UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
FACULDADE DE EDUCAÇÃO - FE
DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO
SUBÁREA: MATEMÁTICA

CONCEPÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS BASEADAS EM LOGO E EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Orientador: Sergio Apparecido Lorenzato

Dissertação de mestrado submetida à Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação.

CAMPINAS, agosto de 1994

Para

Caroline, Thiago e Mauro

mais do que meu referencial, meu contexto de vida.

In memorium

À minha querida Mãe, professora, que me estimulou com amor e sabedoria, tornando o ambiente de estudo o meu segundo contexto de vida.

Ao meu Pai, que com seriedade e amor me ensinou a valorizar esse contexto.

AGRADECIMENTOS

Com muito carinho e gratidão, às crianças e aos jovens que participaram do Clubinho de Matemática, em especial à Cristiane Lucia de La Hoz, e Romulo Csokmyai Guimarães, por participarem do estudo prático dessa pesquisa, e por possibitarem-me observá-los em seus processos de "criar".

Ao Professor Dr. Sergio Apparecido Lorenzato pela orientação segura e competente.

Aos colegas e professores do Grupo de Educação Matemática da Faculdade de Educação, em especial às amigas Carmem Lúcia B. Passos e Regina Célia Grando – pelo carinho e amizade, e sobretudo pelas discussões e reflexões delineadas em nossos momentos de inquietação em relação às nossas pesquisas.

Aos pesquisadores e pessoal de apoio do NIED - Núcleo de Informática Aplicada à Educação, e ao Professor Dr. José Armando Valente. A minha presença em um ambiente interdisciplinar, com pesquisadores de diferentes áreas e especialidades, foi de fundamental importância para o amadurecimento das concepções apresentadas nessa pesquisa.

Ao Professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio e à Professora Dra. Beatriz Silva D'Ambrosio pelo incentivo, diálogos e reflexões sobre a Educação Matemática, e mais expecificamente sobre essa pesquisa.

À Professora Dra. Maria Teresa Eglér Mantoan e à Professora Dra. Lucila S. Arouca, pelo incentivo, apoio, e sobretudo amizade em momentos de preocupação referentes a esse trabalho.

"Se quisesse escolher um símbolo votivo para saudar o novo milênio, escolheria este: o salto ágil e imprevisto do poeta filósofo que sobreleva o peso do mundo, demonstrando que sua gravidade detém o segredo da leveza..."

(Italo Calvino. In: Seis Propostas para o Próximo Milênio)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Em linhas gerais, propõe-se nesta pesquisa uma análise da Geometria Plana e Espacial inseridas na Educação Matemática, em uma abordagem histórico-crítica, de modo a proporcionar o esboço de um cenário composto pelas vertentes ou paradigmas que compuseram a Geometria. Utiliza-se para tal o desenvolvimento histórico da Matemática, mais especificamente da Geometria, ao longo das civilizações, inter-relacionando-as com a Geometria da Tartaruga, subjacente ao Sistema Computacional Logo (Papert, 1985 e Reggini, 1985), na forma bidimensional para a exploração da Geometria Plana e tridimensional para a exploração da Geometria Espacial, resgatando-se, assim, o papel de destaque que a Geometria ocupou nos primórdios das civilizações na história da Matemática e que, por vários aspectos, vem sendo relegada a segundo plano no contexto educacional.

Esse cenário, que comporá o corpo teórico desta pesquisa, traçará diretrizes básicas para a construção e elaboração de uma metodologia alternativa baseada em Logo e em Resolução de Problemas, apoiada na nossa concepção teórica embasada na História da Matemática, mais especificamente, na História da Geometria e também na Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget, segundo a complementaridade da Epistemologia e da Psicologia Genéticas.

Nossa proposta metodológica alternativa será implementada em Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, no qual serão ressaltados os processos mentais e computacionais, ou seja, serão analisadas e interpretadas as dimensões funcionais do dinamismo microgenético das condutas cognitivas de dois usuários de Logo, explorando as Geometrias Plana e Espacial no cenário citado anteriormente, em situações reais de Resolução de Problemas. Nessa implementação, pretende-se responder ao seguinte problema:

É possível resgatar ou captar algumas abordagens do Desenvolvimento Histórico da Geometria através do ambiente Logo?

Em uma dimensão mais ampla, o objetivo desta pesquisa será buscar estratégias de soluções viáveis, porém não imediatistas, para o processo ensino-aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, da Geometria, no sentido de que propiciem a transformação da estrutura social vigente, transcendendo e ultrapassando os grandes desafios a que a Educação Brasileira vem sendo submetida no sistema atual de ensino.

ABSTRACT

This research analyses Plane and Space Geometry in Mathematics Education, in a historical-critical approach, so as to provide the outline of a scenario composed by the directions or paradigms which set up Geometry. In order to achieve that, the historical development of Mathematics is used, more specifically of Geometry, throughout civilizations; both Mathematics and Geometry are interrelated with the Turtle's Geometry which underlies the Logo Computation System (Papert, 1985 and Reggini, 1985); used in its bidimensional form to survey the Plane Geometry and in its tridimensional form to survey the Space Geometry, thus redeeming the important role Geometry has played since the beginning of civilizations in the history of Mathematics, and which, for various reasons, has been down-played in the educational context.

This scenario, which will make up the theoretical basis for this research, will set the guidelines for the construction and elaboration of an alternative methodology based on Logo and on Problem Solving. This methodology is supported by our theoretical notion which is based on the History of Mathematics, more specifically on the History of Geometry and also on the Theory of the Cognitive Development of Jean Piaget, according to the complementary aspects of the Genetic Epistemology and Genetic Psychology.

Our alternative methodological proposal will be implemented in a Case Study with a qualitative approach, whereby the mental and computation processes will be pointed out, that is, the functional dimensions of the micro genetic dynamism of the cognitive behavior of two Logo users will be analysed and interpreted, by exploring the Plane and Space Geometry in the previously cited scenario, in real Problem Solving situations. In this implementation, we intend to give an answer to the following problem:

Is it possible to redeem or capture some approaches of the Historical Development of Geometry, through the Logo environment?

In a broader dimension, the purpose of this research will be to search strategies for viable, though not immediate, solutions for the teaching/learning process of Mathematics and, consequently, of Geometry, so as to favor the transformation of the prevailing social structure, transcending and surpassing the great challenges to which Education in Brazil has been submitted to in the present educational system.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

"Enquanto tudo funciona suavemente e conseguimos o que queremos fazendo o que fazemos, não há necessidade de grande esforço de reflexão ou justificação. É quando insatisfação ou dúvida aparece, que um novo nível de reflexão é requerido. Dúvida aparece em uma variedade de situações que são diferentes para diferentes pessoas. Por exemplo, dúvida pode aparecer quando não estamos mais certos sobre o valor de um pensamento, quando somos repetidamente contraditos em nossas crenças ou quando não conseguimos o que queremos fazendo o que fazemos. Genericamente dúvida aparece quando percebemos discrepância entre um estado desejado e um estado corrente. Perceber uma discrepância na maioria das vezes chama por uma mudança e coloca em movimento uma busca por novas e mais acuradas estratégias, para diminuir a diferença."

(Ackerman, 1991, p.1)

No caminhar de nossa jornada como estudante de Matemática, na década de 70, freqüentando as disciplinas oferecidas pela licenciatura da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Rio Claro, guardamos na memória os ensinamentos advindos de algumas das aulas ministradas de modo brilhante pelos "velhos mestres", as quais nos inquietavam a respeito dos mistérios profundos da Matemática, mistérios esses em que nós alunos mergulhávamos profundamente na busca de um desvelar sem fim, que pouco a pouco se elucidavam de maneira concisa. No decorrer dessa caminhada, dúvidas e mais dúvidas surgiram gerando um certo desconforto de nossa parte e uma inquietação constante que nos conduzia a uma busca cada vez mais intensa, no sentido de encontrarmos caminhos que pudessem nos levar a um possível despertar, no sentido de uma mudança de estado, ou de uma transformação.

Vinte anos se passaram desde então e a inquietação, dúvidas e reflexões tomaram uma nova dimensão. Em minha prática educativa, como professora de Matemática, em escola pública, aquilo que apenas incomodava tornou-se um fator essencial na busca de encontrar soluções que pudessem contribuir para fragmentação acadêmica, que aceita o desvínculo entre o trabalho e a produção, entre o cognitivo e o afetivo e o social, entre os aspectos individuais e os aspectos coletivos, pudesse ser superada ou pelo menos minimizada, buscando um novo paradigma educacional.

A fragmentação delineada acima pode ser caracterizada como conseqüência da presença de uma tecnologia sofisticada, decorrente do avanço científico e tecnológico permeando toda a sociedade, exercendo influência e deslumbramento popular e até uma certa descrença, abarcando diversos domínios do conhecimento, tais como: Agricultura, Medicina. Com o desenvolvimento da fotografia, telefonia, rádio, televisão e posteriormente com o advento dos computadores, e mais recentemente, a Telemática – sistema de tratamento de mensagem complementar e integrado com os demais serviços de telecomunicação, um novo termo surgiu: "mídia", e todo esse cenário inquietando, dominando e modificando a imaginação da população, acarretando mudanças profundas na concepção de mundo dos indivíduos, transformando seus comportamentos através dos redimensionamentos de seus sistemas axiológicos, da influência das novas crises sociais, políticas, ecológicas, e científicas; fatores esses que sem dúvida nenhuma se estabelecem e perpetuam nesse momento de transição, momento esse imposto e advindo do avanço da ciência e da tecnologia.

O domínio da ciência e da tecnologia se conciliam e integram-se em um processo de busca e investigação de novas formas de explicação, de novos modos de se compreender a realidade vigente, e assim sendo, discordâncias e conflitos emergem desse processo e das próprias contradições sociais e políticas, resultantes dessa nova maneira de investigação desses processos.

As atividades que dependem do apoio da comunicação no seu dia-a-dia, beneficiando-se delas, e que entretanto nos últimos dez anos não redimensionaram suas estratégias e modos de explicações evidenciam a ausência da integração entre Escola e Sociedade.

A escola pública estaria inserida nesse contexto. Nesse aspecto, nós educadores devemos estar abertos para estas novas formas do saber humano, das novas maneiras de gerar e dominar conhecimento, isto se não quisermos ficar realmente estagnados no século passado. Não pode-se ficar alheio ao fato de que o universo tecnológico que perpassa nosso país está sendo disseminado na medida em que os vários segmentos da sociedade estão incorporando e criando mecanismos próprios para a sua compreensão.

As novas formas de produção e apropriação do saber científico criam inevitavelmente necessidades de novas maneiras de consumo. As próprias explicações e compreensões emergentes do cenário integrador entre a ciência e a tecnologia passam a questionar e a interferir nos modos de produção e apropriação do conhecimento. Assim sendo, evidencia-se um movimento dialético entre as teorias de explicação e de compreensão, e os modos de produção e apropriação do conhecimento.

Ao término do século XX, início de um novo milênio, a questão que emerge em nossas mentes como educadores pode ser expressa quase como uma apelo, mais do que um alerta: Pode-se evidenciar, no presente momento, uma relação dialética entre o sistema educacional e o sistema de produção – das novas tecnologias, do avanço científico que presenciamos nos países de primeiro mundo e que a cada dia se tornam mais presentes em nosso cotidiano?

Infere-se que não. E mais gravemente ainda, percebe-se um hiato entre esses dois grandes segmentos que compõem nossa sociedade, os quais deveriam caminhar juntamente, em uma relação estreita, com objetivos claros e transparentes – proporcionar acima de tudo, qualidade de vida a todos, de uma maneira consciente, justa, e assim, os indivíduos inseridos nesse contexto poderiam criar expectativas, trabalhar com equilíbrio emocional, aspectos esses provenientes de uma sociedade equilibrada, onde os diversos meios de produção se integram para a condução do bem comum.

Nesse cenário de controvérsias é que nos posicionamos, ao postular que torna-se necessário, a cada dia que passa contribuirmos, ainda que modestamente, para reverter a tendência da educação tradicional, tendência essa, expressa no fato de condicionar as pessoas a viverem exclusivamente no mundo exterior, no mundo da ilusão, da fantasia, da competição agressiva, do "sucesso aparente", da especialização extrema, da dominação.

Faz-se necessário orientar as tendências educacionais para o mundo interior, onde a paz *"é o resultado de uma convergência de medidas dependentes da ecologia interior, da ecologia social e da ecologia planetária ... e esta convergência se encontra no estado transpessoal da consciência, cuja paz é uma das manifestações"* (Weil, 1990).

Para o autor referido, uma proposta educacional tende a despertar e desenvolver tanto a razão quanto a intuição, a sensação e o sentimento. O que se busca é a harmonia entre essas funções psíquicas. Enquanto o ensino hoje enfatiza o conteúdo, a aquisição de um conjunto de conhecimentos, a proposta educacional de Weil, demonstra como cada situação de existência constitui uma oportunidade de aprender. "*O contexto global e particular de toda situação assume importância equivalente"* (Weil, 1990). Procurando encontrar um caminho unificador que elucidasse essa equivalência essencial, expressa pela integração citada, e que assim poderia sentir-se os indícios dos vínculos entre Educação e Sociedade, nos propomos com nossa pesquisa contribuir para repensar e redimensionar o momento atual, isto é, proporcionar ao indivíduo condições para que possa perceber a dimensão do desenvolvimento tecnológico e atuar nesse cenário como um ser integrado e consciente de sua função.

Quando nos propomos através de nossa pesquisa delinear reflexões sobre o sistema educacional e o sistema de produção, nos situamos como educadores preocupados com a grande dissociação existente entre esses dois segmentos de nossa sociedade, e assim sendo, devemos em nossa jornada redimensionar nossos métodos de trabalho afim de torná-los mais significativos e reais e dessa maneira possibilitaremos aos indivíduos uma inserção mais efetiva na sociedade, integrando-os de forma ampla no meio em que vivem.

É por essa razão que postulamos o uso de computadores na educação, principalmente nas escolas públicas, pois sua clientela se não usufruir desse novo artefato tecnológico que permeia todos os segmentos da sociedade, não terá quem sabe oportunidade de vivenciá-lo fora da escola, e desse modo, não integraríamos o homem com que é produzido por ele, fora da escola, e sem dúvida nenhuma esses indivíduos não estariam preparados para exercerem um trabalho digno e nem tampouco uma função que pudesse dar-lhes condições de existência com qualidade.

Com as perspectivas delineadas acima, esta pesquisa está assim organizada:

Em um primeiro momento dessa pesquisa será caracterizada a Educação em geral e a Educação Brasileira de uma maneira abrangente, numa perspectiva político-social, a partir de uma visão histórico-crítica, ressaltando o avanço tecnológico do país, com o objetivo de contextualizar a introdução de computadores no Ensino da Matemática e suas implicações pedagógicas em nossa sociedade que, a cada dia, se torna mais informatizada.

Mais especificamente, serão tratados alguns aspectos relativos a reflexões sobre o estatuto contemporâneo da Matemática, do Ensino da Matemática, e do Ensino da Geometria, inseridos na análise histórico-crítica do sistema geral da Educação Brasileira, com o objetivo de nos situarmos, tanto histórica quanto construtivamente, nesse contexto, como educadores matemáticos.

Para tanto, será explicitada a fundamentação teórica desta dissertação através da complementaridade da Epistemologia Genética e da Psicologia Genética da Teoria do Desenvolvimento de Jean Piaget, segundo as abordagens Macrogenética e Microgenética das condutas cognitivas, subsídios teórico-metodológicos para nossa descrição da análise cognitiva e computacional relativa aos Estudos de Casos. Serão ainda delineadas reflexões sobre a analogia estabelecida entre a História da Matemática e o Ensino da Matemática, com o objetivo de esclarecer a utilização da História, como um recurso pedagógico adicional para o Ensino da Matemática.

Nesse cenário, com o objetivo de contextualizar historicamente a Geometria da Tartaruga inerente à Linguagem Computacional Logo, serão enfocados alguns aspectos do desenvolvimento histórico da Geometria, ressaltando as duas vertentes ou paradigmas: forma ou abordagem e conteúdo que compuseram esse desenvolvimento, dando ênfase às diferentes formas ou abordagens que a Geometria sofreu em alguns momentos, ao longo de sua evolução histórica.

Decorrente da contextualização acima delineada, serão abordadas a história e a filosofia da Linguagem Computacional Logo, inserindo a Geometria da Tartaruga (Papert, S.; 1980) e inter-relacionando-a com algumas formas de abordagens da Geometria. Será, ainda, abordada a Metodologia Logo, subjacente à Linguagem Computacional Logo nas suas formas bidimensional e tridimensional.

Em um outro momento, será caracterizada sob vários aspectos uma proposta de ambientes informatizados, que constituirá um cenário propício para a exploração da Geometria Plana e Espacial, com objetivo de viabilizar a implementação da proposta metodológica alternativa desenvolvida nesta pesquisa.

A viabilização da implementação dessa proposta metodológica alternativa, se processará em dois momentos distintos. Em um primeiro momento, será apresentada a descrição de um Estudo de Caso, com um enfoque qualitativo, com um usuário explorando a Geometria Plana através do Logo Bidimensional, resolvendo um problema matemático específico – Teorema de Pitágoras. Em um segundo momento, essa implementação será descrita através da exploração do cenário do Logo Tridimensional e suas potencialidades, e também através de um Estudo de Caso, onde serão analisados os processos mentais e computacionais inerentes às situações-problema desenvolvidas pelo usuário, com a finalidade de elucidar e exemplificar o processo de construção de conceitos geométricos relativos à Geometria Espacial.

Finalmente, serão delineadas algumas inferências, ou mesmo considerações de ordem metodológica, a partir dos dois Estudos de Caso realizados, e desta pesquisa, o que possibilitará aos pesquisadores da área repensar sobre sua prática educativa, visando a um possível redimensionamento no processo Ensino/Aprendizagem da Matemática, e mais especificamente da Geometria.

ANÁLISE CRÍTICA DO SISTEMA EDUCACIONAL

CAPÍTULO 1

ANÁLISE CRÍTICA DO SISTEMA EDUCACIONAL

"O saber hoje é ele próprio um processo de aprender. O que se deve verificar no aluno não é tanto o que ele sabe, como o modo pelo qual sabe e quanto está habilitado a saber, o que ainda não sabe, quer dizer, se aprendeu a aprender, o grau de autonomia que vai adquirindo nessa sua capacidade de aprender."

(Anísio Teixeira)

1.1) Objetivo

O objetivo deste capítulo é situar o leitor quanto à nossa ótica ou visão política e social da Educação Brasileira, de um modo geral, e, mais especificamente, da Educação Matemática, em uma abordagem histórico-crítica, ressaltando alguns aspectos sócio-culturais, políticos, econômicos, filosóficos e científicos, enfocando o desenvolvimento histórico da educação. Nossa intenção é contextualizar a introdução dos computadores no cotidiano escolar, respondendo ao processo de informatização que é uma exigência para o crescimento de toda sociedade em nossos dias. Para tanto, estabelecemos como "pano de fundo" a análise macroestrutural que se segue:

1.2) Problemática Educacional: Estado da Arte

Nessa pesquisa, propõe-se a delinear algumas reflexões sobre a Educação, segundo a ótica política, social, cultural, entre outros fatores que direta ou indiretamente influenciaram e ainda influenciam esse cenário. Para tanto, torna-se necessário analisar-se uma retrospectiva histórica da educação desde a origem das crises que permearam o processo educativo até os dias de hoje.

Nas relações dialéticas existentes entre educação e sociedade, embora a educação seja elemento determinado, não deixa ela de influenciar o elemento determinante e pode fazer isso em dois sentidos contrários: contribuindo para a conservação da estrutura social, ou ajudando na superação dessa estrutura.

Como a manutenção do "status quo" interessa à classe dominante, para, assim, poder manter seus privilégios, essa mesma classe desenvolve uma política no sentido de colocar a escola a serviço dessa conservação da estrutura social .

Nesse sentido, ao longo da história, sociólogos identificados com os valores da dominação, apontaram diferentes funções sociais da escola, todas, porém, voltadas à manutenção da estrutura social.

Por exemplo, segundo Freitag (1980), Émile Durkheim considerava a educação um fato social, e, portanto, um fenômeno coercitivo, no sentido de moldar o homem, de natureza egoísta, consoante os valores e objetivos da sociedade, elementos esses que, obviamente, são impostos pela classe dominante. John Dewey julgava serem as desigualdades sociais naturais e justas e propunha um modelo de sociedade "democrática" em que reinasse a ordem regulada pela competição.

Nesse contexto, a educação seria o mecanismo de implantação da Democracia na sociedade. Uma vez implantado o modelo democrático, a sociedade não deveria mais mudar e a educação deveria ajudar a conservação dessa estrutura social. Mannhein, por sua vez, era de opinião que a elite intelectual deveria planejar um modelo de sociedade democrática e impor esse motivo ao povo, através da educação. Esse modelo funcionaria, então, como técnica social. Talcom Parsons considerava que os princípios básicos da sociedade eram: ordem, harmonia, equilíbrio, continuidade e conservação. A educação para ele era um fator essencial e constitutivo das sociedades.

Assim sendo, a educação seria socialização, ou seja, seria mecanismo básico de conservação social. Becker concebia a educação como um fator de crescimento econômico, assim como o capital e o trabalho. Propunha esse autor que a educação fosse considerada um investimento, sendo paga pelos cofres públicos, o que aliviaria os capitalistas nos gastos com preparo da mão-de-obra.

Houve outros pensadores que procuraram esclarecer os educadores quanto à necessidade de se inverter o papel que a escola tradicionalmente vem desempenhando na sociedade, ou seja, com suas idéias e concepções propunham eles que a escola colaborasse para a transformação da estrutura social.

Por exemplo, Bourdieu e Passeron tinham uma visão histórica do homem e da sociedade e para eles a sociedade de classes é gerada e reproduzida na própria esfera de produção. Desse modo, a função global de todo sistema educacional seria garantir a reprodução das relações sociais de produção. Essa linha de educação é imposta pela classe dominante à dominada, como um ato de violência simbólica, não havendo saída para a escola, pois sua única função possível seria a de ajudar a conservação da estrutura social de dominação.

Nessa mesma perspectiva, Althusser considerava ser a escola o mais importante aparelho ideológico da sociedade capitalista. Gramsci, porém, é mais otimista. Considerando que toda forma de educação é uma estratégia política, ele afirma que o controle do sistema educacional é um momento decisivo na luta de classes. Atribuía à escola uma função dialética: ou conservar ou minar as estruturas capitalistas. Althusser e Gramsci propunham que a educação se voltasse para as transformações das relações sociais, como posteriormente foi explorado por Paulo Freire, no livro Pedagogia do Oprimido. *"Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo."* (Freire, 1987, p.68).

1.3) Educação Brasileira

O que acontece nas sociedades capitalistas não deixaria de acontecer também no Brasil e com a agravante de ser este um país de economia dependente.

De fato, durante toda a história da educação brasileira, há um incentivo colaborando para a manutenção das relações sociais de dominação, sendo que esporadicamente se tem uma tomada de consciência, embora ainda muito frágil, que começa a atingir ínfima parte dos educadores.

Nascida sob a égide do colonialismo português, a sociedade brasileira estruturou-se sobre a economia exploradora, gerando, logo de início, uma sociedade dual constituída de apenas duas classes sociais: os senhores de engenho e os escravos. Para esses últimos não precisaria haver sistema educacional: a educação jesuítica, no início, atendia apenas a classe dos senhores de engenho.

À medida que foi surgindo uma camada social intermediária nessa sociedade dual, houve necessidade de se dar educação ao povo. E daí começou o dualismo em educação: uma escola para o povo e uma para a elite. Obviamente, a escola da elite lutava por ser produtiva, pois atendia os filhos da elite. Ao contrário, a escola do povo deveria ser improdutiva, pois sua função era contribuir para a manutenção da dominação. E assim foi essa escola sempre, da origem à atualidade.

Essa improdutividade sofreu variações, é claro, na dependência dos diferentes momentos históricos, mas a escola do povo nunca deixou de servir à dominação. De início, era proclamado claramente que filho de escravo não precisava de escola. Mais para a frente, no entanto, já havia uma população de classe média que exigia participar da escola da elite. Esses estudantes passaram a constituir um grupo de privilegiados. Porém, quando muito mais tarde grandes transformações sociais nascidas no bojo da Revolução de 1930 fizeram nascer no povo o anseio pela educação dos filhos, o sistema educacional brasileiro foi tomado pela demanda de matrículas, demanda essa que crescia sempre mais. E o Governo não conseguiu dar escolas para todos, efetivamente.

Mas não é justamente o Estado, o representante da classe dominante, que defende os interesses das elites? Surge, então, o impasse:

De um lado, as pressões sociais, clamando: "Escola para todos", preceito democrático que o discurso ideológico não pode fazer calar, sob pena de desmascarar-se. De outro lado, como ficariam os dominantes, se a escola fosse colocada a serviço da transformação da estrutura social? Como manteriam seus privilégios?

Era necessário, pois, uma política de se negar de fato o que se está dando na aparência, ou seja, de se dar escola ao povo, porém, de maneira ineficiente.

A saída para o impasse foi então resolvida pelas classes dominantes por intermédio da escola improdutiva. E ela está aí, hoje mais improdutiva do que nunca.

De fato, para facilitar a manutenção da exploração capitalista é importante para o povo que haja escola formadora de mão-de-obra capaz de construir um imenso exército industrial de reserva que propicie às empresas empregados à vontade e com os salários cada vez mais degradados.

Por outro lado, é importante que tal escola forme apenas "a mão-de-obra" e não "homens cultos", conscientes, livres e questionadores.

Se o povo tomasse consciência de seus direitos, pelo saber, ficaria muito mais difícil para as classes dominantes manterem o atual nível de dominação. Assim, a improdutividade educacional da escola, conforme tão bem explicou a tese de Frigotto (1986), acaba se transformando numa função altamente produtiva para a classe dominante.

Com efeito, tendo o povo a escola improdutiva, não reivindica mais a "escola para todos", já que todos aparentemente têm escola. Ora, isso satisfaz o discurso ideológico burguês que tem, desse modo, base para dizer que todos têm nesta sociedade direitos iguais. Isso é uma farsa, mas a ideologia vive e se nutre de farsas.

Em sendo improdutiva, a escola impedirá que se formem homens cultos e críticos e isso garante, até certo ponto, a submissão do povo à exploração capitalista.

A escola improdutiva oferece mão-de-obra fácil e barata à classe dominante, diminuindo seus gastos e aumentando astronomicamente seus bens. Dessa forma, a escola improdutiva ajuda a manutenção da ignorância, da miséria e do atraso do país. A escola improdutiva produz dominação, na verdade.

Não é, pois, apenas por falta de verba, ou seja, por problemas financeiros, que a Educação Brasileira está cada vez mais degradada em todos os níveis. Há razões econômicas e políticas para isso muito mais profundas que as financeiras. Por exemplo, não há como negar que a informatização assumiu um papel inovador e transformador nas sociedades dos países do primeiro mundo. Hoje, com o advento de novas tecnologias, o computador tornou-se uma ferramenta de uso natural e indispensável para a sociedade. Essa "ferramenta" vai exemplificada desde as grandes máquinas, os super-computadores, instalados nos grandes centros de computação, até as pequenas máquinas, caracterizadas pelos micro-computadores e micro-processadores, presentes nos ambientes de mais comum acesso no dia-a-dia, e mesmo nas residências, complementando os "equipamentos inteligentes", que vão desde os automóveis, telefones, vídeo-games, até os micro-ondas.

No caso brasileiro, a queda das barreiras protecionistas nos levará a um incremento ainda maior no uso de tal tecnologia. Assim, com um atraso no tempo, nossa sociedade caminha para os seus benefícios e, sem dúvida, quem dela se valerá em primeiro lugar será a classe dominante.

Reforçando a concepção acima, ao justificar a Educação Matemática para todos, D'Ambrosio cita, entre vários aspectos em seu livro Etnomatemática, o caráter utilitarista da Matemática como um instrumento para o trabalho. Ele enfatiza e defende o uso de computadores no ensino da Matemática, afirmando:

> *"Creio que um dos maiores males que a escola pratica é tomar a atitude de que computadores, calculadoras e coisas do gênero não são para as escolas pobres. Ao contrário: uma escola de classe pobre necessita expor seus alunos a esses equipamentos que estarão presentes em todo o mercado de futuro imediato. Se uma criança de classe pobre não vê na escola um computador, como jamais terá oportunidade de manejá-lo em sua casa, estará condenada a aceitar os piores empregos que se lhe ofereçam. Nem mesmo estará capacitada para trabalhar como um caixa num grande magazine ou num banco. É inacreditável que a Educação Matemática ignore isso. Ignorar a presença de computadores e calculadoras é condenar os estudantes a uma subordinação total a subempregos."* (D'Ambrosio, 1990, p.17) (grifo nosso).

Esse é um dos aspectos que deverá ser avaliado com seriedade pelos educadores matemáticos e será aprofundado no item seguinte sob várias perspectivas.

1.4) Relevância do Desempenho do Professor no contexto Delineado

É nesse contexto que, como professora de Matemática, nos propomos a pesquisar o ensino da Matemática, resgatando na própria Educação Matemática e no processo ensino-aprendizagem dessa ciência, e mais especificamente da Geometria, as necessidades sociais deste momento histórico que a sociedade brasileira vem vivendo, tentando, se não reverter a estrutura social vigente, pelo menos engrossar as fileiras dos que se empenham hoje na transformação social.

Sabemos que a Matemática é apenas uma das disciplinas de todo um currículo, e que a educação sozinha jamais conseguiu mudar a estrutura econômica de dominação e mais, não é ela a principal força para essa transformação. Porém sabemos também que em um processo de evolução, de mudanças, o processo educativo terá um papel altamente significativo no conjunto dos fatores determinantes de transformações. No entanto, esse processo é tão mais valioso quanto mais é compreendido como uma parte de um todo que só tem sentido na medida em que integra esse todo. A educação não é um suplemento da sociedade, mas faz parte da política voltada ao social que a sustenta.

Nesse sentido, D'Ambrosio (1990) ao expressar-se sobre um modelo educacional que possibilite o desenvolvimento pleno do indivíduo em todas suas potencialidades, integrando-o de forma justa na sociedade, postula que:

> *"(...) Não será apenas através de uma burocracia bem estruturada, democraticamente elevada ao poder, e de indivíduos bem treinados, aos quais se dará direito e capacidade, melhor dizendo habilitação para trabalhar, que se construirá essa nossa sociedade."* (p.52) (grifo nosso).

Assim, o modelo educacional em favor de uma reconstrução social, necessariamente, passaria pela:

> *"(...) reconstrução do próprio conhecimento científico e conseqüentemente da conceituação de progresso, de modernização e de desenvolvimento, sobre os quais repousa toda a estrutura social vigente(...) Não será mediante práticas "ducativas" (de ducare = conduzir) que se atingirá isso, mas através de práticas verdadeiramente "exducativas", tirando para fora de cada indivíduo o que seu potencial criativo oferece. A "ducação" que leva ao domínio de uma bateria de conteúdos é o mecanismo classicamente adotado para subordinar comportamentos e modelá-los para servir, sem qualquer crítica, a uma ordem pré estabelecida."* (D'Ambrosio, 1990, p.52) (grifo nosso).

Então, nesse contexto, o que podemos fazer como professores-educadores de Matemática seria contribuir, ainda que modestamente, para o processo de transformação social. Acreditamos que, se o Ensino da Matemática e o Ensino da Geometria forem abordados com o uso de novas tecnologias ou novas estratégias metodológicas, esse fato tornará a escola um pouco mais produtiva para o povo e menos improdutiva para a elite. Não estamos pensando simplesmente em estratégias metodológicas, em técnicas, mas no processo global de ensino que vai possibilitar a compreensão e explicitação dos conceitos matemáticos e o seu domínio por parte dos educandos, a partir do cotidiano do aluno e de suas necessidades sociais, independentemente do nível de escolaridade.

Propiciar essa relação dialética entre a Matemática e a vida real do educando, deveria ser parte consciente e efetiva na dinâmica dos professores em sala de aula. Dessa maneira, nos tornaríamos não simplesmente professores de Matemática, mas educadores matemáticos, contribuindo para o desenvolvimento e a formação integral do ser humano em todas as suas potencialidades.

Nesse contexto, na medida em que se propõe Educação produtiva e com qualidade "para todos", e não somente para alguns privilegiados, segundo a abordagem dada a esse capítulo, pode parecer à primeira vista ao leitor utopia e/ou ingenuidade de nossa parte a proposta do uso de computadores no Ensino da Matemática, e mais especificamente do uso do Logo no Ensino da Geometria. Porém, torna-se importante e necessário ressaltar que partimos da premissa de que a Informática passa, pouco a pouco, a fazer parte da vida diária das pessoas, e em uma sociedade moderna está cada vez mais ganhando espaço na área do ensino.

Conscientes dessa realidade que nos cerca, como educadores matemáticos, não podemos ficar alheios ao desenvolvimento e avanço tecnológico que perpassa pelo nosso país. Todavia, a introdução da Informática no sistema educacional deve ser tratada com muita cautela. Constata-se que muito software educativo foi criado visando a reforçar a destreza computacional. No Brasil mais especificamente, é usada a Instrução Programada ou "Instrução Assistida por Computador" - CAI, CAD/CAM entre outros, onde a relação do aluno com o conhecimento se processa de uma maneira passiva, controlada, não havendo nem mesmo a interação aluno-objeto do conhecimento. Nesse sentido, esses novos artefatos em nada têm modificado o sistema tradicional de ensino. É como se as páginas do livro passassem para a tela do computador.

Isso significa que não basta a adoção de novas técnicas ou de um novo artefato tecnológico, importa o uso que dele fazemos. Devemos pô-lo a serviço do educando. Ele, sim, deverá interagir com a máquina, criar programas que possam resolver os problemas de sua vida diária, propiciando seu desenvolvimento pleno como cidadão. De outro modo, o aluno terá um envolvimento muito restrito com o domínio da Matemática e continuará um ser passivo como nas escolas tradicionais e não será o construtor de seus próprios conhecimentos matemáticos e geométricos.

Sabemos que em muitas escolas brasileiras, e mesmo em nível internacional, softwares cada vez mais sofisticados são usados como meros recursos didáticos, sem uma postura teórico-filosófica que lhes dê consistência. Sendo assim, não atuam efetivamente no processo ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois não existe um envolvimento por parte dos alunos e nem mesmo uma interação, ou seja, somente prevalece o aspecto "utilização" do artefato nesse contexto.

Então, a questão que se coloca como uma possível reflexão seria: Como adequar o uso dessa nova ferramenta ao processo de ensino da Matemática, tomando-se o devido cuidado para que esta não seja tratada como "modismo", ou como um novo recurso metodológico que propicie e estimule a aprendizagem de algoritmos e técnicas mecânicas de resolução de problemas, sem significado construtivo para os usuários?

Tentando delinear a reflexão acima proposta, reportamo-nos a Vitale (1991) que, além de reforçar as concepções anteriores, afirma que:

> *"As mesmas forças políticas, industriais e comerciais que conseguiram impor a presença dos computadores na escola e a introdução da Informática no currículo escolar tentam, cada vez mais, fazer desaparecer o aspecto "programação" para privilegiar o aspecto "utilização" de softwares didáticos, livros eletrônicos, etc... nas aulas."* (grifo nosso).

Fica claro que as "forças políticas" citadas por Vitale não estão preocupadas com o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico do usuário, mas o que prevalece é a instrução de estratégias e algoritmos que apenas o tornam um mero usuário que utiliza esse recurso tecnológico sem com ele interagir.

Inerente a esse fato, existe um enorme mercado potencial, isto é, um grande interesse comercial e profissional com relação ao uso dos computadores nas escolas. Além disso, um outro aspecto a ser observado seria a possibilidade de se limitar uma área específica do conhecimento a "especialistas" (os únicos capazes de comandar a passagem da formulação de um problema à sua solução informatizada). E, em uma análise mais técnica e radical, de acordo com o autor acima citado, há a possibilidade de uma hierarquização de "métodos", que serão considerados "os ótimos", "os únicos" capazes de transformar a descrição verbal de um problema em uma representação algorítmica perfeita, o que será, sem dúvida nenhuma, obra dos "especialistas".

Portanto, constata-se novamente que, segundo o exposto acima, somente alguns teriam acesso à dimensão do desenvolvimento que perpassa a sociedade atual. Novamente a classe dominante seria privilegiada.

Não poderíamos deixar de alertar e inferir que, aceitando essa "divisão do trabalho" no contexto educacional, a escola estaria acrescentando um "gadget"[1] a mais em seu arsenal de jogos didáticos; não estaria de modo algum enriquecendo e mesmo promovendo o desenvolvimento de seu ambiente cognitivo ou ambiente de aprendizagem.

Nesse sentido, convém recorrermos à reflexão exposta por Gatti (1992), quando discute a questão da Informática na sociedade moderna, ressaltando a escassez da informação existente entre as questões relacionadas com a tecnologia e a informática no contexto educacional:

> *"Essa má informação e, até, a rejeição acrítica que gera, tem feito com que tratemos superficialmente a questão e tem nos levado a discussões redundantes que obscurecem as possibilidades educacionais dos objetos tecnológicos e informacionais. Parece-nos com efeito que os educadores não sabem o que é tecnologia, não sabem o que é uma filosofia tecnológica, e não sabem o que é lógica da informática. Então nós educadores estamos muito afastados desse universo, não por culpa nossa, mas por culpa de toda uma estrutura de formação que temos vivido. Quando temos, por exemplo, que discutir a relação de educação e trabalho, ficamos discutindo abstrações etéreas, porque não sabemos exatamente o que é esse mundo do trabalho, da técnica, da tecnologia. O que sabemos, por exemplo, da vida e da produção em uma fábrica de plástico? E é esse mundo que está aí."* (p.156) (grifo nosso).

Ressalta, a autora acima, ainda, que esse universo tecnológico traz para o mundo uma nova linguagem, e, portanto, novas formas de pensar, e que novas abordagens de como se refletir sobre essas formas de pensar não estão sendo atualizadas por parte dos educadores. Desse modo, explicita que refletir com mais consistência sobre como deverá ser a formação de professores para o Século XXI, implica um movimento de apropriação dos artefatos que o próprio homem está produzindo fora da escola, e que se deve deixar que a escola seja penetrada por essas novas formas de produção e, conseqüentemente, por essas

[1] O Termo "gadget" não será, traduzido, por não se encontrar nenhum termo na Língua Portuguesa que retrate com precisão seu significado, no sentido em que aqui o tomamos.

novas formas de pensamento. Somente dessa maneira estaremos propiciando ambientes de aprendizagem contextualizados a partir do exercício pleno da cidadania aos nossos alunos.

Nesse contexto, a autora acima referida diferencia a informática da micro-computação, quando explicita que: *"(...) A informática é um universo de reflexão sobre a possibilidade de produção, estocagem e disseminação da informação."* (p.157).

Assinala ainda que, se ficarmos distanciados dessa área do saber humano, que é a informática, estaremos desconhecendo o que foi produzido e veiculado através de linguagens e ideologias específicas que possibilitam a criação de novas condições para a comunicação e para as relações humanas.

Reforçando as concepções acima, acredita, ainda, que:

> *"O domínio ou, pelo menos, a possibilidade de desenvolver uma compreensão sobre os caminhos que estão sendo percorridos pelas ações humanas na direção de simplificar processos, de condensar processos e de transmitir e estocar informação, deveria se fazer acessível aos educadores. Estes, por sua vez, necessitam buscar e/ou estar prontos para receber essa formação. Precisamos, nós educadores, abrir nossas portas para um universo novo, para uma formação renovada, como também trazer para a educação profissionais que tenham um outro tipo de informação e que possam trazer a sua contribuição, mas no sentido de podermos conviver com essa nova lógica que está se instalando, justamente para trazê-la a nosso serviço e não nos sujeitarmos a ela por desconhecimento...*" (p.157) (grifo nosso).

Ainda nesse sentido, a referida autora postula que:

> *"(...) Porque podemos pensar que não precisamos dominar determinadas formas de tecnologia, nem a lógica dessa tecnologia, porque podemos manipulá-las – aí estaremos no mundo da técnica. Mas estaremos sendo manipulados porque poderemos manipular, sim, mas segundo as regras de outrem que nos impõe formas de pensar e agir mecânicos, uma vez que não compreendemos o processo."* (p.157) (grifo nosso).

Ao propor o uso da Informática na Educação, como está sendo proposto nesta pesquisa, e mais especificamente na Educação Matemática, deve-se ressaltar que não se espera com isso que, de um momento para o outro, que todas as escolas brasileiras ensinem Matemática através de computadores, em especial com Logo, como uma única estratégia metodológica capaz de propiciar o aprimoramento do ensino da Matemática, mas almeja-se que, através desta pesquisa, abram-se os horizontes, surjam inferências, hipóteses para que novas pesquisas repensem o ensino da Matemática dentro desse avanço tecnológico.

Nossa responsabilidade, como educadora em uma sociedade democrática em desenvolvimento e transformação, vai além de reproduzir o passado e os modelos atuais. Nossa preocupação deverá atingir um futuro, pois já sabemos que o saber, a competitividade e a qualidade caminham juntos, e esses fatores que poderão levar o indivíduo, sem dúvida nenhuma, ou ao poder ou ao subemprego; ao sucesso ou ao fracasso.

Metodologicamente, se analisarmos a Matemática sob a ótica político-social, nas escolas de 1º, 2º e 3º graus, isto é, como está realmente se processando o ensino/ aprendizagem da Matemática, constatamos, nesse contexto, que a Matemática é uma das disciplinas que representam em si uma fonte de poder devido à estrutura inerente aos seus conteúdos. Esse poder, concebido enquanto relação social, como poder no cotidiano da escola e da classe social, como poder no exercício da cidadania e na estrutura social, ainda que pareça estar ao alcance de todos os educadores, serve apenas a alguns privilegiados, que possuem consciência política, filosófica e social para exercer plenamente e com uma didática efetiva sua função como professor-educador.

Uma das razões apontadas algumas vezes com muita procedência a nosso ver, para o insucesso da Matemática Moderna e conseqüentemente da Matemática, consiste na inobservância da inter-relação e da estrutura inerentes aos conceitos matemáticos, desvirtuados pelo ensino, em função do momento histórico-político da década de 60.

Por exemplo, nesse cenário de plena ditadura militar, os professores não estavam preparados para essa "nova" ou "moderna" forma de ensinar conceitos matemáticos inerentes à Teoria dos Conjuntos. Além disso, ao ensinar as estruturas básicas das relações de pertinência, de inclusão e outras, estariam utilizando uma linguagem matemática "imprópria", – ou, por que não dizer, "proibida"? – nesse contexto político. Ainda há o fato de que, se os próprios professores tivessem consciência do poder intrínseco aos conceitos matemáticos, o ensino poderia propiciar um ambiente desfavorável ao contexto político do momento histórico vivido pelo país.

Reportando-nos à década de 30, sabe-se que desde então foi tentada uma unificação da Matemática através da reconstrução de vários de seus ramos, utilizando-se a Teoria dos Conjuntos, ou seja, procurou-se dar uma explicitação da Matemática de modo a torná-la compreensível aos olhos dos matemáticos. O entendimento da Matemática passou, assim, a se dar através das estruturas e teorias algébricas.

Essa visão estruturalista estava em consonância com o pensamento dominante da época. No currículo enfatizou-se a álgebra em detrimento da Geometria Euclidiana. Instaurou-se a Matemática Moderna. Porém, a unidade Matemática não foi encontrada na Teoria dos Conjuntos.

Neste contexto, reportamo-nos a Castelnuovo (1989), quando nos traduz que em plena década de 50, mais precisamente em 1959, quando se realizou o Congresso em Royaumont, na França (cuja finalidade era refletir sobre uma possível transformação no Ensino da Matemática) a autora aponta para uma mudança que ocorreu efetivamente. *"(...) toma-se a posição do matemático, Jean Dieudonné, que marca uma ruptura com o ensino tradicional da Matemática."*

A autora acima enfatiza ainda este **"grito"**, convertido depois no lema ***"chega de Euclides"***, quando Dieudonné convence os participantes do congresso a serem porta-vozes, em seus países de origem, da necessidade de abandonar o ensino euclidiano, substituindo-o por uma Matemática mais real, mais motivadora, que corresponderia à investigação moderna, própria das reflexões da época. Nesse sentido, prosseguindo ao que havia sido deliberado na França, em um Seminário com vários especialistas, realizado no ano seguinte, 1960, na Iugoslávia, procedeu-se à redação de um "volume" com subsídios e idéias a respeito dos novos programas para o ensino de Matemática.

Entretanto, essa **unidade** não foi alcançada, por conta de alguns matemáticos, os quais pensavam que, para tal, haveria necessidade de se adaptar a escola à obra fundamental do grupo Bourbaki. Foram produzidos alguns livros-texto na França e na Bélgica, cujos conteúdos continham essa adaptação.

Contudo, a autora referida acima ressalta que, ao procederem dessa maneira, esqueceram esses estudiosos de considerar as idiossincrasias dos alunos e desse modo a riqueza intuitiva foi "sufocada" por uma abstração demasiado avançada, sem mesmo considerar que **"abstrato"** remete à forma latina **"extractu"**, com um sentido dinâmico de **"extrair do concreto"**.

Com essa abordagem, os alunos precisavam estudar teorias gerais sem relação direta com a realidade, suprimindo-se, assim, a capacidade de observação e diálogo, pois as crianças não tinham condições de participar de discussões, dado que não compreendiam em profundidade as noções e conceitos que lhes eram ensinados.

Constata-se desse modo que, segundo essa ótica, foi eliminada toda relação entre a Matemática da escola e a Matemática do mundo em que vivemos. Entretanto, esse ensino baseado no **"conjuntismo a todo preço"**, como dizia o matemático Freudental, foi ganhando espaço na maioria dos países.

Castelnuovo (1989) ainda faz um alerta nesse contexto, sob a ótica político-social, quando diz que:

> *"O conjuntismo se difundiu também em países onde os povos padecem de fome e sede, como Nigéria, porque se pensou que as colônias também deviam modernizar-se, era um "presente" dos países civilizados para os países do terceiro mundo. A Nigéria, hoje livre, continua com a influência dos programas franceses. Pode ser que, desta forma, os poucos que estudam considerem menos trágica a realidade de seu país."* (grifo nosso).

Nesse sentido, Prado (1990) esclarece:

> *"É importante para o matemático e para o estudante de Matemática procurar uma visão unificada da Matemática. Uma visão do todo, onde os diversos ramos da Matemática estejam ligados entre si, permitindo ao professor dar a seus alunos um ensino em que os tópicos em estudo não sejam vistos isoladamente, mas tecidos historicamente."* (p.15) (grifo nosso).

Na nossa concepção, essa integração e essa estruturação devem ser projetadas em um contexto cultural, social e político mais abrangente, no qual esse todo possa ser articulado pelas relações sociais entre professor-educador e aluno.

Nessas relações sociais é que esse poder intrínseco à Matemática deverá ser mediado não simplesmente por modelos obsoletos, que não contribuem de modo significativo para o desenvolvimento e transformação do indivíduo, mas por metodologias alternativas em que o ser em formação vivencie novos processos educacionais. Sem a educação escolar, com qualidade, criança ou o jovem talvez não tivessem oportunidade de crescer no saber matemático, importante para sua qualificação profissional em qualquer área. Assim sendo, se o saber matemático não for vivenciado nesse contexto, dificilmente será em outros, o que restringiria a exploração das possibilidades inerentes ao desenvolvimento científico e tecnológico de uma sociedade .

Explorar todos "os possíveis" no âmbito do contexto ensino/aprendizagem deveria constituir necessariamente uma obrigação para a política educacional, um desafio para nós professores e por conseguinte um incentivo para os nossos jovens descobrirem, senão todo o universo que permeia a educação, pelo menos o necessário nesse processo para sua formação básica, como ser integrante de uma sociedade que se transforma a cada dia.

Enfocando a educação como possibilidade, descobre-se que o fenômeno educativo tem limites e sua eficácia provém exatamente do fato de ser limitável, limitado ideológica, econômica, social, política e culturalmente. Nesse sentido, torna-se oportuno recorrermos a Paulo Freire, quando em um diálogo com Moacir Gadotti diz:

> *"(...) Então eu diria aos educadores que estão hoje com dezoito anos, e que, portanto, vão entrar no outro século no começo de sua vida criadora, que, mesmo reconhecendo que a educação no outro século não vai ser a chave da transformação do concreto para a recriação, a retomada da liberdade, mesmo que saibam que não é isso, estejam convencidos da eficácia da prática educativa como elemento fundamental no processo de resgate da liberdade."* (Gadotti, 1989, p.138) (grifo nosso).

Caberia neste momento uma reflexão de nossa parte, explicitada em um questionamento:

Será que somente o fato de se ensinar Matemática segundo essa ótica, tornaria a escola mais produtiva e o saber matemático um fator de abertura para "novos possíveis" e um fator de disseminação do conhecimento propiciando dessa forma uma educação libertadora?

Não cremos que somente isso baste. A Matemática sempre fez parte do currículo e o ensino está como já mencionamos: aquém do ideal. O uso de novas tecnologias, por exemplo, de computadores, não poderia colocar os alunos de classes menos privilegiadas em contato com as ferramentas usadas em uso em grande escala nos países do primeiro mundo? Em caso positivo, os computadores é que serão um fator de abertura para novas possibilidades. Nesse caso, o ensino deverá propiciar aos alunos a exploração dessa tecnologia.

Hoje o computador faz parte do cotidiano nos países do primeiro mundo. Há esforços no sentido de colocar as crianças e os jovens em contato com o que há de mais desenvolvido para que eles não percam a dimensão do desenvolvimento.

Grandes centros de computação nos Estados Unidos, como o do Laboratório Nacional de Los Alamos criam facilidades para as crianças e para a comunidade utilizarem seus equipamentos. Os super-computadores viram "brinquedos" para as crianças (Los Alamos, 1992).

Nesse sentido, no nosso país, constata-se que várias escolas têm se preocupado com os aspectos acima delineados.

Algumas escolas privadas do estado de São Paulo têm adotado inovações no currículo, oferecendo matérias optativas de forma extra curricular, tais como: ecologia, xadrez, capoeira, rádio, vídeo, educação sexual e informática. Esse fato evidencia-se através do convênio entre o Grupo (associação de 48 escolas particulares) e a Escola do Futuro, projeto que existe há cinco anos na USP, que intensificou o uso da informática no aprendizado (Folha de S. Paulo, 26/04/94, p.3-4).

Constata-se também a introdução da informática em algumas escola públicas, como por exemplo, o Projeto EDUCOM, estabelecido em 1983, e iniciado em 1985 entre o Núcleo de Informática Aplicada à Educação - NIED-UNICAMP, e duas escolas estaduais, EEPSG João XXIII, em Americana e EEPSG Tomás Alves, em Sousas, distrito de Campinas.

Após 10 anos de trabalho e pesquisa desenvolvidos nesse Projeto, Valente (1993b) afirma que:

> *"Finalmente, é possível perguntar se <u>os objetivos</u> do Projeto têm sido <u>atingidos</u>. Em grande parte sim. Por outro lado, ainda <u>existe um caminho muito longo</u> a ser percorrido. Por exemplo, <u>a qualidade do ambiente Logo</u> de aprendizado está aquém do ambiente que desejamos. É inquestionável que houve um enorme progresso se comparado com o que existia no início do Projeto, e a tendência é o aprimoramento cada vez maior. Entretanto, pode ser que nunca atinjamos o verdadeiro ambiente Logo descrito nos livros. E isso não é o mais importante. O <u>importante</u> é que estamos desenvolvendo algo em que nossos professores acreditam, algo que é <u>fruto do trabalho</u> deles e que é <u>gerido</u> segundo todas as <u>dificuldades impostas</u> pela <u>rede pública</u> de ensino. Somente assim o <u>computador</u> terá mais chances de <u>entrar na escola pública</u> e de sobreviver como uma <u>alternativa metodológica</u> do <u>processo ensino-aprendizagem</u>."* (p.94) (grifo nosso).

O que devemos enfocar nesse momento, na qualidade de educadora, é que o fato de as crianças aprenderem Matemática com o uso de computadores **desmitifica** tanto as máquinas como a própria **Matemática**. E também há a oportunidade do uso dessa tecnologia na escola e não somente em cursos pagos a que nem todos teriam acesso, propiciando dessa maneira o pleno desenvolvimento do ser humano e sua integração na sociedade. Então, nesse sentido, a Educação recebida pelos jovens passaria a ter um caráter não só conteudístico, mas, acima de tudo, se constituiria em uma força determinante na sua formação e no seu desenvolvimento integral e pleno como ser humano.

Sendo o processo ensino-aprendizagem um dos fatores determinantes para o desenvolvimento do ser humano, consoante a teoria piagetiana[2], deve-se pensar sobre o que dentro da tecnologia poderia propiciar esse desenvolvimento. Seria somente a introdução de computadores, sem nos preocuparmos com a Linguagem de Programação? Não, mas como analisar uma linguagem computacional como forma de expressão do conhecimento e, conseqüentemente, como possibilidade do desenvolvimento do ser em formação?

Parte-se da premissa de que expressar o conhecimento do sujeito em um determinado domínio, como, por exemplo, expressar conhecimentos matemáticos e geométricos em diferentes situações-problema, requer uma linguagem computacional adequada a esse contexto. Na nossa concepção, a linguagem computacional **Logo**, com a arquitetura matemática com que foi criada, e a filosofia subjacente a ela, com o micromundo da tartaruga, constitui-se em um ambiente de aprendizagem propício para explorar e construir conceitos matemáticos e geométricos. Esse aspecto será detalhado no Capítulo 5, onde se tratará desse assunto.

Em essência, é essa filosofia, essa linha de pensamento, delineada nesse capítulo, que permeia todo o Projeto I (Anexo I) e toda esta pesquisa cujo efeito social pretende-se que seja amplo e transformador. Com uma linguagem computacional acessível e propícia a todos, o exposto acima se tornaria possível.

Com a linguagem computacional Logo e sua filosofia subjacente, o processo ensino-aprendizagem realiza-se de maneira diferente do ensino tradicional. Trabalham-se aspectos lógico-matemáticos; desenvolve-se a **criatividade**, o **senso crítico** nos alunos e o seu **potencial de resolver problemas**, correspondendo, dessa maneira, à idiossincrasia dos nossos alunos. Programar em termos simples e transparentes não significa apenas resolver problemas; significa, sobretudo, aprender a expressar os problemas e suas soluções como um todo orgânico, isto é, onde seja possível ao professor, através da descrição das estratégias utilizadas pelo sujeito, analisar os processos cognitivos inerentes a elas. Esses aspectos, como já foi citado, serão aprofundados no Capítulo 5, quando será abordada a Geometria da Tartaruga inerente à Linguagem Computacional Logo.

Nesse sentido, Papert (1985), ao mencionar como deveria ser o desempenho do professor nesse contexto, onde o computador se faz cada vez e com mais intensidade presente em nossos dias, preconiza que:

> *"O educador deve atuar como antropólogo. E, como tal, sua tarefa é trabalhar para entender que materiais dentre os disponíveis são relevantes para o desenvolvimento*

---

[2] Os pressupostos teórico-metodológicos desta pesquisa serão fundamentados na Teoria Construtivista de Jean Piaget, nas abordagens tanto Macrogenética quanto Microgenética do desenvolvimento cognitivo.

> *intelectual. Assim, ele deve identificar que tendências estão ocorrendo no meio em que vivemos. Uma intervenção significativa só acontece quando se trabalha de acordo com essas tendências. Em meu papel de educador-antropólogo eu vejo novas necessidades sendo geradas pela penetração dos computadores na vida das pessoas."* (p.50) (grifo nosso).

De maneira geral, as dificuldades que os professores encontram para ensinar Matemática de uma maneira culturalmente integrada deve-se a um problema objetivo segundo expõe esse mesmo autor:

> *"(...) antes dos computadores, havia pouquíssimos bons pontos entre o que é mais fundamental e envolvente na Matemática e qualquer coisa existente na vida cotidiana. Mas o computador –um ser com linguagem matemática fazendo parte do dia-a-dia da escola, dos lares e do ambiente de trabalho –é capaz de fornecer esses elos de ligação. O desafio à educação é descobrir meios de explorá-los."* (Papert, 1985, p.69) (grifo nosso).

Nesse sentido, Papert lembra que em outros tempos houve uma separação de nossa cultura em duas áreas: a de "humanas" e a de "ciências". Platão escreveu na sua porta: "Entrada permitida para geômetras". Papert ainda explicita que a presença do computador pode "plantar sementes" que conseguiriam gerar uma cultura epistemológica menos dissociada.

Convém ressaltar que o "status" da Matemática contemporânea é um grande alerta para essa dissociação. Na explanação de seu livro, Papert tenta mostrar como a presença do computador pode levar as crianças a uma relação mais humana com a Matemática. Para tanto, é necessário ultrapassar a discussão sobre o que é Matemática e adentrar em uma nova perspectiva do processo ensino-aprendizagem.

Constata-se que nossa cultura educacional propicia aos jovens uma Matemática completamente desvinculada do mundo real, como um modelo a ser seguido, modelo este que Papert chama de "modelo da decoreba", em que os conhecimentos inerentes a ele são tratados sem significação e sem vislumbramento de aplicabilidade; sendo assim, constitui-se sem dúvida em um modelo dissociado.

Aprofundando essa idéia, Papert utiliza uma metáfora, expressa pela **metáfora da "Matelândia"** para questionar **idéias** profundamente **arraigadas sobre os dons intelectuais humanos**. Nesse sentido apresenta-nos o exemplo da aprendizagem da Geometria formal pelas crianças, e postula que atualmente se aceita que essas não podem aprender Geometria formal sem antes freqüentar a escola por alguns anos e, mais ainda, que geralmente muitas dessas crianças não podem aprendê-la nem mesmo assim. Entretanto, ao fazer uma analogia com a aprendizagem de francês pelas crianças, diz que a argumentação sobre a Geometria é infundada, pois sabe-se muito bem que as crianças americanas aprendem "mal" francês em suas escolas porém, se estudassem esse idioma vivendo na França, tal fato não se evidenciaria. Dessa forma, faz uma suposição de que *"muito do que hoje vemos como demasiadamente "formal" ou demasiadamente "matemático" será aprendido facilmente quando as crianças, num futuro bem próximo, crescerem num mundo rico em computadores."* (Papert, 1985, p.19).

A utilização de computadores no ensino da Matemática, para Papert, chegaria a alterar fundamentalmente a concepção de nossa cultura sobre conhecimento e aprendizagem.

Esses são argumentos que reforçam as nossas concepções delineadas neste estudo. Assim sendo, devemos ter em mente sempre que nós, educadores matemáticos, precisamos cada vez mais colaborar para diminuir a produtividade da dominação que a escola improdutiva produz.

Portanto, caberia aqui uma análise crítica e profunda de alguns aspectos do **estado da arte da Matemática** contemporânea, da própria finalidade de se ensinar Matemática, e mais especificamente, do **Ensino da Geometria** com modernos e alternativos artefatos metodológicos, e do nosso desempenho particularmente como educadora-matemática nesse novo cenário educacional em que a **informática** está cada vez mais presente no nosso cotidiano. Será realmente que estamos cumprindo nosso papel? Esse fato, sob várias perspectivas, será abordado no próximo capítulo.

REFLEXÕES SOBRE AS TENDÊNCIAS ATUAIS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DA GEOMETRIA

CAPÍTULO 2

REFLEXÕES SOBRE AS TENDÊNCIAS ATUAIS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DA GEOMETRIA

"Mas nada jamais impedirá a humanidade e a potencialidade humana de evoluir para algo magnífico a partir de um caos renovado."

(*D.H. Lawrence, 1921)*

2.1) Características Contemporâneas da Educação Matemática e do Ensino da Geometria

"A Matemática, observada corretamente, possui não somente a verdade, mas a beleza suprema–beleza fria e austera como a da escultura" (Bertrand Russel).

Hoje como professora-educadora de Matemática, nós nos inquietamos constantemente sobre alguns questionamentos teórico - metodológicos emergentes do Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática, e do Ensino da Geometria, tais como:

Como está a Matemática hoje? Qual é o seu papel como disciplina do currículo da escola brasileira em todos os níveis? Qual é o seu papel no desenvolvimento tecnológico que perpassa pelo nosso país? Qual é a sua função na concepção do pensamento humano? Qual é a sua função na formação de professores educadores em Matemática? E no Ensino da Geometria, caberiam os mesmos questionamentos?

As respostas a essas indagações, que são essenciais para o estudo que se pretende desenvolver na presente pesquisa sobre o processo ensino-aprendizagem da Matemática, e mais especificamente da Geometria, referir-se-ão a alguns aspectos a serem delineados, e serão embasados na Teoria do Desenvolvimento de Jean Piaget, segundo os Estudos Macrogenéticos e Microgenéticos das condutas cognitivas, explicitados no corpo teórico dessa pesquisa e nos Estudos de Casos desenvolvidos. Outras respostas, no entanto, poderão servir a temas futuros em pesquisa sobre Educação Matemática.

Ao delinearmos algumas reflexões e inferências sobre a situação atual do processo Ensino/Aprendizagem da Matemática, retornaremos à Antigüidade Clássica, e nesse sentido, faz-se pertinente lançarmos mão da abordagem crítica explicitada por D'Ambrosio (1990), qual seja:

> *"A Matemática é, desde os gregos, uma disciplina de foco nos sistemas educacionais, e tem sido a forma de pensamento mais estável da tradição mediterrânea que perdura até os nossos dias como manifestação cultural que se impôs, incontestada, às demais formas. Enquanto nenhuma religião se universalizou, (...), a matemática se universalizou, deslocando todos os demais modos de quantificar de medir, de ordenar, de inferir e servindo de base, se impondo como o modo de pensamento lógico e racional que passou a identificar a própria espécie. Do Homo sapiens se fez recentemente uma transição para o Homo rationalis. Este último é identificado pela sua capacidade de utilizar matemática, uma mesma matemática para toda humanidade e, desde Platão, esse tem sido o filtro utilizado para selecionar lideranças."* (D'Ambrosio, 1990, p.10) (grifo nosso).

Sob esse aspecto político da Matemática, enfatizamos novamente as palavras de D'Ambrosio, expressas por: *"A infabilidade da Matemática transformou-a no mais eficaz instrumento de dominação desde a Grécia antiga. Platão foi um dos primeiros a detectar essa conotação política da Matemática."* (D'Ambrosio, 1990, p.8).

Segundo essa abordagem crítica, é que nos posicionaremos baseados em constantes estudos realizados por meio de leituras, interpretações e análises de Anais de Congressos, trabalhos de pesquisa, tanto nacionais, como internacionais que nos forneceram substratos teórico-metodológicos para esboçarmos algumas reflexões, quanto à situação que permeia o Ensino da Matemática e da Geometria em nossos dias, que segundo nossa concepção poderia ser redimensionado objetivando transcender e ultrapassar os grandes desafios a que a educação brasileira vem sendo subordinada no sistema atual de ensino.

Nesse sentido, ao refletirmos sobre a Educação Matemática e, mais especificamente, sobre o ensino da Geometria nos cursos de 1º e 2º graus, deparamo-nos com uma situação caótica, em que o desenvolvimento dos conceitos se dá pela vertente mecanicista, através de fórmulas e algoritmos. Esse fato vem deixando de lado o raciocínio lógico e espacial, essenciais ao pensamento matemático. Tais tipos de pensamento podem e devem desenvolver a criatividade do aluno, o seu senso crítico e o seu potencial de resolução de problemas, essenciais ao seu desenvolvimento tanto cognitivo quanto afetivo.

A grande problemática do Ensino da Matemática, nos três níveis, tem se revelando como conseqüência de uma ênfase cada dia maior, que vem sendo dada ao pensamento algorítmico e mecânico dentro do Ensino da Matemática. Essa prática vem deixando de lado o raciocínio lógico e espacial, essenciais ao pensamento matemático.

Desta forma, a Matemática transformou-se e restringiu-se para os alunos em "fazer contas", seguir fórmulas e regras de soluções pré-determinadas. Perdeu-se, com isso, todo o poder criativo do aluno, a iniciativa do educando, restringindo-se, assim, a sua capacidade criativa de investigar "novos possíveis", capacidade de engendrar-se em novas buscas e investigação, e, é esse aspecto, a investigação, que é importante e necessário no processo de se "fazer matemática", pois é através dela, que o aluno vai poder gerar conjecturas, hipóteses e verificar se elas, de fato, são verdadeiras. Nesse sentido é preciso propiciar o desenvolvimento do raciocínio abdutivo[1] nos nossos alunos no processo de resolução de problemas, pois acreditamos que os raciocínios: dedutivo e indutivo, apesar de serem necessários, não são suficientes no contexto de se "fazer matemática".

Convém ressaltarmos nesse contexto que, pensamentos matemáticos, contribuem para desenvolver a **criatividade** do aluno, o seu senso crítico e o seu potencial de resolução de problemas, essenciais ao desenvolvimento integral do indivíduo tanto em nível cognitivo, quanto em nível afetivo. Cabe observar nesse momento, que concebemos a criatividade como o processo psico-emocional da geração de conhecimento, baseando-nos na descrição feita por D'Ambrosio (1990), segundo o qual **criatividade** abordada por uma definição específica, como comumente encontramos, ou seja, *"(...) ter o poder e a habilidade de criar coisas (...)"*, restringe de modo significativo a abrangência de sua significação. Nesse sentido, concebe-a então, de uma maneira brilhante, expressada por:

> *"O conceito de criatividade indiscutivelmente projeta o homem no Criador, Todas as maneiras de entender criatividade convergem para algo que escapa ao rotineiro, que rompe com o que é esperado e que traz novas dimensões que resultam de novas experiências, o indivíduo evolui em direção a uma liberdade total de condicionantes coletivos e atinge sua plena individualidade, retornando à sua disputa individual com o Criador. A maneira como se manifesta essa energia criativa e como ela se focaliza na produção de novos fatos, mentefatos e artefatos, é algo de fundamental importância na nossa ânsia de compreender esse elaborado processo mente-matéria."* (D'Ambrosio, 1990, p.40) (grifo nosso).

Entretanto, distorções sobre a concepção de criatividade podem gerar contextos desfavoráveis ao desenvolvimento intelectual do indivíduo, como tão concisamente expressa o referido autor citado:

> *"Sistema escolares mantidos para estimular e desenvolver criatividade facilitam o aparecimento de sistemas marginais que acolhem crianças frustadas e angustiadas e as encaminham para manipulações criminosas. Sistemas econômicos desenhados para uma melhor distribuição de riquezas, repartindo irmanamente entre todos os frutos do trabalho coletivo, vêm reforçar desigualdades e injustiças, gerando e estimulando mecanismos de exploração do homem pelo homem e elevando o dinheiro a uma posição de poder absoluto. Os mídias nos cercam de ilusões e fantasias, e princípios e ideologias são criados para justificar e propor explicações, numa tentativa de não nos deixar reconhecer um mundo infeliz, inseguro, injusto."* (p.42) (grifo nosso).

O desenvolvimento pleno da individualidade do ser, na visão acima, apesar de ser fundamental na relação dialética entre os três pilares que sustentam a política educacional, expressados por: professor, aluno e sistema escolar, não é nem mesmo evidenciado nessa tríade, parte integrante da sociedade.

---

[1] O raciocínio abdutivo está explicitado no Capítulo 5 desta pesquisa.

Refletindo sobre essa tríade que sustenta a política educacional, constatamos que pela abordagem dada ao Capítulo 1 dessa pesquisa, já nos foi possível explicitar a nossa concepção sobre o sistema educacional; faz-se necessário nesse momento, nos posicionarmos sobre o papel do professor e do educando, nesse cenário.

Caberia, então, a nós, professores educadores em Matemática proporcionar contextos favoráveis para que a energia criativa do educando aflore e conseqüentemente se processe através de novas formas de conhecimento e de compreensão, que possibilitariam ao indivíduo a liberdade de expressar-se como cidadão pleno integrado e consciente de seus direitos em uma sociedade cada vez mais competitiva.

Essa liberdade de expressão, que todos nós procuramos e almejamos, em que o sistema educacional deveria constituir-se no cenário ideal capaz de incentivá-la e processá-la, como função prioritária de todo processo educativo não é tampouco evidenciada nesse contexto; na verdade o que constata-se é justamente o efeito contrário ao desejado. Assim sendo, faz-se pertinente nesse momento recorrermos a Dante (1988), que reforça nossas concepções acima delineadas:

> *"Iniciativa, invenção, <u>criatividade,</u> aventura e coragem são <u>características</u> freqüentemente arroladas como sendo <u>desejáveis</u> num <u>processo educativo</u>. Mas, como tem sido concebido e desenvolvido este projeto, essas características são esperadas como emergindo no educando, mais como <u>produto final</u> da educação, do que fazendo parte <u>constante</u> do <u>desenvolvimento educativo</u> (...). E, se concentrarmos a atenção na Educação Matemática, em vez de na Educação em geral, a situação piora sensivelmente. Não tem havido lugar para essas características no <u>Ensino da Matemática</u>, pois, em lugar de ser vista como uma <u>área de</u> <u>atribuição de significados</u> por parte do jovem que chega à escola, ela é <u>considerada</u> como uma <u>área pronta</u>, de <u>conhecimentos</u> e de informação, a ser transmitida."* (p.4) (grifo nosso).

2.1.1) Dificuldades no Ensino da Matemática

A Matemática, como vem sendo apresentada aos alunos, como ciência pronta e acabada, com conteúdos desvinculados do real e programas obsoletos, não motiva os alunos de um modo geral, gerando sérias dificuldades sob vários aspectos, dificuldades essas refletidas no processo Ensino/Aprendizagem. As dificuldades encontradas hoje pelos alunos na aprendizagem da matemática são atribuídas aos professores, alguns dos quais, mesmo sem dominar a disciplina, exigem demasiadamente dos alunos, sobrecarregando-os de tarefas e conteúdos. Os mestres, por sua vez, atribuem as dificuldades encontradas pelos alunos de hoje à sua pouca dedicação ao estudo.

Contribuem ainda para essas dificuldades as condições econômicas e sociais em que vivem as novas gerações. A escola pública é hoje freqüentada por alunos que provêm de famílias de um nível cultural (no sentido acadêmico) e econômico menos privilegiado. Sua população não só aumenta de modo extraordinário, mas também se torna altamente heterogênea.

O que se constata, nos dias de hoje, de um modo geral, é que os alunos procuram a escola pelo prestígio social que ela poderá proporcionar-lhes e como um possível acesso à melhoria econômica através do diploma. Assim, temos na escola alunos que a cursam como uma obrigação, e se tornam elementos portadores de problemas complexos seja pela exigüidade de tempo para cumprir tarefas escolares, seja pela falta de amparo da família, cujo nível cultural (no sentido do saber) está muito aquém do da escola. Outro fato que também afeta os estudantes é o tipo de vida nas grandes cidades que, pela diversidade de atividades de lazer altamente atraentes, faz séria concorrência à escola.

Considerando todos os fatores acima explicitados, os quais podem prejudicar o tempo dedicado aos estudos, nós, como educadores, precisamos repensar nossos métodos estratégicos e teorias de trabalho, fazendo-os suficientemente motivadores, eficientes e desafiantes, acima de tudo, condizentes com a realidade do país, no que diz respeito ao desenvolvimento tecnológico, para podermos levar adiante nosso papel de professores educadores. Entretanto, a escola tradicional ignora as exigências da época e também as idiossincrasias de nossos alunos (Castro, 1969).

Nesse contexto, ao enfocar-se mais precisamente, as dificuldades das classes menos favorecidas, lançamos mão das idéias expostas por Illich (in Snyders), onde se postula que:

> *"Os alunos que não provêm das classes nobres, permanecem poucos anos na escola, acabando persuadidos de sua inferioridade pessoal em relação aos alunos brilhantes; sentem-se culpados, perdem o respeito por si próprios. E eis os pobres dispostos, por toda a sua vida, a aceitar, resignadamente, as frustrações e as chacotas (...)."* (Snyders, 1977, p.71) (grifo nosso).

Esse mesmo autor, ao referir-se ao fracasso escolar das classes menos favorecidas, preconiza:

> *"A escola, a partir dos fracassos escolares dos desfavorecidos, procura mergulhá-los na humilhação para que não renunciem a uma atitude de humildade (...). Essa classe mais humildes chega ao ponto "de aceitar , de assimilar o ponto de vista dos valores dos ricos, assumir como seus os valores impostos por seus patrões, identificando-se com o poderoso − o patrão − a tal ponto que perde a sua linguagem peculiar e original para balbuciar desajeitadamente a linguagem da classe dominante."* (Snyders, 1977, p.71) (grifo nosso).

Segundo essa ótica, posicionamo-nos em forma de reflexão, expressa em um questionamento: estaria a escola desempenhando uma função altamente inaceitável e indesejada, ao ajudar a promover a divisão de classes, propiciando um ensino de qualidade somente para "alguns privilegiados", onde uma maioria é mantida à margem da nossa sociedade? Se assim for, caberia ao trinômio estado, educação e sociedade exercer dignamente sua função: reverter esse cenário com vontade, força e determinação.

Assim torna-se adequado nesse momento, recorrermos a Carraher (1988), em sua obra, que nos traz uma contribuição efetiva quando postula que:

> *"O processo de explicação do fracasso escolar tem sido uma busca de culpados: o aluno, que não tem capacidade; o professor, que é mal preparado, que é mal remunerado; as Secretarias de Educação que não remuneram eficientemente seus professores; as universidades, que não formam bem o professor, o estudante universitário, que não aprendeu no secundário o que deveria ter aprendido e agora não consegue aprender o que seus professores universitários lhe ensinam. Mas a criança aprende matemática na rua, o cambista analfabeto recolhe apostas, o mestre-de-obras treinado por seu pai, são exemplos vivos de que nossas análises são incompletas, precisam ser desafiadas, precisam ser desmanchadas e refeitas, se quisermos criar a verdadeira escola aberta a todos, pública e gratuita, pela qual lutamos nas praças públicas. Todos nós, educadores, precisamos não encontrar os culpados, mas encontrar as formas eficientes de ensino e aprendizagem em nossa sociedade."* (Carraher, 1988, p.20) (grifo nosso).

A Matemática como vem sendo apresentada nas escolas, tem contribuído para que não se "perceba" a dimensão do fracasso escolar, uma vez que, os sistemas políticos educacionais são criados com a finalidade de conduzir o processo de maneira tendenciosa, formando indivíduos "acríticos", que aceitam as verdades incontestáveis inerentes à Matemática, conteúdos desvinculados da situação real e programas obsoletos, que não motivam os alunos de um modo geral, gerando sérias dificuldades sob vários aspectos.

2.1.2) Matemática como Verdade Absoluta

Nesse sentido, o **estatuto de verdade** absoluta que permeia a Matemática escolar, pode ser enfocado de forma crítica através de aspectos políticos e sociais, expressado por D'Ambrosio (1990), nas palavras:

> *"O próprio conceito de verdade é associado com Matemática, e isso tem influências notáveis na educação do indivíduo, como observa Borba (1992), chegando ao ponto de sistemas políticos e sobretudo econômicos repousarem sobre teorias matemáticas."* (D'Ambrosio, U. 1993, p.9) (grifo nosso).

A partir das abordagens críticas sociais que se tornaram intensas no final de século passado, o ensino da Matemática vem se constituindo um objeto de constante reflexão e análise por parte dos educadores-matemáticos. Evidencia-se esse fato em inúmeros e distintos Congressos, Conferências e Comissões nacionais e internacionais, os quais constituem-se em um cenário propício para questionamentos, constatações e estabelecimentos das tendências atuais sobre o processo Ensino/Aprendizagem da Matemática.

Constata-se que os níveis atuais de insucesso do Ensino de Matemática, tanto nas escolas públicas, como nas escolas particulares, constituem um fator de grande preocupação e apreensão para nós educadores em Matemática.

2.1.3) Universalidade da Matemática

A Matemática é a única disciplina que apresenta um **caráter de universalidade** dentro do sistema educacional, e a forma descontextualizada como ela vem sendo abordada, constitui-se em um dos maiores equívocos da Educação Matemática contemporânea.

Elucidando esse fato, D'Ambrosio diz:

> *"Todas as escolas de todo o mundo, em todas as séries e graus, ensinam a mesma Matemática. O que uma criança brasileira de 10 anos aprende é o mesmo que aprende uma africana ou japonesa. A Matemática tornou-se o substrato de todo o pensamento moderno, a ponto de hoje parecer algo imutável e que todos adotam como necessário para a manutenção global de sistemas de dominação."* (D'Ambrosio, 1990, p.9) (grifo nosso).

A essência do que se chama pensamento moderno traduz-se na representatividade da Matemática nas diferentes áreas do conhecimento e produção. Ressaltamos aqui que, com o advento da Informática, acentua-se a importância e necessidade da Matemática, como fator de sobrevivência, como já evidenciava, na década de 70, o título do artigo publicado na revista The Economist de Londres: "You can't be a citizen of the XXth century without Mathematics".

Essa impregnação da Matemática é constatada nas diversas áreas do conhecimento – Religião, Arte, Antropologia, Ciências Humanas, entre outras – que Michelle Emmer (1992) chama de Novo Renascimento. Nesse sentido, o referido autor acima, diz:

> *"Não encontraremos, no cotidiano de todos os povos e de todas as culturas, atividades que não envolvam alguma forma de Matemática. Repito, alguma forma de Matemática. Mas não necessariamente a Matemática que está nos currículos. E assim reconhecemos o espaço para a Etnomatemática."* (D'Ambrosio, 1990, p.9) (grifo nosso).

Etnomatemática é concebida nesse contexto como a arte ou técnica de explicar ou compreender a Matemática de acordo com as bases culturais de quem a está aprendendo. Se recorrermos a etimologia do termo, temos que **Etno** é atualmente aceito como algo muito amplo, referente ao contexto cultural, e, portanto, engloba considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; **Matema** é uma raiz que confere a idéia de explicar, de conhecer, de entender; e **Tica** origina-se de techné, que é a mesma raiz de arte e de técnica.

Nesse sentido os tópicos matemáticos devem ser mediados de uma forma integrada com os aspectos sociais, políticos e culturais, tendo em vista que o aprendiz deve ser concebido como um ser histórico, com sistemas de valores próprios, inserido em uma sociedade em constante desenvolvimento e mudança. Sendo abordada dessa forma, a Matemática possibilitaria ao indivíduo o desenvolvimento de sua capacidade crítica criadora, tornando-o capaz de constituir-se não simplesmente em mais um elemento dessa realidade, mas sim, em um ser com consciência crítica e espírito de luta, participante efetivo no processo de transformação e desenvolvimento da sociedade em que vive.

Resgatando na Matemática os fatores políticos, sociais, econômicos e culturais, entre outros, ao mediarmos o processo educativo, nós, educadores matemáticos, estaríamos propiciando aos jovens que aí estão, ansiosos em buscar e construir cada vez mais o saber, a sua plenitude em relação à sua formação.

2.1.4) Importância do Estudo da Geometria

O ensino da Matemática contribuiria efetivamente na formação do indivíduo, como um ser capaz de interpretar, compreender e apreciar o mundo físico que o cerca, e, nesse sentido, faz-se necessário essa abordagem da Matemática, a fim de que resgate os aspectos geométricos que permeiam a relação entre esse indivíduo e o espaço em que está inserido. Nesse contexto, destacamos a importância do raciocínio geométrico no ensino da Matemática, apresentada no artigo: "Geometry and Spatial Reasoning", Clements e Battista (1991), explicitada pelo que se segue:

> *"Entendimentos espaciais são necessários para interpretar, compreender e apreciar nosso inerente mundo geométrico (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p.48).*
> *Geometria é captar o estreito espaço - espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que deve aprender para conhecer, explorar, conquistar para viver, respirar e se movimentar melhor nele (Freudenthal, in National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p.48).*
> *Emergindo da atividade prática e necessidade do homem, em descrever seus arredores, as formas geométricas foram vagarosamente conceitualizadas até que elas tomaram um significado abstrato delas próprias.*
> *Assim, a partir da teoria prática da medida da terra, foram desenvolvidos um conjunto crescente de relações ou teoremas que culminaram nos Elementos de Euclides, a coleção, sínteses e elaboração de todos esse conhecimento (Fehr, 1973, p.370).*
> *Equações são apenas a aborrecida parte da Matemática. Eu, tento ver as coisas em termos da Geometria (Hawking, National Research Council, 1989, p.35)."* (tradução e grifo nosso).

Clements e Battista postulam uma reflexão e análise da inter-relação entre a Geometria e o raciocínio espacial, a qual é descrita através de algumas categorias[2]. Nesta pesquisa abordaremos algumas dessas categorias, que nos parecem pertinentes e fundamentais para justificarmos e salientarmos a importância de se ensinar Geometria aos nossos alunos.

Dessa forma, segundo a categoria explicitada pela **"performace dos estudantes"** de Geometria, os referidos autores acima, apresentam uma pesquisa envolvendo diferentes teóricos, em momentos distintos, em vários países, onde concluem que os estudantes "evitam" a Geometria e a minoria que se interessa em aprendê-la demonstra uma compreensão mínima quanto aos conceitos geométricos e suas representações. Esse fato pode ser constatado através dos estudos realizadas por Clements e Battista (1989), baseados em: Fuys, Geddes e Tischler (1988)[3]; Hoffer (1983)[4], em que se apresentam algumas

---

[2] Categoria nesta pesquisa será concebida como o produto da vontade conjunta e integrada de certos indivíduos, ou seja, nesse sentido, é uma construção social.
[3] FUYS, D., GEDDES, D., TISCHLER, R. (1988) *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Journal for Research in Mathematics Education Monograph.3.

"falsas concepções", no sentido de que os alunos relacionam as concepções de noções geométricas com os aspectos qualitativos das formas, relegando a segundo plano as especificidades e particularidades que constituem os aspectos quantitativos das formas geométricas, concepções essas desveladas pelo desempenho apresentado pelos alunos em situações práticas de resolução de problemas, tais como:

. Um ângulo deve ter um raio horizontal;

. Um ângulo reto é um ângulo que aponta para a direita;

. Para ser um lado de uma figura, um segmento deve ser vertical.;

. Um quadrado não é um quadrado se a sua base não for horizontal;

. Se a forma tem quatro lados, então é um quadrado.

Nesse momento, ressaltamos que na nossa prática pedagógica pudemos perceber algumas "distorções" evidenciadas até mesmo no desempenho de professores de 1° grau, que foram constatadas no curso de Extensão: "Matemática para Professores de 1° grau", Departamento de Metodologia de Ensino, FE/UNICAMP, 1992, no qual participamos como professora colaboradora. Essa prática educativa aliada à nossa jornada pelas escolas públicas; forneceram subsídios teórico-metodológicos para nos posicionarmos quanto a esse respeito.

Em decorrência dos aspectos emergentes do ensino da Geometria, caberia nesse contexto delinear reflexões e propor estratégias metodológicas alternativas, que poderiam, se não, resolver esses problemas, minimizá-los, de forma a introduzir os alunos em um dinâmico e efetivo envolvimento com as noções geométricas, possibilitando-os compreender o maravilhoso mundo real das formas tridimensionais e utilizar os conceitos inerentes à Geometria para sua integração e adaptação no mundo em que vive, entendendo-o e, sempre que possível e necessário para o seu próprio desenvolvimento, transformando-o.

Uma outra categoria de análise considerada pelos referidos autores acima mencionados se expressa por: **"Desenvolvimento do pensamento geométrico baseado em Piaget, nas idéias de Van Hiele e na Ciência Cognitiva"**. Vamos nos deter no desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo estudos baseados na teoria piagetiana, que representam na nossa concepção aspecto fundamental para nossa pesquisa.

Nesse sentido, as representações do espaço não se constituem em noções perceptuais, mas sim, são construídas através da organização progressiva das ações motoras internalizadas pelas crianças, resultando em sistemas operacionais. A organização

---

[4] HOFFER, A. (1983) *Van Hiele - based research.* In R. Lesh & M. Landau (Eds.) Acquisition of mathematics concepts and processes (p.205-227). New York, NY: Academic Press.

progressiva das idéias geométricas segue uma ordem lógica e não uma ordem histórica da produção científica. Originam-se pelas relações topológicas, seguidas das relações projetivas e culminam nas relações euclidianas.

Para Piaget e Inhelder, a diferença entre relações topológicas, projetivas e euclidianas refere-se à maneira pela qual os objetos distintos são relacionados uns aos outros:

- Topológicas: envolvem relações internas de uma figura particular;

- Projetivas: envolvem relações entre a figura e o sujeito;

- Euclidianas: envolvem relações entre figuras em si mesmas.

Dentro desses pressupostos, na descrição da análise realizada nos Estudos de Casos, explicitados nesta pesquisa, em que foram analisadas as condutas cognitivas de sujeitos em situações práticas de resolução de problemas, pôde-se constatar o desenvolvimento e a representação do pensamento geométrico através da construção lógica, conforme explicitada acima.

A representação do espaço das crianças não é uma simples "leitura" perceptual dos seus ambientes espaciais, mas é construída a partir da sua manipulação e interação ativa com o meio. O espaço subjetivo é uma interpretação da realidade, e não simplesmente uma reprodução da mesma.

Uma outra categoria abordada na pesquisa realizada por Clements e Battista, se apresenta: **"O estabelecimento da verdade em Geometria"**.

Os matemáticos, de uma maneira geral, estabelecem verdades através de provas, da lógica, do raciocínio dedutivo baseado em axiomas. Encontram essas verdades freqüentemente por método intuitivos e empíricos na natureza, (Eves, 1976). O processo pelo qual uma nova Matemática é estabelecida constitui-se na crença pela forma dedutiva na qual ela está registrada (Lakatos, 1978). Na produção da Matemática, problemas são propostos, conjecturas feitas, contra exemplos apresentados e conjecturas revistas; um teorema resulta quando esse refinamento de idéias é julgado ter respondido uma questão significante.

Em Geometria, assim como em outras áreas da Matemática, métodos empíricos e dedutivos podem interagir e, desse modo, reforçar um ao outro.

Contudo, para muitos alunos de Geometria, métodos dedutivos e empíricos configuram-se em domínios separados com diferentes caminhos para estabelecer exatidão (Schoenfeld[5], citado por Clements e Battista, 1991).

Nesse sentido, nas investigações de Schoenfeld sobre os "métodos empíricos", observou o restrito uso pelos estudantes dessas construções geométricas baseadas nesses métodos. Entretanto, construções empíricas através do computador podem ser mais eficientes para o desenvolvimento de noções geométricas, por duas razões, apresentadas abaixo, quais sejam:

- Os sistemas computacionais requerem mais especificações e particularidades para as representações dos conceitos geométricos do que as representações efetuadas com lápis e papel.

- Pelo fato do computador ser constituído por um sistema representacional, as representações das construções geométricas, processam-se de maneiras diferentes do ensino tradicional, assim, esse fato propicia ao professor o tratamento de tópicos da Geometria com uma abordagem relacionada enfaticamente à construção dos conceitos geométricos.

Entretanto as representações das construções computadorizadas devem propiciar aos alunos uma constante "experimentação", através da descrição dos procedimentos relativos a representação de seus problemas geométricos, através da depuração e por meio da reflexão de suas estratégias, reestruturando várias vezes, se necessário, seus programas. Dessa constante reestruturação de seu programa, obtém-se a reestruturação mental do aluno, constituindo-se desse modo, um degrau importante para o processo da aproximação dedutiva, estabelecendo verdades em Geometria.

Nesse sentido, Schoenfeld, ao comentar sobre o software computacional Geometric Supposer, busca saber se as habilidades inerentes ao programa em repetir automaticamente as construções geométricas conduziriam os estudantes a não testarem intuitivamente seus métodos e estratégias ao resolver problemas, restringindo dessa maneira as possíveis deduções lógicas. Em resposta a essa consideração, Judah Schwartz, autor do software citado, refutou as considerações, afirmando que pesquisas evidenciam que o Geometric Supposer não interfere negativamente no desenvolvimento das habilidades dos estudantes, em desenvolver demonstrações lógicas.

Quanto ao Geometric Supposer, Valente (1993a) explicita que:

> *"(...) Através desse software o usuário pode construir e medir figuras geométricas usando para isso termos como "unir os pontos" de uma figura, "calcular" o ângulo entre duas semi-retas previamente definidas, etc.. O resultado é bastante semelhante ao que o aluno faz com o Logo gráfico, porém no caso do "Supposer" o domínio e a linguagem de comunicação com o programa é mais específica."* (p.12).

---

[5] SCHOENFELD, A.H. (1986) *On having and using geometric knowledge*. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. (p.225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Uma outra categoria abordada por Clements e Battista (1991) constitui-se na **"Abordagem da Geometria com o sistema Logo"**.

Sendo essa categoria fator de essencial importância em nossa pesquisa, nesse momento restringiremos nossas reflexões no sentido de ressaltarmos a importância geométrica no ensino, aprofundamentos sobre essa abordagem serão postulados no Capítulo 5 dessa dissertação.

No artigo citado, os autores reportam-se a Piaget e Inhelder (1993), os quais postulam que as representações do espaço pelas crianças começam pela manipulação direta, por ações sucessivas com o mundo físico. Nesse sentido, como o contexto Logo solicita pensamento geométrico, essa interação se evidencia através do micromundo da tartaruga, com sua geometria intrínseca. A metáfora utilizada por Seymor Papert, (1985), expressa pelo fato de se "ensinar a tartaruga" a representar figuras geométricas, torna-se significativa no contexto do desenvolvimento de noções geométricas.

Existem algumas evidências de que experiências com Logo influenciam a compreensão sobre medidas além da medida de rotação. Observações realizadas por Kull[6] (citado por Clements e Battista, 1991) mostram que os estudantes do 1º grau "inventam" suas próprias unidades-padrão de medidas ao fazer representações no sistema Logo.

Pesquisas de Campbell[7] (citado por Clements e Battista, 1991) constatam que o contexto Logo pode ajudar crianças pequenas a aprender a noção de medição e a auxiliar os pesquisadores a saber mais acerca do que as crianças pequenas sabem sobre medidas. Nesse sentido, o contexto Logo propicia um ambiente no qual as crianças pequenas utilizam unidades de tamanhos variados, definem e criam suas próprias unidades, e são capazes de manter ou predizer o tamanho de uma unidade e, ainda, de criar comprimentos anteriores a representação final por meio de comandos numéricos relativos ao deslocamento da tartaruga.

Além disso, o micromundo da tartaruga, com sua geometria subjacente, possibilita à criança a manipulação e a exploração das transformações de tamanho da unidade e número de unidades, sem a presença de instrumentos de medida e quantidade física. Isto é explicitado pelo fato de constituir-se a tartaruga em um **"objeto para se pensar sobre"**, isto é, o usuário do Logo, ao manipular a tartaruga, através de comandos simples, alterando sua posição e direção, transpõe seus conhecimentos a ela, e muitas vezes, coloca-se no lugar da tartaruga ("sintonicidade" corporal).

Em nossa pesquisa, foi possível evidenciar esse aspecto nas situações problema, durante o processo de solução onde um dos sujeitos pesquisados conciliou e integrou a

---

[6] KULL, J.A. (1986) *Learning and Logo.* In P.F. Camphell & G.G. Fein (Eds.) Young children and microcomputers. (p.103-130). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[7] CAMPBELL, P.E. (1987) *Measuring distance: Children's use of number and unit.* Final report submitted to the National Institute of Mental Health Under the ADAMHA Small Grant Award Program. Grant No. MSMA I R03 MH423435-01. University of Maryland, College Park.

Geometria da tartaruga com o quebra-cabeça **Tangram.** Esse aspecto foi também evidenciado no estudo realizado com o Logo Tridimensional.

Os estudos de Clements e Battista têm mostrado os efeitos mais positivos que envolvem seqüências de atividades através do Logo. Nesse sentido, parece-nos que o potencial do sistema Logo torna-se um recurso poderoso no desenvolvimento de noções geométricas, fato este que encorajaria os estudantes a refletirem e criarem conexões entre o conhecimento para processarem sobre o sistema Logo e o conhecimento conceitual mais tradicional.

Esses aspectos serão aprofundados no Capítulo 5 dessa dissertação, onde trataremos da Geometria da Tartaruga inerente ao sistema computacional Logo.

Uma outra categoria de análise apresentada no artigo de Clements e Battista (1991), é expressa como **"Várias diferenças culturais"** na abordagem da Geometria. Os referidos autores reconhecem que existem diferenças entre culturas em relação ao raciocínio espacial; nesse sentido, reportam-se a Mitchelmore[8] em cuja pesquisa se constatou que africanos nativos de todas as nacionalidades tinham desenvolvimento perceptivo mais baixo quando comparados aos europeus com a mesma idade e extensão de escolaridade, da mesma forma quando comparados a esquimós analfabetos e a índios norte americanos.

Foi constatado também por Mitchelmore, em 1980[9], que o raciocínio espacial de estudantes de Kingston, Jamaica, estava em torno de três anos defasado dos estudantes de Columbus, Ohio, que por sua vez estava três anos defasado dos estudantes de Bristol, Inglaterra. Atribui essas diferenças culturais a vários fatores, tais como ambiente físicos, ambientes sócios culturais e currículos matemático escolar.

Um outros estudo realizado por Johnson[10] (citado por Clements e Battista, 1991), mostrou que os resultados do 4º NEP nos Estados Unidos indicaram que negros e hispânicos, nas séries 7° e 11° tinham mais dificuldades que brancos em informações apresentadas graficamente, sobre medida e sobre Geometria. Reconhecem também, que algumas pesquisas mostraram evidentes diferentes entre gêneros, no aspecto relativo ao raciocínio geométrico (Hanna[11], Senk e Usiskin[12], 1983).

---

[8] MITCHELMORE, M.C. (1986) *Cross-cultural research on concepts of space and geometry.* In J.L. Martin & D.A. Bradbard (Eds.) Space and geometry. Papers from a research wokshop (p.143-184). Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service N0. ED 132 033).

[9] MITCHELMORE, M.C. (1980) *Three-dimensional geometrical drawing in three cultures*. Educational Studies in Mathematics. 11. 205-216.

[10] JOHNSON, M.L. (1989) *Minority differences in Mathematics*. In M.M. Lindquist (Ed.) Results from the fourth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress (p.135-148). Reston, VA: NCTM.

[11] HANNA, G. (1989a. July-August) *Gender differences in Mathematics achievement among eighth graders: Results from twenty countries*. Newsletter of the Association for Women in Mathematics. p.11-17.

Sobre as categorias abordadas por Clements e Battista, e explicitadas nesse nosso estudo, ressaltamos que pesquisas devem ser desenvolvidas, mais especificamente, na realidade brasileira, objetivando repensar o papel fundamental que a Geometria ocupou ao longo das civilizações e que por vários aspectos vem sendo relegada a segundo plano no ensino da Matemática.

Ao ressaltarmos a importância do ensino da Geometria, recorremos a Castelnuovo, (1989), que ao postular sobre a difusão do ensino baseado no "conjuntismo", enfatiza que pouco a pouco, mestres e matemáticos constataram os efeitos negativos desta didática, culminando numa verdadeira crise detetada durante o Congresso do ICMI (International Committe for Mathematical Instrucional), realizado na Alemanha, em 1976. Nesse Congresso, o grande geômetra inglês Michel Atiyal, responsabilizou os matemáticos especialistas em didática, de haverem suprimido a Geometria das escolas, fato este evidenciado por suas palavras: *"(...) é justamente a Geometria, que se por um lado lembra a intuição e conduz ao descobrimento, por outro lado, permite a conjunção entre o mundo físico e a Matemática".*

Nesse sentido, a referida autora, ao reforçar a importância da Geometria para a construção de conceitos pelas crianças, questiona: Como seria ensinada a Geometria?

Sabe-se que a curiosidade, a fantasia e a imaginação, qualidades típicas das crianças e dos jovens, constituem-se em fatores fundamentais para serem levados em conta, no desenvolvimento de conceitos geométricos. Para tanto, o professor deve considerar que as crianças não estão interessadas em problemas do tipo: **"Calcular o número de azulejos necessários para pavimentar uma casa retangular de dimensões dada".** Entretanto, com problemas abertos, de caráter dinâmico, onde no processo de busca e investigação para resolvê-los, os alunos envolvem-se com sua imaginação criativa e suas fantasias, sentindo-se assim, interessados e motivados. Nesse sentido, o conceito geométrico intrínseco à situação problema apresentada anteriormente, poderia ser trabalhado, e além disso, ampliado, em um contexto dinâmico, qual seja: **"Ao variar as dimensões de um retângulo cujo perímetro é fixo, a área muda ou permanece a mesma?** E, se houver mudança, qual retângulo apresentaria área máxima?"

Evidencia-se nessa situação-problema, a evolução do conceito de Área, passando pelos conceitos relativos a aplicabilidade de Funções ou Transformações, e culminando nas noções fundamentais do Cálculo Diferencial Integral. Nota-se, portanto, que a Geometria, apresenta-se como tema integrador entre os diversos tópicos da Matemática, bem como um campo fértil para o exercício de "aprender a fazer" e "aprender a pensar" geometricamente.

No contexto de resolução de problemas, evidencia-se a possibilidade de proporcionar a motivação necessária para formar jovens com espírito aberto e não

---

HANNA, G. (1989b. July-August). *Gender differences in Mathematics achievement among eighth graders: Results from twenty countries.* Part 2. Newsletter of the Association for Women in Mathematics. p.11-17.

12 SENK, S. & USISKIN, Z. (1983) *Geometry proof writting: A new view of sex differences in Mathematics ability.* American Journal of Education, 91, 187-201.

conformistas, jovens que estejam em condições de fazer uso, de uma maneira eficiente, dos mais sofisticados automatismos, jovens que possam sobreviver a um crescente avanço tecnológico, visando a sua plena integração na sociedade.

2.1.5) Importância do Pensamento Geométrico

Nesse sentido, a Geometria desempenha um papel primordial no ensino da Matemática, pois a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. Assim sendo, poderia auxiliar o alcance dessa formação; para que tal fato ocorra, caberia aos professores a grande responsabilidade de viabilizar esse processo por meio de metodologias alternativas.

Reforçando a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico, destacamos o papel da Geometria desempenhado no ensino da Matemática, preconizado por Thom (1971):

> *"(...) a geometria é uma intermediária natural, e possivelmente insubstituível, entre as <u>linguagens naturais e o formalismo matemático</u>, onde cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo das equivalências é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. A partir deste ponto de vista, o <u>pensamento geométrico</u> pode ser um estágio impossível de ser omitido no desenvolvimento normal da atividade racional normal do homem."* (Thom, 1971, p.698) (grifo nosso).

Sabe-se que os compêndios elementares da Geometria são mais ou menos unânimes em apresentar as noções espaciais iniciais relacionadas com as intuições euclidianas: retas, ângulos, quadrados e círculos, medidas, etc. Entretanto, nas análises altamente abstratas apresentadas pelos geômetras, nota-se a tendência de que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas, e sim topológicas, isto é, relacionam-se as correspondências qualitativas bicontínuas que recorrem aos conceitos de vizinhança e de separação, de envolvimento e de ordem, etc., mas por outro lado, não abordam qualquer conservação das distâncias, assim como todo conceito inerente à Geometria Projetiva.

Observa-se que a noção de espaço da criança, cuja natureza é ativa e operatória, inicia-se por intuições topológicas elementares, sendo seguidas das noções projetivas e euclidianas. Nesse sentido, o ensino da Geometria poderia ser mais eficaz na medida em que levasse em conta a evolução espontânea das primeiras noções topológicas das crianças; com isso, essa evolução estaria mais próxima da construção matemática do que a noção apresentadas nos compêndios ditos elementares.

Thom (1971) ao manifestar-se contra o currículo proposto pela Matemática Moderna, que retira a Geometria Euclidiana, diz que: "(...*) é ignorar a cultura – aquilo que permanece quando todo o resto é esquecido – como vestígio dos tempos passados".*

Esse autor, discute a importância genética da Geometria, apontando-a como:

> "(...) *primeiro exemplo da transcrição de um processo espacial, de duas ou três dimensões, para a linguagem escrita a uma dimensão. Para tanto, a geometria euclidiana aplica a uma situação rígida e precisa um processo que já está presente na linguagem de todos os dias... Ela é a intermediária natural entre as linguagens naturais e o formalismo matemático, onde cada objeto é reduzido a um símbolo."* (grifo nosso).

Ainda nesse sentido, convém ressaltar que:

> *"A partir desse ponto de vista, o pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de se omitir no desenvolvimento normal da atividade racional do homem*." (Thom, 1971).

Nesse contexto, o pensamento geométrico, possibilita ao indivíduo a transição da linguagem natural para a formal.

Como já foi citado anteriormente nessa pesquisa, Jean Piaget , em seus estudos, sempre assinalou um papel privilegiado do espaço, e sempre deu grande relevância à Intuição Geométrica. O espaço possui um estatuto epistemológico especial, pois ao contrário da Linguagem, por exemplo, os significantes simbólicos visuais são da mesma natureza que seu significado. A imagem de um quadrado é um quadrado, enquanto que a palavra "quadrado" não é um quadrado (Gillerion, 1979). O assunto será tratado mais profundamente no capítulo, em que se abordará mais especificamente a Geometria Espacial com o Logo Tridimensional.

Da maneira como os conceitos geométricos vem sendo apresentados e trabalhados no contexto educacional, poderíamos inferir que a Geometria tem sido vista como um tópico da Matemática que tem provocado um sentimento forte de aversão aos que com ela convivem. Nota-se também que a riqueza intuitiva dos alunos, em relação à Geometria, foi "sufocada" pelo sistema escolar.

Castelnuovo (1989), em seus estudos na busca de entender os fatores que provocaram esse tipo de "aversão universal" que a Matemática tem causado aos que com ela convivem, optou por um caminho histórico do Ensino da Matemática, destacando entre vários aspectos a importância de se refletir sobre a História da Matemática, buscando entender a "incompreensão da Matemática", a partir de documentos que retratavam métodos de ensino. Nessa sua investigação, objetivando encontrar os "ramos" que pudessem unificar os países, em relação à "incompreensão da Matemática", nada encontrou na Álgebra e nem tampouco na Aritmética, mas somente no campo da Geometria abstrata.

Para tanto, direcionou sua linha de raciocínio para os efeitos dos primeiros ensinamentos da Geometria. Quando o ensino era somente para "alguns privilegiados", em colégios religiosos e com mestres particulares, constatou que o ensino da Geometria conduzia-se de acordo com "Os Elementos de Euclides", visto que até então não tinha-se acesso a outras obras.

Entretanto, destaca que Euclides não havia escrito sua obra com a finalidade de sua utilização no contexto escolar, sendo assim, foram evidenciados os efeitos negativos, ou mesmo "nefastos", como diz a referida autora acima citada, sobre essa minoria que era constituída pelos "alunos privilegiados". Reforça a constatação acima, levando em conta a declaração explicitada por Alexis Claude Clairaut[13], em 1741, no seu livro "Os Elementos de Geometria" (citado por Castelnuovo, 1989), em cujo prefácio enfatiza que é impossível que um estudante iniciante no processo educativo possa compreender "Os Elementos de Euclides", devido à demasiada axiomatização e abstração inerentes a ele.

Clairaut, em sua obra, que constituía-se em um curso preparatório para "Os Elementos de Euclides", propõe um outro caminho para a Geometria, baseado na História da Matemática. "(*...) para penetrar em qualquer ciência é preciso sentir todo o esforço, todo trabalho que a humanidade teve durante séculos para extrair a teoria do concreto, da realidade"* (grifo nosso).

Miguel (1993), em sua tese de doutorado, ao estabelecer uma relação entre a História da Matemática e a Educação Matemática, relação essa explicitada na forma de recorrer-se à história como recurso pedagógico adicional, reporta-se também a Clairaut, reforçando as concepções anteriores.

> *"(...) a causa da dificuldade enfrentada pelos principiantes, no início de um curso de Geometria era a forma como esta Ciência era ensinada, em fiel conformidade com a metodologia euclidiana, para qual os alunos não tinham maturidade suficiente para acompanhar, Clairaut propõe um outro caminho para o ensino da Geometria baseada na História. Nesse sentido, acreditava que sua obra seguisse em grandes traços, um caminho semelhante àquele percorrido pela humanidade na aquisição dos conceitos e leis matemáticas, isto é, semelhante à forma como o próprio Clairaut reconstituía esse caminho."* (p.12) (grifo nosso).

Seguindo sua linha de pesquisa através do tempo e através da História da Matemática, Castelnuovo observa que, com a mudança dos tempos, com a evolução das sociedades abriram-se e ampliaram-se as possibilidades, no final do século passado, para a disseminação e organização da "escola pública para todos" em muitos países.

Com essas escolas, estabeleceram-se programas oficiais e os livros escolares apareceram nas classes, livros em diferentes áreas do conhecimento, em diferentes países. Mas no campo da Matemática havia uma único livro, igual em todas as escolas de muitos países: "Os Elementos de Euclides", em suas diferentes traduções e adaptações.

Nesse sentido, constata-se com esse fato que os mesmos efeitos da "incompreensão da Matemática" evidenciados em outros tempos, onde o ensino era voltado para "poucos privilegiados", expandiu-se e generalizou-se nos diversos tipos de estudantes de vários países, traduzidos no seguinte depoimento: *"Eu nunca havia compreendido a Matemática, não tenho disposição para a Matemática."*

Nesse sentido, faz-se necessário uma reflexão sobre o processo ensino-aprendizagem da Matemática. É notório que nesse contexto tanto o desempenho do professor quanto os conteúdos matemáticos e o sistema escolar são partes interligadas e

[13] CLAIRAUT, A.C. (1920) *Elements de geométrie.* 1741. Editions Gauthier-Villars.

indissociáveis que interagem como um todo. E esse todo torna-se significativo quando integrado na sociedade de forma a desempenhar uma força determinante, visando a transformação social.

2.2) Características do Professor no Contexto Político e Social do Ensino da Matemática

E quanto ao desempenho do professor, enquanto ser histórico e social, inserido no contexto de uma educação enfocada como fator de libertação e transformação social?

Sabe-se que a educação desempenha um papel importante ao buscar soluções para os problemas sociais. Ela não se constitui apenas em uma força determinada pelo social, mas sim o que existe é uma relação dialética entre a educação e a sociedade, e essa ação recíproca entre ambas supõe a contribuição da escola na formação da consciência social, e nesse sentido, formação é muito mais do que freqüentar cursos. Trata-se como tão bem explicita Magnani (1992) *"(...) de se pensar a superação da dicotomia teoria/prática, que pode colocar o professor como agente social e sujeito de sua história e da transformação."* (p.166).

Concordando com a autora acima referida, acreditamos que a superação das condições sociais atuais é fundamental. Nesse sentido, tanto a escola quanto o professor são partes integrantes dessa jornada, que não deve ficar restrita somente ao corporativismo de melhores salários e de cursos de reciclagem. Nesse sentido, a autora mencionada, preconiza que:

> *"(...) Vivemos uma época de pouca ousadia do desejo. Como se tivéssemos medo de criar outras necessidades (ou mesmo soubéssemos quais pudessem ser) por falta de condições de satisfazê-las. Ainda não se viu um movimento de professores de primeiro e segundo graus reivindicando o direito de serem pesquisadores, por exemplo, sem que para isso tenham de sair da sala de aula, de serem sujeitos da produção de conhecimentos, de socialização dos meios de produção em todos os tipos de trabalho humano."* (p.167) (grifo nosso).

Nesse contexto, enfatizamos o papel do professor como um educador-pesquisador em Matemática, isto é, aquele que concilia a pesquisa e o ensino dentro da sala de aula, e ainda que concilia a teoria a prática, ao desempenhar sua função, construindo desse modo uma práxis educativa.

A concepção de práxis, abordada nesse estudo é entendida com o mesmo significado com que Paulo Freire a concebe, isto é, *"Práxis no sentido da união entre a reflexão e a ação"* (Gadotti, 1989, p.66).

Quando Freire, na obra de Gadotti (1989), explicita que é possível engajar a educação em um processo de conscientização e de movimento de massas, ele desenvolve o conceito de consciência transitiva crítica, entendendo-a como a consciência articulada com a práxis. Em sua visão: *"(...) para se chegar a essa consciência que é ao mesmo tempo* *desafiadora e transformadora, são imprescindíveis o diálogo crítico, a fala e a convivência."* (p.66) (grifo nosso).

Nesse sentido, caberia uma reflexão de nossa parte, em forma de questionamento: Como se processa o diálogo no contexto educacional, se é que ele existe?

Sabemos que o diálogo proposto pelas elites é vertical, objetiva formar o "educando-massa", restringindo sua capacidade crítica, impossibilitando-o de se manifestar, tornando-o um indivíduo moldado pelo sistema.

Entretanto, na concepção de Paulo Freire, com a qual concordamos, o diálogo é concebido em uma relação horizontal. Refere-se à experiência do diálogo, ao insistir na prática democrática da escola pública, dizendo: *"(...) é preciso ter a coragem de nos experimentarmos democraticamente"* (Gadotti, 1989, p.66).

Preconiza o respeito que se deve ter com os educandos, não somente enquanto indivíduos, mas também enquanto expressões de uma prática social.

O diálogo é, portanto, uma exigência existencial, que permite a comunicação e possibilita ultrapassar o imediatamente vivido. Transpondo suas "situações-limite", o educador-educando chega a uma visão totalizante do contexto. Esse fato deve estar presente desde a elaboração do programa educacional, dos temas geradores, da apreensão das contradições até a última etapa do desenvolvimento de cada estudo, ou de cada tópico.

Moacir Gadotti, em seu diálogo com Paulo Freire, diz:

> *"Para pôr em prática o diálogo, o educador não pode colocar-se na posição ingênua de quem se pretende detentor de todo o saber, deve, antes, colocar-se na posição humilde de quem sabe que não sabe tudo, reconhecendo que o analfabeto não é um homem "perdido", fora da realidade, mas alguém que tem toda uma experiência de vida e por isso também é portador de um saber."* (p.69) (grifo nosso).

O fatores diferenciadores entre o educador e o educando processam-se, segundo Gadotti, *" numa relação em que a liberdade do educando não é proibida de exercer-se"*, pois sabemos que essa opção não tem um caráter pedagógico, mas sim político, o que faz com que o educador tenha uma postura política explícita e, conseqüentemente, não seja uma pessoa neutra, mas sim um ser sempre aberto a novas possibilidades, preocupado com o seu próprio desenvolvimento, integrado na dimensão do desenvolvimento tecnológico e industrial de seu país.

Torna-se necessário, nesse sentido, que o professor, seja na formação básica de sua licenciatura, seja na sua formação continuada, esteja consciente e aberto para as novas formas do saber humano, de gerar e de dominar conhecimento, se não quiser ficar estagnado no Século XX, pois sabemos que esse universo que aí está, expande-se cada vez mais, na medida em que vários segmentos da sociedade vão incorporar essas novas tecnologias. Pela importância que vêm assumindo, faz-se necessária a criação de mecanismos paralelos ou substitutivos da própria estrutura escolar que atendam a essas novas necessidades e, assim, a escola fatalmente será ou renovada ou superada ou mesmo substituída.

Refletiremos, nessa linha de pensamento, sobre o papel que as universidades vêm desempenhando com relação à formação de professores.

2.3) A Situação Atual dos Cursos de Licenciatura em Matemática

> *"Exige-se, de uma lado, uma mudança das condições sociais para criar um sistema de instrução adequado e, de outro lado, um adequado sistema de instrução para mudar as condições sociais." (K. Marx, 1869).*

Essa reflexão traduz-se na análise de alguns aspectos dos cursos atuais de Licenciatura em Matemática. Estariam esse cursos contribuindo para a formação de professores educadores-pesquisadores em Matemática?

Constata-se que o ensino do terceiro grau, de um modo geral, pouco tem contribuído para mudanças efetivas na educação, sendo um dos fatores que contribuem para esse fato a desarticulação entre ensino, pesquisa e cursos de extensão.

Os cursos de extensão, oferecidos pelas universidades, de um modo geral, exercem sua função de forma desintegrada da realidade das escolas de 1° e 2°graus, na medida em que enfatizam mais o aspecto de transmissão de novas teorias àqueles que só têm a prática, em detrimento da relação entre ambas.

Nesse sentido, observa-se a desarticulação entre a teoria e a prática no contexto educacional. Recorremos, então ao que diz Magnani (1992):

> *"Um dos caminhos possíveis está em se pensar, de outros pontos de vista, a <u>divisão do trabalho educativo</u> para além da <u>dicotomia</u> imobilista entre o <u>trabalho manual</u> e o <u>intelectual</u>, para que o professor (de todos os graus de ensino) construa, numa <u>práxis</u> compartilhada, <u>a função</u> de seu trabalho <u>social</u> de <u>articulador</u> entre a <u>produção de conhecimentos e as necessidades didático-pedagógicas</u> em sua articulação com as <u>necessidades do conjunto da sociedade</u>."* (p.167) (grifo nosso).

Constata-se que os cursos de Licenciatura em Matemática nas universidades brasileiras, de um modo geral, por vários motivos, não têm cumprido seu objetivo mais amplo que é o de formar integralmente o indivíduo em todas as suas potencialidades humanas, mais especificamente, formar professores-educadores-pesquisadores[14] em Matemática.

Esse fato, entretanto, não é exclusivo dos cursos de Licenciatura em Matemática, como pode ser constatado por meio de alguns dos temas abordados no Primeiro Congresso Estadual Paulista, sobre a Formação de Educadores, realizado em Águas de São Pedro - SP, em 1990, que culminou na obra "Educadores para o Século XXI - Uma Visão Multidisciplinar" (1992). Dessa obra, ressaltaremos as perspectivas para o ensino sob o ponto de vista da relação entre a qualidade de ensino e formação/atualização do professor.

Entende-se a qualidade de ensino como uma construção histórica, assim como as imagens que dela se constroem e a consciência que se adquire a partir do processo de sua construção e de sua atuação em determinado tempo e espaço, com raízes nas necessidades reais da sociedade. Nesse sentido, uma discussão que leva à tona apenas a relação entre a qualidade de ensino e a formação do professor pode não contribuir para o avanço necessário ao raciocínio tautológico aí inerente.

Os fatores políticos que vêm interferindo na educação brasileira, principalmente nas últimas décadas, já explicitados no Capítulo I deste estudo, constituem-se relevantes para contextualizar os aspectos que permeiam a formação do professor-educador-pesquisador.

A barreira que vem dificultando a conciliação entre o trabalho manual e o trabalho intelectual fez com que a formação dos professores se voltasse para o aspecto técnico, ou seja, o professor passou a ser um técnico do ensino, cabendo-lhe o domínio pleno da técnica, para que, efetivamente, atuasse com eficiência e racionalidade no sistema. Nesse sentido, a produção da tecnologia não faz parte de suas expectativas, pois o professor, nesse contexto é meramente um usuário das máquinas instrucionais, devidamente acompanhadas de manuais e treinamentos, conseqüentemente, não lhe possibilitando o desenvolvimento de sua capacidade criadora, do seu senso crítico, e até mesmo de reconhecer seu papel como educador-pesquisador numa sociedade e por conseguinte, lutar por esses direitos.

Nesse sentido, recorremos a Gatti (1992), que explicitando a deformação na formação dos professores e na discussão das propostas curriculares, diz :

> *"(...) O afastamento que houve do mundo dos educadores, especialmente dos pedagogos, em relação à história da produção que a sociedade foi construindo e as novas formas de domínio sobre as matérias-primas, a natureza, bem como as tecnologias que vem sendo gestadas, tudo isso produziu, a meu ver, uma <u>deformação</u> muito grande na <u>formação do professor</u> e na discussão das propostas curriculares. É por isso que, muitas vezes, não saímos de alguns <u>impasses básicos</u>, fundamentais, para decidir, por exemplo, o que é o <u>ensino da matemática numa quinta série</u>. E ficamos nos apegando a <u>filosofias</u> que estão muito <u>distantes do concreto</u> vivido dos sujeitos que são nossos alunos e que vão ter que*

---

[14] O termo professor nesse estudo será usado em uma perspectiva histórico-crítica. Optamos por professor-educador-pesquisador, pois consideramos que os princípios básicos que norteiam o desempenho do professor, vão além de mediatizar o processo ensino-aprendizagem, isto é, um ser em constante mutação e reconstrutor de sua própria história, através da relação dialógica entre si mesmo, o outro, e o objeto de estudo, em uma constante busca e investigação, com a finalidade de propiciar a reestruturação e a transformação do saber.

> *enfrentar o mundo aí fora, mundo que assim creio, nós também não temos condições de enfrentar. Nossa relação com esse mundo ficou muito precária. Desconhecemos alguns dos processos que fundamentam, por exemplo, as teorias da Comunicação que estão na base da Telemática."* (p.156) (grifo nosso).

Dessa forma, como possibilitar uma formação integral aos futuros professores-educadores-pesquisadores de Matemática, levando-se em conta os vários aspectos acima discorridos?

Proporcionar uma formação integral aos futuros professores significa propiciar o desenvolvimento do indivíduo tanto em nível cognitivo quanto afetivo. Entendemos que o indivíduo faz parte de uma realidade que possui um contexto cultural específico, ou seja, que diz respeito a essa realidade e, portanto, devemos pensar nesse desenvolvimento de uma maneira integrada e global. Levando-se em conta os aspectos relevantes dessa cultura, essa abordagem não pode deixar de considerar o programa de Etnomatemática (D'Ambrosio, 1990). Além disso, essa formação implica o desenvolvimento conjunto das estruturas mentais em relação a conteúdo matemático e estratégias metodológicas, pois, como já foi mencionado, um professor educador-pesquisador em Matemática é aquele que concilia a teoria e a prática, ou seja, aquele que constrói a práxis matemática.

Tendo como embasamento teórico estudos sobre a teoria piagetiana[15], temos que o processo de construção do conhecimento se dá pela interação do indivíduo com o meio ambiente. É através dessa interação que o futuro professor de Matemática vai estruturar e reorganizar seus esquemas mentais, promovendo o desenvolvimento intelectual efetivo.

É nesse sentido que se faz necessário pensar-se em propiciar contextos alternativos paralelamente aos cursos de licenciatura, para que essa interação ocorra. Assim sendo, propomos nesta pesquisa a utilização de Laboratórios de Ensino de Matemática, como descritos no Anexo I, e também o ambiente Logo que se constituiriam, como será explicitado no Capítulo 6, desse estudo, em um cenário importante para a futura formação de professores educadores-pesquisadores de Matemática.

Através do Laboratório de Ensino de Matemática, dentro de um contexto dinâmico, o futuro professor vivencia ações pedagógicas distintas, além de entrar em contato com diferentes metodologias de ensino alternativas, com concepções teóricas bem definidas e diversificadas, tais como: Uso e Construção de Material Concreto, Modelagem Matemática, Jogos Matemáticos, Resoluções de Problemas, Sistema Computacional Logo.

Espera-se que o futuro professor, ao desenvolver projetos de pesquisa em Educação Matemática no Laboratório e no ambiente Logo, reflita sobre o assunto e assuma uma nova postura com relação ao ensino de Matemática e, conseqüentemente, assuma, de igual maneira, uma nova ação pedagógica, uma futura prática educativa coerente com uma teoria consistente. Nesse sentido, acredita-se que o futuro professor, ao experimentar as diferentes metodologias, cada uma com suas especificidades, insere-se na vivência de um Programa

---

[15] Os pressupostos teórico-metodológicos que constituem o substrato teórico deste estudo, segundo a vertente construtivista de Jean Piaget, serão explicitados no corpo teórico deste estudo, descrito no capítulo seguinte.

mais abrangente, o Programa da Etnomatemática, isto é, o indivíduo resgata, através das diferentes metodologias, as diferenças sócio-culturais dos vários grupos trabalhados, o que implica um processo dinâmico de transformação de suas próprias concepções teórico-metodológicas, enquanto ser em formação e transformação.

As atividades desenvolvidas no Laboratório são muito importantes, pois elas podem ser vivenciadas pelos futuros professores desde que eles ingressam na Universidade, ou seja, desde o momento em que eles pensam em ser professores, e não somente nos cursos finais da Graduação – Didática e Prática de Ensino. Dessa forma, o Laboratório possibilita uma formação onde se percebe a articulação entre a teoria e a prática, o ensino e a pesquisa e, conseqüentemente, com essas perspectivas, o futuro professor assume-se como educador-pesquisador.

Segundo as considerações abordadas nesse capítulo, concluímos que, apesar da problemática constatada, ou seja, o Ensino da Matemática hoje desvinculado do Ensino da Geometria, nota-se que os estudantes apresentam curiosidade e interesse naturais pelas idéias geométricas, já que a Geometria, sendo o estudo do espaço e das formas que o envolvem, está intimamente ligada à realidade, fazendo parte do cotidiano do aluno, e, além disso, apresenta-se como um componente determinante na evolução histórica da Etnociência[16].

Tentando compreender o problema na sua complexidade, visando propor metodologias alternativas que propiciem condutas pertinentes no Ensino da Matemática, a presente pesquisa propõe-se a mostrar a implementação de uma estratégia metodológica alternativa, baseada em Logo e em Resolução de Problemas, para o Ensino da Geometria, fundamentada na vertente construtivista, que pode redimensionar e até reverter o processo ensino/aprendizagem dessa ciência.

---

[16] Etnociência: Etnomatemática é decorrente da Etnociência, refere-se à Matemática, que considera a Etnia. Tomando como ponto de partida a Etimologia, temos que: ***Etno**:* atualmente é aceito como algo muito amplo referente ao contexto cultural, a Etnia. ***Mathema**:* é uma raiz que confere um significado relativo à explicação, conhecimento, entendimento. ***Tica***: vem de techne, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Então Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais.

REFERENCIAL TEÓRICO DA PESQUISA

CAPÍTULO 3

REFERENCIAL TEÓRICO DA PESQUISA

> *"A História da Ciência, do Geocentrismo à revolução copernicana, mostra que foram necessários séculos para nos liberar de erros sistemáticos, da ilusão causada por um ponto de vista imediatista, oposto ao pensamento sistemático descentralizado."*
>
> *(Jean Piaget)*

Estudos sobre o modo como o conhecimento evolui baseados na teoria de Piaget e em contribuições recentes de seus colaboradores constituem o substrato teórico desta pesquisa, ressaltando a complementaridade entre a Epistemologia Genética e a Psicologia Genética; mais especificamente, serão abordados alguns aspectos relacionados a Macrogênese e a Microgênese do desenvolvimento cognitivo.

No processo de construção do conhecimento, Piaget aborda as condições necessárias para que o indivíduo estruture e reorganize o seu pensamento, com vistas a avançar progressivamente, rumo a uma compreensão cada vez mais objetiva do mundo que o cerca. Essa construção é fruto da interação do indivíduo com o que lhe é externo, ou seja, com o que deverá ser assimilado, a partir da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento.

No processo referido acima, Piaget enfoca as etapas dessa construção e as condições necessárias para que o indivíduo construa o seu próprio conhecimento. A construção do conhecimento é fruto da interação do indivíduo com o que lhe é externo, ou seja, o desenvolvimento, se processa através da ação do indivíduo sobre o objeto do conhecimento. Assim sendo, a ação, no sentido da troca organismo/meio, é o cerne do desenvolvimento cognitivo.

A posição de Piaget com relação ao conhecimento é a de que a razão não é inata. Opõe-se, pois, à posição pré-formista, em que os conhecimentos constituem um conjunto de pré-formações disponíveis ao sujeito desde o nascer. Admite porém a origem biológica dos conhecimentos, ou seja, admite que exista um "a priori" de funcionamento e não de estruturas anteriores às construções do sujeito.

Partindo da posição e que a razão não é inata, a hipótese de Piaget confere às auto-regulações e não à hereditariedade a explicação biológica das construções mentais.

A construção do conhecimento é um processo em que os mecanismos de assimilação e acomodação próprios de todo organismo vivo constituem os invariantes funcionais. O equilíbrio dessas invariantes configura os estados de adaptação cognitiva, assim como os de natureza biológica. Daí a inteligência ser considerada como uma forma de adaptação biológica.

Nesse sentido, conhecer é incorporar o novo, transformando o velho, o pré existente.

Biologicamente, a assimilação –mecanismo de construções do conhecimento– ocorre quando há uma incorporação do organismo de substâncias e energias externas a ele, que asseguram a sua manutenção; psicologicamente, a assimilação permite identificar os objetos em função da relação que estabelece com o conteúdo das estruturas já existentes.

Como a assimilação, o conceito de acomodação tem uma vertente biológica e outra, psicológica. Do ponto de vista biológico, acomodar diz respeito ao esforço que o organismo faz para se ajustar às exigências do que pretende assimilar, visando modificar a estrutura existente para que possam ocorrer novas assimilações.

A equilibração, um dos fatores do desenvolvimento, é um processo que ocorre entre a assimilação de um objeto a um esquema ou estrutura e a acomodação de uma estrutura a um objeto; é fruto de avanços graduais, que ocorrem em função do que Piaget (1975) descreveu funcionalmente como postulados da equilibração, descritos abaixo:

- Qualquer esquema de assimilação tende a se alimentar, isto é, tende a incorporar em si próprio os elementos que lhe são exteriores e compatíveis com a sua natureza;

- Qualquer esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, tende a modificar-se, em virtude de suas particularidades, entretanto mantendo sua continuidade (e por conseguinte seu fechamento com o ciclo de processos interdependentes) e suas capacidades de assimilação anteriores.

Os conflitos ou desequilíbrios são fatores considerados como impulsionadores da evolução do conhecimento; constituem um fato essencial da equilibração, quando superados e ultrapassados pelo sujeito. Assim sendo, a origem do desenvolvimento progressivo do processo cognitivo não está no desequilíbrio, mas sim na reequilibração.

Quando temos uma regulação insuficiente para anular todas as perturbações, ou preencher as lacunas, faz-se necessário subordiná-la a outras, que desempenham ao mesmo tempo a função de correção e esforço. Tem-se então regulações que são interiorizadas gradativamente em um processo contínuo, afastando-se das perturbações exteriores.

Entende-se por perturbação tudo aquilo que representa um obstáculo à assimilação, o que impede que o sujeito possa incorporar um objeto a uma estrutura que ele já possui e desta forma interpretá-lo, compreendê-lo, dando-lhe significado.

Nesse sentido, as compensações implicam nas operações inversas, negações operatórias, e por conseguinte, são mais complexas, objetivando a compreensão efetiva, que é formal.

Para Piaget (1975), existem características comuns às compensações por "feedback" positivo e negativo, uma vez que ambas orientam-se para uma direção inversa (obstáculo) ou recíproca (lacunas) da perturbação, o que seria equivalente a anulá-la (inversão) ou neutraliza-la (reciprocidade) (p.18).

Exemplificando:

Confronta-se um dado sujeito com um problema de conservação das superfícies de figuras geométricas, em que uma delas é um quadrado de 8 cm de lado e as outras duas são retângulos de 8 cm de altura por 4 cm de largura, conforme o que se segue (Figura 3.1):

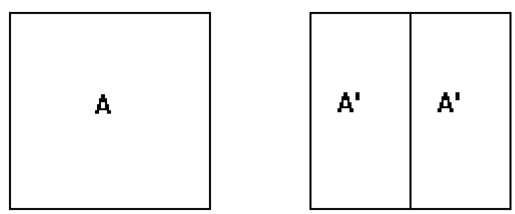

Figura 3.1 - Quadrado A e retângulos A'

Inicialmente pede-se ao sujeito que compare entre si a área do quadrado com a área dos dois retângulos sobrepondo-os ao quadrado.

Uma vez que o sujeito declare a conservação da área das figuras em questão, modifica-se a posição dos retângulos, colocando-se as figuras, como indicamos abaixo (Figura 3.2).

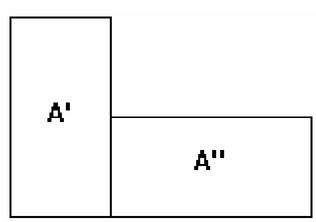

Figura 3.2 - Retângulos A' e A''

Novamente, pergunta-se ao sujeito se a área de A' e A " corresponde à mesma quantidade de metros quadrados de A.

Caso sua resposta seja afirmativa, o sujeito poderá concluir a constância da superfície de A' + A " com relação a A recorrendo à neutralização das dimensões de A' e A " e de A, o que indica a ultrapassagem da perturbação por uma **compreensão por reciprocidade.** Trata-se, no caso, de argumentar que as áreas de A e de A' + A" são iguais em metros quadrados, porque o que aumenta em largura em A' e A" é compensado pelo que diminui em largura nessa nova configuração espacial.

O sujeito poderá também argumentar que a área se conserva, **anulando** a perturbação. Neste caso, ele retoma em ação ou em pensamento A' e A" à posição anterior, em que se sobrepunham exatamente à área de A.

Essas compensações implicam em uma avaliação final de seus êxitos ou insuficiências. Tendem também para conservações, através de transformações, como por exemplo, a conservação de um esquema, sub-sistema de esquemas, estados.

Desse modo os novos conhecimentos são gerados pelo jogo, no sentido de inter-relações entre perturbações e acomodações, modificado pelas retroações.

Entretanto, a melhor maneira, de compensar uma perturbação é através da reversibilidade. Piaget (1975) definiu a reversibilidade como *"a capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos do percurso, mas tendo-se consciência de que se trata da mesma ação."* (p.44).

Cada nível de equilíbrio dá origem a novas equilibrações e uma passagem de um nível a outro deve-se às abstrações reflexivas. Nesse sentido, devido ao fato do sistema superior sempre exercer um papel regulador sobre os níveis cognitivos inferiores, na projeção de um conhecimento de um patamar inferior para o superior, o superior regula o que foi insuficientemente regulado no inferior, desde as regulações iniciais até as abstrações reflexivas. Essa progressão é bem visível nas regulações ativas ou quando a conceitualização dirige a ação (abstrações refletidas).

A reflexão constitui-se em uma verdadeira regulação de regulações, porque em si própria encontra-se um caráter regulador, que regula o que foi regulado pelas regulações anteriores.

Dessa maneira, constata-se a colaboração entre regulações e reflexões, uma vez que ambas progridem de nível a nível, possibilitando o desenvolvimento cognitivo pela construção indefinida de esquemas sobre esquemas, estruturas sobre estruturas, operações sobre operações.

A abstração reflexiva é constituída de dois aspetos indissociáveis: os reflexos ou projeções e as reflexões.

Piaget (1975) destaca os graus e a natureza das projeções mencionando como os mais elementares aqueles que dizem respeito à **representação atual das ações sucessivas (Primeiro grau de projeções)**. O sujeito fala sobre o que fez, conta o que lhe aconteceu. Falar sobre o que se faz sugere uma projeção do acontecido.

Anteriormente a essas projeções deve-se considerar aquelas ocorridas no nível sensório-motor, período em que já se fazem presentes as abstrações reflexivas. As projeções em que o sujeito faz antecipações, lança mão de indícios, etc, que refletem ações ou coordenações anteriores são chamadas de pré-representativas.

O segundo grau de projeções é o das **reconstituições** (com ou sem discurso), **de uma seqüência de ações**, do início ao fim, e que se constitui na conexão das representações num todo generalizado. Observam-se essas projeções quando uma criança relata para um adulto o acontecido em um determinado passeio, e ao explicitá-lo ela seqüência os acontecimentos, objetivando propiciar ao interlocutor uma noção de como os eventos foram produzidos. Uma situação específica, evidenciada segundo essa ótica, e retirada da parte prática da nossa pesquisa, é a do caso de uma criança que trabalhando no contexto Logo, ao desenhar uma casinha, e, obtendo uma representação diferente daquela idealizada, necessita reelaborar suas estratégias, modificando seu raciocínio, isto é, "depura" seu programa, reflete e reconstitui uma seqüência de ações para atingir seu objetivo.

O terceiro grau de projeções é aquele que **estabelece comparações**, em que o todo organizado é confrontado com outros, análogos ou diferentes. No dia-a-dia elas acontecem naturalmente sem que o sujeito tenha sido solicitado nesse sentido. Podem ser também intencionalmente provocadas. Exemplificando, observa-se esse tipo de projeção quando a criança é solicitada a comparar figuras geométricas, no sentido de classificá-las quanto a sua forma. Nota-se implícita nesse contexto a reconstituição de comparação de ações vivenciadas, à medida em que ela retoma o conhecimento anterior e com ele opera para atingir seu objetivo.

Desde que, por força das comparações, as estruturas comuns e não comuns tenham se definido, atinge-se o **quarto grau,** caracterizado pelas **reflexões de primeira potência**, que já supõe a articulação em pensamento de uma dada situação: o sujeito reflete sobre os conteúdos interiorizados. Exemplificando: classificação operatória em que o sujeito reflete o que é projetado do real para o simbólico (operação sobre ação).

Constata-se finalmente os **diversos graus** de **meta-reflexão** ou **reflexões de segunda potência.** A partir desse **quinto grau**, a reflexão torna-se essencial, opondo-se à projeção. Nesse caso, o sujeito não está mais submetido ao objeto como um dado que lhe é externo. Exemplificando: Uma combinação em que o sujeito aplica uma operação sobre a operação de classificação.

Quanto à **natureza das projeções**, o que deve ser observado é a conscientização progressiva que evolui dos aspetos observáveis para a conceituação, através da interiorização das ações. Nesse processo já se evidencia as abstrações. Os aspectos observáveis, decorrentes das abstrações empíricas, referem-se ao conteúdo dos conceitos. Os aspectos conceituais, por sua vez, referem-se à sua forma.

A forma diz respeito à reunião ou união dos objetos integrados em um todo, apoiando-se nas suas qualidades comuns, ou seja, nas suas relações de equivalência; deriva portanto das abstrações reflexivas.

O desenvolvimento dessas abstrações assemelha-se a uma depuração progressiva na busca das formas. Cada patamar de abstração reflexiva comporta formas cada vez mais complexas e, portanto, mais adequadas a apreender os conteúdos, isto é, incorporar novos observáveis. A formação de cada grau ou nível de abstração implica em novas reflexões de natureza qualitativamente diferentes, de modo que a coordenação de duas ações não é da mesma natureza da coordenação de suas representações conceitualizadas decorrente das reconstruções que se fazem presente em cada projeção.

Constata-se então um processo em espiral no qual toda projeção de conteúdos pressupõe a intervenção de uma forma (reflexão), os conteúdos projetados, envolvem a construção de novas formas advindas das reflexões. Conseqüentemente, presencia-se uma alternância contínua de **projeções → reflexões → projeções**, ou seja uma seqüência de **conteúdo → formas → conteúdos reelaborados → novas formas,** abrangendo noções cada vez mais amplas, sem um final e uma origem absolutos.

As abstrações empíricas e reflexivas estão presentes em todos os períodos do desenvolvimento cognitivo, desde o sensório-motor, até os mais evoluídos níveis do pensamento científico.

A diferenciação dessas abstrações em todos os seus níveis depende de três fatores:

- As abstrações empíricas consistem em retirar dos observáveis as propriedades que lhes são inerentes; as abstrações reflexivas consistem em retirar das coordenações das ações, as inferências, as deduções, as leis.

- As abstrações reflexivas organizam-se em graus desde as mais elementares coordenações de ações (prensão/visão), até as mais fundamentais (ordem, correspondência, classes, entre outros).

- As funções de forma e conteúdo são relativas, uma vez que toda forma pode se converter em conteúdo para a forma seguinte que a engloba. Tem-se aí as variedades de abstrações pseudo-empíricas. Essas abstrações referem-se as propriedades dos objetos, suas constatações são produto das coordenações das ações, mas procedem do objeto e de seus observáveis atuais. É constatada quando o sujeito deduz um dado conhecimento, por exemplo a conservação do número, diante de dois conjuntos de fichas dispostas espacialmente nas mais diferentes configurações.

As abstrações constituem dessa maneira fonte de novas estruturações e conduzem a generalizações.

Generalizações construtivas, segundo Piaget, constituem-se nas novidades próprias do período operatório completo, em que a reversibilidade faz-se presente acrescentando novos poderes à cognição; essa capacidade é preparada pela reversibilidade pré-operatória. Da mesma maneira, as estruturas do período operatório formal são decorrentes das generalizações construtivas, e são preparadas no período anterior pelos agrupamentos.

As abstrações e generalizações apóiam-se e interrelacionam-se uma às outras, de modo que à abstração empírica correspondem generalizações indutivas, e às abstrações reflexivas e refletidas correspondem generalizações construtivas.

As generalizações referem-se à assimilação do desconhecido com o conhecido. As generalizações indutivas vão do particular para o geral, isto é, percorrem um caminho de "alguns para todos" por extensão. Exemplificando, ocorre quando o sujeito, face a um objeto físico desconhecido tenta descobrir similaridades entre os predicados do objeto e os seus conhecimentos anteriores. Essa correspondência dá-se pelo estabelecimento de diferenciações, de acomodações dos esquemas de assimilação ao novo conteúdo.

As generalizações construtivas dizem respeito ao geral, buscam as leis de totalidade e procuram criar uma relação geral em que os fatos conhecidos e os fatos novos sejam englobados. O caminho da generalização construtiva é integrativo, isto é, a integração da estrutura em um sistema mais amplo, que diz respeito ao que é comum às partes.

As construções cognitivas, através das abstrações e das generalizações tornam-se necessárias progressivamente.

Dessa maneira a teoria piagetiana explica o desenvolvimento intelectual pela passagem da ação à conceitualização em função da compreensão progressiva das noções de classe e relação, devidas às estruturas mentais, e à compreensão das relações repetitivas da natureza, que são o espaço, tempo, causalidade e objeto.

Piaget (1977) define o processo de tomada de consciência como sendo um mecanismo que:

> *"(...) aparece em todos os aspectos como um processo de conceituação, que constrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação. Não há portanto diferença de natureza numa tal perspectiva entre a tomada de consciência da ação própria e o conhecimento de seqüências exteriores ao sujeito, comportando ambos uma elaboração gradativa de noções a partir de uma dado; quer este consista em aspectos materiais da ação executada pelo sujeito, quer em aspectos materiais das ações que são realizadas entre os objetos."* (p.404).

Nessa teoria, o consciente é o conceito e o inconsciente é o esquema de assimilação. Então tomar consciência significa transformar um esquema em conceito. Em outra palavras, o inconsciente constitui-se de um conjunto de abstrações reflexivas a que o sujeito não tem acesso, porque ainda não foram refletidas. Conceito é uma coordenação de idéias explicitadas, e o consciente é um sistema de conceitos, portanto, um sistema de coordenações e inferências refletidas.

Tomar consciência consiste em reconstruir no plano das representações o que foi realizado no plano das ações, trata-se pois da organização em discurso, em gesto, em desenho, em simbólico, enfim, do que se assimila da ação.

A passagem de uma forma prática de conhecimento, para o pensamento refere-se à reconstrução, isto é, à transformação de esquemas de ação em noções, operações; não se limita apenas a uma espécie de esclarecimento, isto é, algo que torna uma situação perceptível, sem contudo modificá-la.

Dessa maneira, a tomada de consciência é sempre gradual, pois se reconstrói, isto é, repete-se no plano mental o que foi vivido na ação, pouco a pouco, através do processo de regulação.

Em toda a ação do indivíduo dois elementos fundamentais se fazem presente: os objetivos (fins, intenções), e os resultados (êxitos, fracassos). Esses dois elementos são os fatores mais superficiais da ação, o desencadeamento (ponto inicial) e o ponto final. Os objetivos e resultados integram o sujeito ao objeto e confundem sujeito com objeto. A diferenciação entre ambos vai acontecendo, na medida em que, pelos processos de regulação, o sujeito vai tomando consciência do que é intermediário, ou seja, dos meios que ele utiliza para atingir os objetivos. A busca desses meios conduz o sujeito a tomar consciência de suas ações e do que é o objeto.

A tomada de consciência configura uma assimilação conceitual que implica em acomodação da ação do sujeito a uma dada situação. Para que o equilíbrio ocorra, as regulações ativas interferem de forma decisiva e o caminho do sujeito para consegui-lo é assinalado, inevitavelmente, por deformações iniciais. A reconstrução em alguns casos é simples: consiste na correspondência direta entre ação e reflexão. Existem outros casos em que a construção é complexa, pois há conflito entre a construção e o esquema anterior que é consciente para o sujeito. Nesses casos é preciso que haja uma correção desse esquema anterior, consciente, que deforma os dados de observação e reprime a fonte de conflito. Pode acontecer o mesmo em relação à correção dos dados físicos.

Há ainda a questão dos graus de consciência. A conceituação constitui em si própria um processo, ou seja, não se processa de imediato, decorre disso o fato de existirem vários níveis conceituais se interpondo entre os êxitos precoces, e a tomada de consciência final. Isso significa que a autonomia e o aspecto cognitivo da ação ocorrem e se mantêm antes da efetivação da tomada de consciência. A passagem das formas práticas de conhecimento para o pensamento pode se produzir após muitos anos de êxitos práticos, dessa maneira, a tomada de consciência retarda-se por inúmeras deformações e recalques que impossibilitam o sujeito de perceber, em suas próprias ações, certas características facilmente observáveis e que lhe asseguram o êxito. A inconsciência dessas características impede, portanto, a compreensão conceitual. Em todos esses graus de conscientização intervêm dois processos essenciais: a interiorização e a exteriorização, que norteiam o sujeito nas suas iniciativas de compreensão e de equilibração de uma dada situação.

Constata-se dessa maneira, que o fazer não supõe a consciência, mas sempre supõe uma intenção. O compreender supõe a consciência e é irreversível, em todos os seus graus. Piaget (1974-1978) determinou as analogias e diferenças entre o *"réussir*", conseguir fazer algo, e o *"comprendre"*, resultado da conceituação, quer esta a suceda ou a preceda, orientando-a. Constata-se igualmente a conciliação entre os movimentos de interiorização, referentes as estruturas físicas, e as relações entre as afirmações e as negações (respectivamente, elementos positivos e negativos da conceituação).

No processo do fazer até o compreender, através da tomada de consciência, tanto em relação a ações de êxito precoce quanto nas situações em que os sucessos da ação ocorrem de modo espaçado, confirma-se o fato de que é a partir de certo nível de conscientização que há influência da conceituação sobre a ação. Tal fato ocorre porque a conceituação fornece uma certa capacidade de antecipação e uma regulação mais ativa à ação. Obtém-se com isso a abertura de uma possibilidade de escolha entre meios diferentes e correções compensadoras às ações do sujeito, que antes só se limitaram às regulações automáticas.

Segundo Piaget (1986), *"(...) um erro corrigido pode ser mais fecundo que um êxito imediato, porque a comparação da hipótese falsa e suas conseqüências proporciona novos conhecimentos e a comparação entre eles dá lugar a novas ideias. "* (p.8).

Observando-se o comportamento de uma criança, constata-se que a estrutura define-se como sendo aquilo que a criança sabe fazer e não o que ela pensa sobre o que faz, ou seja, a estrutura existe na mente da criança e se reflete em suas ações. Entretanto mesmo nas situações em que os problemas são diferentes e em que se pretende compreender e não apenas conseguir fazer alguma coisa, o sujeito pode permanecer muito tempo inconsciente das estratégias de que se utiliza para resolver o problema. Quando aplica suas estruturas sobre os objetos ou sobre suas próprias ações, o sujeito não faz dessas estruturas um tema de reflexão. Esse fato somente ocorre quando o sujeito atinge um nível mais elevado de abstração, ou seja, no período das operações formais.

Portanto, fazer é compreender na ação uma determinada situação em grau suficiente para atingir os objetivos propostos e compreender é conseguir em pensamento dominar as mesmas situações, até que se possa resolver os problemas por elas levantados quanto às razões e aos meios utilizado na ação (Mantoan, 1992).

Ao fornecer uma certa antecipação às ações, o compreender abre para o sujeito uma possibilidade de escolha de meios diferentes e correções mais compensadoras que lhe permitem chegar mais diretamente ao êxito. Tal fato ocorre, porque como já destacamos, a conscientização pressupõe regulações ativas.

Em outras palavras, ao descobrirmos uma maneira de resolvermos um dado problema, a compreensão nos ajuda a explicarmos o que descobrimos para outras pessoas e para nós próprios. A compreensão auxilia-nos na explicitação de nossas ideias e no aperfeiçoamento de cadeias desordenadas de ações e/ou pensamentos em coordenações mais simples e essenciais.

Reportando-nos a Minsky (1989) a compreensão nos beneficia pois:

> *"(...) com muito mais freqüência, ao invés de explicarmos o que realmente fizemos, surgimos com uma nova formulação. Paradoxalmente, os momentos em que achamos estarmos sendo lógicos e metódicos, podem ser apenas os momentos nos quais somos mais criativos e originais."* (p.189) (grifo nosso).

A Epistemologia Genética de Jean Piaget tem, por objetivo, estudar como o conhecimento passa de um *estado de validade* inferior para um outro maior, superior. A Psicologia Genética, por sua vez, tem como fim o estudo da passagem de um *estado de equilíbrio* inferior a um superior.

Hoje, as contribuições da Cibernética e da Inteligência Artificial, entre outros fatores, propiciaram o estabelecimento de relações entre a Epistemologia e a Psicologia Genéticas, constituindo o que modernamente a Escola de Genebra entende como Construtivismo Psicológico e Construtivismo Epistemológico.

Uma fecunda cooperação entre essas duas disciplinas iniciou-se através das ligações entre os últimos trabalhos de Piaget sobre as investigações psicológicas do sujeito cognoscente e os estudos desenvolvidos por Minsky, Papert, Cellerier e Inhelder (Inhelder e Cellerier, 1992).

De fato, a Escola de Genebra propõe-se atualmente a investigar o Construtivismo Psicológico, isto é os procedimento em jogo na Resolução de Problemas particulares, ou seja, a funcionalidade da inteligência, mais do que a análise estrutural, geral do pensamento, que constitui o Construtivismo Epistemológico.

O Construtivismo Psicológico resgata os primeiros estudos de Piaget sobre a linguagem e pensamento da criança e sobre a inteligência sensório-motora, em que este autor apresenta uma psicologia do funcionamento da inteligência. Ao mesmo tempo, essa linha de investigação enriquece os primeiros trabalhos de Piaget com processos psicológicos mais complexos, que dizem respeito à elaboração de procedimentos e à representação semiótica.

A Inteligência Artificial e os estudos sobre os processos de Resolução de Problemas permitiram uma nova ótica do funcionamento intelectual, que visa as condutas do indivíduo, mostrando como este reorganiza seus objetivos para chegar a realizar suas tarefas. Centram-se pois, sobre o caráter temporal das condutas do sujeito psicológico e constituem as chamadas Microgêneses Cognitivas. Tal abordagem estuda e descreve os procedimentos do sujeito idiossincrático, cuja elaboração se efetua em contextos práticos e comuns, em uma escala temporal, destacando a interação entre o sujeito e o objeto e analisando em detalhes as condutas cognitivas, ou seja, os encadeamentos, os cortes de ações, a atribuição de significação às tarefas, as escolhas dos instrumentos de conhecimentos postos em ação e o controle e a pertinência das ações aos fins a que se propõe o sujeito.

A construção microgenética constitui um campo conceitual próprio para o estudo do funcionamento cognitivo, em período de conflitos, de transição, onde se verifica a abertura para "novos possíveis" e o predomínio das Acomodações (Diferenciações) sobre as Assimilações (Generalizações).

A pesquisa microgenética procura compreender como o sujeito controla informações que retira diretamente de suas ações, dos objetos e das relações entre ambos. Trata-se também das descrições que o sujeito faz ao atribuir significados. Destaca a influência das significações na representação das ações do sujeito, das suas relações com o objeto, em situação de Resolução de Problemas.

Os aspectos da atividade cognitiva privilegiados na perspectiva microgenética de análise são aqueles que permitem estudar o sujeito cognoscente em suas intenções, valores e heurísticas. Possui igualmente uma dimensão teleonômica, que diz respeito aos objetivos, fins, propósitos do sujeito ao agir, e uma Axiologia, ou seja, uma dimensão relacionada às avaliações, aos valores que o sujeito atribui às suas próprias ações, com vistas a atingir objetivos determinados.

As heurísticas por sua vez são estratégias que o sujeito compõe, norteado pelos seus objetivos, fins determinados e valores, levando em conta o que lhe é significante, recuperando, dessa forma, a sua subjetividade no processo de redescoberta e busca em situações conflitantes. O diagrama a seguir ilustra a interpretação entre as dimensões funcionais do dinamismo microgenético.

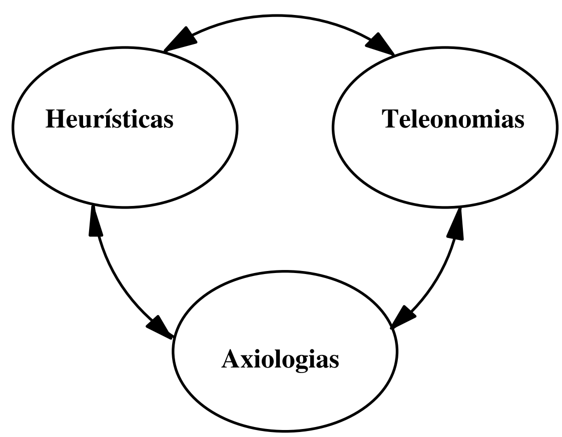

Figura 3.3 - Dinamismo das condutas cognitivas microgenéticas

Finalmente a pesquisa microgenética ou funcional relaciona-se ao sujeito psicológico, mas reconhece igualmente o sujeito epistêmico. Decerto, o conhecimento normativo é próprio do sujeito epistêmico e o conhecimento pragmático ou empírico é próprio do sujeito psicológico. Esses dois tipos diferentes de conhecimento se complementam ao se analisar a compreensão do sujeito cognoscente, quando concebido como construtor ativo do conhecimento.

3.1) Pressupostos Teórico-Metodológicos da História da Matemática

> *"A base histórica pode auxiliar os alunos, ou a Matemática, a ver como a Matemática se encaixa no pensamento humano, como Descartes, o matemático, se relacionou com Descartes, o filósofo. Ver a Matemática do passado, no seu contexto histórico, ajuda a entender a Matemática do presente no seu contexto filosófico, científico e social e a ter uma melhor compreensão do lugar da própria Matemática no mundo."*
>
> (Grabiner, 1975)

Retornamos, nesse momento, aos questionamentos introduzidos no capítulo anterior, os quais estão sendo delineados por partes, e nesse momento fundamentados nos pressupostos teórico-metodológicos da História da Matemática, e da nossa concepção da própria Matemática.

Pretende-se nesse estudo delinear uma relação entre a História da Matemática e a Educação Matemática, relação essa, explicitada através de várias abordagens de diferentes filósofos, matemáticos e historiadores em contextos e épocas distintas, com o objetivo de recorrer à História, como um recurso pedagógico adicional, contextualizando o ensino da Matemática, e em decorrência o da Geometria, segundo uma vertente histórica. Se formos pesquisar a **etimologia** da palavra história, encontraremos que história significa **tecido**, isto é, a história é um tecido que vai sendo "tecida" ao longo dos diversos momentos.

Nesse sentido, faz-se necessário uma breve reflexão de nossa parte em uma perspectiva histórica, como explicitado acima, abordando o Ensino da Matemática, através da História da Matemática, contextualizando nesse cenário o Desenvolvimento Histórico da Geometria, que será tratado no Capítulo 4, com o objetivo de **elucidar o problema** desta investigação:

É possível resgatar ou captar algumas abordagens do Desenvolvimento Histórico da Geometria, através do ambiente Logo?

Nesse sentido, algumas reflexões serão delineadas, baseadas em nossas investigações a esse respeito a partir de anotações de aulas sobre a disciplina: História da Matemática, de levantamentos bibliográficos, e de estudos elaborados sobre as reconstituições que historiadores distintos construíram da própria História da Matemática.

Dessa forma, por volta da segunda metade do Século XX, Castelnuovo (1966), em sua obra "Geometria Intuitiva" explicita que sofreu forte influência e inspiração da obra de Clairaut "Os Elementos da Geometria", direcionando suas pesquisas a fim de enfocar um caminho diferente e inovador para o desenvolvimento do ensino da Geometria na escola elementar, caminho esse baseado no desenvolvimento histórico dessa Ciência.

Entretanto, ao se referir à autora acima mencionada, Miguel (1993), relativisa a inovação preconizada por Castelnuovo, dizendo que esta:

> *"(...) faz, um reparo às reflexões de Clairaut a fim de justificar a defesa daquilo que chama "uma visão mais ampla da história". Este "mais amplo" não deve, porém, ser entendido no sentido de adoção de uma concepção diferenciada da história em relação àquela defendida por Clairaut, mas no de uma ampliação cronológica da geometria para que pudesse abarcar também a pré-história humana, período em que a professora acredita terem-se originado as primeiras formas e noções geométricas. O caminho seguido por Castelnuovo, como ela própria o define, é "construtivo, não descritivo (...) com uma orientação não-euclidiana", isto é, no sentido de uma metodologia não-euclidiana, mas que "também mostra uma lógica verdadeiramente construtiva porque, ao segui-la, refazemos o trabalho levado a cabo pela humanidade."* (p.13) (grifo nosso).

A maneira com que Castelnuovo operacionaliza esse preceito no plano pedagógico, mais especificamente no plano do ensino da Geometria, é linear e mecânico, uma vez que em sua proposta metodológica existe segundo uma ordem cronológica, uma correspondência biunívoca, entre determinados tópicos geométricos e determinados períodos de tempo, e dessa maneira essa hierarquização inerente aos tópicos geométricos, assim determinada, passa a ser enfocada como uma seqüência pedagógica a ser seguida.

Assim como Clairaut e Castelnuovo, constata-se que muitos outros matemáticos e educadores matemáticos desde aquela época, até os nossos dias, recorrem à História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino da Matemática.

Miguel (1993), ao discorrer sobre a História da Matemática, afirma que: *"A utilização do chamado "princípio genético" para justificar o recorrer à história com tal objetivo talvez tenha sido a fundamentação ao mesmo tempo mais antiga e mais freqüente por parte desses matemáticos e educadores."* (p.14) (grifo nosso).

Convém ressaltar que nesta pesquisa, o Princípio Genético, e suas extensões metafóricas, **não** serão abordados **como meio de fundamentar** estudos que **relacionem a História da Matemática** e o **Ensino da Matemática**, mas somente com o objetivo de **esclarecer o seu papel**, explicitado acima, apesar de inúmeras controvérsias, no decorrer da História da Matemática.

3.1.1) O Princípio Genético no Contexto da História da Matemática

A Lei Biogenética foi formulada pelo biólogo alemão Ernst Heinrich Haeckel no final do século XIX, como complemento biológico da teoria da evolução, sob o nome de "hipótese da recapitulação" ou "paralelismo ontofilogenético".

"A Ontogenia recapitula a Filogenia".

Prado (1990), afirma que: *"A relação entre a necessidade desse estudo por parte do professor e a Lei Biogenética de Haeckel torna-se mais evidente se nos detivermos na busca do significado dessa lei, na sua singularidade"* (p.10).

Nesse sentido, o significado dessa lei se expressa:

Por Ontogenia entende-se o desenvolvimento animal individual.

Por Filogenia entende-se a história evolucionária da espécie animal.

Em analogia com o caráter de desenvolvimento por meio de estágios sucessivos da Lei Biogenética fundamental, é estabelecido o "Princípio Genético" para o ensino, com o seguinte enunciado: *"O aprendizado efetivo requer que cada aprendiz retrace os principais passos na evolução histórica do assunto estudado."* (Byers, 1982).

A Educação Matemática, no final do século passado e início do presente, sofreu forte influência da Lei Biogenética fundamental: "A ontogenia recapitula a filogenia". Foi ela a razão indireta para a argumentação em favor de que professores de Matemática estudassem História da Matemática (Byers, 1982). Assim, o estudo da História da Matemática pelo professor de Matemática passa de um estatuto de grande importância para um estatuto de necessidade.

Nesse momento, apresentaremos dois grandes matemáticos que defenderam o Princípio Genético no início desse século.

Henri Poincaré , em sua conferência de 1908 na Société de Psychologic de Paris, parte da premissa de que se o professor deseja que o aluno compreenda o raciocínio matemático presente em uma demonstração, isto é, mostrar a importância de se considerar a intuição matemática no ensino, esse ensino deve percorrer um caminho, que não é linear, para chegar à demonstração, que é lógica.

Em Educação Matemática, o raciocínio dedutivo, ou seja, a demonstração não precisa ser necessariamente o único produto do pensamento lógico-matemático, como se evidencia no ensino tradicional, de uma maneira geral. Temos outros tipos de raciocínio: pode-se partir da dedução para a indução, da indução para a dedução e –insistimos em afirmar – além do raciocínio **indutivo** e **dedutivo**, em Educação Matemática, deve-se propiciar o desenvolvimento do raciocínio **abdutivo** em nossos alunos, isto é, o raciocínio **lógico** composto da combinação dos raciocínios **indutivo** e **dedutivo** com um caráter a mais, a **reificação**, que são hipóteses ou conjecturas que os alunos vão levantando durante a resolução de problemas, testáveis matematicamente.

Ainda, Poincaré (1988) estabelece o seguinte enunciado para o Princípio Genético: *"(...) O educador deve procurar fazer a criança repassar por onde haviam passado seus* *antecedentes, muito rapidamente, mas sem omitir etapas. Para esse fim a história da Ciência deve ser o nosso guia."*

O segundo eminente matemático, Felix Klein, também em 1908, em sua obra "Matemática Elementar Sob o Ponto de Vista Avançado", defende o Princípio Genético como norteador para o ensino:

> *"(...) do ponto de vista da pedagogia da Matemática, nós podemos certamente protestar contra a apresentação prematura de assuntos abstratos e difíceis aos alunos. Para fornecer uma expressão precisa de minha visão sobre este ponto, gostaria de expor a Lei Biogenética fundamental, segundo a qual o indivíduo atravessa, em uma série abreviada, todos os estágios do desenvolvimento da espécie. Tais idéias tornaram-se hoje parte e parcela da cultura geral de cada um. Penso que a instrução em matemática, assim como tudo o mais, deveria seguir essa lei, pelo menos no geral (...)."*(Klein[1], citado por Prado, 1990, p.13).

Prado (1990), desenvolve uma pesquisa bibliográfica com diferentes autores que sustentam a validade da aplicação do Princípio Genético no ensino da Matemática no final do século passado e início deste. Além de Poincaré e Klein, cita outros autores e outras áreas do conhecimento ao longo do tempo como veremos:

Na Física, o Princípio Genético foi tratado por Ernst Mach(1838 - 1916), físico alemão e professor que, para explicitar uma idéia, referia-se a sua gênese e rastreava sua formação histórica (Jones, 1969). No prefácio de seu Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo, o físico-matemático J. Clerk Maxwel (1831 - 1879), defendendo uma postura na mesma filosofia do Princípio Genético, explicita que: "*É de grande vantagem para o estudante de qualquer disciplina lê-la nos textos originais, pois assimila-se mais completamente um conteúdo quando ele está em estado latente."*

É ainda Prado quem afirma que, a partir do início desse século, tanto o Princípio Genético, como a preocupação com a História que dele decorre adentram, em um período relativamente longo de obscuridade, no qual matemáticos e educadores matemáticos deixam de mencioná-lo.

Convém ressaltar nesse contexto que no final dos anos 50 constata-se uma crise na sociedade mundial, originada pelo lançamento do primeiro Sputnik, em 1957, pelos russos, cujos reflexos se fizeram presentes no cenário educacional. Esse fato provoca um "choque" nos Estados Unidos, cujos educadores nesse contexto tinham a preocupação com a qualidade do ensino, e com os objetivos educacionais, sem abandonar contudo o "ideal" da educação que se traduzia em preparar homens bem equilibrados para uma democracia. É importante salientar, nesse sentido, que afinal cada geração "dá" novas formas às aspirações que modelam a educação em seu tempo.

---

[1] KLEIN, F. (1945) *Elementary Mathematics from a Advanced Standpoint.* Vol. 1 e 2. Trans. E.R Hedrick & C.A. Noble. New York: Dover.

Nesse sentido, transformações profundas ocorreram em relação às pesquisas científicas, em relação a ciência, a tecnologia. Na política educacional e nos ambientes dos matemáticos, a educação passou a ter um caráter tecnicista; esse fato ocorreu, entre outros aspectos, porque os americanos, objetivando estar à altura da tecnologia russa, precisavam formar técnicos, engenheiros, cientistas e, para tanto, mudanças nos currículos, tornavam-se necessárias. A Matemática deveria estar em evidência, no sentido de servir o monopólio do cienticismo. Assim, faziam-se necessários novos programas, e para tanto, foram solicitados congressos internacionais, com especialistas em todo o mundo, para se discutir como deveriam ser os programas de Matemática. A educação deveria ser voltada ao tecnicismo, sempre tendo em vista o dualismo que permeava a filosofia educacional americana da época, dualismo esse expresso em: ensinar o útil (ensino pragmático) ou ensinar o ornamental (ensino complementar).

Face a esse contexto, o ensino de humanidades e as Ciências Humanas ficaram relegados a um segundo plano, e o ensino da História da Matemática, praticamente foi esquecido.

Temos o ressurgimento na literatura do Princípio Genético abordado por Polya (1967), com o seguinte enunciado: *"Quando se ensina um ramo da Ciência (ou uma teoria, ou um conceito) devemos deixar a criança traçar nele as grandes etapas da evolução intelectual da raça humana."*

Esse **Princípio** sugere o que Polya denomina de **"Princípio das fases consecutivas"** da aprendizagem ativa, em que o educando aprende "descobrindo por si mesmo". Essas fases constituem-se em:

- **exploração**, em nível intuitivo (ação - percepção),

- **formalização**, em nível conceitual (terminologia - definições - provas),

- **assimilação**, em nível das aplicações e generalizações.

Essas mesmas fases válidas para o ensino podem ser detectadas, segundo Polya, na evolução histórica de uma Ciência.

- **exploração** - as primeiras idéias surgem do contato com a experiência,

- **formalização** - os materiais são ordenados, uma terminologia apropriada é introduzida, as leis são descobertas,

- **assimilação** - os conceitos, as leis e as teorias são colocadas num contexto mais amplo.

Nesse sentido, convém ressaltarmos que a integração entre o Princípio Genético e o Princípio da Aprendizagem Ativa propicia aos alunos redescobrir o que aprende (Polya, 1967).

Ainda sobre os teóricos que referendam o uso da História da Matemática, nos reportamo-nos a Kline (1976), quando esse questiona a Matemática dedutiva e rigorosa que aparece nos currículos dos anos 60 conhecida como Matemática Moderna e Nova Matemática, no sentido de sobrepor a intuição à apresentação lógica. A Matemática ensinada nas escolas *"deve ser desenvolvida construtivamente, não dedutivamente".*

Kline ainda diz: *"(...) o Princípio Genético é de grande auxílio. Esse princípio diz que a ordem histórica é usualmente a ordem correta e que as dificuldades que os matemáticos experienciaram são justamente aqueles que nossos alunos experienciarão."*

Wilder (1974), enfatiza o uso da História da Matemática, postulando que:

> *"(...) A Matemática não se desenvolve independentemente das forças culturais: religião, arte(...). Nós sabemos alguma coisa sobre a cultura da antiga Babilônia, do antigo Egito, do Renascimento na Europa e podemos tentar colocar a Matemática no interior dessas culturas".*

Jones (1969) diz que: *"o melhor caminho para guiar o desenvolvimento mental do indivíduo é aquele que lhe permite retraçar o desenvolvimento mental da espécie - retraçar em grandes linhas, evidentemente e, não os milhares de erros em detalhes."*

Grattan-Guinness (1973), embora considere inútil a História no ensino da Matemática nos estágios iniciais, mais especificamente, nas séries iniciais, procura convencer-nos da necessidade de desenvolver os cursos na universidade do ponto de vista histórico. Preconiza três ordens de se apresentar uma teoria em uma determinada área do conhecimento matemático: Epistemológica (formal); Heurística e Cronológica (histórica).

Sebastiani Ferreira (1989a) constata o Princípio Genético na construção dos conceitos matemáticos nas tribos indígenas brasileiras e em crianças de 07 anos.

Nesse sentido, Moniz dos Santos (1991), quando estuda o paralelismo entre modelos históricos da ciência, enfatiza que:

> *"De um modo geral, as concepções alternativas fazem recordar concepções históricas da ciência. Sugerem conceitos científicos já ultrapassados. De fato, alunos de todos os graus de ensino ostentam concepções alternativas que correspondem a modelos que já foram aceitos pela ciência e que foram, posteriormente, refutados ou grandemente modificados. Por exemplo, os alunos descrevem o calor como uma substância, à semelhança da teoria do calórico, explicam o movimento por uma força inerente ao objeto como na teoria pré-galileana do impetus, (...)."* (p.113).

Byers (1982) defende o Princípio Genético na forma rígida em razão de que o objetivo do professor é o ensino imediato, e alguns conceitos surgem naturalmente na criança, mas na história apareceram em ordem inversa. Cita, então, o exemplo do zero.

Destaca ainda a importância de haver uma correspondência entre o desenvolvimento cognitivo da aquisição de conceitos matemáticos e sua evolução como produtos culturais. Porém na nossa concepção essa **correspondência não é termo a termo.**

Inhelder (1987) procura uma **relação** entre a evolução histórica das Ciências e o desenvolvimento cognitivo a partir das contribuições de Piaget e Rolando Garcia, e nesse sentido, postula no prefácio do livro Psicogênese e História das Ciências, dos autores citados, que os mecanismos e instrumentos, ilustrados por diferentes processos de resolução de problemas do sujeito, revelaram-se de natureza tão geral, que podem ser vistos como heurísticas para se analisar as seqüências históricas de algumas evoluções do pensamento matemático e físico.

> *"(...) A intenção dos autores nesta investigação dos mecanismos generalizados não é, de forma alguma, descrever as correspondências termo a termo, e muito menos admitir uma recapitulação da filogênese pela ontogênese, nem mesmo deter-se na evidência de analogias de sucessão, mas procurar saber se os mecanismos de passagem de um período histórico ao seguinte, no contexto de um sistema de noções, são análogos aos da passagem de um estádio genético aos seus sucessores."* (p.14) (grifo nosso).

Ainda Inhelder, lembra que, esse fato se evidencia pelas explicações dadas pelas crianças sobre a transmissão de movimento.

Nesse contexto, Feldeman[2], citado por Inhelder e Cellérier (1992), seguindo uma linha empirista, postula que deve haver uma diferenciação entre as "representações ônticas" da realidade e as "representações epistêmicas", referentes às operações do sujeito. Este autor sugere que as primeiras são anteriores às epistêmicas, no que diz respeito à cognição e que é possível conceber uma ontologia genética, do tipo construtivista.

Inhelder e Caprona (1992) postulam que a distinção dessas representações é fundamental no estudo dos funcionamentos cognitivos, em relação às descrições funcionais pois, em toda resolução de problema, a exploração do objeto e a representação dos estados se articulam com as representações que dizem respeito ao "como fazer". Entretanto, não consideram as representações ônticas como fator constitutivo das representações epistêmicas, isto é, o sujeito é sempre o construtor nesses dois tipos de elaboração da realidade.

Esse fato pode ser traduzido em um contexto em que o sujeito, ao representar seus conhecimentos, não segue necessariamente as mesmas etapas pelas quais esses conhecimentos foram elaborados e constituídos no desenvolvimento da produção científica.

---

[2] FELDMAN, C. (1987) *Thought from language: The linguistic construction of cognitive representations*. In J. Bruner and H. Haste (Eds.), Making sense: the child's construction of the world (p.131-146). London and New York: Methuen.

Um caso de tal paralelismo é a Epistemologia Genética de Jean Piaget, que postula uma analogia entre o desenvolvimento psicogenético e a história das ciências. Já em 1927, Piaget afirmava:

> *"(...) as leis psicológicas resultantes da análise da criança são paralelas às leis epistemológicas resultantes da análise da história das ciências, a eliminação do realismo, do substancialismo, do dinamismo, o progresso do relativismo, etc., são outras tantas leis genéticas que parecem comuns à evolução infantil e ao desenvolvimento da reflexão científica."* (Piaget[3], citado por Moniz dos Santos, 1991, p.126) (grifo nosso).

Entretanto, explicitando concisamente esse preceito, observa-se em recentes estudos realizados pela Escola de Genebra, quanto às condutas cognitivas do sujeito psicológico, que esse paralelismo não se processa termo a termo, como evidenciado na palavras de Bovet e Voelin (1990), quando questionam no artigo: "Exame e Aprendizagem Operatórios: é preciso escolher entre as abordagens estrutural e funcional?", e postulam que:

> *"Centrados na questão do sincronismo ou da não sincronia das formas estruturadas do raciocínio, seguindo as categorias do conhecimento, os pesquisadores assinalam que as evoluções individuais não seguem um único caminho, contrariamente ao que puderam pensar ao se referir à norma do sujeito epistêmico."* (Bovet e Voelin, 1990) (grifo nosso).

Entretanto, não seria objetivo e nem tampouco pouco relevante, nesse estudo, insistirmos no paralelismo expresso pelo Princípio Genético de que a construção dos conceitos matemáticos pelo sujeito recapitula os grandes passos da evolução desses conhecimentos na História da Ciência. As convergências e divergências a esse respeito fazem com que teóricos se posicionem entre duas correntes: a dos que acreditam na evolução genética das concepções como uma recapitulação da evolução histórica e a dos que desconfiam de qualquer aproximação.

Essas abordagens diversas determinam um posicionamento de nossa parte contrariamente aos estabelecidos pelos enfoques evolucionistas, sobretudo aqueles de influência Darwiniana, como as Teorias de Haeckel, pois se convenientemente manipuladas, podem servir como instrumento fundamentalmente contrário a condução do indivíduo à auto-afirmação cultural, e também a uma ação que o liberte dos sistemas de subordinação a uma determinada cultura "superior", advinda das elites.

Como já foi devidamente citado anteriormente, o Princípio Genético foi enfocado nesse capítulo somente pelo fato de ter sido utilizado para justificar o recorrer à História da Matemática como um recurso pedagógico adicional ao ensino da Matemática. Sendo assim, convém retomarmos, nesse momento, o contexto histórico e, para tanto, recorremos a Prado (1990, p.30) que, embora reconhecendo que atribuir um significado histórico a cada tópico a ser ensinado não garante que ele se torne significativo e compreensível ao

---

[3] PIAGET, Jean (1927) *La causalidad fisica en el niño.* (J. Comas, trad.), Madrid, Espasa-Colpe (obra original publicada em 1927).

aluno, cita Jones, que propõe alcançar a aprendizagem significativa da Matemática trabalhando com os **porquês cronológicos, lógicos** e **pedagógicos,** quais sejam:

- Os **porquês cronológicos**, que esclarecem sobre a origem das palavras utilizadas em Matemática, cujo estudo histórico nos mostra que os termos utilizados hoje tiveram seus significados modificados ao longo do tempo.

- Os **porquês lógicos** incluem os axiomas e raciocínios lógicos que vão possibilitar uma demonstração.

Deve-se partir, portanto, das noções intuitivas para se chegar à compreensão lógica e formal, conforme destacamos nas considerações acima mencionadas.

O conhecimento da história pode atender a esses dois aspectos: intuitivo e lógico, pois mostra como as primeiras idéias surgiram intuitivamente, desenvolveram-se e chegaram à explicitação formal como as temos hoje, conforme se pode observar a seguir:

- Os **porquês pedagógicos** são os processos e artifícios que não são ditados por definições arbitrárias e não têm similaridade lógica. Esses porquês estão relacionados com a compreensão dos algoritmos.

Nesse sentido, convém destacarmos mais uma vez, que o uso dos algoritmos tem sido enfatizado ao longo do tempo no ensino, segundo a vertente mecanicista, e apresentado aos alunos como regras a serem seguidas sem que lhes sejam mostrado o porquê e o significado da própria regra, eles apenas as aplicam de uma maneira automática.

Como educadores, devemos analisar metodologicamente esse aspecto, isto é, não devemos "treinar" os alunos de forma mecânica, com fórmulas e exercícios repetitivos, mas devemos propiciar um ambiente de aprendizagem significativo, onde cada ser em formação poderá integrar e projetar os conceitos matemáticos em um contexto social, político e histórico mais abrangente e, desse modo, sentir e conhecer a importância da Matemática pela Matemática e por seu lugar no mundo.

Ainda Prado (1990), defende que o estudo da História da Matemática contribuiria para o professor nos seguintes aspectos:

- perceber a conexão entre a Matemática e os demais assuntos do currículo escolar;

- fazer seus alunos verem que a Matemática se desenvolve a partir das necessidades sociais e da cultura em geral;

- mostrar ao aluno que a Matemática é uma Ciência, com função social e que através do domínio da Matemática ele pode contribuir para a melhoria das condições de vida da sociedade;

- auxiliar o aluno a ver como a Matemática se relaciona com o total do pensamento humano.

Entretanto, devemos salientar que o professor que se dispuser a trabalhar com a História no ensino da Matemática poderá enfrentar algumas dificuldades como estas:

- a escassez (a nosso ver) do conhecimento histórico por parte do professor;

- a insuficiência do conhecimento sobre os modelos de ensino para auxiliar o professor, num enfoque histórico;

- o despreparo do professor para um pensar histórico;

- a dificuldade de compatibilizar o rigor matemático e o processo de ser desenvolvido com o aluno.

Acreditamos que um dos aspectos mais importantes da História da Matemática é lançar luz sobre a natureza da Matemática. A escolha da ordem lógica como uma ordem de ensino não deveria ser apenas encarada como uma questão metodológica, mas, acima de tudo, uma decisão que tem subjacente uma concepção educacional abrangente. Houve outras tentativas de se buscar um caráter unificador da matemática.

Como já mencionado no Capítulo 1 deste estudo, nesse momento faz-se necessário repetir que, a partir da década de 30, foi tentada uma unificação da Matemática, através da reconstrução de vários de seus ramos, utilizando-se a Teoria dos Conjuntos, ou seja, procurou-se dar uma explicação da Matemática de modo a torná-la compreensível aos olhos dos matemáticos. O entendimento da Matemática passou assim a se dar através das estruturas e teorias algébricas.

Essa visão estruturalista estava em consonância com o pensamento dominante da época. No currículo enfatizou-se a Álgebra em detrimento da Geometria Euclidiana. Instaurou-se a Matemática Moderna. Porém, a unidade Matemática não foi encontrada na Teoria dos Conjuntos. A questão da unidade Matemática permanece em aberto.

Reforçamos mais uma vez a importância para o matemático e para o próprio aluno de Matemática buscar uma visão unificada da Matemática. Uma visão do todo, onde os diversos ramos da Matemática estejam interligados. Com isso, perguntamo-nos que implicações psico-pedagógicas poderiam emergir se a ênfase no ensino da Matemática fosse colocada na compreensão das estruturas[4] básicas dessa Ciência?

---

[4] Estrutura no sentido de rede, relação, isto é, de inter-relacionamento dos diversos ramos da Matemática.

Essa abordagem, sem dúvida nenhuma possibilitaria aos professores mediar o processo Ensino/Aprendizagem de uma maneira integrada, cujos tópicos em estudo não fossem tratados de modo isolado, mas tecidos historicamente, e projetados como um todo em um contexto cultural, social e político mais abrangente.

Na História da Matemática, na nossa concepção, podemos encontrar uma unidade pedagógica. Essa unidade já significa uma compreensão da Matemática, a qual o professor poderá atingir, caso ele se interesse pelo estudo da História da Matemática.

Mais recentemente, no artigo "Professores reconstituem história para ensinar bases da Matemática, Douady (1993) constata que, na França, embora os alunos das escolas de 1º e 2º graus tenham mudado muito nos anos 60 e 70, em vários aspectos, os conteúdos e métodos de ensino pouco mudaram. O resultado é paradoxal, como se pode notar pelo que se segue: *"Os alunos cometem sempre os mesmos erros, os professores sabem que isso vai acontecer e pouco fazem."*

Como exemplo do erro recorrente na Matemática, evoca o ensino de frações, no qual, ou os alunos "aprendem" as regras básicas de operações com frações, isto é, apenas as decoram, mas jamais entendem bem o que estão fazendo, ou cometem erros fundamentais como usar para frações as mesmas regras de soma que para números inteiros.

Douady propõe que a melhor estratégia de resolver a questão *"é iniciar os alunos no assunto onde ele realmente aparece"*, isto é, nas divisões contínuas. Então o aluno vai entendê-las e saber aplicá-las. Recorrer à História para se ensinar frações aos nossos alunos, assim como qualquer outro conteúdo matemático, propiciará ao nosso ver, um aprendizado efetivo e significativo.

A mesma autora explica que isso é diferente dos chavões do tipo: *"ensino a partir do cotidiano"*, ou *"relação de igual para igual entre o professor e aluno"*. A idéia é iniciar o aluno onde o conteúdo nasce, ou seja, na gênese de cada conteúdo matemático para que os alunos possam construí-los compreendendo o seu significado.

Constatamos que uma das exigências do momento em que vivemos seria repensar as novas formas de abordar historicamente o ensino da Geometria com novas tecnologias. Por exemplo, no caso do computador, que não se constitui em si próprio um instrumento educativo, seus efeitos benéficos estão subordinados à maneira pela qual é apresentado ao educando, maneira essa que, em nossa concepção, relaciona-se à utilização de uma linguagem computacional e a uma postura teórico-metodológica adequadas, capazes de mediar esse artefato tecnológico que já se faz presente em nosso cotidiano.

Enfatizado dessa maneira, o ensino da Geometria, propiciaria a sua compreensão efetiva e significativa, cujos conceitos geométricos seriam abordados de forma contextualizadas com o momento histórico em que vivemos, onde cada vez mais e com maior abrangência a informática se faz presente. Esses aspectos serão enfocados e adequadamente evidenciados nos estudos práticos dessa pesquisa.

3.2 Existem Evoluções ou Revoluções em Matemática?

No desenvolvimento da Ciência de um modo geral, podemos inferir que ocorrem revoluções científicas ou evoluções científicas? E na Matemática? E na Geometria? Evolução ou revolução?

Caberia nesse contexto recorrermos a Kuhn (1990), ao abordarmos as concepções de evolução e revolução e paradigmas na História da Ciência, e, mais especificamente, na História da Geometria, objetivando justificar a utilização dos termos evolução e revolução, ao nos referirmos a alguns momentos do processo do desenvolvimento Histórico da Geometria.

Entretanto, não pretendemos nesse estudo tomar uma posição radical quanto ao questionamento acima, devido ao fato de que não seria relevante e nem tampouco necessário nessa pesquisa, adentrarmos profundamente nos fatores intrínsecos e extrínsecos ao referido questionamento. Propomo-nos simplesmente a delinear algumas reflexões a esse respeito.

A tese fundamental de Kuhn - teoria dos paradigmas, apóia-se no fato de que, uma vez ultrapassado o estágio pré-paradigmático, uma **ciência** passa por uma seqüência alternada de períodos de **"ciência normal"** e de **"ciência extraordinária"**. Durante os períodos de **"ciência normal",** a comunidade científica segue uma tradição intelectual comum, orienta-se por um **paradigma** a que adere, conscientemente ou não. Durante este período, os membros de um grupo tendem a **não criar alternativas ao paradigma**. Pelo contrário, a sua pesquisa incide na **busca de implicações internas ao paradigma vigente.**

Essas pesquisas são direcionadas para um conhecimento mais aprofundado de fenômenos e teorias inerentes a elas. Assim, busca-se **ampliar a correspondência** e **neutralizar conflitos** entre teorias diversas e entre as maneiras pelas quais uma particular **teoria é utilizada em diferentes contextos**. Tal fato implica que a atividade dos cientistas, desenvolvida durante o período de "ciência normal", seja vista, nas palavras do próprio Kuhn, como uma atividade de **"solução de enigmas"**, em que a **natureza da solução** é **garantida pelo paradigma.** Na resolução desses enigmas, inevitavelmente surgem "anomalias" que constituem-se em **resultados inesperados**, contrários às **predições decorrentes do paradigma**. A multiplicação das anomalias ou a sua resistência a deixarem-se explicar por hipóteses auxiliares, no quadro do paradigma, engendrará a crise deste. Nesse sentido, podemos inferir que, para Kuhn, a ciência durante o período de "ciência normal" é penetrada por um **dogmatismo socialmente partilhado**.

Ao período de "ciência normal" sucede, então, um período de "ciência extraordinária". Kuhn designa por **"revolução científica"** a passagem de um sistema de explicação para outro, isto é, **a mudança de paradigma.** *"Uma revolução é uma mudança, implicando uma certa reorganização das escolhas efetuadas pelo grupo"* (Kuhn, 1990).

Durante o período de "ciência extraordinária", passa a haver, num mesmo domínio, vários quadros de interpretação de dados, proliferação de paradigmas, até que um dos novos paradigmas em conflito reúne novamente o consenso e propicia o desenvolvimento de um novo período de "ciência normal".

Tomando como base a definição de Kuhn para revolução científica, constata-se que durante o desenvolvimento histórico da Geometria ocorreram revoluções científicas, fato esse evidenciado, entre outros, pela ultrapassagem do sistema de explicação de uma Geometria anteriormente aceita durante um certo período como "ciência normal", onde o sistema de conhecimento era expresso por um estilo Lógico-Dedutivo, baseado em Axiomas e Teoremas com demasiada Axiomatização.

No final do século XVII, René Descartes explicou de outra forma os conhecimentos matemáticos existentes, elaborando a Geometria Analítica. Enquanto Euclides preconizava que "a menor distância entre dois pontos é definida por uma **reta**", Descartes postulava que "a menor distância entre dois pontos é definida pela **equação** dessa **reta**".

Essa transformação provocou uma reestruturação no pensamento matemático da época: o estilo lógico de Euclides foi substituído pelo estilo analítico de Descartes.

Essa nova abordagem, ou nova forma de conceber a Geometria dos Gregos, impulsionou uma proliferação de paradigmas e questionamentos, engendrando a crise do paradigma vigente.

No contexto do desenvolvimento histórico da Geometria, uma nova forma de abordagem da Geometria constituiria, então, em uma mudança de paradigma, provocando uma revolução Kuhniana, na qual o paradigma Euclidiano, que considera a Matemática como um corpo de conhecimentos absolutos, corretos, lógico e hierarquicamente organizados, vem sendo constantemente questionado.

Segundo Ernest, em seu artigo *"Are there Revolutions in Mathematics?"*, diversos matemáticos, filósofos e educadores têm redimensionado o foco da filosofia tradicional da Matemática, expresso apenas no conhecimento da Matemática pura e na existência de objetos matemáticos para o tratamento da prática matemática e da História da Matemática, como questões fundamentais no processo ensino-aprendizagem dessa ciência.

Nesse mesmo artigo, a abordagem dada à matemática por Kitcher, "uma ciência praticamente empírica e passível de falhas" traduz uma visão que se apóia no exame da História da Matemática. Nesse contexto, Ernest coloca um questionamento sobre a aplicabilidade da teoria de Kuhn das revoluções científicas à Matemática: *"A Matemática apresenta revoluções?"* Na investigação desse questionamento, faz menção a H.B.

Griffiths[5] (1987, p.71), que levanta o mesmo questionamento e contesta: *"é duvidoso se a noção de Kuhn sobre paradigma se aplica à Matemática da mesma forma que se aplica a outras ciências."*

Sobre esse fato, Griffiths postula que teorias incompatíveis e até paradigmas podem coexistir na Matemática e não na ciência, onde todas as teorias propõem-se a descrever a mesma realidade objetiva.

Reforçando a refutação acima, usaremos as palavras de Griffiths, citadas por Ernest: *"(...) a derrubada do paradigma da Geometria Euclidiana pelas geometrias não euclidianas, não força os matemáticos a rejeitá-la como os físicos rejeitaram a teoria Newtoniana a favor da teoria da Relatividade."*

Nesse aspecto, Ernest, se posiciona que nem todas as principais mudanças ou desenvolvimento de novas teorias em Matemática merecem o título de "revolucionárias"; entretanto, argumenta ainda que, algumas mudanças radicais, ou reestruturações globais que dizem respeito ao "background" epistemológico e ao contexto científico da Matemática podem ser descritos como uma revolução no sentido de Kuhn. As referidas mudanças resultam de uma reorientação profunda da Matemática que pode conduzir a uma dimensão de "incomensurabilidade" tal qual a que é encontrada na ciência.

Entre vários exemplos apresentados por Ernest sobre situações encontradas por alguns matemáticos, ao longo da história, que poderiam ser caracterizadas como "revoluções em matemática", inclui-se, no final do século XIX, a mudança nas demonstrações geométricas que se apoiavam na intuição espacial para a confiança numa base axiomática lógica (Hilbert, 1899); o movimento para uma base axiomática nas provas aritméticas (Peano, 1889); e a rigorização axiomática da lógica dedutiva em si mesma (Frege, 1879)[6].

Esses exemplos, entre outros, ilustram uma reestruturação de um ramo da Matemática, que no ponto de vista de Ernest, poderia ser nomeado uma "revolução em Matemática".

> *"(...) O que ilustram não é a substituição de uma teoria por outra. Em vez disso mostram uma troca revolucionária no 'background' científico e no contexto epistemológico, os critérios que constituem suas demonstrações e seus paradigmas e as visões meta-matemáticas que lhe estão associadas. Mudanças no contexto do 'background' podem envolver um conjunto diferente de problemas, conceitos, métodos, teorias informais de linguagem e simbolismos de matemática, critérios de prova e de paradigmas. Incluem também em troca nas visões meta-matemáticas, aceitas pela comunidade matemática, incluindo padrões aceitos para provas e definições, pontos de vista sobre que tipo de*

---

[5] GRIFFITHS, H.B. (1987) *Looking for Complex Roots*, Journal for Research in Mathematics Education, vol.18, 58-75.

[6] Os autores desse parágrafo estão citados em ERNEST, Paul (1992) *Are there revolutions in mathematics*? In: Philosophy of Mathematics Education Newsletter, n.4,5, p.14-19.

> *questionamento é valido e sobre assuntos quanto ao campo e a estrutura da matemática. Tais mudanças podem resultar uma re-orientação profunda da matemática."* (p.17).

O autor conclui desse modo que uma reestruturação radical como essa é um novo contexto científico e epistemológico para a Matemática. Sendo assim, representa uma reestruturação global da epistemologia subjacente à Matemática e da maneira como a verdade, a demonstração e o significado são "aceitos" pela comunidade matemática. Além disso, os critérios de avaliação das teorias matemáticas também se transformam, uma vez que são fundamentados nas demonstrações e definições empregadas na formulação da teoria.

Nesse sentido, tais mudanças corresponderiam à noção de Kuhn sobre revolução científica. Enfatiza ainda que, assim como as teorias científicas, a multiplicidade de estruturas epistemológicas não podem coexistir, de uma maneira consistente em Matemática, justificando a extensão da teoria de Kuhn à Matemática.

Na Matemática, mais especificamente na Geometria, cada geração constrói uma nova história para velhas estruturas. O conhecimento na Matemática é feito por construções sucessivas, o que não significa, bem entendido, justaposição de conhecimentos. O que se transforma na Matemática é a forma, mutável com o tempo, que se impõe ao conteúdo, transformando-o. Essa transformação ocorre devido a diferentes fatores (históricos, sociais, políticos, econômicos, étnicos, culturais e científicos) gerando, dessa maneira, uma reestruturação geral, em que as teorias que lhe dão consistência vão se modificando. Assim, as novas teorias levariam à revisão de métodos, técnicas e novas estratégias metodológicas de se abordar a Geometria e conseqüentemente, ocorreria uma mudança de paradigma no desenvolvimento histórico da Geometria.

REFLEXÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA

CAPÍTULO 4

REFLEXÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA

"Não há ramo da Matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."
Lobachevsky

Propõe-se, neste momento, delinear alguns momentos que se considera relevantes para esta pesquisa, momentos esses relativos ao desenvolvimento histórico da Geometria, com o objetivo de contextualizar a Geometria da Tartaruga que subjaz à Linguagem Computacional Logo, Geometria essa, que em nossa concepção, proporciona desenvolvimento e construção de conceitos altamente complexos e abstratos, de uma forma simples e natural pelos estudantes nos diferentes graus de escolaridade, possibilitando-lhes uma efetiva e significativa compreensão da Matemática.

4.1) A Geometria ao Longo da História e no Ensino

Pretende-se fazer a análise de alguns dos momentos relevantes do desenvolvimento da Geometria antes e depois de Euclides e de alguns dos problemas filosóficos gerados por esse desenvolvimento.

Analisando a História ou a descrição de alguns historiadores sobre o desenvolvimento da história da Matemática ao longo dos anos, podemos constatar que, desde os primórdios das civilizações, a Geometria ocupa um espaço relevante dentro desse desenvolvimento.

Segundo os historiadores, a palavra grega "Geometria" é composta por "Geo", que significa terra, e "Metria", que significa medida. Desse modo, a origem da Geometria vem da necessidade de medição das terras. Esta medição, pode ser constatada no antigo Egito, onde os agrônomos deviam demarcar as terras após as enchentes do rio Nilo. Ressalta-se, além disso, a utilização da Geometria na Astronomia, que teve sua evolução através da observação dos astros. Portanto, a Geometria nasceu e desenvolveu-se sob a pressão das necessidades sociais, porém limitada a uma coleção de modelos e receitas empíricas.

A História da Geometria, assim como muitos outros temas em desenvolvimento e transformação, apresenta duas vertentes básicas inter-relacionadas: a primeira caracteriza-se pela extensão do conteúdo da Geometria e a segunda, pela mudança da forma da Geometria. Ou seja, são vertentes que, na nossa concepção teórico-metodológica sobre a história do desenvolvimento das ciências, da Matemática, e mais especificamente da própria Geometria, constituem o elemento determinante que se denomina Revolução na Geometria (Kuhn, 1990). Embora uma das vertentes ou paradigmas que compuseram o desenvolvimento histórico da Geometria, tenha se caracterizado pela extensão do conteúdo dessa ciência, deve-se ressaltar a vertente ou paradigma que se considera hegemônico nessa dissertação: algumas das diferentes abordagens ou formas que a Geometria sofreu ao longo dos tempos.

Como já foi citado anteriormente, a Geometria teve sua origem na Antigüidade, num início bastante remoto. Gradualmente desenvolveu-se, alcançando no presente uma dimensão bastante grande. No entanto, nem todos estão conscientes de que a natureza ou aspectos intrínsecos da Geometria tiveram diferentes conotações em períodos distintos do seu desenvolvimento ao longo das civilizações, como será destacado logo abaixo.

Na descrição da história da Geometria que se segue, discorrer-se-á sobre as duas vertentes ou paradigmas citados anteriormente (Forma e Conteúdo) que permearam todo o seu desenvolvimento histórico. Nesta pesquisa, o aspecto mais enfatizado consistirá de algumas das diferentes formas ou abordagens que a Geometria sofreu ao longo de seu desenvolvimento histórico.

4.2) Alguns Períodos da História da Geometria

4.2.1) Os Primórdios da Geometria

Num primeiro momento, as considerações que o homem fazia acerca de aspectos geométricos apresentavam um caráter intuitivo, tendo sua origem em simples observações originadas da habilidade humana de reconhecer formas físicas, de comparar figuras e tamanhos, e inter-relacionar essas variáveis, de diferentes maneiras.

Além disso, as circunstâncias da vida do homem das primeiras civilizações conduziam a uma grande quantidade de descobertas geométricas, as quais alguns autores ou historiadores consideram descobertas subconscientes (Eves, 1992). Acredita-se, no entanto, que esse tipo de descoberta geométrica, de construção de conceitos geométricos, era uma atividade consciente, pois exigia desses povos um nível de abstração condizente com o nível de estruturação mental deles, com a sua própria história e com suas raízes sócio-culturais. Essas descobertas geométricas faziam sentido, já que emergiam das suas próprias necessidades de sobrevivência e, portanto, eram pensadas, refletidas e elaboradas em nível mental, dentro de cada cultura específica. Nesse sentido, esses povos já "faziam Etnomatemática" (D'Ambrósio, 1990). Ou seja, eles desenvolviam diferentes maneiras ou técnicas (**"tics"**) de explicar, conhecer e compreender (**"Mathema"**) a realidade que os cercava, realidade essa, inserida em um contexto cultural amplo e abrangente, que se levava em conta em todos os momentos, a sua **Etnia**, ou o seu conjunto de axiologias, ou valores culturais.

Desse modo, podemos ressaltar, por exemplo, a necessidade que os povos antigos tinham em delimitar as fronteiras de suas terras. Tal fato – infere-se – gerou a noção de figuras geométricas como retângulos, quadrados e triângulos, entre outros; do mesmo modo como noções de verticalidade, paralelismo, perpendicularismo teriam surgidos a partir das construções de muros e habitações.

Alguns exemplos, entre outros, de curvas e círculos eram também observados na natureza, assim como a periferia do sol e da lua, o arco-íris, secção transversal de um toco, os círculos cada vez maiores causados pelo lançamento de objetos ou pedras nas águas de um lago e figuras na superfície de certas conchas do mar, que dão idéia de família de curvas e das propriedades geométricas intrínsecas a essas curvas.

Muitas vezes encontramos ao nosso redor objetos que, por sugerirem formas geométricas distintas, apresentam conceitos geométricos intrínsecos, tais como sólidos, noções de simetria e idéia de volume. Essas idéias e noções eram desenvolvidas pelos povos de uma maneira intuitiva, não havendo a preocupação e nem a necessidade de se axiomatizar essas descobertas pois, dessa forma, atingia-se os objetivos necessários e imediatos dos povos.

Exemplos como estes podem ser multiplicados quase indefinidamente. Nesse sentido, torna-se importante ressaltar que, através do contraste de formas físicas ordenadas e das formas casuais e não organizadas da maioria dos corpos, os povos primitivos tiveram necessidade de elaborar um raciocínio mais abstrato, ou seja, uma reflexão mais ampla e cada vez mais complexa, devido aos constantes questionamentos e busca de soluções para os problemas diários. Conseqüentemente emergiram conceitos geométricos elementares e intuitivos, que, gradativamente, foram ficando mais complexos. Dessa forma, o homem primitivo passou a confeccionar seus próprios objetos referentes ao seu uso individual e coletivo com arte, utilizando esses conceitos geométricos que foram se desenvolvendo.

Assim, pode-se inferir que, provavelmente, a arte primitiva contribuiu e influenciou o desenvolvimento da Geometria subseqüente.

4.2.2) As Geometrias Científicas - A Geometria Euclidiana

O ápice da Geometria Grega é atingido no período helenístico, mas esse fato não implica que não existiram produções significativas anteriormente. Na verdade, existiu uma vasta produção matemática que remonta a três séculos antes de Euclides. Toda essa produção recebeu a denominação de Geometria Pré-Euclidiana.

Euclides de Alexandria viveu entre 300 e 200 a.C. e desenvolveu o método axiomático (estrutura lógica de pensamento). Embora nenhuma descoberta lhe seja atribuída, era esse matemático conhecido pela habilidade de expor e essa é a chave do sucesso de sua obra "Os Elementos", a qual foi considerada o primeiro passo na história do pensamento matemático, bem como da organização da própria Matemática.

Euclides foi o grande sistematizador de sua época. A ordenação da Geometria de seu tempo, que realizou em um sistema dedutivo (do todo para as partes) é um trabalho notável. Tomou ele um pequeno número de conceitos geométricos simples e procurou demonstrar todos os demais como consequências lógicas desses primeiros, isto é, Euclides estabeleceu um sistema axiomático (lógico-dedutivo).

A obra "Os Elementos" não contém toda a Geometria Grega, nem constitui-se em um resumo dela. Não resta dúvida de que, na obra de Euclides, está uma grande parte da Matemática, que os gregos anteriores a Euclides e o próprio Euclides elaboraram, porém essa parte não foi tomada ao acaso, mas selecionada de acordo com um critério prefixado, que transforma esse conjunto de conhecimentos em um sistema.

Os elementos de Euclides compreendem l3 livros, com um total de 465 proposições, sendo 93 problemas e 372 teoremas. Os dez primeiros livros são sobre a Geometria Plana elementar, os três últimos versam, principalmente, sobre a Geometria no espaço. Para Euclides havia distinção entre Axioma e Postulado. Os Axiomas eram noções comuns a todas as ciências que estudam grandezas, os postulados eram proposições de natureza geométrica. Sobre o tratado de Euclides, Proclus preconiza que:

> "*O mesmo <u>tratado</u> apresenta ainda exatamente distintas as várias espécies de <u>proposições recíprocas</u>, ora mais simples, ora mais abstratas, podendo a <u>reciprocidade</u> ter lugar: ou entre <u>o todo e o todo</u>; ou <u>entre o todo e uma parte</u>; ou entre <u>este e aquele</u>; ou, enfim, entre <u>uma parte e uma parte</u> . Que diremos ainda ao <u>método de investigações</u>, da economia e da ordem, daquilo que <u>precede</u> para o que <u>segue</u>, da <u>força</u> com que cada ponto é consolidado? Se tu quiseres <u>juntar-lhes</u> ou <u>tirar-lhes</u> alguma coisa, terás que reconhecer que te <u>afastas da ciência</u> e te deixas arrastar para o erro e para a ignorância."* (grifo nosso).

Os elementos de Euclides representam, de um modo perfeito, o tipo de Geometria que dominou as ciências durante todo o período compreendido entre a Antigüidade e a Época moderna. Sem dúvida, eles representam a contribuição mais importante para a Metodologia das Ciências.

4.2.3) As Geometrias após Euclides (séculos XVI / XX)

Os principais momentos do desenvolvimento da Geometria depois de Euclides, e os problemas filosóficos gerados por esse desenvolvimento estão relacionados com as novas e distintas formas de abordagens da Geometria, ou seja, com os novos paradigmas e, conseqüentemente, com **algumas** formas da Geometria que surgiram, tais como:

A Geometria Intuitiva
A Geometria Euclidiana
A Geometria Analítica
A Geometria Projetiva
A Geometria e a Teoria dos Grupos
As Geometrias das Transformações (axiomatização - Klein)
A Geometria da Tartaruga (Papert, 1985)

Historicamente, em nossa concepção, talvez um dos momentos mais significativos para uma mudança da concepção filosófica do pensamento matemático do mundo, ao longo do desenvolvimento da Geometria, tenha ocorrido através do surgimento da Geometria Analítica e da Geometria Projetiva. Essa concepção será explicitada a seguir.

4.2.3.1) Geometria Analítica

Depois dos gregos, um marco significativo que expressou uma profunda evolução metodológica e determinou mudanças fecundas nos conceitos sobre o significado da Geometria foi a Geometria Analítica.

René Descartes (1596 - 1650) foi precedido cronologicamente por Fermat (1601 - 1665) e ambos vão substituir os pontos de um plano (Euclides) por pares de números, e as curvas, por equações. Assim, o estudo das propriedades das curvas será substituído pelo estudo das propriedades das equações correspondentes.

Na verdade, podemos dizer que o apogeu da Geometria Analítica foi conseguido através do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibnitz. Esse cálculo não existiria sem a Geometria Analítica.

Alguns historiadores acreditam que a Geometria Analítica representou a algebrização da Geometria dos gregos. Nesse sentido, esse fato, na nossa concepção, será encarado no aspecto metodológico. Exemplificando: enquanto Euclides postulava que a menor distância entre dois pontos é expressa por um **segmento de reta**, Descartes explicitava esse mesmo conceito por uma **equação algébrica** que a traduzia.

Nesse contexto, como já foi citado anteriormente, na Matemática cada geração constrói uma nova história para velhas estruturas (Boyer, 1974). Na Matemática há revolução no sentido Kuhniano[1], o conhecimento é elaborado por construções sucessivas. O que muda é a forma, que é mutável com o tempo em relação aos diferentes momentos políticos, sociais e culturais. Acredita-se em uma nova abordagem dada ao conteúdo matemático, de acordo com cada momento específico, e isso gera uma nova pesquisa na

---

[1] Esse fato já foi explorado nessa pesquisa, mais precisamente no Capítulo 3, onde questiona-se: Existem Evoluções ou Revoluções em Matemática?

forma, portanto, segundo Kuhn (1990), tem-se uma mudança de paradigma e, conseqüentemente, uma revolução na Matemática.

Assim a Geometria Analítica foi uma abordagem nova para velhas estruturas, expressas na Geometria Euclidiana.

Uma das características da Geometria Analítica é a sua universalidade que estabelece, por meio de uma única fórmula, propriedades gerais de famílias inteiras de curvas, ou seja, esse caráter básico da generalização do conhecimento transpõe o limite da Geometria Antiga (Poncelet, Chasles, – séculos XVIII/XIX). Essa mudança de paradigma no sentido Kuhniano produz uma Revolução Científica.

4.2.3.2) Algumas Considerações sobre a Geometria Projetiva, a Geometria e a Teoria dos Grupos e a Geometria das Transformações

Além das características de universalidade e limite da Geometria Antiga, Poncelet e Chasles, no início do século XIX, transformaram o pensamento matemático, explicando as causas dos elementos diferenciadores e identificadores entre a Geometria Antiga e a Geometria Analítica.

Os autores incorporaram o sistema de transformações como método fundamental da Geometria, tentando dar a essa ciência, independentemente da Álgebra, a mesma generalização, a mesma leveza e o mesmo caráter científico da Geometria do século anterior.

Poncelet procurou, por métodos específicos da Geometria, ou seja, sem recorrer à Álgebra, um modo de, na própria Geometria, explicar o raciocínio implícito, abstraindo das figuras suas particularidades e obtendo assim o mesmo grau de generalidade da Geometria Analítica.

> *"A antiga Geometria, está coberta de figuras. A razão disso é simples. Uma vez que, então, os princípios gerais e abstratos eram escassos, cada questão só poderia ser tratada no estado concreto, sobre a própria figura que era objeto de seu problema, e de que só a visão podia descobrir os elementos necessários para a solução procurada. Mas, essa maneira de proceder, conduziu a alguns inconvenientes, pela dificuldade de construção de certas figuras e pela sua complicação, que torna a sua inteligibilidade laboriosa e penosa. É sobretudo nas questões da Geometria a três dimensões, onde as figuras podem tornar-se completamente impossíveis, que o inconveniente que sublinhamos se faz sentir."* (Poncelet[2], citado por Piaget e Garcia, 1987, p.96) (grifo nosso).

---

[2] PONCELET (1865) *Traité des Propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui sóccupent des applications de la Géométrie Descreptive et d'opérations géométriques sur le terrain.* Paris: Gauthier-Villars.

Os dois geômetras, Poncelet e Chasles, introduzem uma nova concepção da Geometria, a partir de métodos algébricos. Nesse sentido, eles utilizaram uma nova forma ou abordagem, expressa pela álgebra, para explicar e expressar a Geometria antiga. Essa contribuição propiciou ao desenvolvimento da Geometria um momento relevante na concepção filosófica do pensamento matemático, ou seja, a axiomatização, a sistematização e a formulação em um sistema estruturado da Geometria das Transformações, estabelecido por Felix Klein. Constata-se, então, a passagem da etapa das Transformações Projetivas à etapa das Estruturas de Grupo.

Para se ter uma idéia do processo de interação entre os problemas ditos "tradicionais" da Geometria Euclidiana e o desenvolvimento da Álgebra e do Cálculo, conforme se vai avançando no século XVIII, Euler mostra como os movimentos e as simetrias das figuras estão ligados ao problema de mudança dos eixos de coordenadas e como a simetria pode ser traduzida analiticamente.

Do ponto de vista epistemológico, a passagem das Transformações Projetivas para as Estruturas de Grupo é profundamente importante, pois as Transformações Projetivas tinham uma origem nitidamente intuitiva, porém com certas limitações, por exemplo: para cada caso particular era aplicado um tipo específico de Transformação, o que permitia estudar as propriedades das figuras com um grau de generalidade muito elevado; mas faltavam os meios para identificar e expressar a estrutura do conjunto dessas Transformações.

Os trabalhos de Klein possibilitaram uma nova etapa no desenvolvimento da Geometria e da sua incorporação na Matemática Moderna. Os conceitos desse autor têm como ponto de partida, a noção de Grupo de Transformações no espaço.

> *"A grande originalidade de Klein é ter concebido a relação entre uma "Geometria" e o seu Grupo, destruindo os papéis dessas duas entidades sendo portanto, o Grupo o objeto primordial e os diferentes espaços sobre os quais ele "opera" evidenciando diversos aspectos da Estrutura do Grupo"* (Dieudonné[3], citado por Piaget e Garcia, 1987, p.105) (grifo nosso).

É importante ressaltar que é a partir das diversas formas da Geometria, segundo o seu processo do desenvolvimento histórico, que no Século XX, Seymor Papert cria o Logo e explica a Geometria da Tartaruga, que ocupará um capítulo de destaque nesse trabalho, no qual nos propomos a refletir sobre os pressupostos teórico-metodológicos inerentes ao contexto Logo que nos propiciarão subsídios para delinearmos o inter-relacionamento da Geometria da Tartaruga com as diversas formas de abordagem. Fatores determinantes e importantes na criação da Geometria da Tartaruga constituem-se, entre outras, pelas seguintes abordagens da Geometria: a Geometria Intuitiva, a Geometria Euclidiana, a Geometria Analítica, a Geometria Projetiva, a Geometria das Transformações e a Teoria dos Grupos, entre outras, sendo que todas elas, integradas, constituem a arquitetura

---

[3] DIEUDONNÉ, J. (1974) préface au Programme d'Erlangen de Felix Klein, Paris, Gauthier, p.xi.

subjacente à Geometria da Tartaruga. Esse fato será explorado e evidenciado no inter-relacionamento das diversas formas da Geometria com a Geometria da Tartaruga, no capítulo que se segue.

Caberia ressaltarmos neste momento que nos propomos a delinear alguns aspectos históricos relacionados ao Teorema de Pitágoras, visto que o Estudo de Caso realizado na parte prática desta pesquisa mostra-nos o sincronismo das condutas cognitivas de um sujeito em uma situação prática de Resolução de Problemas – "Demonstração" do Teorema de Pitágoras em três paradigmas diferentes: paradigma tradicional, paradigma intuitivo e paradigma alternativo (Geometria da Tartaruga).

4.3) O Teorema Pitagórico é de Pitágoras?

O Teorema "pitagórico" é uma das proposições mais importantes de todo o campo da Geometria. Apesar da forte tradição dos gregos que associa o nome de Pitágoras à afirmação matemática de que "o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos", não há dúvida de que esse resultado fosse conhecido antes do tempos do próprio Pitágoras.

Em um estudo bibliográfico realizado a respeito do Teorema de Pitágoras, encontramos alguns fatos que mostraram-nos fortes evidências quanto à autenticidade de sua autoria. A análise realizada, percorrendo a História da Matemática, possibilitou-nos destacar algumas dessas evidências.

Seguindo a linha do tempo, quando Apolodoro comenta o "sacrifício esplêndido" oferecido por Pitágoras pela demonstração desse teorema "− Diz-se que Pitágoras sacrificou uma hecatombe, um rebanho de cem bois, em observância à prática de ação de graças daquele tempo −". Tendo em vista que um sacrifício como este não condizia aos princípios dos pitagóricos, e que a mesma coisa é "contada" a respeito de Tales, sobre a sua suposta descoberta de que todo ângulo inscrito em um semi-círculo é reto, infere-se a dúvida sobre a autenticidade da história.

A sociedade pitagórica talvez tenha chegado a primeira prova efetiva da afirmação do teorema, mas esse fato não pode ser comprovado.

Neugebauer, em sua obra The Exact Sciences in Antiguity, 1957, postula sobre o estudo da descoberta pelos babilônios da diagonal de um quadrado, dada a medida do lado como "prova suficiente de que o teorema pitagórico era conhecido mais de mil anos antes de Pitágoras".

Nos textos inscritos na tábua de argila Plimpton 322, encontram-se indícios desse fato, pois eles já continham colunas de figuras relacionadas com ternos pitagóricos.

Os "esticadores de corda" egípcios e as cordas com nós, utilizadas em agrimensura, citados freqüentemente em livros direcionados ao ensino, não comprovam que os egípcios já tinham conhecimento do teorema. Sabe-se, que em um fragmento de um papiro da décima segunda dinastia, em 2000 a.C., os egípcios já haviam tomado ciência de que $4^2 + 3^2 = 5^2$, entretanto, não existem provas de que pudessem demonstrar a propriedade do ângulo reto da figura envolvida. A proposta de se provar que um triângulo de lados 3, 4, 5 é retângulo constitui-se em um grande desafio aos pesquisadores, quando solicitados a demonstrar isso da "maneira egípcia", ou seja, sem o uso do Teorema de Pitágoras ou seu recíproco.

Constata-se também que a concepção desse teorema não pode ser totalmente ocidental, haja visto que nos escritos chineses Chou Pei Suan Ching (202 a.C. - 220 d.C., e possivelmente muito antes), já se encontrava um excerto: "quebrar a reta e fazer a largura 3, o comprimento 4; então a distância entre os cantos é 5". Nesse mesmo documento encontram-se impressos xilográficos (Figura 4.1) de diversos diagramas que nos dias atuais são associados a demonstrações do teorema oferecidas em vários textos escolares de Geometria. Entretanto, prova alguma efetiva foi ainda elaborada.

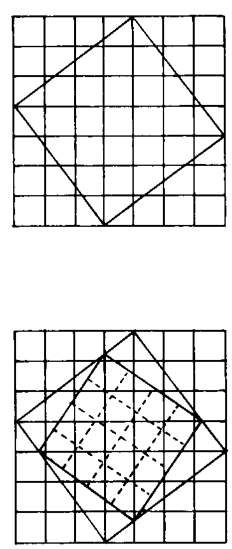

Figura 4.1 - Diagramas para o teorema

Nesse sentido, percorrendo os escritos sobre a matemática hindu, que remontam aos últimos cinco séculos anteriores à era cristã, constata-se que estes possibilitaram o estabelecimento de regras relacionadas às proporções de altares, fato este que implica na afirmação do teorema. Entretanto, não há nenhum indício que os hindus tivessem alguma idéia da natureza da demonstração geométrica do teorema.

Na história, constata-se que é bem provável que Pitágoras tenha demonstrado o teorema baseado na proporcionalidade de figuras semelhantes, entretanto, posteriormente foi constatado que nem todos os segmentos seriam necessariamente comensuráveis. Com esse fato, essa prova perdeu sua validade.

Assim sendo, na época dos "Elementos de Euclides" (300 a.C.), houve necessidade de uma prova mais adequada. "Proclus achava simplesmente que Euclides reescrevera a prova para poder incluir a proposição em seu primeiro livro, que compunha os "Elementos de Euclides", com o estrito objetivo de completá-la. A proposição 47, I de Euclides constitui-se no teorema pitagórico, com uma demonstração creditada universalmente ao próprio Euclides.

Em 1907, Elisha Scott Loomis escreveu e preparou o manuscrito inicial de "The Pythagorean Proposition", trabalho esse que em sua segunda edição continha 370 demonstrações do teorema, e nesse sentido o autor citado faz a seguinte reflexão:

> *"Ultimamente observei dois ou três textos de geometria, nos quais não consta a prova de Euclides. Supondo que o autor deseje mostrar sua originalidade ou independência — possivelmente sua modernidade, ele mostra algo mais. A omissão da prova de Euclides é como a representação de Hamlet com Hamlet ausente."* (p.55).

Segue-se a demonstração de Euclides, de forma abreviada:

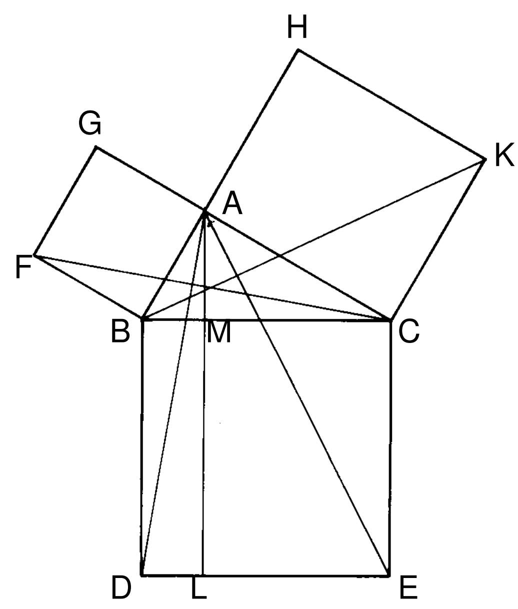

Figura 4.2 - Demonstração de Euclides

Suponha-se que o ângulo BAC da Figura 4.2 seja o ângulo reto do triângulo ABC. Os quadrados BFGA, BCED e AHKC são construídos sobre os respectivos lados, e AL é uma reta paralela a BD (ou CE).

Nota-se que os pontos C, A, G, e também os pontos B, A, H, são colineares. Assim sendo, prova-se que o triângulo ABD é congruente ao triângulo FBC (Euclides dizia-os "*iguais*") pela proposição 4,I, que trata da afirmação de Euclides do caso L.A.L. de congruência. O paralelogramo BMLD é o dobro do triângulo ABD, e o quadrado BFGA é o dobro do triângulo FBC, portanto o paralelogramo BMLD é igual ao quadrado BFGA.

De forma análoga, pode-se provar que o paralelogramo CELM é igual ao quadrado AHKC. Em decorrência, o quadrado BCED, formado pelos dois paralelogramos BMLD e CELM, é igual aos dois quadrados BFGA e AHKC.

Pode-se identificar a proposição 47,I pelo diagrama que lhe é característico, independentemente da língua para a qual a tradução de Euclides tenha sido feita. A Figura 4.2 às vezes é mencionada como "Cadeira da noiva", isto porque lembra a cadeira em que as noivas orientais eram transportadas nas costas de um escravo para a cerimônia matrimonial.

A demonstração mais breve do teorema foi dada pelo intelectual hindu Bhaskara (c. 1150), que apresentou o diagrama dado na Figura 4.3 abaixo, sem nenhuma explicação – somente utilizou a palavra "Veja!". Nesse sentido, segundo Eves (1992, p.56), a álgebra nos fornece a prova.

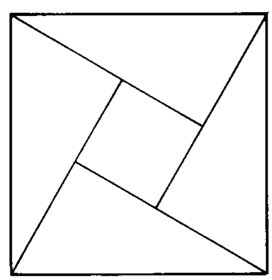

Figura 4.3 - "Veja !"

Uma outra demonstração do teorema por decomposição, foi desenvolvida por H. Perigal, em 1873 (Figura 4.4). É definida por uma redescoberta de uma prova anterior conhecida por Tabit ibn-Qorra no século IX (Eves, 1992, p.56). Conhecidas as formas das áreas do triângulo e do quadrado, pode-se completar essa demonstração por adição de áreas (Figura 4.5).

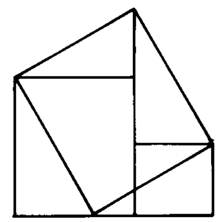

Figura 4.4 - Tabit ibn-Qorra

Nesse contexto, convém ressaltar que é possível que nenhum outro teorema em matemática possa ser provado por uma variedade de demonstrações algébricas e geométricas.

No entanto, a grande e essencial contribuição de Pitágoras foi em relação à aritmética e, de um modo geral, é ignorada ou mesmo marginalizada. Nesse contexto, recorremos à explicação sobre a linguagem numérica, que D'Ambrosio (1990) delineou:

> *"(...) a linguagem numérica, que nas tradições de chineses, hindus, egípcios, judeus, era parte integrante de práticas divinatórias, que é uma forma de aproximação com as divindades - para quem o futuro não é mistério -, teve em Pitágoras um grande cultor que procura introduzi-las na Grécia, em substituição a práticas utilizando o exame de entranhas de seres vivos sacrificados. (...) assim a natureza não seria violada e que portanto os deuses estariam mais felizes. Prevaleceu o sacrifício! E a contribuição de Pitágoras para a ciência é lembrada através de um resultado reconhecidamente de outros, mas de grande utilidade prática, que é o hoje famoso teorema de Pitágoras."* (p.45) (grifo nosso).

Segundo ainda uma linha histórica, no presente século, seria possível obter-se uma demonstração do teorema de Pitágoras, consoante o avanço científico e tecnológico que permeia os nossos dias? Como seria essa demonstração?

Nesse sentido, faz-se pertinente nos referirmos ao The California Institute of Techonology, que apresenta o "The Theorem of Pythagoras" no Project Mathematics, 1988, que consiste de uma série de vários módulos que são compostos de fitas de vídeo animadas por computador, e livros, que possibilitam aos professores desenvolver conceitos matemáticos através de movimentos, cores e sons, no ensino de segundo grau.

Assim sendo, como seria uma possível "demonstração" desse teorema com a Geometria da Tartaruga, inerente ao sistema computacional Logo? Esse aspecto será explicitado no Capítulo 7 desta pesquisa, no qual um dos sujeitos do Estudo de Caso, utiliza esse teorema no contexto Logo.

4.4) Reflexões sobre a Geometria da Tartaruga

Nesse momento, caberia ainda uma reflexão: Que tipo de matemática se aprende com a Geometria da Tartaruga?

Levando-se em conta as palavras de Papert que explicita o motivo pelo qual a Geometria da Tartaruga foi projetada:

> *"(...) foi especialmente projetada para ser algo que fizesse sentido às crianças, que tivesse alguma ressonância com o que elas acham importante. E ela foi elaborada para ajudar as crianças a desenvolver a estratégia matética: para aprender algo, primeiramente faça com que isso tenha algum sentido para você."* (Papert, 1985, p.87) (grifo nosso).

Papert, ao projetar a Geometria da Tartaruga, objetivava que ela atuasse mais profundamente, derrubando barreiras intelectuais e, nesse sentido, postulava que a tartaruga atuasse como portadora de idéias importantes e poderosas. Assim sendo, ele menciona que mesmo ao desenhar simplesmente quadrados e estrelas, a tartaruga é portadora de idéias importantes, tais como: ângulo, repetição controlada, operador de mudança de estado (estado da tartaruga) e representação do conhecimento. As tartarugas representam apenas um aspecto de uma grande área da matemática, a Geometria da Tartaruga, um tipo de geometria que é aprendida facilmente e ao mesmo tempo é portadora eficiente de idéias matemáticas genéricas, de estratégias heurísticas.

Para discutir a questão acima, Papert aborda a distinção entre três classes de conhecimento matemático, sendo que cada uma delas se beneficia do trabalho com a tartaruga.

O primeiro grupo é o dos conhecimentos da "Matemática Escolar", que não nos parece escolhido como ponto central da matemática básica que todo cidadão possui.

Outro grupo é o dos conhecimentos que Papert chama de "protomatemáticos", que constituem os pressupostos da matemática escolar, embora não esteja explicitamente citado no currículo tradicional. Uma parte desse conhecimento refere-se ao conhecimento de natureza "social", por exemplo, conhecimento que diz respeito ao porque se deve aprender Matemática e como se pode fazer para que tal aprendizagem tenha algum sentido. Um outro conhecimento, que também se encaixa na categoria de conhecimentos "protomatemáticos", é o tipo de estrutura fundamental para a qual a Epistemologia Genética aborda: princípios dedutivos tais como a transitividade, as conservações, a lógica intuitiva de classificação, entre outros.

Finalmente Papert explicita uma terceira categoria que se caracteriza pelo conhecimento que não está nem incluído e nem é pressuposto pela matemática escolar, mas que deveria ser considerado como necessário à bagagem intelectual do jovem educando do futuro. Exemplifica essa terceira categoria com o inter-relacionamento da Geometria da Tartaruga com algumas outras abordagens da Geometria. Esse fato é importante pois a arquitetura matemática inerente à Geometria da Tartaruga comporta esse inter-relacionamento. Esse fato sob vários aspectos será abordado nos Estudos de Caso dessa pesquisa.

PRESSUPOSTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DA GEOMETRIA DA TARTARUGA

CAPÍTULO 5

PRESSUPOSTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DA GEOMETRIA DA TARTARUGA

"Existe a crença de que só se pode programar o que se compreende perfeitamente. Essa crença ignora a evidência de que a programação, como qualquer outra forma de escrita, é um processo experimental. Programamos, como redigimos, não porque compreendemos, mas para chegar a compreender."
(Weizenbaum, J.; 1981)

5.1) Logo: História e Filosofia

Logo é uma linguagem computacional que foi desenvolvida por um grupo de pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), sob a direção de Seymour Papert.

O nome Logo é derivado da palavra grega "Pensamento". Domínios de conhecimentos diferentes influenciaram no Desenvolvimento do Sistema Logo, tais como: O Campo de Inteligência Artificial, a Linguagem Computacional Lisp e a Teoria de Jean Piaget.

O Logo foi idealizado para permitir um aprendizado por descoberta ou exploração no ambiente natural e normal em que a criança vive. A intenção do uso do Logo seria, então, propiciar um ambiente no qual o progresso dos alunos dar-se-ia através do desenvolvimento de estágios de aprendizagem por exploração, onde eles seriam os próprios construtores de seus conhecimentos.

O Logo propicia um ambiente no qual o professor desenvolve uma educação diferente da educação tradicional. Assim, o ensino dos conhecimentos matemáticos e geométricos ocorre através de situações-problema, nas quais o professor não é mais encarado como o professor tradicional, "detentor do saber", e sim o professor-pesquisador, concepção essa que já foi explicitada no Capítulo 2 dessa pesquisa. Além disso, passa a ser o agente que desequilibra seus alunos através de solicitações e instigações que geram conflitos cognitivos importantes, envolvendo dessa forma os alunos em um processo de busca e investigação para resolvê-los. Esse é um ambiente poderoso e propício para se "fazer matemática".

Ressalte-se mais uma vez que, nesse contexto, os conceitos matemáticos e geométricos são trabalhados por meio de resolução de problemas As situações-problema são elaboradas de acordo com as peculiaridades dos alunos, vinculadas a uma experiência psico-pedagógica vivenciada pelos próprios professores, por meio de cursos contínuos de reciclagem, de aperfeiçoamento, e de cursos de atualização tanto em Logo quanto em Matemática e, mais especificamente, em Geometria.

O aprendiz, por sua vez, frente a problemas desafiantes, procurará, através do processo de resolução dessas situações, adentrar-se em uma investigação e busca, utilizando estratégias que mais se adequem a seus objetivos e finalidades, criando verdadeiras heurísticas. Ressalta-se em ambientes informatizados, nesse contexto, o movimento sincrônico das condutas cognitivas do sujeito em situações práticas do seu raciocínio (Miskulin, 1993).

Para tanto, poderá fazer esquemas auxiliares, conjecturas, tentando comparar constantemente suas hipóteses e seus esquemas com a descrição de sua programação, e é dessa constante comparação que ele irá refletindo e depurando o que é essencial e importante para resolver seu problema. Através dessa investigação contínua, o aluno terá condições de refletir sobre seus possíveis erros, reestruturando seus procedimentos, suas estratégias e até seus esquemas mentais. É dessa reestruturação mental do aluno, advinda da reestruturação de sua programação ("debugging" ou "análise de erros"), que ocorre o aprendizado propriamente dito.

Papert (1985) parte do princípio de que é possível construir computadores de tal forma que aprender a comunicar-se com eles seja um processo tão natural como aprender a falar a língua materna. Para ele, o computador "fala matemática" e o domínio dessa linguagem torna-se a fonte do poder.

Nesse sentido, uma linguagem computacional deve ser analisada como forma de expressão de certos conceitos, quando realmente explicita o conhecimento específico de um determinado domínio. Nesta pesquisa os conceitos geométricos serão explicitados através da Linguagem Computacional Logo, utilizando o micromundo da Tartaruga que com sua estrutura matemática inerente, constitui, na nossa concepção, um contexto favorável ao desenvolvimento de conceitos geométricos.

Os computadores são assim apresentados como os elementos transportadores de idéias poderosas e de mudanças culturais profundas que podem levar as pessoas a estabelecer uma nova relação com o conhecimento. Na base da Linguagem Logo está a tartaruga, que desempenha o papel de um "suporte de pensamento". Nesse sentido, a tartaruga inerente ao sistema Logo desempenha um papel de extrema importância, pois, apresenta-se frente a frente com o aluno, na tela computador, e é através de comandos simples de posição e direção, usando as primitivas ou os comandos básicos da Linguagem

Computacional Logo, que o aluno "comandará" a tartaruga para tentar resolver os seus problemas ("object to think with") (Papert, 1985).

Mas o que é a tartaruga? Como foi construída a Geometria da Tartaruga?

A tartaruga possui, na sua versão mais simples, posição e direção e, sob um aspecto mais sofisticado, possui também velocidade, o que permite desenvolver conceitos de dinâmica e outros conceitos de Física.

Existem tipos diferentes de tartarugas mas todas obedecem a comandos específicos, que constituem as primitivas da Linguagem Computacional Logo.

A tartaruga possui movimentos baseados na Geometria das Transformações no plano, como rotação (giro) e translação (deslocamento). Assim:

pf ou **parafrente**, e **pt** ou **paratras** são comandos de deslocamento;

pd ou **paradireita**, e **pe** ou **paraesquerda** são comandos de mudança de direção;

Exemplificando:

1) **parafrente 50** - move a tartaruga para frente 50 passos

Figura 5.1 - Deslocamento vertical da tartaruga

2) **paradireita 90** - gira a tartaruga para direita 90°
parafrente 50 - move a tartaruga para frente 50 passos

Figura 5.2 - Deslocamento horizontal da tartaruga

Torna-se importante e necessário neste momento, observarmos que no contexto de representação de figuras através do sistema Logo[1], ao se usar como dispositivo de saída gráfica uma impressora matricial, podem ocorrer distorções entre os deslocamentos verticais e horizontais, e suas combinações, devido a limitações intrínsecas à impressora. Esse fato será evidenciado ao longo das representações das figuras apresentadas nessa pesquisa. Ressaltamos que tal distorção não ocorre na tela do computador.

Além da Tartaruga da tela, existe a tartaruga de solo, uma tartaruga mecânica, um robô cibernético que desempenha o mesmo papel da tartaruga de tela.

Papert (1985) menciona que as crianças iniciaram a exploração da Geometria da Tartaruga com a tartaruga de solo, no ambiente Logo.

A coexistência das duas tartarugas revela em si um fato muito importante: ou seja, duas entidades fisicamente diferentes podem ser matematicamente a mesma coisa, são isomórficas[2]. O autor acima mencionado refere-se a exemplos de conceitos matemáticos importantes que aparecem na Geometria da Tartaruga baseados no isomorfismo dos diferentes sistemas de tartarugas como: Integração, Equações Diferencias, Invariáveis Topológicas (Papert, 1985, p.81).

O critério fundamental que Papert utilizou para construir a Geometria da Tartaruga baseou-se em alguns princípios fundamentais:

- A Matemática intrínseca à Geometria da Tartaruga deveria ser apropriável, isto é, tomando-se apropriabilidade no sentido de desenvolver-se e obter-se um pensamento matemático sólido que faz sentido afetivamente ao usuário do Logo. Por exemplo, as idéias matemáticas como espaço e movimento são aquelas que chegam às crianças de uma maneira mais natural. Foi nesse contexto, em que as idéias matemáticas são permeadas pela naturalidade e pela apropriabilidade, que Papert mergulhou as raízes da Geometria da Tartaruga. Nesse sentido constata-se o **Princípio da Apropriabilidade.**

- A Matemática deve ter relação de continuidade com o pensamento individual, possibilitando ao aluno a compreensão significativa dessa relação de onde possa emergir um sentido de afeição, de maior valor afetivo, bem como emergir uma competência cognitiva. Constata-se nesse caso o **Princípio da Continuidade.**

- A Matemática deve propiciar poder ao estudante, como já foi citado anteriormente neste estudo, no sentido de que seria impossível realizar projetos sem a Matemática. Deriva-se daí o **Princípio do Poder.**

---

[1] A versão do Logo utilizado nesta pesquisa, é uma versão do MSX.

[2] Isomorfismo: pela etimologia da palavra iso significa mesmo e morfismo significa forma. Neste contexto, apesar das tartarugas apresentarem diferenças físicas, e existirem em cenários diferentes (uma no solo, outra na tela do monitor), ambas podem representar os mesmos contornos das formas dos objetos, utilizando-se das mesmas estratégias e procedimentos.

- A Geometria da Tartaruga, que faz sentido para as crianças, como pode ser constatado nas explanações contidas ao longo do livro de Papert, deve também fazer sentido em um contexto cultural mais amplo, como o sistema educacional, a escola, a comunidade, entre outros. Deriva-se daí o **Princípio da Ressonância Cultural.**

Constata-se que esses quatro princípios estão implícitos na Matemática subjacente à Geometria da Tartaruga.

Um outro aspecto fundamental que deve ser ressaltado sobre a tartaruga do Logo é que ela representa simultaneamente uma base de conhecimento, uma possibilidade de identificação, além de uma presença cultural.

Representa **Base de conhecimento**, no sentido de que, ao programá-la, o usuário do Logo transpõe seus conhecimentos matemáticos anteriores às novas e criativas situações (*object-to-think-with*).

Representa **Possibilidade de Identificação** pois, muitas vezes, o usuário do Logo simula os movimentos básicos da tartaruga, transpondo seu próprio corpo a ela - **"sintonicidade" corporal**[3], como explicitam Abelson e diSessa (1981).

E finalmente representa uma **presença cultural**, pois está ali, "frente a frente" com o usuário, faz parte do contexto em que está inserido, de sua cultura. Esse fato está implícito no **princípio da Ressonância Cultural.**

Ao "ensinar a tartaruga", programando-a por meio de comandos simples alterando sua posição e direção, criando projetos, desenhos, a criança está aprendendo a exercer um controle sobre um excepcionalmente rico e sofisticado micromundo, que é na verdade "incubador do conhecimento" (Papert, 1985). Essa noção de micromundo desempenha um papel central nas idéias educativas de Papert. O conhecimento para ele desenvolve-se essencialmente de forma natural, de acordo com as experiências que se vão apresentando às crianças, sendo o meio ambiente um fator crítico no desenvolvimento tanto cognitivo quanto afetivo.

A utilização educativa do computador deverá ser orientada para criar um contexto que favoreça esse desenvolvimento, engendrando os usuários em um processo contínuo de construção de seus próprios conhecimentos.

O computador para Papert modifica totalmente o meio ambiente da criança, especialmente se estiver sempre disponível a ela, permitindo-lhe todo um conjunto de novas experiências cognitivas e afetivamente estimulantes.

---

[3] O conceito de "sintonicidade" corporal para Papert, 1985, p.81 se expressa pelo conhecimento da Geometria que adquirimos através do movimento de nosso corpo. Esse conceito assume uma importância efetiva no Logo Tridimensional, como será visto no Capítulo 8, desta pesquisa.

Pontes (1988), ao se referir ao autor citado acima, defende a idéia de que não existem conhecimentos certos ou errados, em absoluto, pois um conhecimento, por mais rudimentar que seja, pode ser melhorado por um processo de aproximações sucessivas, por identificação de pequenas "gralhas". Assim, uma conseqüência importante de programar computadores seria a possibilidade de se ganhar consciência do caráter relativo, transitório e sempre susceptível de aperfeiçoamento do nosso conhecimento.

Caberia nesse momento uma reflexão de nossa parte, expressa no questionamento assim delineado:

A que paradigma de programação refere-se a arquitetura da **Geometria da Tartaruga?**

Segundo Baranauskas (1993), encontramos implícitos na Linguagem Computacional Logo quatro paradigmas distintos:

- Paradigma Procedural;
- Paradigma Funcional;
- Paradigma Orientado para Objetos;
- Paradigma de Programação em Lógica.

Nesse sentido, postula:

> *"Nesse paradigma programas são "prescrições" de solução para os problemas. Programar a tartaruga do Logo é, portanto, um modelo "procedural" de programação, onde o procedimento que a criança cria para "ensinar" a tartaruga deve conter todos os passos que a tartaruga deve executar para conseguir o resultado desejado. O modelo de como a máquina (computador) "funciona" está sendo representado no papel da tartaruga, no sentido de que esta executa ações seqüencialmente. Portanto representa um problema para ser resolvido. Nesse contexto envolve saber "o que" a tartaruga deve fazer e instruí-la a exatamente "como" fazer. A tartaruga e indiretamente o computador são tratados como um "objeto" que obedece ordens."* (Baranauskas, 1993, p.53) (grifo nosso).

Baranauskas conclui, dizendo que no contexto acima está explícito o paradigma "procedural" de programação, isto é, esse paradigma refere-se à arquitetura subjacente a Geometria da Tartaruga.

O paradigma procedural implícito na linguagem computacional Logo é uma característica importante, pois esse fato significa que para o usuário é relativamente simples criar novos procedimentos em Logo. Desse modo, ao programar o computador para representar um quadrado, a metáfora que se usa com o usuário é de "ensinar a tartaruga" a executar um conjunto de comandos ou primitivas que resulta em um quadrado. Assim sendo,

```
?ap  quadrado
aprenda  quadrado
pf  30  pd  90
pf  30  pd  90
pf  30  pd  90
pf  30  pd  90
fim

quadrado  aprendido
?quadrado  imprima
```

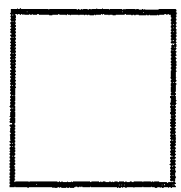

Figura 5.3 - Quadrado construído com o programa **quadrado**

Nesse sentido o programa acima define o que é um quadrado. É importante ressaltar que poderiam ser atribuídos diferentes nomes ao procedimento, escolhidos entre aqueles que parecem ser mais significativos e interessantes ao usuário. Desse modo, pode-se usar o comando **quadrado** como um outro comando do Logo, isto é, o **quadrado** no programa **estrela** representaria um sub-procedimento do programa mais geral (**estrela**). Ressalta-se nesse contexto que o próprio usuário cria comandos novos, a medida em que desenvolve a representação de seus projetos. Assim sendo,

```
?ap  estrela
aprenda  estrela
repita  10  [  quadrado  pd  36  ]
fim

estrela aprendido
?estrela  imprima
```

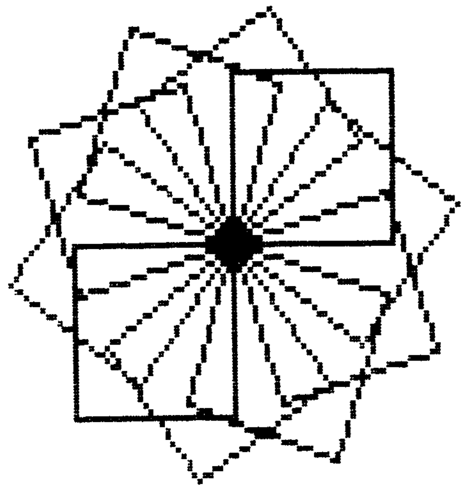

Figura 5.4 - Estrela - Projeto para ilustrar o procedimento procedural

Ressalta-se que ao elaborar-se um programa para representar um quadrado, e um outro para representar-se um triângulo, como explicitados a seguir e representados pelas Figuras 5.5 e 5.6, abaixo, poder-se-ia perguntar: O que é igual no quadrado e no triângulo?

```
?ap qua
aprenda qua
repita  4  [  pf  40  pd 90  ]
fim

qua aprendido
?qua  imprima
```

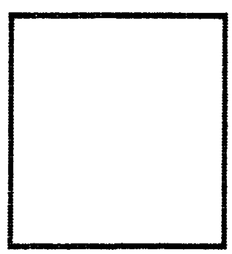

Figura 5.5 - Quadrado construído com o programa **qua**

```
?ap tri
aprenda tri
repita  3  [  pf  40  pd  120  ]
fim

tri aprendido
?tri  imprima
```

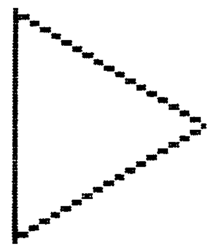

Figura 5.6 - Triângulo construído com o programa **tri**

Quando se coloca no lugar da Tartaruga e se percorre o caminho que se deseja que ela siga, percebe-se claramente que em ambos os programas acima descritos, começa-se e termina-se no mesmo ponto, apontados para a mesma direção. Esse fato significa que o estado inicial é o mesmo que o final, e entre eles foi realizada uma volta completa.

O fator diferenciador nos dois casos acima constitui-se no fato de que o giro foi feito em "três andadas" ou em "quatro andadas". O conteúdo matemático dessa idéia é tão poderoso quanto simples. Deve-se dar importância à noção de giro total, ou seja, estabelecer quanto se vira no total.

Nota-se que todos os giros completos são iguais a 360 graus. No primeiro caso, os quatro 90 graus do quadrado somam 360 graus e, uma vez que todos os giros acontecem nos vértices, cada virada em um triângulo deve ser de 360 graus divididos por três. Assim cada virada corresponde a 120 graus.

Esse fato constitui-se na proposta do **"Teorema do Giro Completo da Tartaruga"**. "*Se uma Tartaruga percorre um caminho ao redor do perímetro de qualquer área e termina no mesmo estado em que começou, então a soma total dos giros será 360 graus.*" (Papert, 1985, p.101).

Papert considera que o **"Teorema do Giro Completo da Tartaruga"** é mais **poderoso**, pois a criança pode realmente usá-lo. É mais **genérico**, pois aplica-se a quadrados e curvas, assim como a triângulos. É mais **compreensível**, pois sua prova é de fácil entendimento. É também mais **pessoal**, pois pode-se "percorrê-lo passo a passo". E, nesse sentido, constitui-se também um modelo para o hábito generalizado de relacionar a Matemática ao conhecimento pessoal.

Ressaltando a importância de se utilizar teoremas de uma forma devida no ensino da Matemática, recorremos às seguintes palavras:

> *"(...) o que é importante, quando damos um teorema às crianças para que o utilizem, não é que elas o memorizem. O que mais interessa é que, ao desenvolver com alguns teoremas bastante poderosos, podemos vir a apreciar como certas idéias podem ser usadas como*

> *ferramentas com as quais podemos pensar ao longo da vida. Aprende-se a apreciar e respeitar o poder das idéias poderosas; aprende-se que a mais poderosa idéia entre todas é a idéia de idéias poderosas"* (Papert, 1985, p.102) (grifo nosso).

Nesse contexto, devido ao papel atribuído à tartaruga, o processo do aluno ao programá-la constitui-se um contexto propício ao desenvolvimento de noções geométricas. Esses aspectos estão sendo abordados nesta pesquisa, entre eles, o inter-relacionamento da Geometria da Tartaruga inerente ao Sistema Computacional Logo com algumas das diferentes abordagens da Geometria ao longo das civilizações.

5.2) Inter-relacionamento da Geometria da Tartaruga com algumas Geometrias

5.2.1) O que é a Geometria da Tartaruga?

> *"A coisa mais importante para lembrar-se sobre a Geometria da Tartaruga é que ela é uma Matemática arquitetada para propiciar um aprendizado por tentativas e exploração e não uma Matemática que apresenta seus teoremas e suas provas."*
>
> *(Abelson e diSessa, 1981)*

Como bem explicita o pensamento acima de Harold Abelson e Andrea diSessa em seu livro: "Turtle Geometry: The Computer as a Mediun for Exploring Mathematics" (1981), nota-se que a Geometria da Tartaruga é definida como sendo uma Matemática distinta da Matemática tradicional, pois observa-se que a Matemática como é tratada nas escolas de um modo geral, é "ensinada" como uma ciência pronta, com conteúdos estanques, desvinculados totalmente da realidade e, mais ainda, com grande formalismo e abstração. É um ensino que se processa através da transmissão de fatos. Assim, a Matemática, não cumpre o seu grande objetivo como Ciência, qual seja, desenvolver o pensamento humano em todos os sentidos e direções, ou ainda, desenvolver e transformar a própria concepção de mundo do indivíduo.

Em uma análise mais técnica, podemos dizer que a Geometria da Tartaruga, caracteriza-se por um estilo diferente da Geometria Euclidiana, da Geometria Analítica, e das demais Geometrias. Nela encontramos tanto o estilo Axiomático de Euclides (Lógico), quanto o de Descartes (Analítico). Encontramos, assim, esses dois estilos inseridos no Logo, através do micromundo da Tartaruga. A Geometria da Tartaruga é um estilo computacional de Geometria que, por sua estrutura subjacente, faz uma abordagem construtivista da própria Geometria Euclidiana e das demais formas de abordagens da Geometria.

Esse fato poderá ser constatado no Estudo de Caso, através do sincronismo das condutas cognitivas dos sujeitos em situações práticas de resoluções de problemas, a serem considerados nos Capítulos 7 e 8.

5.2.2) Conceito de Ponto

Fazendo uma **analogia** entre o conceito de Ponto para Euclides e a Tartaruga para Papert, podemos observar que:

Para Euclides, um ponto é definido como uma entidade que possui uma posição, e é desprovido de outras propriedades. O ponto é estático, possui apenas posição. Na Geometria da Tartaruga, a entidade fundamental é a Tartaruga (Papert, 1985). Ela não é desprovida de outras propriedades, pode ser relacionada a coisas e pessoas e é dinâmica, pois além de posição, possui também direção. Para Papert, a Tartaruga é como uma pessoa, "eu estou aqui, voltada para o norte", ou como um animal, ou como um objeto.

Dessas similaridades, provém a habilidade da Tartaruga servir como uma primeira representação da Matemática formal para o usuário do Logo. Na Geometria da Tartaruga, o computador é usado como um meio de expressar-se matematicamente, o que possibilita aos professores no ambiente Logo elaborarem tópicos que fazem sentido para os seus alunos, e que lhes possibilita aprender os conceitos decorrentes desses tópicos ou situações-problema.

Percebe-se a partir da comparação da noção de Ponto entre as duas Geometrias, que conceitos tomados como inquestionáveis são redimensionados, através da Geometria da Tartaruga, e assim provocam novas relações com o conhecimento.

5.2.3) Conceito de Círculo

Para a Geometria Euclidiana círculo é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do centro. Analisando mais detidamente essa definição de círculo, nota-se que se trata de um conceito formal que é simplesmente passado para o aluno "decorar", e assim, pode-se inferir que acontece com a maioria dos conteúdos matemáticos tradicionalmente ensinados.

Já no contexto da Geometria da Tartaruga, é o usuário do Logo que, ao interagir com o micromundo da Tartaruga, através de comandos simples, vai construindo passo a passo os conceitos, sem a demasiada abstração da simbologia matemática, isto é, o usuário do Logo, ao representar a construção de um círculo[4] no computador, no ambiente Logo, está no domínio da aprendizagem, sendo que nesse contexto cria suas próprias estratégias de Resolução de Problema. Uma das estratégias escolhidas pelo sujeito poderia constituir-se na construção gradativa de diversos polígonos regulares, de diferentes lados, como será apresentado a seguir. Esse processo de resolução relaciona-se ao sujeito de nossa pesquisa, entretanto, faz-se necessário apresentá-lo nesse momento, como forma de explicitar os

[4] Nesse contexto não é relevante a distinção entre o conceito de circunferência e o conceito de círculo, pois da forma como estamos programando a tartaruga, esta desenha apenas o contorno da figura.

diferentes estilos computacionais e diversos processos cognitivos inerentes ao problema proposto, qual seja: representar na tela do computador um círculo. Uma outra estratégia que poderia ser utilizada seria: tentativa e exploração, onde o usuário recorreria aos vários comandos ou primitivas da Linguagem Computacional Logo até alcançar seu objetivo. Outro usuário tentaria representar o círculo de maneira diferente.

Nota-se que não existe uma única estratégia, um algoritmo para solucionar o problema, isto é, constata-se nesse ambiente que não há uma transmissão de conceitos, considerados como prontos e formais, isso significa que dessa forma o ser em formação constrói ativamente seu conhecimento. Analisando a descrição dos procedimentos dos alunos, o professor poderia identificar o estilo de programação utilizado (estilo seqüencial ou estilo modular), analisar os conceitos matemáticos e geométricos inerentes às suas estratégias e, nesse sentido, tornaria-se evidente o processo construtivo do problema proposto: **construir o conceito de Círculo e representá-lo na tela do computador.**

Essas concepções serão evidenciadas pela descrição dos processos de Resolução de Problemas do sujeito de nossa pesquisa, ao ser solicitado a representar a construção do círculo utilizando Logo Bidimensional. Faz-se pertinente, apresentar essa situação-problema, com o objetivo de elucidar as concepções acima delineadas.

5.2.3.1) Representação e Construção do Círculo com o Logo Bidimensional

Ao ser solicitado a construir a representação do círculo no contexto do Logo Bidimensional, o sujeito apresentou a seguinte resolução, expressa pelos seguintes procedimentos representados pelas figuras abaixo:

Procedimentos:

```
?ap  t
aprenda  t  :x
repita  3  [  pf  :x  pe  120  ]
fim


t  aprendido
?t  30  imprima
```

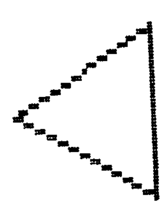

Figura 5.7 - Triângulo construído com Logo Bidimensional

```
?ap  q
aprenda  q  :x
repita  4  [  pf  :x  pd  90  ]
fim

q  aprendido
?q  30  imprima
```

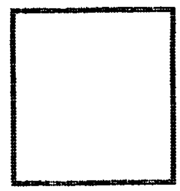

Figura 5.8 - Quadrado construído com Logo Bidimensional

```
?ap  penta
aprenda  penta  :x
repita  5  [  pf  :x  pd  72  ]
fim

penta  aprendido
?penta  30  imprima
```

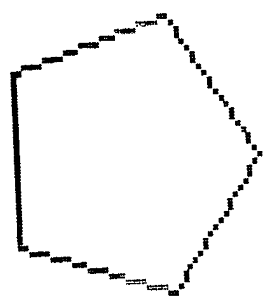

Figura 5.9 - Pentágono construído com Logo Bidimensional

```
?ap  hexa
aprenda  hexa  :x
repita  6  [  pf  :x  pd  60  ]
fim

hexa  aprendido
?hexa  30  imprima
```

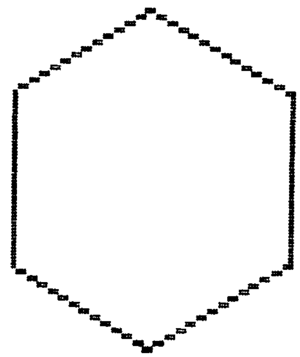

Figura 5.10 - Hexágono construído com Logo Bidimensional

```
?ap  hepta
aprenda  hepta  :x
repita  7  [  pf  :x  pd  360 / 7  ]
fim

hepta  aprendido
?hepta  30  imprima
```

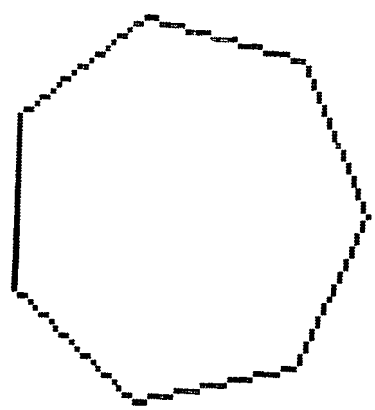

Figura 5.11 - Heptágono construído com Logo Bidimensional

```
?ap octo
aprenda  octo  :x
repita  8  [  pf  :x  pd  45  ]
fim

octo  aprendido
?octo  30  imprima
```

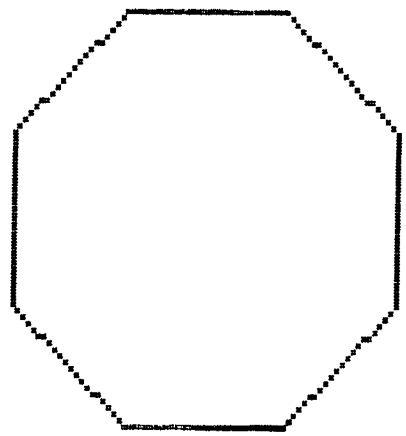

Figura 5.12 - Octógono construído com Logo Bidimensional

```
?ap  enea
aprenda  enea  :x
repita  9  [  pf  :x  pd  40  ]
fim

enea  aprendido
?enea  30  imprima
```

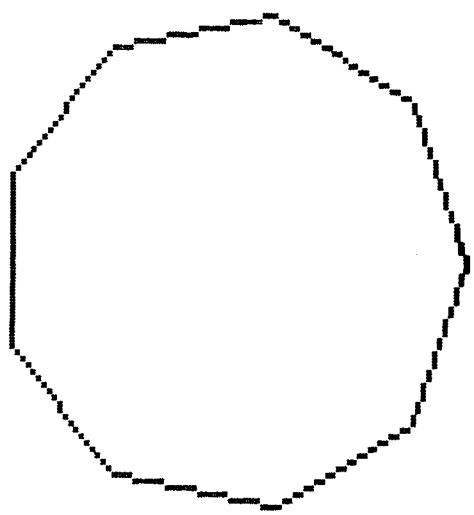

Figura 5.13 - Eneágono construído com Logo Bidimensional

```
?ap  deca
aprenda  deca  :x
repita  10  [  pf  :x  pd  36  ]
fim


deca  aprendido
?deca  30  imprima
```

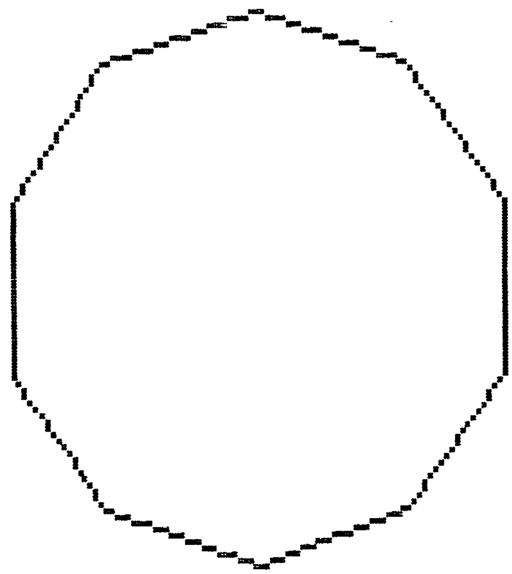

Figura 5.14 - Decágono construído com Logo Bidimensional

```
?ap  cir
aprenda  cir  :x
repita  360  [  pf  :x  pd  1  ]
fim


cir  aprendido
?cir  1  imprima
```

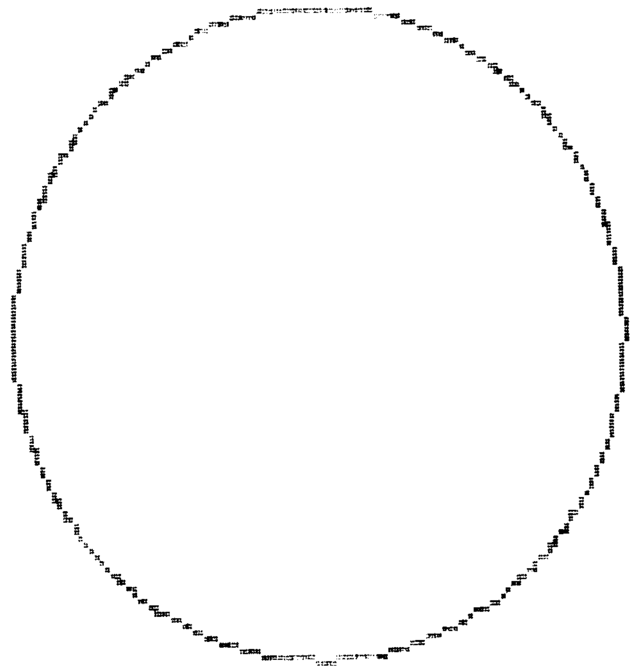

Figura 5.15 - Círculo construído com Logo Bidimensional

```
?ap  cir2
aprenda  cir2  :x
repita 360 [ un pf :x ul pf 1 un pt :x+1 pd 1  ]
fim

cir2  aprendido
?tat  mudeproporção  0,89  cir2  40 imprima
```

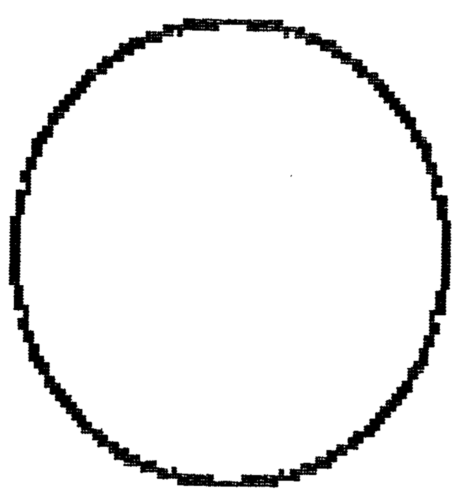

Figura 5.16 - Círculo construído com Logo Bidimensional

Vale dizer, o professor seria capaz de analisar o programa de cada aluno e perceber se ele realmente compreendeu e "construiu" a representação do conceito de círculo; e sob outro aspecto, o professor saberia identificar os estilos cognitivos de seus alunos, isto é, se os conhecimentos matemáticos que ele utilizou para resolver determinada situação-problema estão condizentes com o seu nível de estruturação mental.

5.3) Análise de Resolução de Problema no Contexto Logo

Realizaremos uma análise dos processos de representação da construção do círculo pelo sujeito de nossa pesquisa.

Apesar de considerarmos o enfoque da Microgênese Cognitiva importante e fundamental para a perfeita compreensão dos processos cognitivos subjacentes aos procedimentos realizados pelo sujeito desta pesquisa na resolução de problemas, reservaremos essa fundamentação teórica para outras situações-problema vivenciadas por esse sujeito. Nesse momento, julgamos necessário conduzir nossa análise prevalentemente para aspectos matemáticos, ou seja, realizar uma análise técnica, com o objetivo de exemplificar as possibilidades e os limites do Logo Bidimensional na construção de conceitos geométricos inerentes à Geometria Plana.

Assim sendo, uma análise dos procedimentos adotados pelo sujeito do Estudo de Caso nos mostra que ele trabalhou com figuras regulares. Como estratégia, partiu da figura plana com o menor número de lados (triângulo) e foi progressivamente aumentando o número de lados das figuras construídas.

Durante esse processo o sujeito procurou manter como parte da estratégia acima a mesma medida dos lados dos polígonos (**30 passos** da tartaruga). Com isso o perímetro das figuras cresceu progressivamente, de um fator fixo, expresso por **30 passos** (medida dos lados), desde os 90 passos no caso do triângulo (três lados de **30 passos**), até os 300 passos do decágono (dez lados de **30 passos**). Nota-se um controle exercido pelo sujeito em sua estratégia, pois, o fato de não se usar números aleatórios para as medidas dos lados, possibilitou ao sujeito um fator de referência na comparação do processo de evolução das representações dos polígonos aproximando-se cada vez mais do círculo, à medida que crescia o número de lados.

Constata-se nessa estratégia que os perímetros cresceram obedecendo as leis de uma Progressão Aritmética (P A), cujo primeiro termo é 90 (perímetro do triângulo), o último termo é 300 (perímetro do polígono de dez lados), e a razão é 30. Nesse sentido, evidencia-se a integração da Geometria com a Álgebra. Assim sendo, essa idéia poderia tornar-se poderosa ao introduzir-se para os alunos conceitos sobre Progressão Aritmética através da construção de polígonos regulares.

No processo de resolução desse problema, o sujeito generalizou sua estratégia para os diversos polígonos até concluir que a tendência seria chegar a um círculo cada vez "mais perfeito", quanto maior fosse o número de lados da figura regular construída. Criou uma verdadeira heurística e, desse modo, percebeu de forma intuitiva e, conforme foi reelaborando seus processos mentais, tomou consciência, e compreendeu o conceito de círculo como sendo um polígono de um número muito grande de lados (infinitos).

Durante a construção do círculo, deparou-se com um conflito que constituiu-se a partir da construção do decágono, quando ele resolveu construir uma figura com 360 lados. Nesse momento não conseguiu manter o mesmo valor que vinha utilizando como medida dos lados dos polígonos construídos, uma vez que, dada a dimensão da figura assim obtida, em relação às dimensões da tela do computador, a tartaruga fugia do campo de visão (tela do monitor). Esse fato incitou-o a repensar e a refletir sobre os procedimentos usados, acarretando em uma mudança na sua estratégia anteriormente usada, isto é, reduziu o número de passos da tartaruga ao construir cada um dos lados da figura (com 360 lados) que ele escolheu como sendo aquela que representa o círculo, dos **30 passos** que vinham sendo utilizados para **um passo** apenas. Esse processo possibilitou a constatação, pelo sujeito, de que o "problema" (bug) de seu procedimento não estava no giro, mas sim no deslocamento (número de passos) da tartaruga.

Ao adequar seus procedimentos, reestruturando suas estratégias, para que seu objetivo fosse alcançado, ou seja, representar na tela as construções dos polígonos, nesse caso, o círculo, com um "tamanho" que nela coubesse, utilizou de maneira simples, sem a demasiada abstração do ensino tradicional, conceitos matemáticos como proporcionalidade e noções de escala, entre outros.

Nesse contexto, ressalta-se que, inerente às estratégias utilizadas pelo sujeito ao solucionar seus problemas, pode ser constatado o equilíbrio entre os aspectos quantitativos (propriedades e particularidades) e qualitativos (forma, tamanho - figurativos) das figuras a serem representadas.

Ao ser solicitado a explicitar sobre a semelhança dos procedimentos usados na descrição dos programas elaborados durante a fase de construção das representações dos polígonos regulares, semelhança essa expressa pelo mesmo estilo computacional e mesmos conceitos, nos diferentes casos, o sujeito evidenciou a possibilidade de manter e aplicar um mesmo programa em diferentes contextos. Essa generalização procedeu-se a partir do momento em que o sujeito tomou consciência de que seria necessário mudar somente o número de vezes de repetição da primitiva **repita,** e o giro da tartaruga através da primitiva **pd.** Desse modo, reestruturou seus procedimentos e criou o programa geral como abaixo:

```
?ap poli1
aprenda  poli1  :n  :x
repita  :n  [  pf  :x  pd  360 / :n  ]
fim
```

no qual:

`poli1` representa a figura geométrica regular que se deseja representar na tela do computador, cujo número de lados será explicitado por **`n`** abaixo,

n é o número de lados da figura a ser "desenhada" pela tartaruga, e é uma das variáveis do programa,

x é o comprimento dos lados iguais da figura desejada, e é a segunda variável do programa.

A aplicação desse programa no caso do triângulo resulta em:

```
?ap  poli1
aprenda  poli1  :n  :x
repita  :n  [  pf  :x  pd  360 / :n  ]
fim

poli1 aprendido
?poli1  3  30  imprima
```

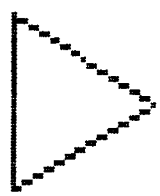

Figura 5.17 - Triângulo construído com Logo Bidimensional a partir do programa geral

O pesquisador, nesse momento, solicitou ao sujeito se seria possível comentar sobre o conceito das áreas das figuras "desenhadas" pela tartaruga (Figuras 5.7 a 5.14).

Analisando seus procedimentos e observando os resultados produzidos na tela do computador, o sujeito respondeu que as áreas aumentavam gradualmente, conforme aumentava o número de lados dos polígonos regulares.

Uma conclusão importante do ponto de vista matemático foi a constatação pelo próprio sujeito de que o aumento gradativo do perímetro acarretou um aumento gradativo da área. Importante no sentido de que esse conhecimento não foi simplesmente transmitido ao aluno, como nas aulas tradicionais de Geometria mas, sim, construído por ele.

O pesquisador, então, sentindo a oportunidade de se explorar conceitos de Isoperimetria, solicitou do sujeito o seguinte: **representar diferentes figuras geométricas regulares, mantendo os mesmos passos totais percorridos pela tartaruga (mesmo perímetro).** Problema considerado simples, uma vez que o sujeito elaborou um programa genérico para representar as figuras acima mencionadas.

5.4) Exploração de Conceitos Matemáticos

5.4.1) Conceito de Isoperimetria

Construir diferentes figuras geométricas regulares mantendo o **mesmo número de passos totais da tartaruga**, ou seja, o **mesmo perímetro**, é mais um exemplo de como explorar conceitos de Geometria Plana com Logo. Para resolver o problema proposto acima, o sujeito criou o seguinte programa:

```
?ap  poli2
aprenda  poli2  :n  :y
repita  :n  [  pf  :y / :n  pd 360 / :n  ]
fim
```

no qual:

poli2 representa a figura geométrica regular a ser "desenhada" na tela,

n corresponde ao número de lados, e é a primeira variável do programa,

y corresponde ao número total de passos da tartaruga (perímetro), e é a segunda variável do programa.

Assim o sujeito representou as seguintes figuras na tela do computador, com o programa **poli2** acima descrito:

Triângulo:

```
?poli2  3  240  imprima
```

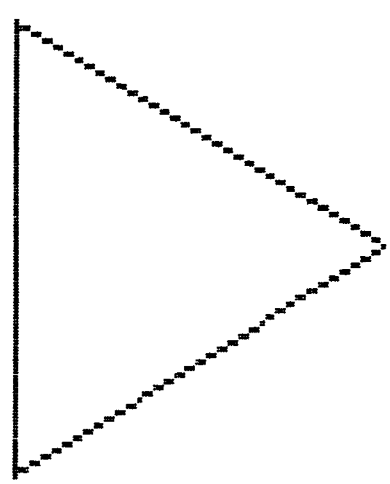

Figura 5.18 - Triângulo construído dentro do conceito de isoperimetria

Quadrado:

```
?poli2 4 240 imprima
```

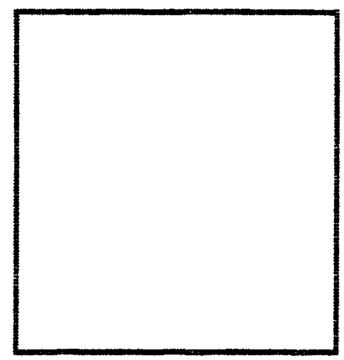

Figura 5.19 - Quadrado construído dentro do conceito de isoperimetria

Pentágono:

```
?poli2 5 240 imprima
```

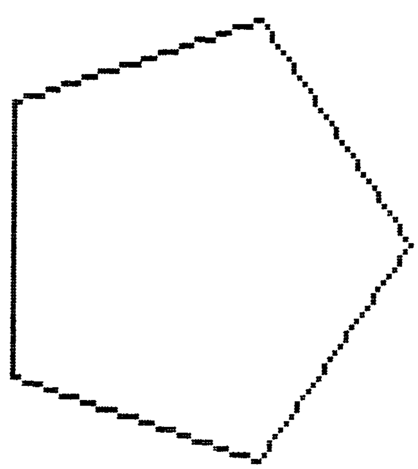

Figura 5.20 - Pentágono construído dentro do conceito de isoperimetria

Hexágono:

```
?poli2  6  240  imprima
```

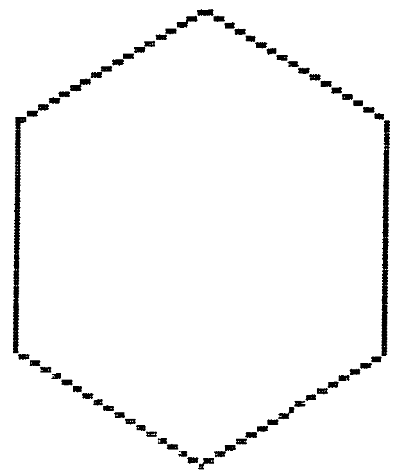

Figura 5.21 - Hexágono construído dentro do conceito de isoperimetria

Heptágono:

```
?poli2  7  240  imprima
```

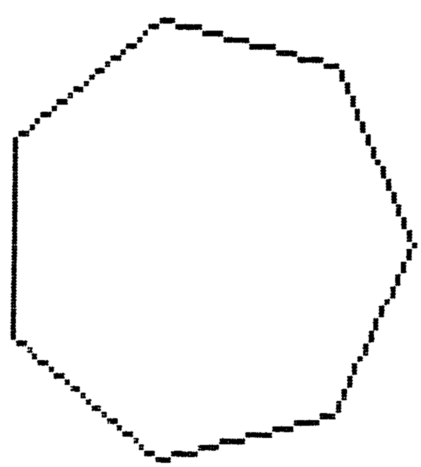

Figura 5.22 - Heptágono construído dentro do conceito de isoperimetria

Octógono:

```
?poli2  8  240  imprima
```

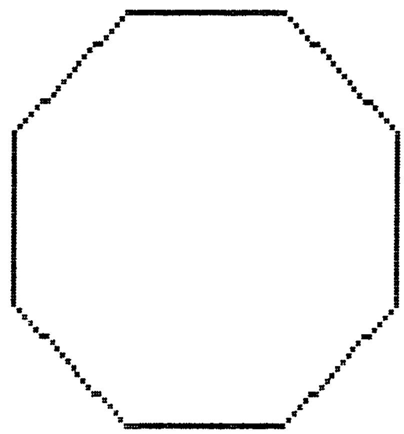

Figura 5.23 - Octógono construído dentro do conceito de isoperimetria

Decágono:

```
?poli2  10  240  imprima
```

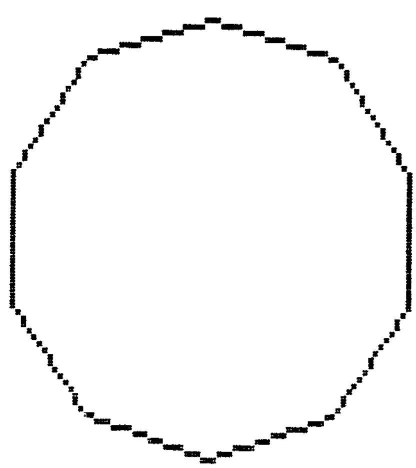

Figura 5.24 - Decágono construído dentro do conceito de isoperimetria

Polígono com 12 lados:

```
?poli2  12  240  imprima
```

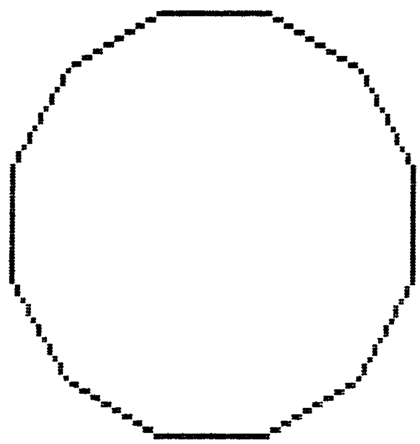

Figura 5.25 - Polígono com 12 lados construído dentro do conceito de isoperimetria

Polígono com 18 lados:

```
?poli2  18  240  imprima
```

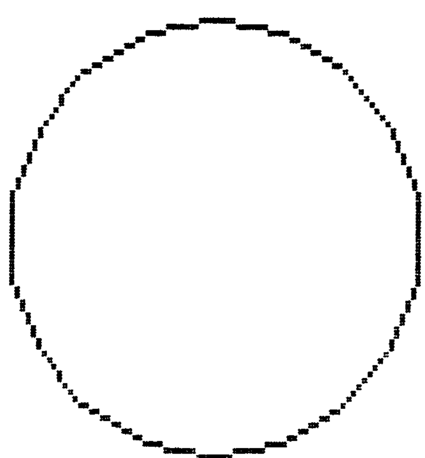

Figura 5.26 - Polígono com 18 lados construído dentro do conceito de isoperimetria

Polígono com 36 lados:

```
?poli2  36  240  imprima
```

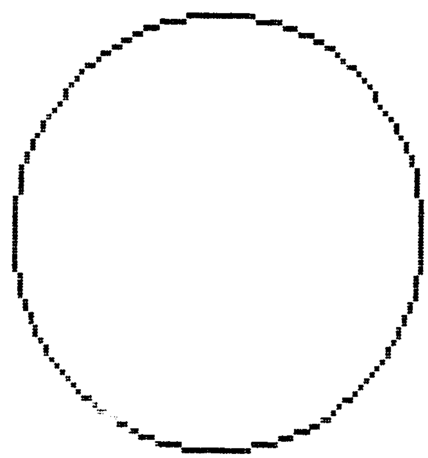

Figura 5.27 - Polígono com 36 lados construído dentro do conceito de isoperimetria

Polígono com 72 lados:

```
?poli2  72  240 imprima
```

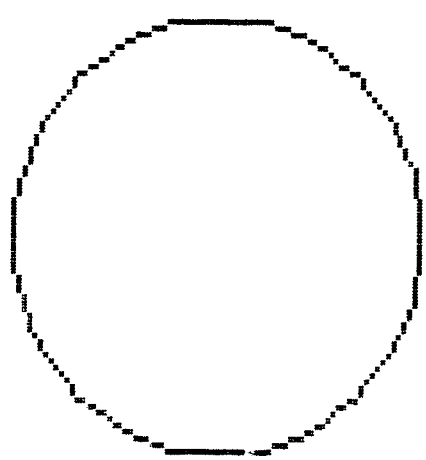

Figura 5.28 - Polígono com 72 lados construído dentro do conceito de isoperimetria

Polígono com 360 lados:

```
?poli2  360  240  imprima
```

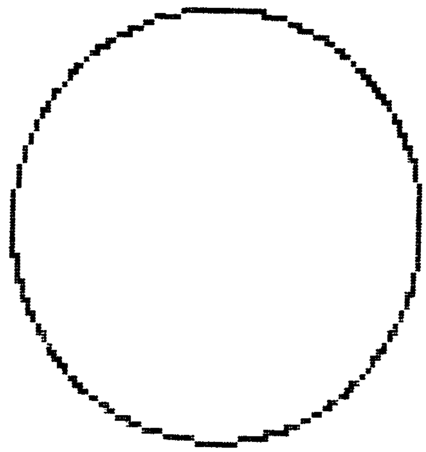

Figura 5.29 - Polígono com 360 lados construído dentro do conceito de isoperimetria

O sujeito, então, a partir daí, foi representando na tela do computador os diversos polígonos regulares, como: triângulo, quadrado, pentágono, entre outros. Para tanto, reestruturou o programa **poli1,** criando outro programa computacional o qual chamou de **poli2**, e foi alterando as primeiras variáveis, que correspondem ao número de lados dos polígonos desejados, e manteve as segundas variáveis constantes, uma vez que relacionavam-se ao conceito de perímetro.

Constata-se nesse contexto que o sujeito depois da representação da construção das Figuras 5.18 a 5.29, da maneira apresentada acima, construiu a estratégia "ótima", do problema anterior já resolvido, isto é, otimizou sua estratégia relativa à construção da representação do círculo. Agora, o comprimento dos lados dos polígonos diminui à medida que crescem os números de seus lados, e com isso as figuras "*quase que não crescem*" na tela. Assim o processo de construção da representação do círculo apresentado é mais elucidativo sobre a convergência dos polígonos para o círculo, à medida em que crescem os números de lados do polígonos. A lei de formação encontrada no programa computacional **poli2,** que define o tamanho dos lados dos polígonos é expressa por: **y/n,** no qual **y** e **n** já foram definidos.

Outros conceitos matemáticos podem, entretanto, ser explorados a partir da solução dessa tarefa. Por exemplo, em Miskulin (1989) foram trabalhados conceitos de maximização de áreas de figuras isométricas, de construção de malhas com figuras regulares, e de volumes de prismas, ao se explicar com Logo o comportamento das abelhas européias durante a construção dos favos de mel.

Por considerar de interesse, e como seqüência das situações práticas acima realizadas pelo sujeito, o pesquisador lançou mão do seguinte problema: **Seria possível construir-se malhas com figuras regulares?**

5.4.2) Construção de Malhas[5] com Polígonos Regulares

O pesquisador ao incitar o sujeito a resolver esse problema, contextualizou-o buscando a sua inter-relação com a vida real. Sabe-se que as formas poliédricas são encontradas na natureza, como por exemplo, entre outros, o dado que é cúbico, a bola de futebol que é esférica, o azulejo que é quadrado, o favo das abelhas européias que é constituído por prismas hexagonais que se encaixam perfeitamente em forma de malhas. O problema proposto constitui-se na **representação da construção do favo de mel das abelhas européias**, por apresentar-se rico em detalhes geométricos, além de ser motivador e significativo por tratar-se da exploração da geometria encontrada na natureza. Desse modo, ao considerar que a base do prisma hexagonal é um hexágono, polígono esse já representado pelo sujeito em situações anteriores, o pesquisador questionou-o sobre quais outros polígonos (e conseqüentemente prismas, por tratarem-se de formas poliédricas onde a terceira dimensão deveria ser considerada) poderiam ser utilizados na construção do favo.

Quais são os polígonos regulares que possibilitam a construção de uma malha (perfeito encaixe)?

A partir daí, o sujeito compôs a seguinte estratégia, construindo uma parte da malha, e para tanto, criou o seguinte programa computacional:

```
?ap  malha
aprenda  malha  :v  :n  :y
repita  :v  [ poli2 :n :y  pd 180 - 360 / :n  ]
fim
```

no qual:

malha representa a disposição dos polígonos desejados compostos ao redor de um de seus vértices,

`poli2` representa o polígono a ser utilizado,

`v` representa o número de polígonos que se deseja "desenhar" e constitui-se em uma das variáveis do programa,

---

[5] Malhas, nesse contexto, expressa o ladrilhamento através dos polígonos regulares, ladrilhamento esse obtido pela composição dos polígonos de forma a preencher uma dada área, de maneira "perfeita", isto é, sem sobras e sem sobreposições de áreas.

n corresponde ao número de lados do polígono, e constitui-se na segunda variável do programa,

y corresponde ao número total de passos da tartaruga na construção do polígono (perímetro).

Do ponto de vista computacional, constata-se pela descrição do programa **malha**, criado pelo sujeito, um estilo procedural inerente ao paradigma de programação utilizado, quando ele usa como sub-procedimento um outro programa anteriormente criado, **poli2.** Em um segundo momento, a estratégia utilizada pelo sujeito constitui-se na elaboração da representação de diversos polígonos regulares, utilizando o programa **malha** acima descrito.

Começou sua representação com triângulos, atribuindo valor para o número de triângulos a ser representado, valor para os lados dos triângulos e valor para número total de passos a ser percorrido pela tartaruga na construção de cada triângulo que compõem a malha triangular. Desse modo,

```
?malha  6  3  120  imprima
```

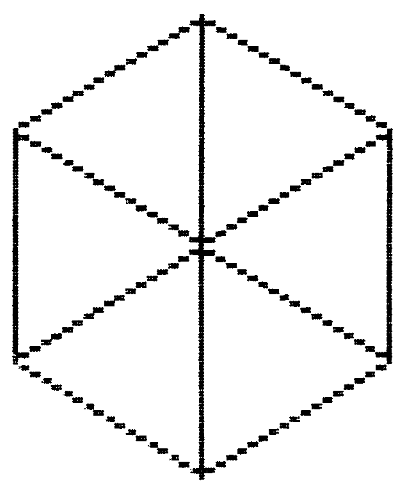

Figura 5.30 - Malha construída com triângulos

Em seguida, utilizou quadrados, mantendo o mesmo programa computacional **malha**, ajustando as variáveis desse programa, que seriam necessárias para a representação do quadrado; assim, executou:

```
?malha  4  4  120  imprima
```

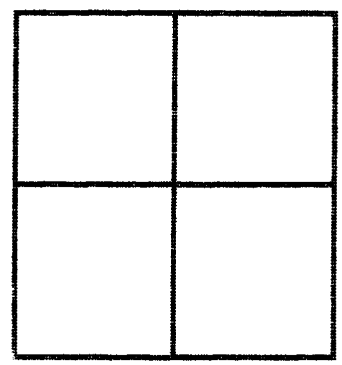

Figura 5.31 - Malha construída com quadrados

Em um outro momento, passou a utilizar pentágonos, nessa sua investigação do problema. Desse modo, utilizou novamente o mesmo programa **malha,** alterando as variáveis necessárias para a devida representação da malha de pentágonos, assim sendo,

```
?malha  4  5  120  imprima
```

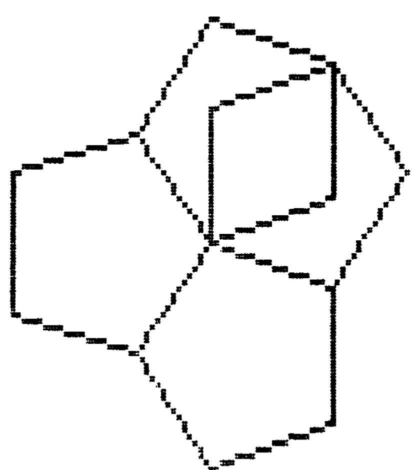

Figura 5.32 - Tentativa de construção de malha com quatro pentágonos

```
?malha  3  5  120  imprima
```

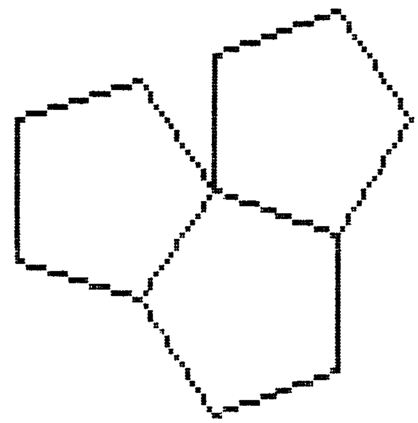

Figura 5.33 - Tentativa de construção de malha com três pentágonos

À medida que o sujeito foi representando a construção da malha através do programa computacional genérico **malha**, por meio de triângulos e quadrados, percebeu nitidamente um perfeito encaixe. Entretanto, quando tentou construir uma malha com quatro pentágonos, constatou que "sobrava" ângulo à medida que dois dos pentágonos se sobrepunham (Figura 5.32). Então repetiu novamente a estratégia utilizando três pentágonos dessa vez, e nesse momento percebeu que faltava "ângulo", não obtendo um perfeito encaixe e por conseguinte não representando a malha (Figura 5.33).

A seguir generalizou sua estratégia anterior (utilização do programa computacional **malha**) **a** outro contexto, qual seja, a construção da malha com hexágonos, adequando as variáveis necessárias para isso; como abaixo representado, obtendo assim um perfeito encaixe.

```
?malha  3  6  120  imprima
```

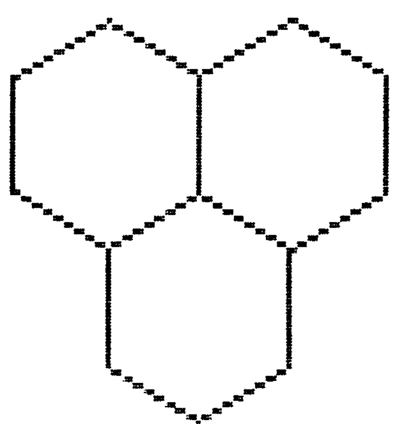

Figura 5.34 - Malha construída com hexágonos

Em seguida tentou construir a malha com heptágonos, usou o mesmo programa computacional **malha,** ajustando as variáveis para atingir seu intento, assim,

```
?malha  3  7  120  imprima
```

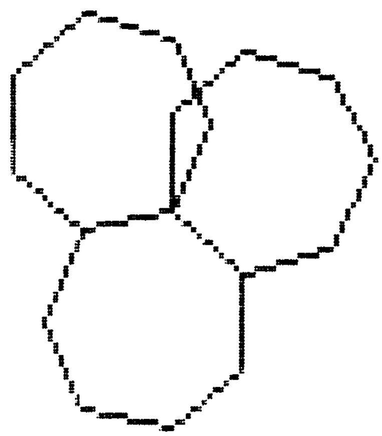

Figura 5.35 - Tentativa de construção de malha com heptágonos

O sujeito notou que, ao utilizar essa estratégia, novamente ocorreu a "sobra" de ângulos pela sobreposição de dois polígonos. Nesse sentido, concluiu que com heptágonos não seria possível obter um perfeito encaixe, ou seja, seria impossível a construção da malha.

Ao analisarmos o processo de resolução, sob o aspecto computacional, foi constatada a conclusão do sujeito expressa pelas palavras:

"Os únicos três polígonos regulares que permitem um perfeito encaixe são o triângulo eqüilátero, o quadrado e o hexágono."

Esse fato, do ponto de vista matemático, pode ser explicado novamente pelas próprias palavras do sujeito:

"Eu só consigo representar um perfeito encaixe com polígonos regulares, isto é, representar uma malha quando os ângulos internos dos polígonos que a formam forem divisores de 360°."

Na nossa concepção, esse problema é fundamental no ensino da Geometria, pois retrata situações reais do cotidiano do sujeito, situações essas que são evidenciadas através de diferentes modos de visualizar uma pavimentação, um ladrilhamento. Na Geometria dos Mosaicos encontrada em artesanatos primitivos e contemporâneos, ressaltam-se os trabalhos artísticos de Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972), reconhecido mundialmente e admirado pela notável combinação de sensibilidade, precisão técnica e conhecimento matemático que seus trabalham expressam.

Encontram-se na literatura especializada sobre Escher considerações sobre a matemática: que segundo suas próprias palavras, essa ciência era expressa como um "portão aberto", portão do qual partem muitos caminhos que se ramificam por um jardim; quando se pensava já ter percorrido todos eles, e retratado todas as vistas desse jardim, acabava-se encontrando um novo caminho, que permitia outras descobertas.

Com essa concepção, Escher utilizava a matemática como uma ferramenta que lhe ampliava a percepção e enriquecia seu trabalho gráfico, desse modo resultando em uma obra primorosa.

Nesse processo de interação pesquisador/sujeito/ambiente Logo, o pesquisador objetivando considerar os conceitos construídos e representados acima pelo sujeito; lançou mão de um outro problema: **Havendo três possibilidades entre os polígonos que permitem um perfeito encaixe, isto é, que proporcionam a construção de uma malha, por que as abelhas européias escolheriam, dentre essas três formas, a forma hexagonal na construção de seus favos?**

Tentando conduzir o sujeito a pensar sobre construções de estratégias que lhe possibilitasse resolver o problema proposto, o pesquisador solicitou um problema intermediário:

Dentre as figuras regulares que permitem a formação de malhas, qual é a que apresenta maior área? Nesse sentido, incitou o sujeito a buscar estratégias para resolver a questão proposta.

Assim sendo, o sujeito criou uma nova estratégia que compunha suas estratégias anteriores, expressas pela construção dos polígonos triângulo, quadrado e hexágono, e dessa maneira respondeu:

"Eu poderia comparar as áreas das três figuras que possibilitaram a construção da malha".

5.4.3) Comparação de Áreas

O sujeito perseguindo seu objetivo, que constituia em comparar as áreas do triângulo, quadrado e hexágono, tornou sua estratégia ainda mais complexa, quando utilizou a sobreposição dos polígonos, iniciando essa comparação sobrepondo a área do triângulo com a área do quadrado. Assim sendo, ele apresentou:

```
?poli2  3  240
?poli2  4  240  imprima
```

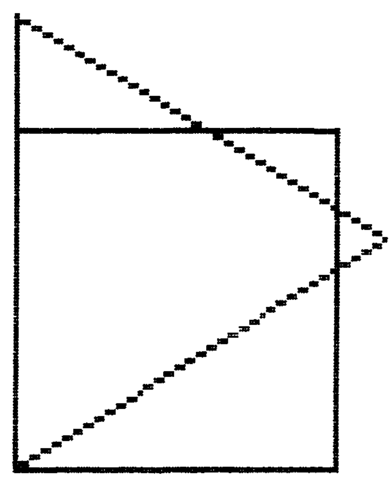

Figura 5.36 - Comparação entre as áreas do triângulo e do quadrado

Da sobreposição dos polígonos (Figura 5.36) e reflexão de seus procedimentos acima, ele concluiu que o quadrado apresentava a maior área, pois as áreas correspondentes às partes do triângulo fora do quadrado são menores que aquela dentro do quadrado não ocupada pelo triângulo. No momento seguinte o sujeito comparou a área do quadrado com a área do hexágono. Para tanto, utilizando o mesmo programa computacional **poli2**. Assim com o mesmo programa computacional **poli2**, variando apenas os parâmetros:

```
?poli2  4  240
?poli2  6  240  imprima
```

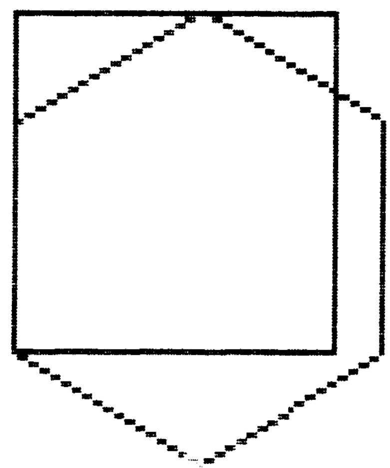

Figura 5.37 - Comparação entre as áreas do quadrado e do hexágono

De sua observação ele concluiu que o hexágono apresenta a maior área, pois em analogia com o caso anterior, a soma das áreas das partes do quadrado que estão fora do hexágono é menor que a área do hexágono não ocupada pelo quadrado. Inerente a esse raciocínio nota-se a inter-relação de conceitos geométricos com um outro campo da Matemática, a Álgebra, mais especificamente com o tópico que trata da Teoria dos Conjuntos, na medida em que o sujeito transporta os dois triângulos retângulos na Figura 5.37 (parte complementar da intersecção de áreas) para a parte complementar inferior e observa claramente que os dois triângulos retângulos estão nela contidos.

Constata-se inerente ao raciocínio do sujeito a generalização da estratégia criada – comparação de áreas – pois ao comparar primeiramente a área do triângulo com a área do quadrado, concluiu que a área do quadrado era a maior. Em um segundo momento utilizou a mesma estratégia para comparar a área do quadrado com a área do hexágono, concluindo desse modo que o hexágono é o polígono de maior área dentre aqueles com mesmo perímetro. Desse modo, a conclusão acima justifica o fato das abelhas européias usarem poliedros hexagonais (prismas hexagonais, formados de hexágonos regulares em suas bases e um componente na terceira dimensão que é sua altura) na construção de seus favos, ou seja, com a mesma quantidade de material conseguem um reservatório que armazena uma maior quantidade de mel (problema de maximização de volume tratado no domínio do Cálculo Diferencial e Integral).

Evidenciam-se nesse processo, conceitos matemáticos utilizados, tais como, intersecção de áreas de figuras planas, relação entre polígonos, relação entre medidas de ângulos, conceitos de isoperimetria, construções de representações de polígonos, conceito de área.

As idéias poderosas intrínsecas ao ambiente Logo possibilitam ao usuário o perfeito entendimento e compreensão de vários tópicos matemáticos aparentemente abstratos se forem tratados no paradigma tradicional, de maneira simples e concisa, através da Geometria da Tartaruga.

5.5) Implicações Pedagógicas da Geometria da Tartaruga

Da maneira pela qual os problemas foram desenvolvidos e da análise por nós processada, evidencia-se um paralelo entre as duas Geometrias que definem o Círculo, fato exemplificado na representação da construção do círculo Pode-se inferir, nesse contexto, que a Geometria da Tartaruga é uma Matemática diferente da Matemática Tradicional, conforme Abelson e diSessa (1981) citam em seu livro: "Turtle Geometry: The Computer as a Mediun for Exploring Mathematics", ou seja, uma Matemática que possibilita ao sujeito a exploração e a construção de conceitos geométricos deixando de lado a demasiada formalização que torna a Matemática, de um modo geral, um mito, no sentido de que pela maneira como tem sido trabalhada nas escolas, ela se mostra impenetrável.

Constata-se que os conteúdos matemáticos, de maneira geral, são "ensinados" pelo professor tradicional com grande formalismo e abstração. É um ensino informatizante que se processa através de transmissão de fatos, como se a "cabeça" do educando fosse um sistema armazenador de dados, informações e idéias, e pelo qual o aluno não atinge a plena compreensão dos conceitos, apenas aceita-os, tornando-se um ser passivo; o ambiente Logo por outro lado, possibilita-lhe a construção de conceitos matemáticos, aparentemente abstratos, de maneira simples e significativa, utilizando conhecimentos anteriores e transpondo-os às novas situações (Hoyles, 1981; Noss, 1981). Esse fato é exemplificado na representação da construção do círculo, quando o sujeito tenta várias vezes e por diversos caminhos e estratégias "traçar" no micro; e quando, para representar sua construção, compara com o modelo de círculo que já possui, ou que lhe foi apresentado. Dessa maneira, refletirá sobre o modo pelo qual está resolvendo o problema proposto; isto é, estará pensando sobre o seu modo de pensar, e com isso torna-se um ser espistemológico (Papert 1985).

PROPOSTA DE AMBIENTES INFORMATIZADOS PARA A EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

CAPÍTULO 6

PROPOSTA DE AMBIENTES INFORMATIZADOS PARA A EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

"Existe a crença de que só se pode programar o que se compreende perfeitamente. Essa crença ignora a evidência de que a programação, como qualquer outra forma de escrita, é um processo experimental. Programamos como redigimos, não porque compreendemos, mas para chegar a compreender."
(Weizenbaum, 1981)

6.1) Justificativa

A partir do projeto I: Clubinho de Matemática (Anexo I), que foi coordenado pela presente autora desde o final de 1988, no LEM/IMECC/NIED/UNICAMP[1] e em 1990 no NIED/UNICAMP e também com a pesquisa em Logo, em que nos conscientizamos do desenvolvimento cognitivo e afetivo das crianças pertencentes a esse Clubinho, e sempre repensando a nossa ação pedagógica, surgiu a idéia de implementar a pesquisa teórica que vem sendo desenvolvida neste **Estudo de Caso**, com um **enfoque qualitativo**. O interesse dos pesquisadores tem-se voltado para esse método de pesquisa e, conseqüentemente, aparecido com maior freqüência na área da pesquisa psicossocial e educacional.

6.2) O Que é uma Pesquisa Inserida no Contexto Educacional e Social?

Fazendo uma retrospectiva histórica entre as linhas de pesquisas educacionais no Brasil, segundo Aparecida Joly Gouveia (1971/76), essas linhas de pesquisas inicialmente enfocavam uma tendência psico-pedagógica, cujas temáticas abordadas referiam-se ao

---

[1] LEM - Laboratório de Ensino de Matemática.
NIED - Núcleo de Informática Aplicada à Educação.
IMECC - Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação.
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas.

estudo do desenvolvimento de medidas de aprendizagem. Com o passar dos anos, essas tendências foram se ampliando, passando também a abordar condições culturais, tendências da sociedade brasileira e enfocando as relações entre professor, aluno, sistema escolar e outros aspectos da sociedade.

Na Educação, a pesquisa deve preocupar-se em repensar o processo ensino-aprendizagem dentro de um contexto cultural amplo, onde o social deve ser valorizado, pois, entre a educação e a sociedade existe uma relação dialética, já explicitada no Capítulo 1, desta dissertação, que deve ser considerada.

Pesquisar seria promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre um determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito desse assunto. Reúnem-se aqui o pensamento e a ação do pesquisador, quando ele procura elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que serão utilizados para responder ou não ao problema proposto.

Essa concepção imediata e contínua no processo de pesquisa insere-se em uma corrente de pensamento acumulado e remete-nos ao caráter social de pesquisa. Nota-se a dimensão social no conceito de pesquisa em Demo (1981): *"Tanto a pesquisa quanto o pesquisador estão inseridos na vida em sociedade; mas com suas histórias, competições, interesses e ambições ao lado da legítima busca do conhecimento científico".*

Esse conhecimento não vem desprovido do nada como uma verdade absoluta, vem sempre marcado pelos sinais do tempo, do pesquisador e da pesquisa comprometidos com sua realidade histórica. A construção da ciência é um fenômeno social por excelência. Segundo Alves (1989), *"Todo ato de pesquisa é um ato político."*

6.3) Objetivos da Pesquisa

O objetivo específico desta pesquisa é captar ou delinear a inter-relação da Geometria da Tartaruga inerente a Linguagem Computacional Logo, com algumas diferentes formas de abordagens que a Geometria sofreu ao longo das civilizações, tais como: a Geometria Intuitiva, a Geometria Euclidiana, a Geometria Analítica, a Geometria das Transformações e a Geometria Espacial.

Um objetivo mais amplo seria traçar algumas considerações de natureza metodológica decorrentes deste estudo, propiciando aos professores e pesquisadores da área, um repensar sobre a sua prática pedagógica, redimensionando dessa maneira, o processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.

6.4) Problema da Pesquisa

É possível resgatar ou captar algumas abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do Sistema Logo?

Pretendendo, então, responder a essa questão, serão investigados e analisados os processos cognitivos e computacionais envolvidos na construção de conceitos matemáticos e geométricos no ambiente Logo, de dois usuários, em um contexto de Resolução de Problemas, sob a ótica da Teoria Psicogenética do Desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget.

Para tal, processar-se-á a análise da interação de dois sujeitos pertencentes ao **Projeto I: Clubinho de Matemática (Anexo I)** desde 1988. A descrição dessa análise será recortada em dois momentos. Em um primeiro momento, será realizado um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, onde serão ressaltados os processos mentais e computacionais, sob a ótica da Microgênese Cognitiva, de um dos sujeitos trabalhando com o **Logo Bidimensional** para a exploração da **Geometria Plana.** Em um segundo momento, também será utilizado como modalidade dessa pesquisa, um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, em que serão investigadas as estratégias de Resolução de Problemas desenvolvidas pelo segundo sujeito e ainda, relatados alguns exemplos trabalhados nesse processo, por meio do **Logo Tridimensional**, para a exploração da **Geometria Espacial**, projetando-os em um contexto mais amplo, que seria o processo ensino-aprendizagem da Geometria.

6.5) Critérios de Seleção dos Sujeitos do Estudo de Caso

A seleção das crianças para o Estudo de Caso, tal como foi realizada, deu-se através de análises dos relatórios feitos pela presente autora e pelas monitoras que trabalharam no Projeto I(Anexo I), análise dos depoimentos das crianças pertencentes ao Clubinho de Matemática; análise dos programas computacionais (arquivos/disquetes) e do desempenho das crianças, no ambiente Logo. Além disso, foi feita uma contextualização dos sujeitos, tanto em nível sócio-político, econômico e social, quanto em nível cognitivo.

6.6) Metodologia da Pesquisa

A Metodologia da pesquisa com os sujeitos do Estudo de Caso será uma metodologia de Resolução de Problemas, no ambiente Logo.

6.6.1) Algumas Reflexões sobre a Metodologia Escolhida

6.6.1.1) Por que Ensinar Através de Resolução de Problemas?

Resolução de Problemas é um processo pelo qual o indivíduo utiliza conhecimentos adquiridos, habilidades e estratégias para satisfazer a exigência de uma situação desafiante que se lhe apresenta. Parte significativa do desenvolvimento humano pode ser atribuída à habilidade característica do ser humano de resolver problemas.

No dia-a-dia as pessoas deparam-se com situações problemas, perguntas, questionamentos, em alguns momentos mais simples, em outros mais complexos, e se defrontam constantemente com situações cujas soluções não são imediatas. Contudo, situações que representam problemas para alguns, não necessariamente constituem-se em problemas para outros. Assim sendo tornam-se pertinentes as palavras de Popper (1978):

> *"(...) cada problema surge da descoberta de que algo não está em ordem com o nosso suposto conhecimento; ou examinando logicamente, da descoberta de uma contradição interna entre nosso suposto conhecimento e os fatos; ou declarado talvez mais corretamente, da descoberta de uma contradição entre nosso suposto conhecimento e os supostos fatos."* (p.14) (grifo nosso).

Desse modo, o indivíduo, quando colocado em uma situação que não lhe é satisfatória e nem tampouco familiar, reflete sobre esse novo contexto, procurando modificá-lo, em sua essência. Saviani (1985) postula que a essência do problema é a necessidade. Nesse sentido adverte que nem sempre uma questão em si mesma caracteriza-se por um problema, nem mesmo aquela cuja resposta é desconhecida, mas sim aquela situação,

> *"(...) cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer. Eis aí um problema. Algo que eu não sei é um problema; mas quando eu ignoro alguma coisa que eu preciso saber, eis-me diante de um problema. Da mesma forma, uma dificuldade que precisa ser superada, uma dúvida que não pode deixar de ser dissipada são situações que se nos configuram como verdadeiramente problemáticas."* (p.19) (grifo nosso).

De uma maneira geral, a maioria dos estudantes pensa que raramente usará a Matemática em sua vida diária, mas eles fatalmente se depararão com a solução de uma quantidade de problemas que encontram na vida social e no trabalho diário. Nessa instância, estas situações quantitativas aparecerão como problemas a serem resolvidos. Raramente as pessoas no seu cotidiano confrontam-se com situações que possam ser solucionadas por um "algoritmo" prontamente. Nesse sentido, caberia à educação propiciar condições ao indivíduo mostrando-lhe todas as possibilidades, abrindo-lhe novos caminhos; objetivando o seu desenvolvimento cognitivo e afetivo, para que cada vez mais, encontrando-se diante de conflitos, situações desafiadoras, possa articular-se de forma equilibrada, obtendo assim a sua perfeita integração na sociedade.

Apesar da relação óbvia entre a Matemática da sala de aula e as situações quantitativas na vida, sabemos que de um modo geral, crianças de todas as idades vêem pouca ligação entre o que acontece na escola e o que acontece na vida real. Uma ênfase na resolução de problemas em sala de aula pode diminuir a distância entre o mundo real e o "mundo da sala de aula". Em muitas aulas de Matemática os estudantes não percebem conexão alguma entre os vários conceitos desenvolvidos durante o curso. A maioria desses estudantes encara cada tópico como uma entidade separada. Resolução-de-Problemas mostra a integração das idéias matemáticas. Os problemas em geral não são solucionados num "vácuo", mas são reportados de algum modo para uma noção vista anteriormente, para um conceito já compreendido. Assim, "bons" problemas podem ser usados para revisar idéias matemáticas já vivenciadas, bem como semear idéias, noções e conceitos para serem apresentados e contextualizados no futuro. Em nossa concepção, Matemática é uma constante resolução de problemas. Constata-se, de um modo geral, que solucionar problemas é mais estimulante, mais desafiante e mais motivador.

As mais antigas matemáticas escritas que nos vêm à imaginação são coleções de problemas. Os conhecimentos da matemática egípcia e babilônica estão totalmente baseadas na análise de problemas ao invés de teorias ou provas de teoremas. O Papirus de Rhind, a maior fonte de conhecimento da matemática egípcia, foi essencialmente um livro escolar. Nele é encontrado um grande número de problemas e exercícios. Há também nele o que se pode chamar de problema de narrações, sendo alguns de caráter prático. Segundo Polya (1978), "*A solução de problemas foi coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de Rhind.*"

Castelnuovo (1989), apresenta uma retrospectiva histórica da Matemática, contextualizando-a em diferentes momentos. Entre vários aspectos que aborda, destaca alguns tipos de problemas encontrados em documentos históricos, que traduzem as concepções acima delineadas, tais como o problema encontrado em uma das tábuas de argila, descoberta na Babilônia, anterior a 1800 a.C. (Figura 6.1), provavelmente destinado a estudantes:

Uma madeira larga de 30 unidades encostada em um muro desliza 6 unidades. Quantas unidades se afasta o pé desta madeira da base do muro? Na tábua de argila não se encontra desenho explícito, mas apenas a solução: *"Tem-se que calcular o quadrado de 30 e deste subtrair o quadrado do número que se obtém subtraindo 6 de 30, que é 24. De tal maneira se obtém o quadrado do número que se busca."*

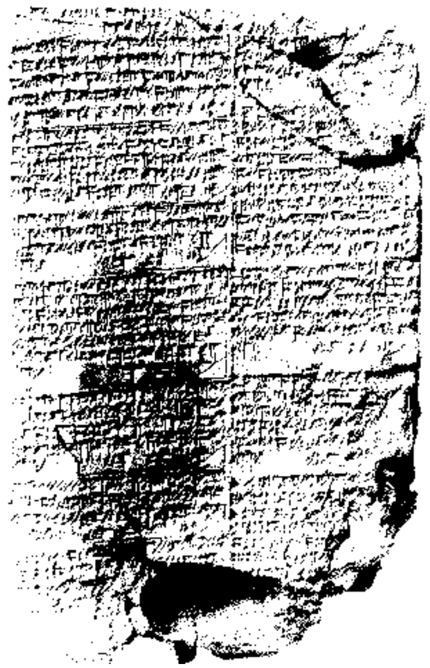

Figura 6.1 - Ilustração da tábua de argila descoberta na Babilônia

O conceito matemático inerente ao problema é a aplicação do **Teorema de Pitágoras**, datado de mil anos antes de Pitágoras. Nesse contexto, podemos inferir que, sob o aspecto metodológico, o ensino era voltado à mecanização de técnicas e algoritmos onde prevalecia a memorização em detrimento da construção propriamente do conceito.

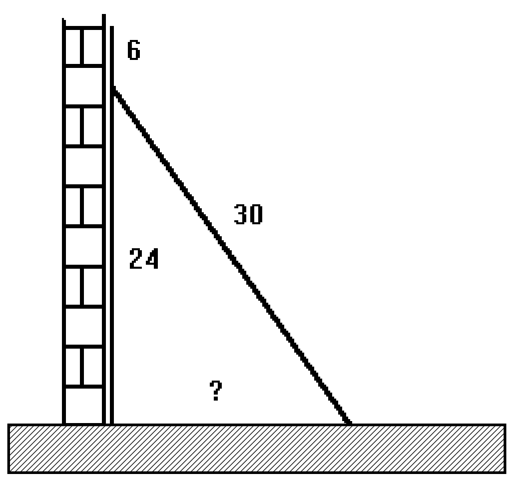

Figura 6.2 - Representação do problema

Reforçando esse fato, a autora acima, relembra-nos que essa mesma abordagem metodológica é encontrada no **"Papyrus Rhind"**, o famoso documento egípcio, datado de 1650 a.C., que se resume na sua essência em: ***"tem que se seguir a regra".***

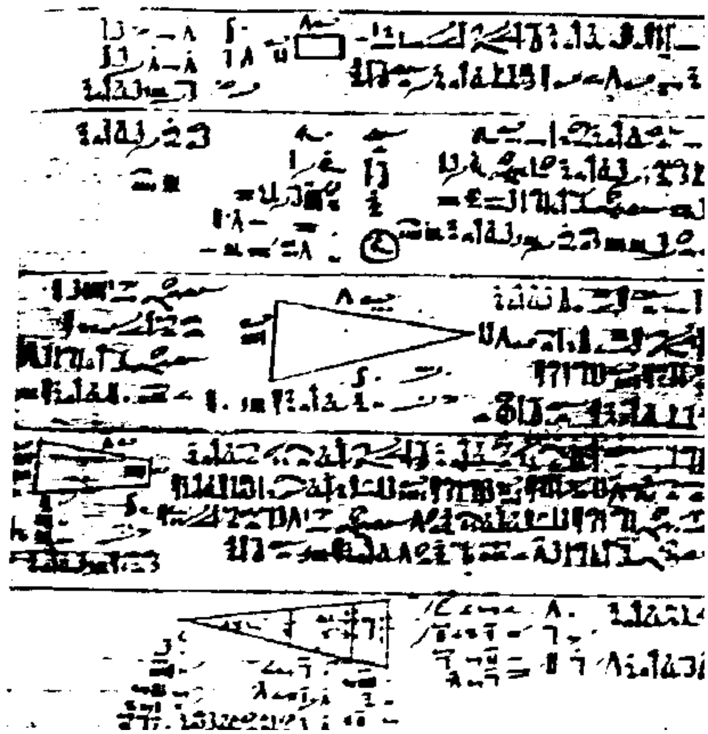

Figura 6.3 - Parte do Papirus de Rhind

No contexto da Grécia antiga, berço da "Matemática racional", no qual a Matemática é baseada em um sistema hipotético-dedutivo, ressalta-se um diálogo relatado por Platão, diálogo este estabelecido entre Sócrates e um escravo, que se traduz em uma situação problema: "*Sócrates mostra ao escravo o desenho de um quadrado, e pergunta: o que devo fazer para construir um quadrado cuja área seja o dobro da do quadrado dado?*"

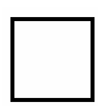

Figura 6.4 - Representação do quadrado

O escravo responde: *"tem que duplicar todos os lados"* (Figura 6.5):

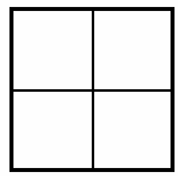

Figura 6.5 - Representação do quadrado duplicado pelo escravo

Para tal, o escravo concretiza a estratégia escolhida, e então constata empiricamente que a área obtida não era o dobro da área do quadrado dado, mas sim quatro vezes aquela área.

Através do **diálogo**[2] entre o mestre e o escravo, este acaba obtendo a solução mostrada na Figura 6.6:

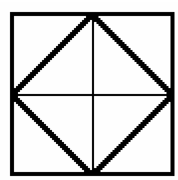

Figura 6.6 - Representação do quadrado completo

Podemos inferir que pela solução geométrica apresentada pelo escravo, a descrição do processo de resolução consistiu em:

Duplicou os lados do quadrado dado. Obtendo um quadrado, cuja dimensão é de quatro quadrados semelhantes ao dado, conseqüentemente constatou que a área obtida é quatro vezes maior da do quadrado dado. Dividiu os quatro quadrados, que compunham o quadrado maior, pelas respectivas diagonais. Obteve oito triângulos retângulos isósceles iguais. A área de cada triângulo correspondia à metade da área do quadrado dado. Considerou o quadrado formado pelas diagonais traçadas, observou que ele era composto de quatro dos triângulos isósceles, portanto, a área desse quadrado corresponde à área do quadrado dado.

[2] No artigo citado, apesar do referido diálogo não ter sido explicitado, será considerado nesse estudo pela sua importância no momento histórico específico.

Apesar desse exemplo ter sido desenvolvido na Grécia, onde através da história, sabe-se que o ensino não se processava de forma ativa, interativa e sim consistia em um ensino transmitido e recebido passivamente, nota-se, inerente a esse problema uma utilização clássica de **ensino heurístico,** ensino no qual, o escravo necessitou para generalizar e reestruturar as estratégias utilizadas, com a finalidade de buscar a solução de seu problema**.** Nesse sentido, ressalta-se que a resolução de problemas possibilita ao estudante aprender e praticar o pensamento heurístico, através de reflexão, análise e reestruturação de suas estratégias, propiciando a compreensão significativa dos conceitos matemáticos envolvidos no processo de construções de conceitos matemáticos e geométricos em situações práticas de resolução de problemas.

Poincaré (1854-1912), um dos mais importantes matemáticos de sua época, pronunciou em 23 de março de 1908, no Instituto Geral de Psicologia, em Paris, a célebre conferência "L'Invention Mathématique", onde analisou a força excepcional, as condições do desenvolvimento científico. Essa conferência foi publicada posteriormente em seu livro Science et Méthode. Nesse contexto acreditava que:

> *"A gênese da invenção matemática é um problema que deve inspirar o maior interesse do psicólogo. É o ato no qual o espírito humano parece poder prescindir em maior grau do mundo exterior, no qual só atua ou só parece atuar por si mesmo e sobre si mesmo, de modo que, ao estudar o processo do pensamento geométrico, podemos ter a esperança de captar o mais essencial do espírito humano."* (p.357) (grifo nosso).

6.6.1.2) Concepções Psico-Pedagógicas sobre Resolução de Problemas

A concepção de Resolução de Problemas abordada neste momento, não se configura pelo sentido clássico como vem sendo considerada pelos autores: Polya, Simon, Resnick e outros, que até o presente século não ultrapassaram dentro deste contexto, os raciocínios indutivo e dedutivo. Nossa concepção não se reduz a uma definição específica encontrada na literatura, por considerarmos que esse fato restringiria o significado que aqui pretendemos, ou seja, tratamos nesse contexto, Resolução de Problema de uma maneira abrangente, sem pré-conceitos estabelecidos. Desse modo, o indivíduo ao resolver o problema, interage com ele de modo a transcendê-lo. Quais seriam os processos mentais inerentes a essa conduta?

Sabe-se que o raciocínio humano é composto por dois tipos de raciocínios distintos e muitas vezes complementares:

- Raciocínio **Analógico**: é o raciocínio que não possibilita ao sujeito realizar transformações. Encontramos no raciocínio analógico o raciocínio **transdutivo**, que relaciona **parte por parte**, **do particular para o particular,** que faz correspondências e **analogias**, sem **transformações**. Para exemplificar, vamos nos reportar a uma situação real, onde o raciocínio analógico está implícito, e na qual percebemos o conhecimento matemático expresso pela **Correspondência Biunívoca**:

Em uma sala de teatro, onde a quantidade de poltronas é determinada e conhecida previamente, pode-se determinar facilmente o número de pessoas presentes apenas pela percepção e consciência do número de poltronas vazias.

No contexto escolar, um exemplo matemático onde se evidencia o raciocínio analógico poderia ser, entre outros:

A partir de um sistema de eixos ortogonais, podemos associar a ele pontos do plano determinados pelas suas coordenadas (abcissas e ordenadas).

- Raciocínio **Lógico**: é aquele que possibilita ao sujeito realizar transformações no contexto em que atua. Encontramos no raciocínio lógico, os seguintes raciocínios:

1- **Indutivo** (da parte para o todo);

2- **Transdutivo** (parte para parte);

3- **Dedutivo** (do todo para a parte);

4- **Abdutivo** (combinação do **indutivo** e do **dedutivo** com um componente a mais: **Reificação,** que são hipóteses ou conjecturas testáveis matematicamente).

Nos **paradigmas** que compõem a **Geometria** ao longo das civilizações, podemos encontrar a **Abdução** nas várias **formas de Abordagem** da Geometria e na sua evolução histórica. De acordo com Charles S. Peirce[3] (1977), a abdução aparece juntamente com a indução e dedução, como um modo especial de se pensar no processo cognitivo. D'Ambrosio (1990), ao referir-se à resolução de problemas, entre outros aspectos, diz: *"(...) abdução, que pode ser <u>conceituada como uma conjectura sobre a realidade</u> e que precisa ser avaliada através de testes, parece ser o <u>componente básico</u> para se trabalhar com uma <u>situação real</u>."* (p.30) (grifo nosso).

Nesse sentido, convém questionarmos no que consiste, de fato, o pensamento matemático. Qual a natureza do raciocínio que se utiliza ao se "fazer matemática"?

Faz-se necessário nesse contexto recorrermos a Poincaré (1988), que preconiza:

> *"As <u>verdades matemáticas</u> derivam de um pequeno número de proposições evidentes por uma cadeia de raciocínios impecáveis: elas se impõem não só a nós mas a própria natureza. (...) De cada <u>experiência</u>, uma <u>quantidade de consequências</u> poderão ser tiradas por uma série de <u>deduções matemáticas</u>, e é assim que cada uma delas nos fará conhecer um <u>pedacinho do Universo.</u>"* (Poincaré, 1988, p.15) (grifo nosso).

---

[3] Charles S. Peirce está situado dentro sa escola americana conhecida como pragmatismo. Sua obra, produzida há quase 100 anos, só recentemente tem sido reconhecida, e tem. em particular, fornecido o ponto inicial para tratamentos contemporâneos de problemas semióticos.

Relativizando essa idéia, Poincaré nega a consistência das construções vivenciadas nas deduções lógicas, pertencentes a Matemática, contudo, isso não quer dizer que todas elas devam ser derrubadas. O que ele postula a seguir é a participação efetiva do raciocínio indutivo na natureza do raciocínio matemático, pois seria impossível justificar o perfeito rigor e uma espécie de virtude criadora nela implícita, apenas através das deduções realizadas a partir das regras da lógica formal. Como o referido autor postula, se assim fosse, a Matemática se reduziria a uma imensa tautologia, onde nada de novo poderia ser acrescido.

Ainda o mesmo autor enfoca que a virtude criadora pode ser explicitada pelo raciocínio indutivo, que é posto em equivalência de importância com a indução física, dentro da construção da ciência, apesar de diferenciar-se desta última em alguns aspectos.

Poincaré, nesta sua obra, também esclarece-nos sobre o papel da hipótese dentro do trabalho científico: postula que tanto o matemático, quanto qualquer outro cientista, lança mão como forma de inquisição científica, de uma espécie de raciocínio que se origina da hipótese, e se encarrega, posteriormente, de submetê-la à verificação.

As questões sobre a natureza do raciocínio matemático, e sobre a descoberta da matemática estariam dessa forma respondida? Isto é, para a Matemática ser explicitada e compreendida só trataríamos dos raciocínios dedutivo e indutivo?

Nesse contexto, Peirce, como matemático e físico, se interessa pela lógica da descoberta científica e pesquisa profundamente essas idéias. Distingue três tipos fundamentais de raciocínio em Ciência: Dedução, Indução e Retrodução, sendo que esse último, Peirce chama usualmente de Abdução (hipóteses).

Sobre a distinção entre os três tipos de raciocínios: indutivo, dedutivo e abdutivo, recorremos à um exemplo de Peirce, apresentado por Oldroyd (1986, p.184) e por Sebeok (1983, p.8), qual seja:

"Dedução:

Regra: Todos os feijões deste saco são brancos.

Caso: Estes feijões são deste saco.

Resultado: Estes feijões são brancos.

Indução:

Caso: Estes feijões são deste saco.

Resultado: Estes feijões são brancos.

Regra: Todos os feijões deste saco são brancos.

Abdução:

Regra: Todos os feijões deste saco são brancos.

Resultado: Estes feijões são brancos.

Caso: Estes feijões são deste saco."

Observa-se que este último tipo de raciocínio ou inferência constitui-se para Peirce o lugar em que situa o processo de formulação de hipóteses. Descreve um tipo de inferência lógica, apesar das regras lógicas serem restritas, contudo contém em si próprio a possibilidade do risco e abre espaço para "adivinhações".

Do trabalho de Sebeok (1983) enfatiza-se que:

> "*Dedução depende de nossa confiança em nossa habilidade para analisar o significado dos sinais, nos quais ou pelos quais nós pensamos, indução depende de nossa confiança que o percurso de um tipo de experiência não vai ser mudada ou cessar sem alguma indicação anterior e abdução depende de nossa vontade, mais cedo ou mais tarde, de adivinhar as condições sob as quais um dado tipo de fenômeno se apresentará por sí mesmo.*" (p.2) (grifo nosso).

Nesse sentido a abdução parece, portanto, representar o "arriscar", as tentativas e esperanças de solucionar um problema. Entretanto, o fato de levantar hipóteses, não constitui em si a certeza e garantia do sucesso das mesmas. Elas devem ser testadas e esse processo envolve procedimentos dedutivos e indutivos, podendo-se chegar a avaliação dessas hipóteses.

Desse modo, Peirce coloca em destaque o processo abdutivo inserido no método científico, porém não o separa dos processos de testagem, isto é, *"tendo (de algum modo) inventado uma hipótese, suas conseqüências devem ser deduzidas e depois testadas"* (Oldroyd, 1986, p.185).

Convém citarmos as próprias palavras de Peirce, ressaltando a importância da abdução no método científico, expressas e extraídas do trabalho de Sebeok (1983):

> *"(...) eu proclamo a necessidade de pôr abdução no espaço do processo cognitivo em geral e acima de tudo no processo científico, pois é somente por meio de hipóteses novas e abduções mais ousadas que podemos descobrir novas verdades, (...), e somente por meio de novas hipóteses que podemos ampliar nossa visão do real e descobrir novos campos de experiência."* (p.125) (grifo nosso).

Nota-se dessa forma que tanto Peirce quanto Poincaré salientam a importância da hipótese no processo da descoberta científica. Colocam a hipótese no início desse processo e consideram que a partir dessa pode-se gerar a explicação científica de um fenômeno.

Na obra de Oldroyd (1986) encontra-se também a importância da hipótese no processo da descoberta científica, entretanto, um outro ponto que esse autor destaca é que, ao explicar a descoberta matemática, os dois filósofos anteriormente citados (Peirce e Poincaré) não esclarecem de onde ou como surgem as hipóteses. Podemos inferir que os dois autores poderiam ainda estar restritos à idéia de um *"insight"* de uma evidência ou até mesmo de uma intuição para justificar o surgimento de hipótese na mente do pesquisador e não acrescentam, na vasta literatura sobre a criatividade, *"qualquer coisa como um relato satisfatório da "lógica da descoberta científica""* (p.194).

Baseando-nos na idéias explicitadas por Poincaré e Peirce, postulamos a importância de uma atitude ousada, de busca, de indagação, para o pesquisador, atitudes essas necessária no contexto do processo de levantar hipóteses. Destacamos ainda que ciência, e mais especificamente, a Matemática, não compreende apenas procedimentos rígidos, absolutos, mas inclui também procedimentos que abrem espaço para o "arriscar-se".

Esse aspecto será retomado ao longo desta pesquisa, mais especificamente no capítulos que discorrem sobre as estratégias de resolução de problemas usadas pelos sujeitos do **Estudo de Caso.**

6.6.1.3) Inserção de Resolução de Problemas nos Currículos de Matemática

A colocação de uma maior ênfase na Resolução de Problemas no Currículo de Matemática tem sido fortemente recomendada nos últimos anos pelos educadores-matemáticos de inúmeros países.

Atualmente, essa preocupação encontra-se expressa nas novas propostas curriculares que surgem mundialmente, inclusive no Brasil (Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática/ 2° Grau, São Paulo, 1988; **Idem** 1989; Castelnuovo, 1989).

Castelnuovo, (1989) em seu artigo, refere-se à Resolução de Problemas, fazendo a seguinte reflexão sobre o mundo físico e a Matemática:

> *"Nunca como nestes últimos anos, a cultura científica, e através dela a Matemática, esteve tão presente em nossos lares, por meio de revistas, televisão, rádio, jornais, etc. É a escola quem tem a obrigação de colocar o cidadão a par de tudo isso, para que ele possa ao menos compreender o que significam as tabelas, os gráficos, as transmissões via satélites, os planetas, para que o seu mundo seja mais amplo e ao mesmo tempo mais próximo, enfim, para que tenha um mínimo de formação. Porém essas bases ele não poderá ter senão na escola, se ele não tiver a oportunidade de fazer experimentos e dar-se conta das motivações que proveem da realidade e da contribuição da matemática, através da Resolução de Problemas dos diferentes campos, desde a Física até as Ciências Sociais."* (grifo nosso).

Ressalte-se que os primeiros estudos sobre Resolução de Problemas propunham um ensino sobre diferentes heurísticas e passos na resolução de problemas. Algumas vezes essa ênfase gerava um ensino visando ao ocasional envolvimento com resolução de problemas.

Atualmente concebe-se a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, em que o professor propõe ao aluno situações-problema caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa concepção propicia a construção de conceitos matemáticos e conceitos geométricos pelo aluno, por meio de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de experiências com problemas de naturezas distintas, o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da Matemática envolvida. O processo de formalização é contínuo e não imediato, surgindo da necessidade do aluno de novas formas de comunicação e explicitação de seu raciocínio.

Desse modo, nesse processo, o aluno envolve-se com "fazer matemática", isto é, cria hipótese, conjecturas e investiga-as a partir da situação problema que tem à frente.

6.6.1.4) Considerações Metodológicas das Situações-Problema no Ambiente Logo

No ambiente Logo, serão propostas situações-problema em que o aluno irá abstraindo e formalizando os conceitos matemáticos e os conceitos geométricos nesse contexto, a partir de noções intuitivas e idéias simples, envolvidas nesses problemas (Polya, 1978).

Utilizar-se-á, para essa pesquisa, tanto situações-problema relacionadas com o Logo Bidimensional quanto com o Logo Tridimensional para a exploração da Geometria plana e espacial.

Para que o contexto ensino-aprendizagem seja favorável à implementação dessa pesquisa, caberá ao professor:

- Propiciar experiências de aprendizagem em Geometria, no ambiente Logo, principalmente experiências envolvendo Geometria Plana e Espacial com os sujeitos do Estudo de Caso.

- Criar um ambiente Logo, no qual o usuário, frente a projetos "livres", com uma certa orientação, ou atividades propostas pelos educadores matemáticos, sinta-se motivado e desafiado a tentar resolvê-los, buscando estratégias para solucionar seus desafios ou conflitos, desenvolvendo, desse modo, tanto o raciocínio lógico (indutivo, dedutivo e abdutivo), quanto o seu senso crítico, importantes para o pensamento matemático.

- Propor situações práticas que envolvam os sujeitos em um processo dinâmico de resolução de problemas, em que possam identificar e relacionar a Geometria da Tartaruga com algumas das diferentes formas ou abordagens da Geometria.

- Cabe ao professor, nesse ambiente, propor problemas que possibilitem o desenvolvimento da autonomia nas crianças em relação à sua intuição e à suas próprias manifestações de tomada de decisões.

Nesse sentido, segundo a essência do Logo, o aluno pode "comandar" a tartaruga através de comandos ou primitivas da Linguagem Computacional Logo para alterar sua posição, direção no espaço e conhecer certos conceitos geométricos conhecidos como a Geometria da Tartaruga (Papert, 1985; Abelson e diSessa, 1981).

Entretanto, uma análise mais detalhada sobre a Geometria da Tartaruga e das atividades que podem ser desenvolvidas através do Logo mostra que muitos conceitos geométricos envolvidos nessas atividades podem ser reportados aos conceitos geométricos da Geometria Tradicional e podem ser desenvolvidos por meio do Logo (Calani, 1981).

No ambiente Logo, a metodologia difere bastante da metodologia tradicional, do Ensino de Matemática, no sentido de que o aluno é quem programa o computador, ou seja, ele está no controle da aprendizagem e, ao ensinar o computador a pensar, entrará em uma exploração e investigação de como ele próprio pensa. Pensar sobre a maneira de pensar faz com que o indivíduo se torne um ser epistemológico (Papert, 1985).

Diante de um problema elaborado pelo aluno ou proposto pelo professor, o aluno entrará em uma investigação e tentará vários caminhos para chegar a solucionar o problema. Nessa busca e investigação trabalhará com conhecimentos matemáticos anteriores, tentando transpô-los para essa nova situação-problema.

Poderá surgir por parte do aluno uma reflexão. Haverá ocasiões em que ele necessitará trabalhar com o concreto anteriormente, ou simular os movimentos básicos da tartaruga. Vemos nesse contexto uma relação simbiótica[4] entre a tartaruga e o próprio aluno.

Além disso, é importante propiciar nesse ambiente a integração entre o concreto, o semi-concreto, representado pelos esquemas auxiliares, diagramas e desenhos feitos pelos próprios alunos, e o "abstrato" (Linguagem Computacional Logo). A resolução de problemas será utilizada para tal fim, assim como, os movimentos básicos da tartaruga, jogos matemáticos e outros artefatos metodológicos. Nesse contexto podemos explorar a autonomia, ou seja, o senso crítico e o potencial de resolução de problemas nas crianças, já que se trata de um dos aspectos enfatizados nesta pesquisa com os sujeitos do Estudo de

[4] Simbiótica: As ações da Tartaruga e do aluno processam-se como se fossem se um único ser, isto é, as ações do usuário traduzem as ações da Tartaruga e vice-versa.

Caso. E ainda explorar a cooperação e a competição, as regras do jogo e outros aspectos relevantes que Piaget e seus colaboradores apontam em seus estudos. Outros materiais concretos tais como: quebra-cabeças, tangram, geoplano, blocos lógicos, ábaco, multibases, materiais construídos pelos alunos, técnicas de dobraduras - Origami, entre outros. Naturalmente a fase "abstrata" será atingida durante o processo de resolução de problemas, onde o usuário ao elaborar seu programa computacional para representar seu problema, insere-se em um processo contínuo de comparação dos procedimentos criados com seus modelos a serem representados. Dessa comparação contínua, através da reflexão de seus possíveis erros (depuração), processa-se a reestruturação do seu programa, consequência da sua reestruturação mental.

Para exemplificar a integração acima explicitada, será relatada uma situação-problema vivenciada por um dos sujeitos da pesquisa.

Problema proposto: "Você seria capaz de desenvolver um projeto no qual usasse o Tangram[5] em contextos distintos, sendo que em um deles utilizasse a Geometria da Tartaruga?"

Dessa forma, o sujeito buscando resolver o problema proposto, elaborou os seguintes procedimentos:

Procedimentos:

```
?ap m0
aprenda m0
un pt 50 pe 90 pf 100 pd 90 ul
fim

m0 aprendido


?ap q
aprenda q :l
repita 4 [pf :l * rq 8 pd 90 ]
fim

q aprendido
?q 20
```

---

[5] Tangram é um quebra-cabeça originário da China, que surgiu há mais de mil anos. Decompondo a palavra, observa-se que: **tang** significa um períoco da dinastia chinesa e **gram** significa diagrama. Uma lenda retrata seu significado: "Um jovem chinês ao aconselhar-se com o ancião de sua aldeia antes de partir em viagem pelo mundo, recebe deste uma tábua quadrada de pedra, na qual deveria registrar tudo que ele vivenciasse em sua jornada. No momento em que o jovem recebe a tábua, essa escapa-lhe das mãos, caindo ao chão, partindo-se em sete pedaços. Quando ele retorna, utiliza os sete pedaços para representar as "imagens" ou "as formas" vividas em toda sua experiência. O Tangram é composto por cinco triângulos retângulos (isósceles), um quadrado e um paralelogramo.

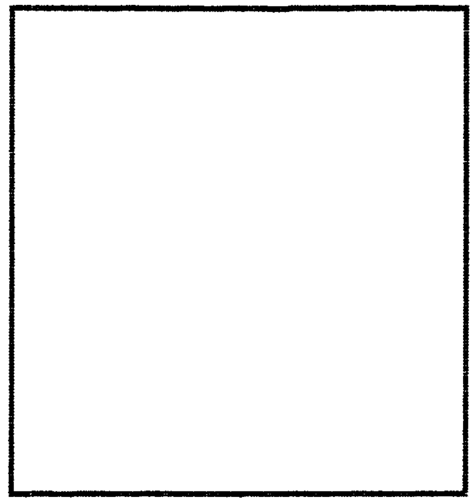

Figura 6.7 - Representação do quadrado q do tangram

```
?ap tg1
aprenda tg1 :l
pf :l * rq 8 pd 135 pf 2 * :l pd 90 pf 2 * :l
fim

tg1 aprendido
?tg1 20
```

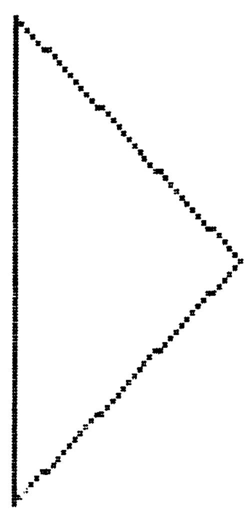

Figura 6.8 - Representação do triângulo tg1 do tangram

```
?ap m1
aprenda m1  :l
pd 45
pt :l * rq 8
fim

m1 aprendido

?ap q1
aprenda q1 :l
repita 4 [ pf :l pd 90 ]
fim

q1 aprendido
?q1 20 imprima
```

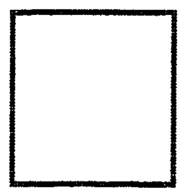

Figura 6.9 - Representação do quadrado q1 do tangram

```
?ap tp1
aprenda tp1 :l
pf :l * rq 2 pd 135 pf :l pd 90 pf :l
fim
tp1 aprendido
?tp1 20 imprima
```

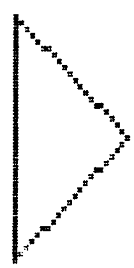

Figura 6.10 - Representação do triângulo tp1 do tangram

```
?ap m4
aprenda m4 :l
pt :l pd 90
fim

m4 aprendido
```

```
?ap par1
aprenda par1 :l
repita 2 [ pf :l * rq 2 pd 45 pf :l pd 135 ]
fim


par1 aprendido


?par1 20 imprima
```

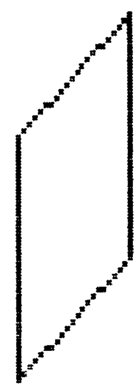

Figura 6.11 - Representação do paralelogramo par1 do tangram

```
?ap m3
aprenda m3 :l
pd 45 pf :l pe 45
fim


m3 aprendido


?ap m2
aprenda m2 :l
pt 4 * :l
pe 45
fim


m2 aprendido


?ap m5
aprenda m5 :l
pe 90 pt :l pd 90 pf :l pd 135
fim


m5 aprendido
```

```
?ap tangram1
aprenda tangram1 :l
m0
q :l
tg1 :l
m1 :l
tg1 :l
m2 :l
par1 :l
m3 :l
tp1 :l
m4 :l
q1 :l
m5 :l
tp1 :l
fim

tangram1 aprendido
?tangram1 30 imprima
```

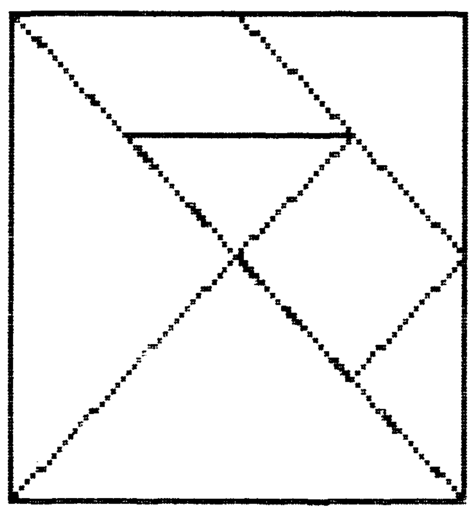

Figura 6.12 - Representação do tangram1

Em seguida o sujeito apresentou uma nova maneira de representar o tangram na tela do computador, expressa pelo procedimento abaixo, e reproduzida na Figura 6.13.

```
?ap tangram2
aprenda tangram2 :x
un pt 50 pe 90 pf 100 pd 90 ul
repita 4 [ pf :x pd 90 ]
```

```
pd 45
pf :x * rq 2
pt ( :x * rq 2 ) / 4
pe 45
pt :x / 2
pd 45
pf ( :x * rq 2 ) / 4
pt ( :x * rq 2 ) / 4
pe 90
repita 4 [ pf ( :x * rq 2 ) /4 pe 90 ]
pf 3 / 4 * :x * rq 2
fim

tangram2 aprendido

?tat mudeproporção 0,89 tangram2 60 imprima
```

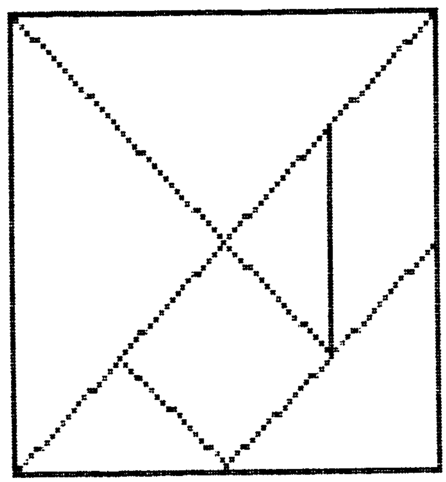

Figura 6.13 - Representação do tangram2

Descrição da Análise e Interpretação dos procedimentos do sujeito:

No processo de resolução desse problema, o sujeito manipulou, inicialmente, as peças do tangram, juntando-as como qualquer outro quebra-cabeça, de modo a formar um quadrado (Q)[6].

Nessa composição, o sujeito se preocupou com as propriedades inerentes a cada uma das peças – conceitos matemáticos intrínsecos às partes do tangram. Assim procedendo, identificou cada uma das peças expressando-se:

[6] Quadrado nesse contexto é a representação da composição das peças do tangram como na Figura 6.12, e será identificado nesse problema seguido de (Q).

"Há dois triângulos retângulos isósceles grandes, um triângulo isósceles retângulo médio, e dois triângulos retângulos isósceles pequenos. Há ainda um quadrado e um paralelogramo."

Em seguida, utilizando a composição obtida concretamente como modelo, procurou representá-la na tela, através da Geometria da Tartaruga. A estratégia utilizada pelo sujeito foi explicitada pelas seguintes palavras:

"Para eu representar o quadrado composto pelas peças do tangram preciso saber o lado do quadrado (Q) do meu modelo."

Observa-se que, para atingir o seu objetivo, o sujeito procura uma relação entre os lados do quadrado (Q) com as dimensões das peças do tangram que formavam esse quadrado (Q).

Começou então a comparar concretamente as dimensões dos polígonos por meio de sobreposição das peças, como por exemplo, sobrepondo o triângulo isósceles menor ao quadrado. Notou então que "cabiam" dois desses triângulos no quadrado, portanto o triângulo era "metade" do quadrado, além disso percebeu que a medida do lado do quadrado era a mesma medida dos catetos do triângulo menor. Comparou o paralelogramo com o triângulo menor e observou que o lado maior do paralelogramo era igual à hipotenusa do triângulo menor.

Percebeu, após comparar o triângulo médio com o triângulo menor, que a medida da hipotenusa do triângulo menor era igual à medida do cateto do triângulo médio, a soma dessas duas medidas é igual à medida da hipotenusa do triângulo maior, que por sua vez é igual ao lado do quadrado.

O sujeito, a partir de então, lançou mão de uma outra estratégia que para tal necessitava recorrer a estratégia estabelecida anteriomente, expressa pela construção da representação das seis peças (das sete peças) do tangram. Para tanto criou os seguintes procedimentos: **q** - relativo ao quadrado (Q), **tg1** - relativo ao triângulo maior, **q1** - relativo ao quadrado, **tp1** - relativo ao triângulo menor, **parl** - relativo ao paralelogramo, e alguns programas relativos ao deslocamento da tartaruga como, **m0, m1, m2, m3, m4** e **m5**.

O pesquisador incitou o sujeito para que este representasse na tela as peças do tangram, de modo que pudessem ser posteriormente compostas resultando na forma de um quadrado, lançando mão da seguinte questão:

Quais são as medidas em passos da tartaruga que você deve utilizar para "montar" o quadrado na tela do computador?

Para resolver o problema proposto, o sujeito recorreu às peças do tangram, sobrepondo-as na tela do monitor. Nesse momento ele percebeu que se ele reproduzisse o tangram com a medida do modelo real o quadrado concreto não "caberia" na tela. Diante disso passou a pensar em uma outra maneira de realizar a tarefa: refletiu que, se utilizasse a noção de proporção, seu problema poderia ser solucionado. De fato, ao adequar as particularidades de cada peça ao tamanho da tela poderia fazer com que o quadrado fosse planificado. Utilizou então do conceito de "escala" decorrente da noção de "proporcionalidade".

Coordenou os deslocamentos da tartaruga expressos pelos programas **m0, m1, m2, m3, m4** e **m5** com os programas relativos às peças para atingir seu objetivo, que era compor o quadrado na tela do monitor.

Na nossa análise, percebemos dois movimentos distintos relacionados com o raciocínio do sujeito. Ao deter-se nos movimentos que a tartaruga deveria fazer para desenhar as sete figuras dentro do quadrado, o sujeito analisa as particularidades do problema; dimensões dos lados, abertura dos ângulos, relações entre os polígonos a serem traçados naquele espaço determinado e testa sua planificação em função das demais particularidades. Está pois centrado no que é observável do objeto (peças do tangram) e nas suas relações necessárias para representar o todo (causalidade objetiva). Caracteriza-se nesse momento o que se denomina de movimento bottom-up (Inhelder, 1992). Esse movimento se dá da parte para parte (raciocínio transdutivo) e da parte para o todo (raciocínio indutivo). Como a intenção caminha concomitantemente com os limites do contexto em que o problema de insere, ao analisar o plano de resolução do problema o sujeito vai do geral para o particular com vistas a avaliar as ações e verificar se estas poderão se concretizar pela estratégia estabelecida (top-down) (Inhelder, 1992).

Em outras palavras, os procedimentos computacionais representam os dois movimentos inerentes ao processo mental do sujeito: a estratégia que o sujeito "montou" para realizar a tarefa (movimento top-down); e os limites necessários do ponto de vista quantitativo – propriedades matemáticas inerentes às peças como, por exemplo, medidas dos lados das peças, relação entre os ângulos, noções sobre deslocamento entre outras (movimento botton-up).

Do ponto de vista qualitativo, refere-se à avaliação dos procedimentos criados para conseguir a representação da planificação das estratégias do quadrado na tela. Encontra-se subjacente às ações do sujeito um dinamismo de composição que ora prioriza mais os aspectos qualitativos, ora os aspectos quantitativos, como, por exemplo: a sobreposição das peças do tangram diretamente na tela mostra-nos que o sujeito estava centrado nos observáveis do objeto (particularidades das peças do tangram), portanto em dados referentes às suas propriedades físicas.

Em outro momento o sujeito delineou esquemas auxiliares, que lhe serviram de apoio como o que se segue: reprodução do tangram no papel, cálculos sobre as medidas des peças, cálculos sobre os ângulos, noções de escala que lhe possibilitaram a adequação na tela do seu programa.

Esses comportamentos do sujeito demonstram uma certa preocupação com a tarefa que visa atender aos aspectos quantitativos do problema, sem os quais a tarefa não se concretiza.

Por outro lado, ao fazer esse conjunto de estratégias, o sujeito não perde de vista, mesmo inconscientemente, a sua planificação, ou seja, a representação do quadrado na tela, representação essa, que deve ser flexível suficiente para que o sujeito possa adequá-la às transformações possíveis que os aspectos da realidade impõem aos objetivos propostos.

A finalização do seu objetivo, por sua vez, abre a possibilidade do indivíduo em replanificar sua tarefa, agora em um nível que poderia ser mais racionalmente explicitado, ou seja, utilizando-se conceitos matemáticos e relações entre os mesmos, afastando-se desse modo do modelo concreto. Trata-se, no caso, da evolução da compreensão, que leva o sujeito às abstrações cada vez mais desvinculadas do real e, portanto, cada vez mais formalizadas e mais complexas (abstração refletida). O indivíduo está no momento operando sobre operações (conceitos), e não mais agindo diretamente sobre o real (modelo concreto). Esse fato é evidenciado na descrição do programa computacional **tangram1**, no qual, o que é importante, nesse momento, são as relações que o sujeito estabelece a respeito do que é próprio das partes com relação ao todo, ou seja, não sentiu necessidade de ficar restrito às particularidades de cada peça para compor o todo, essa estratégia pôde ser substituída pela coordenação das propriedades comuns entre as peças da tangram e os deslocamentos da tartaruga que fatalmente possibilitaria uma perfeita composição.(perfeito encaixe) entre as peças do tangram.

No programa **tangram1** o procedimento que determina a representação do paralelogramo (**parl :l**), foi substituído pela seqüência de comandos, que compõe o **tangram2**:

```
pt ( :x * rq 2 ) / 4
pe 45
pt : x 2
pd 45
pf ( :x * rq 2 ) / 4
```

Esses comandos pertencem ao programa computacional **tangram2**, como mencionado acima, e representado pela Figura 6.13. Do ponto de vista computacional, nota-se que o estilo procedural[7] de programação inerente ao programa **tangram1**, foi substituído por uma seqüência de comandos no programa **tangram2.**

O ambiente computacional propiciou uma outra maneira do sujeito representar o seu problema, que embora menos evoluída **(tangram2)** envolveu a reelaboração de sua planificação e a composição dos dados relativos aos procedimentos do sujeito.

Esse ambiente "deu conta" das necessidades do sujeito ao desenvolver e solucionar seu problema, tanto no momento em que ele estava resolvendo-o, como no

[7] O estilo procedural de programação se caracteriza por procedimentos e sub-procedimentos.

tangram1, de uma maneira mais complexa, quanto na fase posterior, em que sua estratégia comportou raciocínios menos elaborados (**tangram2**).

Desse modo, o exemplo explicitado acima evidencia a possibilidade de integrar o material concreto com o problema na tela (tangram), com as particularidades intrínsecas ao ambiente Logo, que nos referimos no início desse capítulo.

Naturalmente a constante comparação entre o problema proposto e os resultados de programação do sujeito propiciaram-lhe reestruturações em suas estratégias, através da análise e reflexão dos seus erros ou "debugging"[8].

No ambiente Logo, com essa metodologia, os alunos não encaram os erros como sinais de incapacidade, porém como fonte de dados que podem ser aproveitados para entenderem melhor as conseqüências de suas estratégias. (Brown e Burton; 1978). Assim, no processo ensino/aprendizagem, o erro é um fator importante na construção de conceitos. A partir do "debugging" ou "análise de erros" se dá a reestruturação mental do aluno. Nesse processo, portanto, é que ocorre a aprendizagem propriamente dita.

[8] Debugging: será utilizado nesta pesquisa para explicitar depuração do programa ou análise da programação.

IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA PARA A EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA

CAPÍTULO 7

IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA PARA A EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA

"Para Piaget, a separação entre o processo de aprendizagem e o que está sendo aprendido é um erro. Para entender como uma criança aprende número, nós temos que estudar número. E temos que estudar a estrutura do número, uma tarefa séria do ponto de vista matemático. Por isso, não é incomum encontrar Piaget se referindo em um mesmo parágrafo ao comportamento de crianças pequenas e às preocupações dos matemáticos teóricos." (grifo nosso).

(Papert, 1985)

7.1) Estudo de Caso

A estratégia metodológica alternativa será implementada em um Estudo de Caso com enfoque qualitativo, sob a ótica da Microgênese Cognitiva, em que será analisada a atuação de um sujeito, que cursa a 2ª série do 2° grau da Rede Particular de Ensino de Campinas, São Paulo, e que vem trabalhando com Logo Bidimensional, mais especificamente com o Logo Geométrico, desde 1989, explorando conceitos matemáticos e geométricos intrínsecos nas situações-problema propostas pelo pesquisador e também surgidas nessa interação, ao explorar informalmente a Geometria Plana.

Essa análise processar-se-á através de processos mentais e computacionais do sujeito pesquisado em situações práticas de Resolução de Problemas, tendo como substrato teórico-metodológico a complementaridade entre os enfoques Microgenético e Macrogenético das condutas cognitivas. Essa fundamentação teórica, já explicitada no Capítulo 3 desta pesquisa, vai nos fornecer subsídios para sustentar consistentemente a nossa análise sobre a investigação e a busca dos processos mentais e computacionais inerentes à descrição dos procedimentos elaborados pelo sujeito, em situação prática, resolvendo um dado problema matemático expresso pelo Teorema de Pitágoras.

Os aspectos da atividade cognitiva privilegiados na perspectiva microgenética de análise são aqueles que permitem estudar o sujeito cognoscente em suas intenções, valores e heurísticas. A dimensão teleonômica diz respeito aos objetivos, fins, propósitos do sujeito ao agir, enquanto que a Axiologia relaciona-se às avaliações, aos valores que o sujeito atribui às suas próprias ações, com vistas a atingir objetivos determinados. Trata-se, pois, da descrição que o sujeito faz ao atribuir significados, valores e intenções às suas estratégias no processo de resolução de problemas.

Pretende-se responder ao seguinte problema nessa implementação:

É possível resgatar ou captar algumas abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do sistema Logo?

7.2) Aspectos Relativos ao Estudo de Caso

Na descrição da análise do Estudo de Caso, serão enfocados mais precisamente os dados recolhidos durante as sessões do último semestre de 1992, onde o aluno trabalhou uma sessão por semana, com duração de 3 horas cada, perfazendo um total de aproximadamente 60 horas de trabalho.

A análise dessa interação dar-se-á através dos processos cognitivos e computacionais do sujeito, resolvendo um dado problema matemático específico: a Relação de Pitágoras em três paradigmas distintos: Paradigma Tradicional, Paradigma Intuitivo e Paradigma Alternativo.

Essa análise processar-se-á através do enfoque microgenético da atividade cognitiva, a partir da qual, procedimentos metodológicos se fizeram presentes, como veremos a seguir. Foram feitas gravações com fita cassete, com o objetivo de processar uma análise através da transcrição das atividades do sujeito e os respectivos processos de raciocínio descrevendo as suas condutas, e ressaltando suas heurísticas em três contextos distintos ao resolver o problema proposto. Esse procedimento metodológico possibilitou retomar a ação do sujeito em vários momentos, propiciando dessa forma a depuração e reestruturação da análise dos dados.

Depoimentos do sujeito, diálogos e comentários também foram considerados, principalmente quando se tratava de explicitações das estratégias utilizadas pelo sujeito ao resolver as situações-problema.

Utilizaram-se também nesse estudo: a leitura, a análise e a descrição dos arquivos dos procedimentos elaborados pelo sujeito e gravados em disquetes, para recuperar momentos da interação do sujeito com o computador.

Atividades extra-computador também foram desenvolvidas tais como: resolução do problema proposto no Paradigma Tradicional em que foram utilizados os métodos convencionais; resolução do problema proposto no Paradigma Intuitivo, em que se utilizou material concreto, como lápis, lápis colorido, papel e cartolina.

Finalmente no Paradigma Alternativo, ou seja, com a Geometria da Tartaruga a resolução do problema se processou a partir do momento em que o sujeito precisou reelaborar seus conhecimentos anteriores e adaptá-los ao novo sistema de representação.

O planejamento e reestruturação de cada sessão processaram-se após análise, depuração e descrição das atividades realizadas e, para tanto, foram consideradas as intervenções do pesquisador nos diferentes momentos desse estudo, as modificações que o sujeito fez ao programar foram decorrentes dos processos mentais pelos quais elas se efetivaram.

Esta análise efetuou-se através dos processos cognitivos e computacionais do sujeito mencionado, resolvendo um dado problema matemático específico. Os referidos processos foram considerados à luz da Análise Microgenética do comportamento cognitivo, isto é, aquela que diz respeito aos aspectos funcionais do sujeito ao real.

Em outras palavras, trata-se de uma análise que se refere à pertinência dos conhecimentos em um dado contexto, em que serão levados em conta os sistemas axiológicos do sujeito, ou seja, os valores, a importância que ele atribui às suas estratégias, a criação das heurísticas no processo de investigação, busca e descoberta para resolver problemas geométricos em ambientes informatizados ou não.

Mas o que é uma heurística? Heurística é o método analítico para descobrir-se a verdade científica. Os aspectos teleonômicos, também fundamentais na análise microgenética, constituem os fins, as intenções, os objetivos que o sujeito possui, ao percorrer um determinado caminho, ao investigar uma heurística, por meio de estratégias, ao tentar solucionar o problema proposto.

Será traçada, nesta pesquisa, uma relação dialógica entre a descrição dos processos de resolução de problemas e os componentes funcionais dos processos mentais do sujeito, diante de uma situação-problema nos três paradigmas diferentes.

7.3) A Metodologia em Ação: Descrição e Análise Local dos Procedimentos do Sujeito

Essa descrição será recortada em três momentos como já mencionado anteriormente:

7.3.1) Paradigma Tradicional

O experimentador colocou a seguinte questão para o sujeito: Como você mostraria que existe a Relação ou o Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos?

A resposta do sujeito foi pronta:

"O Teorema de Pitágoras só vale para o Triângulo Retângulo."

Em seguida, então, foi colocada uma outra questão, tendo em vista que a proferida pelo sujeito não parecia suficiente como resposta: Seria possível demonstrar com um outro argumento essa relação?

De fato, era esperado que o sujeito afirmasse que o Teorema de Pitágoras é válido para todos os triângulos retângulos, isto é, para os triângulos retângulos pitagóricos (cujos lados estão na proporção 3; 4; e 5 e seus respectivos múltiplos) e para os triângulos retângulos também não pitagóricos, ditos "imperfeitos".

Em resposta a essa segunda solicitação, o sujeito, descreveu as relações métricas do triângulo retângulo ABC, conforme o que se segue:

Dado o triângulo retângulo ABC (reto em Â, Â= 90º) abaixo, as seguintes relações são válidas:

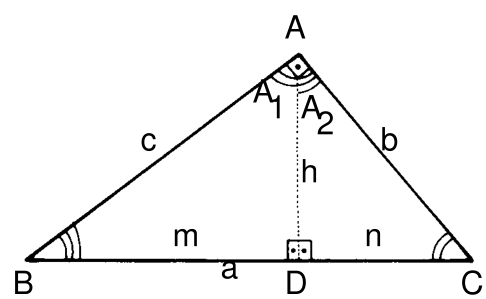

Figura 7.1 - Triângulo retângulo utilizado para a descrição das relações métricas

1. $b^2 = a.n$
2. $c^2 = a.m$
3. $a.h = c.b$
4. $a^2 = b^2 + c^2$ *(Teorema de Pitágoras)*
5. $h^2 = m.n$

Novamente observa-se na estratégia[1] escolhida pelo sujeito que não há um esforço de sua parte para descobrir um meio próprio, uma estratégia própria de responder à questão.

[1] Estratégia é o resultado do processamento, por cada sujeito, da informação que ele capta da realidade ou da situação, e que se manifesta em ação.

O sujeito apenas reproduziu o que "aprendeu" sobre a Relação de Pitágoras na escola, no paradigma tradicional.

Para ilustrar essa afirmação disse:

"Eu decorava, não entendia direito, agora no 2º colegial, é que eu "entendi", pois a professora foi demonstrando na lousa uma por uma, as relações métricas do Triângulo Retângulo ABC."

Esse entendimento, contudo, não parece significar uma compreensão do teorema, pois, caso contrário, o sujeito teria se comportado de outra maneira, isto é, teria uma estratégia original, própria daqueles que dominam uma noção em sua plenitude. O comportamento do sujeito sugere que é possível que ele não seja capaz de aplicar o conceito envolvido no Teorema de Pitágoras, em outros contextos, como por exemplo, utilizando a Geometria da Tartaruga, ou mesmo aplicar o Teorema utilizando material concreto.

Em uma palavra, será realmente que o sujeito construiu a Relação de Pitágoras? De fato, a construção de uma noção do ponto de vista microgenético implica a elaboração de estratégias próprias, utilizando conhecimentos anteriores, advindos de outros contextos, aplicados a situações novas.

Além disso, investiga como o sujeito avalia suas ações e as informações de que dispõe para atingir os fins, os objetivos a que se propõe. No caso, o sujeito procura atingir a Relação de Pitágoras, usando a heurística dos Casos de Semelhança de Triângulos, apresentada abaixo nos itens que se seguem:

Relações Métricas em um triângulo retângulo:

Dado o triângulo retângulo abaixo, tem-se,

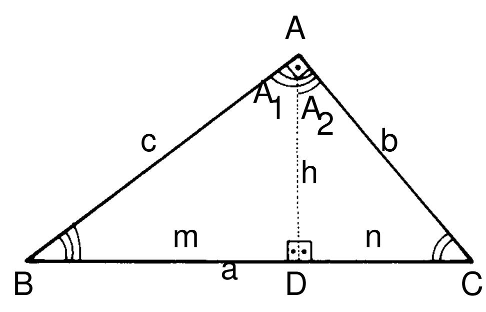

Figura 7.2 - Triângulo retângulo utilizado para a demonstração da Relação de Pitágoras

triângulo ABC (retângulo em A)
m: projeção de AB sobre BC
n: projeção de AC sobre BC
AD altura com relação à hipotenusa BC

Por decomposição do triângulo acima temos,

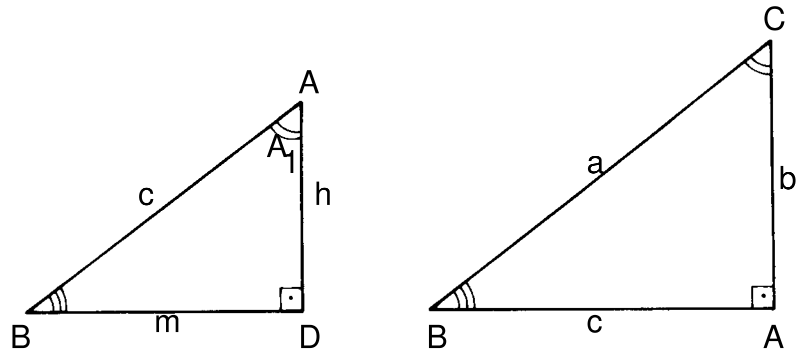

Figura 7.3 - Triângulos ADB e CAB obtidos por decomposição

triângulo ADB = triângulo CAB
$D = \hat{A}$ *(90º)*
B: ângulo comum

Então: $\hat{A}_1 = C$
$c/a = h/b = m/c$

Portanto: $c.b = a.h$
$c.c = a.m$

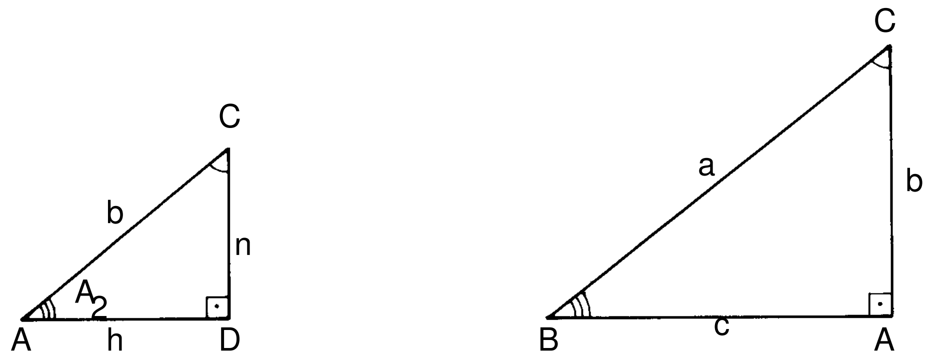

Figura 7.4 - Triângulos CDA e CAB obtidos por decomposição

triângulo CDA = triângulo CAB
$D = \hat{A}$ (90º)
C: ângulo comum

Então: $A_2 = B$
$b/a = n/b = h/c$

Portanto: $b.b = a.n$
$b.c = a.h$

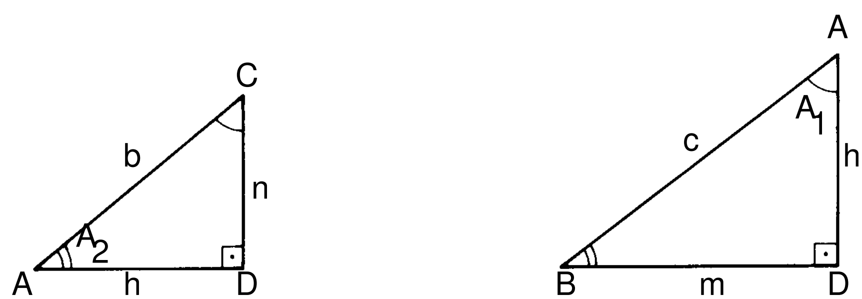

Figura 7.5 - Triângulos CDA e ADB obtidos por decomposição

triângulo CDA = triângulo ADB
$D = D$ (90°)
$\hat{A}_1 = C$
$\hat{A}_2 = B$

Então: b/c = n/h = h/m

Portanto: h.h = n.m

No triângulo ABC:
90º + B + C = 180º
B + C = 90º

No triângulo ADC:
Â2 + C = 90º

Então B = Â2

Casos de Semelhança: Relações Métricas em triângulo retângulo :

1-)

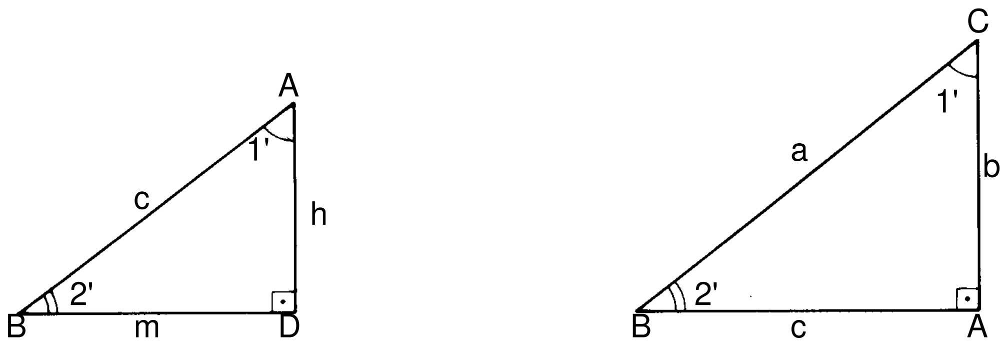

Figura 7.6 - Triângulos ADB e CAB obtidos por decomposição

triângulo ABD = triângulo CBA (caso ÂÂ)
D = A = 90º
B: ângulo comum

Sendo semelhantes, podemos tirar as relações: lados homólogos são proporcionais

c/a = h/b = m/c

Então: $a.h = c.b$
$c.c = a.m$

No triângulo ABC, além do ângulo reto A, temos os ângulos B e C. No triângulo ADB, no caso 1-), D é o ângulo reto e B é comum. Portanto, o outro ângulo desse triângulo (1') será igual ao ângulo C.

2-)

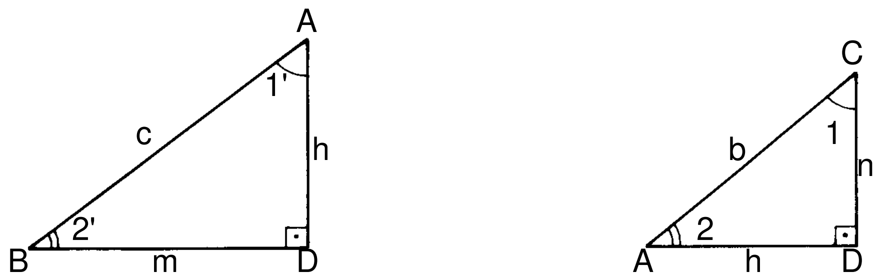

Figura 7.7 - Triângulos ADB e CDA obtidos por decomposição

triângulo ADB = triângulo CDA
A = C (1' = 1)
AD (lado comum)
D = D (90º)

Portanto: $h/m = n/h$
$h.h = m.n$

No triângulo CDA, no caso 2-), C é ângulo comum ao triângulo maior ABC, e D é ângulo reto. Portanto, o ângulo 2 desse triângulo será congruente ao ângulo 2´, do triângulo grande.

3-)

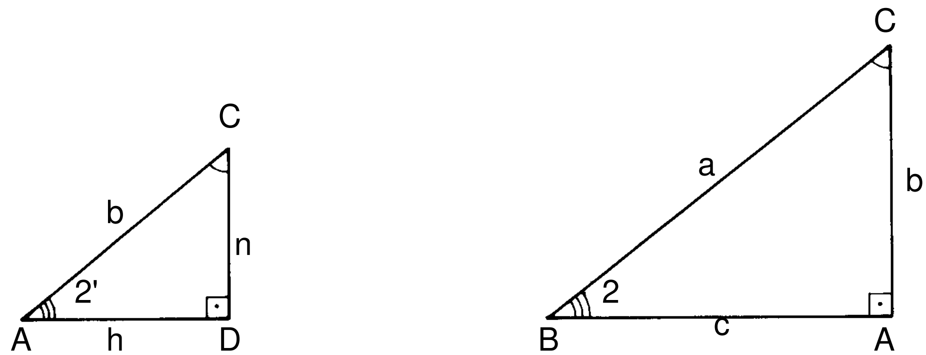

Figura 7.8 - Triângulo CDA e CAB obtidos por decomposição

triângulo CDA = triângulo CAB
C é ângulo comum aos 2 triângulos
D = Â (ângulos retos)
2' = 2

Então: a/b = b/n

Portanto: b.b = a.n

Das relações acima obtém-se:

b.b + c.c =? mas, a.m + a.n = b.b + c.c
b.b + c.c = a.(m + n), mas, m + n = a
b.b + c.c = a.a Teorema de Pitágoras

Relações: *1-) hipotenusa . altura = cateto . cateto*

2-) cateto . cateto = hipotenusa . "sua projeção correspondente"

3-) altura . altura = "projeção" . "projeção"

c.c = a.m
b.b = a.n
b.b + c.c = a.(m + n) mas, m + n = a (hipotenusa)
b.b + c.c = a.a Teorema de Pitágoras.

Nesse momento, o sujeito parece querer encontrar a procedência de sua heurística, ou seja, demonstrando matematicamente as relações métricas do triângulo retângulo ABC, através dos Casos de Semelhança e concluindo daí que a Relação de Pitágoras é decorrente dessas Relações Métricas do Triângulo Retângulo ABC.

Com isso, mais uma vez, reproduz o que aprendeu na escola e que corresponde ao que afirmou sobre o que sua professora utilizou para explicar o Teorema de Pitágoras:

"(...), só agora no 2º colegial é que eu entendi, pois a professora foi demonstrando todas as relações."

O fato de o sujeito estar todo o tempo utilizando a maneira de resolver o problema como foi demonstrado pela sua professora sugere-nos que não há um controle do sujeito sobre seu procedimento, ou seja, uma avaliação de cada um dos passos pelos quais seqüência ou concatena seu raciocínio e conseqüentemente os fins a que se propõe não parecem estar presentes ao seu espírito, enquanto descreve as **relações métricas** do **triângulo retângulo**. Poderíamos inferir que esses fins seriam estritamente chegar a fórmulas e algoritmos, ou seja, os fins foram algoritmizados pelo sujeito.

Nesse **Paradigma Tradicional** transparecem claramente conceitos de **Geometria Euclidiana** implícitos no processo de resolução da Relação de Pitágoras pelo sujeito.

O experimentador lança então uma nova solicitação: Seria possível "demonstrar" o Teorema de Pitágoras **sem fórmulas e algoritmos**?

7.3.2) Paradigma Intuitivo

Nesse novo contexto, que se trata do segundo momento da análise, quando o pesquisador fez a solicitação acima, incitou o sujeito a criar uma outra maneira de explicar a Relação de Pitágoras, que não pela maneira tradicional, e desafiou o sujeito a utilizar ou a criar uma estratégia, se não própria, pelo menos mais significativa para ele, para tal fim.

O sujeito, então, organizou uma situação, a qual é mostrada e explicitada na Figura 7.9:

"Dado o Triângulo Retângulo ABC, vou formar com os seus lados os seguintes Quadrados: A, B e C e depois minha intenção é quadricular esses quadrados."

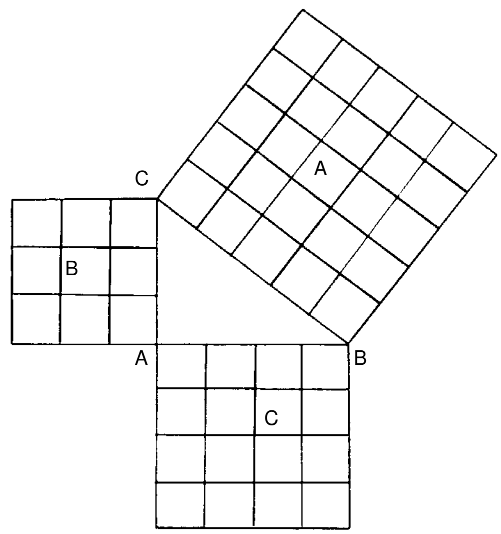

Figura 7.9 - Triângulo retângulo e os quadrados de seus lados quadriculados construído pelo sujeito

Em um segundo passo, o sujeito compôs a estratégia: "Conceito de Área" e explicitou o seu raciocínio da seguinte maneira.

"Vou tentar mostrar que o número de quadradinhos do Quadrado C mais o número de quadradinhos de Quadrado B é igual ao número de quadradinhos do quadrado A."

Para tanto, o sujeito recorta em um cartolina um quadrado de **lado estipulado**[2] e pinta-o de uma cor qualquer. Sobrepõe essa **unidade de medida**, concretamente nos respectivos Quadrados A, B e C, da Figura 7.9, e "conta" quantas vezes a unidade de medida "coube" em cada quadrado.

Nessa estratégia escolhida, que foi o **conceito de área,** o sujeito transpôs conhecimentos matemáticos anteriores à nova situação-problema. Trata-se de fato de uma **heurística** que o sujeito escolheu e que foi utilizada como se apresenta abaixo:

O sujeito desenhou a Figura 7.9, depois quadriculou os Quadrados A, B e C, que são respectivamente: a hipotenusa e os dois catetos do Triângulo Retângulo ABC. Em seguida, fixou uma **unidade de área** que foi o **quadradinho** de cartolina pintada. A partir

[2] Caberia aqui uma reflexão do ponto de vista matemático : Como o sujeito estipulou o lado do quadrado? Do ponto de vista operacional, prático mesmo, é importante ressaltar que seria "inteligente" trabalhar-se com o menor número possível de quadradinhos (unidade de área) Por exemplo, quando o sujeito parte para a situação concreta, se não utilizasse um triângulo retângulo pitagórico (lados na proporção 3, 4, 5, e seus múltiplos) eventualmente ele teria que lançar mão de um número muito grande de quadradinhos (unidade de área) , o que tornaria impraticável o trabalho no concreto. Isso significa que a solução ótima, para tal, seria minimizar o número de quadradinhos , isto é, "enxugar" a estratégia. Inerente a esse processo, nota-se que o conceito matemático utilizado foi o MDC-Máximo Divisor Comum. Finalmente, o MDC fornece o lado do quadradinho estipulado como unidade de área. Se tivermos um triângulo retângulo não pitagórico, por exemplo, cujas medidas dos lados, fossem 10, 12 e 6,6, qual seria a unidade de área?

disso, ele experimentou sobrepor o quadradinho em um dos quadrados, no caso o Quadrado A, e "contou" quantas vezes essa unidade "coube" no Quadrado A. Ao fazer isso, implicitamente está calculando a área do Quadrado A. Conclui, então, que no Quadrado A cabem 25 unidades de área estipulada **(quadradinhos de lado estipulado)**. Portanto diz que:

"A área do Quadrado A é igual a 25 quadradinhos."

O experimentador, querendo fazer com que o aluno perceba a relação entre **Conceito de Área** e o próprio **Teorema de Pitágoras**, lança mão da seguinte pergunta:

Mas o que significa calcular a área de um quadrado de lado a? O sujeito pensa, busca novamente seu desenho da Figura 7.9 e diz:

"Se eu pegar a unidade de área e a sobrepuser ao Quadrado A e "contar" quantas vezes essa unidade de área "cabe" dentro do Quadrado A, eu encontro a área do Quadrado A."

Como o conceito matemático aqui envolvido é **área de figuras planas**, no caso, área do quadrado, o sujeito não usou o algoritmo prontamente, ou seja, $A = a \times a = a^2$, como fez no primeiro momento, mas valorizou uma estratégia intuitiva para calcular a área empírica e concretamente do Quadrado A. E a todo momento, no decorrer do processo, perseguiu seu objetivo, sua intenção, que era calcular a área do Quadrado A.

Depois desse momento, generalizou a estratégia acima para os quadrados de lados b e c, ou seja, estabeleceu realmente a **heurística** para o **Cálculo da Área**; então concluiu que no Quadrado C cabem 9 unidades de área e no Quadrado B, cabem 16 unidades de área. A estratégia utilizada pelo sujeito concretizou a sua heurística.

Finalmente o sujeito fez a seguinte dedução, utilizando o raciocínio intuitivo:

"Se o Quadrado A possui 25 quadradinhos, o Quadrado B possui 16 quadradinhos e o Quadrado C possui 9 quadradinhos então posso dizer que: o número dos quadradinhos do Quadrado A é igual ao número de quadradinhos do Quadrado B mais o número de quadradinhos do Quadrado C."

Essa afirmação em linguagem matemática:

$$9 + 16 = 25$$
$$9\,\square + 16\,\square = 25\,\square$$
$$\text{Área } QC + \text{Área } QB = \text{Área do } QA \ (Q = \text{quadrado})$$

Sendo que os lados dos Quadrados A, B e C, são respectivamente a, b, c, nesse caso, temos: $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$ *que significa a Relação de Pitágoras.*

Embora o sujeito tenha utilizado nessa resolução uma estratégia própria, com seus significados, pode-se observar que durante a investigação e busca para concluir seu problema, o sujeito exercia um certo controle sobre como utilizar de maneira propícia o conceito de Área, e o transpôs ao novo desafio, que era demonstrar a relação matemática que caracterizava o Teorema de Pitágoras.

Enfim, nessa heurística usada pelo sujeito, em que ele utilizou no processo de resolução do problema os raciocínios intuitivo, dedutivo e indutivo, nota-se claramente a *relação entre* ***Geometria Intuitiva*** *e a* ***Geometria Euclidiana***[3]**.**

A **Geometria Intuitiva** foi usada quando o sujeito sobrepõe a unidade de Área, que é o *quadradinho* nos quadrados maiores A, B, e C, e empiricamente mostra que essa unidade de medida cabe "tantas vezes" em cada quadrado formado pelos lados do Triângulo Retângulo ABC.

A **Geometria Euclidiana** foi usada quando, ao quadricular o quadrado formado pelos lados do triângulo ABC, o sujeito toma um quadrado como unidade de medida. Implicitamente está usando o conceito de área de um quadrado, ou seja:

$$\text{Área} = \text{lado x lado} = a \times a = a^2$$

7.3.3) Paradigma Alternativo

A partir desse momento, o experimentador incita o sujeito a utilizar o **contexto Logo**, ao colocar o seguinte desafio: Com a **Geometria da Tartaruga** você acha possível "demostrar" a **Relação de Pitágoras**?

Nessa descrição da análise microgenética já se faz presente o terceiro momento dessa interação em que se enfoca o Paradigma Alternativo.

O sujeito, então, começa a interagir com um novo sistema de representação que é o **sistema Logo**, com a **Geometria da Tartaruga** e suas especificidades. Para tanto, em um primeiro passo tenta desenhar um Triângulo Retângulo ABC na tela, com os comandos e primitivas da Linguagem Logo, definindo o programa **triret**, conforme Figura 7.10 abaixo.

Procedimento:

```
?ap  triret
```

[3] No Capítulo 4 dessa dissertação será tratado os pressupostos teórico metodológicos sobre as diversas formas de abordagens da Geometria: intuitiva, Euclidiana, Analítica, das Transformações, entre outras.

```
aprenda  triret
pf  80
un  pt  80
pd  90
ul  pf  60
fim

triret  aprendido
?triret  imprima
```

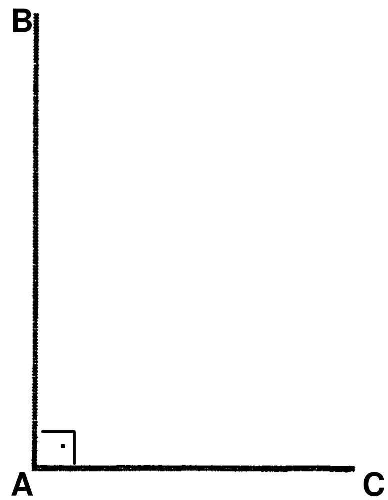

Figura 7.10 - Tentativa de construção de triângulo retângulo com o programa **triret**

Nota-se claramente que implícito nesta programação está o **conceito de triângulo retângulo**, pois o sujeito traçou um ângulo reto, ou seja, manteve a ortogonalidade dos dois lados.

Uma primeira indagação se nos apresenta:

Como fechar o Triângulo ABC, cujos lados são AB = 80 passos e AC = 60 passos da tartaruga? Qual é o **ângulo que a tartaruga deveria virar**? O sujeito continua pensando e o experimentador lança mão de duas perguntas:

Nesse Triângulo ABC, escolhido, vale a Relação de Pitágoras?

Considerando-se que o Triângulo escolhido pelo sujeito foi um triângulo retângulo escaleno (3 lados diferentes), qual seria a medida da hipotenusa da Figura 7.10?

O sujeito responde, depois de fazer os cálculos abaixo, *que a hipotenusa deve medir 100 passos da tartaruga, aplicando a Relação de Pitágoras como se segue:*

$(80)^2 + (60)^2 = x^2$
$6400 + 3600 = x^2$
$x^2 = 10.000 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{10000}$
$x = + 100$

ou seja Hipotenusa = 100 passos

O sujeito sabe quantos passos deve ter a hipotenusa, pois aplicou o algoritmo prontamente; porém a dúvida ainda permanece, a dúvida do giro da tartaruga.

Nota-se que o sujeito nos outros dois contextos anteriores "deu conta" de seus respectivos sistemas de representação e soube finalizar sua tarefa. E no contexto Logo, em que o sistema de representação já lhe é familiar, por que surgem certos conflitos?

Constata-se que o sujeito soube trabalhar bem com os algoritmos como está acostumado na escola, mas, apesar disso, não consegue saber qual é o ângulo que a tartaruga deve virar para unir o Ponto C ao Ponto B na Figura 7.10. Pode-se inferir que, apesar de o sujeito saber o que é o Teorema de Pitágoras, está sentido dificuldade em generalizar para um novo contexto esse conhecimento e suas particularidades, ou seja, sua representação pois, o seu conhecimento a respeito dele não é suficiente para a sua compreensão efetiva.

O sujeito, depois de tentar várias outras alternativas para o valor do ângulo da tartaruga, chega ao fato de que não consegue construir o triângulo retângulo sem saber a medida do ângulo, isso se o triângulo não for isósceles (2 lados iguais e 2 ângulos iguais).

A partir disso, decidiu reestruturar a sua primeira estratégia, controlando-a de modo que lhe fosse possível atingir o fim mais imediato, que seria representar o triângulo retângulo na tela do computador.

Criou um outro programa computacional chamado **triret1** que, na verdade, nada mais é do que a reconstrução do programa **triret** com outros parâmetros como demonstra a Figura 7.11.

Procedimento:

```
?ap triret1
aprenda triret1
pf 50 pd 135
pf  rq  5000
pd  135  pf  50
fim

triret1 aprendido
?triret1  imprima
```

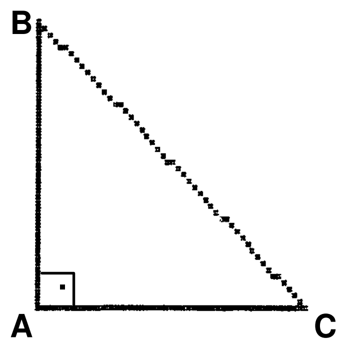

Figura 7.11 - Triângulo retângulo construído com o programa **triret1**

O sujeito então fez a seguinte consideração:

*"Mas com o programa **triret1** não estou mostrando a Relação de Pitágoras para todos os triângulos retângulos."*

Analisando sua programação e avaliando essa segunda estratégia, decidiu que esse procedimento não seria significativo e nem tampouco suficiente para atingir seu objetivo proposto, pois a estratégia escolhida, comprometia a plena demonstração do teorema, pelo fato de o sujeito ter usado um caso específico de triângulo retângulo, ou seja, o **triângulo retângulo isósceles** (2 lados iguais e 2 ângulos iguais). Criou então o programa computacional **tpt**, mostrado abaixo (Figura 7.12), que vem a ser um **triângulo retângulo escaleno** (3 lados diferentes cujos lados estão na proporção 3, 4, e 5, e seus múltiplos), ou seja, um **triângulo retângulo pitagórico.**

Procedimento:

```
?ap  tpt
aprenda  tpt
mudepos  [ 0  -40 ]
mudepos  [ 30  -40 ]
mudepos  [ 0  0 ]
fim

tpt aprendido
?tpt  imprima
```

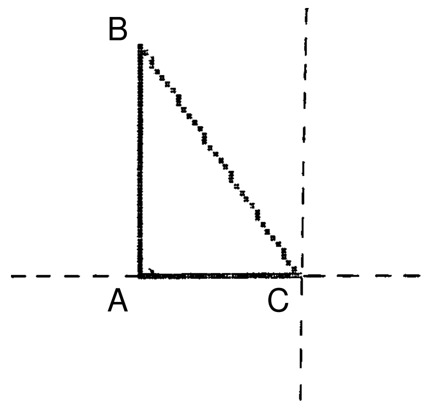

Figura 7.12 - Triângulo retângulo construído com o programa **tpt**

Nessa estratégia não houve a dúvida do **giro da tartaruga**. Entretanto na estratégia anterior o sujeito precisou controlar duas variáveis: a posição e a direção da tartaruga, para atingir o seu objetivo. E agora com o comando **mudepos,** que é uma **primitiva** da Linguagem Computacional Logo, está implícita somente a **posição da tartaruga**, não havendo necessidade de sua direção, ou seja, o ângulo de giro. O sujeito trabalhou nesse momento com a **parte cartesiana do sistema Logo.**

Desde que o sujeito começou a interagir com esse outro sistema de representação, ou seja, o **contexto Logo**, nota-se, pelos procedimentos das Figuras 7.10, 7.11 e 7.12, que a estratégia usada pelo sujeito foi desenhar um ângulo reto, partindo de seu conhecimento anterior a respeito do conceito de triângulo retângulo, segundo o qual todo triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, independente das medidas dos catetos. Tentando transpor e adaptar seu conhecimento anterior para o "novo contexto", usou o comando mudepos, explorando os recursos da **Geometria da Tartaruga**.

Convém ressaltar que seria diferente, se o sujeito construísse um dos catetos e a hipotenusa primeiramente, pois, dessa maneira, ele teria que necessariamente **conhecer** e ***usar*** a **Relação de Pitágoras** e portanto não deixaria de estar usando fórmulas e algoritmos. Isso significa que a **Geometria da Tartaruga** propicia um ambiente diferente do ambiente tradicional de aprendizagem, pois possibilita ao sujeito, explorar suas possibilidades, controlando suas estratégias, dando-lhes significação, e não simplesmente usando conhecimentos de uma maneira mecânica.

O sujeito encontrou, então, no **sistema Logo** recursos para "vencer" ou contornar seu conflito, cumprindo seu objetivo imediato que era representar na tela do computador o Triângulo Retângulo.

O experimentador lançou mão de uma questão sobre a medida da hipotenusa:

Sem utilizar algoritmos, usando somente os recursos do ambiente da Geometria da Tartaruga é possível dizer que o Triângulo ABC está fechado? Quanto mede a hipotenusa?

O sujeito respondeu, ainda em dúvida:

" Não dá para eu medir concretamente na tela, mas algoritmicamente o resultado seria este: 50 passos da tartaruga."

Resolveu a essa altura buscar uma nova estratégia, ou seja, deslocar o Triângulo ABC da Figura 7.12 do centro (0 , 0), criando um outro programa: o **tpt1**, conforme mostra a Figura 7.13 abaixo:

Procedimento:

```
?ap tpt1
aprenda tpt1
un
mudepos [-50 40]
ul
mudepos [-50 0]
mudepos [-20  0]
mudepos [-50  40]
fim
tpt1 aprendido
?tpt1 imprima
```

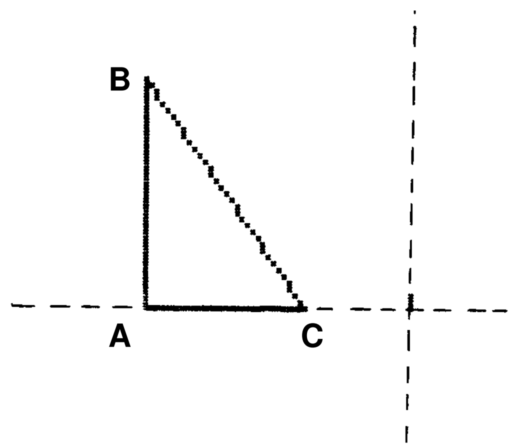

Figura 7.13 - Triângulo retângulo construído com o programa **tpt1**

Para depurar o programa **tpt1**, fez alguns sub-procedimentos passo a passo, reestruturou o programa, corrigindo o 3º e 4º comandos **mudepos** do programa **tpt1**. Usando o comando **escreva pos**, confirmou as coordenadas (x, y) dos vértices A, B e C do Triângulo Retângulo ABC.

Em seguida, o sujeito continuou investigando qual seria a estratégia que ele utilizaria para "demostrar" a Relação de Pitágoras. A partir do programa **tpt1**, ele criou um programa novo chamado **prog1**, mostrado na Figura 7.14, fazendo com cada lado do Triângulo Retângulo ABC, um quadrado.

Procedimento:

```
?ap prog1
aprenda prog1
tpt1
```

```
qab
qbc
qca
fim

prog1 aprendido

?ap qab
aprenda qab
pe 90
repita 4 [ pf 40 pe 90 ]
fim

qab aprendido

?ap qbc
aprenda qbc
un mudepos [ -50 0 ]
pe 90 ul
repita 4 [ pf 30 pe 90 ]
fim
qbc aprendido


?ap qca
aprenda qca
un mudepos [ -20 0 ]
pd ( 90 + arctan ( 4 / 3 ) ) ul
repita 4 [ pf 50 pd 90 ]
fim

qca aprendido

?prog1 imprima
```

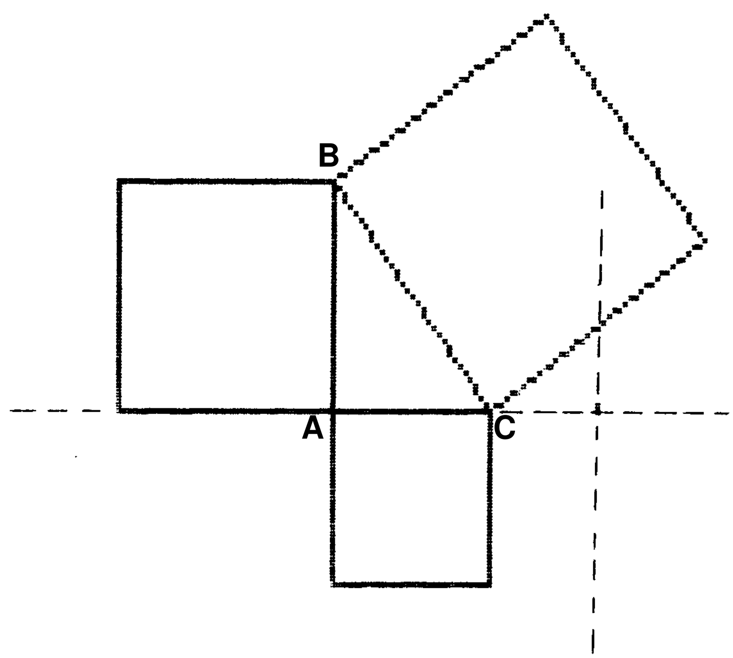

Figura 7.14 - Triângulo retângulo e os quadrados de seus lados construídos com o programa **prog1**

Reestruturando o programa **prog1**, criou o programa **prog2**, mostrado na Figura 7.15 abaixo, onde nesse novo programa, o sujeito quadriculou cada quadrado formado pelos lados do Triângulo Retângulo ABC e disse:

"*Vou quadricular cada quadrado formado pelos lados do Triângulo Retângulo ABC e mostrar que a área do quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados pelos lados dos catetos.*"

Falando isso, fez a seguinte representação abaixo:

Procedimento:

```
?ap prog2
aprenda prog2
tpt1
qab
qbc
qca
quadribc
quadriab
quadrica
centro
fim

prog2 aprendido

?ap quadribc
aprenda quadribc
repita 4 [ pf 10 pd 90 pf 50 pt 50 pe 90 ]
mudepos [ -20 0 ] pe 90
repita 4 [ pf 10 pe 90 pf 50 pt 50 pd 90 ]
fim

quadribc aprendido

?ap quadriab
aprenda quadriab
un mudepos [ -50 40 ]
pe ( 180 - ( arctan ( 4 / 3 ) ) ul
repita 3 [ pf 10 pe 90 pf 40 pt 40 pd 90 ]
mudepos [ -50 40 ] pe 90
repita 3 [ pf 10 pd 90 pf 40 pt 40 pe 90 ]
fim

quadriab aprendido

?ap quadriac
aprenda quadriac
mudepos [ -50 0 ]
repita 2 [ pf 10 pe 90 pf 30 pt 30 pd 90 ]
mudepos [ -50 0 ] pe 90
repita 2 [ pf 10 pd 90 pf 30 pt 30 pe 90 ]
fim

quadriac aprendido

?ap centro
aprenda centro
un mudepos [ 0 0 ]
```

```
fim
centro aprendido
?prog2 imprima
```

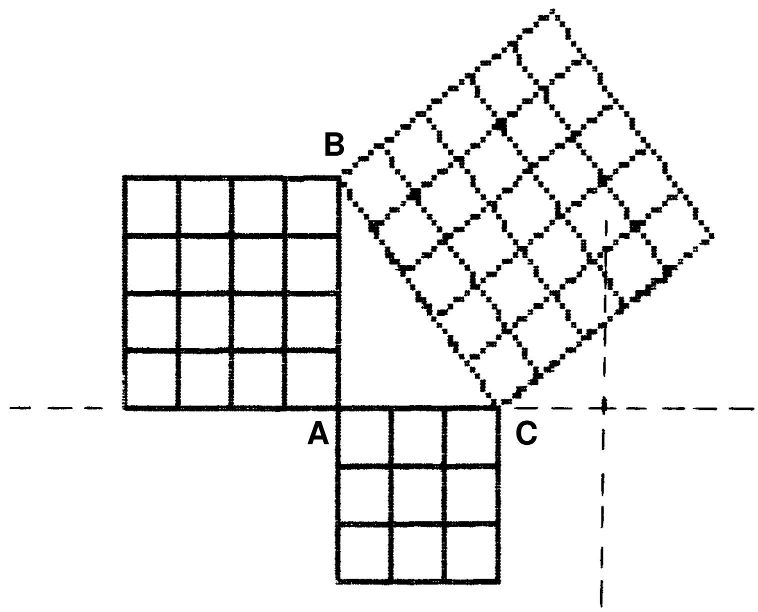

Figura 7.15 - Triângulo retângulo e os quadrados de seus lados quadriculados construídos com o programa **prog2**

Ao lançar mão dessa estratégia, utilizou conceitos matemáticos como: **conceito de ângulos**, **retas paralelas, retas perpendiculares, conceito de área de figuras planas e transposição de área de figuras planas.**

Nota-se também que o sujeito trabalhou sob retas paralelas aos eixos **x** e **y**: a reta formada pelos pontos (-50, 40) e (-50, 0) paralela ao eixo **y** e a reta formada pelos pontos (-50, 0) e (-20, 0) que se confunde com o eixo **x**.

Como o sujeito conhece que: "*Todo triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto*", trabalhou sobre a **ortogonalidade dos eixos x e** y.

Nessa estratégia, ao avançar em seu raciocínio, descobriu que, trabalhando com os **eixos coordenados x e y**, garante a **ortogonalidade** do ângulo B.

Assim, independente do tamanho dos lados do triângulo, ao fecha-lo, o sujeito alcança o seu objetivo de fato: representa um triângulo retângulo na tela, com o programa **prog3** e "mostra" a **Relação de Pitágoras** sem a abstração da linguagem matemática, com fórmulas e algoritmos, mas com uma estratégia que lhe é significativa, que ele próprio descobriu na sua investigação e busca para resolver o seu problema no micro mundo da tartaruga (Figura 7.16).

Procedimentos:

```
?ap prog3
aprenda prog3
prog2  pin
fim
prog3 aprendido

?ap pin
aprenda pin
pintarab
pintarbc
pintarca
fim
pin aprendido

?ap pintarab
aprenda pintarab
un mudepos [ -50 40 ] pd 180 ul
amarel azul
pd 90 pt 40 pe 90 pf 30
verde preto pe 180
fim
pintarab aprendido

?ap pintarca
aprenda pintarca
un mudepos [ -50 0 ] pd 90 ul
verm pe 90
fim
pintarca aprendido

?ap pintarbc
aprenda pintarbc
un mudepos [ -20 0]
pe ( 90 - arctan ( 4 / 3 ) ) ul
verm amarel
un mudepos [ -50 40 ] pf 50 pd 90 ul
azul pf 30 pe 90 verde pd 90
pt 20 pe 90 pf 10 preto
pd ( 90 - arctan ( 4 / 3 ) ) un
mudepos [ 0 0 ] ul
fim
pintarbc aprendido

?ap amarel
aprenda amarel
repita 2 [ repita 3 [ pintar 10 un pf 10 ul ]
           un pt 30 pd 90 pf 10 pe 90 ul ]
fim
amarel aprendido

?ap azul
aprenda azul
repita 2 [ repita 3 [ pintar 13 un pf 10 ul ]
           un pt 30 pd 90 pf 10 pe 90 ul ]
fim
azul aprendido

?ap verde
aprenda verde
```

```
repita 2 [ pintar 4 pd 90 pf 10 pe 90 ]
un pd 90 pf 10 pe 90 ul
fim
verde aprendido

?ap vermelho
aprenda vermelho
repita 3 [ repita 2 [ pintar 8 un pf 10 ul ]
           un pt 20 pd 90 pf 10 pe 90 ul ]
fim
vermelho aprendido

?ap preto
aprenda preto
repita 2 [ pintar 1 pd 90 pf 10 pe 90 ]
fim
preto aprendido

?ap pintar
aprenda pintar :cor
un pd 45 pf 7 ul mudecl :cor pinte ul
pt 7 pe 45 ul mudecl 15
fim
pintar aprendido

?prog3 imprima
```

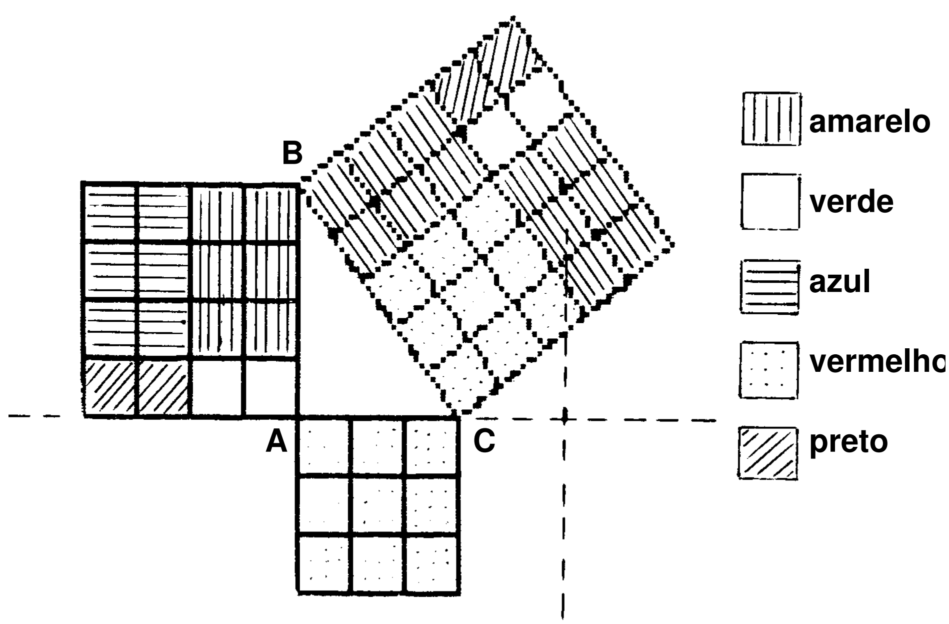

Figura 7.16 - Triângulo retângulo construído com o programa **prog3** com os quadrados pintados

Implícito nas estratégias escolhidas pelo sujeito nos procedimentos relativos a resolução do problema expressos pela Figura 7.16, nota-se uma verdadeira heurística, no sentido de que ele buscou seus próprios caminhos para mostrar a Relação de Pitágoras.

Valorizou primeiramente a estratégia que lhe possibilitou pintar, de uma cor específica o quadrado formado pelo cateto menor do triângulo ABC. Em seguida, ele dividiu o quadrado formado pelo lado do cateto maior em quatro retângulos iguais dois-a-dois, pintando cada um dos quatro retângulos resultantes, com cores diferentes. A estratégia explicitada pela divisão e determinação das cores específicas, nos leva a inferir que o sujeito transpôs a estratégia utilizada no Paradigma Intuitivo.

Em seguida, delimitou os quadrados formados pelos catetos do triângulo ABC, usando figuras convenientes de forma tal que, compondo essas figuras ele formaria um quadrado igual àquele formado pela hipotenusa.

Inerente à estratégia utilizada (análoga à manipulação de um quebra-cabeça) nota-se uma intencionalidade e valorização do sujeito, no sentido de "transportar" as figuras, segundo os **recursos** de **pintura** disponíveis no Logo, para o quadrado formado pela hipotenusa do triângulo ABC.

Ao proceder dessa maneira, transpõe as figuras delimitadas por cores específicas para o quadrado formado pela hipotenusa do triângulo ABC, isto é transporta-as através dos comandos, isto é, por meio de primitivas selecionadas pelo sujeito, inerentes à Geometria da Tartaruga, utilizando conceitos inerentes à Geometria das Transformações (reflexão, rotação e translação). Desse modo, nota-se nesse contexto a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria das Transformações.**

Nesse sentido, o contexto Logo, com suas especificidades, possibilitou ao sujeito um raciocínio mais complexo, mais elaborado, no sentido de que ele se afastou da visão figurativa, isto é, se desvinculou dos aspectos qualitativos de seu produto, explicitado pela contagem, sobreposição, recortes entre outros fatores, como foi utilizado no processo da resolução do problema no Paradigma Intuitivo deste estudo. Esse fato é evidenciado quando, no processo de depuração da presente resolução, o sujeito "refinou" sua estratégia empírica, ou mesmo intuitiva, criando uma própria, relacionada aos aspectos quantitativos, ou seja, `as particularidades e especificidades subjacentes `a construção de seu intento, que constituía-se em representar a "demonstração" de seu problema. Contata-se, nesse momento, uma verdadeira heurística, em que o sujeito direciona seus procedimentos para uma "solução ótima".

Esse contexto foi favorável ao sujeito, pois lhe propiciou um aprendizado por tentativa e exploração, quando se constatou o **movimento sincrônico** do processo cognitivo do sujeito ao resolver um problema específico, isto é, o **dinamismo microgenético** das condutas cognitivas do sujeito: a inter-relação entre as **heurísticas, axiologias**, e as **teleonomias**. E através das condutas cognitivas desse sujeito nesse processo de resolução de problema constatou-se também as inter-relações da **Geometria da Tartaruga** com as **Geometrias: Intuitiva, Euclidiana, Analítica e das Transformações.**

Observa-se claramente que, implícitos nas estratégias usadas pelo sujeito, temos conceitos de **Geometria Analítica**, como **distância entre dois pontos** (por exemplo, distância do ponto B ao ponto C) e **distância de um ponto a uma reta**, entre outros; encontram-se também conceitos da **Geometria das Transformações**, como movimentos de **Rotação**, **Translação** e **Reflexão** no plano**.**

Enfim, vê-se claramente nos procedimentos do sujeito ao resolver o problema proposto no paradigma alternativo, a inter-relação das **Geometrias da Tartaruga**, **Euclidiana, Analítica**, e das **Transformações** pois a arquitetura Matemática subjacente à Linguagem Computacional Logo e implícita no micro mundo da tartaruga propicia um ambiente poderoso para que a interação do sujeito se processe através desse trânsito entre as diversas Geometrias.

Ao resolver o problema, o sujeito compõe as heurísticas e utiliza estratégias distintas para aplicar essas heurísticas em vários contextos. Esse fato é constatado quando o sujeito muda o estilo de programação, isto é, "transita" do Modo Direto[4] para o Modo de Edição[5], e vice-versa. Tal atitude também se constitui, ao nosso ver, em uma nova estratégia, uma real **heurística**, para o sujeito ser capaz de processar uma depuração imediata e contínua, característica intrínseca do **Sistema Logo**, que possibilita a **depuração e a reestruturação** do programa computacional, sempre que for preciso.

Deve-se ressaltar que é a partir da depuração, da análise dos procedimentos, que o sujeito é capaz de "pensar sobre seu modo de pensar", ou seja, de "rever" seu raciocínio implícito na descrição de sua programação em cada passo do processo de resolução. A reestruturação de seu programa é conseqüência de sua própria reestruturação mental.

Nesse processo, convém assinalar que os **possíveis erros** são fontes de novos caminhos, novas decisões, e portanto, representam uma importante **metáfora** na descrição da análise das condutas cognitivas do sujeito, no **contexto Ensino/Aprendizagem de conceitos geométricos.**

O micro mundo da tartaruga propicia ao sujeito um ambiente de aprendizagem, no qual pouco a pouco, explorando os comandos básicos da Linguagem Computacional Logo, passa a exercer "controle" sobre suas próprias estratégias de resolver o problema. Isso se evidencia por exemplo, quando o sujeito faz correspondências, analogias ao criar um procedimento novo, ou mesmo, escolhe um simples comando para explicitar parcialmente sua estratégia.

Desse modo, pode-se inferir que as palavras de Harold Abelson e Andrea diSessa (1981) expressam o significado da Geometria da Tartaruga, no contexto Ensino/Aprendizagem de Geometria, qual seja: *"A Geometria da Tartaruga é uma*

---

[4] Modo Direto: Modo de trabalho, onde os comandos são executados logo após o usuário ter digitado o comando e ter apertado a tecla Enter. Caracteriza-se pela presença do sinal "prompt" (?), que indica que os comandos serão executados imediatamente.

[5] Modo Edição: Modo de trabalho, onde o usuário define um procedimento. Caracteriza-se pela ausência do sinal "prompt" (?), indicando que os comandos não serão executados imediatamente. Os comandos ficarão armazenados na memória do computador.

Matemática arquitetada para propiciar um aprendizado por tentativas e exploração e não uma Matemática que apresenta seus Teoremas e suas Provas." (p.3) (tradução da autora).

Partindo desse princípio, pode-se inferir que o sujeito, ao demonstrar o Teorema de Pitágoras no Paradigma Tradicional, não "construiu" conceitos geométricos novos, somente reproduziu o que lhe foi transmitido. Entretanto, no Paradigma Alternativo, utilizando-se da Geometria da Tartaruga, encontrou um contexto propício ao desenvolvimento de noções geométricas. Esse fato verificou-se em vários momentos dessa interação, quando o sujeito explorou os recursos que esse outro sistema de representação lhe oferecia, ao tentar adequar o problema ao novo contexto, isto é, ao combinar suas ações, ao criar novos procedimentos, controlando suas estratégias para finalmente atingir seu propósito: representação na tela e a "demonstração" com a Geometria da Tartaruga do Teorema de Pitágoras.

Devemos ressaltar que não se está propondo que o sujeito resolva teoremas com o Logo, porém o problema analisado nesta pesquisa foi selecionado como sendo um teorema, justamente para desmitificar o fato de que todo teorema em Matemática precise necessariamente ser "demonstrado" através de fórmulas e algoritmos para ser compreendido efetivamente.

IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA PARA A EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 8

IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA PARA EXPLORAÇÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL

"Digo: o real não está na saída nem na chegada, ele se dispõe para a gente é no meio da travessia."
Guimarães Rosa
Grande Sertão: Veredas (1956)

8.1) Pressupostos Teórico-Metodológicos do Logo Tridimensional

8.1.1) O Que é Logo Tridimensional?

Logo Tridimensional é uma extensão do Logo Geométrico[1], o qual foi apresentado por Seymour Papert em sua obra "Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas", em 1980; extensão essa proposta e definida em 1985 por Horácio Reggini, onde os movimentos da tartaruga não estão limitados no plano, sendo possível "escapar" dele por inclinação, por exemplo. Nesse contexto, o micromundo da tartaruga passa a ter uma dimensão a mais, através da incorporação de novas primitivas que permitem a descrição de objetos no espaço.

8.1.2) Considerações Gerais

Como uma extensão do Logo Geométrico, a mesma metáfora de "ensinar algo à tartaruga" é usada como modelo de "programar" usando Logo Tridimensional. Os comandos implementados permitem comandar a tartaruga no espaço, onde o conhecimento do próprio espaço, a construção e a representação de figuras espaciais fazem parte de um

---

[1] Logo Geométrico é um subconjunto da linguagem de programação Logo, cuja idéia principal é a de um objeto (tartaruga) que pode mover-se em um plano, representado, por exemplo, pela tela do monitor. Os movimentos possíveis para esse objeto são o de deslocamento - para frente e para trás - e o de giro - para a direita e para a esquerda - sobre uma superfície plana. Dessa maneira os movimentos desse objeto, sob comando de um usuário, podem definir figuras geométricas.

processo natural e "ego-sintônico"[2]. Assim é possível se representar os desenhos dos objetos tridimensionais na tela do computador, de uma maneira simples. A representação das imagens tridimensionais no plano da tela se dá através de perspectiva cônica[3] ou central, ficando a cargo do próprio sistema Logo todas as transformações matemáticas envolvidas nesse processo. Assim sendo, esta forma de representação através da projeção cônica é intrínseca ao Logo Tridimensional, através da arquitetura matemática inerente às primitivas criadas por Reggini e implementadas na Geometria da Tartaruga.

Uma das idéias que serve como ponto de partida para a realização de desenhos com a tartaruga refere-se ao uso do corpo ("sintonicidade" corporal) para refletir os movimentos da Tartaruga na descrição e representação do objeto real. Essa idéia torna o processo mais significativo e educativo, uma vez que, para descrevermos qualquer objeto, agora pensamos e refletimos sobre os movimentos da tartaruga no espaço, apoiados em nosso conhecimento corporal; esse fato já foi explicitado no capítulo anterior desta pesquisa, porém convém explorá-lo no contexto tridimensional.

Nesse sentido, ao nos deslocarmos em sintonia com a tartaruga, tomamos conhecimento dos nossos próprios deslocamentos realizados no espaço. Assim, para a realização da representação de um objeto espacial, não é necessário o conhecimento prévio das leis matemáticas que o explicitam, mas somente dos movimentos que devem ser feito para descrevê-lo. Esse aspecto é um dos pontos iniciais para o desenvolvimento de conexões com a Geometria formal. Essa conexão pode ser explicitada segundo o estudo das Abstrações da teoria piagetiana, como se segue.

Ao nos deslocarmos no espaço, colocamo-nos no lugar da Tartaruga e, pouco a pouco, tomamos "conhecimento" dos nossos próprios deslocamentos. Esse conhecimento é fruto de abstrações empíricas. À medida em que passamos a refletir sobre as coordenações das ações realizadas durante os deslocamentos, esse conhecimento deixa de ser empírico e passa a ser pseudo-empírico (uma modalidade da abstração reflexiva), ou seja, um conhecimento que se dá a partir da coordenação das ações do sujeito enquanto realiza seus movimentos. Em uma análise mais complexa, ao explicitarmos os processos cognitivos que geraram esses movimentos, estamos no plano das Abstrações Refletidas.

Convém ressaltarmos, nesse contexto, que dois novos componentes ficam subjacentes ao micromundo do Logo Tridimensional:

1°- O uso do espaço em lugar do plano, onde as ações da tartaruga supostamente ocorrem;

2°- A projeção no plano da forma resultante das ações da Tartaruga.

---

[2] A expressão **ego-sintônica** é usada por Freud. É um "termo usado para descrever instintos ou idéias que sejam aceitáveis ao **ego**, isto é, compatíveis com a integridade do **ego** e com suas necessidades." (Papert, 1985, p.87).

[3] Perspectiva ou projeção cônica é aquela em que as linhas paralelas do objeto convergem para um mesmo ponto (Ponto de Fuga).

Esses dois componentes, ao mesmo tempo em que aproximam o usuário do "real", pela descrição dos objetos através de sua **forma** concreta, colocam-no num sistema de representação bidimensional dos objetos pelo uso de um plano representado pela tela do monitor como saída. Esse processo envolve reestruturações mentais e computacionais cada vez mais complexas, relacionadas à visualização, à interpretação e à descrição da representação da imagem resultante, necessárias à "mentalização" do objeto representado no plano.

8.1.3) Comandos Básicos

A finalidade proposta pelo uso do Logo Tridimensional é fornecer uma dimensão espacial ao micromundo da tartaruga, através da incorporação de novas primitivas que permitem a descrição de objetos no espaço. Para tal, associado à tartaruga existe um sistema de três eixos coordenados (***i,j,k***) com origem no centro e fixo nele (centro da tartaruga), como representado na Figura 8.1, que "navega" com ela, isto é acompanha os movimentos da tartaruga. Através desse sistema de eixos coordenados determina-se univocamente a orientação espacial da tartaruga (estado da tartaruga).

O eixo ***i*** atravessa a tartaruga desde sua cauda até sua cabeça, é o eixo longitudinal, e é segundo ele que a tartaruga realiza seu movimento longitudinal.

O eixo ***j*** cruza a tartaruga de lado a lado, da direita para a esquerda, é perpendicular ao eixo ***i***, e é denominado eixo transversal.

O eixo ***k***, ou eixo normal, é perpendicular aos eixos ***i*** e ***j***, e vai desde o centro da tartaruga até sua carapaça, apontando para cima da tartaruga.

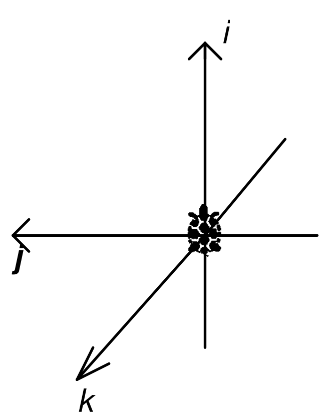

Figura 8.1 - Sistema de eixos coordenados associados à tartaruga

As coordenadas ***x, y, z,*** da tartaruga estão referenciadas ao sistema ortogonal de eixos ***x, y*** e ***z,*** fixo e localizado no centro da tela, que é o ponto de partida para os deslocamentos e giros da tartaruga. Os eixos ***x,*** horizontal, e ***y***, vertical, estão no plano da tela; o eixo *z* é perpendicular à tela, e posiciona-se saindo do plano desta, como representado na Figura 8.2. Na posição inicial, o sistema de coordenadas da tartaruga tem seu eixo ***i*** coincidindo com o eixo ***y,*** o eixo ***j*** coincidindo com o negativo do eixo ***x,*** isto é , **- *x***, e o eixo ***k*** coincidindo com o eixo *z*.

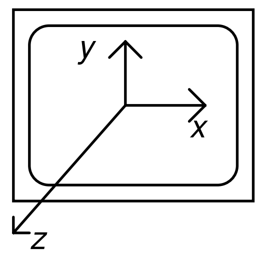

Figura 8.2 - Sistema de eixos coordenados fixos na tela do computador

A tartaruga adquire suas condições iniciais de partida, posicionando-se no centro da tela, através do comando **tridimensional (tri).**

Os movimentos da tartaruga no espaço são definidos pelo seu giro ao redor de seus eixos ***i, j, k,*** como representados na Figura 8.3 abaixo, e pelo seu deslocamento longitudinal.

No **plano da tela**, os comandos que possibilitam **seus movimentos** são:

andar <distância>[4] : através desse comando a tartaruga se desloca de <distância> ao longo de seu eixo longitudinal, portanto, sem alterar sua direção, e equivale ao comando **parafrente** e **paratrás** (em sentido oposto) do Logo Bidimensional.

virar <ângulo> : este comando gira para a esquerda a tartaruga de <ângulo> ao redor de seu eixo normal **k**, e equivale ao comando **paraesquerda** no Logo Bidimensional.

A tartaruga **"escapa do plano"** para o **espaço** através dos comandos:

rolar <ângulo> : que gira a tartaruga ao redor de seu eixo longitudinal ***i*** um ângulo especificado por <ângulo>.

cabecear <ângulo> : que gira a tartaruga ao redor de seu eixo transversal ***j*** um ângulo especificado por <ângulo>.

---

[4] < > Esse símbolo significa que o argumento que está incluído nele é uma variável, isto é, o usuário do sistema pode atribuir-lhe qualquer valor.

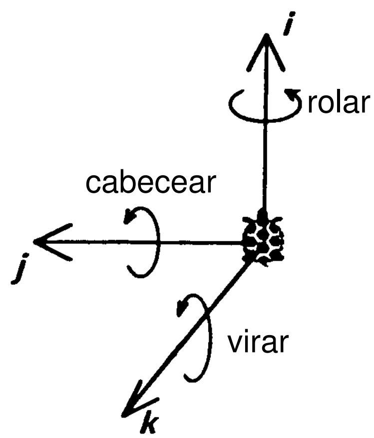

Figura 8.3 - Giros da tartaruga ao redor de seus eixos coordenados

8.2) "Idéias Poderosas" Inerentes ao Contexto do Logo Tridimensional

Estender o micromundo da tartaruga bidimensional para outro mais amplo, tridimensional, através da incorporação da dimensão espacial, implica em um "salto" qualitativo importante na concepção da tartaruga como **"objeto sobre o qual se pensa"**, já que seus movimentos, não estando limitados ao plano, alcançam uma complexidade mais abrangente, integrando o Logo Bidimensional no mundo real, ao mesmo tempo em que permite associar os movimentos da tartaruga com os verdadeiros movimentos corporais.

A noção do espaço e o conhecimento de conceitos relacionados à Geometria Espacial, e também as projeções dos objetos tornam-se disponíveis de forma simples e natural, sem abstração demasiada subjacente à Geometria Espacial, permitindo às pessoas atuarem como especialistas[5] em domínio em que não são, agindo de forma criativa no processo que se refere à construção de conceitos geométricos espaciais.

De um modo geral, existem várias maneiras de se descrever um objeto de três dimensões. Uma delas, bem simples, seria aquela de gerarmos um objeto, a partir de um ponto qualquer sobre sua superfície, através dos movimentos sucessivos para percorrer seus contornos. Esta descrição geométrica não faz referência a nenhum elemento externo ao objeto, e é portanto intrínseca a ele. Esse fato é evidenciado no Logo Tridimensional, já que esse sistema possibilita inúmeras descrições, com diferentes estilos, da forma espacial de objetos, através das ações sucessivas necessárias para se conseguir delinear e explicitar seus contornos.

[5] Especialista é concebido, nesse momento, como um termo que se refere a pessoa que possui um alto grau de conhecimento sobre conceitos geométricos.

Para tanto, imaginemos nossa mão direita aberta e estendida. Com ela vamos percorrer as linhas do contorno (arestas) de um objeto tridimensional. Através da ordem ***andar*** iniciamos o único movimento de translação da mão segundo a direção dos dedos. Com a ordem ***virar***, giramos a mão no plano da palma da mão. Qualquer figura plana poderá pois ser definida com as ordens ***andar*** e ***virar***. Para completar a definição de uma figura tridimensional, usamos as ordens ***cabecear***, que produz um giro para cima ou para baixo flexionando a munheca, e ***rolar***, que produz um giro que se relaciona com o girar da mão[6]. Desse modo, as citadas ordens, representadas na Figura 8.4, permitem descrevermos qualquer objeto espacial através dos movimentos necessários para percorrê-lo.

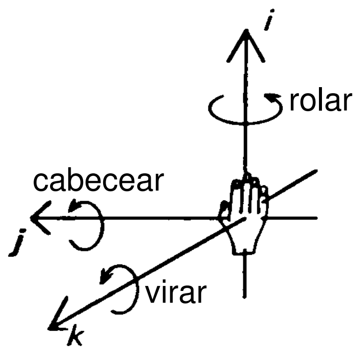

Figura 8.4 - Movimentos da tartaruga transportados para a mão

Usado com tal finalidade, o sistema computacional Logo se torna um veículo para a expressão humana, tanto de natureza científica quanto artística, oferecendo ao seu usuário a oportunidade de vivenciar a emoção e a alegria do ato criativo. Nesse sentido, como meio de expressão artística, segundo palavras de Reggini (1988):

> *"O processo que uma pessoa usa para definir uma forma com Logo é similar ao trabalho de um artesão. Como o artista, o artesão se detém freqüentemente durante sua criação e a todo momento corrige e troca seus planos, à medida em que avança em seu trabalho. As ferramentas que usa não são complicadas, nem tampouco requerem um conhecimento profundo para serem manejadas, e cada forma determinada leva em si mesma uma marca característica que mostra estilo, conhecimento e sentido estético do artista que realiza a forma"* (grifo e tradução nossos) (p.174).

O uso do ambiente Logo para explicitar e representar conceitos da Geometria Espacial possibilita esse enfoque artesanal.

---

6 Giro da mão está associado à ação da mão em movimentos que, popularmente, representam o estado de "mais ou menos".

Como meio de expressão científica, pelo processo de transformar **idéias** em **formas** a partir da descrição da geometria intrínseca aos objetos e da visualização e interpretação desses objetos representados na tela bidimensional, esse micromundo possibilita uma exploração informal da Geometria Espacial.

8.3) A Perspectiva Cônica e a Representação de Formas na Tela

A representação das principais propriedades da forma de um objeto, em uma superfície plana, não é uma tarefa simples, pois o conceito visual de qualquer objeto que possua volume, somente pode ser representado em um meio tridimensional. Assim, quando desenhamos um objeto sobre uma superfície plana, o que obtemos é uma "tradução" deste objeto, ou seja, a representação por meios bidimensionais de alguns fatores estruturais essenciais ou particulares do conceito visual. As figuras obtidas podem parecer planas, como os desenhos de uma criança, ou ter profundidade, como os quadros com linhas de fuga; mas em ambos os casos a integridade do conceito visual não pode reproduzir-se totalmente no plano (Reggini, 1985).

Ao longo das civilizações, a representação da profundidade, ou terceira dimensão do espaço, sobre uma superfície de duas dimensões representou um problema de grande interesse, com diferentes soluções. Por exemplo, nos desenhos dos egípcios, as cabeças e os pés eram sempre representados de perfil. Tratava-se de mostrar a essência dos objetos, representando sempre cada parte em uma posição distinta para ressaltar suas características mais notáveis.

Em algumas representações chinesas e japonesas antigas, as retas paralelas da realidade (do objeto) se conservam paralelas no desenho.

Na Grécia de Euclides (século III a.C.) já se utilizavam representações em perspectiva cônica, entretanto, somente no Renascimento, foram cientificamente definidos seus fundamentos, e com isso ocorreu a generalização de seu uso. A partir de então, imagens registradas de objetos passaram a assumir as mesmas formas com as quais eram vistos os objetos no mundo real.

No desenvolvimento científico, através da busca de se conseguir dispositivos óticos-mecânicos que permitissem a obtenção de figuras de objetos em perspectiva cônica, o resultado mais notável foi conseguido no final do século passado, com a invenção da fotografia. As imagens fotográficas, assim como as do cinema e da televisão que lhe seguiram, também mostram os objetos em perspectiva cônica.

Sendo um dos objetivos do Logo Tridimensional aproximar o usuário do mundo real, a perspectiva cônica, ou também chamada central, foi escolhida por Reggini para ser utilizada na representação das formas geradas pela tartaruga tridimensional.

A explicação de como se realiza essa representação é a seguinte:

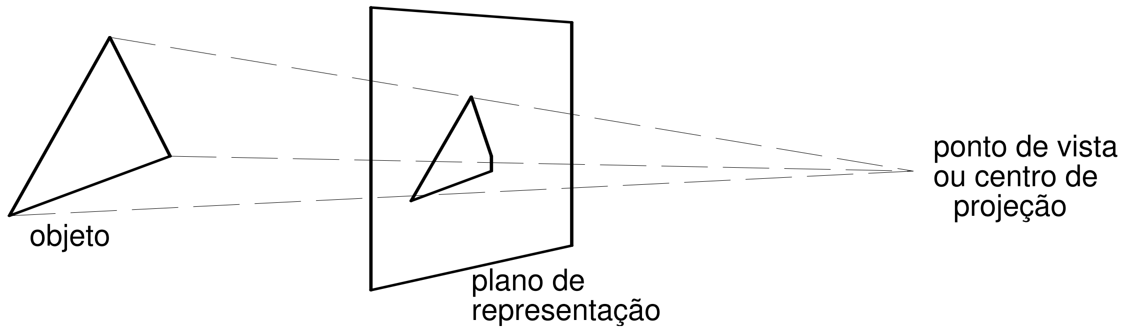

Figura 8.5 - Representação de um objeto visto segundo a perspectiva cônica

Suponha que um observador veja um objeto através de uma janela de vidro. As linhas ligando o olho do observador aos pontos do objeto interceptam o vidro em um conjunto de pontos que formam a representação bidimensional do objeto, como representado na Figura 8.5 acima.

Fazendo uma analogia com o sistema computacional, a posição da janela (ou plano de representação) é a tela do monitor. O olho do observador (ou ponto de vista) está posicionado em uma linha perpendicular à tela passando pelo centro. Assim, para desenhar um objeto no Logo Tridimensional movemos a tartaruga ao longo das linhas desse objeto no espaço. O caminho feito pela tartaruga no espaço produz uma imagem (ou representação plana) que é a representação do objeto visível na tela do monitor, como ilustrado na Figura 8.6 abaixo.

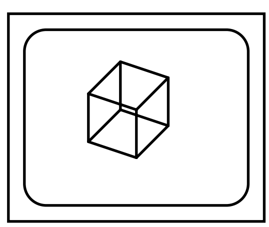

Figura 8.6 - Desenho bidimensional de um objeto feito com tartaruga tridimensional

8.3.1) Analogia com o Sistema de Fotografia

Em fotografia, o olho do observador é substituído pelas lentes da objetiva, e o plano de representação é substituído pela película sensível ou filme. De fato, neste caso, o plano de representação está atrás do ponto de vista e se forma uma imagem negativa; mas o processo é similar ao que teríamos se o plano de representação estivesse adiante. Este processo está representado na Figura 8.7 abaixo.

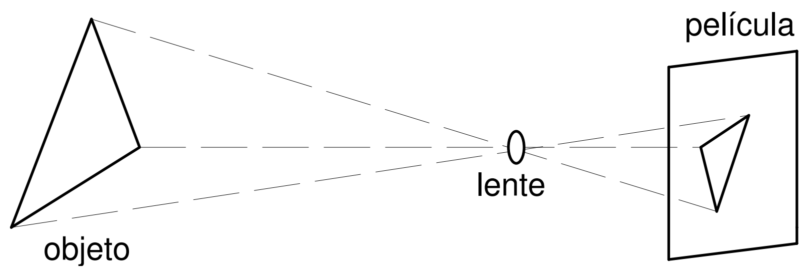

Figura 8.7 - Representação do "registro" de um objeto por uma câmara fotográfica

Em perspectiva, denomina-se *raio principal* ao raio visual perpendicular ao plano de representação, e *ponto principal* ao ponto no qual o raio principal corta o plano de representação, como representado na Figura 8.8 abaixo. Em fotografia, o ponto principal é o centro da película sensível; em nosso caso, é o centro da tela, uma vez que o sistema de eixos coordenados está no centro da tela, como já representado na Figura 8.2:

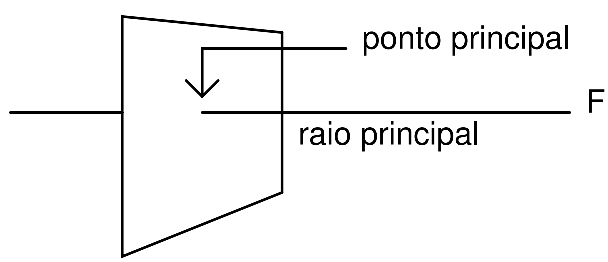

Figura 8.8 - Raio principal e ponto principal

Chama-se *distância principal* ao segmento do raio principal compreendido entre o ponto de vista (ponto F nas Figuras 8.8 e 8.9) e o plano de representação, como ilustrado na Figura 8.9. Em fotografia, designa-se essa magnitude com o nome de *distância focal.* No sistema Logo Tridimensional descrito por Reggini (1985), essa distância está definida pela variável F, cujo valor é 750, ou seja 750 passos da tartaruga, fora da tela, sobre o eixo perpendicular passando pelo seu centro.

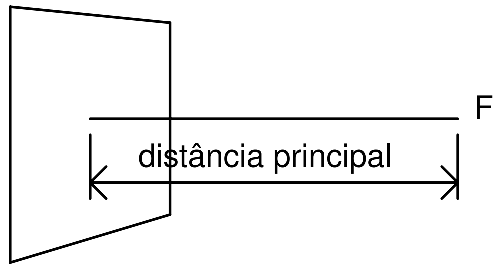

Figura 8.9 - Distância principal e distância focal

Nas perspectivas ou projeções cônicas que geram as imagens em Logo Tridimensional, normalmente trabalha-se com essa distância entre o ponto de vista (ou centro de projeção) e a tela, fixa (distância principal representada na Figura 8.9) mas ela pode ser modificada por um comando apropriado. Alterar essa distância corresponde à troca de lente na câmara fotográfica. Segundo Reggini (1985), um valor de F similar ao da diagonal da tela, medido em passos da tartaruga, gera imagens similares às que se obtêm com uma câmara fotográfica com lente normal, por exemplo distância focal f = 50 mm para negativos de 24 x 35 mm. Com valor menor dessa distância, as imagens resultantes seriam similares às das fotografias obtidas com lente grande angular. Com valor maior dessa distância, as imagens se pareceriam com as obtidas com tele-objetiva. Se fosse possível uma variação contínua de F, obteríamos um efeito similar ao que conseguimos através da variação do "zoom" nas filmadoras ou em algumas câmaras fotográficas.

Assim como representado na Figura 8.6, quando a imagem que aparece na tela, de um objeto em uma posição qualquer, for visto a partir de um ponto F, a percepção física resultante coincide geometricamente com aquela que se obteria com o objeto real colocado na mesma posição. Contudo, não é imprescindível estar colocado no ponto F para se olhar a tela, já que a visão de uma perspectiva é também aceitável, se bem que dentro de certos limites, a partir de outros pontos de vista distintos. Recordemos que podemos examinar livremente um quadro ou uma fotografia de qualquer direção e distância, sem que a ausência da variação da perspectiva com relação ao deslocamento de nosso ponto de observação prejudique nossa compreensão. Esse fato ocorre porque o observador raramente se insere no espaço que representa a figura.

8.3.2) Ponto de Fuga e Perspectiva Paralela

Ponto de fuga de um feixe de raios luminosos ou conjunto de retas paralelas de um objeto é o ponto comum de encontro das correspondentes retas no desenho, como ilustrado na Figura 8.10. Este ponto resulta da intersecção com o plano do quadro, do raio visual paralelo ao respectivo feixe de retas no objeto.

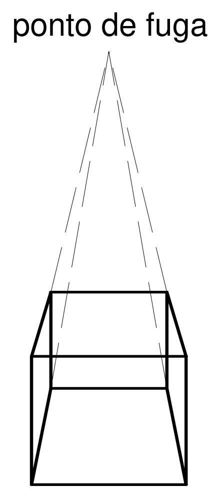

Figura 8.10 - Ponto de fuga

Quando o ponto de vista se afasta do plano do quadro até infinito, todos os raios visuais ou projetantes tornam-se paralelos; neste caso, a perspectiva correspondente recebe o nome de *paralela* ou iso*métrica*[7], e a ilustramos na Figura 8.11 a seguir:

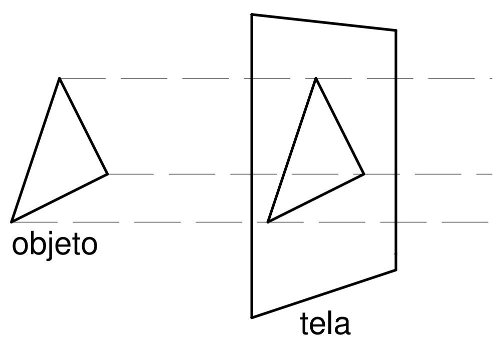

Figura 8.11 - Projeção paralela

8.3.3) Analogia com o Processo da Visão

A representação em perspectiva dos objetos tridimensionais também se processa nas imagens que se geram pelos olhos. A córnea e o cristalino funcionam como uma lente com ajuste focal contínuo, por onde passam os raios de luz. Em lugar da película sensível, há a retina, a qual deteta os raios luminosos provenientes do objeto. A percepção visual é algo complexo, que não pode ser representado no plano; as perspectivas cônicas, bem

[7] Isométrica: pela etimologia da palavra, **iso** significa mesma, e **métrica** significa dimensão, medida. Nesse sentido, isométrica significa, portanto, mesma dimensão.

como as perspectivas paralelas ou de outro tipo, devem ser entendidas como meros modelos parciais do espaço visual.

Assim, dependendo das dimensões de um objeto, e do ângulo segundo o qual o "enxergamos", na representação no plano do modelo de visão, poderá existir mais de um ponto de fuga, como representado na Figura 8.12, para o caso de dois deles.

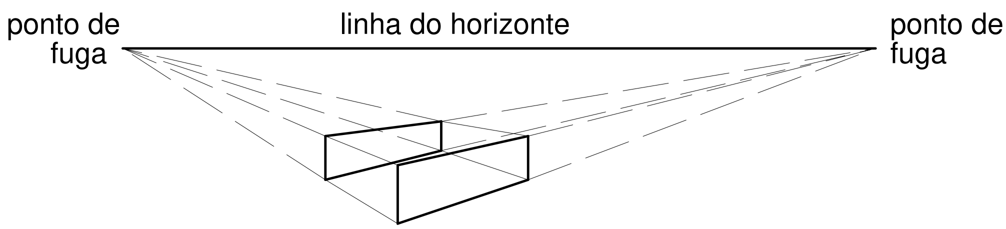

Figura 8.12 - Representação de um objeto com dois pontos de fuga

No caso do paralelepípedo estar muito acima ou abaixo da linha do horizonte torna-se necessário um terceiro ponto de fuga, na vertical, para sua representação.

O processo mental de "enxergar" uma forma a partir de sua projeção cônica envolve um exercício de interpretação das imagens produzidas. Esse processo mental, segundo a teoria piagetiana, envolve Abstração Refletida, pois além do usuário "ter em mente" o que vai representar, deverá refletir sobre o seu modo de pensar e tentar explicitar e interpretar as imagens produzidas. Nesse exercício mental de interpretação, estão igualmente envolvidos os processos cognitivos dos estudos relativos às Abstrações já citados, pois além do usuário "ter em mente" o que vai representar, deverá refletir sobre seu modo de pensar, e tentar explicitar as imagens produzidas até chegar a executá-las e conceituá-las, segundo seu nível de estruturação mental.

8.4) A Descrição do Objeto no Espaço e sua Representação na Tela

O cenário inicial para trabalho com o Logo Geométrico envolve a tartaruga e seus movimentos no plano (tela do micro). O usuário parte de representações e ensina à tartaruga como desenhá-las na tela. Por exemplo, quando o sujeito define um procedimento para desenhar uma casa, seu "objeto" já é uma representação plana da casa (representação simbólica). O resultado produzido na tela reflete ou não suas intenções mas, definindo um procedimento, ele está ensinando a tartaruga a produzir a mesma representação, como esquematizado abaixo, e representado na Figura 8.13.

(FIGURA/INTENÇÃO) (PROCEDIMENTOS) (FIGURAS NA TELA)

Representação do objeto ⇒ Descrição da Representação ⇒ Representação do objeto

⇐

Feedback

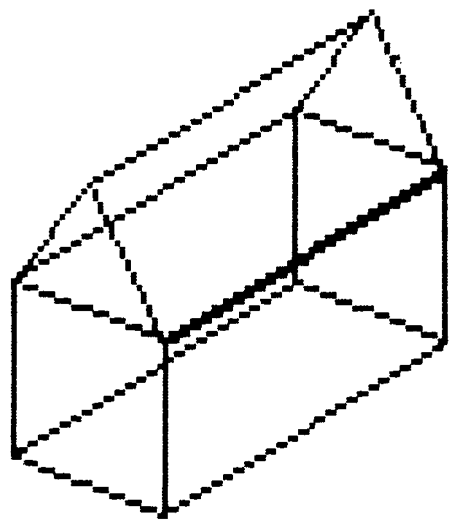

Figura 8.13 - Representação da construção da Casa com Logo Bidimensional

O trabalho com Logo Tridimensional envolve o trinômio: 1- O objeto. 2- A sua descrição no espaço. 3- A sua representação na tela (em perspectiva cônica). O usuário parte de um objeto "real". O procedimento reflete a forma desse objeto e também os processos mentais usados na representação do objeto real. Além disso, a saída na tela é uma representação em perspectiva da forma do objeto. Dessa maneira, existem processos de codificação e decodificação envolvidos, em que a realimentação depende de uma "interpretação" da imagem resultante como saída, como esquematizado abaixo, e representado na Figura 8.14.

Objeto (forma concreta) ⇒ Descrição da forma ⇒ Representação do objeto (Projeção cônica do objeto)

⇐

Interpretação

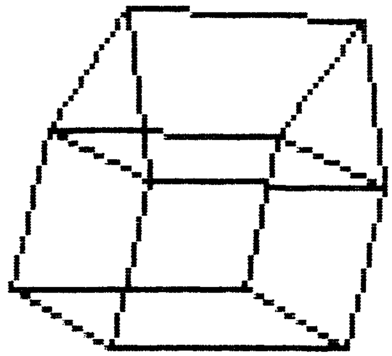

Figura 8.14 - Representação da construção da casa com Logo Tridimensional

8.5) Definição do Objeto através da Descrição do Procedimento

Não é a imagem produzida na tela que define o objeto, mas sim os procedimentos relacionados à representação da forma do objeto.

Dessa maneira, um resultado na tela não determina unicamente um objeto. Por exemplo, a Figura 8.15 que objeto representa? Um cubo sólido, três planos ortogonais com a origem em direção ao fundo do papel ou três planos ortogonais com a origem em direção ao olho do observador?

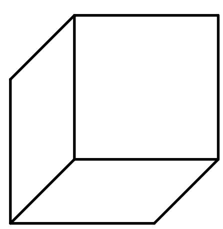

Figura 8.15 - Representação de um objeto

A imagem mostrada não nos dá informações suficientes para respondermos. Poderia ser qualquer uma delas, dependendo da "interpretação" que nosso sistema de reconhecimento de imagens fornece. O procedimento que gerou tal figura é que define o objeto, pois ele contém a descrição espacial do objeto.

Exemplificando:

"Num cubo sem as bases, sua representação coincide com a representação de um cubo "completo"."

E assim acontece com qualquer poliedro. Esse fato será evidenciado nos projetos ou situações-problema realizados pelo sujeito do nosso estudo.

8.6) Estudo de Caso

A estratégia metodológica alternativa será implementada em um Estudo de Caso com enfoque qualitativo, onde será analisada e descrita a interação de um sujeito que cursa a 2ª série do 2º grau da Rede Estadual de Ensino de Campinas, que, na época, já apresentava conhecimentos prévios a respeito do Logo Bidimensional, e que trabalhou com Logo Tridimensional durante os anos 1990/1991, explorando conceitos matemáticos e geométricos inerentes às situações-problema propostas pelo pesquisador, e também surgidas nessa interação, ao explorar informalmente a Geometria Espacial.

Essa análise processar-se-á através de processos mentais e computacionais do sujeito pesquisado em situações práticas de Resolução de Problemas, tendo como substrato teórico-metodológico a complementaridade entre os enfoques Microgenético e Macrogenético das condutas cognitivas.

Pretende-se responder o seguinte problema nessa implementação:

É possível captar ou resgatar algumas abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do sistema Logo?

8.7) Aspectos Relativos ao Estudo de Caso

Convém ressaltar que a descrição da análise desta investigação será baseada no referencial teórico desta pesquisa, apresentado no Capítulo 3, onde serão ressaltados os processos cognitivos e computacionais inerentes às situações-problema trabalhadas pelo sujeito; outras situações-problema, no entanto, servirão como exemplos explicativos e elucidativos que nos fornecerão pressupostos teórico-metodológicos sobre a utilização do Logo Tridimensional na construção de conceitos geométricos inerentes às situações reais de resolução de problemas. Nesta descrição, serão enfocados mais precisamente os dados recolhidos durante as sessões do ano de 1991, onde o aluno trabalhou uma sessão por semana, com duração de três horas cada, perfazendo um total de aproximadamente cem horas de trabalho.

Procurou-se, neste Estudo de Caso, adotar os mesmos procedimentos metodológicos que os do estudo anterior. A análise dessa interação se processará através da dimensão Microgenética da atividade cognitiva, a qual não descarta a possibilidade dos aspectos macrogenéticos serem eventualmente considerados. Nesse contexto, os procedimentos metodológicos abaixo enumerados se fizeram presentes.

Depoimentos do sujeito, diálogos e comentários sobre o ensino tradicional de Geometria comparado com o aprendizado de conceitos geométricos através do Sistema Computacional Logo foram considerados em distintos momento dessa interação, mais especificamente quando se referiam às explicitações das estratégias utilizadas pelo sujeito ao resolver as situações-problema propostas.

Foram utilizadas também nesse estudo: a leitura, a análise e a descrição dos arquivos referentes aos procedimentos e aos programas elaborados pelo sujeito, e gravados em disquetes, objetivando recuperar momentos do processo interativo do sujeito com o computador.

Atividades extra-computador também foram desenvolvidas na medida em que se fazia necessário recorrer a objetos concretos a fim de manipulá-los para abstrair as características de suas formas e representá-las através do sistema computacional na tela do monitor.

Como artefatos metodológicos de apoio foram utilizados, entre outros, três eixos ortogonais formados por canudos de refrigerante, planos ortogonais construídos com cartolinas, planificação de vários sólidos poliédricos através da "desmontagem" de caixas com diferentes formatos, tais como: creme dental, chocolate "toblerone" (prisma triangular), embalagem de perfume (prisma hexagonal) e também foram utilizados alguns sólidos de madeira, com a finalidade de serem manipulados concretamente.

O processo de resolução de problemas com a Geometria da Tartaruga foi evidenciado a partir do momento em que o sujeito precisou reelaborar as suas estratégias, reestruturando seus conhecimentos anteriores e adaptando-os ao novo sistema de representação exigido pelas particularidades do sistema Logo.

O planejamento e reestruturação de cada sessão processaram-se após análise, reflexão, depuração e descrição das atividades realizadas e, para tanto, foram consideradas as intervenções do pesquisador nos diferentes momentos desse estudo. Vale dizer que as modificações que o sujeito fez ao programar foram decorrentes dos processos mentais pelas quais elas se efetivaram.

Os referidos processos foram considerados sob a ótica da análise Microgenética do comportamento cognitivo do sujeito, ou seja, aquela que se relaciona aos aspectos funcionais da adaptação do sujeito ao real, aspectos esses evidenciados na transformação das **idéias geométricas** em **formas geométricas**, essência do Logo Tridimensional.

Em outras palavras, trata-se de uma análise inferencial que se relaciona à pertinência dos conhecimentos em um dado contexto, em que serão levados em conta os sistemas axiológicos do sujeito, ou seja, os valores, a importância que ele atribui às suas estratégias, a criação das heurísticas no processo de descoberta, busca e investigação para resolver problemas geométricos em ambientes informatizados ou não.

Faz-se necessário e pertinente nesse momento esclarecermos que os pressupostos teórico-metodológicos referentes ao sistema Logo Tridimensional serão fundamentais para a análise que nos propomos a fazer no Estudo de Caso.

8.7.1) A Metodologia em Ação: Descrição e Análise Local dos Procedimentos do Sujeito

A seguir destacamos alguns projetos efetuados durante esta pesquisa com Logo Tridimensional com o sujeito do Estudo de Caso aqui proposto, que nos levaram a refletir sobre as possibilidades de seu uso em nossas escolas, o que significaria, a nosso ver, um avanço no ensino da Matemática, um grande "passo" metodológico, tendo-se em vista as dificuldades que enfrentam os estudantes no trato dessa disciplina básica em relação à construção de conhecimentos geométricos.

A descrição dessa interação processar-se-á através da análise de algumas situações-problema desenvolvidas pelo sujeito pesquisado, como se apresentam abaixo, entre outras por ele realizadas. Serão ressaltadas nessa análise as situações-problema, que na nossa concepção constituíram-se como as mais elucidativas e fundamentais para os objetivos a que nos propomos a investigar nesse Estudo de Caso. Convém, porém, explicitarmos que essas situações-problema ocorrem em um processo dinâmico, no qual o sujeito ao resolver uma dada situação-problema específica, recorre aos problemas anteriores, a fim de que estes o auxiliem em seu objetivo.

Será traçada, nesta pesquisa, uma relação dialética entre a descrição dos processos de resolução de problemas através do Logo Tridimensional e os componentes funcionais dos processos cognitivos do sujeito diante de situações-problema propostas. A descrição será realizada através da análise de algumas situações-problema desenvolvidas pelo sujeito pesquisado, como se apresentam abaixo.

Apresentou-se a seguinte situação-problema para o sujeito da pesquisa: **Você seria capaz de representar formas espaciais com a Geometria da Tartaruga?**

Em um primeiro momento o sujeito refletiu e respondeu :
"Vou explorar os comandos básicos para ver se eu "enxergo" a tartaruga no espaço."

Desse modo o pesquisador, objetivando levar o sujeito ao entendimento das ações associadas aos comandos do sistema do Logo Tridimensional, isto é, fazer com que o sujeito compreenda que as possíveis combinações desses comandos que permitem que a tartaruga "saia" ou "entre" na tela, ou seja, que realize seus movimentos fora do plano da tela do monitor são – **cabecear / andar**, **rolar / virar / andar**, e **cabecear / rolar / virar / andar –**, teceu comentários a respeito da representação na tela do computador de figuras em que a tartaruga caminha na profundidade (em relação ao plano da tela) como se ela "entrasse" ou "saísse" da tela do monitor, e ressaltou que esse fato somente é possível no ambiente do Logo Tridimensional. Assim sendo, considerando que o sujeito já possuía uma experiência prévia com o Logo Bidimensional, o pesquisador incitou-o a transpor seus conhecimentos anteriores ao novo contexto associado ao micromundo da tartaruga no espaço.

Desse modo o sujeito escolheu como estratégia para iniciar seu trabalho com Logo Tridimensional a representação de figuras planas na tela do computador.

8.7.1.1) O Processo de Descrição de Objetos no Plano

Da forma como foi concebido o Logo Tridimensional, ou seja, como uma extensão do Logo Geométrico, é possível com o uso do Logo Tridimensional representar com idêntico sucesso as figuras geométricas representadas com Logo Bidimensional.

O sujeito, começando a explorar os comandos básicos do Logo Tridimensional, apresentou como solução a representação de vários polígonos regulares: o triângulo, o quadrado, o pentágono, o hexágono, o octógono, o eneágono, e o decágono. Nesse momento, como os processos computacionais envolvidos nas construções das representações dos polígonos acima são os mesmos, reproduzimos abaixo alguns deles, estando os demais representados no Anexo 2.

```
?ap  triangulo
aprenda  triangulo  :x
repita  3  [  andar  :x  virar  120  ]
fim

triangulo  aprendido
?tri  triangulo  30  imprima
```

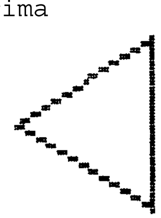

Figura 8.16 - Representação do triângulo construído com Logo Tridimensional

```
?ap  quadrado
aprenda  quadrado  :x
repita  4  [  andar  :x  virar  90  ]
fim
quadrado aprendido
?tri  quadrado  30  imprima
```

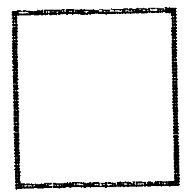

Figura 8.17 - Representação do quadrado construído com Logo Tridimensional

```
?ap penta
aprenda penta
repita 5 [ andar 30 virar 72 ]
fim
penta aprendido
?tri penta imprima
```

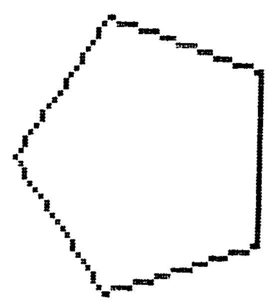

Figura 8.18 - Representação do pentágono construído com Logo Tridimensional

Essa figura, quando comparada com a Figura 5.9 (Pentágono construído com Logo Bidimensional pelo outro sujeito do Estudo de Caso), mostra-se de forma semelhante à imagem desta obtida em um espelho plano, isso porque foi usado um valor positivo como argumento do comando **virar** e, como já sabemos, com argumento positivo a tartaruga gira para a esquerda; enquanto que nos procedimentos utilizados na construção da Figura 5.9 foi utilizado o comando **pd** (para a direita). Assim, após o desenho do lado representado na vertical, as estratégias de giro da tartaruga tornaram-se opostas.

Constatado que o sujeito possuía conhecimentos que lhe permitiam construir a representação de figuras planas com Logo Tridimensional, o pesquisador propôs a ele que fosse representado um círculo[8]. Como resposta foram apresentados os procedimentos abaixo, com o resultado reproduzido na Figura 8.19.

---

[8] Nesse contexto não nos deteremos na distinção dos conceitos matemáticos relacionados com a circunferência e com o círculo, por não considerar-se relevante e nem tampouco necessário, pois vamos considerar nesse estudo somente o contorno da figura.

```
?ap circulot
aprenda circulot
repita 360 [ andar 0,4 virar 1]
fim

circulot aprendido
?tri circulot imprima
```

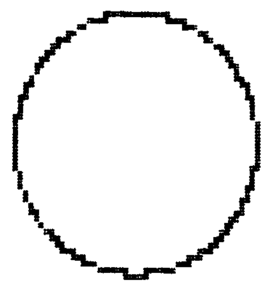

Figura 8.19 - Representação do círculo construído com o programa **circulot**

Constata-se nos procedimentos acima que a tartaruga partiu de sua posição inicial (no centro da tela e voltada para cima), e percorreu o círculo no sentido anti-horário. Em seus movimentos combinou o deslocamento (**andar 0,4**) com o giro à esquerda (**virar 1**).

Nesse momento, na representação do círculo constata-se a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Euclidiana**.

Observando que até este momento o sujeito vinha utilizando somente os comandos **andar** e **virar** na representação das figuras já apresentadas, o pesquisador propôs ao sujeito que incorporasse no programa **circulot** novas ações da tartaruga, através dos comandos **rolar** e **cabecear**.

Nesse sentido sugeriu que a tartaruga rolasse 90° antes de construir o círculo acima, e perguntou ao sujeito se ele podia prever qual seria o resultado, ao que ele respondeu: "*Certamente continuará a desenhar um círculo*". Assim apresentou o programa abaixo, o qual denominou **crolar1**, com o resultado reproduzido na Figura 8.20.

```
?ap crolar1
aprenda crolar1
rolar 90
circulot
fim
```

```
crolar1 aprendido
?tri crolar1 imprima
```


Figura 8.20 - Representação do círculo construído com o programa **crolar1**

Como primeira reação o sujeito comentou: *"Deveria ser um círculo, mas não deu certo!"*

Em realidade, a tartaruga desenhou um círculo no semi-plano vertical anterior perpendicular à tela do monitor. Através do comando **rolar 90**, a tartaruga, no centro da tela, posicionou-se de perfil, ainda direcionada para cima, e com sua carapaça voltada para a direita partiu para uma seqüência de deslocamentos **andar-virar**, construindo o círculo fora da tela, retornando ao ponto de partida (centro da tela) no final da construção. O resultado é visível ao observador na forma do segmento representado na Figura 8.20, segmento este que representa a projeção do círculo na tela.

O pesquisador, com o objetivo de despertar no usuário a interpretação de que a tartaruga desenhou uma figura fora do plano da tela, sugeriu então ao sujeito que ele "se imaginasse" olhando o resultado obtido na tela, a partir de um ponto à direita do monitor. Como resultado da análise mental desse processo, nota-se que o sujeito trabalhou com imagens transformadoras do objeto, o que lhe possibilitou dizer: *"Usando **rolar 90** virei o círculo deixando-o perpendicular à tela".* Como resultado dessa reflexão, ele descobriu que as ações combinadas dos comandos **rolar 90** e **virar 1**, propiciaram que a tartaruga escapasse do plano da tela para um plano perpendicular a esta, onde construiu o círculo.

Consideramos oportuno mencionar que a tartaruga realizaria sua ações no semi-plano vertical posterior à tela, caso o argumento do comando **rolar** permanecesse positivo e o argumento do comando **virar** fosse negativo; ou se o argumento do comando **rolar** fosse negativo e o argumento do comando **virar** fosse positivo.

Nesse momento, o pesquisador sugeriu ao sujeito que ele alterasse os procedimentos utilizados acima, rolando a tartaruga um ângulo menor que os 90º utilizados, e perguntou-lhe se seria possível inferir nesse momento que resultado seria obtido. Como resposta obteve: *"Um círculo deformado."*

Os procedimentos e resultados obtidos foram:

```
?ap crolar2
aprenda crolar2
rolar 60
circulot
fim

crolar2 aprendido
?tri crolar2 imprima
```

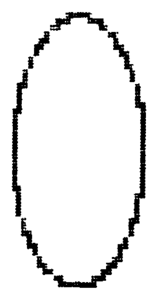

Figura 8.21 - Representação do círculo construído com o programa **crolar2**

Na figura acima, a combinação entre os comandos determina as ações da tartaruga: andar e virar ocorreram como que se ela estivesse em um plano fora da tela, a 60º com o plano desta, onde ela construiu um círculo. Em realidade ela, a tartaruga, estando no centro da tela, rolou 60º sobre seu lado direito, e posicionada para cima partiu para a construção do círculo andando e deslocando-se para a esquerda, finalizando a construção no centro da tela, ponto de partida. O resultado obtido e a representação do plano que contém o círculo estão reproduzidos na Figura 8.22, abaixo.

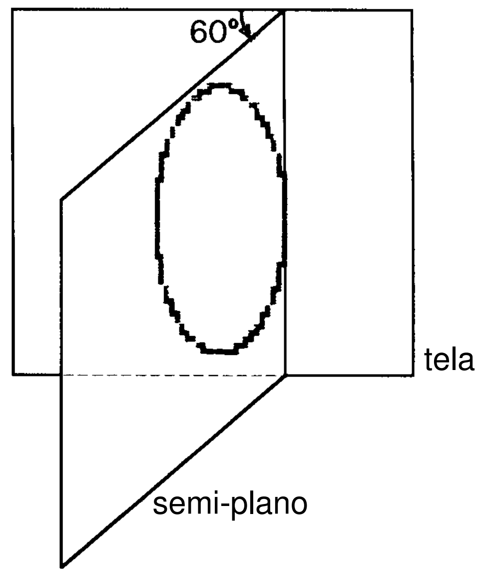

Figura 8.22 - Representação da projeção do círculo (construído com o programa **crolar2**) na tela e do semi-plano em que o círculo foi construído

No plano da tela, o resultado obtido, e reproduzido na Figura 8.21, é a representação de uma elipse, com seu eixo maior na vertical, e eixo menor na horizontal. Nota-se, nesse estudo, o conceito da elipse. Esse fato é importante porque com o Logo Bidimensional não se pode construir elipse, a não ser que se conheça sua equação[9], pois a elipse é uma transformação do círculo. No contexto do Logo Tridimensional, é possível ocorrer transformações de figuras, pois o que vemos na tela é a projeção da figura construída no plano onde as ações da tartaruga ocorrem. Além disso, nota-se nesse momento a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Analítica**.

Tendo constatado que estava trabalhando em um ambiente mais poderoso que aquele que conhecia (Logo Bidimensional), experimentou diferentes estratégias, representando, por exemplo, a elipse com seu eixo maior na horizontal, através do programa abaixo, e resultado reproduzido na Figura 8.23.

```
?ap elipseho
aprenda elipseho
cabecear 50
circulot
fim

elipseho aprendido
?tri elipseho imprima
```

[9] A equação da Elipse é expressa por: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, onde 2a é o eixo maior e 2b é o eixo menor.

Figura 8.23 - Representação da elipse com o eixo maior na horizontal construído com o programa **elipseho**

Com os procedimentos acima, a tartaruga, inicialmente no centro da tela e voltada para cima, escapou desta, quando cabeceou 50º para dentro da tela do computador, e posicionou-se na interseção do plano da tela com o semi-plano posterior à tela. Esse posicionamento determinou um ângulo de 50º entre o plano da tela e o semi-plano posterior à tela, no qual a tartaruga iniciaria seu traçado. Através dos comandos **andar 0,4** e **virar 1**, construiu o semi-círculo superior no sentido anti-horário (**virar 1**). Cruzou a reta determinada pela interseção dos planos, manteve os deslocamentos, no semi-plano anterior construindo o semicírculo inferior, finalizando a construção do círculo no centro da tela, posição de onde partiu. O resultado obtido e a representação do plano que contém o círculo, estão reproduzidos na Figura 8.24.

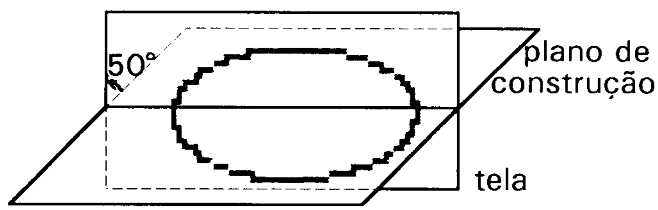

Figura 8.24 - Representação da projeção do círculo (construído com o programa **crolar2**) na tela e do plano em que o círculo foi construído

Nesse momento, o pesquisador, objetivando que o sujeito entendesse que seria possível obter o mesmo resultado na tela usando diferentes combinações dos comandos, incitou o sujeito a construir uma nova estratégia que lhe possibilitasse o mesmo resultado. Dessa forma, o sujeito explorou várias combinações entre os comandos, e apresentou a estratégia na qual ele substituiu o comando **virar** no programa **circulot**, pelo comando **cabecear**, apresentando o programa computacional **circuloc** abaixo.

```
?ap circuloc
aprenda circuloc
repita 360 [ andar 0,4 cabecear 1 ]
fim


circuloc aprendido
?tri circuloc imprima
```

Como resultado foi apresentada a seguinte figura:

Figura 8.25 - Representação do círculo construído com o programa **circuloc**

O sujeito comentou: *"Deveria ser possível, mas aconteceu como no caso anterior, não deu certo!"*

Em realidade, a tartaruga desenhou um círculo num plano perpendicular à tela do monitor, no semi-plano posterior. A tartaruga partiu do centro da tela, com sua cabeça voltada para cima (90º) iniciou uma seqüência de deslocamentos andar-cabecear, desenhando o círculo. A posição final da tartaruga é a mesma da inicial. O resultado é visível ao observador na forma do segmento representado na Figura 8.25, segmento este que representa a projeção do círculo na tela.

O sujeito associou o resultado acima com a outra situação problema (Figura 8.20), refletiu e dessa análise de seus procedimentos atuais e anteriores vislumbrou a solução para seu problema (construção da representação do círculo). Reestruturou o programa anterior **ciculoc** com a incorporação do comando **rolar,** apresentando o programa **circcaro** abaixo:

```
?ap circcaro
aprenda circcaro
rolar 90
circuloc
fim

circcaro aprendido
?tri circcaro imprima
```

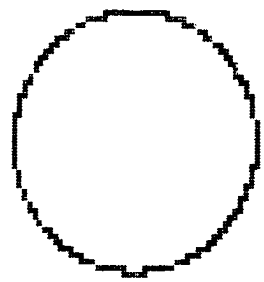

Figura 8.26 - Representação do círculo construído com o programa **circcaro**

Nesse momento, com esse novo programa **circcaro**, fica pois evidenciada uma nova estratégia de construção do círculo, a qual pode ser aplicada a outras figuras planas. Nessa estratégia utilizou-se o comando **andar**, e a associação dos comandos **rolar** e **cabecear**. As ações da tartaruga ordenadas pelo sujeito no programa acima envolveram os seguintes procedimentos: inicialmente a tartaruga, posicionada no centro da tela, rolou 90º sobre seu lado direito, ficando de perfil. Nessa posição iniciou seus deslocamentos através do comando **andar**, seguido a cada passo de deslocamento angular através do comando **cabecear**. Como resultado da combinação dessas ações, a tartaruga passou a deslocar-se no plano da tela, desenhando o círculo. Durante a construção do círculo, a tartaruga esteve do lado de fora da figura desenhada, percorrendo-a no sentido anti-horário.

Partindo desse resultado, e objetivando construir uma elipse e explorar o comando **rolar,** o sujeito variou o argumento do comando **rolar**, ordenando à tartaruga que rolasse um ângulo de 45º.

Os procedimentos e resultados obtidos foram:

```
?ap circroca
aprenda circroca
rolar 45
circuloc
fim

circroca aprendido
?tri circroca imprima
```

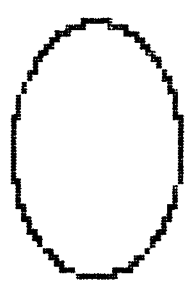

Figura 8.27 - Representação do círculo construído com o programa **circroca**

A figura acima constitui-se na representação de uma elipse com seu eixo maior na vertical, e o eixo menor na horizontal. As ações **andar** e **cabecear** da tartaruga ocorreram como que se ela estivesse em um plano a 45º do plano da tela, onde a tartaruga construiu um círculo. O resultado obtido e a representação do plano que contém o círculo estão reproduzidos na Figura 8.28, abaixo.

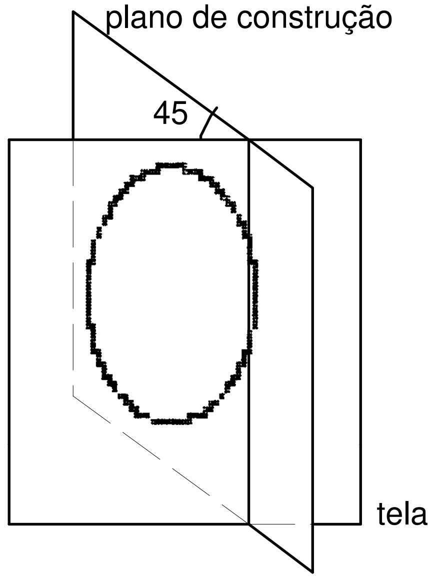

Figura 8.28 - Representação da projeção do círculo (construído com o programa **circroca**) na tela e do plano em que o círculo foi construído

Desse modo, o sujeito entendendo que somente seria possível obter uma elipse se seu círculo fosse construído em um plano que intersecionasse o plano da tela com um ângulo diferente de 90º, ele generalizou sua estratégia através do programa **elipse** como se segue, ou seja, nota-se na descrição dos procedimentos abaixo que o sujeito criou um programa genérico para representar qualquer elipse. Deve-se ressaltar, contudo, que esta não é a única generalização possível, pois podemos obter mais de uma combinação dos três comandos de giro **cabecear**, **rolar** e **virar** que, associados ao comando **andar,** represente uma elipse (exemplo de outra estratégia: combinar o programa **circulot** com os comandos **rolar** e **virar**). Fatos como esses que tornam o Logo Tridimensional uma ferramenta rica e poderosa, disponível a seu usuário, e essencial, se for bem mediada, no processo de construção de conceitos geométricos.

```
?ap elipse
aprenda elipse :x :y :z
virar :y
rolar :z
repita 360 [ andar :x cabecear 1 ]
fim
```

```
elipse aprendida
```

Algumas figuras obtidas a partir desse programa seguem abaixo:

```
?tri elipse 0,4 90 50 imprima
```

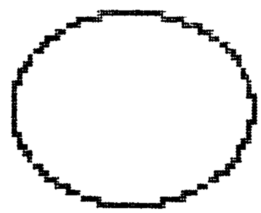

Figura 8.29 - Representação da elipse com o eixo maior na horizontal construída com o programa **elipse**

```
?tri elipse 0,4 45 30  imprima
```

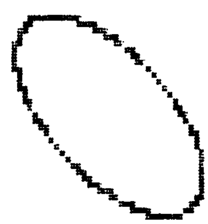

Figura 8.30 - Representação de uma elipse genérica construída com o programa **elipse**

Dessa forma, foi possível ao sujeito do Estudo de Caso, com sua criatividade, e a utilização adequada dos comandos **andar, cabecear**, **rolar** e **virar**, a obtenção de resultados corretos na tarefa de representar figuras planas com a utilização do Logo Tridimensional. Nesse processo, quando criou uma estratégia que lhe possibilitasse a construção da elipse, evidenciou-se o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Analítica**. Existe porém uma diferença de procedimentos entre cada uma das estratégias utilizadas, cuja interpretação e entendimento devem ser parte do processo mental utilizado pelo sujeito. O pesquisador explorou uma dessas diferenças quando solicitou ao sujeito uma análise cuidadosa nos procedimentos que produziram as representações do contorno do círculo (Figuras 8.19 e 8.26). Ambas representam um círculo, e são semelhantes. Desse modo o sujeito, utilizando uma folha de papel, explicou essa diferença: *"Ao desenhar o círculo com os comandos **andar** e **virar** a tartaruga* *percorre a linha da figura no plano, como se fosse um compasso".* Fazendo uso de sua mão para descrever os movimentos da tartaruga, completou: *"Ando por cima da folha onde a figura está desenhada."*, deslizando sua mão sobre a folha de papel, acompanhando a borda da figura. Após recortar o círculo e contorná-lo com a palma de sua mão direita, observou: *"Quando uso os comandos* ***andar*** *e* ***cabecear*** *a tartaruga percorre o círculo por fora".*

Ficou ressaltada nos procedimentos acima a diferença entre a representação de uma figura no plano e a existência (objeto físico manipulável) de uma figura. Enquanto a representação de uma figura é o desenho desta sobre uma superfície, ao recortá-la passamos para a existência dessa figura, que, apesar da ínfima espessura do papel, pode ser manuseada. Pode-se até não considerar a terceira dimensão representada pela espessura do papel, mas nela é possível o deslocamento da tartaruga.

Observamos, pelos recursos utilizados durante a análise acima, a compreensão e assimilação pelo sujeito, da "sintonicidade corporal", conceito esse já explicitado no início deste capítulo.

Nessa exploração do uso do Logo Tridimensional na construção de figuras geométricas planas, vários polígonos foram construídos pelo sujeito, não só utilizando os comandos **andar** e **virar**, mas também utilizando combinações dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**. Pode-se inferir que o sujeito compreendeu a integração dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**, como um todo.

8.7.1.2) O Processo de Descrição de Objetos no Espaço

Nesse momento, o pesquisador, objetivando que o sujeito utilizasse os conceitos anteriores sobre o Sistema do Logo Bidimensional e que ele aplicasse os conhecimentos adquiridos do Logo Tridimensional, lançou mão da seguinte questão: Você é capaz de representar a construção de um cubo com o Logo Bidimensional e com o Logo Tridimensional?

Assim sendo o sujeito respondeu que com o Logo Bidimensional seria possível representar a construção de um cubo considerando no programa computacional a existência da terceira dimensão, a qual ele incluiria em seus procedimentos; e que com o Logo Tridimensional, tentaria transpor o que aprendeu com o círculo. Dessa forma disse:

"Acredito ser possível construir um cubo usando os recursos que conheço do Logo Bidimensional, pois aparentemente não faz diferença se o fizer com o Logo Tridimensional."

8.7.1.2.1) Cubo Construído com Logo Bidimensional

Utilizando os conhecimentos anteriores de Logo Bidimensional, e refletindo em termos da tarefa de construir um cubo, o sujeito construiu o programa computacional **cubobi1** abaixo descrito, cujo resultado obtido está representado na Figura 8.31.

```
?ap cubobi1
aprenda cubobi1
repita 4 [ pf 30 pd 90 ]
pd 45 pf 20 pe 45
repita 4 [ pf 30 pd 90 ]
pf 30 pe 135 pf 20
pe 135 pf 30 pe 45 pf 20
pd 135 pf 30 pd 45 pf 20
fim

cubobi1 aprendido
?cubobi1 imprima
```

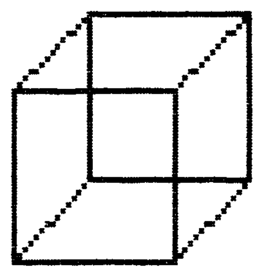

Figura 8.31 - Representação do cubo construído com o programa **cubobi1**

Uma análise atenta dos procedimentos acima nos mostra que as faces anterior e posterior foram representadas pelo sujeito em sua forma real (quadrado), transformando as demais faces do cubo de acordo com as regras da projeção paralela, obtendo assim paralelogramos. Desse modo, constata-se que a representação do cubo não é equivalente ao objeto concreto, pois sabe-se que a representação da face anterior assume a forma de um quadrado somente quando o raio principal, como definido no Item 8.5 e representado na Figura 8.8, passa pelo centro, e de forma perpendicular. Nesse caso a representação da face (quadrado) deveria ser a representação do cubo pois as demais faces estão por essa encoberta, caso não evidenciado no procedimento do sujeito.

Assim sendo o pesquisador solicitou ao sujeito que comparasse a figura obtida (Figura 8.31) com um cubo de madeira. Como resultado da comparação efetuada pela manipulação do sólido em diferentes posições, com o cubo representado na tela, sentiu necessidade de reestruturar seus procedimentos pois percebeu a distorção da visualização na representação dos dois quadrados desenhados na Figura 8.31, e comentou: "*Dependendo de como eu enxergo esse cubo de madeira, só dá para eu ver um quadrado,* *dois ou três paralelogramos."* Assim sendo apresentou o programa **cubobi2**, expresso pelos procedimentos abaixo, e representado na Figura 8.32.

Procedimentos:

```
?ap cubobi2
aprenda cubobi2 :x
pe 20
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pe 120 pf :x pd 120
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pf :x pd 60 pf :x
pe 130 pf :x
pe 50 pf :x
pe 60 pf :x pe 120 pf :x
fim

cubobi2 aprendido
?cubobi2  30  imprima
```

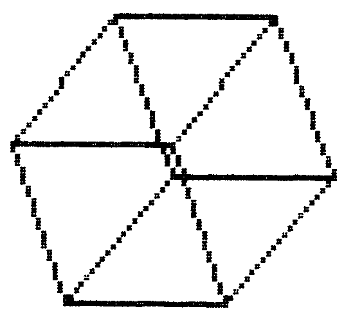

Figura 8.32 - Representação do cubo construído com o programa **cubobi2**

Ressalta-se que essa representação está mais próxima do real do que a obtida na primeira estratégia utilizada (Figura 8.31), pois essa está de acordo com as regras da perspectiva paralela ou cavaleira.

Os conceitos matemáticos inerentes à representação da construção desse cubo, entre outros são:

- Conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares;

- Conceitos de polígonos;

- Conceitos de rotação e translação.

Nesse momento, o pesquisador incitou o sujeito a analisar suas estratégias, perguntando-lhe: e com o Logo Tridimensional você obteria o mesmo resultado?

8.7.1.2.2) Cubo Construído com Logo Tridimensional

O sujeito, então, refletiu sobre sua programação e criou outro programa chamado **cubotri1**, descrito pelos procedimentos abaixo, e representado na Figura 8.33.

```
?ap cubotri1
aprenda cubotri1 :x :y :z :w
rolar :y
cabecear :z
virar :w
repita 4 [ quatri :x andar :x cabecear 90 ]
fim

cubotri1 aprendido

?ap quatri
aprenda quatri :x
repita 4 [ andar :x virar :90 ]
fim

quatri aprendido
```

no qual:

x representa o comprimento das arestas do cubo,

y representa o ângulo desejado para o cubo rolar,

z representa o ângulo desejado para o cubo cabecear,

w representa o ângulo desejado para o cubo virar.

Assim sendo, o sujeito atribuiu os seguintes valores às variáveis do programa cubotri1, a fim de representar a Figura 8.33, disposta abaixo:

```
?tri cubotri1 30 30 -30 0 imprima
```

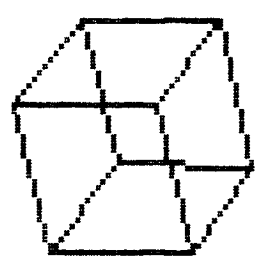

Figura 8.33 - Representação do cubo construído com o programa **cubotri1**

Nesse momento o sujeito comentou: *"Não disse que nos dois sistemas eu conseguiria produzir o mesmo desenho?"*

Na verdade, apesar das duas figuras (Figuras 8.32 e 8.33) aparentarem ser semelhantes, sabe-se que o fator diferenciador entre ambas, além de constituir-se pelos procedimentos computacionais relativos ao Logo Bidimensional e Logo Tridimensional, respectivamente, apresentam principalmente conceitos matemáticos diferentes, pois na figura obtida com Logo Bidimensional usou-se projeção paralela, expressa nos paralelogramos obtidos enquanto que, na figura obtida com Logo Tridimensional, evidencia-se a projeção cônica, uma vez que esta é inerente ao sistema do Logo Tridimensional. Além disso, apesar da diferença ser quase imperceptível, sabe-se que a figura obtida com Logo Tridimensional não é composta de paralelogramos, porém os conceitos matemáticos intrínsecos apresentam-se corretamente.

Nota-se que o sujeito, apesar de estar consciente da necessidade de representar o cubo em um sistema diferente (Logo Tridimensional) e mais complexo, ainda não percebeu que o resultado de seu programa é diferente do anterior. Nota-se ainda que está preso ao aspecto figurativo e também à planificação geral de sua ação (fazer um cubo), não retoma os observáveis do objeto, ou seja, as particularidades do cubo: seis faces quadrangulares, que lhe dariam a oportunidade de verificar que as Figuras 8.32 e 8.33, apesar de aparentemente serem iguais, apresentam uma diferença, devido à conicidade inerente à perspectiva cônica, evidenciada na Figura 8.33. Trabalha mais sobre as intenções (fazer um cubo) do que sobre os aspectos causais (particularidades do cubo) de sua representação. Não coordena portanto as particularidades inerentes ao cubo.

Constata-se assim que com a utilização do Logo Bidimensional, à primeira vista, pode-se obter na tela do computador, os mesmos resultados que se consegue através do Logo Tridimensional. Por exemplo, pode-se definir procedimentos usando o Logo Bidimensional, para que se produza o desenho que representa um cubo. Ressaltamos entretanto que nessa tarefa estarão envolvidos processos de representação que, para o usuário despreparado que não conhece as regras da projeção cônica intrínseca à sua representação, poderão significar uma barreira intransponível. Estamos nos referindo principalmente à utilização da projeção cônica e ao fato de existir no real a possibilidade de "enxergarmos" os objetos com mais de um ponto de fuga, como representado na Figura 8.12. Nos procedimentos mais usuais deparamo-nos com simplificações que trazem como conseqüência distorções entre a imagem do real e a representação assim obtida, sem contudo comprometer a "percepção" do objeto representado, fato esse evidenciado em um dos projetos desenvolvidos pelo sujeito de nossa pesquisa (representação do cubo construído com Logo Bidimensional).

Nesse sentido, ressalta-se a potencialidade do Logo Tridimensional que possui, inerente aos seus procedimentos, as regras da projeção cônica.

8.7.1.2.2.1) Exploração do Programa cubotri1

Nesse momento, o pesquisador pediu ao sujeito para que atribuísse às variáveis do programa **cubotri1** novos parâmetros, objetivando explorar o programa do cubo elaborado pelo sujeito. Desse modo, o sujeito executou o seu programa com diferentes valores, obtendo os resultados representados nas figuras abaixo:

1º- `?tri cubotri1 30 30 50 30 imprima`

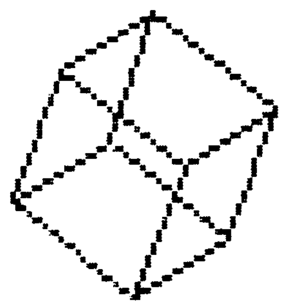

Figura 8.34 - Representação de um cubo construído com o programa **cubotri1**

2º- `?tri cubotri1 30 -30 45 -30 imprima`

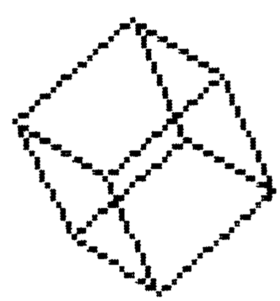

Figura 8.35 - Representação de um cubo construído com o programa **cubotri1**

3º- `?tri cubotri1 30 0 0 0 imprima`

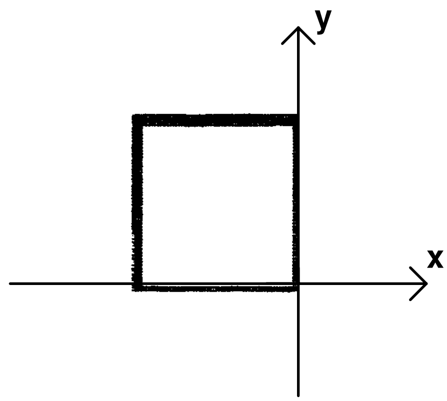

Figura 8.36 - Representação de um cubo construído com o programa **cubotri1**

Uma análise inicial dessas três figuras do cubo apresentadas, juntamente com os procedimentos que as geraram, nos mostra que:

Na Figura 8.36, a última apresentada, temos o cubo visto de frente. Sua representação é um quadrado porque com os parâmetros de entrada que foram atribuídos ao programa **casatri1**, o cubo obtido é visto a partir de um ponto contido no raio principal (como consta no comentário sobre a interpretação da Figura 8.31). Nesse momento, o sujeito percebeu que a representação acima obtida coincidia com uma das posições na qual ele visualizou o cubo de madeira manipulável, isto é, enxergava somente uma das faces (face frontal). Convém ressaltar que as linhas mais espessas dessa representação refletem a existência da projeção cônica, isto é, ao desenhar a face posterior, essa se apresenta na tela com sua dimensão reduzida de acordo com as regras da projeção cônica. Tal fato não ocorre na aresta horizontal inferior e na aresta vertical da direita, pois essas coincidem com os eixos x e y, da tela (Figura 8.2), e o vértice inferior direito coincide com o centro da tela, que, nesse caso, coincide com o ponto de fuga da projeção cônica.

Na Figura 8.34, constata-se que tem-se a representação de um cubo como se ele fosse transparente e suas arestas visíveis. Caso a representação fosse a de um cubo (sólido), esse seria visto como a seguir:

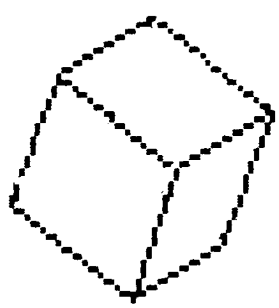

Figura 8.37 - Representação do cubo da Figura 8.34 visto como um sólido

Na Figura 8.35, assim como no caso anterior, caso a representação também fosse a de um cubo (sólido), o veríamos como:

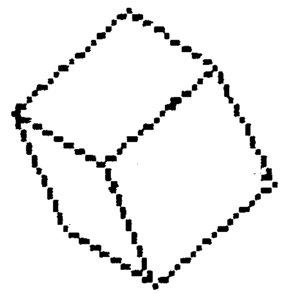

Figura 8.38 - Representação do cubo da Figura 8.35 visto como um sólido

Entretanto, quando processa-se uma análise mais técnica da descrição do programa **cubotri1** elaborado pelo sujeito, observa-se que ele não representa o cubo em sua forma real (sólido), mas sim como se o cubo fosse uma caixa sem tampa e sem fundo, apesar de na tela ter sido representada uma imagem semelhante à de um cubo. Isso é possível pois o que vemos são as representações das arestas do cubo. Para salientar esse fato, o pesquisador solicitou ao sujeito que pintasse a Figura 8.35. Fato interessante ocorreu quando o sujeito mencionou: "*Não dá pois a tinta escorre pela tela"*. A partir do instante em que o sujeito constatou que, na representação do cubo com o programa **cubotri1**, este não representava o cubo de maneira completa, pois o cubo não tinha tampas, o sujeito sentiu a necessidade de completar a descrição do sólido, criando um novo programa.

8.7.1.2.3) Construção do Cubo com Tampas

O sujeito, refletindo em termos dos procedimentos necessários à construção do cubo com tampas, apresentou o programa **cubotri2** abaixo, com resultado reproduzido na Figura 8.39.

Procedimentos:

```
?ap cubotri2
aprenda cubotri2 :x :y :z :w
cubotri1 :x :y :z :w
tampa1 :x
tampa2 :x
fim

cubotri2 aprendido

?ap tampa1
aprenda tampa1 :x
```

```
rolar 90
repita 4 [ andar :x  virar -90 ]
fim

tampa1 aprendido

?ap tampa2 :x
aprenda tampa2 :x
un virar 90 cabecear 90 andar :x cabecear 90 ul
repita 4 [ andar :x  virar -90 ]
fim

tampa2 aprendido
```

no qual,

x representa a dimensão das arestas expressa em passos da tartaruga,

y representa o ângulo em graus que se deseja rolar o cubo,

z representa o ângulo em graus que se deseja cabecear o cubo,

w representa o ângulo em graus que se deseja virar o cubo.

Como variáveis de entrada o sujeito forneceu os valores abaixo, com o resultado reproduzido na Figura 8.39:

```
?tri cubotri2 30 30 50 30 imprima
```

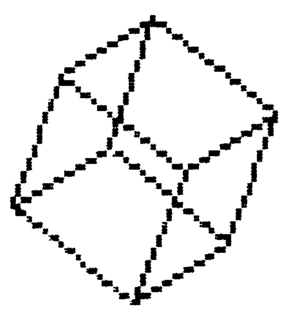

Figura 8.39 - Representação do cubo "com tampas" construído com o programa **cubotri2**

Comparando-se a Figura 8.39 com a Figura 8.34 vemos que elas são idênticas, apesar de representarem objetos diferentes, cabendo pois ao usuário sua correta interpretação, na qual devem ser levados em conta os procedimentos usados em sua descrição. Assim sendo, o que define um objeto é a descrição do programa e não a imagem produzida.

Nesse momento, pode-se inferir que o sujeito realmente entendeu a representação do cubo, compreendendo seu significado, ou seja, para realmente representar um cubo percebeu que não basta somente a representação das arestas das faces laterais, mas é necessária a construção de sua tampa e de seu fundo, que expressam sua característica como sólido geométrico, e não como figura espacial. Nota-se nesse momento o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Espacial.**

8.7.1.2.4) Análise dos Procedimentos Utilizados na Construção do Cubo com Logo Tridimensional

O trabalho com Logo Tridimensional concentra-se não na representação plana do objeto na tela, mas na descrição espacial do objeto. Dessa forma, o desenho de um cubo é produzido através da descrição dos movimentos (no espaço) que a tartaruga deve fazer para percorrer as arestas das seis faces que compõem o cubo, como ilustrado na Figura 8.39 acima.

Essa descrição geométrica do objeto lhe é inerente, no sentido de que ela não faz referência a nenhum elemento que lhe é externo. Esse fato não é evidenciado no ensino tradicional da Geometria, no qual a descrição geométrica é externa às figuras, no sentido de que primeiramente o indivíduo, realizando a tarefa de representar um sólido qualquer, lança mão de fórmulas e algoritmos, leis e teoremas pertencentes à Geometria, para conseguir o seu intuito. Nesse sentido, afirmamos que é justamente a Geometria que, se por um lado, se relaciona à intuição e conduz ao descobrimento, por outro lado possibilita a conjunção entre o mundo físico e a matemática, e é esse o objetivo da utilização do Logo Tridimensional, ou seja, integrar as figuras projetadas no mundo real, através da descrição espacial dos objetos e de sua visualização no plano.

Nesse sentido Castelnuovo (1989) ao referir-se à conjunção entre a Matemática e o meio físico em que vivemos, postula a importância do ensino efetivo e do significado físico da Geometria, através de Resolução de Problemas, como já foi explorado no Capítulo 5 desta dissertação.

O fato da descrição geométrica ser intrínseca ao sistema do Logo Tridimensional possibilita ao usuário trabalhar com conceitos matemáticos como: retas paralelas, retas perpendiculares, conceitos sobre polígonos, poliedros, propriedades das figuras planas, entre outras, sem a demasiada axiomatização das fórmulas, algoritmos prontos e a grande abstração[10] da Matemática e da Geometria.

Pode-se inferir, nesse contexto, que o usuário do Logo Tridimensional usa conhecimentos matemáticos e geométricos intuitivos e, por meio da arquitetura matemática que é inerente à Geometria da Tartaruga, vai abstraindo e construindo os conhecimentos "aparentemente abstratos" de uma maneira simples e concisa.

---

[10] Convém recorrermos à etimologia da palavra "abstracto", derivado do latim "extractu", o qual tem um sentido dinâmico de extrair do concreto.

Ao se utilizar dos recursos computacionais do Logo Tridimensional, observa-se no comportamento do sujeito a presença de reações típicas que a teoria de Piaget denomina **abstrações**. Quando, por exemplo, o sujeito manipula um sólido geométrico (no caso, o cubo) e mesmo o identifica na tela, através de sua forma, esse conhecimento é retirado diretamente do objeto, isto é, a sua representação é fruto de uma **abstração empírica**.

Ao modificar as posições do cubo, manipulando-o, descobre, por abstração pseudo-empírica que todas as faces não se mostram visíveis num mesmo momento ao sujeito. Essa dedução é feita a partir do que o sujeito retira diretamente de sua ação sobre o objeto: daí configurar um exemplo desse tipo de abstração. Trata-se, de fato, de uma reflexão, porém retirada durante as explorações do real (manipulação do cubo de madeira).

Nas **abstrações reflexivas**, o conhecimento provém das coordenações das ações do sujeito sobre o objeto. No caso do sujeito de nossa pesquisa concluir que não podia pintar o cubo pois a tinta escorria (Figura 8.35), constata-se que esse comportamento é próprio das **abstrações reflexivas**, em que a dedução se processa no momento em que o sujeito percebe a conjugação de fatores necessários à solução de seu problema (pintar o cubo).

As **abstrações refletidas** estão representadas em todos os momentos em que o sujeito explicitamente formaliza suas idéias sob a forma de procedimentos que compõem seus programas, desde os mais simples (Figura 8.31) ao programa final, que contém a descrição geométrica mais consistente com a solução desejada – construir um sólido geométrico, o cubo, em um sistema tridimensional (Figura 8.39).

Pode-se constatar que o desenho de figuras geométricas no micromundo do Logo Bidimensional implica na coordenação dos movimentos de deslocamento e de giro. O mesmo ocorre no micromundo do Logo Tridimensional. Porém, no sistema do Logo Bidimensional, essa coordenação se processa através de dois eixos coordenados representados no sistema cartesiano (vertical e horizontal), enquanto que com o Logo Tridimensional, acresce-se mais um eixo: o perpendicular à tela do monitor, como já ilustrado na Figura 8.2.

Decorre dessa forma, que o desenho de um sólido, sem o recurso tecnológico da holografia, implica em um tipo de raciocínio mais complexo para o usuário, o qual terá que considerar movimentos da Tartaruga que não são os mesmos utilizados no Logo Bidimensional, pois o Logo Tridimensional envolve também a noção de profundidade, enquanto que no plano (Logo Bidimensional) só se consideram duas dimensões: a altura e a largura.

8.7.1.3) Exploração da Projeção Cônica

O pesquisador, objetivando que o sujeito entendesse a projeção cônica intrínseca ao Sistema do Logo Tridimensional, incitou-o a construir um cubo através do programa

cubotri2, em diferentes planos: primeiramente em um plano atrás da tela, em um segundo momento no plano da tela, e finalmente em um plano anterior à tela.

Para tanto, o sujeito refletiu sobre o seu programa **cubotri2**, e a partir daí ordenou que a tartaruga se posicionasse em um ponto correspondente ao centro da tela, direcionada para cima, em um plano paralelo ao plano da tela, 200 passos atrás deste, onde ela representaria o cubo.

O sujeito então elaborou os seguintes procedimentos computacionais:

```
?ap cubot1
aprenda cubot1 :x :y :z :w
un cabecear 90
andar 200
cabecear -90 ul
cubotri2 :x :y :z :w
fim


cubot1 aprendido
```

no qual as variáveis de entrada são aquelas do programa **cubotri2** já definidas.

O sujeito atribuiu as seguintes variáveis de entrada:

```
?tri cubot1 30 -30 -30 0 imprima
```

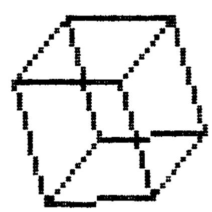

Figura 8.40 - Representação do cubo construído com o programa **cubot1** num plano posterior à tela

Em um segundo momento representou o mesmo cubo no plano da tela, usando o mesmo programa computacional **cubotri2** anteriormente apresentado:

```
?tri cubotri2 30 -30 -30 0 imprima
```

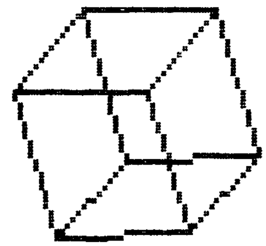

Figura 8.41 - Representação do cubo construído com o programa **cubotri2** no plano da tela

Finalmente, através dos procedimentos abaixo, o sujeito representou o mesmo cubo em um plano paralelo, e anterior ao plano da tela, porém 200 passos distante desse, obtendo o resultado representado na Figura 8.42, e descrito pelo procedimento abaixo:

```
?ap cubot2
aprenda cubot2 :x :y :z :w
un cabecear -90
andar 200
cabecear 90 ul
cubotri2 :x :y :z :w
fim

?cubot2 aprendido
```

no qual as variáveis de entrada são aquelas já definidas no programa **cubotri2**.

```
?tri cubot2 30 -30 -30 0 imprima
```

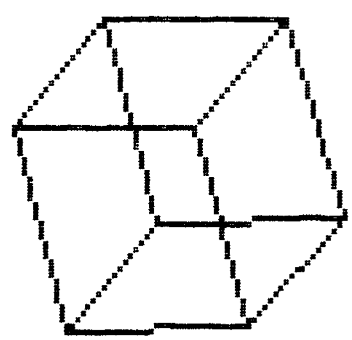

Figura 8.42 - Representação do cubo construído com o programa **cubot2** no plano anterior à tela

Analisando os três prismas representados, observam-se os efeitos da projeção cônica, com o ponto de fuga em um ponto atrás da tela. Com o objetivo de visualizar o todo, apresenta-se a Figura 8.43 abaixo. Observa-se que o ponto de fuga foi deslocado do centro da tela pela ação combinada dos comandos **rolar -30 cabecear -30**, no programa **cubotri2**.

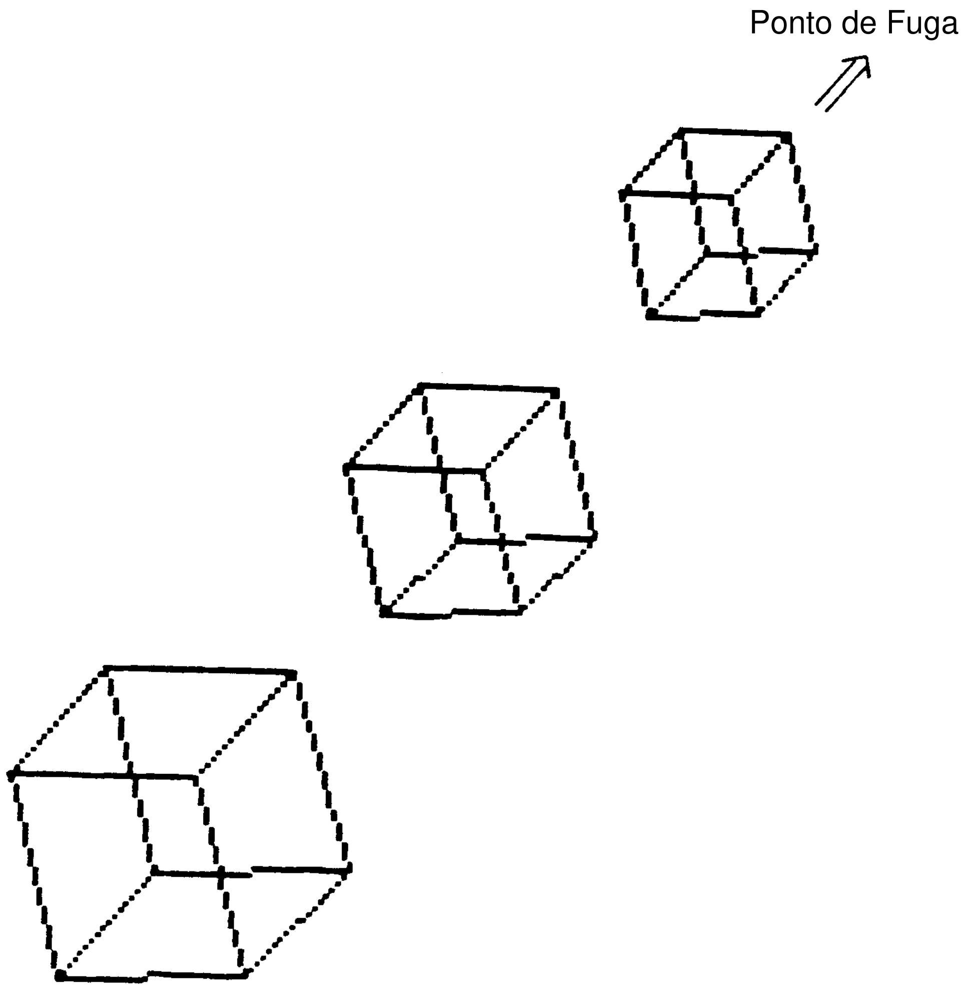

Figura 8.43 - Representação dos cubos construídos em três planos diferentes.

Nesse momento ao analisar-se a representação do cubo em três planos paralelos, evidenciam-se as regras da projeção cônica com a combinação das três figuras convergindo para o mesmo ponto de fuga. Esse é um fato importante pois, pela perspectiva cônica ser inerente ao sistema do Logo Tridimensional, expressa-se a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Projetiva**, fato esse que poderia ser explorado sob vários aspectos em aulas sobre Geometria.

Um outro projeto elaborado pelo sujeito que nos parece pertinente elucidar nesse estudo constitui-se na representação da construção de uma casa, como se segue.

8.7.1.4) Construção da Representação da Casa

Uma vez que o sujeito já dominava os conhecimentos do Logo Tridimensional a ponto de possibilitar-lhe a construção da representação do cubo na tela do computador, o pesquisador solicitou ao sujeito que esse realizasse uma nova tarefa, com um grau de complexidade um pouco além daquele exigido na construção da representação do cubo, pois nesse novo problema o sujeito deveria coordenar a integração de mais de um sólido. Assim perguntou ao sujeito se ele seria capaz de representar na tela uma casa, mas que ele a construísse utilizando o micromundo do Logo Bidimensional, e também o micromundo do Logo Tridimensional. Nesse momento, o pesquisador incitou-o a coordenar mais de um sólido em um mesmo programa, a fim de representar uma casa que seria composta pela integração desses.

8.7.1.4.1) Construção da Casa com Logo Bidimensional

Assim o sujeito, inicialmente trabalhando no ambiente bidimensional, apresentou as seguintes estratégias abaixo relacionadas, e resultado reproduzido na Figura 8.44.

```
?ap casabi
aprenda casabi :x
corpob :x
telhadob :x
fim

?ap corpob
aprenda corpob :x
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pe 120 pf :x * 2 pd 120
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pf :x pd 60 pf :x * 2
pe 130 pf :x
pe 50 pf :x * 2
pe 60 pf :x pe 120 pf :x * 2
fim

?ap telhadob
aprenda telhadob :x
pe 60 pf :x
pd 40 pf :x * 0,75
pd 115 pf :x * 1,05
pd 85 pf :x *2
pd 95 pf :x * 1,05
pe 115 pf :x * 0,75
pt :x * 0,75 pe 160
pf :x * 2
fim

casabi aprendido
```

no qual **x** representa o número de passos associados às dimensões da casa.

```
?tat casabi 30 imprima
```

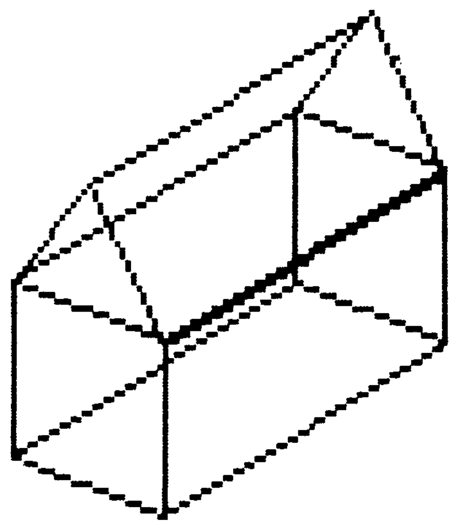

Figura 8.44 - Representação da casa construída com Logo Bidimensional

Da análise da figura acima, juntamente com os procedimentos utilizados na representação da sua construção, nota-se que o sujeito construiu o corpo da casa, seguido da construção do telhado. Na casa assim construída e representada na tela, o ponto de observação do qual a casa é vista, está a esquerda da tela do computador, e pode ser explicado pelos procedimentos utilizados no programa **casabi**. Como o sujeito definiu que a frente da casa está à esquerda, essa é visível ao observador, bem como a lateral direita (à qual também nos referiremos como lateral anterior) e a parte do telhado que faceia com essa lateral (à qual nos referiremos como a parte anterior do telhado, ou água anterior).

Na construção do corpo, o sujeito representou inicialmente a parte do fundo. Para tal, partiu do canto inferior direito, que corresponde ao centro da tela, e a tartaruga, inicialmente voltada para cima, percorreu o fundo do corpo no sentido anti-horário. Em seguida ela traçou a interseção da lateral anterior com o piso, o que a levou ao canto[11] inferior direito da frente. Daí a tartaruga partiu para a representação da parte do corpo correspondente à frente da casa, no sentido anti-horário, segundo a mesma estratégia utilizada na construção do fundo. A partir desse ponto deslocou-se para o canto superior e representou a interseção da lateral anterior com o forro, finalizando a representação da lateral anterior. Finalmente concluiu o corpo, representando a interseção da lateral posterior com o forro, seguida da representação da interseção da lateral posterior com o piso.

---

[11] Usaremos o termo canto(s) ao nos referir aos vértices dos polígonos e poliedros representados na tela, por ser esse o termo mais apropriado quando o relacionamos com a casa.

Para a construção do telhado, o sujeito partiu do canto superior esquerdo do fundo, e representou as duas extremidades oblíquas do telhado, chegando ao canto superior direito do fundo. Desse ponto deslocou-se sobre a interseção da lateral anterior com o forro (linha mais espessa na Figura 8.44) até o canto superior direito da frente da casa. Nesse momento a tartaruga construiu as extremidades oblíquas da parte frontal do telhado, chegando ao canto superior esquerdo. Para finalizar a construção deste, foi construída a cumeeira, no sentido frente - fundo.

Na construção da casa como acima, foram utilizadas as regras da projeção paralela ou cavaleira, sendo que esse tópico pode ser trabalhado como uma das conexões entre a **Geometria da Tartaruga** e a **Geometria Projetiva**.

Nos procedimentos acima, não fica caracterizada de maneira real a construção da casa, embora o resultado na tela nos permita visualizá-la. Por exemplo não há procedimentos que caracterizem a construção da frente e do fundo da casa. O que vemos na tela e podemos associar à frente e ao fundo são decorrentes da construção do corpo e do telhado da casa. Não há procedimentos que nos indiquem que durante os processos mentais associados à construção da casa, o sujeito tenha sentido a necessidade de representar essas partes que estão ausentes. O pesquisador sentiu essa lacuna, mas considerou oportuno explorar esse aspecto durante a construção da casa com Logo tridimensional, pelo fato da representação obtida com Logo Bidimensional não corresponder ao modelo visual de interpretação da realidade (projeção cônica e concretitude).

Com os recursos do Logo Bidimensional foi possível ao sujeito representar a casa em uma única posição em relação à tela. Assim como em uma pintura ou em uma fotografia, caso se deseje registrar a representação de um objeto em diferentes posições, o pintor reinicia seu trabalho em diferente tela, a partir de diferente ponto de observação; ou o fotógrafo opera sua câmara fotográfica uma outra vez, posicionado em diferente ponto de observação em relação ao objeto. Nesse caso, o sujeito deveria alterar procedimentos usados durante a programação, e eventualmente usar diferentes estratégias, a cada posição em que desejasse representar a casa, revendo e alterando seu programa computacional em cada momento associado a uma nova posição. Com o Logo Bidimensional, não foi possível ao sujeito elaborar um programa genérico (em relação a posições de observação e dimensões) que lhe permitisse a representação da casa e, portanto, de objetos espaciais. Isso significa que coordenar todas as variáveis no contexto Bidimensional para representar a casa com realidade, não foi possível ao sujeito. No programa apresentado pelo sujeito tornam-se possíveis somente alterações nas dimensões do objeto representado na tela, alterações essas associadas à variável de entrada do programa **casabi**, que define os passos da tartaruga nos comandos **pf** e **pt**.

Desse modo, o pesquisador, fazendo com que o sujeito entendesse que a representação com Logo Bidimensional não representava os passos da construção de uma casa real e também o limitava em termos dos resultados obtidos, incitou-o a utilizar o Logo Tridimensional.

8.7.1.4.2) Construção da Casa com Logo Tridimensional

O sujeito então lançou mão dos conhecimentos do Logo Tridimensional, e refletindo em termos dos processos possíveis nesse micromundo, apresentou o seguinte programa computacional, com resultado reproduzido na Figura 8.45.

```
?ap casatri
aprenda casatri :x :y :z :w
virar :x
rolar :y
cabecear :z
corpo :w
telhado :w
frente :w
fundo :w
fim

?ap corpo
aprenda corpo :w
repita 4 [ retn :w andar :w cabecear -90 ]
fim

?ap retn
aprenda retn :w
repita 2 [ andar :w virar -90 andar :w * 2 virar -90 ]
fim

?ap telhado
aprenda telhado :w
andar :w cabecear -30
repita 3 [ retn :w andar :w cabecear -120 ]
fim

?ap frente
aprenda frente :w
andar :w cabecear -120
andar :w cabecear -30
repita 3 [andar :w cabecear -90 ]
fim

?ap fundo
aprenda fundo :w
cabecear 60  virar -90
andar :w * 2  virar 90
frente :w
fim

casatri aprendido
```

no qual:

x representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja virar a construção da casa,

y representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja rolar a construção da casa,

z representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja cabecear a construção da casa, e

w está associado às dimensões lineares da casa (largura, profundidade, pé direito, altura do telhado).

O sujeito apresentou as seguintes variáveis de entrada, com o resultado reproduzido na Figura 8.45 abaixo:

```
?tri casatri 0 40 -20 30 imprima
```

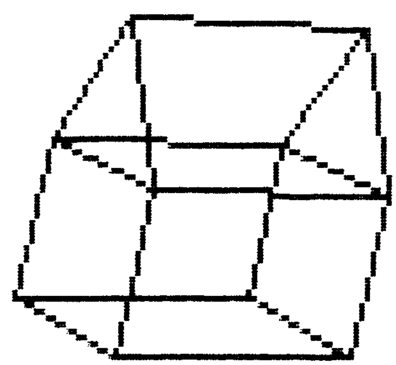

Figura 8.45 - Representação da casa construída com o programa **casatri**

8.7.1.4.2.1) Análise dos Processos Computacionais do Programa casatri

A análise que se segue está baseada nos procedimentos utilizados pelo sujeito na elaboração do programa computacional **casatri**, e no resultado desse programa, representado pela casa reproduzida na Figura 8.45.

Inicialmente observamos que, a partir da descrição dos procedimentos do sujeito e dos valores atribuídos às variáveis de entrada do programa **casatri**, o ponto de observação, do qual a casa representada na Figura 8.45 é vista, está situado do lado esquerdo do leitor, acima do eixo **x** da tela. O estabelecimento da posição do ponto de observação decorre do procedimento do sujeito utilizado no início do programa **casatri** quando lançou mão da combinação dos comandos de giro para inicialmente posicionar a tartaruga (e conseqüentemente o objeto a ser representado na tela), ou seja, os comandos **virar**, **rolar** e **cabecear**, exercem função de posicionamento, função essa, distinta da desempenhada por esses comandos que, juntamente com o comando **andar** nos sub-procedimentos: **corpo**, **telhado**, **frente** e **fundo**, ordenam a tartaruga a proceder deslocamentos e giros enquanto esta percorre os contornos da casa, ou seja, nos sub-procedimentos **corpo**, **telhado**, **frente** e **fundo,** os comandos **virar**, **rolar** e **cabecear** exercem a função de descrever o objeto.

1º - Nesse momento analisaremos o sub-procedimento **retn :w**

```
aprenda retn :w
```

```
repita 2 [ andar :w virar -90 andar :w *2 virar -90 ]
fim
```

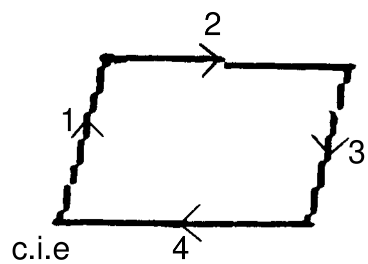

Figura 8.46 - Representação do retângulo construído com o sub-procedimento **retn**

Através do sub-procedimento **retn :w,** o sujeito construiu um retângulo, usado na representação do corpo e do telhado da casa. Na construção do retângulo, a tartaruga, no centro da tela e voltada para cima, rolou sobre seu lado direito (**rolar 40**) e, cabeceando em seguida para fora da tela (**cabecear -20**), partiu do vértice inferior esquerdo, que corresponde ao canto inferior esquerdo da casa - c.i.e, e centro da tela, construiu o retângulo (transformado em paralelogramo pela ação combinada dos comandos **rolar** e **cabecear**), como representado na Figura 8.46, onde está indicada a seqüência de lados desenhados. Assim, construiu o retângulo percorrendo-o no sentido horário, retornando ao ponto e à posição de partida (canto inferior esquerdo, centro da tela e para cima - c.i.e.).

2º - Corpo da casa (**corpo :w**)

```
aprenda corpo :w
repita 4 [ retn :w andar :w cabecear -90 ]
fim
```

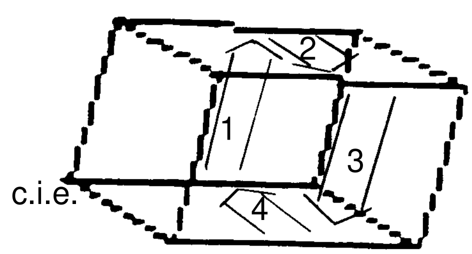

Figura 8.47 - Representação do corpo da casa

Através dos comandos **virar :x**, **rolar :y** e **cabecear :z** (os três primeiros comandos do programa **casatri**), a tartaruga, no centro da tela, posicionou-se para iniciar suas ações, e, seguindo os procedimentos contidos no sub-procedimento **corpo**, construiu a representação do corpo da casa. Inicialmente, utilizando o sub-procedimento **retn,** construiu a lateral posterior da casa**,** num plano fora da tela, e utilizando o mesmo sub-procedimento seguiu construindo o corpo da casa na seqüência indicada na Figura 8.47, isto é, a lateral posterior, o forro, a lateral anterior, e o piso, retornando ao centro da tela, ponto de partida. Completou assim a construção do corpo da casa, o qual tem a forma de um prisma quadrangular deitado, cuja altura é o dobro da aresta da base.

A combinação das ações de giro da tartaruga (combinação dos comandos **virar**, **rolar** e **cabecear** do programa **casatri**) transformaram os retângulos em paralelogramos e tornaram possível enxergar-se a base esquerda do prisma (parte da frente da casa), a parte externa do forro, e a lateral anterior.

Uma conclusão que pode ser extraída da observação da Figura 8.45 é que, como o sujeito não virou na tela a casa representada na Figura 8.45 (**virar 0**), os segmentos que representam as interseções de uma das paredes laterais com o piso e com o forro (uma das arestas maiores do prisma representado na Figura 8.47, e sua correspondente aresta inferior) deveriam ser paralelas. Entretanto os segmentos superiores não são contínuos e mostram que nas descontinuidades houve retomadas dos segmentos em posições mais abaixo, evidenciando o efeito da projeção cônica. Portanto a extremidade da esquerda da parede lateral está representada como sendo maior que a extremidade da direita da mesma parede. Como já sabemos, essas dimensões tendem a zero no ponto de fuga.

Outra maneira de se observar a convergência dos segmentos acima definidos seria prolongá-los com o auxílio de uma régua. Desse procedimento seria possível observar-se que, na figura 8.47, o ponto de convergência ou ponto de fuga da projeção cônica estaria à esquerda. Como o sujeito rolou inicialmente a tartaruga fora da tela (**rolar 40**), o ponto de fuga está atrás da tela.

Na análise acima usamos de maneira imprópria, do ponto de vista matemático, os termos prisma e paralelogramos. O prisma ainda não tem as bases, e portanto não é prisma. Os lados maiores do paralelogramo não são paralelos, portanto os quadriláteros não são paralelogramos. Preferimos entretanto o uso dessas denominações, objetivando facilitar o entendimento por parte do leitor.

A segunda conclusão vem da observação da forma da Figura 8.47 e da análise dos procedimentos usados na elaboração do programa **corpo**. Após a construção da primeira lateral, o sujeito cabeceou para fora da tela (**cabecear -90**), antes de proceder a construção do segundo retângulo que corresponde ao forro, repetindo este procedimento na construção da segunda lateral e do piso. Programada dessa maneira a tartaruga percorreu por dentro o corpo da casa ao construi-la. Parece-nos correta essa estratégia, considerando que a casa não é um sólido manipulável, e que seria impossível percorrê-la totalmente, por fora. Isso porque no plano inferior a casa está sobre o solo, e também porque acima do plano superior haverá o telhado.

3º - Telhado (**telhado :w**)

```
aprenda telhado :w
andar :w cabecear -30
repita 3 [ retn :w andar :w cabecear -120 ]
fim
```

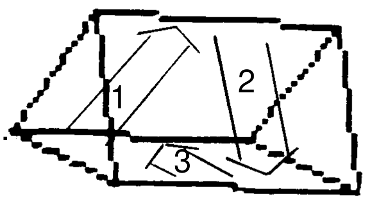

Figura 8.48 - Representação do telhado

Partindo do canto superior esquerdo da casa - c.s.e, cabeceou -30º, e utilizando-se do sub-procedimento **retn** construiu a parte posterior do telhado (também chamada de água posterior do telhado). Em seguida construiu a água anterior do telhado e a parte plana sob o telhado, a qual pode ser interpretada como sendo o forro (que já havia sido construído durante a construção do corpo da casa). O prisma triangular que representa o telhado, e a seqüência seguida em sua construção, estão representados na Figura 8.48.

Da análise dos procedimentos utilizados na elaboração do sub-procedimento **telhado**, concluímos que, durante a representação do telhado, este (em forma de prisma triangular) foi representado com a tartaruga percorrendo-o por dentro (**cabecear -120**). Porém na tela haveria o mesmo efeito se a tartaruga o tivesse percorrido por fora. Portanto, do ponto de vista de procedimentos, a estratégia utilizada (cabecear negativo) é passível de questionamento e interpretação. Construído isoladamente como um prisma triangular, esse procedimento pode ser considerado incorreto, pois nada impede a tartaruga de percorrê-lo por fora, mas depois de se integrar o telhado com o corpo da casa obtém-se uma construção única, a qual representa a casa. Com o corpo e o telhado integrados, se nos imaginarmos reproduzindo os movimentos da tartaruga durante a construção do telhado, vemos que a estratégia utilizada, segundo a qual a tartaruga o percorreu por dentro, está correta, pois caso o fizesse por fora, não seria possível interpretar o fato da tartaruga atravessar o corpo da casa.

Na Figura 8.48 também notamos a convergência associada a projeção cônica inerente ao Logo Tridimensional, quando comparamos as extremidades inferiores do telhado com a cumeeira.

Vemos pois que este Estudo de Caso está associado a algo que tem existência física, e que no real não pode ser manipulado pelo sujeito (é óbvio que um modelo reduzido da casa poderia sê-lo), propiciando uma oportunidade rica de exploração de conceitos da Geometria Espacial. Nota-se nesse contexto a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Espacial**.

Um das conclusões que podemos tirar, neste momento, das análises dos procedimentos usados na construção do corpo da casa e do telhado, é que a casa ainda não possui frente, nem fundo, estando construída assim como uma construção vazada.

4º - Frente (**frente :w**)

```
aprenda frente :w
andar :w
cabecear -120
andar :w
cabecear -30
repita 3 [ andar :w cabecear -90 ]
fim
```

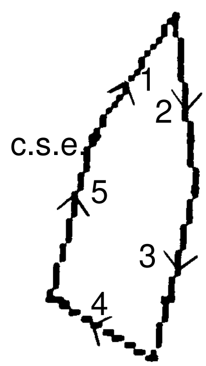

Figura 8.49 - Representação da frente da casa

Segundo os procedimentos utilizados na elaboração do sub-procedimento **frente** do programa **casatri**, partindo do canto superior esquerdo - c.s.e., a tartaruga percorre, por dentro (cabecear negativo) a figura que representa o contorno da frente da casa, no sentido horário, na seqüência indicada na Figura 8.49.

A forma geométrica da frente da casa representada por uma figura plana está correta; entretanto como a frente da casa é real, torna-se impossível a tartaruga percorrê-la por dentro. Portanto o procedimento utilizado em sua construção não está correto. O procedimento será mantido momentaneamente como apresentado, mas a estratégia utilizada será considerada pelo sujeito e apresentada em seguida como **Exploração da Construção de Figuras Planas com o Comando Cabecear Negativo**. Em conseqüência, os procedimentos utilizados no sub-procedimento **frente** serão reestruturados, e apresentados como **Reestruturação do Programa Computacional casatri.**

5º - Fundo (**fundo :w**)

```
aprenda fundo :w
cabecear 60
virar -90
andar :w*2
virar 90
frente :w
fim
```

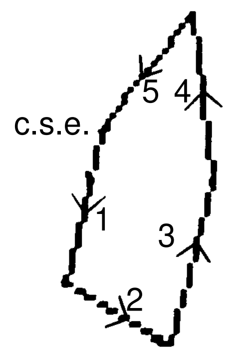

Figura 8.50 - Representação do fundo da casa

Segundo os procedimentos utilizados na elaboração do sub-procedimento **fundo**, estando no canto superior esquerdo, a tartaruga percorre o contorno do fundo da casa, por dentro da figura que o representa, no sentido anti-horário, segundo a seqüência de construção indicada na Figura 8.50.

Aplicam-se nesse momento as mesmas observações feitas durante a análise dos procedimentos do sub-procedimento **frente**, relacionados com a construção de figuras planas com o comando **cabecear** negativo.

Da maneira como programado pelo sujeito, todas as partes da casa foram percorridas e descritas pela tartaruga, de acordo com a filosofia do Logo Tridimensional. Além disso, durante a construção da frente e do fundo da casa, observa-se que nesse momento o sujeito integrou o corpo e o telhado em uma só representação (casa).

O item abaixo foi introduzido com o objetivo de elucidar o conflito surgido ao representar a frente e o fundo da casa pelo sujeito.

8.7.1.4.2.2) Exploração da Construção de Figuras Planas com o Comando Cabecear Negativo

Na construção da frente da casa com o sub-procedimento **frente**, e do fundo da casa com o sub-procedimento **fundo**, portanto na construção de figuras planas, o sujeito utilizou o comando **cabecear** com argumento negativo, implicando em um procedimento incorreto. Para ilustrar a impropriedade do uso do comando **cabecear** negativo, e incitar o sujeito a repensar sua estratégia de representação da construção de figuras planas, o pesquisador solicitou ao sujeito a elaboração do programa **quadn** abaixo, com resultado reproduzido na Figura 8.51. Assim como nos sub-procedimentos **frente** e **fundo**, no programa **quadn** a tartaruga cabeceia um valor negativo, e essa situação foi explorada pelo pesquisador.

```
?ap quadn
aprenda quadn :w
rolar 90
repita 4 [ andar 30 cabecear -90 ]
fim

quadn aprendido
?tri quadn imprima
```

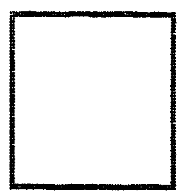

Figura 8.51 - Representação do quadrado construído com o programa **quadn**

Nesse contexto, o pesquisador solicitou ao sujeito a justificativa da utilização do comando **cabecear** negativo nos sub-procedimentos **frente** e **fundo**, ação esta nesse processo, especificada na utilização do comando **cabecear -90º**, no programa **quadn.** Assim sendo, o sujeito justificou-se por ter usado a mesma estratégia utilizada durante a construção do corpo e do telhado da casa.

Nesse momento, o pesquisador solicitou ao sujeito uma alteração no procedimento utilizado, substituindo o argumento do comando **cabecear** por **90º.**

Assim foram apresentados:

```
?ap quadp
aprenda quadp
rolar 90
repita 4 [ andar 30 cabecear 90 ]
fim

quadp aprendido
?tri quadp imprima
```

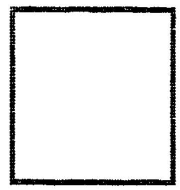

Figura 8.52 - Representação do quadrado construído com programa **quadp**

Dessa forma, o pesquisador objetivando que o sujeito compreendesse os efeitos das diferenças das ações da tartaruga, incitou-o a analisar as estratégias utilizadas nas duas representações do quadrado (Figuras 8.51 e 8.52). Pela explicitação do sujeito infere-se que, na Figura 8.51 a tartaruga partiu do vértice inferior esquerdo, e percorreu o quadrado no sentido horário; enquanto que na Figura 8.52 a tartaruga partiu do vértice inferior direito, e percorreu o quadrado no sentido anti-horário.

A partir de então, o pesquisador solicitou ao sujeito para que este se imaginasse no lugar da tartaruga. Essa relação simbiótica entre o sujeito e a tartaruga, propiciou a ele observar que de acordo com os procedimentos do programa **quadn,** o contorno do quadrado seria percorrido "de costas", em lugar de fazê-lo "de barriga", como ocorreria segundo os procedimentos do programa **quadp**.

Ocorre que a tartaruga não se desloca "de costas" pois sua carapaça assim não a permite. Quando ela "desenha" na tela, deixa seu rastro. Assim sendo, a única explicação possível é que a tartaruga percorreu o quadrado por dentro, no programa **quadn,** contrariando assim a lei da não interpenetração dos corpos (associado ao quadrado tem-se o conceito de área). O sujeito não considerou esse fato quando colocou-se no lugar da tartaruga ao analisar as estratégias utilizadas na representação do quadrado com o programa **quadn**, pelo fato de saber que na realidade não se possui a propriedade de atravessar sólidos. Esse comportamento foi possível para a tartaruga como ente abstrato, porém não condizente com a realidade, portanto, impossível para o sujeito.

A reação do sujeito diante do conceito de sintonicidade corporal, evidenciado acima, foi: *"Então eu não posso usar **cabecear** negativo?"*

Reavaliando os procedimentos utilizados e as diferentes combinações possíveis de comandos que produzem corretamente o deslocamento necessário à ação desejada, o sujeito concluiu que, caso a definição do sentido de giro fosse explicitada, haveria mais de uma estratégia correta que ele poderia utilizar. Por exemplo, seria possível a tartaruga percorrer o contorno do quadrado "de barriga", e no sentido horário, partindo inclusive do mesmo vértice inferior esquerdo, utilizando como argumento do comando **virar** o valor **-90º** e como argumento do comando **cabecear,** o valor **90º**.

Procurando fazê-lo responder a seu próprio questionamento acima, o pesquisador propôs que fosse representada na tela uma "estrela de cinco pontas", usando o comando **cabecear**. Como resposta o sujeito apresentou:

```
?ap estrela
aprenda estrela
rolar 90
repita 5 [andar 20 cabecear 120 andar 20 cabecear -48]
fim

estrela aprendido
?tri estrela imprima
```

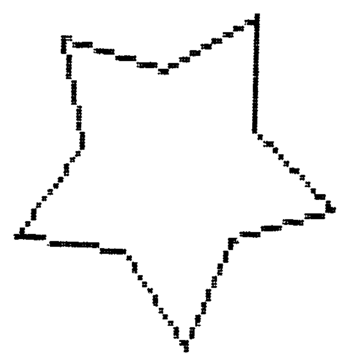

Figura 8.53 - Representação da estrela de cinco pontas construída com o programa **estrela**

Da forma da figura representada, ficou ressaltada a introdução, neste momento, de figuras planas côncavas[12]; e dos procedimentos utilizados na sua representação, surgiu a necessidade, e o emprego correto do comando **cabecear** com argumento negativo. Ambos os fatos acima foram por nós analisados junto com o sujeito, e ficou mostrado que ao contornar figuras que apresentem concavidade, necessariamente deverá ser utilizada a combinação de argumentos positivos e negativos no comando **cabecear**.

Como observação final, decorrente de análises dos procedimentos utilizados nas representações anteriores, conclui-se que na representação de figuras geométricas planas convexas (triângulos, quadrados, etc.) utilizando a combinação dos comandos **andar** e **cabecear**, somente aqueles onde o comando **cabecear** é utilizado com argumento positivo apresentam ações da tartaruga possíveis de serem reproduzidas quando nos colocamos em seu lugar ("sintonicidade corporal"), e assim usados corretamente dentro da filosofia norteadora da criação do ambiente Logo. A mesma conclusão pode ser estendida para a

[12] Figuras côncavas: pela definição matemática, uma figura é côncava quando for possível passar uma reta, e esta cortar a figura em mais de dois pontos.

construção de sólidos convexos[13] (cubo, prismas, etc), quando usamos devidamente o comando **cabecear**.

8.7.1.4.2.3) Reestruturação do Programa Computacional casatri

Como resultado das reflexões que o sujeito realizou, sobre as situações que surgiram durante o processo de construção da casa, e acima explicitados, ele sentiu necessidade de reestruturar o programa **casatri** anteriormente elaborado. Nessa reelaboração lançou mão de uma nova estratégia para a construção da frente e do fundo da casa, sendo que havia utilizado o comando cabecear inadequadamente. Além disso, buscando auxiliar a interpretação da imagem representada na tela, o sujeito implementou características próprias de uma casa. Nesse sentido, tomando como referência a Figura 8.45 adicionou na frente da casa uma porta, e na lateral direita implementou duas janelas. Para tanto, implementou em seu novo programa os sub-procedimentos: **janela** e **porta,** como mostrados a seguir no programa **casanova:**

```
?ap casanova
aprenda casanova :x :y :z :w
virar :x
rolar :y
cabecear :z
corpo :w
telhado :w
ftenova :w
fdonovo :w
fim

?ap ftenova
aprenda ftenova :w
rolar -90
andar :w virar -120
andar :w virar -30
repita 3 [ andar :w virar -90 ]
fim


?ap fdonovo
aprenda fdonovo :w
un virar 90
cabecear 90 andar :w * 2
cabecear 90 ul
repita 3 [ andar :w virar -90 ]
virar -60 andar :w
virar -120 andar :x
fim

?ap janela
aprenda janela :w
un virar -30 andar :w
virar -90 andar :w
```

[13] Sólidos convexos: pela definição matemática, um sólido é convexo quando, ao se passar por ele uma reta, esta cortar seu exterior em somente dois pontos.

```
cabecear 90 andar :w / 5
virar -90 andar :w * 2 / 5
repita 2 [andar :w * 2 / 5 virar 90 andar :w * 3 / 5  virar 90]
un virar 90 andar :w virar -90 ul
repita 2 [andar :w * 2 / 5 virar 90 andar :w * 3 / 5  virar 90]
fim

?ap porta
aprenda porta :w
un virar 180 andar :w * 2 / 5
virar -90 andar :w * 4 / 5
cabecear 90 andar :w * 2 / 5
virar -90 ul
andar :w * 3 / 5 virar 90
andar :w / 5 virar 90
andar :w * 3 / 5
fim
```

no qual:

x representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja virar a construção da casa,

y representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja rolar a construção da casa,

z representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja cabecear a construção da casa,

w representa a largura, pé direito, profundidade e altura do telhado, medidos em passos da tartaruga.

Os resultados obtidos com o programa **casanova** são idênticos, na forma, aos representados com o programa **casatri** já analisado. A diferença entre ambos os programas está nos procedimentos utilizados na elaboração dos sub-procedimentos responsáveis pela construção da frente e do fundo, e pelas particularidades introduzidas na frente (porta) e na lateral anterior (duas janelas).

Os sub-procedimentos **corpo** e **telhado** são os mesmos do programa **casatri**, e já analisados. Para analisar os sub-procedimentos **ftenova** e **fdonovo**, basearem-nos na Figura 8.54, obtida pelo sujeito, e nos procedimentos e estratégias utilizados em suas elaborações.

```
?tri casanova 0 40 -20 30 imprima
```

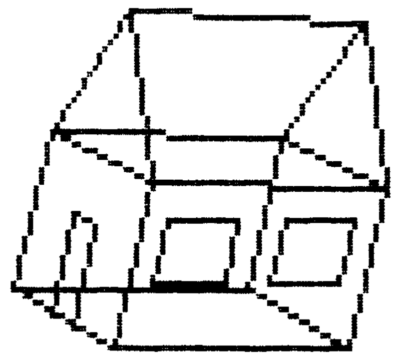

Figura 8.54 - Representação da casa construída com o programa **casanova**

Esta figura representa a casa reproduzida na mesma posição daquela da Figura 8.45 construída com o programa **casatri**, vista a partir do mesmo ponto de observação, o que torna visível ao leitor a frente, a lateral direita, e a parte direita do telhado.

Antes de iniciar a análise do sub-procedimento **ftenova**, como apresentado, torna-se oportuno relatar que o sujeito, refletindo em termos do processo de construção de figuras planas com o comando **cabecear**, substituiu em sua estratégia o comando **cabecear** negativo pelo comando **cabecear** positivo. Como resultado dessa ação, a tartaruga passou a percorrer o contorno da frente da casa por fora, vista de perfil pelo observador. Com esse posicionamento, percorreu a interseção da frente da casa com o solo, por dentro do solo. Esse trajeto não pôde ser reproduzido pelo sujeito ao colocar-se no lugar da tartaruga, uma vez que a casa está apoiada no solo, e no real esse procedimento é impossível. Nesse momento criou uma estratégia diferente que lhe possibilitou construir a frente da casa, solucionando seu problema de acordo com o sub-procedimento **ftenova**.

1º- Frente (**ftenova**)

```
aprenda ftenova :w
rolar -90
andar :w  virar -120
andar :w  virar -30
repita 3 [ andar :w  virar -90 ]
fim
```

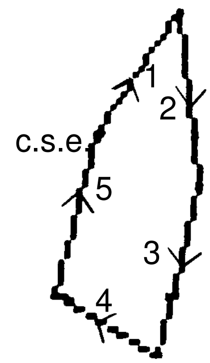

Figura 8.55 - Representação da frente da casa construída com o programa **casanova**

Analisando a descrição do procedimento acima, constata-se que a tartaruga posicionada no canto superior esquerdo (c.s.e.), de perfil, rolou para a esquerda, ficando com sua barriga no plano da tela (**rolar -90**). Desse ponto, a tartaruga percorreu o contorno da frente na seqüência indicada na Figura 8.55, sobre o plano que a contém, virando à direita em cada vértice da figura (**virar** negativo). Essa estratégia pode ser interpretada no real, sendo possível ser reproduzida quando nos posicionamos no lugar da tartaruga ("sintonicidade" corporal). Segundo essa estratégia, a tartaruga construiu a frente da casa percorrendo seu contorno no plano que a contém, no sentido horário. Ao percorrer a interseção da frente da casa com o solo (interseção de planos perpendiculares), esse trajeto efetuou-se no plano da frente da casa.

2º- Fundo (**fdonovo**)

```
aprenda fdonovo :w
un virar 90
cabecear 90 andar :w * 2
cabecear 90 ul
repita 3 [ andar :w virar -90 ]
virar -60 andar :w
virar -120 andar :x
fim
```

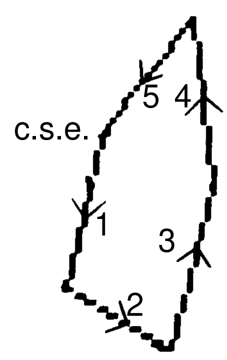

Figura 8.56 - Representação do fundo da casa construído com o programa **casanova**

Analisando o procedimento acima, constata-se que a tartaruga estando no canto superior esquerdo (c.s.e.), fora da casa, e com a sua direção voltada para baixo, percorreu o contorno do fundo da casa na seqüência indicada na Figura 8.56, sobre o plano que contém o fundo, virando à direita em cada vértice (**virar** negativo). Convém lembrar que, se fosse possível ao observador colocado na frente da casa visualizar a tartaruga durante suas ações construindo o fundo da casa, ele a veria de barriga. Assim como na construção da frente da casa, a estratégia utilizada nesse momento é possível de ser reproduzida pelo sujeito ao se deslocar no lugar da tartaruga ("sintonicidade" corporal).

Nota-se que a essência do novo programa criado pelo sujeito caracteriza-se pela substituição do comando **cabecear** (programa **casatri**) para o comando **virar** (programa **casanova**), pois o indivíduo concluiu que, com o comando **cabecear** negativo, a tartaruga percorria a frente da casa por dentro e, com o comando **cabecear** positivo, a tartaruga percorria a frente da casa por fora, percorrendo parte do trajeto dentro do solo. Esses dois fatos evidenciam que a representação pretendida não correspondeu à representação de uma situação real (conforme explicitado anteriormente).

8.7.1.4.2.4) Exploração do Programa casanova

No micromundo do Logo Tridimensional, para a efetiva compreensão pelo usuário da essência desse contexto, expressa pela transformação de uma **idéia** geométrica em uma **forma** geométrica, deve-se distinguir dois aspectos fundamentais, quais sejam: a utilização dos comandos de giro da tartaruga - **virar**, **rolar** e **cabecear**, para a construção da representação de um sólido; e a visualização deste a partir de diferentes pontos de observação.

Com a finalidade de fazer o sujeito compreender o sistema tridimensional como um todo, ou seja, construção, visualização e interpretação do programa, o pesquisador incitou-o a utilizar diferentes significações dos comandos **virar - rolar - cabecear** (atribuir diferentes entradas para as variáveis) e projetar a casa em diferentes posições. Nesse momento, o sujeito, apresentou um programa generalizado para construir a representação da casa (**casanova**), explorando-o com várias combinações de parâmetros de entrada, sendo que a cada uma dessas corresponde um ponto de observação diferente. Desse modo, com a finalidade de elucidar a compreensão pelo sujeito, reproduzimos abaixo três situações elaboradas por ele, e apresentadas nas Figuras 8.57 a 8.62.

1º- `?tri casanova 0 40 -20 30 imprima`

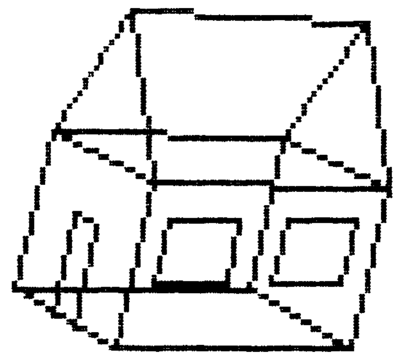

Figura 8.57 - Representação da casa construída com o programa **casanova**

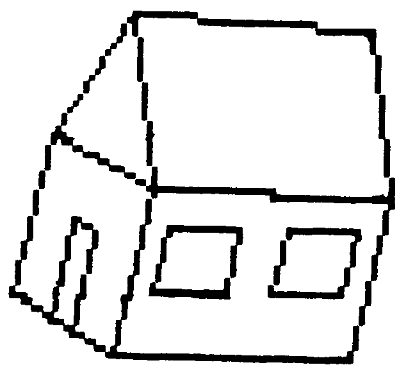

Figura 8.58 - Representação da casa construída com o programa **casanova** sem as linhas posteriores

Essa representação da casa já foi anteriormente apresentada como Figura 8.54, e nos referimos a ela durante a análise dos procedimentos computacionais apresentados pelo sujeito. O ponto de fuga da projeção cônica está à direita da figura, num ponto atrás da tela do computador, pois resulta da combinação dos comandos **rolar 40** e **cabecear -20**. Na casa como foi construída, o ponto de observação está à esquerda, acima do telhado, e é visível na tela a frente da casa, a lateral direita e a parte direita do telhado.

Para facilitar a visualização das características da representação da casa (Figura 8.57) pelo leitor, apresentamos também a Figura 8.58, que se constitui da mesma representação, porém sem as linhas correspondentes às arestas posteriores. Esse procedimento também será utilizado na segunda e terceira situação, abaixo apresentadas.

2º- `?tri casanova 0 -40 20 30 imprima`

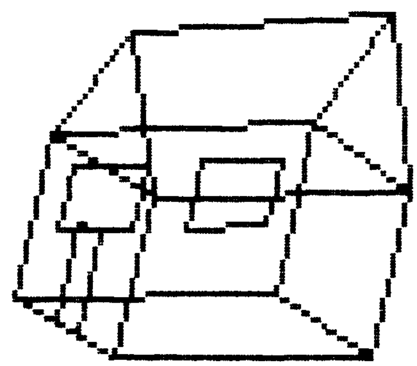

Figura 8.59 - Representação da casa construída com o programa **casanova**

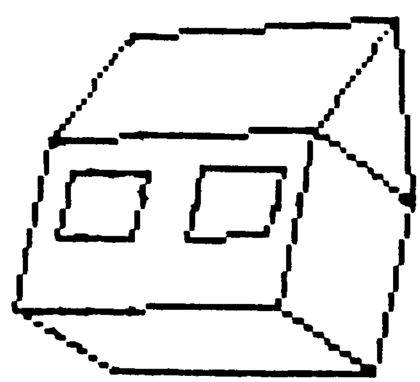

Figura 8.60 - Representação da casa construída com o programa **casanova** sem as linhas posteriores

Observando a Figura 8.57, juntamente com a Figura 8.59 acima, à primeira vista pode-se concluir que ambas representam a casa; entretanto analisando os procedimentos computacionais, juntamente com os valores atribuídos aos comandos **rolar** e **cabecear**, observa-se na Figura 8.59 que o ponto de fuga da projeção cônica esta à esquerda, atrás da tela, e o ponto de observação está quase que diametralmente oposto ao da Figura 8.57. Com os comandos **rolar -40 cabecear 20**, o ponto de observação está localizado à direita, em direção ao canto inferior da tela, fora dessa. Com isso, é visível na tela o fundo e a lateral anterior da casa, a parte de baixo do piso e a água anterior do telhado vista de baixo. Ao considerar-se uma situação real, constata-se que a casa não é um sólido manipulável, e que deveria estar apoiada no solo; desse modo, ao analisar-se a representação da casa (Figura 8.59), não se encontra justificativa no posicionamento do ponto de vista abaixo do solo. Pelas ações da tartaruga isso é possível, mas esse fato não tem interpretação no real.

3º- `?tri casanova 0 -40 -20 30 imprima`

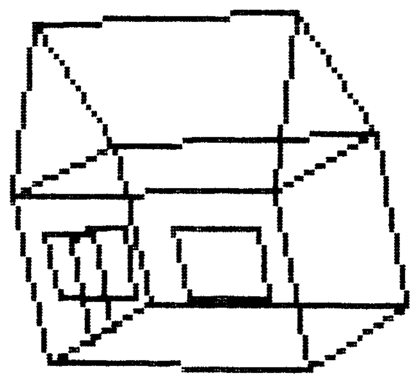

Figura 8.61 - Representação da casa construída com o programa **casanova**

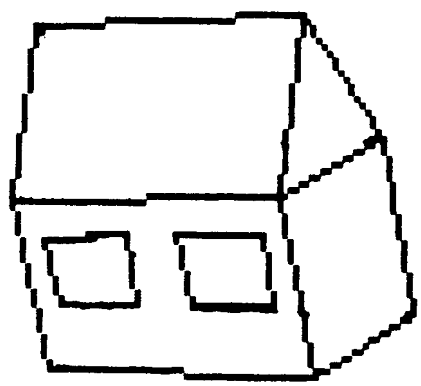

Figura 8.62 - Representação da casa construída com o programa **casanova** sem as linhas posteriores

Na representação da casa apresentada na Figura 8.61, o ponto de observação está localizado a direita, em direção ao canto superior da tela, fora desta. Com isso torna-se visível na tela o fundo da casa, a lateral anterior, e parte do telhado. A representação acima, quando comparada com aquela reproduzida na Figura 8.57, nos mostra que ambas foram construídas com um mesmo argumento para o comando **cabecear** (-20), o que coloca o ponto de observação acima do centro da tela, tornando visível a água anterior do telhado e a lateral anterior. Há, entretanto, uma diferença de 80º entre os efeitos produzidos pelo comando **rolar** (de **rolar 40** para **rolar -40**) na representação das duas casas. Como conseqüência, em lugar da frente da casa vista na Figura 8.57, vê-se na Figura 8.61 o fundo da casa.

Fatos como os acima apresentados, elucidam as potencialidades do Logo Tridimensional no que se refere às visualizações e interpretações das imagens produzidas pelo usuário.

8.7.1.4.2.5) Análise Microgenética

A análise dos procedimentos do sujeito ao procurar compor os dois sólidos (prisma quadrangular - corpo da casa e prisma triangular - telhado da casa) e integrar o todo representado pela casa, com a construção da frente e do fundo, na visão microgenética, envolve um processo de generalização construtiva que se caracteriza por uma reconstrução de conhecimentos anteriores advindos de outras situações-problema no contexto do Logo Tridimensional, com vistas a atingir um objetivo pré-determinado pelo sujeito. Essa reconstrução constitui-se de uma planificação dos procedimentos em que grande parte dos elementos que compõem a heurística procedural são meras adaptações de contextos vivenciados anteriormente no Logo Bidimensional. Contudo, o problema atual, isto é, a representação da construção da casa, é novo e exige do sujeito movimentos que vão da intenção (objetivos, fins do sujeito) às particularidades do objeto a ser construído (causalidade) e vice-versa, o que imprime à estratégia reavaliações, controles constantes, reajustes mais complexos do que na representação do problema do cubo, pois o problema atual exige a representação imagética da combinação de dois sólidos no espaço.

Dentre os conhecimentos novos que emergiram da situação problema (representação da construção da casa) um especificamente refere-se ao entendimento do comando **cabecear** negativo integrado com a sintonicidade corporal, expressa pelo momento em que o sujeito compreendeu que, se a tartaruga andasse por fora do corpo da casa essa situação não seria real (não seria possível percorrer por fora o piso da casa pois essa estaria apoiada sobre o solo); nesse sentido a sintonicidade corporal não seria constatada. Um segundo momento em que o sujeito compreendeu a sintonicidade corporal foi durante a construção do telhado, que ao ser integrado ao corpo da casa não permitiu que a tartaruga o percorresse por fora, o que fez o sujeito compreender que não poderia **cabecear** positivo. Para que fosse possível ao sujeito sintonizar-se corporalmente com o movimento da tartaruga no espaço, o pesquisador interferiu solicitando ao sujeito, que esse desenhasse um quadrado (Figuras 8.57 e 8.58); com isso, incitou-o a investigar e buscar a compreensão do comando **cabecear,** seja positivo seja negativo. Em seguida, lançou mão de outro problema, a construção de uma estrela de cinco pontas, que implica na elaboração de um procedimento mais complexo do que o do quadrado e mais adequado para que o sujeito compreendesse os efeitos da coordenação do comando **cabecear** positivo e negativo, já que esse fato havia se constituído em um conflito cognitivo para o sujeito, no momento da construção do quadrado, em que este mencionou: *"Então eu não posso cabecear negativo?".*

Tendo compreendido a coordenação dos comandos **cabecear** negativo e positivo, através do traçado da estrela, o sujeito conseguiu perceber a necessidade de reestruturar sua estratégia ao construir o fundo e a frente da casa, pois compreendeu a impossibilidade da tartaruga representá-los percorrendo-os por dentro (**cabecear** negativo), por se tratarem de figuras planas, e percorrendo-os por fora (**cabecear** positivo) dado que a casa está apoiada no solo, em uma situação real. A reestruturação de sua estratégia constituiu-se na substituição do comando **cabecear** pelo comando **virar** no sub-procedimento **frente**.

A inclusão de problema da natureza do quadrado não tem como finalidade específica ensinar o sujeito a usar o comando, mas sim dialogar com as suas dificuldades, a partir de uma situação mais familiar em que ele possa estabelecer mais facilmente correspondências e analogias. Trata-se, portanto, da utilização de uma situação-problema atuando nesse contexto como **"objeto para se pensar sobre"**, e do aproveitamento do conhecimento anterior, e portanto do êxito, objetivando incitar o sujeito a avançar cada vez mais na compreensão do conhecimento. Nesse sentido, o êxito pode ser mais fecundo do que o erro no processo de construção de noções geométricas.

Esses fatos evidenciam a potencialidade e as idéias poderosas do ambiente computadorizado, mais especificamente do contexto Logo pois este está sempre sugerindo ao sujeito aquisição de novos conhecimentos e proporcionando condições de reelaboração de suas estratégias, criação de heurísticas e, finalmente, possibilitando a construção de novas idéias. Esse paradigma se distingue como ferramenta educacional pelos seus aspectos interativos que proporcionam aos usuários a geração de novos problemas e de novas possibilidades de resolução, constituindo dessa maneira um artefato metodológico poderoso para se compreender o processo de raciocínio em situações práticas de resolução de problemas.

De fato, coordenar os deslocamentos da tartaruga para traçar as figuras geométricas com o Logo Bidimensional e coordenar os mesmos deslocamentos no espaço implicam operações qualitativamente diferentes. No contexto do Logo Bidimensional, no plano, essas coordenações exigem do usuário um grau menor de complexidades para a solução do problema. Todas as regulações (antecipações, compensações e outras) reduzem-se à coordenações de duas dimensões (altura e largura) que estão explícitas nesse contexto, seja na tela, seja na imaginação do sujeito. Ora, no Logo Tridimensional, essa coordenação implica também em uma nova dimensão (profundidade), que é implícita ao contexto e, portanto, exige uma maior abstração do usuário. Coordenar simultaneamente três dimensões e os comandos responsáveis pela representação tridimensional dos objetos, em uma tela bidimensional, implica em vislumbrar a solução do problema, considerando uma tela que existe (tela do monitor) e os demais planos imaginários onde ocorrem as ações da tartaruga, o que só é possível quando o sujeito é capaz de operar sobre o real e o virtual concomitantemente.

Essa coordenação torna-se ainda mais complexa quando o sujeito, ao desenhar a casa no Logo Tridimensional, necessita trabalhar ao mesmo tempo com as especificidades da construção de um sólido na tela, como resultado da coordenação de outros sólidos, e com as diferentes possibilidades de representá-lo em diferentes posições na tela.

Na planificação e execução dos procedimentos referentes à representação da casa no Logo Tridimensional, o sujeito necessitou subordinar certos meios a certos fins, os quais exigiam coordenação de coordenações, próprias de raciocínios formais.

A análise microgenética permite perceber não apenas as formas de raciocínios necessários à resolução de um dado problema, mas como a criação de heurística está subordinada aos controles e conhecimentos anteriores do sujeito (representação de figuras planas, representação do cubo, entre outros) e aos fins (representação da casa).

Generalizar, portanto, não é simplesmente um processo de repetição de procedimentos anteriores para servir a novos contextos: trata-se de uma verdadeira reformulação de heurísticas, de planificações e de combinações anteriores e atuais, o que constitui sempre uma reconstrução, uma nova elaboração do problema.

Na análise dos problemas propostos, foi-nos possível constatar que o comportamento do sujeito ao resolver problemas atualmente pode ser ampliado de modo a se compreender todos os meandros resolutivos que significam muito mais do que listar passos pelos quais o sujeito chega a uma conclusão. Acima de tudo, busca-se entender como esses passos se encadeiam no processo geral inerente a uma estratégia escolhida. Trata-se de uma análise que dá conta da compreensão dos processos mentais do sujeito e da criação de heurísticas, constituindo desse modo um contexto extremamente útil aos educadores comprometidos com a aprendizagem ativa e com o ensino que provoca situações desafiantes.

Alguns outros exemplos que exporemos a seguir têm por finalidade demonstrar as potencialidades que o Logo oferece aos professores que buscam situações instigantes para o desenvolvimento de seus programas, especialmente no processo ensino/aprendizagem da Geometria.

8.7.1.5) Construção do Cilindro

Dentro do nosso projeto de trabalho com o sujeito, procuramos resgatar seu conhecimento de construção do círculo com Logo Bidimensional e, no ambiente Logo Tridimensional, propusemos a construção de um cilindro, passando pelas etapas intermediárias que o levassem ao cumprimento dessa tarefa. O sujeito, tendo entendido nossa proposta, dispôs-se a representar prismas regulares, e para tal estabeleceu como estratégia a manutenção do perímetro da base.

Assim sendo, após a construção e de diversos procedimentos, o sujeito propôs o seguinte programa:

```
aprenda prisma1 :n
rolar 75
virar 20
repita :n [lateral1 :n andar 120 / :n cabecear 360 / :n]
fim
```

```
aprenda lateral1 :n
repita 2 [ andar 120 / :n virar 90 andar 40 virar 90 ]
fim
```

no qual **n** representa o número de arestas da base.

Assim o sujeito apresentou as seguintes representações:

```
?tri prisma1 3 imprima
```

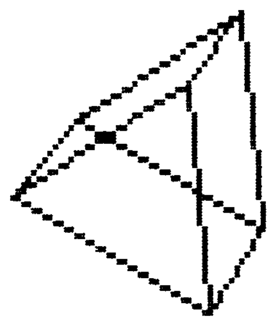

Figura 8.63 - Representação do prisma triangular construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 4 imprima
```

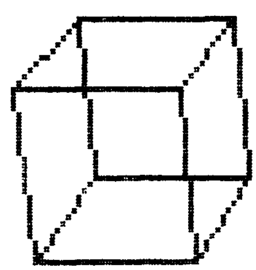

Figura 8.64 - Representação do prisma quadrangular construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 5 imprima
```

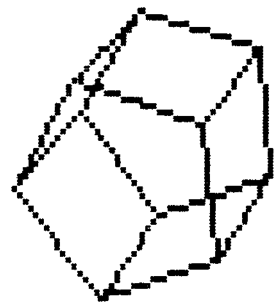

Figura 8.65 - Representação do prisma pentagonal construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 6 imprima
```

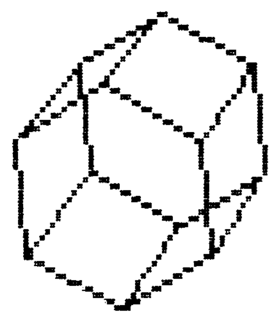

Figura 8.66 - Representação do prisma hexagonal construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 8 imprima
```

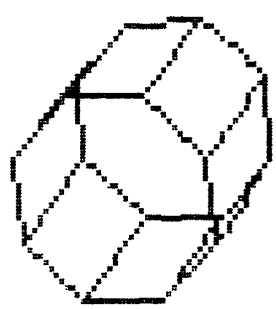

Figura 8.67 - Representação do prisma octogonal construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 10 imprima
```

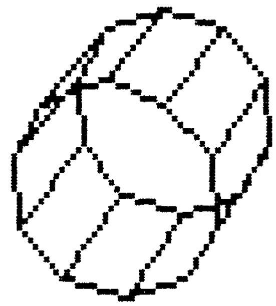

Figura 8.68 - Representação do prisma com dez lados construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 12 imprima
```

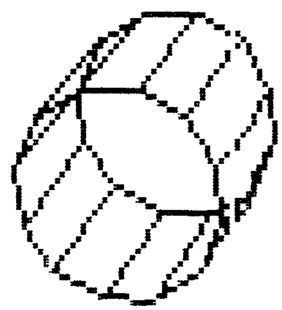

Figura 8.69 - Representação do prisma com doze lados construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 18 imprima
```

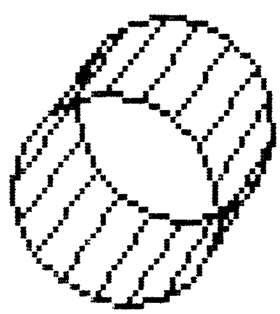

Figura 8.70 - Representação do prisma com dezoito lados construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 36 imprima
```

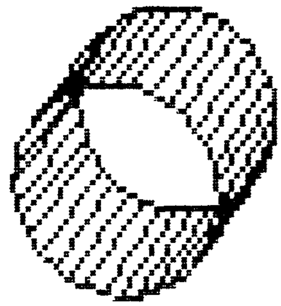

Figura 8.71 - Representação do prisma com 36 lados construído com o programa **prisma1**

```
?tri prisma1 72 imprima
```

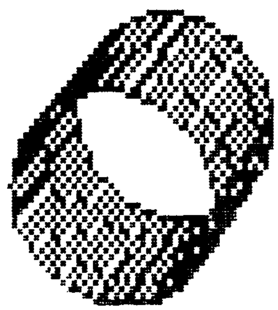

Figura 8.72 - Representação do prisma com 72 lados construído com o programa **prisma1**

Analisando os procedimentos usados no programa **prisma1**, para a representação dos prismas acima, constata-se que o sujeito definiu através da combinação dos comandos **rolar e virar (rolar 75 virar 20)** no início do programa **prisma1**, o ângulo pelo qual seriam representados os prismas. Função dos ângulos escolhidos para os comandos acima, o eixo central do prisma, que passa por suas bases, aponta para fora da tela, segundo um ângulo de 75° com o eixo horizontal da tela (apontando quase que em direção ao observador), e fazendo um ângulo de 20° com o eixo perpendicular ao centro da tela, para baixo. A tartaruga inicialmente percorre a aresta da base posterior e, em seguida, percorre a aresta da face lateral do prisma, distanciando-se da tela, para depois percorrer a aresta da base anterior, seguida de deslocamento sobre a segunda aresta da face lateral, retornando ao ponto de partida. Esse procedimento é seguido **n** vezes para se completar a construção do prisma de **n** lados.

Em todos os procedimentos a tartaruga percorre os contornos do prisma por fora, como se espera ao se representar um sólido, num procedimento possível de ser reproduzido pelo usuário ("sintonicidade" corporal).

Considerando o objetivo do sujeito de construir a representação de um cilindro, observando os poliedros representados com o programa **prisma1**, vê-se que houve uma convergência. Iniciando com o prisma de base triangular, houve um aumento gradual no número de lados, assumindo o prisma representado, forma cada vez mais próxima da cilíndrica. O sujeito usou como parte de sua estratégia **manter o perímetro da base,** através da fixação em **120 do número de passos totais percorridos pela tartaruga**. Manteve também a altura dos poliedros (terceira dimensão) em 40 passos. Esses dois procedimentos forneceram uma referência para comparação dos poliedros representados, e dentro de seus critérios de mentalização de representação do cilindro, o sujeito viu na representação do prisma com 72 lados, uma representação aceitável para o cilindro.

Na representação do prisma quadrangular (Figura 8.64), tomado como referência nesse momento, da observação das arestas verticais e daquelas na terceira dimensão (as oito arestas representadas com descontinuidades), ou do prolongamento dessas arestas, constata-se a existência de dois pontos de fuga. As arestas verticais convergem para um ponto direcionado para baixo da tela (ponto de fuga da vertical), enquanto que as arestas em profundidade convergem para um ponto dentro da tela, no canto superior direito desta (ponto de fuga em profundidade).

Uma das conclusões que se obtém das análises dos procedimentos e estratégias utilizadas, é que, apesar das formas apresentadas na tela assemelharem-se às formas esperadas de poliedros, **não há a representação das bases**, ou seja, as figuras da tela representam prismas sem bases. Refletindo sobre seus procedimentos, o sujeito reestruturou seu programa. Inicialmente generalizou o programa **prisma1** que gerou as Figuras 8.63 a 8.72, apresentando-o como:

```
aprenda prisma2 :n :x :y :z :w
rolar :z
virar :w
repita :n [lateral2 :n :x :y andar :x / :n cabecear
360 / :n]
fim

aprenda lateral2 :n :x :y
repita 2 [ andar :x / :n virar 90 andar :y virar 90 ]
fim
```

no qual,

n representa o número de lados,

x representa o perímetro em passos da tartaruga,

y representa a altura em passos da tartaruga,

z representa o ângulo em graus que a tartaruga rola,

w representa o ângulo em graus que a tartaruga vira.

Com essa generalização, pôde-se com o programa **prisma2** reproduzir qualquer uma das figuras dentre aquelas representadas de Figuras 8.63 a 8.72, como foi confirmado pelo sujeito, e uma delas reproduzida abaixo:

```
?tri prisma2 6 120 40 75 20 imprima
```

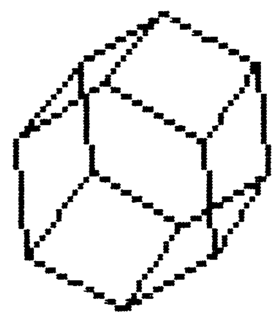

Figura 8.73 - Representação do prisma hexagonal construído com o programa **prisma2**

Da comparação da Figura 8.73 acima, com a Figura 8.66, constata-se que ambas são semelhantes, e representam um prisma hexagonal **sem suas bases.**

Um dos aspectos que pode ser trabalhado com a utilização do programa generalizado **prisma2** é o problema da representação de poliedros em diferentes posições nas quais pode-se ver o poliedro no espaço, explorando-se os comandos de giro da tartaruga com função do seu posicionamento. Dessa maneira, o sujeito apresentou as seguintes representações do prisma hexagonal:

```
?tri prisma2 6 120 40 75 50 imprima
```

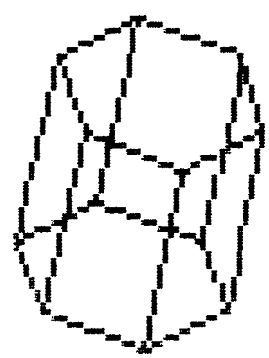

Figura 8.74 - Representação do prisma hexagonal com o programa **prisma2**

No prisma acima representado, enxergamos parte de seu interior através da base superior, de onde a tartaruga partiu no início de suas ações.

```
?tri prisma2 6 120 40 75 20 imprima
```

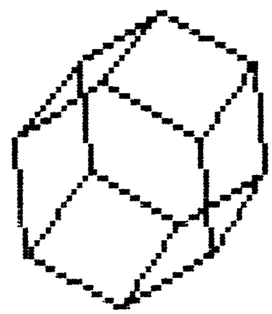

Figura 8.75 - Representação do prisma hexagonal com o programa **prisma2**

A base do fundo (mais acima) está em um plano cuja interseção com o plano da tela passa pelo centro, de onde a tartaruga partiu para suas ações. A segunda base está em outro plano adiante da tela, num distância em relação ao da primeira base, correspondente à projeção da altura.

```
?tri prisma2 6 120 40 45 20 imprima
```

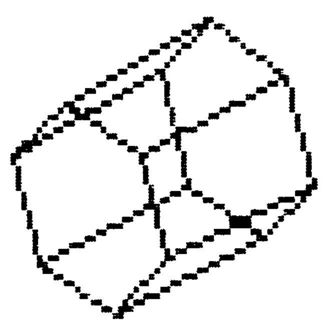

Figura 8.76 - Representação do prisma hexagonal com o programa **prisma2**

No prisma acima representado, enxergamos parte de seu interior através da base mais à esquerda, a segunda a ser completada pela tartaruga.

```
?tri prisma2 6 120 40 -50 -50 imprima
```

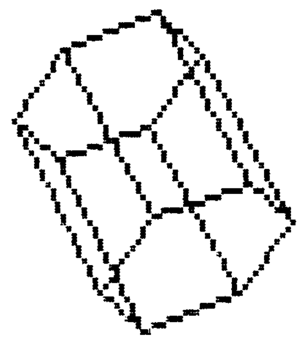

Figura 8.77 - Representação do prisma hexagonal com o programa **prisma2**

No prisma acima representado, enxergamos parte de seu interior através da base inferior, a segunda completada pela tartaruga.

8.7.1.6) Construção do Prisma com Bases

Tendo constatado que a utilização dos programas **prisma1** e **prisma2** não representam prismas, mas sim segmentos de tubos com formas poligonais, uma vez que não estão representadas as bases, o sujeito reanalisou as estratégias e procedimentos utilizados na elaboração dos programas acima, apresentando o programa **prisma3:**

```
aprenda prisma3  :n  :x  :y  :z  :w
prisma2  :n :x :y :z :w
base1 :n :x
base2 :n :x :y
fim

aprenda base1 :n :x
rolar 90
repita :n [ andar :x / :n virar -360 / :n ]
fim

aprenda base2 :n :x :y
un virar 90 cabecear 90 andar :y cabecear 90 ul
repita :n [ andar :x / :n virar -360 / :n ]
fim
```

Dessa forma, o resultado obtido com o programa **prisma3** acima realmente representa o prisma, tendo a tartaruga percorrido todas as arestas das bases e laterais. Na tela, os resultados representados são semelhantes àqueles obtidos com os programas **prisma1** e **prisma2**. Por essa razão não os reproduzimos aqui. Mais uma vez constata-se que o que caracteriza um objeto são os procedimentos que o descrevem, e não a sua imagem reproduzida na tela.

O sujeito expressou, através das diferenças de procedimentos entre os três programas acima apresentados, toda a sua compreensão de conhecimento no ambiente do Logo Tridimensional.

8.7.1.7) Construção de Colmeias com Poliedros Regulares

Como forma de explorar coordenação de sólidos, o encaixe de poliedros regulares, e aproximar o sujeito de situações reais, o pesquisador propôs ao sujeito a construção de colmeias, utilizando os poliedros acima apresentados. Para tanto, utilizando os conhecimentos anteriores, o sujeito propôs o programa abaixo:

```
?ap colmeia
aprenda colmeia :v :n :x :y :z :w
rolar :z
virar :w
repita :v [ alveolo :n :x :y cabecear 180 - 360 / :n ]
fim
aprenda alveolo :n :x :y
repita :n [lateral2 :n :x :y andar :x / :n
cabecear 360 / :n ]
fim


colmeia aprendido
```

no qual:

v representa o número de poliedros a ser coordenados,

n representa o número de lados do poliedro a ser utilizado,

x representa o perímetro da base em passos da tartaruga,

y representa a altura do poliedro em passos da tartaruga,

z representa o ângulo em graus que a tartaruga rola,

w representa o ângulo em graus que a tartaruga vira.

```
?tri colmeia 6 3 120 20 75 20
imprima
```

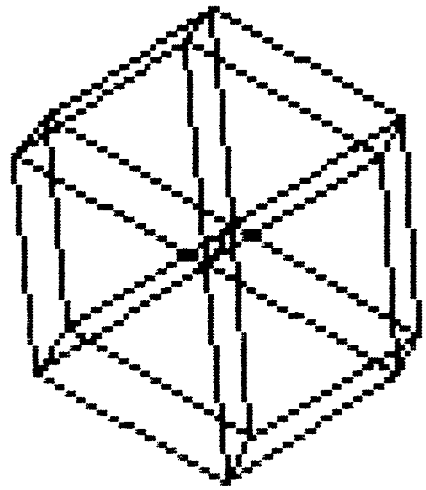

Figura 8.78 - Representação de uma colmeia construída com prismas triangulares

```
?tri colmeia 4 4 120 20 75 20
imprima
```

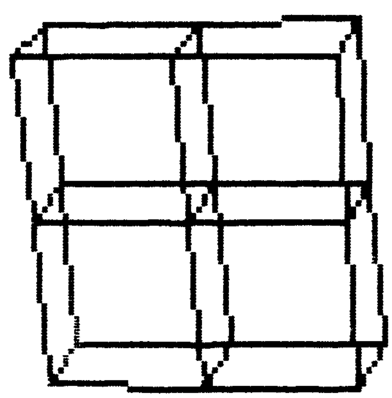

Figura 8.79 - Representação de uma colmeia construída com prismas quadrangulares

```
?tri colmeia 6 3 120 20 75 20
```

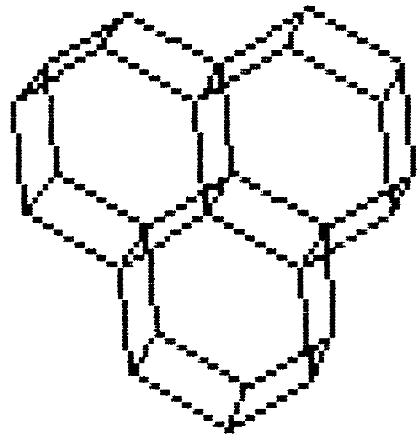

Figura 8.80 - Representação de uma colmeia construída com prismas hexagonais

Dessa maneira, exemplos como esses evidenciam as potencialidades do Logo Tridimensional para a exploração de conceitos geométricos. Trata-se, pois, de um ambiente poderoso e rico que possibilita ao usuário construir passo a passo seus conhecimentos geométricos de uma forma concisa e significativa.

8.8) A Saída Holográfica[14] e/ou Geradores de Conflitos Cognitivos

Poderia talvez se pensar que um micromundo tridimensional "ideal" para exploração do espaço devesse ter como dispositivo de saída uma tela holográfica, de maneira que não necessitasse existir um processo de codificação e decodificação entre a descrição da forma de um objeto e sua visualização na tela. Por outro lado, na nossa concepção, essa limitação imposta pela tela bidimensional nos leva à necessidade de se lidar habilmente com representações de formas no espaço, o que aprendemos a admirar em outros contextos, como o das artes, por exemplo. Essas limitações também exigem do usuário visualizações corretas e, conseqüentemente, um raciocínio mais elaborado. Os processos mentais do usuário do Logo Tridimensional são próprios do período operatório formal, em que o sujeito reflete sobre suas conceitualizações. No caso, reflete sobre a idéia – o conceito de um sólido, por exemplo – para depois representá-lo em três dimensões, ou seja, o usuário parte de uma **idéia** geométrica para uma **forma** geométrica.

---

[14] Holograma é uma imagem tridimensional criada com o uso de luz emitida por laser e componentes óticos especiais. A teoria holográfica foi primeiro descrita pelo físico Dennis Gabor em 1947, o qual foi posteriormente agraciado com o Prêmio Nobel, pelo seu serviço. Com a utilização de luz coerente emitida por lasers, pesquisadores desenvolveram ainda mais aplicações holográficas, que provaram ser benéficas na medicina, nas ciências e na indústria.

Dessa forma, o contexto Logo, com suas especificidades, foi favorável ao sujeito, pois lhe propiciou um aprendizado por tentativa e exploração, quando se constatou o movimento sincrônico do processo cognitivo do sujeito no processo de resolução de situações práticas, isto é, o dinamismo microgenético das condutas cognitivas do sujeito: a inter-relação entre as **heurísticas**, **axiologias**, e as **teleonomias**. E através das condutas cognitivas do sujeito nesse processo constatou-se também as inter-relações da **Geometria da Tartaruga** com as Geometrias: **Intuitiva**, **Euclidiana**, **Projetiva**, **Analítica**, **das Transformações** e **Espacial**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Alguns pressupostos ou mesmo considerações de ordem metodológicas poderiam ser delineadas a partir desta pesquisa, através dos Estudos de Caso, realizados na sua parte prática. Convém ressaltar que, no decorrer dos capítulos, conforme foram apresentados, já abordamos algumas implicações pedagógicas com a finalidade de delinearmos algumas inferências conclusivas.

Na nossa concepção, tanto Análise Microgenética quanto os Ambientes Informatizados são providos de recursos importantes e necessários à compreensão do processo de construção de noções geométricas.

Em ambientes onde o computador se faz presente, no caso específico no Ambiente Logo, sentimos que foi possível resgatar os processos cognitivos do sujeito, pela descrição de sua programação e também pela constituição das diferentes estratégias e heurísticas utilizadas por ele ao adaptar seus conhecimentos anteriores no processo de Resolução de Problemas a diferentes contextos.

Como foi mencionado anteriormente, na fundamentação teórica desta pesquisa, a Construção Microgenética constitui um campo conceitual próprio para o estudo do funcionamento cognitivo, em períodos de conflitos, de transição, em que se verifica a abertura para novos possíveis e o predomínio das Acomodações (Diferenciações) sobre as Assimilações (Generalizações). A partir disso, ressaltamos na descrição da análise feita sobre o funcionamento cognitivo dos sujeitos estudados, nos ambientes do Logo Bidimensional e Tridimensional, aspectos referentes à conceitualização acima, em diferentes momentos. Sabemos que um conceito está intrinsecamente relacionado a diferentes referenciais ou contextos. A análise microgenética, portanto, nos forneceu subsídios para compreendermos o dinamismo microgenético das condutas cognitivas do sujeito em situações práticas de resolução de problemas.

Na proposta metodológica alternativa, que consistiu em trabalhar com conceitos geométricos em ambientes informatizados, através de Resolução de Problemas, pôde-se constatar por meio da análise das dimensões funcionais do dinamismo microgenético das condutas cognitivas dos dois sujeitos do Estudo de Caso, um explorando conceitos da Geometria Plana, por meio do Logo Bidimensional, e o outro explorando conceitos da Geometria Espacial através do Logo Tridimensional, nos diferentes momentos da descrição dessa análise, a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com as diversas formas de abordagens da Geometria, tais como: **Geometria Intuitiva**, **Geometria Euclidiana**, **Geometria Analítica**, **Geometria Espacial**.

Dessa forma, constatou-se que a **questão central** que permeou toda a parte teórica e a parte prática da nossa pesquisa foi respondida, ou seja, **foi-nos possível resgatar ou captar algumas formas de abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do ambiente Logo**. O contexto Logo propiciou-nos subsídios teórico-metodológicos para que pudéssemos nos posicionar como pesquisadores, possibilitando-nos uma intervenção ativa com os sujeitos pesquisados, tendo como interlocutor nesse processo a Linguagem Computacional Logo, através da Geometria da Tartaruga que, pela arquitetura matemática em que foi criada, e com sua filosofia subjacente, tornou-se um ambiente educacional poderoso e instigante para a exploração de conceitos geométricos, possibilitando uma aprendizagem construtiva e significativa aos sujeitos.

Ao serem delineadas reflexões sobre os pressupostos teórico-metodológicos relativos à Geometria da Tartaruga, pode-se inferir que esta Geometria constitui-se um estilo computacional de Geometria que, por sua arquitetura matemática inerente, faz uma abordagem construtivista da Geometria Euclidiana, da Geometria Analítica, da Geometria Projetiva, entre outras. Esse fato, foi evidenciado nos Estudos de Caso, realizados nos Capítulos 7 e 8 dessa pesquisa.

No processo de representação do círculo, com a Geometria da Tartaruga (Capítulo 5), evidencia-se aspectos acima delineados, quando o sujeito ao construir vários polígonos regulares com diferente números de lados e, gradualmente, aumentar o número dos polígonos a serem representados, mantendo o mesmo tamanho dos lados dos polígonos (30 passos da Tartaruga), concluiu que o círculo é um polígono de um número muito grande de lados (infinitos). Essa conclusão, se analisada no contexto tradicional da Matemática, converge para a definição tradicionalmente aceita, na qual, o círculo é um polígono cujo número de lados tende a infinito.

Constata-se, porém, que a Matemática que se aprende com a Geometria da Tartaruga é uma Matemática diferente da tradicional. Por exemplo, no processo da construção da representação do círculo (traçado do contorno), o sujeito não se comporta como no ensino tradicional, no qual aceitaria os conceitos como "prontos", inquestionáveis, como um ser passivo, mas sim, como um ser atuante no processo de construção de seus próprios conhecimentos, atribuindo seus próprios significados às suas estratégias, controlando-as de modo a atingir seus objetivos. Tal fato foi evidenciado no processo de resolução de seu problema, quando lançou mão da seguinte estratégia: criou um programa computacional para representar polígonos e, a partir daí, inferiu que o círculo poderia ser representado por um polígono de 360 lados, como já mencionado acima. Ressalte-se que a resolução da tela do computador, influenciou a decisão do sujeito pois, dependendo dessa resolução, o sujeito aceita como círculo um polígono com maior ou menor número de lados.

Uma constatação importante que pode ser extraída da estratégia que o sujeito criou para representar o círculo consiste no conceito matemático inerente a ela, que pode ser definido como uma Progressão Aritmética (PA), pois os perímetros cresceram obedecendo às leis de uma PA, cujo primeiro termo é 90 (perímetro do triângulo) e o último é 300 (perímetro do polígono de 10 lados).

Assim sendo, evidencia-se a integração da Geometria com a Álgebra, e pode-se inferir que os nossos alunos talvez compreendessem efetivamente a Matemática se os seus diversos ramos fossem integrados, como estruturas, isto é, poder-se-ia introduzir o conceito de Progressão Aritmética através do processo de construção de diversos polígonos regulares (mantendo-se o tamanho dos lados dos polígonos). Outros conceitos matemáticos advindos dessa situação-problema foram evidenciados: Proporcionalidade, Noções de Escala, e a constatação do aumento gradativo da área da figura representada, à medida em que crescia o número de seus lados, entre outros.

No processo da representação da construção do círculo, a estratégia acima explicitada não foi a mais adequada para resolver o problema, pois a dimensão assumida pelos polígonos ultrapassava os limites da tela do monitor, incitando o sujeito a buscar uma nova estratégia que levasse em conta as limitações impostas pelo seu esquema representativo (computador). Assim sendo, o sujeito criou uma verdadeira heurística, expressa pelo fato de construir um programa computacional **poli2**, no qual levavam-se em conta as limitações impostas pela tela do monitor, mantendo-se **constante o perímetro** dos polígonos representados através dos passos totais percorridos pela tartaruga, e além disso, representou polígonos com qualquer número de lados. Nessa estratégia, o conhecimento matemático inerente a ela, expressa-se pelo conceito de **Isoperimetria**.

Esse contexto possibilitou ao sujeito no processo de resolução de seu problema descobrir conceitos matemáticos não vivenciados na escola, como **Isoperimetria** e noções sobre **Séries** ao definir os lados dos polígonos pela expressão **y/n,** no programa computacional **poli2**, no qual **y** corresponde ao número total de passos da tartaruga (perímetro) e **n** refere-se ao número de lados dos polígonos. Fatos como esses mostram-nos as idéias poderosas e ricas inerentes ao contexto Logo que, se forem mediadas de modo adequado, farão com que esse ambiente propicie um meio natural na aprendizagem de conceitos matemáticos sem a demasiada abstração e formalismo do ensino tradicional.

Uma outra conclusão que pôde ser constatada no processo de exploração de conceitos da Geometria Plana com o Logo Bidimensional consistiu-se na integração de resolução de problemas com situações encontradas na natureza, fato constatado quando o sujeito representou o problema das abelhas européias, ou seja, quando representou a construção do favo do mel das abelhas. Nesse problema, os conceitos matemáticos inerentes, entre outros, são: ladrilhamento com polígonos regulares e maximização de áreas de figuras planas, tópico tratado no desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Mais uma vez constatou-se conceitos matemáticos ainda não vivenciados pelo sujeito no contexto escolar, mostrando-nos como os diversos tópicos da Matemática são trabalhados, de um modo geral, desarticulados entre si e, mais ainda, da realidade que cerca os nossos alunos. Faz-se necessário, pois, redimensionarmos nossos métodos de ensino, procurando integra-los ao avanço tecnológico que se faz presente em nossa sociedade, propiciando aos nossos alunos vivenciar contextos educativos com vistas a possibilitar-lhes uma aprendizagem efetiva e sua plena integração na sociedade.

Ambientes informatizados, mais especificamente o contexto Logo, propiciam a compreensão do funcionamento cognitivo da construção de conceitos geométricos e, além disso, tornam-se um cenário educacional propício ao desenvolvimento ativo do sujeito na construção de seus próprios conhecimentos.

Da maneira pela qual os problemas foram desenvolvidos e a análise por nós processada, evidencia-se um paralelo entre as duas Geometrias que definem o Círculo, fato esse exemplificado na representação da construção do círculo. Pode-se inferir, nesse contexto, que a Geometria da Tartaruga é uma Matemática diferente da Matemática Tradicional, ou seja, uma Matemática que possibilita ao sujeito a exploração e a construção de conceitos geométricos deixando de lado a demasiada formalização que torna a Matemática, de um modo geral, um mito, no sentido de que, pela maneira como tem sido trabalhada nas escolas, ela se mostra muitas vezes impenetrável.

Constata-se que os conteúdos matemáticos, de maneira geral, são "ensinados" pelo professor tradicional com grande formalismo e abstração. É um ensino informatizante que se processa através de transmissão de fatos, como se a "cabeça" do educando fosse um sistema armazenador de dados, informações e idéias, e pelo qual o aluno não atinge a plena compreensão dos conceitos, apenas aceita-os, tornando-se um ser passivo; o ambiente Logo, por outro lado, possibilita-lhe a construção de conceitos matemáticos, aparentemente abstratos, de maneira simples e significativa, utilizando conhecimentos anteriores e transpondo-os e adaptando-os às novas situações-problema. Esse fato é exemplificado na representação da construção do círculo, quando o sujeito tenta várias vezes e por diversos caminhos e estratégias "traçar" no micro; e quando, para representar sua construção, compara com o modelo de círculo que já possui, ou que lhe foi apresentado. Dessa maneira, reflete sobre o modo pelo qual está resolvendo o problema proposto; isto é, estará pensando sobre o seu modo de pensar, e com isso, torna-se um ser epistemológico (Papert 1985).

Mais especificamente, no Estudo de Caso, com o sujeito explorando conceitos da Geometria Plana com o Logo Bidimensional, referente ao Capítulo 7, algumas inferências ou considerações de ordem metodológicas poderiam ser delineadas a partir desse estudo prático, no qual o sujeito pesquisado, foi incitado a resolver um dado problema matemático – Teorema de Pitágoras, em três paradigmas distintos: **Paradigma Tradicional**, **Paradigma Intuitivo** e **Paradigma Alternativo** (**Geometria da Tartaruga**).

Nesses três momentos da resolução do problema, pelo sujeito, os aspectos da atividade cognitiva segundo a perspectiva microgenética, nos possibilitaram constatar o dinamismo microgenético das condutas cognitivas do sujeito em situação prática, isto é, foi-nos possível estudar o sujeito cognoscente em suas intenções, valores e heurísticas.

A dimensão teleonômica diz respeito aos objetivos, fins, propósitos do sujeito ao agir no processo de resolução de problemas, enquanto que a Axiologia refere-se às avaliações, aos valores que o sujeito atribui às suas próprias ações, redimensionando suas estratégias, com vistas a atingir objetivos determinados. Trata-se, pois, da descrição que o sujeito faz ao atribuir significados, valores e intenções às suas estratégias no processo de resolução do problema proposto.

Assim sendo, no primeiro recorte desse estudo (**Paradigma Tradicional**), constatou-se a existência de uma heurística, constituída pelo sujeito já que foi utilizado um método analítico para chegar-se a uma solução. Porém esse fato não implicou um comportamento de adaptação à realidade em que o sujeito teve que adaptar seus conhecimentos, construir uma solução própria: esse fato mostra-nos que a acomodação e a assimilação estão equilibradas. Embora a solução tenha sido satisfatória e mesmo correta, foi resultante de um processo mecânico de resolução de problema, em que o sujeito utilizou como estratégia fórmulas e algoritmos e "reproduziu" o que havia "vivenciado" na escola. Isso mostra que não houve adaptação do conhecimento e sim sua reprodução.

Porém, no segundo recorte (**Paradigma Intuitivo**), o sujeito já necessitou de formas de modificação e reestruturação de seu conhecimento pré-existente sobre o Teorema de Pitágoras para adaptar esse conhecimento no sistema diferente de representação que lhe foi apresentado: este fato, demonstrou a ênfase na acomodação, mais do que na assimilação.

E finalmente no terceiro recorte, onde o sujeito trabalhou no **Paradigma Alternativo**, notou-se a prevalência maior da acomodação à assimilação, pois o sujeito necessitou fazer (n) diferenciações para chegar à generalização (assimilação). Isso implica não em reprodução de um conhecimento, mas na sua transformação e, portanto, na sua compreensão. Parafraseando Jean Piaget: **"Compreender é transformar e reinventar o conhecimento"**.

Essas variáveis, enfatizadas acima (ambientes informatizados, contexto Logo e análise microgenética), constituem ao nosso ver elementos básicos e importantes aos professores e pesquisadores, possibilitando dessa maneira, um repensar sobre suas práticas pedagógicas e, desse modo, um possível redimensionamento no processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.

Convém ressaltar ainda que a atividade de programar no computador e, mais especificamente, no ambiente Logo, deixa transparecer as particularidades dos comportamentos cognitivos do sujeito ao descobrir, criar formas de solucionar seus problemas, e de transpor e adaptar seus conhecimentos anteriores às novas situações. Desse modo, o sujeito da nossa pesquisa, ao representar figuras planas com o Logo Tridimensional, utilizou recursos desse sistema, fazendo analogias e diferenciações com os conhecimentos advindos do contexto Bidimensional, e sentiu que foi preciso transpor este contexto, para realmente conseguir adaptar seus conhecimentos e estratégias ao novo sistema representacional, ou seja, descrever as ações da tartaruga no espaço, com a finalidade de atingir seus objetivos.

Todavia, conflitos cognitivos foram evidenciados no decorrer do estudo com o Logo Tridimensional, a partir da experiência com o Logo Bidimensional; esses aspectos foram trabalhados com o sujeito do Estudo de Caso, a partir da exploração dos comandos básicos da tartaruga tridimensional, em que o modelo que o sujeito tinha do sistema era o contexto bidimensional. Assim, os primeiros conflitos que apareceram na tentativa de entender o sistema são ilustrados pelas frases do sujeito, tais como:

- "*Existem relações entre o que se faz e o que aparece na tela".*
- *"O que a gente programa tem três dimensões, o que a gente imagina tem três dimensões, mas o que a gente está vendo não tem três dimensões".*
- *"Quando se faz a figura se está sobre a figura (anda-se sobre a figura, corre-se a mão pela figura). Quando se quer ver a figura temos que nos posicionar em um ponto externo a ela".*

Dessa forma, o sujeito de nossa observação apresentou dificuldades ao tentar "passar" do Logo Bidimensional para o Tridimensional, entendendo este último como um conjunto de novas primitivas que foram incorporadas ao já conhecido ambiente da Tartaruga. Sua primeira preocupação foi de conhecer novas primitivas, para incorporá-las ao repertório já conhecido. A dificuldade começou a partir de então, pois a "exploração" dessas novas "primitivas" tinha como contexto "mental" o Logo Bidimensional. Essa interpretação inadequada é auxiliada pela saída na tela (que continua sendo bidimensional) para movimentos que supostamente ocorreriam "no espaço".

Logo Tridimensional não é uma extensão no sentido de agregar novos comandos à Tartaruga. Ele envolve "repensar" a Tartaruga no espaço. Esse fato, envolve enxergar a Tartaruga no plano como uma restrição para o ambiente da Tartaruga no espaço, e não simplesmente atribuir-lhe novas primitivas.

Fato análogo ocorre com o ensino da Geometria nas escolas: a Geometria Plana é ensinada muito antes da Geometria Espacial. Algumas propostas têm sido feitas mais recentemente, em termos de pesquisa, justificando começar-se o estudo da Geometria pelo espaço (pesquisas em desenvolvimento em Educação Matemática, UNESP/Rio Claro). O Logo Tridimensional colabora para a conscientização do espaço em que se vive, possibilitando o "aprender a aprender" sobre o espaço, sem o formalismo da Geometria Espacial.

É muito freqüente, entre novatos que aprendem uma nova linguagem de programação, detectar-se uma preocupação excessiva com o aprendizado de "comandos", confundindo aprender "comandos" com "aprender a escrever algoritmos". Nota-se algo semelhante ao que se refere à visão de novas primitivas do Logo Tridimensional como novos "recursos" a serem incorporados aos demais já existentes (Miskulin e Baranauskas, 1991). A tentativa do sujeito de entender os novos "comandos" desvinculados do entendimento do sistema como um **todo** (**descrição da forma do objeto no espaço** mais **a sua representação em perspectiva**), agravou-se pelo conflito entre o que foi descrito (objeto em sua forma concreta) e o que a tela mostra (representação do objeto).

Segundo Piaget, é a partir de conflitos que o sujeito reflete sobre o seu modo de agir, pensar e reestruturar seus processos mentais. Tais conflitos é que proporcionarão ao sujeito condições de ultrapassar o Logo Bidimensional e compreender o micromundo do Logo Tridimensional. Dessa forma, cabe a nós professores-educadores repensarmos nossos métodos estratégicos, tornando-os suficientemente desafiadores e instigantes, a fim de levarmos adiante nossa tarefa.

É interessante notar que, assim como muitas pessoas acreditam não ter aptidão para a Matemática, encontram-se também pessoas que se dizem "inaptas" para a Geometria Espacial por não conseguirem "enxergar" objetos tridimensionais pelas suas representações em perspectivas. Essa barreira não nos parece muito diferente da "matofobia" (Papert, 1985). Quebrar essa barreira envolve muitas vezes uma mudança na nossa postura de aprendizes. O sujeito começou a progredir no trabalho quando voltou ao concreto, ou aos objetos e até voltou ao "passo a passo" em termos de programação. Ou seja, o sujeito se voltou para o aspecto figurativo, a presença do objeto era necessária para poder haver uma reflexão mais complexa, em nível mental. A representação imagética é transformada numa representação gráfica.

Dessa forma, foi possível ao sujeito do Estudo de Caso, com sua criatividade e a utilização adequada dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**, a obtenção de resultados corretos na tarefa de representar figuras planas com a utilização do Logo Tridimensional. Nesse processo, quando criou uma estratégia que lhe possibilitasse a construção da elipse, evidenciou-se o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Analítica**. Existe porém uma diferença de procedimentos entre cada uma das estratégias utilizadas, cuja interpretação e entendimento devem ser parte do processo mental utilizado pelo sujeito. O pesquisador explorou uma dessas diferenças quando solicitou ao sujeito uma análise cuidadosa nos procedimentos que produziram as representações do contorno do círculo (Figuras 8.19 e 8.26). Ambas representam um círculo, e são semelhantes. Desse modo o sujeito utilizando uma folha de papel explicou essa diferença: *"Ao desenhar o círculo com os comandos **andar** e **virar,** a tartaruga percorre a linha da figura no plano, como se fosse um compasso".* Fazendo uso de sua mão para descrever os movimentos da tartaruga, completou: *"Ando por cima da folha onde a figura está desenhada."*, deslizando sua mão sobre a folha de papel, acompanhando a borda da figura. Após recortar o círculo e contorná-lo com a palma de sua mão direita, observou: *"Quando uso os comandos **andar** e **cabecear**, a tartaruga percorre o círculo por fora".*

Ficou ressaltado, nos procedimentos acima, a diferença entre a representação de uma figura no plano e a existência de uma figura (objeto manipulável). Enquanto a representação de uma figura é o desenho desta sobre uma superfície, ao recortá-la passamos para a existência dessa figura que, apesar da ínfima espessura do papel, pode ser manuseada. Podemos até não considerar a terceira dimensão representada pela espessura do papel, mas nela é possível o deslocamento da Tartaruga. Observamos, pelos recursos utilizados durante a análise acima, a compreensão e assimilação pelo sujeito, da "sintonicidade corporal".

Nessa exploração do uso do Logo Tridimensional na construção de figuras geométricas planas, vários polígonos foram construídos pelo sujeito, não só utilizando os comandos **andar** e **virar**, mas também utilizando combinações dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**. Pode-se inferir que o sujeito compreendeu a integração dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**, como um todo.

Desse modo, buscam-se nas particularidades e nas especificidades de uma situação-problema, fatos evidenciados que podem ser de grande utilidade para o professor de Matemática, em sala de aula, mais especificamente, no que se refere ao seu desempenho diante dos atos de ensinar e aprender. Porém, como já abordado no Capítulo 2 dessa pesquisa, convém alertar que, se o professor não tiver acesso aos crescentes avanços tecnológicos, incorre-se no risco de tornarmos os atuais métodos de ensino obsoletos, muito aquém do ensino que se almeja, aumentando cada vez mais o desvínculo entre a escola e a sociedade.

A atividade de programar no ambiente Logo constitui-se uma situação adequada para se observar e descrever as ações e reações do sujeito, ao resolver problemas, levantar hipóteses, criar estratégias, enfim, uma situação na qual pode-se inferir sobre os processos resolutivos do sujeito, ao controlar suas estratégias, atribuindo-lhes valores e significados para que possa realizar sua tarefa.

Desse modo, no processo de descrição de objetos no espaço (Capítulo 8), quando o sujeito foi solicitado a representar a construção do cubo, partiu novamente de conhecimentos prévios, tentando adaptar-se a essa nova realidade (contexto bidimensional) que o problema lhe impunha. Assim sendo, construiu o cubo com procedimentos do Logo Bidimensional e do Logo Tridimensional, e nesse processo evidenciou-se que o sujeito, apesar de estar consciente da necessidade de representar o cubo em um sistema diferente (Logo Tridimensional) e mais complexo, ainda não percebeu que o resultado de seu programa é diferente do anterior. Nota-se ainda que está preso ao aspecto figurativo e também à planificação geral de sua ação (fazer um cubo), não retoma os observáveis do objeto, ou seja, as particularidades do cubo: seis faces quadrangulares, entre outras, que lhe dariam a oportunidade de verificar que as Figuras 8.32 e 8.33, apesar de aparentarem iguais, apresentam uma diferença devido à conicidade inerente à perspectiva cônica, evidenciada na Figura 8.33. Trabalha mais sobre as intenções (fazer um cubo) do que sobre os aspectos causais (particularidades do cubo) de sua representação. Não coordena, portanto, as particularidades inerentes ao cubo.

Constata-se assim que com a utilização do Logo Bidimensional, à primeira vista podem-se obter na tela do computador, os mesmos resultados que se consegue através do Logo Tridimensional. Por exemplo, pode-se definir procedimentos usando o Logo Bidimensional, para que se produza o desenho que representa um cubo. Ressalta-se entretanto que para essa tarefa estarão envolvidos processos de representação, os quais, para o usuário despreparado, que não conhece as regras da projeção cônica, intrínseca à sua representação, poderão significar uma barreira intransponível. Estamos nos referindo principalmente à utilização da projeção cônica, e ao fato de existir no real a possibilidade de "enxergarmos" os objetos com mais de um ponto de fuga, como representado na Figura 8.12. Nos procedimentos mais usuais, deparamo-nos com simplificações que trazem como conseqüência distorções entre a imagem do real e a representação assim obtida, sem contudo comprometer a "percepção" do objeto representado, fato esse evidenciado em um dos projetos desenvolvidos pelo sujeito de nossa pesquisa (representação do cubo construído com Logo Bidimensional).

Nesse sentido, ressaltam-se as potencialidades do Logo Tridimensional que possui inerente aos seus procedimentos as regras da projeção cônica, sendo que nesse contexto o usuário pode trabalhar com conceitos sobre projeção, de forma simples e concisa, sem a demasiada abstração da Geometria tradicional.

No processo de resolução do problema do cubo, depois de buscar várias estratégias diferentes e explicitá-las, pode-se inferir que o sujeito realmente entendeu a representação do cubo, compreendendo seu significado, ou seja, para realmente representar um cubo percebeu que não basta somente a representação das arestas das faces laterais, mas é necessário a construção de sua tampa e de seu fundo, que expressam suas características como sólido geométrico, e não como figura espacial. Nota-se nesse momento o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Espacial**.

O trabalho com Logo Tridimensional concentra-se, pois, não na representação plana do objeto na tela, mas sim na descrição espacial do objeto. Dessa forma, o desenho de um cubo é produzido através da descrição dos movimentos (no espaço) que a Tartaruga deve fazer para percorrer as arestas das seis faces que compõem o cubo, como ilustrado na Figura 8.39.

Essa descrição geométrica do objeto lhe é inerente, no sentido de que ela não faz referência a nenhum elemento que lhe é externo. Esse fato não é evidenciado no ensino tradicional da Geometria, no qual a descrição geométrica é externa às figuras, no sentido de que primeiramente o indivíduo, realizando a tarefa de representar um sólido qualquer, lança mão de fórmulas e algoritmos, leis e teoremas, pertencentes à Geometria, para conseguir o seu intuito. Nesse sentido, afirmamos que é justamente a Geometria que, se por um lado relaciona-se à intuição e conduz ao descobrimento, por outro lado possibilita a conjunção entre o mundo físico e a matemática, e é esse o objetivo da utilização do Logo Tridimensional, ou seja, integrar as figuras projetadas no mundo real, através da descrição espacial dos objetos e de sua visualização no plano.

O fato da descrição geométrica ser intrínseca ao sistema do Logo Tridimensional possibilita ao usuário trabalhar com conceitos matemáticos como: retas paralelas, retas perpendiculares, conceitos sobre polígonos, poliedros, propriedades das figuras planas, entre outras, sem a demasiada axiomatização das fórmulas, algoritmos prontos e a grande abstração da Matemática e da Geometria.

Pode-se inferir, nesse contexto, que o usuário do Logo Tridimensional usa conhecimentos matemáticos e geométricos intuitivos, e por meio da arquitetura matemática que é inerente à Geometria da Tartaruga, vai abstraindo e construindo os conhecimentos "aparentemente abstratos" de uma maneira simples e concisa. Ao se utilizar dos recursos computacionais do Logo Tridimensional observa-se no comportamento do sujeito a presença de reações típicas, aquelas que a teoria de Piaget denomina **Abstrações**. Quando, por exemplo, o sujeito manipula um sólido geométrico (no caso, o cubo) e mesmo o identifica na tela, através de sua forma, esse conhecimento é retirado diretamente do objeto, isto é a sua representação é fruto de uma **abstração empírica**. Ao modificar as posições do cubo, manipulando-o, descobre, por **abstração pseudo-empírica** que todas as faces não se mostram visíveis num mesmo momento ao sujeito. Essa dedução é feita a partir do que o sujeito retira diretamente de sua ação sobre o objeto, daí configurar um exemplo desse tipo de abstração. Trata-se, de fato, de uma reflexão, porém retirada durante as explorações do real (manipulação do cubo de madeira).

Nas **abstrações reflexivas**, o conhecimento provém das coordenações das ações do sujeito sobre o objeto. Nesse caso o comportamento do sujeito de nossa pesquisa ao concluir que não podia pintar o cubo, pois a tinta escorria (Figura 8.35), revela-se como uma reação própria das **abstrações reflexivas**, em que a dedução se processa no momento em que o sujeito percebe a conjugação de fatores necessários à solução de seu problema (pintar o cubo). **As abstrações refletidas** estão representadas em todos os momentos em que o sujeito explicitamente formaliza suas idéias sob a forma de procedimentos que compõem seus programas, desde os mais simples (Figura 8.31) ao programa final, que contém a descrição geométrica mais consistente com a solução desejada – construir um sólido geométrico, o cubo, em um sistema tridimensional (Figura 8.39).

Pode-se constatar que o desenho de figuras geométricas no micromundo do Logo Bidimensional implica na coordenação dos movimentos de deslocamento e de giro. O mesmo ocorre no micromundo do Logo Tridimensional. Porém, no sistema do Logo Bidimensional, essa coordenação processa-se através de dois eixos coordenados representados no sistema cartesiano (horizontal e vertical), enquanto que com o Logo Tridimensional, acresce-se mais um eixo, o perpendicular à tela do monitor, como já ilustrado na Figura 8.2.

Decorre dessa forma que o desenho de um sólido, sem o recurso tecnológico da holografia, implica em um tipo de raciocínio mais complexo para o usuário, o qual terá que considerar movimentos da Tartaruga que não são os mesmos utilizados no Logo Bidimensional, pois o Logo Tridimensional envolve também a noção de profundidade, enquanto que no plano (Logo Bidimensional), só se trabalha com duas dimensões, a altura e a largura.

Constatou-se, durante os estudos das situações práticas de nossa pesquisa, o dinamismo microgenético das condutas cognitivas do sujeito. Assim sendo, essa análise que aborda a inteligência em ação, no curso da construção de conceitos geométricos, mostra-nos a inter-relação dos aspectos funcionais e estruturais da constituição do conhecimento e as interações entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento (representação da construção do cubo no computador).

Desse modo, a análise microgenética nos fornece subsídios a fim de elucidar o processo pedagógico, no que se refere aos caminhos e meios que o sujeito inventa e descobre para levar em conta e lançar mão de seus conhecimentos anteriores em função do que necessitou descobrir em um contexto específico de resolução de problemas. E além disso, refere-se aos meios que os professores podem usar para instigar e provocar o desenvolvimento do raciocínio do sujeito e, assim sendo, torná-lo ativo no processo de construção do conhecimento, em ambientes educacionais informatizados.

Um fato importante a ser destacado em um outro momento dessa interação, ocorreu quando o pesquisador solicitou ao sujeito que representasse uma casa com o Logo Tridimensional, incitando-o desse modo, a coordenar mais de um sólido, integrando-os como um todo na representação do problema. No processo de resolução desse problema o sujeito partiu da mesma estratégia que utilizou no programa anterior, lançando mão dos recursos que conhecia do contexto bidimensional e tentou adaptá-los ao novo esquema representacional (contexto tridimensional). Nesse processo de representação da construção da casa, como já explicitado no Capítulo 8, o sujeito utilizou regras da projeção paralela ou cavaleira, sendo que esse tópico pode ser trabalhado como uma das conexões entre a **Geometria da Tartaruga** e a **Geometria Projetiva.**

Desse modo, com os recursos do Logo Bidimensional foi possível ao sujeito representar a casa em uma **única posição** em relação à tela. Assim sendo, processo análogo constata-se em uma pintura ou em uma fotografia: caso se deseje registrar a representação de um objeto em diferentes posições, o pintor reinicia seu trabalho em diferente tela, a partir de diferentes pontos de observações; ou o fotógrafo opera sua câmara fotográfica uma outra vez, posicionado em diferente ponto de observação em relação ao objeto. Nesse caso, o sujeito deveria alterar seus procedimentos utilizados durante a sua programação, e eventualmente usar diferentes estratégias, a cada posição em que deseja representar a casa, revendo e alterando seu programa computacional em cada momento associado a uma nova posição. Com o Logo Bidimensional não foi possível ao sujeito elaborar um programa genérico (em relação a posições de observação e dimensões) que lhe permitisse a representação da casa em diferentes posições em relação à tela e, portanto, a representação de objetos espaciais. Isso significa que coordenar todas as variáveis no contexto Bidimensional para representar a casa de uma maneira real não foi possível ao sujeito. No programa computacional apresentado pelo sujeito, torna-se possível somente processar-se alterações nas dimensões do objeto representado na tela, alterações estas, associadas à variável de entrada do programa **casabi**, que define os passos da Tartaruga nos comandos **pf** e **pt**.

Nesse momento, constatou-se que o sujeito sentiu necessidade de ultrapassar os limites do contexto bidimensional e suas limitações, adentrando-se no micromundo da Tartaruga no espaço.

A análise dos procedimentos do sujeito ao procurar compor os dois sólidos (prisma quadrangular - corpo da casa e prisma triangular - telhado da casa) e integrar o todo representado pela casa, com a construção da frente e do fundo, na visão microgenética, conforme já explicitado no Capítulo 8, dessa pesquisa, envolve um processo de generalização construtiva que se caracteriza por uma reconstrução de conhecimentos anteriores advindos de outras situações-problema no contexto do Logo Tridimensional, com vistas a atingir um objetivo pré-determinado pelo sujeito. Essa reconstrução consiste em uma planificação dos procedimentos em que grande parte dos elementos que compõem a heurística procedural são meras adaptações de contextos vivenciados anteriormente no Logo Bidimensional. Contudo, o problema atual, isto é, a representação da construção da casa, é novo e exige do sujeito movimentos que vão da intenção (objetivos, fins do sujeito) às particularidades do objeto a ser construído (causalidade) e vice-versa, o que imprime à estratégia reavaliações, controles constantes, reajustes mais complexos do que na representação do problema do cubo, pois o problema atual exige a representação imagética da combinação de dois sólidos no espaço.

Dentre os conhecimentos novos que emergiram da situação-problema (representação da construção da casa), um especificamente refere-se ao entendimento do comando **cabecear** negativo integrado com a **sintonicidade corporal**, expressa pelo momento em que o sujeito compreendeu que, se a tartaruga andasse por fora do corpo da casa, essa situação não seria real (não seria possível percorrer por fora o piso da casa pois essa estaria apoiada sobre o solo); nesse sentido, a sintonicidade corporal não seria constatada. Um segundo momento em que o sujeito compreendeu a sintonicidade corporal foi durante a construção do telhado que, ao ser integrado ao corpo da casa, não permitiu à tartaruga percorrê-lo por fora, compreendendo dessa forma que não poderia **cabecear** positivo. Para que fosse possível ao sujeito sintonizar-se corporalmente com o movimento da tartaruga no espaço, o pesquisador interferiu solicitando ao sujeito, para que esse desenhasse um quadrado (Figuras 8.57 e 8.58); com isso, incitou-o a adentrar-se em uma investigação e busca da compreensão do comando **cabecear**, seja positivo seja negativo. Em seguida, lançou mão de outro problema: a construção de uma estrela de cinco pontas, que implica na elaboração de um procedimento mais complexo do que o do quadrado e mais adequado para que o sujeito compreenda os efeitos da coordenação do comando **cabecear** positivo e negativo, já que esse fato havia se constituído em um conflito cognitivo para o sujeito, no momento da construção do quadrado, quando este refletiu: *"Então eu não posso cabecear negativo?".*

Tendo compreendido a coordenação dos comandos **cabecear** negativo e positivo, através do traçado da estrela, o sujeito conseguiu perceber a necessidade de reestruturar sua estratégia ao construir o fundo e a frente da casa, pois compreendeu a impossibilidade da Tartaruga representa-los percorrendo-os por dentro (**cabecear** negativo), por se tratarem de figuras planas, e percorrendo-os por fora (**cabecear** positivo) dado que a casa está apoiada sobre o solo, em uma situação real. A reestruturação de sua estratégia constituiu-se na substituição do comando **cabecear** pelo comando **virar** no sub-procedimento **frente**.

Convém ressaltar-se que a inclusão de problema da natureza do quadrado não tem como finalidade específica ensinar o sujeito a usar o comando, mas sim dialogar com as suas dificuldades, a partir de uma situação mais familiar em que ele possa estabelecer mais facilmente correspondências e analogias. Trata-se, portanto, da utilização de uma situação-problema atuando nesse contexto como **"objeto para se pensar sobre"**, e do aproveitamento do conhecimento anterior, e portanto do êxito, objetivando incitar o sujeito a avançar na compreensão do conhecimento cada vez mais. Nesse sentido, o êxito pode ser mais fecundo do que o erro no processo de construção de noções geométricas. E são a partir de aspectos como esses acima delineados que nós professores devemos sempre que necessário lançar mão, em nossa prática educativa, para que a tornemos cada vez mais significativa aos nossos alunos.

Esses fatos evidenciam a potencialidade e as idéias poderosas do ambiente computadorizado, mais especificamente do contexto Logo pois este está sempre sugerindo ao sujeito aquisição de novos conhecimentos e proporcionando condições de reelaboração de suas estratégias, criação de heurísticas e, finalmente, possibilitando a construção de novas idéias. Esse paradigma se distingue como ferramenta educacional pelos seus aspectos interativos que proporcionam aos usuários a geração de novos problemas e de novas possibilidades de resolução, constituindo-se dessa maneira, em um artefato metodológico que possibilita ao professor compreender o raciocínio do aluno e, dessa maneira, obter referências necessárias para o pleno desenvolvimento de sua proposta pedagógica.

De fato, ressalte-se que coordenar os deslocamentos da tartaruga para "traçar" as figuras geométricas com o Logo Bidimensional e coordenar os mesmos deslocamentos no espaço implicam operações qualitativamente diferentes. No contexto do Logo Bidimensional, no plano, essas coordenações exigem do usuário um grau menor de complexidade para a solução do problema. Todas as regulações (antecipações, compensações e outras) se reduzem às coordenações de duas dimensões (altura e largura) que estão explícitas no contexto, seja na tela, seja na imaginação do sujeito. Ora, no Logo Tridimensional, essa coordenação implica também em uma nova dimensão (profundidade), que é implícita ao contexto e, portanto, exige uma maior abstração do usuário. Coordenar simultaneamente três dimensões e os comandos responsáveis pela representação tridimensional dos objetos, em uma tela bidimensional, implicam em vislumbrar a solução do problema, considerando uma tela que existe (tela do monitor) e os demais planos imaginários onde ocorrem as ações da Tartaruga, o que só é possível quando o sujeito é capaz de operar sobre o real e o virtual concomitantemente.

Essa coordenação se torna ainda mais complexa quando o sujeito, ao desenhar a casa no Logo Tridimensional, necessita trabalhar ao mesmo tempo com as especificidades da construção de um sólido na tela, como resultado da coordenação de outros sólidos, com as diferentes possibilidades de representa-lo em diferentes posições na tela. Na planificação e execução dos procedimentos referentes à representação da casa no Logo Tridimensional, o sujeito necessitou subordinar certos meios a certos fins, que exigiam coordenação de coordenações, próprias de raciocínios formais.

A análise microgenética permite perceber não apenas as formas de raciocínios necessários à resolução de um dado problema mas, além disso, o modo pelo qual a criação de heurística está subordinada aos controles e conhecimentos anteriores do sujeito (representação de figuras planas, representação do cubo, entre outros) e aos fins (representação da casa).

Generalizar, portanto, não é simplesmente um processo de repetição de procedimentos anteriores para servir a novos contextos. Trata-se de uma verdadeira reformulação de heurísticas, de planificações e de combinações anteriores e atuais, o que constitui sempre uma reconstrução, uma nova elaboração do problema.

Na análise da descrição dos problemas propostos, foi-nos possível constatar que o comportamento do sujeito ao resolver problemas atualmente pôde ser ampliado de modo a se compreender todos os meandros resolutivos que significam muito mais do que listar passos pelos quais o sujeito chega a uma conclusão, mas, acima de tudo, busca-se entender como esses passos se encadeiam no processo geral inerente a uma estratégia escolhida. Trata-se de uma análise que dá conta da compreensão dos processos mentais do sujeito e da criação de heurísticas, constituindo desse modo um contexto extremamente útil aos educadores comprometidos com a aprendizagem ativa e com o ensino que provoca situações desafiantes.

Pelo exposto, evidencia-se que, além de atingirmos nosso propósito, de delinear um contexto favorável à implementação de uma proposta metodológica alternativa que respondeu o problema – É possível resgatar ou captar algumas formas de abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do ambiente Logo? – esse estudo propiciou-nos subsídios teórico-metodológicos para nos posicionar como professores-pesquisadores preocupados em redimensionar e integrar nossos métodos de trabalho com a nova realidade que se impõe com o avanço da tecnologia em nossa sociedade.

SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Ao longo de nossa pesquisa nos deparamos com várias situações envolvendo tópicos da Geometria que possibilitariam estudos mais aprofundados, as quais delineamos como sugestões que poderiam contribuir para futuras pesquisas, possibilitando aos pesquisadores dessa área adentrar-se na busca de novas estratégias metodológicas, que visam a conciliação de ambientes informatizados com o ensino.

Dentre outras, sugere-se traçar um paralelo entre o sistema computacional Logo (Logo Bidimensional e Logo Tridimensional) e outros softwares que abarcam o ensino da Geometria, mostrando os elementos convergentes e divergentes, tanto no aspecto computacional como no aspecto pedagógico dos raciocínios inerentes às construções e as noções geométricas nos dois contextos.

Um outro estudo poderia constituir-se em pesquisar como tópicos relativos a Matemática específica do ensino de terceiro grau poderiam ser integrados, através de situações-problema, ao ensino do segundo grau, por meio do sistema computacional Logo. Seria o caso por exemplo, de noções sobre Topologia, noções sobre Cálculo Diferencial e Integral, objetivando, dessa forma, articular alguns tópicos da Matemática às situações da realidade do aluno; assim sendo, ficaria explícito que a Matemática não se constitui de conteúdos desvinculados, como é abordada no ensino tradicional.

Sugere-se ainda um repensar no ensino da Matemática para a escola elementar através do sistema computacional Logo pois, na nossa concepção, esse ambiente propicia a integração da geometria intuitiva da criança com as demais abordagens da Geometria.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

AABOE, Asger (1984) *Episódios da História Antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, (Fundamentos da matemática elementar).

ABELSON, Harold, diSESSA, Andrea A. (1981) *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. Cambridge: MIT Press.

ACKERMANN, Edith (1990) *Pathways into a child's mind: helping children become epistemolgists.* In: HELTNE, P., MARQUARDT, L. (Ed.) Symposium Proceedings Science Learning in the Informal Setting. Chicago, p.7-19.

ALMEIDA, Fernando José de (1987) *Educação e informática: os computadores na escola.* São Paulo: Cortez. (Polêmicas do nosso tempo, 19).

ALVES, Rubem (1988) *Conversas com quem gosta de ensinar. 22.ed.* São Paulo: Cortez. (Polêmicas do nosso tempo, 1).

AROUCA, Lucila S. (1983) *Educação Extra Escolar e Realidade Brasileira: Política Governamental de Formação de Recursos Humanos.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. (Tese de Doutorado em Educação).

BARANAUSKAS, Maria Cecília Calani (1993) *Procedimento, Função, Objeto ou Lógica? Linguagens de Programação vistas pelos seus Paradigmas*. In: VALENTE, José Armando (Org.) *Computadores e conhecimento: repensando a educação.* Campinas: UNICAMP.

BARRELA, Fernanda M.F., PRADO Maria Elisabete B.B. (1990) *NIED - Memo Nº 8*. Campinas: UNICAMP.

BERTONHA, Regina Aparecida (1989) *O ensino de geometria e o dia-a-dia na sala de aula.* Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação de Mestrado em Educação).

BOSSUET, G. (1985) *O Computador na Escola: O Sistema Logo*. Porto Alegre: Artes Médicas.

BOVET, Magali, VOELIN, Daphné (1990) *Exame e aprendizagem operatórios: é preciso escolher entre as abordagens estrutural e funcional?* In Archives de Psychologie, 58, p.197-212.

BOYER, Carl B. (1974) *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher.

BRANDÃO, Carlos R. (Org.) (1986) *Pesquisa Participante. 6.ed.* São Paulo: Brasiliense.

BRUNER, Jerome S. (1972) *O Processo da Educação. 8.ed.* São Paulo: Nacional.

BYERS, Victor (1982) *Why study the history of mathematics?* In: Inst. J. Math. Educ. Sci. Technol., v.13, n.1, p.59-66.

CALANI, Maria Cecília (1981) *Conceitos geométricos através da linguagem logo*. Campinas: Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Ciência da Computação).

CARAÇA, Bento de J. (1984) *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Sá da Costa.

CARRAHER, David, et al. (1988) *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Editora Cortez.

CARRAHER, Terezinha Nunes (Org.) (1986) *Aprender pensando*. *2.ed.* Petrópolis: Vozes.

CARRASCO, Lucia Helena Marques (1992) *Jogo versus realidade: implicações na educação matemática*. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

CASTELNUOVO, Emma (1989) *Panorama de la Enseñanza Matemática en el Tiempo y en el Espacio*. In: Educación Matemática, v.1, n.3, p.24-29.

CASTELNUOVO, Emma, BARRA, Mario (1976) *Matemática Nella Realtà*. Torino: Editore Boringhieri.

CASTELNUOVO, Emma (1966) *Geometria Intuitiva.* Trad. por R.R. Mercadal. Barcelona: Labor.

CASTORINA, J.A.; et al. (1988) *Psicologia Genética: Aspectos Metodológicos e Implicações Pedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas.

CASTRO, Amelia Americano F. Domingos (1969) *Bases para uma Didática do Estudo: Na Perspectiva do Desenvolvimento Intelectual*. São Paulo: Seção Gráfica, USP.

CLEMENTS, D.H., BATTISTA, M.T. (1991) *Geometry And Spatial Reasoning.* In: NCTM-TÓPICO-18 p..420-465.

CHARLOT, Bernard (1983) *A Mistificação Pedagógica: Realidades Sociais e Processos Ideológicos na Teoria da Educação. 2.ed.* Rio de Janeiro: Zahar.

D'AMBROSIO, Beatriz S.(1993) *Formação de Professores de Matemática para o século XXI: O Grande Desafio*. In: Pro-Posições, v.4, n.1[10], p.35-41.

D'AMBROSIO, Ubiratan (1993) *Educação Matemática: Uma Visão da Arte.* In: Pro-Posições, v.4, n.1[10], p.7-17.

D'AMBROSIO, Ubiratan (1991) *Matemática, Ensino e Educação: Uma Proposta Global.* In: Temas e Debates, SBEM, Ano IV, n.3, p.1-16.

D'AMBROSIO, Ubiratan (1990) *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. São Paulo: Ática.

D'AMBROSIO, Ubiratan et al. (1990) *Eu detesto matemática.* In: Revista Nova Escola, São Paulo, maio, anoV, n.39. p.8-10.

D'AMBROSIO, Ubiratan (1986) *Da Realidade à Ação: reflexões sobre educação (e) matemática.* São Paulo: Summus.

D'AMBROSIO, Ubiratan (1985) *Socio-cultural bases for mathematics education.* Campinas: UNICAMP.

DANTE, Luiz Roberto (1988) *Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática.* Rio Claro: UNESP. (Tese de Livre Docência).

DANTE, Luiz Roberto (1980) *Incentivando a criatividade através da educação matemática.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. (Tese de Doutorado em Educação).

DEMO, Pedro (1990) *Pesquisa: princípio científico e educativo.* São Paulo: Cortez.

DOUADY, R. (1993) *Professores reconstituem história para ensinar bases da Matemática. Folha de São Paulo.*

ERNEST, Paul (1992) *Are there revolutions in mathematics?* In: Philosophy of Mathematics Education Newsletter, n.4,5, p.14-18.

EUCLIDES (1945) *Elementos de Geometria.* São Paulo: Cultura.

EVES, Howard (1992) *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula - Geometria.* São Paulo:Atual.

EVES, Howard W. (1976) *An Introduction to the History of Mathematics (fourth edition)* New York: Holt Rinehart and Winston.

FREIRE, Paulo (1987) *Pedagogia do Oprimido. 17.ed.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, (O mundo, hoje, 21).

FREIRE, Paulo (1984) *Educação como Prática da Liberdade. 15.ed.* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

FREITAG, Barbara (1984) *Sociedade e Consciência: Um estudo piagetiano na favela e na escola.* São Paulo: Cortez.

FREITAG, Bárbara (1980) *Escola, Estado e Sociedade. 4.ed.* São Paulo: Moraes.

FRIGOTTO, Gaudêncio (1986) *A produtividade da escola improdutiva: um(re) exame das relações entre educação e estrutura econômico-social e capitalista. 2.ed.* São Paulo: Cortez.

GADOTTI, Moacir (1989) *Convite à Leitura de Paulo Freire*. São Paulo: Scipione.

GARDNER, Martin (1992) *Rodas, vida e outras diversões matemáticas.* Lisboa: Gradativa.

GARDNER, Martin (1961) *Divertimentos Matemáticos.* São Paulo: Ibrasa.

GATTI, Bernadete (1992) *Informatização e Tecnologia.* In: SERBINO, Raquel Volpato, BERNARDO, Maristela Veloso Campos (Org.) *Educadores para o Século XXI: Uma Visão Multidisciplinar.* São Paulo: UNESP.

GAZIRE, Eliane Scheid (1988) *Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática.* Rio Claro: Instituto de Ceociências e Ciências Exatas da UNESP. (Dissertação de Mestrado em Educação).

GERDES, Paulus (1991a) *Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação.* Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.

GERDES, Paulus (1991b) *Cultura e o despertar do pensamento geométrico*. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.

GERDES, Paulus (1986) *Sobre o despertar do pensamento geométrico.* Dresden (RDA): Instituto Superior Pedagógico Karl Friedrich Wander. (Tese de Doutorado em Filosofia).

GERDES, Paulus (1984) *A Matemática a Serviço do Povo*. In: Ciência e Tecnologia, Maputo, n.7.

GILLÈRION, Christiane (1979) *Da Epistemologia Piagetiana a uma Psicologia em Idade Pré-Escolar.* In: L.B. Leite, *Piaget e a Escola de Genebra*, 1987. São Paulo: Cortez.

GIROUX, Henry (1988) A e*scola crítica e política cultural. 2.ed.* São Paulo: Cortez, (Polêmicas do nosso tempo, 20).

GRABINER, J.V. (1975) *The Mathematician, The Historian, and the History of Mathematics. In:* Historia Mathematica, 2, p.439-447.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1973) *Not from nowhere - History of Philosophy behind Mathematical Education.* In: J. Math. Sci. Technol. v.4 p.421-453.

HOYLES, Celia, NOSS, Richard (Org.) (1992) *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge: MIT Press.

HOYLES, Celia (1988) *Logo And Mathematics Education (LME 4) at The International Congress of Mathematics Education: A Report.* From Joel Hillel and Celia Hoyles in Logo Exchange-December(p.18)

IMENES, Luiz Márcio P.(1989) *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática.* Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

IMENES, Luiz Márcio (1988) *Vivendo a matemática: geometria dos mosaicos.* São Paulo: Scipione.

INHELDER, Bärbel, CAPRONA, Denys (1992) *Vers le Constructivisme Psychologique: Structures? Procédures? Les deux indissociables*. In: INHELDER, B., CELLÉRIER, G., et al. *Le cheminement des découvertes de lénfant. Recherche sur les microgeneses cognitives*. Paris: Delachaux et Nietlé.

INHELDER, Bärbel, CELLÉRIER, Guy, et al. (1992) *Le Cheminement des découvertes de l'enfant. Recherche sur les microgenèses cognitives*. Paris: Delachaux et Niestlé.

INHELDER, Bärbel (1987) Prefácio. In: PIAGET, Jean, GARCIA, Rolando, *Psicogénese e História das Ciências*. Lisboa: Dom Quixote.

JONES, P.S. (1969) *The History of Mathematics as a Teaching Tool*. In: Historical Topics for the Mathematics Classroom. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

KILPATRICK, Jeremy (1992) *A History of Research In Mathematics Education*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, p.3-38.

KILPATRICK, Jeremy, NESHER, Pearla (Ed.) (1990) *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

KLEIN, Felix (1945) *Elementary Mathematics from a Advanced Standpoint.* New York: Dover.

KLINE, Morris (1976) *O fracasso da matemática moderna.* São Paulo: IBRASA.

KRULIK, Stephen, RUDINICK, Jesse A. (1982) *Teaching problem solving to preservice teachers.* Arithmetic Teacher, 42-5.

KUHN, Thomas S. (1990) *A Estrutura das Revoluções Científicas. 3.ed.* São Paulo: Perspectiva.

KUHN, Thomas (1987) *La Tension Esencial: Estudios selectos sobre la tradicion y el cambio em el ámbito de la ciencia*. México: Fondo de Cultura Económica.

LA TAILLE, Yves De (1990) *Ensaio sobre o lugar do computador na educação*. São Paulo: Iglu.

LA TAILLE, Yves de, OLIVEIRA, Marta Kohl de, DANTAS Heloysa (1992) *Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discusão.* São Paulo: Summus.

LAKATOS, Imre (1978) *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.

LEITE, Luci Banks (Org.) (1987) *Piaget e a Escola de Genebra*. São Paulo: Cortez.

LORENZATO, Sergio (1976) *Subsídios metodológicos para o ensino da matemática: área de figuras planas.* Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

LOS ALAMOS NATIONAL LABORATORY (1992) *Los Alamos National Laboratory Education & Special Employment Programs*. Los Alamos, NM, USA.

LOVELL, Kurt (1988) *O Desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos e Científicos na Criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

LÜDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E.D.A. (1986) *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

MAGNANI, Maria do Rosario Mortatti (1992) *Qualidade de Ensino e Formação do Professor.* In: SERBINO, Raquel Volpato, BERNARDO, Maristela Veloso Campos (Org.) *Educadores para o Século XXI: Uma Visão Multidisciplinar*. São Paulo: UNESP.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér (1992) *A solicitação do meio escolar e o desenvolvimento das estruturas da inteligência no deficiente mental: uma interpretação fundamentada na teoria do conhecimento de Jean Piaget.* Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

MATOS, J.F. (1991) *Logo na Educação Matemática: Um Estudo Sobre as Concepções e Atitudes dos Alunos.* Tese de Doutorado, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.

MIGUEL, Antonio (1993) *Três estudos sobre história e educação matemática.* Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

MINSKY, Marvin (1989) *A Sociedade da Mente.* Rio de Janeiro: Francisco Alves.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1994) *Dinamismo Microgenético das Condutas Cognitivas no Processo de Construção de Noções Geométricas em Ambientes Informatizados*. In: II Congresso Ibero-americano de Informática na Educação. Lisboa, Anais. (A ser publicado outubro/94).

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1993) *Tridimensional Logo: Art or/and Geometry?* In: The Tenth International Conference on Tecnology and Education, Cambridge - USA, Proceedings, p.1016-1018.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra, BARANAUSKAS, Maria Cecília Calani (1991) *Logo tridimensional como estratégia para a exploração da geometria espacial.* In: II Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo, Anais, p.150-151.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1989) *A Geometria Encontrada Na Natureza Estudada Através Da Geometria Da Tartaruga.* In: IV Congresso Internacional Logo, março, Santiago do Chile, Resumos dos trabalhos apresentados, p.121-124.

MONIZ dos SANTOS, Maria Eduarda V. (1991) *Mudança Conceptual na Sala de Aula: Um Desafio Pedagógico.* Lisboa: Livros Horizontes.

NOSS, Richard (1986) *Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra Through Logo Programming.* In: Educational Studies in Mathematics. p.335-357.

OLDROYD, David (1986) *An introductory study of the history of the philosophy and methodology of science*. New York, London: Methuen.

PAPERT, Seymour (1993) *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*. New York: Basic Books.

PAPERT, Seymour (1985) *Logo: Computadores e Educação*. São Paulo: Brasiliense.

PATTO, Maria H.S. (1984) *A criança marginalizada para os piagetianos brasileiros: deficientes ou não?* In: Cadernos de Pesquisa, São Paulo, novembro, n.51, p.3-11.

PAVANELLO, Regina Maria (1989) *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica.* Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação de Mestrado em Educação).

PEIRCE, Charles S. (1977) *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva. (Coleção Estudos n.46).

PEREZ, Geraldo (1991) *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel (1993) *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

PIAGET, Jean, GARCIA, Rolando (1987) *Psicogénese e História das Ciências.* Lisboa: Dom Quixote, (Ciência Nova, 6).

PIAGET, Jean, et al. (1986) *O possível e o necessário: evolução dos necessários na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

PIAGET, Jean, et al. (1985) *O possível e o necessário: evolução dos possíveis na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

PIAGET, Jean (1984) *Para Onde Vai a Educação. 8.ed.* Rio de Janeiro: José Olympio.

PIAGET, Jean (1983) *Comentários finais.* In PALMARINI, M.P. (Org.) *Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem: o debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky.* São Paulo: Cultrix, USP.

PIAGET, Jean (1983) *A epistemologia genética / Sabedoria e ilusões da filosofia; Problemas de psicologia genética 2.ed*. São Paulo: Abril Cultural, (Os pensadores).

PIAGET, Jean (1978) *A Representação do Mundo da Criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

PIAGET, Jean et al. (1978) *Fazer e Compreender.* São Paulo: Melhoramentos e USP.

PIAGET, Jean (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 2) l'abstraction de l'ordre les relations spatiales. Études d'épistemologie génétique*. Paris: PUF, v.35. t.2.

PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel (1975) *A Gênese das Estruturas Lógicas Elementares*. Rio de Janeiro: Zahar.

PIAGET, Jean (1975) *El mecanismo del desarrolo mental.* Trad. A. del Zal. Madrid: Ed. Nacional.

POINCARÉ, Henri (1988) *A Ciência e a Hipótese. 2.ed.* Brasilia: Ed. UnB.

POINCARÉ, Henri (1927) *Science et Méthode*. Paris: E. Flammarion.

POLYA, George (1978) *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

POLYA, George (1967) *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley.

PONTES, João (1988) *A Situação Atual e o Passado Recente do Ensino da Matemática.* Lisboa.

POPPER, Karl R. (1978) *A lógica das Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Tempo Universitário.

PRADO, Ema Luiza Beraldo (1990) *História da matemática: um estudo de seus significados na educação matemática.* Rio Claro: Instituto de Geociência e Ciências Exatas da UNESP. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

REGGINI, Horacio C. (1988) *Computadoras: Creatividad o Automatismo?* Buenos Aires: Ediciones Galápago.

REGGINI, Horacio C. (1985) *Ideas e Formas: Explorando el Espacio con Logo*. Buenos Aires: Ediciones Galápago.

RESNIK, M.D. (1988) *Mathematics from the structural point of view*. In: Revue Internationale de Philosophie, v.42, n.167, 4, p.400-424.

SCHOENFELD, A.H. (1985) *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

SÃO PAULO (1989) *Proposta curricular para o ensino de matemática; 2º grau. 2.ed.* São Paulo:SE/CENP.

SÃO PAULO (1988) *Proposta cirricular para o ensino de matemática; 1º grau. 3.ed.* São Paulo: SE/CENP.

SAVIANI, Demerval (1989) *Escola e democracia: teorias da educação, curvatura da vara, e onze teses sobre educação e política. 21.ed.* São Paulo: Cortez, (Polêmicas do nosso tempo, 5).

SAVIANI, Demerval (1985) *Educação do senso comum à consciência filosófica.* São Paulo: Cortez.

SEBASTIANI FERREIRA, Eduardo (1989a) *The Genetic Principle and the Ethnomathematics.* In KEITEL C. (Ed.) *Mathematics, Education, and Society.* Paris: UNESCO.

SEBASTIANI FERREIRA, Eduardo (1989b) *Um Caminho a Seguir para se Iniciar a Pesquisa em Educação Matemática.* III Simpósio de Iniciação Científica em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro.

SEBASTIANI FERREIRA, Eduardo (1989c) *Notas de aula*. Campinas: UNICAMP.

SEBEOK, Thomas A., SEBEOK, Jean U. (1983) *"You Know My Method": A Juxtaposition of Charles S. Peirce and Sherlock Holmes.* In: ECO, Umberto and SEBEOK, Thomas, *The Sign of Three.* Bloomington:Indiana University Press.

SERRAZINA, Lurdes, MATOS, Jose Manuel (1988) *O Geoplano na Sala de Aula*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

SEVERINO, Antonio Joaquim (1986) *Educação, Ideologia e Contra Ideologia.* São Paulo: EPU.

SNYDERS, Georges (1977) *Escola, classes e luta de classes*. São Paulo: Moraes.

STRUIK, Dirk J. (1992) *História Concisa das Matemáticas. 2.ed.*. Lisboa: Gradativa.

STRUIK, Dirk J. (1985) *Por que estudar a história da matemática?* In: GAMA, Ruy (Org.) *História da Técnica e da Tecnologia*. São Paulo: USP.

TAHAN Malba (1962) *Matemática divertida e delirante*. São Paulo: Saraiva.

THOM, R. (1971) *Matemática Moderna: um erro educacional e filosófico?* In: American Scientist, 59 (6) P.695-699. Trad. de circulação restrita SCANAVINI, R.A.

UPINSKY, A. (1989) *A Perversão Matemática: o olho do poder.* Rio de Janeiro: Francisco Alves.

VALENTE, José Armando (1993a) *Diferentes usos do computador na educação.* In: VALENTE, José Armando (Org.) *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas: UNICAMP.

VALENTE, José Armando (1993b) *EDUCOM - UNICAMP: 10 Anos de Trabalho com a Escola Pública.* In: VALENTE, José Armando (Org.) *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas: UNICAMP.

VITALE, Bruno (1991) *Computador na Escola um Brinquedo a mais?* In: Ciência Hoje, v.13, n.77, out/nov, p.19-25.

WEINZENBAUM, Joseph (1981) *Puissamce de l'ordinateur et raison de l'home: du judgement au calcul.* Paris: Editions Informatics.

WILDER, R.L. (1974) *Evolution of Mathematical Concepts: An Elementary Study.* New York: Wiley.

ANEXO I

ANEXO I

PROJETO I: CLUBINHO DE MATEMÁTICA - "DESCOBRINDO A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA GEOMETRIA DA TARTARUGA"

O "Clubinho" é uma atividade do Laboratório de Ensino de Matemática, criado pela Professora Dra. Beatriz D'Ambrosio e pela presente autora, em final de 1988, no IMECC/UNICAMP[1], com o incentivo do Professor Dr. José Armando Valente, e com a colaboração de outros professores e alunos da Licenciatura de Matemática.

Por que o nome Clubinho?

Esse nome surgiu baseado em vários pressupostos, mais especificamente ressaltar-se-á dois aspectos fundamentais:

- Por se tratar de uma filosofia pouco comum marcada pela participação de crianças no ambiente universitário, integrando-as de modo a proporcionar-lhes o ensino da Matemática real, por meio de metodologias alternativas diversas, no qual, inseridas nesse contexto pudessem se sentir "pequenos pesquisadores", aproximando-se da Matemática, ou seja, estando de fato imersas no processo de se "fazer matemática".

- O nome Clubinho também foi criado com uma filosofia voltada à integração real dos alunos de Licenciatura de Matemática à seus cursos, ou seja, que esses alunos, futuros professores-pesquisadores em Matemática, pudessem vivenciar ações pedagógicas distintas, antes mesmo de se tornarem professores de Matemática, pois acredita-se que o futuro professor ao experimentar diferentes metodologias, diferentes abordagens metodológicas, insere-se de fato no espírito real do que vem a ser um futuro professor-pesquisador consciente de sua prática educativa. Desse modo, no processo de formação do futuro professor, o Clubinho representa uma prática extra-curricular, no qual as atividades são elaboradas pelos próprios alunos (futuros professores), com orientação contínua de professores através de atividades baseadas em resoluções de problemas, no qual os conceitos matemáticos e geométricos estão subjacentes às mesmas.

A metodologia utilizada no Clubinho de Matemática é uma metodologia baseada em resolução de problemas, através de diferentes modalidades: Jogos, Construção de Material Concreto, Linguagem Computacional Logo, entre outros.

---

[1] IMECC - Insittuto de Matemática estatística e Ciência da Computação

A dinâmica consiste em propiciar aos futuros professores-pesquisadores em Matemática um período de seis meses com cada uma das estratégias metodológicas alternativas. Uma turma de crianças com monitores (futuros professores), trabalha seis meses, com jogos, concomitantemente, outra turma vivencia a Geometria da Tartaruga, através da Linguagem Computacional Logo, e depois desse período, a dinâmica processa-se de modo inverso.

Objetivo Gerais

Criar um ambiente de aprendizagem baseada na metodologia Logo, no qual alunos de Licenciatura do curso de Matemática possam vivenciar uma ação pedagógica com crianças em níveis de 1º e 2º graus.

Vivenciar uma ação pedagógica significa orientar os futuros professores na construção daquilo que eles próprios acreditam que seja o ensino da Matemática, e não somente transmitir isso a eles, pois o ensino não se dá através de transmissão de conhecimentos, e sim por meio de um envolvimento ativo por parte do aluno, na construção de suas idéias, inclusive do conhecimento do que vem a ser Ensinar Matemática. Participando ativamente do Clubinho de Matemática, o aluno de Licenciatura vivenciará várias metodologias e descobrirá o que vem a ser na prática um educador em Matemática.

Um outro objetivo seria este: programar a tartaruga por comando simples alterando sua posição e direção a fim de criar possibilidades de atribuir seus próprios significados, experimentando suas próprias intuições, construir seus modelos, fazer pequenas conjecturas, argumentações lógicas e, finalmente, valendo-se de noções simples e intuitivas, construir, passo a passo, conceitos matemáticos aparentemente abstratos.

Mais especificamente, no ambiente Logo haverá um enriquecimento e uma inovação na formação do futuro professor (pesquisador - educador) de Matemática, através de aspectos modernos da tecnologia aplicados à Pedagogia Educacional.

- Articular os estudos sobre a Resolução de Problemas no Ambiente Logo. Parte-se do princípio que programar a tartaruga é o momento em que se coloca em prática os procedimentos de Resolução de Problemas proposto por Polya – compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano, verificação. Porém na nossa concepção esses procedimentos não são suficientes, pelo que entendemos sobre resolução de problemas, pois deve-se propiciar a nossos alunos o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, ou seja, deve-se propiciar situações-problemas, no qual seja possível aos alunos levantar hipóteses, conjecturas e testá-las matematicamente, isto é, criar espaço nesse processo, para o "arriscar-se" matematicamente.

Um objetivo mais amplo seria: propiciar momentos de Atualização e Aperfeiçoamento de Professores da Rede estadual, municipal e particular. E, também, propiciar meios para pesquisa na área de Ensino de Matemática, tendo em vista o avanço tecnológico que o país vivencia.

Objetivos Específicos do Clubinho de Matemática com as Crianças

Criar um ambiente de aprendizagem com Logo, que propicie o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico e o desenvolvimento do raciocínio lógico importantes ao pensamento matemático.

Propiciar situações que envolvam as crianças em um processo dinâmico de resolução de problemas, onde elas possam identificar e relacionar a Geometria da Tartaruga com as demais Geometrias.

Programar a tartaruga, através de comandos simples alterando sua posição e direção, possibilitando à criança atribuir seus próprios significados, experimentar suas próprias intuições, construir seus modelos, fazer de noções simples e intuitivas, passo a passo, construções de conceitos matemáticos aparentemente abstratos.

A princípio, a nossa idéia é trabalhar com monitores e professores da rede estadual, municipal e particular, diretamente ligados ao IMECC-UNICAMP, mas esses terão efeitos multiplicadores.

Deve-se salientar, ainda, que o ambiente Logo propicia situações novas, desafiantes, e o próprio aluno procurará encontrar soluções próprias, novas saídas a cada experiência. Não devemos esperar que isso se dê única e exclusivamente em um Curso de Prática de Ensino, pois trata-se de um processo dinâmico, contínuo, que deve desenvolver-se desde os primeiros momentos em que ele pensa em ser professor.

Convém ressaltarmos nesse momento, que o Clubinho finalizou-se em 1992, no qual as atividades vinham ocorrendo no Núcleo de Informática Aplicada à Educação - NIED / UNICAMP.

ANEXO II

ANEXO II

POLÍGONOS COM LOGO TRIDIMENSIONAL

Apresentamos abaixo alguns polígonos construídos pelo sujeito utilizando Logo Tridimensional, que deixamos de incorporar no corpo da dissertação:

```
?ap  hexag
aprenda  hexag  :x
repita  6  [ andar  :x  virar  60  ]
fim

hexag  aprendido
?tri  hexag  30  imprima
```

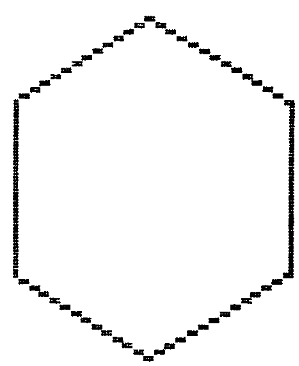

Figura II-1 - Hexágono construído com Logo Tridimensional

```
?ap octog
aprenda octog  :x
repita  8  [  andar  :x  virar  45  ]
fim

octog aprendido
?tri  octog  30  imprima
```

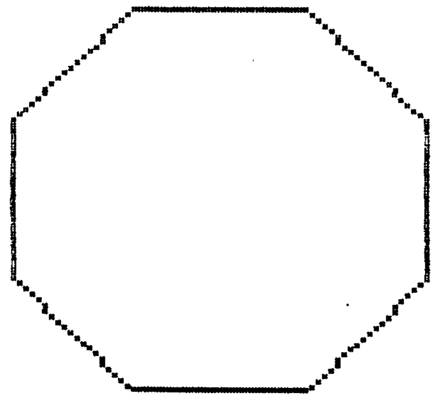

Figura II.2 - Octógono construído com Logo Tridimensional

```
?ap eneagono
aprenda eneagono  :x
repita  9  [  andar  :x  virar  40  ]
fim

eneagono aprendido
?tri  eneagono  30  imprima
```

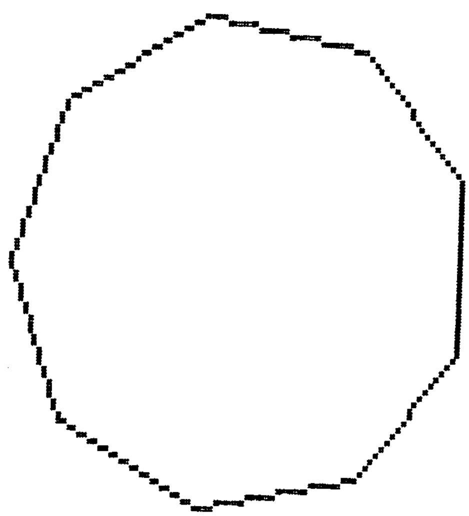

Figura II.3 - Eneágono construído com Logo Tridimensional

```
?ap decagono
aprenda  decagono  :x
repita  10  [  andar  :x  viarar  36  ]
fim

decagono  aprendido
?tri  decagono  30  imprima
```

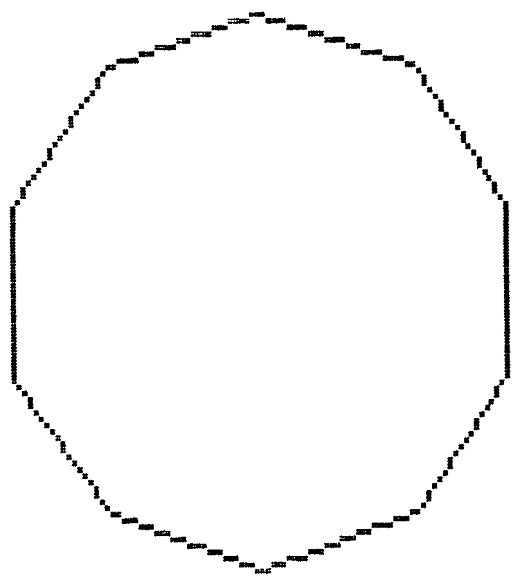

Figura II.4 - Decágono construído com Logo Tridimensional

```
?ap  cirtri
aprenda  cirtri  :x
repita  360  [  andar  :x  virar  1  ]
fim

cirtri  aprendido
?tri  cirtri  1  imprima
```

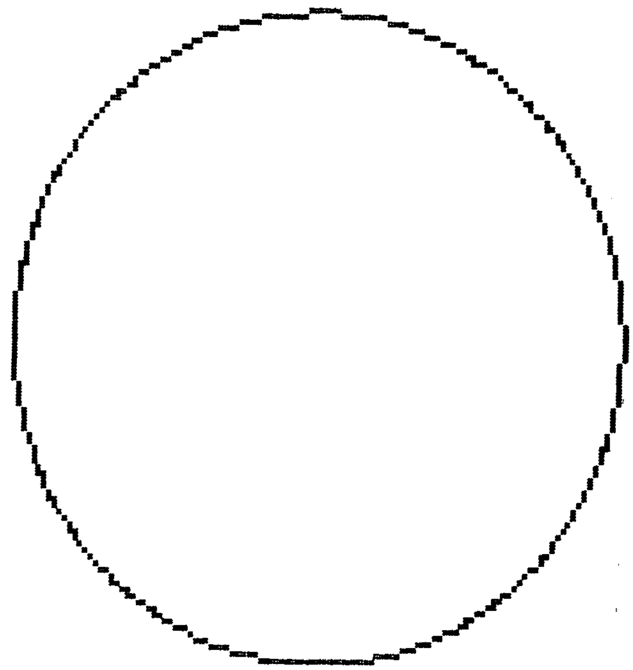

Figura II.5 - Círculo construído com Logo Tridimensional