, p. 65).

Não há um consenso universal acerca do pensamento de Wittgenstein. Ele escreveu originalmente em alemão. E muitos dos estudos sobre o seu pensamento são a partir de versões inglesas de seus escritos.

Assim, dado o desacordo e a controvérsia que continuam até hoje, oferecer reinterpretações de Wittgenstein, como o faz Ernest, parece-lhe legítimo. Contudo, ele esclarece que sua exposição não é um exercício de erudição, nem uma exata exegese do cânone de Wittgenstein. É, em vez disso, uma interpretação pessoal que, sem dúvida, será rejeitada por alguns como subjetiva e imprecisa. Para maximizar sua fidelidade, ele constrói seu relato da filosofia da matemática wittgensteiniana em torno de um extensivo conjunto de citações a partir de escritos de Wittgenstein. Mas, no fundo, embora sua meta seja refletir sobre as idéias de Wittgenstein (do modo como ele as entende) sem muita distorção, sua proposta é apresentar sua posição sob a forma de uma plataforma sobre a qual possa desenvolver uma filosofia da matemática construtivista social.

Ernest considera que esboçar a postura filosófica de Wittgenstein em relação às áreas críticas da filosofia é fundamental para as considerações em torno da sua filosofia da matemática. A visão social radical de Wittgenstein sobre a filosofia da linguagem, sobre os processos de significação e sobre a necessidade das proposições matemáticas fornece o fundamento para a sua filosofia da matemática. Entretanto, é sobre o Wittgenstein posterior, em cujo pensamento o elemento social é central, que Ernest se detém para o desenvolvimento de sua análise, isto é, sobre o pensamento de Wittgenstein que está exposto em *Investigações Filosóficas* e *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*.

Alguns conceitos característicos da base social da filosofia de Wittgenstein são considerados por Ernest, a partir de citações do próprio Wittgenstein. Entretanto, não nos restringimos só ao pensamento de Ernest. Em alguns momentos, recorremos mesmo a outras fontes não utilizadas por ele, a algumas fontes por ele utilizadas ou a composições de fontes para elaborarmos as nossas próprias considerações.

Wittgenstein afirma que o significado de uma palavra é dado pelo seu uso na linguagem. E que só na prática de uma linguagem pode uma palavra ter significado. Este conceito ocupa um lugar central na sua obra, por conta de sua firme convicção quanto à idéia de que os problemas filosóficos estão enraizados na linguagem. Ele invoca e elucida a noção usual de significado lingüístico.

> *O significado de um signo não é um corpo de significado, uma entidade que determina o seu uso. Um signo não adquire significado por estar associado a um objeto, mas sim por ter um uso governado por regras. Se é ou não dotado de significado é algo que depende da existência de um uso estabelecido, da possibilidade de ele ser empregado na realidade, em atos lingüísticos dotados de significado; e o significado que possui depende de como tal signo pode ser usado* (Glock, 1998: 359).

Pode-se, para uma grande classe de casos de utilização da palavra 'significação' *– se não para* todos *os casos de sua utilização –, explicá-la assim: a significação de uma palavra é o seu uso na linguagem* (*IF*, §43 p. 43).

Consideramos que essa afirmação de Wittgenstein foi interpretada de modos diferentes. Glock, no seu *Dicionário Wittgenstein*, faz várias considerações acerca do significado de um signo, desde o *primeiro* Wittgenstein, passando através de suas obras e considerando os problemas que ele enfrentou na instituição desse conceito e a influência exercida por Wittgenstein sobre outros que pensaram acerca do tema.

Para Glock, a afirmação de Wittgenstein de que o significado é o uso, não só molda as filosofias lingüísticas de Ryle, Austin e Strawson, como é aceita pelos seus adversários (Quine e Dummett); e além de ser um referencial para lexicógrafos e lingüistas em trabalhos de campo, é suficientemente plausível porque a nossa aprendizagem do significado das palavras se dá no nosso aprender como utilizá-las, isto é, aprendendo as regras de uso das mesmas (Glock, 1998: 359).

Em particular, Wittgenstein afirma que o sentido de uma proposição matemática ou teorema é dado pela sua prova (e que uma nova prova de um teorema muda o seu sentido). Assim, está aqui destacando um aspecto central do uso como a indicação de significado.

A noção de significado como uso foi parte de uma mais abrangente teoria da linguagem de Wittgenstein. Esta filosofia da linguagem, que foi muitas vezes caracterizada como opondo-se ao uso de termos teóricos, concebeu *jogos de linguagem* (*Sprachspiele*) como os contextos nos quais os significados estão disponíveis. Para Wittgenstein, é o jogo de linguagem que tem prioridade - o jogo de linguagem incorporado na prática social. Refletindo sobre um ou dois exemplos de prática social incorporando um padrão de uso de linguagem ele diz:

> *Chamarei também de "jogos de linguagem" o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada* (*IF*, §7, p. 30).
> *O termo "*jogo *de linguagem" deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade, ou de uma forma de vida* (*IF*, §23, p. 35).
> *Quantas espécies de frases existem? Afirmação, pergunta e comando, talvez? - Há inúmeras de tais espécies: inúmeras espécies diferentes de emprego daquilo que chamamos de "signo", "palavras", "frases". E essa pluralidade não é nada fixo, um dado para sempre; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, como poderíamos dizer, nascem e outros envelhecem e são esquecidos. (Uma imagem aproximada disto pode nos dar as modificações da matemática.)* (*IF*, §23, p. 35).

A propósito de jogos de linguagem que envelhecem, Fisher (1967) realizou um estudo em sociologia do conhecimento matemático sobre a morte de uma teoria, qual seja, a da teoria dos invariantes.

Forma de vida é o segundo dos conceitos novos e característicos introduzidos por Wittgenstein para constituir a base de sua filosofia. Uma *forma de vida*, como eu compreendo, diz Ernest, é uma prática social humana vivida e estabelecida, com seus próprios propósitos, regras implícitas, padrões de comportamento e usos lingüísticos ou jogos de linguagem (*SCPM*, p. 69). Gostaríamos de acrescentar que esse conceito pode ser relacionado ao de *Weltanschauung* (concepção de mundo, cosmovisão). O uso que Wittgenstein faz dessa expressão enfatiza o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem. *Imaginar uma linguagem é imaginar uma forma de vida* (*IF* §19, p. 32). É o mesmo que imaginar uma *cultura*. Por conseguinte, *uma forma de vida é uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem* (Glock, 1998:173-4).

Ernest faz um sumário da teoria do significado e da teoria dos jogos de linguagem de Wittgenstein e chama a esse conjunto de *Filosofia da linguagem*. Segue-se um resumo do modo como ele aborda tais tópicos.

Termos e sentenças em geral não têm referências individuais ou significados independentes. Seus significados são idênticos a seus papéis e usos nos jogos de linguagem. Estes, por sua vez, são os padrões de comportamentos lingüísticos incorporados em tipos de atividade social: 'formas de vida'. Jogos de linguagem são baseados em regras. Estas podem ser implícitas, mas são os invariantes ou normas que sustentam padrões de comportamento lingüístico ancorados em formas de vida. Os jogos de linguagem são amplamente aprendidos por participação neles. Todavia, explicação é inegavelmente uma parte de muitos deles. Assim como os jogos não compartilham um conjunto de propriedades essenciais, mas uma "semelhança de família", também os jogos de linguagem são de variados e diferentes tipos.

As formas de vida têm prioridade; elas são o socialmente dado. Elas são os grupos identificáveis de comportamento social, práticas sociais, que podem apenas ser dados de forma extensa, porque é somente a sua existência que os legitima. Há muitas formas de vida e muitos jogos de linguagem, e qualquer palavra ou expressão particular pode estar envolvida em vários deles. As formas de vida podem se desenvolver e mudar. Da mesma maneira, os jogos de linguagem têm uma tessitura aberta e podem aumentar, mudar e levar a direções inesperadas.

Paul Ernest considera a filosofia da linguagem de Wittgenstein uma teoria revolucionária, cuja natureza radical não foi ainda completamente apreciada, especialmente em círculos científicos, embora ela tenha penetrado em muitos aspectos da vida intelectual moderna, para além da tradição anglo-americana em filosofia. Na teoria de Wittgenstein, o significado não é mais percebido como algo que relaciona a linguagem e o mundo, como ocorre na teoria do significado correspondente de Bertrand Russell. O significado reside, em vez disso, nos padrões sociais de uso, que são, eles próprios, irrevogavelmente tecidos em outros aspectos da vida social (*SCPM*, p. 71).

Essas considerações de Ernest acerca da filosofia da linguagem de Wittgenstein suscitaram-nos algumas conjecturas. Consideremos dois princípios básicos da teoria do Wittgenstein *anterior* e do Wittgenstein *posterior*. Quando, para o Wittgenstein anterior, *é a estrutura da realidade que dá estrutura à linguagem* poderemos considerar isso verdadeiro para animais cujo Sistema Nervoso Central (SNC) ainda não adquiriu a complexidade que alcançou no homem e está voltado para a função principal de sobrevivência. Porém, considerando a mudança de perspectiva no Wittgenstein posterior, para quem *é a estrutura da linguagem que estrutura a realidade*, a coisa se ajusta como uma luva, pensamos, às reflexões de Bourguignon (1990), no que se refere à sofisticação do SNC no homem, conforme ressaltamos no Capítulo I.

Realmente, é aqui que evocamos as concepções de Wittgenstein tais como jogos lingüísticos imersos nas formas de vida; este conceito, nós o vemos muito próximo do de cultura - nossa principal via de herança - que convergindo para essa base fisiológica da evolução do organismo humano, apresentada por Bourguignon, adquire, para nós, um significado muito forte no que se refere à unidade do conhecimento. Esta unidade, para nós, constitui o ponto para onde tendem todos os jogos lingüísticos, todas as nossas formas de vida; é esse o *locus* onde se poderia compreender o significado do estar no mundo, do existir em suas multifacetadas formas. Tudo no mundo humano converge, digamos assim, para uma otimização das relações dos seres humanos com esse mundo. A função do SNC na sua origem era dar conta da relação entre o organismo e o mundo. Hoje no estado de sofisticação dos organismos, e falando só de nós, humanos, toda a nossa ação criadora tem um fim: otimizar as nossas relações com o mundo. A unidade do conhecimento está na sua origem - no momento em que a matéria inerte sofreu uma divisão entre matéria orgânica e inorgânica (Pinto, 1979), e no destino: o homem é a origem e o destino de todo o conhecimento que existe.

Talvez, essa nossa forma simplória de dizer dessas nossas mais intuições do que argumentos não caiba aqui, mas consideramos por bem inseri-las nas nossas reflexões porque intuímos algo que nos possibilitou relacionar as considerações de Bourguignon com um princípio do segundo Wittgenstein e com um pensamento de Álvaro Vieira Pinto acerca da origem do conhecimento (conforme capítulo I).

As concepções expressas por Bourguignon são muito significativas para nós, uma vez que estamos a buscar uma concepção social de conhecimento aplicada à matemática, e elas constituem um argumento em favor do ponto de vista de Ernest em relação a um dos critérios que, segundo ele, uma filosofia da matemática considerada adequada deveria satisfazer, dado que relacionam ao conhecimento matemático resultados importantes de outras áreas do conhecimento, tais como a biologia, a antropologia e a arqueologia. Burguignon, refletindo acerca do surgimento da linguagem, reporta-se a estudos de crânios fósseis a partir dos quais os estudiosos concluíram que a linguagem articulada teria surgido entre cerca de 300 a 400 mil anos atrás, mas que o *Homo sapiens* e seus predecessores imediatos, há cerca de 40 a 50 mil anos atrás, tinham a mesma capacidade de linguagem que temos hoje. Outra conclusão plausível desse autor é que o pensamento antecede a linguagem. E tal conclusão se sustenta na análise de artefatos produzidos pelo homem primitivo que mostrou que, antes de ele possuir linguagem articulada, já denotava indícios de uma atividade de pensamento. E lembra Bourguignon que, em artigo publicado na *Le Débat* n.20, 131-142, Jakobson defendeu que o pensamento criador de muitos matemáticos e físicos funciona num nível que não é o da linguagem (Bourguignon, 1990: 209). Essas conclusões contrariam o pensamento de Wittgenstein, o qual rechaça a tese de que o pensamento e a linguagem são independentes. Para Wittgenstein, todo pensamento se torna algo real só no momento em que se materializa, isto é, no momento em que se gera uma ação, lingüística ou extralingüística. Haveria, talvez, segundo Wittgenstein, algo que é pensamento potencial, mas que só chegaria ao grau de pensamento fundamentalmente quando fosse de algum modo expresso (Bassols, 1988: 75).

Concordamos que o pensamento e a linguagem são independentes só se nos referirmos à linguagem articulada, porque o pensamento é bem anterior à linguagem articulada e se configura em algum tipo de linguagem; mas, uma vez que ele e a linguagem articulada se interceptam, a interdependência entre os dois nunca mais desaparece. A interceptação entre o pensamento e a linguagem teria ocorrido em um tempo indeterminado ao longo do processo de construção da linguagem articulada pelo *Homo sapiens*. Acreditamos que os dois, pensamento e linguagem, nunca existiram de forma absolutamente independente. Pois, quando os rudimentos de conformação do aparelho fonador para o estabelecimento da fala tiveram origem, o pensamento já aí estava como que a gerir essa transformação. Não é uma questão fundamental saber quem teria aparecido primeiro, se o pensamento ou a linguagem, mas sim saber acerca dos níveis de interação e interdependência existentes entre os dois.

Além de sua teoria dos jogos de linguagem, Wittgenstein desenvolve também as noções de necessidade matemática e de necessidade lógica. Seu ponto de vista é que a noção de necessidade, tal como a de inferência que se extrai seguindo as leis da lógica dedutiva, surge do acordo humano em seguir uma regra que é estipulada por (e pressuposta através de; e encravada em) um jogo de linguagem. Assim, não há força objetiva ou extra-humana que obrigue alguém a seguir uma regra lógica ou a aceitar a conclusão de uma dedução lógica. Mas, participar de certos jogos de linguagem implica aceitar certas regras. Se se rejeita a regra se está rejeitando o jogo como é entendido e jogado pelos outros. *Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são* hábitos (*costumes, instituições)* (*IF* §199, p. 92).

Certamente, a visão tradicional de que a necessidade lógica sustenta a dedução e o pensamento racional está mais fortemente estabelecida. Wittgenstein antecipa a objeção filosófica óbvia de que seguir regra, em lógica ou em outro contexto, se origina do acordo humano e não constitui uma necessidade lógica. Mas, mesmo comunicar desacordos acerca da verdade, falsidade ou necessidade pressupõe que aceitemos o uso dos termos comparativamente no discurso social e na vida. (*SCPM*, p. 71).

> *"Assim, pois, você diz que o acordo entre os homens decide o que é correto e o que é falso?" – Correto e falso é o que os homens* dizem*; e na* linguagem *os homens estão de acordo. Não é um acordo sobre as opiniões, mas sobre o modo de vida* (*IF* §241, p. 98).

Acordo, no sentido de Wittgenstein, surge de nossa participação em jogos de linguagem compartilhados (tecidos em nossas formas de vida) e não consiste de convenções adotadas arbitrariamente. Isto nos dá os limites compartilhados sobre os significados de nossa linguagem e, no fundo, nos leva a decidir o que conta como verdade e falsidade. Assim, a relação entre acordo, convenção e verdade é muito mais sutil e complexa na filosofia de Wittgenstein do que no convencionalismo ingênuo.

Ernest acha tão central esse aspecto da filosofia de Wittgenstein que o ilustra com um exemplo - a regra lógica do *modus ponens*. Assim, ele mostra que a necessidade lógica da inferência depende de formas de vida compartilhadas e participação em jogos de linguagem. Uma vez feitas essas suposições (e a maioria delas, o leitor e o escritor, como membros participantes da sociedade literária moderna não têm opção senão a de segui-las), então, a conclusão é necessária. Do mesmo modo, dado um outro conjunto mais simples de suposições acerca do jogo de xadrez, e uma configuração de quadro particular, o xeque-mate em dois lances é igualmente necessário.

Na teoria da linguagem de Wittgenstein, *linguagem* é algo que é essencialmente público, guiado por regras. Uma vez que nosso entendimento da linguagem surge de nossos jogos de linguagem compartilhados e de nossa participação em formas sociais de vida, não pode haver uma coisa tal como uma *linguagem privada*. Uma tal linguagem se referiria simplesmente às experiências privadas de uma pessoa. A visão de Wittgenstein é que a linguagem se preocupa com jogos de linguagem, que são regulados por acordos e regras e – pela sua própria natureza – são públicos. Portanto, não faz sentido falar de uma linguagem privada.

Paul Ernest se surpreende com a ausência de comentários acerca do impacto de Wittgenstein no âmbito da epistemologia. Cita Passmore, Sheffler e Chisholm, por exemplo, os quais não comentam nada a respeito.

Para Wittgenstein, não há problemas filosóficos, mas quebra-cabeças filosóficos que podem ser solucionados por análise lógica ou lingüística: *o filósofo trata uma questão como uma doença* (*IF*, §255 p. 100). Esta visão tornou-se a pedra angular da filosofia lingüística, associada à escola de Oxford, a herdeira da abordagem de Wittgenstein, nos anos 50 e 60, do século XX. Mas, se não há problemas filosóficos, não existe qualquer necessidade de teorias filosóficas. O impacto imediato de Wittgenstein resultou na contribuição de uma escola filosófica influente, mas não em uma teoria explícita. Uma área na qual ele foi muito influente foi a de filosofia das ciências sociais. Assim, segundo Ernest, os praticantes do método de Wittgenstein evitaram construir teorias, enfocando, em vez disso, os usos da linguagem natural, e, por sua vez, os construtores de teorias, tais como os epistemólogos, continuaram indiferentes a ele. Desenvolver uma teoria a partir do trabalho de Wittgenstein teria sido, aparentemente, um empreendimento contrário ao espírito de sua filosofia.

Só com o benefício do retrospecto (e com a publicação da obra de Wittgenstein) é que foi possível questionar a autocaracterização e a opinião de Wittgenstein e perceber que ele, de fato, ofereceu teorias radicais do significado, da linguagem, do conhecimento, da necessidade e da matemática. Bloor (*apud* Ernest, *SCPM,* p. 74) e Specht (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74) sustentam que o trabalho de Wittgenstein contém uma teoria implícita, porém vigorosa e geral. A opinião de Ernest é que o *método* filosófico de Wittgenstein pode ter impedido ou retardado o desenvolvimento de conseqüências de suas *teorias* filosóficas, e sugere algumas evidências para isso: os próprios escritos de Wittgenstein, afirma ele, esclarecem suficientemente que a filosofia é um método terapêutico para desfazer confusão, e não dar origem a teorias ou conhecimento permanentes. Gellner, no seu famoso ataque à filosofia lingüística, caracteriza-a assumindo que a filosofia é uma atividade, não uma doutrina, e que *a filosofia passada foi principalmente abuso de linguagem, a boa filosofia futura será o diagnóstico e a eliminação de tal abuso* Gellner (*apud* Ernest, *SCPM,* p. 74). Popper (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74) relata conflitos com Wittgenstein sobre a questão de se saber se existe ou não algum problema filosófico. Encontramos também discussões de Popper a esse respeito em Popper (1980). Passmore (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74) também sustenta que ao perseguir este método, a falha de Wittgenstein em se engajar com os escritos ou problemas da filosofia tradicional tornou-o muito inacessível.

Ernest considera ainda que, até recentemente, as implicações importantes do pensamento de Wittgenstein para a filosofia da matemática foram negligenciadas e mal entendidas. Somente na década passada, ou nas duas últimas décadas, pensadores como Toulmin (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74) Bloor (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74), Tymoczko (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 74) e Shanker (1987) estiveram reinterpretando Wittgenstein como apresentando uma radical e nova filosofia social da matemática. Este é também o seu ponto de vista.

A filosofia geral de Wittgenstein e a sua filosofia da matemática em particular mudaram ao longo de sua vida. Tanto que, como já dissemos anteriormente, é usual a classificação de dois Wittgenstein, o anterior e o posterior. Mas, acerca de temas centrais tais como a natureza do significado, da linguagem, da lógica, da necessidade e da matemática, o pensamento de Wittgenstein sofreu maiores mudanças. Além disso, a maior parte de suas visões posteriores tomou ele em domínios relativamente desconhecidos da filosofia, com uma perspectiva social e naturalista, embora sua filosofia anterior fosse prescritiva, objetivista e, certamente, não-social.

Cerca de metade dos escritos de Wittgenstein, no período compreendido entre 1929 e 1944, tematizou a filosofia da matemática (os mais importantes deles estão reunidos em *Remarks on the Foundations of Mathematics*). A concepção que Wittgenstein tem da matemática é tão original quanto e, talvez, mais polêmica que o resto de seu trabalho. A matemática é vista por ele como parte das práticas humanas. Já no *Tractatus* ele afirma que, as equações matemáticas são regras para a transformação de proposições empíricas.

Desenvolvendo essa concepção, Wittgenstein chegou a uma solução radical para o problema kantiano da possibilidade de aplicação das proposições matemáticas à realidade empírica, embora tais proposições sejam *a priori*. A explicação foi que as proposições matemáticas

> *são regras para a transformação de proposições sobre a realidade empírica. A aritmética é um sistema de regras para a transformação de proposições empíricas que versam sobre quantidades e grandezas. As proposições da geometria não constituem descrições das propriedades do espaço, mas sim regras para a descrição das formas dos objetos empíricos e de suas relações*

espaciais. Uma prova matemática é um caso de formação conceitual: ela determina uma nova regra para a transformação de proposições empíricas (Glock, 1998: 33*).*

A partir de 1930 Wittgenstein passa a comparar sistemas axiomáticos a um jogo de xadrez. A analogia tem origem nos formalistas, que tratavam a aritmética como um jogo praticado com símbolos matemáticos. Wittgenstein rejeita essa idéia. A aritmética não versa 'sobre' marcas de tinta, do mesmo modo como o xadrez não é um jogo que diga respeito a peças de madeira. Isso significa, portanto, que numerais ou peças de xadrez não devem ser concebidos como substitutos de alguma coisa. Em vez disso, o 'significado' de um signo matemático, assim como o de uma peça de xadrez, é a soma das regras que determinam os seus 'lances' possíveis. O que distingue a matemática aplicada e a linguagem, do jogo de xadrez e da matemática pura é simplesmente sua 'aplicação', o modo como interage com outras atividades (lingüísticas e não-lingüísticas) (Glock, 1998: 225).

Ernest dá um testemunho pessoal com a intenção de demonstrar a dificuldade e complexidade em se compreender Wittgenstein. Ele explica que, foi somente quando suas teorias pessoais atingiram um grau de desenvolvimento de modo a sintonizarem-se com a filosofia de Wittgenstein, que ele conseguiu ver e compreender, sob a superfície dos escritos de Wittgenstein, a sua própria filosofia da matemática.

Um dos problema mais visíveis que se manifesta quando se tenta fazer um relato da filosofia da matemática de Wittgenstein é o da literatura variada e extensiva sobre o seu pensamento, configurando uma verdadeira indústria de Wittgenstein. Em particular, há uma gama de interpretações diferentes da filosofia da matemática de Wittgenstein. Segundo Ernest (*SCPM*, p. 67), ele já foi chamado de *finitista estrito* por Kreisel e por Kielkopf, de *antropologista*, por Hao Wang, de *vigoroso convencionalista*, por Dummett, e de promotor de uma *antifilosofia da matemática*, por Maddy. Vários pensadores distintos, como Anderson, Bernays e Kreisel, afirmaram que ele equivocou-se e entendeu mal aspectos importantes dos fundamentos da matemática, tais como o teorema de Gödel. Outros pensadores como Bloor, Tymoczko e Shanker, rejeitaram ou ignoraram esta crítica.

A despeito de quase cinqüenta anos terem-se transcorrido desde a morte de Wittgenstein, a importância de seu trabalho para a filosofia da matemática é, na opinião de Ernest, ainda muito depreciada e mal compreendida. Por exemplo, o comumente agudo Kreisel caracterizou a sua filosofia da matemática como *o surpreendentemente insignificante produto de uma mente brilhante* (Kreisel, 1958: 158).

Uma avaliação mais recente pode ser inferida do fato de que a segunda edição da coleção conhecida de leituras em filosofia da matemática, editada por Benacerraf & Putnam, omitiu todas as discussões das contribuições de Wittgenstein, embora este, outrora, ocupasse a quarta parte do livro (Benacerraf & Putnam, 1964).

Interessante essa observação de Ernest acerca de o que ocorre com o pensamento de Wittgenstein perante uma perspectiva predominante na filosofia contemporânea da matemática. O fato de na civilização ocidental a matemática ser o produto que melhor representa essa *forma de vida* essencialmente racional, uma concepção que não considere essa característica ocidental primordial, ou mesmo a questione, não será, por muito tempo, facilmente aceita, ainda que se lhe tenha dado, numa certa época, considerável atenção.

Embora Benacerraf e Putnam justificassem esse movimento na introdução da segunda edição revista do livro acima citado (p. vii), a omissão é todavia curiosa, sobretudo se considerarmos a variedade de opiniões acerca do pensamento de Wittgenstein no que concerne à filosofia da matemática. Outros fatos que ilustram esta falta de acordo em torno do pensamento de Wittgenstein encontram-se no seguinte relato de Ernest sobre uma leitura de Wittgenstein, de alguma importância para a filosofia da matemática, apresentada por Kripke, e que foi fortemente criticada por Shanker por má interpretação de Wittgenstein. Shanker é, igualmente, crítico de Wright pelo que considera como uma compreensiva má interpretação da filosofia da matemática de Wittgenstein e, em particular, da sua visão da objetividade do conhecimento matemático. Shanker, por sua vez, é visto por Glock como o autor da melhor defesa que há da filosofia da matemática de Wittgenstein.

Recentemente, muitos eruditos, dentre eles Bloor, Tymoczko e Shanker têm interpretado Wittgenstein como propondo uma filosofia social da matemática. Mas, na revisão que Hacking faz de Bloor, ele o critica por infidelidade ao pensamento de Wittgenstein. A leitura de Hacking é vista por Ernest como uma sensata interpretação e desenvolvimento da filosofia de Wittgenstein para a sociologia. E acrescenta que, na verdade, parte de sua compreensão para com Bloor repousa na proximidade que sua interpretação de Wittgenstein tem da dele, e, de fato, seu débito para com Bloor se mostrará ali e em capítulos posteriores do seu livro.

Para Ernest, dar um relato explícito da filosofia da matemática de Wittgenstein é problemático por várias razões, incluindo o fato de que ele poderia ter negado ter uma filosofia da matemática. A esse respeito, Glock (1998: 33) diz que Wittgenstein dissera, pouco antes de abandonar o assunto, que sua *maior contribuição* fora para a filosofia da matemática. Ele ministrara vários cursos sobre o assunto, registrados em *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939), resultante de anotações de R. G. Bosanquet, N. Malcolm, R. Rhees e Y. Smythies, editado por Cora Diamond. Contudo, as publicações que têm surgido elucidam partes da filosofia da matemática que está implícita nos escritos de Wittgenstein (por exemplo: Klenk, 1976; Shanker, 1987; Tymoczko, *apud* Ernest *SCPM*, p. 74).

Wittgenstein foi descrito como convencionalista, embora usualmente com cautela e rejeições (Klenk, 1976). Shanker (1987) esclarece que a posição dele difere de todas aquelas previamente descritas como convencionalistas, embora haja elementos de seu pensamento que podem ser legitimamente assim descritos. Dummett (1964) se refere a Wittgenstein como o mais vigoroso convencionalista, porque ele interpreta literalmente o que Wittgenstein diz: que todo teorema matemático é adotado (ou rejeitado) livremente por convenção. Ernest vai sustentar que isso é uma paródia, baseada em erro de compreensão.

Para Ernest, Wittgenstein propôs uma filosofia social da matemática, falibilista e naturalista. Sua filosofia social da matemática é naturalista devido à sua afeição pela filosofia descritiva, que dá prioridade à prática matemática. Para Ernest, a matemática é social, desde que compreende uma ou mais formas de vida. Sua filosofia social da matemática é também falibilista porque ele explica a certeza dos resultados da matemática com base nas regras aceitas (mas sempre retificáveis) dos jogos de linguagem.

Wittgenstein rejeita a noção de que a matemática derive ou necessite derivar toda a segurança a partir de seus *fundamentos*. Rejeita o fundacionismo e os programas fundacionistas do logicismo, formalismo e intuicionismo (Klenk, 1976; Glock, 1998). Além de refutar o absolutismo e o apriorismo, afirma também, tal como o fez Kant, que o conhecimento matemático é sintético e a priori. E diz:

> *A distribuição de números primos seria um exemplo ideal do que poderia ser chamado um conhecimento sintético* a priori, *pois se pode dizer que, em nenhum caso, esse conhecimento é descoberto mediante uma análise do conceito de número primo* (*OFM*, p. 205).

O ponto de vista de Wittgenstein de que o conhecimento matemático é sintético *a priori* surge de sua convicção de que a matemática é construída pelo matemático e de que seus objetos e resultados não preexistem a essa construção. *O matemático é um inventor, não um descobridor* (*OFM*, p. 74). Assim, ele rejeita as concepções platônicas de existência independente dos objetos matemáticos.

Em relação à ontologia, o ponto de vista de Wittgenstein decorre de suas teorias do significado, do *uso* e dos *jogos de linguagem*, não sendo ele, portanto, um adepto da teoria da correspondência. Em vez de nomes matemáticos indicando objetos matemáticos, Wittgenstein afirma em sua teoria que o significado dos nomes é dado pelo seu uso em um jogo de linguagem matemático. Assim, os nomes matemáticos não necessitam ter qualquer referência independente ou extra-humana.

Para Ernest, a filosofia da matemática de Wittgenstein afirma que a matemática constitui um ramo dos jogos de linguagem. O próprio Wittgenstein diz que *a matemática ensina-nos não só a resposta de uma questão, mas todo um jogo de linguagem com perguntas e respostas* (*OFM*, p. 322). É claro para Ernest que Wittgenstein vê a matemática como um conjunto complexo de atividades e jogos de linguagem superpostos. Wittgenstein diz também, a propósito da heterogeneidade da matemática: *por que eu não deveria dizer que o que nós chamamos matemática é uma família de atividades com uma família de propósitos?* (*OFM*, p. 228). Mas isso, cremos, poderia ser dito de qualquer atividade humana, mesmo das que excedem a esfera da ciência. A física, para ficar só na esfera da ciência, pode ser vista como uma família de atividades com uma família de propósitos. Seus vários ramos, assim como os ramos da matemática, são exemplos dessa colcha de retalhos.

Ernest acresce que Pole identifica a Geometria de Euclides com um jogo de linguagem segundo a concepção wittgensteiniana. Acreditamos que a Geometria de Lobachevsky, a Geometria de Riemann, a Topologia, a Aritmética, etc. são jogos de linguagem dentro da matemática. Mas Ernest cita os vários exemplos de Wittgenstein a esse respeito para dizer que a matemática é feita de um mosaico de jogos de linguagem e que novos jogos podem ser inventados e acrescidos.

De Waismann, Ernest conclui que o ponto de vista de Wittgenstein sobre a matemática permitir-nos-ia dizer que ela é feita de vários sistemas dedutivos e que nenhum deles é privilegiado em relação aos outros. Mas dever-se-ia ressalvar, continua ele, que essa inferência é apenas parcialmente correta, uma vez que os jogos de linguagem da matemática não são todos sistemas matemáticos formais; muitas práticas matemáticas informais também constituem jogos de linguagem. Como alhures, jogos de linguagem em matemática são encontrados em formas de vida e não podem ser reduzidos a atividades lingüísticas simplesmente:

> *Poder-se-ia dizer que a compreensão de uma proposição matemática não é garantida por sua forma verbal, como é o caso da maioria das proposições não-matemáticas. Isto quer dizer – parece – que o texto não determina o* jogo de linguagem *no qual a proposição funciona* (*OFM*, p. 237).

O que é a matemática para Wittgenstein?

No *Tractatus Logico-Philosophicus*: *a matemática é um método lógico* (6.2). *Na vida, não é de proposição matemática que precisamos, usamo-la apenas para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem a ela* (6.211).

A matemática se baseia na atividade humana, mas tem uma natureza lingüística e não está calcada em uma intuição básica, como o queria Brouwer. Há pontos comuns entre o intuicionismo e o pensamento de Wittgenstein, a propósito da matemática.

Para Glock, a idéia de que as proposições matemáticas são normas de descrição explica corretamente a matemática aplicada, identificando o papel das proposições matemáticas no interior do discurso empírico. Tal idéia deveria ser suficiente para assegurar o lugar de Wittgenstein na filosofia da matemática. O estatuto apriorístico atribuído às proposições matemáticas *se deve ao fato de que, a despeito de sua aparência descritiva, seu papel é normativo: nada que as contrarie pode ser considerado uma descrição inteligível da realidade* (Glock, 1998: 243).

A antiga noção de que a matemática *é um jogo com sinais de acordo com regras*, assim como a analogia com o jogo de xadrez, persistiu nas publicações e pensamentos posteriores de Wittgenstein. Mas a base para as regras foi aprofundada e fundada na noção posterior de *forma de vida.* Esta representou uma mudança para longe da primeira posição de Wittgenstein, a qual estava bastante próxima do convencionalismo.

A concepção de matemática de Wittgenstein se desenvolveu de modo que, na sua filosofia madura, regras em matemática não são simplesmente alguma coisa aprovada ou rejeitada pelos matemáticos. Fosse este o caso, estaríamos diante de uma forma superficial de convencionalismo para o qual a necessidade lógica triunfa, inalterada, ou para o qual qualquer coisa segue. Em vez disso, as regras em matemática, de acordo com Wittgenstein, penetram fundo no coração da atividade social humana e das *formas de vida*. Para seguir uma regra, embora precisemos nos basear em um vínculo de decisão, cada passo não requer uma decisão independente. *Você não toma uma decisão: você simplesmente faz uma certa coisa. É uma questão de uma certa prática* (Wittgenstein, 1976: 237). As regras não são arbitrárias no sentido de que elas poderiam ser adotadas, quer se queira quer não, por meio de uma série de decisões desconectadas. Em vez disso, a forma de uma regra e a sua aceitação desenvolvem-se e relacionam-se com o contexto lingüístico no qual tal regra se insere e com a prática social que a produz e a instaura. Conseqüentemente, Wittgenstein vê a matemática, em grande parte, como uma atividade baseada em jogos de linguagem e em suas regras profundamente enraizadas.

> *Certamente, a matemática é em certo sentido, uma doutrina - mas também um fazer. E só pode haver 'falsos lances' como exceção. Pois se o que agora chamamos assim se tornasse a regra, o jogo no qual eles são lances falsos seria suprimido* (*IF*, II Parte, p. 204).

Segundo Shanker (1987), Wittgenstein reinterpreta as noções de objetividade e certeza matemática para significar que o conhecimento matemático apóia-se, sem dúvida, em nossos jogos de linguagem e formas de vida. Sua suposição fornece uma base consensual para o conhecimento matemático, que o torna público e, portanto, objetivo e o põe acima de dúvida, o que seria inapropriado. Mas, a existência dessa base consensual para o conhecimento matemático não implica que ele não possa mudar.

As noções wittgensteinianas de verdade, falsidade, necessidade lógica e inconsistência são muito diferentes das versões absolutistas tradicionais. O conceito central é o de acordo com uma regra. *As palavras 'certo' e 'errado' são usadas no ensino do proceder segundo uma regra. A palavra 'certo' faz o aluno seguir, a palavra 'errado' fá-lo voltar atrás* (*OFM*, p. 343).

Nesse sentido, o ponto de vista de Wittgenstein sobre o que é uma prova e o que é provado toma também um novo significado.

> *O que é firmemente seguro acerca de o que é provado? Aceitar uma proposição como firmemente segura – eu diria – usá-la como uma regra gramatical: isso remove a incerteza dela* (*OFM*, p. 139-40).

A concepção de necessidade lógica ou de necessidade matemática em Wittgenstein é baseada na noção de seguir uma regra. Os usos da linguagem (em vários jogos e contextos significativos) envolvem a aceitação de regras, que são uma precondição, *sine qua non*, para a comunicação lingüística. O acordo a que ele se refere é o compartilhar de uma forma de vida, isto é, o compartilhar de um grupo de práticas sociolingüísticas baseadas em regras comuns; é isso que é essencial para qualquer uso significativo da linguagem. Tal acordo não consiste simplesmente na aceitação voluntária de uma prática, tais como as convenções de um jogo. Em vez disso, esse acordo é construído dentro de nosso comportamento comunicativo, que pressupõe um uso comum fundamental da linguagem e um seguimento de regras Bloor (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 79).

Assim, segundo Wittgenstein, as *verdades* da matemática e da lógica dependem da aceitação de regras lingüísticas acerca do uso de termos e da gramática, assim como de regras que governam as provas. Estas regras subjacentes conferem certeza às *verdades*, pois elas não podem ser falsas, a não ser que elas próprias sejam transgredidas, o que contrariaria o uso aceito das mesmas. Portanto, são as regras lingüísticas subjacentes às *verdades* da matemática e da lógica que asseguram que elas não podem ser falsificadas. *Não tornei ainda claro o papel do erro de cálculo. O papel da proposição: 'eu devo ter calculado errado' é realmente a chave para o entendimento dos 'fundamentos' da matemática* (*OFM*, p. 183).

Para Ernest, o que Wittgenstein quer dizer com isso é que, se nossos resultados contradizem as regras subjacentes de uso, então, rejeitamos os resultados e não as regras: não questionamos as regras subjacentes (a menos que, por alguma razão, queiramos mudar o jogo). Wittgenstein propõe que a necessidade lógica do conhecimento matemático (e lógico) repousa em convenções lingüísticas ou em normas subjacentes às nossas práticas lingüísticas. *O que estou querendo dizer é que a matemática é* normativa. *Mas 'norma' não significa a mesma coisa que 'ideal'* (*OFM*, p. 359).

Um caso especial de uma regra cuja necessidade repousa em nossa adoção de convenção lingüística é a lei de contradição (o princípio de não-contradição). Para Wittgenstein,

> *uma contradição como "p.~p" equipara-se a uma tautologia como "~(p.~p)", no sentido de que não é absurda, mas sim destituída de sentido, uma vez que nada diz. A lei de contradição, em contrapartida, não é a expressão vazia "~(p.~p)", mas antes uma regra que proíbe a expressão "p.~p". O que os lógicos temem não são as contradições per se, que possuem uma função legítima, em especial nos argumentos por redução ao absurdo; mas as violações dessa regra, que ocorrem, por exemplo, quando um postulado que implica uma contradição não é abandonado* (Glock, 1998: 103).

Wittgenstein considera em si mesma inócua a força de formular uma contradição se a afirmação simplesmente invalida a si mesma. Contudo, a lei de contradição, como muitas das suposições de verdade lógico-funcional, é tecida nas regras acordadas de nossos jogos de linguagem, especialmente nas dos jogos matemáticos, e transgredi-la seria mudar significativamente a natureza desses jogos. Para Wittgenstein, a questão-chave é a de se as regras dos jogos de linguagem são inconsistentes, pois, segui-las todas, simultaneamente, seria impossível:

> *A não-validez da contradição caracteriza a técnica de nosso emprego das funções de verdade. Se permitimos que a contradição valha em nossos jogos de linguagem, alteramos essa técnica - como se partíssemos da consideração de uma dupla negação como afirmação. E essa alteração seria significativa, dado que a técnica de nossa lógica tem a ver, no que respeita a seu caráter, com a concepção das funções de verdade.*
> *... E algo parecido sucede quando descubro que as regras levam a uma contradição. Agora me vejo obrigado a reconhecer que isto propriamente não é um jogo* (*OFM*, p. 333).

Assim, Wittgenstein está de acordo com o papel privilegiado que se deve atribuir à não-contradição em um contexto metateórico, a saber, dentre as regras (e suas conseqüências) subjacentes a um jogo de linguagem. Isso ocorre porque o não-reconhecimento desse papel privilegiado levaria a ambigüidades e contradições acerca de o que é seguir uma regra, ao ocupar-se com este jogo de linguagem particular. *Agora, um jogo de linguagem pode perder seu sentido se nele ocorrer uma contradição, pode perder o caráter de um jogo de linguagem* (*OFM*, p. 172).

Uma parte central da reavaliação crítica que faz Wittgenstein da noção de necessidade lógica (e matemática) é dependente de sua discussão da noção de seguir uma regra. Regras são tecidas nos jogos de linguagem e formas de vida, incluindo a matemática, suprindo sua base *normativa*. Wittgenstein sustenta que a necessidade lógica, seja ela ao se efetuar um algoritmo, ao se provar um teorema, ao se extrair uma inferência dedutiva seja de outra natureza é explicada com base no fato de se seguir uma regra. Seguir uma regra levanta a questão da compulsão de se chegar a uma conclusão que é fixa e, ainda que não predeterminada, pelo menos única e determinada.

Traduzindo a questão da necessidade lógica na compulsão para seguir uma regra, Wittgenstein está implicitamente negando a validade de se conceber a necessidade unicamente no molde tradicional em termos objetivados e despersonalizados. Dada a sua filosofia da linguagem, isto é essencial e inevitável, visto que lógica, regras e linguagem estão na base das formas de vida humanas.

> *Dizemos: "Se realmente seguis a regra ao multiplicar, TEM QUE resultar o mesmo"... A ênfase no* ter que *corresponde tão-somente à inexorabilidade dessa atitude, tanto ante a técnica de cálculo, quanto ante as inumeráveis técnicas semelhantes.*
> *A necessidade matemática é apenas outra expressão do fato de que a matemática produz conceitos.*
> *E os conceitos ajudam-nos a compreender as coisas. Correspondem a um modo particular de lidar com situações.*
> *A matemática forma uma rede de normas* (*OFM*, p. 364).

Sobre a necessidade de se seguir uma regra, Glock, no seu *Dicionário Wittgenstein*, faz um sintético mas significativo apanhado das formas como o tema é tratado. E Shanker discute o assunto a partir de um trabalho de Kripke, buscando apontar as imprecisões deste último nas interpretações acerca da necessidade de se seguir uma regra, segundo Wittgenstein.

Em (*IF*, §199) a atividade de seguir uma regra é descrita como uma prática social, referindo-se a *costumes*, *hábitos* e *instituições*. Para Glock, a questão é saber se Wittgenstein defendia aqui uma visão comunitarista, segundo a qual seguir uma regra só é possível dentro de uma comunidade social, fato este sugerido pela afirmação de que *não é possível seguir uma regra 'privadamente'* (*IF*, §202) (Glock, 1998: 317).

Wittgenstein refletiu muito sobre a questão da necessidade, da compulsão e da natureza do seguir uma regra. Uma parte substancial da sua obra (*IF, LFM, OFM*), que inclui o volume de seus últimos escritos sobre filosofia da matemática, trata dessas e de outras noções a elas relacionadas. Ele se preocupou em elucidar a relação existente entre necessidade lógica e seguir uma regra, e como se poderia saber se a próxima aplicação de uma regra era legal. Em seu ponto de vista, nenhuma referência inicial a aplicações de regras pode determinar, de forma única, a próxima aplicação; muito menos a regra subjacente poderia fazê-lo. Wittgenstein também preocupou-se com os problemas relativos a como se poderia dizer se alguém tinha compreendido uma regra e à evidência comportamental que forneceria a prova. Concluiu que nenhum número finito de aplicações poderia demonstrar satisfatoriamente que alguém tinha compreendido o sentido desejado de uma regra.

> *Se uma regra não o obriga, então você não está* seguindo *uma regra.*
> *Mas como hei de segui-la, se posso segui-la, certamente, como queira?... que tudo possa ser interpretado (também) como um seguimento, não quer dizer, sem dúvida, que tudo seja um seguimento.*
> *Mas como então o professor interpreta a regra para o aluno? (posto que uma certa interpretação há de dar-lhe). Bem, como, senão mediante palavras e adestramento?*
> *E o aluno interiorizou a regra (*assim *interpretada) quando reage a ela de tal e tal modo.*
> *Mas o importante é* isto*: que essa reação, que nos garante a compreensão, pressupõe como contexto determinadas circunstâncias, determinadas formas de vida e de linguagem* (*OFM*, p. 350).
> *Suponha que alguém segue a série "1, 3, 5, 7, ..." escrevendo a série 2x+1; e que se pergunte: "mas, faço sempre o mesmo, ou algo diferente cada vez?"*
> *Como dizer se faz sempre o mesmo, dado que a fila sugere como há de proceder?* (*OFM*, p. 351).

Uma passagem adicional da obra de Wittgenstein torna claro, como assinala Kripke, que seguir uma regra não é algo predeterminado por realização passada, e que continuar a seguir uma regra equivale a uma tomada de decisão, e não a uma compulsão lógica.

> *Deixemos agora o aluno continuar uma série (digamos "+2") para além de 1000 - e ele a escreve 1000, 1004, 1008, 1012.*
> *Nós lhe dizemos: "Olhe o que faz!"- Ele não nos compreende. Dizemos: "Você devia adicionar* dois; *olhe como você começou a série!".- Ele responde: "Sim; não está correto? Pensei que era assim que* deveria *fazê-lo"...*(*IF*, §185 p. 87).
> *"Do que você diz, decorre pois que uma nova compreensão - a intuição - é indispensável, em cada nível, para executar a ordem '+n' corretamente!"...*
> *Mais correto do que dizer que em cada ponto é necessário uma intuição, seria quase dizer: é necessário em cada ponto uma nova decisão* (*IF*, §186 p. 88).

Na filosofia de Wittgenstein, diz Ernest, a necessidade está fundada no seguir regras socialmente aceitas (i.e., aquelas que são de uso padrão na prática matemática). Segue-se disso que nem a interpretação pessoal de um indivíduo do seguir uma regra, nem a necessidade lógica de uma prova matemática, em particular têm a base absoluta e extra-humana da certeza presumida pelo absolutismo. *A prova deve ser um procedimento do qual eu digo: sim, isto é como tem que ser; isto deve vir à tona se eu proceder de acordo com a regra* (*OFM*, p. 131). Assim, o conhecimento matemático, como qualquer outra forma de conhecimento, tem sua justificação em certas regras, jogos de linguagem e formas de vida. No caso da matemática, uma forma particular de justificação, a saber, a prova matemática, é empregada. Mas isto também repousa em convenções sociais.

Eu diria algo assim: ainda que a proposição matemática demonstrada pareça referir-se a uma realidade exterior a si mesma, ela não é mais do que a expressão da aceitação de uma nova medida (da realidade).
Obtivemos com a demonstração algum conhecimento?
Por que não direi: na demonstração consegui chegar a uma decisão?
A demonstração coloca essa decisão em um sistema de decisões (*OFM*, p. 134).

Ernest diz que embora Wittgenstein caracterize a aceitação de um novo teorema matemático como uma questão de decisão, esta não constitui uma decisão frívola ou uma adição arbitrária ao corpo do conhecimento matemático. Ela tem uma justificação, mas constitui uma decisão pelas seguintes razões. Primeiro, porque, ao participar de uma forma de vida, decidimos aceitar a base de um sistema matemático (um jogo de linguagem); desse modo, concordamos com *o modo como as coisas são feitas* nele. Segundo, porque, ao concordarmos em seguir um raciocínio dedutivo em uma prova, é porque decidimos concordar com as regras de inferência *e* com as suas aplicações particulares na questão considerada, e não porque estamos obrigados a fazer assim. Conseqüentemente, decidimos aceitar o teorema como uma nova peça do conhecimento matemático.

Recorro à demonstração e digo: "Sim, é assim que tem que *ser; assim hei de estabelecer o uso de minha linguagem".*
Diria que o 'ter que' *é como um trajeto que ponho na linguagem* (*OFM*, p. 136).

A decisão não é nem arbitrária nem predeterminada. É uma decisão composta que é construída com base em várias escolhas anteriores e com base na escolha de seguir e manter nosso acordo com uma linha particular de raciocínio. Não necessitamos estar conscientes de todas essas decisões ao decidirmos aceitar o teorema como um novo item do conhecimento matemático. Mas, epistemologicamente, ao estabelecer o que constitui a base do teorema, aceitamos reconhecer seu papel.

Para Ernest, o papel do assentimento na aceitação da prova matemática contrasta notavelmente com a visão tradicional da prova, na qual a necessidade lógica é preeminente. Segundo ele, o ponto de vista de Wittgenstein é o de que a prova matemática serve para justificar um item do conhecimento matemático através de sua persuasão, não através de sua inerente necessidade lógica. *Em uma demonstração concordamos com alguém* (*OFM*, p. 40). Naturalmente, a estrutura lógica da prova e a referência a regras e normas de jogos de linguagem aceitos são uma parte essencial de sua força persuasiva.

Uma prova matemática deve ser perspícua... (*OFM*, p. 117)
Eu quero dizer: se você tem uma prova padrão que não pode ser considerada, e, por uma mudança na notação, você muda-a para uma que pode, então, você está produzindo uma prova, onde não havia nenhuma antes (*OFM*, p. 118).

No fundo, uma prova é uma narrativa para consumo humano, *um procedimento que é visual* (*OFM*, p. 143), e não uma estrutura objetiva. Pois a função primária de uma prova é convencer, e a sua estrutura lógica é exatamente o meio para este fim. Assim, o conhecimento matemático está fundado na persuasão e aceitação humanas.

A filosofia da matemática de Wittgenstein solapa o platonismo, que leva os matemáticos a crerem que a descoberta de proposições e objetos matemáticos é predeterminada, sempre que um sistema matemático seja especificado. Esta visão sugere que as conclusões das provas matemáticas, os termos das seqüências matemáticas, etc., forçam-nos, eles próprios, uma vez estabelecidas as condições iniciais, a chegar a determinadas conclusões. Wittgenstein rejeita isso mostrando que tal compulsão não existe. O seu ponto de vista é o de que todas essas tais conseqüências, seqüências, etc. têm de ser criadas pelo matemático, e não se pode dizer que existam até que elas sejam criadas: *o matemático não é um descobridor: ele é um inventor* (*OFM*, p. 74). Mesmo depois de enumerar incalculáveis milhões de termos em uma seqüência dada por uma regra, a continuação *tem de ser inventada exatamente como toda a matemática* (*OFM*, p. 226).

O matemático que constrói uma nova prova sempre cria um novo conceito (ou muda o significado de um conceito existente)

> *Quando disse que uma demonstração introduz um novo conceito me referia a algo assim: a demonstração acrescenta um novo paradigma aos paradigmas da linguagem...*
> *Diríamos: a demonstração muda a gramática de nossa linguagem, muda nossos conceitos, produz novas conexões e cria o conceito dessas conexões. (Não estabelece que elas estejam lá; elas não existem até que se façam-nas)* (*OFM*, p. 136).

Assim, Wittgenstein não só vê as proposições e os teoremas matemáticos como invenção dos matemáticos, mas também vê os conceitos da matemática e os sentidos das expressões matemáticas como invenção.

Devido ao modo de conceber a produção do conhecimento matemático, que parece torná-lo construtivamente ainda mais rigoroso do que o modo como os intuicionistas o concebiam, Wittgenstein foi chamado por Kielkopf e Kreisel de um “finitista estrito”. Ernest mantém a posição de que essa classificação que eles fazem de Wittgenstein está baseada em um erro fundamental de entendimento. Wittgenstein, sem dúvida, ataca suposições e modos de discurso platônicos quando afirma que toda a matemática tem de ser inventada e que a criação humana é central neste processo. Mas isto não faz dele um finitista estrito no mesmo sentido que diríamos que Brouwer é um intuicionista. Isso porque, as notas de Wittgenstein são reflexões filosóficas sobre a prática matemática e são bastante consistentes com a atividade matemática. Ele não afirma que a matemática não-finitista é sem sentido ou que ela precisaria ser reformada (Klenk, 1976; Shanker, 1987). Para Klenk, Wittgenstein é chamado de finitista estrito porque ele se preocupou quase que exclusivamente com exemplos e procedimentos de cálculo elementares. Ele parece ser cético quanto a resultados tais como o teorema de Cantor, que leva-nos a um paraíso claramente não-finitário. Além disso, Klenk observa que ele põe muita ênfase na atividade dos matemáticos. A filosofia de Wittgenstein é descritiva em vez de prescritiva. Silva (1993), em *Wittgenstein on Irrational Numbers*, discorda que a filosofia da matemática de Wittgenstein seja descritiva, e discorre a propósito da perspectiva wittgensteiniana dos números irracionais. Wittgenstein não sugere que só procedimentos finitários sejam permitidos em matemática, nem está dando a ninguém uma licença para tirar qualquer conclusão que deseje no fim de uma prova. As objeções de Wittgenstein são quase sempre dirigidas, não aos resultados lógicos matemáticos, mas ao que ele considera interpretações filosóficas impróprias desses resultados (Klenk, 1976: 9).

> *Não estou dizendo que as proposições transfinitas são falsasmas que quadros errados vão com elas. E quando você vê isto, o resultado pode ser o de que você perca seu interesse. Isto pode ter*

enormes conseqüências mas não conseqüências matemáticas, não as conseqüências que os finitistas esperam (Wittgenstein, 1976: 141).

Em outro lugar, *OFM*, ele discute infinito acabado, teoria dos conjuntos e a prova de Cantor da não-enumerabilidade dos números reais sem qualquer escrúpulo ou censura acerca do emprego de raciocínio não-finitista.

Uma evidência adicional para o fato de que Wittgenstein não adota uma posição construtivista firme pode ser encontrada no tratamento que ele dá à dupla negação.

...se partíssemos da consideração de que uma dupla negação é uma afirmação... esta alteração seria significativa, porque a técnica de nossa lógica está conectada, em seu caráter, com a concepção das funções de verdade (*OFM*, p. 333).

Assim, Wittgenstein reconhece a lei de dupla negação como parte de "nossa lógica" e sustenta que omiti-la envolve mudança na lógica (clássica). Mas os intuicionistas e outros construtivistas rejeitam firmemente essa lei. Em seu *Philosophical Grammar* e *Philosophical Remarks*, Wittgenstein afirma a centralidade da lei do terceiro excluído na prática da lógica e da matemática, assim como de provas de existência não-construtiva, *contra* os intuicionistas, como Maddy (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 85) e Lear (*apud* Ernest, *SCPM,* p. 85) enfatizam.

Wittgenstein sustenta que o papel do filósofo da matemática não é o de resolver problemas matemáticos ou o de reformar a matemática.

Seu trabalho em filosofia é, como se fosse uma negligência em matemática.
Não se trata de erigir um novo edifício, ou de construir nova ponte, mas de se descrever a geografia tal como ela é agora...
Isso ocorre porque não é usual em filosofia da matemática reelaborar provas em novas formas ...
Também há 500 anos era possível uma filosofia da matemática, uma filosofia do que então era a matemática (*OFM*, p. 252-3).

Esse posicionamento é uma rejeição nítida do ponto de vista defendido pelas várias filosofias construtivistas e intuicionistas, de que a matemática necessita ser reformada. De acordo com Wittgenstein, fazer isso seria fazer matemática. Em contraste, o papel da filosofia da matemática é naturalístico, isto é, o de descrever a prática matemática e não o de praticar matemática e, muito menos, o de reformá-la. É desse modo que a afirmação de que Wittgenstein é um *finitista estrito* é refutada por Ernest.

Parece-nos que também Glock concorda com Ernest quando afirma, acerca da concepção de número de Wittgenstein, que ele

conservou a idéia de que os números são o produto de uma técnica. Em decorrência disso, rejeitou a noção de infinito atual. O fato de que a série dos inteiros é interminável não significa que se refira a uma totalidade abstrata, mas sim que a possibilidade de repetir a operação "+1" é ilimitada. A idéia de infinito é derivada da idéia de uma técnica ilimitada de construção sígnica, que pode ser continuada indefinidamente. Uma classe finita é dada por uma lista de seus membros; uma classe infinita é dada por uma lei de construção, o princípio de indução (Glock, 1998: 265).

embora a abordagem de Wittgenstein seja construtivista, [ela] *não implica uma forma de finitismo, e muito menos um finitismo estrito (...) Wittgenstein não nega que existam classes* *infinitas; entretanto, a diferença entre elas e as classes finitas não se limita ao tamanho, sendo também uma diferença categorial, a saber, aquela que distingue uma lista enumerável de uma operação ilimitada* (Glock, 1998:265).

Ernest observa que Wittgenstein reconhece a legitimidade da filosofia da matemática, a despeito de sua postura antiteórica em filosofia. De fato, esta postura se torna manifesta em sua defesa de uma filosofia da matemática descritiva (oposta à prescritiva ou reformadora).

É a tarefa da filosofia... tornar-nos possível a obtenção de uma visão clara do estado da matemática... (*IF*, §125 p. 67).
A filosofia simplesmente coloca as coisas diante de nós, e não explica nem deduz nada (*IF*, §126 p. 67).

Ernest conclui o seu relato da filosofia da matemática de Wittgenstein considerando-a uma complexa e sofisticada perspectiva que desafia muitas das pressuposições e análises das abordagens tradicionais da filosofia da matemática, assim como seus princípios. Na perspectiva do modo como Wittgenstein reconceptualiza a própria filosofia da matemática e algumas das noções centrais da mesma, tais como verdade, regra, necessidade e prova, não é surpresa para ele que esse filósofo seja mal entendido; ou entendido de formas tão antagônicas, acrescentaríamos.

Avaliação da Filosofia Social da Matemática de Ludwig Wittgenstein

O nosso propósito aqui é tentar esboçar de que maneira o contexto social atua na filosofia da matemática de Wittgenstein, conforme os seguintes critérios já explicitados na introdução deste trabalho, a saber:

1) Que papéis o contexto social desempenha na forma de se conceber e explicar a natureza do conhecimento matemático, e o grau de objetividade ou "certeza" de seus objetos, proposições e procedimentos?
2) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da natureza e da origem dos objetos da matemática?
3) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da aplicabilidade do conhecimento matemático na ciência, na tecnologia e em outros domínios do saber?
4) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da atividade matemática dos matemáticos no presente e no passado?

Esta breve consideração põe em destaque a novidade das idéias de Wittgenstein para a filosofia da matemática, mas não revela as dificuldades que ele teve de encarar para superar posições filosóficas tão profundamente enraizadas em si mesmo quanto no resto da comunidade filosófica. Contudo, a magnitude dos obstáculos que ele encarou lança alguma luz sobre as razões pelas quais teria sentido a necessidade de rejeitar a abordagem tradicional da filosofia, especialmente da filosofia da matemática. Sua abordagem caracterizou-se por mudar as questões às quais se dirigir, e não exatamente por mudar as respostas às velhas questões. Isto significou uma quebra revolucionária com a tradição, uma reconceptualização do campo.

Pode-se dizer, porém, que a filosofia de Wittgenstein, embora revolucionária, não chegou a estabelecer uma ruptura tão completa com a tradição quanto ele próprio chegou a acreditar. Isso porque, ele não invalidou toda a filosofia existente antes dele, mas substituiu-a mediante a introdução de um método novo de pesquisa. Wittgenstein oferece uma abordagem radicalmente nova para a filosofia da matemática, mas no coração dela, a despeito de sua negação, encontra-se um novo conjunto de problemas, análises, conceitos e teorias. Contudo, sua filosofia da matemática é suficientemente revolucionária a ponto de várias décadas terem se passado antes de ela começar a ser entendida e apreciada. Mas ela pode agora ser vista como uma presciente contribuição para a tradição *dissidente* (embora Aspray e Kitcher não mencionem Wittgenstein). Esta tradição dissidente pode ser caracterizada como descritiva e falibilista, e a abordagem dada por Wittgenstein à filosofia da matemática possui, certamente, essas duas características.

Embora o convencionalismo de Wittgenstein seja singular ou idiossincrático, e bem menos profundo do que o que lhe é atribuído pelos que o consideram de forma diferente da de Ernest, conquanto o primeiro Wittgenstein fosse convencionalista, o segundo, ao qual Ernest se reporta na sustentação do seu construtivismo social, se afastou consideravelmente da própria condição inicial de convencionalista. Além disso, argumenta-se que as reflexões levadas a cabo pelos que se contrapõem à filosofia de Wittgenstein e insistem em considerá-lo um convencionalista, o fazem com erros de interpretação.

Ernest também não se furta a fazer uma avaliação crítica da filosofia da matemática de Wittgenstein. Ele mesmo levanta a questão acerca da fidelidade de sua leitura e se pergunta se ela poderia ser vista como uma reflexão acurada da filosofia da matemática daquele filósofo, uma vez que se mostra ciente de que a afirmação de que Wittgenstein teria proposto uma filosofia da matemática articulada poderia ser criticada como um erro de interpretação. Essa avaliação de Ernest é constituída tanto por respostas ou análises de críticas anteriores feitas a Wittgenstein, com as quais se mostra ou não em acordo, como também por comparações de críticas antagônicas dirigidas a Wittgenstein, com uma das quais se mostra em acordo.

Considerando o que diz Wittgenstein acerca da filosofia, Maddy interpretou-o como propondo uma antifilosofia da matemática que não se esforça em inserir-se na discussão relativa à veracidade das teorias matemáticas. Ernest considera que o estilo de Wittgenstein dá base para essa interpretação de Maddy, dado que o último Wittgenstein oferece exemplos concretos de pormenores, e não de generalidades, na tentativa de evitar a construção de uma teoria ou metafísica. Esse fato contradiz a própria interpretação de Ernest, e ele próprio se mostra consciente disso.

Por outro lado, Popper (1980) sustenta que existem problemas filosóficos e é a ocupação da filosofia lidar com eles, embora, argumenta ele, *problemas filosóficos genuínos têm sempre raízes nos problemas urgentes fora da filosofia*, (...) *na matemática, por exemplo* (Popper, 1980: 100). Como Popper e outros, Ernest rejeita a postura antifilosófica de Wittgenstein com base no argumento de que as afirmações dele a esse respeito são inconsistentes com a sua própria prática filosófica. Isso porque, ele gastara anos desenvolvendo uma estrutura filosófica com característica e constructos teóricos novos, tais como *jogos de linguagem*, *forma de vida*, etc. Isso, para Ernest, é filosofia e teoria (embora a proposta de Wittgenstein fosse a de acomodar a prática na filosofia). Esses constructos, para Ernest, dirigem-se ao esclarecimento da prática e resolvem problemas filosóficos de fato, em direta contradição com as afirmações feitas pelo próprio Wittgenstein.

O que Ernest chama de filosofia da matemática de Wittgenstein é a sua global, embora um tanto implícita, abordagem de problemas filosóficos concernentes à matemática e ao corpo de reflexão e teoria que daí resultou.

Segundo Ernest, é inegável que Wittgenstein se dirigiu a problemas tais como o da natureza da matemática, o da necessidade lógica, o do platonismo, o do fundacionismo, etc., e que, nesse processo, construíra um corpo substancial de filosofia. Por isso, Ernest ignora a opinião de Wittgenstein, baseando-se no fato de que tal opinião fora contradita pela prática do próprio autor. Ernest também dribla a crítica de Popper, isto é, a de que negando a existência de problemas filosóficos Wittgenstein estaria refutando a filosofia. Porém, verificamos que, discutindo acerca da doutrina de Wittgenstein, Popper até concorda parcialmente com ele. Eis o que ele afirma:

> *Prometi dizer alguma coisa em defesa do ponto de vista de Wittgenstein. O que pretendo dizer é, primeiro, que há muitos escritos filosóficos (especialmente da escola hegeliana) que podem ser criticados com justiça por constituírem mero palavrório sem sentido* (Popper, 1980: 100).
>
> *Resumiria da seguinte forma minha opinião sobre a doutrina de Wittgenstein: talvez seja verdade, de modo geral, que não existem problemas filosóficos "puros"; na verdade, quanto mais puro um problema filosófico mais se perde sua significação original, maior o risco de que sua discussão degenere num verbalismo vazio. Por outro lado, existem não só problemas científicos genuínos mas também problemas filosóficos genuínos* (Popper, 1980: 102).

Popper, ao longo da sua discussão com as idéias de Wittgenstein, se mostra muito compreensivo, buscando nos excessos dos filósofos hegelianos uma justificativa para a afirmação de Wittgenstein, o que mostra que ele não se contrapõe à afirmação deste. Ao contrário, enriquece a sua análise com muitos exemplos da história da ciência.

Desse modo, mesmo acreditando que, com a sua conclusão, está a driblar o argumento de Popper, pensamos que Ernest se equivocou ao achar que resolveu o problema chamando a atenção para o fato de que Wittgenstein, na prática, teria construído uma filosofia. A propósito do *Tractatus*, Popper usa um argumento do mesmo teor (*op. cit.* nota 6, p. 97), mas ele mesmo o refuta:

> *Há uma falha que se pode perceber desde logo nessa doutrina: ela própria é uma teoria filosófica que pretende ter sentido e ser verdadeira. É possível porém que esta crítica seja um pouco vulgar, podendo ser rebatida de duas formas, pelo menos:...* (Popper, 1980: 97, nota 6).

Segundo Ernest, a visão que tem Rorty (1979) de Wittgenstein é consistente com a sua interpretação, uma vez que esse filósofo contemporâneo vê a posição antifilosófica de Wittgenstein como *edificante* (em oposição a um ponto de vista *sistemático*). Rorty afirma que, do mesmo modo como Dewey e Heidegger, Wittgenstein renegou e abandonou uma abordagem sistemática anterior (o *Tractatus*) e, subseqüentemente, preocupou-se em proteger-se contra os perigos da teorização prescritiva: erro que ele próprio percebera haver cometido no *Tractatus*.

Minha interpretação da filosofia da matemática de Wittgenstein, diz Ernest, leva em consideração o domínio exercido pelas filosofias *prescritivas* do logicismo, intuicionismo e formalismo, no âmbito da filosofia da matemática, na época em que viveu Wittgenstein. O próprio campo fora amplamente definido pelas pressuposições e preocupações das filosofias absolutistas e fundacionistas. Na opinião de Ernest, seria a essas assunções e às filosofias reformistas da matemática, e não à própria filosofia da matemática, que Wittgenstein estaria se opondo, uma vez que ele admite explicitamente a possibilidade de uma filosofia da matemática *descritiva* ou naturalista (que até então não existia), mas nega a possibilidade de qualquer outro tipo. De fato, em relação a esse aspecto, assim se manifesta Wittgenstein:

A "lógica matemática" deformou completamente o pensamento dos matemáticos e dos filósofos ...(*OFM*, p. 250-251).
Toda elucidação deve desaparecer e ser substituída apenas por descrição (*IF* §109, p. 65).

Com base nessa passagem, Ernest acredita que o que Wittgenstein estaria rejeitando seria a empresa tradicional fundacionista da filosofia da matemática, e que, no lugar de fundamentos lógicos sistemáticos, ele estaria pondo as práticas sociais reais preexistentes (incluindo seus padrões de uso de linguagem) como a base da matemática e da linguagem. Devido à radicalidade e originalidade desse ponto de vista, Wittgenstein teria sido levado a pensar que estava renegando toda a tradição filosófica, especialmente aquela que imperava na filosofia da matemática. De fato, afirma Ernest, ele estava, afinal de contas, rejeitando todas as escolas de pensamento em filosofia da matemática, não existindo, na época – o que já ocorre hoje com a tradição *dissidente* – nenhuma alternativa ao fundacionismo. Desse modo, segundo Ernest, Wittgenstein estaria travando a sua batalha no isolamento e desenvolvendo uma completamente nova filosofia da matemática de caráter naturalista. Daí as suas fortes afirmações antifilosóficas, bem como sua subestimação da natureza explicativa e teórica de sua nova abordagem da filosofia da matemática. Embora ele mantivesse seu discurso filosófico tão concreto e particular quanto possível, o seu apelo à metáfora e à imaginação (e a novos constructos) imprime uma dimensão teórica à sua filosofia. Com base nessa argumentação, Ernest acredita na legitimidade de sua leitura de Wittgenstein, preferindo acreditar que o próprio Wittgenstein estaria contradizendo a si próprio.

1) Que papéis o contexto social desempenha na forma de se conceber e explicar a natureza do conhecimento matemático, e o grau de objetividade ou "certeza" de seus objetos, proposições e procedimentos?

Dummett acusa Wittgenstein de defender *um convencionalismo radical*, o qual concebe todas as *verdades* da matemática e da lógica como expressões diretas de convenções lingüísticas, arbitrariamente adotadas por decreto. Sua própria opinião, porém, é que *as provas matemáticas nos impelem, queiramos ou não, aos teoremas* (Dummett, 1964: 495). Daí, qualquer que seja o status dos axiomas e das premissas, uma vez aceitos, nos levam irresistivelmente, através de provas matemáticas, aos teoremas. Assim, nem todo o conhecimento matemático é baseado em decisões ou convenções; uma parte dele necessariamente decorre da parte assumida.

Na perspectiva de Ernest, essa crítica a Wittgenstein é baseada em vários erros de entendimento sobre, primeiro, a base convencional da matemática e, segundo, sobre a natureza da necessidade das proposições matemáticas e do seguir uma regra. Em primeiro lugar, segundo ele, Wittgenstein esclarece que a base decisória da matemática não é uma questão de escolha livre ou arbitrária, mas sim uma decorrência daquilo que é aceito na prática social. Esclarece ainda que nem todas as proposições aceitas em matemática são, individualmente ou diretamente, convenções estipuladas. É claro que, prossegue Ernest, para ele, quando uma proposição da matemática é aceita como *certeza inabalável*, o status de regra gramatical ou convenção deve ser atribuído a ela.

Gostaríamos muito de saber quando é que isso acontece. Haveria um momento em que um enunciado matemático adquiriria uma força tão persuasiva que denegar a sua certeza seria considerado uma contradição ou um ato insensato? Talvez, as respostas a essas questões pudessem ser encontradas nos estudos de história da matemática, os quais não estão presentes na perspectiva wittgensteiniana, ou nos estudos sociológicos referentes às múltiplas relações que se estabelecem intra e inter grupos de cientistas, o que constitui matéria prima para os estudos de desenvolvimento histórico da ciência, mas também igualmente ausentes na perspectiva de Wittgenstein.

Em segundo lugar, Wittgenstein, segundo Ernest, questiona a necessidade de se seguir uma regra matemática ou lógica. Nossa opção por segui-la, na melhor das hipóteses, refletiria uma *escolha* ainda mais anterior para participar em certas atividades, significados, jogos de linguagem e formas de vida compartilhados socialmente. Entrar na prática da pesquisa matemática significa concordar com certas formas de argumentação matemática, evitar inconsistência e, até mesmo, agir *como se* a necessidade lógica sustentasse as provas matemáticas. Mas, aceitar uma prova matemática ou teorema não constitui simplesmente uma questão mecânica de se seguir uma regra e de se concordar (talvez implicitamente) com sua base convencional. Isto também envolve uma decisão segundo a qual a nova aplicação pode ser legitimamente subsumida sob regras existentes, uma vez que as regras subdeterminam suas aplicações. Uma tal decisão pode, com efeito, acrescentar regras adicionais ao que é aceito na comunidade. Em resumo, as decisões e convenções descritas sustentam a necessidade de se seguir a regra lógica e dão-lhe, portanto, a aparência de necessidade. Isso não significa que os seres humanos briguem para seguir e aplicar regras lógicas absolutas. Certamente, estas últimas são idealizações de regras evidenciadas no comportamento lingüístico humano.

Segundo Ernest, este argumento e esta conclusão desagradariam a muitos, dentre eles, a Dummett. Reconhecê-los é reconhecer a pedra angular do absolutismo, se não o edifício todo. Isso significa que Wittgenstein estaria renunciando à necessidade lógica tal como ela é entendida tradicionalmente. E em seu lugar, ele oferece uma explicação rica, de cunho social-naturalista acerca da necessidade de se seguir uma regra e de idéias afins dela decorrentes e com ela relacionadas, incluindo lógica, significado, linguagem e matemática.

A subsunção da necessidade lógica e matemática pelo social leva à falta de discriminação entre níveis diferentes de convenção e de aceitação social. Os matemáticos e outros atribuem diferentes graus de certeza a: (1) uma conjectura matemática para a qual uma prova provisória foi construída; (2) um teorema matemático bem estabelecido e muito usado (e provado); (3) uma lei lógica. Wittgenstein atribui um papel privilegiado à lei de contradição, em certos contextos. Contudo, além dessa exceção, nenhuma explicação é fornecida à certeza diferencial que é acordada para os diferentes tipos de conhecimento matemático. Nenhuma distinção é feita entre os itens do conhecimento matemático, mas uma tal explicação requereria elaboração adicional, a qual não é fornecida por Wittgenstein. Ernest, por sua vez, apesar de apenas sugeri-la também não a esboça nem a estrutura.

O conhecimento matemático é o produto da atividade matemática de matemáticos (e outros) que se engajam em jogos de linguagem cada vez mais amplos. A lógica subjacente à matemática e as suposições nas quais se baseia estão ancoradas em formas de vida, incluindo a geralmente aceita lei de contradição, que sustenta a coerência (e a possibilidade) dos jogos de linguagem na matemática. Jogos de linguagem matemáticos são particulares e especializados, mas a maioria, se não todos, se interconectam e coincidem com outros obedecendo a essa lei.

O conhecimento matemático é criado pelos matemáticos engajados e engajando-se em jogos de linguagem, e uma regra matemática aceita por eles é que tal conhecimento é justificado por meio de provas matemáticas. Wittgenstein dá uma explicação detalhada do papel e da natureza das provas em matemática, e de importância particular é a explicação que ele fornece da certeza das provas matemáticas sem pressupor sua necessidade, sua base absoluta ou sua irretificabilidade (ele realmente leva em conta os opostos). Por *não* aceitar a preexistência do conhecimento matemático até que ele seja criado, Wittgenstein também leva em conta, mas não explica, sua gênese. Isso porque, embora assevere que o conhecimento matemático é inventado, nenhum mecanismo ou mesmo proposta para a sua criação figuram em sua filosofia. Nesse aspecto, sua filosofia da matemática seria fraca ou subdesenvolvida, assevera Ernest.

Com relação à avaliação de teorias matemáticas, de acordo com Maddy (*apud* Ernest, *SCPM*, p. 91), a visão de Wittgenstein é a de que *as partes da matemática sem aplicação são exatamente jogos vazios com signos sem significado*, e que a matemática pura é *uma peça de arquitetura matemática que está pendurada no ar, e parece como se fosse, digamos, uma arquitrave, não sustentada por coisa alguma e nada sustentando* (*OFM*, p. 108).

A leitura que faz Maddy é que Wittgenstein considera as teorias matemáticas puras como necessitando ser podadas. Isto sugeriria uma posição extremamente forte, isto é, a rejeição das teorias matemáticas puras em favor das aplicadas.

Contudo, a leitura que Ernest faz desse mesmo aspecto é que Wittgenstein estaria se opondo apenas a teorias formais não-interpretadas, e não a teorias puras em geral. A citação anterior de Wittgenstein trata do teorema de Cantor ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$), e Wittgenstein continua a dizer: *A proposição é válida tanto quanto seus fundamentos o são. Sustenta tanto quanto as bases que a sustentam* (*OFM*, p. 109). Esta passagem poderia ser interpretada, segundo Ernest, como dizendo que teoremas formais são epistemologicamente ou semanticamente válidos não mais do que as teorias matemáticas informais que os sustentam. Esta leitura é consistente com asserções freqüentes de Wittgenstein de que o filósofo não tem o direito de tentar reformar a matemática, tal como, por exemplo, através da sua substituição por teorias formais, mas deveria deter-se em descrevê-la: [*A*] *Filosofia ... pode em última instância apenas descrever ... ela não pode dar qualquer fundamento ...* [*ela*] *deixa a matemática como ela é ...* (*IF*, §124, p. 67). Rejeitar uma grande parte da matemática pura, conclui Ernest, não seria consistente com esta visão.

Isso porque, segundo ele, a filosofia da matemática de Wittgenstein é naturalista e pragmática no que se refere à apreciação, avaliação e escolha da teoria matemática. Ela é uma filosofia descritiva da matemática em vez de normativa, e tudo o que é sancionado pela prática matemática é aceitável para Wittgenstein. Não há preferência e valorização de teorias matemáticas formais sobre as informais, o que constituiria uma importante e desejável característica de uma filosofia da matemática. De fato, teorias formais não-interpretadas são percebidas não como o apogeu do conhecimento matemático, mas como teorias destituídas de sentido.

Klenk, em sua tese desenvolvida em torno da filosofia da matemática de Wittgenstein, dialoga com alguns autores que classificam o pensamento wittgensteiniano dentro de diferentes perspectivas. Na sua tese, Klenk considera essas avaliações do pensamento de Wittgenstein e mostra que, apesar de ele ter pontos de contato com todas essas perspectivas, não se encaixa em nenhuma delas. A sua análise da filosofia da matemática de Wittgenstein passa por comparações com o platonismo, o intuicionismo, o formalismo, o empirismo, o convencionalismo sem, no entanto, encaixar Wittgenstein em nenhuma dessas filosofias.

Uma vez que Wittgenstein afirmou que as declarações da matemática não se aplicavam a quaisquer tipos de referentes, uma outra explicação do seu significado era necessário. E ele tentou fornecer uma tal explicação em termos de estruturas de inferência. A idéia não era nova, naturalmente; os convencionalistas haviam dito algo do gênero por anos. Mas Wittgenstein foi além da posição convencionalista nas suas tentativas de, segundo Klenk, tornar claro que os fundamentos últimos da inferência matemática encontram-se simplesmente no comportamento humano uniforme. Não realizamos inferências com base no que os termos significam; antes, o próprio significado é uma função do como nós inferimos, como nós usamos os termos. A ênfase sobre o acordo no comportamento humano e a sugestão de que esse acordo pode estar baseado na estrutura do mundo empírico integram-se num quadro que foi apenas esboçado pelos convencionalistas (Klenk, 1976: 125-6).

Para Wittgenstein, são os processos externos que são importantes; uma proposição matemática será um teorema não quando corresponda a algum tipo de quadro mental, mas quando for o resultado final de uma prova publicamente checável. "Compreender" não se refere a um processo mental particular, tal como compreensão interior ou intuição, mas é uma palavra cujo critério de aplicação inclui, entre outras coisas, o que realmente se diz ou escreve e as circunstâncias externas sob as quais se faz assim (tendo completado com sucesso um curso de estudos, por exemplo). Dizemos que alguém compreende não quando ele declara que tem um instante de *insight*, mas quando ele pode demonstrar publicamente seu domínio do assunto.

Devido à rejeição de Wittgenstein aos objetos matemáticos e à sua ênfase sobre a manipulação de signos externos ou símbolos da matemática, poderia parecer natural classificá-lo, à primeira vista, como um formalista. Klenk observa que Wittgenstein de fato parte de doutrinas formalistas. Entretanto, ele não pensa a matemática como um mero jogo jogado com símbolos sem significado; é essencial para a matemática que seus signos tenham significado fora do sistema e que o próprio sistema tenha alguma aplicação prática e faça inferências acerca do mundo físico. Além disso, ele rejeita a idéia da *mecanização da matemática*, a idéia de que a inferência é algum tipo de procedimento automático mecânico e que, uma vez especificados os axiomas e as regras para um sistema, todos os teoremas seguem daí. Até um certo ponto, para Wittgenstein, o que segue não o é no sentido automático, mas depende essencialmente do que os seres humanos fazem com o sistema; só se *aceitarmos* uma proposição como resultado final de uma prova ela irá contar como um teorema. Mesmo a existência de máquina de cálculo automática não poderia demonstrar que a inferência é mecânica, porque a máquina pode quebrar, de modo que a corte final de apelo será sempre o julgamento humano. A hostilidade de Wittgenstein à formalização e sua indiferença para com as provas de consistência estão gravemente em rixa com muitos programas formalistas.

Klenk considera também que Wittgenstein não pode ser classificado como um empirista, porque ele rejeita a idéia de que as proposições matemáticas são generalizações de alto nível acerca do mundo empírico. As proposições matemáticas, diferentemente das afirmações empíricas, são incorrigíveis, e, além disso, pode ser dito serem *eternas*. A função da matemática é simplesmente não *estabelecer* fatos de qualquer tipo, mas fornecer uma estrutura inferencial e lingüística *na* qual possamos *expressar* fatos acerca do mundo e derivar uma proposição de outra. A importância das regularidades empíricas é enfatizada por Wittgenstein como uma precondição da matemática – se o mundo fosse radicalmente instável, nós não poderíamos mesmo contar – mas não é o ofício da matemática *expressar* essas regularidades.

A rejeição da realidade matemática, a ênfase sobre a linguagem e a importância do comportamento humano para Wittgenstein levou alguns a pensá-lo como um convencionalista. Para Klenk, essa classificação talvez chegue perto da visão de Wittgenstein; mas este rejeita o que parecem ser características essenciais do convencionalismo. Por exemplo, um convencionalista responderia a questões sobre necessidade lógica afirmando que são os *significados* dos sinais lógicos que determinam que uma proposição deve se seguir de outra; o poder da compulsão lógica é adquirido no significado. Para Wittgenstein, isso não é resposta; deve-se perguntar, por sua vez, de onde vêm os significados, e quando entendemos que é o *uso* (toscamente falando) que determina o significado, deixamos de ser tentados a afirmar que é o significado que determina o uso.

É claro, para Klenk, que Wittgenstein não é um convencionalista no sentido de Dummett, porque ele não crê que possamos inferir do modo como nos agrade. Em uma prova, *devemos* obter um certo resultado e devemos obedecer às regras "cegamente". Wittgenstein também parece, para Klenk, opor-se aos elementos de trivialidade e arbitrariedade que são às vezes associados ao convencionalismo. Nossos sistemas de inferência não são meras conveniências, mas respostas a uma *profunda* necessidade de convenção, e embora ele tenha sugerido, algumas vezes, que nossas formas de inferência poderiam ter sido diferentes, isso não significa que qualquer alternativa também serviria. Os sistemas que escolhemos não são arbitrários, mas Wittgenstein parece dizer, segundo Klenk, que são sugeridos pelo mundo à nossa volta.

Tanto Klenk quanto Shanker são contrários às interpretações de Dummett quando este classifica Wittgenstein como um vigoroso convencionalista. Eles consideram que, de um certo modo, Dummett cometeu erros de interpretação do pensamento de Wittgenstein. Assim também pensa Ernest.

Wittgenstein também rejeita o logicismo, isto é, a idéia de que a matemática é lógica ou, pelo menos, baseada em ou justificada por sua derivação a partir de princípios da lógica pura. Klenk não se atém a discutir o logicismo separadamente porque, segundo ele, as objeções de Wittgenstein ao platonismo e ao formalismo podem ser estendidas ao logicismo. Se o logicismo for considerado de um ponto de vista ontológico, as objeções de Wittgenstein para com o platonismo se aplicam a ele; e, se considerado a partir de um ponto de vista puramente formal, as objeções de Wittgenstein ao formalismo se aplicariam também a ele. Para Klenk, o logicismo, apesar de ser extremamente interessante *matematicamente*, como uma filosofia da matemática não tem muito de novo a oferecer para um entendimento dos problemas particulares com os quais Wittgenstein se preocupou.

2) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da natureza e da origem dos objetos da matemática?

Uma das maiores fraquezas da filosofia da matemática de Wittgenstein, para Ernest, é sua ausência do engajamento real com os conceitos e métodos da matemática de modo a permitir o tratamento da criação e invenção matemática. Wittgenstein oferece uma revolucionária explicação da base justificativa do conhecimento matemático. Filosoficamente, isto deve ter prioridade, pois os problemas da necessidade e objetividade são urgentes. Mas, uma explicação completa da natureza da matemática também requer uma teoria da invenção matemática.

Assim como Bloor critica Wittgenstein por não explicar a gênese de novos jogos de linguagem nem a modificação de velhos jogos, no mesmo contexto específico dos jogos de linguagem que constituem a matemática, Ernest aduz que pode ser dito que Wittgenstein falha em oferecer uma explicação do crescimento ou desenvolvimento do conhecimento matemático, das teorias ou dos jogos de linguagem. Apesar de Wittgenstein reconhecer que a matemática é criada e que novas provas mudam os significados dos jogos de linguagem, ele não fornece um relato adequado da gênese do conhecimento matemático.

A filosofia da matemática de Wittgenstein, para Ernest, pode, potencialmente, explicar a gênese do conhecimento matemático na mente do indivíduo. Isso porque, em primeiro lugar, a explicação que Wittgenstein fornece da cognição e do processo subjetivo do acesso à matemática reconhece a natureza idiossincrática das construções de significados por parte de cada sujeito. Sua abordagem explicaria a unicidade e indeterminação de conceitos e significados da matemática construídos individualmente evitando, porém, o perigo do subjetivismo. Nisto, ele estaria antecipando as explicações construtivista e social da aprendizagem da matemática, hoje amplamente aceitas (Ernest; Glasersfeld, *apud* Ernest, *SCPM*, p. 93). Estaria antecipando também alguns dos problemas do ensino de conceitos e regras e da avaliação da competência através de desempenho. Em segundo lugar, para Ernest, uma visão social da aprendizagem da matemática estaria também implícita na obra de Wittgenstein. Isso porque, uma imersão em formas compartilhadas de vida, seguida de uma indução em uma seqüência de crescentes jogos de linguagem matemáticos sugeriria, pelo menos esquematicamente, o modo como a matemática poderia ser aprendida socialmente. Ainda que Wittgenstein apenas sugira isso de forma muito esquemática, Ernest acrescenta que um crescente número de teóricos da aprendizagem, tais como Vygotsky, Lave e Wenger têm fornecido explicações paralelas ou consonantes às de Wittgenstein.

Wittgenstein é anti-realista, uma vez que é um crítico impiedoso das concepções platônicas da existência extra-humana dos objetos da matemática. O que para ele é primário não são os próprios objetos matemáticos, mas os jogos de linguagem que fornecem os contextos significativos para uma discussão dos objetos matemáticos. Assim, esse ponto de vista acerca dos objetos matemáticos é quase nominalista, uma vez que tais objetos são concebidos como entidades lingüísticas cuja existência decorre dos jogos de linguagem da matemática. Parafraseando uma opinião atribuída a Kreisel, Ernest afirma que a questão essencial para Wittgenstein estaria mais relacionada com a objetividade do conhecimento matemático do que com a existência de objetos matemáticos (Shanker, 1987: 59). Assim, para Ernest, Wittgenstein oferece uma abordagem para os problemas da natureza e da existência dos objetos matemáticos; somente não responde à questão usual acerca de onde eles existiriam: *Quanto à origem dos objetos matemáticos, embora Wittgenstein não se posicione muito explicitamente, é claro que eles seriam criações lingüísticas humanas, as quais se presentificam através de jogos de linguagem novos ou estendidos* (*SCPM*, p. 92). Esse ponto de vista de Ernest não nos parece muito preciso. De acordo com Glock, para Wittgenstein,

> *as proposições matemáticas não descrevem nem entidades abstratas nem a realidade empírica; tampouco refletem o funcionamento transcendental da mente. Seu estatuto apriorístico se deve ao fato de que, a despeito de sua aparência descritiva, seu papel é normativo: nada que as contrarie pode ser considerado uma descrição inteligível da realidade.* (...) *As equações aritméticas não descrevem relações entre entidades abstratas, mas constituem normas para a descrição dos números de objetos no mundo empírico, isto é, regras de substituição* (Glock, 1998: 243).

Wittgenstein foi algumas vezes considerado intuicionista. Contra isso, Klenk argumenta que a sua posição contrária à existência de objetos matemáticos se aplicava tanto a objetos matemáticos concebidos como entidades mentais, como os viam os intuicionistas, quanto a objetos matemáticos concebidos como entidades abstratas, como os encaravam os platônicos. E é nessa ótica, observa Klenk, que os comentários e críticas dele às teorias do *estado interior* da compreensão deveriam ser interpretados. Para um intuicionista, dizer que um teorema foi provado é dizer que uma construção matemática foi efetivada, e compreender a matemática é ter uma compreensão interior dessas construções. É o processo *interior* que conta aqui, de acordo com o intuicionista, e não o que é escrito no papel, porque o sistema formal escrito pode não refletir de forma precisa a construção mental.

Para Wittgenstein, no seu antiplatonismo em matemática, a lógica e a matemática simplesmente nos dota com formas de inferência; e ao fazer matemática, estamos simplesmente transformando uma expressão em outra, e a avaliação da correção dessa transformação é determinada não através de uma correspondência com objetos matemáticos, mas simplesmente através de como as pessoas realmente usam essas expressões e o que elas chamam "correto" (Klenk, 1976: 5). A matemática não é *sobre* nada, nem sobre edifícios platônicos e nem sobre construções mentais.

Na época em que as notas que compuseram *OFM* foram escritas, era dado como garantido que as proposições matemáticas estabeleciam fatos acerca de entidades matemáticas. Isso era propagado pela grande maioria das grandes escolas de pensamento. A natureza dessas entidades variava de escola para escola. Para os platônicos, essas entidades eram objetos abstratos e ideais; para os logicistas, eram conjuntos. Os empiristas acreditavam que os entes da matemática eram gerados através de generalizações empíricas de nível superior que incidiam *sobre* os objetos físicos ou sobre algumas de suas propriedades e características. Mesmo Hilbert acreditou, observa Klenk, que no mínimo no nível elementar, as proposições matemáticas se referiam a um tipo especial de objeto físico: as marcas impressas sobre o papel. Esta visão da matemática como quase-empírica, estabelecendo fatos sobre objetos, foi e ainda é bem arraigada, e uma das principais contribuições de Wittgenstein foi sua crítica penetrante a várias teorias que se baseavam nessa idéia.

Ernest observa um renascimento de interesse acerca do realismo matemático em filosofia da matemática, e seus proponentes não se mostram satisfeitos com o tratamento que Wittgenstein dá a essa questão (*SCPM*, p. 92).

Finalmente, Ernest observa que Wittgenstein acomoda a criatividade dos matemáticos em princípio, uma vez que ele considera o conhecimento matemático uma invenção, e não uma descoberta. A explicação de Wittgenstein abriria, segundo Ernest, um espaço – dentro dos limites das regras, conceitos e convenções existentes – no interior do qual a criatividade do matemático poderia operar. Neste espaço, um matemático poderia explorar novas conseqüências das suposições, ou mesmo variar estas últimas em uma tentativa de modificar a prática. Tais inovações poderiam parecer incoerentes ou inaceitáveis para outros, mas elas poderiam também produzir novos jogos de linguagem ou provar teorias matemáticas. Em cada um desses casos, ter-se-iam como resultado invenções matemáticas. Portanto, em princípio, a filosofia de Wittgenstein, para Ernest, possibilitaria uma acomodação não-dissonante da aprendizagem da matemática e do exercício da criatividade matemática. Contudo, para Ernest, em uma ou outra elaboração de sua filosofia da matemática, Wittgenstein mais abre a possibilidade de explicar a aprendizagem e a criatividade em matemática do que, de fato, a explica.

3) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da aplicabilidade do conhecimento matemático na ciência, na tecnologia e em outros domínios do saber?

A filosofia da matemática de Wittgenstein oferece uma melhor explicação das aplicações da matemática do que as filosofias absolutistas tradicionais da matemática. Isso porque, ela situa a matemática entre os jogos de linguagem e as formas de vida. Desse modo, a matemática está ancorada na prática humana, do mesmo modo como a ciência, a tecnologia e outros domínios do conhecimento. Os jogos de linguagem específicos da matemática podem diferir dos das demais áreas mas, epistemologicamente falando, eles são comensuráveis com os demais em virtude de participar com eles de uma base compartilhada (em jogos de linguagem e formas de vida). Isso significa que a aplicabilidade da matemática está longe de ser vista como algo misterioso e, potencialmente, existe, nesta filosofia, espaço para que muitos argumentos persuasivos sejam construídos. Mas esses argumentos não foram ainda completamente e satisfatoriamente estabelecidos, fato este com o que não devemos nos surpreender, dada a posição filosófica e metodológica de Wittgenstein.

Deveria ser tornado claro, contudo, que Wittgenstein traça uma definida distinção entre a matemática e a ciência empírica. Embora ele admita importantes conexões entre provas ou cálculos na matemática e experimentos na ciência, considera os dois processos como fundamentalmente diferentes (Tymoczko, *apud* Ernest, *SCPM*, p. 93). Tanto assim que ele afirma: *Eu posso* calcular *na imaginação, mas não experimentar* (*OFM*, p. 50).

4) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da atividade matemática dos matemáticos no presente e no passado?

Em filosofia e em filosofia da matemática, a necessidade de uma dimensão histórica não é amplamente sentida, embora ela seja uma tábua central da tradição *dissidente*. Wittgenstein não se reporta à história do pensamento ou da matemática, o que Ernest considera uma fraqueza para uma filosofia da matemática que se atém à prática matemática de modo tão intenso. A ausência de qualquer dimensão histórica na filosofia da matemática de Wittgenstein é uma fraqueza. Nela não há explicação para as mudanças no corpo do conhecimento matemático, na lógica, nas noções de prova, verdade, e assim por diante.

Contudo, existe espaço para uma dimensão histórica em uma extensão da filosofia de Wittgenstein, qual seja, na da prática social dos matemáticos (com seus jogos de linguagem e formas de vida). Isso porque, uma prática social corporifica sua própria história, uma vez que pode somente ser entendida completamente quando considerada como o ponto final de um padrão evolucionário de desenvolvimento.

Wittgenstein explica a prática matemática em geral, ou pelo menos as atividades dos matemáticos no presente, através do papel que ele concede às formas de vida. Assim, as práticas atuais dos matemáticos, seus jogos de linguagem e suas interações – e não o conhecimento matemático abstrato ou os objetos matemáticos – são os dados de partida para esta explicação. A esse respeito, a perspectiva de Wittgenstein tem uma maior vantagem sobre as filosofias absolutistas da matemática. Contudo, ele não identifica nada que seja unicamente ou caracteristicamente matemático. Formas de vida e jogos de linguagem descrevem e sustentam todos os tipos de atividades sociais. Em que aspectos as atividades dos matemáticos difeririam de todas as outras práticas? Ainda que Wittgenstein procure destacar o fato da atividade matemática tomar como centro de suas preocupações o cálculo e a prova, ele não oferece, segundo Ernest, uma resposta satisfatória para esta questão.

Ernest enfatiza a grandeza da realização de Wittgenstein em propor uma abordagem construtivista social revolucionária para a filosofia da matemática. Isso porque, ele desafia o fundacionismo e a abordagem tradicional da filosofia da matemática; rejeita a abordagem *prescritiva* universalmente adotada em sua época e reivindica a reconceptualização da filosofia da matemática a fim de que se torne *descritiva*. Este foi, e ainda é um projeto revolucionário: explicar a matemática e a prática matemática como ela é, em vez de se tentar conformá-la a uma fórmula redutiva. Este ponto de vista implica no reconhecimento de que a matemática é constituída por uma multiplicidade de práticas - formais ou informais - interconectadas. Implica ainda abandonar a noção de que a filosofia ou a lógica precedem a matemática e validam os seus resultados. Em vez de fornecer uma metanarrativa simplificadora visando à legitimação do conhecimento matemático, Wittgenstein reposicionou a filosofia da matemática de modo a fazer com que ela caminhasse por linhas laterais e se preocupasse exclusivamente com a observação e a descrição da atividade matemática, e não com sua validação.

A filosofia de Wittgenstein teria produzido uma ruptura revolucionária ao deixar de discutir o conhecimento, e o conhecimento matemático em particular, em termos realistas ou idealistas. Ele invertera a hierarquia platônica e, em vez de fundar sua teoria sobre idealizações abstratas, toma a prática humana e social como o ponto de partida. Desenvolve uma sofisticada e completa epistemologia social fundada em formas de vida concretas, em jogos de linguagem e na concepção de significado como uso. Ele mostra, em primeiro plano, o papel vital desempenhado pela linguagem humana no ato de conhecer e *é o primeiro filósofo da matemática a reconhecer a interdependência essencial entre linguagem e conhecimento matemático* (*SCPM*, p. 94), e a construir um relato sistemático em torno desse relacionamento. O resultado é uma filosofia naturalista da matemática baseada em elementos-chave da prática matemática concreta, e não em idealizações abstratas, sejam elas subjetivas ou platônicas.

Apesar de, ao longo deste capítulo, estarem contemplados os elementos característicos da filosofia da matemática wittgensteiniana, resumidamente poderíamos dizer que o que caracteriza a filosofia da matemática de Wittgenstein como uma filosofia *social* da matemática é o seu fundamento lingüístico situado nas formas de vida e nos acordos humanos. A sua natureza descritiva com relação às práticas dos matemáticos em lugar de prescritiva. O locus da matemática está nos jogos de linguagem e formas de vida. A matemática é uma construção, e nesta os usos da linguagem envolvem a aceitação de regras, para comunicação lingüística. Tal aceitação diz respeito ao compartilhar da forma de vida, a acordos humanos em grupos de prática sociolingüística baseados no seguir regras comuns, o que é essencial para qualquer uso significativo da linguagem. Portanto, o uso, os acordos, as formas de vida, os jogos lingüísticos, dentre outros elementos, constituem a dinâmica humana na caracterização da atividade matemática descrita pela filosofia social da matemática de Wittgenstein.

CAPÍTULO III

A Filosofia da Matemática de Imre Lakatos

Alguns Paralelos entre Lakatos e Wittgenstein

Enquanto Wittgenstein (1889-1951) fora um engenheiro que mudou o foco dos seus estudos para a matemática, e desta para o estudo dos seus fundamentos e da filosofia, Imre Lakatos (1922-1974) graduara-se em matemática, física e filosofia, e então iniciou suas pesquisas em filosofia da matemática. Também dedicou-se à filosofia da ciência. Ele foi ativo em filosofia da matemática entre os anos de 1950 e 1967, com algum trabalho retomado em torno de 1973. Seu maior trabalho em filosofia da matemática foi *Provas e Refutações*, republicado postumamente em 1976. Além disso, somente cinco trabalhos seus sobre filosofia da matemática são conhecidos e estão publicados no *Mathematics, Science and Epistemology – Philosophical Papers*. *Volume 2*, publicado originalmente em inglês pela Cambridge University Press. Estamos usando uma versão espanhola do referido volume, editada em 1981 pela Alianza Universidad Editorial, de Madrid.

Como poderemos ver, a obra de Lakatos referente à filosofia da matemática não é tão extensa. O mesmo acontece com a de Wittgenstein. Mas cada uma tem as suas singularidades. Talvez, possamos estabelecer comparações entre as duas obras buscando consumar alguma avaliação da forma como, alicerçado nessas duas bases, Paul Ernest realizou o seu trabalho.

Ernest trata dos dois pilares principais de sua teoria de forma separada. Isto nos pareceu estranho. Razão porque ocorreu-nos buscar alguns aspectos, que sejam comuns ou antagônicos, entre esses dois filósofos que ele pretendeu juntar na base do seu construtivismo social.

Bom seria que tivéssemos ensaios de Wittgenstein acerca da filosofia da matemática de Lakatos e ensaios de Lakatos sobre a filosofia da matemática de Wittgenstein. Mas, infelizmente a diferença de idade entre esses dois filósofos não permitiu que Wittgenstein tivesse a chance de debruçar-se sobre os escritos de Lakatos. Este, quando concluiu seu Doutorado já se havia passado em torno de dez anos da morte de Wittgenstein. Contudo, há referências de Lakatos à filosofia de Wittgenstein, se bem que algumas de caráter axiológico, em uma crítica de Lakatos a um livro de Stephen Toulmin.

A nossa busca desses paralelos entre Wittgenstein e Lakatos não tem nenhum caráter de complementação ao trabalho de Ernest mas se prende tão-somente à nossa necessidade, melhor dizendo, à nossa curiosidade em poder vislumbrar algumas semelhanças ou dessemelhanças entre esses dois filósofos da matemática.

Ernest não apresenta nenhuma informação sobre a ascendência intelectual de Wittgenstein exceto que fora aconselhado por Frege a estudar com Russell em Cambridge. Mas Frege e Russell tiveram uma grande importância na formação do seu pensamento, especialmente no do *primeiro* Wittgenstein.

Quanto a Lakatos, Ernest apresenta três filósofos: Polya, Popper e Hegel como sendo os seus ascendentes intelectuais.

Lakatos é considerado falibilista devido à influência do falseacionismo e do falibilismo de Popper. Wittgenstein, por sua vez, ora é considerado o mais estrito finitista, ora um convencionalista. Mas o que o caracteriza mesmo é a sua singularidade na tradição filosófica. E deve ser por isso que ele é interpretado das formas mais variadas. Mas o centro das preocupações do *primeiro* e do *segundo* Wittgenstein foi mesmo a linguagem.

Apesar de Paul Ernest dedicar a cada um – Lakatos e Wittgenstein – um capítulo em seu livro, objeto de nossas reflexões, não há uma tentativa, pelo menos visível para nós, em que ele tenha demonstrado integrar os dois filósofos num quadro harmônico ou em alguma composição possível, talvez, devido às dificuldades técnicas que ele encontraria nessa tarefa, ou mesmo pela real impossibilidade de harmonizar dois filósofos tão singulares, sem mutilá-los de alguma forma. Talvez, a única exceção a essa regra apareça em uma nota, no Capítulo 3 de *SCPM*, na qual Ernest faz uma ligeira referência a uma crítica de Lakatos a Wittgenstein, segundo a qual aquele descreve a epistemologia deste, e possivelmente também a sua filosofia da matemática, como pragmática, relacionando-o com a tradição americana de Peirce, James e Dewey. Isto é bastante apropriado, assevera Ernest, e aduz que Rorty (1994) também pensa assim, por causa da linha falibilista nessa tradição, e por causa da teoria pragmática da verdade poder, no fundo, ser vista como social. Entretanto, para Ernest, considerando o contexto no qual Lakatos se referiu a Wittgenstein (criticando Toulmin), pode ser dito que Lakatos não pretendia ser lisonjeiro (*SCPM*, p. 96, nota 4).

Mas algo é comum aos dois: o fato de que abordam a matemática a partir de uma perspectiva não-tradicional. Desafiam a tradição num certo sentido, embora sejam trabalhos incompletos. A obra de Wittgenstein referente à matemática é fruto de junção de notas esparsas de seus cadernos de anotações. Toda ela é póstuma. Lakatos escreveu só um livro e alguns artigos. Mas mesmo assim a resumida e singular obra matemática desses dois filósofos suscita muitas discussões, seja na esfera da filosofia, história e educação matemática, seja no domínio da história e filosofia da ciência.

Quanto à crítica ao segundo Wittgenstein que vem de Lakatos em um ensaio no qual este critica o livro publicado por Stephen Toulmin (*Human understanding*), publicado em 1972, consideramos conveniente mencionar algumas reflexões de Lakatos por considerá-las bem pertinentes.

Para Lakatos, o livro de Toulmin é escrito na linha filosófica do segundo Wittgenstein. E ele acha que escrever uma crítica breve de um trabalho escrito na tradição wittgensteiniana é algo fadado ao fracasso. Certamente, deve ser por isso que, segundo os organizadores e editores da obra de Lakatos, ele escreveu quatro versões da sua crítica ao livro de Toulmin.

As considerações de Lakatos começam com uma referência a uma crítica de J.O.Wisdom sobre a filosofia de Wittgenstein:

> *se tem a impressão de estar dando voltas pelos corredores de um labirinto; e o labirinto não tem um centro definido. Este modo de exposição, que leva através de um labirinto, cujo 'centro' é o descobrimento de que não existe nenhum centro, transmite por si mesmo alguma mensagem filosófica* (Lakatos, 1981: 300).

Lakatos discorre acerca das três tradições filosóficas mais importantes sobre o problema normativo da avaliação de teorias científicas. Classifica a posição filosófica básica de Toulmin como elitismo, e acrescenta que esse elitismo tem um agravante: o selo do pragmatismo de Wittgenstein. E que em *La comprensión humana* (título em espanhol do livro de Toulmin), *Toulmin se volta para o ramo darwinista mais convencional do elitismo, o que constitui a fuga natural de uma das idéias mais insatisfatórias da filosofia de Wittgenstein: a idéia de que os filósofos deveriam constituir uma 'polícia do pensamento'* (Lakatos, 1981: 300).

> *Corremos o risco de mal interpretar o livro de Toulmin no seu conjunto, se não somos conscientes de um traço do mesmo, onipresente mas não suficientemente explícito. Esse traço é a devoção de Toulmin por uma das tradições mais obscurantistas da filosofia contemporânea: a filosofia do segundo Wittgenstein. Desta filosofia, e da questão de como se relaciona com o elitismo, me ocupo agora mesmo* (Lakatos, 1981: 305).

Na consideração de Lakatos, para o segundo Wittgenstein, as lentes através das quais contemplamos o mundo são *jogos de linguagem*. Aprender um jogo lingüístico requereria algo mais que a aprendizagem de uma língua no sentido sintático e semântico ordinário. Tais jogos são, além de estruturas semânticas, instituições sociais: *obedecer a uma regra de um jogo de linguagem, redigir um informe, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são costumes (usos, instituições)* (…). *Os conceitos wittgensteinianos recebem seu significado de seu complexo uso social, do jogo considerado como um todo que, por sua vez, constitui uma 'forma de vida*' (Lakatos, 1981: 306).

Lakatos dá-se conta de que, para Wittgenstein e Toulmin, aos *fatos* não toca um papel decisivo na aceitação de uma teoria científica. Porque para Wittgenstein, conforme Lakatos, uma *explicação correta pode ser aceita*, sem *que esteja de acordo com a experiência. Há que se dar a explicação que seja aceita. Tal é toda a intenção da explicação*. Ou também *a analogia correta é a analogia aceita* (Lakatos, 1981: 307).

Outro termo técnico da filosofia de Wittgenstein, considerado por Lakatos é *compreensão*. Na interpretação de Lakatos *compreender*, em Wittgenstein *significa aprender as convenções sociais e os compromissos do jogo de linguagem. Tal aprendizagem inclui aprender a sentir-se seguro e a desprender-se das dúvidas sobre os fundamentos*. Um jogo de linguagem *não é razoável (ou não razoável)* (isto é, não é passível de justificação). Está aí *como nossa vida* (Lakatos, 1981: 307).

Lakatos considera que v*erdade* para Wittgenstein, *equivale à aceitabilidade prática – isto é, social – e a prova da compreensão de alguém* está no fato de praticar o jogo de forma correta. Desse modo, para Lakatos não se pode estar de acordo ou em desacordo com um jogo de linguagem, mas tão-somente *compreender* ou *não compreender* seus *conceitos* (Lakatos, 1981: 308).

> *A compreensão wittgensteiniana-toulminiana é a compreensão humana: compreender o mundo ou submundo conceitual humano no qual vivemos e ao qual tratamos de nos adaptar para sobreviver. Compreender, para Wittgenstein, é uma abreviatura de compreender como praticar o jogo de linguagem corretamente. Tal compreensão dificilmente pode alcançar-se nos livros. Se há de viver na sociedade de usuários da linguagem, sentar-se aos pés de um mestre, copiar suas notas, vigiar seus gestos. Então, pode-se chegar à compreensão, mas só através de uma implicação total. Uma ligeira indecisão no compromisso e se perde a compreensão* (Lakatos, 1981: 308).

Lakatos chama a atenção para o fato de que os wittgensteinianos nunca definem os termos. Os significados destes *se encontram em seus usos polimorfos e indefiníveis*. Para ele apresentar perguntas *abstratas* do tipo 'o que é a explicação?' ou 'o que é a ciência?' constituem uma parte das técnicas de massagem cerebral wittgensteinianas-toulminianas, e então a pergunta escorre num monólogo incoerente que termina com um *etc*. (Lakatos, 1981: 308).

Criticando o fato de Wittgenstein se dar ao direito de não definir seus termos técnicos, assim se expressa Lakatos:

> *se um filósofo – ou cientista – insiste em que suas 'atividades' não podem ser expressas completamente em nenhuma seqüência finita de proposições, e que em conseqüência, não assume*

a responsabilidade dos frágeis sumários ou aforismos dados por ele mesmo, então criticar suas concepções não é precisamente uma tarefa fácil (Lakatos, 1981: 308-9).

Lakatos considera que *a ciência constitui um dos jogos lingüísticos legítimos. A filosofia da ciência, não.* Segundo ele, o principal crime dos filósofos da ciência de antanho – e dos filósofos da matemática e da lógica – foi tentar erigir-se a si mesmos em um novo jogo de linguagem, autônomo com respeito à ciência. Além disso, continua Lakatos, os filósofos tradicionais queriam estabelecer um jogo de linguagem incorreto com regras explícitas – os wittgensteinianos dizem *mecânicas* – que separassem a ciência da pseudociência, e com critérios explícitos de progresso e degeneração dentro da ciência.

> *Estes intrusos* [os filósofos wittgensteiniainos] *inclusive tentaram separar a linguagem de seu contexto social e inventaram seu descarnado 'terceiro mundo das idéias'* (...) *Wittgenstein pensava que o jogo de linguagem matemático havia sido pervertido pelos usuários incompetentes da linguagem matemática chamados lógicos matemáticos* (Lakatos, 1981: 312).

Em sua discussão sobre jogos de linguagem, em um dado momento afirma Lakatos que, uma coisa, ao menos, está clara acerca dos jogos de linguagem: deveriam ser completamente autônomos e levarem consigo suas próprias normas ou critérios. *A classe de certeza é a classe de jogo lingüístico*. Wittgenstein, continua Lakatos, admite que não se pode evitar sempre a luta entre diferentes jogos de linguagem; entretanto é seu intuito suprimi-la sempre que possível, estando, desse modo, pensa Lakatos, *fanaticamente contra a guerra*. Nesse ponto, o relativismo cultural de Wittgenstein *está modificado por um forte elemento normativo terapêutico* (Lakatos, 1981: 310-11).

O tom de Lakatos nos soa às vezes como ironia ou intolerância quando avalia o pensamento do wittgensteiniano Toulmin. Em muitos momentos do seu ensaio ele tece críticas, diretas ou indiretas, ao pensamento de Wittgenstein. Mas há também momentos em que concorda com Toulmin:

> *Estou de acordo com Toulmin que nenhum critério de demarcação é absoluto. Sou falibilista com respeito aos critérios de demarcação, bem como sou falibilista com respeito às teorias científicas. As duas coisas são objeto de crítica e eu especifiquei os critérios mediante os quais pode-se julgar não só que um programa de investigação é melhor que outro, senão também que um critério de demarcação é melhor que outro. Mas eu não realizo a inferência wittgensteiniana desde a falibilidade das proposições à sua destituição. Não tenho pânico: não mudo desde as posições articuladas às habilidades inarticuláveis para fazer e julgar a ciência. Pois fazer isto é reintroduzir pela porta traseira uma versão pragmática do justificacionismo com a ajuda da astúcia da razão hegeliana* (Lakatos, 1981: 323).

E quando Lakatos diz que em uma comunidade científica fechada e sã, não há a necessidade de filósofos da ciência wittgensteinianos, pensamos se o mesmo não valeria para a matemática. Em nota de número 42, referindo-se à filosofia da ciência e da matemática, escreve Lakatos:

> *para Wittgenstein o antipsicologismo de Frege era um crime capital. Os intentos do jovem Wittgenstein para construir uma teoria, não-psicológica da correspondência da verdade era outro crime capital. Wittgenstein e a maior parte das seitas do movimento de Oxford, atrasaram seu relógio até o pragmatismo* (Lakatos, 1981: 312).

A nota seguinte de Lakatos, no seu texto de análise do pensamento de Toulmin, é bem ilustrativa da sua posição acerca da lógica matemática:

> *Toulmin tentou durante muitos anos provocar uma contra-revolução na lógica. Recomenda-nos que abandonemos um dos programas de investigação mais maravilhosamente progressivos da história do conhecimento humano – a lógica matemática – que nos proporciona as armas mais eficazes de crítica objetiva que a humanidade já produziu. E nos recomenda que o substituamos por 'bônus de inferência' wittgensteinianos, confusos e 'elitistas'* (Lakatos, 1981: 314 nota 47).

Essas críticas de Lakatos à filosofia de Wittgenstein soam, para nós, como uma desautorização ao movimento de Ernest de juntar esses dois filósofos, mutuamente excludentes, como base do seu construtivismo. Acreditamos que Ernest, apesar de conhecer esse ensaio de Lakatos, não considerou a crítica a Toulmin como também endereçada, em muitos momentos, ao próprio Wittgenstein.

Ainda encontramos em outros pensadores simpáticos a Wittgenstein considerações acerca de alguns conceitos wittgensteinianos que não convergem com as concepções de Lakatos.

S. G. Shanker, no seu livro *Wittgenstein and the turning-point in the philosophy of mathematics*, considerado por Glock como a melhor defesa da filosofia da matemática de Wittgenstein, aborda alguns aspectos da filosofia da matemática de Lakatos em algumas comparações com a filosofia da matemática de Wittgenstein, a propósito da natureza da prova.

Suponhamos, diz Wittgenstein, que alguém estava investigando números pares para ver se eles confirmavam a conjectura de Goldbach. Suponhamos que ele expressou a conjectura – e ela pode ser expressa – que se ele continuasse com esta investigação, jamais iria encontrar um contra-exemplo enquanto vivesse. Se uma prova do teorema é então descoberta, será ela também uma prova da conjectura da pessoa? Como é isto possível?

Em resposta a esta última questão, Wittgenstein efatizou que nada era mais fatal ao entendimento filosófico do que a noção de prova e experiência como dois métodos de verificação comparáveis mas diferentes. Shanker considera que há a tentação de considerar esses indicadores como hipóteses quase-empíricas, que ameaçam confundir prova e experimento mal interpretando a natureza da *investigação* na descoberta matemática. Ele considera que o alvo para o argumento de Wittgenstein não era uma teoria popperiana como a desenvolvida por Lakatos em *Provas* e *refutações*, mas a suposição de que o relacionamento entre as conjecturas matemáticas e suas provas é *dedutivo*.

Shanker observa que, para Wittgenstein, as conjecturas matemáticas são similares às hipóteses empíricas na medida em que cada uma desempenha um papel heurístico (que explica o uso do termo 'conjectura' para essas expressões matemáticas). Para Wittgenstein, há sérios perigos que este elemento comum possa cegar-nos da diferença gramatical considerável entre uma conjectura *empírica* como oposta a uma conjectura *matemática*. Porque a busca de solução de uma 'questão' matemática não-resolvida é, conceptualmente, completamente diferente da busca de uma solução de uma hipótese física. A diferença principal entre um *experimento* e uma *prova* é demonstrada pela diferença nas relações semânticas que uma hipótese empírica admite para um experimento bem sucedido e uma conjectura matemática para uma prova construída. Aconteça o que acontecer à sua probabilidade, o *significado* de uma hipótese empírica permanece inalterado após a realização de um experimento. O mesmo não pode ser dito das conjecturas matemáticas; no entanto, nem uma nem outra pode o oposto. Wittgenstein evitou dizer que o significado de uma conjectura matemática muda seu sentido depois da construção de uma prova; para ele, a conjectura altera a sua posição na matemática. Porque a conjectura matemática simplesmente não tem significado que possa ser mudado, e é por esta razão que a proposição com a sua prova não pertence à mesma categoria que a proposição sem a prova.

Shanker tenta comparar a idéia de Wittgenstein com a abordagem heurística de conceito gerado por provas de Lakatos. Há passagens que confirmam tais afinidades; especialmente quando, em *Philosophical Grammar*, Wittgenstein bruscamente declarou: proposições matemáticas não-provadas – indicadores para a investigação matemática, estímulos para construções matemáticas. Certamente é interessante que Wittgenstein pareça ter compartilhado com Lakatos a crença de que as provas das conjecturas matemáticas não podem ser realizadas por um processo dedutivo ou mecânico. Mas, para Lakatos, a prova é um dispositivo explanatório que torna uma conjectura matemática mais convincente, e que, através do processo de aduzir e responder aos contra-exemplos, produz maior precisão e plausibilidade para suas conjecturas.

A despeito de sua oposição à identificação entre prova e experimento, Wittgenstein não precisou opor-se completamente aos traços gerais do quadro do diálogo matemático de Lakatos. De fato, pode-se mesmo sustentar que, longe de ser hostil a isso, Wittgenstein foi fundamentalmente simpático ao espírito subjacente a um tal modelo, e que isto explica o interesse de Wittgenstein em uma filosofia empírica da matemática o qual Dummett enfatiza. Mas o ponto em que Wittgenstein teria fundamentalmente discordado de Lakatos seria o da interpretação do status lógico da prova matemática.

Tomando como ponto de partida a perspectiva de Wittgenstein, Shanker afirma que Lakatos confundiu a maneira como *usamos* provas com o status lógico real de uma prova. A resposta wittgensteiniana ao quadro de Lakatos seria a de que o processo de 'descoberta' matemática que este retrata não é uma espécie de 'descoberta' científica em relação à qual o critério de testabilidade constantemente aguilhoa-nos para explicações cada vez mais sofisticadas. Melhor, a 'descoberta' matemática seria uma atividade normativa na qual pressões similares àquelas que motivam o cientista (e a base matemática da física contemporânea realça esta afinidade) encorajam o matemático a produzir, cada vez mais, estruturas normativas complexas. O status lógico de tipos diferentes de refutação, os quais Lakatos chama de contra-exemplos 'local' e 'global' (isto é, críticas dos passos em uma prova versus críticas da conclusão), permanece em Wittgenstein sob a forma de *regras da sintaxe*: reformulações gramaticais que são ocasionadas, talvez, pela crença de que uma regra existente não elucida algum aspecto da imagem mental (experimento mental em Lakatos) que está nos guiando. Daí, a objeção fundamental de Shanker à perspectiva de Lakatos é que ela confunde complexidade sintática com complexidade explanatória, e é isso o que, por sua vez, teria induzido Lakatos a misturar a natureza gramatical da prova com a natureza empírica do experimento. Para Shanker, Lakatos, ao descrever a fenomenologia da descoberta matemática, foi levado a fazer vista grossa ao fato de que a própria 'descoberta' é um conceito de semelhança de família (isto é, não definido analiticamente), que implica alguma coisa radicalmente diferente em matemática, (por exemplo a construção de estruturas gramaticais cada vez mais complexas) em relação ao seu significado em ciências (Shanker, 1987: 114-16).

A filosofia da matemática de Imre Lakatos

Paul Ernest situa as raízes da filosofia da matemática de Lakatos em Hegel, em Polya e em Popper. Seguramente este último fora uma das maiores influências no pensamento de Lakatos. Alguns paralelos dão conta dessa influência: a metodologia de Popper é chamada de *lógica da descoberta científica*; a metodologia de Lakatos:

lógica da descoberta matemática (LDM), o que é uma transposição direta, segundo Ernest. Outro exemplo é o nome do maior trabalho de Lakatos, *Provas e refutações* é um jogo direto sobre *Conjecturas e refutações* de Popper. As duas obras surgem no mesmo ano. É claro para Ernest que Lakatos está fazendo uma homenagem ao seu mentor.

E para ilustrar essa asserção, Ernest estabelece alguns paralelos entre termos usados por Lakatos em filosofia da matemática, como transposições de termos usados por Popper em suas obras dedicadas à ciência. Um exemplo está na tabela a seguir:

Popper	Lakatos
Lógica da descoberta científica	Lógica da descoberta matemática
Conjecturas e Refutações	Provas e Refutações

Outra afirmação de Ernest é que o falibilismo antifundacionista de Lakatos foi muito influenciado por Popper. Quando em *Regressión infinita y fundamentos de la matemática*, Lakatos afirma que qualquer tentativa de estabelecer de forma conclusiva a verdade da matemática leva a um regresso ao infinito (*in*: Lakatos, 1981), ele apenas fez transposição para a matemática do argumento de Popper que sustenta que qualquer tentativa de estabelecer a verdade de proposições ou teorias com base em um conjunto de proposições primitivas leva irrevogavelmente a um regresso ao infinito (Popper, 1975: 125).

Um quadro tomado e adaptado de Yuxin (1990, *apud* Ernest) apresenta algumas relações existentes entre a LDM de Lakatos e a lógica da descoberta científica de Popper; e mais elementos comprobatórios apresenta acerca da influência de Popper sobre Lakatos:

Uma comparação da Lógica da Descoberta Científica (LDC) de Popper com a Lógica da Descoberta Matemática (LDM) de Lakatos:

Estágio do Ciclo			
Metodologia	*Princípio*	*Ciclo-Médio*	*Novo Princípio*
LDM (Lakatos)	Conjectura Primitiva	Provas e Refutações	Conjectura Melhorada
LDC (Popper)	Problema e Conjectura	Refutação	Novo Problema e Nova Conjectura

Além dessas semelhanças, Ernest chama a atenção para uma diferença importante. Para Popper, não haveria conexão necessária entre o novo problema ou nova conjectura e a conjectura original (refutada) e na sua metodologia nada poderia ser dito sobre a gênese de conjecturas porque esta pertenceria ao contexto da descoberta, e não à filosofia da ciência.

Para Lakatos, ao contrário, existiria uma continuidade essencial entre a conjectura primitiva e a conjectura melhorada. A conexão é que a crítica, a análise e o fortalecimento da prova da conjectura primitiva é o que levariam à nova conjectura. Portanto, os contextos da descoberta e da justificação são mantidos juntos, ao passo que, para Popper, eles são separados.

Um outro paralelo estabelecido por Ernest entre Lakatos e Popper diria respeito à lógica da falsificação deste (basicamente *modus tollens*) e o quase-empirismo de Lakatos. A análise de provas matemáticas de Lakatos não envolveria transmissão da verdade para a frente, mas a *retransmissão* (i.e., volta ou retrotransmissão) da falsidade, como na *lógica* de Popper (*SCPM*, p. 100).

Na sua Tese de Doutorado, Lakatos afirma que o que havia tentado fazer para a matemática era um paralelo direto com o que Popper fizera para a ciência:

> *Now while Popper showed that those who claim that induction is the logic of scientific discovery are wrong, these essays intend to show that those who claim that deduction is the logic of mathematical discovery are wrong. While Popper criticized inductivist style ... these essays try to criticize deductivist style* (Lakatos, 1961: 173, *apud* Ernest).

Mas Ernest aponta também um ponto de convergência acerca da filosofia da ciência que Lakatos e Popper compartilham: o de que a filosofia precisa se preocupar apenas com a história interna. Isso envolve as relações lógicas entre os conceitos científicos e os conceitos matemáticos e sua avaliação, excluindo fatores sociais ou contextuais externos. Lakatos ainda vai além de Popper quanto à história. Pois, para ele, a LDM seria essencialmente histórica, ao passo que Popper usaria a história apenas para ilustrar a lógica da descoberta científica. Todo o trabalho de Lakatos, afirma Ernest, seria demarcado em uma maior ou menor extensão por uma visão internalista da ciência e da história da matemática.

Dessa forma, Ernest considera que a influência formativa da filosofia da ciência falibilista de Popper sobre a filosofia da matemática de Lakatos é bastante clara, apesar deste divergir daquele ao introduzir a lógica da descoberta e o contexto da descoberta e sua metodologia nas preocupações da filosofia da matemática, e afirmar a relevância da história da matemática para a filosofia da matemática. Popper, sabemos, não concorda com isso.

Uma segunda fonte da filosofia da matemática de Lakatos, que é também considerada por Ernest, é a heurística matemática de Polya. Em Polya (1978) é proposta uma metodologia heurística de resolução de problemas matemáticos em quatro estágios, elaborada com grandes detalhes. Na opinião de Ernest, tal heurística é um método matemático geral de resolução de problemas e não um método gerador de provas. Polya considera que o fornecimento de uma prova para uma conjectura é uma das atividades matemáticas de resolução de problema de um amplo alcance. A heurística de Polya é desenvolvida como uma ajuda pedagógica para tornar a aprendizagem matemática mais ativa induzindo os alunos nas atividades dos matemáticos, mas no próprio nível deles. A heurística de Polya é amplamente adotada em educação matemática, e resolução de problemas é uma das áreas de pesquisa mais exploradas em programas de pós-graduação em educação matemática. Ernest considera que, talvez por causa da sua ampla utilização em educação matemática, o significado filosófico do trabalho de Polya para a metodologia da matemática seja freqüentemente omitido. Polya afirmava que haveria elementos racionais no processo que sustenta a descoberta matemática e a resolução de problemas. Também enfatizava os aspectos racionais publicamente observáveis da criação matemática. Contudo, além do domínio da psicologia, ciência cognitiva e educação, Lakatos e Bernays são dos poucos filósofos que têm levado a sério o trabalho de Polya – *A arte de resolver problemas*. Polya foi quem sugeriu a Lakatos o estudo que resultou no texto *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*, (conforme a nota 4 em *SCPM*, p. 128).

A influência de Hegel é considerada como a terceira fonte para a adoção da forma dialógica nos escritos de Lakatos. Mas essa influência é em grande parte negada em relatos comuns acerca do pensamento de Lakatos, apesar de estar presente em seus escritos. *A forma dialogada deve refletir a dialética da narração* (Lakatos, 1978: 18). Esta observação é vista por Ernest como uma referência à filosofia e dialética de Hegel.

Mesmo os poucos estudiosos que se referem à influência de Hegel sobre Lakatos o fazem de forma rápida, mas a maioria dos comentadores ignoram esta influência ou se referem a ela de forma depreciativa como se fosse uma loucura da juventude de Lakatos. Mas Ernest encontra um único comentador que reconhece a influência embrionária das idéias de Hegel sobre a filosofia da matemática de Lakatos. Trata-se de Kadvany de quem ele cita o que segue:

> *For what Lakatos has done is to embed, within a heretofore completely separate and self-contained domain – almost the exclusive concern of Anglo-American philosophers of science and method – an entire network of ideas of history drawn from Hegel and, to a lesser extent, Hegelian-Marxism* (Kadvany, 1989: 26 *apud* Ernest).

Em edições posteriores de seus trabalhos que mostravam seu débito para com Hegel, Lakatos tratou de omiti-lo. Ernest dá um exemplo a esse respeito e considera ambivalente essa mudança de atitude de Lakatos, uma vez que a influência da filosofia de Hegel na filosofia da matemática lakatosiana é central.

> *The three major – apparently quite incompatible – 'ideological' sources of the thesis are Polya's mathematical heuristic, Hegel's dialectic and Popper's critical philosophy* (Lakatos, 1961: 5 *apud* Ernest, *SCPM*, p. 103).

O fragmento acima é parte integrante da Tese de Doutorado de Lakatos que, numa versão posterior publicada, omite todas as referências a Hegel:

> *The paper should be seen against the background of Polya's revival of mathematical heuristic, and Popper's critical philosophy* (Lakatos, 1963-64: 1 *apud* Ernest, *SCPM*, p. 103).

Ernest se atém a reafirmar a omitida influência da filosofia de Hegel sobre a filosofia da matemática de Lakatos. E a sua fonte é a Tese de Doutorado deste. O falibilismo de Lakatos está assentado no falibilismo de Hegel e no falibilismo de Popper. Estes filósofos não se preocuparam em estender seus sistemas à matemática, mas Lakatos se incumbiu dessa empresa, e em um fragmento de uma citação sua mais ampla, feita por Ernest, ele diz: *In fact the only two philosophies yet which can embrace the proof procedure – and in general, mathematical heuristic – are the Hegelian and the Popperian* (Lakatos, 1961: 166-67, *apud* Ernest, *SCPM*, p. 103).

Apesar de ser interessante, do ponto de vista histórico, essa busca das verdadeiras raízes do falibilismo de Lakatos, não sentimos ainda em que medida esse levantamento pode ajudar na compreensão do falibilismo lakatosiano, porque se Lakatos buscou negar, no seu trabalho, a explicitação das influências do pensamento de Hegel, Engels e Marx, deve ter tido as suas razões. E estas podem ter sido de diversas ordens, considerando sobretudo que ele fugira da Hungria para não ser, pela segunda vez, encarcerado pelo regime comunista que dominava o país na época.

Ernest ainda se atém a descrever de forma sucinta a tríade dialética hegeliana que, segundo ele, Lakatos teria utilizado na sua LDM em sua Tese de Doutorado. Considera ainda que a diáletica de Hegel está estreitamente ligada com a sua filosofia da história. Porque Hegel considera toda mudança como histórica, e a própria história como a dialética disposta no tempo. Como tal, ela é, com efeito, como um movimento de valsa a partir da tese, passando através da antítese para chegar à síntese, com cada passo representando um estágio ainda superior no autodesenvolvimento do Absoluto.

O historicismo de Hegel é, pois, na visão de Ernest, a fonte final para a filosofia de Lakatos, e no desdobrar-se da história de acordo com a dialética hegeliana está a fonte para a autonomia que Lakatos atribui ao desenvolvimento das idéias matemáticas.

Em meio à sua crítica positiva da diálética hegeliana, ainda na sua Tese de Doutorado, Lakatos parece evocar Wittgenstein, pensamos, quando diz que:

> *Mathematical activity is human activity. Certain aspects of this activity – as of any human activity – can be studied by psicology, others by history. Heuristic is not primarily interested in these aspects. But mathematical activity produces mathematics. Mathematics, this product of human activity, alienates itself from the human activity which has been producing it. It becomes a living, growing organism, that acquires a certain autonomy from the activity which has produced it, that develops its own autonomous laws of growth, its own dialectic* (Lakatos, 1961: 178, *apud* Ernest, *SCPM* p. 105). [Também em Lakatos, 1978: 190].

Para Wittgenstein, a matemática é primariamente uma atividade em vez de um corpo de conhecimento acerca de entidades matemáticas. *Por que não direi que o que chamamos matemática é uma família de atividades com uma família de propósitos?* (*OFM*, p. 228).

Ernest afirma que há uma impressionante semelhança entre a lógica de Popper de conjectura-refutação-nova conjectura e a dialética de Hegel. Porque ambas começam com uma proposição, se movem para uma contradição/refutação da proposição, seguida de uma nova proposição. Em algum sentido, ambas são bastante internalistas, uma vez que concebem suas lógicas como transcendendo a realidade bruta da história. Popper estaria consciente dessa analogia, mas a rejeitara como uma semelhança superficial. A esse respeito, Ernest, em uma nota, considera que seria interessante explorar a influência de Hegel e da dialética sobre o pensamento de Popper porque eles compartilharam um falibilismo, uma *lógica* parcialmente análoga e crenças idealistas (o Espírito Absoluto versus o Mundo 3). E acrescenta que, certamente, o jovem Popper fora um marxista que teria lido Marx e Engels, e teria topado com o materialismo dialético.

Mas é Popper quem diz, comparando o *Espírito Absoluto* de Hegel com o seu *terceiro mundo*:

> *Enquanto Platão deixa suas idéias hipostatizadas habitarem em algum céu divino, Hegel personaliza seu Espírito numa consciência divina; nela as idéias habitam, como as idéias humanas habitam numa consciência humana. Sua doutrina é, inteiramente, a de que o Espírito é não só consciente, mas um ser. Contrariamente a isto, meu terceiro mundo não tem qualquer similaridade com a consciência humana; e embora seus primeiros habitantes sejam produtos da consciência humana, são totalmente diferentes de idéias conscientes ou de pensamentos no sentido subjetivo* (Popper, 1975: 127).

Assim, consideramos que a aproximação que Ernest busca estabelecer entre Popper e Hegel é um tanto forçada e não tem valor objetivo, uma vez que Popper, em sua crítica à dialética hegeliana, é muito claro na apresentação das possíveis semelhanças.

Ernest apresenta ainda algumas semelhanças e dessemelhanças entre os pensamentos de Popper e Hegel, a saber:

(a) Que a tríade de Hegel forneceria a ligação conceitual entre a nova proposição (conjectura) e a proposição original, via refutação, toda encravada na história. O ciclo de Popper não procederia assim.

(b) Ao contrário da Lógica da Descoberta Científica de Popper, a tríade dialética de Hegel forneceria um modelo para a continuidade conceitual e mudança no desenvolvimento do conhecimento, lógica e historicamente.

A opinião de Ernest a esse respeito é que este aspecto da dialética de Hegel, profundamente encravado no pensamento de Lakatos desde a sua juventude como um marxista, proporcionou-lhe o ingrediente que lhe faltava para construir uma síntese que o levasse além de Popper. Lakatos, segundo Ernest, teria sido capaz de desenvolver uma LDM que se aplicaria tanto em termos das preocupações metodológicas da filosofia quanto da história da matemática. E o papel de Polya, ao abrir o processo da criação matemática para Lakatos, permitindo que esta síntese se aplicasse à matemática, não deveria ser subestimado. Ernest ainda afirma estar seguro de que a filosofia da matemática de Lakatos seria, com efeito, a síntese das idéias de Hegel (a tese) com a filosofia de Popper (a antítese) (*SCPM*, p. 106).

Contudo, a opinião de Popper (1980, cap. 15) com relação às idéias de Hegel e Marx não parece sustentar esse argumento de que a filosofia de Lakatos é uma síntese do tipo popperiano-hegeliana. O próprio Popper é bastante crítico em seus escritos com relação à dialética de Hegel, apontando os excessos dos dialéticos, suas metáforas muitas vezes tomadas demasiadamente a sério e o tratamento que dão às contradições. É o próprio Popper quem diz:

> *Apesar de certa similaridade superficial entre a dialética de Hegel e meu esquema evolucionário $P_1 \rightarrow TT \rightarrow EE \rightarrow P_2$ há uma diferença fundamental. Meu esquema funciona através da eliminação de erros, e no nível científico através da crítica consciente sob a idéia reguladora da procura da verdade.*
>
> *A crítica, sem dúvida, consiste na procura de contradições e em sua eliminação: a dificuldade criada pela demanda de sua eliminação constitui o novo problema P_2. Assim, a eliminação do erro leva ao crescimento objetivo de nosso conhecimento – de conhecimento no sentido objetivo. Leva ao crescimento de verossimilitude objetiva: torna possível a aproximação da verdade (absoluta).*
>
> *Hegel, por outro lado, é um relativista. Não vê nossa tarefa como uma procura de contradições com o fito de eliminá-las, pois pensa que as contradições são tão boas como (ou melhores do que) os sistemas teóricos não-contraditórios* (Popper, 1975: 126-7).

Após apresentar o processo de mudança de atitude de Lakatos abdicando ou rejeitando o seu passado hegeliano-marxista, Ernest se pergunta por que, dado o grande débito intelectual de Lakatos para com Hegel, ele deveria voltar-se tão energicamente contra aquele, e compreende que mais do que a reação de um ex-marxista contra a velha ideologia, a importância da influência do seu novo meio deve ser mais considerada. Admite que a influência de Popper e do ambiente da Escola de Economia de Londres e da filosofia anglo-americana em geral, com sua rejeição à metafísica, levaria a uma forte rejeição das idéias de Hegel. Porque a demarcação de Popper entre a ciência e a pseudociência ocultava uma forte ideologia cientificista e racionalista que claramente rejeitava a metafísica, o idealismo e idéias de Hegel.

Ernest especula acerca de uma possível tensão interna que existiria entre a tese histórico-dialética de Hegel e a antítese lógico-racionalista de Popper que sustentam a síntese lakatosiana. E vê a possibilidade de haver uma contradição no pensamento de Lakatos, com um elemento crítico, antiformalista (evidente na sua filosofia da matemática) e a linha demarcacionista, racionalista (na sua crescente estatura como um filósofo da ciência). Ancora essa avaliação em uma análise de uma crítica feita por Lakatos a Toulmin (i*n*: Lakatos, 1981: 299-323) e em seus escritos sobre ciência e educação, presentes em Lakatos (1981).

Também nos escritos de Lakatos sobre educação há contradições, diz Ernest. Pois, se por um lado, a crítica lakatosiana à abordagem dedutivista difundida no ensino da matemática, considerada por ele como autoritária, é progressista e radical, por outro lado, seus escritos posteriores contêm elementos que são autoritários e reacionários. Os dois elementos que podem ser distinguidos no pensamento de Lakatos penetram amplamente sua filosofia da matemática e sua filosofia da ciência, que é seu elemento posterior e mais *reacionário* (Berkson, 1981, *apud* Ernest *SCPM*, p. 108).

Ernest considera que uma exploração do desenvolvimento e contradições no pensamento de Lakatos não estaria completa sem considerar a afirmação feita pelos editores de *Proofs and Refutations*, de que, nos seus últimos anos, Lakatos revisara e no fundo rejeitara sua filosofia da matemática falibilista. Para Ernest, o que os editores afirmam é dúbio. Primeiro, afirmam que a moderna concepção de inferência válida, do modo como é representada na lógica dedutiva formal, é *essencialmente infalível* (Lakatos, 1978: 180), o que levaria à conclusão de que Lakatos estava *errado* em negar esse fato em seus escritos sobre filosofia da matemática. Segundo, afirmam que Lakatos teria *mudado sua opinião* de acordo com esta afirmação (ou poderia ter sido assim persuadido) e, desta maneira, teria revisado suas publicações. Estas afirmações são feitas em notas de pé de página em Lakatos (1978) e, em um *novo final infalibilista para o diálogo lakatosiano* no Capítulo 2 (escrito pelos editores), estes fazem uma revisão que, segundo Ernest, subverte totalmente o texto de Lakatos.

Buscando encontrar a base das afirmacões dos editores, ele observa que a totalidade dos escritos publicados de Lakatos, incluindo um trabalho de 1973, não fornece evidência de sua mudança de opinião sobre o falibilismo da matemática e da lógica. E se reporta ao seu *paper* de 1967: *A Renaissance of Empiricism*, no qual reafirma, e mais, elabora seu falibilismo completo. Afirma que, mesmo que Lakatos tivesse mudado de opinião, isto não afetaria a validade de sua filosofia da matemática anterior como fora publicada, porque esta deveria ter seus próprios méritos; e que qualquer mudança posterior de Lakatos seria interessante biograficamente, mas isso não comprometeria sua filosofia primeira da matemática.

Na opinião de Ernest, a ação dos editores é surpreendente e incorreta, independentemente de seu mérito. E apesar de eles não negarem a sua intervenção, ela é ilegítima e não reperesenta o pensamento de Lakatos. Eles parecem pretender subverter a tese central da filosofia da matemática de Lakatos, diz ele.

Assim também pensam outros comentadores que comungam com o seu sentimento: Bloor (1978, *apud* Ernest), que cuidadosamente refuta a intervenção, e Hersh (1978b: 133, *apud* Ernest).

No livro de Davis & Hersh, *A experiência matemática*, os autores também condenam a atitude dos editores de Lakatos, ao considerarem que ele fora incorreto ao afirmar que *para revisar a filosofia infalibilista da matemática, ter-se-ia que abandonar a idéia de que nossa intuição dedutiva inferencial é infalível* (Davis & Hersh, 1985: 394). Consideram que Lakatos está correto e seus editores, incorretos, e que o erro deles teria raízes no próprio erro que Lakatos atacara tão veementemente em sua introdução, isto é, o erro de identificar a matemática (o que os matemáticos realmente fazem na vida real) com seu modelo ou representação na metamatemática ou, na lógica de primeira ordem (Davis & Hersh, 1985: 399). A contestação dos autores às modificações feitas no texto original de

Lakatos pretende esclarecer aspectos que os editores de Lakatos parecem não considerar. Por exemplo, eles afirmam que os editores de Lakatos *afirmam que uma dedução formal em lógica de primeira ordem não é falível, em qualquer sentido sério. Mas não esclarecem que tais deduções são atividades puramente hipotéticas (excetuando problemas 'de brincadeiras', que podem servir de exercícios em um curso de lógica.)* (Davis & Hersh, 1985: 395-96). E mais adiante, ainda referindo-se aos editores, a propósito de suas modificações da obra prima de Lakatos e de acréscimos de notas, asseveram que eles

> *nunca explicam em que sentido os sistemas formais são um modelo da matemática. É no sentido normativo – a matemática* ***deveria*** *ser como um sistema formal? Ou é no sentido descritivo – a matemática* ***é*** *como um sistema formal?* (Davis & Hersh, 1985: 397-98).

Os autores encerram suas considerações em defesa de Lakatos destacando o papel de *Provas e refutações* na discussão da matemática fora da perspectiva fundamentista.

Ernest ainda estabelece analogias entre Lakatos como um filósofo da matemática e como um filósofo da ciência e observa que a LDM, com seu historicismo associado, veio primeiro e foi subseqüentemente reaplicada à filosofia da ciência para desenvolver a metodologia dos programas de pesquisa científica. Um outro paralelo é o uso e importância atribuídos à perspectiva internalista da história, central tanto para a filosofia da matemática quanto para a filosofia da ciência de Lakatos. Em ambas, a história reconstruída racionalmente é vista a revelar o desenvolvimento lógico e conceitual fundamental. Assim, embora seja importante distinguir as duas posições filosóficas, sua influência mútua e interdependência não deveria ser esquecida.

Ernest também aponta uma não-analogia [*disanalogy*], que é o que ele considera acerca do fato de o espírito da filosofia da matemática de Lakatos ser antidemarcacionista, preocupado em quebrar a divisão entre matemática informal, até aquela época amplamente ignorada na filosofia da matemática, e as teorias matemáticas formais. A perspectiva lakatosiana dissolve as barreiras que tinham sido erigidas entre os contextos da descoberta e da justificação, e entre a história e a filosofia da matemática. Em cada um desses casos, se configura uma expansão do âmbito da filosofia da matemática para ser mais descritiva da prática matemática; e esta característica é central na inovação de Lakatos.

Já a filosofia da ciência de Lakatos é demarcacionista, prescritiva e avaliativa, estando preocupada em separar os programas científicos *bons* (progressivos) daqueles que são *ruins* (degenerativos). Assim, embora haja uma analogia entre monstro – e obstruir exceção e mudança de programas degenerativos, os primeiros são movimentos temporários locais, na defesa de uma conjectura, embora os últimos constituam uma mudança global de ênfase para proteger um programa de pesquisa científica global. Ironicamente, a este respeito, a metodologia dos programas de pesquisa científica chega mais perto de admitir fatores externos, contextuais, mesmo sociológicos, a partir da prática da ciência, pelo menos por analogia (como por exemplo, os interesses autoprotetores de um grupo de pesquisadores defendendo seu programa).

Globalmente, embora haja um impressionante paralelo entre a LDM e a metodologia dos programas de pesquisa científica, há uma diferença significativa entre as duas filosofias. O reconhecimento de contradições na posição filosófica de Lakatos é necessário, mas há também uma unidade em seu pensamento que sobrevive e integra a mudança na ênfase.

A maior contribuição de Lakatos à história e filosofia da matemática foi o seu estudo de caso baseado no tratamento da LDM. É uma contribuição para a metodologia da matemática, um campo de estudos situado na interseção entre história e filosofia da matemática, e entre o contexto da justificação e o contexto da descoberta.

A LDM de Lakatos *fornece a dialética autônoma da matemática* (Lakatos, 1978: 190). Essa citação de Lakatos, feita por Ernest, comporta um esclarecimento. De fato, Lakatos não diz que *a LDM fornece a dialética autônoma da matemática* mas que, *a heurística se interessa (ou se ocupa) pela dialética autônoma da matemática, e não por sua história, embora ela só possa estudar seu assunto através do estudo da história e da reconstrução racional da história* (Lakatos, 1978: 190). Mas Ernest, aqui, está seguindo, acreditamos, o pensamento de Lakatos, ao usar como sinônimos os termos *heurística* e *LDM*. De fato, é Lakatos quem diz, na introdução de *Provas e Refutações*, que

> *O objetivo destes ensaios é enfocar alguns problemas da metodologia da matemática. Emprego a palavra 'metodologia' em sentido análogo ao de 'heurística', de Polya e Bernays, e 'lógica do descobrimento' ou 'lógica situacional', de Popper. A recente expropriação do termo 'metodologia da matemática' para servir como sinônimo de 'metamatemática' tem, fora de dúvida, um toque formalista. Indica que, na filosofia formalista da matemática, não há lugar adequado para metodologia como lógica do descobrimento* (Lakatos, 1978: 15).

A análise de Ernest da LDM se atém, inicialmente, ao texto extraído da Tese de Doutorado de Lakatos (1961), mas é o mesmo texto que está em parte nas duas primeiras páginas do Apêndice 1 de Lakatos (1978: 166-67). Nesse texto, Lakatos apresenta o que ele chama de um padrão simples de descoberta matemática − ou do progresso das teorias matemáticas não-formais. Tal padrão ele o compõe de sete fases, sendo que as quatro primeiras constituem, para ele, o núcleo essencial da análise de prova:

> *(1) Conjectura primitiva.*
> *(2) Prova (um rústico experimento mental ou argumento, decompondo a conjectura primitiva em subconjecturas ou lemas).*
> *(3) Surgem contra-exemplos 'globais' (contra-exemplos à conjectura primitiva).*
> *(4) Prova reexaminada: o lema 'condenado' para o qual o contra-exemplo global é um contra-exemplo 'local' é localizado. Esse lema condenado pode ter permanecido anteriormente 'oculto' ou pode ter sido mal identificado. Agora ele é tornado explícito, e elevado na conjectura primitiva à categoria de condição. O teorema − a conjectura aperfeiçoada − suplanta a conjectura primitiva com o novo conceito gerado pela prova como seu novo aspecto superior* (Lakatos, 1978: 166-67).

Nesse momento da citação, na Tese, Lakatos insere dois parágrafos de comentários, sendo que o primeiro é acerca da possível precedência da quarta fase em relação à terceira, inclusive na ordem heurística, observando que pode haver uma série de contra-exemplos forçando lemas escondidos a mostrarem-se e uma série de ainda mais cuidadosas análises de provas indicando uma série de contra-exemplos *SCPM*, p. 112). Esse parágrafo é ligeiramente modificado e transformado em nota na referência Lakatos (1978: 166). Mas o segundo parágrafo é mantido no texto. As três fases seguintes também constituem padrões que freqüentemente ocorrem, segundo Lakatos, na lógica de descoberta matemática:

> *(5) São examinadas provas e outros teoremas para verificar se o lema recentemente achado ou o novo conceito gerado pela prova ocorre neles: esse conceito pode ser encontrado jazendo como encruzilhada de diferentes provas, daí surgindo como de importância fundamental.*

(6) As conseqüências até então aceitas da conjectura original e agora refutada são conferidas.
(7) Os contra-exemplos convertem-se em novos exemplos – abrem-se novos campos de investigação (Lakatos, 1978: 167).

Ernest considera essas fases uma afirmação explícita da LDM de Lakatos. A mais expandida versão da sua heurística está no diálogo acerca da conjectura de Euler (Lakatos 1978) que se realiza em vários níveis. A divisão do diálogo em subtítulos é, para Ernest, uma indicação explícita dos estágios da heurística de Lakatos. No interior do diálogo ocorrem afirmações explícitas da heurística. O texto compreende um diálogo em sala de aula entre um professor e alguns alunos. Todos: professor, alunos e sala são virtuais. Real mesmo é só a conjectura de Euler e a heurística aplicada.

Configura-se um diálogo muito rico entre todos os personagens lakatosianos. Os alunos aplicam a heurística à conjectura de Euler, em uma seqüência de conjecturas, provas e refutações, representando uma reconstrução racional da história da evolução da conjectura e sua prova. Refletem sobre suas aplicações da heurística às vezes tornando aspectos dela explícitos assim como discutindo questões filosóficas levantadas por suas aplicações. Nas notas, o próprio Lakatos reflete sobre o diálogo e relaciona a história reconstruída no diálogo com a *real* evolução histórica do problema e suas soluções.

Ernest considera que o diálogo serve a várias funções. Por ser um estudo de caso imaginativo da heurística em ação, ilustra a sua potencialidade como uma metodologia da prática matemática. A metodologia também constitui a lógica da descoberta, o padrão de crescimento do conhecimento e de avaliação em matemática. Oferece uma reconstrução racional num estudo de caso em que a LDM utilizada na história da matemática ilustra o desenvolvimento lógico e a mudança conceitual envolvidos na evolução do conhecimento matemático. Oferecendo em paralelo uma explicação do desenvolvimento histórico real da prova da conjectura de Euler, testa a reconstrução histórica através da LDM contra os *fatos* da história. E, por fim, sugere que a heurística serve a um fim pedagógico chegando ao conhecimento matemático através do seu desenvolvimento, em vez de seguir o padrão formal tradicional das apresentações em livros-textos (definição, lema, teorema, prova). Esta última leitura do diálogo, observa Ernest, é fortalecida pela própria referência de Lakatos à aplicação da lei biogenética fundamental acerca da ontogenia recapitulando a filogenia para o desenvolvimento mental matemático (Lakatos, 1978: 17).

Ernest observa que há um outro momento no desenvolvimento do diálogo de Lakatos em que ocorre uma segunda afirmação da heurística lakatosiana, cujo *método de incorporação de lemas* é rebatizado com o nome de *método de prova e refutações,* e cinco regras heurísticas são estabelecidas como seus aspectos principais. Três são estabelecidas conjuntamente e as duas seguintes ao longo do diálogo:

Norma 1. Se tivermos uma conjectura, disponhamo-nos a comprová-la e a refutá-la. Inspecionemos a prova cuidadosamente para elaborar um rol de lemas não-triviais (análise de prova); encontremos contra-exemplos tanto para a conjectura (contra-exemplos globais) como para os lemas suspeitos (contra-exemplos locais).
Norma 2. Se tivermos um contra-exemplo global, desfaçamo-nos de nossa conjectura, acrescentemos à nossa análise de prova um lema apropriado que venha a ser refutado pelo contra-exemplo, e substituamos a conjectura desprezada por outra melhorada que incorpore o lema como uma condição. Não permitamos que uma refutação seja destituída como um monstro. Esforcemo-nos por tornar explícitos todos os 'lemas implícitos'.

Norma 3. Se tivermos um contra-exemplo local, confiramos para verificar se ele não é também contra-exemplo global. Se for, podemos facilmente aplicar a Regra 2 [Norma 2] (Lakatos, 1978: 72-73).
Norma 4. Se tivermos um contra-exemplo que seja local, mas não global, tentemos melhorar nossa análise da prova mediante substituição do lema refutado por outro não-falseado (Lakatos, 1978: 83).
Norma 5. Se tivermos contra-exemplos de qualquer tipo, experimentemos encontrar, por suposição dedutiva, um teorema mais profundo ao qual eles não mais sejam contra-exemplos (Lakatos, 1978: 104).

Ernest considera essas normas um conjunto de heurística matemática, regras prescritivas para o matemático praticante, constituindo-se em um método de matemática proposto. Ele afirmara que, na LDM, Lakatos oferece uma teoria unificada do desenvolvimento matemático, uma metodologia abrangendo quatro funções, cada uma pertencendo à gênese do conhecimento matemático. Primeiro, há a função filosófica descritiva explicando a gênese e a justificação do conhecimento matemático. Esta é a lógica informal associada da descoberta matemática e da justificação, isto é, o padrão detalhado de matemática epistemológica. Segundo, há a função histórica em descrever o desenvolvimento real da matemática, ou pelo menos sua reconstrução histórica. Nessa função, ela fornece uma descrição lógica simplificada do padrão que tais desenvolvimentos seguem na história reconstruída, junto com indicações do desenvolvimento histórico real mais uma justificação para alguns desvios através da LDM. Terceiro, há a função heurística, fornecendo um método para matemáticos praticantes, um conjunto de orientações para eles seguirem. Quarto, ela também tem uma função pedagógica significativa porque descreve um método para ensinar matemática de um modo que corresponde à história. Essas quatro funções estão indissoluvelmente juntas na LDM de Lakatos (*SCPM*, p. 114).

Lakatos chamou a sua filosofia da matemática de quase-empirismo. Ernest considera que vários temas centrais do quase-empirismo de Lakatos podem ser identificados, sendo que alguns mais explicitamente que outros.

A maior afirmação crítica de Lakatos é que o conhecimento matemático é fundamentalmente falível e corrigível. Esta afirmação, segundo Ernest, está baseada em duas outras: a de que qualquer tentativa de encontrar uma base perfeitamente segura para o conhecimento matemático leva a um regresso ao infinito; e a de que ao conhecimento matemático não pode ser dado uma forma final, completamente rigorosa. Como conseqüência da filosofia da matemática de Lakatos, a busca de uma base para a certeza absoluta na matemática é rejeitada e o conhecimento matemático é reconhecido como falível, corrigível e sem fundamentos seguros. Tudo isso faz do falibilismo de Lakatos a última expressão da tradição cética em epistemologia, a qual afirma que nós não podemos obter conhecimento da verdade em absoluto. E, mesmo que o obtivéssemos, não saberíamos que o obtivéramos.

Ernest situa a filosofia da matemática de Lakatos na tradição da filosofia cética que remonta ao período anterior à Grécia clássica. Sua significação se estende além da filosofia da matemática. Uma vez que a epistemologia dogmática repousa muito de suas afirmações sobre a posição privilegiada do conhecimento matemático, se as afirmações do quase-empirismo se estabelecem representam um desafio não só para o absolutismo na filosofia da matemática, mas também para a epistemologia dogmática em geral.

Entretanto, Ernest não precisa que tipo de ceticismo caracteriza o falibilismo de Lakatos. Seria um ceticismo de princípio, ou de método, como o de Descartes? Acreditamos que seja um ceticismo de método, uma vez que Lakatos duvidara de uma determinada concepção predominante acerca do conhecimento matemático, e não do próprio conhecimento matemático. Tanto assim que ele produziu conhecimento filosófico em suas reflexões em torno da matemática.

Lakatos afirma a primazia das teorias matemáticas informais sobre as teorias matemáticas relativamente formais. Para ele, estas são reconstruções racionais daquelas como dadas pela prática matemática e pela história da matemática, na qual a estrutura genética é abandonada em favor da lógica justificadora. As teorias matemáticas informais são os fenômenos da matemática que as teorias formais tentam explicar. Lakatos pretende fornecer uma mais acurada teoria descritiva da matemática que explique a gênese bem como a justificação do conhecimento matemático, através de sua história assim como de sua estrutura de prova lógica. A matemática informal é a fonte dos falsificadores potenciais da matemática formalizada, e abastece os indivíduos de premissas e conclusões da matemática dedutiva (axiomas informais, definições e conjecturas) assim como de provas informais através das quais as premissas e conclusões são conectadas.

Lakatos é crítico da dicotomia entre teorias formais e informais em matemática. Sua rejeição do absolutismo implica que não há distinção clara entre teorias matemáticas formais e informais. As teorias matemáticas formais podem nunca encontrar uma expressão última; e qualquer formulação, de qualquer forma rigorosa, está permanentemente aberta à melhoria, revisão e reformulação. Portanto, a diferença entre teorias formais e informais seria uma questão de grau.

Em *Provas e refutações,* Lakatos propõe uma teoria da criação do conhecimento em matemática que Ernest considera que pode ser representada como segue: Dado um problema matemático (P) e uma teoria matemática informal (T) um passo inicial na gênese de novo conhecimento é a proposta de uma conjectura (C). O método de provas e refutações é aplicado a essa conjectura, e uma prova informal da conjectura é construída e então submetida à crítica, levando a uma refutação informal. Em resposta a essa refutação, a conjectura, e possivelmente também a teoria informal e o problema original, são modificados ou trocados em uma nova síntese, completando o ciclo.

Lakatos destaca o papel dos problemas no desenvolvimento da matemática tal como no fim de seu diálogo, quando o professor afirma que *uma investigação científica começa e termina com problemas* (Lakatos, 1978: 140, citando Popper).

Globalmente, para Ernest, a teoria de Lakatos descreve o mecanismo lógico envolvido na gênese e teste do conhecimento matemático. Neste processo, uma conjectura e uma prova (incluindo uma seqüência de lemas e várias definições) são expostos à crítica; e em um ciclo repetido, elas são reformuladas em resposta à crítica. A prova resultante pode *não provar o que explica provar* e pode *não explicar o que diz explicar* (Lakatos, 1981: 93, 97). A dialética autônoma da LDM *melhora* como *prova*, para cada resultado de iteração (bem sucedido), a refutação da conjectura antiga. Parte desse processo é o refinamento e redefinição dos conceitos matemáticos envolvidos, e também da conjectura e da prova (*SCPM*, p. 119).

A visão de matemática de Lakatos é paralela à visão da ciência de Popper. Ele considera a Matemática como hipotético-dedutiva. A matemática consiste de teorias hipotéticas, e dentro de cada uma há tentativas de deduzir as provas das conjecturas. Assim, por exemplo, uma conjectura C pode ser estudada dentro de uma teoria informal T, e provas informais construídas levando *a* C (representadas pela inferência $T \Rightarrow C$). Na perspectiva de

Popper, uma hipótese científica *H* é estudada, e uma conseqüência empírica ou observacional *O* é deduzida *a partir* dela (representada pela inferência $H \Rightarrow O$). As direções da inferência são opostas nos sistemas hipotético-dedutivos lakatosiano e popperiano. Na perspectiva de Popper trata-se de dedução *a partir* da hipótese, ao passo que na perspectiva de Lakatos trata-se de dedução *da* conjectura. Lakatos chama a matemática de quase-empírica por causa da analogia que ele estabelece entre a sua LDM e a Lógica da Descoberta Científica de Popper para a ciência empírica.

Talvez, seja interessante lermos em termos do próprio Lakatos o que este pensava acerca de a matemática ser quase-empírica. Ele estabelece um contraste entre teoria ou ciência quase-empírica e teoria ou ciência euclidiana:

> *Talvez a melhor maneira de caracterizar as teorias quase-empíricas, como algo oposto às teorias euclidianas, seja como segue. Denominamos 'enunciados básicos' a aquelas sentenças de um sistema dedutivo nas quais se injeta inicialmente valores de verdade, e 'enunciados básicos verdadeiros' ao subconjunto de enunciados básicos que recebe o valor particular verdadeiro. Então, um sistema é euclidiano se é* a clausura [dedutiva] *daqueles seus enunciados básicos que se assume como verdadeiros. De outro modo, é um sistema quase-empírico.*
>
> *De uma teoria euclidiana pode afirmar-se que é verdadeira; de uma teoria quase-empírica, em suma, que está bem corroborada; mas é sempre conjectural. Ademais, em uma teoria euclidiana os enunciados básicos verdadeiros, situados na ponta do sistema dedutivo (chamados usualmente axiomas)* provam, *digamos assim, o resto do sistema; em uma teoria quase-empírica os enunciados básicos (verdadeiros) são* explicados *pelo resto do sistema.*
>
> *Que um sistema dedutivo seja euclidiano ou quase-empírico vem determinado pelo padrão do fluxo ou corrente do valor de verdade no sistema. O sistema é euclidiano se o fluxo característico é a transmissão da verdade desde o conjunto de axiomas 'para baixo', ao resto do sistema – aqui a lógica é* um organon de prova *-; um sistema é quase-empírico se o fluxo característico é a retransmissão da falsidade desde os enunciados básicos falsos 'para cima', até 'as hipóteses' – a lógica é agora* um organon de crítica [conf. Popper, 1980: 94]. *Mas esta demarcação entre padrões do fluxo dos valores de verdade é independente das convenções particulares que regulam a injeção original de valores de verdade nos enunciados básicos. Por exemplo,* uma teoria que é quase-empírica segundo minha interpretação pode ser empírica ou não-empírica no sentido usual*; é empírica só se seus teoremas básicos são enunciados básicos espaço-temporalmente singulares cujos valores de verdade vêm determinados pelo código vigente, ainda que não escrito, do cientista experimental. (Podemos falar, de modo ainda mais geral, de teorias euclidianas versus teorias quase-empíricas independentemente do que flui pelos canais lógicos; verdade segura ou falível e falsidade, probabilidade e improbabilidade, o moralmente desejável ou indesejável, etc. O decisivo é o* como *do fluxo).*
> *A metodologia de uma ciência depende em grande parte de que essa ciência aspire a um ideal euclidiano ou quase-empírico. A regra básica de uma ciência que aspire ao primeiro objetivo é a busca de axiomas auto-evidentes – a metodologia euclidiana é puritana e antiespeculativa –. A regra básica do segundo tipo de ciência é a busca de hipóteses imaginativas e audazes com um grande poder explicativo e 'heurístico', e, em realidade, este tipo de ciência invoca uma proliferação de hipóteses alternativas para serem expurgadas por uma crítica severa – a metodologia quase-empírica é irreprimivelmente especulativa.*
>
> *O desenvolvimento de uma teoria euclidiana consta de três etapas: primeiro a etapa pré-científica, ingênua, de ensaio e erro que constitui a pré-história da matéria; segue o período fundacional que reorganiza a disciplina, recorta as bordas obscuras e estabelece a estrutura*

dedutiva da medula segura. Tudo o que queda então por fazer é a solução de problemas dentro do sistema, principalmente a construção de provas e refutações de conjecturas interessantes. ([O descobrimento de] um método de decisão para a teoremização pode abolir por completo esta etapa e por fim ao desenvolvimento.

O desenvolvimento de uma teoria quase-empírica é muito diferente. Este desenvolvimento parte de problemas, seguidos de soluções arriscadas; logo vêm os testes severos, as refutações. O veículo do progresso se encontra nas especulações audazes, na crítica, na controvérsia entre teorias rivais, nas mudanças de problemas. A atenção se centra sempre nas bordas obscuras. Os slogans são crescimento e revolução permanentes, não fundamentos e acumulação de verdades eternas.

O padrão principal da crítica euclidiana é a suspeita: As provas realmente provam? Os métodos empregados são demasiado fortes e, portanto, falíveis? O padrão principal da crítica quase-empírica é a proliferação de teorias e a refutação.
...O problema central de todas as escolas fundacionais era 'estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos'. Sem embargo, os estudos fundacionais conduziram inesperadamente à conclusão de que talvez fosse impossível uma reorganização euclidiana da matemática em seu conjunto; que as teorias matemáticas, pelo menos as mais ricas, eram quase-empíricas, como as teorias científicas. O euclidianismo sofrera uma derrota dentro de seu próprio refúgio (Lakatos, 1981, v.2 p. 48-49-50; ênfases do autor).

Para Lakatos, uma vez que a matemática não tem fonte externa de observações para servir como falsificadores potenciais das teorias ou conjecturas, o domínio da matemática informal serve a esta função. As teorias matemáticas informais fornecem as conjecturas e os *falsificadores heurísticos* potenciais. Por exemplo, no caso da conjectura de Euler, se a superfície tridimensional constituída por dois cubos encaixados fosse aceita como um poliedro, então o teorema informal que afirma que este poliedro é não-euleriano se constituiria num *falsificador heurístico*. No caso de teorias axiomáticas formais, desde que elas sejam a formalização de teorias matemáticas informais já existentes, seus *falsificadores* são os teoremas informais da teoria preexistente (os *falsificadores heurísticos*), em acréscimo às contradições formais que constituem os *falsificadores lógicos* da teoria.

Na interpretação de Hacking sobre a filosofia da matemática de Lakatos, a palavra *quase-empírico* é usada para indicar a interação da generalização e exemplo que, segundo Lakatos, é uma parte essencial da atividade matemática.

O quase-empirismo de Lakatos reforça seu falibilismo, pois significa que a validade do conhecimento matemático é, na melhor das hipóteses, experimental; é continuamente testado por meios pragmáticos e não está estabelecido de uma vez por todas através de provas rigorosas. Neste processo, as conseqüências das suposições matemáticas são exploradas, exatamente como as conseqüências observacionais das teorias empíricas, com um olhar para a fertilidade assim como para a falsificação. Essa é a razão pela qual a matemática é descrita por Lakatos como *quase-empírica* ou *quase-experimental*.

De acordo com Lakatos, a história da matemática é a história da evolução do conhecimento matemático. Desempenha um papel central e constitutivo na filosofia da matemática. A LDM de Lakatos é concebida como a lógica do desenvolvimento histórico do conhecimento matemático, revelado através das reconstruções racionais da história, bem como do mecanismo epistemológico do crescimento do conhecimento matemático. Uma reconstrução racional do desenvolvimento da conjectura de Euler e de suas provas é o que constitui *Provas e Refutações* de Lakatos, caracterizado por este como uma história *destilada* que reconstrói os relacionamentos dos conceitos, métodos, provas, conjecturas e teorias como ocorreram na história para demonstrar seu desenvolvimento lógico e no fundo mostrar o progresso que ocorre no conhecimento, e como é alcançado logicamente. Tal reconstrução pretende mostrar os aspectos racionais do aumento do conhecimento, aqueles que podem ser modelados por meio da lógica, e em particular através da LDM. Trata-se de uma história internalista descontextualizada e despersonalizada. O próprio Lakatos indica as discrepâncias entre a história reconstruída racionalmente (no seu texto) e a *história factual* (isto é, empírica) nas notas de rodapé, a qual ele explicitamente afirma *não* escrever.

Apesar de se referir primeiro à *reconstrução racional da história* na sua tese, em 1961, baseada em Popper, Lakatos articula seus pontos de vista sobre o método mais claramente na sua filosofia da ciência, na qual afirma que a filosofia *fornece metodologias normativas em termos do que os historiadores reconstróem a 'história interna', e, assim, fornece uma explicação racional do aumento do conhecimento objetivo*. Ele mantém a distinção entre a história interna de uma ciência (incluindo a matemática) e sua história externa, que trata de fatores empíricos que dizem respeito ao seu contexto social e psicológico: *qualquer reconstrução racional da história necessita ser suplementada através de uma 'história externa' empírica sociopsicológica* (Lakatos, 1989: 134). A *'história interna'* do desenvolvimento de uma conjectura matemática ou teorema é dada através da sua reconstrução racional. Para Lakatos, a reconstrução racional impõe uma estrutura teórica sobre a história, porque ela interpreta a história através de uma lente teórica simplificante. Ele admite que a história é sempre uma interpretação. *A história sem alguma preferência teórica é impossível* (Lakatos, 1989: 156-7, citando Popper).

> *Se uma proposição é um* fato *ou uma* teoria *no contexto de uma situação de teste depende de nossa decisão metodológica. 'A base empírica de uma teoria' é uma noção monoteórica, ela é* relativa *a alguma estrutura dedutiva monoteórica. Nós podemos usá-la como uma primeira aproximação; mas no caso de apelo pelos teóricos, devemos usar um* modelo pluralístico. *No modelo pluralístico o confronto não é 'entre teorias e fatos' mas entre duas teorias de alto nível: entre uma* teoria interpretativa *fornecer os fatos e uma* teoria explanatória *explicá-los; e a teoria interpretativa pode ser verdadeiramente tão superior quanto a teoria explanatória. O confronto não é mais entre uma teoria logicamente de nível superior e uma hipótese falsificadora de nível mais baixo. O problema deveria não ser posto em termos de se uma* refutação *é real ou não. O problema é como reparar uma inconsistência entre a 'teoria explanatória' sob teste e as – explícitas ou escondidas – teorias 'interpretativas'; ou se você desejar,* o problema é qual teoria considerar como a interpretativa que fornece os fatos 'verdadeiros' e qual a explanatória que 'experimentalmente' explica-os (Lakatos, 1989: 61-2, ênfase original).

Assim uma reconstrução racional da história da matemática pode impor uma leitura teórica particular sobre a história para revelar (ou melhor construir) uma lógica simplificada do crescimento do conhecimento.

A citação ilumina um outro aspecto importante da filosofia da matemática de Lakatos discutido acima. É o relacionamento entre teorias matemáticas informais e teorias matemáticas formais. Estas últimas são reconstruções racionais das primeiras, nas quais a estrutura genética é abandonada em favor da lógica justificativa. Teorias matemáticas informais são os fenômenos da matemática que teorias formais tentam explicar. Lakatos situa os falsificadores potenciais de uma teoria formal entre os teoremas informais da teoria informal preexistente. Embora os falsificadores para a matemática e ciência empírica se originem em domínios diferentes, eles têm muito em comum, diz Ernest. As observações empíricas são elas próprias hipóteses teóricas, originando de uma outra teoria *explanatória*. Do mesmo modo, os falsificadores são teoremas de uma teoria informal de fundo.

Avaliação da Filosofia Social da Matemática de Imre Lakatos

O nosso propósito aqui era também tentar esboçar de que maneira o contexto social atua na filosofia da matemática de Lakatos, conforme os seguintes critérios já explicitados na introdução deste trabalho e aplicados quando refletimos a respeito tendo em perspectiva a filosofia da matemática de Wittgenstein, a saber:

> *1) Que papéis o contexto social desempenha na forma de se conceber e explicar a natureza do conhecimento matemático, e o grau de objetividade ou 'certeza' de seus objetos, proposições e procedimentos?*
> *2) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da natureza e da origem dos objetos da matemática?*
> *3) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da aplicabilidade do conhecimento matemático na ciência, na tecnologia e em outros domínios do saber?*
> *4) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da atividade matemática dos matemáticos no presente e no passado?*

Porém, encontramos dificuldades na aplicação desses critérios, uma vez que a forma como Lakatos desenvolve a sua teoria não nos permite uma abordagem ampla acerca do papel que o contexto social desempenha na explicação desses vários aspectos do conhecimento matemático, seja na sua origem, natureza dos seus objetos, suas aplicações, procedimentos, etc. Mesmo assim, buscamos considerar algumas avaliações da filosofia da matemática de Lakatos de modo a podermos dispor de elementos que nos possibilitassem alguma idéia do que poderia ser uma pretensa avaliação da filosofia da matemática de Lakatos conforme os critérios acima esboçados.

Ernest avalia a filosofia da matemática de Lakatos estabelecendo um diálogo com alguns autores que, de alguma forma, consideraram o pensamento matemático lakatosiano. Feferman (1981, *apud* Ernest, *SCPM*) desafia a precisão da LDM como uma teoria da história e sustenta que o método de análise de prova, central para a teoria, teria aparecido só na metade do século XIX. Para Ernest, se isto fosse verdade, então, a LDM poderia falhar em explicar muito da história da matemática. Mas Lakatos (1981) também considera o método de análise-síntese de Pappus e os métodos de Descartes, mostrando, no mínimo, uma parcial adequação de tais métodos com a sua LDM. Desse modo, não está claro, para Ernest, que a crítica de Feferman possa ser sustentada integralmente.

Curiosamente, Currie (1979) declara que Lakatos afirma que o método de provas e refutações não emerge como uma parte da matemática senão por volta de 1840. Se isto é verdade, ele pergunta, como a matemática teria se desenvolvido antes deste tempo? De que modo grandes matemáticos tais como Arquimedes, Euler e Gauss teriam produzido os seus resultados e quanto a matemática por eles produzida diferiria daquela presente em trabalhos mais recentes? Na reflexão de Currie, *Provas e Refutações* não contém respostas para essas questões, mas, para ele, Lakatos conecta o método de provas e refutações com um padrão mais velho de heurística matemática, o de análise-síntese. Assim também pensa Ernest (conforme parágrafo anterior).

Esse método de análise-síntese, que ele toma de Pappus, consiste em começar com uma conjectura tentando deduzir dela uma conclusão que é conhecida como verdadeira (análise), e então tentar inverter a inferência a partir de premissas conhecidas para a conjectura (síntese). Como Lakatos assinala, esse método pode ajudar-nos a provar uma conjectura verdadeira, mas não nos ajudará a melhorar uma conjectura falsa. Se nós chegarmos em uma conseqüência falsa de uma conjectura, saberemos que a conjectura é falsa, mas não aprendemos nada sobre como modificá-la. A esse respeito, o método de análise-síntese é muito inferior ao de provas e refutações.

Qual é pois a conexão histórica entre os dois métodos?

Currie, pensando nessa questão, diz que Lakatos explica a tentativa de Descartes de fornecer regras para o raciocínio correto como um tentame de estender o método de análise-síntese para o conhecimento não matemático e para criar um circuito inferencial entre afirmações observacionais e teóricas nas ciências. Mas, segundo ele, Lakatos não sugere que haja qualquer conexão desse método com desenvolvimentos recentes na metodologia da matemática. Mas esclarece que o método de provas e refutações não faz análise-síntese redundante; mas que este é um padrão heurístico que pode formar o ponto de partida para a aplicação do método de provas e refutações. Este, por sua vez, pode ser aplicado apenas quando tenhamos uma vez descoberto algumas premissas para formar a base de nossa prova. O método de análise-síntese pode ajudar-nos a descobrir essas premissas. Assim, o método de análise-síntese pode fornecer o primeiro passo vital na melhoria de uma conjectura *via* o método de provas e refutações.

Ernest elenca algumas críticas dirigidas à LDM de Lakatos, por ela se aplicar apenas a um estreito alcance de desenvolvimentos históricos. Em domínios tais como a teoria axiomática de conjuntos, não pode ser possível distinguir precisamente entre substância (conceitos) e forma (provas) como Lakatos faz nos seus estudos de casos, (Ernest, *SCPM*, p. 123).

Há uma crescente literatura crítica da LDM de Lakatos pela sua imprecisão histórica ou estreiteza. Ernest cita como exemplo Corfield, Kvasz, e além desses, Feferman e Anapolitanos (conforme *SCPM*, p. 123). Acrescentamos a este rol de Ernest críticas de Hacking (1979), de Currie (1979) e de Bloor (1991).

Feferman (*op. cit.*) afirma que os movimentos fundacionais internos envolvendo a reorganização das teorias matemáticas podem não ser o resultado de análise de prova. Anapolitanos também sustenta que o método de análise de prova de Lakatos (1978) não é adequado para *desempenhar o papel de esteio da última barreira para todo modelo descricional do que chamamos de descoberta matemática* (Anapolitanos, *apud* Ernest, *SCPM*, p. 123). Na visão dele, diz Ernest, o método é inadequado para lidar com problemas relacionados com características estruturais de períodos de crise na história da matemática, tais como mudanças súbitas de estruturas conceituais. As duas crises aqui evocadas na história da matemática − a que acossou os pitagóricos sobre a incomensurabilidade e a dos fundamentos da teoria de conjuntos cantoriana. A afirmação é que nesses casos a meta foi reparar a estrutura conceitual fundamental, não simplesmente provar uma conjectura, e a LDM de Lakatos não pode explicar tais situações ou seus resultados históricos, por exemplo, a dominação da teoria de conjuntos através dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Anapolitanos reconhece que o método lakatosiano de provas e refutações pode ser abstraído de seu estudo de caso concreto e estendido, mas afirma que isso transforma-o em um esquema geral vazio ao qual falta conteúdo descritivo detalhado e força explanatória.

Assim, a LDM de Lakatos é criticada por se aplicar apenas a um estreito alcance de desenvolvimentos históricos. Essa crítica parece ser legítima. E talvez a LDM se aplique melhor, sugere Ernest, ou apenas a aqueles desenvolvimentos que oferecem o análogo na matemática aos períodos de ciência normal na teoria de Kuhn (1962), como oposto àquelas revoluções científicas paralelas. Alguma limitação como esta certamente parece seguir da crítica de Anapolitanos e Feferman. Ambos são críticos da capacidade da teoria histórica de Lakatos explicar as crises dos fundamentos, que não são redutíveis à busca por provas melhoradas de uma conjectura. Do mesmo modo, há também o problema referente à capacidade da LDM acomodar o desenvolvimento de novas teorias, que podem não emergir da análise de prova. Ernest naturalmente não concorda com essa crítica de Anapolitanos. Acha que é uma discuss….ão inadequada e sugere que Kvasz oferece uma generalização da LDM que é rica em força explanatória.

Para Currie, a preocupação de Lakatos quanto à filosofia da matemática não era a mesma da maioria dos filósofos na época. Ele não estava preocupado com questões sobre ontologia matemática nem com a relação entre a matemática e a teoria dos conjuntos. Sua preocupação era com o crescimento do conhecimento matemático, e em particular com o modo no qual a matemática se origina de conjecturas informais e provas heurísticas em teorias formalizadas e semiformalizadas. Lakatos rejeitava a idéia de fundamentos para o conhecimento matemático e o considerava tão falível quanto nosso conhecimento do mundo externo. Para ele, em matemática nós não conhecemos, nós só podemos conjecturar, mas algumas de nossas conjecturas podem ser melhores, mais proveitosas, do que outras.

A tese central de Lakatos para a filosofia da matemática é que provas e refutações podem desempenhar um papel heurístico importante na matemática, bastante distinto de seu papel no estabelecimento das conexões lógicas entre as afirmações de uma teoria. De acordo com Lakatos, podemos usar as provas para melhorar nossas conjecturas matemáticas. Prova, dentro da matemática informal é uma *experiência mental (quase-experiência) que sugere a decomposição da conjectura original em subconjecturas ou lemas,* encaixando-a, assim, num corpo de conhecimentos possivelmente muito distantes (Lakatos, 1978: 23).

Consideramos que o fulcro de *Provas e refutações* é o processo de criação em matemática, analisado dentro de uma perspectiva em nada afeita ao psicologismo. É uma visão interna e falibilista do conhecimento matemático. Trata-se de um método de criação matemática não alinhado com a tradição absolutista. Também não está Lakatos preocupado com as questões ontológicas do conhecimento matemático, mas com as questões metodológicas.

Ainda conforme Currie (*op. cit.*), Lakatos se opunha à visão de que o processo de descoberta é completamente não-governado por regras de qualquer tipo, e não-susceptível a qualquer análise racional. Em sua visão, descoberta, particularmente em matemática, não é exatamente uma questão de fazer conjecturas; fazemos nossas conjecturas contra uma base de regras heurísticas vagas que podem, em alguma extensão, ser articuladas.

Hacking (1979), em uma crítica à filosofia da ciência de Lakatos, deixa escapar algumas opiniões sobre a filosofia da matemática lakatosiana. Ele considera o diálogo de Lakatos acerca do teorema de Euler como uma realização literária e filosófica da mesma estatura do trabalho de Hume sobre religião natural ou do *Hylas e Philonous* de Berkeley. Destaca que esse trabalho fora amplamente admirado por Quine em uma resenha, na época, e pelos tradutores russos de Lakatos. Mas, Hacking alerta que, apesar do elogio à elegância do diálogo, do saber e de suas lições para os professores de matemática, é raramente notado o quanto é útil ler o diálogo na companhia do *OSFM* de Wittgenstein. Declara que Lakatos pusera algumas grosseiras e um tanto idiotas interjeições sobre Wittgenstein nas suas mais recentes publicações, mas que ele lera *OSFM* cuidadosamente quando escrevera *Provas* *e refutações*. De fato, há um texto de Lakatos no qual as referências a Wittgenstein são, em alguns momentos, de um tom axiológico. Trata-se da sua crítica ao ensaio *The human understanding* de Toulmin, à qual já nos referiremos neste capítulo.

Comparando a filosofia da matemática de Wittgenstein (expressa em *OSFM*) com a filosofia da matemática de Lakatos (exposta em *Provas e refutações*), Hacking diz que onde Wittgenstein deu ilustrações hipotéticas acerca de seguir regras, práticas divergentes e formação de conceito, Lakatos dá exemplos da vida real. Mas ele não ilustra essa afirmação com algum exemplo da vida real. Para ele, o livro de Wittgenstein é um bestiário comparado à história natural de Lakatos. Mas considera que não é esse aspecto da filosofia de Lakatos que se mantém em seus escritos sobre metodologia.

Hacking considera ainda que a expressão *quase-empírica* que Lakatos aplica ao conhecimento matemático é para resolver uma tensão que se estabelece em *Provas e refutações*, diálogo este cujo alvo constante é o *programa euclidiano*, o qual busca tornar tudo seguro e infalível. Para Hacking, em última instância, podemos ser bem sucedidos nisso, mas de um modo estranho. A discussão crítica pode facilitar a evolução de uma conjectura à condição de verdade lógica. No princípio, o teorema de Euler era falso; no fim, ele é verdadeiro porque formulamos um conceito de poliedro que o tornou verdadeiro. O teorema foi *'analytified'* (isto é, tornado uma *sentença analítica*, em oposição à *sentença sintética* no sentido kantiano). Torná-lo verdadeiro por convenção não foi uma questão de ordem, mas o produto de análise refinada. Essa doutrina da 'analitificação' – [analytification] – tem conseqüências não-assentadas. O platônico não poderia acolher uma perspectiva que faz a verdade da proposição algo encravado nos cânones da linguagem matemática, na qual as idéias são despidas de sua dignidade. O nominalista também ficaria igualmente desconcertado, porque mesmo que nós acabássemos com a verdade por convenção, a convenção pareceria estar ainda organizando uma 'realidade' que não teria nada a fazer com palavras.

Hacking lamenta o fato de Lakatos haver resolvido essa tensão por meio da palavra *quase-empírica* quando discutia a teoria de conjuntos, tema que ele acredita não ter sido suficientemente conhecido por Lakatos, ainda que tivesse sido bastante discutido nos anos 60. O artigo *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics* é considerado por Hacking insatisfatório e não caracteristicamente *datado*, já que Lakatos, segundo ele, não conhecia suficientemente os problemas específicos dos fundamentos para revitalizá-los com seus *insights.* Para ele, esse ensaio de Lakatos necessitaria uma arena diferente daquela na qual se inscreve a teoria de conjuntos e os fundamentos, se bem que fundamentos, como seu nome indica, seja mesmo a casa das filosofias justificacionistas para as quais Lakatos é hostil, e foi uma área importante para ele, dado que pode encontrar nela um lugar para as suas considerações *quase-empíricas*. *Provas e refutações* constituiria uma fonte melhor de exemplos, mas Lakatos teria estado, na época, preocupado com a reação comum de que havia alguma coisa 'especial' sobre a conjectura de Euler; de modo que Hacking acha que não deveríamos dar nenhuma atenção a isso quando pensamos acerca de qualquer outro ramo da matemática. E que, nessa incursão de Lakatos em terreno inimigo, através do seu ensaio, ele não tem a sua usual desenvoltura (como ocorre em *Provas e refutações*).

A reflexão que Bloor (1991) faz sobre a filosofia da matemática de Lakatos está assentada em uma perspectiva social do conhecimento. De modo algum Bloor desmerece o trabalho de Lakatos; ele aborda aspectos que outros autores já citados aqui não abordam, o que faz a sua crítica digna de atenção.

Falando acerca do processo de negociação em uma prova matemática, Bloor, a propósito de *Provas e refutações*, afirma que Lakatos pretendia mostrar com o seu exemplo, ou estudo de caso, que a matemática, como outras ciências, procede através de um método de conjecturas e refutações. O esforço de Lakatos para assimilar a matemática a uma epistemologia popperiana significa que ele, tal como o sociólogo, desejava dispersar a aura de perfeição estática e unidade convincente que circundava a matemática.

O foco de Lakatos na sua realização foi a *matemática informal*, isto é, as áreas emergentes da matemática que não estavam ainda organizadas em sistemas dedutivos rigorosos. A formalização de uma área em matemática consiste em apresentar os seus resultados de modo que eles todos fluam de um conjunto de axiomas explicitamente afirmados. Em termos ideais, cada passo é tornado simples e mecânico de modo que se procede de acordo com regras de inferência explicitamente declaradas. Para Lakatos, este ideal de conhecimento matemático é a morte do pensamento verdadeiramente criativo.

Rejeitando a idéia de que sistemas axiomatizados e formalizados representam a natureza real da matemática, Lakatos considera que o informal tem prioridade sobre o formal. Bloor observa que o cenário da matemática como conhecimento conjectural pode encontrar suporte no fato de que o programa de formalização e axiomatização encontrou severos e, talvez, insuperáveis problemas técnicos. Tais dificuldades técnicas certamente seriam menos surpreendentes e poderiam mesmo ter sido previsíveis, caso as idéias intelectuais que prescindem da busca por fundamentos permanentes tivessem tido influência na matemática.

Embora o que seja contado como lógico seja o que é dado por certo, Bloor observa que em todo tempo dado a matemática procede por, e está baseada naquilo que os praticantes tomam por certo. Não há nisso outros fundamentos além do social. Para Bloor, a discussão de Lakatos do teorema de Euler revelaria um fato muito importante acerca dos processos mentais e sociais, qual seja, o de que as pessoas não são governadas por suas idéias ou conceitos. Mesmo em matemática, o mais cerebral de todos os assuntos, é a pessoa que governa as idéias e não o contrário. As idéias crescem por ter alguma coisa ativamente adicionada a elas. Elas são construídas e manufaturadas para que possam ser estendidas. Tais extensões de significado e uso não preexistem. Os futuros usos e significados expandidos dos conceitos e suas implicações não estão presentes dentro deles sob a forma de embrião. Exame mais minucioso, reflexão ou análise, não poderiam revelar o modo correto ou incorreto de usar um conceito em uma situação nova.

No teorema de Euler, os contra-exemplos e a idéia de prova tiveram de ser ativamente trazidos em contato com o conceito de poliedro. No momento em que se deve decidir o que poderia ser considerado um poliedro não faz sentido dizer que a questão já tenha sido decidida pelo significado do conceito. O significado do conceito com relação aos contra-exemplos simplesmente não existia. Não havia nada escondido no conceito para pressionar-nos de um modo ou de outro. O conceito de poliedro não poderia governar nosso comportamento decidindo o que era para ser incluído e o que era para ser excluído.

Essa argumentação de Bloor de alguma forma evoca o pensamento de Wittgenstein no que se refere ao papel dos usos de um conceito nos jogos lingüísticos.

Também Ernest tem críticas a Lakatos. Uma delas diz respeito ao fato de Lakatos recorrer exclusivamente a uma história internalista. Embora, para Ernest, uma primeira explicação para a história possa legitimamente enfocar o desenvolvimento lógico interno do conhecimento matemático, uma linha divisória entre o conhecimento produzido e as circunstâncias materiais e sociais de sua produção não poderia ser fixa e absoluta, uma vez que o processo é, em sua base, humano e social. Lakatos considera sua Lógica da Descoberta Matemática uma contribuição para um novo campo, o da metodologia da matemática, o qual incorporaria teoria do crescimento e heurística possível e real (e daí os contextos da descoberta e da justificação), mas a Lógica da Descoberta Matemática ainda permanece separada da história real.

Essa é talvez uma mostra das tendências demarcacionistas de Lakatos afetando a filosofia da matemática (como acontece na sua filosofia da ciência). Ele acreditou que haveria uma lógica da descoberta matemática objetiva e racional que poderia ser tratada de forma inteiramente separada dos detalhes reais do desenvolvimento histórico individual ou social do conhecimento matemático, por meio de *reconstrução racional*.

Embora para Ernest a metodologia da matemática constitua um legítimo e valioso subcampo de interesse, não deveria ser separada rigidamente da história da matemática com seus fatores sociais externos. Contudo, existem outras leituras de Lakatos diferentes dessa de Ernest. O próprio Lakatos, segundo Ernest, mostrou que a lógica (como a matemática) é falível, variável e limitada pelo contexto, não sendo, por essa razão, *a priori* e desconectada de circunstâncias empíricas. Admitir uma lógica da descoberta matemática, isto é, uma metalógica metodológica, num nível superior, e afirmar que ela poderia ser considerada à parte da história externa de sua utilização, é um ponto de vista que não se ajustaria bem ao falibilismo de Lakatos, pensa Ernest. Lakatos criticou a tentativa de substituir teorias matemáticas informais por teorias formais. Estas podem ser úteis, mas elas não podem suplantar aquelas em todos os contextos, como ele mostrou. Igualmente, Ernest critica a substituição da história do desenvolvimento do conhecimento matemático pelas reconstruções lógicas dessa história. Estas podem ser úteis, mas não podem suplantar aquelas em todos os contextos. Assim, contrariamente a Lakatos, ele crê que a lógica da descoberta matemática não pode excluir uma consideração de fatores históricos externos, a saber, o contexto social da criação do conhecimento matemático.

Outra crítica diz respeito à base lógica da lógica da descoberta matemática de Lakatos, a qual, quando aplicada a um domínio de idéias abstratas objetificado (mundo 3 de Popper ou domínio do Espírito Absoluto de Hegel), representaria o papel de uma lógica pura no domínio dos conceitos e idéias objetivos, no qual a *essência lógica* do desenvolvimento histórico poderia ser reconstruída de modo abstrato. Para Ernest isso seria uma forma escondida de idealismo platônico. Porque, para ele, a lógica da descoberta matemática é a lógica dialética da conversação e interação humana, a qual é fundada nos jogos de linguagem e nas formas de vida witgensteinianos. Não é alguma lógica ideal abstrata, mas vozes alternadas no diálogo, casadas com padrões de crítica matemática, o que dá origem à lógica da descoberta matemática. Desse modo, para Ernest, Lakatos erroneamente idealiza a lógica da descoberta matemática e negligencia sua origem na conversação. Mas, reconhecer isso e abandonar o idealismo problemático de Lakatos, removeria as barreiras que, segundo Ernest, rigorosamente excluem aspectos externos da história do domínio da metodologia, lugar preferido de Lakatos para sua lógica da descoberta matemática.

Contudo, adverte Ernest, se Lakatos, quando escreveu sobre a autonomia da matemática (Lakatos, 1978: 190) dizendo que ela aliena a si mesma da atividade humana que a produz, ele esteve de fato pensando no Absoluto hegeliano, não há dúvida que um importante aspecto da matemática está em jogo. Isso porque, para Ernest, a objetividade da matemática é percebida na sua forte autonomia e momentum cultural. Desse modo, o idealismo de Lakatos poderia ser interpretado como uma metáfora desta autonomia cultural, embora isso, provavelmente, não seja o que ele pretendeu. Contudo, ele dá espaço para essa característica essencial da matemática, mesmo se sua terminologia deva ser alterada.

Essa alteração de que fala Ernest se ajusta à opinião dos editores de *Provas e refutações* (vide p. 190, nota 258). Ajusta-se também à opinião de Hacking (*op. cit.*) que observa que a idéia de reconstrução racional, do modo como é aplicada em *Provas e refutações*, poderia ser despojada de seu tom idealista sem comprometimento do conteúdo. Para Hacking, seria muito interessante e difícil tarefa decidir acerca de quanto das declarações de Lakatos (em torno da autoalienação e autonomia do conhecimento matemático), tomadas como afirmações de posição metafísica, é verdadeiro e de quanto é falso. Ele remonta à definição do termo *heurística*, que Lakatos toma de Polya e usa em seu *Provas e refutações* para denotar o estudo dos métodos informais de descoberta matemática. No livro de Lakatos, a heurística é concebida como *regras heurísticas* do método de provas e refutações. Essas regras não são regras de desenvolvimento autônomo, mas regras disponíveis ao matemático, podendo ajudá-lo a melhorar suas conjecturas matemáticas e suas provas. Se elas são aplicadas ou não é uma questão de decisão humana. *Heurística*, do modo como Lakatos realmente emprega esse conceito, se refere à *atividade dos matemáticos humanos*, e não à di*alética maravilhosa de idéias matemáticas*, o que quer que isto possa significar.

Para Ernest, o quase-empirismo oferece uma descrição parcial da natureza do conhecimento matemático e de sua gênese, e, com isso, Lakatos oferece uma descrição mais extensiva nesse âmbito do que o fazem as filosofias tradicionais da matemática. Lakatos acrescenta um novo estrato mais baixo, a saber, o do conhecimento matemático informal, para o tradicional estrato do conhecimento matemático formalizado. Ele também acrescenta uma dinâmica a este sistema estendido que mostra não somente como o conhecimento no estrato mais baixo se desenvolve, mas também o relacionamento entre os dois estratos. Em particular, ele mostra como o conhecimento no estrato mais baixo é refletido para cima, através da formalização, para compor, no nível superior, imagens idealizadas, as quais são vistas, pelos absolutistas, como as verdades indubitáveis da matemática. Ambos os níveis – formalizado e informal – da matemática são organizados dentro das teorias: uma coleção de teorias axiomáticas bem definidas no nível formal e uma coleção de teorias coincidentes mais frouxamente definidas no nível informal. Esta é, para Ernest, uma explicação rica e mais efetivamente descritiva do que as até então encontradas.

Lakatos explica a natureza do conhecimento matemático considerando-o hipotético-dedutivo e quase-empírico. Ele explica erros no conhecimento matemático de um modo tal que há uma simetria entre crenças *verdadeiras* e *falsas*. A simetria é que ambos os tipos têm sido aceitos como adequadamente justificados pela comunidade matemática: as *verdades* não são até agora refutadas, embora as falsidades tenham sido refutadas e estão no processo de revisão.

Segundo Ernest, a rejeição do absolutismo em favor do falibilismo é uma característica especial da filosofia da matemática de Lakatos, o primeiro filósofo da matemática a fazer isso de forma clara e inequívoca. Ele também iniciou uma reconceptualização da filosofia da matemática. E, ao fazer isso, questionou a ortodoxia dominante na filosofia da matemática com relação ao seu fundacionismo e absolutismo. Assim, Lakatos pode ser considerado como tendo potencialmente libertado a filosofia da matemática para reconsiderar sua função, assim como questionado o status, até então não contestado, da verdade matemática.

Uma característica da realização de Lakatos é considerar o papel da prova matemática como um componente essencial do contexto da descoberta em matemática. Tradicionalmente, a prova era vista como o método de garantir o conhecimento dentro da matemática formal, constituindo o âmago do contexto de justificação. Requereu grande visão da parte de Lakatos reconceptualizar o papel da prova no crescimento do conhecimento matemático. Essa reconceptualização teria sido, segundo Ernest, conseqüência do desejo dele de oferecer uma filosofia da matemática que tratasse sua metodologia descritivamente, e não prescritivamente.

Lakatos ofereceu uma síntese de aspectos epistemológicos, históricos e metodológicos na sua filosofia da matemática. O resultado é uma teoria global da matemática desenvolvida parcialmente, oferecendo *insights* para a história, filosofia, sociologia, psicologia e prática da matemática. O que é oferecido pode ser hesitante e incompleto – devido, talvez, à brevidade de sua carreira como um filósofo da matemática e à escassez de suas publicações –, mas ele abriu a porta para uma perspectiva interdisciplinar da matemática reconceptualizada que possa aproveitar-se de desenvolvimento compreensivo através da série de metateorias da matemática. Ernest pensa que a adesão de Lakatos a um internalismo popperiano limita sua contribuição nessa dimensão, embora um outro comentador não comprometido com uma visão construtivista social da matemática possa ver isso como uma força.

O relacionamento entre a história e a filosofia da matemática na teoria de Lakatos enfatiza a novidade de sua concepção de filosofia da matemática. Sua leitura historicista é um movimento que não só requer uma reavaliação do campo, mas força uma nova interdisciplinaridade sobre ele. Uma conseqüência é a quebra da distinção absoluta entre o contexto da justificação e o contexto da descoberta. A admissão da matemática informal e da história como centrais para a filosofia da matemática significa que a separação total delas não pode ser mantida sem problema.

Uma outro aspecto que consideramos significativo na filosofia da matemática de Lakatos é que ela sugere um padrão para o desenvolvimento dos conceitos, conjecturas, provas e teorias matemáticos como uma empresa coletiva. Isso indica o papel e variedade de interações contribuindo para esse desenvolvimento. E mostra que a criação em matemática não é essencialmente uma atividade individual isolada. Matemática é essencialmente uma atividade comunitária. De acordo com Lakatos, além do trabalho dos indivíduos, um processo de negociação dialética desempenha um papel essencial.

Concordamos com Ernest quanto à presença na filosofia de Lakatos desse processo de negociação dialética que caracteriza a produção do conhecimento matemático, mas isso deve ser válido também para outras áreas do conhecimento; acreditamos que qualquer que seja a área de conhecimento em que estejamos inseridos, algum tipo de negociação dialética deve caracterizá-la. Compreendemos, porém, que não é de há muito que isso é pensado com relação à matemática.

Quanto a dizer que a matemática é essencialmente uma atividade comunitária, não sei de onde isso pode ser depreendido da obra de Lakatos, ainda mais considerando o peso de sua visão internalista do desenvolvimento da matemática, e da história, mesmo que ele considere a lógica da descoberta matemática como essencialmente histórica. Afinal o que fez Lakatos em termos de história em *Provas e refutações*? Nada além de considerá-la como ponto de partida, se é que chega a tanto, para as suas reconstruções racionais. Ele mesmo não aprova a forma de fazer história como o fizera em *Provas e refutações*, quando afirma: *utilizei generosamente este método em meu Provas e refutações, mas nessa ocasião meu propósito era extrair uma mensagem metodológica da história mais do que escrever a história em si* (Lakatos, 1989: 246, nota 85).

Poderíamos dizer que a matemática com a qual lidamos no ensino médio e parte da matemática superior é resultado de reconstruções racionais, onde a história aparece, só de vez em quando, para ilustrar situações pedagógicas, em momentos particulares próprios de uma sala de aula. Encontrar uma medida adequada para a história além de ponto de partida para reconstruções racionais, ou como complemento em processos de ensino para construções pedagógicas visando a uma adequada compreensão da natureza do conhecimento matemático em particular, é uma hercúlea tarefa para os nossos educadores matemáticos. Nesse sentido, Miguel & Brito (1996, *in*: Cadernos CEDES, n.40) é um texto bem ilustrativo, bem como os demais artigos que compõem essa publicação coletiva dedicada à tematização das relações entre a História e a Educação Matemática, organizada pelo professor Eduardo Sebastiani Ferreira.

A fim de contemplar nosso propósito de busca de caracterização do em que consistiria o social na filosofia da matemática de Lakatos, poderíamos defender o ponto de vista de que ele se manifesta através do papel central desempenhado, nessa filosofia, pela crítica no desenvolvimento do conhecimento matemático. De fato, se para Lakatos faz sentido falar-se em progresso de teorias matemáticas e se o motor desse progresso é visto como sendo invariavelmente e exclusivamente o método de provas e refutações, então, é na crítica lógica e epistemológica da prova que se deve buscar, em última instância, a explicação do desenvolvimento do conhecimento matemático. Devemos então nos indagar acerca do *locus* do qual essa crítica se origina e tem ressonância. As esclarecedoras notas de rodapé do *Provas e refutações* não deixam dúvidas acerca desse *locus*: trata-se das *comunidades de matemáticos* ou, em outras palavras, do conjunto de pessoas que, em cada época, intencionam promover, pelas mais diversas razões, o desenvolvimento da atividade matemática concebida como uma prática social.

Se considerarmos o cenário de *Provas e refutações*, nele vamos encontrar um contexto onde um grupo (professor e alunos) debruçam-se sobre a conjectura de Euler no intuito de, num exercício de crítica, prová-la. Tal quadro é complementado pela história *real*, narrada em notas de pé de página.

O fato de, na perspectiva de Lakatos, a história e a filosofia da matemática se relacionarem é uma novidade em filosofia da matemática. A relação estreita entre o contexto da descoberta e o contexto da justificação, e o admitir a história e a matemática informal no seio da filosofia da matemática, apontam para uma visão social no sentido de que a crítica exercida nos processos de negociação no desenvolvimento dos conceitos, conjecturas e provas de teorias matemáticas é uma ação coletiva, que toma lugar no seio das comunidades matemáticas.

Quando Lakatos rejeita a idéia de fundamentos para o conhecimento matemático e o considera tão falível quanto o nosso conhecimento do mundo externo, e quando em *Provas e refutações* ele busca reconstruir a história interna (da conjectura de Euler) descontextualizada e nas notas de pé de página escreve a história externa que trata de fatores outros, que dizem respeito ao contexto social e psicológico, está sendo coerente com o que afirma ao dizer que *qualquer reconstrução racional da história necessita ser suplementada através de uma história externa sócio-psicológica* (Lakatos, 1989: 134). Neste sentido, tal suplementação pode ser vista como um reconhecimento do papel do social no desenvolvimento do conhecimento matemático, ainda que, a nosso ver, o social seja estreitamente e exclusivamente concebido como o conjunto de interações travadas entre os membros aparentemente neutros e imparciais de uma comunidade de especialistas que compartilhariam o nobre e único propósito epistemológico – ainda que inatingível, para Lakatos – de se chegar à última instância de justificação de uma prova.

Por acreditarmos que ela se aplica também aos pressupostos filosóficos subjacentes ao modo de se conceber a história da matemática no *Provas e refutações* de Lakatos, consideramos pertinente aqui evocarmos uma crítica de Michael Löwy ao pensamento de Popper, com relação ao modo como ele concebe a objetividade científica. Löwy analisa o que Popper considera como sendo a imparcialidade do sábio individual:

> *Para resumir estas considerações, poderia se dizer que o que designamos por objetividade científica não é um produto da imparcialidade do sábio individual, mas um produto do caráter social ou público do método científico; e a imparcialidade do sábio individual é, na medida em que ela existe, não a fonte, mas antes o resultado desta objetividade social ou institucionalmente organizada* (Popper, K. *The open society and its enemies*, II, p. 220 *apud* Löwy*,* 1994: 52).

Conforme Löwy, graças a este método, seriam corrigidas e eliminadas, de acordo com Popper, todas as parcialidades, quer fossem individuais quer fossem de classe.

A crítica de Löwy se dirige à impossibilidade da aplicação do método de Popper às ciências sociais, uma vez que este filósofo acredita que nas instituições de pesquisa científico-social as posições sociais ou ideológicas *eliminam-se a si próprias*, com o que Löwy não concorda e argumenta que *o gênero de 'verdade objetiva' que resulta de uma instituição depende em ampla medida das forças econômicas, sociais ou políticas que a controlam ou financiam. Este controle pode ser exercido de forma arbitrária e brutal ou 'legal' e 'constitucional'* (Löwy, 1994: 53).

Löwy classifica de positivista o ponto de vista de Popper, por ignorar que a *objetividade institucional* é possível (com certas limitações) no domínio das ciências naturais, precisamente porque as visões sociais de mundo, as ideologias e os pontos de vista de classe não desempenham nelas um papel tão decisivo como o que desempenham nas ciências da sociedade. Ele considera parcialmente verdadeira na tese de Popper na medida em que a ciência social constitui-se numa esfera relativamente autônoma com relação aos condicionamentos sociais, o que se chama de *método público* tem um papel crucial a desempenhar. Também, Löwy considera verdadeiro que a ciência não pode progredir sem a liberdade de crítica, debate, confronto entre escolas diversas e confrontação permanente de pontos de vista distintos entre pesquisadores, tanto no interior de uma mesma visão social de mundo como entre cientistas ligados a opções axiológicas e político-sociais contraditórias.

Referindo-se a escritos mais recentes de Popper, a saber, *Conhecimento objetivo* (1972), Löwy considera que aquele filósofo procurou reformular a sua problemática introduzindo o conceito de *mundo 3* como o conjunto de conteúdos objetivos do pensamento, distinto dos objetos físicos (*mundo 1*) e dos estados de consciência (*mundo 2*).

Para Löwy, Popper parece reconhecer que existe nas ciências sociais uma ligação entre os mundos 2 e 3, *já que afirma que todo conhecimento dos fatos está necessariamente articulado por uma teoria e, portanto, por mitos e preconceitos* (Löwy, 1994: 57).

Löwy critica os dois argumentos de Popper para o alcance do conhecimento objetivo: um deles, referente a um processo de *autotranscendência*, graças ao qual o cientista *desafia seus próprios preconceitos e pressupostos* *habituais*. O outro argumento é o que sustenta ser o crescimento do conhecimento um desenvolvimento evolucionista, *uma seleção darwiniana*. Löwy considera o modelo social-darwinista ainda mais arbitrário do que o da objetividade institucional. Para ele *é impossível afirmar seriamente – ao menos no domínio das ciências sociais – que a 'sobrevivência' de uma teoria é a prova de sua justeza e ainda menos que sua 'eliminação' (por quem?) constitui a demonstração de seu erro* (Löwy, 1994: 57).

Concluindo a sua crítica a Popper, Löwy argumenta que a idéia de uma objetividade e autonomia do universo das obras culturais e do conhecimento em particular seria de todo pertinente, mas ela não permite, contrariamente ao que pretende Popper, esvaziar a questão das condições de possibilidade do conhecimento objetivo da sociedade e das determinações sociais de sua produção (p.57).

Essa forma estreita de se conceber o o papel do social no desenvolvimento da matemática na história, como o faz Lakatos em seu *Provas e refutações*, pode ser contrastada, por exemplo, com as concepções presentes em Aleksandrov (1985), cujas considerações em torno de uma visão geral da matemática na história, apresenta esta ciência desenvolvendo-se não apenas através da crítica lógica e epistemológica de provas por parte de uma comunidade aparentemente imparcial e neutra de especialistas, como o quer Lakatos, mas também por outras razões sociológicas muito mais fortes, tais como: problemas postos por outras áreas de conhecimento como a física, por exemplo, e pela tecnologia; problemas postos pelo comércio, pela indústria, pelas guerras, pela concorrência econômica, etc., ou seja, a matemática se desenvolve também e sobretudo para dar conta de propósitos e projetos humanos, eticamente reprováveis ou não, que, em cada época e contexto, constituem a aventura humana.

Mergulhar na história de um conhecimento, e em particular do conhecimento matemático, com o intuito de tão-somente efetivar reconstruções racionais do mesmo é insuficiente para dar conta da sua riqueza, no seu processo de constituição em interação com outras tantas áreas de conhecimento ao longo da sua história. Parafraseando Aleksandrov,

> *podemos dizer que as forças que conduziram ao desenvolvimento da matemática foram as necessidades práticas da vida social. Tais necessidades práticas e o pensamento abstrato delas surgido entraram em uma constante interação. Os conceitos abstratos daí decorrentes se constituíram em ferramentas valiosas para a vida prática e foram constantemente melhorados devido a suas muitas aplicações* (Aleksandrov, 1985: 37).

Há, pois, duas histórias, duas linhas de desenvolvimento – uma externa e outra interna. Lakatos opta pela reconstrução racional, mas não se isenta de narrar certos fatos referentes à história real, em notas de pé de página. De alguma forma podemos, ver nesse caso se quisermos, algum movimento no sentido de não se desconsiderar de todo os aspectos externos do desenvolvimento em questão.

A matemática é falível e se desenvolve através de conjecturas, criticismo, correções, busca por provas e a busca por contra-exemplos. A matemática *real*, a matemática como um processo de crescimento e descoberta, é a *matemática informal* (Restivo, 1983: 163).

A comunidade matemática desempenha o papel de crítico e de caixa de ressonância com relação às criações dos matemáticos, na epistemologia lakatosiana, e decide entre o que será aceito como digno de ser pesquisado e transmitido, e o que está fadado ao desaparecimento e ao olvido.

Lakatos elevou a um patamar superior a análise da prova, tanto no que diz respeito ao princípio como no que tange à prática. Ele estuda como uma *verdade* matemática se elabora na epistemologia privada do matemático e na comunidade, distinguindo várias etapas, através das quais o trabalho vai avançando e, conforme o caso, acaba chegando a uma prova cada vez mais satisfatória da conjectura, ainda que a certeza nunca seja atingida.

Lakatos considera que é através de tais procedimentos que se chega a resultados sobre os quais a coletividade matemática pode entrar em acordo. Ressalta que os critérios de *verdade* aos quais esses acordos satisfazem são mais um problema de convenção do que a chegada a um absoluto definitivo e incontestável (Omnès, 1996: 144-7).

Assim, o papel da crítica no seio das comunidades científicas é crucial na construção dos acordos a respeito do conhecimento matemático na construção da matemática informal. A crítica é, pois, o que caracteriza o que poderíamos chamar de dimensão social da filosofia da matemática de Lakatos.

CAPÍTULO IV

A Filosofia da Matemática de Paul Ernest

Neste capítulo, antes mesmo de nos determos na filosofia da matemática de Paul Ernest, primeiramente consideramos o que chamaríamos de dois momentos significativos do processo de elaboração da sua teoria. Tais momentos são precisamente as construções presentes nos Capítulos 1 e 2 de *The philosophy of mathematics education* (*PME*) de 1991 (cuja reimpressão que estamos usando é de 1995) e de *Social constructivism as a philosophy of mathematics* (*SCPM*) de 1998. A seguir, efetuamos um exame do que consideramos a filosofia da matemática de Paul Ernest, propriamente dita, seguido de uma avaliação que se inicia considerando as quatro questões orientadoras e que se expande além dessas questões.

O Construtivismo Social de Paul Ernest como uma Filosofia da Matemática: Percurso Teórico

Foi-nos quase impossível resistir à tentação de comparar essas duas partes das construções de Paul Ernest presentes na elaboração do seu c*onstrutivismo social como uma filosofia da matemática*. Essa comparação aqui se atém também às mudanças de tópicos e subtópicos referentes aos Capítulos 1 e 2 dos dois livros já citados no início deste capítulo.

A julgar pelas diferenças e semelhanças que afastam e unem os dois desenvolvimentos, o Ernest de 1998 é, de longe, muito mais abrangente, mais maduro, mais rico e, sobretudo, mais social. É claro que isso tudo já está de alguma maneira esboçado no texto de 1991. Mas só no texto de 1998 essas características ganham uma conotação convincente, cristalina, contundente. Realmente, não se trata de uma reelaboração do texto anterior, mas a comparação faz sentido, uma vez que Ernest insere novas referências, não presentes no texto de 1991, e mantém alguns tópicos. O objetivo é similar – a apresentação do construtivismo social como uma filosofia falibilista da matemática, em que o conhecimento matemático é enfocado como uma construção social falível –, em oposição à perspectiva absolutista.

A partir do Capítulo 3 do texto de 1998, Paul Ernest toma um outro rumo, em que vai se acentuando o seu distanciamento do texto de 1991, em termos de abrangência e profundidade.

Façamos, pois, uma comparação sucinta no intuito de ratificarmos a nossa hipótese, se é que podemos dizer assim, referente às mudanças no pensamento de Ernest no plano de desenvolvimento das duas obras. O objetivo dessa comparação é também dar conta de alguns aspectos do processo de reflexão do autor ao longo de quase uma década de trabalho prático e intelectual, no seio da Educação Matemática, com a Filosofia da Matemática como foco.

Optamos por primeiro nos familiarizarmos com a obra, em vez de perscrutá-la com perguntas prévias, na esperança de que o nosso diálogo com o autor, nesses dois momentos do seu processo de reflexão e criação, nos possibilite um verdadeiro mergulho nessa obra.

Planos das obras:

1991	1998
The Philosophy of Mathematics Education	**Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics**

Cap. 1	Cap. 1
1. Introdução	[Introdução]
2. A filosofia da Matemática	**A Natureza do Conhecimento**
Suposição	*Verdade na Matemática*
3. A natureza do Conhecimento Matemático	*A visão tradicional da verdade matemática*
4. A Visão Absolutista do Conhecimento Matemático	*Verdade matemática como satisfatoriedade*
A. Logicismo	*Verdade lógica ou validade em matemática*
B. Formalismo	*Prova em Matemática*
C.Construtivismo	**A Filosofia da Matemática**
5. A Falácia do Absolutismo	*Falibilismo e Absolutismo*
6. A Crítica Falibilista ao Absolutismo	*Fundacionismo na Filosofia da Matemática*
7. A Visão Falibilista	**Visões Absolutistas do Conhecimento Matemático**
	Logicismo
	Formalismo
	Construtivismo
	Uma Crítica do Absolutismo
	A crítica Falibilista ao Absolutismo
	Falibilismo
	Conclusão
número de páginas - 1- 22	número de páginas - 1- 38

Em *PME* (1991), Ernest apresenta a filosofia da matemática como *o ramo da filosofia cuja tarefa é refletir sobre e explicar a natureza da matemática* (p. 3), e logo adiante assume que *o papel da filosofia da matemática é fornecer um fundamento absolutamente seguro e sistemático para o conhecimento matemático, isto é, para a verdade matemática* (p. 4). De fato, durante um longo tempo, fazer filosofia da matemática sempre foi cuidar de assentar a verdade matemática em bases absolutamente seguras. Esse sempre foi o trabalho inconcluso das correntes de pensamento matemático de caráter absolutista. Essa sempre fora a tradição da filosofia da matemática, que remonta a Euclides. Talvez, o fato de a matemática ter sido o reino do absolutamente seguro ao longo da nossa civilização tenha uma explicação mais antropológica do que filosófica. Se desvendarmos as raízes da nossa racionalidade, se mergulharmos no nosso modo greco-judaico-cristão de pensar, quiçá compreendamos os nossos jogos de linguagem tão absolutamente e solitariamente racionais. Acreditamos até que não foram questões exclusivamente técnicas que nos empurraram para as limitações da racionalidade inconclusa da matemática, mas outras dimensões do processo criador da mente humana. E, nesse sentido, as geometrias não-euclidianas são demasiadamente ilustrativas, nos seus aspectos internos e externos.

Ernest tece uma crítica falibilista ao absolutismo, e encerra esse capítulo com citações de Kline, Popper, Wittgenstein, Lakatos, Polanyi, Kitcher, Putnam e Hersh, considerando que a perda da certeza em matemática não representa a perda do conhecimento. E faz uma analogia com desenvolvimentos da física moderna em que a Teoria da Relatividade Geral requer o abandono das estruturas universais de referência, em favor de uma perspectiva relativista, e em que o Princípio de Incerteza de Heisenberg significou o abandono de precisão na determinação de posição e momento de partículas.

Já no Capítulo 1 de *SCPM*, Ernest opta por um outro desenvolvimento, não totalmente diferente do efetivado em *PME*, mas com outras características além de, digamos assim, manter o propósito da obra. Dá para inferir que *SCPM* contém em si muito das raízes de *PME*, pois se fizermos uma comparação, linha por linha entre os dois textos, perceberemos trocas de expressões, mudanças de parágrafos, manutenção de textos na íntegra ou com ligeiras mudanças e acréscimos. Isso é bem marcante em relação aos dois primeiros capítulos.

Consideramos que a ligação entre filosofia da matemática e educação matemática ou ensino de matemática é uma característica central do pensamento de Ernest. Mas uma supressão acerca dessa relação nos chamou a atenção. Os dois textos a seguir ilustrarão a nossa consideração:

> *The main purpose of this chapter is to expound and criticize the dominant epistemological perspective of mathematics. This is the* absolutist *view that mathematical truth is absolutely certain, that mathematics is the one and perhaps the only realm of certain, unquestionable and objective knowledge. This is to be contrasted with the opposing* fallibilist *view that mathematical truth is corrigible, and can never be regarded as being above revision and correction.*
> *Much is made of the absolutist-fallibilist distinction because, as is shown subsequently, the choice of which of these two philosophical perspectives is adopted is perhaps the most important epistemological factor underlying the teaching of mathematics* (*PME*, p. 3).
>
> *The aim of this chapter is to offer a critique of this conception and its underlying assumptions. In particular, my main purpose is to expound and criticize the dominant view, for which I shall adopt the term* absolutist*, that mathematical truth is absolutely valid and thus infallible, and that mathematics (with logic) is the one and perhaps the only realm of incorrigible, indubitable, and objective knowledge. I will contrast this with the opposing view, for which I shall adopt the term* fallibilist*, that mathematical truth is fallible and corrigible and should never be regarded as being above revision and correction* (*SCPM*, p. 9-10).

Mas reencontramos a relação entre filosofia da matemática e educação matemática em outra passagem, na introdução de *SCPM* (p. xiii), quando o autor está a falar de novidades de seu texto atual para além das semelhanças existentes entre os Capítulos 1 e 2 dos dois livros:

> *For exemple, there is a new argument that a reconceptualized philosophy of mathematics should offer an account of the learning of mathematics and its role in the onward transmission of mathematical knowledge* (*SCPM*, p. xiii).

A preocupação de Ernest com o rigor na elaboração do seu pensamento nos obrigou a comparar cada linha de cada parágrafo de seus dois trabalhos, mesmo das partes cujas modificações pudessem nos parecer terem sido executadas mais ao nível da forma do que do conteúdo.

Quando discute logicismo, formalismo e construtivismo, Ernest elogia as realizações bem sucedidas da escola logicista. Mas conclui observando que, como uma filosofia da matemática, e em particular como uma epistemologia procurando dotar o conhecimento matemático de um fundamento absoluto, o logicismo é um fracasso.

É possível que ele tenha exagerado quanto ao fato de o logicismo ter sido um fracasso *como uma filosofia da matemática*. Klenk, uma das fontes de Ernest, considera o logicismo extremamente interessante matematicamente, e com pouco a contribuir, em termos filosóficos, no que diz respeito aos problemas particulares com os quais Wittgenstein se preocupou (Klenk, 1976: 8).

Em leitura anterior de *PME*, procuramos as vinculações filosóficas das escolas fundacionistas e constatamos que as raízes filosóficas do formalismo estão mais próximas do nominalismo. É-nos gratificante perceber que, nessa versão atual do seu texto, Ernest explicita essa consideração, além de apresentar também as realizações do formalismo, considerado por ele como o programa de pesquisa melhor sucedido.

O espaço dedicado ao construtivismo, no texto, atual é em torno do dobro do dedicado em *PME*. Considerado por Ernest como a filosofia da matemática mais completamente formulada, são apresentadas as suas vantagens e desvantagens em termos epistemológicos e em termos matemáticos. Duas pretensões do construtivismo são apresentadas na forma de teses (positiva e negativa), devidas a Dummett, e discutidas ao longo do texto. Ernest conclui, após as considerações sobre as contribuições do construtivismo, pela sua rejeição como uma filosofia da matemática que pudesse dotar a matemática de fundamentos seguros.

No tópico *The Fallibilist Critique of Absolutism*, em que Ernest critica a versão hipotético-dedutiva do absolutismo, ocorre o que vem ocorrendo desde o início da nossa comparação dos dois textos; ora é um rearranjo de um período buscando mais rigor e precisão, ora é o acréscimo de um novo argumento, não presente no texto primeiro. Para nós, isso indica o processo de reflexão em que o autor mergulhou juntamente com seus pares na discussão em torno de sua elaboração ao longo de dez anos.

Concordamos com Ernest quando este considera que a força e a persistência da doutrina absolutista são devidas mais a razões ideológicas do que filosóficas. O significado atribuído por Ernest ao termo *ideologia* passa pelos primeiro e segundo sentidos atribuídos por Marx e se assenta no significado que este dá ao termo num momento posterior. Mais sociológico, portanto. E assim, ideologia é uma filosofia ou visão de mundo global rica de valores, um amplo e entrosado sistema de crenças e idéias. Assim, as ideologias, em (*PME*, p. 111), são entendidas como sistemas de crenças que integram posições epistemológicas e valores morais.

Ernest finaliza este capítulo com considerações acerca do falibilismo, não diferentes das que executara em *PME*, exceto pelos seguintes fatos: mudança de título (em *PME*: *The Fallibilist View*, e em *SCPM*: *Fallibilism*); supressão de metade do primeiro parágrafo no texto atual em *SCPM*; e inserção de ligeiros comentários entre as citações de filósofos da matemática que concordam entre si com a presença de algum tipo de base empírica no conhecimento matemático.

Gostaríamos de, agora, dirigir nossas reflexões para o Capítulo 2 de *PME* e o seu correspondente em *SCPM*.

Cap. 2	Cap2
The Philosophy of Mathematics Education	**Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics**
The Philosophy of Mathematics Reconceptualized	**Reconceptualizing The Philosophy of Mathematics**
1. *The Scope of the Philosophy of Matematics* ref.Korner/Tymoczko/Priest/ Lakatos	WHAT IS THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS?
Criteria for an Adequate Philosophy of Mathematics	*The Relationship between Mathematics and the Philosophy of Mathematics* ref.Rotman/Körner
2. *Further Examination of Philosophical Schools*	*The Analogy with the Philosophy of Science* ref.Losee/Kuhn/Davis e Hersh/De Millo/ Lipton/ Perlis/ Tymoczko/Losee/Lakatos
A. The Absolutist Schools	PHILOSOPHICAL CONFLICTS ABOUT MATHEMATICS
B. Progressive Absolutism ref. Confrey/Kalmar/Brouwer/Dummett	*The Context of Discovery versus the Context of Justification* ref. Losee/Lakatos/Popper/Reichenbach/Kitcher & Asprey/
C. Platonism ref. Cantor/Bernays/Hardy/Gödel	*Internal versus External Views of Mathematical Proof* ref. Kitcher/Manin/Bernstein/Everitt & Fisher/Rorty/ Tymoczko
D. Convencionalism ref. Quine/Hempel/Priest/Wittgenstein/	*Mathematics as Discrete versus Mathematics as Connected with Other Knowledge* ref.Lakatos/Kitcher/Brown/Merleau-Ponty/Ryle/Johnson/ Dennett/Rorty
E. Empiricism ref. Mill/Davis & Hersh/Wittgenstein	RECONCEPTUALIZING THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS
3. Quasi-empiricism ref. Lakatos/Tymoczko/Davis/Hallett/Hersh/Putnam/	*What is the Philosophy of Mathematics?* ref. Maddy/Tymoczko/Priest/Körner/Lakatos/Hammer/ Quine
A. Exposition of Lakatos' Quasi-empiricism (as 5 teses do quase-empirismo) ref. Lakatos/Popper	*Developments in Modern Philosophy of Mathematics* Ref.Rotman/Quine/Field/Maddy/Kripke/Steiner/ Benacerraf &Putnam/ Kitcher e Aspray/ Kolakowski/ Bachelard/Enriques/Foulcault/M.Serres/Rorty/Lakatos/ Tiles/Bloor/Fuller/Restivo/Wilder/Kline/Richards/Gillie/ Hersh/McCleary & McKinney/ Steen /Hardy/ Cooper/ Ernest
B.The Adequacy Criterion and Quasi-empiricism ref. Körner	*Adequacy Criteria for the Philosophy of Mathematics Reconceptualized* ref.Asprey & Kitcher/Davis & Hersh/Lakatos/Tymoczko/ VanBendegem/Wittgenstein/
C.Weaknesses of Lakatos' Quasi-empiricism ref. Lakatos	A CRITICAL EXAMINATION OF PHILOSOPHICAL POSITION *Progressive Absolutism* ref. Cofrey/Kalmar/Brouwer/Dummett
D. Quasi-empiricism and the Philosophy of Mathematics	*Platonism* ref. Frege/Russel/Cantor/Bernays/Hardy/Gödel/Maddy/ Rotman/Saussure/Peirce/Brouwer

Alguns tópicos do Capítulo 2 do texto de 1991 são transformados em capítulos de abrangência considerável, no texto de 1998. É o caso dos seguintes, que aparecem em *PME*, no Capítulo 2:

D. Convencionalism
E. Empiricism
3. Quasi-empiricism
A. Exposition of Lakatos' Quasi-empiricism
B.The Adequacy Criterion and Quasi-empiricism
C.Weaknesses of Lakatos' Quasi-empiricism
D.Quasi-empiricism and the Philosophy of Mathematics

que vão integrar dois Capítulos, 3 e 4 de *SCPM*, dedicados a Wittgenstein e a Lakatos, respectivamente, com todos os acréscimos, modificações e melhorias. Nesses capítulos, Ernest dá conta da sua dívida para com esses dois pensadores. Apresenta a filosofia e a filosofia da matemática deles segundo sua interpretação e elabora considerações e críticas em torno das realizações de cada um.

Já no Capítulo 2 de *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, Ernest respondendo a pergunta – *o que é a filosofia da matemática?* – observa que a filosofia da matemática não é nem matemática nem um subconjunto da matemática, que se trata de um campo de estudo que reflete sobre a matemática a partir de fora; que é uma das metateorias da matemática entre as quais se incluem a sociologia da matemática, a história da matemática, a psicologia da matemática, a antropologia da matemática e a educação matemática. Ele evoca o matemático historiador E. T. Bell que classifica a matemática como arte e ciência, para justificar que as metateorias acima citadas são todas das áreas das humanidades ou das ciências sociais, o que implica que, além de serem diferentes do conteúdo da matemática, ocorrem em uma categoria diferente do esforço intelectual humano.

Para Ernest, o sucesso das escolas fundacionistas teria prejudicado muito o que se entendia por filosofia da matemática. A distinção entre os dois campos, o da filosofia da matemática e o da matemática, ainda estaria confundindo muitos sob a influência da tradição absolutista. Entretanto, consideramos que, se voltarmos a nossa atenção para os fatores que contribuíram para o sucesso das escolas fundacionistas, certamente constataremos que tal sucesso se deveu a características culturais e históricas da nossa civilização. E se olharmos por este ângulo, o sucesso dessas escolas é só conseqüência de determinadas características da nossa *forma de vida,* ao menos no que se refere à matemática.

Uma área central da controvérsia entre absolutismo e falibilismo na filosofia da matemática trata da distinção entre os contextos da descoberta e da justificação. Para os absolutistas, o contexto da justificação e o da descoberta dizem respeito a domínios distintos do conhecimento; por isso, devem ser mantidos separados. O contexto da justificação lidaria com condições objetivas e lógicas do conhecimento, com a atividade racional da avaliação e da validação do conhecimento constituído; portanto, lidaria com um objeto pertencente ao domínio da epistemologia e da filosofia da matemática. O contexto da descoberta trataria de circunstâncias contingentes da invenção humana ou histórica, e por não ser um processo racional, não poderia ser tratado lógica e objetivamente, constituindo, portanto, um objeto pertencente ao domínio da psicologia ou da história da matemática.

Para o falibilismo, não é possível separar completamente esses dois contextos dentro da matemática. A criação e a justificação do conhecimento matemático, incluindo o escrutínio das garantias e provas matemáticas, são condicionados por seu contexto humano e histórico. Lakatos (1978) é a referência para essa consideração de Paul Ernest, que apresenta três respostas à crítica absolutista dessa posição falibilista:

1. A epistemologia, desde os empiristas britânicos até hoje, toma os dados dos sentidos que se apresentam ao indivíduo cognoscente como a base do conhecimento empírico, em termos de gênese e justificação. Portanto, não tem consistência excluir considerações humanas e genéticas da epistemologia, uma vez que estas estão presentes tão significativamente em sua história.

2. O contexto da descoberta e o da justificação se interpenetram e se sobrepõem. É impossível, na prática da matemática, separar os aspectos relacionados a esses dois contextos.

3. Há uma tendência crescente na filosofia da matemática em considerar a história e a filosofia da matemática, pelo menos em parte, juntas. Essa é uma das bases da tradição "dissidente" identificada por Kitcher e Aspray.

Para Ernest, uma filosofia descritiva da matemática deveria ser capaz de explicar a justificação do conhecimento matemático e de teorias matemáticas na prática, isto é, na atividade matemática; e isto introduziria a história da matemática. Esta, por sua vez, trataria do crescimento e desenvolvimento do conhecimento matemático, e isto constituiria parte do contexto da descoberta. Ele observa que isso não equivale a, de modo algum, admitir o psicologismo, como os absolutistas poderiam temer. Isso porque, a história da matemática trataria do desenvolvimento público da matemática, e isto incluiria muitos elementos lógicos; e, além disso, a história seria pelo menos parcialmente aberta à reconstrução racional. A separação dos contextos da descoberta e da justificação, com base no fato de que eles tratam, respectivamente, de psicologia e de lógica, não poderia ser sustentada, pelo menos a partir de alguns pontos de vista significativos, diz Ernest.

Acreditamos que esse termo *significativos* poderia ser substituído por *falibilista*, porque é a partir dessa perspectiva que Paul Ernest está a tecer os seus comentários. Mas ele mesmo não exemplifica qualquer ponto de vista significativo. E como, *não poder ser sustentado a partir de alguns pontos de vista* é equivalente a *poder ser sustentado a partir de alguns outros pontos de vista*, concluímos que se trata, nesse caso, só de pontos de vista diferentes.

Na perspectiva absolutista, a prova matemática é que fornece garantia objetiva para o conhecimento matemático, para o teorema provado. A garantia depende unicamente da precisão lógica da prova. Os homens podem desempenhar um papel na gênese do conhecimento, mas, uma vez garantido, o conhecimento matemático seria objetivo e definitivo. Se ocorrem erros, esses mostram que os humanos podem, erradamente, identificar alguma coisa como tendo uma garantia objetiva, mas o conhecimento verdadeiro seria incorrigível e final.

Em outras palavras, é como se não existissem erros matemáticos, mas tão-somente erros humanos no lidar com a matemática. Pelo menos é o que podemos depreender, de forma simplificada, da concepção que tem Ernest da posição absolutista acerca da prova matemática

A título de esclarecimento, Ernest considera dois tipos de absolutismo: o absolutismo formal e o progressista. O formal é aquele que considera que os conceitos matemáticos não são desenvolvidos, mas descobertos; e que a descoberta de novas verdades em matemática não atinge as verdades até então existentes. Nesse sentido, o formalismo e o logicismo seriam filosofias absolutistas formais da matemática. Já o absolutismo progressista aceita a criação e a mudança de novas teorias e reconhece que a intuição é necessária para a criação de teorias assim como o papel da ação humana nessa criação. Nesses termos, o intuicionismo é uma filosofia absolutista progressista da matemática.

O absolutismo nega que a racionalidade e a lógica dependam do humano e exclui da filosofia, como ilegítimo, o fato empírico de que os padrões de racionalidade e lógica mudam e têm mudado. O modo padrão de fazer isso é sustentar que lógica e prova somente são relevantes para o contexto da justificação.

Essa posição, diz Ernest, pode ser mantida consistentemente, mas falha em acomodar a justificação do conhecimento matemático dentro da perspectiva naturalista (isto é, dentro de uma perspectiva descritiva). A perspectiva naturalista em filosofia da matemática se caracteriza por levar em consideração a construção social do matemático individual e sua criatividade. E, como ocorre no terreno da filosofia das ciências, preocupa-se em descrever o desenvolvimento da matemática, em vez de prescrever acerca do que ela deveria ser. Além de preocupar-se com o contexto da justificação do conhecimento, preocupa-se, igualmente, com o contexto da descoberta.

Para os absolutistas progressistas o conhecimento outorgado por racionalidade e lógica humana é sempre uma representação potencialmente falível da verdade, a qual seria gradualmente descoberta por esforço humano, mas existiria independentemente de nós.

Ernest replica essa razão com mais observações falibilistas, constatando que nenhuma garantia ou prova poderia ser dada de que nós tivéssemos alcançado a verdade, pois essa suposta garantia seria circular e falharia, ou então nos levaria ao infinito regresso.

Uma outra razão absolutista progressista é que a prova permaneceria puramente objetiva, ainda que o rigor completo não pudesse ser alcançado.

O problema com este argumento, segundo Ernest, é que se as provas não são redutíveis a regras rigorosas e explícitas, então, seria preciso recorrer ao julgamento para se decidir quais provas seriam aceitáveis. Isso exigiria que se recorresse à dimensão externa humana, cortando pela raiz a exigência de objetividade.

O falibilismo rejeita a separação da matemática de outras áreas do conhecimento por duas razões. Primeiro, porque a visão apriorística do conhecimento matemático, como um corpo de verdades derivado através de inferência e que preserva a verdade de premissas verdadeiras, é rejeitada. Em vez disso, o conhecimento matemático é visto como quase-empírico. De acordo com Lakatos (1978, 1981), as conseqüências são deduzidas de conjuntos hipotéticos de suposições matemáticas, e se falsificadas por contradições, ou por teorias informais, as suposições são rejeitadas ou modificadas. Assim, a avaliação de um suposto conhecimento matemático inclui um elemento quase-empírico dependente da experiência humana. Kitcher (1984) também considera a matemática como empírica, porque experiências particulares são necessárias para garantir o conhecimento. Nenhum desses dois tipos de experiências consiste de observações do mundo externo, mas desde que a matemática é vista como quase-empírica, ela não pode ser categoricamente divorciada do conhecimento das ciências físicas e de outras ciências.

Os falibilistas incluem o conhecimento humano como uma legítima preocupação da filosofia da matemática. Como resultado de uma das atividades cognitivas dos seres humanos, a matemática estaria relacionada com o conhecimento humano, uma vez que estaria fundada na força do entendimento do sujeito humano, associando-se, assim, a todos os domínios do conhecimento.

Todo o conhecimento está enraizados no conhecimento humano básico e, desse modo, está relacionado através de uma base compartilhada. A forma social de falibilismo que Ernest desenvolve, isto é, construtivismo social, também pressupõe que o acordo humano é o árbitro final do que se convencionou chamar 'conhecimento justificado'. Em outras palavras, a justificação de todo conhecimento também repousa sobre uma base compartilhada, a saber, o acordo humano. Assim, em termos de sua origem e também de suas bases justificativas, o conhecimento humano tem uma unidade fundamental e todos os seus campos estão, desse modo, interligados.

Essa perspectiva falibilista é pós-lakatosiana, pois em *Provas e refutações* Lakatos é totalmente hostil aos convencionalistas e não admite, de forma alguma, a existência de árbitro final ou de uma última instância de justificação para o conhecimento matemático. Daí, não se poder falar em *conhecimento justificado* para Lakatos. Aliás, essa é a *essência* da noção de falibilidade, isto é, o fato de que o conhecimento matemático seria infinitamente retificável, não se podendo chegar a uma última instância de justificação. Nesse sentido poderíamos dizer que foram os falibilistas pós-lakatosianos que desradicalizaram Lakatos.

Ernest ainda alarga a sua reflexão em torno da resposta da pergunta *o que é a filosofia da matemática*. Elenca algumas respostas de alguns autores. Dentre elas, destacamos uma referência atribuída a Maddy, que não estava presente em *PME*, acerca da tarefa do filósofo da matemática, qual seja, a de "*descrever* e *explicar* a matemática e não a de reformá-la". Suprime uma referência atribuída a Körner e mantém uma referência atribuída a Tymoczko, as quais também estão presentes em *PME* (p. 23-24).

Maddy e Tymoczko colocam-se sob o ponto de vista de que a tarefa da filosofia da matemática é explicar e descrever a matemática. Ernest considera que esse ponto de vista não contempla o que ele entende ser a preocupação específica da filosofia da matemática em oposição às preocupações da história e da sociologia da matemática. E é em Priest (tal como em *PME*) que ele encontra uma saída satisfatória para caracterizar a especificidade da filosofia da matemática, em relação a outras áreas que lhe seriam correlatas. O contraste entre as citações de Timoczko e Maddy, por um lado, e a de Priest por outro, dá conta do que Ernest entende ser a tarefa específica da filosofia da matemática. É o seguinte o texto de Priest que parece satisfazer às reivindicações de Ernest:

> *Todos os problemas referentes à filosofia da matemática podem habilmente ser resumidos pela seguinte questão:*
> *Questão 0. O que é matemática (pura)?...*
> *Primeiramente, o que é entendido por 'matemática'? A única resposta não circular que podemos dar a essa questão é 'Aquilo que é feito e tem sido feito nos últimos quatro mil anos pelos matemáticos' ... O conhecimento da natureza da matemática está subjacente à habilidade de fazê-la ... Agora, o que é aquilo que os matemáticos fazem? Eles estão interessados em estabelecer a verdade ou, em outras palavras, estabelecer afirmações indubitáveis.*
> *Questão 1. Por que são as verdades da matemática verdadeiras?*
> *Qualquer resposta razoável* [*à questão 1*] *deve também permitir respostas razoáveis para as seguintes questões:*
> *Questão 1(a). Por que é que tais verdades parecem necessárias e invioláveis, e por que somos incapazes de concebê-las como falsas?*
> *Questão 1(b) Como é que chegamos a conhecer tais verdades?*
> *Questão 1(c) Por que é que as verdades da matemática podem ser aplicadas a questões práticas como, por exemplo, à agrimensura, à construção de pontes, ao envio de foguetes à lua, etc. Em suma, Por que elas são úteis?...*
> *Agora, a resposta ingênua à questão 1 é que as verdades da matemática são verdadeiras porque elas são verdades de certos objetos tais como números, funções, proposições, pontos, grupos,*

modelos, etc. isto é, porque elas são verdades dos objetos a que a matemática se refere.
Isso nos obriga a responder:
Questão 2. O que são exatamente tais objetos e em que sentido eles existem?...
Questão 2 (cont.) E se eles não existem, por que é que temos uma tão forte impressão de que eles existem? (Priest, 1973, p. 115-117 *apud* Ernest, 1998, p. 49-50).

Quando Priest considera que a maior preocupação da filosofia da matemática é de caráter epistemológico e ontológico, Ernest o considera muito tradicional. Porém quando ele aduz que essas questões ontológicas e epistemológicas devem ser consideradas em um contexto mais amplo do que aquele em que foram tradicionalmente pensadas e reivindica que a atividade humana, a história e o uso social não sejam omitidos na consideração de tais questões, Ernest considera isso uma expansão radical dos limites da pesquisa em filosofia da matemática.

A partir do seu diálogo com Priest, Ernest vai se aproximando do que pretende, ele mesmo, propor acerca da filosofia da matemática. Não duvida de que o papel desta seria o de refletir e explicar a natureza da matemática. E aqui ele se atém ao fato de que o modo como o termo *explicar* é concebido se torna uma questão chave. Isso porque, as filosofias fundacionistas *explicam* a natureza da matemática e do conhecimento matemático de forma prescritiva, nunca descritiva. Por isso, elas discorrem mais acerca do que a matemática deve ou deveria ser, do que acerca do que ela tem sido.

A dualidade expressa pelos pólos prescrever-descrever, quando utilizados para caracterizar o estatuto da filosofia da matemática, suscita a Ernest o estabelecimento de analogias com outro par de pólos duais expresso por absolutismo-falibilismo. A conclusão a que chega é que se deve ultrapassar o estreito espaço contendo somente questões epistemológicas e ontológicas, e se movimentar num espaço mais amplo no qual a matemática se insira de modo multirelacionado no contexto do pensamento e da história humana. Ernest considera que a filosofia da matemática deve conter muito mais do que apenas justificação do conhecimento matemático e ontologia:

Uma vez que a matemática é multifacetada, e também um corpo de conhecimento proposicional, ela pode ser descrita em termos de seus conceitos, características, teorias, história e práticas. A filosofia da matemática deve explicar esta complexidade, a qual Wittgenstein descreve como o "mosaico da matemática". Uma filosofia da matemática descritiva precisa estender as preocupações que ela enfoca a fim de incluir questões tais como as seguintes (*SCPM*, p. 51).

As questões que ele estabelece em *SCPM* são em torno de treze. Em *PME* eram só sete e tinham outro teor. Consideramos relevante apresentá-las aqui, para constatarmos mais esse dado no processo de mudança de perspectiva de Ernest:

1.Qual é o fim da matemática? 2.Qual é o papel dos seres humanos na matemática? 3.Como o conhecimento subjetivo de indivíduos se torna conhecimento objetivo da matemática? 4.Como o conhecimento matemático se desenvolveu? 5.Como a sua história ilumina a filosofia da matemática? 6.Qual é a relação entre a matemática e outras áreas do conhecimento e da experiência humanos? 7.Por que as teorias da matemática pura se mostram tão poderosas e úteis em suas aplicações à ciência e a problemas práticos? (*PME*, p. 25).

1.Como se pode conceber a justificação do conhecimento matemático que não necessariamente pressuponha absolutismo? 2.Como se pode conceber o caráter e o status ontológico dos objetos da matemática? 3.Por que o platonismo ou realismo matemático é uma perspectiva tão plausível e bem sucedida? 4.Como estão correlacionados as práticas dos matemáticos e o caráter da matemática? 5.Qual é o relacionamento entre o conhecimento matemático subjetivo de indivíduos *e o conhecimento matemático aceito? 6. Como os indivíduos aprendem matemática e assim chegam a conhecer o conhecimento matemático existente? 7.Como os indivíduos transmutam criativamente seu conhecimento da matemática em novo conhecimento matemático? 8.Como o conhecimento matemático se desenvolve? Como a prova básica os padrões de definição e o metaconhecimento da matemática se desenvolvem? 9.Qual é o interrelacionamento entre matemática, linguagem e tecnologia de informação (dos tabletes de argila aos computadores)? 10.Como a história ilumina a filosofia da matemática? 11.Qual é o relacionamento entre a matemática e outras áreas do conhecimento humano, valores, cultura e experiência? 12.Por que as teorias da matemática pura provaram ser tão poderosas e úteis nas suas aplicações à ciência e a problemas práticos? 13.Como as teorias matemáticas podem ser avaliadas? Pode haver critérios para tais propósitos, e se assim, quais valores estão envolvidos?* (*SCPM*, p. 51-52).

Os dois blocos de perguntas têm algo em comum. E as considerações de Ernest que seguem tanto em *PME* quanto em *SCPM* se desenvolvem e se atêm mais a aspectos relativos à ampliação do alcance da filosofia da matemática a fim de considerar a presença humana, o domínio do social na filosofia da matemática, a gênese do conhecimento matemático e o estado de mudança que caracteriza o conhecimento em todas as disciplinas, inclusive na matemática. Enquanto em *PME* a discussão se dá em termos da dicotomia falibilismo-absolutismo, em *SCPM* esse contraste não se mostra de forma explícita. Mas ele está presente. Parece-nos que, nessa última obra, Ernest prima mais em partir da filosofia da matemática tradicional e alargar o seu âmbito para conter questões referentes aos aspectos referidos nas treze perguntas anteriormente apresentadas.

O falibilismo inclui muito mais coisa no âmbito da filosofia da matemática, dado que, por um lado, a matemática é vista como falível e não-divorciada do conhecimento empírico da física e de outras ciências, e, por outro lado, inclui no âmbito da filosofia da matemática o tratamento da gênese do conhecimento matemático tanto quanto do seu produto (a matemática) imersos na história e na prática humanas. Na perspectiva falibilista, a matemática é vista como parte indissociável da estrutura total do conhecimento humano.

Essa visão cultural da matemática a concebe como uma parte integral da cultura humana, e, assim, tão imbuída de valores humanos como os demais domínios do conhecimento. A visão falibilista conecta a matemática com o resto do conhecimento humano através de suas origens histórica e social. Daí, vê a matemática impregnada de valores sociais que desempenham um papel significativo no seu desenvolvimento e aplicações.

Ernest propõe que as próprias preocupações da filosofia da matemática deveriam incluir questões externas a essa ciência tais como a origem histórica e o contexto social da matemática, em acréscimo às questões internas referentes ao conhecimento, à sua existência e à sua justificação. Mas nem mesmo nessa parte do seu texto (p. 25-26), e nem na parte correspondente do *SCPM*, ele se atém a considerações de caráter educacional.

A influência do fracasso dos programas fundacionistas em filosofia da matemática não deveria ser subestimada, uma vez que esse, provavelmente, teria levado alguns matemáticos à desilusão com as filosofias prescritivas. E associado ao desejo de reconhecimento filosófico de suas práticas efetivas, esse fracasso teria encorajado também alguns matemáticos, tais como Hersh, McCleary e McKinney a questionarem os limites tradicionais da filosofia da matemática.

Por outro lado, teriam ocorrido significativas mudanças sociais com impacto direto no terreno da própria matemática. De fato, os matemáticos, segundo Ernest, têm sido cada vez mais afetados por mudanças tecnológicas e por pressões e demandas sociais. Com isso, mesmo os matemáticos puros teriam se tornado cada vez mais conscientes da utilidade potencial de suas pesquisas ao sentirem o impacto da mudança social e tecnológica. A grande expansão da educação pública de acordo com os objetivos do progresso social e tecnológico teria, segundo ele, levado a uma ênfase cada vez maior sobre a educação matemática durante esse período. Isso teria posto um grande número de matemáticos em contato com o progresso educacional e com o ensino, de modo que a influência humanizante de tais práticas sobre o pensamento não deveria ser subestimada, uma vez que elas teriam levado questões humanas a penetrar no domínio impessoal da matemática, através da porta dos fundos.

É singular essa observação referente à grande expansão da educação pública como um fator de envolvimento dos matemáticos com o progresso educacional e com o ensino e a conseqüente influência desse envolvimento no pensamento.

Possivelmente, observa Ernest, uma conseqüência dessa interação entre forças intelectuais acadêmicas internas à matemática e aquelas trabalhando na penumbra de metateorias teria sido o afloramento da consciência da possibilidade de se contestar as preocupações exclusivamente internas à filosofia da matemática, e a existência de uma vigorosa corrente de idéias centrada na perspectiva social, falibilista e naturalista do conhecimento teria constituído um estímulo importante para isso. Assim, para ele, a proposta reconceptualizante da filosofia da matemática legitima as preocupações da tradição "dissidente", configurando-se numa resposta às vigorosas forças intelectuais que operam na cultura ocidental, embora essa proposta represente uma perspectiva de minoria dentro da própria filosofia da matemática.

Esse ponto de vista acerca da história recente da filosofia da matemática não está presente em *PME*; é mais um dos vários melhoramentos de Ernest acrescentados ao seu ponto de partida. Gostaríamos de destacar dessa explicação um aspecto por nós considerado significativo e, talvez, singular, qual seja, aquele que vê na expansão da instrução pública um fator que teria aproximado consideravelmente os matemáticos puros de questões humanas (*SCPM*, p. 55). É claro que, com isso, aconteceram também alguns desastres no que se refere ao modo de se lidar com as questões humanas. Um deles, e talvez o mais visível e marcante, foi o traslado da matemática moderna para o ensino. Sobre isso, a literatura referente à educação matemática é extremamente rica. As mais variadas perspectivas tomam lugar na abordagem da inserção da matemática moderna no ensino, tanto do lado dos matemáticos quanto do lado dos professores.

Um outro tópico estendido do Capítulo 2 de *PME* no Capítulo 2 de *SCPM* é:
Criteria for an Adequate Philosophy of Mathematics, que é apresentado em *SCPM* como *Adequacy Criteria for the Philosophy of Mathematics Reconceptualized*. Não se trata mais, no desenvolvimento atual, de se estabelecer critérios que deveriam ser contemplados para que uma filosofia da matemática fosse considerada adequada, mas sim de se estabelecer critérios adequados que deveriam ser preenchidos por uma filosofia da matemática reconceptualizada.

Em *PME*, é sustentado que o papel da filosofia da matemática é explicar a natureza da matemática, concebido esse explicar de forma ampla a fim de incluir questões *externas* à filosofia da matemática, tais como a história, a gênese e a prática da matemática, bem como questões *internas* de natureza epistemológica e ontológica, tais como a justificação do conhecimento matemático ou a natureza dos objetos matemáticos. Esse papel é traduzido mais explicitamente em termos de quatro critérios dos quais uma filosofia da matemática proposta deveria dar conta:

(i)Mathematical knowledge: its nature, justification and genesis.
(ii)The objects of mathematics: their nature and origins.
(iii)The applications of mathematics: its effectiveness in science, technology and other realms.
(iv)Mathematical practice: the activities of mathematicians, both in the present and the past. (*PME*, p. 27).

Tais critérios representam uma reconceptualização do papel da filosofia da matemática obscurecido pelo erro da sua identificação com o estudo dos fundamentos lógicos da matemática.

Em *SCPM*, Ernest acrescenta mais dois critérios, além de expandir os anteriores. Como o faz em *PME*, ele continua observando que a exclusão tradicional de questões externas do âmbito da filosofia da matemática deveu-se à influência absolutista e não aos limites da pesquisa filosófica. Em *SCPM*, atesta que as perspectivas falibilistas *agora* estão suficientemente difundidas para justificar a reconceptualização da filosofia da matemática a fim de que ela inclua as mais amplas questões externas levantadas. Mas as referências que ele aduz a essa sua reflexão são todas anteriores a 1991 (época da publicação de *PME*). Com isso, depreende-se do próprio texto de Ernest que as bases de uma filosofia falibilista da matemática remontam a Wittgenstein e vão até 1989 com Van Bendegem.

Para Ernest, a perspectiva falibilista defende que a justificação do conhecimento matemático envolve, fundamentalmente, ação humana e não pode ser reduzida às condições objetivas do conhecimento. Os padrões de prova nunca são objetivos e definitivos, mas "suficientes até o momento", e eles estão perpetuamente abertos à revisão. As provas matemáticas são aceitas porque elas satisfazem aos representantes apropriados da comunidade matemática, e não [só] porque satisfazem explicitamente a regras lógicas objetivas de prova. O conhecimento matemático e os padrões de prova que o sustentam dependem de o que os matemáticos da atualidade aceitam. Esse metaconhecimento varia de acordo com sua localização na história; e o presente não está, e nunca pode estar, em uma posição privilegiada com respeito à verdade ou a padrões definitivos de prova.

Isso não quer dizer que o conhecimento matemático (ou os padrões de prova) são arbitrários, irracionais ou ilógicos, mas que os matemáticos aceitam como conhecimento matemático só o que resiste à crítica e a exame público racional, baseados em seu melhor julgamento profissional e em regras estabelecidas explicitamente. Além disso, há uma continuação entre a aplicação do julgamento profissional de uma geração para a outra, e todas as mudanças são, elas próprias, debatidas e justificadas publicamente. Conceitos matemáticos, definições, teoremas, provas, teorias e padrões de prova crescem, mudam e são, às vezes, abandonados com o passar do tempo. Assim, sua "objetividade" é realmente intersubjetividade, é dependente do tempo e da comunidade e está enraizada na história, na tradição.

O seu argumento não é, ele faz questão de frisar, que a correção do falibilismo exigisse uma extensão da filosofia da matemática, ignorando o domínio que o absolutismo continua a exercer, mas que as perspectivas falibilistas fossem também admitidas para a consideração crítica e discussão ao lado das perspectivas absolutistas, como uma crescente literatura na área atesta. E que o conflito entre o absolutismo e o falibilismo seria, em si mesmo, uma questão central para a filosofia da matemática. O que se busca, então, é uma reconceptualização dessa questão de modo a contemplar as controvérsias e as preocupações das duas perspectivas (*SCPM*, p. 56).

Mas não é isso que Ernest diz em *PME* (p. 27-28), quando analisa as escolas absolutistas à luz dos seus critérios. Considera-as cheias de impropriedades, e acrescenta que mesmo que elas tivessem sido bem sucedidas em seus programas fundacionistas, continuariam filosofias da matemática inadequadas. Com isso, concluímos a esse respeito que Ernest, em *SCPM*, é menos intolerante e mais conciliador em relação ao espaço ocupado pelo absolutismo na filosofia da matemática contemporânea.

Os novos critérios de Ernest a serem levados em consideração, por uma filosofia da matemática adequada, se apresentam assim em *SCPM*, p. 56-57):

> *1. Mathematical knowledge: its character, genesis and justification, with special attention to the role of proof*
> *2. Mathematical theories, both constructive and structural: their character and development, and the issues in their appraisal and evaluation*
> *3. The objects of mathematics: their character, origins, and relationship with the language of mathematics*
> *4. The applications of mathematics: its effectiveness in science, technology, and other realms and more generally, the relationship of mathematics with other areas of knowledge and values*
> *5. Mathematical practice: its character, and the mathematical activities of mathematicians, in the present and past*
> 6. *The learning of mathematics: its character, and its role in the onward transmission of mathematical knowledge and in the creativity of individual mathematicians.*

Quando, em *PME*, Ernest estabelece os quatro critérios que deveriam ser contemplados por uma filosofia da matemática a fim de que seja considerada adequada, ele realiza um reexame das escolas de pensamento na filosofia da matemática à luz desses critérios. E, nesse sentido, as escolas absolutistas, o absolutismo progressista, o platonismo, o convencionalismo, o empirismo e o quase-empirismo são revistos e avaliados. As escolas absolutistas são rejeitadas. O absolutismo progressista também. O mesmo ocorre com o platonismo. O empirismo (o empirismo ingênuo, e não o quase-empirismo de Lakatos) tem sob os critérios de Ernest a mesma avaliação das outras escolas. Ainda que essas correntes de pensamento preencham só parcialmente os critérios de Ernest, são rejeitadas. Por isso, ele as vai sucessivamente descartando como filosofias da matemática inadequadas. Quanto ao convencionalismo, este ganha um espaço bem maior do que as outras perspectivas, sob a análise dos critérios. E na página 33 de *PME*, aduz Ernest: *Thus convencionalism is not refuted, and indeed may satisfy many of the adequacy criteria proposed earlier*. Wittgenstein é um convencionalista e um dos pilares do construtivismo social de Paul Ernest. O mesmo acontece com o quase-empirismo, que é a filosofia da matemática de Lakatos, à qual o autor é favorável. Lakatos, também é uma das duas bases do construtivismo social de Paul Ernest. Ele tem algumas restrições à filosofia da matemática de Lakatos mas a adota como fundamento para o seu construtivismo social como filosofia da matemática.

Além desses seis critérios, Ernest menciona um outro não estabelecido em que diz: *an adequate philosophy of mathematics must give an account of mathematics in philosophical acceptable terms, understood broadly, employing types of explanation and justification that can broadly be regarded as appropriate* (*SCPM*, p. 57). E observa que esse acréscimo é necessário pois, do contrário, a reconceptualização não teria nenhuma chance de ser aceita como tal pelos filósofos da matemática, não podendo, portanto, ter nenhum impacto sobre esse campo. Essa preocupação de Ernest com a aceitação do construtivismo social não está presente em *PME*, e denota uma postura de maior abertura à negociação, o que não transparece em *PME*, no qual, nenhuma consideração desse teor é explicitada.

Em *SCPM*, o absolutismo progressista e o platonismo são analisados à luz dos critérios expandidos para uma filosofia da matemática adequada. O texto referente ao absolutismo progressista é basicamente o mesmo de *PME*, a menos de uma meia dúzia de linhas acrescidas, que contêm um adendo explicitando a relação do absolutismo progressista com a filosofia da ciência de Popper, das supressões de uma citação de Confrey e da consideração pessoal sobre a importância para a educação do fato de nem todas as filosofias absolutistas estarem em pé de igualdade. Não temos nenhuma conjectura que possa explicar porque essas considerações sobre o ensino foram elididas no texto atual.

Quanto ao platonismo, o texto de *PME* é mantido na íntegra e os seguintes acréscimos são inseridos com seus respectivos propósitos: uma citação de Maddy estabelecendo uma distinção entre realismo matemático e platonismo matemático; considerações sobre o platonismo como uma posição ontológica (em oposição à epistemológica) seguidas da conclusão de que o mesmo não é fundacionista.

A mudança nos critérios amplia consideravelmente o alcance da filosofia da matemática. Uma filosofia da matemática com tal abrangência, acreditamos, deve ser um guia eficiente para nos conduzir junto com os nossos alunos pelos caminhos do mundo matemático e pelos caminhos que levam aos mundos interrelacionados com o mundo matemático. Certamente que, uma formação nessas bases, é o que estão a buscar todos aqueles preocupados com o papel do conhecimento matemático na formação do homem no mundo contemporâneo, tão incrivelmente rápido e difuso em seu dinamismo. Tão profundamente paradoxal, tão caótico, economicamente, e quase sem saída, socialmente falando.

A Filosofia da Matemática de Paul Ernest

O construtivismo social de Paul Ernest é uma filosofia resultante da composição de contribuições de duas filosofias da matemática − o convencionalismo e quase-empirismo −, de uma teoria do conhecimento e de uma teoria da aprendizagem. É, portanto, como acentua o próprio Ernest, uma elaboração e uma síntese. Podemos inferir, a partir dos dois textos de Ernest considerados por nós neste estudo, que o construtivismo social, no texto publicado por ele em 1991, ainda era uma filosofia em elaboração.

O construtivismo social vê a matemática como uma construção social. Tem no convencionalismo uma de suas bases pois considera que a linguagem, as regras e os acordos humanos têm um papel fundamental no estabelecimento e justificação das verdades matemáticas. O quase-empirismo adota a epistemologia falibilista, inclusive o ponto de vista de que o conhecimento e os conceitos matemáticos se desenvolvem e se modificam. Além disso, adota a tese filosófica de Lakatos que afirma que o crescimento do conhecimento matemático se processa através de conjecturas e refutações, utilizando uma lógica de descoberta em matemática.

Do Falibilismo de Popper, via Lakatos, o construtivismo social colhe a retificabilidade da matemática, a falibilidade da matemática e o método de provas e refutações.

Segundo Ernest, o construtivismo social é uma filosofia descritiva da matemática, que tem por objetivo esclarecer a natureza da matemática, entendida em sentido amplo, com base em critérios de adequação por ele estabelecidos para esquadrinhar o que considera *uma filosofia adequada da matemática* Ernest (*PME*, p. 27; *SCPM*, p. 56-7).

Um ponto central do construtivismo social é o da gênese do conhecimento matemático, mais do que apenas a sua justificação. Este dado é um ponto de intersecção com o quase-empirismo de Lakatos, ou melhor, é uma contribuição do pensamento lakatosiano.

O conhecimento objetivo e o conhecimento subjetivo são amplamente discutidos por Ernest. Ele estabelece uma relação entre os dois de modo que o limite de um constitui o início do outro. Há, de fato, uma inter-relação entre os dois. E isso é plausível, já que, para o construtivismo social, o conhecimento objetivo é o conhecimento subjetivo após ter sido submetido a determinados processos de avaliação pública.

Para explicar em que sentido usa os termos *objetivo* e *subjetivo* aplicados ao conhecimento, Ernest lança mão da *teoria dos três mundos* de Popper (1979), a qual associa a cada tipo de mundo um tipo de conhecimento.

Diz Popper: *Podemos chamar o mundo físico de mundo 1, o mundo de nossas experiências conscientes de mundo 2 e o mundo dos conteúdos lógicos dos livros, bibliotecas, memórias de computadores e outros de mundo 3* (Popper, 1979, p. 74).

Ernest posiciona o conhecimento subjetivo no mundo 2, isto é, no mundo de nossas experiências conscientes. Já o conhecimento objetivo pertenceria ao mundo 3 no qual Popper inclui os produtos da mente humana, tais como teorias publicadas, as discussões dessas teorias, problemas e provas com elas relacionados.

O conhecimento objetivo é, para Popper, mutável e criado pelo homem. A expressão "conhecimento objetivo", em Ernest, tem um sabor diferente do que lhe dá Popper. Quando aquele se refere ao conhecimento objetivo, inclui tudo o que Popper concebe como conhecimento objetivo, mas também acrescenta ao mundo 3 de Popper o que chama de '*produtos adicionais da mente humana' tais como o conhecimento objetivo, sobretudo as convenções (possivelmente implícitas) compartilhadas e as regras da linguagem usual* (*PME*, p. 46).

Ernest também considera conhecimento objetivo o conhecimento intersubjetivo, isto é, o conhecimento publicamente compartilhado, ainda que esse último seja um conhecimento implícito que não tenha sido plenamente articulado. Ernest demonstra estar consciente de que, muito provavelmente, essa extensão seria inaceitável para Popper.

Após apresentar aspectos da teoria de Popper para modificá-los de modo a ajustarem-se às suas concepções, Ernest manifesta a intenção de adotar a mesma concepção de objetividade proposta por Bloor (1984):

> *Esta é a teoria: a objetividade é social. Com isso quero dizer que o caráter impessoal e estável que atribuímos a algumas de nossas* crenças *e que o sentido de realidade que a elas atribuímos deriva das crenças que são instituições sociais.*
> *Estou convencido de que uma* crença *é objetiva quando não pertence a qualquer indivíduo. Ela não varia como um estado subjetivo ou como uma preferência pessoal. Ela não é minha ou sua, mas pode ser compartilhada. Ela possui o que se costuma chamar exterioridade* (Bloor, 1984, p. 229, *apud* Ernest, *PME*, p. 46).

Segundo Ernest, Bloor discorda de Popper a propósito da teoria dos três estados, porque não há nela espaço para o mundo social e, mesmo que desejássemos inseri-lo no mundo 3, a teoria dos três estados de Popper não se preservaria mediante esse tipo de transformação, o mesmo ocorrendo com as conexões entre os três mundos.

Ernest pensa que a concepção social de objetividade defendida por ele e Bloor não preservaria o significado que Popper atribui à objetividade, porque este teria considerado, de forma idealista, que o caráter lógico das teorias, das provas e dos argumentos seria suficiente para garantir a objetividade. Contrariamente, a concepção social seria capaz, segundo ele, de dar conta da maioria, senão de todas, as características distintivas entre a noção de objetividade de Popper, de Bloor e da sua própria. O que garantiria a objetividade de uma teoria para Popper seria o seu caráter lógico. Para Bloor e Ernest seria o consenso implícito ou explícito adquirido pela mesma no contexto social.

Como o conhecimento objetivo e as regras existem fora dos indivíduos (na comunidade), eles parecem ter, segundo Ernest, uma existência independente parecida com o modo de existência dos objetos físicos. A perspectiva social daria conta de muitas das características necessárias da objetividade. Assinala ainda que a visão social que tem Bloor da objetividade explicaria e daria conta da mesma, o que não conseguem fazê-lo os pontos de vista tradicionais (neles incluído o de Popper), os quais, embora definam objetividade (intensiva e extensivamente), nunca conseguem explicá-la. Isso porque, esclarece Ernest, *os pontos de vista tradicionais apenas mostram que a existência autônoma e independente do conhecimento objetivo é necessária sem fornecer qualquer explicação sobre o que é a objetividade, ou como o conhecimento objetivo pode emergir do conhecimento humano subjetivo* (*PME*, p. 47).

Para Ernest, um problema imediato que a concepção social de objetividade teria que enfrentar é o de considerar o caráter necessário da verdade lógica e matemática.

O modo como o construtivismo social trata tanto o conhecimento objetivo como o conhecimento subjetivo estaria, segundo Ernest, em desacordo com muitas correntes contemporâneas em filosofia e em filosofia da matemática.

Enquanto muitas correntes contemporâneas da filosofia consideram só o contexto da justificação do conhecimento como objeto de investigação filosófica, o construtivismo social inclui também nesse âmbito o contexto da descoberta, contexto esse que, para essas correntes contemporâneas da filosofia da matemática, é considerado objeto da psicologia.

Segundo Ernest, o antipsicologismo considera que o conhecimento subjetivo – ou pelo menos, seus aspectos psicológicos – não se prestariam ao tratamento filosófico. Isso porque, segundo esse ponto de vista, a filosofia seria uma análise lógica e metodológica das condições gerais da possibilidade do conhecimento. Uma investigação dessa natureza seria *a priori* e independente de qualquer conhecimento empírico particular. Os temas subjetivos ou seja, psicológicos, se refeririam necessariamente a conteúdos de mentes individuais. Tais assuntos e a psicologia em geral seriam empíricos. Portanto, devido a essa diferença categórica (o domínio do *a priori* versus o do empírico), o conhecimento subjetivo não poderia ser objeto da filosofia.

Ernest refuta esse argumento com base em duas considerações: uma primeira, ressalta o fato de que, para o construtivismo social, uma crítica do absolutismo e, conseqüentemente, da crença na possibilidade de existência de um conhecimento verdadeiro *a priori*, incluindo a lógica e a matemática, deveria fundamentar-se sobre uma base quase-empírica. Essa base destrói a única distinção categórica entre conhecimento *a priori* e conhecimento empírico.

A segunda consideração destaca o fato de que o construtivismo social, quando discute o conhecimento subjetivo, não se propõe a discutir os conteúdos específicos de mentes individuais e nem determinadas teorias psicológicas empíricas da mente sob a ótica da filosofia. Em vez disso, a intenção é discutir a possibilidade do conhecimento subjetivo em geral, e o que pode ser concluído a respeito de sua possível natureza, com base em um raciocínio exclusivamente lógico (dado um número de pressupostos teóricos). Isso constitui, para Ernest, uma atividade filosófica legítima, do mesmo modo como a filosofia da ciência pode, legitimamente, refletir sobre um domínio empírico. Desse modo, o conhecimento subjetivo se torna, legitimamente, objeto de investigação filosófica. Para Ernest, na realidade, ao discutirem crença ou o objeto de conhecimento, é precisamente isto que estão considerando epistemólogos tais como Sheffler, Woozley, Chisholm e também Popper. De há muito que a epistemologia considera o conhecimento subjetivo, pelo menos desde a época de Descartes (e provavelmente desde a de Platão), passando pelos empiristas britânicos Locke, Berkeley e Hume e, via Kant, até os dias atuais.

A propósito de conhecimento objetivo e subjetivo, Ernest discute a construção social dos dois e a construção social do conhecimento matemático na sua versão atual do construtivismo social.

Nesse sentido, põe em discussão a base lingüística da objetividade da matemática. O seu pressuposto é que a objetividade do conhecimento matemático baseia-se no conhecimento compartilhado da linguagem natural. A linguagem é por ele considerada o substrato que forneceria o fundamento da objetividade em matemática.

Para Ernest a competência adquirida na linguagem natural necessariamente envolveria a aquisição de um amplo corpo implícito de conhecimento.

Esse conhecimento implícito é consciente? Perguntamos isso porque, acreditamos que a competência adquirida na linguagem envolve, geralmente, um amplo corpo de condicionamentos. Muitas aquisições na língua natural são espontâneas, ou melhor, *osmóticas*. Só mais tarde é que volvemos o pensamento consciente sobre a linguagem natural e adquirimos, via gramática e outras disciplinas, um conhecimento sólido da natureza da língua.

> *Parte desse conhecimento é conhecimento elementar de matemática, de raciocínio lógico e de suas aplicações. A comunicação lingüística requer que as regras e convenções desta linguagem sejam pressupostas. Essas pressuposições compartilhadas, sem as quais a comunicação seria impossível, constituem o fundamento da objetividade do conhecimento matemático (e de seus objetos)* (*PME*, p. 50).

Essa é a essência do argumento de natureza lógica utilizado por Ernest para defender a objetividade da matemática. Por ser um truísmo que qualquer sistema lógico de conhecimento - dedutivo ou definicional – dependa, em última instância, de um conjunto de proposições ou termos primitivos, no caso do conhecimento matemático objetivo, essas proposições e termos primitivos, segundo ele, fundamentar-se-iam no conhecimento objetivo da linguagem natural.

Buscando explicitar melhor a estrutura do seu argumento, ele declara que o conhecimento objetivo é tradicionalmente identificado com um conjunto de proposições ou afirmações, o qual, por sua vez, é um corpo de conhecimento lingüisticamente expresso. Para Ernest, o conhecimento, além de conhecimento proposicional, também inclui processos e procedimentos, os quais também podem ser representados como proposições. Daí, a compreensão de um tal conhecimento está vinculada essencialmente à competência lingüística. E isso aplicar-se-ia à maioria das atividades sociais e das atividades cognitivas humanas.

O próprio Ernest afirma que o conhecimento talvez fosse análogo à consciência. E define o mesmo como *um processo humano, imensamente complexo, no fundo irredutível, dependente de contribuições de uma miríade de centros de atividades, mas também transcendendo-os* (*PME*, p. 68).

Para Ernest, a competência lingüística consiste da habilidade de se comunicar lingüisticamente. Esta habilidade dependeria do uso compartilhado das formas gramaticais, das relações entre termos e da aplicabilidade dos termos e descrições às situações. Dependeria também da habilidade de inter-relacionar contextos sociais, de certas formas de discursos e do seguimento comum de regras, em conformidade com o uso público. Essas regras, devido ao fato de estarem incorporadas no todo complexo da comunicação e ação humanas, adquiririam uma necessidade que não poderia ser questionada sem que o empreendimento, como um todo, fosse ameaçado. Essas regras codificariam o comportamento lingüístico compartilhado, o qual permitiria e possibilitaria a comunicação. De forma detalhada, essas regras dependeriam das regras e termos matemáticos e lógicos particulares presentes em nossa linguagem:

> *Nossa linguagem natural contém a matemática informal como um subconjunto, inclusive termos que são diretamente aplicáveis ao mundo compartilhado de nossa experiência; e inclui regras e convenções sobre o modo de se aplicar esses termos. As interpretações pretendidas da matemática informal, tais como a classificação e a quantificação, estão implícitas na semântica da linguagem natural. Além disso, as inter-relações entre os termos são estabelecidas através de convenções e regras lingüísticas. Desse modo, exemplos como: 'um é menor do que dois' e 'um conjunto infinito tem mais que dois elementos' são afirmações consideradas verdadeiras com base em regras semânticas da linguagem* (*PME*, p. 51).

Poderíamos nos perguntar como essas regras semânticas foram estabelecidas.

Segundo ele, as aplicações elementares da matemática teriam sido também construídas no interior de regras de uso lingüístico. A presença desses dois tipos de regras - as referentes às interconexões de termos e as referentes às aplicações dessas interconexões no mundo - explicariam, em grande parte, o conhecimento matemático implícito que adquirimos inconscientemente por meio da competência lingüística. Explicação simplificada, esclarece Ernest, porque parece supor a existência de um único mundo externo. Na verdade, continua ele, haveria muitos domínios justapostos do discurso lingüístico, muitos jogos de linguagem, cada um com seus próprios mundos de referência compartilhados. Alguns, mais do que outros, se relacionam com aquilo que é socialmente aceito, pela maioria, como realidade objetiva e alguns são inteiramente fictícios ou mitológicos. Cada mundo desses possuiria uma teoria informal. Todos compartilhariam o acordo social a respeito das regras relativas ao discurso sobre eles. Não haveria um único mundo de referência compartilhado por todos, mas muitos mundos de referência compartilhados aos quais corresponderiam jogos de linguagem distintos.

Ernest argumenta que a linguagem natural e a linguagem matemática informal são ricas em regras, convenções e significados matemáticos implícitos. E que o mesmo poderia ser dito em relação à lógica, sendo o nosso uso de termos-chave lógicos estritamente governado por regras lingüísticas.

Para Ernest, *as regras e convenções da lógica comportam mais do que apenas as verdades da lógica* (...) *elas também comportam relações lógicas, incluindo a implicação e a contradição* (*PME*, p. 52). Raciocinando dessa maneira, na verdade, toda a base da argumentação racional repousaria sobre as regras compartilhadas da linguagem. Até as mais abstratas e poderosas formas de lógica usadas repousariam sobre a lógica contida no uso da linguagem natural. Contudo, as regras e significados da lógica matemática representariam uma versão refinada e formalizada daquela lógica. Elas constituiriam um conjunto compacto de jogos de linguagem justapostos aos jogos da lógica da linguagem natural.

A especialização ou sofisticação presentes na lógica matemática teria tido a sua origem na lógica da linguagem natural ou essas lógicas teriam nascido juntas e seguido caminhos paralelos? O terem surgido no mesmo contexto pode ter sido o único ponto comum a elas. E como a linguagem natural tem uma natureza bem distinta da linguagem matemática e permanece dando conta do contexto das relações sociais, e a lógica matemática, por sua vez, se sofisticou, distanciando-se da sua origem, pode parecer que esta seja uma especialização ou refinamento daquela. Mas, no fundo, cremos, a lógica da linguagem natural e a lógica presente na linguagem matemática são distintas porque dão conta de mundos distintos, sustentam jogos de linguagem distintos. Isso, no entanto, não quer dizer que não seja possível estabelecer-se analogias, paralelos e até convergências em determinados aspectos desses dois jogos de linguagem. E isso é obra do poder de criação da mente humana em sua relação com os vários "mundos".

Ernest argumenta que a convenção lingüística forneceria ao conhecimento matemático do dia-a-dia o seu fundamento seguro e também as bases para a mudança em matemática, tanto das convenções lingüísticas quanto do uso dessas convenções desenvolvido com o tempo. Para ilustrar seu argumento, seleciona fatos da aritmética, observando que verdades incontestáveis tais como "1+1=2" ou "2+2=4", aceitas desde épocas imemoriais, mudaram de significado a partir da época em que Boole inventou um sistema formal no qual outros significados eram atribuídos aos símbolos. O fato é que a partir de Boole, argumenta Ernest, "1+1=2" teria deixado de ser absolutamente verdadeiro, assim como "1+1=1" não seria mais absolutamente falso.

Podemos estabelecer uma analogia desse fato com o que ocorreu com a geometria euclidiana, após o advento das geometrias não-euclidianas. Mudou-se a concepção acerca da geometria euclidiana como sendo a absolutamente verdadeira, como se o espaço das verdades geométricas tivesse que ser revisto para ser composto com novas concepções necessárias e verdadeiras.

Com a álgebra booleana, a mudança verdadeira *reside no fato de podermos suspender nossas regras do dia-a-dia para certos segmentos da linguagem e considerar as conseqüências de convenções hipotéticas, isto é, de convenções contrárias ou distintas daquelas presentes no uso da linguagem natural* (*PME*, p. 52). Assim, consideramos que, com o acréscimo desses novos jogos de linguagem, mais abstratos, os significados originais de parte da matemática presente na linguagem natural são enriquecidos.

Ernest caracteriza a justificação de um item particular do conhecimento matemático como consistindo de uma prova dedutiva formal ou informal. A análise de uma prova considera os pressupostos explícitos que levam sempre, através de uma seqüência de passos, à conclusão. Quanto a isso, nenhum problema. É o que é corrente na matemática, tratando-se de sistemas axiomáticos. Do trajeto que vai desses pressupostos explícitos até a conclusão são utilizados axiomas lógicos, regras de inferência, afirmações hipotéticas, regras matemáticas informais, combinações de pressupostos, etc. Tudo isso poderia ser justificado, segundo Ernest, mediante uma argumentação convencionalista. Mas, o que vem a ser uma argumentação convencionalista? É o que veremos a seguir. Porém, gostaríamos, antes, de fazer referência a uma síntese de Ernest sobre o convencionalismo, uma vez que ele considera o corpo de conhecimentos matemáticos assegurado por provas cujas bases repousariam sobre regras e conhecimentos lingüísticos.

O termo *convencionalismo* tem sido usado mais freqüentemente em discussões acerca da natureza das teorias científicas, se bem que ele pode ser estendido a discussões sobre a natureza de quaisquer teorias.

Henri Poincaré é um dos autores mais representativos do convencionalismo. Para ele, o cientista cria a linguagem, mas não o fato descrito pela linguagem. Também, para Poincaré, as convenções (hipóteses ou teorias) devem submeter-se à verificação e ser abandonadas se não resistirem à prova experimental (Mora, 1984: 628-30).

Segundo Ernest,

> *A aceitação social também fornece a base para a existência independente dos objetos da matemática. Isso porque, subjacente às regras e verdades da matemática está o pressuposto - ou mesmo a afirmação de que os conceitos e objetos da matemática têm uma existência objetiva* (*PME*, p. 55).

Esse pressuposto ou afirmação acerca da objetividade dos conceitos e objetos matemáticos teria se instituído de que forma? Possivelmente, diria Ernest, através de acordos sociais. Segundo ele, *a objetividade dos objetos da matemática diz respeito ao compromisso ontológico que inevitavelmente acompanha a aceitação de certas formas de discurso* (*PME*, p. 55). Acreditamos que isso aponta para as concepções e valores dentro de cada jogo de linguagem. Como explicar então a natureza controversa das teorias e pontos de vista no âmbito das ciências sociais?

Para Ernest,

> o*s objetos da matemática variam desde entidades relativamente concretas, presentes nas descrições em linguagem natural do mundo sensível, até entidades teóricas como por exemplo, o último cardinal inacessível* (*Jech, 1971, apud* Ernest). *Isso porque esses objetos são o resultado da negociação social, e não apenas o produto de imaginação de um único indivíduo* (*PME*, p. 56).

Gostaríamos muito de ouvir de Ernest como se processa essa negociação social da qual resulta a variação dos objetos da matemática. Talvez, isso seja mais problema para a sociologia do conhecimento matemático do que para a filosofia da matemática. Isso porque, todas as relações ou negociações sociais são cheias de idas e vindas. Nunca são em geral pacíficas ou consensuais. E sempre resultam em ganhos e perdas. Nesse sentido, os estudos sociológicos do desenvolvimento da ciência são extremamente ricos de exemplos de fatores extracientíficos que exercem um papel muito importante na determinação das relações e negociações no âmbito científico. Segundo Ernest,

> *Muitos dos termos e conceitos elementares da matemática têm aplicações concretas e exemplos no mundo porque eles fazem parte de uma linguagem desenvolvida para descrever o mundo físico (e social). Desse modo, termos como 'um', 'dois', 'linha', 'triângulo' etc. descrevem propriedades de objetos ou conjuntos de objetos do mundo* (...) *As denotações desses termos ganham objetividade devido a suas aplicações concretas na realidade objetiva* (*PME*, p. 56).

É claro que essa publicação poderia tornar esse conhecimento publicado refutável. Pois poderia ocorrer que, ao se tornar público, mediante a aceitação de um pequeno grupo (editores de uma revista, por exemplo), um conhecimento fosse avaliado por outros matemáticos individuais ou grupos, e considerado impreciso, podendo assim vir a ser refutado. É por essa razão que Ernest acrescenta uma nova condição para a objetividade: a de que a sujeição e a sobrevivência a um tirocínio de provas e testes (heurística de Lakatos) é o que garantiria a aceitação de um conhecimento como objetivo, e não só a sua aceitação pura e simples. Para Ernest, o processo de avaliação e crítica públicas de um conhecimento subjetivo tornado público se confunde com a lógica autônoma subjacente ao desenvolvimento do conhecimento matemático proposta por Lakatos. Essa ferramenta que move a produção da matemática fugiria dos padrões mecânicos, “infalíveis” e dogmáticos do formalismo matemático.

Além disso, consideramos ainda a possibilidade de ocorrer que não se tenha ferramentas para se testar um determinado conhecimento produzido e tornado público. Nessas condições, esse conhecimento não seria nem objetivo, porque não haveria como avaliá-lo, e nem subjetivo, porque fora já tornado público.

Quanto às variedades de criação em matemática, Ernest as explica da mesma forma que outros matemáticos. A criação em matemática se daria de duas maneiras: ora um resultado seria acrescido ao conhecimento matemático já estabelecido, ora seria uma reestruturação do conhecimento já estabelecido que produziria novos resultados. Reconhece que a matemática, como as ciências naturais, seria um conhecimento hipotético-dedutivo.

Os vários processos que constituem a dinâmica de criação em matemática pareceram-nos análogos ao período chamado por Thomas Kuhn de *ciência normal*. Ora é a busca de interligação entre duas teorias aparentemente díspares, ou até então díspares, que estimula a criação nos grupos; ora é a solução de um problema que gera uma nova teoria. Ou uma teoria mais abstrata incorporando várias outras. A exemplo, a Teoria dos Conjuntos de Cantor. Tal explicação de Ernest da gênese do conhecimento matemático seria uma explicação idealizada do mecanismo subjacente ao desenvolvimento histórico da matemática.

Ao assumir o argumento de Lakatos que afirma ser a matemática um sistema hipotético-dedutivo quase-empírico, Ernest reconhece as conseqüências dessa sua assunção, a saber, a existência de uma ligação mais íntima entre a matemática e as ciências empíricas do que as filosofias absolutistas tradicionais o permitiriam, e justifica a íntima semelhança entre teorias matemáticas e teorias científicas a partir das teorias científicas e teorias matemáticas que ele teria observado. Porém, não cita nenhuma dessas teorias. Mas esclarece os pontos comuns sobre os quais a sua afirmação repousa: *ambos os tipos de teorias contêm termos observacionais ou exemplificáveis relativamente concretos e termos teóricos, interconectados por uma ‘rede’ de ligações e relações* (*PME*, p. 59). Ernest aporta em Quine (1960) recursos para cooperar com o seu ponto de vista de que essas duas teorias estariam entrelaçadas em um sistema único. Essa unicidade justificaria naturalmente as importações mútuas entre as duas teorias, e a linguagem matemática traduziria aspectos empíricos de teorias físicas ou aspectos de métodos matemáticos não importados por teorias físicas.

Consideramos que se isso significar um reconhecimento de que o mundo material exerce um significativo papel na construção da matemática, está de acordo com o ponto de vista materialista, pelo menos com o ponto de vista de uma forma de materialismo tal como o defendido por Aleksandrov (1985). Porém, teria sido isso o que Lakatos teria querido dizer ao afirmar que a matemática é quase-empírica? Pensamos que não, dado que o quase empirismo de Lakatos parece aplicar-se exclusivamente à defesa de uma metodologia popperiana do descobrimento matemático.

Entretanto, não há maneira de impedir que uma metodologia quase-empírica não se repercuta também ao nível da ontologia matemática. Desse modo, ainda que Ernest não esclareça suficientemente o que estaria querendo dizer quando defende uma *ligação mais íntima entre a matemática e as ciências empíricas* (*PME*, p. 59), abre a possibilidade de que, nesse aspecto, possa ser visto como mais um integrante do movimento empírico contemporâneo em filosofia da matemática, caracterizado e questionado do seguinte modo por Barabashev:

> *O empirismo matemático parte da idéia de que as atividades do pesquisador matemático podem ser consideradas, com base em suas propriedades, análogas às atividades do cientista natural orientadas para a obtenção de novos conhecimentos em ciência natural. Disso decorre que o conhecimento matemático poderia ser interpretado como uma espécie de conhecimento científico natural ou conhecimento similar. Uma tal visão ampla e inicial do empirismo matemático pode ser interpretada de várias maneiras. Assim, podemos dizer que os métodos de pesquisa de um matemático e os de um cientista natural deveriam ser considerados similares ou mesmo idênticos, que os objetos da matemática e os das ciências naturais são também similares, etc. Dentre os vários tipos de empirismo, gostaríamos de destacar especialmente a concepção da matemática como uma ciência quase-empírica, devida a I. Lakatos, concepção essa que está na base de todo o espectro de teorias do empirismo matemático* (...). *Segundo o ponto de vista do quase-empirismo, qualquer teoria matemática é similar a uma teoria científica natural: ela muda sob o impacto de nova informação considerada irrefutável por qualquer pesquisador. Essas mudanças são primeiramente expressas em complicadas asserções (básicas), isto é, introduzidas na região de conhecimento (teoremas) supostamente inferidos a partir dos axiomas, e somente então os próprios axiomas são reformulados e novas construções axiomáticas emergem. Conseqüentemente, a principal tarefa que se coloca à concepção quase-empírica da matemática é o esclarecimento da natureza dessas asserções básicas (falsificadores potenciais, na terminologia de Lakatos). O problema da natureza dos falsificadores potenciais admite várias soluções que abalam fortemente a imagem da concepção elaborada dominante da matemática. Mas nem todas essas soluções são bem sucedidas. De fato, se partirmos do ponto de vista de que os falsificadores potenciais (asserções básicas) são constituídos sob a pressão dos 'fatos' matemáticos relativos aos objetos matemáticos em questão, então, será incorreto admitir que esses objetos podem ser concebidos como análogos aos naturais, isto é, neste caso, o princípio de falsificação em matemática não coincide em conteúdo com o das ciências naturais (uma vez que a intuição do objeto matemático não se reduz à sua concepção empírica: por exemplo, existem objetos matemáticos que possuem algumas propriedades impossíveis de serem conhecidas). Deve-se notar que o empirismo é uma tendência heterogênea, contendo correntes completamente diferentes, que reflete o estado de coisas na matemática contemporânea apenas de um modo vago* (...). *Penso que a filosofia da matemática segue o caminho errado; para ser mais preciso, não há nada de errado nesse caminho, mas, aqueles que o seguem, falsamente acreditam que estejam cada vez mais, se aproximando da compreensão adequada da essência da matemática: da natureza das suas construções e provas, dos fundamentos da sua eficácia, etc. Cada mudança de rumo nesse caminho é ilusoriamente vista por eles como a tábua de salvação definitiva, e exatamente no momento em que a clara compreensão da essência da matemática parece ter sido alcançada e aceita pela maioria dos pesquisadores, pensam que tal compreensão deveria ser abandonada em favor da nova concepção. Hoje, para muitos, a tal tábua de salvação definitiva é o ponto de vista do empirismo matemático: a crença comum é que, se levada à perfeição, a adequada compreensão da natureza da matemática será alcançada* (Barabashev, 1988: 516-17; 509).

Qualquer intencionalidade de Barabashev de atacar diretamente o propósito da obra de Ernest não passaria de mera conjectura, dado que Barabashev não a cita em seu artigo, e não sabemos também se ele chegou a ter contato com a mesma. O contrário também é verdadeiro, dado que Ernest também não cita Barabashev em sua obra, e não sabemos também se chegou a ter contato com tal tipo de crítica e como, talvez, a rebateria.

Para Ernest, a separação filosófica absolutista entre conhecimento *a priori* e conhecimento empírico teria mascarado e mistificado a interpenetração entre ciência e matemática. Mas esta, *em suas origens e no decorrer do seu desenvolvimento, manteve contato com o mundo físico modelando-o e esteve freqüentemente em conjunção com* *as ciências empíricas* (*PME*, p. 59). Nesse sentido, as reflexões de cunho materialista-dialético de Aleksandrov acerca da natureza da matemática (Aleksandrov, 1985) são muito convincentes, uma vez que esse autor busca evitar a visão da matemática como um mundo à parte, e mostra o seu desenvolvimento histórico como um lento processo no interior das culturas humanas. De fato, afirma Aleksandrov:

> *É fácil reconhecer o caráter abstrato da matemática* (...). *Essas abstrações, apoiadas umas nas outras, têm alcançado tal grau de generalização que perdem aparentemente toda conexão com a vida diária, e o homem médio não entende nada delas, salvo o simples fato de que 'tudo isso é incompreensível'. A realidade, naturalmente, não é essa em absoluto. Embora o conceito de espaço n-dimensional seja, sem dúvida, extremamente abstrato, ele tem todavia um conteúdo completamente real, que não é muito difícil de entender.* (...) *Em última instância, a vitalidade da matemática se deve ao fato de que, apesar de sua abstração, seus conceitos e resultados têm origem, como veremos, no mundo real e encontram muitas e diversas aplicações em outras ciências, em engenharia e em todos os aspectos práticos da vida diária* (Aleksandrov et al., 1985: 17-18; 20, vol. I).

No que se refere às ligações entre matemática e ciência a seguinte passagem de Ernest evidencia uma forte aproximação do ponto de vista defendido por Aleksandrov:

> *Acima de tudo, a aplicabilidade do conhecimento matemático é sustentada pelas íntimas relações entre matemática e ciência, tanto como corpos de conhecimento quanto como campos de pesquisa e compartilhamento de métodos e problemas. Matemática e ciência são ambas construtos sociais, e, como todo conhecimento humano, elas estão conectadas por uma função comum: a explicação da experiência no contexto do mundo físico (e social)* (*PME*, p. 60).

Essa opinião de Ernest encontra eco em muitos pensadores para os quais a aplicação da matemática ao mundo empírico se deveria a suas raízes estarem fincadas no mundo real. Assim também pensam Kitcher (1984), Wilder (1965), Aleksandrov (1985) e Piaget, dentre outros.

Segundo Ernest, o propósito da linguagem em fornecer uma descrição social útil do mundo seria algo que não mudaria, embora as convenções da própria linguagem possam ser formuladas de forma diferente e os símbolos possam ser arbitrários. A relação entre a realidade e o modelo desta fornecido pela linguagem não seria arbitrária. Isso porque, a necessidade de viabilidade faria com que algumas regras lógicas da linguagem parecessem necessárias. Como exemplo, cita o princípio de contradição, sem o qual a linguagem não funcionaria de forma viável.

Para concluir, o construtivismo social preconiza que a filosofia deveria ir além do contexto da justificação. Deveria adentrar também o contexto da descoberta. A filosofia da matemática, posta em bases adequadas, exigiria uma explicação do desenvolvimento e da gênese do conhecimento matemático, sob uma perspectiva filosófica aceitável em filosofia da ciência. O conhecimento subjetivo deveria ser considerado uma área legítima de investigação filosófica, por constituir ele a parte do conhecimento matemático novo.

Avaliação da Filosofia da Matemática de Paul Ernest

Embora o construtivismo social de Ernest, como uma filosofia da matemática, constitua uma composição a partir de apropriações do pensamento de Wittgenstein e de Lakatos, não se tratando pois, como o próprio Ernest afirma, de uma teoria original; por motivo de coerência vamos retomar as quatro questões orientadoras e, possivelmente, ir um pouco além delas na nossa avaliação, embora sabendo que as mesmas estão contempladas ao longo desse trabalho acerca do construtivismo social como uma filosofia da matemática.

1) Que papéis o contexto social desempenha na forma de se conceber e explicar a natureza do conhecimento matemático, e o grau de objetividade ou "certeza" de seus objetos, proposições e procedimentos?

Ernest estabelece três razões para a adoção da expressão *construtivismo social* e para a descrição do conhecimento matemático como uma construção social:

1.A base do conhecimento matemático são as convenções, as regras e o conhecimento lingüístico, e a linguagem é uma construção social.

2.Depois de ser publicado, são necessários processos sociais interpessoais para transformar um conhecimento matemático subjetivo e individual em conhecimento matemático objetivo e aceito.

3.A própria noção de objetividade é concebida como social.

Uma vez que o conhecimento matemático é visto como uma construção social, o termo *construção* refere-se a algo elaborado por; e quanto ao termo *social*, diz respeito a algo coletivo, isto é, que se opõe ao individual. E construção refere-se a algo elaborado ao longo de um período de tempo, num determinado espaço. Não se trata de uma revelação ou de uma descoberta, mas de uma construção, o que está de acordo com Wittgenstein; construção essa permeada de intenções, dúvidas, avanços e retrocessos, o que é bem característico da práxis humana. Nesse sentido, toda construção é social e histórica, e, sendo assim, traz em si as marcas do seu tempo.

Para o construtivismo social, o conhecimento matemático pode ser tanto subjetivo quanto objetivo. Ligar essas duas formas de conhecimento vai ser uma característica singular dessa filosofia da matemática. Mas elas são tratadas em capítulos separados na última versão do construtivismo social de Ernest, em *SCPM*, e ambas como construções sociais.

A interação que o construtivismo social estabelece entre o conhecimento subjetivo e o conhecimento objetivo mostra uma ação mútua entre eles no sentido da renovação de um através da contribuição do outro. O que configura uma interdependência. Portanto, o caminho percorrido pelo novo conhecimento matemático parte do conhecimento subjetivo, e através da publicação, chega a outros indivíduos cujos exames minuciosos, reformulação e aceitação intersubjetivos, dão ao conhecimento o caráter objetivo. Esse conhecimento objetivo é apreendido por outros indivíduos e torna-se o conhecimento subjetivo deles. Usando-o, eles criam e publicam novo conhecimento matemático, fechando, dessa forma, o ciclo que dá origem a um novo ciclo.

"Objetivo", para Ernest, é sinônimo de socialmente aceito, isto é, um indicador de que algo fora fruto de um longo e multifacetado processo de negociação. Tal processo evoca, de alguma forma, aquele período do desenvolvimento científico no qual muitas idéias disputam entre si até que vá se delineando a permanência de uma delas em detrimento das outras, fato esse explicado por Thomas Kuhn no seu *A Estrutura das revoluções científicas*.

Ernest descarta as definições tradicionais de objetividade, tais como as que a tomam como sinônimo de imutabilidade, universalidade ou supra-individualidade. Para o construtivismo social, a identificação da objetividade dos objetos da matemática com aquilo que é socialmente aceito não constitui um problema, porque essa filosofia considera o conhecimento matemático mutável e falível e a aceitação social como condição necessária e suficiente para a objetividade.

Para o construtivismo social, a matemática publicada tem o potencial de se tornar conhecimento objetivo. A aplicação do método de provas e refutações de Lakatos a essa matemática publicada seria o processo que conduziria à aceitação social e, conseqüentemente, à objetividade. O processo heurístico e o seu produto seriam objetivos, sendo, portanto, socialmente aceitos.

No construtivismo social de Ernest, o conhecimento matemático subjetivo é aquele que sustenta e renova o conhecimento objetivo, quer esse conhecimento seja matemático, lógico ou lingüístico. Sem o reconhecimento do conhecimento matemático subjetivo, a explicação global da matemática seria incompleta. Além disso, o conhecimento matemático subjetivo seria necessário para explicar as origens do conhecimento matemático novo.

Para Ernest, a convenção e o uso lingüísticos forneceriam ao conhecimento matemático os seus fundamentos seguros, e também as bases para a mudança em matemática, seja dessas convenções, seja do uso delas no tempo. A matemática, como qualquer outro domínio do conhecimento, dependeria essencialmente de pressupostos tácitos. O falibilismo nos obrigaria a admitir a presença desses pressupostos bem como a sua natureza mutável.

Para o construtivismo social,

> *o conhecimento matemático é falível por estar aberto à revisão, e é objetivo por ser socialmente aceito e por estar publicamente exposto à avaliação. O conhecimento matemático válido é o conhecimento que é aceito pelo fato de existir uma justificação pública (uma prova publicada) para o mesmo, a qual consegue sobreviver à (ou é reformulada à luz de) avaliação e críticas públicas* (*PME*, p. 54).

Já na matemática, pensamos, é o acordo consigo mesma, com os seus pressupostos, o que garante a coerência de uma teoria. Mas esse critério da coerência também poderia ser visto como uma convenção, ainda que não arbitrária.

Para Ernest, *a objetividade do conhecimento matemático é social, está baseada na aceitação de regras lingüísticas, as quais, como sabemos, são necessárias para a comunicação* (*PME*, p. 55). Assim, se é social, é compartilhada, e por consenso, aceita. Resta saber se este consenso é pacífico. Se não é uma imposição sub-reptícia ou através dos mecanismos de poder implícitos na dinâmica das relações sociais que permeiam os vários jogos lingüísticos.

> *A aceitação social também fornece a base para a existência independente dos objetos da matemática. Isso porque, subjacente às regras e verdades da matemática está o pressuposto - ou mesmo a afirmação - de que os conceitos e objetos da matemática têm uma existência objetiva* (*PME*, p. 55).

2) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da natureza e da origem dos objetos da matemática?

A tarefa do construtivismo social é esclarecer a natureza da matemática e da prática matemática de um modo completamente descritivo. As fronteiras entre a matemática e outras disciplinas se tornam menos nítidas via remoção de barreiras filosóficas tradicionais, o que faz com que a filosofia da matemática se aproxime da história e da sociologia da matemática (e da psicologia, relativamente ao conhecimento subjetivo). Assim, há o perigo, segundo Ernest, de o construtivismo social se perder nos domínios da história, da sociologia ou da psicologia. Por isso, o construtivismo social deve evitar o perigo de misturar considerações empíricas e filosóficas da matemática. Entretanto, Ernest não diz o que se deveria fazer para evitar tais perigos.

A distinção entre conhecimento objetivo e subjetivo é, segundo Ernest, uma distinção vital que deve ser mantida, tanto para o construtivismo social quanto para a filosofia em geral. Esses constituiriam dois domínios genuinamente distintos de conhecimento. O aspecto objetivo desta filosofia independe do seu aspecto subjetivo em termos de sua justificação. Com o fim de dar uma explicação construtivista social do conhecimento objetivo em matemática, Ernest estabelece um certo número de pressupostos. Acredita poder justificar a objetividade do conhecimento matemático demonstrando:

a) a objetividade daquilo a que ele se refere;

b) que o conhecimento matemático objetivo é um conhecimento tornado necessário;

c) que o construtivismo social fornece uma explicação filosófica adequada da matemática.

Isso significa que o construtivismo social deve satisfazer aos critérios de adequação para a filosofia da matemática, estabelecidos em *PME*, cap. 2.

A objetividade do conhecimento matemático e dos objetos da matemática é uma característica amplamente aceita da matemática que deve ser explicada por qualquer filosofia da matemática. Tem-se explicado que a objetividade reside no acordo público intersubjetivo, isto é, que a objetividade é social. Isso significa que o conhecimento matemático e os objetos da matemática têm existência autônoma sobre a qual há um acordo intersubjetivo, existência esta independente do conhecimento subjetivo de qualquer indivíduo.

Para Ernest, é necessário estabelecer a base compartilhada desse conhecimento que permite o acesso público a ele e garanta o acordo intersubjetivo sobre ele. Promete estender a discussão para a objetividade da ontologia da matemática a qual constitui a base para a existência autônoma dos seus objetos. A linguagem é por ele considerada o substrato que forneceria o fundamento da objetividade em matemática.

O construtivismo social de Paul Ernest não explica porque os objetos da matemática e o conhecimento matemático são passíveis de acordo intersubjetivo, o mesmo não ocorrendo com os objetos e conhecimento das demais ciências, pelo menos no mesmo grau do conhecimento matemático, sendo que todas elas estão baseadas em uma linguagem comum.

Aqui Ernest parece aproximar-se do pragmatismo, o qual preconiza que a objetividade ou aceitação do conhecimento matemático é função de sua aplicabilidade ou utilidade prática.

Já na seguinte passagem, a proximidade é com o materialismo dialético:

> *Cada um desses termos descrevem aspectos da realidade objetiva, externa ou lingüística, e fornecem, assim, uma base concreta para a 'realidade matemática'* (...) *Os objetos da matemática são tão objetivos quanto o conhecimento matemático. São objetos lingüísticos públicos, alguns concretos, mas em sua maioria abstratos* (*PME*, p. 56).
>
> *O ponto de vista do construtivismo social é o de que os objetos da matemática são construtos sociais ou artefatos culturais. Eles existem objetivamente no sentido de serem públicos e de haver um acordo intersubjetivo sobre suas propriedades e sua existência* (*PME*, p. 57).

Do ponto de vista do construtivismo social, as entidades matemáticas não possuem mais auto-subsistência permanente e duradoura do que quaisquer outros conceitos universais; de modo que se todos os homens e os seus produtos deixassem de existir, o mesmo aconteceria com os objetos da matemática. O construtivismo social implica na rejeição do platonismo.

Também a gênese do conhecimento matemático é objeto de consideração do construtivismo social. Para Ernest, o conhecimento matemático seria um construto social. O que significaria que seria um produto cultural configurado no tempo e no espaço. Explicita que esse conhecimento se desenvolveria por acréscimos das criações individuais (ou de grupos) ao corpo de conhecimento estabelecido e que as novas contribuições modificariam e desenvolveriam o corpo do conhecimento matemático existente.

Mais uma vez, é o quase-empirismo de Lakatos que, para os propósitos de Ernest, ofereceria uma explicação potencialmente frutífera da gênese do conhecimento matemático. O pensamento matemático de um indivíduo seria um pensamento subjetivo. Para tornar-se objetivo, ele deveria ser representado lingüisticamente, não necessariamente sob a forma escrita.

> *O aspecto-chave que transforma esse pensamento subjetivo em pensamento objetivo é a aceitação social, seguida de avaliação pública. Só então, pode-se dizer que esse pensamento é uma contribuição ao conhecimento matemático.* (...) *A objetividade é conferida ao pensamento matemático através de sua aceitação social, seguida de publicação* (*PME*, p. 57).

Para o construtivismo social, *o conhecimento matemático válido é o conhecimento que é aceito pelo fato de existir uma justificação pública (uma prova publicada) para o mesmo, a qual consegue sobreviver à (ou é reformulada à luz de) avaliação e críticas públicas* (*PME*, p. 54).

Seria essa concepção aplicável às geometrias não euclidianas? Durante o desenvolvimento histórico das mesmas estavam imersas em outro referencial, sendo fortemente rejeitadas pelos matemáticos. Havia as publicações, mas não havia a aceitação pública. Havia provas publicadas, mas parece que aceitação mesmo, demorou a chegar. Todas as justificativas dessas geometrias estavam lá, publicadas, em provas formais, dedutivas, válidas. Axiomas ou postulados, definições teoremas e demonstrações. A condição de conhecimento objetivo, ou socialmente aceito, como preconiza o construtivismo social, baseia-se em que tipo de aceitação? Um simples "eu aceito" ou "sim" como soe ocorrer em assembléias democráticas? Para nós, falta algum elemento forte que caracterize essa aceitação pública. Não cremos que seja saudável ou plausível fazer repousar o status de objetivo dado a um conhecimento, só na aceitação pública do mesmo. A justificativa pública como critério de aceitação e de verdade é, em muitos aspectos, subjetiva. A justificação pública envolveria poder? A coerência, a compatibilidade, a aplicabilidade ou outros critérios, menos sujeitos aos humores, devem ser os motores da aceitação pública de um conhecimento, devem ser as virtudes, digamos assim, os traços de um conhecimento que se torna público à espera de aceitação que legitime a sua objetividade.

3) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da aplicabilidade do conhecimento matemático na ciência, na tecnologia e em outros domínios do saber?

Para mostrar que o construtivismo social é adequado, partindo de uma provocação de Wigner, Ernest se baseia nos seguintes fatos, considerados por ele explicativos da inquestionável eficácia da aplicabilidade da matemática na ciência:

1) *a matemática tem os seus fundamentos em nossa linguagem natural empírica;*
2) *o quase-empirismo da matemática significa que ela não é tão diferente da ciência empírica em qualquer sentido* (*PME*, p. 58).

A primeira resposta ele considera já posta ao longo de suas reflexões e concluíra que o conhecimento matemático repousa sobre as regras e convenções da linguagem natural. Existiria um rico vocabulário matemático diretamente aplicável ao mundo de nossa experiência. A linguagem natural incluiria regras e convenções sobre a aplicação desse vocabulário. Deste, muitos termos seriam comuns à matemática e à ciência e permitir-nos-iam usar a classificação e a quantificação para descrever eventos e objetos do mundo. De fato, segundo Ernest,

Os usos cotidiano e científico da linguagem natural são a característica básica do papel dessa linguagem, e em tais usos os conceitos matemáticos envolvidos desempenham um papel essencial (…) *as raízes lingüísticas da matemática dotam-na de aplicações (explica seu potencial de aplicabilidade)* (*PME*, p. 59).

Segundo ele, quando se aprendesse a linguagem matemática estar-se-ia também aprendendo um corpo implícito de conhecimentos e regras. A comunicação lingüística pressuporia a aceitação das regras e convenções básicas da matemática e da lógica. A não-aceitação dessas regras implícitas, isto é, implicitamente acordadas, impediria a comunicação.

Ernest desenvolve um argumento adicional à explicação de Wittgenstein, a saber - o de que a competência adquirida na linguagem natural necessariamente envolveria a aquisição de um amplo corpo implícito de conhecimento.

Quando Ernest define a objetividade da matemática como sendo o que é aceito socialmente, atribui ao conhecimento matemático um relativismo exacerbado. Para abrandar essa crítica, ele se reporta à aplicação da matemática como redutor desse relativismo exagerado. Para nós, as linguagens ordinárias se constituem muito mais com o propósito de descrever a realidade do que de explicá-la. E muito mais como necessidade de garantir a intercomunicação do que de explicar.

Tanto a linguagem como a matemática são altamente restritivas devido à necessidade de descrever, quantificar e predizer de modo eficaz eventos dos mundos físico e humano. Além disso, a matemática é limitada pelo seu desenvolvimento através de conjecturas lógicas internas, provas e refutações (*PME*, p. 61).

O conhecimento matemático seria relativo porque a sua objetividade estaria baseada no acordo social. Mas o seu relativismo não o tornaria igual ou intercambiável com outros sistemas sociais de crenças, a menos que esses sistemas satisfizessem aos critérios de fornecer uma descrição viável de aspectos da realidade empírica e social, e crescessem e se desenvolvessem através de conjecturas lógicas internas, provas e refutações.

4) Que papéis o contexto social desempenha na explicação da atividade matemática dos matemáticos no presente e no passado?

De acordo com Lakatos a história da matemática, por ser a história da evolução do conhecimento matemático, tem um papel constitutivo na filosofia da matemática, diz Ernest. Mas na lógica da descoberta matemática de Lakatos, as teorias matemáticas formais são reconstruções racionais da história, onde a estrutura genética dá lugar à lógica justificatória.

Em Wittgenstein o conhecimento matemático repousa nos jogos lingüísticos ancorados nas formas de vida, ou seja, no seio das práticas sociais, das comunidades humanas. Contudo, a história da matemática é um conhecimento não considerado na filosofia da matemática de Wittgenstein. Como já dissemos, Ernest considera uma fraqueza a ausência de qualquer dimensão histórica na filosofia da matemática wittgensteiniana.

Para superar a "estreita" dimensão histórica na filosofia da matemática de Lakatos e a sua completa ausência na filosofia da matemática de Wittgenstein, o construtivismo social de Ernest adota uma abordagem social para a epistemologia e uma abordagem interdisciplinar para o conhecimento. E o fato de explicar o conhecimento matemático de modo naturalístico é principalmente uma preocupação filosófica antes que sociológica.

A abordagem interdisciplinar para a filosofia da matemática adotada por Ernest ele a justifica na necessidade de oferecer uma perspectiva adequada completamente descritiva da matemática (*SCPM*, p. 265).

Seguindo além das quatro questões orientadoras, o construtivismo social de Ernest foi inicialmente alicerçado no construtivismo radical de Glasersfeld e numa concepção construtivista piagetiana da mente, como aparece em *PME*, e depois muda para uma visão social baseada em Mead, Vygotsky e outros, conforme ele justifica em *SCPM*.

Talvez, Ernest precise debruçar-se uma terceira vez sobre a sua obra (*PME* foi a primeira, *SCPM* a segunda) para, dessa vez, elidir os excessos. Isso porque, acreditamos, *SCPM* contém as pedras e os tijolos; mas falta, ainda, uma argamassa que dê solidez e harmonia à construção. Não se trata de uma construção original. Mas isso não exime Ernest de elidir aspectos que sobram na sua construção. Podemos dizer que há um certo descuido em algumas partes, como mostramos na comparação que fizemos, entre os capítulos 1 e 2 de *PME* e os respectivos de *SCPM*.

Acreditamos que, se efetivado esse enxugamento do texto, *SCPM* seria seguramente recomendado mais amplamente e cumpriria o seu papel. Entretanto, no estado atual, ainda é um texto rico em matéria de informações, pois nos remete ao vasto, rico e milenar campo da filosofia da matemática. E nos situa também no recente e emergente movimento filosófico que enriquece a filosofia tradicional da matemática, a partir de outras perspectivas epistemológicas, com considerações psicológicas, históricas e sociais.

É interessante perceber os propósitos com que Paul Ernest se pôs a elaborar ou reelaborar as suas reflexões em torno do que chamou de 'construtivismo social como uma filosofia da matemática'. Suas opiniões nos mostram que o desconforto psicológico está presente nos adeptos das filosofias tradicionais da matemática desde muito antes de Gödel. Pensamos que, talvez, já estivesse presente em Euclides, quando laborava nos seus *Elementos*, o que pode ser atestado pela forma como ele procedeu ao desenvolvimento do seu sistema, evitando, dizem, a utilização do postulado das paralelas por um bom tempo.

A opção de trabalho reflexivo entre o falibilismo e o absolutismo possibilitou a Ernest elementos para um futuro passo em que essa tensão entre absolutismo e falibilismo, ainda que permaneça, abra alguma janela para um pensamento que dê conta dessas antagônicas posturas e possa situá-las num novo quadro epistemológico que faça dessa relação uma fonte de possibilidades de criação no mundo do pensamento matemático.

Há algo no trabalho de Ernest que ele não esclarece ao longo do seu texto. Wittgenstein é visto como um convencionalista radical e como um finitista estrito. Como combinar essa postura com o quase-empirismo de Lakatos, tendo-se presente que ele faz críticas indiretas ou implícitas aos convencionalistas em *Provas e refutações*? Tais críticas estão presentes no início do capítulo sobre a filosofia da matemática de Lakatos, no qual estabelecemos alguns paralelos entre Wittgenstein e Lakatos.

Wittgenstein situa o conhecimento em geral e o conhecimento matemático nos jogos lingüísticos compartilhados e nas práticas sociais. Ele não se encaixa em nenhuma tradição filosófica da matemática, apesar de sua construção conter elementos de todas elas, como afirma Klenk (1976), em seus estudos sobre a filosofia da matemática wittgensteiniana. Em que consiste, pois, a integração ou interação por parte de Ernest, dessas duas filosofias, para constituírem a base de sua doutrina? Não conseguimos detectar isso de forma clara; sobretudo porque os pensamentos de Wittgenstein e de Lakatos não convergem no que se refere à filosofia da matemática.

O tipo de racionalidade que se configura na matemática nos parece, às vezes, tão natural, tão imperioso ao nosso modo de vida que, nos nossos excessos de liberdade, chegamos a considerar plausíveis as perguntas: será que os seres humanos fazem matemática porque eles têm um sistema nervoso central complexo com tais e tais características? Esse tipo de racionalidade não seria algo genético, inato? Acaso, se existirem em outros sistemas seres com um sistema nervoso central com as características do nosso, inevitavelmente eles estarão produzindo uma matemática com as mesmas características da nossa? Essas especulações, em nada científicas, pensamos, nos levam a restringir nossas considerações a aspectos mais direta ou indiretamente controláveis que envolvem o conhecimento humano até o momento. Lembramos aqui que, diferentemente de Wittgenstein, quando afirmava que o matemático era um construtor e não um descobridor, uma das nossas primeiras dúvidas ao redigirmos um incipiente texto para nossos primeiros alunos de Metodologia para o Ensino da Matemática, consistia na pergunta para a qual, acreditamos, nunca teremos uma resposta consensual ou incontrovertida: a matemática é uma invenção ou uma descoberta? Isso porque, a natureza relativista das respostas estará sempre associada a sistemas político-axiológicos incomensuráveis de crenças e convicções pessoais (isto é, de cada investigador) e/ou institucionais (isto é, dos diferentes grupos que constituem, a cada momento, as chamadas "comunidades científicas"), sendo, é claro, esse nosso argumento da impossibilidade de se atingir um consenso no campo das ciências humanas (e é nele que estamos incluindo a própria filosofia da matemática) tão controvertido quanto a própria crença que, por meio dele, intencionamos fundamentar.

De fato, se respondermos que a matemática é uma descoberta, nos aproximaremos de Platão e, ainda que pudéssemos "inventar", (ou também "descobrir"?) muitas filosofias da matemática "diferentes", baseadas numa ontologia de seres abstratos, não poderíamos, a rigor, produzir histórias da matemática, dado que os objetos matemáticos, de acordo com tal ponto de vista, não são produzidos no tempo. Zúñiga (1987) caracteriza do seguinte modo uma "história" platônica:

> *a história da matemática reproduziria os momentos e como foram descobertas as verdades, mas trataria aqui de processos eminentemente mentais nos quais a realidade natural e social pouco teria a ver. Não se trataria de um processo de criação e modificação de resultados em relação com o mundo e a mente dos homens, mas de uma apreensão espiritual racional (ainda que fosse*

dedutiva) de realidades atemporais e independentes.(...) A história jogaria um papel importante mas seria uma história de vivências psicológicas, recursos e mecanismos mentais, de situações motivantes das apreensões dos objetos abstratos (Zúñiga, 1987: 10).

Se, ao contrário, admitirmos que a matemática seja uma invenção, então, ela seria uma obra humana, isto é, uma produção histórico-social, e nos empenharíamos em evidenciar as marcas humanas nesse produto. A matemática não pareceria mesmo obra dos homens para um neófito que ingressasse no mundo matemático através do estilo euclidiano.

Somos seres corporificados. E nos fazemos presentes no mundo através da nossa corporeidade. Poderíamos existir e sermos invisíveis uns para os outros. Mas não é sob essa forma abstrata que estamos no mundo e dele participamos. E a existência material do mundo onde estamos (mais uma das questões interminavelmente não consensuais) e do outro com quem estamos (outra de tais questões), atira-nos nesse caminho infindável de elaboração das nossas relações com esses dados. Tudo com o que lidamos na nossa existência está condicionado por esses dados, ou fatos ou informações, ou o nome que quisermos lhes dar. Isso importa menos. É plausível que não tenhamos contato direto nem com nós mesmos. O com o que lidamos é-nos dado pelas nossas disposições físicas, emocionais e espirituais adquiridas nos nossos processos todos, desde quando habitávamos em forma mineral uma estrela cuja existência no infinito do passado ainda não conseguimos atestar (e esse ponto de vista controvertido poderia, para muitos, soar provocador).

Uma vez em meio a esse mar de relações impermanentes, que se reproduz no movimento das coisas e nos nossos movimentos, a construção do absolutismo como referência, ou bússola, se constituiu numa tábua segura para o nosso ser, carente de estabilidade e permanência. Imaginemos isso nas civilizações antigas para as quais a expectativa de vida era quase a metade da atual. O absolutismo e, portanto, a precisão, o rigor, é uma via somente, para as nossas várias e, na maioria das vezes, inacessíveis e desconhecidas dimensões. Só a título de exemplo, o que sabemos das nossas memórias, dos nossos sonhos, o que sabemos de nós mesmos? Sem falar que, do pouco que sabemos, só uma ínfima fração conseguimos, ao final de muitas lutas internas e externas, elaborar com alguma relativa clareza.

Por isso, é em considerações genuinamente humanas, antropomórficas – só acessamos as coisas naquilo que delas se mostra para nós em medidas antropomórficas –, que está o estabelecimento de uma relação saudável nossa com o produto das nossas relações múltiplas: o conhecimento, na sua elaboração e na sua socialização. Não será, portanto, no situar o conhecimento na esfera do divino, ou na do inacessível, ou na do absoluto ou, ainda, na de um mundo pré-existente ao sujeito que o tornará mais explicável. Mesmo porque, somos nós que lá o colocamos. Se somos nós mesmos que produzimos nossas explicações e teorias acerca do conhecimento, por que não admitir ser esse último também uma produção histórico-social humana e, portanto, nem invenção e nem descoberta? Para os que estiverem dispostos a admitir essa terceira alternativa, coloca-se, reiteradamente, a tarefa adicional iniciada por Prometeu, de roubar dos deuses o fogo sagrado do conhecimento e trazê-lo de volta ao convívio humano (Restivo 1993: 3). E isso certos poetas o fazem muito bem. Como o fazem certos artistas, certos místicos e certos homens de ciência. Isso também fazem certas pessoas comuns, e próximas, como os nossos avós e nossos vizinhos, a nos contarem fatos e lendas de suas aventuras na Terra. Isso fazem alguns de nossos amigos ou inimigos em suas críticas duras e sinceras. Isso fazemos alguns de nós, com os nossos alunos, quando as bases das relações são bases verdadeiramente humanas.

O falibilismo é visto por Ernest como admissível para considerações e discussões críticas ao lado das perspectivas absolutistas. E uma reconceptualização da filosofia da matemática que admita essas duas perspectivas é o que ele afirma buscar (*SCPM*, p. 56).

Não somos muito favoráveis a uma estratégia de elaboração do conhecimento através de dualismos, como o faz Ernest (*PME*, p. 18-19; *SCPM*, p. 10-11). Acreditamos que deva existir uma forma de refletir questões de conhecimento sem uma marcante oposição de duais. Mas, com a estrutura lógica de pensamento que se estabeleceu em nossos jogos lingüísticos, seria bastante onerosa uma posição inclinada para a dialética. Mas qual dialética? É claro que não a de Platão. E também não a de Hegel, uma vez que não acreditamos que o movimento da produção do conhecimento ocorra sempre, inevitavelmente e previsivelmente, de forma estruturada segundo a "lógica trifásica" reiterada e contínua de teses-antíteses-sínteses. Essa seria uma dialética que daria conta da acomodação de duais para a efetivação de nem sempre férteis sínteses. A água, composta de oxigênio e hidrogênio, dois gases altamente inflamáveis, é uma "boa e bela síntese" que tem como uma de suas utilidades apagar o fogo. Mas também, como uma de suas "más e trágicas sínteses" inundar cidades e afogar pessoas... Nenhuma dialética estruturada e racionalizada, que não admita a possibilidade de descontinuidades, imprevisibilidades, casualidades e múltiplas opções poderá salvar a ética, a estética, a lógica, a epistemologia ou a sociologia na explicação do movimento de produção do conhecimento.

Se considerarmos que o construtivismo social de Paul Ernest é uma construção sustentada por duas filosofias sociais da matemática, a saber, a filosofia da matemática de Wittgenstein e a filosofia da matemática de Lakatos, é natural que concluamos que se trata de uma filosofia social da matemática. Porque, embora com as suas singularidades, tal elaboração de Ernest tem como central elementos que consideramos definidores de uma filosofia social da matemática.

O construtivismo social tem a linguagem como fundamento último do conhecimento matemático e considera a construção social do conhecimento objetivo e subjetivo. É uma filosofia descritiva, tem a história como central e dá igual importância aos processos de descoberta e de justificação do conhecimento matemático. Preocupa-se também o construtivismo social com os processos de transmissão do conhecimento.

O esquema do processo de transformação do conhecimento subjetivo em conhecimento objetivo passa pela publicação (isto é, tornar público, socializar) e por aceitação pública (isto é, objetivação através de uma aceitação pública consensual mediante crítica). Daí é forte o traço social nesse processo de transformação do conhecimento subjetivo em conhecimento objetivo, que nos parece análogo ao processo de transformação da matemática informal em matemática formal. Há outra característica interessante na concepção de Ernest que é o papel de destaque dado à conversação, cujo papel é central nos processos de criação e transmissão do conhecimento matemático.

A abordagem que Ernest faz da filosofia da matemática de Lakatos é diferente da abordagem que ele faz da filosofia da matemática de Wittgenstein. Talvez, porque já revelara a sua preferência por este último.

Assim como ocorrera com o seu estudo de Wittgenstein, Ernest dedicara um certo espaço do estudo de Lakatos a informações biográficas e a alguns aspectos de sua vida intelectual. É interessante perceber esse cuidado que ele teve em não separar a vida do filósofo, durante um certo período um tanto politicamente agitada, da sua vida intelectual. Porque foi devido ao seu movimento de fuga da Hungria para a Inglaterra que ele chegou ao King's College, em Cambridge, e começou a desenvolver as suas pesquisas em filosofia da matemática. Esse trabalho resultou na sua Tese de Doutorado denominada *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*.

Apesar de considerar que todo o conhecimento é social, e que a história é central para a perspectiva construtivista social, Ernest não discute as relações de poder presentes nos processos de negociação que caracterizam o estabelecimento de um conhecimento como objetivo. Esse aspecto pode ser visto como uma falha do seu sistema. Porém, considerando os fundamentos de sua doutrina, nem Lakatos discute acerca disso e muito menos Wittgenstein. Se bem que em *Provas e refutações* o cenário de construção do texto seja uma sala de aula fictícia, com alunos e professor discutindo em torno de um determinado tema, considerando o desenvolvimento histórico de um conceito, temos a impressão de que nessa obra predomina sempre a autoridade do professor, com sua erudição. Fatores sociais externos não são considerados por Wittgenstein nem por Lakatos. Deve ser por isso que Pier Luigi Ferrari, em *La Première Université D'Été Européenne*, discutindo relações entre filosofia da matemática e os paradigmas da educação matemática (em particular o construtivismo), considera o construtivismo social de Paul Ernest de caráter absolutista (Ferrari, 1993: 415-23).

No nosso modo de entender, o conhecimento matemático não cresce e se transforma só através de conjecturas e refutações utilizando uma lógica de descoberta em matemática. A crítica tem o seu papel, mas ela não pode, por si só, explicar tudo. Problemas postos por outras áreas do conhecimento, problemas postos por meio de uma nova forma de argumentação, fatores externos tais como questões de origem social, política e econômica não só pressionam a matemática a se modificar qualitativamente como também direcionam essas modificações. Piaget & Garcia (1987) em *Psicogênese e história da ciência* (p. 234) ratificam esse ponto de vista quando afirmam que a ciência se desenvolve ora impulsionada por paradigmas *epistêmicos*, ora por paradigmas *sociais*.

O construtivismo social como uma filosofia da matemática vê a matemática como uma construção social. Baseia-se no convencionalismo, já que considera que a linguagem, as regras e os acordos humanos desempenham um papel chave no estabelecimento e justificação das verdades matemáticas. Também se baseia na tese filosófica de Lakatos de que o conhecimento cresce por meio de conjecturas e refutações. Paul Ernest fora claro ao dizer que o construtivismo social não era uma teoria original e estava assentado em contribuições da psicologia genética, do construtivismo radical e teorias da aprendizagem. Como o conhecimento objetivo e o conhecimento subjetivo são igualmente preocupações do construtivismo social, o papel do construtivismo radical de Glasersfeld e das idéias de Piaget na elaboração de Ernest é amenizado porque, numa etapa posterior da sua elaboração, ele faz apropriação de uma concepção mais social da mente.

Tal elaboração de Ernest, referida no parágrafo anterior, acontece em *SCPM*. O construtivismo radical de Glasersfeld é elaborado a partir de idéias de Piaget e de Ceccato. Só a título de ilustração, para o construtivismo radical, toda concepção, todo conhecimento e toda compreensão são sempre construção e interpretação do sujeito. O caráter básico da epistemologia construtivista, segundo Glasersfeld, é que o mundo construído é um mundo experiencial que se constitui pelas experiências individuais que se mostrem viáveis ao sujeito isolado dos demais, e não tem nenhuma pretensão à verdade, no sentido de correspondência com uma realidade ontológica (Glasersfeld, 1994: 35).

A fim de melhor caracterizar o modo como o indivíduo constrói conhecimento, segundo o construtivismo radical de Glasersfeld, e explicitar a concepção pragmática subjetivista subjacente a esse ponto de vista, que substitui a concepção clássica da verdade como correspondência pela noção pragmática de viabilidade (que é central para a teoria construtivista radical do conhecimento), é interessante destacar aqui a seguinte passagem presente na introdução do livro *A realidade inventada: como sabemos o que cremos saber?*, devida ao filósofo e psicólogo Paul Watzlawick, em referência ao artigo "Introdução ao Construtivismo Radical", escrito por Glasersfeld e incorporado a esse livro:

> *A distinção básica que Ernest von Glasersfeld estabelece entre* ***calçar*** *e* ***corresponde****r constitui um dos pontos-chave da "Introdução ao Construtivismo Radical". Nesse ensaio o autor desenvolve a audaciosa (e em princípio talvez desagradável) idéia de que na melhor das hipóteses só podemos saber acerca da realidade o que esta* ***não é*** (...). *Vale a pena* (...) *apresentá-la em forma de metáfora. O capitão de um navio deve atravessar um estreito durante uma noite escura e tempestuosa, sem conhecer sua configuração, sem carta náutica nem farol, sem nenhum instrumento de navegação. Ou naufragará ou, se conseguir atravessar o estreito, voltará a navegar em segurança. Se se chocar contra os rochedos e o capitão perder a embarcação e a vida, o naufrágio será a comprovação de que a rota escolhida não era a adequada para a travessia do estreito. Por assim dizer, o capitão terá descoberto o que a rota* ***não*** *era. Pelo contrário, se chegar são e salvo, ficará apenas demonstrado que a rota escolhida não o levou a chocar-se, literalmente, com nenhum rochedo. O êxito não ensina nada ao capitão sobre a verdadeira configuração do estreito: ele não sabe se navegou o tempo todo em segurança ou se a cada momento esteve na iminência da catástrofe: cruzou o estreito como um cego. Seu roteiro conformou-se às condições (por ele desconhecidas) do local, mas não correspondia necessariamente a ele (se se entender esse termo na acepção de Von Glasersfeld), isto é, a rota não correspondia à verdadeira natureza do estreito. É fácil perceber que a verdadeira configuração do estreito talvez permitisse roteiros mais curtos e mais seguros* (Watzlawick, 1994: 22-23, destaques do autor).

Como se percebe, o pressuposto básico subjacente ao argumento central do pragmatismo contemporâneo relativo à questão da objetividade do conhecimento centra-se na crença de que, no processo de construção do conhecimento (e em decorrência disso, também no de avaliação do valor cognitivo das proposições), é impossível se chegar à verdadeira natureza dos fenômenos (se é que, para essa corrente filosófica os fenômenos ou a realidade possuem, a rigor, uma natureza intrínseca ou subjacente a ser atingida ou explicada). Daí, se a realidade ou os fenômenos que nela se manifestam não possuem, em si e por si mesmos, uma natureza última que os caracterize de forma distinguível e definitiva, então, seria ingênuo pensar que existiria uma linguagem una ou uma única forma de descrever a realidade e os fenômenos. Dado que, muitas vezes, sentimos que Ernest se inclina a adotar uma linha de argumentação de natureza pragmática em relação à discussão e à aplicação dos seus critérios de adequação na avaliação de diferentes filosofias da matemática, gostaríamos de prolongar um pouco mais a caracterização desse ponto de vista voltando-nos, agora, à argumentação utilizada por um dos filósofos contemporâneos mais destacados filiado a essa tendência – o americano Richard Rorty – em uma polêmica que estabeleceu com o biólogo Edward O. Wilson em torno da questão relativa à unidade do conhecimento, defendida por este último em seu livro *Consiliência: a unidade do conhecimento.* Nesse livro, Wilson levantou e defendeu o argumento de que seria *um erro pensar que existem inúmeros tipos de explicações apropriadas às perspectivas das disciplinas individuais, pois* *existe intrinsecamente apenas uma classe de explicação que atravessa as escalas de tempo e de complexidade para unir os fatos díspares das disciplinas por meio da concordância, da percepção de uma rede inconsútil de causas e efeitos*. Em uma resenha desse livro de Wilson, denominada "Contra a Unidade", escrita para o jornal *Folha de São Paulo*, Rorty replica do seguinte modo esse argumento de Wilson:

> *Por que uma rede inconsútil de causas e efeitos acarretaria a possibilidade ou a desejabilidade de uma rede explicativa também inconsútil? Para nós, pragmatistas, pode e deve haver milhares de formas de descrever as coisas e as pessoas – tantas quantos forem os propósitos que tivermos em relação às coisas e às pessoas –; mas essa peculiaridade não é problemática, não suscita problemas filosóficos e nem fragmenta o conhecimento. As disciplinas acadêmicas não são e nem devem ser reflexos do mundo real; devem sim propiciar as maneiras de fazer as coisas no mundo real, de tecer a grande rede inconsútil das causas, de modo que os objetivos humanos sejam alcançados. A realidade é una, mas as descrições dela são incontáveis* (...) *porque os seres humanos têm e devem ter vários objetivos diversos* (...). *Não devemos arrancar os cabelos por nossa infortunada cultura desunida. Não devemos eliminar as barreiras entre as disciplinas. Aliás, duvido da existência dessas barreiras* (...). *As ciências naturais nos dizem como funcionam as coisas e as pessoas e com isso nos possibilitam adaptar coisas e pessoas às nossas necessidades. As humanidades não nos dizem como algo funciona, mas sugerem o que fazer com as coisas e as pessoas que já temos e quais novos tipos de coisas e pessoas deveríamos tentar conceber. Se sabemos o que queremos, mas não sabemos como consegui-lo, recorremos às ciências naturais. Recorremos às humanidades ou às artes quando não estamos certos do que queremos* (Rorty, *Folha de São Paulo*, 22/03/1998, caderno "Mais", p. 7-8).

Como se vê, não importa se a realidade possui ou não uma natureza ou estrutura intrínseca ou subjacente que o conhecimento deveria tentar captar e descrever; o que importa, é que o conhecimento nos aponte caminhos múltiplos de como lidar com essa realidade a fim de que necessidades e propósitos humanos sejam atingidos. É claro que, do nosso ponto de vista, não se trata de negar nem a existência de necessidades e propósitos e nem o fato de ser a viabilidade uma noção humana relativa, a menos que acreditássemos que a natureza também tivesse propósitos ou que algum ser que nos fosse inacessível governasse o curso dos fenômenos naturais e sociais dotando-os de propósitos. Mas o dilema epistemológico que se apresenta, em relação ao qual se posicionam diferentemente pragmatistas e materialistas, se coloca do seguinte modo: uma proposição é verdadeira porque se mostra útil e viável no atingimento de necessidades e propósitos humanos ou se mostra útil e viável justamente por ser verdadeira?

Acreditamos, desse modo, que a mera substituição da noção de verdade pela noção de viabilidade, como o fazem os pragmáticos, não elimina, de forma alguma, o dilema relativo à questão da objetividade do conhecimento. E daí, a concepção clássica da verdade como correspondência, apesar de clássica, permanece ainda no centro dos debates relativos à objetividade do conhecimento.

O fato de o conhecimento matemático, como qualquer outro tipo de conhecimento objetivo, dever ser lingüisticamente expresso, não implica que o seu fundamento seja lingüístico, como pensa Ernest. Isso porque, não nos sentimos à vontade em admitir que o fato de um sentimento poder ser lingüisticamente expresso signifique que o seu fundamento seja lingüístico, o mesmo ocorrendo com o conhecimento objetivo, cuja gênese ainda não é consensual.

Ernest argumenta que a linguagem natural e a linguagem matemática informal são ricas em regras, convenções e significados matemáticos implícitos. E que o mesmo poderia ser dito em relação à lógica, sendo o nosso uso de termos-chave lógicos estritamente governado por regras lingüísticas.

Não cremos que seja assim. As regras se constituíram bem depois da linguagem. E só a partir do estabelecimento das regras é que se passou a perscrutar a linguagem através desses modelos. A gramática (ou a sua institucionalização) sempre é uma etapa posterior na constituição de uma língua natural. Em geral, o que a gramática faz é legitimar um uso que já é comum numa língua. A gramática põe rédeas na língua, e a impede de refletir, num certo sentido, a dinâmica das relações sociais. Nunca a gramática de uma língua se antecipa ao seu uso. Ela se constitui sempre *a posteriori*.

Quando Ernest afirma que (...) *toda a base da argumentação racional repousaria sobre as regras compartilhadas da linguagem* (*PME,* p. 52*)*, ocorre-nos algumas questões: o que são essas regras compartilhadas da linguagem? Como é esse processo de compartilhamento de regras de linguagem? Há ou pode haver alguma imposição, ou trata-se de um consenso pacífico? Não nos parece que Ernest se preocupe em responder, ainda que de forma indireta, essas questões.

Quando Ernest reflete (a propósito da álgebra booleana), acerca da possibilidade de *podermos suspender nossas regras do dia a dia para certos segmentos da linguagem e considerar as conseqüências de convenções hipotéticas, isto é, de convenções contrárias ou distintas daquelas presentes no uso da linguagem natural* (*PME*, p. 52), consideramos que essa possibilidade de suspensão se dá em função de problemas que não seriam exclusivamente de natureza lingüística. Um exemplo são as geometrias não-euclidianas.

Pensamos que, em geral, convenções contrárias às estabelecidas no âmbito da linguagem natural se configuram mais no âmbito da prática científica. Talvez, se estivermos corretos, isso se deva ao grau de abstração sempre presente, e de forma cada vez mais sofisticada, nos jogos lingüísticos próprios da ciência. Por exemplo, o axioma *o todo é maior do que cada uma de suas partes* só é válido para conjuntos finitos (isso para ficarmos só no âmbito da matemática), e já não faz sentido se estivermos lidando com conjuntos infinitos.

Quanto à mudança que Boole provocou na álgebra, pensamos que teve como ponto de partida certos segmentos da linguagem já próprios de uma ciência: a lógica, ou a matemática. Ele não partiu da linguagem natural, mas de uma especialização que já havia sobre essa linguagem. E não sabemos que nível de especialização foi o efetivado por Boole, se considerarmos que há uma hierarquia de níveis de abstração, a partir da linguagem natural.

Há uma crítica, sucinta mas significativa, ao trabalho de Ernest, realizada por Ferrari (1993) em *Constructivism, education and the philosophy of mathematics*. A título de exemplo, vamos tratar aqui apenas da crítica de Ferrari ao ponto de vista de Ernest de que a lógica matemática estaria baseada na linguagem natural.

Para o construtivismo social é a linguagem natural que garantiria a objetividade da matemática e da lógica. Ferrari discorda da afirmação de Ernest de que não se poderia questionar fatos tais como ‘A e B implica A’ ou ‘1+1=2’, sem que isso destruísse a possibilidade de comunicação:

> *Estas fórmulas valem em alguns ‘jogos de linguagem’; mas não em outros. Duvido que elas permaneçam em grande número em nossa meta-linguagem. Por que deveríamos ser compelidos a conduzir nosso raciocínio dentro da estrutura da lógica clássica?* (Ferrari, 1993: 419).

Ferrari discorda da opinião de que os axiomas e regras da lógica matemática devam refletir o uso e o significado dos termos envolvidos. O uso, no dia a dia, de palavras tais como ‘não’, ‘e’, ‘se... então...’ não é o mesmo que o uso que se faz delas na lógica clássica. No cálculo proposicional clássico, observa ele, a verdade de uma afirmação complexa é uma função da verdade das afirmações atômicas envolvidas, o que não ocorre na linguagem natural, a qual tem uma semântica diferente baseada em fatores que incluem o contexto, propósitos e cultura compartilhada:

> *Há evidência que sustenta a idéia de que o raciocínio humano é conteúdo subordinado e não baseado em regras. A visão do raciocínio assentado em regras compartilhadas (assumidas) da linguagem (verbal) contrasta com o crescente e bem sucedido interesse das pesquisas sobre raciocínio visual. Por outro lado, a idéia de que a competência lógica é a base para o conhecimento matemático tem sido refutada por análise epistemológica e constatações experimentais. Não há necessidade de relatar aqui os fracassos da maioria das tentativas de se ensinar lógica (matemática) a crianças como se fosse uma ferramenta para o raciocínio ou resolução de problemas. A propósito, o construtivismo social parece mais prescritivo do que descritivo a este respeito, quando ele rejeita (ou faz vista grossa às) formas de raciocínio amplamente usadas e estudadas mesmo por professores e pesquisadores construtivistas. Apesar das raízes sociais do conhecimento matemático, o modelo de raciocínio proposto é absolutista e separado da experiência do dia a dia* (Ferrari, 1993: 420).

Faz sentido fazermos referência aqui a dois trabalhos nos quais aparecem argumentos que convergem com os de Ferrari, acima considerados. Trata-se do de Kasner e Newman (1968) e do de Luria (1987). No caso do livro de Kasner e Newman, há um episódio interessante acerca de acaso e probabilidade, no qual, a partir de um diálogo entre Sherlock Holmes e seu assistente Watson, os autores concluem que, no dia a dia, utilizamos mais o *raciocínio por dedução provável* que é uma forma de raciocínio semelhante ao procedimento formal do silogismo mas menos rígido do que este último. Os autores concluem, nas suas considerações acerca desse procedimento, que

> *É, portanto, uma relação de probabilidade, não de certeza, que obtemos da maioria de nossas premissas e conclusões. Temos* certeza *de que uma moeda cairá após ser jogada para o ar. Temos, da mesma forma, certeza de que não poderemos tirar uma bola preta de uma urna que só contém bolas brancas. Mas a maior parte do que acreditamos não chega a atingir a certeza, embora varie de intensidade de crença. Assim, podemos estar quase certos de que uma moeda comum não dará "cara" 100 vezes seguidas. Ou vagamente supomos que ganharemos o grande prêmio dos próximos* sweepstakes *[apostas]* (Kasner e Newman, 1968: 215-18).

Já Luria, em um dos capítulos de seu livro citado, parte de estudos realizados na Ásia Central acerca das peculiaridades dos processos cognitivos em pessoas que haviam sofrido uma rápida e radical transformação das condições histórico-sociais de vida. Refletindo sobre a linguagem e o pensamento discursivo e acerca da operação dedutiva, ele considera que

> *O enfoque científico do problema do pensamento é impossível sem partir de uma investigação detalhada das formas de vida social que caracterizam uma ou outra etapa do desenvolvimento histórico e sem se vincular as modificações na estrutura dos processos intelectuais com as transformações das formas de prática social, que são a condição básica para a formação de novos tipos de pensamento* (Luria, 1987: 209).

A experiência, em torno da qual Luria reflete, consistiu na apresentação de um silogismo às pessoas analfabetas, no intuito de que chegassem a algum juízo acerca da conclusão. Segundo Luria, *era típico inclusive dos sujeitos que chegavam à conclusão correta, fazerem imediatamente uma observação, que parecia insubstancial, referida à sua experiência pessoal: "sim, isto eu sei ..." (*p. 209-10) e aduziam uma experiência própria para confirmar a conclusão. Não chegavam à conclusão pela via lógica, mas o silogismo mobilizava nesses sujeitos a experiência própria, os conhecimentos próprios.

Quanto aos silogismos que apresentavam situações que os sujeitos não possuíam referente em sua experiência de vida, negavam-se a responder, justificando não conhecer a componente do silogismo (lugar, pessoa, etc.). Isso porque, a premissa teórica não era possuidora de uma significação geral para esses sujeitos.

Essa limitação do pensamento, segundo Luria, era superada nas camadas da população que já tinham começado a se alfabetizar, e que tomavam parte ativa nas formas de economia coletiva que acabavam de criar. Já no grupo de sujeitos que estavam adiantados na escolarização, a conclusão do silogismo era uma operação que dominavam completamente.

Assim, os dados reproduzidos por Luria levaram-no à conclusão de que

> *As operações de conclusão lógica são o produto do desenvolvimento histórico e não propriedades originárias do pensamento; nos primeiros degraus do desenvolvimento social, nos quais predominam as formas concreto-imediatas de atividade prática, as operações lógico-formais de conclusão limitam-se aos dados da experiência imediata. A transformação radical da forma social de produção, a liquidação do analfabetismo, a inclusão nas formas mais desenvolvidas de cultura conduzem, não somente à ampliação do círculo de conceitos e ao domínio de formas mais complexas de linguagem, mas também à formação dos recursos de pensamento lógico que permitem ultrapassar os marcos da experiência imediata* (Luria, 1987: 211).

É interessante poder dispor dessa crítica de Ferrari a Ernest (1991) e poder verificar se na versão de 1998, ou seja, se no *SCPM*, ele consegue responder a essas considerações ou a outras que venham nessa mesma direção. Acreditamos que Ernest responde, de alguma maneira, às observações de Ferrari, uma vez que, nessa última obra, o seu mergulho nas raízes sociais do conhecimento matemático é bem mais profundo.

Ainda em torno dessas considerações de caráter sociológico, as *Dez 'leis' referentes a padrões de mudança na história da matemática* (Crowe, 1975) são bem ilustrativas a esse respeito, uma vez que são padrões bem ao sabor de um ponto de vista social do desenvolvimento histórico da matemática. No mesmo sentido, já mencionamos no Capítulo III as considerações de Löwy (1994) discutindo sobre marxismo e positivismo na sociologia do conhecimento, quando reflete acerca do *mundo* 3 de Popper e da objetividade institucional (Löwy, 1994: 49-57).

Acreditamos que algumas perguntas que nos evocou essa leitura de Ernest possam encontrar respostas a partir da leitura de outros interlocutores do autor que refletiram acerca da filosofia da matemática. A crítica de Ernest às correntes tradicionais de pensamento matemático pode nos fornecer elementos significativos para entendermos em profundidade o seu pensamento, além de possibilitar-nos a constituição de um quadro muito rico de informações sobre as correntes de pensamento absolutistas em filosofia da matemática e da educação matemática.

Estudar Ernest foi para nós um processo de profunda aculturação em termos de matemática. O tomar contato com o pensamento de Wittgenstein, Lakatos, Restivo, Bloor, Tymoczko e outros foi um fato muito marcante para a nossa formação intelectual. Seria possível dividir a nossa vida acadêmica em dois períodos: antes e depois de iniciarmos nossos estudos dos escritos de Ernest. Não só da obra dele em si mesma, mas também da variedade de obras a que ele nos remetera.

Por isso, acreditamos que estudos de introdução à filosofia da matemática, ou de tópicos da educação matemática que tomem como ponto de partida a perspectiva de Ernest, se tornam atualmente imprescindíveis, por iniciar nossos futuros matemáticos ou educadores matemáticos ao mundo filosófico polêmico, multifacetado e social da matemática e da educação matemática.

Capítulo V
Filosofia da Matemática e Educação Matemática

Neste capítulo discorremos sobre o que sempre consideramos fundamental entre os educadores matemáticos, a saber, a relação entre filosofia da matemática e educação matemática. Isso porque, na nossa perspectiva, a educação matemática é secundada não apenas mas também, pelas concepções filosóficas que se tenham acerca da matemática.

Ernest vê o construtivismo social como uma alternativa às filosofias tradicionais da matemática. Ele também considera as perspectivas falibilistas admissíveis ao lado das perspectivas absolutistas para compor uma filosofia da matemática reconceptualizada (cf. *SCPM*, p.56). A composição, de muitas contribuições de várias áreas, para a construção de sua teoria nos agrada na medida em que tem um caráter amplo, sem nenhum sentido depreciativo no termo. O construtivismo social de Ernest é, pois, uma composição entre duas filosofias da matemática e contribuições da epistemologia genética, do construtivismo radical, do interacionismo e de teorias da aprendizagem baseadas em Piaget, Glasersfeld, Vygotsky e outros. Ele realça muito, ao longo do seu texto, que Wittgenstein propôs uma epistemologia social, ou uma filosofia social, uma vez que, para Wittgenstein, o conhecimento está enraizado nos acordos humanos, no comportamento humano, nos jogos de linguagem imersos nas formas de vida. A preocupação de Wittgenstein não é com a ontologia. Ele é um antiplatônico. Seu foco é a linguagem. E como sabemos, a linguagem é eminentemente social.

O sentido social implícito nas perspectivas de Wittgenstein e de Lakatos é, portanto, uma fonte de inspiração para uma prática fértil em termos de educação matemática. Nas filosofias tradicionais (não-sociais) da matemática, o conhecimento matemático é visto como se fora uma descoberta individual. Transmite-nos essa perspectiva a impressão de que o conhecimento matemático é algo à parte, um mundo distante e preexistente ao mundo humano, acessível só através de uma percepção especial. E como o ensino baseado nessa perspectiva deixa os alunos convencidos dessa crença, parece-lhes plausível que seja realmente assim.

O retorno do conhecimento matemático para o centro das práticas humanas faz-nos perceber o quanto é plausível que a transmissão do conhecimento e a sua criação estejam imersos num mesmo espaço: o espaço das relações humanas, das práticas humanas, dos jogos humanos, lingüísticos e não-lingüísticos. Ao considerarmos que o pensamento é anterior à linguagem, a atividade matemática já estava presente na forma de estruturação do pensamento; isso é perfeitamente perceptível nas crianças, dado o nível de compreensão por elas manifestado antes mesmo do uso da linguagem conforme observa Bourguignon:

> *antes de falar, a criança é perfeitamente capaz de se fazer compreender. Mesmo sem possuir nossa linguagem,* Homo habilis *e* Homo erectus *eram provavelmente capazes de pensar. Jakobson (1982) lembrou, aliás, que o pensamento criador de muitos matemáticos e físicos, entre os quais Einstein, funciona num nível que não é o da linguagem* (Bourguignon, 1990: 209).

Outros autores que desenvolveram estudos acerca do pensamento e da linguagem na criança, tais como Piaget e Vygotsky, chegaram também a conclusões interessantes. Mas tais estudos não são, no momento, objeto de nossas reflexões.

O que caracteriza o ser racional é a atividade criadora. Mesmo quando reproduz um conhecimento já existente, a ação criadora do ser cognoscente está presente na sua compreensão. Isso porque, aprender é recriar para si. E é a aprendizagem a base da criação propriamente dita. A criação no que ela tem de singular está na combinação ou reestruturação inédita de fatores, na maioria das vezes, conhecidos num determinado contexto.

A educação matemática, no que ela tem de singular – a constante referência à teoria do conhecimento e à epistemologia da matemática – faculta ao educador matemático a tranqüila transição do centro de gravidade no processo de aprendizagem para o ser cognoscente, ou seja, o aprendiz. Porém, se considerarmos que, no fenômeno da aula, só há pessoas envolvidas com aprendizagem, minimizamos assim a polarização – professor *versus* aluno – e o foco da atenção passa a ser o espaço de inter-relações entre seres com experiências de vida diferentes, enfim, características pessoais diferentes, debruçados num processo de obtenção de respostas às suas especulações; soa desse modo, para nós, o diálogo imaginado e tão bem escrito por Lakatos na sua reflexão em grupo em torno da conjectura de Euler. E leituras antigas de René Thom, quando da nossa iniciação em educação matemática, nos vêm à memória. De fato, é possível estabelecer alguma analogia entre o pensamento de Thom sobre o ensino de matemática (a propósito da matemática moderna) e a matemática informal de Lakatos. Para Thom, *é rigorosa toda demonstração capaz de suscitar, em qualquer leitor suficientemente instruído e preparado, um estado de ânimo que o leve a mostrar-se de acordo. E se sucede assim, é porque temos a possibilidade de chegar a uma concepção suficientemente clara de cada um dos símbolos utilizados para que a sua combinatória implique a convicção desejada*. Ele ainda considera que não é preciso recorrer a grandes construções axiomáticas ou a refinado instrumental conceitual para julgar acerca da validade de um raciocínio matemático. *Basta ser capaz de ter uma idéia bastante clara de cada um dos símbolos empregados e uma idéia suficientemente ampla de suas propriedades operatórias*.

Essas reflexões de René Thom aqui evocadas, apesar de ele ser assumidamente um realista, e portanto, um platônico, vemo-las próximas de algo como a matemática informal de Lakatos inspirando uma prática educativa da matemática de teor falibilista e não excessivamente aferrada ao rigor formal resvalando, ainda, no convencionalismo atribuído a Wittgenstein. Thom e Lakatos convergem quanto às restrições ao formalismo. René Thom tem restrições ao trabalho de Bourbaki. E nos pareceu interessante a possibilidade de compor contribuições de várias concepções da matemática para a atividade social que é a educação matemática. Isso porque, não cremos que uma prática social monovalente, na esfera da educação, seja algo que conduza a algum lugar significativo.

Qualquer discussão em torno da educação matemática não pode prescindir de considerações iniciais em torno do problema do conhecimento, independentemente de qual seja a opção filosófica de cada um dos envolvidos nas demandas ou práticas vinculadas a esse metadiscurso da matemática. Para nós, o conhecimento,

> *está ligado, desde a sua origem, ao problema da sobrevivência. Trata-se pois de uma relação dialética entre o ser vivo e o seu contorno, visando à sobrevivência daquele. Como essa relação é dialética, existe uma ação do contorno para o ser vivo e outra ação deste para aquele. É natural concluir portanto: o conhecimento está ligado à vida. Mais ainda: é através dele que o ser vivo sobrevive, isto é, 'dialoga' com o seu contorno. Por conseguinte: o conhecimento é vida e é poder; este, para transformar o mundo e, nessa transformação, transformar a vida com a aquisição, pela consciência, de novos estados de percebimento. Ora, sendo a matemática uma parte do conhecimento, ela é vida e é poder, no sentido acima indicado* (Borges, 1984).

É nesse contexto de abordagem do conhecimento que concebemos a matemática. A partir daí, a nossa atenção se volta para o emergente metadiscurso da matemática e com alcance muito além do mero ensino – a educação matemática – em que aspectos filosóficos e históricos da matemática e do seu ensino, articulados com outras áreas do conhecimento, assumem importância capital. E é imbuídos desse espírito que nos atemos agora a algumas realizações intelectuais consumadas em torno do referido metadiscurso.

Das várias tendências em educação matemática cultivadas no país, buscamos refletir acerca da educação matemática que se faz na Unesp-Rio Claro-SP, no tocante às relações entre filosofia da matemática e educação matemática. Em um livro recentemente organizado por Bicudo (1999), intitulado *Pesquisas em educação matemática: concepções e perspectivas*, buscamos entender o pensamento dos autores dos ensaios agrupados sob o título "Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática". Sobre três ensaios publicados, tentamos fazer um breve comentário analisando-os com o objetivo de encontrar convergências no sentido de uma nítida tendência em educação matemática. Porém, o livro/antologia é plural, e a nossa análise se restringiu apenas a esses três ensaios publicados na Parte I, a saber: Silva (1999), Bicudo (1999) e Garnica (1999).

O artigo de Silva (1999), que esperaríamos fosse uma reflexão relacionando filosofia da matemática e filosofia da educação matemática, é, de fato, uma sucinta, coerente e didática retrospectiva acerca do desenvolvimento da filosofia da matemática e das relações desta com a matemática e a filosofia. E por ser uma retrospectiva, tem um tom histórico perceptível. Na verdade, o autor agrega em seu texto considerações de caráter histórico, filosófico e pedagógico em torno da matemática. Apesar de apenas um oitavo do artigo se dedicar à educação matemática, a reflexão desse autor é de fato muito interessante para um educador matemático que esteja se adentrando nos caminhos da filosofia da matemática. A impressão que temos é que o autor dirige esse texto principalmente àqueles que estão a iniciar-se em educação matemática, mas consideramos de imprescindível importância para aqueles que são iniciados à matemática com alguma inclinação para a dimensão filosófica dessa ciência.

Silva afirma a imprescindibilidade da filosofia da matemática nas práticas ou teorias pedagógicas referentes à matemática, isto é, na educação matemática. Para nós, é muito agradável ouvir isso de autores maduros, uma vez que essa declaração vem ao encontro do que fora uma das nossas primeiras crenças na nossa iniciação em matemática.

Algumas considerações do autor são destacadas aqui porque suscitam-nos alguns senões com relação a considerações de Ernest sobre as correntes tradicionais da filosofia da matemática. Ernest fala do que ele chama de absolutismo como se fosse algo ainda hoje muito forte e estático em matemática. Já Silva fala das correntes tradicionais do pensamento matemático como de aspectos situados já num passado histórico da matemática; próximo, mas passado.

Silva considera que a crise dos fundamentos gerou, além de um notável progresso na própria matemática, toda uma tradição de reflexão filosófica que só nos dias atuais tem sofrido alguma concorrência (Silva, *in*: Bicudo,1999: 48). No entanto, aduz que *novas perspectivas filosóficas, entretanto, só poderiam emergir quando a filosofia* [da matemática] *deixasse de se preocupar em colocar a matemática sobre fundamentos seguros para observá-la de fora, deixando para os matemáticos a tarefa de fazer a matemática* (p.49).

Há uma consideração impressionante do autor ao afirmar que na tarefa de reconstrução e reinterpretação da matemática (em função da crise dos fundamentos), as filosofias tradicionais da matemática se constituíram *mais como ideologias de justificação para os esforços de fundamentação a que estavam acopladas do que como produtos de uma reflexão serena sobre a natureza da matemática, como ela historicamente se apresenta a nós* (p.50). Esta citação está no mesmo espírito de uma reflexão de Ernest em (*SCPM*, p.31), quando este afirma acerca do absolutismo: *I consider this to be a powerful and persistent doctrine, one which has remained alive for many years. Elsewhere I have speculated that this is due to its ideological rather than purely philosophical significance.*

A mudança de foco das questões de base na filosofia da matemática é também objeto da crítica de Silva que dá conta do papel da história, agora nessa nova perspectiva filosófica da matemática. Ainda ele acrescenta uma plausível interpretação como que num tom de indulgente compreensão para com a não preocupação do logicismo, do formalismo e do intuicionismo com a história da matemática: *não tinham porque estar interessados na história da matemática, pois esta não lhes poderia ensinar nada. Na melhor das hipóteses, poderia apenas exibir dolorosamente os males desta ciência, males que lhe cabiam curar* (p.51).

Quando Wittgenstein vê na prática dos matemáticos o foco da filosofia da matemática, obviamente, concluímos que essa prática se dá ao longo da história da matemática. Silva, nesse aspecto, converge tanto com Wittgenstein como também com Lakatos e com Ernest, quando afirma que:

> *Os filósofos da matemática não podem mais hoje ignorar a história da matemática, pois a matemática como nos é dada, é-nos dada precisamente estendida ao longo de sua história, e não concentrada toda no momento presente. Se a matemática está constantemente reinterpretando-se, esta tarefa de reinterpretação é um fato filosoficamente relevante, precisamente porque reescrever a matemática passada em termos da matemática presente é uma atividade matemática. Assim, o estudo do desenvolvimento histórico da matemática não pode ser ignorado pelo filósofo. Caso escolha olhar apenas para a matemática em seu estágio atual, o filósofo da matemática estará escolhendo uma perspectiva parcial, quando não falsificada, da atividade matemática* (p. 51).

Na nossa perspectiva, consideramos o papel do conhecimento da história da matemática fundamental para o educador matemático e as concepções de Miguel (1997; 2000), nos fornecem mais elementos para enriquecimento dessa perspectiva. Se ao nível de filosofia da matemática, possivelmente antes de Lakatos, a necessidade da história já se fazia sentir, mesmo não havendo clima para tais empresas, esse fato torna mais evidente a importância da história na formação e prática do educador matemático. O foco da nossa reflexão aqui é em torno do papel da filosofia da matemática na prática do educador matemático. E uma vez que, para Silva, a história da matemática tem um papel fundamental junto à filosofia da matemática, e para Miguel, junto à educação matemática, configura-se-nos, pois, desse modo, duplamente importante, digamos assim, a função da história da matemática na prática do educador matemático, via filosofia da matemática e via filosofia da educação matemática.

Silva observa no seu artigo o quanto a filosofia da matemática dos dias atuais está distante da filosofia da matemática das escolas nascidas da crise dos fundamentos. Em vez de buscar um lugar de destaque para o conhecimento matemático no sistema do conhecimento humano,

> *a filosofia da matemática hoje busca aproximá-la do conhecimento empírico, tornando-a tão falível e aberta à revisão quanto este. O apriorismo e o caráter de necessidade do conhecimento*

matemático estão sendo duramente contestados nas modernas filosofias da matemática, certamente como ***conseqüência da própria evolução da matemática*** (p. 54, grifos nossos).

Discordamos, em parte, de que as mudanças na filosofia da matemática tenham sido conseqüências exclusivas da própria evolução da matemática. A matemática se transforma porque o conhecimento humano, em suas várias dimensões se transforma. Por isso, a matemática, imersa no conhecimento humano, se transforma graças a duas fontes de estímulos à mudança: a própria matemática e os problemas colocados à matemática pelos diferentes contextos externos a ela.

Quando Silva observa, dando conta de novas tendências em filosofia da matemática, que esta *abandonara a sua pretensão de ditar regras de comportamento para tomar a matemática e seu desenvolvimento histórico como um dado sobre o qual deve se debruçar o filósofo* (p.55), isto nos parece muito próximo do que preconiza Ernest, (inspirado por Wittgenstein e Lakatos), quando estabelece seis critérios que uma filosofia da matemática adequada deveria explicar, e quando atribui à filosofia da matemática construtivista social um papel mais descritivo, o que caracteriza uma atenção maior para com as aplicações, o desenvolvimento e a transmissão do conhecimento matemático, dentre outros aspectos.

Silva finaliza sua reflexão sobre a filosofia da matemática observando que *talvez a matemática seja mesmo multifacetada e não possa ser reduzida a nenhuma fórmula simples. Seja como for, este é um problema que não pode deixar de interessar aos profissionais que têm por objetivo o ensino da matemática* (p. 56).

No momento em que o autor parece pretender manifestar o seu pensamento acerca da relação entre filosofia da matemática e educação matemática ele se esquiva justificando que não é um especialista em educação matemática, mas que *algumas correlações saltam à vista mesmo para um educador matemático no sentido mais prosaico de um professor de matemática* (p. 56).

Apresentando algumas reminiscências do seu tempo de estudante secundarista e de graduação, ele mostra, de forma sucinta, as concepções filosóficas que permeavam a natureza dos cursos de matemática que freqüentou, e afirma que *não há prática ou teoria pedagógica que não seja, de modo consciente ou não, influenciada, quando não determinada, por uma concepção filosófica sobre a natureza da matemática* (p. 57).

Para nós, é muito significativa esta declaração de Silva, que se diz um não educador matemático. Discordamos de tal opinião, sobretudo porque o autor atua não somente, em nível de graduação, em disciplinas constantes do currículo de formação de professores, como também em um curso de pós-graduação em Educação Matemática, e diz exatamente aquilo que, como educador matemático em formação, sempre consideramos fundamental, tanto para o educador matemático quanto para todo matemático, a saber:

> *responder às questões filosóficas fundamentais sobre o estatuto do objeto matemático, sobre a natureza da verdade matemática, sobre o caráter do método matemático, sobre a finalidade da matemática, sobre o estatuto do conhecimento matemático enfim, antes de criar teorias, estabelecer objetivos, elaborar estratégias, desenhar métodos ou qualquer outra atividade teórica ou prática cuja finalidade última seja o ensino de matemática* (p. 57).

O autor tem razão quando declara que um educador matemático deveria responder primeiro a questões básicas da sua formação em educação matemática, as quais ele considera anteriores a qualquer atividade prática ou teórica cujo fim seja o ensino da matemática. Ao final da sua reflexão, ele parece satisfeito por haver iniciado uma exposição de algumas das perspectivas em filosofia da matemática que tentam dar conta da natureza dessa ciência. E chama a atenção para a impossibilidade de uma resposta definitiva acerca da natureza da matemática, porque a mesma está *em constante alteração e reinterpretação de si mesma*. E declara que *o educador matemático tem uma tarefa permanente, acompanhar a reflexão crítica desenvolvida pelos filósofos da matemática como subsídio imprescindível para o seu trabalho teórico e prático* (p.58). Talvez, a clareza com que Silva discorre acerca dessas questões se deva ao fato de ele atuar em cursos de formação de matemáticos e de educadores matemáticos, o que lhe permite, simultaneamente, conviver com teorias e metateorias da matemática.

Verdadeiramente, uma prática educativa em qualquer área do conhecimento, que leva em consideração os fundamentos históricos e filosóficos desse conhecimento está fadada ao sucesso.

A concepção de filosofia da educação em Bicudo (1999), conforme ela mesma o declara, foi o que balizou a sua concepção de filosofia da educação matemática. Essa autora, possuidora de uma larga experiência em filosofia da educação, tem tido um papel destacado na educação matemática em nosso país.

Diz Bicudo que

> *A Filosofia da Educação Matemática não se confunde com a Filosofia da Matemática, nem com a da Educação. Da primeira, ela se distingue por não ter por meta o tema* realidade dos objetos matemáticos*, o da sua construção e o da construção do seu conhecimento. Da segunda, por não trabalhar com assuntos específicos e próprios à mesma, como, por exemplo,* fins e objetivos da Educação*, natureza do ensino, natureza da aprendizagem, natureza da escola e dos currículos escolares* (Bicudo, 1999: 27).

Há autores que discordam desse ponto de vista de Bicudo. Ernest (1991) diz que toda filosofia da educação matemática é mais ou menos dirigida por uma filosofia da matemática. E Thom (1971: 204, *apud* Ernest) afirma que, *queiramos ou não, toda pedagogia da matemática, mesmo se parcialmente coerente, repousa sobre uma filosofia da matemática* (*PME*, p. 296). Tal citação de Thom também foi usada anteriormente por Silva, quando discorremos sobre o seu artigo, publicado em Bicudo (1999), acerca da educação matemática e filosofia da matemática. Steiner (1987), também refletindo sobre aspectos filosóficos e epistemológicos da matemática e suas interações com a teoria e a prática em educação matemática, refere-se a essa citação de Thom. Ernest (1994), em um artigo intitulado *The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics*, objeto de nossa reflexão, discordaria de Bicudo; e, curiosamente, utiliza a citação de Thom, segundo Steiner, abstraída de um discurso do filósofo matemático francês em Exeter, em 1972. O que nos leva a concluir que importar da filosofia da educação somente, ou melhor, importar de uma prática em filosofia da educação, de conotação fenomenológica, os fundamentos para um trabalho ou reflexão em filosofia da educação matemática, conforme Bicudo (1999:26) declara, constitui um procedimento fadado a pouca permanência, uma vez que a matemática ou filosofia da matemática estão dele ausentes e, se presentes, permaneceriam só em termos do discurso.

A filosofia da matemática é determinante na educação matemática, ou, se preferirem, na filosofia da educação matemática. Isso porque o cerne da prática educativa em matemática é a matemática nos seus múltiplos aspectos, tendo em foco a transmissão da tradição para as novas gerações, o que, no fundo, é o papel da educação.

Bem que a filosofia da matemática construtivista social de Paul Ernest poderia ser um adequado ponto de partida para a filosofia da educação matemática de Bicudo, por ser bastante abrangente, calcada nas práticas dos matemáticos e, desse modo, descritiva em lugar de prescritiva.

Os seis critérios de Ernest para uma filosofia da matemática adequada (SCPM, p. 56-7) dão conta das preocupações de Bicudo em termos de filosofia da educação matemática, com a vantagem de não perder de foco a matemática e ir além dos limites tradicionais da filosofia da matemática. Outro aspecto da filosofia da matemática de Ernest que poderia ser posto em paralelo com a filosofia da educação matemática de Bicudo é o papel da linguagem.

Ainda falando de uma pedagogia da matemática fenomenológica, Bicudo destaca a reflexão como ponto de destaque. Para ela, *a* reflexão *está no cerne do rigor dos procedimentos fenomenológicos que têm como meta a pesquisa. Trabalhar pedagogicamente esse rigor auxilia a formação do pesquisador atento, reflexivo e crítico e, também, a formação do cidadão que interfere na realidade de modo consciente e conseqüente* (Bicudo, 1999: 42). Consideramos que a reflexão faz parte de qualquer perspectiva filosófica, senão tal perspectiva nem seria, a rigor, filosofia.

O significado da filosofia da educação matemática em Bicudo, conforme ela observa, se constituiu ao longo do seu trabalho em filosofia da educação. E nós acrescentamos que tal significado não passou pelo âmbito da matemática nem pelo âmbito da filosofia da matemática. Toda a base da autora é originária da sua epistemologia fenomenológica construída ou assumida no âmbito da filosofia da educação.

A reflexão de Bicudo acerca da filosofia da educação matemática é uma tentativa de instituí-la como uma área. Pensamos, porém, ser a própria educação matemática uma área ainda emergente. Apesar de aceita pelas instituições fomentadoras de pesquisa no país, ainda não se instituiu de forma inquestionável, sobretudo porque ainda não se estabilizou a convivência política com a matemática, e nem se encontrou ainda um ponto de equilíbrio na relação com as áreas instituídas anteriores à emergência da educação matemática, a saber – filosofia da matemática e didática da matemática; áreas por sua vez inspiradas por concepções da matemática predominantemente formalista ou logicista que, por seu turno, também predominam nos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática.

Os objetos matemáticos no enfoque fenomenológico de Bicudo, via Husserl, são vistos como *objetos ideais*. Eles são constituídos na subjetividade psíquica e sua idealidade transcende essa esfera e, por meio da intersubjetividade, põe-se objetivamente, fazendo-se presente à consciência (p.38). Tal perspectiva poderia encontrar algum paralelo na relação que Ernest estabelece entre conhecimento objetivo e conhecimento subjetivo da matemática, considerando que o papel da linguagem no construtivismo social de Ernest é de inspiração wittgensteiniana. Em Husserl, a linguagem tem um papel fundamental no processo de constituição de entidades matemáticas completamente *objetivas*. É a linguagem que fornece o que Husserl chama de o *corpo* dos objetos abstratos, conforme Silva (1993:134). Sobre a natureza dos objetos matemáticos para Husserl, ainda segundo Silva, *eles são possessões culturais constituídas primeiro no interior da consciência individual e então tornada possessão comum por meio da cultura, em particular através da linguagem* (p. 129). Pensamos fosse possível estabelecer um paralelo entre essa concepção de objeto ideal, fruto de uma *intuição essencial*, com a *ur-Intuition* (intuição primordial) de que falam os intuicionistas, mas Silva (1993:134) alerta contra os perigos de se tentar identificar a filosofia da matemática de Husserl com a escola intuicionista de Brouwer.

Acreditamos que, uma vez que assumimos o papel central da filosofia da matemática na pedagogia da matemática, a tentativa de acoplar ao pensamento de Bicudo uma reflexão em torno da filosofia da matemática de Husserl poderia enriquecer sobremaneira as tentativas de tom fenomenológico em educação matemática, tradicionalmente representadas em Rio Claro-SP pela professora Bicudo. Silva (1993) constitui uma ótima referência, vez que torna acessível, para o neófito em educação matemática, sobretudo, alguns aspectos centrais da filosofia transcendental de Husserl e alguns aspectos dessa reflexão são considerados tendo em perspectiva a filosofia da matemática, além de comparar a filosofia da matemática husserliana com as escolas tradicionais em filosofia da matemática. É claro que a melhor fonte para o estudo da filosofia de Husserl é o próprio, mas os bons intérpretes sempre foram indispensáveis nas várias esferas do saber. E em se tratando de filosofia da matemática, consideramos que somos bem servidos.

Garnica (1999), no seu ensaio intitulado “Filosofia da educação matemática: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa”, pretende estabelecer descritivamente os modos de ser da educação matemática. Em nota (n. 1), o autor esclarece que, no seu texto, as idéias desenvolvidas talvez ainda não estejam em sua forma definitiva. Consideramos essa dúvida do autor como plausível, e é com esse sentimento que tentaremos estabelecer, dentro das nossas limitações, um diálogo com o ensaio em questão.

O autor reflete acerca de *estabelecer a pesquisa em educação matemática como a prática de auscultar detalhes do ensinar e aprender matemática, visando a interferir num sistema* (...) (p. 60). Para ele, *assumir educação matemática como “movimento” implica aceitar que, desde o primeiro instante em que se decidiu ensinar a alguém alguma coisa chamada “Matemática”, uma ação de Educação Matemática começou a se manifestar* (p. 60). Nesse sentido, poderíamos concluir que a educação matemática começa no passado longínquo da história da racionalidade humana, no momento em que seres primitivos transmitiram para seus semelhantes rudimentos de uma aquisição que, no futuro mais que distante, chamar-se-ia matemática. Ainda nesse sentido, podemos dizer que a história da matemática e a história da educação matemática são coevas. E podemos, então, falar de educação matemática chinesa, hindu, no Brasil colônia, educação matemática tupi, etc. Essa declaração de Garnica nos faz pensar em educação matemática na Babilônia, ou mais, em arqueologia da educação matemática. Não sabemos quando a educação matemática desponta, seja como movimento, seja como prática científica, mas não acreditamos que o enunciado de Garnica, objeto dessas nossas digressões, seja consensual.

Sabemos que uma das preocupações do grupo de pesquisadores em filosofia da educação matemática em Rio Claro é com a educação matemática do dia-a-dia, do professor anônimo na sua tarefa monótona, paciente, quase resignação tornada mecânica como no mito de Sísifo. E, nesse sentido, a reflexão de Garnica acerca do assumir a educação matemática como movimento implica não desqualificar sua vertente prática. Esta, segundo ele, deve ser *de um tipo que demande, necessariamente, reflexão que vise a uma efetiva intervenção na ação pedagógica.*

Garnica propõe uma filosofia da educação matemática como uma reflexão sobre a prática e não uma instância teórica que precede ou artificialmente norteia a intervenção. Em razão disso, tece considerações no sentido de estabelecer um suporte filosófico para a prática cotidiana da educação matemática. Considera a pesquisa-ação instrumento privilegiado (p.69) para o tratamento de questões em educação matemática.

Após reflexões acerca de questões ligadas à metodologia da pesquisa, o autor se propõe a apresentar uma proposta de projeto de pesquisa em filosofia da educação matemática. Reporta-se a Bicudo (1996). As opiniões de Garnica e Bicudo convergem com relação a Ernest (1991) e à educação matemática, o que comprovamos no primeiro caso comparando Bicudo (1999: 23-4) com Garnica (1999: 68-9) e no segundo, em Bicudo & Garnica (2001).

À página 69 de seu ensaio, o autor refere-se à apresentação de *alguns exemplos legítimos de pesquisas em Educação Matemática que, ancoradas numa reflexão de natureza filosófica, encaminham compreensões à pergunta do início desse parágrafo* (...). Entretanto, não apresenta os exemplos anunciados/sugeridos e reporta-se tão-somente à pesquisa-ação, como já nos referimos há pouco. Quanto ao projeto inicial prometido à página 67, conclui o autor que *um projeto dessa envergadura não é, decididamente, projeto de um pesquisador: é um processo de colaborações* (p.70).

Bicudo & Garnica (2001) contém informações que parecem mostrar um avanço dos autores quanto à pesquisa em educação matemática. Consideramos que tal avanço pode ajudar a um melhor entendimento do que se propõem os autores como uma educação matemática de conotação fenomenológica. No Capítulo II, numa discussão acerca de educação matemática e linguagem, discorrem sobre a vontade de investigar a linguagem matemática no contexto da sala de aula através de uma abordagem hermenêutica. Trata-se de um texto interessante, apontando de forma clara para um aspecto muito importante da pesquisa em educação matemática – a sala de aula. Os autores estabelecem uma classificação no discurso matemático em pedagógico e científico. Contudo, a concordância ou não com tal postura não compromete a compreensão de suas propostas.

Certamente que numa análise do discurso no contexto da sala de aula, a linguagem matemática está amalgamada no que caracteriza o processo de comunicação oral entre aprendizes e mestres. E muitas das metáforas e outras aproximações que ocorrem por conta da natureza, digamos assim, do processo de comunicação oral, não significarão necessariamente imprecisões dos aprendizes ou dos mestres, nem os chamados erros significarão erros, mas aspectos da comunicação oral em meio ao ensino e aprendizagem da matemática. As análises de discurso oral são bem diferentes das de discurso escrito. Essas análises, como propostas pelos autores, trata-se de mais uma opção de pesquisa em educação matemática adstrita à sala de aula. De qualquer maneira, a análise do discurso intramuros, seja ela de tom fenomenológico ou não, é uma fonte a ser explorada pelos pesquisadores em educação matemática.

Até onde pudemos perceber, não é foco de Bicudo ou Garnica estabelecer, ao menos a partir dos textos aqui considerados, relações entre filosofia da matemática e educação matemática, o que não ocorre com Silva, para quem há uma estreita ligação entre filosofia da matemática e educação matemática. Poderíamos dizer que, *en passant*, Bicudo ensaia um movimento no tom do que realiza Silva, mas não avança, e faz isso quando resvala na abordagem fenomenológica de Husserl. Tivesse considerado o ensaio de Silva (1993) sobre a filosofia da matemática de Husserl, o seu ensaio completar-se-ia com as duas vertentes constitutivas da educação matemática: filosofia da educação e filosofia da matemática. Acreditamos ainda nessa possibilidade se consumando na UNESP, em Rio Claro, berço da abordagem fenomenológica em educação matemática.

Gostaríamos agora de abordar alguns pontos de vista de outros pesquisadores em educação matemática da atualidade cujas reflexões incluem a participação da epistemologia (ou das análises epistemológicas da história da matemática) tanto na prática pedagógica quanto na pesquisa no interior dessa área de conhecimento.

Assim sendo, por epistemologia da matemática estaremos entendendo o campo disciplinar, historicamente constituído, que toma tanto os conhecimentos matemáticos sócio-historicamente (sic) *produzidos quanto os processos sócio-históricos* (sic) *de sua produção, exclusivamente como objeto de avaliação sob o ponto de vista de sua aceitação e justificação* (Miguel, 2000: 2).

Segundo Miguel, a epistemologia do modo acima caracterizada, pode ser vista como um campo profícuo de diálogo com a educação matemática, e três razões são apontadas como justificativas para esse diálogo:

Uma primeira, assenta-se na tese de que o estudo das epistemologias da matemática poderia subsidiar proveitosamente investigações que visassem à realização de análises ideológicas no terreno da educação matemática. Ponto de vista semelhante a este é defendido por Steiner (1987).
Uma segunda razão assenta-se na defesa da tese da existência de epistemologias subjetivas difusas acerca da matemática de que são portadores professores, estudantes, técnicos educacionais, pais, etc. o que, juntamente com outros fatores, condicionam o ato educativo do ensino e da aprendizagem da matemática em qualquer nível ou contexto. Foi com base nessa segunda tese que se desenvolveram as investigações de Thompson (1984), Steiner (1987).
Uma terceira razão assenta-se na defesa da tese de que o professor de matemática − e também o investigador em educação matemática − freqüentemente se deparam, na ação pedagógica ou na prática da investigação, com problemas de natureza epistemológica, para cujo enfrentamento o diálogo com a epistemologia da matemática poderia revelar-se profícuo e esclarecedor. Essa tese foi defendida pelo educador matemático francês Rudolf Bkouche (Miguel, 2000: 42-3).

Apesar de o nosso foco aqui não ser a história, vamos nos ater também às considerações de Radford, uma vez que as mesmas têm muito a ver com o nosso propósito de refletir sobre filosofia da matemática e educação matemática.

Radford (1997), refletindo acerca da psicologia, epistemologia histórica e o ensino de matemática, visando a uma história da matemática sociocultural, realiza um estudo interessante no qual critica o papel usual da história da matemática em propostas de ensino. Na sua perspectiva a história da matemática, na educação matemática, sai do âmbito do uso comum de apenas repositório de anedotas ou de problemas para os alunos resolverem, e passa ao papel de laboratório epistemológico no qual o desenvolvimento do conhecimento matemático é explorado. Para ele, tal maneira de ver o conhecimento matemático requer um certo ponto de vista teórico justificando as ligações entre os desenvolvimentos histórico e moderno. Considera que o uso que se faz da história da matemática em propostas educacionais é ingênuo, e busca, com o seu estudo, contribuir com uma reflexão acerca das possibilidades e dos limites de um uso não-ingênuo da história da matemática no ensino.

Não é nosso objetivo aqui nos aprofundarmos na discussão do ensaio de Radford, mas considerar algumas concepções dele e de outros que integram o seu texto, as quais ratificam a nossa busca em educação matemática, por exemplo, que o conhecimento está profundamente enraizado e moldado por seu contexto social e cultural (p. 26).

Radford discute acerca de problemas historiográficos que qualquer pesquisa epistemológica de história da matemática deve atacar; discute algumas suposições subjacentes à versão psicológica de Piaget e Garcia da lei de Haeckel, e apresenta uma crítica baseada em uma concepção sociocultural de conhecimento. Considera a perspectiva histórico-epistemológica dos obstáculos epistemológicos a mais influente usada pelos pesquisadores em educação matemática até então, e propõe uma análise crítica da mesma. Desenvolvendo a idéia sobre a qual se baseiam as suas críticas, a saber, que o conhecimento está profundamente enraizado e moldado por seu contexto social e cultural (p. 26), finaliza seu ensaio com uma discussão das possibilidades que uma história sociocultural da matemática oferece para o ensino.

Radford discute, ao longo do seu ensaio, como concepções epistemológicas diferentes conduzem a interpretações diferentes quanto aos fatos históricos. E observa que para entendermos os desenvolvimentos conceituais, nós necessitamos posicionar o conhecedor e toda a atividade matemática sob estudo dentro da sua (do conhecedor) concepção cultural de matemática e de ciência em geral.

A relação entre passado e presente histórico é objeto das considerações de Radford, para quem o significado real de um conceito passado é inatingível (p. 27) porque a pesquisa histórica estabelece uma relação entre dois horizontes diferentes – o passado e o presente, sendo que este, por seu turno está sempre em movimento.

Discutindo acerca de concepções construtivistas e neoconstrutivistas em educação matemática, e discordando da lei de Haeckel, ele alude ao pensamento de M. Otte quando este afirma que: *o desenvolvimento do conhecimento não toma lugar dentro da estrutura da evolução natural mas dentro das estruturas de desenvolvimento sociocultural.* E acrescenta ainda de Otte o enunciado – *conhecimento é necessariamente conhecimento social* (Otte, 1994: 309, *apud* Radford).

Novos desenvolvimentos em educação matemática, observa Radford, estão mostrando um crescente interesse por fatores sociais e culturais no fenômeno da aprendizagem, o que vai levar à compreensão de que *os aspectos-chave do funcionamento mental podem ser entendidos somente considerando os contextos sociais nos quais estão embebidos* (p.27-8).

Este ensaio em que Radford demonstra algumas conseqüências do uso não-ingênuo da história da matemática na educação matemática é mais uma dentre tantas outras perspectivas para aqueles educadores matemáticos preocupados com o papel da história na educação matemática, e deixa claro, a nosso ver, que a perspectiva epistemológica histórico-cultural é mais um caminho de enriquecimento da pesquisa em educação matemática. Isso porque tem muito a oferecer para a epistemologia da matemática, se considerarmos que *o conhecimento é um processo cujo produto é obtido através da negociação de significado o qual resulta da atividade social dos indivíduos e é abarcado pela estrutura cultural na qual os indivíduos estão imersos* (p.32). De fato, observa Radford, a análise histórico-epistemológica poderia prover-nos com informação acerca do modo pelo qual os significados teriam surgido e mudado; necessitaríamos compreender as negociações e as concepções culturais que constituem a base desses significados. *O modo no qual uma idéia antiga foi tramada poderia ajudar-nos a encontrar velhos significados que, através de um trabalho didático adaptável, provavelmente seria redesenhado e tornado compatível com currículos modernos no contexto da elaboração de seqüências de ensino* (p.32). Considera Radford (reportando-se a um pensamento de R. Cantoral) que precisaríamos reconhecer a complexidade de uma teoria moderna e desvendá-la histórico-epistemologicamente para reconstruir apresentações acessíveis aos nossos alunos (p.32).

Não vamos aqui nos ater a reflexões em torno da educação matemática que consideram a relação entre a história, a epistemologia e a educação matemática. Como o foco deste capítulo incide sobre a relação entre filosofia da matemática e educação matemática, alguns outros trabalhos merecem menção. Alguns dos artigos presentes em (Ferreira, 1996) consideram a história da matemática do ponto de vista da epistemologia, e outros como recurso didático para a aula de matemática. As duas abordagens são plausíveis, porém Radford (op. cit.) recomenda o uso da história da matemática como um tipo de laboratório epistemológico. Neste sentido, gostaríamos de exemplificar que em (Miguel & Brito, 1996) e (Miguel, 1997) a história é vista como um recurso didático; já em (Miguel, 2000), o tratamento da história da matemática se aproxima daquele proposto por Radford, considerando as análises críticas referentes a concepções epistemológicas presentes em vários trabalhos de pesquisadores em educação matemática da atualidade, cujas ênfases à importância da análise epistemológica da história da matemática para a educação matemática são percebidas.

Steiner (1987) também desenvolve reflexões acerca das interações entre os aspectos filosóficos e epistemológicos da matemática e a teoria e a prática em educação matemática. Reportando-se à citação na qual René Thom estabelece relação entre a filosofia da matemática e a pedagogia da matemática, já referidas neste capítulo, Steiner observa que

> *tais "filosofias" podem consistir de uma opinião "privada" de um professor a respeito da natureza da matemática e do conhecimento matemático (freqüentemente adquirida indiretamente através de seus próprios estudos acadêmicos) e de suas reflexões sobre o modo como essa opinião se relaciona com o seu ensino e com a aprendizagem de seus alunos* (Steiner, 1987: 7).

Nesse sentido, poderíamos dizer que boa parte da estrutura que dá sustentação a certas práticas pedagógicas em matemática não se constituem em filosofia, mas tão somente em um sistema de crenças. Em última análise, encontraremos os princípios de alguma filosofia da matemática, em geral, de inspiração logicista, formalista, construtivista, estruturalista ou empirista, ou alguma combinação de princípios de duas ou mais delas. E isto é fácil de justificar, uma vez que, na formação dos nossos professores, a filosofia da matemática estudada nos cursos de graduação, se estudada, é de inspiração platônica, adstrita aos problemas dos fundamentos e imersa num estilo bem euclidiano. E não precisamos ir além dos currículos dos cursos de licenciatura em matemática em nosso país para ratificarmos essa afirmação. Provavelmente, uma abordagem das filosofias da matemática, além das mencionadas anteriormente, só ocorra mesmo em cursos de pós-graduação em educação matemática ou de filosofia da matemática, e ainda assim, para grupos bem restritos.

A quantidade de estudos recentes em filosofia da matemática ainda não permeia os currículos dos nossos cursos de licenciatura em matemática de modo significativo. Steiner dá exemplos de desenvolvimentos recentes em educação matemática através de novas filosofias e teorias epistemológicas, cuja pretensão é fornecer uma melhor base para a investigação do modo como os alunos reais aprendem, tanto de um ponto de vista cognitivo quanto social, além de intencionarem também fornecer fundamento mais adequado para a teoria e a prática do ensino da matemática.

Steiner destaca o caráter menos normativo das epistemologias recentes da matemática em comparação com as tradicionais, e considera que *possuem uma natureza descritiva e empírica, tal como a posição quase-empírica de Lakatos* (Steiner, 1987: 8). Ele estabelece seis teses sobre matemática e educação matemática para explicar sua posição. Duas delas, as *Teses 1 e 2*, são objeto de considerações de Ernest (1994) e serão apresentadas mais adiante neste estudo. São teses relacionadas com o enunciado de René Thom já mencionado.

Uma área em que a pesquisa recente em educação matemática tem dado suporte à tese 2 de Steiner é aquela que diz respeito a concepções e crenças que os professores mantêm sobre a matemática e o ensino da matemática, sobre as origens dessas concepções e sobre o modo como elas se relacionam com o trabalho dos professores e com a prática instrucional. A título de exemplo, Steiner se reporta ao trabalho de Alba Thompson, (1984) [1997] que compilou estudos de caso sobre três professoras de matemática da escola secundária, nos Estados Unidos. Trabalho análogo foi realizado por Ana Cristina Ferreira com alunos que freqüentavam uma escola pública noturna de Belo Horizonte, conforme Ferreira (1998).

Segundo Thompson:

> *as crenças, visões e preferências dos professores sobre a matemática e seu ensino, desconsiderando-se o fato de serem elas conscientes ou não, desempenham, ainda que sutilmente, um significativo papel na formação dos padrões característicos do comportamento docente dos professores. Em particular, a consistência observada entre as concepções de matemática professadas pelas professoras e o modo pelo qual elas tipicamente apresentaram o conteúdo, sugere fortemente que as visões, crenças e preferências dos professores sobre a matemática exercem influência sobre sua prática docente* (Thompson, 1997: 40).

Para Ferreira, *as crenças que os indivíduos mantêm orientam, em grande medida, seu comportamento e suas atitudes. Elas são uma espécie de filtro cognitivo com o qual as pessoas avaliam e se relacionam com as situações* (Ferreira, 1998, resumo).

> *Os resultados apontam para uma visão utilitarista* [dos alunos] *da Matemática, na qual os conteúdos somente são considerados importantes quando se mostram úteis à vida cotidiana: seja em problemas do dia-a-dia ou em exigências profissionais e acadêmicas. Além disso, os estudantes acreditam que todo o processo ensino-aprendizagem depende quase unicamente deles e que, como todas as pessoas são inteligentes e aprendem do mesmo modo, basta que cada um se esforce, se interesse e cumpra com suas obrigações para ser capaz de aprender Matemática* (Ferreira, 1998, resumo).

Também Souza (1996) dedicou-se a um estudo histórico-pedagógico das crenças de futuros professores do ensino fundamental, tomando como referência à noção de número natural. O interessante deste trabalho é a busca das concepções dos professores ainda em meio ao respectivo processo de formação. A conjectura que guiou a autora, na sua pesquisa, foi por ela enunciada do seguinte modo:

> *as crenças que sustentam as representações acerca do ensino e da aprendizagem do conceito de número natural, às quais se pode ter acesso através da 'leitura' do imaginário pedagógico de futuros professores das séries iniciais, constituem fragmentos involuntariamente extraídos de sistemas elaborados por matemáticos-filósofos, psicólogos-pedagogos e/ou extraídos acriticamente de manuais didáticos de forte penetração em nosso meio educacional, nos quais esses fragmentos acabaram sendo, bem ou mal, sintetizados e veiculados* (Souza, 1996: 26).

Steiner observa que, a partir dessas conexões, pode-se dizer que as concepções de matemática dos professores podem ter tanto efeitos positivos quanto negativos sobre o ensino. E considera que a forte ênfase que é dada, devido às crenças de professores, a aspectos tais como o rigor, a precisão e o dedutivo em matemática, dificulta a possibilidade de os professores efetivarem abordagens da matemática que orientem o ensino na direção da resolução de problemas ou da modelagem matemática, abordagens estas que são decorrentes de uma visão da matemática como um campo aberto, flexível e em desenvolvimento mais do que como um campo fechado, fixo, pronto e acabado.

Essa observação auxilia-nos a perceber um dos fatores chave que impedem a inserção das novas metodologias nas práticas dos professores de matemática. Toda metodologia, acreditamos, é secundada por uma filosofia. E esta é pouco considerada nos cursos de formação. A pedagogia da matemática não pode ser prescindida da filosofia. E como tem sido prescindida, ao menos na formação de grande contingente de professores e em suas práticas, os fracassos têm se repetido nas tentativas de mudanças curriculares. Sabemos que a construção de uma filosofia não é algo que se dê num curso de formação de três ou quatro anos. É um projeto de vida. Porém, ao menos a iniciação aos estudos filosóficos e epistemológicos da ciência deve se dar nesse período, no ambiente acadêmico, devido à sua riqueza em termos de perspectivas diferentes convivendo num mesmo espaço no corpo docente desses cursos.

Steiner também sugere que o estudo nos moldes do realizado por Thompson seja realizado com os alunos. Nesse sentido, as pesquisas em educação matemática têm contribuído consideravelmente. E os exemplos de Ana Cristina Ferreira e Eliana da Silva Souza, citados anteriormente, são alguns dos poucos em nosso ambiente.

Na sua tese 3, Steiner afirma que *não existe filosofia da matemática universal, constante e reconhecida. Pode-se avaliar as filosofias da matemática de acordo com suas fecundidades para o atingimento de metas e propósitos particulares e para desenvolver critérios de avaliação* (Steiner, 1987: 10). Considera que um tema de estudo importante seria a identificação e elaboração de relações entre as diferentes filosofias da matemática. Ressalta o papel da *complementaridade*, considerando que em muitos domínios da experiência e do pensamento humanos encontramos dualismos característicos compostos por pares de conceitos aparentemente opostos. Alguns parecendo ter uma natureza epistemológica mais geral e outros parecendo estar mais relacionados com domínios específicos. Observa que, em educação matemática, algumas dicotomias características e modismos a elas relacionados estão presentes nas reformas curriculares. E acredita que uma *teoria da atividade humana relacionada com o objeto*, incluindo suas condições sociais e cooperativas e vista como um sistema interativo, parece ser uma base adequada para a compreensão da complementaridade.

A tese 4 de Steiner enuncia:

> *Para a educação matemática deve-se preferir e elaborar filosofias da matemática que digam respeito especialmente aos seguintes aspectos: diferentes formas do conhecimento matemático e os fatores condicionantes desse conhecimento; meios e modos de representação e atividade; relações entre o desenvolvimento objetivo e subjetivo do conhecimento (complementaridade, obstáculos, dinâmicas)*; *relação entre o conhecimento matemático e outros conhecimentos; campos especiais e aplicações; as dimensões pessoal, social e política da matemática* (Steiner, 1987: 11).

A intenção do autor com essa tese é que a educação matemática e, especialmente, o conhecimento e a prática dos professores sejam guiados por uma *adequada filosofia da matemática*. Também na tese 6 (p. 12) Steiner reafirma, por duas vezes, a expressão *uma adequada filosofia da matemática*. Ernest (1991; 1998) discute critérios que, de alguma forma, contemplam as reivindicações das teses de Steiner, principalmente quando discorre acerca de critérios para uma filosofia adequada da matemática.

Vega (1989), no artigo intitulado *Epistemología y enseñanza de la matemática*, considera algumas entrevistas realizadas com egressos da Faculdade de Matemática da Universidade Autônoma de Gerrero, cujo propósito era saber acerca das **atitudes** que os alunos assumiam com relação ao questionamento acerca da presença da matemática na sua formação, sobre o aprendido e sobre o prazer ou desprazer que a matemática significava em seu passado recente. 99% dos entrevistados responsabilizaram os professores como fatores fundamentais de seu fracasso com a matemática; 78% se declararam incompetentes intelectuais para saber da ciência exata; 100% conceituaram a matemática como a ciência das operações com números e figuras e declararam não saber de sua utilidade prática (p. 12).

Quanto aos professores, na sua maioria engenheiros e em menor número professores de formação, consideraram que a causa do insucesso dos alunos estava ligada ao nível educativo anterior deles. Admitiram não conhecer com amplitude nem a estrutura da matemática nem os processos históricos de sua construção. 92% consideraram este conhecimento desnecessário para o ensino. Quanto aos fundamentos da matemática, consideraram inútil incorporá-los ao processo de apresentação de novos conteúdos.

Para Vega, essas observações, dentre outras mais específicas relativas ao ensino, motivaram a busca de razões que explicassem a virtual substituição da ciência matemática pela instrumentação mecânica que predominantemente se realiza no ensino. E, em suas reflexões, ele não deixa de lado a determinante social de que a educação, e em particular o ensino, reproduz na escola os vícios e interesses de dominação do sistema político imperante. O interesse do autor se centra, em sua sucinta narrativa, no esclarecimento de como e sob quais condições é possível ascender ao conhecimento matemático para que este seja um coadjuvante no desenvolvimento do pensamento independente e criador dos alunos.

Segundo Vega, os professores excluem de suas práticas (na maioria dos casos de modo inconsciente) as questões próprias da epistemologia da matemática, o que causa grande preocupação aos alunos que não *adivinham* as fórmulas quase *mágicas* da teorias matemáticas que os obrigam a aceitá-las sem discussão.

A hipótese de Vega se fundamenta no seguinte: *são as questões epistemológicas as que permitirão aos professores precisar o real objeto da matemática como ciência e a sua importância na educação* (p. 13). Ele considera que é preciso ter claro quais são os objetos de estudo da matemática, como eles se correspondem com o mundo real, quais os fundamentos desta ciência, seus princípios, métodos e sobre o lugar que ela ocupa no sistema das ciências. Considera que os objetos de estudo da matemática são abstrações, porque seus entes primários − fo-rmas, quantidade e relações quantitativas − são conceitos abstratos, resultantes da separação das relações comuns a determinados tipos de objetos e fenômenos reais.

Ainda que essa posição epistemológica assumida por Vega nos pareça contestável, para ele, o fato de a matemática se aplicar também a processos de raciocínio atestar-nos-ia que o método de trabalho na matemática pode influenciar o processo de raciocínio. E é esta característica a que mais interessa a áreas específicas do ensino. Para ele, aprender "produzindo o conhecimento" não significa reproduzir o caminho histórico de sua gênese nem o enfrentamento de situações similares às encaradas pelos grandes matemáticos, mas enfatizar os fundamentos do conhecimento, para os quais é válido em uma situação problemática, o uso de regras tanto formais quanto heurísticas (p. 13). Utiliza-se Vega do pensamento de Polya acerca do ensino de matemática, mais precisamente de sua metodologia de resolução de problemas, e afirma que o trabalho heurístico e a prática no ensino de matemática incluem a elaboração de princípios e estratégias, regras e programas que facilitem a busca de vias de solução de problemas de caráter não-algorítmico.

O foco de Vega para a educação matemática é a metodologia de resolução de problemas. E a sua filosofia da matemática é fundamentada nas idéias de Lakatos, de Popper e de Polya. Considera que a estrutura formal da matemática não constitui, nem em sua forma e nem em sua ordem sistêmica, a melhor forma e ordem sistêmica de seu ensino. O ensino é função da matemática, para o que estabelece relações didáticas que procuram adequar as formas de apresentação da matéria do conhecimento. E é na determinação dessa relação que o docente se constitui em fator de êxito ou de fracasso.

Concordando com o pensamento de alguns autores aqui já apresentados, Vega observa que o domínio de aspectos epistemológicos da matemática por parte dos docentes pode ser considerado um fator decisivo sobre as mudanças qualitativas nos resultados do ensino da matemática. E considera que é de especial relevância a responsabilidade dos docentes nos resultados do ensino da matemática.

Sem querer entrar no mérito das concepções do autor, ele tem uma preocupação que é comum aqui a um grupo considerável de autores que se ocupam com a educação matemática, a saber, que a concepção filosófica do professor tem um papel determinante na sua pedagogia da matemática.

Também Ernest (1994) discute as relações entre a filosofia da matemática e a didática da matemática. É possível destacar de seu pensamento alguns excertos que visam a mostrar aspectos importantes das práticas educativas em matemática decorrentes de concepções epistemológicas ou filosóficas. O texto que consultamos é, de fato, um esboço, de modo que o autor não se aprofunda, mas expõe princípios que norteiam algumas práticas educativas em matemática secundadas por concepções filosóficas.

O século XX é visto por ele como o período de florescimento da Filosofia da Matemática como um campo de pesquisa profissional. Esses desenvolvimentos tiveram uma grande influência na didática da matemática, ou melhor, na educação matemática. A tendência *descritiva* ou naturalista, segundo Ernest, em filosofia da matemática, emergira mais recentemente em oposição às preocupações *prescritivas* e normativas, próprias das tradições logicistas e formalistas em filosofia da matemática.

Aquilo que Silva considera uma nova tendência em filosofia da matemática, com preocupações no sentido de aproximar a matemática das ciências empíricas, Ernest classifica como sendo uma tendência *descritiva* ou naturalista, caracterizando-a como um movimento ainda mal definido ao qual Aspray e Kitcher (1988) chamam de uma tradição *dissidente*. O que delineia o perfil desse movimento é a rejeição compartilhada de suposições epistemológicas e ontológicas da filosofia prescritiva da matemática, e uma preocupação em alargar o escopo da filosofia da matemática para a explicação do reconhecimento do papel central da prática matemática e dos processos sociais. Assim, a preocupação é descrever as práticas epistemológicas e, mais geralmente, as práticas filosóficas da disciplina, ocorrendo naturalmente, antes que legislar normativamente, como o faziam as filosofias tradicionais da matemática.

Ernest elenca uma considerável lista de autores que têm proposto ser a tarefa da filosofia da matemática explicar a matemática mais completamente, incluindo a sua "face humana". Dentre as publicações, ele apresenta Davis & Hersh (1980), Ernest (1991), Kitcher (1984), Lakatos (1976; 1978), Putnam (1975), Tymoczko (1976), Wang (1974) e Wittgenstein (1953; 1956), as quais sugeriram perspectivas da matemática diferentes das estabelecidas pelo platonismo, logicismo, intuicionismo e formalismo. Também Rav (*op. cit*) apresenta autores que poderiam ser somados a essa lista de Ernest, uma vez que também defendem uma mudança em filosofia da matemática inclinada para a análise da *prática matemática*.

As diferentes filosofias sociais descritivas da matemática aceitam a visão de que a matemática é constituída de muitas estruturas sobrepostas. Estas, como uma floresta, se dissolvem e se refazem. E uma vez que o conhecimento matemático está sempre aberto à revisão, o processo de criação matemática ganha em significação filosófica, pois não há o produto último sobre o qual exclusivamente focar. Desse modo, a história e a prática dos matemáticos adquirem uma maior significação epistemológica. Isso, segundo Ernest, torna a matemática quase-empírica e não completamente disjunta da ciência empírica, como as filosofias tradicionais da matemática a queriam (Lakatos, 1978); (Quine, *apud* Ernest, 1994).

Os limites entre as diferentes áreas do conhecimento e atividade humanas não são absolutos, o que significa, para Ernest, que a matemática é limitada pelo contexto e carregada de valor, e não é pura, afastada e intocada de questões sociais tais como gênero, raça e cultura.

Ernest acrescenta à sua proposta de ampliação do âmbito da filosofia da matemática a necessidade de uma explicação geral da aprendizagem da matemática, porque, para ele, a transmissão do conhecimento matemático de uma geração para outra é central para a prática social da matemática. Assim como é central para a *didática* da matemática, uma teoria da aprendizagem é também um aspecto da interação humano-matemática que a *filosofia* da matemática deveria também acomodar.

A título de ilustração, destacamos aqui uma observação de Ernest acerca do papel da relação entre filosofia da matemática e didática da matemática: *posições diferentes na filosofia da matemática têm significativamente implicações diferentes para a didática da matemática como Thom, Hersh e Steiner afirmam:*

> *De fato, desejando-se ou não, toda a pedagogia da matemática, mesmo se pouco coerente, repousa em uma filosofia da matemática* (Thom, 1973: 204).
> *A questão, então, não é Qual é o melhor meio de ensinar? mas, Do que trata realmente a matemática? ... Controvérsias por toda parte ... o ensino não pode ser resolvido sem confrontar problemas acerca da natureza da matemática (Hersh, 1979: 34).*
>
> *Tese 1*
> *Falando de uma maneira geral, todas as concepções, epistemologias, metodologias, filosofias da matemática mais ou menos elaboradas (amplamente ou em parte) contêm – freqüentemente de um modo implícito – idéias, orientações ou germes de teorias sobre ensino e aprendizagem da matemática.*
> *Tese 2*
> *Concepções sobre o ensino e a aprendizagem da matemática – mais especificamente: metas e objetivos (taxionomias), programas, livros-textos, currículos, metodologias de ensino, princípios didáticos, teorias de aprendizagem, resultados de pesquisa em educação matemática (modelos, paradigmas, teorias, etc.), como também concepções dos professores a respeito da matemática e*

do ensino de matemática, assim como as percepções que os alunos têm da matemática – carregam consigo ou mesmo repousam (freqüentemente de um modo implícito) sobre visões filosóficas ou epistemológicas particulares da matemática (Steiner, 1987: 8).

Essas citações de Ernest (1994) fazem sentido aqui, uma vez que convergem com o pensamento de Silva, exposto anteriormente, ratificando uma preocupação corrente entre os educadores matemáticos que concordam quanto ao papel que a filosofia da matemática tem em questões educacionais. Para Ernest, qualquer filosofia da matemática tem fortes implicações em questões sociais e educacionais e muitas conseqüências didáticas. Mas essas implicações não são todas deduções lógicas estritas a partir da posição filosófica adotada, e muitas intenções, valores e concepções adicionais devem ser assumidos além da filosofia da matemática de *per se*, como ele mostra em (Ernest, 1991).

Considerando as filosofias da matemática com as respectivas conseqüências didáticas, ele as situa em três grupos, a saber – filosofias da matemática objetivistas prescritivas, filosofias da matemática absolutistas progressistas e as filosofias sociais da matemática. Tais filosofias têm suas correspondentes didáticas ou práticas pedagógicas. Atém-se Ernest a exemplos adstritos ao sistema de ensino britânico. Entretanto, há aspectos gerais de suas reflexões que se aplicam a características mais gerais dessas filosofias e que, por essa razão, se manifestariam em quaisquer contextos. Como exemplo, poderíamos citar o seu ponto de vista de que *uma conseqüência didática importante das filosofias da matemática absolutistas é que elas sustentam uma abordagem de ensino transmissivo baseado na metáfora da difusão*. Como a matemática, para essas filosofias, é considerada um corpo de conhecimento supra-humano e preexistente, então, seu ensino é uma questão de transmissão eficiente. A ênfase é, portanto, sobre o conteúdo, e quaisquer obstáculos aceitos seria devido à pobre compreensão dos alunos (ou à exposição obscura do professor) do conhecimento acabado transmitido. E como tais perspectivas da matemática podem ser associadas a abordagens humanísticas do ensino da matemática, estas últimas podem meramente buscar tornar agradável o problema surgido da natureza intrínseca da matemática (i.e., sua pureza objetiva, seu caráter abstrato e dificuldade) (Ernest, 1994: 339).

A perspectiva absolutista progressista vê o conhecimento em progressão ilimitada, mas pressupõe alguma verdade absoluta fundamental compartilhada para a qual as construções subjetivas tendem como que a um limite. Em educação matemática, Ernest considera que o movimento da educação progressista tem encorajado a perspectiva da resolução de problemas, abordagens investigativas e respeito para com as criações do aluno. Como a educação matemática progressista é baseada em uma concepção de matemática absolutista humanizada que considera a matemática como pura e absoluta, pode daí surgirem algumas fraquezas tais como o não-engajamento com questões sociais da vida real e questões políticas. O foco nessa pedagogia incide sobre a profunda atividade construtiva do aprendiz, na direção da produção do conhecimento matemático. O papel do professor é restrito ao de parteira, facilitador e corretor quando o aluno desvia-se do caminho adequado; não o de líder na negociação de significados e de conhecimentos (Ernest, 1994: 340).

As perspectivas sociais da matemática têm implicações na didática da matemática e em questões educacionais, incluindo aquelas de matemática e gênero, raça e multicultura. Reconhece a importância social e a natureza carregada de valores da matemática. Na pedagogia, defende completa abordagem investigativa e resolução de problemas como correspondendo aos meios pelos quais o conhecimento matemático é gerado. Reconhecem o falibilismo do conhecimento matemático e a sua incrustação na cultura. E assim, vêem criticamente as estruturas de conhecimento acolhidas e suas relações com a sociedade. Tais concepções se ajustam às propostas de uma educação matemática crítica capaz de avaliar os usos sociais da matemática.

Essas características também se coadunam com as reflexões do professor D'Ambrosio (1990) quando, discorrendo acerca de etnomatemática, faz uma análise considerável do papel da matemática nos nossos sistemas culturais e propõe alternativas de saída para uma educação matemática que considere *que a matemática está intimamente ligada à realidade e à percepção individual dela* (p. 29). Porque *a etnomatemática restabelece a matemática como uma prática natural e espontânea.*

Algumas das conseqüências didáticas das principais filosofias sociais da matemática são consideradas por Ernest a partir de alguns autores. De Wittgenstein (*IF*; *OSFM*) ele conclui que oferece uma vigorosa visão social da matemática. A contribuição de Wittgenstein,segundo ele, teria sido a de mostrar que a *certeza* e a *necessidade* da matemática resultariam de processos sociais de desenvolvimento, e que todo conhecimento, incluindo aquele em educação, pressupõe a aquisição da linguagem em contextos sociais já existentes e em interações significativas. Através de seus conceitos de jogos de linguagem e formas de vida, Wittgenstein teria reconhecido não só a primazia do contexto social, mas também a sua natureza multifacetada. Assim, ele teria antecipado o ponto de vista mais fundamental na filosofia e na teoria educacional contemporâneas, qual seja o da primazia da cultura, do contexto e da prática discursiva. Contudo, segundo Ernest, a abordagem de Wittgenstein seria sincrônica antes que diacrônica, isto é, ele enfatizaria estruturas sociais existentes e padrões de uso lingüístico, mas não o seu desenvolvimento histórico (p. 341).

Lakatos (1976; 1978) é visto por Ernest como indo além do *insight* de Wittgenstein ao mostrar, de uma maneira mais completa, a base de mudança histórica e conceptual de conceitos, termos, simbolismo, teoremas, provas e teorias da matemática. A dimensão histórica pode mostrar porque conceitos e resultados particulares foram desenvolvidos em matemática, baseados em problemas particulares e dificuldades historicamente encontradas.

Para a didática, a importância de Lakatos se deve ao fato de ele ter trazido a dimensão histórica para esse terreno, e de ele ter mostrado que a metodologia da matemática, do modo como é usada por matemáticos praticantes, não difere, em espécie, da heurística de resolução de problemas em sala de aula. Ele também teria mostrado, afirma Ernest, a importância das convenções, dos acordos e do poder na garantia das produções matemáticas (conhecimento matemático), o que, para Ernest, corresponde aos desenvolvimentos em sala de aula.

Para Ernest, Davis & Hersh (1980; 1988) teriam desenvolvido e estendido o *insight* de Lakatos, uma vez que teriam demonstrado a natureza cultural da matemática, e chamado a atenção para os seus aspectos internos e externos. Enquanto filósofos anteriores teriam enfatizado a história interna da matemática, Davis & Hersh teriam demonstrado que a matemática permeia e forma todos os aspectos da vida social e cultural e é, por sua vez, moldada por forças sociais. Didaticamente, para Ernest, a posição deles é importante porque transcende os limites da matemática pura-aplicada e acadêmica-popular mostrando que a atividade matemática é universal, multicultural, e não pode ser totalmente divorciada de seu contexto social de uso. Assim também pensa D'Ambrosio em suas reflexões acerca da etnomatemática.

Paul Ernest, na sua perspectiva construtivista social, observa que a relação entre o conhecimento individual da matemática e o de cunho disciplinar é de interdependência, e que eles recriam um ao outro através da interação interpessoal, mediada por textos ou outras representações lingüísticas, simbólicas ou icônicas (possivelmente à distância, mas modeladas em conversação). Isso sugere que o desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos, assim como novos entendimentos subjetivos da matemática são derivados de negociações interpessoais e diálogo; isto é, aprender e produzir matemática emergem de processos similares. Haveria também uma pressão particular sobre o conhecimento tácito e lingüístico compartilhado por membros de uma cultura, o qual forneceria uma base para aquisição do conhecimento matemático. Finalmente, ele sugere que os matemáticos, através do trabalho feito com símbolos, constróem *mundos matemáticos* imaginados tão convincentes que os objetos da matemática parecem ter uma existência independente. Entretanto, Ernest não se atém a alguma reflexão que explique, de algum modo, onde residiria a força dessa crença ou convicção acerca da existência independente dos objetos matemáticos. Estaria essa força em algo característico dos jogos lingüísticos próprios da matemática? Ou essa convicção seria uma conseqüência direta dos compromissos ontológicos assumidos pelos adeptos de determinadas escolas de pensamento vinculadas à matemática?

Do ponto de vista didático, esse seu ponto de vista corresponderia a um problema invertido, qual seja, o de que *manipulações simbólicas freqüentemente não conduzem à construção de mundos matemáticos subjetivos, mas a problemas de incompreensão, alienação e falha. Estes problemas levam a uma das contradições da educação matemática* (Ernest, 1994: 342). A matemática é, à primeira vista, a mais racional de todas as matérias, visto que suas conclusões são legitimadas unicamente pela razão. Porém, quando o raciocínio por trás da matemática não é entendido, devido às suas características de rigor estrito e simbolismo abstrato necessários para a precisão e força, ela se torna a mais irracional e autoritária das matérias.

Uma observação interessante de Ernest considera que o construtivismo social, dentre outras perspectivas sociais da matemática, quando combinado com teorias sociais, dá origem a muitas características de importância para a aula de matemática. Em linhas gerais, essas características incluiriam:

> *1. O contexto cultural e social dentro do qual toda a matemática ocorre, incluindo relacionamentos interpessoais, instituições sociais e relações de poder.*
> *2. Os processos sociais envolvidos na determinação, construção e negociação de conceitos matemáticos, métodos, simbolismo, argumentos e resultados.*
> *3. O contexto histórico-cultural da matemática, as fontes e usos dos artefatos, ferramentas e conceitos envolvidos.*
> *4. A base lingüística do conhecimento matemático, e, em particular, o papel do simbolismo especial na matemática.*
> *5. Educação é uma atividade intencional e, assim, existem os valores, propostas e metas justificando os processos da educação matemática.*
> *6. A matemática depende crucialmente da construção subjetiva de significados e da habilidade para construir, evocar e completar os mundos matemáticos resultantes pessoalmente imaginados, desde que não existe "mundo real" descrito pela matemática. O paradigma para estes são os mundos sociais de significados que toda criança aprende a construir através da participação em práticas sociais comunicativas.*
> *7. A matemática (incluindo o conhecimento matemático) é uma prática social discursiva que não é completamente disjunta de outras práticas ou áreas do conhecimento; a separação da*

matemática de outras matérias escolares (e práticas fora da escola) é uma construção (Ernest, 1994: 343).

Tais características se coadunam com os seis critérios de adequação que o autor emitiu quando discorrera acerca de características de uma *adequada* filosofia da matemática. Também se coadunam essas características com as reflexões do professor D'Ambrosio (1990), já vistas neste capítulo. Das considerações de D'Ambrosio, podemos depreender que ele considera que, embora as pesquisas sobre a influência das idéias já trazidas pelas crianças, antes da escola, sejam objeto de abordagem experimental na educação matemática com certa freqüência, os esforços para identificar as práticas etnomatemáticas e reconhecê-las como uma base de grande valor na educação são relativamente recentes, e ainda não foi analisado todo o potencial de um modelo pedagógico em matemática baseado na transição de práticas anteriores à escolaridade a práticas de natureza acadêmica (p.31). O texto do professor D'Ambrosio, *Etnomatemática,* do qual extraímos essas rápidas evocações, ainda é atual, apesar de uma década já se ter transcorrido desde a sua publicação, considerando ainda que é pouco utilizado, mesmo no meio acadêmico, e sobretudo pelo caráter global e holístico das suas preocupações antropológicas para com o futuro dos nossos sistemas de vida. Encerramos, pois, as nossas reflexões ainda pouco sistematizadas acerca da educação matemática com a evocação desse que é um dos mais antigos e ativos profissionais em educação matemática em nosso país.

Considerações Finais

Esse nosso momento final passa por uma consideração sobre o percurso transcorrido até agora. Nossa intenção era darmos conta de uma concepção social de conhecimento aplicada à matemática. Apesar de algumas mudanças ao longo do nosso percurso, não abrimos mão de Paul Ernest como um guia seguro nessa jornada. E fizemos isso porque optamos por trabalhar com o pensamento desse autor.

Da filosofia da matemática de Wittgenstein de Lakatos e de Ernest, saímos fortalecidos em uma de nossas preocupações, a saber, o quanto é fundamental a discussão sobre "o que é isto, a matemática?", no seio da educação matemática. E pouco nos importa se essa pergunta acerca de *o que é isto*, vai ser feita com preocupações do tipo que busca um fundamento lógico, ou histórico ou lingüístico ou social etc. O significativo para nós é a reflexão filosófica, pois a mesma é fundamental. E bom seria que as várias perspectivas ou expectativas estivessem lançadas à mesa no seio da educação matemática, para que cada educador efetivasse a sua opção.

Nossa reflexão pretendia um exame considerando o papel do contexto social nas formas de explicação, concepção da natureza e atividade matemática nas três filosofias aqui, de alguma forma, consideradas.

Dentre as várias formas possíveis de se conceber a matemática como uma produção social poderíamos destacar as seguintes:

1.A matemática é uma produção social porque ela é uma produção humana individual, e o indivíduo nunca está isolado, mas sempre convive com outros, isto é, sempre vive em sociedade. Aqui, o social é concebido como não transcendental, dado que o conhecimento é visto como produção humana e não como algo que preexiste à história humana. Porém, segundo essa concepção, a matemática é vista mera e exclusivamente como a soma das produções individuais não reguladas senão pela genialidade e talento pessoais de seus produtores. Essa, talvez, seja a forma mais comum – e também a mais pobre e ingênua – de se conceber o social.

2. A matemática é uma produção social não meramente por ser uma produção humana individual, mas sobretudo por ser uma produção em constante avaliação e revisão por parte de uma comunidade de especialistas que avalia, discute e negocia a legitimidade dessas produções individuais com base em critérios explícitos ou não, objetivos ou não. A natureza de tais critérios pode variar. Os critérios podem também ser vistos como provisoriamente mutáveis ou não, relativos ou absolutos. Pode-se mesmo defender a inexistência de critérios. Qualquer que seja o caso, porém, o social é sempre concebido não apenas como não transcendental mas também e sobretudo como interação social não institucionalmente condicionada, isto é, não-condicionada pelas relações de poder ou pelo modo de organização das estruturas ou instituições sociais humanas de qualquer natureza, mas condicionada apenas pelos poderes intelectuais pessoais e pela competência profissional dos chamados 'especialistas no assunto'. A ênfase é agora posta no papel da interação social na constituição de um corpo científico e objetivo de conhecimentos, e essa interação social é geralmente concebida como relação interpessoal direta ou indireta – quase sempre regulada pela imparcialidade e neutralidade, com o poder de influenciar apenas e tão-somente o processo de avaliação – geralmente, de natureza exclusivamente lógica e epistemológica, e de validação ou não do conhecimento produzido individualmente, mas sem qualquer papel efetivo significativo na produção individual do conhecimento matemático.

3. A matemática é uma produção social não meramente por ser uma produção humana individual em constante avaliação e revisão por parte de uma comunidade de especialistas em contínuas interações interpessoais diretas e indiretas, mas sobretudo por ser uma atividade humana condicionada, desde o início, e durante todo o seu processo de circulação – e não apenas durante o processo de avaliação de uma produção individual – pelas formas como os homens, em cada época e em cada cultura, organizam as suas instituições, organizam-se em instituições, organizam a produção de sua subsistência material e espiritual e pelas formas de poder que permeiam essas relações. Aqui, o social é concebido não apenas como não-transcendentalidade ou como interação humana apenas subjetivamente condicionada, mas sobretudo como interação humana política, institucional, temporal, cultural e materialmente condicionada.

Acreditamos que tanto a filosofia social de Wittgenstein, como a de Lakatos e a de Ernest não conseguem atingir uma concepção do social que vá além da segunda das concepções acima explicitadas. Para nós, cada uma delas, a seu modo, ultrapassa a concepção 1 e estaciona na concepção 2.

Para além desses nossos excessos, o que importa é que saibamos que o caminho se faz ao caminharmos. E a filosofia da matemática e da educação matemática, quando agimos ou filosofamos, tendo em perspectiva uma ou outra. E com isso, assumimos que assim como em algumas línguas se diz *as matemáticas*, deveríamos assumir o sentido plural para a educação matemática, o que amenizaria a agressividade de certas defesas de concepções e possibilitaria um ambiente de mais negociação e mais convivência pacífica.

O trabalho de Paul Ernest apontou para um panorama demasiado amplo. Importa-nos agora fazermos as nossas opções por cada vez mais clareza acerca dessas práticas sociais chamadas de matemática ou educação matemática ou filosofia da matemática, a fim de darmos significado ao nosso estar no mundo, em meio a tantos jogos de linguagem.

Seja em Ernest seja em Wittgenstein seja em Lakatos, o conhecimento matemático é fruto das relações construídas estabelecidas entre os sujeitos cognoscentes e o seu entorno, entorno esse permeado por um coletivo configurado que pode ser chamado de cultura ou, antes, forma de vida, ou o nome que quisermos lhe dar. Uma coisa é certa, para nós: nosso conhecimento é mediado pelos jogos lingüísticos que buscaram dar conta desse fenômeno ou processo ou fato etc., que é o conhecimento humano, no curso da história humana, imersa em um tempo imemorial. E agora pouco importa a nós se a especificidade de um conhecimento se caracteriza por descoberta ou construção ou crítica ou acordos lingüísticos. Em cada um deles a pluralidade dos sujeitos é para nós patente, seja no sentido biológico, ou filosófico. Por isso, para nós o social é tudo, e até a singularidade do sujeito descobridor, ou construtor, é uma construção social.

Em suma, o que propomos é que filosofemos mais. Inclusive com os nossos pretensos inimigos.

Acreditamos não termos esgotado o pensamento de Ernest nem de Lakatos nem de Wittgenstein. Mas, considerando a nossa intenção pedagógica implícita, tendo sempre o estudante de matemática como foco, nosso trafegar por essas três construções possibilitam ao leitor, com formação em matemática, ao menos um vislumbre do que o aguarda em termos de variedade, se resolver trafegar pelo espaço do conhecimento preenchido pela filosofia da matemática, pela educação matemática, ou pela interação entre essas duas áreas.

Assim, como diz o poeta Fernando Pessoa – *navegar é preciso, viver não é preciso* –, gostaríamos de, parafraseando-o, observar que, refletir (filosofar) acerca do conhecimento é preciso; conhecer, já não tanto.

No Capítulo 1 buscamos expressar as nossas concepções filosóficas acerca de conhecimento. Isso porque, antes mesmo de possuirmos uma concepção de conhecimento matemático, já temos uma concepção de conhecimento. Mesmo que não completamente elaborada.

Lidar com o conhecimento nos obriga, de alguma forma, a dizer o que pensamos, o que perscrutamos. E nessa exposição acabamos por falar, inadvertidamente, das nossas crenças não justificadas. Mas não há como falar sem desarmar-se, sem expor-se. Nosso percurso é um processo de busca de interlocutores. Porque é na conversação que conseguiremos burilar nossas elaborações – sejam elas crenças ou justificações plausíveis.

No nosso diálogo com Wittgenstein, no Capítulo 2, precisamente o *segundo* Wittgenstein, nos damos por satisfeito com a afirmação desse filósofo, de que é a linguagem que estrutura a realidade. Entendamos linguagem aqui como quisermos: inteligência, prática discursiva, jogos de linguagem, formas de vida etc., o que quer que façamos, o fazemos mediados por uma linguagem. Essa singularidade que nos torna plural, coletivo, muitos, num só. Gostamos de sentir que somos uma privacidade coletiva. Porque quando estamos a sós, os muitos, em silêncio sorrateiramente introjetados em nós, jogos de linguagem, falam.

Wittgenstein para nós foi muito significativo por nos proporcionar o conhecimento de que pela linguagem nos socializamos, nos perpetuamos, herdamos uns dos outros o conhecimento e os vícios. E nos modificamos.

A leitura de Lakatos, no Capítulo 3, nos deu uma outra perspectiva acerca das práticas discursivas da matemática, e do desenvolvimento desta. Enquanto para Wittgenstein, são os acordos humanos no seio dos grupos, o fator principal de desenvolvimento do conhecimento matemático, para Lakatos, é a crítica. Crítica permanente, aguda, coerente, ainda que algumas vezes, conjectural, digamos assim. Mas a crítica num ambiente saudável.

A leitura de Ernest, no Capítulo 4, teve um sabor diferente. Porque ele, apesar de sua formação em filosofia da matemática, é um educador matemático, no sentido profissional da expressão. Permitiu-se compor sua teoria a partir de várias tendências, amenizando arestas. Nessa alquimia de Paul Ernest um mosaico foi composto. Plural, e para nós, ainda conjectural, mas plausível.

Uma visão panorâmica acerca do estado da arte foi o que nos propusemos numa espécie de revisão da literatura, no Capítulo 5, considerando a educação matemática e a filosofia da matemática. É claro que fomos parcimoniosos, e não almejamos efetivar um levantamento exaustivo. Buscávamos apenas justificar uma de nossas primeiras crenças, a saber, a de que a filosofia da matemática exerce um papel importante na educação matemática.

Desse modo, o que o nosso exame aponta, em termos de desdobramento, é para a necessidade de uma consciência crítica do papel da filosofia da matemática na educação matemática. Filosofias sociais da matemática com sua especificidade, a determinarem uma especificidade na pedagogia da matemática, isto é, na educação matemática.

Acreditamos que a atividade filosófica traduzindo-se numa prática social entra num processo dinâmico que a torna cada vez mais fértil e crítica e inesgotável. Cabe aqui uma evocação do pensamento de D'Ambrosio quando afirma, discutindo acerca de uma teoria de cultura, que *aprendizagem é uma relação dialética reflexão-ação, cujo resultado é um permanente modificar da realidade. É nesse ciclo realidade-reflexão-ação-realidade, que reside o busílis na nossa busca de desvendar comportamento individual, comportamento social e comportamento cultural* (D'Ambrosio, 1986: 49). Essa é a característica do modelo de D'Ambrósio, próprio de uma atividade intelectual vinculada a uma prática social. É o que, de alguma forma, buscamos vislumbrar ao examinarmos a relação existente entre filosofia da matemática e educação matemática.

Não será demais evocarmos novamente Fernando Pessoa e repetirmos que, em questões de conhecimento o que importa é refletir (filosofar), conhecer, já não tanto.

BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A.D. y outros. ***La matemática: su contenido, métodos y significado*** 7ª. ed. (versión española de Manuel López Rodríguez). Madrid: Alianza Editorial, 1985. Vol. I.

ASPRAY,William / KITCHER, Philip (ed.) ***History and philosophy of modern mathematics.*** Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI.

BALAGUER, Mark. ***Platonism and anti-platonism in mathematics*** Oxford: Oxford University Press, 1998.

BARABASHEV, A. Empiricism as a historical phenomenon of philosophy of mathematics. ***Revue Internationale de Philosophie*** **4**/1988, n.167, 509-517.

BARKER, Stephen F. ***Filosofia da matemática*** (trad. Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota). Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

BASSOLS, Alejandro Tomasini. ***El pensamiento del último Wittgenstein:*** *problemas de filosofia contemporânea*. México: Trillas, 1988.

BENACERRAF, Paul and PUTNAM, Hilary (eds.). ***Philosophy of mathematics****: selected readings*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964.

___________. ***. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.21-44. (in: Bicudo,1999).***

___________. / GARNICA, Antonio V.M. ***Filosofia da educação matemática***. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BKOUCHE, Rudolf. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. ***For. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.21-44. (in: Bicudo,1999).***

___________. / GARNICA, Antonio V.M. ***Filosofia da educação matemática***. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BKOUCHE, Rudolf. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. ***For the Learning of Mathematics*** **17**, 34-47 1(February 1997).

BLOOR, David. ***Knowledge and social imagery*** 2nd ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1991.

BOMBASSARO, Luiz Carlos. ***As fronteiras da epistemologia****: como se produz o conhecimento* 2ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1992.

BORGES, Carloman Carlos. Conferência pronunciada em 24/8/84. UESB (Univ. Est. do Sudoeste da Bahia. Vitória da Conquista-BA. [publ. no ***Folhetim de Educação Matemática*** ano **III,** n. **45** dez. 1995. ***NEMOC*** - Dep. de Ciências Exatas - UEFS - BA].

___________. ***A matemática****: suas origens seu objeto e seus métodos*. Parte I. Feira de Santana-BA: UEFS, 1983. [mimeografado].

BOURGUIGNON, André. ***História natural do homem***: *o homem imprevisto*. (trad.: Maria Luiza X. de A. Borges). Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1990. vol. I.

BOYER, Carl B. ***História da matemática*** (trad. Elza F. Gomide). São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRUTER, C. P. ***Sur la nature des mathematics.*** Paris: Gauthier-Villars éditeur, 1973.

CARDOSO, Virgínia C. ***As teses falibilista e racionalista de Lakatos e a educação matemática***. Rio Claro-SP:UNESP, 1997. Dissertação de Mestrado.

CORREIA, Gastão C. L. ***A racionalidade da descoberta científica***. Campinas-SP: UNICAMP, 1987. Dissertação de Mestrado.

CROWE, Michael J. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. ***Historia Mathematica* 2** 161-66. 1975.

CURRIE, Gregory. Lakatos's philosophy of mathematics. ***Synthese* 42** (1979) 335-351.

D'AMBROSIO, Ubiratan. ***Etnomatemática***. São Paulo: Editora Ática, 1990.

___________. História da matemática e educação. ***Cadernos Cedes* 40**: 7-17.1996.

___________. ***Da realidade à ação:*** *reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da UNICAMP, 1986.

DAVIS, Philip J./HERSH, Reuben. ***A experiência matemática*** (trad. João Bosco Pitombeira).Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DUMMETT, Michael. ***Wittgenstein's philosophy of mathematics*** in: Benacerraf & Putnam, 1964. p. 491-509.

ERNEST, Paul. ***The philosophy of mathematics education***. London: Falmer Press, 1995.

ERNEST, Paul (ed.) ***Mathematics teaching****: the state of art*. Philadelphia: The Falmer Press, 1991.

___________. (ed.) ***Mathematics, education and philosophy***: *an international perspective*. London, 1994.

__________. ***Social constructivism as a philosophy of mathematics***. New York: State University of New York Press, 1998.

___________. The philosophy of mathematics and the didatics of mathematics, in: Biehler, Rolf/ Scholz, Roland W/ Strässer, Rudolf/ Winkelmann, Bernard (Eds.) ***Didatics of mathematics as a scientific discipline***. London: Kluver Academic Publishers, 1994.

FANG, I / Takayama, K. P. ***Sociology of mathematics and mathematicians****: a prolegomenon*. New York: Paideia Press, 1975.

FERRARI, Pier Luigi. Constructivism, education and philosophy of mathematics. ***Actes de la Première Université D'été Européenne***, 1993, p.415-423.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. A duplicação do cubo: como usá-la em sala de aula de matemática. ***Cadernos Cedes* 40**:18-28. 1996.

FERREIRA, Ana Cristina. ***O desafio de ensinar - aprender matemática no noturno****: um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte*. Campinas: UNICAMP/Faculdade de Educação, 1998. Dissertação de Mestrado.

FISHER, C.S. The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge. ***Archive for History of Exact Sciences*** (1966) 3:137-59.

__________. Some social characteristics of mathematicians and their work. ***American Journal of Sociology***, **78** (5) 1094-118, 1973.

FOULQUIÉ, Paul. ***Dialética*** 3ª ed. (trad. Luis A. Caeiro). Lisboa: Publicações Europa-América, 1978.

GARNICA, A. V. M. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. ***Zetetiké*** **4**, 5 (7-28), jan./jun. 1976.

___________. ***Filosofia da educação matemática****: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.59-74. (in: Bicudo, 1999).

GLASERSFELD, Ernest von. ***Introdução ao construtivismo radical***. in: WATZLIWICK, Paul (org.) ***A realidade inventada*** (trad. Jonas Pereira dos Santos). Campinas, (SP): Editorial Psy II, 1994. (p.24-45).

GLOCK, Hans-Johann. ***Dicionário Wittgenstein*** (trad. Helena Martins). Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

HACKING, I. Imre Lakatos's philosophy of science. ***British Journal for the Philosophy of Science*** **30** n.4: 381-402.

HANNA, Gila. ***Rigorous proof in mathematics education***. Ontario: Institute for Studies in Education, 1983.

HARIKI, Seiji. Em busca da ontologia perdida: o caso da lemniscata de Bernoulli. ***Cadernos Cedes*** **40**: 36-46. 1996.

HERNÁNDEZ, Jesús (org.) ***La enseñanza de las matemáticas modernas***. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

JESUS, Wilson Pereira. ***Aprendiz de matemática:****uma iniciação ao método axiomático*. Rio Claro - SP: UNESP/IGCE, 1992. Dissertação de Mestrado.

KANT, Immanuel, ***Crítica da razão pura***, 2ª. ed. (trad. Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989. (Introdução B, cap.1).

KASNER, E. / NEWMAN, J. ***Matemática e imaginação***. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

KLENK, V. H. ***Wittgenstein's philosophy of mathematics***. The Hague: Martinus Nijhoff: 1976.

KLINE, Morris. ***Mathematics****: the loss of certainty*. Oxford: Oxford University Press. 1980. [Cap.XV-p.328-59].

KREISEL, G. Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics. ***British Journal for the Philosophy of Science*** **9**: 135-58. 1958.

KUHN, Thomas. ***A estrutura das revoluções científicas*** 2ª ed. (trad. Beatriz V. Boeira e Nelson Boeira). São Paulo: Perspectiva, 1987.

LAKATOS, Imre. ***A lógica do descobrimento matemático****:provas e refutações* (trad. Nathanael C. Caixeiro). Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

___________. ***Pruebas y refutaciones****: la lógica del descubrimiento matemático.* (Versión española de Carlos Solís). Madrid: Alianza Editorial, 1986.

___________. ***Matemáticas, ciencia y epistemología***. (Versión española de Diego Ribes Nicolás). Madrid: Alianza Editorial, 1981.

___________. ***La metodología de los programas de investigación científica*** (Versión española de Juan Carlos Zapatero) Madrid: Alianza Editorial, 1989.

LEGRAND, Louis. ***A didática da reforma*** (trad. Marco Aurélio de Moura Matos). Rio de Janeiro: Zahar, 1973.

LERMAN, Stephen. Constructivism, mathematics and mathematics education. ***Educational Studies in Mathematics*** **20**: 211-223, 1989.

LÖWY, Michael. ***As aventuras de Karl Marx contra o barão de Münchhausen***, 5ª ed.(trad. Juarez Guimarães e Suzanne Felicie Léwy). São Paulo: Cortez, 1994.

LUNGARZO, Carlos Alberto. La noción de progresso en la filosofía de la matemática. ***Manuscrito*** XVI(2):71-119, outubro 1993.

LURIA, A. R. ***Pensamento e linguagem:*** *as últimas conferências de Luria*. (trad. Diana Myriam Lichtenstein e Mário Corso). Porto Alegre: Artes Médicas, 1987.

MIGUEL, Antonio, As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. ***Zetetiké* 5** 8 jul./dez. 73–105. 1997.

___________. /BRITO, Arlete de Jesus.A história da matemática na formação do professor de matemática.***Cadernos Cedes* 40**: 47-61. 1996.

___________. ***Educação matemática e epistemologia***, São Paulo, 2000. (artigo inédito).

MORA, José Ferrater. ***Diccionario de Filosofía*** 5ª ed. Madrid: Alianza, 1984. 3 vols.

NAGEL, Ernest/ NEWMAN, James R. ***Prova de Gödel*** (trad. Gita K. Guinsburg). São Paulo: Perspectiva, 1973.

NOBRE, Sergio. Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática. ***Cadernos Cedes* 40**: 29-35. 1996.

OMNÈS, Roland. ***Filosofia da ciência contemporânea* (**trad. Roberto Leal Ferreira, São Paulo: Editora da UNESP, 1996.

PEARS, David. ***As idéias de Wittgenstein*** (trad.: Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg). São Paulo: Ed. Cultrix; Ed. da USP, 1973.

PIAGET, Jean & GARCIA, Rolando. ***Psicogênese e história da ciência*** (trad. Maria Fernanda de M. R. Jesuino). Lisboa: Dom Quixote, 1987.

PINTO, Álvaro Vieira. ***Ciência e existência*** 2ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

PITCHER, George. ***The philosophy of Wittgenstein***. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964.

POLYA, G. ***Comment poser et résoudre un problème*** 2me ed. (trad. Mme C. Mesnage). Paris: Dunod, 1962.

_________. ***A arte de resolver problemas*** (trad. Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

_________. ***Matemáticas e razonamiento plausible*** (trad. Jose Luis Abellian) Madrid: Editorial Tecnos, 1966.

POPPER, Karl R. ***Conjecturas e Refutações*** (trad. Sérgio Bath). Brasília: Editora da UnB, 1980.

___________. ***Conhecimento objetivo*** (trad. Milton Amado). Belo Horizonte: Ed. Itatiaia; São Paulo: Ed. da USP, 1975.

RADFORD, Luis. On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. ***For the Learning of Mathematics*** **17**, 26-33. 1 (February 1997).

RAV, Yehuda. ***Philosophical problems of mathematics in the light of evolucionary epistemology***. in: Restivo/Bendegem/Fischer (eds.) 1993. p. 80-112). New York: SUNY Press, 1993.

RESTIVO, Sal P. ***The social relations of physics, mysticism, and mathematics***. Dordrecht: Reidel Publishing Co, 1983. (Episteme v. 10).

__________. /BENDEGEM, Jean Paul van/FISCHER, Roland (eds.) ***Math Worlds****: philosophical and social studies of mathematics and mathematics education*. New York: State University of N.Y. Press, 1993.

__________. ***Mathematics in society and history***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
__________. ***Science, society, and values****: toward a sociology of objectivity*. Bethlehem: Lehigh University Press, 1994.
RORTY, Richard. ***A filosofia e o espelho da natureza***. (trad. Antônio Trânsito). Rio de Janeiro: Relume-Dumará, 1994.
__________. ***Folha de São Paulo***, 22/03/1998, caderno "Mais", p.7-8.

SHANKER, Stuart. ***Wittgenstein and the turning-point in the philosophy of mathematics***. New York: State University of New York, 1987.
SILVA, Jairo José da. ***Filosofia da matemática e filosofia da educação matemática***. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.45-58. (in: Bicudo, 1999).
__________. Husserl's philosophy of mathematics. ***Manuscrito*** XVI (2):121-148, outubro 1993.
__________. *Wittgenstein on Irrational Numbers*. Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium (part 2). p. 93-99. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1993.
SNAPPER, Ernest. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo (trad. João Pitombeira de Carvalho). ***Humanidades*** **II** n.8: 85-93. jul/set 1984.
SOUZA, Eliana da Silva. ***Um estudo histórico-pedagógico das crenças de futuros professores do ensino fundamental acerca do ensino-aprendizagem da noção de número natural***. Campinas: UNICAMP/FE, 1996. Dissertação de Mestrado.
STEINER, Hans-Georg. Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. ***For the Learning of Mathematics*** **7**, 7-13 1 (February 1987).
THOMPSON, Alba Gonzales. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. ***Zetetiké*** **5** (8) 11-44 jul./dez. 1997.
TYMOCZKO Thomas (ed.) ***New directions in the philosophy of mathematics***. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1998.
VEGA, Efren Marmolejo. Epistemología y enseñanza de la matemática. ***Educación Matemática*** **1** n.2 Agosto 1989. 12-16.
VYGOTSKY, L. S. ***A formação social da mente****: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* 3a ed. (trad. José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche). São Paulo: Martins Fontes, 1989.

___________. ***Pensamento e linguagem*** (trad. Jeferson Luiz Camargo; rev. técnica: José Cipolla Neto). São Paulo: Martins Fontes, 1987.

WATZLAWICK, P. (org.) ***A realidade inventada:*** *como sabemos o que cremos saber?* (trad. Jonas Pereira dos Santos). Campinas (SP): Editorial Psy II, 1994.

WILDER, R. L. The nature of mathematical proof. ***The American Mathematical Monthly*** **51** 309-23, 1944.

WITTGENSTEIN, Ludwig. ***Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*** (ver. española de Isidoro Reguera). Madrid: Alianza Editorial, 1978.

___________. ***Investigações filosóficas***. (trad.: José Carlos Bruni). São Paulo: Nova Cultural, 1999.

___________. ***Tractatus logico-philosophicus*** (trad. José Arthur Giannotti). São Paulo: Cia Ed. Nacional/ Editora da USP, 1968.

___________. ***Lectures on the foundations of mathematics***. Cambridge, 1939: from the notes of R.G.Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies / edited by Cora Diamond. Reprint. Originally published: Ithaca: N. Y.: Cornell University Press, 1976. (*LFM*).

ZÚÑIGA, Angel Ruiz. Algunas implicaciones de la filosofia y la historia de las matemáticas en su enseñanza. ***Revista de Educación*** **11** (1): 7-19, 1987.