

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



UNICAMP

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS: RELAÇÕES ENTRE HABILIDADE
MATEMÁTICA, REPRESENTAÇÃO MENTAL, DESEMPENHO E RACIOCÍNIO
DEDUTIVO**

**MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA
ORIENTADORA: PROF^a DR^a MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO**

2007

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

TESE DE DOUTORADO

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS: RELAÇÕES ENTRE HABILIDADE
MATEMÁTICA, REPRESENTAÇÃO MENTAL, DESEMPENHO E RACIOCÍNIO
DEDUTIVO**

MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA
ORIENTADORA: PROF^a MÁRCIA REGINA F. DE BRITO

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida
por Maria Alice Veiga Ferreira de Souza e aprovada pela
Comissão Julgadora.

Data: 18/06/2007

Assinatura: _____

Orientadora: **Márcia Regina Ferreira de Brito**

COMISSÃO JULGADORA:

Ricardo Primi

Dilvo Ilvo Ristoff

Maria Celi Chaves Vasconcelos

Elisabete Monteiro de Aguiar Pereira

2007

Ao meu esposo Sotério e às nossas filhas Carolina e Clara que, mais uma vez, praticaram todo o seu amor, carinho e paciência por suportarem as intermináveis horas de privação da esposa e mãe durante a construção desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter colocado em meu caminho pessoas, que, de alguma forma, e cada uma a seu modo, contribuíram com essa pesquisa.

À Prof^a. Dr^a. Márcia Brito por acreditar que eu seria capaz de desenvolver objetos de estudo complexos, intrigantes e fascinantes.

Aos colegas do grupo de pesquisa PSIEM que estiveram dispostos a discutir os obstáculos que antes pareciam intransponíveis, iluminando o caminho antes obscuro, e oferecendo momentos de conforto sempre regados por sorrisos e afetos difíceis de serem esquecidos, mesmo que a mil quilômetros de distância.

Aos professores Ricardo Primi, Elisabete Monteiro, Maria Celi e Dilvo Ristoff e Amir Limana pelas contribuições.

À psicóloga Helena Penteadó que com sua experiência profissional contribuiu significativamente com a coleta e análise de dados.

Aos estudantes envolvidos nessa pesquisa que permitiram que a mesma se realizasse e à Faesa, nas pessoas dos coordenadores Rober Marconi e Luciano Lorenzoni e colegas professores da Ciência da Computação, que permitiram o acesso e conhecimento do cotidiano dessa graduação abrindo-me as portas gentilmente.

À amiga Sumaia pelo apoio e revisões todo o tempo.

À secretária Marta que durante o tempo de realização da pesquisa abraçou brilhantemente os problemas da casa e das filhas, propiciando momentos de maior tranquilidade.

À minha mãe que muito lutou e trabalhou para que meus estudos e sonhos se tornassem realidade.

Às minhas queridas filhas Carolina e Clara, por compreenderem e aceitarem minha ausência temporária.

Ao meu anjo da guarda e marido, Sotério, que sempre me apoiou e valorizou meu esforço, amenizando momentos difíceis.

“You don’t understand anything until you
learn it more than one way.”

Marvin Minsky

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1. O contexto da proposta de investigação	15
Considerações iniciais	15
O problema de pesquisa	17
Algumas justificativas	20
Hipótese	21
Organização dos capítulos	23
2. Revisão de estudos	24
Sobre a habilidade matemática segundo Krutetskii	25
Sobre a representação mental	28
Sobre o desempenho	42
Raciocínio lógico numa perspectiva da Psicologia Cognitiva: uma discussão	43
A solução de problemas	50
Relações entre o êxito em tarefas matemáticas e outras variáveis	58
A metodologia de vídeo em estudos de Educação Matemática	60
Opções emersas dos estudos desse capítulo	63
3. Fundamentação teórica: a teoria de Johnson-Laird e a teoria de Krutetskii	65
A teoria de Philip Nicholas Johnson-Laird : um panorama inicial	65
Johnson-Laird e outros psicólogos cognitivistas: uma visão da evolução	71
Representações proposicionais, modelos mentais e imagens: algumas distinções e considerações	72
Natureza e tipologia dos Modelos Mentais de Johnson-Laird	75
O estudo de Johnson-Laird e a presente proposta de pesquisa	77
A teoria de Vadim Andreevich Krutetskii	78
Teoria geral das habilidades matemáticas	84
A organização do estudo de Krutetskii	86
Método usado na investigação experimental	88
As etapas da solução de problemas	89

4. ENADE e EGRAF: exame nacional de desempenho dos estudantes e exame geral de rendimento acadêmico FAESA	100
Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – ENADE	100
Competências, conhecimentos, saberes e habilidades definidas pela Comissão Assessora para a área de Computação e área Tecnológica	103
Os conceitos atribuídos aos estudantes	103
Outras considerações	104
Importância da Matemática na Formação dos Bacharéis em Computação	104
EGRAF - Exame Geral de Rendimento Acadêmico FAESA	105
O ENADE, o EGRAF e a presente pesquisa	107
5. Sujeitos, instrumentos e procedimentos	109
Sujeitos: outras considerações	110
Objetivos do estudo para os 141 estudantes	111
Objetivos do estudo para os doze estudantes	111
Instrumentos e procedimentos para os 141 estudantes	112
Instrumentos e procedimentos para os doze estudantes	113
O estudo piloto	116
O estudo piloto, a compreensão do texto do problema e o pensar em voz alta	123
Discussão e uma solução para os cinco problemas de Krutetskii	125
Os dados da pesquisa	127
6. Resultados e análises dos dados	129
Resultados e análises dos 141 estudantes	129
O desempenho no EGRAF	130
O desempenho no ENADE (formação geral)	131
O desempenho do ENADE (componente específico)	132
Correlação entre ENADE (formação geral) e o EGRAF	133
Correlação entre ENADE (componente específico) e o EGRAF	134
O raciocínio dedutivo	135
Correlação entre o raciocínio dedutivo e o desempenho no EGRAF	136
Correlação entre o raciocínio dedutivo e o desempenho no ENADE (formação geral)	137

Correlação entre o raciocínio dedutivo e o desempenho no ENADE (componente específico)	138
Resultados e análises dos 12 estudantes	139
A habilidade matemática e a representação mental	139
A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 1	140
A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 3	142
A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 5	145
A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 9	146
A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 12	147
A habilidade matemática e representação mental predominante dos doze estudantes	148
Testes de normalidade para as análises dos desempenhos e do raciocínio dos doze estudantes	151
O desempenho dos doze estudantes no ENADE (formação geral) e a habilidade matemática	151
O desempenho dos doze estudantes no ENADE (componente específico) e a habilidade matemática	152
O desempenho dos doze estudantes no EGRAF e a habilidade matemática	153
O raciocínio dedutivo dos doze estudantes e a habilidade matemática	154
7. Conclusões, limitações e implicações do estudo	156
REFERÊNCIAS	163
DICIONÁRIO	170
ANEXOS	181

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Comparação das características das representações lingüística e pictórica, segundo os autores Eysenck e Keane (1994, p.182).	31
Tabela 2.2 Uma comparação entre as classes de representações externas e internas (Eysenck e Keane, 1994).	32
Tabela 2.3 Eventos críticos na metodologia de vídeo	62
Tabela 3.1 Série I - Percepção da estrutura de problemas sem perguntas por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.233)	91
Tabela 3.2 Série II - Percepção da estrutura de problemas com informação incompleta por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.234)	91
Tabela 3.3 Série III - Percepção da estrutura de problemas com excesso de informação por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.235)	92
Tabela 4.1 Distribuição dos conceitos	104
Tabela 5.1 Relação dos instrumentos para a amostra de 141 estudantes	113
Tabela 5.2 Relação dos instrumentos para a amostra de 12 estudantes.	115
Tabela 5.3 Categorias para a representação mental	119
Tabela 5.4 Categorias para a habilidade matemática	123
Tabela 6.1 Variáveis e o teste de normalidade	130
Tabela 6.2 Desempenho no EGRAF dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF	131
Tabela 6.3 Desempenho no ENADE (formação geral) dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF	132
Tabela 6.4 Desempenho no ENADE (componente específico) dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF	133

Tabela 6.5 Correlação de Pearson entre ENADE (formação geral) e EGRAF	133
Tabela 6.6 Correlação de Pearson entre ENADE (componente específico) e EGRAF	134
Tabela 6.7 Raciocínio dedutivo dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF	136
Tabela 6.8 Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o EGRAF	136
Tabela 6.9 Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o ENADE (formação geral)	138
Tabela 6.10 Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o ENADE (componente específico)	138
Tabela 6.11 Identificação e características dos doze estudantes	139
Tabela 6.12 Habilidade matemática e representação mental	140
Tabela 6.13 Variáveis e o teste de normalidade	151
Tabela 6.14 Habilidade matemática e o desempenho do ENADE (formação geral)	152
Tabela 6.15 Habilidade matemática e o desempenho do ENADE (componente específico)	153
Tabela 6.16 Habilidade matemática e o desempenho no EGRAF	154
Tabela 6.17 Habilidade matemática e o raciocínio dedutivo	155

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Esquema das diferentes representações humanas (Eysenck e Keane, 1994, p.180).	29
Figura 2.2 Representações pictórica e lingüística para o exemplo dado por Eysenck e Keane (1994, p.181).	30
Figura 2.3 Representações pictórica e lingüística do exemplo dado por Eysenck e Keane (1994, p.182)	31
Figura 2.4 Esquema da representação mental segundo a teoria de Johnson-Laird (Eysenck e Keane, 1994, Johnson-Laird, 1983)	33
Figura 2.5 Estímulos utilizados por Shepard e Metzler em sua pesquisa (citados Kosslyn, 1992, p.177)	34
Figura 2.6 Estímulos utilizados na pesquisa de Shepard e Feng (citados por Kosslyn, 1992, p.178)	35
Figura 2.7 Exemplos de problemas de raciocínio lógico indutivo, dedutivo e compreensão em leitura.	50
Figura 2.8 Solução do problema das meias pelo estudantes 1.	54
Figura 2.9 Solução do problema das meias pelo estudantes 3.	55
Figura 2.10 Correlação entre o conhecimento-compreensão e as habilidades para o raciocínio matemático e o cálculo matemático.	59
Figura 2.11 Correlação entre o raciocínio fluido e as habilidades para o raciocínio matemático e o cálculo matemático.	59
Figura 3.1 Programa escrito por dois estudantes de Ciência da Computação, sobre a leitura de três números e posterior verificação da representação ou não dos comprimentos dos lados de um triângulo.	66
Figura 3.2 Esquema do contorno da teoria de Johnson-Laird.	70
Figura 3.3 Esquema de representação da prontidão para determinada atividade (Krutetskii, 1976, p.74, traduzido por Garcia, 1995)	85
Figura 3.4 Solução visual do problema (Krutetskii, 1976, p.279)	96

Figura 5.1 Protocolos escritos do estudante A. na solução do problema das bolinhas.	117
Figura 5.2 Protocolos escritos do estudante Ra. na solução do problema das bolinhas.	117
Figura 5.3 Protocolos escritos do estudante M. na solução do problema das bolinhas.	117
Figura 5.4 Protocolos escritos do estudante MC. na solução do problema das bolinhas.	118
Figura 5.5 Algoritmo para classificação dos estudantes quanto à habilidade matemática.	120
Figura 5.6 Protocolos escritos do estudante R. na solução do problema da biblioteca.	121
Figura 5.7 Protocolos escritos do estudante F. na solução do problema da biblioteca.	121
Figura 5.8 Protocolos escritos do estudante C. na solução do problema da biblioteca.	122
Figura 5.9 Protocolos escritos do estudante CL. na solução do problema da biblioteca.	122
Figura 5.10 Protocolos escritos do estudante N. na solução do problema da biblioteca.	123
Figura 5.11 Relação entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático durante o processo de resolução de problemas - modelo proposto por Brito, Fini e Garcia (1994. p.43).	124
Figura 6.1 Correlação entre o ENADE e o EGRAF - 141 estudantes	135
Figura 6.2 Correlação entre raciocínio dedutivo e o EGRAF - 141 estudantes	137
Figura 6.3 Solução do problema 3 – estudante 1	142
Figura 6.4 Solução do problema 3 - estudante 3	143
Figura 6.5 Solução do problema 3 - estudante 5	146
Figura 6.6 Solução do problema 3 - estudante 9	147
Figura 6.7 Solução do problema 3 - estudante 12	148

LISTA DE SIGLAS

CONAES	Comissão Nacional de Avaliação de Educação Superior
EGRAF	Exame Geral de Rendimento Acadêmico FAESA
ENADE	Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
ENC	Exame Nacional de Cursos
FaesA	Faculdades Integradas Espírito-santenses
IES	Instituição de Ensino Superior
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LISP	List Processing (<u>L</u> I <u>S</u> t <u>P</u> r <u>o</u> cessing)
PSIEM	Psicologia da Educação Matemática
SINAES	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

RESUMO

A presente pesquisa explorou as relações entre o desempenho no ENADE 2005, o desempenho no EGRAF e o raciocínio dedutivo de 141 estudantes ingressantes e concluintes da Ciência da Computação quando envolvidos em atividades que exploraram o pensar matemático. Os instrumentos foram o exame do ENADE, o exame do EGRAF e o teste psicológico GfRLD. Além disso, doze desses sujeitos foram submetidos a uma testagem individual de alguns componentes da habilidade matemática e a representação mental, além das variáveis estudadas para os 141 estudantes. Para a habilidade e a representação foram utilizados cinco problemas da série XIX-B de Krutetskii e uma entrevista semi-estruturada. Durante a aplicação do teste de Krutetskii, os doze estudantes foram solicitados a pensar em voz alta. Foram feitas anotações complementando informações não captadas via gravação de voz e imagem. Os principais resultados mostraram que nove dos doze estudantes foram considerados mais habilidosos e apresentaram uma tendência para representar os problemas de maneira proposicional. Essa representação sempre que usada por estudantes que dominavam os elementos do problema e suas relações levavam-nos ao sucesso em suas soluções. Os desempenhos desses estudantes no ENADE não indicaram estar associados ao fato de serem ingressantes ou concluintes, mas relacionados ao desempenho em nível acadêmico. O raciocínio dedutivo diferiu significativamente entre estudantes concluintes e ingressantes e, dentre os bem e mal sucedidos em atividades acadêmicas. De uma maneira geral, os 141 estudantes tenderam a apresentar associação entre os desempenhos do ENADE e os do EGRAF, que avaliam as inteligências fluido-cristalizadas e cristalizadas, respectivamente.

ABSTRACT

*T*he present research explored the relations between the performance in ENADE 2005, the performance in EGRAF and the deductive reasoning of 141 Freshman and Senior students of the Computer Science course when involved in tasks that explored the mathematic thinking. The instruments were the ENADE exam, the EGRAF exam and the psychological test GfRLD. In addition, twelve of those students were submitted to an individual test of some mathematical ability components and the mental representation, over there the variables studied for the 141 students. For the ability and the representation five of Krutetskii's serie XIX- B series problems and a semi structured interview were used. During the application of the Krutetskii's test, the twelve students were invited to think out loud. Notes were made to complement information not captured by the voice and image videotape. The main results showed that nine out of twelve students were considered more skilful and presented a tendency to represent the problems in a propositional way. This representation when used by students that dominated the elements of the problem and its relations took them to success in their solutions. Those students' performances in ENADE indicated no association with the fact that they were Freshmen or Senior students, but they were related with the level academic performance. The deductive reasoning differed significantly between Freshmen and Senior students and, between well and bad succeeded in academic tasks. In general, the 141 students tended to present association between ENADE performance and EGRAF performance, that evaluate the fluid-crystallized and crystallized intelligences, respectively.

1. O contexto da proposta de investigação

Considerações iniciais

O raciocínio lógico está presente em diferentes atividades humanas, especialmente na solução de problemas de Matemática que o requerem desenvolvido em um nível que permita chegar-se à solução desejada por quem os resolve. O raciocínio, segundo Sternberg (2000, p.368), é um "processo cognitivo pelo qual uma pessoa pode inferir uma conclusão, a partir de um grupo de evidências ou de declarações de princípios". Ele integra o pensamento matemático, que é o caminho desde o reconhecimento dos elementos constituintes de um problema, até sua solução, passando pela superação dos obstáculos aí existentes. As variáveis psicológicas aí envolvidas podem denunciar certos processos cognitivos e, até mesmo, explicar e justificar a solução encontrada por eles.

Ao contrário, levantamentos estatísticos mostram apenas o produto final, os sucessos ou os fracassos no alcance dessas soluções. Como exemplo, numa pesquisa realizada por Rêgo (2000, p.28-29), constatou-se que dos 1287 estudantes matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, nos dois períodos letivos de 1997 e no primeiro de 1998, de quatro cursos das ciências exatas da UFPB, 792 foram reprovados por média ou abandonaram a disciplina, o que corresponde a 61,5%. Da mesma forma, das oito disciplinas matemáticas que compõem a estrutura curricular do curso de Ciência da Computação da Faesa, seis apresentaram índices de reprovação e desistência entre 50,42% e 90,91% no primeiro período letivo de 2002.

Igualmente na UFES, somente a disciplina de Noções de Lógica, no mesmo curso, reprovou 93,02% dos estudantes no primeiro período letivo de 1997. Por outro lado, alguns outros estudantes apresentaram alto desempenho nessas disciplinas, facilitando o acesso a outras esferas de estudo que dependem diretamente desse sucesso. É o caso de estudantes de graduação em Matemática

da UFES que obtiveram conceito "A", na classificação do "Provão"¹ do Ministério da Educação, desde que esse sistema de avaliação foi implantado. Os números assim expostos falam pouco da dinâmica do processo de construção do conhecimento pelos indivíduos, seja no sucesso seja no fracasso. Nenhum desses levantamentos informa as causas que levaram os estudantes ao resultado apresentado. Interessante seria associar a eles um estudo dos processos subjacentes ao comportamento observável, que delineie, pelo menos em parte, a maneira que os leva para esse sucesso ou fracasso.

Infelizmente, estudos desse nível são inviáveis tanto pelo lado financeiro quanto pelo temporal. Mesmo assim, o Ministério da Educação parece desejar aprimorar as informações advindas dos "Provões", que avaliavam apenas o rendimento final de graduandos concluintes, ao instituir um novo exame - ENADE², que avalia também os ingressantes, numa tentativa de aferir o rendimento ao longo da formação superior nos conteúdos programáticos e habilidades desenvolvidas. No caso dos estudantes de Ciência da Computação, a habilidade matemática é de fundamental importância por integrar a formação desse profissional da informação.

Uma dificuldade para o estudo de Matemática é o seu caráter cumulativo e hierárquico dos conteúdos matemáticos ao longo das diferentes fases da educação escolar, que fazem com que novos conteúdos dependam do domínio de outros anteriormente estudados. Por outro lado, o raciocínio matemático é desenvolvido em meio ao processo de solução de problemas, que, por sua vez, exigem domínio de ferramentas antes aprendidas. Essa imbricada relação pode influenciar a "prontidão" do sujeito diante de um problema matemático e, conseqüentemente, sua performance como resolvidor de problemas. Nesse caso, é preciso considerar a formação e desenvolvimento de condições necessárias e suficientes para atingirem essa condição - a de bons resolvidores

¹ O "Provão", como é popularmente conhecido, é uma prova que integra o Exame Nacional de Cursos e foi substituído pelo ENADE a partir de 2004. O ENADE é um exame que integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), e é elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) que está ligado à Comissão Nacional de Avaliação de Educação Superior (CONAES) do Ministério da Educação.

² www.inep.gov.br.

de problemas. É aí que se pode contar com a Psicologia Educacional como objeto interdisciplinar para estudar fenômenos como a habilidade matemática, a representação mental, o desempenho e os diferentes raciocínios, que integram o pensamento durante a solução de problemas nessa disciplina, para citar algumas variáveis. Foi o caso de Vendramini (2000), professora de Matemática e pesquisadora na área de Psicologia da Educação Matemática, que investigou as atitudes e habilidades matemáticas – constructos psicológicos - na aprendizagem de conceitos de Estatística, frente à carência de habilidades básicas apresentadas por estudantes universitários para interpretar objetos estatísticos.

Seguindo na mesma direção, o interesse da presente pesquisa volta-se para os processos psicológicos, uma vez que a Psicologia é a ciência capaz de explicar e fundamentar constructos, como os anteriormente citados e eleitos para esse estudo - habilidade matemática, representação mental, raciocínio e desempenho, apresentado por estudantes de nível superior que solucionam problemas de Matemática e que vêm apresentando as performances antes comentadas. Um estudo nesse nível acrescentaria informações aos levantamentos estatísticos como o do ENADE, relevantes, mas insuficientes, se despidos de um delineamento dos processos cognitivos utilizados pelas pessoas no desempenho dessas tarefas.

O problema de pesquisa

A Psicologia é a ciência que estuda os fenômenos psíquicos e do comportamento. Uma de suas ramificações, a Psicologia Cognitiva, interessa-se por estudos sobre a natureza da inteligência humana e como ela trabalha. Nesse campo, procura-se estudar o pensamento e a solução de problemas em meio a atividades específicas. Uma idéia fundamental da Psicologia Cognitiva, que interessa para essa pesquisa, é que uma representação mental adequada de um problema é um passo decisivo para sua solução (Chi & Glaser, 1992). Essa representação está associada aos processos de pensamento.

De um outro lado, a Educação Matemática é uma área preocupada com as dificuldades no aprendizado de objetos matemáticos que envolvem tanto questões inerentes aos seres humanos, quanto questões ligadas ao conhecimento das estruturas matemáticas. Assim, a necessidade de conjugação desses conhecimentos para investigações sobre o aprendizado em Matemática, numa perspectiva de constructos psicológicos, fez surgir o grupo de estudos Psicologia da Educação Matemática - PSIEM, que investiga, entre outras coisas, a solução de problemas do ponto de vista do pensamento, o desenvolvimento de habilidades e outras questões cognitivas ligadas à aprendizagem humana de Matemática. Essa perspectiva envolve saber: como os sujeitos realizam e organizam tarefas matemáticas; quais habilidades são requeridas para solução de problemas; que diferentes mecanismos do pensamento são usados pelos sujeitos em meio a solução desses problemas; que relações existem, se existirem, entre as diferentes variáveis psicológicas como a habilidade matemática, a representação mental, o raciocínio lógico etc.

Diante do exposto e preocupando-se em associar dados quantitativos a um estudo do processo de construção do conhecimento por mentes humanas, foram investigados 141 graduandos da Ciência da Computação da Faesa, uma instituição de ensino superior do Estado do Espírito Santo nos seguintes aspectos...

Que nível de desempenho os estudantes apresentaram ao solucionar problemas de sua área de formação no EGRAF?

Que nível de desempenho os estudantes apresentaram ao solucionar problemas de sua área de formação no ENADE?

Quais níveis de desempenho na prova do ENADE estavam associados ao nível de desempenho na prova do EGRAF?

Que nível do raciocínio dedutivo os estudantes apresentaram ao solucionar problemas que o evidenciem?

Que nível do raciocínio dedutivo os estudantes apresentaram quando comparados com o desempenho no EGRAF?

Quais níveis do raciocínio dedutivo estavam associados ao nível de desempenho no ENADE?

Dos 141, doze foram selecionados para um estudo mais detalhado e voltado para os seguintes aspectos...

Que habilidade matemática os estudantes apresentaram, ao solucionarem problemas de Matemática que evidenciem o raciocínio lógico?

Como os problemas matemáticos que evidenciam o raciocínio lógico foram representados mentalmente pelos estudantes?

Qual ou quais representações mentais predominaram durante a solução de problemas matemáticos de estudantes considerados mais habilidosos e estudantes considerados menos habilidosos?

Que nível de desempenho os estudantes mais e menos habilidosos apresentaram, ao solucionarem problemas de sua área de formação no ENADE?

Que nível de desempenho os estudantes mais e menos habilidosos apresentaram, ao solucionarem problemas de sua área de formação no EGRAF?

Que nível do raciocínio dedutivo os estudantes mais e menos habilidosos apresentaram, ao solucionarem problemas que o evidencie?

Algumas justificativas

Acredita-se que o cenário na aprendizagem de Matemática, por si só, já seja um forte argumento para o desenvolvimento de pesquisas como a aqui proposta. Numa perspectiva mais ampla, a Psicologia, mais especificamente, a Psicologia Cognitiva desvenda aos professores novas possibilidades de controle sobre a produção de conhecimento e desenvolvimento de habilidades de seus estudantes nessa disciplina escolar, que vão além do produto final estabelecido em dados quantitativos. Conforme Boruchovitch (2001, p.466) "... os professores têm pouco conhecimento de como a inteligência humana se expressa, bem como desconhecem o real papel do contexto educacional no desenvolvimento da mesma." e, de acordo com Grau (1997, apud Brito e Garcia, 2001, p.46)

se a aprendizagem depende da maneira como a informação é processada, então os processos cognitivos dos estudantes deveriam ser a maior preocupação dos professores. Os professores deveriam preocupar-se não apenas com 'o que' os estudantes aprendem, mas também com o 'como' eles aprendem.

Assim, conhecer esse contexto e em que medida as variáveis psicológicas envolvidas na solução de problemas sofrem alterações, pode ter implicações diretas para o ensino em sala de aula pelo lado prático (Mayer, 1992, p.146). É indicado, portanto, que a conjugação de esforços das áreas antes mencionadas seja capaz de aumentar a compreensão de como os estudantes processam as informações, para então, sugerir como lhes ensinar de maneira mais significativa.

No entanto, as contribuições de uma pesquisa desse porte podem e devem se estender para outras áreas do conhecimento. A Psicologia Cognitiva faz parte do que alguns pesquisadores chamam de Ciência Cognitiva, que é a soma das áreas de Psicologia Cognitiva, Inteligência Artificial, Linguística, Neurociência, Antropologia Cognitiva e Filosofia da Mente. Essas seis áreas preocupam-se em conhecer os mistérios da mente e como se dão a aprendizagem, a linguagem e a solução de problemas. Pesquisadores como Thagard (1998, p.183) afirmam que

não podemos esperar muito progresso nestes problemas difíceis de pesquisa com um enfoque limitado numa única disciplina, mas devemos esperar um progresso posterior na integração da pesquisa psicológica, computacional, neurológica, filosófica, lingüística e antropológica que caracterizaram as melhores investigações na Ciência Cognitiva. Como a mente trabalha é o maior quebra-cabeça que os seres humanos já tentaram montar, e as peças exigem contribuições de muitas áreas.

Compartilha-se da opinião de Thagard dizendo que a presente pesquisa conta com interseções como a da Inteligência Artificial que é um dos desencadeadores da teoria computacional da mente. Ainda nesse sentido, investigações em Psicologia Cognitiva podem auxiliar os neurocientistas a desvelarem o funcionamento cerebral, uma vez que existe imbricada relação entre mente e cérebro; os antropólogos cognitivos a estudarem aspectos culturais do pensamento; os filósofos da mente a expandirem os conhecimentos entre as relações mente-corpo; os lingüistas, levando-se em conta que muito do que se pensa está associado a uma palavra ou símbolo.

De certa forma, pesquisas em Educação acabam fazendo interface com outras áreas, principalmente, com as que necessitam conhecer mais sobre como o homem pensa, processa, representa, alcança ou não resultados desejados. Daí a importância de se conhecer mais sobre variáveis como as investigadas no presente estudo e as possíveis relações entre elas.

Moreira (1996, p.106) levantou possível aplicação e contribuições que essas informações poderiam trazer para o contexto educacional, dizendo que

no ensino, é preciso desenvolver modelos conceituais e também materiais e estratégias instrucionais que ajudem os aprendizes a construir modelos mentais adequados. Na pesquisa, é necessário [...] procurar entender os modelos confusos, 'bagunçados', incompletos, instáveis, que as pessoas realmente têm.

De um outro lado, Krutetskii (1976) afirmou ser possível ajudar estudantes a desenvolver suas habilidades matemáticas a partir da seleção de exercícios apropriados, mas para isso é preciso conhecê-los, localizar suas dificuldades e traçar boa estratégia de ação, contando com bons livros e bons profissionais.

Hipótese

Os sujeitos eleitos para a pesquisa cursavam a graduação de Ciência da Computação. Por isso, convém conhecer as expectativas dos que delinearam o

perfil desses futuros profissionais e por que caminhos sua formação acadêmica deveria passar.

Segundo as Diretrizes Curriculares de Cursos da Área de Computação e Informática, graduações em Informática devem ter como meta formar pessoas capazes de desenvolver ferramentas e as aplicarem na área tecnológica. O teor do documento diz que

a matemática, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc) [...] Muitos conceitos computacionais se baseiam em modelos matemáticos bem conhecidos como grafos e aritmética intervalar. [...] A matemática sobre os reais, matemática do contínuo (cálculo diferencial e integral, álgebra linear, geometria analítica, cálculo numérico, etc), tem importância em áreas específicas da computação [...].(www.mec.gov.br)

Ainda a respeito da base de formação do cientista da computação, o Ministério da Educação diz que

o **conhecimento básico** adquirido, [n]esta área de formação [a tecnológica] visa mostrar a aplicação do mesmo no desenvolvimento tecnológico. O desenvolvimento tecnológico, de um lado, visa criar instrumentos (ferramentas) de interesse da sociedade ou robustecer tecnologicamente os sistemas de computação para permitir a construção de ferramentas antes inviáveis ou ineficientes. [grifo da pesquisadora] (www.mec.gov.br)

Assim, espera-se que a estrutura curricular possibilite aos estudantes a formação necessária à qual se incluem as habilidades matemáticas, uma vez que os instrumentos e objetos da informática são diretamente utilizados em contextos específicos que têm como pré-requisito disciplinas matemáticas. É nesse sentido que se destaca a hipótese de que estudantes com maior habilidade matemática devem apresentar maior desempenho na prova do ENADE (componente específico) e estudantes com menor habilidade, menor desempenho nesta prova, partindo-se da premissa de que essa prova também busca avaliar a capacidade de aplicação dos conteúdos curriculares. A esse respeito, remete-se o leitor para o capítulo quatro que aborda mais profundamente essa proposta do Ministério da Educação.

Organização dos capítulos

Esse capítulo mostrou dados quantitativos sobre o desempenho de estudantes em disciplinas matemáticas escolares. Tal contexto reforça a idéia de se ampliar o conhecimento sobre como eles pensam e resolvem problemas de Matemática, fazendo emergir a presente investigação, questões relacionadas a esse estudo e hipótese. O segundo capítulo expõe estudos e pesquisas que possuem interseção com o eixo - habilidade matemática, representação mental, desempenho, raciocínio e questões relevantes sobre a lógica e a solução de problemas, por exemplo. Desses estudos foram selecionadas as teorias de base para a investigação, cuja apresentação compõe o terceiro capítulo, seguido de uma abordagem sobre a proposta de avaliação do Ministério da Educação, denominada ENADE e, o exame desenvolvido pela instituição de ensino superior que os sujeitos da pesquisa pertencem - Faesa, denominado EGRAF, no quarto capítulo. Em seguida, o quinto capítulo versa sobre os sujeitos, instrumentos e procedimentos necessários para responder ao problema de pesquisa e confirmar ou não a hipótese. Logo após, apresentam-se as conclusões, algumas limitações e implicações do estudo, as referências, um breve dicionário contemplando os termos mais importantes e passíveis de confusão e ambigüidade, e, finalmente, instrumentos metodológicos aplicados, dentre outros documentos constantes nos anexos.

2. Revisão de estudos

O levantamento bibliográfico revelou interseções do objeto desta pesquisa, com outros estudos, contribuindo para a escolha das teorias de base mais adequadas que apoiaram a pesquisa.

Foram expostos estudos sobre habilidade matemática segundo a teoria krutetskiiana, sobre representação mental, desempenho e raciocínio evidenciado na solução de problemas, dentre outros relevantes para a pesquisa.

Ao se falar de habilidade na ótica de Krutetskii, deve-se levar em conta que o termo na língua russa, não possui tradução correspondente em nenhuma outra língua, sendo a mais próxima, em inglês, "ability" e, em português, "habilidade". No entanto, o significado atribuído por Krutetskii a esse termo, não é exatamente o mesmo trabalhado por outros autores ao usarem as palavras ability ou habilidade. Mayer (1992, p.144), por exemplo, referiu-se à habilidade matemática para a solução de problemas como o conhecimento específico necessário, trazido pelo sujeito para a tarefa matemática a ser solucionada, que deve passar, pelos passos de tradução, integração, planejamento e execução. Já Krutetskii entendeu a habilidade matemática como um conjunto de constructos psicológicos, cuja estrutura é constituída por componentes, que combinados, vêm formar o que ele designou como a habilidade matemática. Por esse motivo, a revisão nesse âmbito foi feita somente para estudos que versavam habilidades segundo esse teórico, revelando a opção para esse tema.

O mesmo não ocorreu com as representações mentais ou internas. Foram localizados estudos relevantes baseados em teorias de representação, que contribuíram para esclarecimentos pertinentes no desenrolar da pesquisa, além daqueles que trabalharam com a teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird, a opção teórica para esse pilar.

Para o desempenho, priorizou-se constar um estudo em torno da disciplina de Matemática, pois as próprias estatísticas em torno do assunto e algumas abordadas no capítulo um, falam por si só a respeito dos resultados encontrados na aprendizagem escolar brasileira.

O raciocínio faz parte do eixo principal deste trabalho, mas, que, por sua vez, possui interseção com temas relevantes como a lógica e a solução de problemas. Por isso, vale discorrer sobre eles e definir seus usos na pesquisa.

Apesar de a solução de problemas não ser o enfoque, uma atividade mental matemática só se evidencia quando o sujeito está envolvido em problemas de Matemática. Por isso, abordou-se sobre a maneira como alguns autores trataram esses tópicos, para então, selecionar aqueles que complementaram ou deram suporte às teorias de base do estudo.

Julgou-se oportuno agrupar a presente revisão, levando-se em conta o enfoque principal dado para cada trabalho de acordo com o eixo de interesse - habilidade matemática, representação mental, desempenho e raciocínio lógico.

Dentro de cada tópico optou-se por priorizar uma ordem cronológica crescente, de acordo com as datas das publicações, sempre que possível.

Sobre a habilidade matemática segundo Krutetskii

Alves (1999) estudou a influência do desenvolvimento de alguns componentes da habilidade matemática - percepção para relacionar fatos concretos do problema, generalização, encurtamento do raciocínio e memória - sobre o desempenho de cinquenta e três estudantes concluintes do Ensino Médio, na solução de problemas aritméticos.

Os resultados não revelaram alta correlação entre os componentes da habilidade estudados e o desempenho. Além disso, do total de estudantes, Alves selecionou nove para investigar o raciocínio verbal concluindo que estes apresentavam maior dificuldade na obtenção da informação matemática, após analisar os estágios da solução de problemas em que os sujeitos apresentavam maior dificuldade. Por isso, ponderou que a influência sobre o desempenho dos outros quarenta e quatro sujeitos poderia ter sido pela mesma razão dos nove.

Araujo (1999) estudou a existência de relações entre a escolha profissional, as habilidades matemáticas e as atitudes em relação a essa disciplina escolar, dentre estudantes finalistas do Ensino Médio e estudantes do Ensino Superior.

Além disso, investigou a forma como esses estudantes, de diferentes áreas e de diferentes níveis de habilidade matemática, solucionavam problemas algébricos.

Os resultados que interessam para a presente pesquisa, indicaram que os estudantes das ciências exatas obtiveram desempenho superior aos das biológicas que, por sua vez, superaram os de humanas no teste algébrico. Por esse motivo, a escolha dos sujeitos para a presente pesquisa, propôs investigar estudantes das ciências exatas, uma vez que havia o desejo de se localizar sujeitos com alta habilidade matemática e com alto desempenho, para descobrir se essa característica tem alguma relação com a representação interna que constroem quando solucionam problemas de Matemática.

Araujo (1999) declarou encontrar relação positiva entre a atitude e o desempenho em relação à Matemática dentre estudantes das áreas de exatas e biológicas, nos dois âmbitos educacionais. Os estudantes de humanas eram em sua maioria do curso de Pedagogia e apresentaram atitudes negativas em relação à Matemática. Esse resultado talvez venha explicar o cenário do ensino de Matemática em escolas brasileiras, tendo em vista que esses futuros professores além de terem "zerado" o teste algébrico, afirmaram que a falta de entendimento dos objetos algébricos, não prejudicaria ou não alteraria suas percepções sobre esses conceitos e suas noções da utilidade para o desenvolvimento da Matemática.

Vendramini (2000), identificou a necessidade de estudantes universitários possuírem habilidades básicas para um bom desempenho acadêmico em disciplinas matemáticas e, mais especificamente, em Estatística. Dentre essas habilidades, mencionou a compreensão em leitura, argumentação verbal e escrita, e raciocínio lógico.

Além disso, declarou ser importante que estudantes universitários tivessem atitudes positivas frente a essas disciplinas, de maneira que viessem a beneficiar variáveis – psicológicas ou outras – inerentes ao processo de aprendizagem. No entanto, muitas vezes, os estudantes demonstravam pouco interesse, dificuldades de diferentes ordens para a condução das disciplinas, desconhecimento do significado e sua importância na formação acadêmica que buscavam, podendo

prejudicar o desenvolvimento de atitudes positivas. Como professora de Matemática, procurou minimizar os efeitos de um cenário desfavorável ao sucesso, implementando ações específicas durante os períodos letivos, que levassem ao êxito. Entretanto, para uma ação ter maiores chances de sucesso, é preciso conhecer profundamente o contexto, nesse caso, as habilidades e atitudes de estudantes universitários na disciplina de Estatística.

Apoiada em estudos como os de Garfield (1994, citado por Vendramini, 2000) que mostrou que as atitudes de universitários podiam ser alteradas mediante estratégias voltadas para o ensino de Estatística e, de Krutetskii (1976) que, a partir de um estudo longitudinal com crianças altamente capazes em Matemática desenvolveu ampla pesquisa, Vendramini (2000) investigou relações entre as atitudes em relação à Estatística, as habilidades matemáticas e a aprendizagem de conceitos estatísticos. Dentre os resultados revelados e que interessam para a presente pesquisa, pode-se destacar que quanto mais positivas eram as atitudes dos sujeitos em relação à Estatística e quanto melhor o desempenho na solução de problemas matemáticos, melhor era o desempenho desses sujeitos em Estatística.

Esse estudo mostrou que os investimentos educacionais que elevem as habilidades matemáticas e que influenciem positivamente as atitudes em relação às disciplinas que tratem de conteúdos matemáticos podem vir a contribuir para o desempenho desses sujeitos nessa aprendizagem. Esse fato torna-se especialmente relevante quando o desempenho matemático é um suporte para a formação que procuram nas universidades, como aquelas inseridas nas ciências exatas.

Vendramini (2000) tomou como sujeitos de sua investigação, estudantes universitários das três áreas do conhecimento - exatas, saúde e humanas. De exatas, estudou estudantes da Ciência da Computação – primeiro período letivo - e da Mecatrônica – terceiro período letivo – porque a disciplina de Estatística foi ofertada nesse nível da respectiva estrutura curricular. Os estudantes do primeiro período obtiveram notas inferiores aos do terceiro período, sugerindo que os

sujeitos que estudam Estatística em séries mais avançadas estavam mais bem preparados.

Semelhantemente, Rezi (2001) preocupou-se com as relações entre o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria e os componentes, percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais, da habilidade matemática. Os resultados de seu estudo apontaram uma relação linear entre esses constructos psicológicos, ou seja, quanto maior o desenvolvimento dos sujeitos em Geometria, melhor era o seu desempenho em provas que avaliavam a percepção geométrica, a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais e o raciocínio.

Sobre a representação mental

Eysenck e Keane (1994) organizaram um texto sobre as características e propriedades das representações que o homem pode construir. Apesar de esse estudo não ter sido cronologicamente o primeiro, iniciou-se por ele, pelo seu caráter abrangente no assunto. Uma representação "é uma notação ou sinal ou conjunto de símbolos que 're-presenta' algo para nós, ou seja, ela representa alguma coisa na ausência desta coisa; normalmente, esta coisa é um aspecto do mundo externo ou de nossa imaginação". Essas representações ocorrem internamente e/ou externamente e são subdivididas em classes, conforme o esquema a seguir.

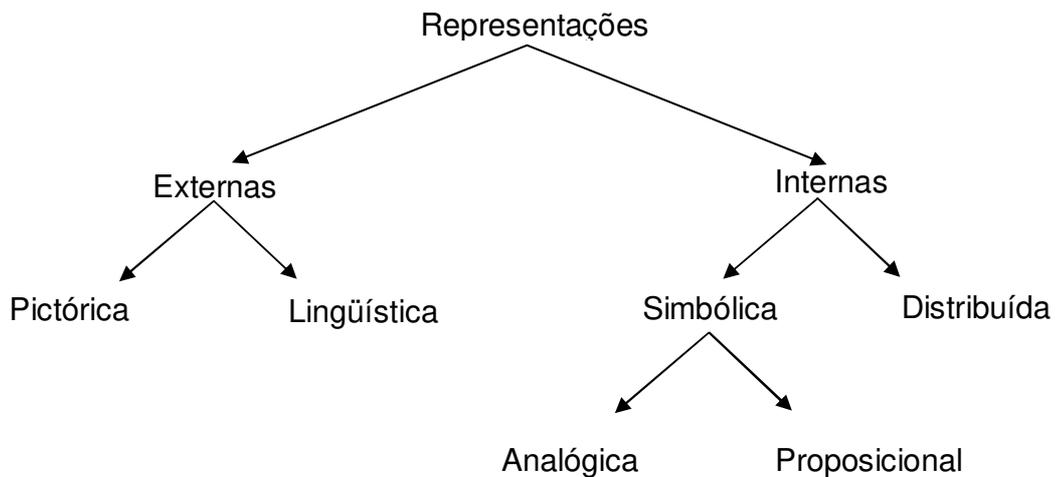


Figura 2.1: Esquema das diferentes representações humanas (Eysenck e Keane, 1994, p.180).

Apesar de o interesse nesse trabalho ser pela representação interna, conhecer a externa ajudou na compreensão da outra. Sternberg (2000, p.151) parece também pensar assim, uma vez ter afirmado que,

naturalmente os psicólogos cognitivos estão interessados principalmente em nossas representações mentais internas daquilo que conhecemos, mas considerar primeiramente como as representações externas em palavras diferem de tais representações em figuras pode auxiliar nossa compreensão.

Assim, em um nível mais alto, podem-se distinguir as representações externas utilizadas no dia-a-dia como sendo pictóricas ou lingüísticas. As primeiras em forma de diagramas ou figuras, e as últimas, em palavras. Um exemplo dado pelos autores, apresentado na figura 2.2 (1994, p.181), sugere que se imagine que alguém tivesse que alocar pessoas em um andar de um edifício comercial contendo várias salas. Ela poderia planificar um diagrama, que esboçasse as diferentes localizações relativas de cada uma das salas, ou usar palavras que descrevessem a mesma situação.

Mark 118	Kerry 119	Judith 120	Illona 121	<p>Mark ficará na sala 118, ao lado à esquerda de Kerry na 119, que por sua vez, localiza-se à esquerda de Judith na 120...</p> <p>os quatro primeiros encontram-se de frente para os quatro últimos da seguinte forma: Mark na 118 está localizado em frente à Marc, na 125,...</p>
corredor				
Marc 125	Hank 124	Ingrid 123	122	

representação pictórica

representação lingüística

Figura 2.2: Representações pictórica e lingüística no exemplo dado por Eysenck e Keane (1994, p.181).

Embora essas duas formas de representação externa cumpram com a tarefa de descrever a situação, o diagrama parece transmitir maiores e mais facilmente informações do que a descrição por linguagem, por fornecer a posição relativa entre as salas, enquanto na descrição lingüística, gastariam muito mais sentenças para representar a mesma informação. Pode-se dizer que as figuras e os diagramas são análogos à situação real ou imaginada. Já a forma lingüística não tem essa analogia, pois a relação entre o sinal lingüístico e o que ele representa é arbitrária, ou seja, pode-se atribuir uma forma externa qualquer - combinação de letras - para representar qualquer objeto do mundo externo ou imaginado, com exceção para a formação histórica da língua de um povo. De qualquer forma, qualquer representação, seja externa ou interna, representa apenas alguns aspectos do mundo, ou seja, elas são ditas ou vistas de uma forma particular para os sujeitos. Uma outra pessoa poderia ter descrito o mesmo ambiente em função da localização das portas dos elevadores, escada, extintores de incêndio etc.

Outras diferenças se verificaram entre essas duas representações. Eysenck e Keane (1994, p.182) analisaram-nas com um exemplo da situação de um livro sobre uma mesa. A figura 2.3 esboça uma possível representação pictórica e lingüística para esse exemplo. Em seguida, na tabela 2.1 é feita uma comparação entre diferenças nas características mencionadas nessas representações.

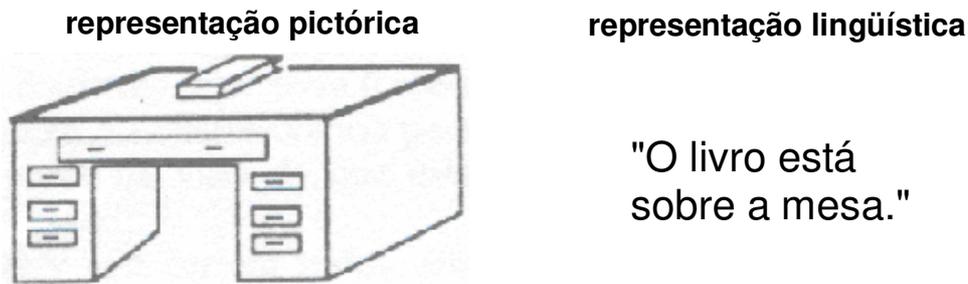


Figura 2.3: Representações pictórica e lingüística do exemplo dado por Eysenck e Keane (1994, p.182)

Tabela 2.1: Comparação das características das representações lingüística e pictórica, segundo os autores Eysenck e Keane (1994, p.182)

Lingüística	Pictórica	Características
1 Símbolos individuais	Nenhum símbolo individual	As letras são a menor unidade da representação lingüística, enquanto na pictórica, não há unidade específica que seja a menor possível.
2 Explícita, precisa de símbolos para a representação	Implícita, não precisa de símbolos individuais para a relação	A lingüística tem símbolos explícitos para a representação; a palavra "sobre" entre mesa e livro é necessária na lingüística, enquanto na pictórica a sua posição é mostrada implicitamente.
3 Gramatical, regras claras para a combinação dos tipos de símbolos	Não existem regras claras de combinações ou de tipos de símbolos	Na lingüística há um conjunto de regras, a gramática. Não podemos dizer "sobre esta mesa o livro" e ter uma combinação que signifique algo. Na pictórica, se existir alguma regra de combinação, elas são muito mais informais do que aquelas que se aplicam à lingüística.
4 Abstrata	Concreta	Na lingüística a informação pode ter sido adquirida a partir de qualquer uma das formas de percepção (tato, visão, olfato etc), enquanto na pictórica, mesmo a informação adquirida de diferentes fontes perceptuais, ela está fortemente relacionada com a modalidade visual.

As representações mentais podem ser analisadas sob a perspectiva das representações simbólicas ou pelas representações distribuídas. Segundo Eysenck e Keane (1994, p.179), muitos pesquisadores já demonstraram que essas duas representações são iguais, com exceção para o nível de detalhamento, por isso, os autores concentraram-se no ponto de vista simbólico por ser mais bem-elaborado e tradicional.

As representações simbólicas podem ser divididas em analógicas e proposicionais. As analógicas podem ocorrer em formas como imagens auditivas

ou modelos mentais. Já as proposicionais são representações mais abstratas, semelhantes à linguagem (apenas semelhantes!). Não são palavras, mas ao contrário, captam o conteúdo abstrato, ideacional, traduzido como o conceito subjacente a uma situação. De qualquer forma, seja a representação analógica ou proposicional, lingüística ou pictórica, elas representam apenas algum aspecto do ambiente externo ou imaginado pelo sujeito.

Há algumas semelhanças entre os tipos de representação. Por isso, é possível um paralelo entre as classes de representações externas e internas, que compõe a tabela 2.2:

Tabela 2.2: Uma comparação entre as classes de representações externas e internas (Eysenck e Keane, 1994).

Lingüística/Proposicional	Pictórica/Analógica
1 individuais	não são individuais
2 explícitas	podem representar implicitamente as coisas
3 combinam-se de acordo com regras	têm regras de combinação não muito rígidas
abstratas (a proposicional é abstrata no sentido de que pode representar informações advindas de qualquer	concretas (a analógica é concreta no sentido
4 modalidade, mas, ao contrário das palavras de uma língua, elas normalmente se referem a entidades distintas e sem ambigüidade)	de estarem ligadas a uma modalidade específica dos sentidos)

Alguns psicólogos cognitivos entendem que as representações internas podem ser explicadas segundo uma perspectiva proposicional e por imagem (analógica). Johnson-Laird propôs uma terceira construção também analógica - o modelo mental. Nessa teoria, as proposições são entendidas como representações verbalmente expressáveis e próximas da forma superficial da linguagem natural. As imagens bem como os modelos mentais são vistos como específicos, analógicos e concretos. A diferença é que as imagens são modelos mentais vistos a partir de uma perspectiva específica. Para Eysenck e Keane (1994, p.212) o "modelo de Johnson-Laird para as representações é útil para se fazer previsões sobre os diferentes tipos de representações que as pessoas

provavelmente utilizarão em diferentes situações de tarefas". Eis o motivo da opção por essa teoria para a pesquisa aqui apresentada. O esquema na figura 2.4, resume a maneira como Johnson-Laird subdividiu as representações internas.

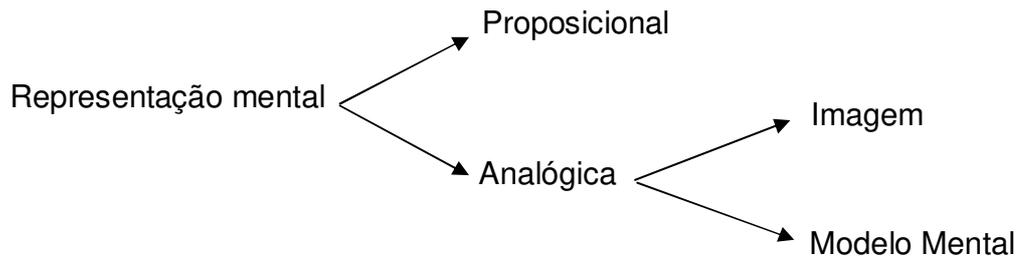


Figura 2.4: Esquema da representação mental segundo a teoria de Johnson-Laird (Eysenck e Keane, 1994, Johnson-Laird, 1983)

Eysenck e Keane (1994) forneceram um panorama amplo sobre as representações mentais, na perspectiva de diferentes teóricos. Crê-se ser pertinente, adentrar em tópicos mais específicos desse assunto. Um dos que vale à pena destacar é a discussão sobre o que seja uma imagem mental. De acordo com Kosslyn (1992) a imagem mental pode ser discutida segundo suas ligações com a percepção ou segundo sua própria estrutura. Para os pesquisadores adeptos à primeira concepção, a capacidade de formação de imagens compartilha alguns dos mecanismos cerebrais usados na percepção, podendo, por isso, sofrer interferências destas. Estudos posteriores tenderam a diferenciar esses dois constructos em algum aspecto, apesar de ainda guardarem certas similaridades quanto ao uso no cérebro.

Já o segundo enfoque trabalha com a idéia de que as imagens experienciadas pelas pessoas parecem possuir muitas das propriedades das fotografias. Mas, como não são materialmente as próprias fotografias, como poderiam possuir tais propriedades? Para resolver esse impasse, os psicólogos cognitivos tangenciaram essa discussão afirmando que seja lá o que for que os sujeitos imaginassem, isso produzia uma representação que, por sua vez, possuía propriedades funcionais. Pesquisadores como Roger Shepard e Metzler (citados por Kosslyn, 1992, p.176), estudaram as propriedades das imagens mentais segundo suas transformações. Pares de figuras, como ilustrado na figura 2.5,

eram apresentadas aos sujeitos, que deveriam decidir tão rápido quanto pudessem, se as figuras possuíam a mesma forma. Para resolver, os sujeitos teriam que rotacionar mentalmente uma das figuras a fim de compará-las. Os resultados revelaram que o tempo de resposta aumentava de acordo com o número de rotações necessárias para o julgamento pelos sujeitos.

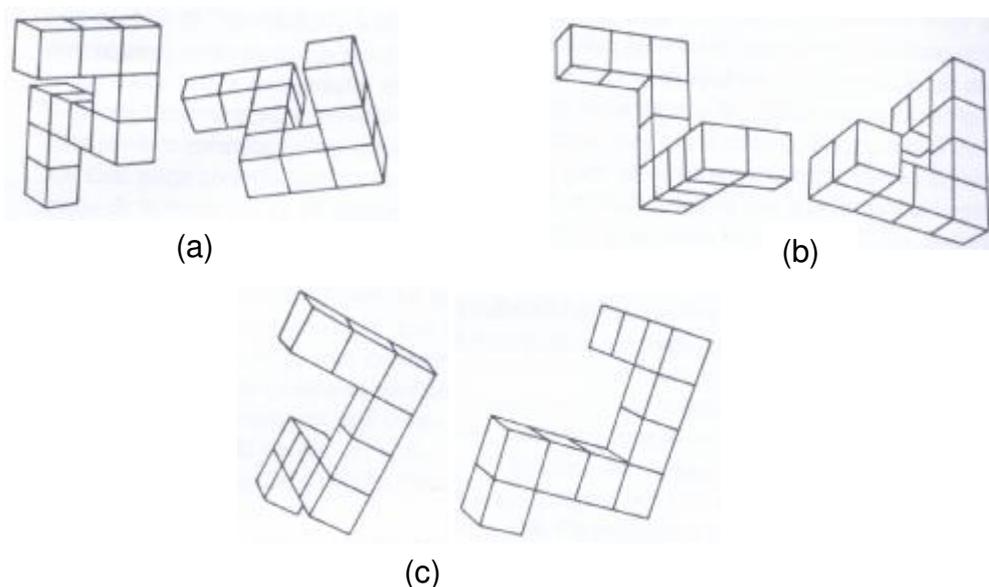


Figura 2.5: Estímulos utilizados por Shepard e Metzler em sua pesquisa (citados por Kosslyn, 1992, p.177)

Uma implicação dessa experiência, que se tornou clássica na Psicologia Cognitiva, é que as imagens comportavam-se como se fossem rígidas fisicamente, caso contrário, não haveria justificativa para os sujeitos terem realizado etapas de rotação mental. Outros experimentos realizados agora por Shepard e Feng (citados por Kosslyn, 1992, p.176) confirmaram os resultados anteriores. Os sujeitos deveriam responder se as duas setas de cada caixa mostrada na figura 2.6 se encontrariam. Os quadrados sombreados informavam o fundo da caixa.

Os resultados revelaram uma linearidade entre o tempo de decisão e o número de quadrados que deveria ser "dobrado" mentalmente. Essas duas experiências mostram que as imagens podem funcionar no cérebro como modelos tridimensionais sem que sejam manipuladas em um espaço tridimensional. Nas palavras de Kosslyn (1992, p.178) "o cérebro opera de um modo que pode imitar

as propriedades de um espaço tridimensional", assim como um computador ou uma televisão que esboça figuras tridimensionais, mas não possui tal arranjo em seu interior.

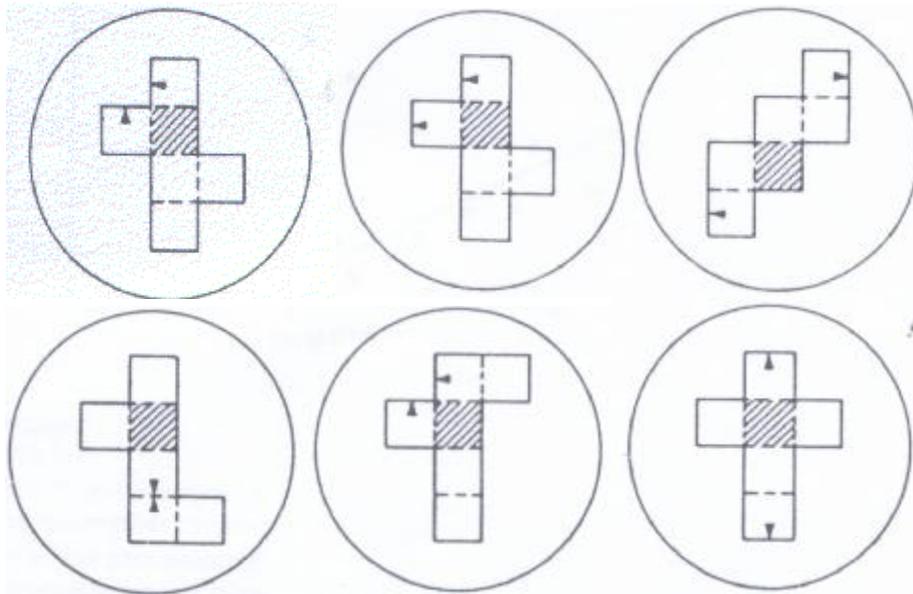


Figura 2.6: Estímulos utilizados na pesquisa de Shepard e Feng (citados por Kosslyn, 1992, p.178)

Esses e outros resultados de pesquisadores que buscavam descobrir propriedades das imagens tornaram possível enunciar que se as imagens funcionavam como figuras ou modelos, é porque deveriam descrever informações. Embora as informações fossem preservadas pelas imagens, nós as "vimos" sob determinada perspectiva e, poderíamos estar atentos apenas sob algum aspecto bidimensional. Conforme Pinker (1980), as figuras tridimensionais acontecem mentalmente como se estivessem em uma "planta baixa". Ao manipulá-la, o sujeito preenche a parte traseira como se a visse.

As pesquisas sobre os usos de imagens por humanos descobriram que elas servem como um auxílio à memória, como um modo de praticar atividade física sem fazer movimentos físicos e como um instrumento para o raciocínio (Kosslyn, 1992). Ao conhecer os resultados de algumas dessas pesquisas, foi possível lembrar da indicação de pessoas para recordar-se onde se tinha deixado algum objeto perdido. Elas diriam: "pense nos lugares por onde andou, pense no que fez etc", ou seja, sugerem que as imagens mentais dos locais por onde tenham

passado ou o que tenham feito, auxilie a memória a recordar onde tenha deixado o objeto perdido. Essa foi a primeira constatação do uso de imagens mentais. A segunda refere-se ao emprego de imagens mentais como um substituto para a prática real de alguma atividade. As pesquisas descobriram que ter uma imaginação a respeito de alguma atividade física real, antes mesmo de praticá-la concretamente, melhora suas capacidades quando efetivamente partem para a prática. Numa pesquisa de Richardson (citado por Kosslyn, 1992, p.186), sujeitos foram convidados a se imaginarem lançando bolas em uma cesta no jogo de basquete. Eles obtiveram resultado melhor que o grupo de controle que não realizou qualquer prática mental.

O terceiro uso de imagens, e o mais importante para a presente pesquisa, diz respeito ao raciocínio. Pesquisas como a de Brooks (citado por Kosslyn, 1992, p.186) revelaram o uso de imagem auditiva para auxiliar o raciocínio, ao pedirem que os sujeitos classificassem cada palavra da sentença "Mais vale um pássaro na mão do que dois voando" como sendo um substantivo ou não. Já Huttenlocher (citado por Kosslyn, 1992, p.187) estudou o uso da imagem mental em problemas de raciocínio dedutivo de série de três ou quatro termos, como os trabalhados por Johnson-Laird (1983). Ele descobriu que a ordem como as premissas eram apresentadas ocasionava diferenças na organização mental e, que, por isso, determinava o número de erros cometidos por eles.

Outras pesquisas dão maiores contribuições para essa pesquisa. Clark (1969) e Sternberg (1980) declararam que alguns sujeitos podiam valer-se de estratégias lingüísticas para solucionarem problemas de série de três termos. De uma maneira geral, elas descreviam as relações e as usavam para inferir sobre elas. No entanto, essa prática era mais eficaz quando os sujeitos dominavam bem a situação de antemão. Nesse caso, as imagens, se as tivessem, ficavam relegadas a um segundo plano e não pareciam afetar o julgamento. Um tempo maior de resposta era observado quando os sujeitos ainda não estavam familiarizados com as informações do problema. Kosslyn (1992, p.188) deixou uma mensagem: "aparentemente, a imagem mental é um meio útil de se lidar com

problemas abstratos, mas sua utilidade pode ser eliminada se o material é altamente familiar e se a informação verbal apropriada é bem aprendida".

Lagreca (1997) investigou as representações mentais e possíveis modelos mentais utilizados por estudantes universitários de Física Geral, à luz da teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird. Segundo ela, as décadas de 70 e 80 do século XX foram marcadas por estudos das concepções alternativas de estudantes sobre fenômenos físicos. As concepções alternativas são aquelas construídas pelos sujeitos geralmente a partir de experiências pessoais e que costumam conflitar com as concepções que o meio científico requer. Esse conflito acabava por gerar dificuldades na aprendizagem dos objetos dessa disciplina e, por isso, tornou-se relevante investigar as mudanças conceituais nesse contexto, e de como esses estudantes representavam o conhecimento já que os seres humanos não captam o mundo exterior diretamente, mas por construções mentais internas e idiossincráticas.

Os resultados obtidos por Lagreca (1997), relevantes para essa pesquisa, revelaram que os sujeitos que possuíam uma representação mental por modelo mental ou por imagem demonstraram maior facilidade na compreensão de situações e contextos diferentes daqueles trabalhados em sala de aula, enquanto os estudantes com representações do tipo proposicionais apresentaram dificuldades na conexão dos diferentes conceitos e aspectos do conteúdo. Esses últimos demonstraram manipular fórmulas matemáticas desvinculadas de uma significação mais profunda. Nesse caso, a transferência e aplicação da aprendizagem para outras situações que necessitavam dessa compreensão, ficaram comprometidas.

Pinto e Moreira (2003) estudaram as dificuldades mais freqüentes de duzentos e trinta alunos dos cursos de Engenharia e Matemática da UFRGS, nos dois períodos letivos de 1998, na aprendizagem da Lei de Ampère na Física. A interpretação dessas dificuldades foi levada a efeito à luz da teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird, após detectarem a maneira mecânica com que os sujeitos resolviam os problemas e respondiam às questões descritivas em torno dessa lei.

As categorias para as dificuldades apresentadas pelos sujeitos foram: 1) funcionalidade da Lei de Ampère - referiu-se ao entendimento de modo efetivo em relação à natureza do fenômeno, ou seja, como interpretavam a Lei de Ampère de modo fenomenológico e não como um método; 2) superfície amperiana que diz respeito à confusão feita ao se referirem a amperiana - linha sobre a qual era calculado o campo magnético - como uma superfície e não como uma linha. Nessa categoria foram incluídas dificuldades no cálculo e definição da amperiana, além de problemas com a compreensão do enunciado do problema; 3) Lei de Ampère versus Lei de Faraday - caracterizada pela confusão conceitual feita entre essas duas leis.

A análise das dificuldades nas três categorias revelou, sobretudo, o uso da Lei de Ampère como um método para cálculo do módulo do campo magnético destituído de seu valor fenomenológico. Além disso, a confusão entre uma amperiana e uma gaussiana, prejudicou a formação de um modelo mental que os levassem a compreender outros fenômenos ligados a esses. De uma maneira geral, esses fatos estiveram associados à construção mental composta por proposições isoladas e com capacidade restrita para fazer previsões segundo a Lei de Ampère. Houve uma tendência de representar essa lei proposicionalmente e esse tipo de representação mental mostrou-se insuficiente para possíveis conexões e usos em contextos adequados.

Trabalhos em representação mental fora da teoria de Johnson-Laird também interessam para essa pesquisa, se não conflitarem com aqueles princípios adotados. É o caso do estudo realizado por Vieira (2001) sobre as dificuldades relacionadas com a (re)construção da representação mental na solução de problemas matemáticos com enunciado verbal. Foram analisados os processos responsáveis pelas mudanças na representação mental inicial - codificação, combinação e comparação seletivas - de vinte e seis professores de primeira à quarta série do Ensino Fundamental de escolas públicas e privadas da Grande Porto Alegre, sendo treze com dificuldades na solução de problemas matemáticos e, outros treze sem dificuldades para os mesmos problemas. De acordo com a teoria adotada - Modelo Teórico de Resolução de Problemas segundo Kintsch e

Greeno - existem quatro níveis de atividades mentais que compõem o processo de construção da representação mental: percepção, imagem, simbolização e conceitualização. Na percepção, o sujeito decodifica a informação. O processo só continua se houver atenção seletiva como uma resposta à informação recebida e para a formação de imagem, o segundo passo. A ausência de atenção seletiva pelo sujeito, pode comprometer uma mudança representacional, devido à incapacidade para o processamento de imagem, fundamental para a função cognitiva em questão. As imagens auxiliam no processo de solução de problemas, por fornecer significado à situação descrita no enunciado e às informações alocadas na memória de longo prazo. A simbolização, traduzida como uma função cognitiva superior, permite a representação da realidade e das experiências, e é responsável pelo surgimento da conceitualização, última etapa para a concretização da representação mental.

Para Kintsh e Greeno (citados por Vieira, 2001, p.5), a etapa de compreensão do texto é essencial na solução de problemas matemáticos. Durante a leitura, o sujeito constrói uma representação semântica inicial do problema, capaz de integrar os diferentes componentes textuais presentes no enunciado. Se essa integração não ocorrer, haverá uma busca por modelos já armazenados na memória, baseados na experiência prévia de cada um. A falha na busca põe em risco a continuidade do processo de construção da representação adequada para a solução do problema. Concorda-se com Vieira, pois não só os enunciados verbais de problemas de Matemática, como quaisquer mensagens escritas, possuem uma sintaxe e semântica para a efetiva interlocução entre texto-leitor.

Os resultados apontaram relações entre as dificuldades de compreensão na linguagem utilizada no enunciado dos problemas e a construção adequada de uma representação mental que favorecesse a superação das dificuldades para o problema ali proposto.

Knauff e May (2004) realizaram um estudo sobre a construção de representações mentais espaciais e por imagem mental no raciocínio dedutivo, em sujeitos com visão normal e enxergando o que faziam, sujeitos com visão normal mas com os olhos vendados e sujeitos cegos congênitos, ou seja, pessoas que

nasceram com deficiência visual. Os problemas foram divididos em três grupos segundo a relação verbal contemplada - relações viso-espaciais que são fáceis para imaginar visualmente e espacialmente (acima-abaixo, frente-atrás); relações visuais que são fáceis de imaginar visualmente, mas difíceis para imaginar espacialmente (limpo-sujo, gordo-magro) e; relações de controle que são difíceis de imaginar visualmente e espacialmente (esperto-apático, melhor-pior). Para cada relação verbal foram construídos conjuntos de problemas de série de três ou quatro termos, metade com conclusões válidas e outra metade com conclusões inválidas. Os mesmos problemas foram utilizados em outras pesquisas sobre raciocínio dedutivo, principalmente naquelas realizadas pelo psicólogo cognitivo Johnson-Laird (1983) e Kauff (2002, 2003). Exemplifica-se a seguir, cada tipo de relação verbal trabalhada pelos autores da pesquisa.

Relação Viso-Espacial: O gato está acima do macaco.

O cão está abaixo do macaco.

Quem está mais acima?

Relação Visual:

O cão está mais limpo que o gato.

O macaco está mais sujo que o gato.

O cão é mais limpo que o macaco?

Relação de Controle

O cão é mais esperto que o gato.

O macaco é mais apático que o cão.

Quem está mais esperto?

Os vinte e quatro problemas, oito de cada tipo de relação verbal, foram os mesmos para todos os sujeitos. A amostra de sujeitos não foi equilibrada nem em gênero e nem em número de participantes visuais ou cegos congênitos. Todos os sujeitos eram graduandos de universidades nos Estados Unidos e suas idades giravam em torno de vinte e dois a vinte e quatro anos. Os resultados que interessam para esse trabalho apontaram que os sujeitos visuais, enxergando o que faziam ou com olhos vendados, apresentaram maiores dificuldades na representação de problemas com relações visuais. Esse fenômeno foi denominado por Johnson-Laird (1992) em suas pesquisas como efeito de impedância visual. Para eles, existem elementos irrelevantes nas imagens que o

fazem retardar o processo de construção das representações, atrapalhando ou mesmo impedindo esse processo. O mesmo não ocorreu com os sujeitos cegos, que, por sua vez, mostraram o mesmo desempenho que os alunos visuais, embora não tivessem construído imagens visuais. Os cegos foram capazes de construir e aplicar representações espaciais, a partir de representações em níveis ou escalas. Por essa razão não são "traídos" por imagens visuais irrelevantes, realizando relativamente melhor as representações que as pessoas visuais. Diferentes regiões cerebrais foram acessadas, sugerindo, realmente, ter ocorrido processo de construção diverso. O estudo sugeriu que o conteúdo das relações verbais pode afetar o processo de inferência. Se o conteúdo produz informação relevante para uma inferência, como ocorre com as relações viso-espaciais, então o raciocínio flui melhor. Ao contrário, nas relações visuais o raciocínio de pessoas visuais pode ser impedido ou tomar um tempo maior por conter elementos irrelevantes sendo considerados pelos sujeitos. O mesmo foi observado por Kosslyn (1992) e, de certa forma por Kerr (1983), em experiências sobre a busca de informações em imagens visuais mentais pelos sujeitos. Ele disse:

Um achado bem conhecido é o de que quando não são usadas imagens mentais, as pessoas podem decidir mais rapidamente que as partes mais fortemente associadas pertencem a um objeto do que podem decidir com relação às partes menos associadas. Por exemplo, as pessoas podem decidir que a afirmação 'Um tigre tem listras' é verdadeira mais rapidamente do que com relação a 'Um tigre tem joelhos'. Este achado geralmente é interpretado como refletindo o modo como as pessoas vasculham listas mentais de associações verbais, onde as propriedades mais fortemente associadas são armazenadas em posições superiores na lista e, portanto, são encontradas mais rapidamente. (...) a inspeção de uma imagem é claramente diferente da recordação de informações verbais, como se poderia esperar se as imagens são "vistas" em uma parte especificamente visual do cérebro. (Kosslyn, 1992, p.182-184)

Knauff e May (2004) também fizeram uma discussão em torno da teoria dos modelos mentais e os resultados obtidos em sua pesquisa. Em concordância com a teoria de Johnson-Laird (1983), os modelos mentais não confiam em processos lingüísticos como uma regra do raciocínio. Tais processos são relevantes somente para transferir a informação das premissas para uma organização espacial e devolver a resposta, mas o processo de raciocínio está baseado totalmente em processos não lingüísticos para a construção e inspeção de modelos mentais espaciais. Os modelos mentais espelham as relações espaciais entre os objetos representados. Em contraste com as imagens visuais, os modelos mentais podem

representar qualquer situação possível e podem abstrair-se de detalhes visuais como cores, texturas e formas.

Sobre o desempenho

Spalletta (1998) estudou as relações entre os desempenhos de noventa estudantes de Engenharia Elétrica, na disciplina de Cálculo I, e em problemas de reversibilidade, um dos componentes da estrutura das habilidades matemáticas de Krutetskii. Spalletta optou por estudar sujeitos que haviam sido aprovados recentemente nessa disciplina, por ser pré-requisito e preparatória para muitas outras tanto do ciclo básico quanto das disciplinas de caráter mais específico do curso. Já o desempenho nos problemas de reversibilidade, foi objeto de observação a existência de dificuldades na mudança de direção do pensamento, a compreensão da matemática do problema e autocorreção dos erros cometidos pelos sujeitos. Uma vez compreendida a natureza dos problemas, Spalletta verificou a mudança do pensamento do sujeito durante a solução nos sentidos direto e inverso.

Por meio de um questionário, Spalletta (1998) verificou: que os estudantes estavam na faixa etária entre dezenove e vinte e um anos; não fizeram curso técnico, mas o Ensino Médio; a maioria não havia sido reprovada nenhuma vez em Cálculo I; que eles declararam facilidade na aprendizagem do conteúdo de Matemática, preferindo as áreas de álgebra e geometria e, atribuindo a facilidade no aprendizado e o sucesso das aplicações deste conteúdo em diferentes situações cotidianas, ao próprio conteúdo da disciplina. Os estudantes informaram que os conceitos adquiridos na disciplina, correspondiam às suas expectativas e não viam diferenças na maneira de estudar os conteúdos de Cálculo I e os abordados no Ensino Médio.

Os resultados indicaram que 46,9% dos sujeitos foram considerados bons tanto no desempenho em Cálculo I, quanto nos problemas de Krutetskii, seguidos de 34,4% de estudantes bons no teste de Krutetskii e médios em Cálculo I, totalizando 81,3% dos sujeitos estudados. A média aritmética das notas em Cálculo I foi de 6,81, com desvio-padrão de 1,22, o que pode ser considerado satisfatório.

Raciocínio lógico numa perspectiva da Psicologia Cognitiva: uma discussão

Anderson (1990, p.290), psicólogo cognitivista, concebeu o raciocínio como um processo no qual as pessoas avaliavam e generalizavam argumentos lógicos. A lógica, para ele, era uma subdisciplina de Filosofia e Matemática, que tentava formalmente especificar o significado de um argumento estar ou não logicamente correto.

Já Sternberg (1999), psicólogo cognitivista, viveu uma experiência escolar em Matemática, que o fez ver que a performance de um sujeito usando um raciocínio matemático analítico³ não era a mesma quando o mesmo sujeito era requerido a usar esse raciocínio de maneira criativa⁴ ou mais prática⁵. O mesmo ocorria com alguns professores de Matemática com quem manteve contato. Ele concluiu que a alta correlação entre o teste de aptidão matemática e as notas alcançadas no curso ministrado por ele, se devia preferencialmente pela maneira como havia ensinado. Para Sternberg, o sistema educacional valorizava estudantes com boa memória e com habilidades⁶ analíticas, mas falhava na valorização das habilidades criativas e práticas. O resultado é que o professor poderia falhar no reconhecimento da habilidade matemática de estudantes considerados bem-sucedidos ou, por outro lado, reconhecer tais habilidades em estudantes que, de fato, possuíam baixa habilidade.

Essa experiência o levou a desenvolver uma pesquisa que explorou o raciocínio matemático analítico, criativo e prático. Os testes analíticos giravam em torno de itens tais como resolver seqüências de números - 2, 5, 9, 14, ___; os de caráter criativo exploravam aprendizagem sobre novas operações matemáticas e; os denominados práticos envolviam leitura de um diagrama ou gráfico, tais como um quadro de treinamento, uma receita ou um gráfico de um estádio de atletismo.

³ Sternberg não definiu o termo raciocínio matemático analítico, mas o contexto faz crer que ele se referia aos raciocínios desenvolvidos em um nível mais formal e dentro dos padrões adotados pelo ensino do professor.

⁴ O raciocínio criativo era visto como aquele em que o estudante desenvolvia um modo válido e diferente do trabalhado nas explicações do professor em sala de aula.

⁵ Sternberg referiu-se à aplicação de um raciocínio matemático prático em problemas do dia-a-dia (indivíduos como consumidores, por exemplo).

⁶ Esse autor usou os termos habilidade, destreza, aptidão como sinônimos. O mesmo não ocorreu com Krutetskii, que os distinguiu.

Os resultados indicaram uma fraca correlação entre as três formas de pensamento, o que o fez concluir que os sujeitos com fortes pensamentos analíticos, criativos ou práticos, não eram as mesmas pessoas.

Após a aplicação desses testes, Sternberg (1999) convidou-os para um curso onde os dividiu em três grupos. O primeiro grupo recebia instruções de uma maneira analítica e os sujeitos deveriam analisar, explicar e avaliar fatos e idéias; o segundo, foi ensinado de modo mais criativo, e os sujeitos deveriam criar, inventar e descobrir conceitos e idéias; o terceiro grupo foi instruído de maneira mais prática, e os sujeitos deveriam aplicar, usar e implementar o que eles haviam aprendido em situações do dia-a-dia. As análises de Sternberg (1999) revelaram que os estudantes que estavam em sintonia com a abordagem dada e o pensamento matemático, obtiveram bons resultados, ao contrário daqueles que estavam em desacordo com o tipo de explanação do professor.

Para Sternberg (1999) existiam processos subjacentes ao raciocínio matemático, fosse ele analítico, criativo ou prático, também denominados metacomponentes. Para compreender a natureza da habilidade do raciocínio matemático é necessário entender a natureza desses metacomponentes. São eles: identificação de um problema, formulação de uma estratégia para solução do problema, representação mental da informação de um problema, alocação de recursos e, monitoramento e avaliação de soluções, que são os passos para a solução de problemas.

Primeiramente o sujeito deve identificar a natureza do problema que se propõe a resolver. Pode ser um problema do tipo tempo *versus* distância, ou de porcentagem etc. Posteriormente, ele deve refletir sobre a estratégia mais efetiva para solucioná-lo. Problemas como os de probabilidade são mais difíceis que os convencionais, porque não possuem uma estratégia óbvia para o seu desenvolvimento. Nesse caso, é necessário que o sujeito formule uma estratégia sem contar com o benefício explícito de um tipo de instrução para sua solução.

Além disso, a representação mental para a solução é importante. Alguns irão representar verbalmente, outros poderão optar por uma representação espacial. Segundo Sternberg (1999) diferenças na representação mental podem falar dos

sucessos e fracassos em Matemática, porque, freqüentemente, em sua experiência como professor, ele ensinou aos estudantes de maneira mais algébrica e declarou ter uma mente mais algébrica do que geométrica. Alternativamente, decidiu explicar o mesmo conteúdo das duas maneiras, obtendo resultados melhores com os estudantes. Esse fato mostra que a tendência representacional do professor influencia no entendimento do conteúdo pelos estudantes e, isso tem a ver com a representação construída por eles.

Adicionalmente, a alocação de recursos como o controle do tempo, o momento de se pedir ajuda e a quantidade de esforço empreendido são mais bem utilizados por bons solucionadores de problemas que consomem mais tempo decidindo o que fazer, do que aqueles que se preocupam com um planejamento local em detrimento de algo mais global.

Finalmente, uma vez obtido um resultado, este deve ser avaliado visando checar sua consistência com as informações do problema. Sternberg (1999) concluiu que o raciocínio matemático requeria pensamento analítico, criativo e prático e que os processos subjacentes a ele deviam ser checados para uma boa avaliação. Nesse sentido, o raciocínio matemático, para Sternberg, é composto por um conjunto de processos relacionados, cuja essência é psicológica. Os solucionadores de problemas matemáticos precisam do raciocínio, a menos que usem rotinas matemáticas como um hábito já enraizado (Steen, 1999, p.270) ou já tenham o processo mental automatizado, mas o raciocínio não precisa da Matemática para existir.

Pensa-se que as idéias de Sternberg estavam, num certo sentido, em sintonia com as idéias de Krutetskii, cuja teoria será abordada no capítulo seguinte. Apesar de a abordagem ter sido em um outro ângulo, elas não são conflitantes, pelo contrário, vêm complementar o que talvez Krutetskii não tivesse tido tempo de aprofundar. A abordagem de Krutetskii quanto à exploração do raciocínio não contemplou os tipos de raciocínios pelos sujeitos, mas, mais amplamente, preocupou-se em estudar mentes mais analíticas, geométricas ou harmônicas - com predominância de componentes lógico-verbais, viso-pictóricos ou alternância desses dois, respectivamente.

Eysenck & Keane (1994, p.367-407) contaram que a Psicologia absorveu a divisão feita pela Filosofia e pela Lógica, entre o raciocínio indutivo e dedutivo. No raciocínio indutivo é criada uma conclusão generalizada a partir de premissas apoiadas em observações ou experiências. Nas palavras de Sternberg (2000, p.362) "no raciocínio indutivo, que é baseado em nossas observações, não é possível chegarmos a qualquer conclusão logicamente correta. O máximo que podemos esforçar-nos para alcançar é apenas uma conclusão forte ou altamente provável". Imagine que quase a totalidade dos estudantes inscritos em uma disciplina optativa de uma graduação qualquer, acabe fazendo parte da lista de estudantes preferenciais para assumirem almejados estágios remunerados. A partir dessas observações, poder-se-ia raciocinar indutivamente de que as chances para um nome constar na lista para futuros estagiários, aumentariam caso a pessoa estivesse inscrita na tal disciplina optativa. Note que as premissas não foram declaradamente fornecidas para a uma conclusão absoluta.

Já no raciocínio dedutivo, parte-se de um conjunto de premissas, proposições lógicas tidas como válidas, para se chegar a uma conclusão. Por exemplo, sejam as seguintes premissas:

Roberto é mais forte do que Carlos.

Carlos é mais forte do que Fábio.

Quem é o mais forte?

Por dedução, poder-se-ia concluir que Roberto é o mais forte dos três. Conforme Johnson-Laird (1992, p.194), "uma dedução é um processo sistemático de pensamento que leva de um conjunto de proposições para outro e que supostamente está baseado nos princípios da lógica". Além disso, a lógica tem por finalidade garantir a validade de uma dedução.

O raciocínio dedutivo pode ser subdividido em condicional e silogístico, este último, por sua vez, se subdivide em silogístico linear e categórico. No raciocínio condicional, a pessoa deve concluir baseada numa proposição do tipo se-então. Por exemplo:

Se os alunos obtiverem altas notas, então serão aprovados na disciplina.

O raciocínio silogístico trabalha com silogismos, ou seja, envolve argumentos dedutivos para a obtenção de conclusões a partir de duas premissas, uma maior e uma menor, para se chegar a uma conclusão. No silogismo linear, existe uma relação específica entre dois itens - objetos, categorias, atributos etc - dada por duas premissas, onde, pelo menos, um dos itens é comum às premissas. Já no silogismo categórico, os termos em cada premissa estão ligados pela condição categórica. Exemplos de silogismos linear e categórico são fornecidos a seguir, respectivamente.

**João é mais alto que Rafael.
Rafael é mais alto que Eduardo.
Quem é o mais alto?**

Silogismo Linear

**Todos os violonistas são belos.
Todos os flautistas são violonistas.
Portanto, todos os flautistas são belos.**

Silogismo Categórico

Muitas tarefas, como a maioria dos problemas matemáticos, utilizam uma mistura dos dois raciocínios - indutivo e dedutivo. O sistema lógico⁷ utiliza símbolos para representar as premissas e operadores lógicos - como: e, ou, não, se-então, se e somente se - para manipular tais proposições. A Matemática usa esse sistema para manipular o cálculo proposicional. No entanto, apesar de os operadores lógicos serem palavras da língua corrente, seus usos e significados na Lógica, e, portanto, na Matemática, são bem diferentes. As proposições a seguir exemplificam essas diferenças nos usos:

Se ele é um homem, então ele é Andréia.

P

Q

Se P, então Q ($P \rightarrow Q$)

Ele é um homem. (P)

Portanto, ele é Andréia. (Q)

⁷ Refere-se aqui à Lógica como uma disciplina, assim como Anderson (1990, p.290).

Eis um raciocínio válido para a Lógica e para a Matemática. Essa validade é meramente formal, independentemente do fato de serem verdadeiras. Logo, mesmo que as premissas e conclusão sejam estranhas para o mundo cotidiano, elas podem ser logicamente válidas.

De acordo com Johnson-Laird (1992, p.201), os psicólogos que estudam os processos mentais, não concebem o raciocínio válido dissociado do uso da lógica⁸. Por outro lado, a lógica parece exigir de seus usuários o raciocínio válido, principalmente, após o séc.XIX, com o início das idéias de G.Boole e, por isso mesmo esse período ficou conhecido como Booleano⁹, onde houve evolução significativa na Lógica, inclusive, pelo uso da Álgebra nesse domínio. Esse período perdurou até início do século XX, quando surgiram numerosas lógicas não clássicas e a lógica algébrica, marcando o início do período Contemporâneo. Foi nessa etapa evolutiva que a lógica integrou-se definitivamente como uma das partes relevantes da Matemática. Não que ela já não existisse no desenvolvimento de objetos matemáticos até então, mas, daí em diante de uma maneira mais formal.

Primi, Santos e Vendramini (2002) desenvolveram uma pesquisa para verificar as possíveis relações entre diferentes tipos de inteligências e o desempenho acadêmico de estudantes ingressantes no ensino superior. Apontaram que a capacidade de adaptação e de assimilação de informações novas é requerida ao profissional da era da informação, além do domínio de conteúdos específicos de cada área de formação. Lembram que a história das teorias da inteligência mostra que, em diferentes épocas, o enfoque a essa variável foi dado ora mais ao raciocínio – denominado de inteligência fluida -, ora mais ao conhecimento – denominado de inteligência cristalizada.

⁸ Uma lógica pode existir mesmo onde aparentemente pode se pensar não existir. A teoria do Caos mostra haver organização mesmo onde se pensa haver apenas aleatoriedade. Da mesma maneira, pessoas portadoras de esquizofrenia, por exemplo, apresentam pensamentos aparentemente sem lógica. No entanto, ao construírem um mundo próprio e não partilhado por outras pessoas, passam a idéia de não possuírem uma lógica para o que dizem. Mas, ela existe, apesar de não a entendermos. Conforme Johnson-Laird (1992, p.210), a doença mental dos esquizofrênicos interfere nos processos de pensamento. Eles costumam realizar inferências como: *Eu sou uma virgem; a Virgem Maria era uma virgem; portanto, eu sou a Virgem Maria.*

⁹ (Costa, 1999, p.11-17).

A inteligência fluida estaria ligada à capacidade de processamento cognitivo, ou seja, à capacidade de relacionar idéias complexas, formar conceitos abstratos e derivar implicações lógicas a partir de regras gerais em situações relativamente novas, enquanto a inteligência cristalizada estaria associada à extensão e profundidade das informações adquiridas no processo de escolarização (Primi, Santos e Vendramini, 2002). Em outras palavras, a inteligência fluida traduz-se no trabalho mental utilizado por alguém diante de uma situação-problema relativamente nova, em que os conhecimentos adquiridos não são bastante para a elaboração da solução, apesar de necessários. Já a inteligência cristalizada traduz-se na quantidade e qualidade dos conhecimentos adquiridos e na aplicação destes em situações semelhantemente vividas ou experienciadas. Nesse sentido, de maneira geral, os testes de raciocínio lógico, as provas acadêmicas, as avaliações propostas por ações governamentais se distinguem nessas duas dimensões.

Serviram como instrumentos da pesquisa desses autores, provas de conhecimento em dez disciplinas, três provas enfatizando a capacidade de raciocínio indutivo, lógico dedutivo e compreensão de leitura e, o desempenho médio nas disciplinas cursadas nos dois primeiros semestres do curso. Os resultados apontaram que o aproveitamento acadêmico de certos cursos estava associado a uma das inteligências - fluida, cristalizada ou a ambas. Por isso, seria possível prever que tipo de inteligência se sobressairia como mais importante no que tange ao aproveitamento daquele curso acadêmico. Seguem exemplos de problemas de raciocínio indutivo, dedutivo e de compreensão em leitura aplicados nesses sujeitos.

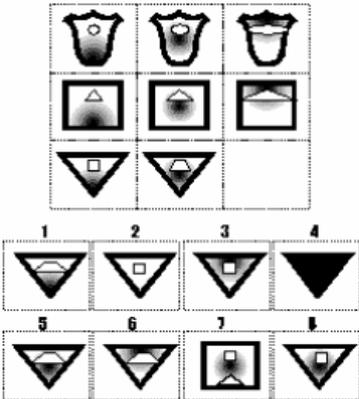
Raciocínio Indutivo	<p style="text-align: center;">Item da Prova RI</p> 
	<p style="text-align: center;">Parte de prova CL</p> <p>A comunicação com garçons pode ser uma provação em qualquer parte do mundo. Costumo tomar leite frio, de manhã. Em Tóquio, na primeira _____ em que nos aventuramos __ tomar café fora do _____, fui munido da palavra _____ para leite. Miruku, ou _____ parecida.</p>
Compreensão em leitura	<p style="text-align: center;">Item da Prova RLD</p> <p>Uma loja vende produtos importados e nacionais entre vestidos camisas e casacos. Alguns vestidos e todos os casacos fazem parte dos produtos importados. Não há produto importado disponível em tamanho grande. Assinale qual dentre os fatos enunciados não poderia ser verdadeiro:</p> <p>A. Carla experimenta uma camisa nacional. B. Luciana está comprando um casaco pequeno C. Alberto pegou um casaco grande D. Adriana experimenta um vestido pequeno</p>
Raciocínio Dedutivo	

Figura 1. Exemplos dos Itens das Provas RI, CL e RLD

Figura 2.7: Exemplos de problemas de raciocínio lógico indutivo, dedutivo e compreensão em leitura.

A solução de problemas

Como dito, uma atividade mental matemática emerge em meio à solução de um problema de Matemática. Essa solução é vista pela unanimidade dos autores que se teve acesso, como um processo composto por etapas integradas, visando alcançar uma solução (Sternberg, 2000; Johnson-Laird, 1992; Mayer, 1992; Klausmeier & Goodwin, 1977; Eysenck & Keane, 1994; Polya, 1946). De pouca valia seria discorrer sobre a visão de cada um desses autores, uma vez que se apresentaram pouco diversificadas. Opta-se por apresentar duas dessas visões - a de Johnson-Laird (1992) e a de Sternberg (2000). A escolha deve-se ao fato do

primeiro autor ser um dos teóricos de base desse trabalho e, pelo fato dele mesmo ter abordado esse assunto em sintonia com outros autores. Quanto ao segundo autor, sua classificação mostrou-se mais pormenorizada que a de Johnson-Laird. Além disso, interessa aqui uma discussão da solução de problemas conectada às representações mentais, e isso implica entendê-la sob a ótica de psicólogos cognitivistas como os autores selecionados.

Johnson-Laird (1992) afirmou serem necessárias investigações experimentais para aprender-se mais sobre os processos mentais subjacentes ao raciocínio. Uma maneira seria fornecer aos sujeitos problemas e observar as características do processo de solução para tentar dar uma explicação sobre esses complexos processos mentais.

Para este autor, a solução de qualquer problema deve percorrer vários estágios: compreensão do problema - é preciso compreender as condições iniciais e o objetivo, verificar restrições ou condições que se apliquem àquele problema; traçar um plano - selecionar um método apropriado; executar o plano traçado sem erros - muitas vezes a incapacidade para a solução não está em uma deficiência de lógica, mas um fracasso na memória; verificar a resposta encontrada - avaliar a coerência da resposta obtida, bem como considerar haver uma outra maneira mais simples.

Esse último estágio é de especial importância quando os sujeitos a serem pesquisados são da área de Ciência da Computação e Engenharias. Na maioria das vezes, não basta uma solução, mas a mais elegante, a mais simples. A questão não passa pela beleza estética, mas uma solução intrincada pode comprometer toda a performance da execução computacional, por exemplo. Imagine um *site* de busca¹⁰, como os que são amplamente utilizados na *Internet*. Muitos programas computacionais obtêm as buscas satisfatoriamente, entretanto, alguns levam milésimos de segundos, outros alguns minutos (o usuário costuma desistir), outros muitos anos para fornecer a resposta.

Os problemas mais cotidianos não costumam exigir um complexo trabalho mental para suas soluções. Porém, alguns outros, como os de matemática escolar

¹⁰ Podem-se citar alguns mais conhecidos: Alltheweb, Google, Yahoo, Cadê etc.

que são praticados em cursos de graduação, requerem complexas estratégias. Para melhor compreender esse processo, Newell e Simon (1972) desenvolveram um programa de computador que delinea os passos tomados para reduzir problemas a subproblemas - o *General Problem Solver*. É verdade que esses pesquisadores da Inteligência Artificial muito contribuíram para os avanços científicos na solução de problemas, que, por sua vez, veio impulsionar diversas áreas correlatas e que dependiam e dependem disso. No entanto, esses programas não são capazes de desvendar a representação mental dos sujeitos solucionadores, principal complicação para muitos.

Como exemplo, a construção de uma ordem linear para problemas de série de três termos, demanda um reordenamento mental das premissas. Daí torna-se relativamente fácil combiná-las para se usar a representação para a resposta ou conclusão. Mas, aumentam as dificuldades no arranjo mental dependendo das premissas e de qual conclusão é pedida. Johnson-Laird (1992) fornece um exemplo:

B > C (B é maior do que C)

A > B (A é maior do que B)

Quem é maior? Quem é menor?

Se o sujeito construir uma ordem linear do tipo $A > B > C$, é possível responder qualquer pergunta sobre as premissas. Mas, nas premissas...

B é melhor do que C

A é melhor do que B

C é pior do que A?

a pergunta se torna mais difícil mediante a necessidade de maior complexidade em seu arranjo representacional mental. Para Johnson-Laird (1992, p.205) "aqueles que raciocinam são muito afetados pelo conteúdo das premissas, parece como se a mente não conseguisse, ordinariamente, quaisquer regras formais de inferência contidas dentro de uma lógica mental." Uma outra "hipótese antiga e influente é a de que os raciocinadores são seduzidos pela atmosfera das premissas". (Woodworth e Sells apud Johnson-Laird, 1992, p.205) Acompanhe o raciocínio:

Todos os pilotos são artistas.

Todos os esquiadores são artistas.

Alguns, provavelmente influenciados pela atmosfera da palavra 'todos', poderiam inferir que todos os pilotos sejam esquiadores. Alternativamente, outra explicação, foi a de que alguns poderiam crer que o contrário da segunda premissa fosse válido: todos os artistas são esquiadores. Nesse caso, a conclusão de que todos os pilotos sejam esquiadores seria válida.

Johnson-Laird (1983; 1992) apontou que inferir sobre afirmações em um problema, seria como construir um modelo mental (ou modelos) do estado de coisas ali descritas, para então, buscar-se variantes desse modelo para descobrir se existiriam quaisquer conclusões que pudessem ser feitas. Seus estudos foram mais profundos para raciocínio dedutivo e, deste, o silogístico. No entanto, sua teoria é suficientemente abrangente (Eysenck & Keane, 1994) para estudos do raciocínio de maneira geral.

Os problemas de Matemática costumam envolver diferentes tipos de raciocínio, mas, mais freqüentemente o dedutivo, daí a preferência pelo estudo desse raciocínio nessa pesquisa. Para exemplificar, a pesquisadora tomou um problema de probabilidade e coletou diferentes soluções de estudantes das graduações de Ciência da Computação e Engenharia do quinto e quarto períodos letivos respectivamente de uma instituição do Estado do Espírito Santo, perguntando a eles, como haviam se organizado.

Suponha que você esteja se vestindo em um quarto escuro. Em sua gaveta você tem quatro meias vermelhas, três azuis e duas marrons. Se você escolhe aleatoriamente 2 pés de meia (avulsos), qual é a probabilidade deles formarem um par? (despreze o fato do pé de meia ser direito ou esquerdo)

O problema poderia ser reescrito como:

Em uma gaveta existem quatro meias vermelhas, três azuis e duas marrons.

Você pegou dois pés de meia avulsos.

Qual é a chance de você ter pegado um par de meias de mesma cor?

Note que esse é um problema que exige uma organização mental mais complexa. Uma vez compreendido os elementos das proposições, o objetivo, ter

identificado o problema como sendo de probabilidade, ter verificado que não serve retirar da gaveta quaisquer pés de meia, é preciso traçar um plano, executá-lo e avaliá-lo. Nesse ínterim, surge a necessidade de uma representação interna.

§ O estudante 1 parece ter se guiado na teoria geral de Probabilidade que prega que a probabilidade de um evento é o número de elementos do evento dividido pelo número de elementos do espaço amostral, sabendo-se que o evento é um subconjunto do conjunto universo "espaço amostral". Em outras palavras, o número de elementos de um evento são todas as possibilidades de um fato ocorrer dentro de um universo maior que é o espaço amostral. Por exemplo, seja o evento "jogar um dado e sair um número par". São três as possibilidades: {2,4,6}. Os elementos do espaço amostral para esse experimento são todas as possibilidades de resposta na jogada do dado: {1,2,3,4,5,6}. Daí, a probabilidade de se jogar um dado e sair um número par é de 3 em 6, ou 50%. Ele disse e escreveu:

"Pensei da seguinte forma:		
<u>1ª retirada:</u>		
P(vermelha)= 4/9		
P(azul)= 3/9	$P1 = 4/9 * 3/9 * 2/9$	P1 = 0,032
P(marrom)= 2/9		
<u>2ª retirada</u>		
P(vermelha)= 3/8		
P(azul)= 2/8	$P1 = 3/8 * 2/8 * 1/8$	P2 = 0,012
P(marrom)= 1/8		
Assim, a Probabilidade = $P1 + P2 = 0,32 + 0,12 = 0,44$ "		

Figura 2.8: Solução do problema das meias pelo estudante 1.

Um esclarecimento sobre a maneira de solucionar desse estudante poderia ser: ele quis dizer que a probabilidade de se tirar um pé de meia vermelho é de 4 em 9, do azul é de 3 em 9 e do marrom é de 2 em 9. Concluiu que a probabilidade de retirada do primeiro pé é de 0,032. Prosseguiu com a mesma análise na retirada do segundo pé de meia, retirando-se uma unidade do total, já que um pé de meia havia sido retirado. Somou as probabilidades e deu por encerrada a solução. No entanto, não houve consistência em sua explicação sobre a soma das probabilidades. Faltou em sua análise impor a condição de que se a primeira tivesse sido de uma determinada cor, então a segunda deveria ter sido igual a da primeira, para ser uma retirada válida. Resumindo, a teoria, nesse caso, foi mal

aplicada pelo estudante e tê-la como ferramenta, não contribuiu eficientemente para a correta solução do problema. Faltou-lhe uma análise mais profunda ou um raciocínio mais eficiente.

§ O estudante 2 ficou repetindo as proposições, tentando buscar uma lógica entre os elementos... não conseguindo organizar-se mentalmente para uma solução, desistiu.

§ O estudante 3 rapidamente fez um pequeno esquema que parece ter contribuído para a solução correta. Ele pareceu ter independência no pensamento ao ignorar qualquer teoria formal de probabilidade. Primeiramente, escreveu ao lado do espaço de solução "análise combinatória", como que reconhecendo ser um problema desse tipo. Depois desenhou quatro quadradinhos, em baixo mais três e, em baixo mais dois. Entendeu-se que cada linha de quadradinhos estava representando o número de meias nas diferentes cores. Em seguida, escreveu "3+2+1" ao lado da primeira fila de quadradinhos, "2+1" ao lado da segunda e, "1" ao lado da terceira. Reuniu esse conjunto em uma chave. Depois disso, calculou o número total de possíveis pares de meias de mesma cor ou não, com a ajuda da fórmula de Combinatória, e declarou "10 em 36". A figura 2.10 reproduz o original constante no Anexo A.

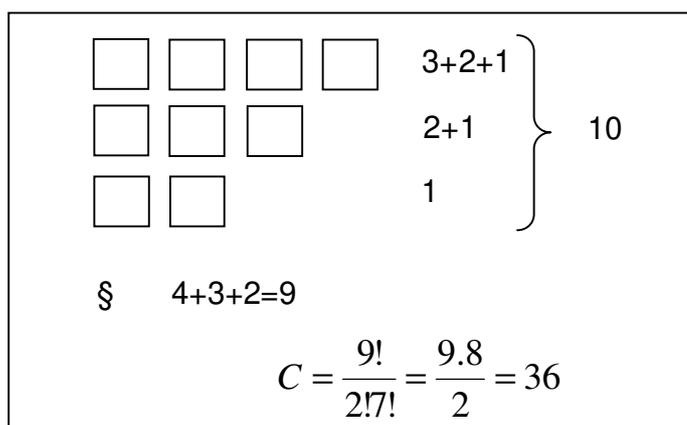


Figura 2.9: Solução do problema das meias pelo aluno 3.

Paralelamente à estrutura da solução de problemas vista por Johnson-Laird, o psicólogo cognitivista Sternberg (2000), como dito anteriormente, declarou os

seguintes passos para a solução de problemas: identificação do problema, definição e representação do problema, formulação de estratégia, organização da informação, alocação de recursos, monitorização e avaliação.

Mais detalhadamente, este autor afirmou a necessidade de reconhecimento da existência de um problema em seu enunciado para, posteriormente, defini-lo e representá-lo. O passo posterior seria planejar uma estratégia que envolve uma análise - decomposição do problema em elementos menores e manuseáveis - e síntese - reunião dos elementos antes decompostos para uma nova organização útil que o encaminhe para a solução.

Outros passos, complementares à estratégia, envolvem o pensamento divergente e o convergente. No divergente o solucionador tenta simular possíveis estratégias alternativas para a solução. A seguir, no convergente, após considerar algumas possibilidades, esforça-se por reduzir as múltiplas escolhas e seleciona uma que lhe parece mais adequada. A melhor estratégia depende das características do problema, bem como das preferências pessoais do solucionador.

Em seguida, deve-se organizar a informação a fim de executar a estratégia de sua preferência. Nessa etapa, o processo de organização envolve rever a representação obtida que o habilite na execução de sua estratégia. Da mesma maneira, os recursos devem ser levados em conta. Segundo Sternberg (2000, p.309)

estudos mostram que os peritos solucionadores de problemas (e os melhores estudantes) tendem a dedicar mais dos seus recursos mentais ao planejamento *global* (visão geral) do que solucionadores de problemas iniciantes. Os iniciantes (e os piores estudantes) tendem a alocar mais tempo ao planejamento *local* (dirigido aos detalhes) do que os peritos. [...] é mais provável que os melhores estudantes gastem mais tempo na fase inicial, decidindo como resolver um problema, e depois menos tempo resolvendo-o realmente, do que os piores estudantes.

Apesar de as etapas serem listadas linearmente, deve-se considerar que o resolvidor está constantemente organizando e reorganizando a informação disponível. Para Sternberg (2000) a monitorização é usada por eficientes solucionadores de problemas. Estes vão conferindo tudo ao longo do caminho para se assegurarem de que estão se aproximando do seu objetivo. Caso observem um desvio ou fuga do objetivo maior, eles concluem por um início não

muito eficiente que os remete aos passos anteriores, por meio de um outro processo, o de avaliação. Avaliar uma solução ou um passo anterior é preciso, pois novos caminhos podem ser reconhecidos, podendo haver uma redefinição inclusive de estratégias e recursos.

Finalmente, dois outros termos merecem destaque nesse trabalho - problema e problema de Matemática. Sintetizando definições de psicólogos cognitivistas (Brito, 2006), educadores (Callejo, 1994) e pesquisadores da área de Inteligência Artificial, um problema pode ser entendido como uma tarefa na qual a solução ou meta não é alcançável imediatamente e não existe um algoritmo óbvio para uso. Um sujeito vê-se diante de um problema quando deseja algo que não sabe imediatamente com que série de ações poderá solucioná-lo (Bruner, 1997; McLeod, 1989; Newell & Simon, 1972; Sternberg, 2000; Polya, 1946). Já um problema de matemática, segundo estes autores, é visto por matemáticos como problemas não rotineiros que requerem mais que procedimentos prontos ou algoritmos no processo de solução.

De acordo com Sternberg (2000, p.309), de maneira geral, os psicólogos cognitivos classificaram os problemas como sendo bem-estruturados ou mal-estruturados. Não de maneira estanque estando em duas classes diferentes, mas como um *continuum* tendo como extremos, essas duas classificações. Os problemas mais bem-estruturados são aqueles com caminhos claros para a solução, enquanto os mal-estruturados não possuem essa característica. A determinação da área de um paralelogramo seria um exemplo de um problema bem-estruturado. Já problemas do tipo probabilístico, como o das meias em uma gaveta, apresentado há pouco, seria classificado como um problema mal-estruturado.

Relações entre o êxito em tarefas matemáticas e outras variáveis

Floyd, Evans e McGrew (2003) estudaram relações entre habilidades cognitivas e êxito em tarefas matemáticas com estudantes entre seis e dezenove anos. Especificamente, estudaram habilidades básicas de leitura, compreensão em leitura, habilidades básicas matemáticas e habilidades de raciocínio matemático. A força das associações variou em função da habilidade, do currículo e da idade dos sujeitos.

Os resultados que interessam para a presente pesquisa foram: 1) o conhecimento-compreensão (Gc), a fluidez do raciocínio (Gf) e a memória de curto prazo (Gsm) demonstraram relações significantes com o êxito em tarefas matemáticas; 2) a velocidade do processamento (Gs) demonstrou relação significativa com a habilidade para cálculo matemático ao longo das idades e relações significativas com o raciocínio matemático durante os anos de escolaridade elementar; 3) a armazenagem e recuperação na memória de longo prazo (Glr) demonstrou relação significativa com o êxito na matemática apenas durante o início dos anos da escolaridade elementar; 4) medidas de habilidades mais específicas como memória de trabalho e linguagem oral, também tiveram relações significativas com o êxito em tarefas matemáticas ao longo dos anos escolares; 5) medidas de processamento auditivo (Ga), habilidades viso-espaciais (Gv) e habilidades mais específicas tais como consciência fonêmica em geral, não apresentaram variação na predição do êxito em tarefas matemáticas.

Os gráficos (figuras 2.11 e 2.12) a seguir desenharam as correlações descritas e adotam as seguintes siglas: BRS – habilidade básica de leitura; RC – habilidade para compreensão em leitura; MR – habilidade para o raciocínio matemático e, MC = habilidade para o cálculo matemático.

Comprehension-Knowledge (Gc) and BRS, RC, MC, MR

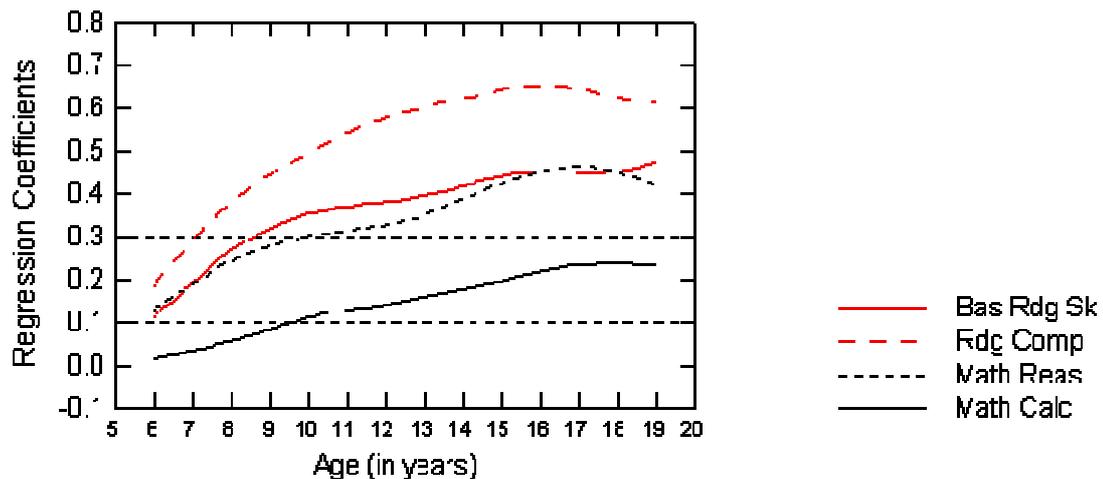


Figura 2.10: Correlação entre o conhecimento-compreensão e as habilidades para o raciocínio matemático e o cálculo matemático. (www.iapsych.com/IAPRR2.htm)

Vale destacar o crescimento mais acentuado do raciocínio matemático e a habilidade para cálculos matemáticos relacionado com o conhecimento-compreensão entre as idades de seis e dezessete anos, mantendo-se mais estáveis a partir daí.

Particularmente, o raciocínio matemático manteve-se praticamente estável se comparado com a fluidez de raciocínio.

Fluid Reasoning (Gf) and BRS, RC, MC, MR

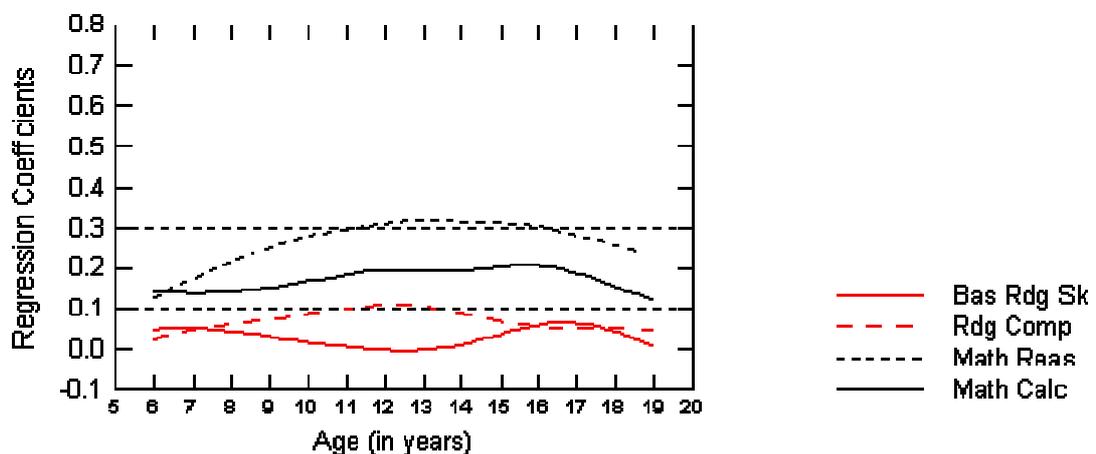


Figura 2.11: Correlação entre o raciocínio fluido e as habilidades para o raciocínio matemático e o cálculo matemático. (www.iapsych.com/IAPRR2.htm)

A metodologia de vídeo em estudos de Educação Matemática

O uso do vídeo em pesquisas observacionais em Educação Matemática possibilitou investigar a realização de tarefas matemáticas mais minuciosamente por permitir o reexame dos dados continuamente, e dando condições de captar nuances não percebidas antes, superando limitações humanas. Powell, Francisco e Maher (2004) propuseram um modelo de análise de dados a partir de investigações que tenham feito uso da tecnologia de vídeo. A proposta esteve baseada em dezesseis anos de estudos transversais e longitudinais com estudantes engajados em tarefas que envolviam a aprendizagem de álgebra, combinatória, probabilidade e modelagem matemática.

Esses pesquisadores desejavam captar detalhes do desenvolvimento de idéias matemáticas, aprofundando estudos de caso sobre relações de idéias e *insights* anteriores com justificativas e produções posteriores, dentre outras motivações. No entanto, antes que a proposta fosse lançada, realizaram estudos sobre vantagens, desvantagens e limitações desse método, a fim de torná-lo o mais eficaz possível. Apesar de o vídeo ser um instrumento flexível para coleta de informação oral e visual, ele não está imune a problemas. Por exemplo, as informações fornecidas pelo vídeo estão limitadas ao seu raio de abrangência, o contexto histórico é ignorado e aspectos subjetivos não são captados. Para minimizar esses efeitos, Powell, Francisco e Maher (2004) recomendam planejar a posição da(s) câmera(s), fazer anotações durante o processo de filmagem, desenvolver técnicas competentes de videografias que sejam consistentes com os propósitos da pesquisa. Recomendam, ainda, combinar os dados do vídeo com outras fontes de dados tais como observações etnográficas, entrevistas, questionários, trabalhos escritos dos estudantes etc, sobretudo, por estar-se tentando captar dados não tão explícitos como o pensamento matemático.

Powell, Francisco e Maher (2004) propuseram sete fases interativas e não lineares para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático. São elas: a) observar atentamente os dados do vídeo; b) descrever os dados do vídeo; c)

identificar eventos críticos; d) transcrever; e) codificar; f) construir enredo; g) compor a narrativa.

Na fase um, sugerem que o pesquisador assista e ouça os videoteipes várias vezes, sem impor intencionalmente uma lente analítica sobre o que observam. A intenção é de se acostumar com o todo da pesquisa. A fase dois é composta pela descrição da fita em intervalos de tempo bem próximos, eleitos pelo pesquisador. Por exemplo, assistir à filmagem e interrompê-la de cinco em cinco minutos para proceder às descrições. Powell, Francisco e Maher (2004) chamaram à atenção para o fato dessa fase ser apenas de descrição sem contar com elementos interpretativos ou inferenciais. Observações do tipo "ela está tentando..." ou "parece que ele queria..." são inferenciais. Valem nesse momento as descrições simples e factuais como "ele escreve..." ou "o professor desenha..." etc. Nas palavras dos pesquisadores: "a idéia é mapear os dados do vídeo de tal forma que alguém lendo as descrições teria uma idéia objetiva do conteúdo dos videoteipes".

A terceira fase é traduzida pelo reexame cuidadoso das descrições e filmagens a fim de identificar momentos significativos, denominados eventos críticos. Os eventos críticos são seqüências conectadas de expressões e ações que requerem explicação por parte do pesquisador. Já as transcrições não são obrigatórias, entretanto, podem revelar elementos importantes nem sempre visíveis de outra forma como os sons e o posicionamento seqüencial de uma conversa, os momentos dos interlocutores de fala e no pedido da palavra etc.

A codificação é semelhante "à identificação de eventos críticos, pois ambas requerem a visualização intensiva e cuidadosa dos vídeos por longos períodos de tempo" (Powell, Francisco e Maher, 2004, p.114). A diferença é que nessa fase, a atenção está voltada para os eventos críticos. É indicado realizar uma codificação segundo a perspectiva teórica da pesquisa e pelas questões de pesquisa. A codificação se cumpre mediante o desenvolvimento de "esquemas de códigos informados por nossas suposições sobre o pensamento matemático..." (Powell, Francisco e Maher, 2004, p.114). Os autores exemplificaram que a investigação do desenvolvimento do pensamento probabilístico por meio de codificação revelou uma conexão entre os eventos críticos pelas idéias particulares dos estudantes ao

resolverem exercícios de probabilidade. Com isso, forma-se uma seqüência conectada de eventos críticos que conduz à compreensão da construção do fenômeno (tabela 2.3).

Tabela 2.3: Eventos críticos na metodologia de vídeo

Código	Evento Crítico
C1	Verifica a conexão entre os diferentes elementos fornecidos pelo texto do problema.
C2	Verifica a pergunta ou o que se quer solucionar no problema.
...	...

Logo após a codificação, é útil construir um enredo como resultado da lógica dos dados, com auxílio dos códigos dos eventos críticos antes identificados. Mas, é preciso que um enredo possua uma organização - muitas vezes complexa - criteriosa e coerente desses eventos. Esse processo envolve o discernimento de sinais que são um conjunto de eventos antes codificados e interpretados que fornecerão *insights* sobre o processo de pensamento do pesquisado. Nas palavras de Powell, Francisco e Maher (2004, p.10) "o sinal contribui para a narrativa de uma história intelectual pessoal do estudante assim como para a história coletiva de um grupo de estudantes que colaboram". Nesse momento, as anotações feitas pelo pesquisador e outras informações fora do vídeo podem contribuir para a reflexão em torno dos próprios eventos críticos e códigos, podendo inclusive fazer com que o pesquisador abandone alguns eventos antigos.

A narrativa, na verdade, tem início com a própria pesquisa, uma vez que o pesquisador possuindo perspectivas teóricas e questões de estudo, vai delineando essa construção.

A metodologia de vídeo foi utilizada na presente pesquisa para esclarecer diferenças entre habilidades matemáticas e representações mentais dentre os doze estudantes selecionados no grupo de ingressantes e concluintes. Após percorrer as etapas indicadas nesse método, fez-se constar formalmente na pesquisa apenas os protocolos daqueles estudantes, em certo problema, que contribuíram para o entendimento e conclusões sobre as variáveis estudadas. Isso significa que, apesar da metodologia de vídeo ter sido aplicada aos doze

estudantes nos cinco problemas de Krutetskii, apenas alguns foram transcritos a fim de demonstrar aspectos relevantes sobre a habilidade matemática e a representação mental em estudo.

Opções emersas dos estudos desse capítulo

A teoria krutetskiiana sobre as habilidades matemáticas busca responder às indagações sobre o sucesso ou fracasso de estudantes em determinadas tarefas matemáticas, justamente por entender haver componentes que vem formar uma estrutura maior traduzida nas habilidades matemáticas de cada sujeito em um dado momento.

A opção pela teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird se deu pela possibilidade de se fazer previsões sobre as representações internas que as pessoas possam ter em diferentes tarefas - nesse caso, tarefas matemáticas. Outros psicólogos cognitivos priorizam apenas as representações por imagem ou por proposição. Além disso, Johnson-Laird realizou ampla pesquisa sobre o raciocínio, desenvolvendo, inclusive, programas computacionais na linguagem LISP, muito utilizada por pesquisadores em Inteligência Artificial.

Apesar da escolha pela teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird e seus estudos em raciocínio, seguir-se-á a classificação do raciocínio citada por Primi, Santos e Vendramini (2002), por estar em sintonia com os instrumentos que serão utilizados na pesquisa (avaliação governamental, avaliação acadêmica, testes psicológicos) e por não conflitarem com os estudos de Krutetskii e de Johnson-Laird.

O desempenho será visto como o produto final da solução dos problemas propostos pelo ENADE e pelo EGRAF, uma vez que as estatísticas educacionais são elaboradas dentro desse enfoque e, como dito no capítulo um, vale relacionar esses resultados a um estudo do processo.

Quanto à solução de problemas, será também entendida segundo a visão de Johnson-Laird, que está de acordo com a de Sternberg e outros autores psicólogos.

Apesar de ter havido uma escolha para as teorias de base, os trabalhos de Eysenck e Keane sobre as possíveis relações entre as representações externas e internas, o de Sternberg sobre problemas mal-estruturados e considerações sobre o raciocínio, o pensamento etc., serão levados em conta para respaldar a pesquisa, por não serem contraditórios com as teorias eleitas.

Finalmente, a metodologia de vídeo será utilizada para captar detalhes do processo de solução dos problemas pelos estudantes para o estudo das habilidades matemáticas e representações mentais.

3. Fundamentação teórica: a teoria de Johnson-Laird e a teoria de Krutetskii

A teoria de Philip Nicholas Johnson-Laird: um panorama inicial

Philip Nicholas Johnson-Laird é um psicólogo americano que usou a idéia computacional para explicar a lógica mental dos seres humanos. Para ele, a análise da escrita de um programa de computador, por exemplo, fornece informação sobre a coerência e lógica seguida por seu autor numa seqüência de suposições e afirmações visando obter uma resposta. Nesse sentido, o interesse de Johnson-Laird não estava voltado para o que o programa fazia, mas para os efeitos de desenvolvimento no pensamento do programador. Era o processo que importava e não o produto final.

De fato, o desenvolvimento de um programa parece denunciar não só a lógica do raciocínio, como a compreensão e domínio em certo assunto. Observe, a seguir, os programas escritos por dois estudantes de primeiro período de Ciência da Computação em uma avaliação da disciplina de Algoritmos I¹¹. Foi pedido que escrevessem um programa que lesse três números e verificasse se estes representavam os comprimentos dos lados de um triângulo. Se sim, o programa deveria indicar a classificação segundo os lados do triângulo - equilátero (três lados com mesmo comprimento), isósceles (dois lados com mesmo comprimento) ou escaleno (três lados com comprimentos diferentes). Se não, o programa deveria imprimir a mensagem "não formam triângulo". Três comprimentos só formam um triângulo caso cada lado seja menor do que a soma dos outros dois lados. Por questões de estética, os algoritmos foram aqui reproduzidos, e as cópias da folha de prova original encontram-se no Anexo E.

¹¹ Os algoritmos foram gentilmente cedidos pela Prof^ª Ms. Yvina Pavan Baldo, professora da disciplina de Algoritmos I na FAESA, no curso de Ciência da Computação.

Estudante Alfa

```

program Exe02;
uses CRT;
Var
A,B,C:real;
begin
clrscr;
writeln ('digite o primeiro valor:');
readln (A);
writeln ('digite o segundo valor:');
readln (B);
writeln ('digite o terceiro valor:');
readln (C);
if (A<B+C) and (B<A+C) and (C<A+B) then
begin
if (A=B) and (B=C) and (A=C) then
writeln ('o triângulo é equilátero. ');
else
begin
if (A<>B) and (B<>C) and (A<>C) then
writeln ('o triângulo é escaleno. ');
else
writeln ('o triângulo é isósceles. ');
end;
end;
end
else
writeln ('não formam triângulo');
read key;
end.

```

Estudante Beta

```

program Ex2;
Uses CRT;
Var
VAL1,VAL2,VAL3: real;
Begin
clrscr;
writeln ('Digite o primeiro valor');
readln (VAL1);
writeln ('Digite o segundo valor');
readln (VAL2);
writeln ('Digite o terceiro valor');
readln (VAL3);
if VAL1 <> VAL2 <> VAL3 then
writeln ('equilátero');
if (VAL1<> VAL2) > VAL3 then
writeln ('isósceles');
if VAL1 >= VAL2 >= VAL3 then
writeln ('escaleno');
else
if (VAL1+VAL2)<VAL3 then
writeln('não forma triângulo');
end;
else
if (VAL2+VAL3 < VAL1 then
writeln('não forma triângulo');
end;
else
if (VAL3+VAL1)< VAL2 then
writeln('não forma triângulo');
end;

readkey;
end.

```

Figura 3.1: Programa escrito por dois estudantes de Ciência da Computação, sobre a leitura de três números e posterior verificação da representação ou não dos comprimentos dos lados de um triângulo.

A despeito dos erros inerentes à formatação do programa e observando apenas a lógica, complexidade e extensão da compreensão dos estudantes Alfa e Beta, é possível arriscar, que o estudante Alfa compreendeu as condições dadas pelo problema, ao definir corretamente as relações válidas para os três valores numéricos introduzidos, associadas à classificação dos possíveis triângulos formados. Ao contrário, o estudante Beta demonstrou desconhecer as exigências para um triângulo ser equilátero ou escaleno, conforme destaque em sublinhado duplo, nos próprios programas. O maior número de passos e o excesso de "if's" utilizados pelo estudante Beta denunciam uma baixa eficiência em sua maneira de organizar-se para a solução do problema proposto, uma vez que, o triângulo sendo numericamente possível e, já descartando duas das três possibilidades,

significa que já se pode declarar ser este triângulo a terceira possibilidade, não havendo necessidade de mais uma testagem condicional, ou seja, mais um "if". Além disso, os três últimos "if's" utilizados pelo estudante Beta, poderiam ser reunidos em um único, conforme destaque em negrito e muito bem pontuado pela professora da disciplina.

Essa breve análise possui respaldo em um tratamento matemático utilizado em Ciência da Computação para mensurar a eficiência de um algoritmo na solução de um dado problema (Cormen, Leiserson, Rivest & Stein, 2002). Esse tratamento consiste em determinar matematicamente a quantidade de recursos (tempo de execução, espaço de memória etc.) requisitados por cada algoritmo como uma função do tamanho da massa de dados a serem tratados. Uma forma de análise consiste em contabilizar o número de instruções executadas pela máquina, e, as comparações são um exemplo. O estudante Alfa propôs nove comparações em seu algoritmo, enquanto o estudante Beta, doze.

Esse fato indica que a proposta de solução do estudante Alfa foi mais simples e melhor que a do estudante Beta, e, se um algoritmo expõe a maneira de pensar do estudante em certo problema, o estudante Alfa mostrou melhor performance. Talvez se possa dizer que o número de instruções proposto pelos estudantes nos algoritmos denuncie o número de passos ou de acionamentos aos módulos mentais (memórias, por exemplo), tornando a solução mais ou menos eficiente, ou até mesmo, inviabilizando-a, como também ocorrem em algoritmos de busca ineficientes. Sob um outro ângulo, talvez se possa dizer que a representação mental que o estudante possui para aquele problema, determine o número de instruções, o que implica na elegância e eficiência de sua solução. Só uma pesquisa poderia responder. Eis uma interseção da teoria representacional com a teoria das habilidades de Krutetskii. Seria o estudante Alfa considerado mais hábil no componente raciocínio lógico que o estudante Beta, pelo simples fato de propor um número menor de etapas na solução de um problema?

Concorda-se com Johnson-Laird que a análise do processo do pensamento faz emergir aspectos não captáveis na observação da resposta, correta ou não, na solução de um problema resolvido na forma de um programa. O sucesso ou

fracasso em seu produto final indica diferenças entre os sujeitos, ainda que com pouca consistência, mas, é a análise do processo que revelará a qualidade do programa, a qualidade da lógica de seu pensamento.

O trabalho dos psicólogos cognitivos, de maneira geral, seria facilitado caso pudessem observar diretamente os modos como os seres humanos representam o conhecimento em suas mentes, tais como constroem internamente um programa. Como isso ainda não é possível, e talvez não o seja tão cedo, restou a eles buscar métodos alternativos como em um trabalho experimental, para estudar indiretamente essa representação em meio a uma tarefa cognitiva que exigisse manipulação do conhecimento representado mentalmente. As representações mentais ou representações internas são maneiras de o indivíduo construir internamente o mundo externo, uma vez que não o captamos diretamente. De acordo com Johnson-Laird (1983, p.157)

Os seres humanos,..., não apreendem o mundo diretamente; eles possuem somente uma representação interna dele, porque a percepção é a construção de um modelo de mundo. Eles [os seres humanos] são incapazes para comparar essa representação perceptiva diretamente do mundo – isso é o seu mundo,... (traduzido pela pesquisadora)

Johnson-Laird (1983) iniciou seus estudos de representações mentais inspirado no trabalho de Kenneth Craik¹² que propôs que os seres humanos são processadores de informação, numa época em que os computadores digitais ainda não haviam sido desenvolvidos. Os estudos de Craik (citado por Johnson-Laird, 1983, p.2-3) partiam do princípio de que os seres humanos faziam uso de três processos distintos de raciocínio no processamento de informação: inicialmente ocorria uma transformação de eventos externos em uma representação interna em termos de palavras, números ou outros símbolos; depois disso, havia um processamento inferencial sobre os símbolos internalizados; e, finalmente, ocorria uma espécie de decodificação desses

¹² Kenneth Craik divulgou essa idéias em seu livro "*The Nature of Explanation*", publicado em 1943, conforme informou Johnson-Laird (1983, p.2). Como curiosidade, Craik foi estudante e sucessor de Bartlett e faleceu em um acidente de bicicleta em 1945. Donald Broadbent deu continuidade a seu trabalho, dando origem à publicação "*Perception and Communication*", em 1958, onde incluiu alguns dos primeiros modelos de processamento de informações de fenômenos psicológicos.

símbolos em ações ou uma reconhecimento da correspondência entre símbolos e eventos externos.

De maneira mais simples, o estímulo externo deveria ser traduzido em uma representação interna, que, por sua vez, é manipulada por processos cognitivos para derivar em novas representações internas e daí, serem traduzidas em ações. Craik (1967) afirmou que se o organismo transporta um "modelo em escala reduzida" da realidade externa e de suas próprias ações possíveis dentro de sua cabeça, ele é capaz de experimentar várias alternativas, concluir qual a melhor delas, reagir a situações futuras antes que elas surjam, utilizar o conhecimento de eventos passados para lidar com o presente e o futuro e, em todos os sentidos, reagir de maneira muito mais completa, segura e competente às emergências que enfrenta.

Johnson-Laird (1983) conjugou a analogia de Craik sobre a mente e seu funcionamento computacional com outros estudos mais avançados sobre computação, máquina de Turing, entre outros, para desenvolver uma teoria sobre modelos mentais que as pessoas usavam quando processando informações. Para ele, os diferentes modos de representação mental são distinguíveis quando analisados em certo nível que veio ser a tônica de sua investigação.

Em linhas gerais e complementando as informações a respeito de sua teoria mencionadas no capítulo dois, Johnson-Laird (1983) afirmou que os sujeitos representavam mentalmente as informações do mundo exterior, num primeiro momento, para que a mente convertesse essas representações em uma linguagem mental que se supunha única para os seres humanos. As representações foram comparadas a programas computacionais de alto nível¹³, por possuírem escrita mais próxima da linguagem natural dos sujeitos. E quando "compiladas"¹⁴ pela mente em uma linguagem própria, podiam ser comparadas com linguagens de máquina, ou de baixo nível, justamente por estarem mais

¹³Pode-se citar o Pascal, o Cobol, o Fortran, o Java, entre outras, como linguagens computacionais de alto nível; o Assembly é um exemplo de linguagem de baixo nível por ser escrita com zeros e uns, que é um formato mais próximo da linguagem de máquina, que por sua vez, traduz um estado de presença (1) ou ausência de energia elétrica (0).

¹⁴ Compilar é transformar um arquivo legível para o homem (chamado código-fonte ou *source-file*) para um arquivo legível para a máquina (binário ou *binary*). Quem faz esse trabalho é o compilador.

próximas do sistema cerebral humano¹⁵, se o assunto for seres humanos e, mais próximas do hardware do computador quando se falasse de máquina. As estruturas de informação de alto nível podiam ser reduzidas a cadeias de símbolos por uma máquina de Turing, assim como o cérebro humano convertia as representações elaboradas pelos sujeitos em uma linguagem própria. A teoria desenvolvida por Johnson-Laird tratou das representações internas que os seres humanos construíam quando processando informações. A figura 3.2 esboça esse contorno da teoria de Johnson-Laird.

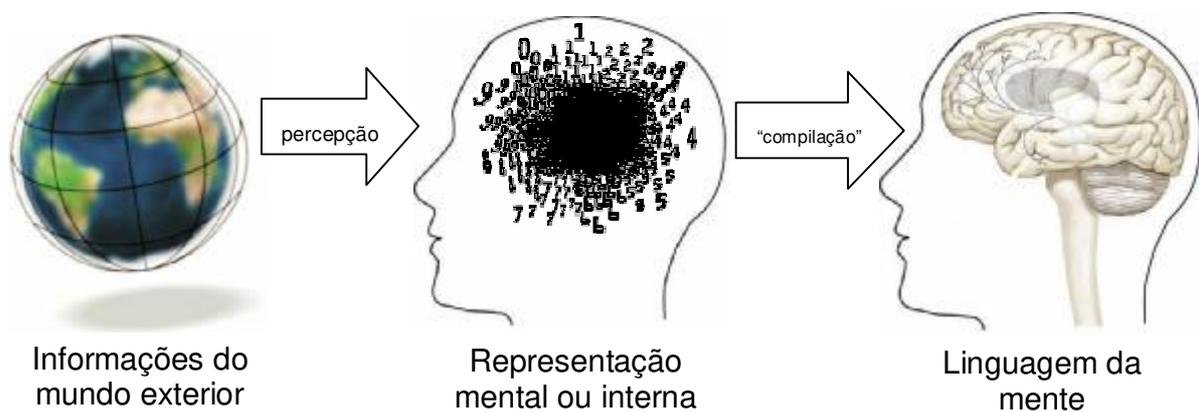


Figura 3.2: Esquema do contorno da teoria de Johnson-Laird

Vale dizer ainda, que não existem modelos mentais completos para quaisquer fenômenos empíricos. Para alguns, por exemplo, a idéia de televisão deve ser a de uma caixa que mostra figuras se movendo acompanhadas de som. Para outros, a televisão pode ser vista como um tubo de raios catódicos emitindo elétrons em uma tela. Outras maneiras de se entender a televisão podem emergir no trabalho empírico (Johnson-Laird, 1983).

A teoria de modelos mentais de Johnson-Laird está em sintonia com os propósitos da presente pesquisa no momento em que se persegue entender os modos como os estudantes representam problemas matemáticos, os

¹⁵ O sistema cerebral humano é entendido como “hardware cerebral”, ou seja, o sistema físico, assim como, memórias e processadores são entendidos como o hardware, ou a parte física do computador.

desempenhos no ENADE, as habilidades matemáticas em problemas específicos e o tipo de raciocínio lógico.

Johnson-Laird e outros psicólogos cognitivistas: uma visão da evolução

No final do século XIX, acreditava-se que a lógica mental usada pelos humanos era única. Mais tarde, alguns pesquisadores descobriram a existência de diferentes tipos de lógica, a partir de novos métodos de investigação. A tarefa de Johnson-Laird e de outros psicólogos cognitivistas passou a ser a de desvelar as variadas lógicas que as mentes humanas apresentavam como diferentes opções de conversão de uma linguagem externa para outra interna.

Nesse ínterim, surgiram controvérsias entre os pesquisadores. Uma delas versava sobre a existência de pensamento por imagem e se possuíam valor na teoria sobre lógica mental. As investigações de Johnson-Laird fizeram-no crer que não só as imagens podiam ser formadas e manipuladas nas mentes humanas como, pelo menos, outros dois tipos de pensamento – os modelos mentais e as representações proposicionais.

Reconhecer três tipos principais de representação diferiu Johnson-Laird das opiniões de seus colegas cognitivistas que se dividiam em duas facções opostas até então, segundo a maneira de entender as imagens como uma representação mental. Os imagistas defendiam principalmente que as imagens eram um tipo específico de representação interna, enquanto os proposicionalistas pregavam que a mente usava apenas representações proposicionais traduzidas como cadeias de símbolos, como única forma de representação, e as imagens aí se incluíam. Pode-se dizer que o psicólogo cognitivo Stephen M. Kosslyn seja um representante do grupo dos imagistas, ao afirmar que a elaboração de representações mentais ocorre como se fossem quadros e não descrições da linguagem (Kosslyn, 1994). Já John R. Anderson, pareceu simpatizar mais com o grupo dos proposicionalistas, na década de 1990, ao definir uma proposição como a menor unidade do conhecimento que pode se manter como uma asserção

separada. Essa posição parece ter sido revista ao incluir imagens em modelos que, até então, compreendiam apenas proposições (Sternberg, 2000, p.190).

Johnson-Laird não se encaixava em nenhuma das duas facções, não por discordar totalmente deles, mas, sobretudo, por conceber imagens como uma parte especial do que ele chamou de modelo mental, um tipo mais abrangente de representação interna por imagem. Além disso, ele se distinguiu de outros psicólogos cognitivistas por ter desenvolvido uma teoria de modelos mentais que abordava a representação do conhecimento aplicada a uma grande amplitude de fenômenos cognitivos, inclusive percepção visual, memória, compreensão de textos e raciocínio (Sternberg, 2000), diferentemente daqueles que priorizaram um ou outro aspecto somente. Johnson-Laird talvez seja mais conhecido por suas aplicações teóricas dos modelos mentais ao raciocínio, uma das razões da escolha por essa teoria para a presente pesquisa.

Representações proposicionais, modelos mentais e imagens: algumas distinções e considerações

Numa primeira distinção entre as três representações mentais citadas na teoria de Johnson-Laird, pode-se dizer que as representações proposicionais são representações de uma proposição verbalmente expressável (Johnson-Laird, 1983); os modelos mentais possuem uma representação direta e análoga à maneira com que o sujeito percebe e concebe aquela entidade. A estrutura analógica da representação do que é representado pode variar consideravelmente, inclusive ser uma imagem. Já as imagens são representações específicas que reúnem aspectos perceptivos pelo sujeito das entidades em voga, vistas de uma forma particular.

Pode-se exemplificar essas idéias a partir da situação: “O estudante está lendo um livro”. Alguém poderia representar mentalmente essa situação como uma proposição, uma vez que é verbalmente expressável. Outro poderia construir um modelo de qualquer estudante lendo qualquer livro, talvez como um protótipo. Uma terceira pessoa formaria uma imagem de um estudante e um livro particular.

Uma investigação realizada por Johnson-Laird e Kannan Mani (1982, apud Sternberg, 2000, p. 170-171) sobre modelos e proposições, mostrou a partir de diferentes maneiras na transmissão de certa mensagem, a formação da representação mental e a condução dada pelos sujeitos a partir do caminho mental representado.

Foi dado a um grupo de pessoas, descrições pormenorizadas sobre uma distribuição espacial, incluindo localização precisa para cada objeto no ambiente. Para outro grupo foram fornecidas descrições indeterminadas para o mesmo esboço espacial, passíveis de ambigüidade na localização dos objetos. Analogamente, poder-se-ia dizer para o primeiro grupo que o estado de São Paulo está situado entre os estados do Paraná ao sul, Minas Gerais ao norte, faz fronteira com o Rio de Janeiro a nordeste e com o Mato Grosso do Sul a oeste, além do oceano Atlântico à leste. Ao segundo, poder-se-ia dizer que o mesmo estado está situado entre os oceanos Atlântico e Pacífico. Johnson-Laird e Mani descobriram que o primeiro grupo inferiu informações adicionais além das descrições fornecidas inicialmente e fugiram aos detalhes textuais dos interlocutores. Os componentes do segundo grupo raramente acrescentavam informações adicionais, mas recordavam literalmente as descrições fornecidas pelos pesquisadores.

Pôde-se concluir desse experimento que os componentes do primeiro grupo formaram um modelo mental das informações e se não evocaram as descrições textuais, sugeriu-se que confiaram nos modelos construídos por eles. Comparativamente, concluíram que os sujeitos do segundo grupo não inferiram um modelo mental para as descrições indeterminadas devido ao grande número de possibilidades para modelos mentais a partir das informações fornecidas. Em seu lugar, parecem ter representado mentalmente as informações na forma de proposições verbalmente exprimíveis, por terem repetido frases ditas pelos pesquisadores.

O importante aqui, talvez não seja tanto as diferentes maneiras de se passar uma mensagem, apesar da importância do tratamento dado ao discurso do professor e os usos deste por eles, poder fazer toda a diferença para o estudante

(Souza, 2001), mas saber que a formação dos modelos mentais possibilitou aos sujeitos transcenderem às informações dadas, além de desenvolverem maior confiança no que diziam. Esse é um perfil desejado pelos profissionais da educação, dado o caráter autônomo, de maior alcance na compreensão e de conexões dos conteúdos escolares pelos estudantes.

A teoria de Johnson-Laird é capaz, inclusive, dado seu caráter abrangente, de explicar fenômenos dificilmente explicáveis por outras teorias. É o caso do estudo feito por Nancy Kerr (citado por Johnson-Laird, 1983) sobre a formação de imagens mentais em pessoas portadoras de cegueira congênita, ou seja, pessoas que nasceram cegas, e isso supõem, inicialmente, que nunca tivessem formado imagens visuais mentais, pelo menos, no sentido usual do termo. Ela adaptou experimentos do psicólogo cognitivo Kosslyn¹⁶ e os aplicou em pessoas visualmente normais e cegas.

Um dos experimentos era o de tatear mapas em uma prancha com características especiais topográficas, detectáveis por um cego. Pedia aos sujeitos que formassem uma imagem mental da prancha. Embora mais lentamente, os deficientes visuais apresentavam padrões de respostas semelhantes aos de visão normal. O resultado sugeriu que a imaginação espacial não precisava depender da experiência de percepção visual e que o uso da imaginação pelo tato, sugeriu modalidades alternativas para a imaginação mental. A teoria de Johnson-Laird defende que as imagens podem ser formadas e controladas nas mentes humanas mesmo na ausência de estímulos visuais. Elas podem ser usadas para representar informação espacial ou para solucionar problemas.

Outras diferenças entre as representações são evidenciadas. Um modelo mental não tem uma estrutura sintática arbitrariamente escolhida como a representação proposicional possui. Essa, inclusive, é uma limitação dessa modalidade representacional por somente poder ser analisada na direção codificada na representação, enquanto o modelo permite análise em mais dimensões por serem dinâmicos e por representarem uma seqüência de eventos. Um bom exemplo dado por Johnson-Laird (1983) é aquele que distinguiu a

¹⁶Kosslyn, desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva sobre imagem.

maneira como sujeitos podiam refazer a rota de um labirinto que tivessem passado. Uns podiam recordar-se que o caminho para sair do labirinto era virar à esquerda cada vez que tivessem que decidir para qual lado ir; outros podiam não se basear em proposições verbais, mas “navegar” pelo modelo de labirinto construído em sua mente.

As imagens possuem estreita relação com a representação por modelos mentais. Para Johnson-Laird (1983) as imagens correspondem a vistas de modelos, ou seja, representam características perceptivas das entidades do mundo real correspondente. Os modelos, assim como as imagens, são altamente específicos no seguinte sentido: um sujeito pode formar uma imagem de um triângulo, mas somente de um determinado triângulo. Isso o leva a raciocinar baseado em um modelo ou imagem. É preciso que ele se esforce para assegurar que sua imagem ou modelo vai além do exemplo específico considerado, pois acreditar que um triângulo equilátero seja a única forma possível para representar um triângulo pode levá-lo a crer que todos os triângulos possuem ângulos de 60° e isso influenciaria o conceito de triângulo do indivíduo (Hume, 1896, vol.I, apud Johnson-Laird, 1983). Foi vivenciada pela pesquisadora a experiência de desenhar os triângulos equilátero, isósceles e escaleno na lousa para estudantes de sétima série do Ensino Fundamental e eles só reconheceram o primeiro como sendo um triângulo.

Natureza e tipologia dos Modelos Mentais de Johnson-Laird

Johnson-Laird (1983, p.398-422) indicou que uma teoria de modelos mentais era um primeiro passo para se conhecer as possíveis representações mentais humanas. Acrescentou ser prematuro tomar a presente teoria como algo fechado e que contemplava na íntegra os possíveis modelos mentais, uma vez que tais modelos eram supostos estar nas cabeças das pessoas e sua constituição seria uma questão de pesquisa. No entanto, Johnson-Laird (1983, p.398) enumerou princípios que delineavam a natureza dos modelos mentais. Esses princípios marcavam os limites entre a representação por modelos mentais e outras teorias

de representações como os esquemas de Piaget e os subsunçores de Ausubel, por exemplo. Alguns deles são:

- O princípio da computabilidade segue da doutrina do funcionalismo, ou seja, modelos mentais e o mecanismo de construção e interpretação deles são computáveis, ou seja, podem ser descritos na forma de procedimentos efetivos executáveis por uma máquina;
- Um modelo mental é construído de relações traçadas em uma estrutura particular para representar um estado de coisas. Esse princípio refere-se à maneira como os modelos mentais representam o mundo exterior; aos processos de construção e interpretação dos modelos mentais; aos conceitos incorporados nos modelos mentais e à estrutura básica dos modelos. Importante realçar que se a captação do mundo seguir um modelo, os modos como a pessoa reage ou fala desse mundo, segue o modelo construído;
- A descrição de um único estado de coisas é representada por um único modelo mental mesmo se a descrição é incompleta ou indeterminada. Teoricamente, um único modelo deve ser construído por um estratagema não determinístico que sempre produz o modelo correto. Na prática, essa indeterminação tem sido simulada por um procedimento que constrói um modelo inicial aceitável, ainda que algumas vezes, revisões arbitrárias, supostas e recursivas possam estar erradas. Conseqüentemente, o conteúdo capturado em um modelo mental é uma função do modelo e do processo que o avalia. Um único modelo mental pode representar um número infinito de possíveis estados de coisas, porque o modelo pode ser sempre revisado;
- Existe um número finito de primitivos conceituais (inatos) que dão origem a um conjunto correspondente de campos semânticos e outro conjunto finito de conceitos, ou 'operadores-semânticos' que ocorre em cada campo semântico servindo para construir conceitos mais complexos a partir dos primitivos subjacentes. O campo semântico revelado pela análise inclui forma, cor, pessoa, movimento, percepção, cogitação, emoção, ação corporal, posse e comunicação. Cada campo é refletido no léxico por um grande número de

palavras que compartilham um conceito comum no núcleo de seus significados. Verbos da percepção visual, por exemplo, avistar, vislumbrar, espiar, ver, examinar e olhar contém um núcleo subjacente que corresponde ao conceito de ver. Os operadores semânticos incluem conceitos de tempo, espaço, possibilidade, permissibilidade, causa e intenção. Assim, por exemplo, se uma pessoa vê algo, ela focaliza seus olhos num intervalo de tempo com a intenção de ver o que acontece. Os campos semânticos provêm nossa concepção sobre o que existe no mundo, sobre o mobiliário do mundo, enquanto os operadores semânticos provêm nosso conceito sobre várias relações que podem ser inerentes a esses objetos.

O estudo de Johnson-Laird e a presente proposta de pesquisa

A teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird é adequada para os propósitos desse trabalho, uma vez estar baseada em pressupostos que valorizam o estudo do processo do pensamento em detrimento do produto final. Estudar os processos internos de estudantes envolvidos em tarefas matemáticas e confrontar com seus resultados finais, pode dar um novo sentido aos levantamentos estatísticos antes mencionados. Além disso, Johnson-Laird estudou amplamente o raciocínio lógico, que é um outro foco de interesse para a pesquisa. Propõe-se aqui, conhecer mais a respeito da representação interna de estudantes de nível superior quando envolvidos em tarefas matemáticas que façam evidenciar seus raciocínios, que, em princípio, segundo a teoria de Modelos Mentais, podem ser: proposicional, por imagem ou por modelo, as duas últimas também conhecidas genericamente como analíticas. No entanto, conforme dito por Johnson-Laird (1983), nada impede que outras representações sejam evidenciadas e, somente uma pesquisa poderá revelá-las.

A teoria de Vadim Andreevich Krutetskii

O estudo desenvolvido por Vadim Andreevich Krutetskii¹⁷, entre os anos de 1955 e 1966, versa sobre o problema das habilidades¹⁸ matemáticas numa perspectiva teórica e prática. Para isso, desenvolveu ampla pesquisa que explorou a natureza e a estrutura das habilidades matemáticas, tomando como preocupação maior o máximo desenvolvimento das potencialidades matemáticas de estudantes. Essas habilidades foram concebidas como constructos psicológicos complexos, cuja estrutura é constituída por componentes, que combinados, vêm formar diferentes habilidades matemáticas.

As habilidades são estruturas mentais complexas que constituem uma síntese das propriedades e qualidades da mente. Inclui diversos aspectos desenvolvidos durante a execução adequada de uma atividade. As habilidades são totalidades cujos componentes não podem funcionar de forma isolada. A identificação e a análise de cada componente em separado são elaboradas apenas com o objetivo de pesquisa, mas na execução da atividade, o conjunto desses elementos interage formando uma única estrutura. Os resultados da pesquisa, bem como todo o seu desenvolvimento, podem ser encontrados no livro traduzido para o inglês "*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*", de sua autoria, editado em 1976, ou no original em russo, "*Psikhologiiia matematicheskikh sposobnostei shkol'nikov*"

Krutetskii (1976), psicólogo russo, desenvolveu sua teoria levando-se em conta aspectos sócio-históricos ligados ao aprendizado escolar, estando, dessa forma, em sintonia com teorias e idéias de outros personagens russos, como L. S. Vygotsky e A. Leontiev. Em meio a esses pressupostos, a teoria krutetskiiana realça o fato de que a habilidade, em geral, é um problema de diferenças individuais e que os sujeitos não possuem o mesmo potencial para

¹⁷ V.A.Krutetskii faleceu em 1991.

¹⁸ Não há uma palavra na língua portuguesa correspondente ao termo "*sposobnostei*" na língua russa. A tradução mais próxima é habilidade. Krutetskii (1976) concebeu "*matematicheskikh sposobnostei*", daqui pra frente, habilidade matemática, como um constructo de natureza psicológica, estruturado por componentes básicos que combinados vêm formar diferentes habilidades matemáticas.

desenvolvimento de atividades. Para ele, os sujeitos eram capazes¹⁹ de realizar tarefas, mas as capacidades aí envolvidas ocorriam em níveis diferentes. Nesse sentido, os sujeitos apresentavam maior ou menor capacidade para diferentes atividades. Krutetskii (1976) afirmou que essas capacidades não são naturais, apesar de contarem com certa hereditariedade, mas desenvolvidas em meio ao trabalho e às vivências de cada sujeito.

Os psicólogos soviéticos, e também Krutetskii, eram unânimes em dizer que todos os sujeitos considerados normais, mentalmente saudáveis, são capazes de aprender, e que não há aquele que o nível de habilidade seja tão baixo a ponto de não poder ser bem sucedido na escola, ambiente tratado por essa pesquisa. A esse respeito Kolmogorov (citado por Krutetskii, 1976, p.8-9) afirmou que

A necessidade de atitude especial para o estudo e entendimento da matemática é freqüentemente exagerada.... Normalmente, habilidades humanas médias são suficientes para dominar – com boa orientação e bons livros... – a matemática que é ensinada na escola secundária (traduzido pela pesquisadora).

No entanto, afirmar que todos os sujeitos possam aprender qualquer coisa, não significa que eles tenham as mesmas facilidades. Disso dependerão os métodos, os interesses pessoais, os esforços, o ambiente, as motivações, as evoluções sócio-históricas e as habilidades, dentre outras variáveis. Dessa forma, os sujeitos podem ser mais ou menos capazes em Matemática, segundo os níveis de habilidades matemáticas em que se encontrem, alcançado por meio do aprendizado, prática e domínio de uma atividade matemática. Justamente por estar ligado a um aprendizado, Krutetskii (1976) afirmou que as habilidades não são constantes e nem inalteráveis, mas passíveis de cultivo e de melhoramentos, não podendo precisar quão distante esse desenvolvimento possa alcançar, mas sabendo desde já ser limitado.

Para alguns psicólogos russos, contrariamente às idéias de Krutetskii, o conhecimento e as habilidades dos sujeitos são garantidos pelos métodos de ensino e pelas habilidades dos professores. Krutetskii não negou a importância

¹⁹ Krutetskii parecia entender a capacidade como um potencial humano a ser desenvolvido para se alcançar a habilidade. A capacidade também é entendida pelos russos através do termo "*sposobnostel*". A maneira como ele a usava, fornecia indícios ora como algo em construção - a capacidade - ora como algo em nível mais avançado - a habilidade, segundo Prof.Dr.Vladimir Dinnikov - Universidade Federal do Espírito Santo.

desses e de outros fatores para o sucesso das habilidades dos estudantes e nem poderia ao estar em sintonia com as idéias de Vygotsky, Leontiev e outros psicólogos soviéticos, mas afirmou não haver total dependência.

Além disso, o desempenho expresso por notas, muito observado no meio educacional, no aprendizado escolar é insuficiente para explicar e fundamentar a natureza das habilidades dos estudantes, dado que o baixo rendimento escolar não é necessariamente um indicativo de baixa habilidade e vice-versa, pois segundo indicações de pesquisas como a do psicólogo Rubinstein (citado por Krutetskii, 1976), diferentes estudantes podem apresentar o mesmo progresso em uma atividade, mas, ainda assim, terem habilidades diferentes.

Da mesma maneira, estudantes com habilidades idênticas podem diferir nos seus progressos. Krutetskii constatou daí, que estudantes que estavam sob o mesmo método de aprendizagem, desenvolvendo exercícios iguais e que apresentavam condições escolares gerais semelhantes, produziam essencialmente resultados diferentes e, essas diferenças poderiam ser explicadas pelas diferenças de habilidades.

É possível que os resultados em disciplinas matemáticas, antes comentados, possam também ser explicados pela exigência de níveis mínimos de habilidade matemática requeridos para domínio de objetos mais específicos como aqueles trabalhados no ensino superior. Nesse sentido, de acordo com a teoria krutetskiiana, o levantamento quantitativo dos resultados desses estudantes revela-se frágil para falar de suas habilidades. É preciso conhecer mais a respeito do nível desse desenvolvimento já que são estudantes com uma história escolar e de contato com objetos lógico-matemáticos de, pelo menos, onze anos de escolaridade para os ingressantes e, mais de quinze para os concluintes de graduações.

Krutetskii (1976) declarou a importância e necessidade de aplicação do método matemático e do estilo do pensamento matemático em todos os segmentos da ciência. Para ele, era difícil achar um campo do conhecimento no qual a Matemática não estivesse relacionada, por isso, tinha opinião de que suas aplicações em vários campos do conhecimento humano seriam amplas e

progressivas. De fato, nota-se grande implemento de objetos matemáticos para o progresso das ciências e isso aumenta a importância do desenvolvimento de habilidades matemáticas entre futuros profissionais de todas as áreas do conhecimento, notadamente, para os das ciências exatas e tecnológicas.

Foi assim que Krutetskii (1976) criticou algumas teorias sobre habilidades que defendiam o inatismo e a hereditariedade. Essas teorias entendiam o processo de desenvolvimento das habilidades ocorrendo segundo características da herança biológica do sujeito. O nível das habilidades seria, então, predeterminado por essas características inatas, segundo certa frequência de gene.

A teoria krutetskiana não descarta a importância da herança genética, mas prega que essa contribuiria com certa sensibilidade, no sentido de certo rendimento ligado ao sistema nervoso, para acionamento e processamento de tipos específicos de informação vinda do meio.

Em resumo, as habilidades não são vistas como inatas e hereditárias na teoria krutetskiana, mas, apesar disso, ele acreditava haver certa influência desses fatores para as habilidades dos sujeitos, impondo limites nesse processo de desenvolvimento, independentemente, muitas vezes, das condições de aprendizagem, da metodologia dos professores, do meio em que esse desenvolvimento ocorre. Isso porque alguns estudantes não podem elevar-se acima de certo nível, mesmo que invistam muito esforço e perseverança. Por isso, problemas de certo nível de complexidade e abstração não podem simplesmente ser solucionados, assim como eles não podem saltar uma cerca de cinco metros de altura ou levantar um peso de quinhentos quilos, como exemplificou Thorndike (citado por Krutetskii, 1976). Alguns estudantes obterão sucesso nos estudos tendo maus professores e, outros, fracassarão tendo bons ambientes de aprendizado. Entretanto, Krutetskii (1976) defendeu haver forte influência desses elementos para o sucesso no desenvolvimento das habilidades matemáticas.

Um outro ponto da teoria krutetskiana diz respeito às teorias sobre habilidades que trabalhavam com testes psicométricos. Embora Krutetskii tivesse uma visão positiva do uso de testes individuais, ele criticou testes psicométricos

por apresentarem uma abordagem estatística despida de análise e avaliação das habilidades. Para ele, é consumido muito tempo com o tratamento matemático dos resultados dos testes, com total ausência de interesse no próprio estudo do processo de solução. Esses testes estabelecem unicamente o resultado final da execução de certa tarefa, ignorando a natureza do verdadeiro processo de alcance do resultado. Nesse sentido, estes testes visavam aspectos quantitativos do fenômeno, desprezando características qualitativas.

Krutetskii (1976) forneceu alguns exemplos que ilustram a essência de suas críticas e estudos. Para isso, pediu que os estudantes solucionassem alguns problemas.

1º Problema: *Três amigos visitam a biblioteca em dias diferentes: o primeiro foi uma vez por 3 dias, o segundo foi uma vez por 4 dias e o terceiro uma vez por 5 dias. Na última vez eles estavam juntos na biblioteca e era terça-feira. Em quantos dias eles estiveram juntos na biblioteca, e que dia da semana isso aconteceu?*(Krutetskii, 1976, p.14)

O estudante **G.S.** (7ª série) rapidamente anotou uma série de números consecutivos começando com um e rapidamente riscou números: todo terceiro com um traço, todo quarto com um ponto e todo quinto com uma cruz. Ele obteve a resposta correta mecanicamente: 60 dias. Ele rapidamente contou os dias da semana e disse “Sábado”. Resposta correta com tempo de solução de 2 minutos e 2 segundos. A aluna **Yu.A.** (7ª série) pensou um pouco e então disse: “Então isso será o mínimo múltiplo comum!” Sem pressa, ela calculou “ $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ”. Dividiu 60 por 7; obteve 8 semanas, com um resto de 4 dias. Ela declarou: “Quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado. Dois meses desde sábado”. Resposta correta com tempo de solução de 1 minuto e 22 segundos. Constata-se, nesse caso, que os resultados foram os mesmos para ambos os estudantes. As avaliações psicométricas para os dois teriam sido iguais, com exceção para o tempo de solução, no entanto, os processos de solução estavam em níveis diferentes.

2º Problema: *Anote 100, 101, 102, O que esses três pontos significam? Que primeiro número você anotou? Qual o primeiro dígito? O terceiro dígito? Questão: Qual será o décimo-terceiro dígito? O vigésimo-primeiro dígito?* (Krutetskii, 1976, p.15)

O estudante **A.K.** (5ª série) simplesmente continuou a série e primitivamente contou o dígito específico. A resposta está correta com tempo de 29 segundos. O

estudante **S.B.** (6ª série) leu em voz alta, e mostrou com seus dedos os dígitos desde o um até achar o resultado pedido. Resposta correta com tempo de 21 segundos. A estudante **R.V.** (6ª série) refletiu sobre o fato de cada número ter três dígitos, leu em voz alta em grupos de 3, sem reproduzir toda a série. Resposta correta com tempo de 24 segundos. Os três estudantes solucionaram o problema corretamente com tempos de execução bem próximos. Qualquer psicometrista consideraria os três estudantes como sendo iguais. Mas, os caminhos psicológicos tomados para o resultado, são diferentes. (Krutetskii, 1976, p.15)

Krutetskii (1976, p.15) citou as soluções de dois problemas por três estudantes a fim de mostrar a unicidade dos métodos de solução de problemas dos estudantes e quanto as análises dos processos podem contribuir para a pesquisa.

Problema 1: *Se adicionarmos 360 a certo número, obtemos o mesmo resultado que se multiplicarmos esse número desconhecido por 4. Qual é o número?*

Problema 2: *Uma mãe é três vezes mais velha que sua filha. Daqui a dez anos, ela será apenas duas vezes mais velha que sua filha. Qual a idade da mãe?* (Krutetskii, 1976, p.15)

A estudante **S.R.** (7ª série) rapidamente, sem pausar, compôs equações e solucionou:

Solução para o problema 1: $360 + x = x \cdot 4$ $360 = 3x$ $x = 120$

Solução para o problema 2: $x;$ $x + 10$ $3x + 10 = 2(x + 10)$ $x = 10$
 $3x;$ $3x + 10$ $3x + 10 = 2x + 20$ (Krutetskii, 1976, p.15)

A estudante **R.T.** (7ª série) rapidamente, sem pausar, desenhou um diagrama:

Solução para o problema 1: 360

$$+ \quad \square = \square\square\square\square \quad \square = 120$$

Solução para o problema 2: $\square + \circ$

$$\square\square\square \quad \circ$$

$$\square\square\square\circ = \square\circ\square\circ \quad \square = 10 \text{ anos (filha)}$$

(Krutetskii, 1976, p.16)

O estudante **R.N.** (7ª série) não escreveu e não desenhou nada. Rapidamente disse:

Solução para o problema 1: “Soma 360 e tome isso 4 vezes – isso é tudo assim. Então 360 é três fatores iguais. O número é 120.”

Solução para o problema 2: “A diferença entre mãe e filha será sempre formada pelas duas idades iniciais da filha, e em 10 anos essas duas idades iniciais serão iguais à próxima idade da filha; que é, em 10 anos, a filha será duas vezes mais velha. A filha tem 10 e a mãe tem 30 anos” (Krutetskii, 1976, p. 16).

Os três estudantes solucionaram o problema e, foram considerados capazes. Um psicometrista teria considerado todos os três totalmente iguais, a despeito do tempo de solução, que nesse caso, foi aproximadamente igual. Mas, uma análise superficial do processo sugere diferenças essenciais no processo mental dos estudantes. Por isso, Krutetskii (1976) insistiu na análise do processo, pela importância de se mostrar as diferentes possibilidades que são perdidas em um teste psicométrico e a fragilidade de suas conclusões. Um teste psicométrico concluiria que os estudantes eram iguais em suas manifestações das habilidades matemáticas, ao passo que as análises do processo sugeriam que os sujeitos tinham diferenças profundas de níveis de habilidades matemáticas demonstrados durante a solução.

Teoria geral das habilidades matemáticas

Krutetskii (1976) ao formular a teoria geral das habilidades matemáticas diferenciou habilidades de destrezas, hábitos e conhecimentos. Esses termos são independentes apesar de inter-relacionados. Por um lado, enquanto conhecimento, destrezas e hábitos são adquiridos, habilidades são desenvolvidas. A formação das habilidades não é possível fora do processo de apropriação do conhecimento, de destrezas e de hábitos, entendidos estes últimos como ações específicas em uma atividade. Por outro lado, esses elementos – conhecimento, destrezas e hábitos – dependem de outras condições relativas aos traços individuais dos estudantes. De qualquer forma, habilidades, destrezas e hábitos

são formados em meio a uma atividade e são condições para o sucesso nessas. Talvez esses termos possam ser distinguidos quanto à velocidade de formação, sendo a destreza e o hábito formados mais rapidamente do que as habilidades.

Além das destrezas, hábitos e conhecimentos, Krutetskii (1976) reconheceu o estado mental, traços de personalidade, atitude positiva com relação à atividade matemática, como outros elementos que vêm formar as condições psicológicas gerais necessárias para uma execução bem sucedida de uma atividade. As habilidades matemáticas combinadas com tais condições psicológicas vêm constituir o que ele chamou de prontidão²⁰ para uma atividade matemática. A prontidão seria influenciada por esse complexo conjunto de elementos cuja

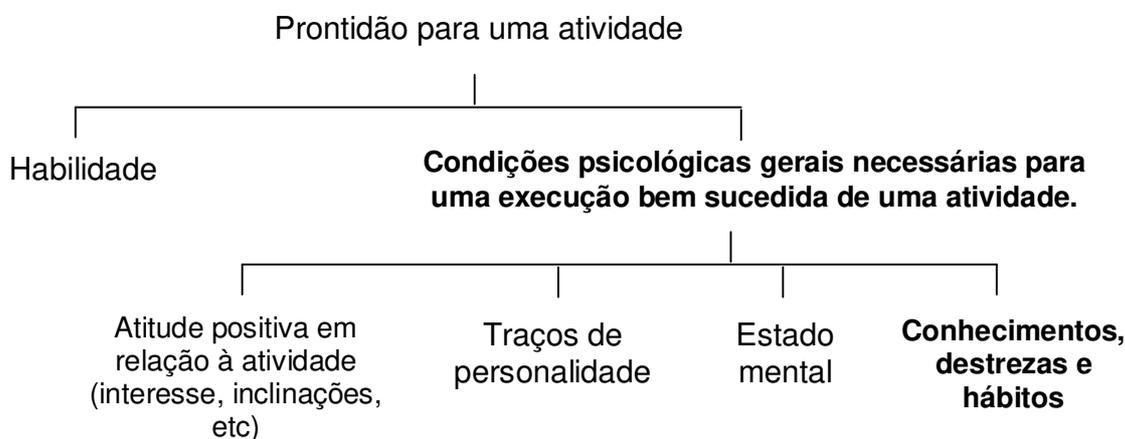


Figura 3.3: Esquema de representação da prontidão para determinada atividade (Krutetskii, 1976, p.74, traduzido por Garcia, 1995)

estrutura está representada na figura 3.3.

Desse modo, Krutetskii (1976) concebeu a habilidade matemática como um elemento importante, mas não suficiente para o domínio de uma atividade matemática. Nos moldes da teoria krutetskiana, todo sujeito considerado normal reúne condições para o aprendizado de conteúdos matemáticos, podendo alcançar patamares elevados, mas somente alguns sujeitos atingirão níveis de criação científica.

²⁰ O acesso à pesquisa de Krutetskii se deu via tradução na língua inglesa, por isso, faz-se constar o termo usado em inglês para evitar futuras confusões com traduções do português para outra língua.

A organização do estudo de krutetskii

Krutetskii (1976) levou onze anos para desenvolver o estudo das habilidades matemáticas em busca de uma estrutura que revelasse os diferentes níveis de desenvolvimento em que se encontravam os sujeitos. O método experimental de investigação contemplou uma análise qualitativa e quantitativa da solução de problemas matemáticos experimentais.

Os experimentos visavam desvelar a essência de mudanças ocorrendo no processo de desenvolvimento das habilidades matemáticas num curto tempo. Ao todo, duzentas e uma pessoas foram investigadas, sendo cento e noventa e dois estudantes de 2^a a 10^a série. Essa amostra não foi equilibrada, nem em idade, série escolar ou sexo. As crianças foram observadas durante as lições em sala de aula e, ocasionalmente em suas casas. Também houve abordagem oral com as crianças, com seus pais, professores e amigos. Os pais observaram o desenvolvimento de seus filhos cuidadosamente, conforme as instruções dadas por Krutetskii. Desse estudo, ele caracterizou os estudantes como “capazes”²¹, “medianamente capazes”²² e “incapazes”²³, concebendo esses últimos, na verdade, como “relativamente incapazes”²⁴, pois, como dito anteriormente, todo sujeito considerado normal possui condições mínimas para o desenvolvimento de habilidade matemática. Os estudantes capazes eram assim considerados por dominarem facilmente os objetos matemáticos solucionando-os com alta velocidade, por apresentarem independência no pensamento e por esboçarem alguma criatividade, principalmente ao estudarem um novo conteúdo, e por se aproximarem ou mesmo apresentarem soluções originais para problemas não padronizados.

Dentre os sujeitos com mediana habilidade foram enquadrados aqueles bem-sucedidos nas tarefas matemáticas, mas que consumiam maior tempo e esforço

²¹ O termo usado no livro traduzido para o inglês foi "capable" ou "able".

²² O termo usado no livro traduzido para o inglês foi "average capable".

²³ O termo usado no livro traduzido para o inglês foi "incapable".

²⁴ Na verdade, o termo usado por Krutetskii (1976, p.177) foi o de "relativamente incapazes" (em inglês, *relatively incapable*). Substituir-se-á essa denominação, nesse trabalho, por "pouco capazes", procurando fugir de uma possível conotação de demérito ao sujeito assim caracterizado.

quando comparados aos capazes. Esses estudantes tinham dificuldade em transferir o conhecimento de um problema para a solução de um outro tipo. Entretanto, uma vez dominado o método de solução, eles se saíam bem melhor. O conhecimento nesse caso era mais imitativo do que criativo.

Já os estudantes considerados relativamente incapazes, daqui para frente denominados nesse trabalho como “pouco capazes”, eram aqueles que apresentavam grandes dificuldades na compreensão e explicação do professor, necessitando sempre de lições extras. Estes estudantes não podiam trabalhar problemas que estavam além dos limites padronizados. Requeriam um grande número de exercícios e demonstravam freqüentemente insegurança ao solucioná-los.

Houve, também, lugar na pesquisa de Krutetskii (1976), para observação das inclinações, interesses escolares e extra-escolares, atitudes em relação a assuntos escolares, inclusive em relação à Matemática e alguns traços característicos, especialmente persistência e iniciativa. Foi aplicado questionário aos estudantes visando coletar dados sobre a solução de certos problemas, além de interrogá-los oralmente.

Krutetskii (1976) priorizou conhecer os seguintes aspectos, a partir dos componentes das habilidades matemáticas, que emergiam das características básicas do pensamento matemático das pessoas pesquisadas: 1- habilidade para formalizar material matemático, para isolar formas de conteúdo, para extrair relações numéricas concretas e formas espaciais e para operar com estrutura formal – com estruturas de relações e conexões; 2- habilidade para generalizar material matemático, para detectar o que é mais importante, separando dele mesmo o irrelevante, e ver o que é comum do que é diferente externamente; 3- habilidade para operar com numerais e outros símbolos; 4- habilidade para raciocínio lógico seqüencial; 5- habilidade para encurtar o processo de raciocínio, pensar em estruturas prontas; 6- habilidade para reverter um processo mental; 7- flexibilidade de pensamento – habilidade para mudar de uma operação mental para outra; essa característica de pensamento é importante para o trabalho criativo de um matemático; 8- memória matemática; 9- habilidade para conceitos

espaciais, os quais estão diretamente relatados para a presença de um ramo da matemática tal como a geometria (especialmente a espacial).

Esse foi, portanto, o esquema hipotético dos componentes da estrutura das habilidades matemáticas que veio a formar a base de sua pesquisa experimental.

Método usado na investigação experimental

O método de investigação foi o de analisar o processo de solução de problemas experimentais pelos estudantes dos quais as habilidades matemáticas estavam em diferentes níveis de desenvolvimento. A idéia principal partiu do princípio de que a solução de um problema envolve um produto de dois fatores – as características próprias de um problema e as características da pessoa solucionando-o.

Assim, Krutetskii (1976) organizou em quatro etapas o pensamento durante a solução de problemas, as quais foram exploradas posteriormente em pesquisas do PSIEM (Garcia, 1995; Alves, 1999; Araújo, 1999; Vendramini, 2000; Utsumi, 2000, Rezi, 2001; Viana, 2000,2005) – 1- obtenção da informação, 2- processamento da informação, 3- retenção da informação e 4- tipologia (existência de um tipo de mente matemática). As três primeiras correspondem a passos básicos na atividade mental que ocorre durante a solução de problemas matemáticos - os sujeitos reunindo informações necessárias para solucionar o problema, processando essa informação enquanto solucionavam o problema e mantendo na memória os resultados e conseqüências da solução, respectivamente. A quarta categoria refere-se à investigação de tipos de habilidade matemática. Dentre as categorias, existem vinte e seis séries de problemas²⁵ que foram distribuídas em sete grupos de acordo com o componente da estrutura da habilidade matemática que elas estavam designadas a investigar. Krutetskii (1976) organizou os setenta e nove testes pertencentes às vinte e seis séries em vinte e dois do tipo aritmético, dezessete algébricos, vinte e cinco geométricos e quinze de outros tipos. Eles foram tomados de livros escolares, de

²⁵ As séries foram organizadas em números romanos.

coleções de problemas, de livros populares de Matemática, de jornais e revistas. A tabela contendo a organização do sistema de problemas experimentais utilizado por Krutetskii encontra-se no Anexo F.

As etapas da solução de problemas

As séries de problemas que compõem as quatro categorias da estrutura das habilidades antes mencionadas foram elaboradas com a ajuda de depoimentos de sessenta e dois professores de Matemática quando perguntados sobre o que eles entendiam como habilidades matemáticas e quais critérios eles usavam para detectar sua presença ou ausência. Krutetskii não esperava, obviamente, que os professores revelassem a essência psicológica do que mencionavam como sendo habilidade matemática, mas o material colhido foi significativo e valioso para seus objetivos.

1- Obtenção das Informações: estudou a habilidade dos sujeitos na percepção de objetos matemáticos quando diante de um problema formalmente disposto. As séries de problemas envolviam situações sem perguntas – série I – outras com informação incompleta – série II – ou ainda, com excesso de informação – série III. A preocupação, no caso dessa categoria, era a de investigar a performance dos estudantes no domínio de percepção inicial dos fatos envolvidos no problema, pois os passos seguintes poderiam estar comprometidos desde já. Motivo este que exige, neste trabalho, a realização de checagem prévia do entendimento do texto dos problemas que serão propostos nos instrumentos, bem como a relação das idéias ali expostas.

O estudo indicou que estudantes considerados como capazes em Matemática, sistematizavam as quantidades dadas no problema, diferenciando ou isolando três diferentes elementos quantitativos nessa estrutura: 1) selecionavam relações no problema que possuíam significados matemáticos básicos; 2) observavam quantidades não essenciais para o tipo de problema dado, mas que eram essenciais numa possível variação e; 3) identificavam quantidades desnecessárias para a solução de um problema específico. Em outras palavras,

os estudantes capazes percebiam o material matemático de um problema, isolando, avaliando e sistematizando diferentes elementos dessa estrutura e determinando uma hierarquia, e sinteticamente, combinando esses elementos numa relação de dependência. Percebiam os elementos isolados como estruturas matemáticas significativas distintas em um complexo de relações como um todo, ou seja, percebiam os elementos individualmente, cada um como uma parte de um todo, para então, tecer as inter-relações, formando uma estrutura integral, bem como, avaliando a participação de cada elemento nessa estrutura complexa.

Da mesma maneira, estudantes- considerados medianamente capazes, percebiam um tipo de problema novo, separavam os elementos matemáticos e os conectavam durante o processo de análise e síntese, mas em um outro nível. Já estudantes pouco capazes, quando chegavam a obter êxito, o faziam com grande dificuldade mesmo com auxílio de outra pessoa. Essa fragilidade no pensamento afetava a solução de problemas que requeriam uma compreensão destes como um todo, tal como ocorreu em meio a um problema que continha a expressão $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. Os pouco capazes não percebiam essa expressão como uma expansão do cubo da soma de dois números, porque eles entendiam cada termo isoladamente, sem conexão com os outros.

Esse autor chamou a atenção para a orientação analítico-sintética demonstrada por sujeitos com diferentes habilidades matemáticas, sendo que os sujeitos capazes encurtavam ao máximo o processo de percepção e visualização da estrutura em uma velocidade bem diferente daquela demonstrada pelos medianamente capazes. Há, nesses casos, uma compreensão quase instantânea das relações básicas do problema para uns, enquanto para os pouco capazes ela era mais vagarosa, ou mesmo de difícil alcance. Por exemplo, estudantes capazes levaram entre um ou dois segundos para perceber a diferença de dois quadrados de $113^2 - 112^2$, partindo rapidamente para a solução. Estudantes medianamente capazes levaram aproximadamente cinco minutos para produzir uma análise analítico-sintética dos termos do mesmo problema.

As idéias de pensamento resumido²⁶, rapidez de pensamento e sucesso na compreensão analítico-sintética foram tratadas por outros teóricos russos como Vygotsky, Bogoyavlenskii e Menchinskaya (citados por Krutetskii, 1976) embora estes autores tenham respondido que não se sabia se esses resultados somente ocorriam quando os sujeitos eram submetidos a exercícios ou se o mesmo ocorria em outras situações. De qualquer forma, uma coisa parecia certa para os diferentes autores: os mesmos exercícios, a mesma prática, a mesma experiência produziam resultados diferentes em estudantes com habilidades distintas.

Para essa categoria, Krutetskii (1976, p.233) obteve os seguintes resultados percentuais, para cada uma das três séries (tabelas 3.4, 3.5 e 3.6):

Tabela 3.1: Série I - Percepção da estrutura de problemas sem perguntas por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.233)

Nível	Descrição	Porcentagem de Problemas Percebidos em cada Nível		
		Estudantes Capazes	Estudantes Médios	Estudantes Pouco Capazes
1	Não formulou pergunta, mesmo com ajuda do pesquisador, porque não compreendeu relações, e percebeu somente informações desconexas.	0	0	40,5
2	Formulou pergunta e reconheceu relações dadas no problema, mas somente com considerável ajuda do pesquisador.	0	23,5	30,1
3	Formulou pergunta independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e gradualmente compreendendo relações dadas no problema.	13,4	66,8	29,4
4	Formulou pergunta prontamente, tomando relações dadas no problema instantaneamente.	86,6	9,7	0

Tabela 3.2: Série II - Percepção da estrutura de problemas com informação incompleta por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.234)

Nível	Descrição	Porcentagem de Problemas Percebidos em cada Nível		
		Estudantes Capazes	Estudantes Médios	Estudantes Pouco Capazes
1	Não detectou falta de informação, mesmo com ajuda do pesquisador, porque não compreendeu relações, percebendo somente informações desconexas.	0	0	52,9
2	Detectou falta de informação e reconheceu relações somente com considerável ajuda do pesquisador.	0	53,8	24,0
3	Detectou falta de informação independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e gradualmente compreendendo relações dadas no problema.	23,9	42,9	23,1
4	Notou falta de informação prontamente, tomando relações que constituem a essência do problema instantaneamente.	76,1	3,3	0

²⁶ *Curtailment thought* foi traduzido como pensamento resumido na tese de Garcia (1995). Deste trabalho em diante, os pesquisadores do PSIEM adotaram essa terminologia.

Tabela 3.3: Série III - Percepção da estrutura de problemas com excesso de informação por estudantes de habilidades matemáticas variadas (Krutetskii, 1976, p.235)

Nível	Descrição	Porcentagem de Problemas Percebidos em cada Nível		
		Estudantes Capazes	Estudantes Médios	Estudantes Pouco Capazes
1	Não selecionou informação desnecessária e não separou o que era redundante, mesmo com ajuda do pesquisador, porque não compreendeu relações, percebendo somente informações desconexas.	0	0	56,8
2	Selecionou informação desnecessária e separou o que era redundante; atentou para relações somente com considerável ajuda do pesquisador.	9,1	54,5	25,0
3	Selecionou informação desnecessária e separou o que era redundante independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e gradualmente compreendendo relações dadas no problema.	27,8	41,6	18,2
4	Imediatamente indicou informação desnecessária e supérflua, tomando a estrutura do problema, suas relações instantaneamente.	63,1	3,9	0

2- Processamento de Informações: estudou a habilidade para generalizar, relacionar e operar com objetos matemáticos. Krutetskii (1976) enfatizou que o importante era que o sujeito fosse capaz de reconhecer dentro de certo conteúdo específico o que era semelhante, o que era geral, e o que era essencial nas estruturas dos objetos, em suas relações e operações. Na generalização com o simbolismo matemático, ainda dois aspectos deviam ser considerados: 1) o sujeito devia ser capaz de reconhecer (generalizar) uma situação semelhante à alguma já conhecida para saber onde aplicá-la e; 2) devia saber o que aplicar no tipo de solução generalizada ou no esquema generalizado de uma prova ou um argumento. Além disso, estudou a habilidade do estudante para manusear formas de um problema em um contexto mais geral e não considerá-lo separadamente e, habilidade para deduzir o geral de casos particulares para formar um conceito. Em outras palavras, o estudante devia ser capaz de visualizar a possibilidade de aplicação de uma fórmula já conhecida para deduzir uma outra ainda não conhecida.

As séries de problemas V, VI, VII, VIII, IX e X investigaram diretamente a habilidade para generalizar material matemático. A investigação envolveu cento e vinte estudantes dos quais, sessenta e um considerados capazes, trinta e sete medianamente capazes e vinte e dois pouco capazes.

Os estudantes capazes foram rápidos e amplos em suas generalizações de objetos matemáticos. Não houve, para esses, necessidade de exercícios

auxiliares ou treinamento especial, logo após terem tido contato com a fórmula ou com um esquema de solução de determinados tipos de exercícios. Eles facilmente encontravam a generalidade subjacente a vários detalhes particulares contidos nos problemas, viam a profundidade da essência do fenômeno atrás do *design* externo e, rapidamente reconheciam o que era básico, principal e geral. Já os estudantes considerados medianamente capazes generalizaram imediatamente, mas fizeram isso de forma gradual por meio de sucessivos incrementos às generalizações. Enquanto os pouco capazes generalizaram com grande dificuldade, mesmo com ajuda direta do pesquisador. Para ir de um nível de generalização para outro, foi preciso um considerável número de exercícios.

O pensamento resumido do processo de raciocínio matemático e o sistema correspondente de operações foram estudados por alguns pesquisadores russos, como S.I.Shokhor-Trotsky e F.A.Ern (citados por Krutetskii, 1976, p.264) que afirmaram que o pensamento resumido do processo de raciocínio matemático ocorria à medida que os estudantes resolviam certos problemas e os automatizavam, deixando assim, de serem trabalhados em nível consciente. O processo mental é encurtado, mas quando necessário, os estudantes retomavam para um raciocínio detalhado completo.

Outras pesquisas, como as de Vygotsky, P.A.Shevarev e Menchinskaya (citados por Krutetskii, 1976, p.264), estudaram o mesmo tema obtendo resultados semelhantes. Vygotsky, por exemplo, foi o primeiro psicólogo russo a estudar a queda gradual de conexões no raciocínio que levavam ao pensamento resumido. Seguido das pesquisas de P.A.Shevarev em álgebra, e Menchinskaya em aritmética (citados por Krutetskii, 1976, p.264) para exercícios repetidos. Shevarev observou que inicialmente a solução acontecia por um processo detalhado, tornando-se abreviada de forma gradual. De maneira geral, todas as pesquisas levantadas por Krutetskii sobre esse assunto indicaram que o pensamento resumido ocorria gradualmente, mediante um número significativo de exercícios de certo tipo. No entanto, para Krutetskii (1976, p.264), ninguém fez uma análise do ponto de vista das habilidades matemáticas.

No estudo de Krutetskii, a habilidade de resumir o pensamento na atividade matemática foi feita em quatro estágios. Os primeiros foram analisados em termos qualitativos; o último, em termos quantitativos. Todas as afirmações feitas em pesquisas anteriores à de Krutetskii sobre esse assunto, foram confirmadas por ele para estudantes com mediana habilidade para Matemática. Entretanto, em estudantes considerados capazes, houve uma forte tendência para um pensamento resumido rápido e radical de raciocínio e de sistematização do sistema correspondente de operações matemáticas. Krutetskii apresentou o seguinte exemplo: Foi pedido a um estudante considerado capaz que solucionasse a seguinte expressão: $(C+D+E)^2$. O estudante parecia conhecer o produto notável do tipo $(a+b)^2$. Krutetskii numerou os passos usados pelo estudante, que falava e escrevia durante a solução.

- 1- “Há três números aqui, mas a fórmula é para dois números. Como pode ser isso? O número na fórmula é um de dois termos, e um termo pode ser qualquer expressão... Mas, nós podemos fazer desses três [escreve $([C+D]+E)^2$].
- 2- Agora, eu tenho o quadrado da soma. Isso é igual, então, para o 1º número no quadrado [escreve: $(C+D)^2$].
- 3- O primeiro número é novamente um quadrado. Porque, isso é fácil com a fórmula [escreve: C^2+D^2+2CD].
- 4- Agora há o quadrado do primeiro número. Eu tenho que somar o quadrado do segundo [soma: $+E^2$].
- 5- E agora somo o duplo resultado da multiplicação desses números [soma: $+2E(C+D)=$].
- 6- Agora, nós abrimos os parênteses e simplificamos [escreve: $C^2+D^2+2CD+E^2+2EC+2ED$]. Depois de pensar, ele disse: Não, há mais nada para fazer aqui. Isso é tudo.” (Krutetskii, 1976, p.265)

Para Krutetskii (1976), mesmo no exemplo transcrito, não havia um quadro completo do raciocínio detalhado do início ao fim. Existiram muitas conclusões usadas pelo estudante que não foram explicitadas, mas o que devia ser realçado nesse exemplo era a evidência do processo de pensamento resumido durante a

transição para a solução do próximo exemplo de mesmo tipo. Foi pedido então, que o mesmo estudante solucionasse o exemplo $(m+x+b)^2$. Ele disse:

- 1- “Nós combinamos 2 termos em um [escreve: $([m+x]+b)^2$].
- 2- O quadrado do primeiro termo será [escreve: m^2+x^2+2mx].
- 3- Somo o quadrado do segundo [soma: $+b^2$].
- 4- Somo duas vezes o resultado da multiplicação deles [soma: $+2mb+2xb$].”

(Krutetskii, 1976, p.265)

Segundo Krutetskii (1976), o estudante gastou um quinto do tempo gasto solucionando o primeiro exemplo. No quinto exemplo, $(-5x+0,6xy^2)^2$, o estudante solucionou tão rapidamente e facilmente que Krutetskii não conseguiu seguir o curso de seu raciocínio. Tão logo foi dado o exemplo, ele escreveu no papel a solução: $25x^2+0,36x^2y^4-6x^2y^2$, falando palavras soltas durante a solução como: “um quadrado... um outro... menos a soma”. O pesquisador perguntou ao estudante como ele havia solucionado e ele respondeu: “Aqui, não há o que pensar – apenas olhar para o exemplo e escrever.” (Krutetskii, 1976, p.265) Krutetskii concluiu que o estudante não se lembrou de regra ou definição enquanto solucionava os últimos problemas, quais sejam, o teorema binomial, o quadrado de um monômio ou a regra para multiplicação de monômios. Uma vez identificado que a expressão envolvia o quadrado da soma de dois números, o estudante imediatamente, sem estar consciente de regras e definições, passou a efetuar as operações apropriadas.

Para estudantes medianamente capazes o pensamento resumido ocorreu depois de certo número de estágios, como um resultado de exercícios repetidos. Já para os estudantes pouco capazes, nenhum pensamento resumido apreciável foi observado, mesmo como um resultado de muitos exercícios. Logo de início, apresentavam-se confusos em suas próprias deduções. O auxílio do pesquisador pareceu ser irrelevante.

A flexibilidade do processo mental foi estudada nas séries XIII, XIV e XV. O grupo de sujeitos pesquisados foi composto por dezessete estudantes capazes, vinte e quatro medianamente capazes e dezessete pouco capazes, todos da 7ª série. Esse componente engloba basicamente a habilidade para novas soluções

para um dado problema além de focar o tempo para a reconstrução na atividade mental.

Os estudantes considerados capazes construíram facilmente soluções para os problemas apresentados e ainda propuseram novos métodos de operação, evidenciando facilidade na mudança de uma operação mental para outra.

De acordo com o autor, não foi tão fácil para estudantes com mediana capacidade realizar as mesmas tarefas, ou seja, encontrar um novo método de solução para problemas que já tinham sido solucionados uma primeira vez. Suas tentativas giravam em torno do método já utilizado. Seus pensamentos pareciam insistir para o padrão de solução encontrado originariamente.

Para os estudantes pouco capazes houve um bloqueio na busca de uma nova solução. Eles não conseguiam visualizar ou mesmo conceber nenhuma possibilidade de novo método de operação. Apresentaram dificuldade nas tentativas de se relacionar um nível de pensamento para um outro, de uma operação mental para outra.

Krutetskii (1976, p.279) exemplificou com o seguinte exercício. “Quatro litros de água à temperatura ambiente (15°) foram adicionados a três litros de água à temperatura de 36° . Que temperatura ficou estabelecida no recipiente?” Um estudante da 7ª série, capaz, sem demora deu a seguinte solução: “Três litros de água deram 108° no total. Quatro litros de água deram 60° no total. Um total de 168° para sete litros = 24° ”. Depois disso, sem parar, o mesmo estudante apresentou uma solução visual, conforme figura a seguir:

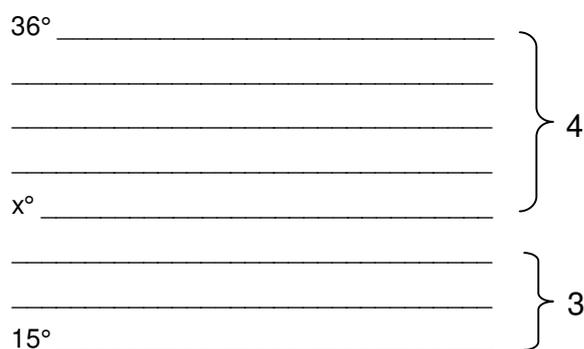


Figura 3.4: Solução visual do problema (Krutetskii, 1976, p.279)

Sua explicação foi: “A temperatura média não estará no meio, mas moveu-se em direção aos 15° . A proporção será 4:3. Nós dividimos a diferença de 21° nessa

relação ($21:7=3$), e então igualmente adicionamos 9 para 15, ou subtraímos 12 de 36". Depois disso, pensou por uns dez segundos e solucionou de uma outra maneira: " $t_{av} (36.3 + 15.4)/(3 + 4) = 24^{\circ}$ ". Ele consumiu um minuto e oito segundos para essas três soluções. Nenhum estudante pouco capaz pôde encontrar duas soluções para esse problema. A maioria encontrou apenas uma e com ajuda do pesquisador.

Krutetskii (1976) afirmou que estudantes capazes matematicamente eram também reconhecidos pela grande flexibilidade e mobilidade de seus processos mentais na solução de problemas matemáticos. Isso pôde ser verificado pela agilidade na ligação de uma operação mental para outra, em termos qualitativos. Já estudantes pouco capazes foram identificados pela ausência de inércia, pela lentidão e limitação de seus pensamentos no domínio de relações e operações matemáticas. De maneira geral, estudantes capazes empenharam-se para soluções mais racionais de um problema, procuraram simplicidade, pensamento resumido e caminhos mais "elegantes". Para o matemático Glushkov (citado por Krutetskii, 1976, p.283), a proposta da matemática é a de sempre obter, não qualquer solução, mas a mais elegante, a mais simples.

O componente reversibilidade do processo mental no raciocínio matemático enfocou a reconstrução da linha de pensamento tomada para solucionar um problema, em sentido contrário. Segundo Krutetskii (1976, p.287) é tão importante solucionar um problema, quanto construir o caminho de volta e obter o ponto de partida quando da primeira tentativa de solucioná-lo. Nessa "rua de mão dupla", o pensamento não tomou a mesma rota para sujeitos diferentes e isso os diferenciava sob o componente da habilidade em questão. Não se tratava simplesmente de retomar os passos antes trilhados, mas de reconstruir logicamente cadeias de associações que o levasse a obter o que antes foi o início de tudo. Essa flexibilidade no pensamento era especialmente difícil para alguns estudantes.

Segundo estudos de psicólogos soviéticos, essa flexibilidade é um importante elemento para que o estudante domine com maior facilidade objetos matemáticos. Para estudá-la, Krutetskii fez uso dos exercícios da série XVII. Os

resultados indicaram que estudantes capazes dominaram, sem dificuldades, os problemas de reversibilidade, e foram isentos de qualquer interferência do pesquisador. Eles solucionavam um problema reverso logo após terem solucionado o que o antecedia e que tinha relação com esse último. Por exemplo, no teste de aritmética foi apresentado o seguinte exercício:

Problema direto: Dezesesseis litros de água foram despejados em um tanque, enchendo $\frac{2}{5}$ de seu volume. Qual o volume do tanque?

Problema reverso: Água foi despejada em um tanque de 80 litros de capacidade, enchendo $\frac{2}{5}$ de seu volume. Quantos litros de água foram despejados no tanque?

Já para estudantes considerados medianamente capazes houve necessidade de aplicação de alguns exercícios apropriados e de algumas poucas instruções por parte do pesquisador. Além disso, apresentaram ausência de confiança para os primeiros exercícios. Ao contrário dos capazes, somente após a solução de alguns exercícios, essa confiança se fez presente.

Para estudantes considerados pouco capazes, o problema reverso somente foi reconhecido dessa forma para exercícios mais elementares, julgando-os principalmente pelos "sinais externos". Esses estudantes freqüentemente estabeleciam associações incorretas, como por exemplo, simplesmente transpor premissa e conclusão da sentença "ângulos verticais são iguais – ângulos iguais são verticais". (Krutetskii, 1976, p.289)

O componente compreensão, raciocínio e lógica no Processamento de Informação Matemática foi estudado, principalmente, nos exercícios das séries XVIII, XIX, XX e XXI. Apesar de Krutetskii não ter descrito com riqueza de detalhes os passos tomados pelos pesquisados durante a solução de problemas dessas quatro séries, ele apontou na exposição de outras séries, características gerais inerentes aos estudantes considerados capazes, medianamente capazes e pouco capazes que servirão como base para análise dos dados referente ao componente raciocínio lógico, constante na série XIX e XX, foco de interesse dessa pesquisa. Por essa razão, foram apresentados os resultados de outros componentes da habilidade matemática realçando aspectos relevantes que virão contribuir com a caracterização dos sujeitos para a presente pesquisa.

3- Retenção da Informação: de maneira geral, diz respeito à capacidade de memorização e retenção das informações veiculadas durante a solução de um problema matemático.

4- Tipos de mentes matemáticas na teoria de Krutetskii: dos resultados de seus estudos, Krutetskii (1976, p.313-315) observou a existência de três tipos de mente matemática. Esses tipos podiam ser explicados como uma conseqüência de diferenças psicológicas entre os sujeitos, como pelas buscas destes por um pensamento mais analítico, mais pictórico ou a combinação desses dois, chamado por ele de mente analítica, mente geométrica e mente harmônica, respectivamente. Os estudantes, assim, podiam ser matematicamente capazes segundo diferentes tipos de mentes. A mente analítica teria predominância de componentes lógico-verbais, a geométrica predominância de componentes visopictóricos e a harmônica uma alternância entre esses dois componentes.

4. ENADE e EGRAF: Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes e Exame Geral de Rendimento Acadêmico Faesa

Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes - ENADE

O governo brasileiro, por intermédio do Ministério da Educação, preocupado em ampliar os conhecimentos sobre a Educação Superior brasileira advindos do antigo Exame Nacional de Cursos - ENC, aprovou em 2004, a criação de um Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior - SINAES - instituído pela Lei nº 10.861, que é coordenado e supervisionado pela Comissão Nacional de Avaliação da Educação Superior - CONAES - e realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP - que é o responsável pela operacionalização dos processos avaliativos.

Esse novo modelo de avaliação da Educação Superior pública e privada vai além da checagem de conteúdos adquiridos pelos estudantes concluintes das diferentes graduações. Propõe uma aferição da qualidade e responsabilidade social atingida pelas instituições de ensino superior - IES - baseada nos objetivos de melhoria da qualidade acadêmica, qualificação da gestão universitária e prestação de contas à sociedade.

O sistema avaliativo é composto por três processos distintos e articulados entre si - a avaliação interna e externa das IES, a avaliação dos cursos de graduação e a avaliação do desempenho dos estudantes mais conhecido como Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes - ENADE.

A avaliação externa das IES analisa aspectos ligados à estrutura, atividade e compromisso social, enquanto a interna contempla uma auto-avaliação realizada pelas próprias instituições; a avaliação dos cursos de graduação procura aferir a qualidade do ensino oferecido a partir da organização didático-pedagógica, instalações e corpo docente, realizada por especialistas no local das IES; o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) avalia o desempenho dos estudantes com relação aos conteúdos previstos nas diretrizes curriculares das respectivas graduações, dentre outros aspectos.

Os estudantes envolvidos nesse exame foram, por amostragem, os ingressantes e os concluintes das graduações, pelo desejo de se visualizar a contribuição do curso em suas trajetórias acadêmicas, por meio de análise do valor agregado em relação às habilidades, competências e conteúdos profissionais específicos, dentre outros aspectos. Entende-se por estudantes ingressantes aqueles que até o dia 01/08/2005 tivessem concluído entre sete e vinte e dois por cento da carga horária mínima do currículo do curso da instituição em que estivesse matriculado, conforme critérios traçados pelo Ministério da Educação para o ENADE. Estudantes concluintes são os que até o dia 01/08/2005 tivessem obtido, pelo menos, oitenta por cento da carga horária mínima do currículo.

Esse exame, para a área de Exatas e Tecnológica, foi realizado no dia 06/11/2005 e, apesar de comportar quatro instrumentos - prova aplicada a ingressantes e concluintes de cada curso, questionário de impressões sobre a prova, questionário sócio-econômico e questionário aplicado aos coordenadores de curso -, somente os dois primeiros foram de interesse para a presente pesquisa. Esse instrumento, aplicado aos ingressantes e concluintes, não teve ênfase exclusiva sobre os conteúdos, mas, mais amplamente, investigou temas atuais contextualizados e problematizados em situações-problema conexas com aqueles.

O ENADE foi composto de duas partes: a primeira, denominada **formação geral**, apresentou-se como componente comum às provas das diferentes áreas, que investigou competências, habilidades e conhecimentos gerais que os estudantes já tinham desenvolvido em seu repertório; a segunda parte, denominada **componente específico**, contemplou a especificidade de cada área tanto no domínio dos conhecimentos quanto nas habilidades esperadas para o perfil profissional.

Diferentes relatórios foram gerados a partir dos processos avaliativos que compõem o ENADE. Destaca-se aqui o Boletim de Desempenho do Estudante que informa a cada um dos sujeitos participantes, privativamente, por meio de senha e disponibilizado na Internet, a nota e a posição que ocupa no conjunto de

seus colegas de curso e de área, permitindo, assim, compararem seus próprios desempenhos na prova em relação ao todo.

A prova aplicada aos estudantes teve duração total de quatro horas, compreendendo dez questões de formação geral e trinta, relativas ao componente específico. A parte de múltipla escolha do componente da formação geral abordou situações-problema, estudos de caso, simulações e interpretação de textos e imagens a fim de investigar a formação de um profissional ético, competente e comprometido com a sociedade em que vive, além das habilidades dos estudantes para analisar, sintetizar, criticar, deduzir, construir hipóteses, estabelecer relações, fazer comparações, detectar contradições, decidir, organizar, trabalhar em equipe e administrar conflitos. Já as questões discursivas investigaram, além de conteúdos específicos, aspectos como a clareza, a coerência, a coesão, as estratégias argumentativas, a utilização de vocabulário adequado e a correção gramatical do texto.

O **componente específico** da prova teve suas diretrizes elaboradas por Comissões Assessoras, constituídas por professores doutores reconhecidos por sua atuação profissional e indicados pelos pares. Essas Comissões delinearão os perfis profissionais desejados, as habilidades e competências e os conteúdos a serem avaliados para cada área, com base nas diretrizes curriculares nacionais, aprovadas pelo Conselho Nacional de Educação. Os pareceres das Comissões Assessoras foram registrados em portarias específicas e foram publicados pelo INEP, explicitando as habilidades e os conhecimentos necessários ao pleno exercício da profissão e da cidadania. Essa parte esteve baseada no perfil do curso e não somente no perfil do concluinte. Por esse motivo, as perguntas estavam voltadas para a trajetória do estudante levando-se em conta os conteúdos de todo o espectro das diretrizes curriculares e não apenas os conteúdos profissionalizantes.

Vale ressaltar que a prova do ENADE foi composta por questões de baixa, média e alta complexidade, podendo ser respondida por estudantes ingressantes e concluintes, por compreender diferentes momentos da trajetória acadêmica, permitindo aos concluintes uma revisão dos conteúdos estudados e aos

ingressantes conhecerem o quanto já sabiam ou precisariam saber dos conteúdos aos quais serão expostos nessa caminhada.

Competências, conhecimentos, saberes e habilidades definidas pela Comissão Assessora para a área de Computação

Tornou-se necessário conhecer os conteúdos e habilidades cobradas na prova do ENADE, uma vez ter composto o rol de instrumentos da presente pesquisa. Segundo portaria expedida pelo governo federal (www.inep.gov.br/superior/enade), a prova do ENADE no componente específico da área de Computação pretendeu avaliar o desempenho teórico dos futuros bacharéis nos seguintes assuntos: Álgebra e Matemática Discreta, Computabilidade, Complexidade de Algoritmos, Linguagens Formais e Autômatos, Compiladores e Arquitetura de Computadores. Tais conteúdos encontram-se listados no Anexo G. Da mesma forma, estão lá listadas as habilidades e competências que este exame pretendeu avaliar.

Os conceitos atribuídos aos estudantes

O ENADE gerou os conceitos de desempenho dos ingressantes na parte específica, os conceitos dos concluintes na parte específica e os conceitos dos ingressantes e concluintes na parte geral e comum. Além disso, foi calculado o indicador de diferença de desempenho, mostrando o quanto a média de desempenho dos ingressantes difere da dos concluintes. Os conceitos, como dito anteriormente, foram ordenados em cinco níveis, sendo o conceito um representativo do desempenho mais baixo e o de nível cinco representativo do desempenho mais alto, conforme tabela 4.1.

Tabela 4.1: Distribuição dos conceitos

Conceitos	Notas Finais²⁷
1	0,0 a 0,9
2	1,0 a 1,9
3	2,0 a 2,9
4	3,0 a 3,9
5	4,0 a 5,0

Fonte: MEC/INEP/DEAES - www.inep.gov.br

Outras considerações

O ENADE se diferencia do antigo programa de avaliação - ENC - por possibilitar, em pouco tempo, a avaliação da totalidade das áreas da educação superior. Em oito anos de ENC, foram avaliadas vinte e seis áreas, sendo apenas quatro das sete áreas que compõem os quarenta e nove cursos da Engenharia. Já o ENADE pretende em três anos avaliar cinquenta e duas áreas de conhecimento. Esse fato tornou-se viável por utilizar o método amostral trienal, diferentemente do antigo que era anual. Além disso, uma característica marcante do ENADE é que ele permite identificar o nível de formação de ingressantes e concluintes, dando subsídios às IES sobre a necessidade ou não de ajustes ou revisões curriculares e pedagógicas. O estudo em um nível mais abrangente possibilita maior sentido às antigas estatísticas.

Importância da Matemática na Formação dos Bacharéis em Computação

Segundo as diretrizes curriculares (www.mec.gov.br) para a área de computação, expressos pelo governo federal, a Matemática

deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc.). Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno. Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio do discreto, a matemática discreta (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada. A lógica matemática é também uma ferramenta fundamental na definição de conceitos computacionais. Teoria das Categorias possui construções cujo poder de expressão não possui, em geral, paralelo em outras teorias. Essa expressividade permite formalizar idéias mais complexas de forma mais simples bem como propicia um novo ou melhor entendimento das questões relacionadas com toda a Ciência da Computação. Como Teoria das Categorias é uma ferramenta nova, para exemplificar, vale a pena estabelecer

²⁷ As notas finais dos estudantes foram divulgadas na escala de 0 a 100. Por isso, a presente pesquisa adotou esse novo critério tanto para o ENADE quanto para o EGRAF.

um paralelo com a linguagem Pascal: Teoria das Categorias está para a Teoria dos Conjuntos assim como Pascal está para a linguagens Assembler. [...]

Muitos conceitos computacionais se baseiam em modelos matemáticos bem conhecidos como grafos e aritmética intervalar. A análise combinatória está na base do estudo de algoritmos de otimização para problemas combinatórios, tais como problemas em grafos. [...]

A matemática sobre os reais, matemática do contínuo (cálculo diferencial e integral, álgebra linear, geometria analítica, cálculo numérico, etc.), tem importância em áreas específicas da computação. Nas áreas de sistemas operacionais, redes, complexidade de algoritmos, computação gráfica, processamento de imagens, simulação, física, eletricidade e eletrônica etc. a matemática do contínuo é em maior ou menor grau empregada. A área de estatística tem aplicações na própria área de computação (redes, sistemas operacionais etc.) como na solução de problemas reais que envolvam a aplicações da computação.

EGRAF - Exame Geral de Rendimento Acadêmico Faesa

Preocupada em preparar seus estudantes para o ENADE, a Faesa desenvolveu um instrumento avaliativo do desempenho – o EGRAF - em nível de conhecimentos gerais e de conteúdos específicos da área, tal qual a proposta do governo federal, por período acadêmico. A proposta do EGRAF é a de ser uma avaliação de rendimento geral, integrada, que tem como principal foco a formação profissional no todo. Para isso, os professores de cada um dos nove períodos elaboraram quarenta questões objetivas, sendo cinco de conhecimentos gerais, trinta de conhecimentos específicos e cinco de caráter interdisciplinar das mesmas disciplinas envolvidas naquele teste. Além disso, foram propostas três questões discursivas sobre os mesmos temas.

Todos os estudantes deveriam participar uma vez que a nota do EGRAF integraria as notas parciais daquele período em todas as disciplinas que o estudante estivesse matriculado. A prova foi aplicada em um domingo pela manhã e teve duração de quatro horas, incluindo a marcação do cartão de respostas. Os estudantes que não puderam comparecer tiveram que justificar suas ausências e, só assim, teriam suas médias do período calculadas sem essa nota. Estudantes fora de fase²⁸ fizeram a prova do EGRAF correspondente ao período em que cursavam o maior número de disciplinas, como critério geral. Os casos muito diferentes foram analisados separadamente para identificar em que período faria a prova.

²⁸ O termo "fora de fase" quer dizer que o estudante cursava disciplinas de mais de um período acadêmico, seja porque havia reprovado ou porque não havia se matriculado em certas disciplinas.

As questões de conhecimento geral fizeram parte das provas de todos os períodos. Eis uma dessas questões:

Entre as transformações e exigências ocorridas nas organizações nos últimos anos, destaca-se o aumento da importância social. Assim, a responsabilidade social da organização envolve:

I – os funcionários dos diversos níveis hierárquicos, cabendo à organização contribuir para o seu crescimento como profissionais e como cidadãos.

II – a comunidade na qual está inserida, cabendo à organização contribuir para a preservação do meio ambiente e da riqueza cultural.

III – os consumidores, em geral, cabendo à organização aprimorar continuamente a qualidade dos produtos ou serviços que oferece.

IV – a sociedade como um todo, cabendo à organização contribuir para o desenvolvimento da região onde se situa e de todo país.

Estão corretos os itens:

(A) I e III.

(B) II e IV.

(C) I, II e III.

(D) I, III e IV.

(E) I, II, III e IV.

Da mesma maneira, segue um exemplo de questão interdisciplinar aplicada aos estudantes do primeiro período em que se exigiam conhecimentos de Álgebra, Algoritmos e Lógica.

Considerando que as variáveis possuem os seguintes valores armazenados:

A = 127, B = 10, C = 5, D = falso e E = verdadeiro

Avalie as sentenças I, II e III propostas a seguir e marque a opção que mostra a seqüência dos valores (verdadeiro ou falso) produzidos por cada sentença, conforme a ordem em que são apresentadas.

I. (A + B < C .e. D) .ou. (E .e. .não. D)

*II. A + B * C / B = 68 .e. .não. (A > B)*

*III. B * C – A > C .ou. D .ou. .não. (D = E)*

(A) verdadeiro , verdadeiro , falso

(B) verdadeiro , falso , falso

(C) verdadeiro , falso , verdadeiro

(D) falso , verdadeiro , verdadeiro

(E) falso , falso , verdadeiro

Quanto às discursivas, como tiveram propostas diferentes de exploração de habilidades, seguem três questões que foram aplicadas aos estudantes do primeiro período.

Questão 1 - Tema: Decepção histórica

A partir da leitura dos fragmentos abaixo, desenvolva, em no mínimo 10 e no máximo 15 linhas, o tema apresentado: expresse sua opinião, sustentando-a de forma argumentativa:

“O brasileiro não desiste nunca”, diz a máxima sobre o nosso povo. Lamento muito. Mas, de minha parte, eu desisti. Votarei em branco ou anularei o voto

nas próximas eleições. Sempre critiquei essa posição, mas agora eu me rendo. É impossível saber quem é verdadeiramente honesto na política no Brasil.
(Saulo Roberto da Rocha e Silva. Veja, 21/9/05)

“Sinto desilusão, mas sou um eterno otimista. Mesmo com toda essa situação, o Brasil não afundou.”
(Dinho Ouro Preto. Isto É, 27/7/05)

“Parece que essa crise ainda vai se agravar e deteriorar mais a política. Porém, como o mundo não acaba em caos e se reorganiza, pode ser que façamos um caminho torto. Provavelmente novas idéias políticas surgirão. Talvez tenhamos de esperar uma ou duas gerações para ter novas expectativas.”
(Maria Aparecida Aquino, historiadora. Isto É, 27/7/05)

“Apesar do momento difícil que vive, a sociedade brasileira está oferecendo uma lição de cidadania. É uma aula de civilidade que damos ao mundo.”
(Jorge Forbes, psicoterapeuta. Isto É, 27/7/05)

Questão 2 - Suponha que um computador com 500 MB de espaço disponível para armazenamento em disco rígido receba dados por meio de uma conexão telefônica, a uma velocidade de transmissão de 14.400 bps. A esta velocidade, quanto tempo transcorrerá para que todo o espaço disponível seja preenchido?

Questão 3 – Fazer um algoritmo, usando português, que mostre um menu de opções para realizar a conversão entre bases:

- a) decimal para binário;
- b) decimal para octal.

Peça ao usuário para digitar a opção e, a seguir, o número a ser convertido. Calcule e imprima o resultado. O usuário poderá repetir as operações enquanto desejar. Portanto, ao final da repetição deve-se mostrar uma mensagem: 'Deseja continuar?', cuja resposta deverá ser S(sim) ou N(não).

As quarenta questões objetivas representaram 60% do total da nota e as três descritivas 40%. As questões objetivas foram corrigidas por processamento eletrônico sob a responsabilidade do Núcleo de Tecnologia da Informação da Faesa, que ofereceu os resultados individuais dos estudantes, por disciplina. As questões descritivas foram corrigidas por professores indicados pelo coordenador do curso, com base nos gabaritos apresentados pelos professores que as formularam.

O ENADE, o EGRAF e a presente pesquisa

O governo federal ao implantar o ENADE desejou conhecer mais a respeito da formação dos estudantes e da contribuição das IES nesse íterim. Por outro lado, a Faesa preocupada com a qualidade dessa formação investiu esforços em um exame (EGRAF) periódico que avalia não só os ingressantes e concluintes,

mas todos os estudantes por período acadêmico, tentando ampliar os esforços governamentais.

A presente pesquisa visa contribuir com os resultados do ENADE e EGRAF agregando informações qualitativas e quantitativas sobre outras variáveis a estes estudos, uma vez que, seria inviável tanto para o governo quanto para a Faesa realizá-lo nesses níveis.

5. Sujeitos, instrumentos e procedimentos

O presente estudo investigou inicialmente o desempenho nos exames do ENADE (formação geral e componente específico) e EGRAF e o raciocínio lógico de 141 estudantes ingressantes e concluintes da Ciência da Computação da FAESA. Em um segundo momento, doze desses estudantes foram estudados quanto à habilidade matemática, a representação mental, o desempenho na prova do ENADE (formação geral e componente específico) e do EGRAF e o raciocínio lógico.

A princípio, 311 estudantes ingressantes e concluintes da graduação de Ciência da Computação da FAESA aceitaram o convite para participação na pesquisa. No entanto, nem todos conseguiram realizar todos os testes previstos, uma vez que foram aplicados em dias diferentes pela quantidade e extensão dos instrumentos. Esse fato acarretou perdas na aplicação de testes, pois nem sempre os estudantes que estavam presentes em um dia, eram os mesmos de um outro dia. Reiteradas visitas foram realizadas para captação do máximo de estudantes possível para a amostra. Esse esforço resultou na amostra de 141 estudantes que formaram o conjunto de dados para a pesquisa, por terem realizado todos os testes.

Os doze estudantes formaram uma amostra aleatória estratificada (Triola, 1999), extraída dos grupos de ingressantes e concluintes, segundo o desempenho no EGRAF. Vale dizer que todos os estudantes foram convidados a participar da amostra, mas apenas dezesseis se prontificaram a fazê-lo. Desses dezesseis, alguns não utilizaram a técnica do "pensar em voz alta", apesar de solicitados, prejudicando a sua participação. Daí os doze participantes.

O estudo se classifica como quase-experimental, sob a ótica de Campbell & Stanley (1979), por não haver controle absoluto dos estímulos experimentais provocados pela pesquisadora sobre os sujeitos e, no entendimento de Eichelberger (1989), como uma pesquisa descritiva correlacional. Para esse autor, um estudo correlacional ocorre sempre que relações entre variáveis psicológicas são estudadas descrevendo-as apenas, sem que um tratamento especial seja

dado aos sujeitos ou aos grupos de sujeitos. Esse é o caso deste trabalho, pois, apesar da necessidade de se estudar os sujeitos fora do ambiente de sala de aula, não foram atribuídos tratamentos diferenciados para a coleta de dados, uma vez que solucionar problemas matemáticos escrevendo-os faz parte de seus cotidianos escolares.

Os instrumentos utilizados foram: os testes psicológicos²⁹ GfRLD e de Krutetskii, o exame do ENADE (formação geral e componente específico) e o exame do EGRAF relativo ao período letivo que estavam cursando. Adicionalmente, para a fase dos doze estudantes foi realizada uma entrevista semi-estruturada, para captar maiores detalhes a respeito do pensar desses estudantes.

Sujeitos: outras considerações

Participaram da amostra 141 estudantes, sendo 111 ingressantes e 30 concluintes, assim considerados segundo critérios do ENADE, graduandos em Ciência da Computação, de uma instituição de ensino privada do estado do Espírito Santo - FAESA. Além dessa amostra, foi usada uma outra composta por doze estudantes desses 141, igualmente ingressantes e concluintes da mesma graduação da IES.

Para o estudo, os 141 estudantes foram agrupados de duas maneiras: uma como ingressantes e concluintes e outra, como mal ou bem sucedidos no EGRAF. Os sujeitos seriam considerados **mal sucedidos, caso tivessem obtido até 50% de acertos no EGRAF, e bem sucedidos, caso tivessem obtido mais de 50% de acertos neste exame.**

Estudar a habilidade matemática e a representação mental de todos os sujeitos era inviável, pois seria impossível trabalhar de forma individual, por ser necessário acompanhar e registrar, com detalhes, os produtos dos problemas propostos. Por esse motivo, foram selecionados doze estudantes: três

²⁹ O teste foi aplicado pela psicóloga Helena de Arruda Penteadó - inscrição no CRP 16-695, por haver exigência de aplicação por pessoa especializada.

ingressantes e três concluintes **que obtiveram até 50% de acertos no EGRAF (mal sucedidos)** e, três ingressantes e três concluintes **que obtiveram mais de 50% de acertos no EGRAF (bem sucedidos)**.

Objetivos do estudo para os 141 estudantes

Os objetivos do estudo com os 141 estudantes foram os seguintes:

- § medir e comparar o desempenho dos sujeitos ingressantes e concluintes no EGRAF;
- § comparar o desempenho dos estudantes agrupados segundo o desempenho no EGRAF (mal ou bem sucedidos);
- § medir o desempenho dos sujeitos ingressantes e concluintes no ENADE (formação geral e componente específico) segundo suas notas neste exame;
- § medir o desempenho dos sujeitos no ENADE (formação geral e componente específico), conforme seus desempenhos no EGRAF (mal ou bem sucedidos);
- § verificar a existência de correlação entre os desempenhos no ENADE (formação geral e componente específico) e, no EGRAF, nos grupos de ingressantes/concluintes e mal sucedidos/bem sucedidos;
- § medir percentualmente o raciocínio dedutivo dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e agrupados, segundo o desempenho no EGRAF (mal sucedidos/bem sucedidos);
- § verificar a existência de correlação entre o raciocínio dedutivo e o desempenho no EGRAF.
- § verificar a existência de correlação entre o raciocínio dedutivo e o desempenho na prova do ENADE (formação geral e componente específico);

Objetivos do estudo para os doze estudantes

Os objetivos do estudo com os doze estudantes foram os seguintes:

- § caracterizar os estudantes como mais ou menos habilidosos, usando a solução de problemas que exploram o raciocínio lógico;

- § identificá-los quanto à representação mental predominante, ao solucionarem problemas matemáticos que evidenciem o raciocínio lógico;
- § verificar a predominância de representação mental dentre os estudantes mais e menos habilidosos;
- § medir o desempenho dos estudantes no ENADE (formação geral e componente específico) e no EGRAF;
- § associar o desempenho no ENADE (formação geral e componente específico) de sujeitos mais e menos habilidosos;
- § associar o desempenho no EGRAF de sujeitos mais e menos habilidosos;
- § medir percentualmente o raciocínio dedutivo dos estudantes;
- § associar o nível de raciocínio dedutivo de sujeitos mais e menos habilidosos.

Instrumentos e procedimentos para os 141 estudantes

Os desempenhos dos 141 estudantes foram estudados a partir do resultado obtido na prova do ENADE (formação geral e componente específico separadamente) e do resultado da avaliação do EGRAF.

O ENADE foi aplicado aos estudantes da Ciência da Computação da FAESA, logo após a aplicação pelo governo e posterior disponibilização do teste pelo INEP. Esse exame por ter um caráter avaliativo mais abrangente que o antigo “provão” - que priorizava o conhecimento em detrimento de uma capacidade mais geral de lidar com os conteúdos escolares - foi entendido como um instrumento que se situa entre o propósito de aferir não só o conhecimento, mas os raciocínios ali envolvidos. Por esse motivo, para a presente pesquisa, o resultado do ENADE mensurou o desempenho sob a ótica da inteligência fluida e cristalizada simultaneamente, tal qual realizado pelos pesquisadores Primi, Santos e Vendramini (2002) em relação ao ENEM.

O EGRAF, ao contrário, valorizou prioritariamente o conhecimento, uma vez ter sido construído segundo questionamentos de conteúdos diretamente trabalhados nas disciplinas relativas ao período acadêmico em que se situavam os estudantes naquele momento. Por isso, foi entendido como um instrumento que

mediu a inteligência cristalizada, ou seja, o desempenho sob a ótica do conhecimento.

Para o estudo do raciocínio foi aplicado o teste GfRLD, de Primi e Muller. O GfRLD é um teste de raciocínio dedutivo que consta de quarenta e seis itens. Foi aplicado em um dia diferente dos outros instrumentos por ser extenso. Para solucioná-los, os estudantes raciocinaram dedutivamente, decidindo entre três possibilidades para alguns itens e, escolhendo uma dentre cinco opções, para outros. Nenhum item exigia conhecimento escolar prévio para sua solução, mas tão-somente o potencial dedutivo dos estudantes. Por esse motivo, foi considerado um teste que avaliou a inteligência fluida. O raciocínio foi mensurado conforme o total de itens certos obtidos por cada estudante.

Vale esclarecer que, para as comparações, foi útil ora agrupar os estudantes como ingressantes e concluintes, ora segundo o desempenho no EGRAF. Para este último agrupamento eles foram denominados como bem sucedidos, se alcançaram mais de 50% de acertos e, como mal sucedidos, se obtiveram menos de 50% nesse exame.

A tabela a seguir sintetiza a relação dos instrumentos e as respectivas variáveis do estudo.

Tabela 5.1 Relação dos instrumentos para a amostra de 141 estudantes

VARIÁVEL	INSTRUMENTO
1 Desempenho	ENADE (formação geral)
2 Desempenho (inteligência fluida e cristalizada)	ENADE (componente específico)
3 Desempenho (inteligência cristalizada)	EGRAF
4 Raciocínio Dedutivo (inteligência fluida)	Teste GfRLD, de Primi e Muller

Instrumentos e procedimentos para os 12 estudantes

Assim como para os 141 estudantes, o desempenho da amostra de doze sujeitos foi estudado a partir dos exames do ENADE e EGRAF.

Além disso, foram analisadas as soluções dos problemas da série XIX-B de Krutetskii (problemas 2, 3, 5, 7, e 11)³⁰ de forma individual em local previamente testado e agendado, na própria instituição de ensino, com imagens (somente as mãos dos sujeitos e suas soluções) e sons registrados por uma filmadora estrategicamente localizada.

Para a filmagem e gravação de voz, cujo modelo encontra-se no Anexo B, foram colhidas autorizações por escrito dos estudantes.

O teste de Krutetskii avaliou a habilidade matemática e a representação mental predominante (proposicional, analítica, proposicional-analítica) dos doze estudantes. Após a aplicação desses problemas, os estudantes foram abordados pela pesquisadora a respeito: 1) da interpretação dos textos dos problemas, visando a captar possíveis desvios nesse sentido, sempre que seus protocolos deixaram dúvidas; 2) do conhecimento e uso de conteúdos matemáticos específicos para a sua solução, visando a conhecer se haviam se valido de algoritmos prontos ou não para as soluções; 3) do modo como haviam representado mentalmente aquele problema e sua solução, buscando minimizar enganos pela pesquisadora; 4) de dúvidas, de maneira geral, que poderiam comprometer as análises.

A entrevista foi do tipo semi-estruturada, que, na classificação de Lüdke & André (1986, p.34), caracteriza-se por seguir um roteiro, não aplicado rigidamente, permitindo adaptações no transcorrer da mesma. É permitida, nessa modalidade, a coleta de informações adicionais, referentes aos sujeitos pesquisados. A pesquisadora poderá interferir, caso seja por motivo relevante para a pesquisa, como por exemplo, pedir que esclareçam alguma dúvida, tomando-se o cuidado para não influenciar em seus protocolos.

A maioria das perguntas foi: 1) o que você entendeu do problema? 2) você poderia destacar do texto elementos que considerou importantes para a solução? 3) que relações você construiria a respeito desses elementos? 4) ao partir para a solução do problema, qual foi o seu primeiro pensamento ou sua primeira imagem

³⁰ Encontram-se no Anexo C os problemas da série XIX-B originais e traduzidos, e seleção dos problemas desta série que foram utilizados na pesquisa.

a esse respeito? 5) você costuma desenhar (se ele desenhou), esquematizar (se ele esquematizou) ou utilizar-se sempre dessa maneira de solucionar os problemas? etc.

A escolha pela série XIX-B de Krutetskii se deu pela proposta de estudar o raciocínio e por serem os mais adequados para estudantes de ensino superior, uma vez que as outras séries exploram um raciocínio em nível mais elementar, o que não é o caso dos sujeitos selecionados. Os problemas dessa série não requerem nenhum conhecimento especial além dos que um estudante universitário, após onze anos de escolaridade e contato com a Matemática escolar, deveria saber. São problemas que exigem o uso de compreensão e raciocínio matemático, além de certo desembaraço para solucioná-los. Elementos que, conforme Zyablovskii (citado por Krutetskii, 1976, p.148), são as maiores dificuldades na solução de problemas matemáticos para estudantes de qualquer idade. Esses problemas exigem que o estudante apresente certa perspicácia, pois problemas desse tipo são bons para revelar o pensamento do estudante e indicar quanto ele tem desenvolvido a habilidade para raciocinar (Krutetskii, 1976, p.148).

Após a aplicação desses instrumentos, eles responderam o teste GfRLD, de Primi e Muller, no qual foram estudados quanto ao raciocínio dedutivo.

A tabela a seguir mostra a relação dos instrumentos e as respectivas variáveis do estudo.

Tabela 5.2: Relação dos instrumentos para a amostra de 12 estudantes

VARIÁVEL	INSTRUMENTO
1 Habilidade Matemática	Teste de Krutetskii + entrevista
2 Representação Mental	Teste de Krutetskii + entrevista
3 Desempenho (inteligência fluida e cristalizada)	ENADE (componente específico)
4 Desempenho (inteligência cristalizada)	EGRAF
5 Raciocínio Dedutivo (inteligência fluida)	Teste GfRLD, de Primi e Muller

O estudo piloto

Os critérios para a classificação dos estudantes, segundo a representação mental e a habilidade matemática, foram feitos a partir dos resultados do estudo piloto e em considerações dos psicólogos Brito³¹ e Primi³². O piloto teve como objetivo testar a viabilidade da captação das representações dos sujeitos e a adequação da teoria de Modelos Mentais na solução de problemas matemáticos, além de permitir a categorização para essas variáveis.

Para o estudo piloto foi pedido a quinze estudantes do 5º período de Ciência da Computação da FAESA que solucionassem doze problemas de Matemática, retirados da série de problemas de Krutetskii e de livros didáticos. Para isso, não houve qualquer agendamento com os estudantes, mas apenas com os professores que colaboraram cedendo suas aulas. Esses estudantes não eram ingressantes ou concluintes e, portanto, não fizeram parte da amostragem da pesquisa, mas tão-somente do estudo piloto.

Um dos problemas era...

Uma caixa contém 16 bolinhas: pretas, brancas e vermelhas. O número de bolinhas vermelhas é 7 vezes menor que o de bolinhas brancas. Quantas bolinhas pretas existem na caixa? (série XIX-B de Krutetskii, 1976)

Os estudantes **A.** e **Ra.** organizaram sentenças matemáticas, e daí partiram para a solução por meio de cálculos algébricos. Como a linguagem matemática possui regras rígidas de utilização poder-se-ia crer que esses estudantes representaram o problema de maneira **proposicional**, conforme figuras 5.1 e 5.2, respectivamente. Apesar da aparente sintonia de representações, somente o estudante **A.** alcançou a resposta correta.

³¹ Profª Dr.^a. da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - SP

³² Prof. Dr. da Universidade São Francisco - Itatiba - SP

② total: 16 bolinhas
 bolinhas vermelhas $\rightarrow x$
 " brancas $\rightarrow y$
 " pretas $\rightarrow z$

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 7x = y \end{cases}$$

$7x + x + z = 16$
 $8x = 16 - z$
 $x = \frac{16 - z}{8}$

Logo:
 $7x = y$
 $7 \cdot 1 = y$
 $y = 7$

P/ $x = 1$ temos:
 $8 - 16 = -z$
 $z = 8$

Figura 5.1: Protocolos escritos do estudante A. na solução do problema das bolinhas.

02. pretas (z)
 brancas (y)
 vermelhas (x) } 16 bolinhas

$$x + y + z = 16 \rightarrow x = 16 - 8z$$

$$z = \frac{y}{7} \rightarrow 7z = y$$

$$x = ?$$

Figura 5.2: Protocolos escritos do estudante Ra. na solução do problema das bolinhas.

Já o estudante **M.** desenhou um recipiente contendo dezesseis bolinhas, para, posteriormente, criar um modelo buscando obter a solução correta, ao circular o número oito no interior da tabela. Não seguiu nenhuma regra matemática ou lingüística, que possuem simbologia própria, mas, construiu algo idiossincrático para expressar a maneira como representou o problema. Por esse motivo, segundo Johnson-Laird (1983) e Eysenck e Keane (1994), poder-se-ia classificar esta representação como sendo **por modelo (ou analítica)**. A solução pode ser acompanhada na figura 5.3.

②

16 Bolinhas	P = ?	B	V	P	Σ
	B = B	7	A	8	16
	V \leq 7 x B (maior)	14	Z	0	14

Figura 5.3: Protocolos escritos do estudante M. na solução do problema das bolinhas.

De maneira peculiar, o estudante **MC.** utilizou as duas representações, conforme figura 5.4. Inicialmente, desenhou um recipiente com bolinhas em seu interior e escreveu “16 bolinhas”. Em seguida, como se estivesse raciocinando “em voz alta”, descreveu sua lógica em sentenças onde aparece também a linguagem matemática. Por esse motivo, não se pode classificá-lo nem como tendo uma representação proposicional pura e simples e nem como por modelo. Assim, há necessidade de se estabelecer uma classificação própria para esses casos. Como a representação por modelo também é conhecida como analítica, esse tipo de representação será denominada **proposicional-analítica**.

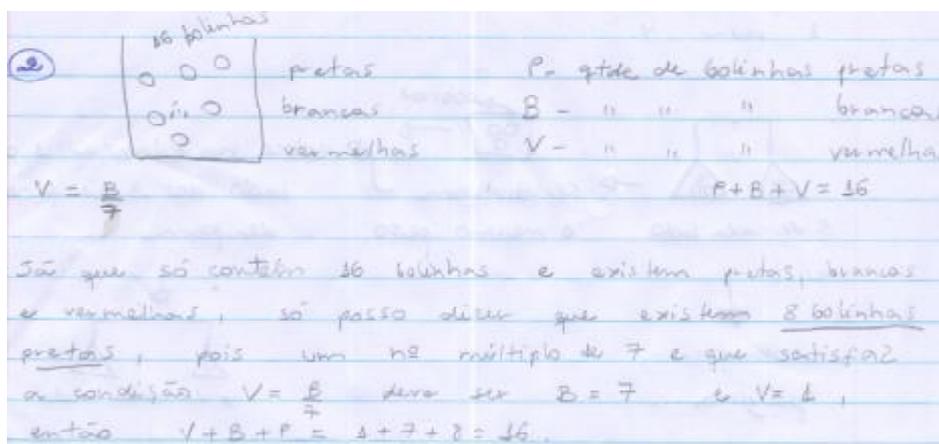


Figura 5.4: Protocolos escritos do estudante MC. na solução do problema das bolinhas.

No estudo piloto não foi possível confirmar as representações mentais dos problemas pelos estudantes por só se ter os protocolos escritos. Seria preciso questioná-los logo após as soluções.

Os outros onze problemas do estudo piloto também são do tipo mal-estruturado na classificação de Sternberg (2000, p.309). Os estudantes os resolveram da mesma forma que os problemas abordados nesse item.

Não foi identificada uma quarta maneira de representar os problemas, por isso, com base nesse estudo, a classificação das representações mentais dos sujeitos nessa variável psicológica é: proposicional, analítica e proposicional-analítica.

Tabela 5.3: Categorias para a representação mental

Classificação das Representações Mentais	Descrição
Proposicional	Uso predominante de linguagem matemática, língua materna ou qualquer código que tenha regras rígidas de utilização;
Analítica	Uso predominante de uma simbologia própria, prescindindo de qualquer regra rígida, matemática ou lingüística; esquemas, desenhos, figuras próprias;
Proposicional-analítica	Oscilou entre a classificação proposicional e a analítica;

Para a habilidade matemática, os estudantes foram considerados mais habilidosos, ao contrário daqueles considerados menos habilidosos, quando estabeleceram relações eficientes entre os elementos do problema e executaram um plano de ação que mostrasse, naquele processo, uma lógica que os conduzia para a solução correta, seja com números, símbolos, palavras, esquemas, seja com alguma forma idiossincrática.

O significado da diferença nessas duas classificações é que, após o estudante ter interpretado e identificado os elementos-chave e o que se quer como resultado do problema, ele buscou construir um algoritmo de solução eficiente e inédita, ou seja, um algoritmo diferente daqueles que já tenha assimilado. O estudante menos habilidoso apresenta dificuldades nessa tarefa ou, então, não conseguir criar.

Vale esclarecer que o fato de se utilizar a álgebra, a aritmética ou qualquer outro ramo da Matemática como ferramenta para solução de um problema não significa que o estudante use um algoritmo pronto em sua estrutura cognitiva, uma vez que não se trata de um conteúdo específico ou de uma “receita” matemática, mas de uma maneira particular de se expressar e se organizar mentalmente.

Ao contrário, o uso de conteúdos específicos da álgebra, aritmética ou qualquer outro ramo da Matemática pelo estudante, como matrizes, mínimo múltiplo comum etc, impede que o estudo da solução desse problema seja considerado como um dado de pesquisa, por ter sido automatizado.

Por isso, a classificação dos estudantes no estudo sobre a variável habilidade matemática seguirá o algoritmo expresso na figura a seguir.

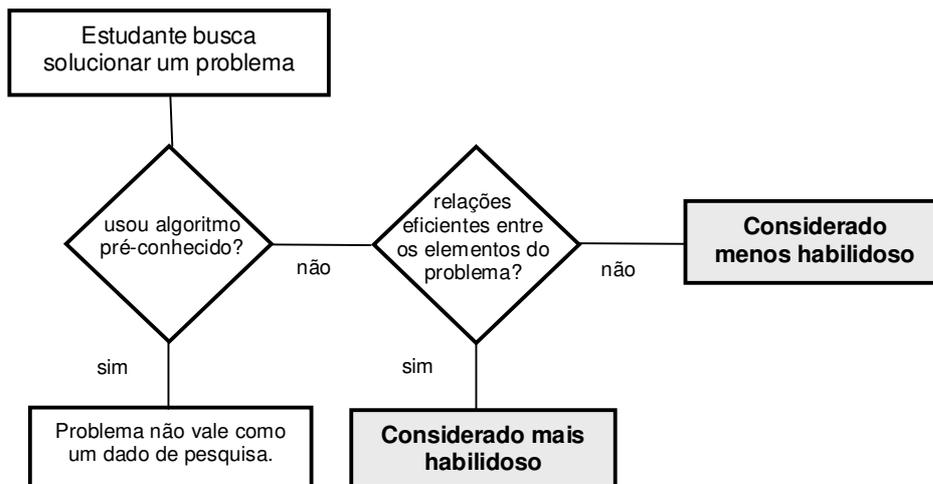


Figura 5.5: Algoritmo para classificação dos estudantes quanto à habilidade matemática.

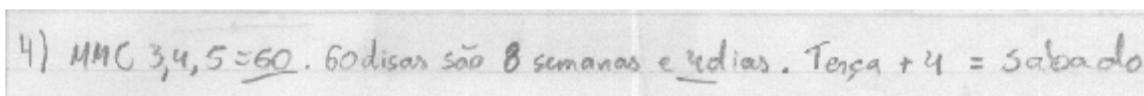
Como ilustração das características mencionadas anteriormente, as figuras seguintes esboçam habilidades de estudantes da Ciência da Computação considerados mais ou menos habilidosos no estudo piloto e os motivos que levaram a essa classificação, tal como foi feito para as representações mentais.

Para isso, foram tomados os mesmos doze problemas de Matemática aplicados para o mesmo grupo de estudantes visando a testar a viabilidade da captação dessa variável. Um dos problemas era...

Três amigos vão à biblioteca em dias diferentes: o primeiro vai uma vez a cada 3 dias, o segundo vai uma vez a cada 4 dias, e o terceiro vai uma vez a cada 5 dias. A última vez que eles estavam na biblioteca juntos foi numa terça-feira. Em quantos dias eles estarão juntos na biblioteca novamente e que dia da semana vai ser? (série XIX-B de Krutetskii, 1976)

O estudante **R.** optou por fazer o mínimo múltiplo comum entre 3, 4 e 5, sendo igual a 60, conforme figura 5.6. Refletiu sobre a quantidade de semanas em 60 dias e verificou que sobravam 4 dias. Realizou uma pequena conta “Terça + 4 = sábado”. Por ter identificado o problema como podendo ser solucionado por um conteúdo específico da Matemática, no caso o mínimo múltiplo comum, não foi

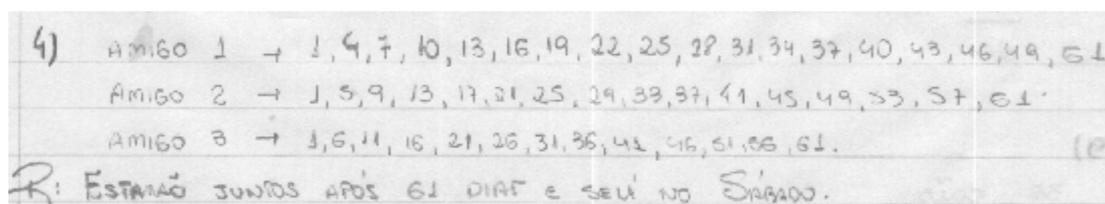
investigada sua habilidade matemática valendo-se dessa solução, uma vez que utilizou um algoritmo antes assimilado.



4) MMC 3,4,5 = 60. 60 dias são 8 semanas e 4 dias. Terça + 4 = Sábado

Figura 5.6: Protocolos escritos do estudante R. na solução do problema da biblioteca.

Os estudantes **F.** e **C.** desenvolveram uma maneira própria para encontrar a solução, conforme figuras 5.7 e 5.8. Esse fato leva a crer não ter havido associação do conhecimento matemático de mínimo múltiplo comum ao problema, ou porque não absorveram bem esse conteúdo, ou porque não o tiveram (o que é pouco provável) ou por algum motivo desconhecido. Vale observar que, apesar de terem relacionado bem os elementos do problema, incluíram na contagem dos dias a própria 3ª feira, o que os fez declarar sessenta e um dias em vez de sessenta dias. Esse engano não invalida o fato de serem considerados mais habilidosos.



4) AMIGO 1 → 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 51
 AMIGO 2 → 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61
 AMIGO 3 → 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61
 R: ESTÃO JUNTOS APÓS 61 DIAS E SÉI NO SÁBADO.

Figura 5.7: Protocolos escritos do estudante F. na solução do problema da biblioteca.

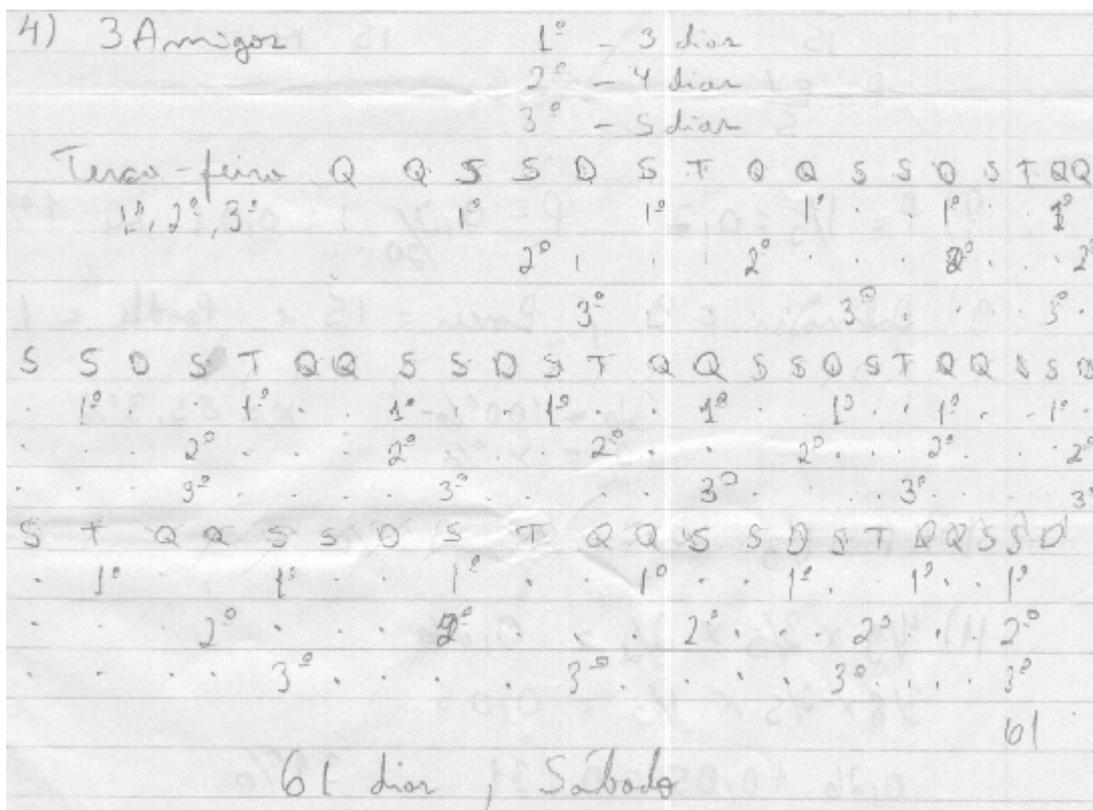


Figura 5.8: Protocolos escritos do estudante C. na solução do problema da biblioteca.

Os estudantes **CL.** e **N.**, conforme figuras 5.9 e 5.10, foram considerados menos habilidosos, porque, apesar de entenderem a periodicidade das idas de cada amigo à biblioteca, não conseguiram esboçar nenhum algoritmo que os levasse à solução. Poder-se-ia saber mais a respeito, caso fossem solicitados a pensar em voz alta durante a tentativa de solução, até porque a dificuldade poderia estar na interpretação do problema, fase anterior ao processamento da informação.

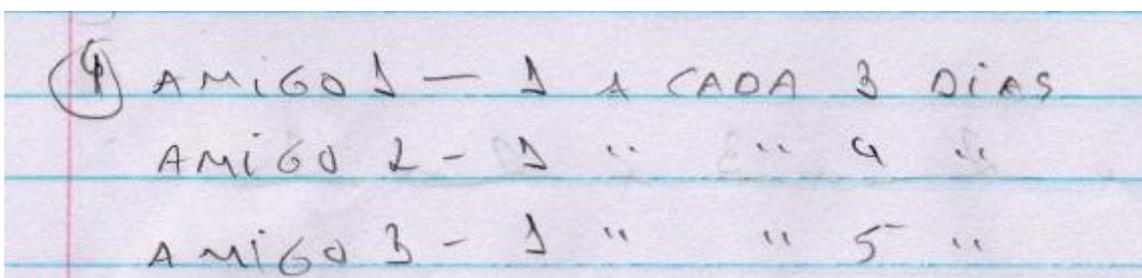


Figura 5.9: Protocolos escritos do estudante CL. na solução do problema da biblioteca.

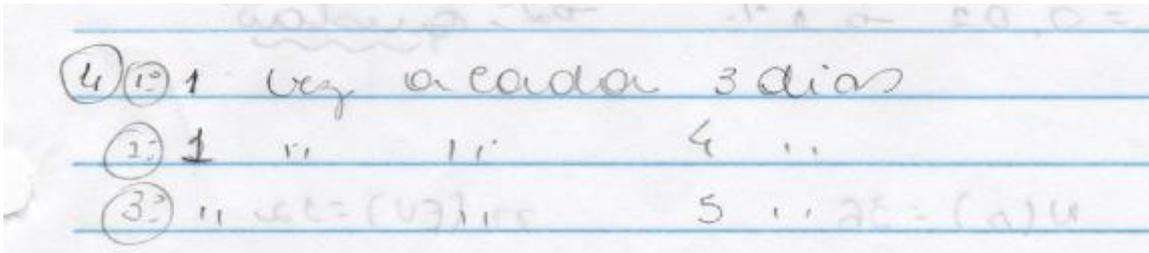


Figura 5.10: Protocolos escritos do estudante N. na solução do problema da biblioteca.

A tabela 5.4 sintetiza os critérios utilizados para classificação das habilidades matemáticas.

Tabela 5.4: Categorias para a habilidade matemática

Classificação das Habilidades Matemáticas	Descrição
Mais habilidoso	<ul style="list-style-type: none"> - estabelecimento de relações eficientes entre os elementos do problema; - uso de algoritmo inédito para o estudante visando solucionar o problema;
Menos habilidoso	<ul style="list-style-type: none"> - dificuldade para estabelecer relações eficientes entre os elementos do problema ou os relacionou erradamente; - não construiu uma linha de pensamento que convergisse para a solução.

O estudo piloto, a compreensão do texto do problema e o pensar em voz alta

O estudo piloto e o estudo de Brito, Fini e Garcia (1994) levaram à necessidade da verificação da compreensão dos textos dos problemas de Krutetskii pelos doze estudantes, visando a evitar possíveis confusões em sua caracterização da habilidade matemática. Por exemplo, é possível que a caracterização de um estudante como "menos habilidoso" tenha sido "mascarada" pela ausência de compreensão do problema, passo anterior ao processamento da informação, mas que influencia no desenvolvimento dos passos subseqüentes.

Brito, Fini e Garcia (1994) realizaram um estudo que confirma essa possibilidade. Para eles, "é necessário um mínimo de habilidade verbal para

possibilitar a compreensão da natureza matemática do problema", e esta "é tão importante para a solução do mesmo, quanto a exigência de um conjunto de habilidades matemáticas". A figura 5.11 esquematiza o estudo destes pesquisadores sobre a relação entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático durante o processo de solução de problemas.

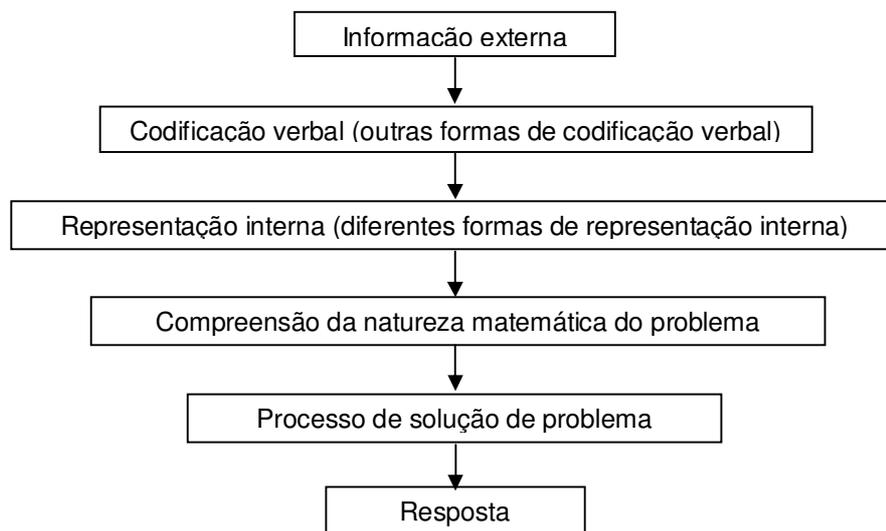


Figura 5.11: Relação entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático durante o processo de solução de problemas - modelo proposto por Brito, Fini e Garcia (1994, p.43).

Além da checagem oral da compreensão do texto, os estudantes foram solicitados a pensar em voz alta enquanto solucionavam os problemas.

A técnica do "pensar em voz alta" não deve ser confundida com o "falar em voz alta". Segundo Brito (2002, p.15-35), o falar em voz alta diz respeito à descrição das ações, e a técnica do pensar em voz alta tem a ver com os processos de pensamento durante a solução dos problemas.

Suas vozes foram gravadas em videoteipe. A câmera de vídeo focalizou a escrita do sujeito no papel, registrando voz e imagem durante a solução. Essas medidas estão em sintonia com a técnica de coleta e análise de dados abordada por Powell, Francisco e Maher (2004).

Discussão e uma solução para os cinco problemas de Krutetskii

Para o estudo da habilidade matemática dos doze estudantes a partir dos cinco problemas de Krutetskii, é útil uma discussão a respeito das ferramentas matemáticas que poderiam ser utilizadas em cada um, a fim de se compreender se a solução do estudante já havia sido automatizada (e ele apenas a utilizou para a solução), ou se ele construiu um algoritmo de solução.

É de fundamental importância esse questionamento uma vez que o uso de algoritmos pré-conhecidos na solução do problema não permite avaliá-lo em sua habilidade e, por isso, o problema proposto não servirá como um dado de pesquisa.

Para isso, a pesquisadora³³ do presente trabalho solucionou os cinco problemas buscando levantar as formas matemáticas que levariam o estudante à solução correta.

Outros dois matemáticos³⁴ acrescentaram suas visões às soluções originais, aumentando o seu poder de discussão. Vale lembrar que os cinco problemas poderiam ser solucionados sem o uso formal de qualquer ferramenta matemática, mas, simplesmente, com a lógica inerente de cada estudante.

Problema 1: Um lago extenso está sendo coberto por uma vegetação. Todo dia, a extensão da área encoberta dobra de tamanho. No oitavo dia, metade do lago se encontra encoberto pela vegetação. Em que dia o lago estará totalmente encoberto?

Solução: Ora, se no oitavo dia metade do lago estaria coberto pela vegetação e se a cada dia dobra-se a área encoberta, é porque no próximo dia todo o lago estaria encoberto, o que corresponde ao 9º dia.

De outra forma, algumas manobras algébricas também poderiam ajudar. Como são muitas as possibilidades, elas foram observadas separadamente em cada solução dada pelo estudante.

³³ A pesquisadora é Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo e professora de ensino superior no Estado do Espírito Santo.

³⁴ Dois professores de Matemática de ensino superior e graduados pela Universidade Federal do Espírito Santo.

Problema 2: Uma caixa contém 16 bolinhas: pretas, brancas e vermelhas. O número de bolinhas vermelhas é 7 vezes menor que o de bolinhas brancas. Quantas bolinhas pretas existem na caixa?

Solução: Esse problema poderia ser solucionado por tentativa e erro, por equações etc. Mostra-se uma das possibilidades via álgebra...

$$p + b + v = 16$$

$$7v = b \Rightarrow v = \frac{b}{7}$$

logo: $p + b + \frac{b}{7} = 16 \Rightarrow p + \frac{8b}{7} = 16$. O único valor de b que deixa p com um

valor inteiro e que satisfaz à condição da equação é $b = 7$. Logo, $v = 1$ e $p = 8$.

Portanto, o número de bolas pretas é 8.

Problema 3: Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?

Solução: Ora, se em uma amostra de 60 peixes surgiram 4 identificados dos 40, significa que 10% dos identificados surgiram nessa amostra. Faltam outros 36 identificados no lago. Teoricamente, se extraíssemos outras nove amostras de 60 peixes, viriam, em cada uma delas, 4 peixes identificados. Com isso, teríamos extraído (probabilisticamente) todos os peixes do lago. Logo, o lago deve ter, aproximadamente, 600 peixes.

De outra forma:

x peixes \rightarrow 40 peixes identificados

60 peixes \rightarrow 4 peixes identificados

$$4x = 2400$$

$$x = \frac{2400}{4} = 600 \text{ peixes}$$

Problema 4: Três amigos vão à biblioteca em dias diferentes: o primeiro vai uma vez a cada 3 dias, o segundo vai uma vez a cada 4 dias, e o terceiro vai uma vez a cada 5 dias. A última vez que eles estavam na biblioteca juntos foi

numa terça-feira. Em quantos dias eles estarão juntos na biblioteca novamente e que dia da semana vai ser?

Solução: Esse é um problema típico de mínimo múltiplo comum (m.m.c.). Bastaria fazer o m.m.c. entre os números 3, 4 e 5 e obter 60 que é o número de dias que os três amigos estarão juntos na biblioteca. Se dividirmos 60 por 7 dias na semana, encontramos 4 como resto. Se o primeiro dia foi na 3ª feira, basta contar 4 dias após a 3ª feira e encontrar sábado. Logo, eles se encontrarão em 60 dias e esse dia será um sábado.

Problema 5: Doze pessoas foram viajar e levavam uma dúzia de pães. Cada homem levava 2 pães, cada mulher metade de um pão, e cada criança, um quarto de pão. Quantos homens, mulheres e crianças foram viajar?

Solução: Esse problema também possuía muitas maneiras de solucioná-lo. Ele permitia o uso de equações, o uso de lógica e ainda a tentativa e erro. Opta-se por discuti-lo via equações.

$$H + M + C = 12 \rightarrow C = 12 - H - M$$

$$2H + \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}C = 12 \rightarrow (\text{mín.múlt.comum}): 8H + 2M + C = 48$$

$$\text{Substituindo } C \dots \quad 8H + 2M + 12 - H - M = 48 \rightarrow 7H + M = 36$$

Se $H \leq 3$ então $M > 12$

Para $H = 4$, tem-se $M=8$ e $C=0$, o que não é possível, uma vez que o problema informa que havia crianças levando pães.

Para $H = 5$, tem-se $M=1$ e $C=6$ que é a resposta correta, mas é preciso verificar se é a única.

Para $H \geq 6$ e $M > 0$, tem-se $7H + M > 36$, o que contradiz a equação. Portanto, a única solução é: 5 homens, 1 mulher e 6 crianças.

Os dados da pesquisa

Diante da diversidade de informações captadas pelo vídeo, pela gravação de voz, pelas avaliações formais dos problemas propostos aos estudantes, é útil

definir o que serviu como um dado para a pesquisa mediante os instrumentos utilizados.

O conjunto ou a predominância dos aspectos que os classificou como mais ou menos habilidosos serviu como referência para uma classificação geral da habilidade matemática de cada estudante. A representação mental foi estudada segundo a teoria de Modelos Mentais de Jonhson-Laird, conforme os critérios sintetizados. Como no caso da habilidade matemática, a predominância dos aspectos que geraram a classificação para essa variável serviram como referência para uma classificação final.

O desempenho sob a ótica da inteligência fluida e cristalizada foi medido a partir do resultado do ENADE. Para isso, todos os estudantes envolvidos na pesquisa foram solicitados a solucionarem as questões desse exame.

O desempenho sob a ótica do conhecimento ou da inteligência cristalizada foi estudado a partir do EGRAF, aplicado pela própria instituição de ensino onde se desenvolveu a pesquisa.

O raciocínio dedutivo foi medido a partir do número de itens respondidos corretamente. Esse instrumento aferiu a inteligência fluida, enquanto o teste de Krutetskii buscou aferir essa mesma inteligência, mas, como os estudantes poderiam utilizar algum conhecimento matemático anterior, por menor que fosse, crê-se que a aferição tenha elementos da inteligência cristalizada.

6. Resultados e análises dos dados

A análise dos dados foi dividida em duas etapas: uma para os 141 estudantes e outra para os doze, todos da graduação de Ciência da Computação, ingressantes ou concluintes, da mesma IES.

A amostra de sujeitos não foi equilibrada em gênero, uma vez que o curso de Ciência da Computação possui muito mais estudantes do sexo masculino do que do feminino³⁵. Da mesma maneira, o número de participantes ingressantes (111) foi maior que o de concluintes (30), justamente por haver alta evasão nessa graduação, um dos motivadores desta pesquisa.

Resultados e análises dos 141 estudantes

As análises com a amostra de 141 estudantes giraram em torno das seguintes variáveis: desempenho no EGRAF dos ingressantes e dos concluintes, desempenho dos sujeitos mal e bem sucedidos no EGRAF, desempenho no ENADE (formação geral) dos ingressantes e concluintes, desempenho no ENADE (formação geral) dos sujeitos mal e bem sucedidos no EGRAF, desempenho no ENADE (componente específico) dos ingressantes e concluintes, desempenho no ENADE (componente específico) dos sujeitos mal sucedidos e bem sucedidos no EGRAF, raciocínio dedutivo dos ingressantes e concluintes e raciocínio dedutivo dos sujeitos mal sucedidos e bem sucedidos no EGRAF.

A média das idades dos ingressantes era 19,93, desvio-padrão 3,00 e, dos concluintes, média de 24,00, desvio-padrão 2,75.

As análises estão apoiadas em resultados estatísticos como os testes t, de Kolmogorov-Smirnov, correlação de Pearson, dentre outros, realizados com auxílio do software SPSS e Excel

A tabela 6.1 mostra o número de sujeitos, a média, o desvio-padrão e o teste de normalidade Kolmogorov-Smirnov (K-S Test), para cada variável. Em estatística, o teste Kolmogorov-Smirnov é usado para determinar se duas

³⁵ INEP divulgou que a graduação de Ciência da Computação apresenta em média 87% de estudantes do sexo masculino (www.inep.gov.br).

distribuições finitas diferem uma da outra. Todas as amostras apresentaram distribuição normal. Esse fato permite o uso do teste t para as amostras de estudantes.

Tabela 6.1: Variáveis e o teste de normalidade

Variável	N	Teste de normalidade (K-S Test)
EGRAF - ingressantes	111	K-S ₍₁₁₁₎ =1,002 $p=0,268$
EGRAF - concluintes	30	K-S ₍₃₀₎ =0,370 $p=0,999$
EGRAF - mal sucedidos	76	K-S ₍₇₆₎ =0,823 $p=0,508$
EGRAF - bem sucedidos	65	K-S ₍₆₅₎ =0,973 $p=0,300$
ENADE (f.geral) - ingressantes	111	K-S ₍₁₁₁₎ =2,318 $p=0,000$
ENADE (f.geral) - concluintes	30	K-S ₍₃₀₎ =0,806 $p=0,535$
ENADE (f.geral) - mal sucedidos no EGRAF	76	K-S ₍₇₆₎ =1,839 $p=0,002$
ENADE (f.geral) - bem sucedidos no EGRAF	65	K-S ₍₆₅₎ =1,321 $p=0,061$
ENADE (c.específico) - ingressantes	111	K-S ₍₁₁₁₎ =1,189 $p=0,119$
ENADE (c.específico) - concluintes	30	K-S ₍₃₀₎ =0,817 $p=0,517$
ENADE (c.específico) - mal sucedidos no EGRAF	76	K-S ₍₇₆₎ =1,119 $p=0,163$
ENADE (c.específico) - bem sucedidos no EGRAF	65	K-S ₍₆₅₎ =1,092 $p=0,184$
Raciocínio dedutivo - ingressantes	111	K-S ₍₁₁₁₎ =1,270 $p=0,079$
Raciocínio dedutivo - concluintes	30	K-S ₍₃₀₎ =0,554 $p=0,919$
Raciocínio dedutivo - mal sucedidos no EGRAF	76	K-S ₍₇₆₎ =0,704 $p=0,704$
Raciocínio dedutivo - bem sucedidos no EGRAF	65	K-S ₍₆₅₎ =1,471 $p=0,026$

O desempenho no EGRAF

O resultado do desempenho no EGRAF dos sujeitos agrupados como ingressantes ou concluintes e, como bem ou mal sucedidos neste exame, encontra-se na tabela 6.2.

Os ingressantes tiveram desempenho inferior no EGRAF em relação aos concluintes, pois a diferença da média entre os dois grupos é apontada como significativa pelo teste t ($t_{(141)}=-2,634$; $p=0,011$).

O mesmo teste ($t_{(141)}=-17,349$; $p=0,000$) aponta que a diferença entre as médias do grupo dos mal sucedidos e dos bem sucedidos no EGRAF é significativa.

A diferença entre as médias dos ingressantes e concluintes indica que, de uma maneira geral, a IES contribui positivamente para o desempenho da inteligência cristalizada desses graduandos. Além disso, foi observada grandes discrepâncias entre estudantes mal e bem sucedidos nessa variável, apontada pela diferença significativa entre os resultados neste último grupo (bem e mal sucedidos).

Tabela 6.2: Desempenho no EGRAF dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF

Grupo	N	Média (%)	Erro-padrão da média	Desvio-padrão (%)	Estatística
ingressantes	111	45,24*	1,43	15,07	$t_{(141)}=-2,634$ $p=0,011$
concluintes	30	53,11*	2,62	14,37	
todos	141	46,91	1,28	15,22	
mal sucedidos	76	35,37*	1,08	9,39	$t_{(141)}=-17,349$ $p=0,000$
bem sucedidos	65	60,41*	0,96	7,75	
todos	141	46,91	1,28	15,22	

* $p=$ ou menor que 0,01.

O desempenho no ENADE (formação geral)

A tabela 6.3 mostra o resultado do ENADE (formação geral) dos 141 estudantes. Apesar de a média do desempenho dos concluintes ser ligeiramente superior à dos ingressantes e, igualmente dos bem sucedidos em relação aos mal sucedidos, essas diferenças não foram significativas, conforme testes t respectivos ($t_{(141)}=-0,89$; $p=0,378$ e $t_{(141)}=-1,00$; $p=0,321$).

Inferre-se daí não haver evidência de que a Faesa tenha contribuído significativamente para a formação geral (variável estudada pelo ENADE na parte de formação geral) desses estudantes. Da mesma forma, é possível que os

conteúdos não tenham sido relevantes para essa evolução, uma vez ter havido grandes diferenças na inteligência cristalizada e não nesta variável.

Por outro lado, é possível que a pequena diferença apontada nas médias dos concluintes em relação aos ingressantes e dos bem sucedidos em relação aos mal sucedidos seja significativa sob o ponto de vista da existência de uma evolução nessa variável, por se tratar de sujeitos adultos. Contribuir para a cultura geral de sujeitos que possuam uma vivência de, no mínimo, dezoito anos não tem o mesmo impacto evolutivo que em sujeitos em idades mais precoces.

Ainda é preciso considerar que dez itens para avaliar tal desenvolvimento podem ser insuficientes.

Tabela 6.3: Desempenho no ENADE (formação geral) dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF

Grupo	N	Média (%)	Erro-padrão da média	Desvio-padrão (%)	Estatística
ingressantes	111	64,99	2,06	21,69	$t_{(141)}=-0,89$ $p=0,378$
concluintes	30	69,05	4,06	22,22	
todos	141	65,86	1,83	21,78	
mal sucedidos	76	64,10	2,77	24,19	$t_{(141)}=-1,00$ $p=0,321$
bem sucedidos	65	67,69	2,31	18,61	
todos	141	65,75	1,84	21,79	

O desempenho no ENADE (componente específico)

A tabela 6.4 informa os resultados do ENADE no componente específico para os grupos ingressantes/concluintes e bem/mal sucedidos.

Tabela 6.4: Desempenho no ENADE (componente específico) dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF

Grupo	N	Média (%)	Erro-padrão da média	Desvio-padrão (%)	Estatística
ingressantes	111	23,81	0,83	8,77	$t_{(141)}=-0,57$ $p=0,574$
concluintes	30	25,00	1,93	10,57	
todos	141	24,06	0,77	9,15	
mal sucedidos	76	21,85*	0,95	8,29	$t_{(141)}=-3,17$ $p=0,002$
bem sucedidos	65	26,65*	1,18	9,49	
todos	141	24,06	0,77	9,15	

* $p=$ ou menor que 0,05.

Os resultados mostram que a inteligência fluido-cristalizada não evoluiu significativamente com a graduação ($t_{(12)}=-0,57$, $p=0,574$), ou seja, possivelmente os ingressantes não foram estimulados suficientemente pela IES a ponto de destacar os concluintes nessa variável. Em outras palavras, os estudantes não se diferenciam como ingressantes ou concluintes no desempenho medido pelo ENADE (componente específico). O mesmo não ocorreu quando comparados como bem sucedidos ou não no EGRAF, ao observar-se que o teste t ($t_{(12)}=-3,17$, $p=0,002$) revelou diferença significativa entre o grupo dos bem sucedidos e o dos mal sucedidos.

Correlação entre ENADE (formação geral) e o EGRAF

Para verificar se havia relação entre o ENADE (formação geral) e o EGRAF, foi realizada a análise de correlação e calculado o coeficiente de correlação de Pearson, conforme mostra a tabela 6.5.

O estudo revelou haver relação entre as variáveis ($r=0,228$; $p=0,007$), dentre os 141 estudantes. Essa relação não ocorreu especificamente em nenhum grupo,

com exceção dos ingressantes que apresentaram correlação entre a inteligência cristalizada (EGRAF) e a formação geral (ENADE - formação geral).

Tabela 6.5: Correlação de Pearson entre ENADE (formação geral) e EGRAF

Grupo	N	<i>r</i>	<i>p</i>
todos os estudantes	141	0,228*	0,007
ingressantes	111	0,233**	0,014
concluintes	30	0,157	0,406
mal sucedidos no EGRAF	76	-0,016	0,891
bem sucedidos no EGRAF	65	0,110	0,382

**p*= ou menor que 0,01

***p*= ou menor que 0,05

Correlação entre ENADE (componente específico) e o EGRAF

A correlação de Pearson (*r*) foi calculada para verificar a relação entre o ENADE (componente específico) e o EGRAF, conforme tabela 6.6 e figura 6.1. Os resultados informam haver relação entre essas variáveis em todos os grupos.

Tabela 6.6: Correlação de Pearson entre ENADE (componente específico) e EGRAF

Grupo	N	<i>r</i>	<i>p</i>
todos os estudantes	141	0,386*	0,000
ingressantes	111	0,372*	0,000
concluintes	30	0,431**	0,018
mal sucedidos no EGRAF	76	0,344*	0,002
bem sucedidos no EGRAF	65	0,278**	0,025

**p*= ou menor que 0,01

***p*= ou menor que 0,05

Nesse momento, vale associar o resultado da correlação (tabela 6.6) ao resultado das médias nessas variáveis (tabela 6.4). Apesar de não ter havido diferença expressiva entre as médias dos ingressantes e concluintes, o

desempenho no ENADE (componente específico) está associado ao desempenho no EGRAF. Logo, individualmente, o desempenho dos estudantes na inteligência cristalizada está associado ao desempenho na inteligência fluido-cristalizada.

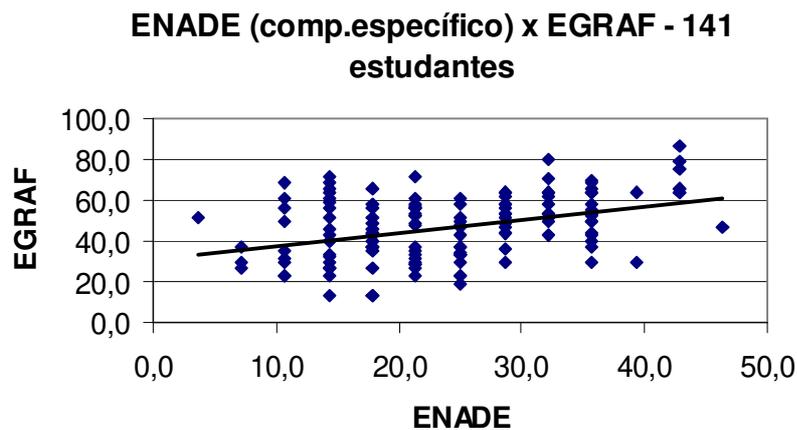


Figura 6.1: Correlação entre o ENADE e o EGRAF - 141 estudantes

Houve também relação dessas variáveis entre os mal e bem sucedidos. A diferença é que as médias desses grupos diferem significativamente (tabela 6.4).

Infer-se desses fatos que o desempenho no ENADE no componente específico não difere do desempenho no EGRAF quando os estudantes são considerados ingressantes ou concluintes, mas difere significativamente, quando são agrupados pelo desempenho no EGRAF.

Estudantes bem sucedidos obtiveram maiores desempenhos no componente específico do ENADE ($r=0,278$, $p=0,025$) e, vice-versa ($r=0,344$, $p=0,002$), uma vez que a correlação é positiva .

O raciocínio dedutivo

O estudo estatístico do raciocínio dedutivo revelou haver diferença entre as médias dos ingressantes e concluintes ($t_{(141)}=-2,28$, $p=0,027$) e entre as médias dos mal e bem sucedidos ($t_{(141)}=-7,639$, $p=0,000$), conforme a tabela 6.7.

Inferese-se daí que a graduação contribuiu para o desenvolvimento dessa variável. Além disso, o raciocínio dos bem sucedidos no EGRAF é mais desenvolvido em relação aos mal sucedidos.

Tabela 6.7: Raciocínio dedutivo dos sujeitos agrupados como ingressantes e concluintes e como bem e mal sucedidos no EGRAF

Grupo	N	Média (%)	Erro-padrão da média	Desvio-padrão (%)	Estatística
ingressantes	111	27,64*	0,59	6,23	$t_{(141)}=-2,28$ $p=0,027$
concluintes	30	30,53*	1,13	6,17	
todos	141	28,26	0,53	6,31	
mal sucedidos	76	25,14*	0,69	5,99	$t_{(141)}=-7,639$ $p=0,000$
bem sucedidos	65	31,89*	0,55	4,47	
todos	141	28,26	0,53	6,31	

*p= ou menor que 0,01.

Correlação entre raciocínio dedutivo e o desempenho no EGRAF

De uma maneira geral, o raciocínio dedutivo está relacionado com a inteligência cristalizada (N=141; $r=0,520$, $p=0,000$) dos estudantes considerados isoladamente, conforme tabela 6.8 e figura 6.2.

Tabela 6.8: Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o EGRAF

Grupo	N	r	p
todos os estudantes	141	0,520*	0,000
ingressantes	111	0,515*	0,000
concluintes	30	0,444**	0,014
mal sucedidos no EGRAF	76	0,232**	0,043
bem sucedidos no EGRAF	65	0,041	0,747

*p= ou menor que 0,01

**p= ou menor que 0,05

O estudo revelou que houve evolução do raciocínio dedutivo durante a graduação, uma vez que o coeficiente de correlação r é positivo entre os ingressantes e concluintes. Entretanto, a fraca correlação entre os mal sucedidos ($r=0,232$, $p=0,043$) e a ausência dessa correlação entre os bem sucedidos mostra que o desenvolvimento dessa variável não está ligada ao desempenho na inteligência cristalizada, mas, de alguma forma, pela passagem pelo curso, possivelmente, por certas disciplinas pontuais da graduação, visto que a média dos bem sucedidos é significativamente maior que a dos mal sucedidos (tabela 6.7).

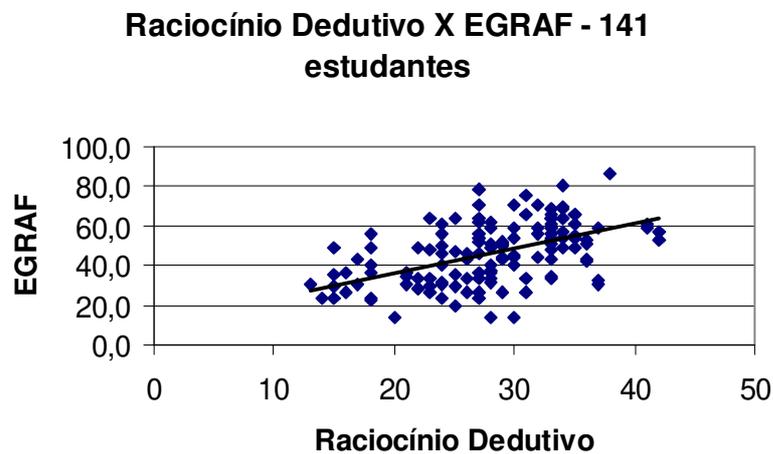


Figura 6.2: Correlação entre o raciocínio dedutivo e o EGRAF - 141
estudantes

Correlação entre raciocínio dedutivo e o desempenho no ENADE (formação geral)

A tabela 6.9 mostra o resultado da correlação entre o raciocínio dedutivo e o ENADE (formação geral).

O estudo revelou não haver qualquer correlação entre essas variáveis, ou seja, a formação geral dos estudantes não está associada ao raciocínio dedutivo, sejam eles ingressantes ou concluintes, sejam mal ou bem sucedidos no EGRAF.

Tabela 6.9: Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o ENADE (formação geral)

Grupo	N	<i>r</i>	<i>p</i>
todos os estudantes	141	0,151	0,074
ingressantes	111	0,160	0,094
concluintes	30	0,064	0,737
mal sucedidos no EGRAF	76	-0,052	0,657
bem sucedidos no EGRAF	65	0,008	0,947

Correlação entre raciocínio dedutivo e o desempenho no ENADE (componente específico)

O estudo da correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o desempenho no componente específico do ENADE revelou não haver qualquer dependência entre essas variáveis, sejam eles ingressantes ou concluintes, sejam mal ou bem sucedidos no EGRAF.

Esse fato leva à hipótese de que o desenvolvimento do raciocínio dedutivo esteja mais próximo da inteligência cristalizada (tabela 6.8) do que da fluido-cristalizada (tabela 6.10) para esses estudantes.

Tabela 6.10: Correlação de Pearson entre o raciocínio dedutivo e o ENADE (componente específico)

Grupo	N	<i>r</i>	<i>p</i>
todos os estudantes	141	0,170**	0,044
ingressantes	111	0,167	0,080
concluintes	30	0,153	0,421
mal sucedidos no EGRAF	76	-0,202	0,081
bem sucedidos no EGRAF	65	-0,150	0,233

**p= ou menor que 0,05

Resultados e análises dos 12 estudantes

A tabela 6.11 identifica os doze estudantes, denominados de 1 a 12³⁶, como ingressantes ou concluintes e segundo o desempenho no EGRAF. Além disso, mostra suas idades à época da coleta de dados, cuja média é 21,67 e desvio-padrão 2,61.

Tabela 6.11: Identificação e características dos doze estudantes.

Denominação do Estudante	Idade (anos)	Grupo	Grupo segundo o desempenho no EGRAF
1	19	ingressantes	mal sucedidos (desempenho
2	18		inferior ou igual a 50,0)
3	22		
4	19	ingressantes	bem sucedidos (desempenho
5	20		superior a 50,0)
6	19		
7	25	concluintes	mal sucedidos (desempenho
8	25		inferior ou igual a 50,0)
9	25		
10	23	concluintes	bem sucedidos (desempenho
11	23		superior a 50,0)
12	22		

A referência (de 1 a 12) aos estudantes seguirá por todo o estudo, facilitando as identificações.

A habilidade matemática e a representação mental

Para o estudo das habilidades matemáticas e representações mentais dos doze estudantes foi utilizada a metodologia de vídeo. Fizeram-se constar no Anexo D apenas as transcrições consideradas suficientes e com potencial interesse para se alcançar os objetivos da pesquisa. Para isso, o estudo das

³⁶ A denominação dada visa resguardar o sigilo necessário das identidades dos estudantes envolvidos na pesquisa.

gravações em vídeo revelou que as soluções do problema 3 dos estudantes 1, 3, 5, 9 e 12 contavam com maior diversidade nas variáveis envolvidas e, por esse motivo, foram elas registradas nos anexos.

A tabela 6.12 resume o resultado do estudo da habilidade matemática e representação mental predominante.

Em seguida, é apresentada uma análise da habilidade matemática e da representação mental predominante dos estudantes 1, 3, 5, 9 e 12, como exemplo das diferentes situações encontradas e que justificaram as classificações mencionadas na tabela 6.12.

A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 1.

Tabela 6.12: Habilidade matemática e representação mental

Estudante	Ingressantes / Concluintes	Habilidade Matemática	Representação mental predominante
1		mais habilidoso	proposicional-analítica
2		mais habilidoso	proposicional-analítica
3	ingressantes	menos habilidoso	proposicional
4		mais habilidoso	proposicional
5		mais habilidoso	proposicional
6		mais/menos habilidoso	proposicional
7		mais habilidoso	proposicional
8		mais habilidoso	proposicional
9	concluintes	menos habilidoso	proposicional
10		mais habilidoso	proposicional
11		mais habilidoso	proposicional
12		mais habilidoso	analítica

A figura 6.3 mostra a solução escrita do estudante 1 ao problema 3 do teste de Krutetskii. Esse estudante, interessante, foi considerado habilidoso por identificar os elementos dos problemas e por construir, de uma maneira geral, relações eficientes entre eles. Em um constante ir e vir, checava as lógicas que encontrava nessa construção, percebendo enganos de diferentes ordens - aritméticos, algébricos, de proporção, lógicos etc. O estudante não possuía qualquer algoritmo conhecido para a solução desses problemas, com exceção do problema 4, que, portanto, não foi considerado um dado de pesquisa.

Particularmente, no problema 3, associou-o a questões de proporção, o que o auxiliou a compreender a estimativa de peixes no lago. Esse "ir e vir", conforme Johnson-Laird (1983), aponta o cuidado em se manter presentes na memória os elementos do problema, minimizando a possibilidade de um fracasso provocado por lapsos dessa natureza.

Ainda quanto ao problema 3, a familiaridade com os elementos do problema ocorreu com a imagem do lago e dos peixes sendo retirados e identificados. O estudante revelou que essas imagens estiveram presentes em sua mente ao longo do processamento. Seus protocolos indicaram que ora o estudante imaginava pessoas retirando e identificando os peixes, ora ele se imaginava nessas ações, o que pode ser confirmado com as seguintes afirmações durante a solução: "eles tiraram 60 e acharam mais 4"; "...dos 4 que eu peguei..."; "...40 peixes que eu marquei...". Esse fato reforçou o uso da representação imagética durante o processamento da informação, posteriormente comentada pelo estudante.

Na verdade, essa representação pareceu ser suficiente para a solução do problema, mas por insegurança o estudante desejou "prová-la" por via matemática. A transposição da representação analítica para a proposicional não foi imediata, necessitando de constantes retrospectivas pelo estudante.

A performance do estudante 1, nesse e nos outros quatro problemas, indicou ser um bom solucionador de problemas matemáticos, pois, de acordo com Sternberg (2000) e Johnson-Laird (1983, 1992), bons solucionadores avaliam a

coerência do que estão fazendo, revêem a representação obtida e organizam e reorganizam as informações.

$1^\circ \text{ dia} = 40p$
 $2^\circ \text{ dia} = 60p - 4$
 $1260 - 100$
 $d - x$
 $30x = 100$
 $x = \frac{100}{30}$
 $x = 6,6$
 $1x = 40\%$
 $2x = 60 - 4 = 56\%$
 $40p = 4$
 60%
 $1^\circ = \text{circulo}$
 $2^\circ \times 60 = 60 - 4$
 $x = 2406 - N$
 $40 \mid 36p - 4$
 $-x - 100$
 $60 - 4$
 $4x = 2406$
 $x = 600$

Figura 6.3: Solução do problema 3 - estudante 1

A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 3.

O estudante 3, ingressante, foi considerado menos habilidoso por não ter estabelecido relações eficientes entre os elementos dos problemas, de uma maneira geral. Não pareceu ter havido falhas na compreensão do que se pedia, uma vez que explicou corretamente esses entendimentos, posteriormente.

Especificamente, no problema 3 (figura 6.4), havia meios de o estudante ter checado se suas análises estariam corretas ou não, mas não o fez, diferentemente do estudante 1.

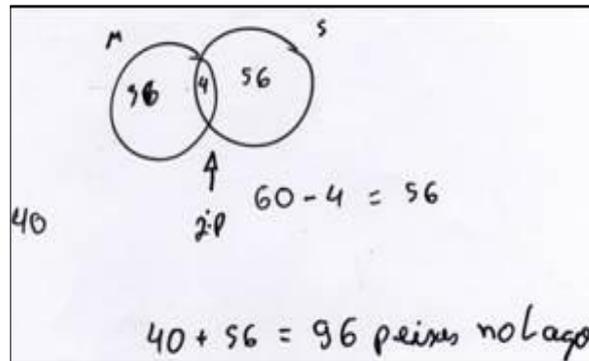


Figura 6.4: Solução do problema 3 – estudante 3

Apesar de esse estudante ter apresentado uma representação mental analítica para o problema 3, ele foi classificado como tendo uma representação predominantemente proposicional, de acordo com os protocolos durante a solução dos outros problemas, bem como com a confirmação posterior ao lhe ter perguntado sobre essas representações. O estudante revelou que, no problema 3, a figura dos diagramas esteve sempre presente em seu processamento. Essa revelação foi convincente por estar em sintonia com os protocolos orais durante a solução, como "isso aqui é uma questão simples de conjunto" e "...nesse conjunto todo...".

O fato de ter sido considerado menos habilidoso e com uma representação predominante proposicional remeteu aos resultados de pesquisas realizadas por Clark (1969) e Sternberg (1980): o uso de uma representação lingüística é mais eficaz quando o sujeito domina plenamente as relações existentes no problema e, nesse caso, as imagens, num sentido amplo, ficam em segundo plano, como se não necessitassem desse apoio.

Da mesma forma, Kosslyn (1992, p.188) declarou ser a imagem mental um meio útil de se lidar com problemas abstratos, mas essa utilidade pode ser descartada, se o material for altamente familiar e se a informação verbal tiver sido bem aprendida. Isso parece explicar a conduta de alguns estudantes ao quererem partir para o uso da linguagem matemática imediatamente, sem ter havido uma plena compreensão das relações entre os elementos do problema. Foi o que ocorreu com o estudante 3 nas soluções dos outros problemas.

Esse estudante optou pela representação proposicional nas outras quatro soluções, sem ter controle absoluto das relações que fez, à exceção do problema quatro, no qual houve aplicação direta do conteúdo de mínimo múltiplo comum e, portanto, não foi considerado um dado de pesquisa.

Nesse caso, talvez fosse indicado buscar uma outra representação que lhe fornecesse maior apoio à condução do processamento. Acredita-se que esse seja o papel de um mediador conhecedor das representações mentais e habilidades matemáticas dos estudantes que apresentem problemas nessa aprendizagem. Alguém que possa auxiliá-los em seus problemas educacionais identificando e fornecendo boas indicações e bons exercícios (Krutetskii, 1976) que os levem a progredir nessas variáveis e, com isso, evitar as evasões tão freqüentes em cursos como o de Ciência da Computação.

O estudante 3 afirmou na entrevista que a linguagem matemática sempre foi muito cobrada durante sua escolaridade anterior à superior. Esse fato reforça a tendência desse estudante para soluções ligadas às representações proposicionais. No entanto, a ausência de domínio sobre os elementos do problema, fez com que essa trajetória não fosse a mais adequada, conforme observações de Clark (1969), Sternberg (1980) e Kosslyn (1992).

Esse fato leva à idéia de uma forte manipulação matemática dissociada de seus significados, com relação a esse estudante. Kline (1976) nos conta que essa é uma prática baseada nos princípios da Matemática Moderna em que havia (e ainda há) uma forte valorização "mecânica" dos números em detrimento dos significados a ele associados. Kline (1976) criticou textos matemáticos dessa época, dizendo que raramente realizavam conexão entre os vários conceitos envolvidos em um tópico matemático qualquer, e disse ainda que esses textos eram como páginas arrancadas de livros diferentes, nenhuma das quais transmitindo a vida, o sentido e o espírito da Matemática.

A pesquisa realizada por Souza (2001) confirma que aprendizagens matemáticas dissociadas da construção do conceito e dos significados dos objetos levam os estudantes a realizarem cálculos desligados de seus significados, influenciando, possivelmente, outras variáveis como a motivação para o estudo

dessa disciplina. Por um outro ângulo, se objetos da graduação em computação exigem o uso de ferramentas matemáticas, é fundamental que esses estudantes saibam quando e como utilizá-las nesse contexto, e isso envolve o domínio desses significados.

A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 5.

O estudante 5, ingressante, foi considerado mais habilidoso por relacionar eficientemente os elementos dos problemas de Krutetskii. Mostrou possuir as características de um bom solucionador de problemas, conforme características dadas por Sternberg (2000) e Johnson-Laird (1983, 1992). Vale realçar o cuidado tomado por esse estudante em só partir para a escrita depois de ter sentido confiança naquilo que havia interpretado do texto do problema.

A representação mental apresentada foi exclusivamente proposicional. Em todos os problemas, o estudante afirmou não possuir qualquer imagem ou esquema que o auxiliasse no processamento. Curioso notar esse fato, pois houve passagens no texto do problema 3 que poderiam deixar margem a dúvidas tais como: "então 40 peixes foi o que eu peguei primeiro"; "o número de marcados que eu encontrei"; "quer dizer que meu lago tem 600 peixes". Os protocolos escritos denunciam a mesma tendência proposicional (figura 6.5). O uso de uma mesma referência pessoal nos protocolos dos estudantes 1 e 5, sendo as representações mentais diferentes (proposicional-analítica para o primeiro e, exclusivamente, proposicional para o segundo) leva a crer não ser essa uma característica específica de alguma representação, como antes se pensou, mas uma maneira particular de o estudante se organizar frente a um problema.

Ex3 -

$$40 - x\%$$

$$\frac{15}{30} - 100\%$$

$$x - y\%$$

$$15y = 100$$

$$y = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$$

$$40 - \frac{20}{3}\%$$

$$x - 100\%$$

$$\frac{1}{3}z = 200$$

$$z = 600$$

Figura 6.5: Solução do problema 3 - estudante 5

Os resultados da habilidade desse estudante comparados com os do estudante 3 confirmam as afirmações feitas pelos pesquisadores que defendem que a representação proposicional é mais bem utilizada para sujeitos que dominem o objeto em questão.

A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 9.

O estudante 9, concluinte, foi considerado menos habilidoso por não estabelecer relações eficientes entre os elementos dos cinco problemas. Além disso, pareceu não possuir as características de um bom solucionador de problemas por não investir tempo em uma leitura preliminar completa do texto, por não ter traçado um plano ou buscado auxílio em uma representação que o guiasse nesse processamento e por não avaliar a coerência do que realizava de uma maneira geral.

As operações desconexas do problema 3 (figura 6.6) indicaram ausência de significado para o uso da linguagem matemática para esse estudante. Mais uma vez, conforme os autores citados nos capítulos anteriores, o uso de uma representação lingüística mostra-se mais eficiente quando se dominam as relações do problema.

(3) 40 peixes (cada marcação)
 60 peixes (4 / marcação)
 100 peixes

$$40 - \frac{60}{4} = 40 - 15 = 25 \text{ peixes no lago}$$

Figura 6.6: Solução do problema 3 - estudante 9

De fato, a manipulação algébrica pareceu não ter sido eficaz. Nesse caso, talvez fosse indicado buscar apoio em alguma outra representação. Vale notar que o único problema que o estudante 9 mais se aproximou de uma solução correta e sem cometer enganos em suas relações foi o que ele representou analiticamente - o problema 4.

A solução dada ao problema 3 poderia ter sido avaliada com a simples lembrança de que se quarenta peixes foram apanhados do lago e marcados, como se poderia declarar ter vinte e cinco peixes no total? Igualmente, o texto do problema 5 afirma haver doze pessoas no total, por isso, como ele pôde concluir haver quinze pessoas na viagem como resposta ao problema? Os números não pareceram fazer sentido para esse estudante.

A habilidade matemática e representação mental predominante do estudante 12.

O estudante 12, concluinte, foi considerado mais habilidoso por relacionar eficientemente os elementos dos cinco problemas. Mostrou possuir as características de um bom solucionador de problemas.

A representação mental apresentada por esse estudante foi exclusivamente analítica. Em todos os problemas o estudante afirmou acionar alguma imagem ou esquema que o auxiliasse no processamento. No problema 3 (figura 6.7), especificamente, várias passagens reforçaram suas declarações posteriores dadas à pesquisadora a respeito desse modo de representar os problemas: "foram jogados de volta..."; "se pra cada peixe eu pegar 4 identificados..."; "eu jogaria a

rede..."; "... que seria os que eu identifiquei". Os protocolos escritos também denunciaram essa tendência. Baseando-se ainda em suas declarações posteriores às soluções, o estudante revelou possuir uma conduta para solucionar problemas que é a de sempre aproximar para algo que o faça "ver" e compreender o que há por trás do que está sendo dito. Nesse sentido, arrisca-se dizer que esse "estar por trás" declarado pelo estudante revela a busca pelas relações não explícitas no texto do problema.

Handwritten solution for problem 3 by student 12:

$$\begin{array}{r}
 40 \text{ peixes foram identificados} \\
 60 \text{ peixes} - \quad \underline{9 \text{ identificados}} \\
 \quad \times 10 \quad \quad \quad \times 10 \\
 \hline
 600 \text{ peixes} \quad \underline{40 \text{ identificados}} \\
 \hline
 \rightarrow \text{total no lago}
 \end{array}$$

Figura 6.7: Solução do problema 3 - estudante 12

A habilidade matemática e representação mental predominante dos doze estudantes

Nove dos doze estudantes foram considerados mais habilidosos. O estudante 6 não pôde ser classificado por ter tido um dos problemas desconsiderados como um dado e, como foi considerado mais habilidoso em dois problemas e menos habilidoso nos outros dois, não houve predominância. Apenas dois estudantes foram considerados menos habilidosos, um ingressante e outro concluinte. Esse fato leva a crer na possibilidade de estudantes de um curso de exatas, cuja base é a Matemática, obterem sucesso, caso sejam persistentes em seus objetivos.

Os dois estudantes considerados menos habilidosos estavam atrasados no cumprimento das disciplinas (mesmo o ingressante) em relação aos que entraram na mesma época, enquanto os outros, não. Por isso, levanta-se a hipótese de que a habilidade matemática desenvolvida em um nível adequado pode interferir nas opções de curso. É o que diz a pesquisa realizada por Araújo (1999) que concluiu que estudantes, em fase de vestibular que optam por cursos das ciências exatas,

possuem bons resultados na disciplina de Matemática e apresentam habilidade matemática mais desenvolvida do que os que optam por Biomédicas ou Humanas. Nesse sentido, a evasão observada no curso de Ciência da Computação talvez possa ser evitada em parte pelo nível de desenvolvimento dessa variável. Diz-se em parte, porque se sabe por Krutetskii (1976) que a prontidão para uma atividade depende de outras variáveis ali envolvidas.

O fato de se ter encontrado praticamente o mesmo número de mais habilidosos dentre os ingressantes (quatro) e concluintes (cinco) remete à reflexão sobre a possibilidade de esse desenvolvimento ocorrer mais fortemente antes do ingresso no ensino superior. Se esse fato for uma verdade, aumenta a responsabilidade do trabalho realizado no ensino fundamental e médio, mas só uma pesquisa poderia confirmar. Há indícios, no entanto, de que esse fato possa ser verdadeiro ao se considerar os resultados da pesquisa de Floyd, Evans e McGrew (2003) que estudaram relações entre habilidades cognitivas e êxito em tarefas matemáticas, obtendo como resultado curvas que ascendiam rapidamente em idades mais jovens e com menor intensidade em idades mais maduras. Se assim for, pequenos progressos apresentados no ensino superior poderão não ser tão pequenos. Nesse sentido, um estudo longitudinal em todos os níveis escolares seria indicado.

Setenta e cinco por cento dos estudantes apresentaram uma tendência para representar problemas matemáticos proposicionalmente. Seria essa uma tendência para o curso de exatas? Pode-se dizer que houve certo equilíbrio nessa tendência entre os estudantes ingressantes e concluintes. Com exceção do estudante 5, vez ou outra, os outros estudantes optaram por algum apoio analítico, mesmo que não totalmente. Não se pode afirmar ter havido uma preferência por um problema em específico para transitar por uma representação mais analítica por esses outros estudantes, no entanto, o problema 1 parece tê-los inspirado mais nesse sentido, ao se observar oito incidências de "proposicional-analítica" e "analítica" das doze (Anexo I).

Ainda nessa direção, afirma-se que, na maior parte das vezes que os estudantes julgavam não ter completo domínio a respeito de como conduzir certa

solução, partiam para um apoio analítico. Esse fato ocorreu mais freqüentemente com as soluções dos problemas em que os estudantes foram considerados "proposicionais-analíticos" (exemplo: problema 1 e 3 - estudante 1; problema 1 do estudante 9 - Anexo H). Uma vez sentindo-se "senhor" daquela situação, prosseguiam de maneira proposicional.

Outro fator que merece realce foram os resultados do estudante 5 e do estudante 12, que mostraram ser possível ser totalmente proposicional ou totalmente analítico e que essa característica não foi exclusiva de ingressante ou concluinte, mas de estudantes considerados bons solucionadores de problemas e que investiram muito tempo na leitura do problema antes de proporem qualquer solução.

Nenhuma representação mental específica esteve associada à habilidade matemática dos estudantes, ou seja, estudantes considerados mais habilidosos ou menos habilidosos representaram os problemas nas três maneiras. O que se observou é que, de uma maneira geral, a representação proposicional era sempre usada com sucesso por estudantes que tinham domínio sobre as relações dos elementos do problema, enquanto a analítica apoiou preliminarmente essas relações para que posteriormente o estudante se utilizasse da proposicional.

Os fracassos observados nas soluções podem ser atribuídos: 1) à impossibilidade de estabelecimento de relações eficientes entre os elementos do problema, o que inclui a flexibilidade para trabalhar as diferentes representações mentais que pudessem apoiar as dificuldades ali encontradas, uma vez que se tratava de problemas mal-estruturados, ou seja, que não havia um algoritmo pronto para uso; 2) pela opção de uma representação proposicional desligada da produção de significados que deveria ter ocorrido e; 3) pela intensa carência de maiores conhecimentos sobre solução de problemas matemáticos (como não realizar uma leitura completa preliminar do problema).

Testes de normalidade para as análises dos desempenhos e do raciocínio dos doze estudantes

As análises do desempenho no ENADE, do EGRAF e do raciocínio dedutivo dos doze estudantes estão apoiadas em testes testes t. Para isso, foi necessário realizar o teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov (K-S Test), assim como feito para as análises dos 141 estudantes, conforme tabela 6.13.

Tabela 6.13: Variáveis e o teste de normalidade

Variável	N	Teste de normalidade (K-S Test)	
EGRAF - mais habilitados	9	K-S ₍₉₎ =0,608	$p=0,853$
EGRAF - menos habilitados	2	K-S ₍₂₎ =0,368	$p=0,999$
ENADE (f.geral) - mais habilitados	9	K-S ₍₉₎ =0,596	$p=0,869$
ENADE (f.geral) - menos habilitados	2	a distribuição não possui variação	
ENADE (c.específico) - mais habilitados	9	K-S ₍₉₎ =0,649	$p=0,794$
ENADE (c.específico) - menos habilitados	2	K-S ₍₂₎ =0,368	$p=0,999$
Raciocínio dedutivo - mais habilitados	9	K-S ₍₉₎ =0,588	$p=0,879$
Raciocínio dedutivo - menos habilitados	2	K-S ₍₂₎ =0,368	$p=0,999$

O desempenho dos doze estudantes no ENADE (formação geral) e a habilidade matemática

As estatísticas sobre o desempenho dos doze estudantes no ENADE (formação geral), segundo a habilidade matemática, mostram que os estudantes não se diferenciam na cultura geral quando agrupados segundo a habilidade matemática, conforme tabela 6.14. Isso mostra que a habilidade matemática não está, provavelmente, associada a aspectos culturais na formação dos estudantes.

Tabela 6.14: Habilidade matemática e o desempenho no ENADE (formação geral)

Estudante	Grupo	ENADE (f.geral)	Média /erro-padrão	Desvio- padrão	Estatística
1		71,4			
2		85,7			
4		71,4			
5	mais habilitados	42,9	69,83 /6,49	19,47	$t_{(12)}=-0,24$ $p=0,82$
7		42,9			
8		57,1			
10		71,4			
11		85,7			
12		100,0			
3	menos habilitados	71,4	71,40 /0,00	0,00	
9		71,4			

O desempenho dos doze estudantes no ENADE (componente específico) e a habilidade matemática

O resultado do desempenho dos doze estudantes no ENADE (componente específico) segundo a habilidade matemática encontra-se na tabela 6.15.

Embora o desempenho dos mais habilitados tenha sido um pouco maior que a dos menos habilitados, o teste t ($t_{(12)}=1,29$; $p=0,29$) informa que não há diferença significativa entre esses grupos. Sendo assim, não se pode dizer que a habilidade matemática, isoladamente considerada, esteja associada à inteligência fluido-cristalizada, até porque, conforme Krutetskii (1976), a habilidade matemática integra um complexo conjunto de elementos que, combinados, vem formar a prontidão para uma atividade mental matemática. Esse é o caso dos itens

abordados no componente específico do ENADE, que requerem uma série de outras variáveis para o sucesso em sua solução.

Tabela 6.15: Habilidade matemática e o desempenho no ENADE (componente específico)

Estudante	Grupo	ENADE (c.espec.)	Média /erro-padrão	Desvio- padrão	Estatística
1		14,3			
2		35,7			
4		42,9			
5	mais habilitados	35,7	34,57 /3,04	9,11	$t_{(12)}=1,29$ $p=0,29$
7		28,6			
8		35,7			
10		32,4			
11		42,9			
12		42,9			
3	menos habilitados	32,1	28,55 /3,55	5,02	
9		25,0			

O desempenho dos doze estudantes no EGRAF e a habilidade matemática

O resultado do desempenho dos doze estudantes no EGRAF segundo a habilidade matemática encontra-se na tabela 6.16.

Assim como no ENADE, as estatísticas informam que o desempenho dos mais habilitados no EGRAF foi ligeiramente superior em relação aos menos habilitados. No entanto, o teste t ($t_{(12)}=1,25$, $p=0,43$) revela não haver diferença significativa entre os dois grupos.

Tabela 6.16: Habilidade matemática e o desempenho no EGRAF

Estudante	Grupo	EGRAF	Média /erro-padrão	Desvio- padrão	Estatística
1		32,8			
2		37,0			
4		86,5			
5	mais habilitados	53,8	55,61 /6,67	20,00	$t_{(12)}=1,25$ $p=0,43$
7		35,8			
8		49,5			
10		51,0			
11		78,8			
12	75,3				
3	menos habilitados	50,0	34,65 /15,35	21,71	
9		19,3			

O raciocínio dedutivo dos doze estudantes e a habilidade matemática

Assim como ocorreu com os resultados do ENADE e do EGRAF, o raciocínio dedutivo também foi superior para os estudantes considerados mais habilitados, segundo as estatísticas descritas na tabela 6.17. Entretanto, o teste t ($t_{(12)}=1,56$, $p=0,21$) revelou não haver diferenças significativas entre os dois grupos.

Tabela 6.17: Habilidade matemática e o raciocínio dedutivo

Estudante	Grupo	Raciocínio Dedutivo (%)	Média /erro-padrão	Desvio- padrão	Estatística
1		80,4			
2		60,9			
4		82,6			
5	mais habilidosos	76,1	67,88 /4,03	12,09	$t_{(12)}=1,56$ $p=0,21$
7		58,7			
8		47,8			
10		78,3			
11		58,7			
12		67,4			
3	menos habilidosos	63,0	58,65 /4,35	6,15	
9		54,3			

7. Conclusões, limitações e implicações do estudo

Este trabalho buscou ampliar informações a respeito de estatísticas sobre o desempenho de estudantes de ensino superior. Para isso, foram investigados 141 estudantes da graduação de Ciência da Computação da FAESA, instituição de ensino superior do Estado do Espírito Santo, sendo 111 ingressantes e 30 concluintes, nas variáveis: desempenho no ENADE (formação geral e componente específico), desempenho no EGRAF e raciocínio dedutivo.

Para a pesquisa, os 141 estudantes foram agrupados de duas formas: como ingressantes e concluintes e como mal e bem sucedidos no EGRAF, uma vez que se desejou conhecer mais a respeito das semelhanças e diferenças de estudantes com estas características. Para isso, resolveram os exames do ENADE, do EGRAF e o teste GfRLD sobre o raciocínio dedutivo.

A pesquisa revelou haver diferença significativa no desempenho dos mal e bem sucedidos no EGRAF, ou seja, existem na Faesa estudantes com grandes discrepâncias no desempenho acadêmico. Os concluintes apresentaram desempenho significativamente superior no EGRAF em relação aos ingressantes, o que leva a crer que o trabalho realizado na inteligência cristalizada por essa IES, seja positivo.

O desempenho no ENADE (formação geral) não diferiu entre os grupos de ingressantes e concluintes e mal e bem sucedidos. Em face disso, o componente de formação geral dos estudantes não está relacionado aos conteúdos escolares, ou é possível que a Faesa não tenha trabalhado com profundidade a formação geral dos estudantes por meio dos conteúdos transdisciplinares, uma vez ter havido evolução da inteligência cristalizada e não da inteligência prática.

A inteligência fluido-cristalizada foi verificada pelo exame do ENADE no componente específico. Os resultados apontaram não ter havido evolução dessa variável no decorrer da graduação, ou seja, os ingressantes e concluintes não se diferenciam nesse aspecto. No entanto, houve relevante diferença no grupo dos mal e bem sucedidos. Assim, como as correlações de Pearson entre essas

variáveis (desempenho no ENADE - componente específico e desempenho no EGRAF) foram todas positivas, infere-se haver certa associação entre as inteligências cristalizadas e fluido-cristalizadas, sendo os estudantes considerados como ingressantes, concluintes, mal ou bem sucedidos. Conclui-se daí que estudantes com desempenho superior em conteúdos escolares (EGRAF) tendem a apresentar desempenho maior quando avaliados em itens que explorem a capacidade de relacionar idéias complexas e de raciocinar logicamente a partir de regras gerais em situações relativamente novas (ENADE - componente específico).

O raciocínio dedutivo foi investigado segundo o teste psicológico GfRLD, de Primi e Müller. A pesquisa revelou que os concluintes diferem significativamente dos ingressantes, assim como os bem sucedidos em relação aos mal sucedidos. Além disso, o estudo da correlação de Pearson revelou haver dependência positiva entre o raciocínio dedutivo e a inteligência cristalizada dos ingressantes, mas não entre os bem sucedidos, e fraca dependência entre os mal sucedidos e entre os concluintes. No entanto, houve alta correlação entre essas variáveis, ao considerarmos os estudantes individualmente, ou seja, sem considerá-los segundo algum agrupamento.

Diante desses resultados, é possível que o desenvolvimento do raciocínio dedutivo não esteja associado diretamente ao desempenho da inteligência cristalizada, mas, provavelmente, de alguma forma, pela contribuição da própria graduação, ao se exigir dos estudantes o desenvolvimento de muitos programas computacionais, e isso envolve o uso de raciocínio dedutivo. Por outro lado, as diferenças entre as médias dos dois grupos apontam na direção de certa evolução do raciocínio nessa graduação, mesmo que não reveladas exatamente nos grupos, mas nos estudantes, considerados individualmente.

Ao contrário, o raciocínio dedutivo não esteve associado de forma alguma ao resultado do ENADE tanto na formação geral quanto no componente específico. Nesse sentido, é possível que essa variável não tenha sido explorada intensamente nos itens que compuseram essas partes do exame. Há certa surpresa no que diz respeito à parte de componente específico, uma vez que é

exigido do futuro cientista da computação alto nível de raciocínio dedutivo pela própria natureza dos objetos envolvidos para essa formação.

Para a amostra de doze estudantes, nove foram considerados habilidosos ao solucionarem problemas matemáticos mal-estruturados (Sternberg, 2000, p.309), pois teceram boas relações e souberam construir uma linha de conduta que os fizesse convergir para uma solução coerente e aceitável, conforme parâmetros estabelecidos por Krutetskii (1976). Ao contrário, os dois considerados menos habilidosos não apresentaram essas características, mas falhas em etapas básicas como a leitura completa do texto do problema proposto, extração de elementos relevantes e ausência de sucessivas revisões do raciocínio ali empreendido e da avaliação do resultado alcançado (Krutetskii, 1976). Esses últimos não foram considerados bons resolvidores de problemas, conforme indicações de Sternberg (2000) e de Johnson-Laird (1992), além de autores que defendem ser um processo composto por etapas integradas, como Mayer (1992), Klausmeier & Goodwin (1977), Eysenck & Keane (1994) e Polya (1946).

Houve certo equilíbrio entre estudantes ingressantes e concluintes considerados habilidosos em Matemática, o que levanta a possibilidade da IES contribuir pouco para essa evolução. Por outro lado, é possível que essa variável sofra maiores alterações em escolaridades anteriores à superior, uma vez que, segundo Krutetskii (1976), essa variável não é inata e nem inalterável, mas passível de cultivo e de melhoramento. Nesse caso, aumenta a responsabilidade do trabalho desenvolvido nesses níveis escolares para esse progresso.

A pesquisa de Floyd, Evans e McGrew (2003) reforça esta hipótese, pois, ao estudarem relações entre habilidades cognitivas e êxito em tarefas matemáticas, obtiveram resultados que ascendiam rapidamente em idades mais jovens e praticamente se estabilizavam em idades mais maduras como as de estudantes de ensino superior. Nesse sentido, estudos futuros poderiam verificar que pequenos progressos na habilidade matemática e em outras variáveis psicológicas no ensino superior podem não ser tão pequenos quanto parecem. Este fato justificaria pequenas discrepâncias entre as médias obtidas para algumas das variáveis aqui estudadas, mas que os testes t revelaram não serem significativas.

Quanto à representação mental, a proposicional foi a preferida tanto dos habilidosos como dos menos habilidosos. A diferença, portanto, não estava na representação, mas em como obtinham sucesso ou não com ela. Estudantes mais habilidosos que usaram a representação proposicional prioritariamente dominaram bem as relações do problema e conduziram satisfatoriamente o desenvolvimento do processamento da informação até a solução, confirmando-a, sem o apoio imagético.

Os menos habilidosos, ao contrário, optaram por escrever sentenças matemáticas que pareciam não fazer sentido, apresentaram dificuldades para construir relações entre essas sentenças e, em geral, não avaliavam as soluções encontradas, muitas vezes incoerentes. Nesse caso, deveriam tentar uma outra representação que fornecesse maior suporte para entendimentos preliminares dos elementos relevantes e de suas relações para, em um momento posterior, fazer uso adequado e eficiente da linguagem específica. Foi o caso de outros estudantes que, não conseguindo processar a informação proposicionalmente de início, partiram para um apoio analítico, para então retornar ao uso da linguagem matemática. Essa não foi uma regra, mas uma indicação de caminhos revelados pelos estudantes bem sucedidos.

As estatísticas revelaram não haver relação entre a habilidade matemática e a cultura geral medida pelo ENADE (formação geral). Assim, aspectos culturais da formação desses estudantes não estão associados ao desenvolvimento da habilidade matemática.

De certa forma, o mesmo ocorreu em relação ao componente específico do ENADE, o EGRAF e o raciocínio dedutivo, quando comparados à habilidade matemática, não se confirmando, assim, a hipótese da pesquisa. Embora tenha havido pequenas diferenças entre as médias dos desempenhos e do raciocínio dedutivo dos mais habilidosos em relação aos menos habilidosos, os testes estatísticos informaram não haver diferenças significativas entre esses grupos. Apesar de, a rigor, não se poder afirmar tais evoluções, conforme resultados alcançados por Floyd, Evans e McGrew (2003), as pequenas discrepâncias entre as médias podem ser significativas ao se considerar as idades avançadas dos

sujeitos aqui estudados, de acordo com a discussão antes feita, quando se abordou a evolução da habilidade matemática de estudantes ingressantes e concluintes nesse capítulo. Nesse caso, somente uma pesquisa poderia confirmar.

Por outro lado, a pesquisa indica que os mais habilidosos não são sempre os que apresentam melhores resultados acadêmicos (medidos pelo ENADE - componente específico e EGRAF). Assim, as avaliações escolares, de maneira geral, são frágeis se desejarem detectar o nível de evolução dessa variável, pois existem estudantes com alta habilidade matemática que não obtêm bons resultados escolares. Esse resultado também ocorreu com a pesquisa de Krutetskii (1976).

Vale registrar indicações dos autores em Psicologia Cognitiva a respeito de algumas limitações em estudos como esse. Uma delas é que não podemos penetrar no cérebro de cada sujeito e observar a computação das informações que geram as variáveis que se pretende estudar. É preciso fazê-lo de forma indireta, ou seja, por meio de seus protocolos durante alguma atividade que evidencie essa construção numa tarefa cognitiva. Ainda assim, é passível de erros e enganos quando de sua interpretação. Buscou-se minimizar esse efeito a partir de uma coleta de dados cuidadosa, com interpretações baseadas em parâmetros testados em pesquisas anteriores e em testes estatísticos.

Uma outra limitação é a desvantagem em se fragmentar o pensamento para estudá-lo. A falta de uma teoria mais ampla que abranja o estudo do pensamento como um todo, compromete um esclarecimento dessa dinâmica por inteiro. Apesar disso, ocorreram avanços significativos em pesquisas dessa área que explicam variáveis na área de Psicologia Cognitiva e que interessam e fertilizam outras áreas da ciência.

Pelo lado da aplicação dos instrumentos, o acesso a todos os sujeitos em todos os instrumentos foi uma limitação, uma vez que tiveram de ser aplicados em dias diferentes e em aulas e horários diversos, conforme a disponibilidade que os professores tiveram em ceder suas aulas para esse fim pela extensão dos testes. Além disso, a necessidade de aplicação dos testes em dias diferentes pode ter ocasionado diferenças no estado psicológico dos sujeitos. Para minimizar esse

efeito negativo, antes das aplicações, os estudantes foram questionados sobre a possibilidade de não estarem bem, tanto no sentido físico quanto no sentido psicológico.

De qualquer forma, foi um estudo que poderia ter se aprofundado em questões só do raciocínio lógico ou da representação ou dos desempenhos, mas se perderia pelo lado da abrangência das variáveis relacionadas. Há sempre perdas. O fato é que se considera importante a continuidade de estudos dessa natureza, para que as perguntas não fiquem sem respostas e que se possam dar respostas ao meio educacional.

Além das indicações fornecidas nesse capítulo, a continuidade do estudo é necessária tanto porque o ideal era que os sujeitos ingressantes e concluintes tivessem sido os mesmos, num estudo que levaria cinco anos, no mínimo, como pelo lado da extensão em se comparar os resultados aqui obtidos, além de se agregar outras variáveis.

Seria também indicado conhecer as mentes matemáticas dos doze sujeitos, segundo a classificação de Krutetskii: analítica, geométrica e harmônica. Conhecer ainda possíveis relações das representações, habilidades e raciocínio com tais mentes.

Finalmente, registra-se que o presente estudo não teve a pretensão de obter resultados conclusivos por dois motivos principais. Primeiro porque se sabe pouco a respeito de como os estudantes processam informações no meio escolar e, portanto, há pouco apoio em pesquisas anteriores a respeito de estudantes brasileiros nas variáveis aqui investigadas. Segundo porque a busca pelas relações entre os grupos ingressantes e concluintes carece de confirmações em estudos posteriores que tenham como sujeitos os mesmos estudantes, o que deixa margem a dúvidas a respeito do seu comportamento no ambiente escolar. Por isso, reforça-se a indicação de um estudo qualitativo e quantitativo futuro, não só para confirmar as hipóteses aqui levantadas, mas para se desenhar a evolução dos estudantes da Ciência da Computação nas variáveis investigadas.

Apesar disso, esses fatores não invalidam o estudo, pelo contrário, aumentam a certeza da necessidade de se conhecer mais sobre os fazeres de

estudantes brasileiros, que os levem ao sucesso ou ao fracasso em tarefas escolares. É indicado, portanto, que sejam investidos esforços que busquem conhecimentos sobre em que medidas as variáveis psicológicas envolvidas em tais tarefas sofrem alterações, a fim de que os professores aumentem a compreensão de como seus estudantes processam as informações.

Referências

- Alves, E.V. (1999). Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Anderson, R.J. (1990). Cognitive psychology and its implications. (pp.1-17; 289-323). New York: W.H.Freeman and Company.
- Araujo, E.A. (1999). Influências das habilidades e das atitudes em relação à Matemática e a escolha profissional. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Boruchovitch, E. (2001). A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea. In E.Boruchovitch, J.A. Bzuneck (Eds.), A motivação do aluno: aspectos introdutórios (pp.9-36). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Boruchovitch, E. (2001). Conhecendo as crenças sobre inteligência, esforço e sorte de alunos brasileiros em tarefas escolares. Psicologia: reflexão e crítica, 14(3), 461-467.
- Brito, M.R.F.de, Fini, L.D.T., Garcia, V.J.N. (1994, Março). Um estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. Pró-Posições, 5, 1[13], 37-45.
- Brito, M.R.F.de, Garcia, V.J.N. (2001). A Psicologia Cognitiva e suas aplicações à Educação. In M.R.F.Brito (Ed), Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa (pp.29-48). Florianópolis, SC: Insular.
- Brito, M.R.F.de. (1996). Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus. Trabalho de livre docência não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Brito, M.R.F.de. (2006). Solução de problemas e a Matemática escolar. Campinas, SP: Átomo e Alínea.

- Brito, M.R.F.de. (2002). O "pensar em voz alta" como uma técnica de pesquisa em psicologia da educação matemática. In Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná, Pontifícia Universidade Católica do Paraná (Eds.), I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática (pp. 15-35). Curitiba, PR: UTP.
- Bruner, J. (1997) Realidade mental, mundos possíveis. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Cabral, A., Nick, E. (1979). Dicionário técnico de Psicologia. São Paulo, SP: Cultrix.
- Callejo, M.L. (1994). Un club Matematico para la diversidad. Madrid, España: Narcea.
- Campbell, D. T., Stanley, J. C. (1979). Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa. São Paulo, SP: EPU.
- Chi, M.T.H., Glaser, R.A. (1992). Capacidade para a solução de problemas. In Sternberg (Ed.), As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações (pp.250-275). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.
- Clark, H.H. (1969). Linguistic processes in deductive reasoning. Psychological Review, 76, 387-404.
- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C. (2002). Algoritmos: teoria e prática. Rio de Janeiro, RJ: Campus. p.757.
- Costa, N.C.A.da. (1999). Lógica paraconsistente aplicada. São Paulo, SP: Atlas. p.11-17.
- Craik, K.J.W. (1967). The nature of explanation. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eichelberger, R.T. (1989) - Discipline Inquiry: understanding and doing educational research. New York: Longman. p.171-181.

Eysenck, W.M. (1997). The blackwell dictionary of Cognitive Psychology. Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers Inc.

Eysenck, W.M., Keane, M.T. (1994). Psicologia cognitiva: um manual introdutório. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Ferreira, A. B.de H. (1999). Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro, RJ: Nova Fronteira.

Floyd, R.G., Evans, J.J. & McGrew, K.S. (2003). Relations between measures of Cattell-Horn-Carroll (CHC) cognitive abilities and mathematics achievement across the school-age years. Psychology in the Schools, 40(2), 155-171. (www.iapsych.com)

Garcia, V.J.N. (1995). Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Japiassú, H., Marcondes, D. (1996). Dicionário básico de Filosofia. Rio de Janeiro, RJ: Jorge Zahar Ed.

Johnson-Laird, N. P. (1983). Mental models. Cambridge: Harvard University Press.

Johnson-Laird, N.P. (1992). A capacidade para o raciocínio dedutivo. In Sternberg (Ed.), As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações (pp.194-216). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Kerlinger, F.N. (1980). Metodologia da pesquisa em ciências sociais: um tratamento conceitual. São Paulo, SP: EPU: EDUSP.

Kerr, N.H. (1983, Junho). The role of vision in "visual imagery" experiments: evidence from the congenitally blind. Journal of Experimental Psychology, 112, 2, 265-277.

Klausmeier, H. J., Goodwin, W. (1977). Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas. São Paulo, SP: Harbra & Row do Brasil.

Kline, M. (1976). O fracasso da matemática moderna. São Paulo: IBRASA, 1976.

Knauff, M., Fangmeier, T., Ruff, C. C., Johnson-Laird, P. N. (2003, Maio). Reasoning, Models, and Images: Behavioral Measures and Cortical Activity. Journal of Cognitive Neuroscience, 15, 4, 559-573.

Knauff, M., Johnson-Laird, P. N. (2002, Abril). Visual imagery can impede reasoning. Memory & Cognition, 30, 363-371.

Knauff, M., May, E. (2004). Visual Imagery in Deductive Reasoning: Results from experiments with sighted, blindfolded, and congenitally totally blind persons. In Proceedings of the Twenty Sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Kosslyn, S.M. (1992). A capacidade para trabalhar mentalmente com imagens. In Sternberg (Ed.), As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações (pp.169-193). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Kosslyn, S.M. (1994). Image and brain: the resolution of the imagery debate. Cambridge: MIT Press.

Krutetskii, V.A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.

Lagrecá, M.C.B. (1997). Tipos de representações mentais utilizadas por estudantes de física geral na área de mecânica clássica e possíveis modelos mentais nessa área. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

Ludke, M., André, M.E.D.A. (1986). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo, SP: EPU.

Mayer, E.R. (1992). Thinking, problem solving, cognition. New York: W.H.Freeman and Company.

McLeod, D.B. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. In: Affect and Mathematical Problem Solving: a new perspective. New York: Springer – Verlag, p. 20-38.

Ministério da Educação (2005). [On-line]. www.inep.gov.br/superior/enade.

Ministério da Educação. (2005). [On-line]. www.mec.gov.br.

Moreira, A.M. (1996, Dezembro). Modelos mentais. Investigações em Ensino de Ciências, 1, 3, 95-108.

Morimoto, C.E. Dicionário Técnico de Informática. www.guiadohardware.net.

Newell, A., Simon, H.A. (1972). Human Problem Solving. New Jersey: Prentice-Hall.

Pinker, S. (1980). Mental imagery and the third dimension. Journal of Experimental Psychology: General, 109, 354-371.

Pinto, A.O., Moreira, M.A. (2003, Setembro). Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Lei de Ampère, à luz da teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird. Revista Brasileira de Ensino de Física, 25, 3, 317-325.

Polya, G. (1946). How to solve it: a new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press.

Powell, A. B., Francisco, J.M., Maher, C.A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. Bolema, 21, 17, 81-140.

Primi, R., Santos, A.A.A.dos, Vendramini, C.M.. Basic abilities and scholastic achievement in freshmen students. Estud. psicol. (Natal). [online]. Jan. 2002, vol.7, no.1 [cited 14 April 2006], p.47-55. Available from World Wide Web: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-294X2002000100006&lng=en&nrm=iso>. ISSN 1413-294X.

Primi, R; Muller, F. (s/ano). GfRLD – Teste de Raciocínio Lógico Dedutivo - FORMA A. Laboratório de Avaliação Psicológica e Educacional – LabAPE

Programa de Mestrado e Doutorado em Avaliação Psicológica, Universidade São Francisco.

Rêgo, R.G. (2000). Um estudo sobre a construção do conceito de função. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.

Rezi, V. (2001). Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Souza, M.A.V.F.de (2001). Uma análise de discursos no ensino e aprendizagem de função. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES.

Spalletta, A.G. (1998). Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In Lee V. Stiff & Frances R. Curcio, Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 (pp.270-285). Reston, Virginia: General Yearbook Editor.

Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In Lee V. Stiff & Frances R. Curcio, Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 (pp.37-44). Reston, Virginia: General Yearbook Editor.

Sternberg, R.J. (1980). Representation and process in linear syllogistic reasoning. Journal of Experimental Psychology: General, 109, 119-159.

Sternberg, R.J. (2000). Psicologia Cognitiva. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Stratton, P., Hayes, N. (2003). Dicionário de Psicologia. São Paulo, SP: Pioneira.

Teixeira, F.J.de. (1998). Mentes e máquinas: uma introdução à ciência cognitiva. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Thagard, P. (1998). Mente: introdução à ciência cognitiva. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Triola, M. F. (1999). Introdução à Estatística. Rio de Janeiro, RJ: LTC.

Toscani, L.V., Veloso, P.A.S. (2001). Complexidade de algoritmos: análise, projeto e métodos. Porto Alegre, RS: Sagra Luzzatto. p.1-22.

Utsumi, M.C. (2000). Atitudes e Habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: Um estudo sobre a estabilidade das atitudes e as habilidades matemáticas de estudantes das séries finais do primeiro grau. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Vendramini, C.M.M. (2000). Implicações das atitudes e das habilidades matemáticas na aprendizagem dos conceitos de Estatística. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Vieira, E. (2001). Representação mental: as dificuldades na atividade cognitiva e metacognitiva na resolução de problemas matemáticos. Psicologia: reflexão e crítica, 14, 2, 439-448.

Viana, O.A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Dicionário

Esse breve dicionário foi construído com a intenção de esclarecer alguns termos usados neste trabalho que são passíveis de confusão e ambigüidade, uma vez que podem ter sido mencionados de maneira diversa por outros autores ou teóricos, independentemente dos contextos, gerando, assim, significados diferentes, e, portanto, entendimentos diferentes.

Os significados para cada termo³⁷ ou palavra foram feitos à luz, principalmente, dos teóricos de base do trabalho e de dicionários específicos das áreas de Psicologia, Psicologia Cognitiva, Filosofia e Informática, com maior destaque para o dicionário de Psicologia Cognitiva "*The Blackwell Dictionary of Cognitive Psychology*" de Michael W. Eysenck (1997). Em alguns casos, houve complementação de esclarecimentos de autores diversos, além dos da própria pesquisadora. São eles:

algoritmo – caminho formal para alcançar uma solução que envolve, um ou mais processos repetitivos, os quais, geralmente, levam a uma resposta exata da questão. Os algoritmos são o cerne da computação. Um programa codifica um algoritmo de modo a ser executado em um computador, resolvendo assim um problema. (Toscani, L.V.; Veloso, P.A.S., 2001)

atenção seletiva - processo pelo qual uma pessoa tenta seguir a pista de um estímulo ou de um tipo de estímulo e não prestar atenção a outro. (Sternberg, 2000, p.107)

atitude - uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor. (Brito, 1996)

axioma – "fato, verdade ou princípio evidente por si mesmo" (s/autor, 2000)

cálculo proposicional - é um sistema lógico usado no raciocínio dedutivo.

compilador – os computadores não entendem nada além de comandos, dados e endereços escritos em linguagem binária. Qualquer ser humano que se disponha

* Todas as traduções foram feitas pela pesquisadora e revisadas pela Prof^a de Língua Inglesa Maria de Lourdes da Faesa.

a escrever um programa complexo em linguagem de máquina ficará louco antes do término do trabalho. Para resolver esse impasse, surgiram as linguagens de programação que permitem escrever programas usando comandos fáceis de lembrar e funções já prontas. O compilador é o programa que permite transformar esse código escrito na linguagem de programação usada em linguagem de máquina, gerando o binário que pode ser executado. Programa computacional que torna possível o ato de compilar. (Dicionário Técnico de Informática - Carlos E. Morimoto - www.guiadohardware.net)

compilar - compilar é transformar um arquivo legível para o homem (chamado código-fonte ou *source-file*) para um arquivo legível para a máquina (binário ou *binary*). Quem faz esse trabalho é o compilador.

complexidade (de um algoritmo) - O fato de um algoritmo resolver (teoricamente) um problema não significa que seja aceitável na prática. Os recursos de espaço e tempo requeridos podem inviabilizar a execução e é o estudo da complexidade do algoritmo que vai dizer quanto ele é eficiente ou mesmo, possível de ser executado. (Toscani, L.V.; Veloso, P.A.S., 2001)

computação - é uma informação interpretável, mapeamento sistemático das entradas e saídas. (Eysenck, 1997, p.177)

conceito – uma idéia ou um pensamento sobre alguma coisa; idéia à qual várias características podem estar vinculadas e à qual várias outras idéias podem estar conectadas. "Um conjunto de idéias e propriedades que pode ser empregado para reunir coisas em um mesmo grupo. O conceito é uma idéia generalizada que pode ser abstrata, e.g. 'justiça', ou concreta, e.g. 'móveis'. Em geral, o progresso dos processos cognitivos humanos é considerado como fruto da formação e elaboração de conceitos, resultante de uma experiência enriquecida" (Stratton & Hayes, 2003, p.43).

conhecimento - "resultado de saber ou conhecer. O conhecimento simples chama-se apreensão (que inclui a percepção); o mais complexo chama-se compreensão ou entendimento (conhecimento de relações, significados etc.). Acervo de informações conservadas e entendidas (assimiladas) por um indivíduo ou por uma cultura" (Cabral & Nick, 1979, p.71); um elemento que vem formar as

condições psicológicas gerais necessárias para uma execução bem sucedida de uma atividade (Krutetskii, 1976).

consciência - "uma estrutura mental adquirida que serve de referência para o julgamento sobre o caráter moral das ações: 'certo' ou 'errado'. A idéia de consciência tem fortes insinuações de dever e obrigação. (...) um estado subjetivo de alerta: reconhecimento das informações recebidas do ambiente imediato. (...) a percepção dos próprios processos mentais ou o estado de ter essa percepção. O estado de estar ciente de suas próprias percepções, pensamentos e sentimentos é vívido e inegável, porém, extremamente difícil de estudar" (Stratton & Hayes, 2003, p.47).

constructo - "um termo empregado na teoria pessoal do constructo para definir conceitos de maneira precisa. Já se sugeriu que o nosso sistema cognitivo é composto de constructos bipolares, como saúde-doença, honesto-desonesto. Uma grande parte da teoria ocupa-se das relações entre constructos, e.g. um indivíduo particular pode ter a idéia de que a pessoa honesta tende também a ser saudável" (Stratton & Hayes, 2003, p.50-51).

constructo hipotético* – conceito que não pode ser diretamente avaliado ou observado, mas que pode ser usado como uma representação mental para compreensão do funcionamento de um fenômeno psicológico.

criatividade – um processo cognitivo que leva à produção de alguma coisa que é, ao mesmo tempo, original e de valor (Sternberg, 2000, p. 431). A capacidade de produzir produtos novos ou soluções de problemas. A criatividade foi estudada como um correlato da inteligência, respectivamente representada pela capacidade de pensamento *convergente* e *divergente* (Stratton & Hayes, 2003, p.55).

desempenho – entendido nesse trabalho como o resultado do empenho do estudante ao executar uma atividade matemática. "Um termo empregado na Psicologia experimental para designar o nível de desempenho de uma pessoa ou animal em uma dada tarefa" (Stratton & Hayes, 2003, p.63).

* Esse termo não foi usado explicitamente no texto deste trabalho.

entidade – aquele ou aquilo que tem existência independente, quer real, quer concebida por um indivíduo; objeto, evento, conceito etc.

entrevista - Há duas maneiras gerais de obter informações das pessoas. Uma delas é fazendo-lhes perguntas. Essa é bem direta. A segunda maneira é fazendo os indivíduos responderem algum tipo de estímulo estruturado. Essa forma é mais indireta. Exemplos de perguntas diretas são: Você é casado? Você acha que seu casamento teve sucesso? Por que? A pessoa então responde. Fornece as respostas que contêm informações que podem ser convertidas em variáveis. Tais questões são usadas em entrevistas. Um conjunto de tais questões é incorporado em um roteiro de entrevista. Entrevistadores treinados usam então esses roteiros e obtêm respostas de (geralmente) respondentes pré-selecionados. Uma entrevista tem certas vantagens que outros métodos não têm. O entrevistador pode, por exemplo, depois de fazer uma pergunta geral, sondar as razões das respostas dadas. Uma das grandes vantagens da entrevista é, então sua profundidade. Os pesquisadores podem ir mais abaixo da superfície das respostas, determinando razões, motivos e atitudes. A construção de roteiros de entrevistas é uma arte de alta engenharia. Em mãos competentes são instrumentos poderosos para se fazer observações. Usada rotineiramente em levantamentos por amostragem, são úteis também em outros tipos de pesquisa onde possa ser difícil ou mesmo impossível usar outros métodos (Kerlinger, 1980).

epifenômeno - o epifenômeno é entendido como "atividades mentais são simples produtos secundários de processos nervosos, sem qualquer interferência causal no curso dos acontecimentos físicos ou psíquicos" (Stratton & Hayes, 2003, p.110). Um exemplo útil sobre um epifenômeno é explicado por Eysenck e Keane (1994, p.185) "As luzes piscando no exterior de um computador indicam algo sobre as suas operações internas, mas não são necessárias para que algo aconteça. Se uma das lâmpadas queimasse, as computações internas da máquina continuariam independentemente do que tivesse acontecido. As lâmpadas são epifenômenos do processamento do sistema." Os proposicionalistas costumam afirmar que as imagens são epifenômenos, pois se essas fossem suprimidas, a cognição continuaria a funcionar normalmente, ou seja, mesmo que as

imagens acompanhassem o pensamento, não seria necessário que isto ocorresse; tal fato não teria um papel causal ou funcional no pensamento. Essa postura não é assumida nesse trabalho, uma vez que é admitida a imagem mental como uma representação válida.

habilidades matemáticas - constructos psicológicos complexos, cuja estrutura é constituída por componentes, que combinados, vêm formar as diferentes habilidades matemáticas. (Krutetskii, 1976)

hábito – "Na psicologia cognitiva ele é considerado como um conjunto de rotinas e sub-rotinas automáticas na qual o indivíduo se ocupa e que, em virtude do exercício freqüente, requer pouca informação cognitiva consciente. O processo de aprendizagem envolvido na aquisição de um hábito compreende também o condicionamento clássico, mas não se trata de habituação" (Stratton & Hayes, 2003, p.113).

hardware – conjunto de componentes físicos que associados executam tarefas especificadas em um programa. São exemplos de componentes físicos que compõem um hardware: memória, processador, disco rígido, etc.

imagem auditiva = imaginação auditiva - representação do conhecimento auditivo; uma das formas de imaginação auditiva. (Kosslyn, 1992)

imagem mental - é uma das formas de representação pela qual "criamos estruturas mentais que representam coisas que, presentemente, não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais". (Sternberg, 2000, p.180); a imagem mental refere-se à possibilidade de criação mental com representações de objetos, pessoas e situações, mesmo na ausência do estímulo visual apropriado. As imagens mentais armazenam informações diferentemente do modo verbal, pois possibilitam a manipulação de objetos de modo muito parecido com os próprios análogos reais ou mesmo imaginados (Kosslyn, 1992)

imaginação - representação mental de objetos, de eventos, de ambientes e de outras coisas que não são imediatamente perceptíveis aos receptores sensoriais. (Sternberg, 2000, p.433)

imaginar visualmente - imaginação visual - representação do conhecimento visual; uma das formas de imaginação mental. (Sternberg, 2000)

linguagem de baixo nível (= linguagem de máquina) – linguagem computacional que, ao contrário da de alto nível, está voltada para a máquina. Possui sintaxe de difícil compreensão. São escritas utilizando-se instruções dos microprocessadores. São genericamente chamadas de linguagem Assembly.

linguagem de máquina – linguagem que controla o hardware de um computador.

linguagem de programação* – uma linguagem de programação é como um idioma. É uma série de comandos que são lidos pelos compiladores ou pelos interpretadores e que são usados para executar tarefas.

lógica - "um conjunto de regras por meio das quais conclusões podem ser deduzidas de modo fidedigno de proposições iniciais. A lógica pode ser aplicada sem considerar a verdade das proposições. (...) Considerada um raciocínio perfeito, ela é um ponto de partida para analisar como as pessoas raciocinam, por isso, a lógica é de interesse na psicologia. Ela revela que as pessoas são muito mais sofisticadas e preferencialmente menos rígidas em seu pensamento do que qualquer lógica já inventada e que não há muita similaridade entre os dois processos (Stratton & Hayes, 2003, p.142).

loop – um conjunto de instruções que são repetidas até que uma certa condição seja atingida. Caso haja um erro no programa e essa condição nunca seja atingida, o programa entrará em "loop", ou seja, ficará repetindo indefinidamente as mesmas instruções, consumindo todos os recursos do sistema, até que seja finalizado ou que o sistema seja reinicializado. (Morimoto, C.E. Dicionário Técnico de Informática. www.guiadohardware.net)

mapas cognitivos – representações mentais do ambiente físico, particularmente quanto às relações espaciais entre os objetos no ambiente (Sternberg, 2000, p.181).

memória (como componente de computador) – circuito eletrônico que armazena as informações enviadas por outros dispositivos dos computadores, gerenciados por um programa.

metafísica - aquilo que está além da física, que a transcende. (Japiassú e Marcondes, 1996, p.180)

* Esse termo não foi usado explicitamente no texto deste trabalho.

modelo mental – uma representação interna da informação, que corresponde, de certa maneira, àquilo que estiver sendo representado (percebido). (Johnson-Laird, 1983)

objetos (objetos matemáticos, objetos estatísticos etc) - referem-se a conceitos específicos da área que se tornam ferramentas para solução de certos problemas nas ciências.

observação - é um termo geral que significa qualquer tipo de dado obtido através de eventos, contá-los, medi-los, registrá-los. Métodos de observação são procedimentos sistemáticos e padronizados para se obter dados. Quase todos os métodos têm o objetivo técnico de ajudar o observador ou pesquisador a obter medidas de variáveis. O principal objetivo de "fazer observações", então é medir variáveis. Em ciência, fazer observações significa mais do que olhar as coisas simplesmente. Significa também qualquer aparato usado para medir variáveis. (Kerlinger, 1980).

pensamento (na solução de problemas)- o pensamento toma nesse trabalho uma perspectiva a partir de três idéias básicas: "o pensamento é cognitivo, o pensamento é um processo que envolve alguma manipulação ou um conjunto de operações do conhecimento no sistema cognitivo, o pensamento é direcionado à solução" (Mayer, 1992).

percepção - percepção pode ser definida como um processo através do qual selecionamos, organizamos e interpretamos informações dos nossos sentidos e intuição de modo a compreender o mundo ao nosso redor, atribuindo significado aos fatos. Três fatores influenciam (e até condicionam) nossa percepção: Valores e crenças, modelos mentais e necessidades físicas ou psicológicas. "Um processo pelo qual analisamos e atribuímos significado às informações sensoriais que recebemos. O tema da percepção tem sido amplamente estudado pelos psicólogos e hoje faz parte da psicologia cognitiva. A percepção pode ser diferenciada da sensação, a qual diz respeito à estimulação dos órgãos sensoriais e pode também estar restrita aos órgãos sensoriais, bem como aos primeiros estágios de processamento das informações recebidas. Todavia, não há uma definição de consenso a respeito e alguns teóricos, como Ulric Neisser, considera

a percepção como idêntica aos demais aspectos de cognição e, por isso, fazem pouca ou nenhuma distinção entre os dois processos. A percepção compreende várias áreas, como: percepção visual, percepção da pessoa, percepção auditiva, bem como a percepção de outras formas de informações, como as relacionadas ao objeto, ao tato, à gustação e à dor (Stratton & Hayes, 2003, p.171-172).

premissa – fato ou princípio que serve de base à conclusão de um raciocínio. (Ferreira, 1999, p.1629);

problema - uma tarefa na qual a solução ou meta não é alcançável imediatamente e não existe um algoritmo óbvio para uso. Um sujeito vê-se diante de um problema quando deseja algo que não sabe imediatamente com que série de ações poderá realizar para resolvê-lo (Bruner, 1997; McLeod, 1989; Newell & Simon, 1972; Sternberg, 2000; Polya, 1946)

problema bem-estruturado - problema com um caminho bem-definido para a resolução. (Sternberg, 2000, p.435)

problema mal-estruturado - problema sem um caminho claro e óbvio para a resolução. (Sternberg, 2000, p.436)

processamento da informação - "uma abordagem que analisa os processos cognitivos em termos das manipulações das informações envolvidas. Como o computador tem se tornado capaz de operações progressivamente mais sofisticadas, o processamento de informação tornou-se uma abordagem plausível para a compreensão da percepção, da tomada de decisão, etc. A abordagem está mais diretamente relacionada com os computadores, quando os mesmos são empregados para executar modelos específicos de processos cognitivos - simulação - a fim de examinar seus possíveis funcionamentos na prática" (Stratton & Hayes, 2003, p.182).

processo mental automatizado - qualquer operação mental que ocorre sem a necessidade de iniciativa consciente. (Eysenck, 1997, p.39)

programa de computador – série de comandos que são lidos pelos compiladores ou pelos interpretadores e que são usados para executar tarefas.

programas computacionais de alto nível (=linguagem computacional de alto nível) - linguagem voltada ao ser humano. De fácil compreensão para executar os comandos.

proposição – em relação ao raciocínio dedutivo, uma declaração de fé que pode ser verdadeira ou falsa; em relação à representação do conhecimento, um significado subjacente representando um conceito ou uma relação entre conceitos. (Sternberg, 2000, p.436)

protótipo – um modelo que representa de forma melhor um dado conceito e que compreende um conjunto de aspectos característicos, que tendem a ser típicos da maioria dos exemplos do conceito, mas nenhum dos quais é necessário para que um determinado exemplo seja considerado um caso ilustrativo do conceito.

raciocínio – “processo cognitivo pelo qual uma pessoa pode inferir uma conclusão, a partir de um grupo de evidências ou de declarações de princípios”. (Sternberg, 2000, p.368); "Forma de pensamento que encontra expressão mais completa nas formas lógicas (quer as conclusões sejam válidas ou não). A pessoa que raciocina está habitualmente cônica de que um juízo (a conclusão) depende de outros juízos (as premissas), formulados de acordo com os princípios gerais" (Cabral & Nick, 1979, p.326); Quando as pessoas raciocinam, elas usam informações conhecidas ou assumidas como verdadeiras ou prováveis verdades para apoiar uma crença. (Eysenck, 1997, p.304)

raciocínio categórico - ou **silogismo categórico**; "compreendem uma premissa maior, uma premissa menor e uma conclusão; [...] as premissas declaram alguma coisa sobre a condição de membros categóricos dos termos. [...] cada termo representa todos, nenhum ou alguns membros de uma determinada classe ou categoria. (Sternberg, 2000, p.355)

raciocínio condicional - Ocorre quando envolve afirmações com 'se' e 'então'. A ocorrência de um segundo termo ou afirmação é dependente da ocorrência do primeiro termo ou afirmação. (Eysenck, 1997, p.306);

raciocínio dedutivo - "...inicia-se com um conjunto de afirmações, chamadas premissas, que são usadas para deduzir se alguma outra afirmação, chamada conclusão, é válida". (Eysenck, 1997, p.304)

raciocínio indutivo - ocorre a partir de "observações e experiências que são usadas para apoiar generalizações". (Eysenck, 1997, p.304) As pessoas fazem julgamentos sobre a provável certeza de uma conclusão.

raciocínio linear - ou **silogismo linear**; ocorre em situações que envolvem uma disposição ordenada de termos de um problema. (Eysenck, 1997, p.306); "cada uma das premissas descreve uma relação específica entre dois itens, e pelo menos um dos itens é comum a ambas as premissas. Os itens podem ser objetos, categorias, atributos ou quase tudo mais que possa estar relacionado a alguma coisa. [...] Em um *silogismo linear*, a relação entre os termos é linear, envolvendo uma comparação quantitativa ou qualitativa, na qual cada termo mostra ou mais ou menos de um atributo ou quantidade particular. (Sternberg, 2000, p.353)

raciocínio silogístico - nele, "a tarefa usual é determinar se a conclusão é válida. A conclusão é válida se ela for necessariamente verdadeira quando as premissas forem verdadeiras". (Eysenck, 1997, p.304)

relação - é um elo, uma ligação entre dois fenômenos, duas variáveis ligadas. (Kerlinger, 1980, p.26)

representação do conhecimento – forma mental pela qual as pessoas conhecem as coisas, as idéias, os eventos, etc que existem fora de suas mentes. (Sternberg, 2000, p.436)

semântica – estudo das significações, em linguagem.

silogismo – um argumento dedutivo que compreende uma premissa maior, uma premissa menor e uma conclusão, que pode ser extraída das duas premissas (a qual pode, às vezes, simplesmente, nenhuma conclusão extraída das premissas existentes). (Sternberg, 2000, p.437)

sintaxe – um nível de análise lingüística que se concentra nos padrões pelos quais os usuários de uma dada língua juntam as palavras no nível de oração.

sistema formal automático – dispositivo físico que manipula automaticamente os símbolos de um sistema formal de acordo com as suas regras;

solução de problemas – é um processo cognitivo direcionado a transformar uma dada situação em uma situação alvo quando um método não óbvio de solução não está disponível. Para Eysenck (1997, p.284), essa definição envolve quatro idéias

básicas: primeiro, solução de problema é cognitivo, ou seja, ela ocorre na mente ou sistema cognitivo do resolvidor [...]. Segundo, a solução de problema é um processo, ou seja, envolve manipulação do conhecimento do problema na mente ou sistema cognitivo do resolvidor. Terceiro, a solução de problemas é direcionada, ou seja, pretende produzir a solução para um problema. Quarto, a solução de problema é pessoal, ou seja, a dificuldade de transformar um dado estado de um problema em um estado-meta depende da existência de conhecimento do resolvidor.

Anexo A - Problema das Meias

11)

$\square \square \square \square$	$3+2+1$	} 10
$\square \square \square$	$2+1$	
$\square \square$	1	

• $4+3+2 = 9$

$$C = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

ANALISE COMBINATORIAL

Anexo B - Autorização**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
CAMPINAS - SP**

AUTORIZAÇÃO

Eu, _____,
autorizo a pesquisadora Maria Alice Veiga Ferreira de Souza a utilizar as informações fornecidas por mim em entrevistas, aplicações de problemas de Matemática e testes do tipo lápis e papel, compreendendo, inclusive a solução dos problemas propostos por ela, na pesquisa científica em desenvolvimento na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, sob orientação da Prof^a Dr^a Márcia Regina Ferreira de Brito, utilizando um nome fictício, a fim de resguardar o sigilo necessário. A presente autorização abrangerá os seguintes aspectos:

Autorizo	Não autorizo	Aspecto da Autorização
		Gravação de voz na entrevista.
		Gravação de voz e imagem na entrevista.
		Gravação de voz e imagem na resolução escrita dos problemas - somente mãos e papel.
		Gravação de voz e imagem ao responder o teste do tipo lápis e papel.
		Veiculação pública de voz para fins científicos.
		Veiculação pública de imagem para fins científicos.

Vitória, ____ de _____ de _____

Anexo C - Problemas da série XIX de Krutetskii³⁸

Logic Test

- 1) An ancient problem: A 20-kopek coin weighs twice as much as a 10-kopek coin; there is twice as much silver in it, and it is worth twice as much. Which is worth more: 1 kg of 10-kopek pieces or 1/2 kg of 20-kopek pieces?
- 2) A large pond is becoming overgrown with vegetation. Every day the overgrown area has doubled. On the 8th day it has covered half the pond. On what day will it cover the pond completely?
- 3) In a box there are 16 beads: black, white, and red ones. There are 7 times fewer red beads than white ones. How many black beads are in the box? (Prove that this is the only possibility.)
- 4) Apples are packed in 500 crates. It is known that a crate cannot hold more than 240 apples. Prove that at least 3 crates contain an identical number of apples.
- 5) Forty fish were caught from a pond with a net; each one was marked and thrown back into the pond. On another day 60 fish were netted from the pond, and there were 4 marked ones among them. How can we estimate approximately the number of fish in the pond?
- 6) There are containers of 7- and 11-liter capacity. How can 13 liters be measured with them?
- 7) Three friends visit the library on different days: the first once in 3 days, the second once in 4 days, and the third once in 5 days. The last time they were at the library together was on a Tuesday. In how many days will they again be at the library together, and what day of the week will it be?
- 8) If we write the word *aziat* (Asian) in a code, we write *bikbu* (btjbo). How do we write the word *evropeets* (European) in the code?
- 9) Of 9 bearings that are completely alike in external appearance, one is defective. It is somewhat lighter than the others. Find it with no more than 2 weighings on an ordinary two-tray scale, without weights.
- 10) Twenty identical motor vehicles are parked along a circular road. The total amount of gas in all of the vehicles is enough for only one of them to travel the whole circular road. Prove that at least one of these vehicles could travel the entire road, taking on gas along the way from the other 10 vehicles.
- 11) An ancient problem: Twelve persons were traveling and brought a dozen loaves of bread. Each man brought 2 loaves, each woman brought half a loaf, and each child a quarter of a loaf. How many men, women, and children were traveling?
- 12) Five chess players took part in a tournament. Find the results of all the games if it is known that each person played one game with every other person and everyone earned a different number of points, with:
 - (a) the person in first place having no draws;
 - (b) the person in second place losing no games;
 - (c) the person in fourth place winning no games.

Note: In chess tournaments 1 point is received for a game won, 0 points for a game lost. In case of a draw, each person gets 1/2 point.

³⁸ Krutetskii, 1976, p.150-151.

Tradução dos problemas da série XIX - B de Krutetskii³⁹

Teste de Lógica

1) Um problema antigo: uma moeda de 20-kopek pesa o dobro de uma moeda de 10-kopek. Ela contém o dobro da quantidade de prata e vale o dobro. Qual vale mais: 1kg de moedas de 10-kopek ou 1/2 kg de moedas de 20-kopek?

2) Um lago extenso está sendo coberto por uma vegetação. Todo dia, a extensão da área encoberta dobra de tamanho. No oitavo dia, metade do lago se encontra encoberto pela vegetação. Em que dia o lago estará totalmente encoberto?

3) Uma caixa contém 16 bolinhas: pretas, brancas e vermelhas. O número de bolinhas vermelhas é 7 vezes menor que o de bolinhas brancas. Quantas bolinhas pretas existem na caixa? (Demonstre que esta é a única possibilidade.)

4) Embalam-se maçãs em 500 caixotes. Cada caixote comporta 240 maçãs. Demonstre que pelo menos 3 caixotes contêm um número idêntico de maçãs.

5) Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?

6) Existem recipientes de 7 e 11 litros de capacidade. Como pode-se medir 13 litros com estes recipientes?

7) Três amigos vão à biblioteca em dias diferentes: o primeiro vai uma vez a cada 3 dias, o segundo vai uma vez a cada 4 dias, e o terceiro vai uma vez a cada 5 dias. A última vez que eles estavam na biblioteca juntos foi numa terça-feira. Em quantos dias eles estarão juntos na biblioteca novamente e que dia da semana vai ser?

8) Se escrevermos a palavra aziat (Asian) em um código, escrevemos bikbu (btjbo). Como escrevemos a palavra evropeets (europeu) nesse código?

9) De nove objetos que são completamente idênticos externamente, um é defeituoso. Ele é um pouco mais leve do que os outros. Descubra qual, usando até duas pesagens numa balança de dois pratos, sem utilizar pesos.

10) Vinte automóveis idênticos estão estacionados ao longo de um via circular. A quantidade total de gasolina em todos os automóveis só é suficiente para apenas um veículo completar o trajeto da via circular. Demonstre que pelo menos um automóvel pode completar o trajeto, tomando a gasolina dos outros 19 veículos ao longo do caminho.

11) Um problema antigo: doze pessoas foram viajar e levavam uma dúzia de pães. Cada homem levava 2 pães, cada mulher metade de um pão, e cada criança, um quarto de pão. Quantos homens, mulheres e crianças foram viajar?

12) Cinco jogadores de xadrez participaram de um torneio. Encontre os resultados de todos os jogos sabendo-se que cada pessoa jogou um jogo com cada pessoa envolvida no torneio e que cada pessoa ganhou um número de pontos diferentes com:

- (a) o primeiro lugar não teve nenhum empate;
- (b) o segundo lugar não perdeu nenhuma partida;
- (c) o quarto lugar não ganhou nenhuma partida.

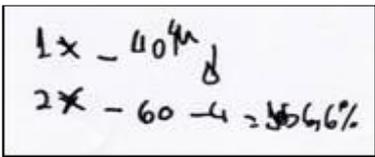
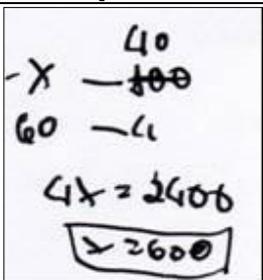
Observação: em torneios de xadrez, recebe-se 1 ponto por partida ganha, 0 ponto por partida perdida. Em caso de empate, cada pessoa ganha 1/2 ponto.

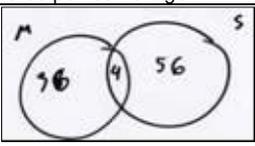
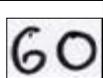
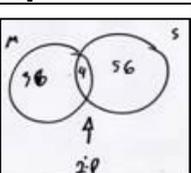
³⁹ Traduzido por Maria Alice V.F.de Souza e revisto pela professora de inglês Maria de Lourdes F. Uyttenhove.

ANEXO D - Transcrições das soluções do problema 3 dos estudantes 1, 3, 5, 9 e 12

Transcrição do Problema 3 - estudante 1	Análises
<p>[o estudante leu todo o texto do problema em voz alta] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?</p>	<p>O estudante fez a primeira leitura do texto do problema, sem pausar;</p>
<p>[recomeçou a ler a 1ª frase do problema] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação [fez breve pausa e disse...] então no 1º dia tinha 40 peixes, todos com uma marca de identificação. [escreveu enquanto dizia essa frase] 1º dia = 40 p</p>	<p>Após a 1ª leitura, buscou identificar os elementos relevantes para a solução; reconheceu que 40 peixes era um dado relevante e que todos os peixes haviam recebido uma marcação; formalizou em linguagem matemática o elemento reconhecido;</p>
<p>[continuou lendo o texto do problema] e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes... [escreveu...] 2º dia = 60p</p>	<p>Não tendo mais o que explorar desse 1º elemento, continuou na busca por mais elementos, reconhecendo que 60 peixes no outro dia também era um outro elemento relevante para o problema; formalizou em linguagem matemática o outro elemento reconhecido;</p>
<p>[disse] desses 60, 4 com a marca de identificação. [e escreveu...] 2º dia = 60 p - 4</p>	<p>Reconheceu um outro elemento do problema, ou seja, 4 com marca surgiram dentre os 60; formalizou em linguagem matemática;</p>
<p>[pausou e disse] olha, é o seguinte... [pausa]</p>	<p>Pareceu fazer um pequeno retrospecto sobre o que havia identificado até ali;</p>
<p>[desenhou o que para ele representava um lago e disse...] um lago, um número x de peixes; o 1º dia uma parte... foram 40 que foram marcados; no 2º dia eles pegaram 60; deixaram 4 marcados; 60 dividido por 4 é 12 vezes o número de marcados.</p>	<p>Sentiu necessidade de se apoiar em uma figura. Fez algumas marcações que representavam os elementos do problema antes reconhecidos. Declarou, após o término da solução, que a figura o auxiliou na busca pelas relações entre os elementos do problema; não percebeu o erro na divisão de 60 por 4, portanto, a proporção encontrada não estava numericamente correta;</p>
<p>[longa pausa] se pegaram 40, marcaram, e depois acharam 4, que é esse daqui dividido por 10 [falou apontando para o número 40 que havia escrito em parte do lago desenhado e o dividiu por 10], então, talvez possa ser 600 peixes no lago. 600 peixes... por quê? Agora, por quê?</p>	<p>O estudante processou a proporção corretamente, mas não soube explicá-la. Desejou formalizar a solução em linguagem matemática.</p>
<p>[bateu a caneta no papel] 12 peixes; 12 vezes 4, 60; isso relativo a um percentual;</p>	<p>Surgiu a confirmação do processamento da proporção ao se referir a um percentual; o erro aritmético persiste;</p>
<p>Vamos fazer o seguinte... [afastou-se daquela parte do papel que desenhou o lago e escreveu em outra parte] 60; deve ser 1,2 por cento; [escreveu]</p>	<p>A relação entre os elementos do problema pareciam estar claras para o estudante e esse esclarecimento pareceu ter ocorrido a partir da figura que desenhou. A formalização em linguagem matemática estaria apoiada nesse entendimento imagético.</p>

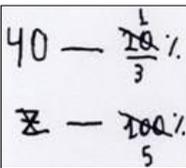
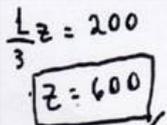
<p>[falou alguns números enquanto os escrevia] 4 dá 60; 5 ... peraf; [fez a divisão de 60 por 4 e declarou o valor]</p>	<p>Percebeu e constatou que 60 dividido por 4 não eram 12, mas 15.</p>
<p>[riscou o 12 e escreveu 15]</p>	<p>Corrigiu a simplificação.</p>
<p>15 por cento; 15 dá 75; 6 dá 90; x; vai sobrar 10; 6,6; vai dar 6 vírgula 666666... [falou algumas palavras soltas não identificadas pela pesquisadora e escreveu...] [disse] 6,6; isso é a porcentagem de peixes que ela tinha marcado no 2º dia; 6,6 por cento.</p>	
<p>[leu todo o problema novamente em voz alta] se marcaram 40 que eram 60 e acharam 4; só que não tem como afirmar que na outra vez eles tiraram 60 e acharam mais 4; [pausa]</p>	<p>O estudante analisou que de uma outra retirada de 60 não se poderia afirmar que viriam 4 peixes marcados, mas como se tratava de uma estimativa, esse era um caminho correto para a solução. No entanto, o estudante desistiu e optou por basear-se no resultado de 6,6 obtido.</p>
<p>deixa eu pensar... 6,6 por cento do que eu peguei...; no 2º dia são marcados; se eu for comparar 6,6 dos 4 que eu peguei diante do outro, eu tenho 10 por cento do que eu achei marcado; eu tenho... se eu fosse pegar os 40 peixes que eu marquei [e escreveu]</p>	<p>Nesse momento, o estudante percebeu que 10% dos marcados surgiram na amostra de 60 peixes; Errou ao associar os 10% aos 40 peixes, declarando 400 peixes erradamente.</p>
<p>e vê... diante dos 4 eu tenho 10 por cento. se for assim, 10 por cento do que eu achei foi marcado; eu ainda não posso estimar 400 peixes, que são 400 peixes.</p>	
<p>[falou algumas relações entre os elementos do problema de maneira isolada] Agora, por que... [pausa] quantidade de peixes x; no 1º dia, no lago, eu tinha x peixes; quando eles voltaram, no 2º dia, eu tinha x peixes menos 40 marcados, quando eu fui pegar eu achei 60 menos os 4 marcados; será que dá para eu fazer assim? [enquanto falava, escreveu...]</p>	<p>Decidiu fazer retrospectiva dos elementos do problema e das relações que lhe eram verdadeiras até o momento. Vale observar que essa escrita é semelhante à primeira, com a diferença de que ele agora pensou em x peixes no lago no 1º dia e escreveu outras relações para o 2º dia.</p>
<p>[fez contas soltas no papel e declarou 96 peixes]; eu tinha x peixes marcados; quando eu voltei lá no 2º dia já tinha 40 marcados, [escreveu] mas eu estou descontando da... esse aqui é o total de números de peixes que não estão marcados [apontou para o que escreveu por último]</p>	
<p>Com mais 40 que eu marquei no 1º dia; tem 96? Então mais 40 eu tenho 136 peixes no total... agora sim, vai dar para provar.</p>	
<p>[falou frases soltas] x peixes no 1º dia, x menos 40... é igual..., não, calma aí... não dá não, o número de peixes no total não pode ser igual ao número de peixes que eu peguei; é uma porcentagem dos peixes que eu peguei; ... tá</p>	<p>Observou erro em sua análise da proporção.</p>

<p>errado [pausa] [leu todo o texto do problema novamente e disse]eu tenho o total de peixes x; desses x no 1º dia eu tirei 40; [pausou, escreveu e falou] no 1º dia eu tenho x peixes com 40 marcados; 40 marcados [repetiu]; o 2º dia eu continuo com o mesmo x peixes da minha amostra de 60 peixes maior que a 2ª e desses 60, 4 foram marcados que equivale a 15... [fez som com a boca querendo dizer que não; riscou o número 15 escrito, escreveu e disse...] 6,6 por cento da amostra. [pausou; respirou fundo 2 vezes]</p> 	<p>Voltou a rever os elementos do problema e suas relações de uma maneira mais rápida; percebeu enganos;</p>
<p>Não sei se vai dar certo... [escreveu]; tinha x peixes; 100%; se eu tirei...; não; se eu tirei 40; se eu tenho 60 deixei 4; 4 vezes é igual a 240. x é igual a 600 peixes; de novo, voltei para cá.</p> 	
<p>Ah, achei; é isso mesmo; é... acho que é isso mesmo.</p>	<p>Fez breve retrospectiva avaliando a lógica tomada e concluiu ter encontrado o resultado.</p>

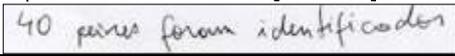
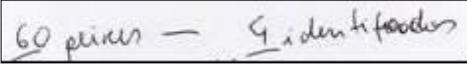
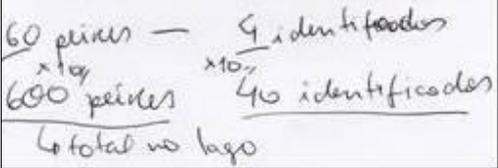
Transcrição Problema 3 - estudante 3	Análises
<p>[o estudante leu todo o texto do problema em voz alta] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?</p>	
<p>Então, vejamos... isso aqui é uma questão simples de conjunto; podemos formar 2 conjuntos [desenhou...] um conjunto e um outro conjunto; um conjunto de peixes com marca, M; marca; e um conjunto de peixes sem marca, S de sem marca; o que é que nós podemos fazer ...</p> 	<p>O estudante 3 entendeu o problema como sendo de conjuntos, ou seja, ele agrupou elementos do problema em conjuntos.</p>
<p>se no 1º dia eu peguei 40 peixes, e eu marquei todos eles, então eu tenho 40 peixes marcados, correto? [escreveu...]</p> 	
<p>no outro dia, eu peguei 60 peixes [escreveu...]</p> 	
<p>só que dentre eles, 4 estavam sem marca; com marca, na verdade, então, teria 60 peixes menos 4 que daria ao todo 56 peixes sem marca e 40 peixes com marca. [escreveu] nesse conjunto todo então, de peixes apanhados com marca e sem marca dentre esses 4, 36 e 56; então eu tenho que 38 peixes mais 4 aqui mais 56 peixes, certo? [completou o diagrama com os números]</p>	<p>Até aqui o estudante pareceu organizar os elementos do problema em conjuntos estanques - peixes com marca e peixes sem marca. A análise fluiu apenas em função da retirada do 1º lote de peixes, ou seja, se 40 peixes foram marcados e, se da retirada de 60 vieram apenas 4 marcados, ele concluiu que o lago deveria ter os 40, mais os 60, menos os 4 já computados nos 40. A falha ocorreu em desconsiderar a possibilidade de se ter mais peixes sem marcas no lago, ou ainda, ignorar o significado das palavras "estimar" e "aproximadamente" no texto do problema que indicam haver certa proporção de peixes sem marca. Se o estudante continuasse sua análise considerando uma 2ª retirada de peixes, talvez ele pudesse ter</p>
<p>38, não, corrigindo, 36; com marca, mais 4 que foram pegos na pesca; na 2ª pesca; esses 4 juntos [fez uma seta apontando para o número 4] com os outros 56 me forma um total de 60 peixes;</p> 	

<p>logo, 40 mais 56, eu tenho, ao todo, um total de 96 peixes no lago. [escreveu...]</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $40 + 56 = 96 \text{ peixes no lago}$ </div>	<p>percebido que nessa 2ª retirada ter-se-ia um número muitas vezes maior de peixes com marca e essa proporção denunciaria falhas nas conclusões anteriores.</p>
--	--

Transcrição Problema 3 - estudante 5	Análises
<p>[o estudante leu todo o texto do problema em voz alta] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?</p>	
<p>Então quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?</p>	<p>Releu o texto do problema na íntegra;</p>
<p>Bom, então 40 peixes foi o que eu peguei primeiro; esses 40 vão representar a porcentagem do todo do lago; aí depois, isso aqui vai ser uma quantia do todo do lago; e 4 é a porcentagem em relação a essa quantia que esses 40 faziam... é... vai ser a mesma porcentagem que esses 40 faziam em relação ao todo; [fez toda essa análise apontando com a caneta para os elementos do problema];</p>	<p>Destacou partes relevantes do problema; associou os dados do problema à porcentagem; um tanto marcados representavam outro tanto de um grupo de peixes; não escreveu nada por enquanto, apenas olhava para o texto do problema e o estudava;</p>
<p>Então a porcentagem que eu tenho dos 40 peixes pro todo, é a mesma porcentagem que eu tenho do 4 pro 60;</p>	<p>relacionou os elementos do problema;</p>
<p>[pequena pausa] então... [releu o problema em voz quase que inaudível] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago?</p>	<p>Releu o problema pela 3ª vez;</p>
<p>Então 40... 40 peixes vai ser o que eu vou usar pra achar a quantidade bruta de peixes [escreveu]; 40 vai ser o x por cento;</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $40 - x\%$ </div>	<p>Até aqui o estudante não havia escrito nada no papel, apenas leu o texto 3 vezes e parecia estar buscando compreender as relações ali existentes; a partir daí passou a escrever os elementos do problema que havia identificado como dados;</p>
<p>[voltou ao texto do problema sem lê-lo e disse...] e esses 60 peixes vão representar ... é... os 100 por cento do lago nessa ocasião. [circulou o número 60 no texto sem riscá-lo] porque aqui eu vou ter o número de marcados que eu encontrei, então, 60 peixes eu vou chamar de 100 por cento;</p>	<p>traçou mais relações percentuais entre os elementos do problema;</p>
<p>[escreveu] 100 por cento do lago [balbuciou palavras soltas] 100 por cento do lago, e... 4, vai ser y por cento que é diferente desse x por cento, mas que na verdade, vai ser o mesmo... dá pra simplificar aqui; simplifica de novo que vai dar 15; então...</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\begin{array}{l} 15 \\ 60 - 100\% \\ x - y\% \end{array}$ </div>	<p>nomeou quantidades por letras do nosso alfabeto, x e y; usou regra de três;</p>
<p>15y vai ser igual a 100; y vai ser igual a 100 dividido por 15; vou dividir os dois por cinco aqui; e aqui eu vou ter 3; [escreveu enquanto falava]</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\begin{array}{l} 15y = 100 \\ y = \frac{100}{15} \frac{20}{3} \end{array}$ </div>	

<p>então, isso aqui vai ser a porcentagem correspondente a esses 40 do todo; [escreveu enquanto falava] então eu digo que 40 equivale a 20 sobre 3 por cento; então x ... z vai ser igual a 100 por cento do lago; posso simplificar esse com esse; vai dar 5 pra cá e pra cá; então, um terço de z vai ser igual a 40 vezes 5; [fez contas em voz baixa]</p>	
<p>eu sei que o z vai ser igual ... a 600 [fez contas em voz baixa] quer dizer que meu lago tem 600 peixes. [escreveu]</p>	

Transcrição Problema 3 - estudante 9	Análises
<p>[o estudante leu parte do texto do problema em voz alta] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. [não concluiu a leitura do problema e escreveu enquanto repetia...] 40 peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago;</p>	<p>O estudante não fez uma leitura completa do problema; destacou "40 peixes";</p>
<p>num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. [repetiu em voz baixa e escreveu] 60 peixes no outro dia...</p>	<p>o mesmo ocorreu com "60 peixes";</p>
<p>entre eles havia 4... num outro dia 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles havia 4 com a marca de identificação, ou seja, dos 40 peixes, cada um recebeu a marcação; [completou a escrita dos 40 peixes...]</p>	<p>depois de repetir trechos isolados do problema, destacou o fato de haver 4 com marcação dentre os 60 peixes e que 40 haviam recebido a marcação;</p>
<p>no outro dia 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede e dentre eles 4 haviam... dentro dos 60 haviam 4 com marcação; [completou a escrita dos 60 peixes...]</p>	<p>repetiu frases soltas do texto e destacou os fatos antes identificados;</p>
<p>como se pode estimar aproximadamente o número de peixes no lago? bom, posso ter 40 peixes vezes... 40 peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos... ao lago. No outro dia 60 peixes foram apanhados no mesmo lago com uma rede; 20 peixes a mais; dentre eles havia 4 com a marca de identificação [pausa] 40... 40...</p>	<p>buscou alguma relação ao declarar "40 peixes vezes..." e desistiu;</p>
<p>[fez contas somente falando] 60 dividido por 4 ... 15... 60 dividido por 4 dá 15 ... [falou e escreveu] dá um total de 100 peixes de um dia pro outro. De um dia pro outro, de um dia pro outro eu tenho 100 peixes ao todo.</p>	<p>dividiu 60 por 4 não porque havia um bom argumento para essa operação, mas porque eram números envolvidos no problema. Somou os 40 peixes com marcação com os 60 pescados num outro dia sem considerar que havia peixes que participaram simultaneamente dos 2 grupos, os de 40 e os de 60; realizou operações matemáticas desconexas e sem sentido na tentativa de compreender alguma relação e, afirmou haver 25 peixes no lago.</p>
<p>Dos 40 peixes no primeiro dia com marcação... menos... total do outro dia dividido por 4... vai dar 40 menos 15 [pausa] peixes... são 100 peixes ... são 100 peixes ao todo... 100 peixes, 4 com marcação; 40 peixes... 60 peixes... 40 menos 60 dividido por 4... 40 menos 15... 40 menos 60 dividido por 4... 40 menos 15... dá 25... 2...3...4... [escreveu a sentença enquanto balbuciava frases soltas]</p>	
<p>estimar aproximadamente o número de peixes no lago... 25 peixes no lago [destacou o número 25]</p>	

Transcrição Problema 3 - estudante 12	Análises
<p>[o estudante leu todo o texto do problema em voz alta] Quarenta peixes foram apanhados em um lago com uma rede; cada peixe recebeu uma marca de identificação e todos foram devolvidos ao lago. Num outro dia, 60 peixes foram apanhados do mesmo lago com uma rede. Entre eles, havia 4 com a marca de identificação. Como pode-se estimar aproximadamente o número de peixes no lago? Vamos lá... 40 peixes foram identificados [escreveu]</p>	
<p></p>	identificou elementos do problema;
<p>foram jogados de volta e depois pegaram 60 peixes [escreveu] [pausa]</p>	destacou o fato dos 40 peixes retornarem ao lago e serem coletados, depois, 60 peixes;
<p>60 peixes foram </p>	destacou o fato de surgirem 4 marcados dentre os 60 peixes;
<p>buscados depois... [pausou e escreveu] dentre eles 4 identificados.</p>	
<p>Como se pode estimar aproximadamente o número de peixes no lago? [pausa] se pra cada 60 eu pegar 4 identificados [sublinhou os números 60 e 4 já escritos] e são 40... são 40 peixes... não... 40 identificados, então seria... eu jogaria a rede ... é... 10 vezes que buscaria 40 identificados, que seria os que eu identifiquei [completou a escrita dos 4 já identificados]</p>	repetiu a pergunta do problema e refletiu a respeito do fato de ter surgido 4 identificados em 60, mas o total de identificados é de 40; logo concluiu que se jogasse a rede 10 vezes, teria, teoricamente, retirado todos os peixes do lago e, assim, teria descoberto o número de peixes ali;
<p>num total de 600 peixes, multiplicar por 10</p>	
<p></p>	declarou 600 peixes como a solução do problema.
<p>Então, é... 600 peixes o lago tem. [escreveu]</p>	

Anexo E - Programas de dois estudantes do 1º período da Ciência da Computação na disciplina de Algoritmos I

02 Aluno Alfa

```

program Exe02;
uses CRT;

var
  A, B, C : real;

begin
  clrscr;
  writeln('DIGITE o primeiro valor:');
  readln(A);
  writeln('DIGITE o segundo valor:');
  readln(B);
  writeln('DIGITE o terceiro valor:');
  readln(C);
  if (A < B+C) and (B < A+C) and (C < A+B) then
  begin
    if (A=B) and (B=C) and (A=C) then
      writeln('o triângulo é equilateral.')
    else
      begin
        if (A > B) and (B > C) and (A > C) then
          writeln('o triângulo é escaleno.')
        else
          writeln('o triângulo é isóceles.');
      end;
  end
  else
    writeln('não formam triângulo.');
```

read key;

end.

Aluno Beta

```

Program Ex 2;
Uses CRT;
Var
VAL1, VAL2, VAL3: real;
Begin
  clrscr;
  WriteLn('Digite o primeiro valor');
  readln(VAL1);
  WriteLn('Digite o segundo valor');
  readln(VAL2);
  WriteLn('Digite o terceiro valor');
  readln(VAL3);
  if VAL1 <> VAL2 <> VAL3 then
    WriteLn('equilátero');
  if (VAL1 <> VAL2) > VAL3 then
    WriteLn('isósceles');
  if VAL1 >= VAL2 >= VAL3 then
    WriteLn('escaleno');
  else
    if (VAL1 + VAL2) < VAL3 then
      WriteLn('não forma triângulo');
    end;
  else
    if (VAL2 + VAL3) < VAL1 then
      WriteLn('não forma triângulo');
    end;
  else
    if (VAL3 + VAL1) < VAL2 then
      WriteLn('não forma triângulo');
    end;
  readkey;
end.

```

Colocar as 3 condições em 1 if.

10

Anexo F - Tabela Krutetskii⁴⁰

Categoria	Grupo	Série		Designação do Teste	Proposta Básica	Proposta Secundária		
		Nº	Nome					
Conjunto de Informações	Percepção (interpretação de um problema)	I	Problemas sem perguntas	A	Aritmética	Percepção das relações e fatos concretos em um problema		
				B	Algébrica			
				C	Geométrica			
		II	Problemas com informação incompleta	A	Aritmética			
				B	Geométrica			
		III	Problemas com excesso de informação	A	Aritmético		Memória matemática	
				B	Geométrico			
		IV	Problemas com elementos interpenetrantes	A	Geométrico	Percepção (isolamento de elementos geométricos e figuras de segundo plano)	Tipos de habilidade matemática	
Processamento de Informação	Generalização	V	Sistemas de problemas de um tipo individual	A	Algébrico	Generalização	Percepção; pensamento resumido no processo de raciocínio	
				B	Algébrico			
		VI	Sistemas de problemas de tipos diferentes	A	Aritmético	Generalização	Flexibilidade de pensamento	
				B	Aritmético			
				C	Aritmético			
				D	Aritmético			
				E	Aritmético			
				F	Aritmético			
		VII	Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato	A	Combinado	Generalização (formando generalizações)	Percepção; memória matemática	
								G
		VIII	Composição de problemas de um tipo dado			A	Aritmética	Generalização (formando generalizações); percepção (percepção de um problema generalizado)
						B	Algébrica	
						C	Geométrica	
D	Lógica							

⁴⁰ Krutetskii, 1976, p.100-102.

Categoria	Grupo	Série		Código	Designação do Teste	Proposta Básica	Proposta Secundária
		Nº	Nome				
Processamento de Informação	Generalização	IX	Problemas de prova	A	Algébrico	Generalização de método de raciocínio; lógica no raciocínio; pensamento resumido no processo de raciocínio	Tipos de habilidade matemática
				B	Algébrico		
				C	Geométrico		
				D	Lógico		
		X	Composição de equações usando os termos de um problema	A	Algébrica	Generalização de método de raciocínio; lógica no raciocínio; pensamento resumido no processo de raciocínio; percepção de relações e fatos concretos em um problema	Flexibilidade de pensamento
		XI	Problemas irrealis/imaginários	A	Combinado	Generalização; percepção de relações e fatos concretos em um problema; memória matemática	
		XII	Formação de concepções artificiais	A	Especial	Generalização de material não-matemático	
	B			Especial			
	C			Especial			
	Flexibilidade de pensamento	XIII	Problemas com muitas soluções	A	Aritmética	Flexibilidade de pensamento; elegância de solução	Pensamento crítico; memória matemática
				B	Algébrica		
				C	Geométrica		
		XIV	Problemas com conteúdos variados	A	Aritmética	Flexibilidade de pensamento	
				B	Algébrica		
				C	Geométrica		
XV		Problemas de reconstrução de uma operação	A	Aritmético	Flexibilidade de pensamento	Tipos de habilidade matemática	
			B	Algébrica			
	C		Algébrica				
	D		Algébrica				
	E		Geométrico				
F	Geométrico						
G	Especial						

Categoria	Grupo	Série		Código	Designação do Teste	Proposta Básica	Proposta Secundária
		Nº	Nome				
Processamento de Informação	Flexibilidade de pensamento	XVI	Problemas sugerindo auto-restrrição	A	Combinado	Flexibilidade de pensamento	
	Reversibilidade de Processo Mental	XVII	Problemas diretos e reversos	A	Aritmética	Reversibilidade do processo mental	
				B	Algébrica		
				C	Algébrica		
				D	Geométrica		
	Compreensão, raciocínio, lógica.	XVIII	Tarefas heurísticas	A	Aritmética	Lógica no raciocínio; independência de generalização	Pensamento resumido no processo de raciocínio
				B	Algébrica		
				C	Geométrica		
				D	Geométrica		
	Compreensão, raciocínio, lógica.	XIX	Problemas com compreensão e raciocínio lógico	A	Matemática geral	Lógica no raciocínio; memória matemática; pensamento resumido no processo de raciocínio	
				B	Lógica		
	Compreensão, raciocínio, lógica	XX	Problemas de séries	A	Numérico	Lógica no raciocínio	Percepção de relações; tipos de habilidade matemática
				B	Figura		
	Compreensão, raciocínio, lógica	XXI	Sofisma matemático	A	Aritmética	Lógica no raciocínio	Flexibilidade de pensamento; tipos de habilidade matemática
				B	Algébrica		
C				Geométrica			
D				Lógica			
Retenção da Informação	Memória Matemática	XXII	Problemas com termos difíceis de lembrar	A	Aritmética	Memória matemática; generalização; percepção de relações e fatos concretos em um problema	
				B	Algébrica		
				C	Geométrica		

Categoria	Grupo	Série		Código	Designação do Teste	Proposta Básica	Proposta Secundária
		Nº	Nome				
Tipologia	Tipos de Habilidade Matemática	XXIII	Problemas com variados níveis de visualização em sua solução	V*	Aritmética	Tipos de habilidade matemática	Generalização; pensamento resumido no processo de raciocínio; flexibilidade de pensamento; memória matemática
				A1	Aritmética		
				A2	Aritmética		
				M1	Aritmética		
				M2	Aritmética		
				G	Geométrica		
		XXIV	Problemas com formulações verbais e visuais	A	Algébrica	Tipos de habilidade matemática	Generalização; pensamento resumido no processo de raciocínio; memória matemática
				B	Geométrica		
				C	Geométrica		
		XXV	Problemas relacionados com concepções espaciais	A	Geométrica	Tipos de habilidade matemática	
				B	Geométrica		
				C	Figura		
				D	Figura		
		XXVI	Problemas que expõe correlações entre visual-pictórico e lógico-verbal componentes da atividade intelectual não-matemática	A	Reconhecimento	Tipos de habilidade matemática	
				B	Descrição		

Anexo G - Conteúdos de Álgebra e Matemática Discreta, Computabilidade, Complexidade de Algoritmos, Linguagens Formais e Autômatos, Compiladores e Arquitetura de Computadores cobrados na prova do ENADE

- a) Arquitetura de Computadores (Sistemas numéricos, Organização de computadores, Conjunto de instruções, Mecanismos de interrupção e de exceção, Barramento, comunicações, interfaces e periféricos, Organização de memória, Multiprocessadores, Multicomputadores, Arquiteturas paralelas);
- b) Computação, Algoritmos e Estruturas de Dados (Desenvolvimento e Complexidade de Algoritmos, Estruturas de Dados Lineares e Não Lineares, Pesquisa e Ordenação, Grafos);
- c) Engenharia de Software (Processos de desenvolvimento de software, Qualidade de software, Técnicas de planejamento e gerenciamento de software, Engenharia de requisitos, Métodos de análise e de projeto de software, Verificação, validação e teste, Manutenção, Documentação);
- d) Ética, Computador e Sociedade (Aspectos sociais, econômicos, legais e profissionais de computação, Aspectos estratégicos do controle da tecnologia, Ética e responsabilidade profissional);
- e) Lógica Matemática e Matemática Discreta (Cálculo proposicional, Lógica de primeira ordem, Conjuntos, Relações, funções, ordens parciais e totais, Álgebra booleana, Estruturas algébricas, Combinatória);
- f) Programação (Paradigmas de linguagens, Metodologias de desenvolvimento de programas, Recursividade);
- g) Sistemas Operacionais (Gerência de processos/processador, Comunicação, concorrência e sincronização de processos, Gerenciamento de memória, Alocação de recursos e deadlocks, Sistemas de arquivos, Gerenciamento de dispositivos de entrada/saída);
- h) Banco de Dados (Modelagem e projeto de banco de dados, Bancos de dados relacional e orientado a objetos, Linguagens de consulta e manipulação de dados, Sistemas de Gerência de Banco de Dados: arquitetura, gerenciamento de transações, controle de concorrência, recuperação, processamento e otimização de consultas, Bancos de dados distribuídos);
- i) Circuitos Digitais (Sistemas de numeração e códigos, Aritmética binária, Circuitos combinatórios, Análise e síntese de componentes seqüenciais e de memória, Circuitos seqüenciais, Memórias, Projeto de Sistemas Digitais: hierárquico e modular, Dispositivos lógicos programáveis);
- j) Computação Gráfica e Processamento de Imagem (Transformações geométricas em duas e três dimensões, Recorte e visibilidade, Transformações projetivas, Definição de objetos e cenas tridimensionais, Modelos de iluminação e tonalização (shading), Texturas e Mapeamentos, Rasterização e Técnicas de anti-serrilhado (antialiasing), Percepção visual humana, Amostragem, realce, filtragem, restauração de imagens, Segmentação de imagens, Compressão e comunicação de imagens, Noções de visão computacional e reconhecimento de padrões);
- l) Inteligência Artificial (Linguagens simbólicas, Resolução de problemas como busca, Esquemas para representação do conhecimento: lógicos, em rede, estruturados, procedurais, Formalismos para a representação de conhecimento incerto, Redes Bayesianas, Conjuntos e Lógica fuzzy, Aprendizado de máquina, Aprendizado Indutivo, Árvores de decisão, redes neurais, algoritmos heurísticos, Computação Evolutiva);
- m) Linguagens Formais e Autômatos, Compiladores e Computabilidade (Gramáticas, Linguagens regulares, Tipos de reconhecedores, Autômatos de estados finitos determinístico e não determinístico, Autômatos de pilha, Máquina de Turing, Hierarquia de Chomsky, Funções recursivas, Tese de Church, Teorema da incompletude de Godel, Classes de problemas P, NP, NP-Completo e NPDifícil);
- n) Probabilidade e Estatística (Eventos e espaços amostrais, Variáveis aleatórias discretas e contínuas, Distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias unidimensionais e bidimensionais, Esperança matemática, Variância e coeficientes de correlação, Teorema do limite central, Teste de hipóteses para médias, Testes do Quiquadrado, Regressão e correlação);

- o) Redes de Computadores e Sistemas Distribuídos (Topologias, sinalização no meio de transmissão, Protocolos e serviços de comunicação, Arquiteturas de protocolos, Interconexão de redes, Planejamento e gerência de redes, Segurança e autenticação, Comunicação entre processos, Tolerância a falhas, Sistemas operacionais distribuídos, Heterogeneidade e Integração, Controle de acesso ao meio, Avaliação de desempenho: teoria das filas, cadeias de Markov, monitoração);
- p) Telecomunicações (Princípios da teoria da informação, Transmissão da informação e modelagem do sistema de transmissão, Transmissão analógica e digital, Técnicas de modulação: amplitude, frequência, fase e mistas, Comunicações sem fio, Comunicação ótica: dispositivos e sistemas). (www.inep.gov.br/superior/enade)

Habilidades e competências cobradas na prova do ENADE

"...possuir visão sistêmica e integral da área de computação; dominar os fundamentos científicos e tecnológicos relacionados à área de Computação; saber modelar e especificar soluções computacionais para diversos tipos de problemas; ter capacidade para iniciar, teóricos, projetar, desenvolver, implementar, validar e gerenciar qualquer projeto de software; ser apto a projetar e desenvolver sistemas que integrem hardware e software; possuir capacidade para aplicar seus conhecimentos de forma independente e inovadora, acompanhando a evolução do setor e contribuindo na busca de soluções nas diferentes áreas aplicadas; ser empreendedor e ter capacidade de alavancar a geração oportunidades de negócio na área; ser capaz de participar de atividades de pesquisa acadêmica, contribuindo para a geração de conhecimento na área; conhecer e respeitar os princípios éticos da área de Computação e ter uma visão humanística crítica e consistente sobre o impacto de sua atuação profissional na sociedade".

(www.inep.gov.br/superior/enade)

Estudante 9

Problema 1 do teste de Krutetskii

$2x + 8 = x$
 $2x - x = 8 - 8$
 $x = 0$

$2x \Rightarrow 16$ (8 dias) $8 \Rightarrow 16$ (8 dias)
 $2x = 32$
 \downarrow
 16 dias

16 32 unidades


O LAGO ESTARÁ encoberto em 16 dias

Problema 2 do teste de Krutetskii

2° 16 bolinhas
 PRETAS
 BRANCAS
 VERMELHAS $\Rightarrow V = 7 - B$

~~10~~ ~~10~~

Problema 4 do teste de Krutetskii

1° 3 amigos
 X: 5° amigo 3 dias $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$ $\frac{X_1}{5}$
 Y: 2° amigo 4 dias $\frac{X_2}{4}$ $\frac{X_2}{4}$ $\frac{X_2}{4}$ $\frac{X_2}{4}$ $\frac{X_2}{4}$ $\frac{X_2}{4}$
 Z: 3° amigo 5 dias $\frac{X_3}{5}$ $\frac{X_3}{5}$ $\frac{X_3}{5}$ $\frac{X_3}{5}$ $\frac{X_3}{5}$ $\frac{X_3}{5}$

dia X_1 / X_2 sempre 2 dias
 dia X_2 / X_3 sempre 1 dia

Problema 5 do teste de Krutetskii

5° 12 pessoas
 1 DUZIA PÃES = 12 PÃES
 C/ HOMEM : 2 PÃES
 C/ MULHER : $\frac{1}{2}$ PÃO
 C/ CRIANÇA : $\frac{1}{4}$ PÃO

	H	M	C
	$\frac{12}{2}$	$\frac{12}{\frac{1}{2}}$	$\frac{12}{\frac{1}{4}}$
	6	$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$	$\frac{12}{\frac{1}{4}} = 48$

QTD HOMENS = 6
 QTD MULHERS = 6
 QTD CRIANÇAS = 3

15 pessoas foram VOTAR.

Estudante 12

Problema 1 do teste de Krutetskii

Logo

9º dia → coberto o logo inteiro

Problema 2 do teste de Krutetskii

vermelha	16 bolinhas	(16)
branca	7 x vermelha	
preta	8	

Problema 4 do teste de Krutetskii

7 dias da semana

1 - 3 dias - 20
 2 - 4 dias - 15
 3 - 5 dias - 12

60 dias → Sábado

Problema 5 do teste de Krutetskii

5 - 1 H - 2 pães = 4 M = 8 C
 3 M - 1/2 pão = 2 C
 1 C - 1/4 pão

2 pães = 12 pães
 2 pães = 12 pães
 1/2 pão = 3 C
 1/4 pão = 6 C = 1,5

3,5 0,5 2

2 pães = 5 H = 10 pães
 1/2 pão = 1 M = 1/2 pão
 1/4 pão = 6 C = 1,5

10 pães 12 pães

ANEXO I
Resultado da análise da habilidade matemática dos doze estudantes por problema

Estudante	HABILIDADE MATEMÁTICA POR PROBLEMA					HABILIDADE MATEMÁTICA
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	
1	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	mais habilidoso	mais habilidoso
2	mais habilidoso	mais habilidoso	menos habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso
3	menos habilidoso	mais habilidoso	menos habilidoso	não foi possível	menos habilidoso	menos habilidoso
4	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	menos habilidoso	mais habilidoso
5	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	menos habilidoso	mais habilidoso
6	mais habilidoso	menos habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	menos habilidoso	mais/menos habilidoso
7	mais habilidoso	mais habilidoso	menos habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso
8	mais habilidoso	mais habilidoso	menos habilidoso	não foi possível	mais habilidoso	mais habilidoso
9	menos habilidoso	menos habilidoso	menos habilidoso	mais habilidoso	menos habilidoso	menos habilidoso
10	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	mais habilidoso	mais habilidoso
11	mais habilidoso	menos habilidoso	mais habilidoso	não foi possível	mais habilidoso	mais habilidoso
12	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso	mais habilidoso

