UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
TESE DE DOUTORADO

A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos

Shiderlene Vieira de Almeida Lopes

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosely Palermo Brenelli

Este exemplar corresponde à
redação final da tese defendida por
Shiderlene Vieira de Almeida Lopes
e aprovada pela Comissão Julgadora.
Data:____/____/____

Assinatura:________________________
Orientadora

Comissão Julgadora:

____

____

____

____

____

____

2002

Catalogação na Publicação elaborada pela Biblioteca da Faculdade de Educação/UNICAMP

Bibliotecário: Gildenir Carolino Santos – CRB-8ª/5447

Lopes, Shiderlene Vieira de Almeida
L881c A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos / Shiderlene Vieira de Almeida Lopes. – Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Rosely Palermo Brenelli.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de educação.

1. Aritmética. 2. Construtivismo (Educação). 3. Dialética. 4. Solução de problemas. 5. Ensino de primeiro grau I. Brenelli, Rosely Palermo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

02–004–BFE

Resumo

Este trabalho teve como objetivo investigar as possíveis relações entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos. Foram estudados 22 sujeitos pertencentes a terceira, quarta e quinta séries do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual de Curitiba – PR. A prova, problemas de igualação e construção de diferenças de Piaget, Henriques e Maurice, foi utilizada para avaliar o nível de evolução dos sujeitos no que diz respeito à construção dialética das operações de adição e subtração. Já os problemas aditivos conforme Vergnaud, foram trabalhados em diferentes situações a fim de identificar os procedimentos utilizados pelos sujeitos. A partir da análise dos dados pôde-se verificar que há relações entre o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos. Isto porque os procedimentos mais complexos e mais elaborados, bem como os maiores percentuais de respostas escritas corretas, só foram possíveis para aqueles sujeitos que atingiram níveis mais evoluídos na prova de problemas de igualação e construção de diferenças.

Abstract

The aim of this work is to investigate possible relations between the dialectic construction of addition and subtraction and the resolution of addictive problems. In this work, we have studied 22 children regularly registered in the third, fourth and fifth graders of a Brazilian elementary school, from Curitiba - PR. The equality problems and the construction of differences (Piagetian test) is used to verify the evolution level of the children concerning to the dialectization of addition and subtraction. In the other hand, we make use of the addictive problems in many different symbolic contexts in order to identify the procedures used by the children. Based on the data analysis we assert that there are relations between the dialectic construction process of addition and subtraction and the addictive problems resolution. Such affirmation is based on the fact that complex procedures and more elaborated problems resolutions, as well as the major number of correct answers, are observed only in children that have acquired higher levels of the equality problems and the construction of differences test.

"... Para Elci, Olímpio e Sergio ..."

"E Deus disse:
Façamos o homem à nossa imagem...
E formou Deus o homem do pó da terra,
e soprou em suas narinas o fôlego da vida; e o homem foi feito alma vivente."

Agradecimentos

À querida orientadora **Profª Drª Rosely Palermo Brenelli** pela competência, dedicação e amizade demonstradas desde os tempos de mestrado. Obrigada “de coração”!

Ao meu querido marido Sergio pela ajuda na elaboração dos gráficos, tabelas, figuras, etc. Obrigada por saber me entender nos momentos mais difíceis.

Às professoras: Drª Orly Z. M. de Assis, Drª Lucila Fini, Drª Maria Lucia F. Moro, Maria Tereza C. Soares e Evely Boruchovitch pelas sugestões oferecidas.

Aos demais professores da Facudade de Educação pelos conhecimentos compartilhados.

Aos funcionários da Faculdade de Educação pela colaboração durante o curso.

Aos professores, funcionários e alunos da Escola Estadual Júlio de Mesquita.

À CAPES pelo auxílio financeiro parcial.

A todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Capítulo 1

Introdução

"O mais nobre emprego da mente
humana é o estudo das
obras de seu Criador"
(A vós confio)

A matemática, segundo o dicionário, é definida como sendo a "*ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente.*" (1986, p. 1102). Neste contexto, salientamos que trata-se de uma disciplina que trabalha no plano lógico e formal. Por outro lado, constatamos que há tempos a Matemática tem sido o objeto principal de muitas discussões, essencialmente no que diz respeito ao seu ensino e a sua aprendizagem. Estas discussões, de fato, tentam elucidar o porquê desta disciplina ser marcada por tantos insucessos e aversões.

Diante deste quadro, o que muitos pesquisadores argumentam é que o ensino da Matemática deve ser repensado, deve ser reelaborado conforme os estudos que versam sobre a natureza desta disciplina, ou sobre os conceitos que esta aborda.

Neste sentido, não podemos deixar de salientar a influência da epistemologia genética de Jean Piaget, uma vez que esta explica a construção gradual das estruturas lógico-matemáticas. Entenda-se esta influência não enquanto "uma proposta pedagógica", até porque não era este o objetivo deste pesquisador, mas enquanto um aporte teórico para se compreender a construção do conhecimento por parte do sujeito. Ou como admite o próprio Piaget (1977/1995, p. 7): "*Ainda que* *nossos trabalhos não tenham nenhuma intenção pedagógica, parece difícil deixar de salientar o fato de que o conhecimento das reações de escolares, (...), possa ser de alguma utilidade para os educadores.*"

Embora o ensino não tenha sido objeto direto nas pesquisas de Piaget, salientamos, por outro lado, que ele tece considerações acerca do mesmo em alguns de seus escritos.

Quanto à educação matemática, foco de interesse deste trabalho, Piaget (1973, p. 221) adverte que seria um erro limitar o ensino desta apenas ao plano da linguagem, sem considerar o papel das ações dos sujeitos. "*(...) nos alunos jovens a ação sobre os objetos resulta totalmente indispensável para a compreensão, não somente das relações aritméticas, como também das geométricas.*"

Por outro lado, Piaget ressalta que muitos professores evitam o uso de materiais concretos, temendo ser este um empecilho ao "espírito dedutivo", característico da matemática. No entanto, segundo o autor "*(...) as operações mentais ou intelectuais que intervêm nestas deduções posteriores se derivam justamente das ações.*" (Piaget, 1973, p. 222).

Isto não significa que Piaget despreze a formalização no que concerne à educação matemática e nem que o papel do professor seja menos importante. Quanto ao primeiro ponto o autor esclarece que a formalização matemática apenas não deve ser algo provocado prematuramente; quanto ao segundo, argumenta que o papel do professor não consiste em dar "lições", mas , sobretudo, em organizar situações que levem o aluno a investigar, em "*(...) armar os dispositivos iniciais capazes de suscitar problemas úteis à criança, e para organizar, em seguida, contra-exemplos que levem à reflexão.*" (Piaget, 1948/1994, p. 15).

Quanto aos constantes fracassos atribuídos à aprendizagem da matemática Piaget explica: "*A compreensão matemática não depende da aptidão da criança. É então, falso estimar que um fracasso em matemática provenha de uma falta de aptidão. A operação matemática deriva da ação: resultando que a apresentação intuitiva não é suficiente, é necessário que a criança opere por si mesma, a operação manual devendo preparar a operação mental. (...) Em todos os domínios da matemática, o qualitativo deve preceder o numérico.*" (Piaget apud Munari, 1995,

p. 5).

Destacamos, neste sentido, a posição de Piaget diante da educação matemática, ou seja, ressaltamos a idéia de que, para este autor, a matemática não se resume a uma disciplina que possa ser trabalhada apenas no plano da linguagem, por meio de regras e símbolos destituídos de significado para os sujeitos.

Desta forma, evidencia-se o quanto faz-se necessário repensar o ensino da matemática. Não podemos negar o esforço de muitos pesquisadores no sentido de reavaliar as propostas destinadas a esta disciplina no que diz respeito à formação de professores, formação curricular, ao processo de ensino-aprendizagem, aos aspectos metodológicos, entre outros.

No âmbito nacional, o Ministério da Educação e Cultura, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), propõe a necessidade de um redirecionamento ao ensino da matemática. Especificamente no que diz respeito às operações aritméticas e à resolução de problemas, para o primeiro e segundo ciclos, estes parâmetros contêm objetivos instrucionais que contemplam os seguintes pontos:

- Resolver situações-problema e construir, a partir delas, os significados das operações fundamentais, buscando reconhecer que uma mesma operação está relacionada a problemas diferentes e que um mesmo problema pode ser resolvido pelo uso de diferentes operações.

- Desenvolver procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados.

- Refletir sobre procedimentos de cálculo que levem à ampliação do significado do número e das operações.

- Vivenciar processos de resolução de problemas, percebendo que para resolvê-los é preciso compreender, propor e executar um plano de solução, verificar e comunicar a resposta.

Portanto, a discussão sobre a educação matemática é constante e, neste sentido, a presente pesquisa vem dar sua contribuição a este debate.

Esta afirmação decorre do fato de se tratar de um trabalho que tem como objetivo principal **buscar as possíveis relações entre as diferentes resoluções de problemas aditivos e a construção dialética que engendra as operações de adição e subtração**.

No que concerne à adição e subtração, nossa discussão apóia-se no construtivismo piagetiano uma vez que encontramos neste respaldo teórico para explicar como estas operações se constroem. Falaremos, neste sentido, de duas operações inversas, que se constroem gradativamente, rumo a formação de uma nova totalidade. Trataremos, portanto, da relação dialética entre adições e subtrações, ou seja, da construção de interdependências entre estas duas operações contrárias.

Em relação aos problemas aditivos, os quais envolvem adições e subtrações com níveis diferenciados de complexidade, nossa discussão tem como apoio teórico os estudos realizados por Gérard Vergnaud.

Tendo em vista nosso objetivo central, a presente pesquisa conta, num primeiro momento, com algumas considerações de ordem teórica. Estas considerações respaldam-se basicamente na teoria piagetiana, a qual explica a construção do conhecimento por parte do sujeito, e nos trabalhos desenvolvidos pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud acerca dos problemas de estrutura aditiva.

Além do enfoque teórico que permeia nosso objetivo, uma revisão da literatura também foi desenvolvida. Esta revisão bibliográfica consta de trabalhos concernentes ao processo dialético construtivo, às operações de adição e subtração bem como de pesquisas sobre a resolução de problemas que envolvem tais operações.

Em um outro momento, são apresentados os objetivos do presente trabalho assim como as dimensões do problema de pesquisa.

Em continuidade, a parte metodológica é abordada. Esta apresenta as atividades de investigação, com base no referencial teórico adotado.

A última parte deste trabalho destina-se à análise dos resultados a partir dos dados coletados, e, em seguida, são apresentadas a discussão e as considerações finais da pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

"Se existe algo que possui encanto,
se existe algo desejável, se há alguma coisa
ao alcance do homem que seja digna de louvor,
não será o conhecimento?"
(A vós confio)

A fundamentação teórica que permeia nossa pesquisa foi delineada a partir dos seguintes eixos de estudo: a) os processos cognitivos que intervêm na construção do conhecimento; b) a construção dialética das operações de adição e subtração; c) e os problemas de estrutura aditiva.

2.1 Processos cognitivos que intervêm na construção do conhecimento

Segundo a concepção piagetiana, o conhecimento é construído a partir da constante interação entre o sujeito e o objeto.

Na verdade, as estruturas mentais que possibilitam o conhecimento se desenvolvem gradativamente com base nas constantes trocas entre o sujeito cognoscente e o objeto do conhecimento.

Este desenvolvimento lento e gradual das estruturas do conhecimento, que compreende desde as organizações práticas até as hipotético-dedutivas, é explicado por Piaget por um processo de equilibração, a par de outros três fatores, a saber: maturação, experiência com o objeto e transmissões e interações sociais.

A equilibração no sentido piagetiano assume papel essencial na construção do conhecimento por parte do sujeito. Desde o início de suas investigações Piaget já defendia a tese de que a equilibração constitui o fator fundamental do desenvolvimento cognitivo. "*O desenvolvimento é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior.*" (Piaget, 1964/1995, p. 13).

Em termos gerais a equilibração majorante se caracteriza por um processo "*(...) que leva de certos estados de equilíbrio aproximado para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações.*" (Piaget, 1975/1977, p. 13). É, portanto, um processo auto-regulador que garante formas de equilíbrio cada vez melhores, daí o termo majorante.

Sendo assim, o equilíbrio cognitivo difere dos equilíbrios mecânico e termodinâmico, no sentido definido pela Física, não só por se tratar de um equilíbrio novo que conserva os equilíbrios alcançados anteriormente mas, sobretudo, por se tratar de um equilíbrio melhor, mais elaborado.

Contudo, para entender este progresso cognitivo, sobre o qual intervém um processo de auto-regulação, faz-se necessário ressaltar que este pressupõe, acima de tudo, a constante interação entre o sujeito cognoscente e seu meio, e é nesta dinâmica Sujeito $\leftrightarrow$ Objeto que Piaget (1975/1977) situa "*(...) processos fundamentais que vão constituir os componentes de qualquer equilíbrio cognitivo.*" (p. 16).

Neste contexto, não se pode deixar de salientar o papel das assimilações e acomodações.

Segundo Piaget (1967/1996, p. 13), nenhum conhecimento "*(...) constitui uma simples cópia do real, porque contém um processo de assimilação a estruturas anteriores.*" Desta forma, a assimilação é vista como a incorporação de um elemento exterior e como tal confere significações; portanto, permite ao sujeito integrar as características do objeto às suas estruturas. Diante disso, não podemos dissociá-la do processo de acomodação. Este último caracteriza-se pela modificação daquelas estruturas no sentido de ajustá-las às novas particularidades do objeto. Assim, é a partir desta constante adaptação de um sujeito ativo ao objeto do conhecimento que a equilibração adquire seu significado: o de fazer com que o sujeito compense as perturbações impostas quando de suas trocas com o seu meio físico e social.

De fato, "*(...) à medida que compensa as perturbações exteriores, o indivíduo aprimora cada vez mais suas estruturas de conhecimento, atingindo um novo equilíbrio, um novo patamar.*" (Piaget apud Lopes, 1997, p. 9).

No processo de equilibração, as perturbações impostas pelo meio apresentam-se sob duas grandes classes: lacunas e resistência do objeto. As primeiras dizem respeito à "*insuficiente alimentação de um esquema*" (Piaget, 1975/1977, p. 25), ou seja, é a ausência de condições necessárias para concluir uma ação. Já as últimas aparecem como um obstáculo às assimilações, algo que se opõe aos esforços que o sujeito faz para ajustar-se ao objeto.

No quadro das compensações faz-se necessário, antes de tudo, entender a intervenção do processo de regulação e mais especificamente, analisar em que as regulações levam às compensações, já que estas últimas originam-se diretamente das primeiras. "*Tanto que, se uma perturbação não produz uma regulação, consequentemente não haverá compensação.*" (Piaget apud Brenelli, 1996, p. 35).

De um modo geral fala-se em regulação como uma retomada da ação em função de resultados obtidos anteriormente, ou ainda, pode-se dizer que a regulação, do ponto de vista do sujeito, consiste em uma reação à perturbação.

Quanto às reações às perturbações, as regulações podem envolver "feedbacks" positivos - reforço - e "feedbacks" negativos - correção. Isto significa dizer que os obstáculos às assimilações levam a regulações por "feedbacks" negativos, comportando, assim, um caráter de correção. As lacunas, que também consistem em perturbações, conduzem a regulações por "feedbacks" positivos, pois funcionam como um reforço. São nestes casos, portanto, que as regulações comportarão compensações, assumindo, assim, o caráter construtivo das estruturas do conhecimento:

se algo de fato perturba o sujeito, essa perturbação pode conduzir a uma regulação e esta última pode implicar uma compensação, portanto, uma ação no sentido contrário que tende a anular ou neutralizar um efeito.

De acordo com Piaget (1975/1977, p. 41) as regulações por "feedbacks" negativos conduzem a compensações distintas: "*(...) as compensações por inversão, que consistem na anulação da perturbação, e as compensações por reciprocidade, que diferenciam o esquema para acomodá-lo ao elemento inicialmente perturbador.*"

As regulações por feedbacks positivos também comportam compensações, salvo o caso do reforço de um erro. Neste sentido, vale ressaltar que na aquisição de qualquer conduta há a intervenção de reforços (feedbacks positivos) e correções (feedbacks negativos), ou como afirma Piaget (1975/1977, p. 42), "*(...) mudar de meios está simultaneamente relacionado com reforço e correção.*"

Por fim devemos acrescentar que a equilibração cognitiva, descrita até aqui, "nunca tem um ponto de paragem" pois "*(...) o fato de os estados de equilíbrio serem sempre ultrapassados, resulta (...) de uma razão muito positiva. Qualquer conhecimento consiste em levantar problemas novos à medida que resolve os precedentes.*" (Piaget, 1975/1977, p. 45).

Portanto, compreendendo a equilibração como uma estruturação orientada para um equilíbrio melhor, mais complexo, é possível admitir que uma das fontes deste progresso cognitivo deve ser procurada nos desequilíbrios gerados a partir da constante interação entre o sujeito e o objeto. No dizer de Piaget (1975/1977, p. 23): "*Deve procurar-se nos desequilíbrios uma das fontes de progresso no desenvolvimento dos conhecimentos, pois só os desequilíbrios obrigam um sujeito a ultrapassar o seu estado atual e procurar seja o que for em direções novas.*"

Do ponto de vista cognitivo os desequilíbrios resultam essencialmente da não-correspondência entre as afirmações e as negações, ou seja, da assimetria entre aspectos positivos e negativos. Neste sentido, afirmam Piaget e cols. (1974, p. 2) "*(...) que os desequilíbrios funcionais dos níveis inferiores do desenvolvimento cognitivo são devidos a uma predominância dos valores positivos sobre os negativos, portanto das afirmações sobre as negações.*"

Para Piaget (1975/1977) as negações, nos níveis elementares de desenvolvimento, são menosprezadas pelos sujeitos e requerem, segundo ele, uma laboriosa construção. Na verdade, o que a criança não entende é que toda ação comporta necessariamente um aspecto positivo e outro negativo. Falaremos, neste caso, em termos de contradições. Estas são manifestações dos desequilíbrios e conduzem a superações, sendo parte integrante do processo de equilibração. As contradições são, portanto, compensações incompletas entre afirmações e negações, sendo estas últimas bem mais difíceis de serem construídas e manipuladas do que as primeiras.

Há que se esperar a "*(...) formação das operações concretas (início aos 7-8 anos) para chegar a esta elaboração das negações.*" (Piaget, 1975/1977, p. 29). Isto é, somente quando da reversibilidade operatória que o sujeito compreenderá que uma mesma ação pode comportar dois sentidos - um direto e outro inverso.

Só então, neste momento, é que se assegura a simetria entre afirmações e negações e, portanto, não há mais a primazia dos aspectos positivos sobre os negativos, não comportando, desta forma, as contradições, tão frequentes nos níveis elementares de desenvolvimento.

Sendo assim, a equilibração não é uma simples marcha ao equilíbrio estável, estático, isto porque, explica Piaget (1975/1977), "*(...) nenhuma estrutura equilibrada se mantém num estado definitivo.*" (p. 46). Pelo contrário, as regulações compensadoras, decorrentes do processo de equilibração e já tratadas anteriormente, acrescentam novas construções. Desta forma, convém analisarmos um outro "*(...) processo de construção muito ligado ao jogo das regulações, do qual constitui, aliás, um aspecto inseparável: a abstração reflexiva.*" (Piaget, 1975/1977, p. 52).

Entender este conceito torna-se essencial ao desenvolvimento deste trabalho uma vez que este tipo de abstração, segundo Piaget (1977/1995), é fonte do conhecimento lógico-matemático por pressupor o estabelecimento de relações e apoiar-se nas coordenações das ações e operações do sujeito.

Como admite o próprio autor: "*Toda história das matemáticas está relacionada com este processo de abstração reflexiva que explica a formação de estruturas novas a partir das precedentes.*" (Piaget, 1975/1977, p. 222).

A abstração reflexiva, constante em todos os níveis de desenvolvimento, é fonte do conhecimento lógico-matemático e, neste sentido, difere das abstrações empíricas as quais apóiam-se nas informações materiais dos objetos, nas suas características físicas. Já as abstrações reflexivas por sua vez apóiam-se nas coordenações das ações dos sujeitos e é , pois, "*(...) um processo cognoscitivo ligado ao exercício do pensamento.*" (Piaget, 1967/1996, p. 364).

Este tipo de abstração comporta dois aspectos indissociáveis: uma projeção, sobre um plano superior, daquilo que é tomado do nível precedente e uma reorganização ou reconstrução dos elementos transferidos do plano inferior para um novo patamar. Assim, tanto esta projeção quanto esta reorganização abrem novos caminhos para a elaboração de estruturas cada vez mais ricas e complexas ou como admite Piaget (1979/1983): "*Daí resultam novas combinações que podem conduzir à construção de novas operações montadas sobre as precedentes, o que constitui a marcha habitual do progresso matemático (exemplo na criança: uma reunião de somas engendra uma multiplicação).*" (p. 42).

No contexto das operações de adição e subtração, tema enfocado neste trabalho, Piaget (1977/1995) dá sua contribuição explicando que em geral, a criança, mesmo já tendo aprendido estas operações no contexto escolar, consegue com bastante lentidão entender as relações de inversão que caracterizam as operações em questão. Piaget (ibid.) adverte que muitas vezes, o que escapa à compreensão dos sujeitos é o fato de a adição e a subtração operarem em direções contrárias - acrescentar/tirar - e ao mesmo tempo se assemelharem, ou melhor, se complementarem.

Neste sentido, para que isto seja efetivamente compreendido por parte do sujeito não basta apenas que este recorra aos seus conhecimentos escolares, mas sobretudo, torna-se essencial a intervenção de abstrações reflexivas. Não significa, ressalta Piaget, negligenciar o ensino, a formação escolar, mas advertir que há outros fatores em jogo, neste caso, a abstração reflexiva.

Portanto, desenvolver uma pesquisa que trate da relação dialética entre adições e subtrações implica também em mencionar as abstrações reflexivas, as quais intervêm na compreensão, por parte do sujeito, das relações de inversão que caracterizam tais operações.

Assim ressaltamos que para estudar a construção dialética entre adições e subtrações, faz-se necessário considerar o papel essencial do processo de equilibração na medida em que este "*(...) assegura a autonomia e a coerência do pensamento.*" (Piaget, 1967/1996, p. 21) e as abstrações reflexivas, uma vez que estas garantem novas combinações no sentido de alcançar formas cada vez mais ricas.

Ao discutir sobre as abstrações, não podemos deixar de salientar as generalizações, pois como afirma Piaget (1979/1983) - "*(...) abstração e generalização, como é óbvio, são estreitamente solidárias, cada uma das duas apoiando-se na outra'.*" (p. 43).

Segundo Piaget (ibid.), a abstração empírica corresponde somente à generalização indutiva, de via simplesmente extensiva, passando do "alguns" ao "todos", fundada unicamente nos observáveis sobre os objetos. "*Uma vez registrados os observáveis sobre os objetos dados, a generalização consiste em transferir este conteúdo a objetos novos.*" (Piaget, 1978/1984, p. 187). Portanto, na generalização indutiva temos a assimilação de novos conteúdos observáveis a um esquema já existente.

Já a abstração reflexiva corresponde à generalização construtiva, a qual não se dá por via simplesmente de extensão (conjuntos de situações às quais se aplica), mas também de compreensão (características ou propriedades comuns nas quais as generalizações se baseiam), havendo, pois, um enriquecimento simultâneo e complementar.

"*A generalização construtiva não consiste em assimilar os conteúdos novos a formas já constituídas, mas sim em engendrar novas formas e novos conteúdos, ou seja, novas organizações estruturais.*" (Piaget, 1978/1984, p. 188).

A generalização construtiva, de fato, é um mecanismo formador de novidades, tanto no que se refere aos conteúdos como às formas. Ela trata das operações do sujeito ou de seu produto e acaba, desta maneira, engendrando novas formas e novos conteúdos.

De acordo com Piaget (1978/ 1984) o desenvolvimento das generalizações é marcado por uma tendência "*(...) cada vez mais acentuada, por substituir ou* *duplicar os conhecimentos de natureza exógena através de uma construção endógena; e esta tendência pode explicar-se pelas leis da tomada de consciência.*" (p. 200).

A tomada de consciência (Piaget, 1974/1977), por sua vez, não é uma simples incorporação, nem uma iluminação. Trata-se, pois, de uma construção que exige intervenções de atividades especiais por parte dos sujeito, tais como regulações ativas, as quais constituem fonte de escolhas deliberadas, o que supõe a consciência.

De fato, a tomada de consciência parte da periferia para as regiões centrais, ou seja, do resultado, do objetivo das ações para entender os mecanismos internos a elas.

A tomada de consciência se caracteriza pela conceituação de uma ação, ou de outra maneira, refere-se a passagem de uma forma prática de conhecimento, de um "saber fazer", em direção ao compreender. A ação constituindo um conhecimento autônomo, um "saber-fazer", que a princípio não depende do compreender. A conceituação engendrando o "compreender", ou seja, constituindo uma compreensão das razões que levam o sujeito ao êxito ou ao fracasso (Piaget, 1974/1978). "*Em suma, o mecanismo da tomada de consciência aparece em todos esses aspectos como um processo de conceituação (...).*" (Piaget, 1974/1977, p. 204).

Neste sentido, afirma Piaget (1978/1984) que "*(...) na medida em que o sujeito toma consciência das coordenações de suas ações, se torna capaz de construir novas formas, (...) o que caracteriza a generalização construtiva em suas diversas variedades.*" (p. 201).

Vemos, portanto, o quanto estes processos estão imbricados e nos remetem, assim, a entender a construção do conhecimento por parte de um sujeito ativo que constantemente interage com seu meio. Entretanto, vale ressaltar que até aqui tratamos dos processos cognitivos que explicam, ou melhor, que intervêm no desenvolvimento das estruturas que possibilitam o conhecimento. Desta forma, resta elucidar, ainda, a construção das operações de adição e subtração uma vez que estas relacionam-se diretamente com os objetivos traçados para a presente pesquisa. Sendo assim, precisamos recorrer, sobretudo, à gênese do número, descrita pela teoria piagetiana.

Segundo Piaget & Szeminska (1941/1981) não basta uma criança saber contar verbalmente coleções de objetos para entender o significado da quantidade numérica ali presente. Na verdade, o conceito implícito ao número vai muito além de uma simples contagem.

De fato, o conceito de número se constrói gradativamente na medida em que a criança se desenvolve do ponto de vista cognitivo e é neste sentido que Piaget & Szeminska (1941/1981) afirmam que "*(...) o número é, pois, solidário de uma estrutura operatória.*" (p. 15).

Desta forma, resgata-se, neste momento, o período das operações, destacando que ao nível das operações concretas, que se dá por volta dos 7/8 anos de idade, dependendo da solicitação do meio, a criança se torna capaz de organizar suas ações logicamente, ou seja, de coordenar operações no sentido da reversibilidade. Sendo assim, as operações são ações interiorizadas e reversíveis, isto é, ações que podem ser combinadas nos dois sentidos - direto e inverso.

É, portanto, neste contexto que precisamos compreender a gênese do número, pois este é essencialmente a síntese de classe e de relações assimétricas - sistemas de conjunto que pressupõem as operações lógicas.

Diante disso, Piaget e Szeminska (1941/1981) admitem que as unidades numéricas trazem consigo elementos de classe e elementos de relações assimétricas.

Enquanto classes as unidades numéricas podem ser tratadas como equivalentes, todas iguais, como se se pertencessem a uma mesma categoria. Em outras palavras, não se consideram as diferenças entre objetos, ao atribuir ao conjunto por eles formado, seu valor cardinal.

Por outro lado, enquanto relações assimétricas as unidades numéricas são diferentes. Ou seja, para contar um conjunto de objetos é preciso pô-los em ordem, em série, de forma que um mesmo objeto não seja contado mais de uma vez.

Neste sentido, o número requer que o sujeito realize operações reversíveis, tanto de seriação quanto de classificação.

Ou como indicam Piaget e Szeminska (1941/1981): "*A classe, a relação assimétrica e o número são, os três, manifestações complementares da mesma construção operatória aplicada, seja às equivalências e diferenças reunidas. Com efeito, é no momento em que a criança, havendo conseguido tornar móveis as avaliações intuitivas dos primórdios, (...) que ela se torna simultaneamente capaz de incluir, seriar e enumerar.*" (p. 253).

Há que se ressaltar, ainda, quanto à composição aditiva dos números, isto é, a reunião aritmética das partes em um mesmo todo.

Diferentemente da composição aditiva das classes (A + A = A), um número adicionado a ele mesmo engendra um novo número, portanto, há aí a iteração (A + A = 2A), ignorada até então pelas classes.

Neste contexto, a construção do número inteiro se completa pela descoberta das operações aditivas e multiplicativas, pois como afirma Piaget e Szeminska (1941/1981): "*Na realidade, as operações aditivas e multiplicativas já se acham implícitas no número como tal.*" (p. 223).

Esta operação aditiva é assim, a reunião de elementos em uma totalidade e, ao mesmo tempo, a decomposição dessa totalidade em partes. Ela se constitui, então, simultaneamente, pela reunião das partes em um mesmo todo e pela separação do todo em partes → (4 +3 = 7) ↔ (7 - 3 = 4).

E é desta forma que Piaget e Szeminska (1941/1981) ressaltam que até se consegue fazer com que uma criança repita verbalmente fórmulas já prontas tais como: 2 + 2 = 4; 2 + 3 = 5; 2 + 4 = 6 etc. No entanto, a compreensão da adição e subtração aritmética só se manifesta, enquanto operações reversíveis, quando a criança entende que ao transformar (4 + 4) em (7 + 1), um dos subconjuntos cresce. Mas este crescimento deve ser colocado em reciprocidade com uma subtração (4 + 3) + (4 - 3) = 8. Eis aí a "*(...) solidariedade da operação direta e de seu inverso (...)*" (Piaget e Szeminska, 1941/1981, p. 261), portanto, das adições e subtrações aritméticas.

Moro e Branco (1993) e Moro (1998) relatam outros trabalhos desenvolvidos por Piaget e colaboradores[1], no início dos anos 60, os quais tinham como tema principal rever as questões relativas à epistemologia do número.

Dentre os resultados encontrados quando daquelas pesquisas, Moro e Branco (1993) e Moro (1998) destacam os sequintes:

- "*(...) a iteração como estrutura que se constrói a partir de características pontuais para chegar à idéia de que toda passagem de um número a outro pode ser decomposta em uma sequência de passagens +1, -1*" (p. 367);

- "*(...) a importância da correspondência termo termo na aritmetização progressiva da criança, quando da passagem da iteração (+1) (-1) centrada na ação para a idéia de iteração inferida como operação recorrencial de transformação numérica ao infinito, com a idéia de 'número qualquer'*" (p. 367);

- "*o raciocínio por recorrência sobre a série de número implica não só a compreensão da passagem de n a $n+1$, mas, ainda, a captação do caráter de 'qualquer' de n e a possibilidade de seguir com $n+1$ ao infinito* (p. 28).

Portanto, é a partir dos processos cognitivos que intervêm na construção do conhecimento e com base nas pesquisas sobre a epistemologia do número que fundamentaremos o estudo do processo dialético construtivo das operações de adição e subtração, o qual será tratado a seguir.

2.2 A construção dialética da adição e subtração

Na sua acepção mais comum a dialética pode ser definida como a "arte de raciocinar", ou ainda, a "arte de argumentar ou discutir"[2].

Do ponto de vista filosófico a dialética pode significar:

[1]Problemas da construção do número/Gréco, Grize, Papert e Piaget (1960); Estruturas numéricas elementares/Gréco e Morf (1962); A formação dos raciocínios recorenciais/Gréco, I-nhelder, Matalon e Piaget (1963).

[2]As definições elencadas nesta parte do trabalho foram conseguidas a partir de uma pesquisa em vários dicionários, a saber: Novo Dicionário Aurélio de Língua Portuguesa; Dicionário Universal da Língua Portuguesa; Dicionário da Língua Portuguesa da Porto Editora.

"Método de ascenção do sensível para o inteligível e método de dedução das formas".

(Platão, 428-348 a.C.)

"Dedução a partir de preposições simplesmente prováveis, uma forma não demonstrativa de conhecimento".

(Aristóteles, 383-322 a.C.)

"Lógica da aparência".

(Kant, 1724-1804)

"A natureza verdadeira e única da razão e do ser que são identificados um ao outro e se definem segundo o processo racional que procede pela união incessante de contrários - tese e antítese - numa categoria superior, a síntese".

(Hegel, 1770-1831)

De acordo com as idéias marxistas a dialética assim se apresenta:

"Processo de um pensamento que toma consciência de si mesmo e se exprime por afirmações antitéticas que uma síntese englobante procura reduzir; processo de um pensamento ou de um devir que progride por uma alternância de movimentos de sentido inverso ou por um jogo de casualidade recíproca; método para compreender o objeto de um estudo, que consiste em colocá-lo de novo na realidade movente, histórica, concreta".

(Marx, 1818-1883)

Segundo a epistemologia genética a dialética...

> *"Constitui o aspecto inferencial de todo processo de equilibração. Compreende características mais clássicas da dialética, tais como as superações, as circularidades ou espirais e as relativizações".*
>
> *(Piaget, 1896-1980)*

No contexto deste trabalho, a concepção que nos interessa recai sobre a epistemologia genética de Jean Piaget. Embora raramente tenha sido a epistemologia genética considerada como uma teoria dialética do conhecimento (Garcia, 1980/1996), temos que, por outra parte, nos atentar para o fato de que, de acordo com Piaget (1980/1996), existem processos dialéticos em todos os níveis de pensamento, em todos os casos em que se torna necessário construir novas formas que não se deduzam por vias simplesmente discursivas. E mais, o próprio autor admite que tal conceito merece ser pesquisado. "*Sem dúvida, nunca se pôde ainda formalizar a lógica dialética, de tal maneira que este conceito permanece em discussão. Mas isto não é razão para renunciar a este projeto, porque seria interessante estabelecer, por exemplo, o que dá o cálculo dos resultados que dependem do caminho seguido para alcançá-los, etc.*" (Piaget, 1967/1996, p. 384).

Sendo assim, nosso estudo consistirá em explicitar, em princípio, a formação da dialética enquanto construção de interdependências entre domínios ou subsistemas concebidos anteriormente como opostos ou sem relação entre si, portanto, a construção dialética entre adições e subtrações.

Na acepção piagetiana a dialética não se reduz à sequência tese, antítese e síntese, pois "*(...) já há dialética quando dois sistemas, até então distintos e separados, mas não opostos um ao outro, fundem-se em uma totalidade nova, cujas propriedades os ultrapassam e até mesmo, às vezes, em muito.*" (Piaget, 1980/1996, p. 197). Um exemplo disto seria a formação dos números naturais como síntese de ordem e inclusão. Não há, neste caso específico, nenhuma contradição a superar.

Na verdade, a dialética se caracteriza, principalmente, pela construção de interdependências, ou seja, sistemas até então opostos ou sem relação entre si que se fundem em uma nova totalidade. Ou como afirma Piaget (1980/1996, p.13): "*(...) a dialética consistirá essencialmente em construir novas interdependências* *entre significações.*"

Assim, dois sistemas A e B, por exemplo, até então opostos ou simplesmente sem relação um com o outro, reúnem-se em uma nova totalidade T, "*(...) cujas características de conjunto não pertencem nem a A, nem a B antes de sua reunião.*" (Piaget, 1980/1996, p. 198).

Esta nova interdependência por sua vez gera o que Piaget denomina de "superações", isto é, na medida em que se acresce às precedentes esta nova interdependência pode levar a uma nova totalidade, da qual torna-se um subsistema.

Vale ressaltar ainda que na construção destas interdependências há a intervenção de circularidades ou espirais. Esta intervenção de circularidades não ocorre no sentido de círculos viciosos mas sim de um enriquecimento e progresso do sistema cognitivo. Desta forma, Garcia (1980/1996, p. 219) admite que "*(...) a construção de novas totalidades implica um certo processo circular (ou, mais especificamente, uma trajetória em espiral) na medida em que ela precisa de remanejamentos retroativos que enriqueçam as formas anteriores do sistema considerado.*"

Outro fator a se considerar na construção destas interdependências é o das relativizações. Estas últimas funcionam no sentido de relacionar caracteres, até então isolados, tidos como absolutos, com outros, pelo próprio jogo das interdependências. Portanto, "*(...) os conceitos e noções intrínsecos aos subsistemas, com base nas quais a nova totalidade será construída, passam por um processo de relativização.*" (Garcia, 1980/1996, p. 219).

No contexto da Matemática, assunto que interessa diretamente este trabalho, Piaget (1980/1996) adverte que os matemáticos falam pouco da dialética mas que, no entanto, esta disciplina é a que produz o maior número de superações por síntese. Garcia (1980/1996), dissertando sobre a dialética na história das ciências, ressalta que os físicos encontram-se pouco dispostos a aceitar que a dialética tenha um papel nas teorias científicas e assim explica: "*(...) de fato, uma vez que uma teoria foi estabelecida, ela opera de maneira puramente dedutiva (ou discursiva). E a dedução enquanto tal não é dialética.*" (p. 220).

É neste sentido que o processo dialético construtivo descrito por Piaget (1980/1996) difere das concepções clássicas da dialética, as quais consistem em implicações entre enunciados e que, assim, referem-se apenas a um processo discursivo.

Para o autor, a implicação entre enunciados limita-se a separar o que já esta contido nos termos ligados, ao passo que as implicações entre ações e operações – processo genuinamente dialético – leva a superações, avanços e, por conseguinte, a produção de novidades. Sendo assim, as fases discursivas, enquanto tais, não são dialéticas por supor um sistema já estabelecido, portanto, equilibrado.

Em relação às operações de adição e subtração, Piaget (1980/1996) contribui de forma a explicar, por meio de problemas de igualação e diferenças, como a dialetização entre estas duas operações elementares se apresenta.

Quando discute sobre a construção dialética entre adições e subtrações, o autor se refere a uma síntese entre operações contrárias, ou seja, a uma interdependência entre sistemas que agem em direções opostas, neste caso, adicionar, aumentar, ou subtrair, diminuir.

No entanto, do ponto de vista cognitivo, esta interdependência ou mais especificamente, esta síntese entre operações contrárias, não é tão simples assim. Ela requer, no dizer de Piaget (1980/1996), "*(...) passagens progressivas de puras constatações empíricas (...) a inferências por implicações entre operações.*" (p. 43).

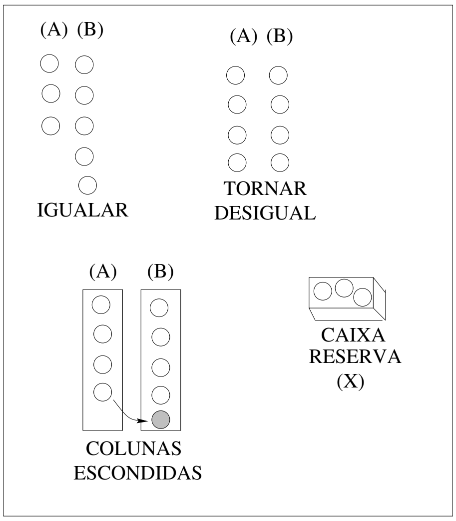
Para ilustrar estas passagens progressivas das constatações às inferências, Piaget (1980/1996) recorre à solução, por parte do sujeito, de problemas elementares de igualação e construção de diferenças. Estes problemas consistem em[3]:

1. igualar colunas com quantidades diferentes de fichas. Por exemplo: igualar uma coluna de 3 fichas com uma outra de 5 fichas;

2. tornar desigual colunas com quantidades iguais de fichas. Por exemplo: duas colunas com 4 fichas e tendo que deixar uma delas com 2 fichas a mais, uma com 5 e outra com 3;

[3]O experimento referente a estes problemas encontra-se explicado detalhadamente na parte metodológica deste trabalho. Neste momento, foram apresentados apenas alguns exemplos a fim de tecer considerações de ordem teóricas.

3. descobrir a diferença com transferências de fichas entre colunas. Por exemplo: esconder duas colunas com 4 fichas cada uma, transferir 1 ficha de uma coluna para a outra e solicitar quantas fichas são necessárias para deixar as duas colunas iguais novamente, portanto, solicitar a diferença numérica existente entre elas.



Analisando as condutas mais elementares Piaget (1980/1996) elucida que, em um primeiro momento, os sujeitos procedem por falsas implicações entre ações. De fato, eles não compreendem que toda adição em uma coluna (A) implica, ao mesmo tempo, uma subtração na coluna (B). Nestes casos, o êxito só é possível quando há simples simetrias espaciais, portanto, figurais. A interdependência constante não é, neste sentido, percebida pelos sujeitos. Assim, em se tratando de níveis elementares, não há superação por síntese entre adições e subtrações e, portanto, trata-se da ausência total de dialetização entre estas duas operações contrárias.

Quando da análise das condutas intermediárias, Piaget (ibid.) esclarece que já há um início de interação entre adições e subtrações. Os sujeitos realizam o que o autor denominou de "adições e subtrações simples", ou seja, a igualação entre as colunas se dá pela introdução de novas fichas, externas às fichas existentes nas colunas, e não por deslocamentos de fichas entre elas. Ou como explica o próprio autor (1980/1996), "*(...) em termos de implicações entre ações isso significa que eles compreendem que igualar duas coleções A e B, das quais a diferença é de n, implica a necessidade de acrescentar n elementos à menor ou retirar n da maior se* *estes são pegos ou recolocados em uma fonte X*[4] *exterior a essas duas coleções.*" (p. 51). Estas "adições e subtrações simples", explica Piaget (1980/1996), já são produtos de uma construção que permite superar algumas reações iniciais. Contudo, não se trata, ainda, de uma síntese dialética entre as operações. Isto torna-se evidente na medida em que os sujeitos fracassam quando das adições e subtrações necessárias às igualações por transferência de fichas entre as colunas escondidas. Porém, não devemos deixar de salientar que as condutas intermediárias já apresentam um início de dialetização entre adições e subtrações.

Neste sentido, gradativamente os sujeitos começam a realizar o que Piaget (ibid.) chamou de "adições/subtrações relativas", isto é, a igualação entre colunas numericamente desiguais se dá pelas transferências de fichas entre elas e não mais pela introdução de novas fichas. Entretanto, mesmo efetuando "adições/subtrações relativas", os sujeitos não conseguem compreender suas razões e, neste caso, ainda não podemos falar de uma síntese dialética.

Porém, já é possível falar em uma síntese dialética quando da análise das condutas mais evoluídas. Os sujeitos atingem, desta forma, a "identidade dos contrários", ou seja, eles compreendem que uma operação de transferência de fichas entre colunas é ao mesmo tempo adição e subtração. Ou como afirma Piaget (1980/1996): "*(...) as implicações não permanecem locais, mas se compõem entre elas e se encadeiam de maneira inferencial, e a dialética adquire assim, em pleno sentido, sua significação de aspecto inferencial de equilibração.*" (p. 57).

Sendo assim, a dialetização entre adições e subtrações caracteriza-se pela interação entre as referidas operações e, sobretudo, pela superação por síntese entre tais operações contrárias. É, portanto, a partir daí que a dialética adquire sua significação de aspecto inferencial de equilibração.

Neste caso, o aspecto inferencial "*(...) consiste essencialmente em implicações entre ações ou operações, fornecendo às suas composições seus caracteres de necessidade e, sobretudo, suas razões.*" (Piaget, 1980/1996, p. 60).

Já a equilibração se apresenta em sua forma mais geral "*(...) que é a compensação a assegurar entre os fatores positivos e negativos das transformações;*

[4]Aqui Piaget se refere as fichas existentes na caixa reserva que fica à disposição dos sujeitos.

portanto, entre as ações aditivas e subtrativas." (Piaget, 1980/1996, p. 60).

Neste sentido, segundo Garcia (1980/1996), o processo dialético construtivo descrito pela teoria piagetiana pode ser sintetizado da seguinte forma:

- trata-se das inter-relações de dois sistemas até então independentes;
- diz respeito à relativização de noções que aparecem como absolutas;
- refere-se à construção de um sistema mais amplo que os precedentes;
- trata-se da reconstrução dos subsistemas precedentes em um nível superior.

Uma vez tendo exposto, em linhas gerais, como se dá a construção dialética entre adições e subtrações convém passarmos à análise dos problemas aditivos explicando, assim, em que consiste tais problemas.

2.3 Problemas de estrutura aditiva

Nossas explicações com relação a este tema encontram-se fundamentadas nas pesquisas e nos trabalhos publicados pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud (1976; 1979; 1985/1991).

Segundo este autor (ibid.), os problemas de tipo aditivo dizem respeito àqueles problemas que exigem, em suas resoluções, uma operação de adição ou de subtração. Neste sentido, são problemas clássicos do ensino primário.

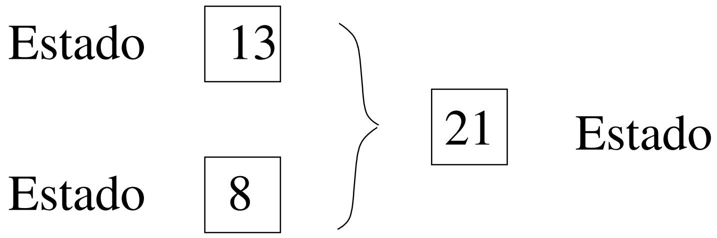
Contudo, Vergnaud (ibid.) esclarece que há vários tipos de relações aditivas. Logo, há vários tipos de adições e subtrações, variando, portanto, seus graus de complexidade.

Para entendermos melhor esta idéia, convém passarmos à análise das seis grandes categorias de relações aditivas propostas por Vergnaud (1985/1991), e as quais, segundo Moro (1998, p. 59) "*(...) podem acarretar todos os tipos e níveis de problemas de adição/subtração na aritmética.*"

I - Primeira categoria [5]: compõem-se duas medidas para dar lugar a uma medida.

Ex.: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. No total Mariana possui 21 brinquedinhos para brincar.

Esquema correspondente:



Equação correspondente: $13 + 8 = 21$

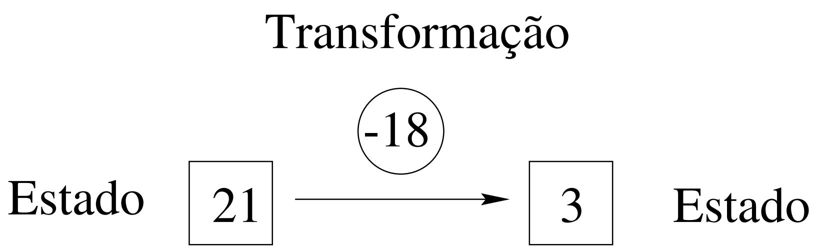
Nesta primeira categoria temos a composição de duas medidas, ou seja, a composição de dois números de mesma natureza. Neste caso, os números 13/8/21 são, na denominação de Vergnaud (1985/1991), números naturais. Dito de outra forma, são números que correspondem às medidas/estados e não às transformações. Portanto, não são nem positivos e nem negativos. "*Os números naturais são números sem signo (...) e não podem representar transformações.*" (Vergnaud, 1991, p. 163).

II - Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma medida.

Ex: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Antes de jogar sua partida ele tinha 21 bolinhas.

Esquema correspondente:

[5] As definições e esquemas foram retirados da obra de Gérard Vergnaud (1985/1991) - El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primária. Vale ressaltar que os exemplos apresentados baseiam-se nos problemas que foram utilizados na coleta de dados do presente trabalho.



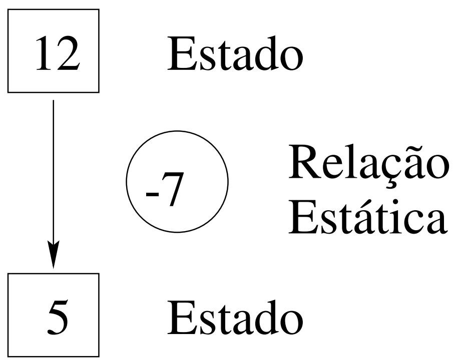
Equação correspondente: 21 + (-18) = 3

Vemos nesta segunda categoria que não se trata apenas da composição de dois estados. Aqui temos uma transformação (-18) operando sobre uma medida/estado para dar lugar a outra. Assim, os números 21/3 são números naturais, no sentido já definido na categoria anterior. Já o número (-18) equivale ao número relativo, ou seja, número que representa transformações as quais operam sobre as medidas/estados. Neste exemplo, é uma transformação negativa (-18). Os números relativos, neste sentido, "*(...) representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações).*" (Vergnaud, 1985/1991, p. 163), uma vez que operam em termos de adicionar, ganhar, tirar, perder, etc.

III - Terceira categoria: uma relação une duas medidas.

Ex.: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. João tem 7 a menos. Então João possui 5 carrinhos para brincar.

Esquema correspondente:



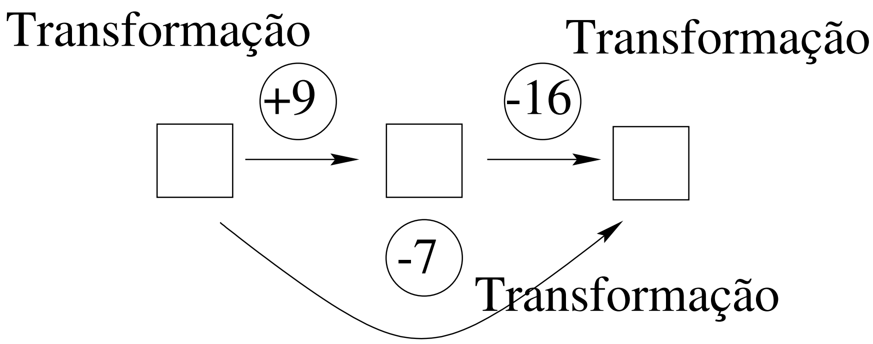
Equação correspondente: 12 + (-7) = 5

Neste caso específico temos um número relativo (-7) que une dois números naturais 12/5. No entanto, Vergnaud (1985/1991) argumenta que este exemplo corresponde a uma "relação estática", diferente dos dois exemplos apresentados na categoria anterior os quais correspondiam às transformações. Nota-se que, aqui, não se opera em termos de adicionar, tirar, etc. Nesta categoria temos, no dizer de Moro (1998, p. 59), "*(...) a comparação quantificada entre duas grandezas.*"

IV - Quarta categoria: duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação.

Ex.: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Ao final das duas partidas João perdeu 7 figurinhas.

Esquema correspondente:



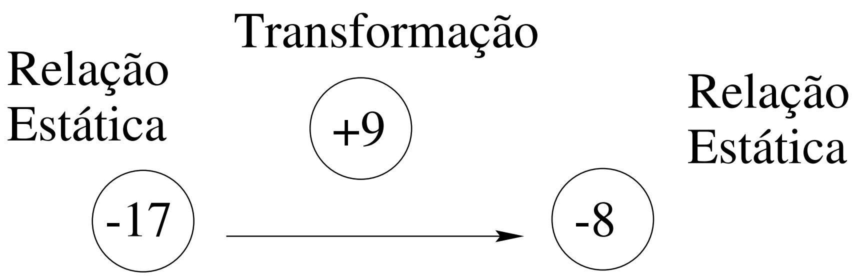
Equação correspondente: (+9) + (-16)= (-7)

Esta quarta categoria refere-se, exclusivamente, à composição de transformações, visto que, (+9) (-16) (-7) são todos números relativos. Isto é, números que expressam transformações. Temos, portanto, nesta categoria um exemplo de adição de duas transformações.

V - Quinta categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um estado relativo.

Ex.: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Paulo ainda deve para Carlos 8 bolinhas de gude.

Esquema correspondente:



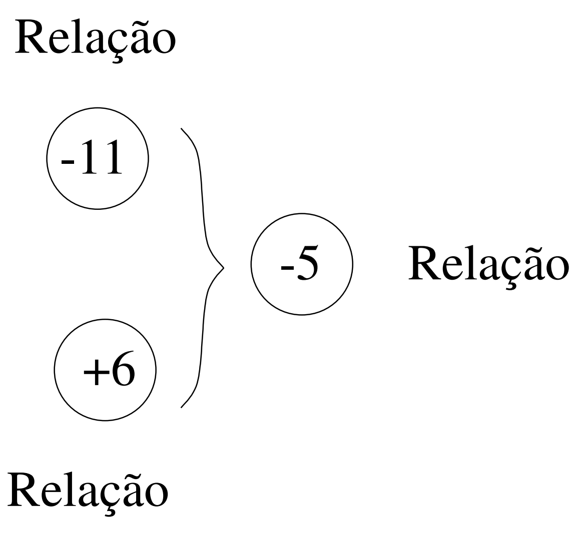
Equação correspondente: (-17) + (+9) = (-8)

Observando atenciosamente a equação correspondente a esta categoria, percebe-se que esta se assemelha à categoria anterior. Contudo, Vergnaud (1985/1991) adverte que, neste caso, trata-se da transformação de um estado relativo e "*(...) tanto um estado relativo como uma transformação são representados por números relativos.*" (p. 168). Esta quinta categoria pode ser descrita como sendo a transformação entre duas relações estáticas (Damm, 1994).

VI - Sexta categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo.

Ex.: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Mariana precisa devolver para Vanessa 5 papéis de carta.

Esquema correspondente:



Equação correspondente: (-11) + (+6) = (-5)

Esta categoria também parece assemelhar-se à quarta categoria já exposta anteriormente. No entanto, esta sexta categoria consiste em relações/estados que se compõem entre si. Vergnaud (1985/1991, p. 169) justifica a elaboração desta sexta categoria da seguinte forma: "*(...) em particular, não há nenhuma ordem temporal entre dois estados relativos e, quando se compõem, são considerados como contemporâneos; não é o caso das transformações.*"

Estas são, portanto, as seis grandes categorias de relações aditivas. Entretanto, vale ressaltar que em cada uma delas faz-se intervir diferentes classes de problemas, os quais variam quanto a sua complexidade de resolução. Ou como argumenta Vergnaud (1985/1991, p. 169): "*(...) a complexidade dos problemas de tipo aditivo varia em função, não somente das diferentes categorias de relações numéricas (...), mas também em função das diferentes classes de problemas que se podem propor para cada categoria.*"

Porém, antes de analisarmos os problemas conforme as categorias de relações aditivas aqui já expostas, convém relembrarmos que: uma medida ou estado corresponde aos números naturais: números que, na concepção de Vergnaud (ibid.), não são nem positivos e nem negativos, são de uma mesma natureza e logo não representam transformação. Já esta última, pode ser associada tanto aos números positivos quanto aos negativos.

A retomada destas idéias básicas faz-se necessária pelo fato de que os diferentes problemas, que derivam das diferentes estruturas de relações aditivas, são explicados e desenvolvidos por Vergnaud (1985/1991), levando-se em consideração tanto os "estados" quanto às "transformações", no sentido já explicitado neste trabalho. Este ponto tornar-se-á mais claro na medida em que forem exemplificados os diversos tipos de problemas aditivos.

Comecemos, então, pela análise da primeira categoria de relação aditiva, a saber: compõem-se duas medidas para dar lugar a uma medida. Diante desta categoria vamos encontrar duas classes de problemas, como pode ser verificado nos exemplos abaixo:

1- Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

2- Mariana tem faquinhas e garfinhos para brincar, no total 21 brinquedinhos. Sabendo que 13 destes brinquedos são faquinhas, quantos garfinhos Mariana possui para brincar?

A dificuldade destas classes de problemas pode variar em função dos números dados, do conteúdo e da forma das informações. No primeiro problema a solução é dada por uma adição. Basta somar dois estados, 13 e 8, para se obter o resultado.

O segundo problema requer uma subtração em sua solução. No entanto, Vergnaud (1985/1991) adverte que este também pode ser resolvido por meio de um cálculo de complemento, ou seja, pode-se partir do 13 e contar até o 21 "para ver quantos faltam". O cálculo de complemento não requer um cálculo relacional complexo e é utilizado bem precocemente. Contudo, nem sempre se pode valer deste procedimento, principalmente quando se trata de números maiores. Além disso, Vergnaud considera esta subtração como sendo complexa. Ele explica que, neste caso, a subtração não é colocada em termos de perder, tirar. Daí o motivo de sua maior complexidade.

Já a segunda categoria de relações aditivas - uma transformação operando em um estado para dar outro estado - comporta um número maior de classes de problemas. Isto porque a transformação pode ser positiva ou negativa e a incógnita do problema pode se referir tanto ao estado final quanto à transformação, ou ainda, quanto ao estado inicial.

Tomemos como base alguns exemplos:

1. Pedro tinha 18 bolinhas de gude. Ele jogou uma partida e ganhou mais 3 bolinhas. Quantas bolinhas Pedro tem agora? (Estado inicial=18/Transformação=+3/Estado final=x)

2. Pedro acaba de jogar uma partida de bolinha de gude. Ele tinha 3 bolinhas antes de jogar. Agora ele tem 21 bolinhas. O que aconteceu durante a partida jogada por Pedro? (Estado inicial=3/Transformação=x/ Estado final=21)

3. Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e ganhou 18 bolinhas. Agora

ele tem 21 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida? (Estado inicial=x/Transformação=+18/ Estado final=21)

4. Pedro tem 21 bolinhas de gude. Ele jogou uma partida e perdeu 3 bolinhas. Com quantas bolinhas de gude Pedro ficou? (Estado inicial=21/Transformação=-3/ Estado final=x)

5. Pedro acaba de jogar uma partida de bolinha de gude. Ele tinha 21 bolinhas antes de jogar. Agora ele tem 3. O que aconteceu durante a partida jogada por Pedro? (Estado inicial=21/Transformação=x/ Estado final=3)

6. Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude Pedro tinha antes de jogar? (Estado inicial=x/Transformação=-18/ Estado final=3)

Os problemas 1 e 4 não trazem grandes dificuldades uma vez que basta aplicar uma transformação direta, positiva ou negativa, ao estado inicial. No problema 1 temos uma adição e no problema 4 uma subtração.

Contudo, há que se considerar que a subtração exigida para a resolução do problema 4 não requer a introdução prévia da adição. Vergnaud (1985/1991, p. 172) explica que "*(...) dar, perder, baixar, diminuir, são transformações que têm significado em si mesmas.*"

Em contrapartida, os problemas 2 e 5 são mais complexos e podem dar lugar a eventuais fracassos. Segundo Vergnaud (ibid.), existem dois procedimentos para se obter êxito nestes problemas: o procedimento de complemento, já explicitado anteriormente, e o procedimento da diferença. Este último consiste em "*(...) buscar, por subtração entre os estados inicial e final, o valor da transformação. Este procedimento se utiliza com todos os números, quaisquer que estes sejam, pois supõe um cálculo relacional mais elaborado que o procedimento de complemento.*" (p. 172). O procedimento da diferença obriga a criança a raciocinar sobre a transformação que une os estados final e inicial.

Já os problemas 3 e 6 são ainda mais difíceis que os precedentes. Isto porque "*(...) implica a inversão da transformação direta e o cálculo do estado inicial por aplicação ao estado final de tal transformação inversa.*" (Vergnaud, 1985/1991,

p. 173). Dito de outra forma: "*(...) se B faz passar de A a C, então -B faz passar de C a A.*" (Vergnaud, ibid., p. 173). Portanto, inverte-se a transformação, aplica-se ao estado final para então, se obter o estado inicial.

Em relação a terceira categoria - uma relação une duas medidas - Vergnaud não menciona quais as suas classes de problemas, bem como suas dificuldades quando das resoluções.

Porém, a partir de outras leituras e do nosso próprio entendimento, apresentamos abaixo alguns exemplos de problemas que compõem esta terceira categoria.

1- Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João possui para brincar?

2- Pedro tem 7 carrinhos para brincar. Ele possui 5 carrinhos a menos que João. Quantos carrinhos João tem para brincar??

Segundo Damm (1994), esta terceira categoria de relação aditiva pode dar lugar a seis classes de problemas de acordo com a incógnita.

Os problemas desta terceira categoria podem engendrar certas dificuldades quando das suas resoluções uma vez que, no primeiro exemplo, fala-se em carrinhos "a mais", contudo, sua solução requer uma subtração. O contrário ocorre com o problema 2, o qual apresenta carrinhos "a menos" e sua solução consiste em uma adição. Pode haver, nestes casos, dificuldades com relação aos indícios linguísticos apresentados nos enunciados dos problemas.

Na quarta categoria de relações aditivas, na qual duas transformações se unem para dar lugar a outra transformação, destacam-se dois tipos de problemas. Passemos aos exemplos:

1. João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ganhou 9 figurinhas. Na segunda perdeu 16. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

2. João jogou duas partidas de "bafo". Durante a primeira ganhou 9 figurinhas. Depois jogou uma segunda partida. Fazendo as contas das duas partidas viu que no total havia perdido 7 figurinhas. O que aconteceu durante a segunda partida jogada por João?

Nos problemas do tipo 1 vemos que se tratam de situações em que são conhecidas as transformações elementares, no caso específico, 9 e 16, e, desta forma, faz-se necessário encontrar a transformação composta. No exemplo dado, basta subtrair os números positivo e negativo para encontrar o resultado, o que não requer muita dificuldade.

Já os problemas do tipo 2 consistem em conhecer uma das transformações elementares e a composta para, assim, encontrar outra transformação elementar. Estes tipos de problemas são de grande complexidade e não é por acaso que Vergnaud adverte que estes são resolvidos somente por volta dos 10-11 anos de idade, embora seja apenas necessário realizar uma simples adição. No exemplo específico, 9+7=16, onde 16 corresponde ao número de figurinhas perdidas por João, durante a sua segunda partida de bolinha de gude.

Na quinta categoria de relações aditivas, a qual consiste na transformação de duas relações estáticas, Vergnaud (1985/1991) argumenta que é possível encontrar as mesmas classes de problemas já explicitadas na segunda categoria. Isto significa que teremos problemas que requerem ou o estado final ou a transformação, ou o estado inicial. Eis um exemplo:

1. Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

Observa-se neste exemplo que é necessário apenas uma subtração para chegar a sua solução. e, portanto, parece não engendrar maiores dificuldades para os sujeitos.

Na sexta categoria de relações aditivas, a qual pressupõe a composição de dois estados relativos para dar lugar a um estado relativo, encontram-se problemas semelhantes à primeira categoria, já explicada anteriormente. Podemos exemplificar com o seguinte problema:

1- Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

Esta sexta categoria de problemas aditivos talvez possa acarretar algum grau de dificuldade uma vez que trata-se de estados relativos. Neste caso específico, Mariana deve papéis de carta para Vanessa, no entanto, Vanessa também deve alguns para Mariana. Há, portanto, neste exemplo, uma relação que precisa ser considerada quando de sua solução.

A partir de todas as classes de problemas já apresentadas, podemos constatar a diversidade e a variação dos graus de complexidade que se impõem em cada uma delas. Devido a este fato é que estes problemas foram escolhidos para fazer parte de um trabalho que contempla a construção dialética entre as operações de adição e subtração. Isto é, por estes exigirem diferentes tipos de adições e subtrações quando de suas resoluções, e na verdade, por pressuporem uma coordenação entre ambas.

Neste sentido, os estudos realizados por Vergnaud acerca dos problemas de estrutura aditiva fundamentaram parte dos instrumentos utilizados na presente pesquisa.

Desta forma, os aspectos de ordem teórica aqui enfocados e que dizem respeito aos processos cognitivos ligados à construção do conhecimento, à construção dialética das operações de adição e subtração e aos problemas aditivos, delinearam nossos objetivos e nosso problema de pesquisa, daí a importância de descrevê-los.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

"Da experiência dos demais
adquire sabedoria e de seus
sentimentos aprende a corrigir tuas
próprias falhas"
(A vós confio)

A presente pesquisa bibliográfica foi desenvolvida conforme o objetivo proposto neste trabalho, o qual, em linhas gerais, consiste em buscar as possíveis relações entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos. Neste sentido, a literatura que consta neste capítulo apresenta estudos os quais contemplam os seguintes assuntos: o processo dialético construtivo, na acepção piagetiana; as operações de adição e subtração bem como a utilização destas na resolução de problemas.

Com relação ao processo dialético construtivo devemos assinalar que as pesquisas que temos conhecimento não dizem respeito diretamente às operações que visamos estudar. De fato, são trabalhos que versam sobre a construção dialética, no entanto, esta é analisada a partir da utilização de jogos, tanto no contexto pedagógico quanto psicopedagógico.

Portanto, por meio de jogos, como: torre de hanói, arca de Noé, mastergoal, cara-a-cara, entre outros, os autores (Torres e Macedo, 1994; Rosseti, 1996; Alves, 1997; Magalhães, 1999; Ortega, 1999, Ribeiro, 2001) analisam o processo dialético, isto é, discutem sobre a construção de interdependências a partir das atividades propostas aos sujeitos e as inter-relações engendradas pelo próprio jogo.

No que concerne às operações de adição e subtração temos várias pesquisas que merecem destaque pois trabalham com a idéia de que estas operações são construídas gradativamente pelo sujeito e não se restringem apenas ao uso mecânico de regras.

Carraher e Schliemann (1983), em um estudo realizado com 50 crianças com idade entre 7 e 13 anos, relatam os procedimentos utilizados por estes sujeitos quando da resolução de operações de adição e subtração.

As autoras analisam os procedimentos utilizados pelas crianças bem como suas explicações verbais e neste sentido, identificam os seguintes:

- contagem (usando os dedos, marcas no papel);
- uso dos algoritmos ensinados pela escola;
- decomposição dos números envolvidos em dezenas e unidades;
- uso de resultados prévios para derivar um novo resultado.

Carraher e Schliemann (1983) ressaltam que o procedimento mais utilizado pelos sujeitos foi a contagem, seguido do uso dos algoritmos. Poucas crianças se utilizaram da decomposição dos números e também de resultados já obtidos para alcançar um novo. Embora estes últimos tenham sido os procedimentos menos utilizados, por outro lado, eles foram os que mais conduziram os sujeitos ao êxito, tanto na adição quanto na subtração. Em contrapartida, a utilização dos algoritmos ensinados pela escola foi o procedimento que apresentou o maior número de erros por parte dos sujeitos.

Carraher e Schliemann (1983) concluem que a educação matemática poderia ser beneficiada na medida em que aproveitassem os procedimentos inventados pelos sujeitos para resolver as operações aritméticas.

Kamii e Lewis (1991), em pesquisa realizada com dois grupos distintos de crianças, um instruído de forma tradicional e outro pertencente a uma proposta de ensino construtivista, revelam que nas situações que envolvem apenas o uso mecânico do algoritmo, o primeiro grupo (tradicional) obtém um ótimo desempenho. Os resultados são iguais ou até mesmo superiores com relação aos resultados do segundo grupo (construtivista).

Entretanto, isto não se confirma quando estes mesmos sujeitos são avaliados em situações que exigem a compreensão acerca dos processos envolvidos nas operações de adição e subtração. Os resultados dos sujeitos que fazem parte de uma proposta de ensino tradicional, pautada no uso mecânico de regras para solucionar as operações, são significativamente inferiores àqueles obtidos com os sujeitos inseridos em uma proposta de ensino construtivista.

A análise dos dados obtidos por Kamii e Lewis (ibid.) encerra que os sujeitos pertencentes a um ensino tradicional utilizam-se apenas de regras que lhes são ensinadas; não possuem compreensão sobre as operações de adição e subtração e não inventam novos procedimentos para solucioná-las. Já o grupo construtivista sabe solucionar as situações propostas e, sobretudo, compreendem aquilo que estão fazendo.

Ainda discutindo sobre as operações de adição e subtração, Kamii, Lewis e Livingston (1993) relatam que as crianças, quando encorajadas, são capazes de inventar seus próprios procedimentos para solucionar tais operações. Inclusive, as autoras salientam que as crianças, quando inventam seus próprios procedimentos, começam a resolver as operações da esquerda para a direita, diferentemente da forma tradicional como estas são ensinadas. No entanto, para que esta invenção se efetue, faz-se necessário que os sujeitos raciocinem e discutam seus diferentes pontos de vista com a classe.

Neste sentido, as autoras argumentam que: "*Se o professor não falar que uma resposta está correta ou incorreta e encorajar as crianças a concordar ou discordar entre elas, a classe continuará a pensar e a debater até que uma solução seja alcançada.*" (p. 201).

Segundo as autoras, quando as crianças inventam seus próprios procedimentos, elas são capazes de entender os processos matemáticos que envolvem as operações, não se restringindo apenas ao uso mecânico dos algoritmos. Kamii, Lewis e Livingston (1993) concluem que a vantagem de se incentivar o sujeito a inventar seus próprios procedimentos se faz por três motivos:

- a criança não tem que renunciar aos seus próprios pensamentos;
- seu entendimento sobre o valor posicional é enriquecido ao invés de se enfraquecer pelo uso do algoritmo;
- a criança desenvolve um melhor senso numérico.

Gill (1993), assim como Kamii, Lewis e Livingston (1993), também argumenta que o professor deveria encorajar os alunos a compartilhar seus pensamentos e também a ouvir as idéias dos colegas no que diz respeito à resolução das operações de adição e subtração. "*A discussão em sala de aula se torna um rico ambiente para aprender matemática.*" (p.381). Inúmeros procedimentos para adição e subtração são construídos à medida que os sujeitos têm oportunidade de pensar e discutir. Como exemplo, Gill (ibid.) demonstra o procedimento de uma criança para solucionar a operação: $26 + 26 + 26 + 26 + 27$

$$
\begin{gathered}
20 + 20 + 20 = 60 \\
20 + 20 = 40 \\
60 + 40 = 100 \\
6 + 6 + 6 + 6 = 24 \\
24 + 7 = 31 \\
100 + 31 = 131
\end{gathered}
$$

Já a subtração, $131 - 109$, foi resolvida por um outro estudante da seguinte forma:

$$
\begin{gathered}
100 - 100 = 0 \\
30 - 0 = 30 \\
1 - 9 = -8 \\
30 - 8 = 22
\end{gathered}
$$

A autora ressalta, neste procedimento, os números negativos utilizados pelo sujeito para a resolução da operação. Além deste, outro muito interessante foi identificado por Gill (1993):

$$109 + - = 131$$
$$109 + 1 = 110$$
$$110 + 20 = 130$$
$$130 + 1 = 131$$
$$1 + 20 + 1 = 22$$

Neste exemplo, o sujeito adicionou 1 ao 109 e conseguiu um número terminado com 0, o qual, segundo a autora, é mais fácil para se utilizar mentalmente. Depois acrescentou 20 e obteve 130 e, finalmente, juntou mais 1. Assim, conseguiu chegar ao resultado 22 procedendo por adições.

Gill (1993) conclui que os professores precisam entender que a criança nem sempre pensa do jeito como o adulto pensa. Neste sentido, é preciso que a criança explique e demonstre, de alguma forma, seus pensamentos.

Morgado (1993), discutindo acerca das operações de adição e subtração, destaca que a construção destas encontra-se ligada à formação da própria série numérica. A autora também identifica vários procedimentos desenvolvidos pelos sujeitos quando da resolução oral das operações de adição e subtração.

Quanto a adição Morgado (ibid.) elenca duas formas de resolução:

- contagem - contar todos para ver quantos tem; contar partindo do número que surge na primeira parcela até atingir o número da segunda;
- composição e decomposição numérica - Ex: $27 + 12 \rightarrow 25 + 10 = 35 + 2 = 37 + 2 = 39$.

Com relação à subtração os mesmos procedimentos foram encontrados:

- contagem - contar a partir do número menor para chegar ao maior;

- composição e decomposição numérica - estratégia semelhante à utilizada na adição.

Morgado (1993) ressalta que cabe ao professor organizar tarefas que ajudem os alunos a construir procedimentos cada vez mais avançados e sugere, neste sentido, o jogo de regras e o cálculo mental como atividades que podem vir a cumprir tal objetivo.

Moro (1998), a partir de um estudo realizado com três sujeitos de uma escola pública de primeiro grau, analisou, dentro de uma perspectiva construtivista, a relação das interações sociais destes sujeitos com suas "construções cognitivas individuais" na aprendizagem do sistema da adição e da subtração, sob a intervenção do adulto.

As situações experimentais consistiram em tarefas que envolviam a composição/decomposição de quantidades e a composição aditiva de números.

A partir dos dados coletados Moro (1998) encerra com as seguintes considerações:

- houve progressos em relação à compreensão dos sujeitos no sistema da adição/subtração, contudo, tais progressos restringiram-se ao plano pré-operatório;
- verificou-se que as "*estratégias cognitivas de cada sujeito estão inter-relacionadas, marcando e deixando-se marcar umas pelas outras segundo um modelo cíclico básico de formas de inter-relação.*" (p. 469).

Moro (ibid.) explica tais considerações a partir dos pressupostos teóricos piagetianos - tomada de consciência, equilibração, entre outros. Além disso, com base em seus resultados, desenvolve implicações ao nível teórico, metodológico e pedagógico.

Page (1994) salienta que as crianças aprendem adição mais facilmente que a subtração e que esta última geralmente vem acompanhada de muita dificuldade. Segunda a autora, as crianças de primeira série já possuem um conhecimento "intuitivo" sobre a subtração. Elas, em seu cotidiano, experimentam situações que envolvem subtrações. No entanto, estas situações cotidianas muitas vezes não são relacionadas com a matemática de sala de aula.

A proposta de Page (ibid.) consiste em ajudar o aluno de primeira série a relacionar situações do dia a dia com a representação numérica propriamente dita. Neste sentido, são solicitadas, durante as aulas, inúmeras atividades que englobam:

- a introdução do conceito - "o tirar";
- a introdução de objetos concretos, manipuláveis;
- a resolução e a criação de problemas;
- a retomada das informações;
- e por fim, a introdução do algoritmo.

Page (1994) argumenta que é preciso tempo para que a criança relacione suas experiências de matemática com os símbolos convencionais. Entretanto, isto é imprescindível para que ela construa uma sólida fundamentação conceitual.

Wearne e Hiebert (1994), a partir de um estudo comparativo entre duas crianças do ensino fundamental, salientam que a compreensão das crianças pode variar consideravelmente quando estas são solicitadas a explicar o que fizeram. Ou seja, crianças que recebem uma instrução voltada para a prática de muitos exercícios, sem um contexto significativo, tendem a explicar as operações de adição apenas de uma maneira descritiva, assim como seus professores tinham explicado. Entretanto, os sujeitos que são solicitados a inventar seus próprios procedimentos e a discutir com o grupo, conseguem explicar a operação de uma forma não descritiva, demonstrando, assim, compreensão acerca do valor posicional da numeração.

Os autores, neste sentido, ressaltam a importância de o sujeito ter compreensão sobre o que está fazendo, sobre os processos que envolvem as operações que está resolvendo. Da mesma forma, o professor também deve entender por que o aluno está se utilizando de um determinado procedimento. Para os autores a "*(...) matemática é muito complexa para se aprender por regras isoladas.*"(p.274).

Caroll e Porter (1997) argumentam que a invenção pode fazer com que ela desenvolva procedimentos matemáticos significativos. O uso do algoritmo, de acordo com os autores, produz a resposta correta. Entretanto, pode não fazer o menor sentido para quem o utiliza.

O algoritmo não se constitui no melhor método para solucionar determinados problemas. Os autores exemplificam esta afirmação a partir da seguinte operação de subtração: $7000 - 2 =$.

Quando solucionada pelo algoritmo padrão, repassado pela escola, esta operação apresenta um número de erro considerável por parte dos sujeitos. O que já não acontece com os sujeitos de classes onde os professores incentivam o uso de diferentes procedimentos. Neste sentido, Caroll e Porter (ibid.) descrevem diferentes maneiras de encorajar a criança a inventar seus próprios procedimentos:

- permitir que o aluno gaste tempo para explorar seus próprios métodos;
- ter disponíveis objetos concretos para dar suporte ao pensamento da criança;
- deixar a criança construir estratégias e tomar conhecimento do fato;
- apresentar problemas em contextos significativos;
- e encorajar o aluno a compartilhar suas estratégias com os demais.

Lopes (1997), a partir de um estudo realizado com crianças de segunda e terceira séries do ensino fundamental, investigou as relações entre o mecanismo de abstração reflexiva, conforme descrito por Piaget (1977/1995), e a resolução das operações de adição e subtração.

Em sua pesquisa Lopes (ibid.) analisa as resoluções escritas desenvolvidas pelos sujeitos para as operações de adição e subtração e também os procedimentos utilizados por eles quando destas resoluções, além, obviamente, de identificar os níveis de abstração reflexiva dos sujeitos por meio da aplicação da prova: a inversão das operações aritméticas.

Quanto às resoluções escritas, a autora constata que os sujeitos obtêm um alto índice de acertos, independentemente de seus níveis de evolução na prova de abstração reflexiva.

Segundo Lopes (1997), as diferenças entre os sujeitos pesquisados emergem à medida que estes são solicitados a explicar, por meio da ação material (fichas), os procedimentos utilizados quando de suas resoluções. Neste sentido, os procedimentos mais complexos e melhor elaborados e os quais demonstram compreensão sobre as operações de adição e subtração só foram identificados nos sujeitos que possuíam níveis de abstração reflexiva mais evoluídos.

Lopes (1997) conclui que o bom desempenho, ou melhor, o alcance da resposta correta, nem sempre significa que o sujeito entenda os processos envolvidos nas operações de adição e subtração. Este êxito, por sua vez, não apóia-se no mecanismo de abstração reflexiva. No entanto, a compreensão destas operações só se fez presente nos sujeitos com níveis de abstração reflexiva mais evoluídos, demonstrando o quanto esta última intervém na construção do conhecimento por parte do sujeito.

Franchi (1987), a partir de uma pesquisa realizada com 114 alunos com idade variando entre 7/8 anos, aponta as dificuldades que ocorrem na aprendizagem de adição e subtração, mais precisamente na resolução de problemas aditivos.

Franchi (ibid.) destaca que problemas em que se conhece o estado inicial, a transformação e pede-se o número correspondente ao estado final, não impõem dificuldades específicas e são bem resolvidos pelos sujeitos - Ex: "Valter tinha 13 bolinhas. Comprou 14. Ficou com ... bolinhas."

As dificuldades se acentuam em problemas que questionam a transformação ocorrida. Ex: "Cristina tinha 22 bolinhas. Comprou... Agora tem 29 bolinhas." Segundo Franchi (1987), para resolver estes problemas os sujeitos acabam por se utilizar de recursos próprios que, geralmente, estão pautados em uma fórmula aditiva ($22 + x = 29$).

Franchi (ibid.) também propôs problemas que questionavam sobre os estados iniciais. Ex: "Luís tinha... carrinhos. Ele perdeu 14. Então ele ficou com 15 carrinhos." Quanto aos problemas deste tipo, a autora identificou que os alunos se utilizavam da seguinte fórmula para resolvê-los: $x + 17 = 28(11 + 17 = 28)$. Para Franchi (1987) este problema implica na inversão das ações descritas no enunciado e, portanto, impõe um maior grau de dificuldade para sua resolução.

Neste contexto, Franchi (ibid.) propõe que no que diz respeito às condutas do aluno, é interessante verificar "*(...) em que situações ele está utilizando tal ou qual procedimento? Por quê?.*" (p.57). A autora ainda ressalta que desta forma não há sentido na seguinte pergunta: "*Professor, o problema é de 'mais' ou de 'menos'?.*" (p. 57).

Com relação aos problemas que envolvem as operações de adição e subtração, Fuson e Willis (1989) argumentam que o uso de desenhos esquemáticos pode ajudar os alunos quando de suas resoluções.

Os autores advertem que a escola tem apresentado problemas com enunciados muito simples, ou seja, problemas em que o procedimento de resolução é idêntico a sua estrutura semântica. Trata-se, na verdade, de problemas, em que, as palavras utilizadas acabam por identificar o procedimento de resolução.

Na tentativa de reverter tal situação, Fuson e Willis (ibid.) utilizam-se de determinados esquemas no intuito de ajudar o procedimento de resolução do sujeito. Uma das situações proposta pelos autores pode ser exemplificada da seguinte forma:

Jon e Bill têm juntos 814 brinquedos. Jon tem 342 brinquedos. Quantos brinquedos Bill possui?

<table>
<tr><td colspan="2">814 - todo</td></tr>
<tr><td>342 - parte</td><td>? - parte</td></tr>
</table>

Os autores discutem que o uso de esquemas para representar a estrutura do problema pode e deve ser feito em sala de aula pelos professores, pois isto permitiria um melhor entendimento por parte das crianças.

No que diz respeito à resolução de problemas, Morgado (1993) adverte que esta deve necessariamente implicar na coordenação de três aspectos:

- representação mental;

- estratégia;

- cálculo computacional.

Quanto aos problemas específicos de adição e subtração, Morgado (ibid.) admite que existe uma grande diversidade deles. Para tanto, a autora discorre sobre as seis categorias de problemas aditivos propostas por Vergnaud. Morgado (1993) ressalta que estes problemas devem ser trabalhados pelo professor em sala de aula. Porém, deve se respeitar ali os diferentes graus de complexidade impostos por cada categoria de problemas. Além disso, deve-se também levar em consideração os três aspectos já apontados: representação mental, estratégia e cálculo computacional.

Damm (1994), baseando-se nos trabalhos desenvolvidos por Vergnaud acerca dos problemas de estrutura aditiva, realizou um estudo com o objetivo de verificar se a dificuldade dos alunos, quando da resolução destes problemas, referia-se à compreensão dos enunciados ou à resolução propriamente dita. Além deste objetivo, Damm (ibid.) também verificou que tipo de representação poderia ser um instrumento eficaz na resolução dos problemas.

Ao final de sua análise, Damm (1994) conclui que os alunos apresentam dificuldades em selecionar e organizar os dados que são pertinentes à resolução dos problemas e, neste sentido, sua proposta de trabalho, ou seja, a apresentação de esquemas e representações, ajuda a amenizar estas dificuldades.

Busquet Prat (1995) define os chamados "problemas" como "*(...) a expressão de uma situação real na qual se coloca uma incógnita, formulada na forma de pergunta à qual se deve responder.*" (p. 75).

Segundo a autora esta definição sugere que os problemas têm o objetivo apenas de fazer com que os sujeitos se utilizem de operações aritméticas já aprendidas, ou seja, seria a aplicação pura e simples de algo já aprendido.

No entanto, Busquet Prat (ibid.) adverte que a resolução de problemas não deve ser colocada somente como o patamar final da aprendizagem, ao contrário, ela precisa estar presente sempre, desde o início, com o intuito principal de avançar na construção dos conceitos contidos nos problemas.

É neste sentido que a autora propõe que a resolução de problemas seja "*(...) um instrumento intrínseco ao próprio processo de aprendizagem.*" (p. 75). Desta forma, tanto a resolução quanto a formulação de problemas realizadas pela criança fazem parte deste contexto.

Em um outro artigo Busquet Prat (1995a) relata um estudo realizado na Espanha com 75 crianças de 7 a 11 anos, no qual se verificou a capacidade destes sujeitos em formular enunciados de problemas, partindo de três operações de adição, cujo cálculo aritmético era simples. São estas as expressões propostas pela pesquisadora:

1) $4 + 5 =?$
2) $4+? = 6$
3) $? + 3 = 5$

Individualmente os sujeitos foram solicitados a formular, por escrito, um problema para cada operação. Neste sentido, a autora trabalhou com dois sistemas simbólicos diferentes - a linguagem matemática e a linguagem escrita.

Diante dos dados coletados Busquet Prat (1995a), analisando as dificuldades lógico-linguísticas destes sujeitos, distingue várias condutas que vão desde aquelas em que os sujeitos apenas descrevem os dados contidos nas operações dadas, não formulando e nem apresentando a incógnita do problema, até aquelas em que os sujeitos formulam corretamente os problemas, colocando a incógnita em forma de pergunta.

A partir das condutas identificadas, a autora (1995a) conclui que a passagem do algoritmo numérico à linguagem escrita é muito complexa, isto porque, faz-se necessário "*(...) organizar a informação que ocasiona a expressão matemática oferecida.*" (p. 26). Além disso, a autora identificou erros morfológicos e sintáticos.

Desta forma, Busquet Prat (ibid.) ressalta a confluência entre a lógica, a matemática e a linguística, propondo seu caráter interdisciplinar. Pois, como comentou um de seus sujeitos: "*Caramba! É mais difícil perguntar do que responder*" (p.28). Além disso, a autora assinala que, do ponto de vista pedagógico, a resolução de problemas deveria levar os alunos a compreender o que fazem e não somente a uma aplicação mecânica de operações já aprendidas.

Zunino (1995) ao estudar os procedimentos de resolução de problemas de adição e subtração em crianças de terceira e quinta séries, constatou que:

- os problemas de adição não consistiram em dificuldades para as crianças quando de suas resoluções;
- os problemas de subtração demonstram uma dificuldade maior por parte dos sujeitos por envolver a noção de "ganho" e necessitar de uma subtração em sua solução.

Zunino (1995) discute que a utilização de "problemas-padrão" no contexto escolar é que estaria desencadeando estas dificuldades.

A autora também observou em seu estudo que ao resolver problemas que envolvem adição e subtração as crianças se utilizam de procedimentos próprios e estes, por sua vez, em muitos casos, não coincidem com a "conta" convencional utilizada no contexto escolar.

Neste sentido, Zunino (1995) argumenta que seria necessário incentivar as crianças a usar seus próprios procedimentos, a compará-los e discuti-los com outros membros do grupo, sem contudo, deixar de lado a representação convencional, o qual deveria ser "*objeto de confrontação e discussão*" (p. 54).

Taxa (1996), com base nos pressupostos teóricos construtivistas, realizou um estudo sobre os procedimentos utilizados pelos sujeitos quando da resolução de problemas verbais aritméticos. Este estudo foi desenvolvido com crianças das séries iniciais do primeiro grau de escola pública.

Os dados coletados fizeram a autora concluir que os sujeitos "*(...) constroem uma representação interna do problema, conseguem selecionar e utilizar estratégias diferenciadas (...), conseguindo explicitar algumas vezes de maneira correta, outras menos correta os cálculos realizados para resolver os problemas.*" Além disso, Taxa (ibid.) também discute as possibilidades de intervenção a serem desenvolvidas por professores quando da utilização de problemas verbais com seus alunos.

Nunes e Bryant (1996/1997) destacam que desde muito cedo, por volta dos cinco ou seis anos, as crianças já conseguem resolver problemas utilizando-se de objetos concretos. Problemas do tipo: "Maria tem 5 doces. Sua avó lhe deu 4 doces. Quantos doces ela tem agora?" - são facilmente resolvidos pelos sujeitos. No entanto, a alta taxa de sucessos verificada pelos autores na resolução deste tipo de problema não significa que as crianças dominem os conceitos de adição e subtração.

Neste sentido, Nunes e Bryant (1996/1997) admitem que existem problemas que podem ser organizados de uma forma que sua resolução fique mais complexa. Assim é o caso destes tipos: "Joe tinha 5 bolinhas de gude. Então Tom lhe deu mais algumas bolinhas. Agora Joe tem 8 bolinhas. Quantas bolinhas Tom deu para Joe?" - "Joe tinha algumas bolinhas de gude. Então Tom lhe deu mais 5 bolinhas. Agora Joe tem 8 bolinhas. Quantas bolinhas Joe tinha no começo?". Segundo os autores a resolução destes problemas requer que o sujeito entenda sobre as relações de inversão que se impõem entre as operações de adição e subtração, além da necessidade de compreender a propriedade comutativa da adição.

Outro ponto ressaltado por Nunes e Bryant (1996/1997) é que, nestes casos, seguir indícios linguísticos superficiais levará o sujeito ao erro. Portanto, os sujeitos precisam coordenar os dados existentes no problema e não apenas se guiar por indícios linguísticos.

Lopes (1997) e Lopes e Brenelli (2001) analisam a partir de resoluções escritas de problemas aditivos, conforme descritos por Vergnaud (1985/1991), as relações destas soluções com o mecanismo de abstração reflexiva analisado por Piaget (1977/1995). Em seu estudo, crianças de segunda e terceira série do ensino fundamental foram solicitadas a resolver, de forma escrita, vários problemas de estrutura aditiva, com diferentes graus de complexidade. Já o nível de abstração reflexiva destes sujeitos foi avaliado a partir da prova de inversão das operações aritméticas.

Segundo Lopes (1997) e Lopes e Brenelli (2001) o nível de abstração reflexiva alcançado pelos sujeitos intervém na possibilidade de êxito dos mesmos quando de suas resoluções escritas. A autoras ressaltam que os problemas apresentados exigiam que os sujeitos pensassem simultaneamente sobre os estados e as transformações ocorridas. Desta forma, os problemas só foram solucionados por sujeitos com níveis de abstração reflexiva mais evoluídos.

Lopes (1997) e Lopes e Brenelli (2001) ainda ressaltam que muitos sujeitos centram-se em palavras-chave que aparecem nos enunciados dos problemas e estas, por sua vez, levam-os ao erro. Na verdade, os sujeitos associam os termos “ganhar”, “perder”, respectivamente, às operações de adição e subtração e no caso dos problemas aditivos propostos esta relação não era verdadeira.

Lopes (1997) e Lopes e Brenelli (2001) concluem que a escola, no que concerne a educação matemática, deveria ajudar as crianças a formalizar o seu conhecimento e não ficar apoiada em um ensino que privilegie a transmissão de regras prontas e acabadas, destituídas de significado para os sujeitos.

Neste sentido, as pesquisas aqui expostas e os pressupostos teóricos já enfocados contribuem para delinear nossos objetivos e para delimitar nosso problema de pesquisa.

Capítulo 4

Objetivos e Problema de Pesquisa

"O homem sábio frequentemente
duvida e muda de idéia"
(A vós confio)

Objetivos:

- Identificar os procedimentos utilizados por crianças de terceira, quarta e quinta séries do ensino fundamental na resolução de problemas aditivos.
- Verificar o nível de construção dialética destes sujeitos na resolução de problemas de igualação e construção de diferenças.
- Verificar a relação dos procedimentos apresentados pelos sujeitos na resolução de problemas aditivos com os níveis de construção dialética alcançados por eles na prova: problemas de igualação e construção de diferenças.

Identificação do problema de pesquisa

Fundamentado na perspectiva psicogenética de Jean Piaget, o estudo realizado por Lopes (1997) tinha como objetivo verificar até que ponto crianças, apresentando diferentes níveis de abstração reflexiva, se diferenciavam quanto ao desempenho e a compreensão quando da resolução de situações que envolvessem operações de adição e subtração. No trabalho mencionado acima tal objetivo, obrigou a pesquisadora organizar situações-problema que avaliassem tanto a compreensão quanto o desempenho dos sujeitos nas operações em questão.

Convém esclarecer que no âmbito daquele trabalho, o desempenho foi analisado a partir da simples obtenção do êxito ou não por parte do sujeito na resolução escrita das operações de adição e subtração. Ao passo que a compreensão fundamentou-se na capacidade do sujeito em explicar e demonstrar, por meio da ação realizada sobre os objetos, as referidas operações.

O fato é que diante desta busca de relações - desempenho/compreensão/abstração reflexiva - dados interessantes e importantes foram evidenciados. Dados estes que fizeram a autora concluir que compreender as operações de adição e subtração, no sentido aqui já exposto, requer um nível de abstração mais evoluído por parte do sujeito e, neste sentido, haveria uma estreita relação entre o compreender as operações e o mecanismo de abstração reflexiva descrito por Piaget (1977/1995).

No tocante ao desempenho, verificou-se que para a obtenção do êxito não se fazia necessário um nível de abstração reflexiva mais evoluído. Ou seja, os sujeitos, em sua maioria, deram respostas corretas, independentemente de seus níveis de abstração.

No entanto, em algumas situações, elaboradas com o intuito de avaliar o desempenho dos sujeitos, estas conclusões não puderam ser confirmadas. Eram situações que envolviam a resolução escrita de problemas de adição e subtração com diferentes níveis de complexidade (Vergnaud, 1985/1991).

A partir dos dados coletados, Lopes (1997) menciona que os diferentes níveis de abstração reflexiva alcançados pelos sujeitos parecem ter relação com as resoluções dos problemas por eles apresentadas.

Esta menção fundamenta-se no fato de que o êxito, quando da resolução dos problemas, só foi alcançado pelos sujeitos que apresentavam um nível de abstração reflexiva mais evoluído. Desta forma, Lopes (1997) conclui que tais problemas não se resumem a simples cálculos numéricos. Eles, de fato, pressupõem outras relações e raciocínios que, infelizmente, não puderam ser evidenciados no contexto daquele trabalho.

Diante disso, a presente pesquisa vem aprofundar e ampliar o trabalho realizado por Lopes (1997).

Ampliar no sentido de estar verificando as resoluções dos sujeitos, dentro de um elenco de problemas ainda mais amplo, ou seja, dentro de todas as categorias de problemas aditivos propostas por Vergnaud (1985/1991).

Aprofundar no sentido de estar investigando as razões dos erros e acertos nas resoluções de problemas que exigem "simples" adições ou subtrações. Na verdade, trata-se de investigar os "meios" que conduzem o sujeito ao erro ou ao acerto. Pois como afirma Vergnaud (1979, p. 266): "*Para uma mesma tarefa, ou mesmo problema ou a mesma situação, os alunos oferecerão uma variedade de procedimentos. Não há apenas um meio de conseguir a resposta certa, não há apenas uma resposta errada e não há apenas um meio de se obter a mesma resposta errada. Estes diferentes procedimentos, certos ou errados, não são equivalentes do ponto de vista cognitivo.*"

Entretanto, analisar os meios pelos quais os sujeitos adquirem uma resposta, seja esta certa ou errada, requer também uma análise do ponto de vista cognitivo destes sujeitos. Desta forma, vimos buscar respaldo teórico na perspectiva piagetiana, uma vez que esta explica a construção do conhecimento por parte do sujeito na interação com o objeto, além de fornecer elementos para a análise do processo dialético construtivo que engendra as operações de adição e subtração.

Este processo dialético por sua vez é caracterizado pela construção de interdependências. De fato, ele explica como, gradativamente, duas operações contrárias se fundem para formar uma nova totalidade. Portanto, o estudo do processo dialético construtivo entre as operações de adição e subtração, conforme descrito por Piaget (1980/1996), é essencial em nosso trabalho uma vez que os problemas aditivos propostos aos nossos sujeitos envolvem, ao mesmo tempo, adições e subtrações, com níveis diferenciados de complexidade.

Baseado nestas premissas, nosso problema de pesquisa é formulado da seguinte forma:

"Quais as relações que se configuram entre os procedimentos utilizados pelos sujeitos na resolução de problemas aditivos e os diferentes níveis de construção dialética da adição e subtração por eles apresentados?"

A parte metodológica, apresentada na sequência, foi organizada objetivando responder o presente problema de pesquisa.

Capítulo 5

Metodologia

"Cada estado futuro é aquilo que
crias no presente"
(A vós confio)

5.1 Sujeitos

Foram estudados um total de 22 sujeitos (N=22) de uma escola pública da zona urbana de Curitiba. Fizeram parte desta pesquisa sujeitos que frequentavam a terceira, quarta e quinta séries do ensino fundamental. A partir de um sorteio aleatório, a amostra foi composta por 7 sujeitos da terceira série, sendo 4 meninos e 3 meninas; 7 sujeitos da quarta série, com 4 meninos e 3 meninas; e 8 sujeitos da quinta série, sendo 4 meninos e 4 meninas. O Quadro I (p. 54) faz a descrição das crianças participantes da coleta de dados.

5.2 Materiais

Resolução de problemas aditivos: mini-brinquedos (carrinhos, garfinhos, faquinhas); figurinhas; papel de carta; bolinha de gude; folhas de atividade contendo seis problemas aditivos (anexo I); lápis; lápis colorido; sulfite; borracha.

Quadro I - Descrição dos Sujeitos

Escola	Nome	Idade	Sexo	Série
Escola Estadual da Região Urbana de Curitiba	AUG	9;7	M	3ª
	MAR	9;7	F	
	FER	9;6	F	
	LIL	9;2	F	
	BRU	9;6	M	
	AND	10;1	M	
	MAI	10;1	M	
	FEL	10;7	M	4ª
	GUI	11;4	M	
	CEN	10;4	M	
	LUC	10;1	M	
	ALI	10;8	F	
	LIV	10;6	F	
	VAN	10;2	F	
	DIE	13;8	M	5ª
	HEN	11;9	M	
	SHI	11;10	F	
	CAM	12;1	F	
	EDU	13;4	M	
	JUL	11;11	F	
	LAI	13;3	M	
	GRA	12;6	F	

Problemas de igualação e construção de diferenças: fichas de papel cartão; uma caixa com fichas reservas; anteparos de cartolina.

5.3 Procedimento de coleta de dados

Após o sorteio em que ficou determinado os sujeitos que participariam da pesquisa, a experimentadora combinou com os respectivos professores das turmas os horários e os dias em que poderia se efetuar o trabalho, assim como os participou da pesquisa que seria desenvolvida.

A coleta de dados teve seu início no mês de agosto e término em novembro do ano de 2000.

Ao todo, durante este período (agosto/novembro), foram desenvolvidas quatro sessões com cada sujeito. Três sessões relativas à resolução de problemas aditivos e uma sessão referente à prova: problemas de igualação e construção de diferenças. Cada sessão teve duração de aproximadamente 30 minutos.

O Quadro II (p. 55) apresenta a distribuição das sessões realizadas; as categorias de problemas aditivos propostos (anexo I); e também a sessão referente à prova dos problemas de igualação e construção de diferenças.

Quadro II - Problemas apresentados por sessão

Sessões	1ª Cat.	2ª Cat.	3ª Cat.	4ª Cat.	5ª Cat.	6ª Cat.	Problemas de Igualação e Construção de Diferenças
Sessão 1		X				X	
Sessão 2	X			X			
Sessão 3			X		X		
Sessão 4							X

Ressaltamos que as sessões se desenvolveram de forma eficaz e tranquila. As crianças não se recusaram a participar, havendo, inclusive, um grande interesse por parte delas nas atividades propostas.

5.3.1 Resolução de problemas aditivos

Objetivo

- Identificar os procedimentos utilizados pelos sujeitos ao resolver problemas de estrutura aditiva.

As situações e os problemas propostos nesta fase da coleta de dados foram elaborados a partir das pesquisas realizadas por Vergnaud (1985/1991).

Os problemas apresentados aos sujeitos, referem-se aos problemas de estrutura aditiva, os quais, segundo Vergnaud (ibid.), envolvem tanto adições quanto subtrações, assim como já explicado na parte teórica da presente pesquisa.

Os problemas utilizados na coleta de dados encontram-se organizados segundo suas categorias, no anexo I. São seis problemas os quais foram trabalhados individualmente em três diferentes sessões. Embora no anexo I os problemas estejam organizados seguindo a ordem de suas categorias, vale ressaltar que os mesmos foram aplicados intercalados entre si, para que os sujeitos pudessem resolver, em uma mesma sessão, problemas de categorias diferentes (vide quadro II).

Em cada sessão foi solicitada a resolução de dois problemas aditivos. As sessões destinadas à solução destes problemas foram desenvolvidas conforme as situações de coleta explicadas a seguir:

Situação 1: Primeiramente foi apresentado ao sujeito o problema de forma escrita. A experimentadora leu o enunciado do problema juntamente com a criança e em seguida solicitou que esta o resolvesse utilizando-se de papel e lápis. A experimentadora efetuava a leitura do problema, quantas vezes fosse necessária, a fim de assegurar que os sujeitos haviam compreendido o enunciado do mesmo.

A resolução escrita efetuada pelo sujeito foi atentamente observada pela experimentadora. Nesta etapa da coleta de dados foram feitas anotações que a experimentadora julgou importantes para posterior análise.

Pelo fato de se tratar apenas da resolução escrita da criança, nesta primeira situação, não se utilizou gravador. A experimentadora fez uso somente de suas anotações.

Situação 2: Após a resolução escrita apresentada pelo sujeito, a experimentadora entregou à criança papel, lápis colorido e solicitou:

Você seria capaz de resolver este mesmo problema sem fazer uso da operação com os números? Como, então, você poderia fazê-lo de outro jeito? Do jeito que achar melhor! Só não pode usar a operação com números!

Após o sujeito ter explicado seu procedimento de resolução, sem fazer uso do cálculo numérico, a experimentadora questionou:

Como você explicaria o que fez?

Há outro jeito, diferente deste que você já me explicou, de resolver este problema?

Quando o sujeito apresentava um novo procedimento, a experimentadora também solicitava sua explicação.

Nesta segunda etapa a experimentadora, além de fazer uso de suas anotações, também gravou em áudio as entrevistas feitas com os sujeitos.

Situação 3: Nesta terceira situação, a experimentadora apresentou à criança mini-brinquedos [1] (os mesmos contidos no enunciado do problema) e solicitou que esta explicasse o que havia feito, só que, agora, utilizando-se dos materiais concretos:

De que jeito você pode explicar, com estes brinquedos, o que você fez?

Depois de explicar, pela organização da ação prática, o que havia feito quando da resolução escrita do problema, a experimentadora perguntou:

Você poderia me explicar o que você fez com os brinquedos?

[1] ou figurinhas, bolinhas de gude, papel de carta, etc.

Há alguma coisa de parecido com o que você fez aqui, com os brinquedos e com as anotações que você fez?
E com a operação, há alguma coisa de parecido?
Tem outro jeito de organizar os brinquedos? Como?

Durante as entrevistas desta terceira situação, a experimentadora fez uso de suas anotações e gravou em áudio os diálogos com os sujeitos.

Situação 4: A experimentadora voltou a ler o problema juntamente com a criança e pediu para que ela o resolvesse de forma escrita novamente.

Neste momento a experimentadora observou a resolução escrita da criança sem fazer qualquer tipo de solicitação. A experimentadora só fez perguntas ao sujeito quando este havia modificado sua resolução escrita quando comparada à solução dada na situação 1. Foram feitas as seguintes questões:

Por que sua conta está diferente agora?
O que aconteceu?

Nesta etapa da coleta de dados a experimentadora fez uso de suas anotações e também gravou as explicações dos sujeitos em áudio.

Portanto, as situações aplicadas para a resolução dos problemas aditivos podem ser assim sintetizadas:

1. Leitura conjunta (sujeito/experimentadora) e primeira resolução escrita;
2. Resolução por meio de imagens gráficas;
3. Resolução por meio de organização das ações práticas;
4. Leitura conjunta (sujeito/experimentadora) e segunda resolução escrita.

5.3.2 Problemas de igualação e construção de diferenças

Objetivo

- Verificar o nível de evolução dos sujeitos na prova de construção dialética: problemas de igualação e construção de diferenças.

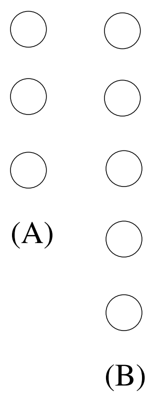
Esta prova foi desenvolvida a partir do trabalho realizado por Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) na obra "As formas elementares da dialética". Em seus estudos Piaget e colaboradores (ibid.) identificaram diferentes níveis de evolução dos sujeitos em problemas de igualação e construção de diferenças. Estes níveis, assim como estabelecidos pelos autores, encontram-se organizados e descritos no anexo II.

Os dados referentes a esta prova foram coletados em uma única sessão. A experimentadora fez uso do protocolo da prova (anexo III) e, além disso, gravou em áudio as entrevistas realizadas com os sujeitos.

Convém, pois, passarmos à descrição dos procedimentos de cada fase da prova apresentada aos sujeitos.

Técnica A:

Situação 1 - Igualar - $3\backslash 5$ $(A\backslash B)$**:** Apresentou-se ao sujeito duas colunas de 3 e 5 fichas respectivamente, como pode ser visto na figura.

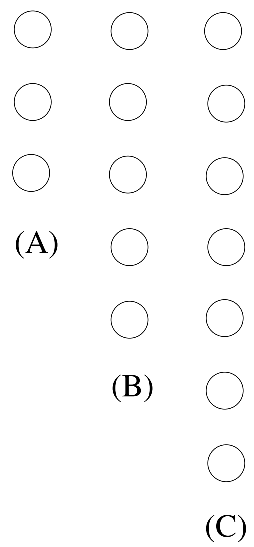


Em seguida, a experimentadora solicitou ao sujeito que igualasse as duas colunas:

Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?
Você tem outra idéia?
Ache todas as maneiras possíveis de igualar as duas colunas.

Vale ressaltar que em todas as situações a caixa de fichas reserva estava presente para que o sujeito, se desejasse, fizesse uso das fichas.

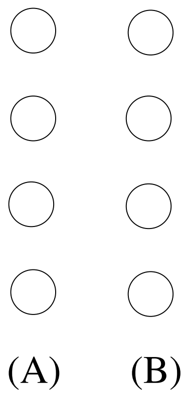
Situação 2 - Igualar - $3\backslash 5\backslash 7$ $(A\backslash B\backslash C)$**:** Nesta situação apresentou-se ao sujeito 15 elementos dispostos em três conjuntos: 3, 5, 7. A figura ilustra a disposição das fichas.



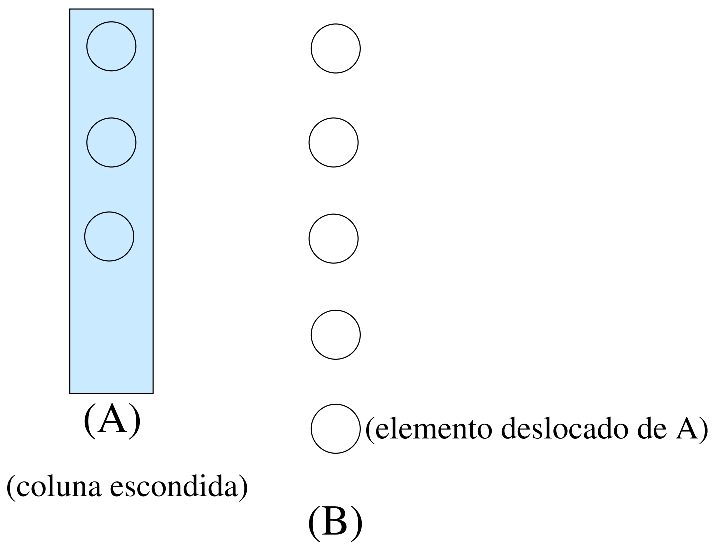
A experimentadora solicitou ao sujeito que igualasse os três conjuntos, assim como havia feito na situação anterior, só que agora com três conjuntos:

Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas três colunas?
Como você faria isto?
Tem outro jeito de deixar tudo igual?

Situação 3 - $4\backslash 4$ $(A\backslash B)$ 1A em B (diferença = $2n$): Apresentou-se ao sujeito duas colunas de 4 elementos cada uma, assim como demonstra a figura.



Após o sujeito ter reconhecido a igualdade das duas colunas, a experimentadora escondeu a coluna A e, em seguida, deslocou 1 elemento desta coluna escondida para a coluna B, como pode ser visto na figura.



Após efetuar o deslocamento de A para B, a experimentadora perguntou:

Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

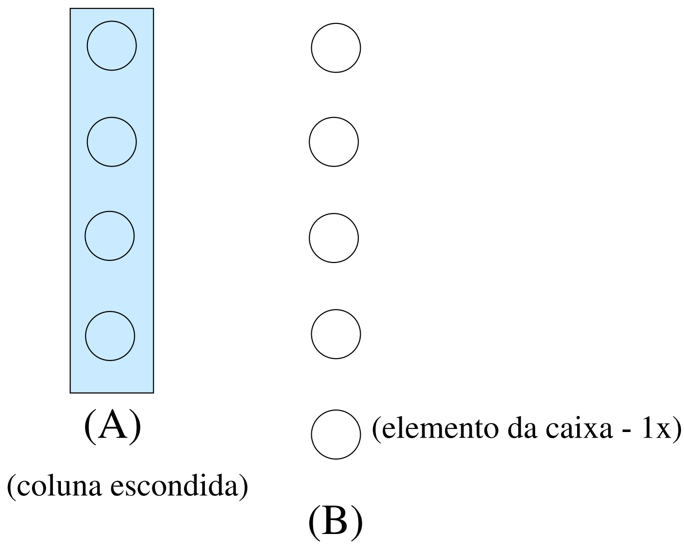
Situação 4 - $A = B$, (tornar desigual): Apresentou-se duas colunas com 4 fichas cada uma, assim como na situação anterior, porém, agora a experimentadora solicitou:

Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com duas fichas a mais que a outra. Como você faria isto?
Teria como você deixar esta coluna (A) com duas fichas a mais que esta outra coluna (B)?

Técnica B:

Situação 1 - Igualar - $3\backslash 5$ $(A\backslash B)$: Idem a situação 1 da técnica A. Repetiu-se o mesmo procedimento.

Situação 2 - $4\backslash 4$ $(A\backslash B)$ $\rightarrow +1x$ em B: Nesta situação apresentou-se ao sujeito duas colunas com 4 fichas cada uma, em correspondência termo a termo assim como já demonstrado em situações anteriores. Em seguida, a experimentadora escondeu a coluna (A) e acrescentou 1 ficha da caixa reserva (x) na coluna (B) que ficou à mostra. Esta situação encontra-se ilustrada na figura.



Perguntou-se então à criança:

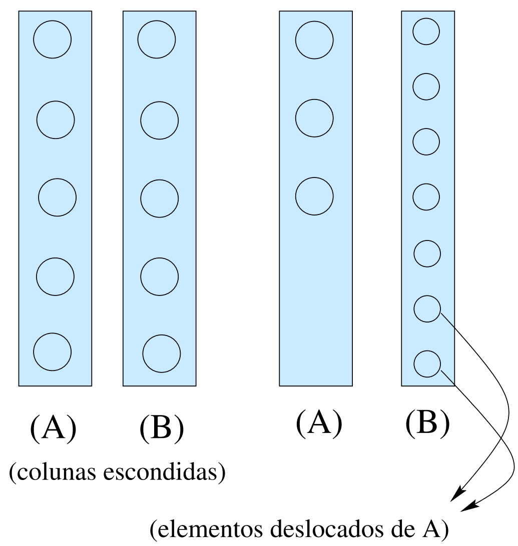
Quantas eu devo pegar da caixa de reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

Situação 3 - $4\backslash 4$ $(A\backslash B)$ **1A em B (diferença** $= 2n$**):** Idem a situação 3 da técnica A. Repetiu-se o mesmo procedimento.

Situação 4 - $A\backslash B\backslash n$ **escondidos:** A experimentadora apresentou ao sujeito duas colunas contendo a mesma quantidade de fichas. Entretanto, nesta situação, as duas colunas estavam escondidas a fim de que o sujeito não pudesse tomar conhecimento de quantas fichas tinham em cada coluna:

Temos aqui duas colunas com o mesmo tanto de fichas nas duas, elas são iguaizinhas. Agora elas estão escondidas, mas eu coloquei o mesmo tanto de fichas tanto em uma quanto na outra.

Depois de esclarecer a igualdade de fichas para o sujeito, a experimentadora deslocou 2 fichas de uma coluna para a outra e perguntou ao sujeito quantas fichas seriam necessárias para ter de novo a mesma quantidade nas duas colunas. A figura ilustra este procedimento.



Situação 5 - $A\backslash B\backslash n$ **escondidos** $\rightarrow$ **1 A em B e** $1x$ **em B:** Nesta situação a experimentadora apresentou novamente duas colunas contendo a mesma quantidade de fichas, porém, estas continuaram escondidas. A experimentadora procedeu da seguinte maneira:

Temos aqui estas duas colunas, elas estão escondidas, mas há o mesmo tanto de fichas nas duas. Agora eu vou pegar uma ficha desta coluna (A) e passar para esta aqui (B).

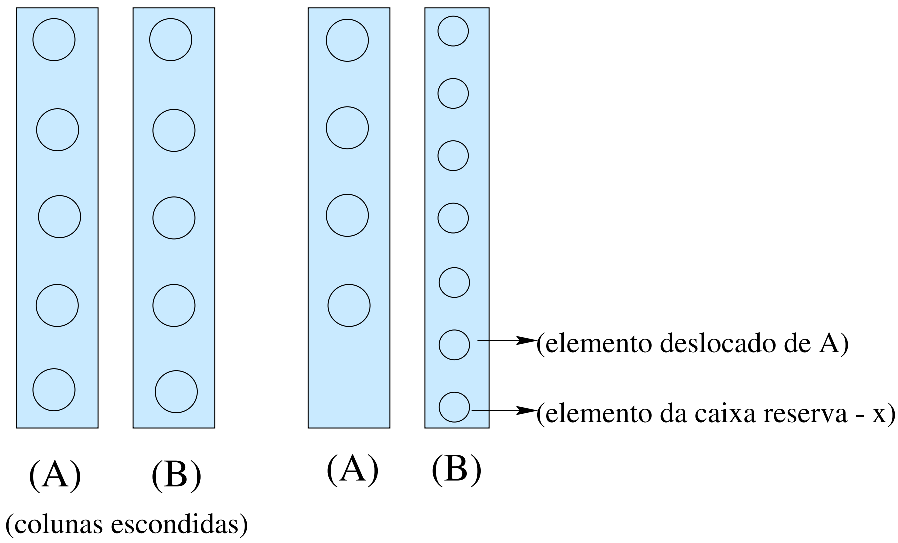
A experimentadora executou a ação. Em seguida prosseguiu:

Agora eu vou colocar mais uma ficha nesta coluna (B), só que agora eu vou pegar a ficha da caixa reserva.

Após efetuar a ação, a experimentadora perguntou ao sujeito:

Quantas fichas esta coluna (B) tem a mais que esta (A)?
Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto nas duas colunas?

O procedimento seguido pela experimentadora encontra-se ilustrado na figura.



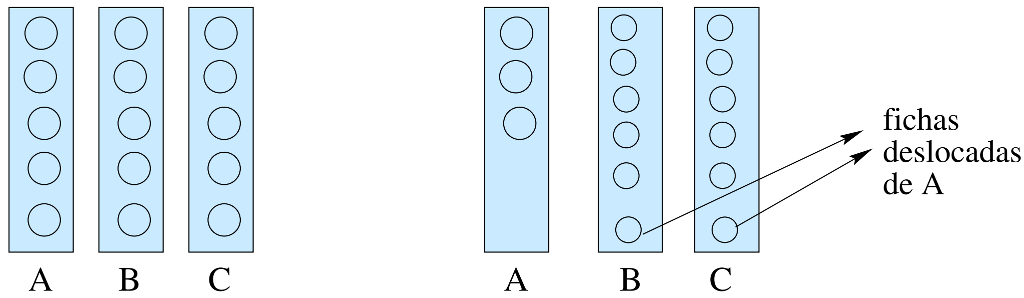
Situação 6 - $A\backslash B\backslash C$ escondidos $\rightarrow nA$ em B, nA em nC: Nesta situação a experimentadora apresentou ao sujeito três colunas A, B e C. Todas elas estavam escondidas. O sujeito não tinha conhecimento de quantos elementos existiam em cada uma, entretanto, estava ciente de que todas elas possuíam a mesma quantidade de fichas. A experimentadora explicou ao sujeito:

Eu vou pegar uma ficha desta coluna (A) e colocar nesta outra (B).

A experimentadora efetuou a ação. Em seguida prosseguiu:

Agora eu vou pegar mais uma ficha desta coluna (A)e colocar nesta outra (C).

A figura ilustra tal procedimento.



Após efetuar a ação a experimentadora questionou:

Qual a diferença entre esta coluna (A) e esta (B)?
Quantos fichas esta coluna (B) tem a mais que esta aqui(A)?
E com relação a esta (C), quantas fichas ela tem a mais que esta aqui (A)?
Qual a diferença entre elas?

Situação 7 - $A = B$ (tornar desigual): Idem a situação 4 da técnica A. Repetiu-se o mesmo procedimento.

5.4 Procedimento de análise de dados

5.4.1 Resolução de problemas aditivos

Os dados relativos à resolução de problemas aditivos foram analisados mediante as diferentes formas de representações simbólicas apresentadas aos sujeitos, a saber:

a- resolução via algoritmo: analisou-se as respostas escritas corretas (C) e incorretas (E) apresentadas pelos sujeitos após a leitura do problema, efetuada pela experimentadora juntamente com a criança. Procurou-se verificar os acertos e os erros nos cálculos numéricos escritos apresentados pelos sujeitos nas situações 1 e 4, propostas durante a coleta de dados.

b- resolução por meio de imagens gráficas: analisou-se os procedimentos apresentados pelos sujeitos na situação que suscitava o uso de imagens gráficas - situação 2 (conforme coleta de dados).

c- resolução por meio de organização das ações práticas: as resoluções dos problemas foram analisadas mediante situações que envolviam brinquedos. Procurou-se observar as formas de organização das ações dos sujeitos, efetuadas sobre os materiais apresentados a eles - situação 3 (conforme coleta de dados).

5.4.2 Problemas de igualação e construção de diferenças

Os critérios utilizados para analisar os dados referentes à prova: problemas de igualação e construção de diferenças, foram os mesmos desenvolvidos por Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) quando de suas pesquisas. Os sujeitos foram categorizados conforme os seguintes níveis:

- Nível IA: as igualações desenvolvidas pelos sujeitos deste nível resultam de falsas implicações. Para igualar duas colunas de 3(A) e 5(B) elementos, os sujeitos retiram 2 elementos de B e transferem para A, de onde obtém os mesmos valores, só que agora invertidos: 5(A) e 3(B). Os sujeitos não compreendem que toda adição em uma coluna, implica, ao mesmo tempo, uma subtração na outra. Eles não recorrem à caixa de fichas reserva para efetuar as igualações. Os êxitos nas igualações permanecem locais, tratando-se, apenas, de simples simetrias espaciais.

- Nível IB: neste nível há um início de interação entre adições e subtrações. Os sujeitos recorrem espontaneamente à caixa de fichas reserva para efetuar as igualações. Realizam adições/subtrações simples, portanto, compreendem que para igualar duas coleções (A) e (B), das quais a diferença é de n fichas, implica a necessidade de acrescentar n elementos à menor, ou retirar n elementos da maior, se estes são pegos ou recolocados em uma fonte exterior a essas duas coleções, no caso, a caixa reserva.

- Nível IIA: neste nível há um início das adições/subtrações relativas, ou seja, aquelas que procedem por meio dos deslocamentos de fichas entre as colunas. Os sujeitos obtêm êxito nas tarefas; contudo, suas explicações permanecem no estado de descrição ou de cálculo. Não compreendem a "identidade dos contrários", portanto, o fato de que a transferência de fichas entre as colunas significa, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração.

- Nível IIB: a "identidade dos contrários" é compreendida neste nível. Assim, a operação de transferência de fichas é, simultaneamente, adição e subtração. Os sujeitos realizam coordenações entre adições/subtrações simples e adições/subtrações relativas. As explicações dos sujeitos ultrapassam o estado de descrição ou de cálculo. No entanto, algumas transferências ainda são mal sucedidas pelos sujeitos deste nível.

- Nível III: as transferências mal sucedidas do nível anterior IIB são, finalmente, bem compreendidas e explicadas pelos sujeitos. Eles entendem, de fato, as composições de transferências, ou seja, os deslocamentos de fichas efetuados entre três coleções.

Capítulo 6

Análise dos Resultados

"Quantas coisas foram rejeitadas e
hoje são recebidas como verdades?
Quantas hoje aceitas como verdades serão
por sua vez substituídas?
De que pode o homem estar certo, então?"
(A vós confio)

A análise qualitativa dos resultados desenvolveu-se em duas etapas. Primeiramente foi feita a análise dos dados referentes à prova: problemas de igualação e construção de diferenças, a fim de identificar nos sujeitos os níveis de construção dialética das operações de adição e subtração. Em seguida, efetuou-se a análise dos problemas aditivos propostos aos sujeitos considerando as diferentes situações de resolução: escrita, imagem gráfica e organização das ações práticas. Convém ressaltar que esta última não foi desenvolvida de forma isolada. Ao contrário, ela teve como base os fundamentos discutidos na análise dos resultados referente à prova que abrange os problemas de igualação e diferenças. Isto porque o objetivo central da presente investigação foi buscar as relações entre os níveis de construção dialética e a resolução de problemas aditivos.

6.1 Problemas de igualação e construção de diferenças

A prova utilizada neste trabalho analisa, a partir de problemas de igualação e diferenças, como se dá a construção dialética entre as operações de adição e subtração. Isto é, ela ilustra como, gradativamente, duas operações contrárias, por um jogo de interdependências, se fundem em uma nova totalidade.

Seguindo o método piagetiano de análise e aplicação da prova, os 22 sujeitos pertencentes a este estudo puderam ser incluídos nos seguintes níveis: IB, IIA, IIB e III. O Quadro III (p. 71) apresenta os sujeitos e seus respectivos níveis de evolução na prova dos problemas de igualação e construção de diferenças.

No contexto geral evidencia-se que no nível IA nenhum sujeito foi incluído; já no nível IB temos 4 sujeitos - 2 da terceira e 2 da quarta série; no nível IIA encontram-se 6 sujeitos - 2 da terceira, 2 da quarta e 2 da quinta série; no nível IIB temos 11 sujeitos - 3 da terceira, 3 da quarta e 5 da quinta série e finalmente 1 sujeito de nível III pertencente a quinta série.

Pode-se observar que nos níveis intermediários - IIA e IIB - concentram-se um número maior de sujeitos (N=17) quando comparados aos níveis IB e III, nos quais temos uma ocorrência bem menor (N=5).

Neste momento, convém passarmos à interpretação de cada um destes níveis, verificando, desta forma, como se caracteriza, do ponto de vista cognitivo, a construção dialética das operações de adição e subtração.

Antes disso, ressaltamos que embora na parte metodológica deste trabalho, tenhamos feito a descrição e a aplicação da prova: problemas de igualação e construção de diferenças, conforme a ordem dos procedimentos propostos por Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996), salientamos, por outro lado, que a análise, que ora apresentaremos, não seguirá aquela sequência[1] . A análise da prova foi organizada de

[1]Resumo da sequência de aplicação da prova: **Técnica A** - Igualar $3/5(A/B)$; Igualar $3/5/7(A/B/C)$; $4/4(A/B)1A$ em B (diferença $= 2n$); $4/4(A = B)$ (tornar desigual - 2 fichas a mais). **Técnica B** - Igualar $3/5(A/B)$; $4/4(A/B) + 1x$ (caixa reserva) em B; $4/4(A/B)1A$ em B (diferença $= 2n$); A/B (colunas escondidas) $2A$ em B (diferença $= 4n$); A/B (colunas escondidas)

III - Níveis de Construção Dialética: P. de Igualação e Construção de Diferenças						
Série	Sujeito	IA	IB	IIA	IIB	III
3^a	AUG(9;7)		X			
	MAR(9;7)				X	
	FER(9;6)			X		
	LIL(9;2)			X		
	BRU(9;6)		X			
	AND(10;1)				X	
	MAI(10;1)				X	
4^a	FEL(10;7)		X			
	GUI(11;4)				X	
	CEN(10;4)		X			
	LUC(10;1)				X	
	ALI(10;8)			X		
	LIV(10;6)			X		
	VAN(10;2)				X	
5^a	DIE(13;8)					X
	HEN(11;9)				X	
	SHI(11;10)			X		
	CAM(12;1)				X	
	EDU(13;4)				X	
	JUL(11;11)			X		
	LAI(13;3)				X	
	GRA(12;6)				X	

outra maneira, visando um melhor entendimento e uma melhor discussão dos dados coletados.

Desta forma, desenvolveremos nossa análise segundo três tarefas distintas e as quais apresentaram-se intercaladas quando da aplicação da prova, a saber:

- igualar colunas desiguais;
- tornar desigual colunas iguais;
- estabelecer diferença entre colunas iguais.

A seguir apresentaremos a análise de cada uma destas tarefas nos diversos níveis de evolução encontrados nos sujeitos da presente pesquisa.

6.1.1 Igualar colunas desiguais

Esta tarefa consistiu em igualar colunas com diferentes números de fichas em cada uma delas, por exemplo: 3/5; 3/5/7; 1/5/9. A partir de nossa análise foi possível identificar dois tipos de procedimentos utilizados pelos sujeitos:

a) Igualar as colunas recorrendo à caixa de fichas reserva;

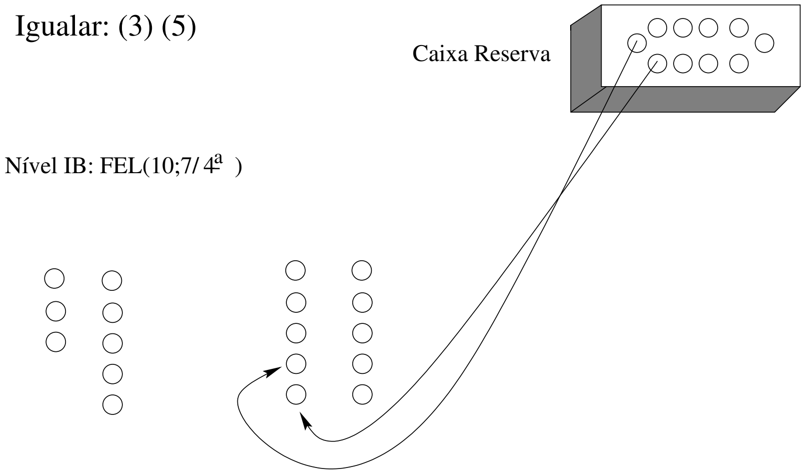
b) Igualar as colunas transferindo fichas de uma coluna para outra.

Vejamos, então, estas condutas nos diferentes níveis apresentados pelos sujeitos.

a) Recorrendo à caixa de fichas reserva:

Nível IB (4 sujeitos)

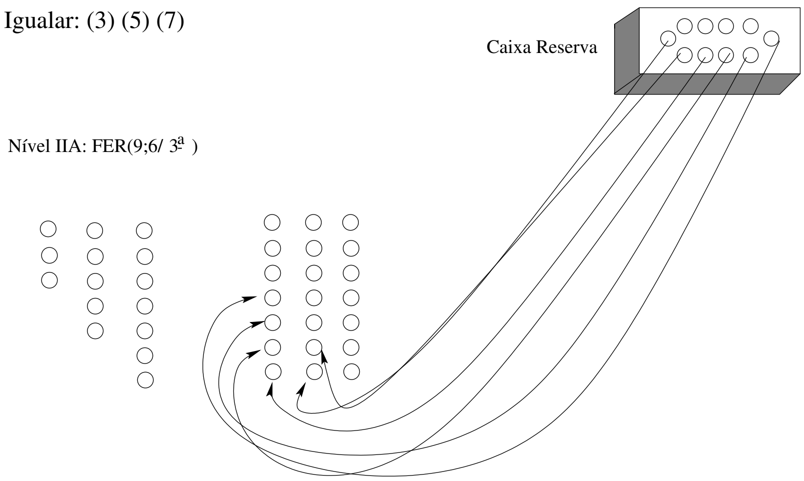
$1A$ em B e $1x$ (caixa reserva) em B; $A/B/C$ (colunas escondidas) $1A$ em B, $+1A$ em C; $4/4(A/B)$ (tornar desigual - 2 fichas a mais).



Você acha que teria um jeito de deixar tudo igual? **Tem.** O que você faria? **Eu colocaria mais 2.** (FEL apontou para a caixa reserva).

Podemos verificar, com o exemplo e o protocolo de FEL(10;7/4ª), que este recorre espontaneamente à caixa de fichas reserva para obter êxito em suas igualações. Ele acrescenta as duas fichas que estão faltando para deixar ambas colunas com 5 fichas cada uma. Dos sujeitos pertencentes ao nível IB, apenas CEN(10;4/4ª) não recorreu a este tipo de procedimento.

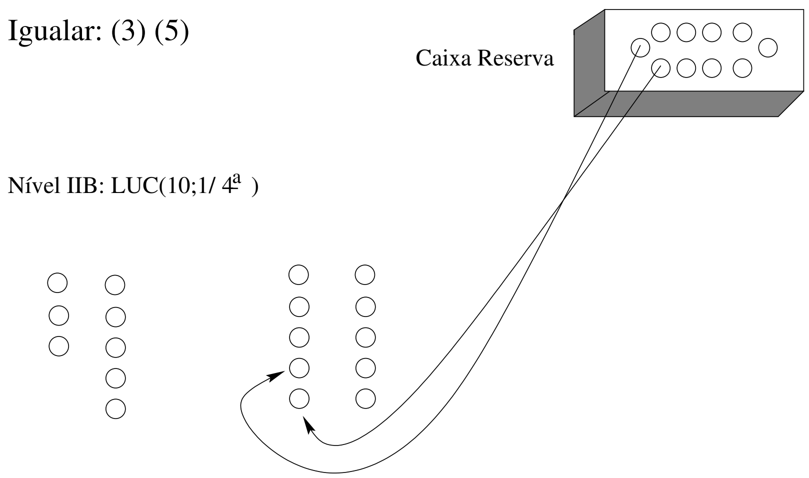
Nível IIA (6 sujeitos)



Tem um jeito de deixar tudo igual? **Fazendo assim.** (FER pegou fichas da caixa reserva e completou as colunas, deixando-as iguais).

Assim como no nível anterior, os sujeitos deste nível também efetuaram as igualações recorrendo espontaneamente à caixa de fichas reserva. O procedimento foi exatamente igual. Em nosso exemplo, FER ($9;6/3^{\underline{a}}$) pega uma a uma as fichas da caixa reserva, até completar 3 colunas de 7 fichas cada uma. Neste nível apenas LIL ($9;2/3^{\underline{a}}$), ALI($10;8/4^{\underline{a}}$) e SHI($11;10/5^{\underline{a}}$) não procederam por igualações com fichas da caixa reserva.

Nível IIB (11 sujeitos)



Eu queria, LUC, que você deixasse estas duas colunas com o mesmo tanto de fichas. O que você poderia fazer? **Pegando dali?** (LUC apontou para a caixa reserva). Se você fosse pegar da caixa reserva, o que faria? **Pegaria duas daqui e colocaria aqui.** (LUC mostrou a caixa reserva e depois a coluna de 3 fichas).

Aqui está mais um exemplo de igualação com fichas da caixa reserva. LUC ($10;1/4^{\underline{a}}$) simplesmente retira 2 fichas da caixa e acrescenta-as à coluna que possuia 3 fichas, igualando-a corretamente. Neste nível IIB apenas MAR ($9;7/3^{\underline{a}}$) e LAI ($13;3/5^{\underline{a}}$) não efetuaram este tipo de igualação.

Quanto ao **nível III**, o sujeito DIE ($13;8/5^{\underline{a}}$), único sujeito deste nível, não recorreu, em nenhuma das situações propostas, à caixa reserva para igualar as colunas com quantidades desiguais.

Os exemplos apresentados, nos quais as igualações procedem por se utilizar das fichas da caixa reserva, são interessantes do ponto de vista do processo dialético construtivo entre as adições e subtrações.

Como podemos observar este procedimento resolve facilmente a tarefa solicitada e em quase todos os níveis de construção dialética, exceto o nível III, ele se fez presente. De fato, desde o nível IB até o IIB, este procedimento foi utilizado como uma forma possível de concluir as igualações.

No entanto, esta ação, utilizada por muito de nossos sujeitos (N=15), requer algumas considerações. Isto equivale a dizer que o fato de os sujeitos terem tido êxito nas igualações por meio deste procedimento, não significa que possamos falar em uma construção dialética, mas apenas de um início de interações entre adições e subtrações. Ou seja, as igualações, nestes casos, procederam por uma introdução de novos elementos, portanto, do acréscimo de novas fichas, exteriores às coleções. O exemplo de FEL (10;7/4ª/IB) (p. 73) é bem ilustrativo. Quando solicitado a igualar as colunas ele diz: **Eu colocaria mais 2, apontando para a caixa reserva**. Sendo assim, os sujeitos realizam o que Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) denominaram de adições simples, isto é, adições que são efetuadas a partir do acréscimo de fichas da caixa reserva à coluna que possui menos elementos. E como afirmam os autores (ibid.): "*(...) ora, nessa reserva*[2]*, sendo exterior às coleções (...) seu valor numérico não entra em jogo e, se tirarmos dela n elementos, não é necessário levar em conta essa subtração.*" (p. 50). Desta forma, os sujeitos compreendem que para igualar duas colunas de fichas, 3/5 por exemplo, e onde a diferença é de 2 fichas, basta acrescentar esta mesma quantidade à coluna menor (3), uma vez que estas fichas são retiradas da caixa reseva, fonte exterior às colunas.

E é neste sentido que este procedimento, utilizado pelos sujeitos desde o nível IB até IIB, pode ser considerado como um início das interações entre as operações de adição e subtração, no entanto, não consiste ainda, em uma síntese dialética.

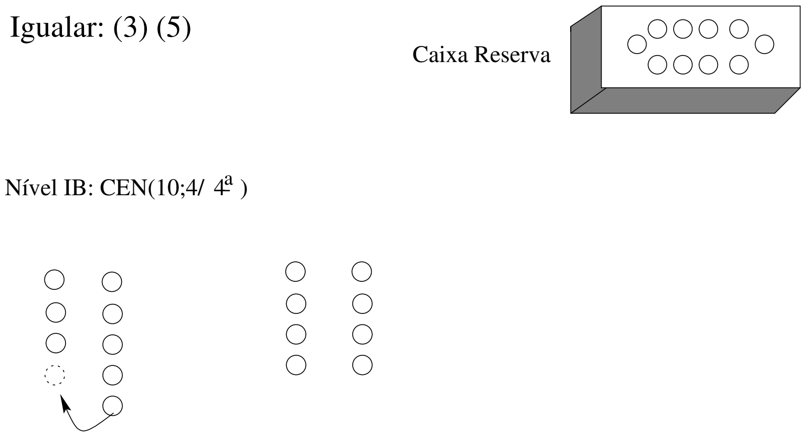
Convém ressaltar que o fato de os sujeitos terem utilizado este procedimento, já demonstra uma superação do nível anterior IA, quando: os sujeitos não realizam sequer as igualações solicitadas; ou quando as fazem, tratam-se de sim-

[2]Caixa de fichas reserva.

ples simetrias espaciais, portanto, correspondências figurais. Sendo assim, os sujeitos desta pesquisa superaram estas condutas elementares realizando adições simples, as quais já garantem um início de interação entre adições e subtrações.

b) Transferindo fichas de uma coluna para outra:

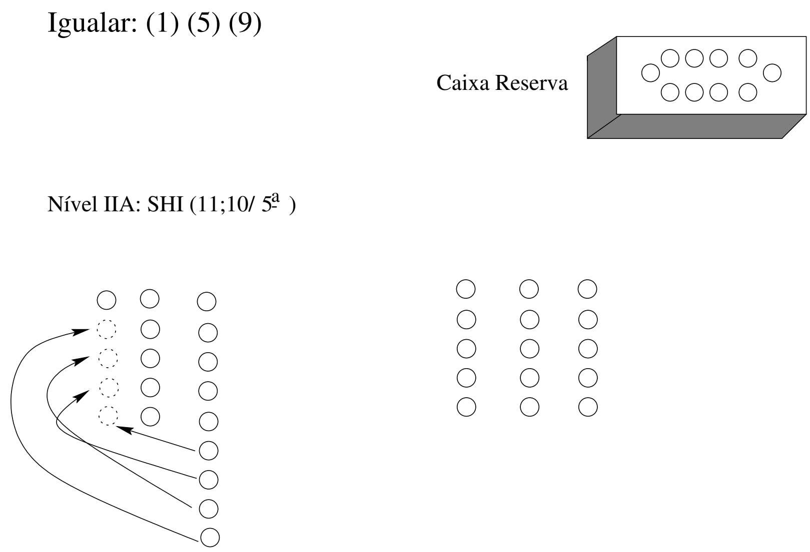
Nível IB (4 sujeitos)



Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? (CEN pegou 1 ficha da fileira do 5 e passou para a fileira do 3). O que você fez? Me explica! **Aqui eu 'tava' com 5, eu tirei 1 e coloquei aqui. Aqui tinha 3 e eu coloquei 1, aí ficou 4 também.**

Vemos com o exemplo de CEN(10;4/4ª) que para igualar as duas colunas, ele apenas retirou 1 ficha da coluna de 5 e passou para a coluna de 3 fichas. Vale ressaltar que todos os sujeitos deste nível apresentaram este tipo de conduta pelo menos em uma das situações propostas para igualar as coleções.

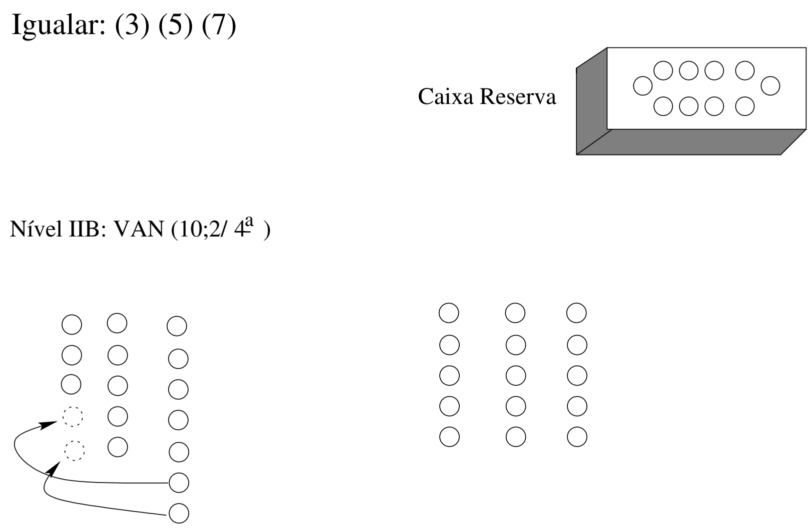
Nível IIA (6 sujeitos)



Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas 3 colunas? O que você poderia fazer? **Colocando estas 4 aqui.** (SHI passou 4 fichas da fileira do 9 para a fileira do 1).

Note-se que SHI(11;10/5ª) se utiliza do mesmo procedimento do nível anterior para igualar suas colunas. Retira 4 fichas da coluna que tem 9 e transfere-as para a coluna que possui apenas 1 ficha. Neste caso, também todos os sujeitos procederam por transferências entre colunas em pelo menos uma das situações propostas.

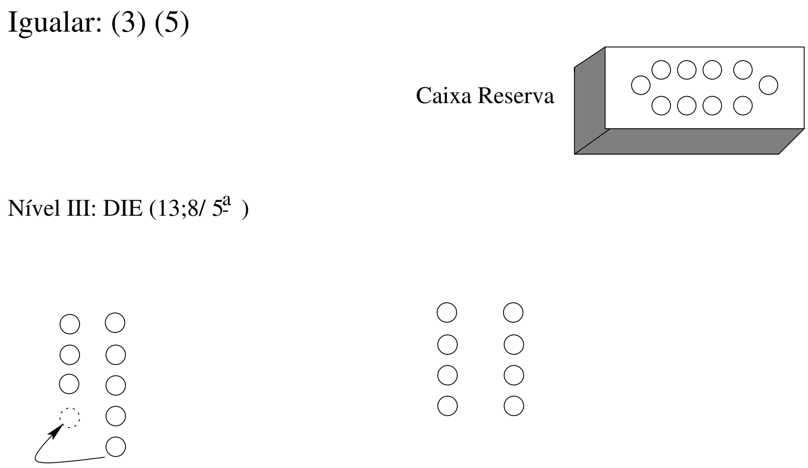
Nível IIB (11 sujeitos)



VAN, eu queria que você deixasse estas três fileiras com o mesmo tanto de fichas, iguaizinhas. (VAN tirou 2 fichas da fileira de 7 e as passou para a fileira de 3). O que você fez? Me explica! **Eu peguei da terceira fileira, que tinha 2 a mais, e coloquei para cá.**

Aqui temos outro exemplo de igualação por transferências entre colunas e mais uma vez destacamos que todos os sujeitos deste nível efetuaram este tipo de procedimento.

Nível III (1 sujeito)



Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? O que você poderia fazer? **Tirar uma fichinha dali.** (DIE passou 1 ficha para a fileira do 3).

Assim como nos níveis anteriores DIE(13;8/5ª) também recorre às transferências entre colunas para efetuar as igualações, entretanto, vale salientar que DIE só fez uso deste tipo de procedimento, não se utilizando, em nenhuma situação, da caixa reserva para igualar as colunas. Embora tenha admitido que a igualação, recorrendo à caixa reserva, também fosse possível.

Vemos, portanto, que todos os sujeitos procederam as igualações por transferências de fichas entre as colunas. Realizam, neste sentido, o que Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) denominaram de adições/subtrações relativas, ou adições/subtrações por transferências. Isto significa que para igualar duas colunas, 3(A) e 5(B), o sujeito transfere 1 ficha de (B) para (A) no intuito de compensar a diferença de 2 fichas, assim, retirando, ao mesmo tempo, de (B) e acrescentando em (A). As igualações efetuadas por meio de transferências de fichas entre colunas diferem qualitativamente daquelas anteriores, onde havia a utilização da caixa reserva. Isto porque no segundo caso, o valor numérico era desconsiderado. Já o primeiro, por se tratar de transferências, requer que se considere as duas colunas simultaneamente, ou seja, 1 ficha retirada de uma coluna e transferida para a outra compensa a diferença de 2 fichas, se retiradas 2 fichas, a compensação será de 4 fichas e assim sucessivamente. Portanto neste caso, há que se considerar os valores numéricos, isto é, a subtração de fichas em uma coluna e a adição destas na outra.

VAN (10;2/4ª/IIB) (p. 77), para igualar 3/5/7, transfere 2 fichas de 7 para a coluna que tem 3 e diz: **eu peguei da terceira fileira, que tinha 2 a mais**. VAN, neste caso, parece considerar simultaneamente as adições e subtrações de fichas quando da transferência de uma coluna para a outra.

No entanto, o fato de os sujeitos obterem êxito nas transferências ou adições/subtrações relativas não significa, necessariamente, que eles compreendam os mecanismos implícitos a elas. Neste momento, pode, ainda, não se tratar de uma síntese dialética mas sim de simples constatações e evocações mnemônicas. Isto pode vir a justificar por que os sujeitos de nível IB - AUG(9;7/3ª), BRU(9;6/3ª), FEL(10;7/4ª) e CEN(10;4/4ª) - foram bem sucedidos nas igualações por transferências. Porém, para que esta hipótese se confirme faz-se necessário considerar as condutas apresentadas em outras situações e nas quais esta compreensão torna-se indispensável, não comportanto, assim, apenas simples constatações.

6.1.2 Tornar desigual colunas iguais

Para tornar desigual duas colunas que possuem a mesma quantidade de fichas os sujeitos pertencentes a esta pesquisa apresentaram três tipos de procedimentos:

a) acrescentando fichas da caixa reserva em uma das colunas;

b) retirando fichas de uma das colunas e devolvendo-as à caixa reserva;

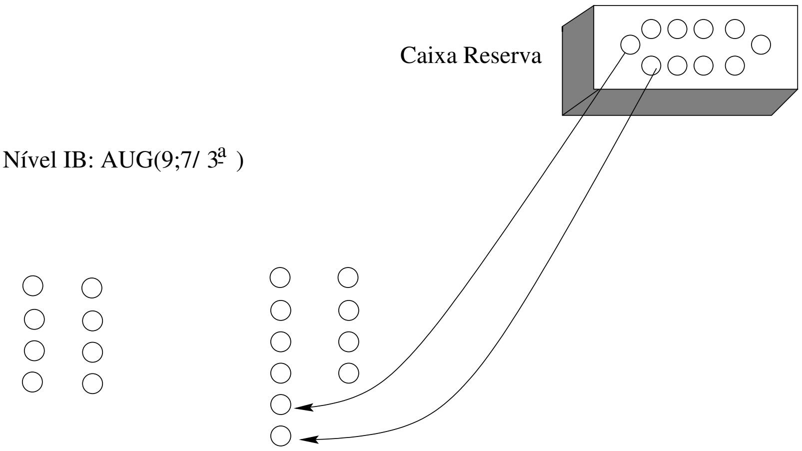
c) transferindo fichas de uma coluna para outra.

Passemos, neste sentido, à análise de cada uma destas condutas em seus diferentes níveis.

a) Acrescentando fichas da caixa reserva em uma das colunas:

Nível IB (4 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)

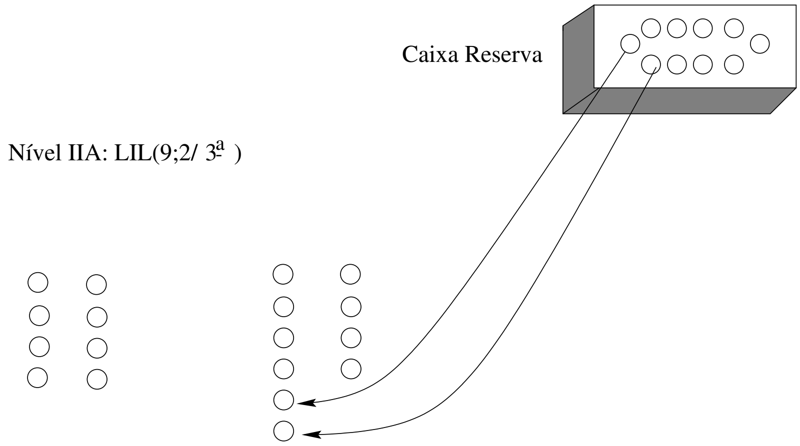


> Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você poderia fazer? **Pegar da caixa reserva.** Então pode fazer. (AUG pegou 2 fichas da caixa reserva e colocou em uma das colunas).

Neste procedimento vemos que para introduzir a desigualdade, AUG-(9;7/3ª) recorre à caixa de fichas reserva, portanto, acrescenta 2 fichas em uma das colunas. Todos os sujeitos deste nível procederam desta forma em pelo menos uma das situações propostas.

Nível IIA (6 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)

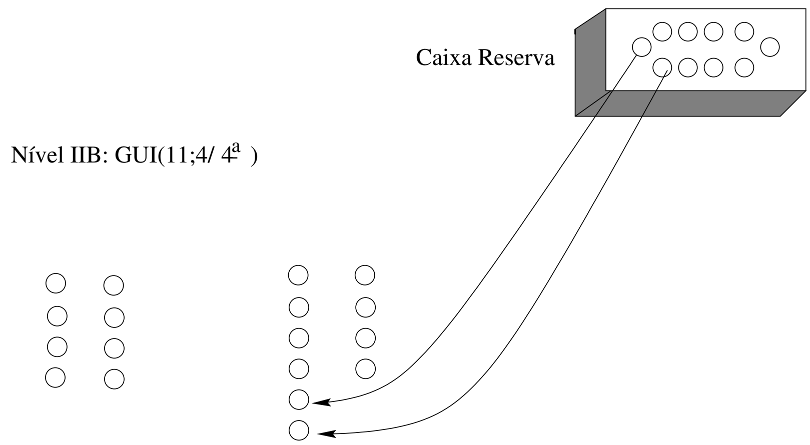


Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você faria isso? **2 a mais?** É, 2 a mais. (LIL pegou 2 fichas do monte reserva e acrescentou em uma das colunas). O que você fez? **Aqui tinha 4 e aqui também tem 4, 'para mim deixar' 2 a mais esta do que esta, daí eu coloquei 2 da reserva.**

Assim como no nível anterior, LIL(9;2/3ª) também acrescenta 2 fichas da caixa reserva para tornar as colunas desiguais, deixando-as com a diferença que havia sido solicitada pela experimentadora. Dos seis sujeitos pertencentes a este nível, três - FER(9;6/3ª), LIV(10;6/4ª) e JUL(11;11/5ª) - não procederam desta forma para tornar as colunas desiguais. O restante - LIL(9;2/3ª), ALI(10;8/4ª) e SHI(11;10/5ª) apresentou este tipo de resolução em pelo menos uma das situações propostas.

Nível IIB (11 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



Vou pegar daqui, da caixa reserva, 2. Como você faria? (GUI efetuou ação). **Aqui ficou valendo 4 e aqui 6.**

Mas uma vez o procedimento de recorrer à caixa reserva se apresenta. GUI(11;4/4ª) efetua a tarefa da mesma maneira que nos níveis anteriores. Apenas os sujeitos AND(10;1/3ª), MAI(10;1/3ª), GUI(11;4/4ª) e VAN(10;2/4ª) recorreram a esta ação para tornar desigual uma das colunas.

Quanto ao nível III, verificamos que DIE(13;8/5ª) não recorreu, em nenhuma das situações propostas, a este procedimento para tornar as colunas desiguais.

Nestes exemplos observamos novamente as adições simples, ou seja, para introduzir a diferença de 2 fichas os sujeitos recorrem à caixa reserva. Neste sentido, vemos que eles são capazes de introduzir as diferenças solicitadas uma vez que seja possível a utilização das fichas da caixa reserva.

O exemplo de LIL(9;2/3ª/IIA) (p.81) ilustra o que acabamos de comentar. Questionado sobre o que havia feito para conseguir a diferença de 2 fichas LIL responde: **aqui tinha 4 e aqui também 4, 'para mim' deixar 2 a mais do que esta, daí eu coloquei 2 da reserva**.

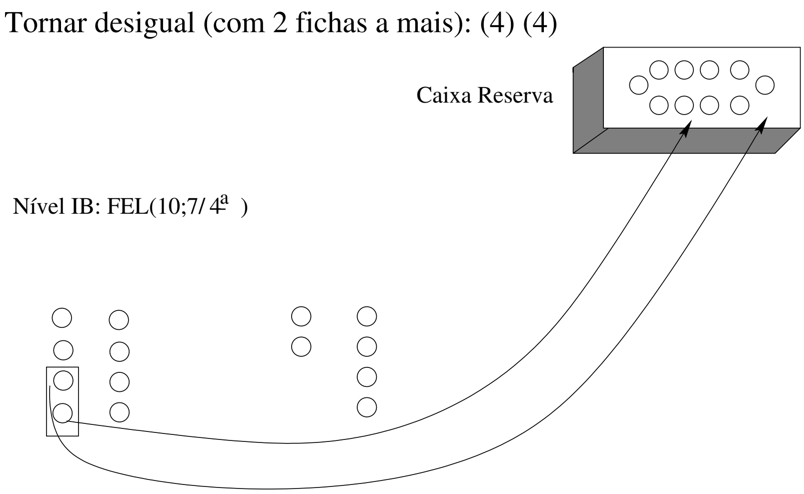
Novamente evidencia-se que na medida em que os sujeitos recorrem à caixa reserva, eles não precisam considerar os sentidos contrários das ações de adicionar e subtrair ao mesmo tempo, pois as fichas são buscadas em uma fonte externa às colunas e não por transferências de fichas entre elas.

Neste sentido, falaremos aqui de um início de interação entre as operações mas não ainda de uma superação e uma síntese dialética entre elas.

Com isso constatamos, uma vez mais, que os sujeitos da presente pesquisa já superaram reações elementares uma vez que realizam adições simples, porém, ressaltamos que esta por si só não é suficiente para engendrar uma síntese dialética entre adições e subtrações.

b) Retirando fichas de uma das colunas:

Nível IB (4 sujeitos)

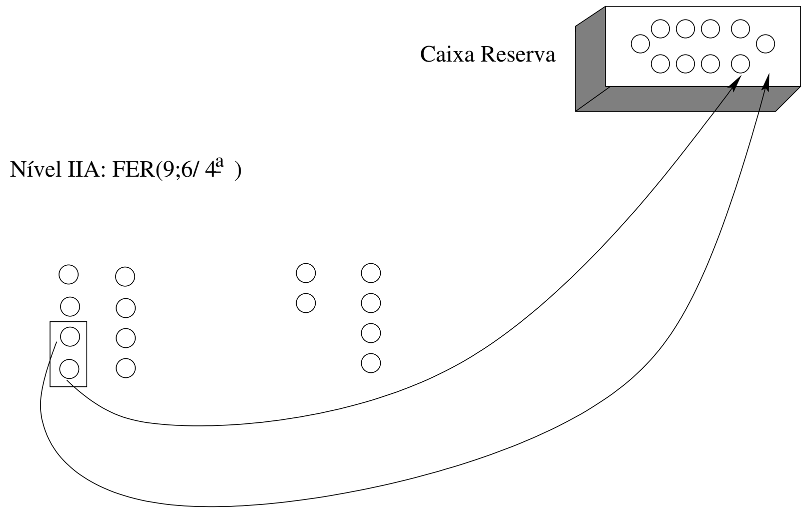


O que você faria para deixar esta coluna com 2 fichas a mais que esta? **Ah! Eu pegaria e tiraria estas 2 daqui.** (FEL estava sugerindo retirar 2 fichas de uma das fileiras, aí ficariam uma com 2 e a outra com 4 fichas).

No exemplo de FEL(10;7/4ª) a desigualdade é adquirida apenas retirando 2 fichas de uma das colunas e as quais são devolvidas pelo sujeito à caixa reserva. Dos quatro sujeitos deste nível apenas dois - BRU(9;6/3ª) e FEL(10;7/4ª) - recorreram a este procedimento para tornar uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra.

Nível IIA (6 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)

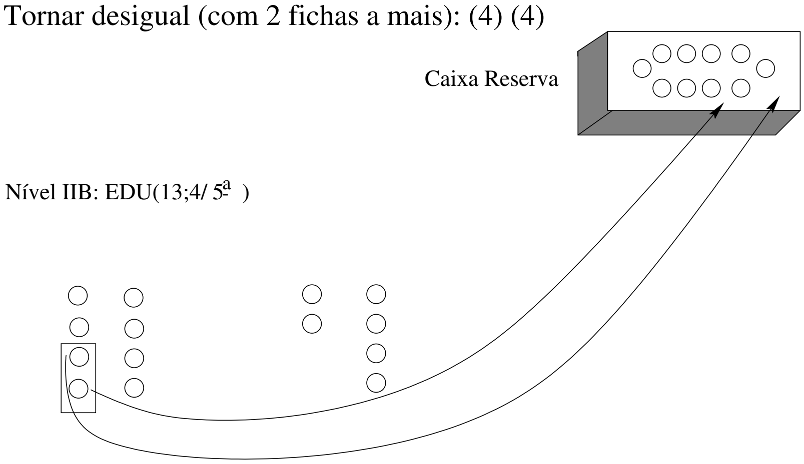


Eu tiro 2 aí fica com 2 a mais. (FER retirou 2 fichas de uma das colunas deixando uma com 2 e a outra com 4 fichas, portanto, 2 a mais).

Assim como no nível IB, FER(9;6/3ª) também resolve a tarefa retirando 2 fichas de uma das colunas e as devolve à caixa reserva. Dos seis sujeitos pertencentes a este nível apenas três - FER(9;6/3ª), LIL(9;2/3ª) e ALI(10;8/4ª) - resolveram a solicitação por meio desta conduta.

Nível IIB (11 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



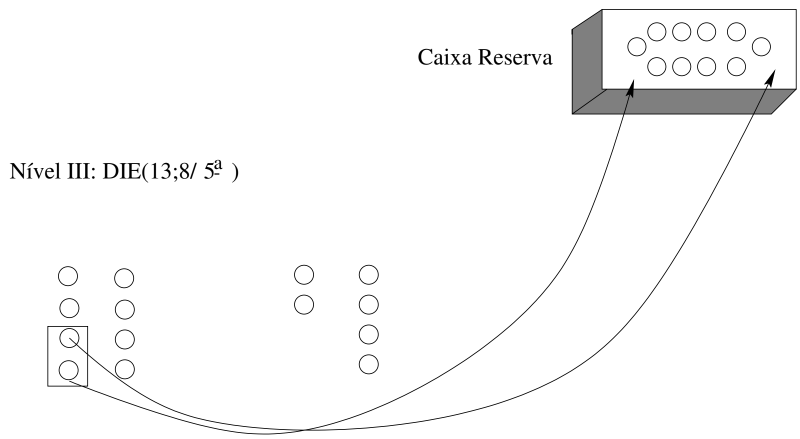
O que você faria para deixar esta coluna com duas fichas a mais que esta?

Tiraria 2 daqui. (EDU tirou 2 fichas de uma das colunas.)

EDU(13;4/$5^{\underline{a}}$) efetuou a mesma ação já apresentada pelos sujeitos dos níveis anteriores, apenas retira 2 fichas de uma das colunas e resolve o problema. Dos onze sujeitos pertencentes a este nível apenas EDU(13;4/$5^{\underline{a}}$) utilizou este tipo de procedimento.

Nível III (1 sujeito)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



Então eu tiraria 2 daqui, só que daí eu tiraria para fora. (DIE retirou 2 fichas de uma das colunas). Ficou com 2 a mais agora? **Ficou.**

DIE(13;8/$5^{\underline{a}}$) também recorreu a este procedimento de retirada de fichas para introduzir a desigualdade, sendo, portanto, uma conduta presente em todos os níveis apresentados pelos sujeitos desta pesquisa.

Estas condutas, do ponto de vista cognitivo, se assemelham às anteriores, nas quais os sujeitos acrescentavam fichas da caixa reserva para introduzir a diferença. O único fato é que, neste caso, eles retiram as fichas das colunas devolvendo-as à caixa reserva. Ou como afirma DIE (13;8/$5^{\underline{a}}$/III): **então eu tiraria duas daqui, só que daí eu tiraria para fora**.

Mais uma vez ressaltaremos que este tipo de conduta nos permite concluir que os sujeitos desta pesquisa são capazes de efetuar adições/subtrações simples na medida em que acrescentam e retiram fichas, utilizando-se de uma fonte externa às coleções. Contudo, como dissemos há pouco, só isso não é suficiente para garantir uma síntese dialética entre as operações em questão.

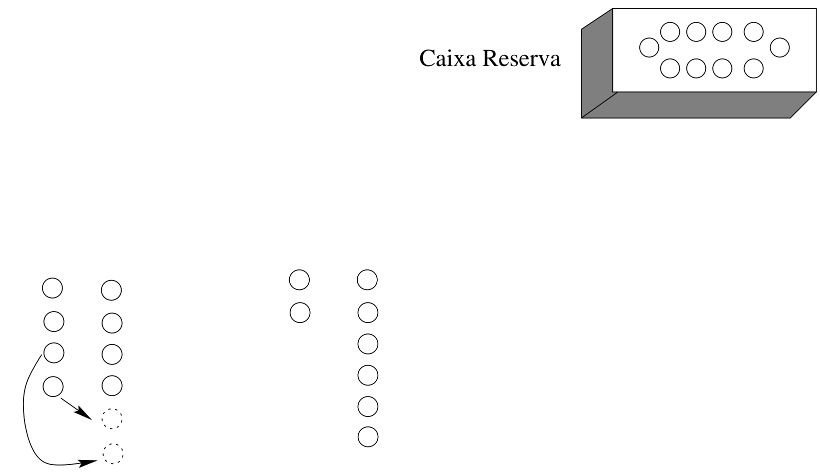
Por outro lado, tratam-se de condutas essenciais, necessárias e que serão, neste sentido, gradativamente superadas pelos sujeitos.

c) Transferindo fichas de uma coluna para outra:

Nível IB (4 sujeitos)

O fato de transferir fichas de uma coluna para outra com a intenção de introduzir uma desigualdade gerou uma certa dificuldade para alguns sujeitos do nível IB. Três sujeitos deste nível BRU(9;6/3^{a}), AUG(9;7/3^{a}) e CEN(10;4/4^{a}) recorreram a este procedimento para tornar desigual, no entanto, nenhum obteve êxito pois procederam da seguinte forma:

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



O procedimento apresentado por estes sujeitos não resolve a tarefa solicitada uma vez que eles acabam por deixar uma das colunas com 4 fichas a mais e não 2, como solicitado. Além disso, vale ressaltar que os sujeitos não conseguiram constatar que a desigualdade era de 4 fichas. Para eles, a tarefa tinha sido efetuada com êxito. Podemos exemplificar este fato a partir da análise do protocolo de CEN(10;4/4^{a}):

Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você poderia fazer? (CEN retirou 2 fichas de uma das colunas e passou para a outra). Agora esta coluna ficou com 2 fichas a mais do que esta? (CEN balaçou a cabeça afirmativamente). Como você sabe que esta coluna tem 2 fichas a mais do que esta? **É que eu passei 2 daqui para cá.** E assim deixa esta com 2 fichas a mais que esta outra aqui? (CEN balançou a cabeça afirmativamente).

Pelas explicações de CEN podemos observar que ele se contenta em passar 2 fichas para uma das colunas e pensa ter efetuado corretamente o que foi solicitado.

Este procedimento, portanto, não foi efetuado com êxito por nenhum dos sujeitos pertencentes a este nível. Convém, então, entender o porquê das ações mal sucedidas neste nível.

O primeiro aspecto a se discutir diz respeito ao entendimento, por parte do sujeito, da tarefa solicitada, ou seja, os sujeitos compreendem o que é deixar, por exemplo, uma coluna com duas fichas a mais que a outra?

No entanto, se analisarmos os procedimentos já demonstrados por estes sujeitos em situações anteriores, constataremos que a desigualdade foi alcançada com êxito. FEL(10;7/4ª/IB), diante da solicitação, diz: **Ah! Eu pegaria e tiraria estas 2 daqui**. Diante disso, vemos que os sujeitos compreendem a tarefa solicitada e tanto é que todos os sujeitos (N=4) deste nível obtiveram sucesso quando acrescentaram fichas reservas ou quando retiraram fichas e as devolveram na caixa.

Desta forma, não atribuímos os fracassos às dificuldades de entendimento da tarefa mas sim à falta de implicação entre ações aditivas e subtrativas, ou seja, os sujeitos não conseguem entender as adjunções e supressões simultâneas que ocorrem quando da transferência de fichas de uma coluna para outra.

Quando faz-se necessário deixar uma coluna com 2 fichas a mais e o sujeito recorre à caixa reserva, é evidente que basta acrescentar 2 fichas ou então retirar 2 fichas para concluir a ação. Porém, quando há transferência de 2 fichas de uma coluna para outra, a diferença adquirida é de 4 fichas e não 2, como solicitado. E isto escapa a compreensão dos sujeitos de nível IB. Portanto, o que não compreendem é que se as coleções são iguais, o deslocamento de n elementos de uma para outra produzirá uma diferença de $2n$. Eles não efetuam o que Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) denominaram de adições/subtrações relativas, ou adições/subtrações por transferência.

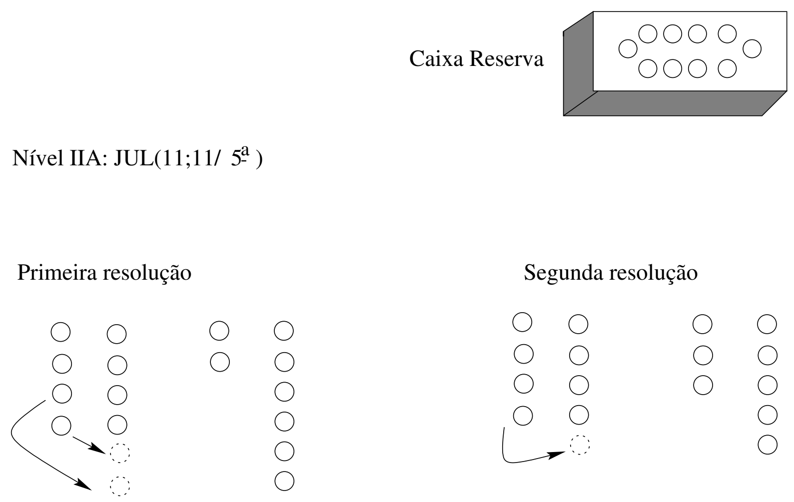
Contudo, vale relembrar que estes mesmos sujeitos obtiveram êxito quando de transferências para igualar colunas desiguais, e a estes casos salientamos que tratam-se de simples constatações, ou como descreve Piaget e seus colaboradores (1980/1996) para um caso similar: "*...mas é só um resultado pseudo-empírico*" (p.50).

Neste sentido, o nível IB comporta um início de interações entre adição/subtração mas ainda, estas operações não se encadeiam de forma a constituir uma nova totalidade.

Nível IIA (6 sujeitos)

Três sujeitos deste nível - FER(9;6/3ª), LIL(9;2/3ª) e SHI(11;10/5ª) - não recorreram a este procedimento para tornar uma das colunas desigual. Já os demais sujeitos - LIV(10;6/4ª), ALI(10;8/4ª) e JUL(11;11/5ª) fizeram uso desta forma de resolução. Vale ressaltar que numa primeira tentativa procederam como os sujeitos do nível IB, deixando uma das colunas com 4 fichas a mais que a outra. Contudo, retomaram sua ação, após constatação e obtiveram o êxito. Como podemos observar no exemplo de JUL(11;11/5ª/IIA):

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você faria isso? (JUL passou 2 fichas de uma coluna para outra). Quantas fichas esta fileira tem a mais do que esta? **6.** A mais do que esta? **4.** (JUL devolveu as 2 fichas para a outra coluna e começou tudo de novo). O que você faria para deixar esta coluna com 2 fichas a mais do que esta? (JUL passou 1 ficha de uma coluna para outra). O que você fez? Me explica! **Eu peguei, coloquei, aqui tem 3 do lado esquerdo e do lado direito tem 5.** O que você fez para deixar este lado com 5? **Eu tirei 1 do lado esquerdo.**

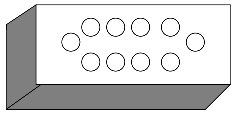
Vemos que JUL(11;11/5ª/IIA) não se contenta com sua primeira resolução e após constatação retoma sua ação e a conclui com êxito. Estas condutas superam as do nível anterior IB uma vez que aqueles sujeitos se contentam em deixar uma das colunas com 4 fichas a mais e não com 2 como requerido. Na verdade, isto não se impõe como uma dificuldade a ser superada pelos sujeitos daquele nível. Ao contrário, eles acreditam ter executado a tarefa com sucesso, o que não acontece com os sujeitos de nível IIA.

Ressaltamos, por outro lado, que o fato de os sujeitos deste nível IIA obterem sucesso nesta tarefa, não significa que eles tenham compreendido o jogo de interações existentes ao transferir fichas de uma coluna pra outra. Seus êxitos podem ser atribuídos às simples simetrias espaciais e não à real compreensão de que a transferência de 1 ficha entre as colunas implique em uma diferença de 2 fichas. No entanto, faz-se necessário analisar outras tarefas que requeiram esta compreensão para que esta afirmação seja pertinente.

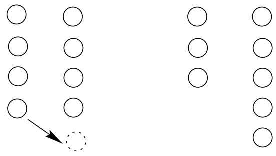
Nível IIB (11 sujeitos)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)

Caixa Reserva



Nível IIB: LAI(13;3/ 5ª)



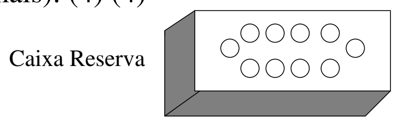
Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você faria isso? **Assim.** O que você fez? **Eu tirei 1 daqui e coloquei na outra fileira.**

Todos os sujeitos de nível IIB recorreram a este tipo de resolução. Ao contrário dos níveis anteriores, os sujeitos deste nível se utilizam deste procedimento com êxito imediato e não apenas após constatação, ou seja, a possibilidade de transferir 1 ficha de uma coluna para outra e estabelecer a diferença de 2 fichas é logo admitida. Ou como afirmam Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) "*(...) o sujeito não procede mais através de simples tentativas.*" (p. 57). O sucesso parece ser alcançado devido às implicações entre ações e operações dos sujeitos. As compensações exigidas ao transferir fichas entre as colunas parecem estar sendo antecipadas pelos sujeitos.

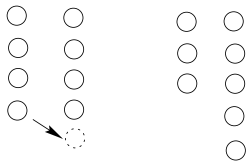
Neste sentido, estes casos são ilustrativos uma vez que parecem não se tratar de simples simetrias espaciais ou meras tentativas, mas sim, de reais interações entre adições e subtrações.

Nível III (1 sujeito)

Tornar desigual (com 2 fichas a mais): (4) (4)



Nível III: DIE(13;8/ 5ª)



Teria algum jeito de deixar esta coluna com duas fichas a mais do que esta? **Tem, tem mudando só 1.** (DIE passou 1 ficha de uma coluna para outra).

Assim como no nível anterior IIB, o único sujeito deste nível III, DIE(13;8/5ª), também efetua a tarefa com êxito imediato. Quando solicitado a deixar uma das colunas com 2 fichas a mais, DIE argumenta: **tem, tem mudando só 1**. Constatamos, mais uma vez que, neste caso, DIE parece compreender a diferença ocasionada pela transferência de fichas entre as colunas, logo, entender as implicações entre as adjunções e supressões quando destas transferências.

6.1.3 Estabelecer diferenças

Quando da aplicação da prova várias situações foram analisadas no que diz respeito ao estabelecimento de diferenças. Estas situações consistiam em:

a) estabelecer a diferença com uma coluna escondida, efetuando transferência de fichas entre as colunas e acrescentando fichas da caixa reserva;

b) estabelecer a diferença com duas colunas escondidas, efetuando transferência de fichas entre as colunas e acrescentando fichas da caixa reserva;

c) estabelecer a diferença com três colunas escondidas, efetuando transferência de fichas entre as colunas.

Convém salientar que neste momento, ao contrário das outras situações já analisadas anteriormente, as tranferências de fichas entre as colunas e o acréscimo de fichas reserva são ações efetuadas pela experimentadora, cabendo aos sujeitos apenas prever o número de fichas necessário para igualar novamente as colunas. A seguir passaremos, então, à análise de cada situação proposta pela experimentadora.

a) Estabelecer a diferença com uma coluna escondida, efetuando transferência de fichas entre as colunas e acrescentando fichas da caixa reserva:

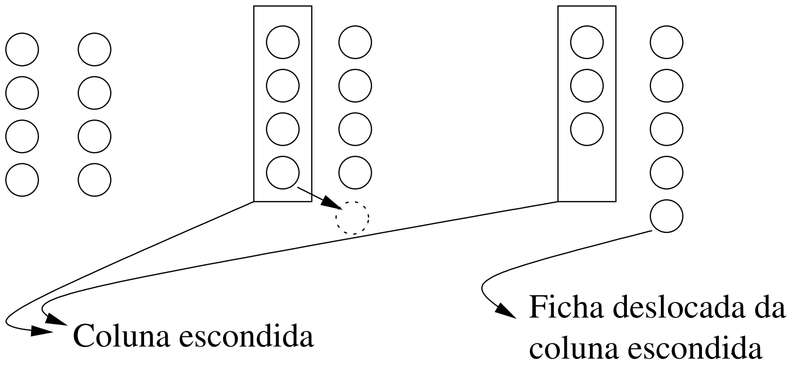
Nesta situação foram apresentadas duas colunas com o mesmo número de fichas. Após o sujeito reconhecer a igualdade das colunas, uma delas foi escondida. Em seguida, a experimentadora ou transferia fichas de uma coluna para a outra ou acrescentava fichas da caixa reserva em uma das colunas. Independentemente da transferência de fichas entre colunas ou do acréscimo de fichas reserva, o sujeito sempre foi solicitado a anunciar o número de fichas necessário para deixar as duas colunas iguais novamente.

Salientamos que primeiramente serão analisados os dados referentes às transferências de fichas entre as colunas e num segundo momento os dados que dizem respeito ao acréscimo de fichas da caixa reserva.

As respostas dos sujeitos variaram conforme os diversos níveis encontrados nesta pesquisa: IB, IIA, IIB e III. Passemos, então, à análise de cada um deles, ressaltando que apresentaremos uma representação das ações efetuadas pela experimentadora e na sequência os protocolos e explicações de cada nível de evolução na prova.

- Diferença com transferência de fichas entre as colunas, sendo uma delas escondida:

Representação da ação efetuada pela experimentadora



De acordo com a representação acima podemos observar que em função da transferência de 1 ficha da primeira coluna para a segunda, a diferença que se estabelece, portanto, é de 2 fichas. A solução parece simples. No entanto, diferenças significativas podem ser apontadas quanto às respostas dos sujeitos a esta tarefa.

Os sujeitos de nível IB (N=4) definitivamente não foram capazes de antecipar corretamente o número de fichas necessário para reestabelecer a igualdade das colunas. Eles anunciaram um resultado, contudo, tratava-se de uma resposta que não compensava a diferença de 2 fichas ocasionada pela transferência entre as colunas. Isto pode ser exemplificado por meio do protocolo de **BRU(9;6/3ª/IB)**:

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **Pegar 1 da reserva e colocar ali.** Por que 1? **Porque você tirou só 1.** Aqui têm quantas fichinhas, BRU? **5.** E quantas você acha que ficaram aqui? (fileira escondida). **3.** Quantas fichas eu teria que pegar das reservas? **1.** Por que 1? **Porque você tirou 1.**

A partir da análise das respostas dadas por BRU(9;6/3ª/IB) podemos constatar a falta de interação entre as ações aditivas e subtrativas. Para os sujeitos deste nível IB (N=4) se o deslocamento é de 1 ficha, logo, a diferença a se estabelecer também será de 1 ficha, ou como justifica BRU(9;6/3ª/IB): **Pegar 1 da reserva**

e colocar ali (...). Porque você tirou só 1. A compensação necessária entre as ações de adicionar e subtrair, ao mesmo tempo, não são antecipadas de forma eficaz pelos sujeitos deste nível.

Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) ressaltam que a implicação ainda não compreendida neste nível é a de que todo deslocamento de n elementos entre as colunas produz uma diferença de $2n$, se as coleções são iguais de início.

Vale salientar, ainda, que nesta situação uma dificuldade a mais se impõe que é o fato de uma coluna estar escondida quando se efetua a transferência. Neste caso, os sujeitos não podem se valer de simples configurações espaciais, mas somente das implicações entre adjunções e supressões simultâneas. Estas implicações, por sua vez, superam as adições/subtrações simples ou absolutas, requerendo a coordenação entre adições/subtrações relativas ou por transferências. Isto é o que ainda escapa à compreensão dos sujeitos de nível IB.

Em contrapartida, os sujeitos de nível IIA (N=6) ultrapassam estas reações iniciais na medida em que são capazes de inferir que toda transferência produz uma diferença maior que o número de fichas deslocado entre as colunas. No protocolo de **FER (9;6/3ª/IIA)** podemos verificar estes avanços com relação ao nível anterior IB.

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **1.** Por que 1? **Porque aqui tinha 4 e aqui também tinha 4. Daí eu tirei 1, vai ficar esta com 5, 3. Para ficar igual aqui, 2 fichas.** Por que você acha que são 2 fichas? **Porque se tem 3, mais 2, dá 5, aí fica igual.**

No caso de FER (9;6/3ª/IIA) podemos constatar que, de início, a resposta dada é similar ao nível anterior; porém, FER a modifica em função da operação que realiza a partir da retomada da ação. O sujeito se remete a situação inicial: **aqui tinha 4 e aqui também 4**; descreve a transformação ocorrida devido à transferência da ficha: **daí eu tirei 1, vai ficar esta com 5, 3**; e finalmente anuncia que para ficar igual são necessárias 2 fichas: **porque se tem 3, mais 2, dá 5, aí fica igual.**

Portanto, os sujeitos deste nível IIA alcançam o êxito, mas eles ainda permanecem no estado de descrição ou de cálculo e isto pôde ser evidenciado no protocolo de FER (9;6/3ª/IIA). Assim, este nível supera reações do nível anterior na medida em que já podemos falar em um início das adições/subtrações relativas, ou como esclarecem Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996): " *(...) esses inícios consistem em começar a compreender, logo após constatações ou experiências mentais, que uma transferência T consiste não exclusivamente em acrescentar n elementos ao conjunto final, mas também em retirar 'alguma coisa' do conjunto inicial.*" (p. 54).

Em contrapartida, o nível IIB se caracteriza por um salto dialético, ou seja, os sujeitos compreendem as implicações entre as ações aditivas e subtrativas. Vejamos o protocolo de **CAM (12;1/5ª)/IIB)**:

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **2.** Por que 2? **Porque aqui, estava aqui né?! É a mesma que esta, só que está na outra fileira, e você tirou, daí esta daqui ficou com a da outra fileira mais a dela.** (CAM fazia gestos para mostrar a transferência de uma fileira para a outra).

O protocolo de CAM (12;1/5ª/IIB) mostra seu êxito imediato. Além disso, vemos que suas explicações ultrapassam o estado de descrição. Evidencia-se, neste sentido, a compreensão da identidade dos contrários, isto é, para os sujeitos do nível IIB (N=11) a operação de transferência é ao mesmo tempo adição e subtração. Ou como argumenta CAM(12;1/5ª)/IIB): **esta daqui ficou com a da outra fileira mais a dela**.

Assim, os sujeitos de nível IIB atingem o êxito e sabem explicar sua razão, superando as descrições e os cálculos, característicos do nível anterior IIA.

Quanto ao nível III, **DIE (13;8/5ª)**, único sujeito deste nível, também mostra êxito imediato, como podemos verificar em seu protocolo:

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **2.** Por que 2, DIE? **Porque as duas**

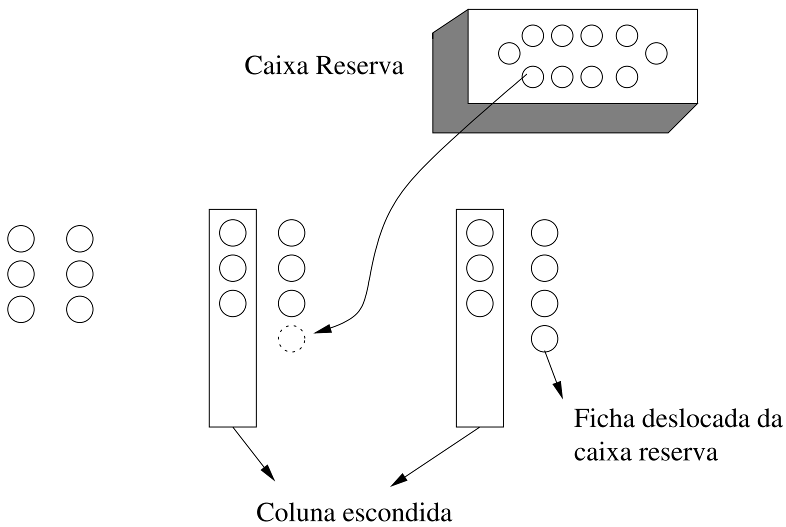
tinham 4, você tirou 1 de lá, daí ficou com 3, e aqui ficou com 5, daí, no caso, você tinha que pegar 2, para lá também ficar com 5.

O êxito de DIE (13;8/5ª/III) é evidente. Todavia, suas explicações parecem permanecer ao nível descritivo. Neste caso, ressaltamos que em tarefas, as quais serão apresentadas posteriormente, DIE demonstra novos e interessantes argumentos sobre os quais podemos justificar sua inclusão no nível III de evolução quanto aos problemas de igualação e construção de diferenças.

Agora, analisemos os diferentes níveis e as explicações dadas pelos sujeitos quando solicitados a estabelecer a diferença com o acréscimo de fichas da caixa reserva e não mais com transferência entre as colunas.

- Diferença com acréscimo de fichas da caixa reserva, em uma das colunas (uma delas escondida):

Representação da ação
efetuada pela experimentadora



Conforme a ilustração acima podemos verificar que não se trata de transferência de fichas entre as colunas mas sim do acréscimo de 1 ficha proveniente da caixa reserva. Neste caso, temos uma adição simples uma vez que há o acréscimo de 1 elemento exterior às coleções e, portanto, se acrescentamos 1 ficha da caixa reserva, faz-se necessário apenas 1 para reestabelecer a igualdade novamente.

De antemão destacamos que todos os sujeitos (N=22) obtiveram êxito nesta situação, independentemente de seus níveis - IB, IIA, IIB e III. Os protocolos abaixo demonstram o sucesso na realização das igualações e as respectivas explicações.

Nível IB: BRU (9;6/3ª)

Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **1.** Por que 1? **Porque você colocou só 1 nesta aqui.** Você tem certeza? **É.**

Nível IIA: FER (9;6/3ª)

Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **As duas tinham 4, tem que pegar mais 1.** Eu pegando mais 1 da caixa reserva fica igual? **Fica, porque aqui tem 4 e aqui tem 5.**

Nível IIB: CAM (12;1/5ª)

Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **1.** Por que 1 CAM? **Porque elas eram iguais, daí você colocou 1 aqui, para elas ficarem iguais de novo você tem que colocar uma aqui também.**

Nível III: DIE (13;8/5ª)

Quantas fichas eu devo pegar da caixa de fichas reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **1.** Por que 1 DIE? **Porque nas duas tinham 4 daí você colocou 1. Uma está com 5 e outra está com 4 ainda.**

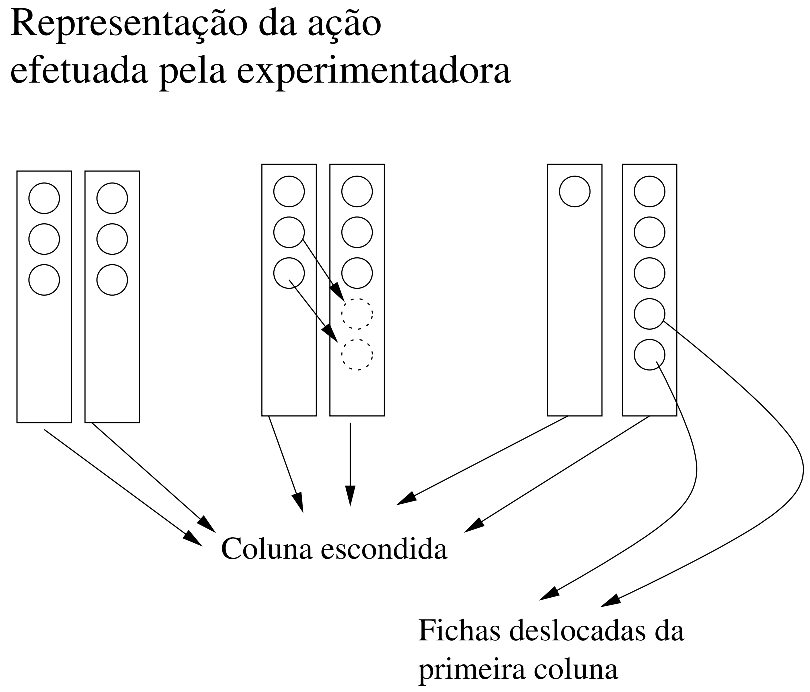
O êxito nesta situação estende-se a todos os sujeitos (N=22). Isto indica que estes compreendem as adições simples, aquelas que se efetuam a partir da caixa reserva. Porém, precisamos considerar que estas adições não requerem as implicações entre o ato de adicionar/subtrair simultaneamente pois as fichas são exteriores aos elementos que compõem as coleções. Assim, o êxito verificado em todos os sujeitos nos permite afirmar que, do ponto de vista do processo dialético, já há um início de interação entre adição/subtração. Este fato, inclusive já pôde ser verificado quando os sujeitos foram solicitados a igualar colunas com diferentes quantidades de fichas. Naquele contexto, também nos referimos a um início de interação entre adição e subtração, mas ainda não hà uma síntese dialética entre tais operações.

Vemos, portanto, que quando se trata de adições/subtrações simples, todos os sujeitos (N=22) alcançam o êxito. As diferenças entre eles emergem à medida que são solicitadas as adições/subtrações relativas, produto das implicações entre as ações de adicionar e subtrair. As situações discutidas a seguir esclarecem melhor este fato.

b) Estabelecer a diferença com duas colunas escondidas, efetuando transferência de fichas entre as colunas e acrescentando fichas da caixa reserva:

Nesta situação apresentou-se ao sujeito duas colunas escondidas contendo o mesmo número de fichas. O sujeito desconhecia totalmente quantas fichas havia em cada uma delas, apenas sabia de sua igualdade. A seguir a experimentadora ou transferia fichas de uma coluna para a outra ou acrescentava fichas da caixa reserva juntamente com uma transferência de fichas entre as colunas. Portanto, neste momento houve uma conjugação dos dois procedimentos: transferência de fichas entre as colunas e também de acréscimo de fichas da caixa reserva. Só então foi solicitado ao sujeito quantas fichas seriam necessárias para obter de novo a igualdade das colunas. Passemos, então, a análise de cada situação específica.

- Diferença com transferência de fichas entre as colunas, ambas escondidas:



Vemos pela representação acima que nesta situação há o deslocamento de 2 fichas da primeira coluna para a segunda e assim, o número de fichas suficiente para se obter a igualdade novamente é de 4. Entretanto, uma novidade é introduzida. Esta refere-se ao fato de o sujeito desconhecer totalmente o número de fichas que compõe cada coleção, uma vez que ambas colunas encontram-se escondidas.

As condutas apresentadas pelos sujeitos de nível IB (N=4) mais uma vez se caracterizam pela falta de antecipação das compensações produzidas pela transferência das fichas. Todos os sujeitos deste nível procederam como se se tratasse de adições/subtrações simples ou absolutas. Vejamos o protocolo de **FEL (10;7/ 4ª/IB)**:

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **2.** Por que 2? **Porque você tirou 2 daqui, colocou ali, tem que pôr mais 2 aqui, para ficar igual.**

As respostas de FEL (10;7/4ª/IB) elucidam o que falamos há pouco, isto é, para este sujeito se passamos 2 fichas de uma coluna para outra , então, precisamos de 2 fichas para reestabelecer a igualdade. Neste sentido, as adições/subtrações relativas ou por transferências não são compreendidas pelos sujeitos deste nível IB.

Quanto aos sujeitos de nível IIA (N=6) verificamos alguns avanços no que diz respeito às adições/subtrações relativas. O protocolo de **LIV (10;6/4ª/IIA)** ilustra estes saltos dialéticos:

> Olha, eu peguei 2 fichinhas daqui e passei para esta outra fileira. Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **Ahh! Eu não sei.** Por quê? **Porque eu não sei com quantas fichinhas cada uma estava.** E não tem como saber? **Ahh! Só vendo.** Você acha que o único jeito é sabendo quantas fichas cada coluna tinha? **Ou então eu chutar qualquer número.** Veja bem, LIV, as duas são iguais, e o que eu fiz? Eu peguei quantas daqui? (apontando para a primeira coluna) **2.** E passei para cá (apontando para a segunda coluna). Então, quantas eu preciso pegar da caixa reserva para deixar tudo igual de novo? **Ahh! Eu vou chutar, tá?! Vamos supor que as duas tinha 5. Você tirou 2 daqui** (primeira fileira). **Aí ficou com 3, né?! E aqui 7** (segunda fileira). (LIV ficou pensativa por alguns instantes) **Aí eu poderia pegar 4 para ficar igual.** Então você pegaria 4? **Humhum.** Agora vamos supor que aqui tivesse 3 e aqui 3. Você pegaria as mesmas 4, ou não? O que você acha? (LIV ficou pensativa e disse:) **Pegaria.** Tem certeza? **Porque olha, as duas tem 3, aí você pegaria 2 daqui, aí aqui ficaria com 1. Aí aqui, 5. Aí eu pegaria 4 fichinhas para as duas ficarem iguais.**

Analisando o protocolo de LIV (10;6/4ª/IIA) percebemos que num primeiro momento, o sujeito não admite a possibilidade de anunciar quantas fichas seriam necessárias para obter novamente a igualdade das colunas, uma vez que estas encontravam-se escondidas. LIV inclusive ressalta que **só vendo**, ou seja, sem saber quantas fichas foram escondidas de início não é possível solucionar o problema. Porém, LIV (10;6/4ª/IIA) encontra uma forma de resolver a questão: **Ahh! Eu vou chutar, tá?!**, sendo assim, LIV supõe que a experimentadora havia escondido 5 fichas em cada coluna e tão logo faz o cálculo, soluciona com êxito a solicitação.

LIV (10;6/4ª/IIA) e também os demais sujeitos de nível IIA só vêem a possibilidade de resolver esta tarefa por meio de um cálculo numérico; na verdade, eles imaginam um número e fazem as operações.

Destacamos que, neste nível, a regra de que cada elemento deslocado de uma coluna para outra provoca uma diferença de 2 elementos, ainda, não é compreendida pelos sujeitos. Em contrapartida, eles alcançam o êxito por meio das descrições dos cálculos que efetuam e isto já constitui um salto dialético se comparado às reações dos sujeitos do nível anterior IB.

Por outro lado, a regra até então não compreendida em IIA já é totalmente apreendida pelos sujeitos de nível IIB. Neste estudo, todos eles (N=11) resolveram e explicaram esta tarefa com sucesso. O protocolo de **MAI (10;1/3ª/IIB)** ilustra esta afirmação.

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **4.** Por que 4, explique para mim. **Porque aqui tinha uma fileira e você colocou mais 2. Daí eu tenho que pegar 4 para deixar igual.** O que aconteceu com a outra fileira? **Você tirou 2.** E aí? **Daí aqui ficou com 4 a mais.** Você tem certeza? Como você pensou? **Eu pensei que tirou 2 daqui e colocou aqui. Daí essa ficou com 2 a mais, eu acho.**

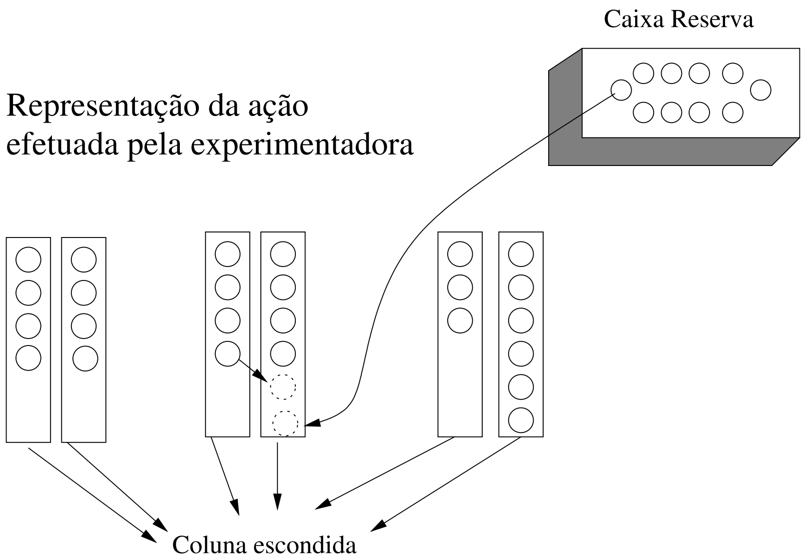
Pelo protocolo de MAI (10;1/3ª/IIB) vemos que a identidade dos contrários é finalmente compreendida, portanto, para os sujeitos de nível IIB a transferência de fichas entre as colunas é ao mesmo tempo adição e subtração ou como argumenta MAI (10;1/3ª/IIB): **você tirou 2 (...) daí aqui ficou com 4 a mais**.

O mesmo acontece com **DIE (13;8/5ª)**, único sujeito de nível III:

> Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas? **4.** Por que 4? **Porque você pegou e tirou 2 dessa, e essa ficou com 2 a mais, e essa com 2 a menos. Aí, no caso, para ficar igual você tinha que pegar 4. Para repor aquela que você tirou.**

No caso de DIE (13;8/5ª/III) também verificamos as compensações antecipadas das diferenças ocasionadas pelas transferências. O argumento de DIE é bem elucidativo pois demonstra o que falamos há pouco acerca da identidade dos contrários, assim DIE esclarece: **porque você pegou e tirou 2 dessa e essa ficou com 2 a mais, e essa com 2 a menos**. A explicação de DIE, portanto, apresenta a síntese entre as operações de adição e subtração, e como argumentam Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) "*(...) a dialética adquire assim, em pleno sentido, sua significação de aspecto inferencial de equilibração.*" (p. 57). Porém, faz-se necessário analisar outras situações da prova, como é o caso da combinação de dois procedimentos já apresentados aos sujeitos anteriormente: transferência de fichas entre colunas mais acréscimo de fichas da caixa reserva.

- Diferença com transferência de fichas entre as colunas mais acréscimo de fichas da caixa reserva, ambas colunas escondidas:



Nesta situação além da experimentadora transferir 1 ficha da primeira coluna para a segunda, também foi acrescida 1 ficha da caixa reserva, o que acarretou uma diferença de 3 fichas.

Os sujeitos de nível IB (N=4) não alcançaram o êxito nesta situação. Para eles a diferença é de apenas 2 fichas e não 3, como podemos observar nas explicações de **AUG (9;7/3ª/IB)**:

> Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto nas duas colunas? (AUG ficou pensativo) **2.** Por que você

> acha que são 2? **Porque 1 você tirou de lá** (monte reserva) **e colocou aqui e a outra você tirou daqui** (fileira escondida) **e colocou aqui.**

Pelo protocolo de AUG (9;7/3ª/IB), podemos constatar a falta de antecipação e de implicações entre as ações de sentido contrário - acrescentar/tirar. De fato, o que falta a estes sujeitos é saber compor as compensações ocasionadas pela transferência de fichas e mais o acréscimo de fichas exteriores às coleções. Este entendimento só é atingido pela intervenção de um processo dialético construtivo, processo este que garantirá a interação entre as operações de adição e subtração.

Tanto é que se analisarmos o protocolo de **LIV (10;6/4ª)**, sujeito de nível IIA, perceberemos uma superação quanto a estas reações de nível IB.

> Quantas fichas você acha que esta coluna tem a mais (coluna que recebeu as fichas)? **Olha, eu vou chutar um número. Vamos supor que aqui tenha 2 e aqui também 2. Daí você pegou 1 daqui, passou para cá, ficou com 3. E também pegou 1 da caixinha e aqui ficou com 4 e aqui 1.** Então, quantas a mais esta tem? **3.** Tem certeza? **Humhum. É porque aqui tinha 2 e ficou com 1. E aqui tinha 2 e ganhou mais 2 e ficou com 4. Aí 1 para 4, dá 3.** Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva? **3.** Você disse que chutou,então, e se nós tivéssemos duas colunas com 5 fichas cada uma? **Aí aqui ficaria com 4.....**(ficou pensativa) **Eu chutaria no número 3.** Por que o 3? **Aí as duas tinham 5. Daí você pegou 1 daqui e aqui ficou com 4. E aqui 6. E ainda pegou mais uma daqui e aqui ficou com 7 e aqui 4. Para ficar igual, 3 fichas.**

LIV (10;6/4ª), assim como todos os outros sujeitos do nível IIA (N=6), consegue anunciar corretamente o número de fichas necessário. No entanto, as explicações são marcadas pela descrição do cálculo numérico. LIV (10;6/4ª/IIA) novamente supõe um número qualquer e realiza seus cálculos no intuito de descobrir a resposta correta. Este fato demonstra a superação de reações iniciais em que o sujeito se quer atinge o êxito. Contudo, os sujeitos de nível IIA ainda permanecem no estado de descrição ou de cálculo e, como salientam Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996), "*(...) um cálculo não é ainda uma explicação e pode permanecer, se* *ele não for guiado por uma inferência implicativa, em estado de análise fatual.*" (p. 55).

Esta inferência implicativa, por outro lado, já guia as explicações dos sujeitos de nível IIB (N=11) que obtêm o êxito e compreendem sua razão. Vejamos o protocolo de **EDU (13;4/5ª/IIB)**:

> Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto nas duas colunas? **3.** Por que você acha que são 3? **Porque você tirou 1 daqui e depois colocou outra daqui.** Como você sabe que são 3? **Porque diminuiu, diminuiu aqui e aumentou aqui.**

Pelas explicações de EDU (13;4/5ª/IIB) podemos ilustrar as implicações decorrentes das ações de retirar fichas de uma coluna e acrescentá-las em outra, pois como ele mesmo afirma: **diminuiu, diminuiu aqui e aumentou aqui**. Assim, vemos a interação, ou melhor, as "*implicações mútuas entre adições e subtrações.*" (Piaget, Henriques e Maurice, 1980/1996, p. 55).

O mesmo pode ser verificado no nível III, com **DIE (13;8/5ª)**:

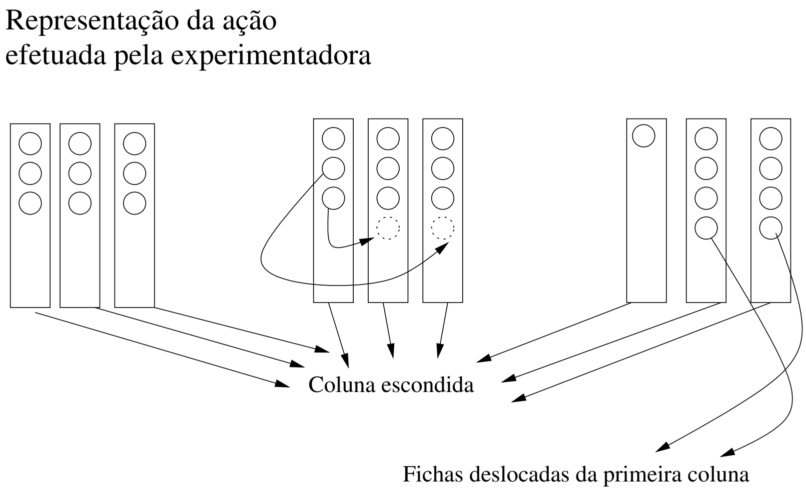
> Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto nas duas colunas? **3.** Por que 3? **Porque eu não sei quanto tinha esta daqui mas você pegou 1 daqui e colocou ali daí ela ficou com 1 a menos, e daí você pegou 1 daqui colocou ali, aí ela ficou com 2 já a mais e essa já tinha 1 a menos, eu acho que 3 para ficar igual.** E é possível descobrir quantas fichas vamos precisar sem saber quantas fichas têm aqui embaixo? **Eu acho que dá.** Você imaginou algum número para descobrir quantas fichas iria precisar? **Não, porque você disse que estava igual, aí eu só pensei.**

Vemos que DIE (13;8/5ª) também compreende as implicações mútuas entre as adições e subtrações pois considera, ao mesmo tempo, estas duas operações. O que os sujeitos, tanto de nível IIB quanto os de nível III, realizam, de fato, é a coordenação entre adições/subtrações simples e adições/subtrações relativas uma vez que a tarefa proposta conjuga dois procedimentos - transferência de fichas entre colunas e acréscimo de fichas reservas.

Para estes sujeitos "*(...) as implicações não permanecem locais, mas se compõem entre elas e se encadeiam de maneira inferencial.*" (Piaget, Henriques e Maurice, 1980/1996, p. 57). É por este motivo que o êxito é imediato bem como suas razões são compreendidas. Desta forma, estes avanços que caracterizam os níveis IIB e III resultam em composições entre implicações, "*em sínteses produtoras de novidades ou avanços*" (ibid., p. 58). Entretanto, algumas tarefas que englobam novas composições só são compreendidas por DIE (13;8/5ª), sujeito pertencente ao nível III; tarefas que serão analisadas a seguir.

c) Estabelecer a diferença com três colunas escondidas, efetuando transferência de fichas entre as colunas:

Neste situação foram apresentadas ao sujeito três colunas escondidas contendo o mesmo número de fichas. Mais uma vez o sujeito não tinha conhecimento de quantas fichas havia em cada uma delas, apenas sabia que eram iguais. Em seguida, a experimentadora efetuou transferências de fichas da primeira coluna para a segunda e depois outra transferência da primeira coluna para a terceira.



Feito isso foi solicitado ao sujeito quantas fichas seriam necessárias para deixar a primeira coluna igual a segunda e a primeira coluna, igual a terceira.

Como salientamos anteriormente apenas DIE (13;8/5ª), sujeito de nível III, demonstrou compreender as novas composições impostas nesta tarefa. Contudo, exemplificar os outros níveis é bem interessante porque a partir deles podemos caracterizar ainda melhor este processo dialético construtivo que engendra as operações de adição e subtração.

AUG (9;7/3ª) de nível IB e no qual temos mais 3 sujeitos resolve esta tarefa da seguinte forma:

> Quantas fichas eu tenho que pegar para deixar esta primeira coluna igual a segunda? **2.** Por que 2? **Porque você pegou 1 para dar para esta e depois mais 1 para dar para esta.** Quantas fichas a segunda coluna têm a mais que a primeira? **1.** Por que 1 a mais? **Porque você pegou 1 dali.** Quantas fichas a terceira coluna tem a mais que a primeira? **1 também.**

Vemos que as explicações de AUG (9;7/3ª/IB) se assemelham àquelas já apresentadas quando das transferências de fichas entre duas colunas escondidas. Era de se esperar que esta tarefa fosse mal sucedida pelos sujeitos de nível IB (N=4) porque aqui trata-se de transferências efetuadas para outras duas colunas e que, no caso, são composições muito complexas.

Com o nível IIA (N=6) as explicações são similares. Eles também afirmam que se deslocou 1 ficha para a segunda coluna e mais 1 para a terceira, então, temos uma diferença de 2 fichas e não 3. Vejamos a resposta de **SHI (11;10/5ª/IIA)**

> Quantas fichas eu vou ter que pegar da caixinha para deixar esta fileira igual a segunda? **2.** Por que 2, SHI? **Porque você colocou 1 dessa aqui na terceira.** Quantas fichas a terceira coluna tem a mais? **2.** Quantas fichinhas têm de diferente? **2.** Por que 2? **Por que você colocou 1 na segunda e depois Colocou mais uma na terceira.**

Portanto, vemos que o êxito também não é atingido pelos sujeitos de nível IIA, assim, estas composições complexas não são compreendidas.

Entretanto, no nível IIB, no qual se encontram 11 sujeitos, alguns avanços são percebidos, como podemos ver no exemplo de **MAR (9;7/3ª/IIB)**:

> Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para deixar a primeira coluna igual a segunda? **Teria que pegar 2.** Por que 2? **Porque, agora eu vou diminuir, aqui tem 5, aqui tem 5 e aqui tem 5. Igual, tá? Você tirou 1 daqui e passou para cá, aqui ficou com 4 e aqui 6. Aí você tirou mais 1 e passou para cá, aí você vai necessitar assim... Se cada uma tinha 5, você tirou 2, você terá que colocar mais 2, e se as duas ficaram com 6, você terá que colocar 3. Pelo menos na minha matemática. Porque se for igual 5, 5 e 5, você teria que pegar só 2, mais como daí estas duas ficaram com 6, você necessitaria de pegar 3.** Você pegaria 3 fichas? **É isso mesmo.** Tem certeza? **Humhum.**

Vemos que MAR (9;7/3ª/IIB), num primeiro momento, procede como os sujeitos de nível IB e IIA, afirmando que são necessárias 2 fichas para reestabelecer a igualdade entre as três colunas. Mas, ao supor uma determinada quantidade, MAR (9;7/3ª/IIB) consegue achar a resposta correta. Na verdade, ele realiza um cálculo e o descreve, e isso já é um avanço com relação aos demais, isto é, um salto dialético. No entanto, relembremos que um cálculo não é ainda uma explicação, exceto quando guiado por uma inferência implicativa.

Por outro lado, constatamos que tudo é bem compreendido no nível III. **DIE (13;8/5ª)** anuncia a resposta bem como sua explicação.

> **3. Para ficar igual as outras vai precisar de 3.** Por que você acha que são 3 fichas? **Porque estava igual, daí você pegou 2, daí ela ficou com 2 a menos do que as outras, e daí repondo 2 de novo, como eu posso dizer, daí para repor de novo a quantidade que ela tinha mais 1 que é a que as outras ganharam.**

Podemos identificar que DIE (13;8/5ª/III) explica o que acontece quando das transferências entre as três colunas, argumentando que são necessárias

3 fichas: 2 para repor a quantidade que a primeira coluna possuia **mais 1 que é a que as outras ganharam**.

Neste sentido, Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) afirmam que "*essas composições complexas marcam um progresso a mais na dialetização, não só porque elas são novas, mas integradas no sistema já construído graças aos anteriores, como também porque elas exigem síntese entre operações de sentidos contrários.*" (p. 60).

Neste contexto que é possível caracterizar o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração, analisando-o desde o nível IB até o nível III. Desta forma, passaremos a analisar, a seguir, em que medida este processo dialético construtivo entre as operações de adição e subtração, se relaciona com a resolução de problemas aditivos apresentada pelos sujeitos desta pesquisa.

6.2 Problemas aditivos e níveis de construção dialética: buscando relações

Nossa análise até o presente momento versou em constatar os avanços progressivos dos sujeitos no jogo de interdependências que caracteriza a construção dialétca das operações de adição e subtração. Vimos, portanto, a partir das tarefas propostas, como estas operações contrárias se integram gradativamente para formar uma nova totalidade.

Sendo assim, o Quadro IV (P. 109) resgata, em uma pequena síntese, os aspectos essenciais discutidos na análise dos resultados referentes à prova: problemas de igualação e construção de diferenças. Esta breve retomada será desenvolvida no intuito de viabilizar o entendimento que diz respeito às relações que objetivamos buscar.

Quadro IV - Síntese: níveis de construção dialética

Níveis		Sujeitos	Série
IB	-> Início de interação entre adição e subtração -> A adição/subtração simples é efetuada para igualar as colunas e também para torná-las desiguais (com 2 a mais) -> A transferência de fichas entre as colunas só é bem sucedida para efetuar as igualações entre elas -> A regra: 1 ficha transferida entre as colunas = diferença de 2 fichas, não é compreedida.	AUG(9;7) BRU(9;6)	3ª
		FEL(10;7) CEN(10;4)	4ª
IIA	-> Início das adições/subtrações relativas -> As igualações são bem sucedidas tanto por acréscimo de fichas quanto por transferências de fichas entre as colunas -> Adições/subtrações simples são utilizadas com êxito para tornar as colunas desiguais; o êxito por transferência só é alcançado após constatação -> O êxito ao estabelecer diferenças entre colunas é justificado por meio de descrições ou de cálculos -> Não atingiram a identidade dos contrários.	FER(9;6) LIL(9;2)	3ª
		ALI(10;8) LIV(10;6)	4ª
		SHI(11;10) JUL(11;11)	5ª
IIB	-> Todas as igualações são bem sucedidas seja qual for o procedimento utilizado -> Para tornar desigual qualquer procedimento - transferência ou acréscimo/decréscimo de fichas - é bem sucedido -> A regra: 1 ficha transferida entre as colunas = diferença de 2 fichas, é bem compreendida, assim como sua razão -> A identidade dos contrários é atingida -> As transferências de fichas efetuadas entre 3 colunas escondidas ainda não são entendidas.	MAR(9;7) AND(10;1) MAI(10;1)	3ª
		GUI(11;4) LUC(10;1) VAN(10;2)	4ª
		HEN(11;9) CAN(12;1) EDU(13;4) LAI(13;3) GRA(12;6)	5ª
III	-> A única tarefa ainda mal sucedida em IIB finalmente atinge o êxito -> As transferências de fichas efetuadas entre 3 colunas escondidas são executadas com êxito, sua razão é bem compreendida.	DIE(13;8)	5ª

Após recordar em linhas gerais as condutas características de cada nível de evolução da prova de igualação e construção de diferenças, passaremos a analisar em que medida esta construção dialética entre as operações de adição e subtração se relaciona às resoluções apresentadas pelos sujeitos para as seis categorias de problemas aditivos trabalhadas.

Destacamos que os problemas de estrutura aditiva foram escolhidos justamente por engendrarem todos os tipos de adição e subtração e comportando, assim, diversos graus de complexidade quando de suas resoluções.

Os problemas aditivos foram propostos em diferentes situações a fim de verificar como o sujeito os compreendia. Ao nosso ver, apenas a resolução escrita, via algoritmo, não nos daria tal informação. Neste sentido, propomos mais duas outras situações além da primeira, a saber:

1. resolução via algoritmo - resolução escrita 1 e 2 (situação 1 e 4);
2. resolução por meio de imagens gráficas (situação 2);
3. resolução por meio de organização das ações práticas (situação 3).

Relembramos que os sujeitos, individualmente, foram solicitados a resolver seis problemas, apresentados em três diferentes sessões. A sequência obedecida pela experimentadora para a resolução dos problemas foi a seguinte:

1. leitura conjunta (experimentadora/sujeito) e, em seguida, primeira resolução escrita;
2. resolução do problema por meio de imagens gráficas;
3. resolução do problema por meio de organização das ações práticas;
4. nova leitura conjunta (experimentadora/sujeito) e, em seguida, segunda resolução escrita.

Cada categoria de problema trabalhada seguiu esta ordem no momento em que foram propostos aos sujeitos. Neste sentido, passaremos à análise de cada uma destas situações, tentando relacioná-las aos níveis alcançados pelos sujeitos na prova de problemas de igualação e construção de diferenças.

6.2.1 Resolução via algoritmo e níveis de construção dialética

Designamos resolução via algoritmo porque com frequência os sujeitos escolarizados, após serem solicitados a resolver um problema, o fazem via algoritmo. Os nossos dados, por não contrariarem esta informação, nos permitiu optar pelo uso desta designação.

Denominamos de resolução escrita 1 (R_1), aquela proposta inicialmente (situação 1) e resolução escrita 2 (R_2), aquela efetuada após as resoluções por meio de imagens gráficas e as resoluções por meio de organização das ações práticas.

Categorizamos as resoluções escritas, via algoritmo, em certas (C) e erradas (E). O critério de acerto foi baseado no correto cálculo numérico escrito mediante a organização e o resultado obtido na operação. O critério de erro pautou-se em erros na organização e no resultado alcançado na operação.

A seguir serão apresentados os resultados das resoluções escritas, via algoritmo, e os diferentes níveis de construção dialética alcançados pelos sujeitos.

Resolução escrita 1 (R_1) e nível IB

A tabela 6.1 (p. 112) revela os dados concernentes aos sujeitos de nível IB (N=4) e os acertos (C) e erros (E) apresentados por eles quando das resoluções escritas 1 (R_1) nas seis categorias de problemas aditivos (Cat.1, Cat.2, Cat.3, etc.). O número total de acertos e erros alcançado pelos sujeitos nas resoluções 1 também é apresentado na tabela 6.1 (p. 112).

Analisando os erros e acertos dos sujeitos de nível IB, observamos que nenhum deles obteve êxito total. AUG (9;7/3ª) e FEL (10;7/4ª) acertaram três dos seis problemas propostos e foram os que mais alcançaram êxito dentro do nível IB. A figura 6.1 (p. 112) apresenta a resolução correta desenvolvida por AUG (9;7/3ª) para um dos problemas por ele resolvido. Vale ressaltar que, neste momento, a resolução é analisada do ponto de vista do êxito durante o cálculo numérico escrito.

NÍVEL IB e ACERTOS/ERROS NA RESOLUÇÃO ESCRITA 1									
Série	Sujeito	Prob. Cat. 1	Prob. Cat. 2	Prob. Cat. 3	Prob. Cat. 4	Prob. Cat. 5	Prob. Cat. 6	$N^{\underline{o}}$ Acertos	$N^{\underline{o}}$ Erros
		R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1
3ª	BRU(9;6)	E	E	E	C	E	E	1	5
	AUG(9;7)	C	E	E	E	C	C	3	3
4ª	FEL(10;7)	C	E	E	E	C	C	3	3
	CEN(10;4)	E	E	C	C	E	E	2	4
5ª									
Total								9	15

Tabela 6.1: Nível IB e Acertos/Erros na Resolução Escrita 1

Sexta categoria: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

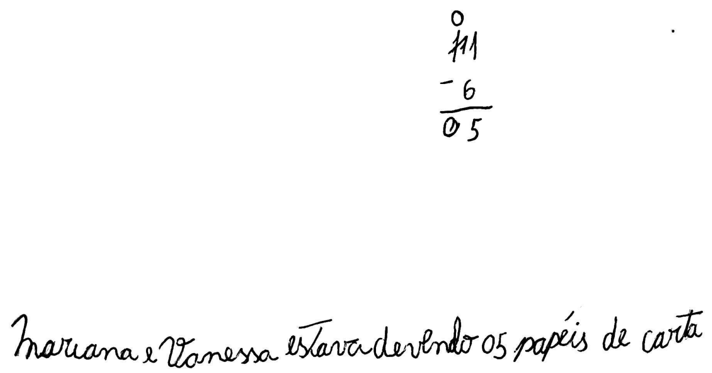


Figura 6.1: Sexta categoria: Resolução correta efetuada por AUG (9;7/3ª)

Vemos que AUG (9;7/3ª) escolhe a subtração para responder seu problema e a resolve corretamente.

Já o sujeito CEN (10;4/4ª) acertou somente dois problemas e BRU (9;6/3ª) foi ainda pior acertando apenas um dos seis problemas apresentados. A figura 6.2 (p. 113) ilustra o erro cometido por BRU (9;6/3ª) ao resolver um dos problemas propostos.

Primeira categoria: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

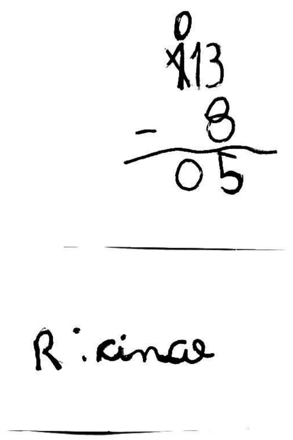


Figura 6.2: Primeira categoria: Resolução incorreta efetuada por BRU (9;6/3ª)

BRU (9;6/3ª) efetua uma subtração ao invés de uma adição. Isto é característico de todos os erros cometidos pelos sujeitos deste nível IB, ou seja, quando era para efetuar uma adição, faziam uma subtração e vice-versa. Notamos que no caso de BRU (9;6/3ª), ele se contenta em desenvolver sua resposta apenas escrevendo o número do resultado de sua operação.

Vemos, portanto, no que diz respeito à resolução escrita 1 (R_1), o número de erros total (E=15) é alto para os sujeitos de nível IB, conforme demonstrado na tabela 6.1 (p.112). Isto parece indicar que a possibilidade de êxitos daqueles sujeitos pode se relacionar ao nível de construção dialética por eles alcançado.

Resolução escrita 1 (R_1) e nível IIA

A tabela 6.2 (p. 114) mostra os sujeitos de nível IIA e a frequência de respostas escritas 1 (R_1) corretas (C) e incorretas (E), nas seis categorias de problemas aditivos.

Neste nível IIA também não encontramos nenhum sujeito que tenha obtido êxito total ao resolver pela primeira vez (R_1) os problemas. Contudo, o

NÍVEL IIA e ACERTOS/ERROS NA RESOLUÇÃO ESCRITA 1									
Série	Sujeito	Prob. Cat. 1	Prob. Cat. 2	Prob. Cat. 3	Prob. Cat. 4	Prob. Cat. 5	Prob. Cat. 6	$N^{\underline{o}}$ Acertos	$N^{\underline{o}}$ Erros
		R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1
$3^{\underline{a}}$	FER(9;6)	C	C	C	C	C	E	5	1
	LIL(9;2)	C	C	E	C	C	C	5	1
$4^{\underline{a}}$	LIV(10;6)	C	C	C	E	C	C	5	1
	ALI(10;8)	C	C	E	C	C	C	5	1
$5^{\underline{a}}$	SHI(11;10)	C	C	C	E	C	C	5	1
	JUL(11;11)	C	C	E	C	C	C	5	1
Total								30	6

Tabela 6.2: Nível IIA e Acertos/Erros na Resolução Escrita 1

número de acertos aumentou em comparação a resolução escrita 1 dos sujeitos do nível IB. No geral observamos que os seis sujeitos do nível IIA erraram apenas um, dos seis problemas propostos. A figura 6.3 (p. 114) demonstra a resolução correta efetuada por LIV (10;6/$4^{\underline{a}}$) para um dos problemas resolvidos por ele.

Terceira categoria: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?

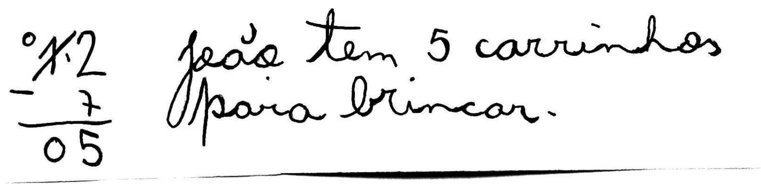


Figura 6.3: Terceira categoria: Resolução correta efetuada por LIV (10;6/$4^{\underline{a}}$)

Podemos observar que LIV (10;6/$4^{\underline{a}}$) faz a escolha da operação que condiz com o enunciado do problema e a efetua com sucesso. Sua resposta também é elaborada de forma coerente.

O mesmo já não acontece com JUL (11;11/$5^{\underline{a}}$) que resolve este mesmo problema de maneira incorreta. Sua resolução está ilustrada na figura 6.4 (p. 115).

Terceira categoria: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais

que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?

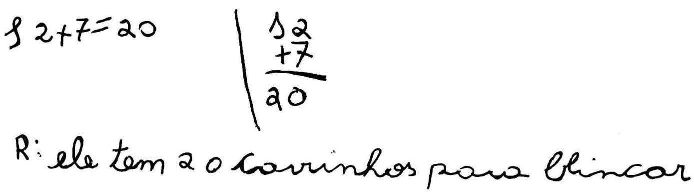


Figura 6.4: Terceira categoria: Resolução incorreta efetuada por JUL (11;11/5ª)

Vemos que JUL (11;11/5ª) além de optar por fazer uma adição ao invés de uma subtração, ainda a resolve de maneira errada. Convém ressaltar que os erros dos sujeitos deste nível caracterizaram-se pela escolha da operação inversa àquela exigida no problema, assim como fez JUL - uma adição e não uma subtração.

Assim, observamos que os sujeitos de nível IIA (N=6) possuem um número de erros inferior àquele observado nos sujeitos de nível IB, respectivamente, 6 erros e 15 erros. Portanto, os sujeitos de nível IIA acertam mais que os de nível IB, o conjunto de todos os problemas.

Resolução escrita 1 (R_1) e nível IIB

A fim de expor a frequência de respostas corretas (C) e incorretas (E) dos sujeitos deste nível IIB, foi organizada a tabela 6.3 (p. 116).

NÍVEL IIB e ACERTOS/ERROS NA RESOLUÇÃO ESCRITA 1									
Série	Sujeito	Prob. Cat. 1	Prob. Cat. 2	Prob. Cat. 3	Prob. Cat. 4	Prob. Cat. 5	Prob. Cat. 6	Nº Acertos	Nº Erros
		R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1
3ª	MAR(9;7)	C	C	C	E	C	C	5	1
	AND(10;1)	C	C	C	C	C	C	6	0
	MAI(10;1)	C	C	C	C	C	C	6	0
4ª	GUI(11;4)	C	C	C	C	C	C	6	0
	LUC(10;1)	C	C	C	C	C	C	6	0
	VAN(10;2)	C	C	C	C	C	C	6	0
5ª	HEN(11;9)	C	C	C	C	C	C	6	0
	GRA(12;2)	C	C	C	C	C	C	6	0
	EDU(13;4)	C	C	C	E	C	C	5	1
	LAI(13;3)	C	C	C	C	C	C	6	0
	CAM(12;1)	C	C	C	C	C	C	6	0
Total								64	2

Tabela 6.3: Nível IIB e Acertos/Erros na Resolução Escrita 1

Ao analisar as primeiras resoluções escritas (R_1) dos sujeitos de nível IIB (N=11) constatamos que as respostas corretas são ainda mais frequentes. Dos 11 sujeitos deste nível, 9 obtiveram êxito total quando de suas primeiras resoluções. A figura 6.5 (p. 116) mostra uma resolução correta efetuada por HEN (11;9/5ª), um dos sujeitos que acertou todos os problemas propostos.

Segunda categoria: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

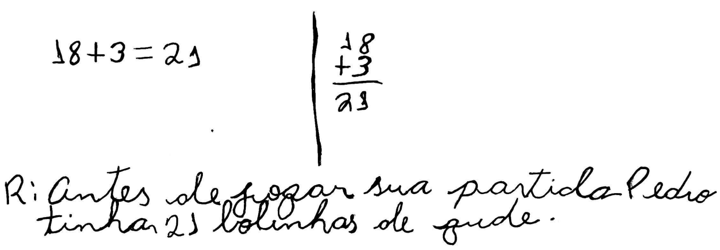


Figura 6.5: Segunda categoria: Resolução correta efetuada por HEN (11;9/5ª)

Tanto a operação desenvolvida por HEN (11;9/5ª) quanto sua resposta estão totalmente corretas.

Por outro lado, dois sujeitos de nível IIB - MAR (9;7/3ª) e EDU (13;4/5ª) - erraram um dos seis problemas apresentados. A figura 6.6 (p. 117) revela o erro efetuado por EDU (13;4/5ª) para o problema aditivo de quarta categoria.

Quarta categoria: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

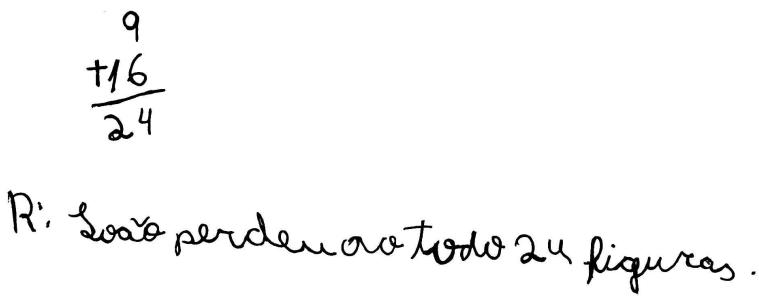


Figura 6.6: Quarta categoria: Resolução incorreta efetuada por EDU(13;4/5ª)

Podemos observar que EDU (13;4/5ª), ao invés de efetuar uma subtração, realiza uma adição, não alcançando, assim, o êxito. Além disso, a conta efetuada por EDU deveria apresentar o resultado 25 e não 24. Ressaltamos que MAR (9;7/3ª) errou o mesmo problema. No entanto, ele não fez uma adição como EDU. Ao contrário, sua resolução escrita consistiu na seguinte subtração: $25 - 16 = 9$.

Embora 2 sujeitos tenham efetuado um dos problemas de forma incorreta, podemos afirmar, por outro lado, que o nível IIB é marcado por um número expressivo de sujeitos (N=9) que alcançaram êxito total em seus cálculos numéricos escritos.

Resolução escrita 1 (R_1) e nível III

A tabela 6.4 (p. 118) destinada ao nível III é exatamente igual às anteriores, apresenta as resoluções escritas 1 (R_1), bem como seus acertos (C) e erros (E).

NÍVEL III e ACERTOS/ERROS NA RESOLUÇÃO ESCRITA 1									
Série	Sujeito	Prob. Cat. 1	Prob. Cat. 2	Prob. Cat. 3	Prob. Cat. 4	Prob. Cat. 5	Prob. Cat. 6	$N^{\underline{o}}$ Acertos	$N^{\underline{o}}$ Erros
		R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1
3ª									
4ª									
5ª	DIE(13;8)	C	C	C	C	C	C	6	0
Total								6	0

Tabela 6.4: Nível III e Acertos/Erros na Resolução Escrita 1

Como podemos verificar na tabela 6.4 (p. 118) DIE (13;8/5ª), único sujeito de nível III, acertou todos os problemas propostos, alcançando, assim, êxito total. A figura 6.7 (p. 118) apresenta um dos problemas resolvidos por DIE.

Quinta categoria: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

Figura 6.7: Quinta categoria: Resolução correta efetuada por DIE (13;8/5ª)

Vemos que DIE (13;8/5ª) faz a escolha correta da operação e a efetua com êxito, além de escrever a resposta de forma coerente.

A partir dos dados apresentados podemos verificar que as resoluções escritas corretas aumentam na medida em que o nível de interdepêndencia entre adição e subtração vai se constituindo em direção à uma nova totalidade. Isto indica que o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração pode estar se relacionando à possibilidade de êxito dos sujeitos quando de suas resoluções escritas. Neste sentido temos:

nível IB (N=4) - início da interação entre adições e subtrações $\rightarrow$ maior número de erros nas resoluções escritas 1 (15 erros e 9 acertos);
nível IIA (N=6) - início das adições e subtrações relativas $\rightarrow$ diminuição do número de erros nas resoluções escritas (6 erros e 30 acertos);
nível IIB (N=11) - a identidade dos contrários é compreendida $\rightarrow$ o êxito se estende à maioria dos sujeitos em suas resoluções escritas (2 erros e 64 acertos);
nível III(N=1) - novas composições são compreendidas a partir da síntese entre adições e subtrações $\rightarrow$ o êxito nas resoluções escritas é alcançado em todos os problemas propostos (0 erros e 6 acertos).

O resumo apresentado acima demonstra que a partir do nível IIB, o qual é guiado pela compreensão das implicações entre as ações de adicionar e subtrair, já há um maior número de êxitos quando são solicitadas aos sujeitos as resoluções escritas dos problemas. Vale ressaltar que até aqui analisamos a primeira resolução escrita (R_1) desenvolvida por eles, resta-nos, agora, verificar se estes aspectos se confirmam quando da resolução escrita 2 (R_2).

Para melhor analisar os dados coletados, faremos uso de gráficos os quais apresentarão as modificações dos sujeitos da resolução escrita 1 para a resolução escrita 2, quando estas ocorrerem. Teremos um gráfico para cada nível de evolução na prova de construção dialética das operações de adição e subtração.

Resolução escrita 2 (R_2) e nível IB

A partir do gráfico 6.8 (p. 120) constatamos que 3 dos 4 sujeitos deste nível modificaram suas respostas em dois dos problemas propostos, aumentando, portanto, seus acertos quando das resoluções escritas 2, mas ainda não atingindo êxito total.

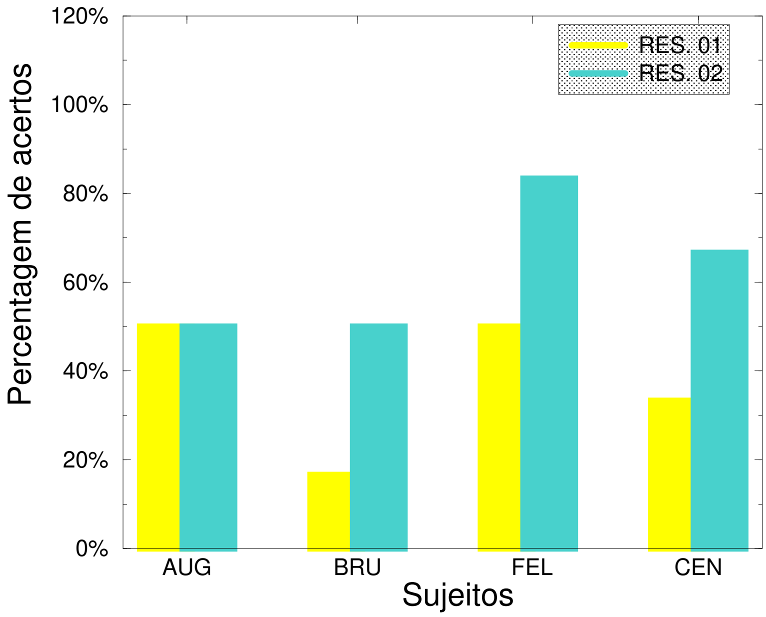


Figura 6.8: Nível IB: Modificações das resoluções escritas

BRU (9;6/3ª) que havia acertado um problema (quarta categoria) na resolução escrita 1, agora, apresenta êxito em mais dois problemas (primeira e sexta categoria), perfazendo um total de três acertos quando da resolução escrita 2 (R_2).

FEL (10;7/4ª) na resolução escrita 1 errou três problemas (segunda, terceira e quarta categoria). Após a resolução por meio de imagens gráficas e a organização das ações práticas, FEL modificou sua resposta em dois problemas (segunda e terceiras categorias), atingindo êxito em cinco dos seis problemas propostos.

CEN (10;4/4ª) que durante a resolução escrita 1 obteve sucesso em dois problemas (terceira e quarta categorias), quando de sua segunda resposta o êxito foi alcançado em mais dois problemas (segunda e quinta categorias), estabelecendo um total de 4 acertos.

A figura 6.9 (p. 121) demonstra a resolução 2 efetuada de forma correta por CEN (10;4/4ª).

Segunda categoria: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 18 \\ +3 \\ \hline 21 \end{array}$$

R: Ele tinha 21 bolinhas de gude

Figura 6.9: Segunda categoria: Resolução correta efetuada por CEN (10;4/4ª)

Na resolução escrita 1 (R_1) CEN havia desenvolvido uma operação de subtração: $18 - 3$; CEN também escreveu que **Pedro tinha 15 bolinhas antes de jogar a partida**. No entanto, após realizar o problema por meio de outras situações CEN modificou sua resposta. Vemos pela figura 6.9 (p. 121) que CEN faz a operação de adição e escreve de forma correta sua resposta. Quando questionado sobre o porquê da sua resolução 2 estar diferente da 1 CEN argumentou: **Porque a conta está errada. Porque não dá para tirar 18 de 15 e dá para tirar 18 de 21**. Por quê? **Porque Pedro perdeu 18 bolinhas**.

CEN parece tomar consciência de que se Pedro perdeu 18 bolinhas em sua partida, logo, não teria como retirar essas 18 bolinhas do resultado 15 que havia encontrado da primeira vez.

Com relação ao nível IB apenas AUG (9;7/3ª) manteve sua resolução inicial, não modificando nenhuma de suas respostas nos problemas de segunda, terceira e quarta categorias.

Pelas variações constatadas entre as resoluções 1 (R_1) e 2 (R_2) deste nível IB podemos destacar que as diferentes situações, nas quais os problemas foram apresentados, parecem contribuir para a compreensão dos sujeitos no que diz respeito às transformações, estados e relações impostos nos problemas trabalhados.

Resolução escrita 2 (R_2) e nível IIA

Verificando o gráfico 6.10 (p. 122) observamos que 4 dos 6 sujeitos pertencentes a este nível IIA corrigiram suas respostas iniciais (R_1) e passaram, assim, a obter êxito total em suas resoluções posteriores ao uso de imagens gráficas e a organização das ações práticas.

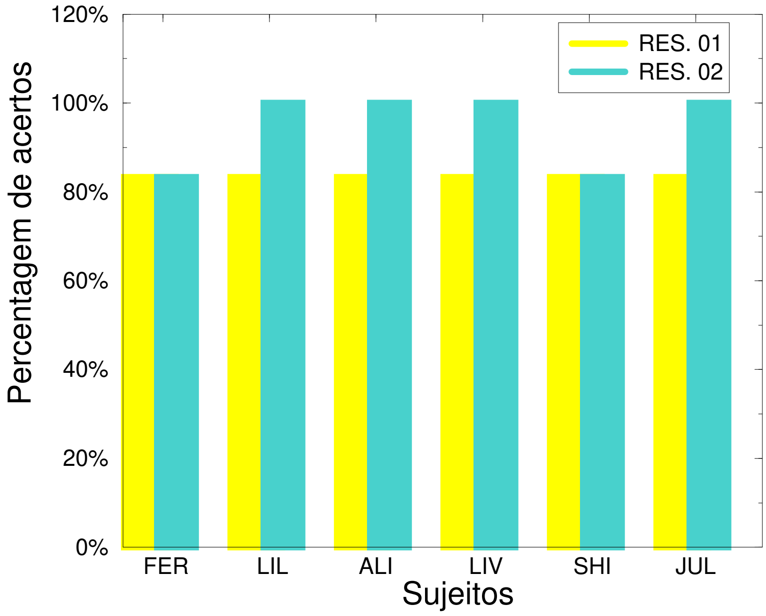


Figura 6.10: Nível IIA: Modificações das resoluções escritas

LIV (9;2/4ª) durante a resolução escrita 1 errou a quarta categoria de problema. No entanto, corrigiu sua resposta ao resolvê-lo pela segunda vez, obtendo, assim, êxito total.

SHI (11;10/5ª) também errou o problema de quarta categoria em sua primeira resolução, contudo, manteve sua resposta errada quando da resolução escrita 2.

FER (9;6/3ª) não obteve êxito na sexta categoria de problema e assim como SHI (11;10/5ª) também não modificou sua resposta quando o resolveu pela segunda vez. Portanto, FER (9;6/3ª) e SHI (11;10/5ª) mantiveram suas primeiras respostas.

LIL (9;2/3ª), ALI (10;8/4ª) e JUL (11;11/5ª), que na resolução escrita 1 haviam errado o problema de terceira categoria, variaram suas respostas na resolução escrita 2, conseguindo acertar todos os problemas propostos.

O caso de JUL (11;11/5ª), sujeito que modificou sua resolução escrita, é bem interessante, o que pode ser observado no protocolo a seguir:

> Em sua primeira resolução para o problema referente à terceira categoria: **Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?** JUL efetua uma operação de adição - 12 + 7 e ainda argumenta enquanto faz seu problema: **Aqui está falando que Pedro só tem 12 carrinhos para brincar, então o João possui 7 a mais, então a conta é de mais.** Após sua resolução escrita a experimentadora sugere que ele faça o problema novamente, só que agora sem se utilizar de números. Imediatamente JUL pega os lápis coloridos e começa a desenhar. Após imagem gráfica efetuada por JUL, a experimentadora questiona: Explica para mim o que você fez, JUL? E JUL explica: **Eu fiz aqui 12, desenhei 12 carrinhos. Que são do Pedro. Daí aqui eu fiz de mais, aí eu desenhei os 7 carrinhos que João tinha.** JUL parou por alguns instantes, olhou para o que havia feito, para o enunciado do problema e disse: **Ah! São do Pedro também. Pedro tem 7 a mais. Eu devia fazer a continha de menos daí João ia ter só 5. Eu fiz errado.** A experimentadora então questionou: O que você fez de errado? **Eu fiz 12 mais 7.** E qual a diferença entre você fazer 12+7 e 12-7? **A diferença é que aí eu não estou colocando que Pedro tinha 12 carrinhos, eu estou aumentando que ele tinha mais carrinhos. E não é. Daí ele tem 12 e para ver quantos carrinhos João tem para brincar, então ele só tem 5.** Após esta argumentação JUL queria apagar a primeira resolução que havia desenvolvido, então, a experimentadora disse que ele iria ter a oportunidade de refazer o problema.

Desta forma, a resolução 2 de JUL foi desenvolvida de outra maneira, como podemos ver na figura 6.11 (p. 124).

12-7=5

$$\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 5 \end{array}$$

R: ele tem 5 carrinhos para brincar

Figura 6.11: Terceira categoria: Resolução correta efetuada por JUL (11;11/5ª)

Vemos, portanto, que JUL toma consciência de seu erro e o corrige exatamente no momento em que efetua sua representação. Isto pode indicar que o trabalho com os problemas em diferentes situações- imagens gráficas, organização das ações práticas - pode favorecer o êxito do sujeito com relação a sua resposta escrita bem como as razões que as conduziram a ele. Ou seja, isso pode auxiliar o sujeito a entender **qual** a operação que deve ser efetuada e **porque** deva ser esta operação e não outra. Portanto, este auxílio recairia na coordenação dos dados existentes no enunciado do problema.

Obviamente que não falaremos aqui que se tratam de exercícios de aprendizagem, até porque não era intenção desta pesquisa trabalhar ao nível das intervenções pedagógicas. Contudo, o fato de alguns sujeitos deste trabalho (N=7) modificarem suas respostas nos problemas após tê-los efetuado de outras formas nos faz constatar que estes podem servir como procedimentos mais eficientes para a compreensão dos problemas no momento de suas resoluções. E este fato é extremamente importante do ponto de vista pedagógico, pois ele pode vir a nortear o trabalho do professor.

Resolução escrita 2 (R_2) e nível IIB

Observando o gráfico 6.12 (p.125) dos sujeitos de nível IIB constatamos que apenas 2 sujeitos - MAR (9;7/3ª) e EDU (13;4/5ª) - não acertaram todos os problemas quando solicitadas suas primeiras resoluções. Esta situação não se modificou com a resolução escrita 2, isto é, os sujeitos mantiveram as mesmas respostas incorretas, mesmo após resolver o problema por meio de imagens gráficas e de organização das ações práticas.

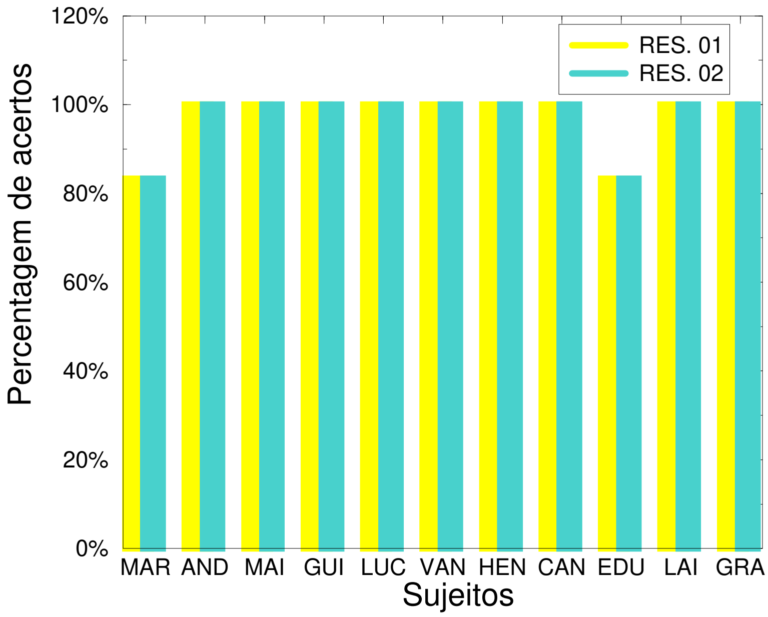


Figura 6.12: Nível IIB: Modificações das resoluções escritas

O problema de quarta categoria, o qual não foi efetuado corretamente por MAR e EDU, envolve transformação → transformação → transformação e seu enunciado dizia: **João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?**

Embora os sujeitos não tenham corrigido suas respostas, a partir da análise de seus protocolos podemos constatar que nos dois casos há presença de contradições, não só quando estes sujeitos resolveram o problema pela segunda vez, mas também quando o fizeram já na resolução escrita 1.

> EDU (13;4/5ª) durante a primeira resolução escrita pensava em voz alta: **Não dá...ele só tinha ganhado 9 e perdido 16... Ou é de menos...** Se fosse de menos como você faria? **Faria 16-9, só que ele ganhou 9 e perdeu 16?** E aí o que a gente pode fazer, então? **Então ele tinha mais antes de jogar.** Por quê? **Por causa que aí ele tinha uma coleção, foi jogar e perdeu.** EDU acabou por fazer $16 + 9 = 24$ durante a resolução escrita 1. Durante a resolução por meio de imagem gráfica EDU faz 9 figuras mais 16 figuras. Olha o que fez, lê novamente o enunciado do problema e diz: **Acho que é de menos.** Ao resolver

o problema com figurinhas EDU faz um monte com 9 figurinhas e um monte com 16 figurinhas, argumentando: **Estas 9 ele ganhou e as 16 ele perdeu. Acho que ele foi jogar com 25, ou é de menos.** EDU lê o problema novamente e deixa as figurinhas do mesmo jeito. Ao resolver o problema pela segunda vez, EDU mantém sua operação inicial, apenas muda o resultado: $16 + 9 + 25$.

Os mesmos conflitos explicitados por EDU podem ser notados no protocolo de MAR (9;7/3ª):

Durante a primeira resolução MAR conversa com si mesmo: **Eu fiz aqui, ele tinha 25 figurinhas, ele perdeu 16, só que ganhou 9. Ele tinha, ganhou 9 na primeira. Então, eu acho que das 25 que ele tinha se ele perdeu 16, ele só ficou com aquelas 9 que ele ganhou na primeira partida.** Mas no problema está dizendo que ele começou a jogar com 25 figurinhas? **Não. Mas para sobrar 9 tinha que fazer uma conta de 25 menos 16, se ele perdeu 16 figurinhas na segunda partida e sobrou 9...** Ele jogou 2 partidas. Na primeira ele ganhou 9 e na segunda ele perdeu 16. Então o que aconteceu nestas duas partidas? **Ele perdeu mais. Para mim eu acho que foram só as 16 mesmo, porque na primeira ele ganhou, não pode ter perdido. E na segunda ele perdeu. Se ele tinha... assim, ele ganhou 9 na primeira, ou seja, na primeira ele não pode mais perder. Então... mas como é que ele perdeu 16? Ah! mas eu não sei então. Por isso eu fiz assim.** Durante a resolução por meio de imagem gráfica: **Eu fiz aqui como eu fiz aqui a conta 25 menos 16, que restam os 9.** MAR desenhou 25 figurinhas e circulou 16. Em seguida, começou a ler o problema em voz alta. **João jogou 2 partidas de bafo. Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. As 9 vão estar aqui no meio.** MAR apontou para as figurinhas que havia desenhado e continuou: **Por enquanto ele tinha 16, vamos supor, aí ele ganhou mais 9, então ao total vai ficar com 25 e aqui tem 25 figuras, ou seja, então está aqui no meio. Aí depois, ele perdeu 16, Porque se ele perdeu 16, ele só vai ficar com 9 e estas 9 foram aquelas que ele ganhou na primeira partida.** Ao

> solucionar o problema se utilizando das figurinhas MAR faz um monte com 25 figuras e argumenta: **Vamos supor, ele tem 25 figurinhas. E foi para jogar. Na primeira ele ganhou 9, com quantas ele vai ficar?** MAR contou nos dedos e em voz alta. **34 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16. Então vamos supor que aquelas 9 que ele ganhou estavam lá no meio daquelas 16 figurinhas. Agora, te explicando como eu fiz na conta, aqui ele tinha 25 e só perdeu as 16.** MAR tirou 16 figurinhas do monte de 25 figuras e na segunda resolução escrita MAR manteve sua mesma resposta inicial $25 - 16 = 9$.

Vemos, portanto, pelo protocolo de EDU e MAR o quanto eles se esforçam para entender as transformações ocorridas no problema, para superar as contradições impostas por estas situações, já que se trata de um problema que envolve apenas transformações. Vale salientar que estes aspectos só foram observados nos sujeitos de nível IIA e IIB. Isto é, a releitura do problema, o pensar em voz alta, as argumentações, apenas tornaram-se observáveis nas crianças pertencentes aos níveis IIA e IIB. Alguns sujeitos de nível IB, mesmo modificando suas resoluções escritas 2, não deixaram em evidência estes aspectos, o único fato que pôde ser notado com estes sujeitos foi a releitura dos problemas no momento em que eram solicitados a resolvê-los por meio de imagens gráficas e organização das ações práticas.

Resolução escrita 2 (R_2) e nível III

No gráfico 6.13 (p. 128) temos as resoluções 1 e 2 efetuadas por DIE (13;8/5ª).

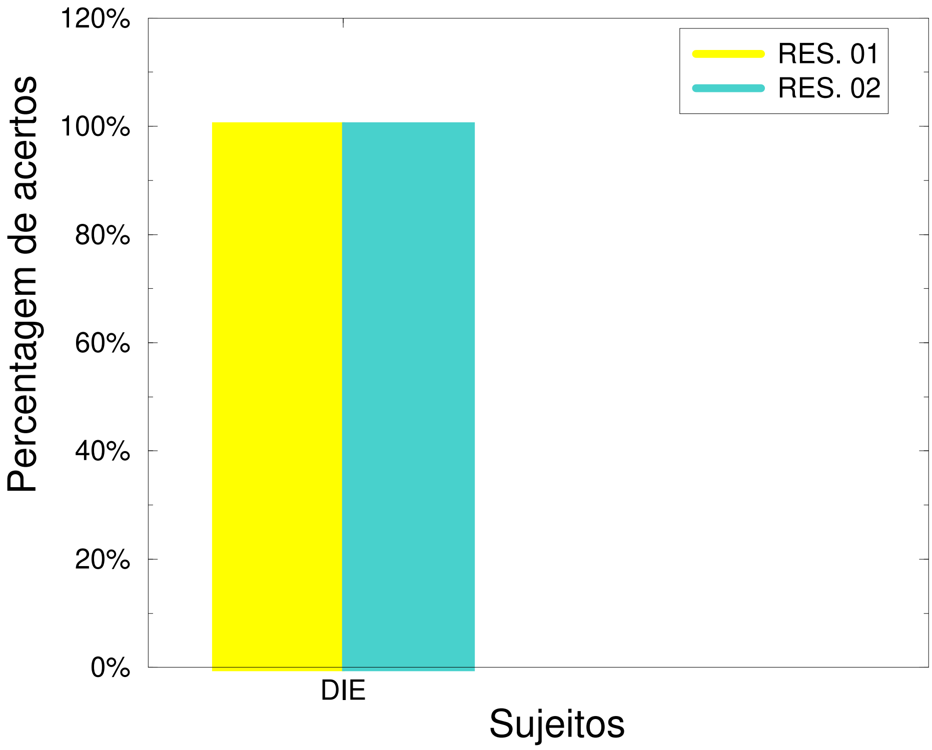


Figura 6.13: Nível III: Modificações das resoluções escritas

No caso de DIE (13;8/5ª), temos apenas a ocorrência de êxitos, e, neste sentido, não verificamos nenhum tipo de variação da resolução 1 para a resolução escrita 2.

Como forma de sintetizar os resultados apresentados até aqui, foi organizada a tabela 6.5 (p. 129) a qual informa o percentual de acertos alcançados pelos sujeitos tanto na resolução escrita 1 (R_1) quanto na resolução escrita 2 (R_2).

Percentual de Acertos na Resolução Escrita 1 e 2				
Níveis	Série	Sujeito	Resolução 1	Resolução 2
IB	3ª	AUG(9;7)	50%	50%
		BRU(9;6)	16.6%	50%
	4ª	FEL(10;7)	50%	83.3%
		CEN(10;4)	33.3%	66.6%
IIA	3ª	FER(9;6)	83.3%	83%
		LIL(9;2)	83.3%	100%
	4ª	ALI(10;8)	83.3%	100%
		LIV(10;6)	83.3%	100%
	5ª	SHI(11;10)	83.3%	83.3%
		JUL(11;11)	83.3%	100%
IIB	3ª	MAR(9;7)	83.3%	83.3%
		AND(10;1)	100%	100%
		MAI(10;1)	100%	100%
	4ª	GUI(11;4)	100%	100%
		LUC(10;1)	100%	100%
		VAN(10;2)	100%	100%
	5ª	HEN(11;9)	100%	100%
		CAM(12;1)	100%	100%
		EDU(13;4)	83.3%	83.3%
		LAI(13;3)	100%	100%
		GRA(12;6)	100%	100%
III	5ª	DIE(13;8)	100%	100%

Tabela 6.5: Percentual de Acertos na Resolução Escrita 1 e 2

A partir dos percentuais demonstrados na tabela 6.5 (p. 129), verificamos que os maiores índices de acertos prevalecem nos níveis mais evoluídos da prova: problemas de igualação e construção de diferenças, portanto, o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração parece se relacionar as possibilidades de êxito dos sujeitos em suas resoluções escritas. Além deste fato, também podemos constatar que alguns sujeitos (N=7), 3 de nível IB e 4 de nível IIA, modificaram suas respostas escritas no momento em que tiveram a oportunidade de resolver os problemas pela segunda vez, isto após efetuar suas resoluções por meio de imagens gráficas e organização das ações práticas. Quanto a este fato reiteramos que as diferentes situações propostas durante a coleta de dados podem estar auxiliando na compreensão dos sujeitos quando das coordenações dos dados existentes no enunciado dos problemas aditivos propostos.

Resolução escrita e os graus de complexidade dos problemas aditivos

A fim de fundamentar ainda mais nossa análise rumo às relações que podem vir a existir entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos, faremos uma explanação das categorias de problemas que apresentaram uma maior ocorrência de erros por parte das resoluções escritas dos sujeitos. Desta forma, no intuito de verificar quais os problemas que mais impuseram dificuldade aos sujeitos desta pesquisa foi elaborado um gráfico 6.14 (p. 131) o qual demonstra a ocorrência de erros cometidos por eles, em cada categoria de problema aditivo, tanto na resolução escrita 1 quanto 2. Vale salientar que este índice de erros foi calculado a partir da somatória das respostas incorretas apresentadas por todos os sujeitos, independentemente dos níveis alcançados por eles na prova de construção dialética.

Segundo Morgado (1993), os problemas aditivos mais difíceis são aqueles que englobam transformações (segunda, quarta e quinta categorias de problemas aditivos) ao mesmo tempo que aqueles que envolvem relações estáticas e a união de dois conjuntos são mais acessíveis aos sujeitos (primeira, terceira e sexta categorias de problemas aditivos).

A partir do gráfico 6.14 (p.131) podemos verificar que nas resoluções 1 (R_1), a terceira categoria - uma relação une duas medidas - é uma das quais comporta

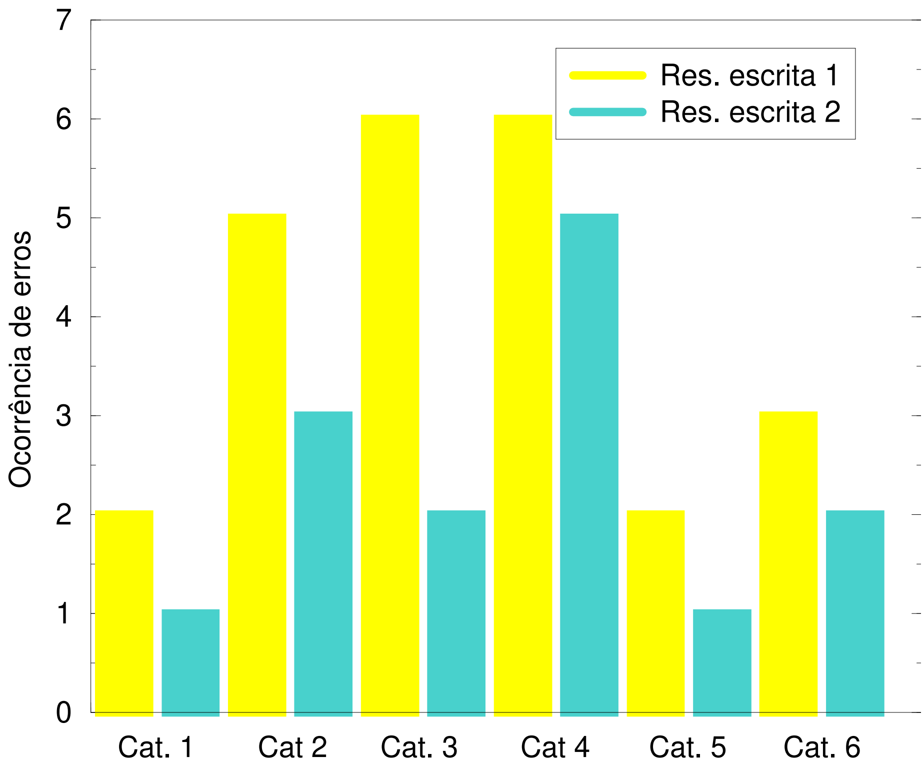


Figura 6.14: Ocorrência de erros nas seis categorias de problemas aditivos

uma maior ocorrência de erros.

O problema de terceira categoria - **Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?** - não diz respeito às transformações, contudo, ele apresenta uma certa dificuldade por conter, em seu enunciado, uma palavra-chave que sugere uma operação. Quando se anuncia que **Pedro possui 7 carrinhos a mais**, a sugestão recai sobre uma operação de adição, e, na verdade, o problema requer uma subtração em sua solução. Neste sentido, os sujeitos podem estar sendo guiados por uma palavra-chave, e esta, por sua vez, faz com que as crianças deixem de lado a estrutura global do problema.

Além deste tipo de dificuldade, ainda nos deparamos com um outro fator muito importante que também parece se relacionar à possibilidade de êxito dos sujeitos, que é o nível por eles alcançados na prova de construção dialética. Quando da aplicação daquela prova, havia uma situação em que os sujeitos eram solicitados a deixar uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra e isso era colocado para eles da mesma forma que o problema de terceira categoria exige.

Naquele contexto os sujeitos de nível IB só obtiveram sucesso procedendo por adições/subtrações simples, procedimento que ainda não requer que se considere estas duas operações contrárias ao mesmo tempo. Já os sujeitos de nível IIA além de obterem êxito procedendo por adições/subtrações simples, também o fizeram se utilizando das adições/subtrações relativas ou por transferências, porém, isto só foi possível após constatação. O que estes sujeitos ainda não compreendem, do ponto de vista da construção dialética entre adições e subtrações, é que uma operação de adição é, ao mesmo tempo, uma subtração. Esta falta de compreensão parece estar influenciando nas resoluções dos sujeitos, até porque apenas os sujeitos de nível IB e IIA erraram nesta terceira categoria de problemas.

Neste sentido, embora Morgado (1993) não tenha colocado esta categoria de problemas como sendo uma das mais difíceis, vemos, por outro lado, que para os nossos sujeitos, de nível IB e IIA, ela se impõem com uma certa dificuldade e isto pode ser por dois motivos: conter em seu enunciado uma palavra-chave, que sugere uma operação e exigir que os sujeitos compreendam as implicações entre as ações de adicionar e subtrair. Vale relembrar que os sujeitos pertencentes ao nível IIB e ao nível III acertaram o problema destinado a esta terceira categoria.

Com relação a quarta categoria - duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação - vemos que a ocorrência de erro é similar à terceira. O problema proposto nesta categoria foi: **João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?**

Este problema trata de transformação $\rightarrow$ transformação $\rightarrow$ transformação e estas, por si só, já engendram uma certa dificuldade. As transformações aqui aparecem em termos de ganhar, perder, todas ao mesmo tempo. Da forma como foi proposto o problema, é muito difícil que os sujeitos tenham se guiado apenas por palavras-chaves pois o enunciado afirma que **João perdeu figurinhas**, mas ao mesmo tempo, que também as ganhou. Neste sentido, acreditamos que a dificuldade que se impõe neste caso é a de precisar pensar no enunciado do problema, nos termos de suas transformações simultâneas. Na verdade, o sujeito precisa coordená-las para só então passar para a resolução escrita do mesmo. Talvez seja por isso que os erros, nesta categoria, ocorram desde os níveis IB, passando por IIA e finalmente alguns insucessos em IIB.

Em seguida, aparece a segunda categoria - uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma medida - em terceiro lugar na escala de ocorrência de erros. O problema apresentado aos sujeitos foi: **Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?**

Neste caso, também temos a intervenção de transformações, ou seja, aqui faz-se necessário pensar no problema em termos de seus estados e transformações e não apenas em transformações como era o caso da quarta categoria. Na verdade, a exigência é que o sujeito coordene simultaneamente as partes e o todo, deixando de considerar as partes sucessivamente. Vemos que os erros nesta categoria centram-se nos sujeitos de nível IB, nível em que há um início de interação entre adições e subtrações, mas ainda estamos falando neste nível de adições e subtrações simples e não ainda relativas. Isto pode explicar a dificuldade destes sujeitos ao resolver os problemas desta categoria. Os problemas que engendram transformações parecem ser mais difíceis, pois eles exigem que o sujeito coordene simultaneamente os estados e as transformações e não os trate como dados sucessivos.

Ainda no gráfico de ocorrência de erros, temos a sexta categoria - dois estados relativos se compõem para dar lugar a um estado relativo - o problema referente a esta categoria foi o seguinte: **Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?**

Este problema não foi de grande dificuldade para os sujeitos visto que o índice de erros é baixo, apenas 3. Destes 3 erros temos 2 ocorrendo no nível IB e apenas 1 aparece no nível IIA. Neste caso, estamos tratando de um problema que compõe duas relações para dar lugar a uma outra e, assim, faz-se necessário que os sujeitos pensem nestas relações de forma simultânea. Novamente os sujeitos precisam pensar sobre as partes e o todo de maneira a coordená-los.

E por fim temos a primeira e a quinta categoria, respectivamente - compõem-se duas medidas para dar lugar a uma medida - uma transformação opera sobre um estado relativo para dar lugar a um estado relativo. Os problemas referentes a estas categorias foram: $1^{\underline{a}}$) **Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos. Quantos brinquedinhos Marina possui para brincar?** e $5^{\underline{a}}$) **Paulo deve 17 bolinhas de**

gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

Quanto a estas categorias de problemas, nas quais a margem de erros foi baixa, 2 para a primeira e 2 para a quinta, podemos verificar alguns aspectos interessantes.

A primeira categoria, além de não comportar transformações, trabalha, no enunciado proposto, apenas com estados sucessivos, ou seja, é possível resolvê-lo pensando primeiramente nas partes e depois no todo. Tratam-se, portanto, de atos sucessivos e não simultâneos. Neste sentido, parece que desde o nível IB já sejam possíveis as resoluções corretas para este problema uma vez que este nível comporta a realização de adições e subtrações simples, absolutas.

Já na quinta categoria temos a intervenção de transformações. Neste caso, é alarmante o fato desta ter tido um número tão pequeno de erros. No entanto, temos que verificar que da forma como foi elaborado o enunciado do problema, a transformação opera em termos de "dever" e isto pode estar sugerindo uma operação de subtração.

Vemos assim que as dificuldades quanto aos problemas também dizem respeito à forma como são elaborados seus enunciados. Eles podem até tratar de transformações, de relações que se compõem, de estados estáticos, contudo, a maneira como tudo isso é organizado no enunciado é muito importante uma vez que este aspecto pode engendrar maiores ou menores graus de dificuldade.

Quanto às resoluções escritas 2 (R_2) podemos constatar pelo gráfico que a ocorrência de erros, para todas as categorias de problemas, modifica-se com relação às resoluções 1 (R_1). Sendo assim, todas as seis categorias de problemas aditivos diminuíram seu número de erros após a resolução por meio de imagens gráficas e organização das ações práticas. Tanto que podemos constatar, mais uma vez, a importância de trabalhar estes problemas de diferentes maneiras, privilegiando diversas situações e não só o cálculo numérico escrito.

Neste sentido, devemos salientar que até aqui estamos tratando os problemas apenas em termos de êxitos e insucessos, sem considerar os caminhos percorridos pelo sujeito para alcançar a resposta, seja ela correta ou incorreta. Desta forma, se consideramos que existe um processo dialético construtivo, faz-se, então, necessário que se investigue as relações deste com outras maneiras de resolução, como é o caso das imagens gráficas e a organização das ações práticas.

6.2.2 Resolução por meio de imagens gráficas e níveis de construção dialética

A resolução via algoritmo, por si só, não nos informa de maneira precisa se o sujeito, de fato, compreendeu o que fez quando da ocasião da resolução escrita.

A fim de melhor esclarecer esta questão, propomos analisar outras formas de resolução de problemas, por permitir ao sujeito novas possibilidades de explicar o que fez. Isto porque seus procedimentos e suas explicações podem dar indícios mais precisos a respeito de sua compreensão.

Designamos resolução por meio de imagens gráficas por termos solicitado aos sujeitos a resolução do problema sem fazer uso do cálculo numérico escrito. Disponibilizamos, para tal, lápis colorido e papel.

Os resultados obtidos puderam ser destacados em duas categorias de resolução por meio de imagens gráficas:

- imagem gráfica simbólica: quando o sujeito desenha de forma figurativa a ação dos personagens contidos nos enunciados dos problemas;
- imagem gráfica esquemática: quando os personagens deixam de existir dando lugar a esquemas gráficos que representam quantidades.

Todos os sujeitos da pesquisa (N=22) se utilizaram de imagens gráficas para explicar, sem os números, uma outra maneira de efetuar o mesmo problema já solucionado de forma escrita. Durante aquelas resoluções, apresentadas no item anterior deste trabalho, foi possível constatar que as respostas corretas e incorretas dos sujeitos variam conforme seus níveis de evolução na prova de igualação e construção de diferenças e também segundo o grau de complexidade que engendram as seis diferentes categorias de problemas aditivos. Entretanto, quando da resolução por meio de imagens gráficas, foi possível verificar diferenças qualitativas de acordo com o nível de evolução dos sujeitos na prova destinada a construção dialética das operações de adição e subtração, mas não foram constatadas variações no que diz respeito às seis categorias de problemas, ou seja, as imagens gráficas dos sujeitos foram sempre de uma mesma natureza, independentemente das dificuldades impostas por estas diferentes categorias.

Procederemos a seguir na análise dos diferentes níveis de construção dialética e as formas de resolução de problemas por meio de imagens gráficas.

Resolução por meio de imagens gráficas e nível IB

Os sujeitos de nível IB (N=4) apresentaram resoluções por meio de imagens gráficas esquemáticas e simbólicas.

Vejamos alguns exemplos:

Para o problema de primeira categoria - **Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?** - CEN (10;4/4ª), como podemos ver na figura 6.15 (p. 136), elabora uma imagem gráfica esquemática para resolvê-lo.

Figura 6.15: Primeira categoria: Imagem gráfica efetuada por CEN (10;4/4ª)

O caminho percorrido por CEN (10;4/4ª) consistiu em colocar um risquinho colorido representando cada número da operação realizada no problema. E assim CEN desenvolveu sua explicação:

> **Eu coloquei um risquinho para o 1 e depois um para o 3, o 8 embaixo, o risco da conta e o resultado** Teria outro jeito de explicar este problema sem fazer uso dos números? **Teria.** Como? **Com outras cores de lápis.**

Vemos, portanto, que CEN faz uma cópia figurativa do algoritmo e analisa esta como sendo a única possibilidade de realizar o problema, a não ser que se mude as cores dos lápis. CEN (10;4/4ª) procedeu desta forma em todas as suas imagens gráficas, e suas explicações não ultrapassaram a descrição dos desenhos esquemáticos utilizados para representar os números da operação efetuada na resolução escrita do problema. Não foi em nenhum momento, explicitado pela criança, os respectivos valores quantitativos, permanecendo suas explicações nos aspectos observáveis do desenho. Sempre "um risquinho" para representar diferentes valores numéricos. O outro possível, ou o outro jeito de representar a resolução do problema, permanece de forma analógica, tal como os possíveis analógicos - grandes semelhanças e pequenas diferenças. O outro jeito admitido por CEN se refere apenas a variação das cores dos lápis.

Este fato não foi diferente com os demais sujeitos do nível IB. Por exemplo, BRU (9;6/3ª) ao desenvolver sua imagem gráfica para o problema de terceira categoria - **Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João possui para brincar?** - também procede à mesma maneira, como podemos ver na figura 6.16 (p. 137).

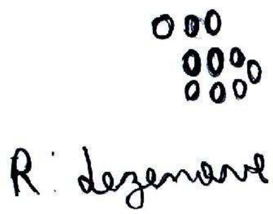


Figura 6.16: Terceira categoria: Imagem gráfica efetuada por BRU (9;6/3ª)

O que você fez, BRU? **Eu fiz 3 bolinhas. 1 bolinha representa o 1 e a outra o 2.** E depois? **Eu fiz 7 bolinhas.** Por quê, BRU? **Para formar o 7 embaixo.** E a resposta? **Não tem como colocar.** De jeito algum? **Não, só escrevendo no papel.** E teria outro jeito de fazer este problema sem usar os números, você já mostrou um jeito, tem outro? **Tem.** Como? **Fazendo risquinho, quadradinho, assim.**

Como podemos observar o procedimento utilizado por BRU (9;6/3ª) não diferiu daquele utilizado anteriormente por CEN (10;4/4ª). BRU também faz uma imagem gráfica esquemática, respaldada na resolução escrita: na verdade, as bolinhas desenhadas por BRU representam o arranjo espacial da operação por ele realizada. O que varia na sua representação é que ele não se contenta em desenhar apenas 1 bolinha para cada número da conta, assim como CEN; ao contrário, BRU representa o 12 com 1 bolinha mais 2, e o 7 com 7 bolinhas. Quanto a resposta BRU só vê a possibilidade de escrevê-la, e este tipo de solução escrita persistiu em todos os seus desenhos.

Desta forma, verificamos que as imagens gráficas dos sujeitos de nível IB concernem a cópias figurativas dos algoritmos, sem variações de possibilidades, as únicas possíveis são aquelas que dizem respeito às formas dos objetos desenhados pelos sujeitos, de bolinha para quadradinho, de risquinho colorido para outros de novas cores. Vemos, portanto que eles se centram nos aspectos figurativos de suas ações e não ainda nos operativos, valendo-se, ainda, de possíveis analógicos.

Lopes (1997), na realização de seu trabalho de mestrado, coletou dados semelhantes a estes. No contexto daquela pesquisa o objetivo era estabelecer as relações entre o mecanismo de abstração reflexiva, fonte do conhecimento lógico-matemático, e os procedimentos utilizados pelos sujeitos quando de resoluções de operações de adição e subtração. A proposta era que os sujeitos explicassem, por meio da ação material (com uso de fichas), seus procedimentos ao solucionar as referidas operações. Os sujeitos daquele trabalho, que também haviam alcançado o nível IB na prova de abstração reflexiva: a inversão das operações aritméticas, realizaram representações similares a estas apresentadas pelos sujeitos de nível IB da prova de igualação e construção de diferenças. Isso pode ser verificado com um dos sujeitos daquele trabalho HER (8;0/2ª) na figura 6.17 (p. 139).

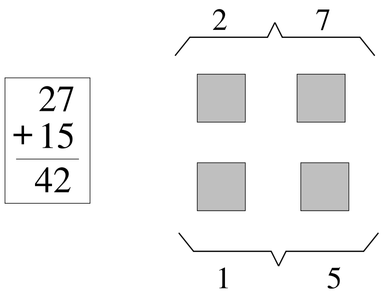


Figura 6.17: Representação efetuada por HER (8;0/2ª) (Lopes, 1997)

Vemos que HER (8;0/2ª) representa a operação de adição da mesma maneira como os sujeitos de nível IB da presente pesquisa têm representado, uma cópia figurativa do algoritmo.

Isto nos faz analisar o quanto o mecanismo de abstração reflexiva, bem como o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração são essenciais na construção do conhecimento por parte do sujeito. A abstração reflexiva enquanto um mecanismo que vem assegurar as projeções, as reconstruções, que constituem o progresso das estruturas lógico-matemáticas e, por outro lado, mas não menos importante, o processo dialético construtivo que intervirá no sentido de conduzir a sínteses produtoras de novidades e avanços. Assim, é difícil não admitir as relações existentes entre este processo e as resoluções dos sujeitos nos problemas aditivos aqui propostos, seja qual for a situação tratada (via algoritmo, imagem gráfica, organização das ações práticas).

Neste mesmo nível, identificamos uma outra categoria de representação, aquela que denominamos de imagem gráfica simbólica. Esta foi apresentada por um dos nossos sujeitos, como podemos constatar em AUG (9;7/3ª), figura 6.18 (p. 140).

Sexta categoria: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

> O que você fez AUG? **Eu fiz a Vanessa dando o papel de carta para Mariana.** Quantos papéis de carta uma teve que devolver para outra? **Uma devolveu para a outra, 5.** Quem devolveu 5? **As duas,**

Figura 6.18: Sexta categoria: Imagem gráfica efetuada por AUG (9;7/3ª)

> **porque as duas estavam devendo uma para outra.** Você acha que teria um outro jeito de explicar este problema sem fazer a conta? **Eu acho que não, é só este jeito.**

AUG (9;7/3ª) não demonstra, como os outros sujeitos deste nível IB, uma cópia figurativa do algoritmo, mas sua representação simbólica descreve, por meio do desenho das "personagens" do problema, o que aconteceu no enunciado do mesmo.

AUG (9;7/3ª), em todos os problemas solicitados, só apresentou esta imagem gráfica simbólica, não admitindo que pudesse haver outra forma de explicá-los. A figura 6.19 (p. 141) e a figura 6.20 (p. 141) apresentam outros desenhos efetuados por AUG para a quarta e quinta categorias, respectivamente.

Quarta categoria: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

> O que você fez, AUG? **Eu fiz os dois jogando bafo.** Quem estava jogando bafo? **O João e o outro menino.** E o que aconteceu enquanto João jogava bafo? **Na primeira partida ele ganhou 9 (...) daí depois o outro menino ganhou dele.**

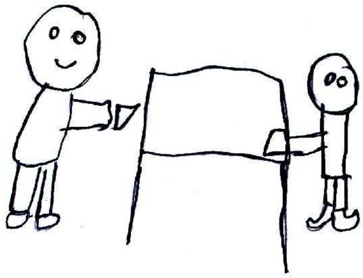


Figura 6.19: Quarta categoria: Imagem gráfica efetuada por AUG (9;7/3ª)

Quinta categoria: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

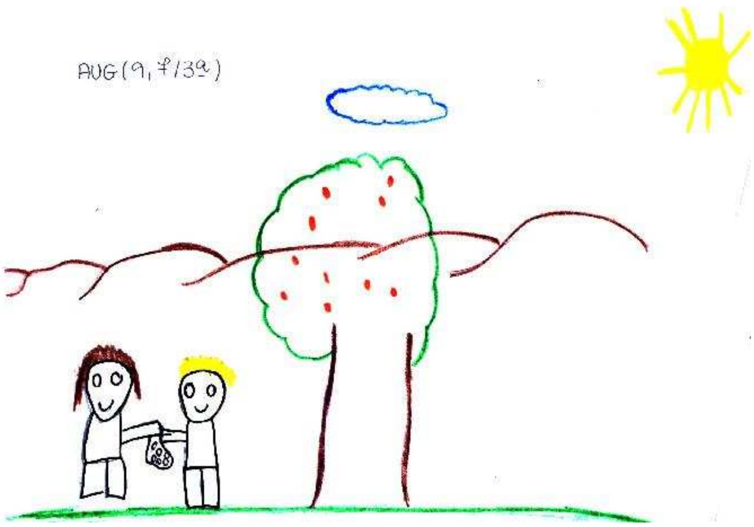


Figura 6.20: Quinta categoria: Imagem gráfica efetuada por AUG (9;7/3ª)

> O que você fez? **Eu desenhei o Paulinho dando as bolinhas para o Carlos.** E quantas bolinhas ele está dando para o Carlos? **9, e ele devia 17.** Teria outro jeito de explicar este problema? **Humhum.** AUG começou a complementar seu desenho. O que você fez? **Eu fiz as bolinhas que estavam na penteadeira dele, em cima, e ele pegando para dar para o amigo dele.** AUG acrescentou o pacotinho de bolinhas em seu desenho.

Podemos ver que AUG (9;7/3ª) representa a ação em si mesma enquanto imagem gráfica, prevalecendo estritamente o aspecto figurativo das operações solicitadas, por isso estáticas, sem ensejar transformações. AUG centra-se em um "fato" específico ocorrido no enunciado do problema, portanto, suas imagens gráficas remontam "atos" sucessivos e não simultâneos. Vale ressaltar que o nível IB da dialética é marcado por um início de interação entre adições e subtrações, e muitas tarefas, desenvolvidas naquela prova, só são bem sucedidas por meio da realização de correpondências figurais, portanto, espaciais.

Resolução por meio de imagens gráficas e nível IIA

Quanto ao nível IIA, podemos verificar alguns avanços com relação a estas representações iniciais. Neste nível, as imagens gráficas esquemáticas (bolas, riscos, etc.), passam a corresponder aos valores numéricos reais apresentados nos problemas. Como é o caso de ALI (10;8/4ª), figura 6.21 (p. 142).

Segunda categoria: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

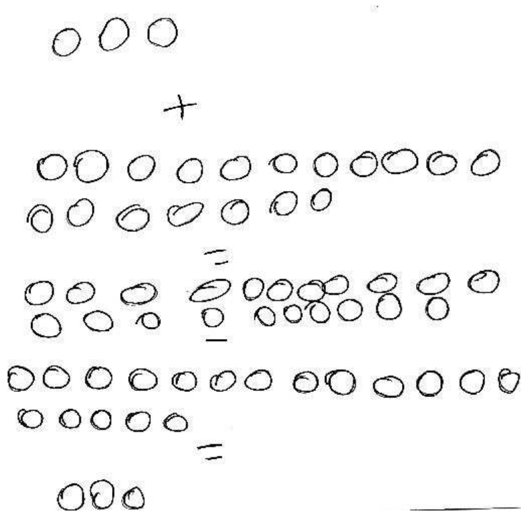


Figura 6.21: Segunda categoria: Imagem gráfica efetuada por ALI (10;8/4ª)

> **Eu fiz assim, 3 mais 18 que dá o resultado 21. Daí eu peguei o 21 e diminui 18, daí o resultado deu 3.** E por que você fez assim? **Porque sim...é o resultado da minha cabeça.** Mas por quê?

Porque se aqui 18 mais 3 dá 21, daí 21 menos 3...é a prova real. E teria outro jeito de fazer este problema? **Hummmm, se eu desenhasse outras coisas, outros objetos.**

Podemos observar que ALI efetua seu problema a partir dos valores numéricos trabalhados no enunciado do problema, sua representação ainda traz os sinais convencionais tão utilizados no contexto escolar. O interessante é que ALI não se prende a uma distribuição espacial dos dígitos da operação, assim como era feito no nível anterior, além disso podemos ver que o sujeito trabalha com uma adição e uma subtração em uma mesma representação, assim justifica: **é a prova real**.

Salientamos que ALI, após as sessões, havia reclamado para sua professora dizendo que os problemas eram estranhos pois era possível fazer conta de mais e de menos, no mesmo problema. Talvez ALI esteja começando a compreender as implicações entre as ações de adicionar e subtrair.

Todos os sujeitos deste nível realizaram imagens gráficas esquemáticas parecidas com esta efetuada por ALI (10;8/4ª), vejamos outro exemplo na figura 6.22 (p. 143) com o sujeito JUL (11;11/5ª).

Quinta categoria: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

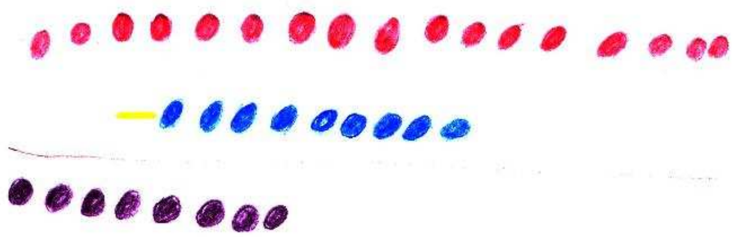


Figura 6.22: Quinta categoria: Imagem gráfica efetuada por JUL (11;11/5ª)

O que você fez, JUL? **Eu desenhei 17 bolinhas. Aí eu fiz o traço de menos. Daí ele tem que devolver 9 bolinhas, aí desenhei as 9 bolinhas que ele tem que devolver e fiz o traço de menos. Aí...**

quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos? Daí ele deve 8.

O sujeito JUL (11;11/5ª) procede de forma a colocar os valores numéricos existentes no problema e o resultado. Também sente a necessidade, assim como o sujeito anterior, de desenhar o sinal de menos e o traço que separa o resultado da operação. Isto pode ser verificado em outro exemplo bastante interessante, apresentado na figura 6.23 (p. 144) pelo sujeito ALI (10;8/4ª).

Sexta categoria: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

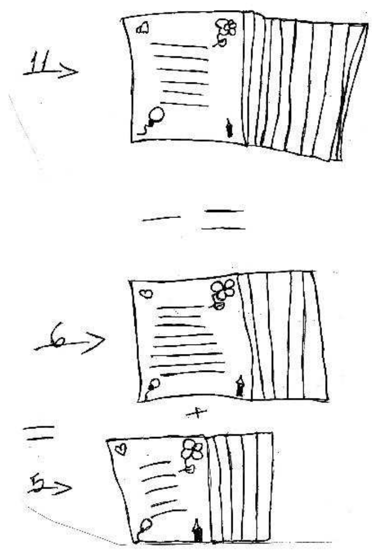


Figura 6.23: Sexta categoria: Imagem gráfica efetuada por ALI (10;8/4ª)

Eu desenhei 11 papéis de carta. Agora eu estou fazendo 11 menos 6 que vai dar o resultado. Após terminar o desenho: **Eu fiz 11 papéis de carta e coloquei um sinal de menos para dizer que eu diminui a diferença, e coloquei 6. Daí eu coloquei um sinal de igual que deu o resultado 5.** Teria outro jeito? **Sim, só que iria dar o resultado de 11.** Como você faria? **Eu colocaria 6 mais 5 que daria 11. Então tem como deixar o resultado como 5 e**

como 11. ALI fez outros sinais no desenho. Você fez 11-6... **Que daria 5, depois ao contrário, 5+6 que é igual a 11.**

A representação esquemática de ALI (10;8/4ª), não difere das que apresentamos anteriormente. Contudo, suas explicações são interessantes pois demonstram como o sujeito já começa a explicitar a adição e a subtração enquanto operações contrárias, pois ALI explica que fez 11-6 e **depois o contrário, 5+6 que é igual a 11**. Os sinais de mais e de menos também são desenhados por ALI.

Desta forma, observamos que o nível IIA, marcado pelo início das adições/subtrações relativas, aquelas que implicam em adições e subtrações ao mesmo tempo, parece se relacionar à forma como estes sujeitos organizam e explicam suas imagens gráficas, pois estas ultrapassam a representação da ação propriamente dita impondo certos avanços, ainda figurais, porém refletem já um início de compreensão sobre as operações de adição e subtração.

Resolução por meio de imagens gráficas e níveis IIB e III

Os níveis IIB e III são idênticos do ponto de vista de suas imagens gráficas, prevalecendo as do tipo esquemáticas. Elas diferem qualitativamente das apresentadas até aqui. Isto porque o todo é considerado desde o início e não acrescentado no decorrer da ação enquanto resultado. Este fato reflete, pois, uma elaboração antecipadora dos dados do problema, própria de abstrações reflexivas, que permitem reorganizações prévias, no tocante às retroações e antecipações. Neste nível, parte e todo se relacionam simultaneamente e não sucessivamente, como nos níveis anteriores.

Vejamos um exemplo de nível IIB na figura 6.24 (p. 146) desenvolvida por MAR (9;7/3ª).

Terceira categoria: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?

O que você fez, MAR? **Desenhei 12 carrinhos que é os que o Pedro tem. Como diz aqui. João tem 7 a menos. Aí eu vou explicar**

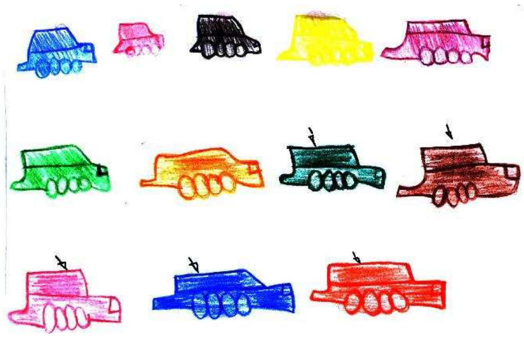


Figura 6.24: Terceira categoria: Imagem gráfica efetuada por MAR (9;7/3ª)

com estes 12. Como? **Estes aqui é o que Pedro tem, e ele possui 7 carrinhos a mais que João, então, vamos supor, ele tem mais 7, então, João tem menos 7. João, então, possui só 5 carrinhos para brincar porque, se assim, João tivesse 7 a mais aconteceria de mais, uma conta de mais para saber quantos tem. Então aqui Pedro tem os 12 carrinhos, vamos supor que tenha 7 a menos, que vai dar o resultado de 5. Então aqui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. E os 5 carrinhos do João então, aqui sobrou 7 carrinhos, os que possui a mais. Então se você for fazer a conta de 5 mais 7, vai dar o resultado do que o Pedro tem.** Teria outro jeito de fazer este problema? **Teria, fazendo com os brinquedos.**

Vemos pela representação de MAR que ele desenha um todo de 12 carrinhos e deste todo é retirado, ou melhor, é destacado com flechinhas, 5 carrinhos. Portanto, MAR parece considerar o todo e suas partes, ao contrário, do que vimos no nível anterior em que os sujeitos representavam o todo e mais as partes, como se estas não pertencessem a ele. Além disso, pelas explicações de MAR fica evidente a interação entre as adições e subtrações, pois a todo momento MAR se refere aos carrinhos a mais, ao mesmo tempo, que fala dos carrinhos a menos.

Outro exemplo interessante deste nível IIB é o de VAN (10;2/4ª) e podemos observá-lo na figura 6.25 (p. 147).

Quinta categoria: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

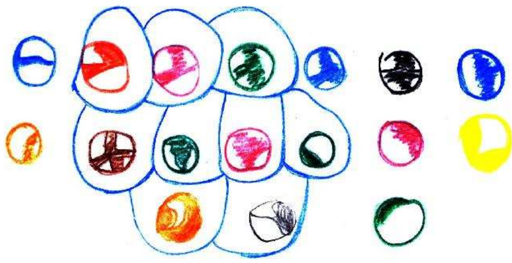


Figura 6.25: Quinta categoria: Imagem gráfica efetuada por VAN (10;2/4ª)

O que você faria? **Eu ia desenhar 17 bolinhas.** E depois? **Eu ia desenhar 9...não eu não ia desenhar 9. Eu ia circular 9.** VAN desenhou 17 bolinhas. O que você vai fazer agora? **Eu vou é circular 9, que é as que ele está devolvendo. Restou 8 que o Paulo ainda deve.** E daria para fazer este problema de outro jeito? **Eu posso desenhar outras coisas ou fazer com os brinquedos.**

Este exemplo de VAN (10;2/4ª) se assemelha ao anterior. O sujeito também desenha um todo e retira parte deste todo. VAN explicita isso muito bem no momento em que diz: **eu ia desenhar 9...não eu não ia desenhar 9. Eu ia circular 9**. O mesmo pode ser verificado com DIE (13;8/5ª), sujeito de nível III (figura 6.26, p. 147).

Primeira categoria: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

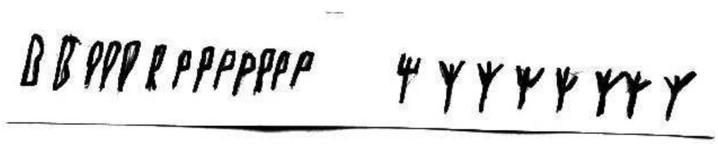


Figura 6.26: Primeira categoria: Imagem gráfica efetuada por DIE (13;8/5ª)

Me explica o que você fez, DIE? **Eu fiz quantas faquinhas ela tinha para brincar e quantos garfinhos. Fiz 13 faquinhas e 8 garfinhos. Daí tinha que contar quantos ao todo ela tinha para brincar, daí eu contei as facas com os garfos, eu somei.**

DIE (13;8/5ª) realiza sua representação considerando a junção das partes envolvidas, ele desenha um monte com 13 faquinhas e outro com 8 garfinhos, diferentemente dos sujeitos de nível IIA que demonstram, ainda, a necessidade de desenhar 13 facas, 8 garfos e mais 21. Outro exemplo do nível III pode ser encontrado na figura 6.27 (p. 148).

Quarta categoria: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

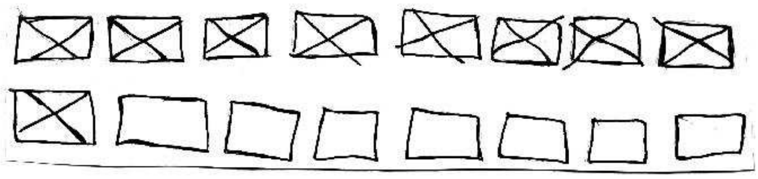


Figura 6.27: Quarta categoria: Imagem gráfica efetuada por DIE (13;8/5ª)

O que você fez, DIE, me explica? **Eu desenhei as 9 figurinhas que ele ganhou. Agora vou desenhar as que ele perdeu.** Pode fazer. DIE desenhou mais 7 figurinhas completando as 16. O que você fez, DIE? **Desenhei as 9 primeiras que ele ganhou e depois as 16 que ele perdeu.** E a resposta do problema? **Agora eu tenho que tirar 9 das 16 que ele perdeu.** Como você faria? **Daí eu faria um X assim.** DIE fez um X em cima de 9 figurinhas que havia desenhado. DIE, teria outro jeito de explicar este problema para mim? **Também poderia desenhar outra coisa. Acho que só desenhando outra coisa.**

Mais uma vez evidencia-se a consideração parte-todo nas explicações de DIE. E isto é característico desde o nível anterior IIB. Portanto, constatamos que estes sujeitos de níveis IIB e III são capazes, de certa forma, de explicar, por meio de suas imagens gráficas, a estrutura dos problemas aditivos, ou seja, eles conseguem explicar, por meio de seus esquemas gráficos, o caminho percorrido até entender o que pede o problema, o que precisa ser considerado a partir de seu enunciado. O que acabamos de ver com as representações efetuadas pelos sujeitos em seus diversos níveis - IB, IIA, IIB e III - foi uma evolução gradativa, ou melhor, aos poucos os sujeitos foram demonstrando esquematismos cada vez mais elaborados.

6.2.3 Resolução por meio de organização das ações práticas e níveis de construção dialética

A resolução por meio de organização das ações práticas consistiu em solicitar ao sujeito, após sua imagem gráfica, que ele resolvesse o problema utilizando-se apenas dos objetos concretos. Estes objetos eram os mesmos utilizados no enunciado dos problemas.

A partir dos dados coletados podemos constatar que a forma como os sujeitos organizam os brinquedos é praticamente idêntica àquela desenvolvida nas representações gráficas, por meio de imagens. A evolução gradativa, isto é, os procedimentos cada vez mais elaborados, também é evidente com os dados referentes à resolução por meio de organização das ações.

Durante as organizações das ações práticas pudemos identificar duas diferentes categorias:

- organização das ações que refletem apenas o aspecto figurativo do algoritmo, observadas no nível IB;
- e organizações das ações práticas que refletem os valores numéricos apresentados nos problemas, observadas a partir do nível IIA, salvaguardando diferenças de grau.

Resolução por meio de organização das ações práticas e nível IB

Vejamos alguns exemplos do nível IB nas figuras 6.28 (P. 150) e 6.29 (P. 150), respectivamente dos sujeitos CEN (10;4/4ª) e BRU (9;6/3ª). Ressaltamos que as figuras foram elaboradas pela experimentadora a fim de retratar como os sujeitos organizaram as ações com o uso dos brinquedos.

Primeira categoria: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

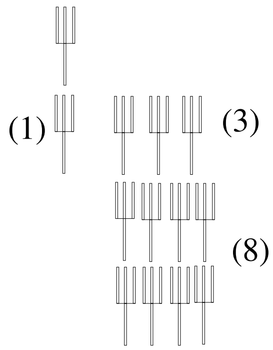


Figura 6.28: Organização das ações práticas (garfinhos): CEN (10;4/4ª)

O que você fez? **Primeiro eu coloquei um garfinho em cima, depois um garfinho embaixo, depois 3 garfinhos do lado, depois mais 4 embaixo e mais 4 para representar o 8.** E a resposta? **Não sei.** Não dá para você usar os brinquedos? **Eu não consigo fazer.** CEN deixou o problema sem resposta. Teria outro jeito? **Não.** Tem algo de parecido? **Não.** Porque não? **Por que não tem nada igual aos garfos e as facas.**

Quinta categoria: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

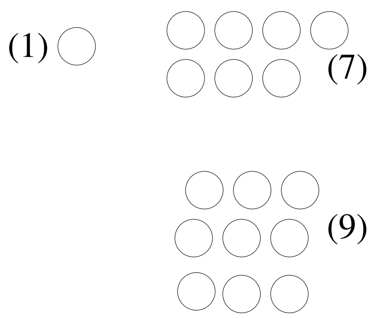


Figura 6.29: Organização das ações práticas (bolinha de gude): BRU (9;6/3ª)

BRU colocou 1 bolinha de gude representando o 10 do 17, e 7 bolinhas representando o 7 do 17. E mais 9 bolinhas embaixo, representando o 9. Explica o que você fez com as bolinhas de gude, BRU? **Eu fiz o 1 e o 7 de bolinhas.** E depois? **Eu fiz o 9.** E a resposta? **Eu vou colocar.** Como você vai colocar? **De bolinhas.** BRU colocou 1 bolinha abaixo das outras para representar o resultado. Teria outro jeito? **Não.** E tem algo de parecido? **Tem. As bolinhas que eu fiz.** BRU se referiu as bolinhas que havia desenhado. E com a conta, tem algo de parecido? **Só o zero da conta.** Como assim? **Porque parece que é uma bolinha.**

Pelas ações efetuadas pelos sujeitos de nível IB podemos verificar que eles continuam fazendo um arranjo espacial correspondente aos dígitos da operação, assim como o faziam com as imagens gráficas. Eles pegam os objetos e distribuem como se estivessem efetuando um algoritmo. Ressaltamos que nenhum sujeito deste nível IB realizou procedimentos diferentes destes apresentados.

Outro fator importante a se considerar é o fato de que estes sujeitos não admitem outras maneiras de desenvolver o problema e as comparações entre as tarefas por eles realizadas, só se centram nos aspectos perceptíveis dos objetos, isto é, quando questionados se havia algo de parecido entre tudo aquilo que tinham desenvolvido, os sujeitos comparavam a bolinha de gude ao zero da conta, ou ainda, afirmavam que não tinha nada igual a garfos e facas, portanto, nada de parecido. Novamente reiteramos que os aspectos figurativos estão prevalecendo, nestes casos, sobre os operativos.

Resolução por meio de organização das ações práticas e nível IIA

Assim como nas imagens gráficas, aqui na resolução por meio de organização das ações práticas, também foi possível identificar diferenças do nível IB para o nível IIA. As figuras 6.30 (p. 152) e 6.31 (p. 152) demonstram essas diferenças, primeiro com FER (9;6/3ª) e em seguida com JUL (11;11/5ª).

Segunda categoria: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

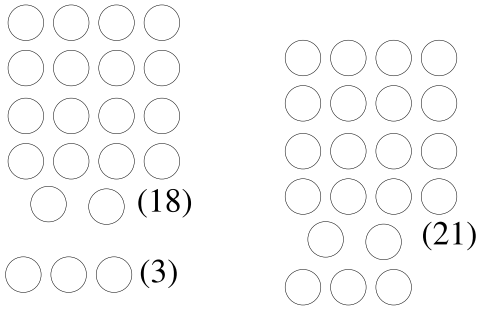


Figura 6.30: Organização das ações práticas (bolinha de gude): FER (9;6/3ª)

O que você fez com as bolinhas, FER? **Eu fiz um montinho com 18, um montinho com 3 e um montinho com 21.** Por quê? **Porque é as 18 bolinhas que ele perdeu mais as 3 que ele tinha ficado. Iguala 21 que ele tinha antes.** E tem algo de parecido entre estas coisas que você fez? **É o mesmo problema só que em forma diferente. Como eu falei antes, aqui a gente tem bolinha, aqui a gente tem a conta e aqui a gente tem o desenho.**

Terceira categoria: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?

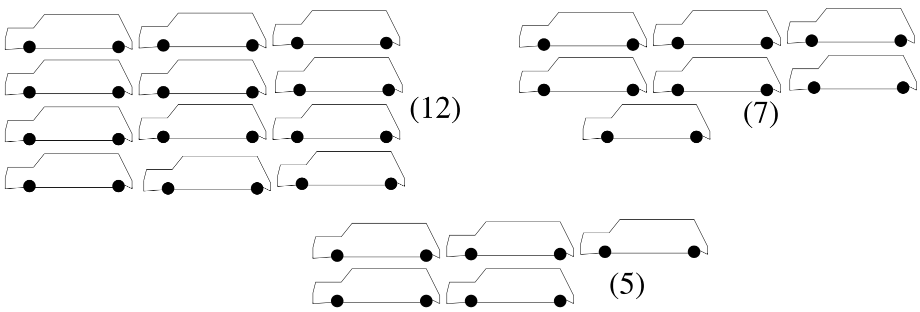


Figura 6.31: Organização das ações práticas (carrinhos): JUL (11;11/5ª)

O que você fez, JUL? **Eu coloquei um do lado do outro, depois eu fiz 12. Depois eu coloquei 7 carrinhos que ele tinha a mais que João. Daí eu diminui. E o resultado que deu é 5.** JUL fez 3 montes com os carrinhos: 12, 7 e 5. **Daí 12 menos 7 igual a 5.** E por que não é 12 mais 7? **Porque aí eu ia aumentar quanto que Pedro tinha. E ele só tinha 12 e eu ia aumentar.** Tem alguma coisa de parecido? **O desenho porque estão todos enfileirados. E a soma que eu somei também, são parecidos a soma.** Qual soma? **A soma não, a diminuição que eu fiz.**

Estes procedimentos avançam com relação aos anteriores por não se pautarem na representação espacial do algoritmo. Contudo, os sujeitos ainda sentem necessidade de organizar os brinquedos em três grupos, um correspondente ao primeiro termo da operação, outro ao segundo e, finalmente, um que equivale a resposta. Em contrapartida, salientamos que as explicações demonstram um melhor entendimento sobre o que fazem durante a resolução do problema. FER, por exemplo, afirma: **eu fiz um montinho com 18, um montinho com 3 e um montinho com 21 (...) porque é as bolinhas que ele perdeu mais as 3 que ele tinha ficado**. Neste sentido, parece que neste nível IIA já há um início de coordenação dos dados do problema em termos de seus estados e transformações, embora a organização dos brinquedos ainda permaneça com três grupos distintos.

Outro fator interessante neste nível IIA é a relação que os sujeitos estabelecem entre as tarefas que executaram. JUL afirma que o que tinha feito até então (imagem gráfica, organização das ações) era parecido com a "diminuição". Provavelmente JUL estava se referindo a operação de subtração. FER vai ainda mais longe em sua explicação afirmando que **é o mesmo problema só que em forma diferente**. Neste sentido, ficam constatados os progressos com relação ao nível anterior IB.

Resolução por meio de organização das ações práticas e níveis IIB e III

Resta-nos analisar sobre os níveis IIB e III. Do ponto de vista da organização das ações com os brinquedos eles diferem do nível IIA. Contudo, entre eles não foi possível detectar diferenças, a forma de conduzir as ações e as explicações são semelhantes nos dois níveis.

Observemos o exemplo de CAM (12;1/5ª), sujeito de nível IIB na figura 6.32 (p. 154).

Primeira categoria: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

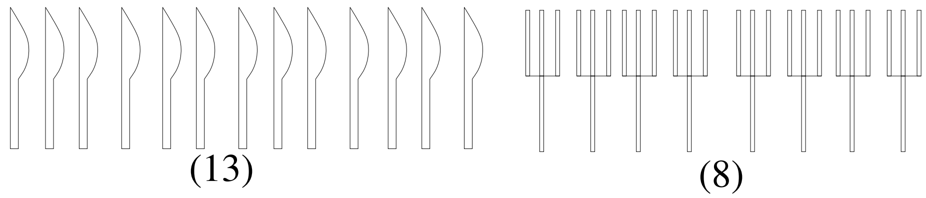


Figura 6.32: Organização das ações práticas (garfinhos e facas): CAM (12;1/5ª)

> **Eu coloquei deste lado as 13 faquinhas e deste os 8 garfinhos e a soma destes dois dá 21, que é o total de brinquedos que ela tem.** E tem algo de parecido entre todas estas coisas que você fez? **Eles são o mesmo problema só que eles estão representados de maneira diferentes.**

Vemos que CAM não precisa organizar três conjuntos de brinquedos, o resultado de sua operação, como ele mesmo afirma é **a soma destes dois** (13 mais 8).

Outro exemplo deste nível IIB é o de MAR (9;7/3ª) que se encontra na figura 6.33 (p. 155).

Segunda categoria: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

> **Então aqui eu tenho um montinho de 21 bolinhas, se ele perdeu 18...ele vai ficar com o resultado de 3 bolinhas. Agora ele só tem este conteúdo porque ele perdeu as 18.** MAR fez um monte de 21 bolinhas e retirou 18, deixando um monte de 3. E tem algo de parecido? **Tem de parecido a mesma conta, tem de parecido os mesmos objetos, tem de parecido que é a mesma partida de bolinha de gude.**

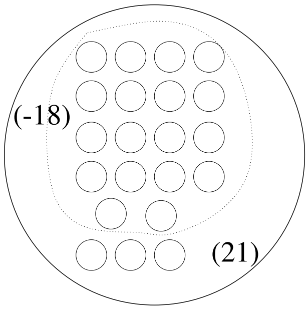


Figura 6.33: Organização das ações práticas (bolinha de gude): MAR (9;7/3ª)

Novamente constatamos a coordenação do todo entre as partes, ou seja, de um todo 21, MAR separa as 18 que Pedro perdeu durante a partida e as 3 que restaram. Embora, MAR tenha desenvolvido uma operação de adição quando de sua resolução escrita, agora, com os brinquedos ele retira uma parte do todo. É neste sentido, que voltamos a afirmar o quanto é importante para o sujeito esta interação entre adições e subtrações, ou melhor, esta implicação entre adicionar e subtrair, assegurada pelo processo dialético construtivo.

Com DIE (13;8/5ª), único sujeito de nível III, isto também não é diferente. Vejamos algumas resoluções de DIE (figura 6.34, p. 155 e 6.35, p. 156):

Quarta categoria: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

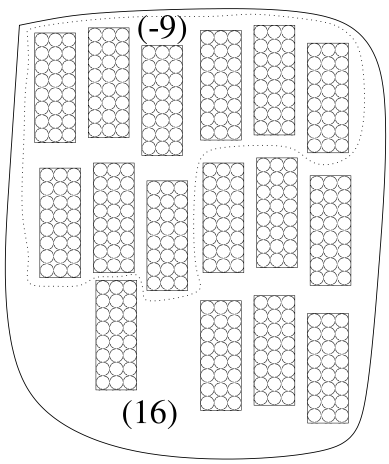


Figura 6.34: Organização das ações práticas (figurinhas): DIE (13;8/5ª)

O que você está fazendo? **Eu estou contando as figurinhas que são as 16 figurinhas que ele perdeu.** E o que você faria agora? **Daí estas daqui foram as que ele perdeu e primeiro ele tinha ganhado 9 depois perdeu mais 16. Daí eu tiraria as 9 que ele ganhou.** DIE retirou 9 figuras do monte de 16. E tem algo de parecido? **Eu acho que tem, as figurinhas e o desenho estão representando os números que usamos no problema.**

Sexta categoria: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

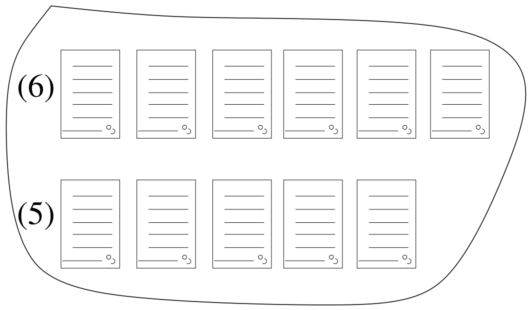


Figura 6.35: Organização das ações práticas (papel de carta): DIE (13;8/5ª)

DIE pegou 6 papéis de carta. **Esse é o que a Vanessa tinha que pagar para Mariana.** Depois DIE pegou mais 5 papéis. Quanto você tem ao todo? **11.** E estes 5 papéis? **Estes são os que a Mariana precisa devolver para Vanessa.** E tem algo de parecido? **Tem, tudo representa o mesmo problema.**

As ações efetuadas por DIE são similares as do nível IIB. Ele coordena a relação parte-todo, estabelece relações entre as tarefas que realiza, além de explicitar a interação entre as operações de adição e subtração. Pois, ao resolver de forma escrita o problema da sexta categoria DIE faz uma subtração, mas ao realizá-lo por meio das ações sobre os objetos DIE faz a junção das partes no todo, desenvolve, portanto, uma adição.

De fato, estes dois níveis - IIB e III - apresentaram, durante toda nossa análise, os procedimentos mais elaborados tanto na resolução por meio de imagens gráficas quanto na organização das ações práticas. Desta forma, constatamos que a evolução destes procedimentos ou, em outras palavras, a evolução dos meios que o sujeito se utiliza para chegar a resolução do problema, parece se relacionar ao processo dialético construtivo das operações de adição e subtração. É neste sentido que salientamos que poderia se falar de uma relação entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos.

Capítulo 7

Discussão e Considerações Finais

"Como os dias que passaram se foram para sempre, e os dias futuros poderão não chegar a ti no presente de teu ser, cabe a ti, fazer uso do estado presente sem lamentar a perda do que já passou e sem depender demais do que ainda virá; pois nada podes saber de teus futuros estados, exceto o que tuas ações de agora disponham para eles"

(A vós confio)

Ao longo deste estudo o objetivo central foi buscar se haveria relações entre a resolução de problemas aditivos e a construção dialética das operações de adição e subtração.

Os problemas aditivos assumiram papel essencial em nossa pesquisa por se tratarem de problemas que envolvem tanto adições quanto subtrações com diferentes graus de complexidade. Assim, eles foram estudados em situações diferenciadas de forma que os sujeitos tinham que resolvê-los das seguintes maneiras: 1- resolução via algoritmo / resolução escrita 1; 2- resolução por meio de imagens gráficas; 3- resolução por meio de organização das ações práticas; 4- resolução via algoritmo / resolução escrita 2. Estas diversas maneiras de resolução foram propostas no intuito de verificar quais eram os procedimentos utilizados pelos sujeitos.

Já o processo dialético construtivo em questão norteou toda nossa análise uma vez que foi possível verificar, a partir de problemas de igualação e construção de diferenças, como se dá, do ponto de vista cognitivo, o processo dialético construtivo entre as operações de adição e subtração.

Diante dos resultados pôde-se constatar que as resoluções apresentadas pelos nossos sujeitos aos problemas aditivos propostos em suas diferentes situações se relacionam com os diversos níveis de construção dialética alcançados por eles.

Portanto, ao final de nosso estudo, nossa idéia é que os níveis mais evoluídos de construção dialética possibilitam êxitos sistemáticos e procedimentos mais elaborados por parte dos sujeitos. Sendo assim, buscaremos fundamentar nosso argumento na discussão que se segue.

Das resoluções escritas 1 e dos níveis de construção dialética

Analisando as resoluções escritas 1 apresentadas pelos sujeitos participantes desta pesquisa (N=22), verificamos que o número de respostas corretas aumenta na medida em que a interdependência entre as operações de adição e subtração vai se configurando. Isto significa que o nível de construção dialética apresentado pelos sujeitos se relaciona com suas possibilidades de êxitos, ou seja, sua frequência é maior exatamente conm aqueles sujeitos que apresentam um nível de construção dialética mais evoluído.

O maior número de erros (E=15) nas resoluções escritas 1 ocorre exatamente com aqueles sujeitos (N=4) que, quando da prova dos problemas de igualação e construção de diferenças, atingiram o nível IB (cf. tabela 6.1, p. 112).

Do ponto de vista cognitivo, alcançar o nível IB significa não compreender, ainda, as implicações existentes entre as ações de adicionar e subtrair. E segundo Piaget (1980/1996) a "novidade" em examinar a gênese das formas elementares da dialética está exatamente em entender a "*(...) implicação entre as ações e operações.*" (p.13).

Entretanto, esta implicação entre ações e operações ainda não se faz presente com os sujeitos de nível IB (N=4), o que pode estar levando-os aos insucessos quando de suas resoluções escritas.

No nível IB podemos nos referir apenas a um início de interações entre adições e subtrações, mas não ainda a uma síntese dialética, a qual engendra superações e avanços.

Por outro lado, o que os problemas aditivos requerem são somente simples operações de adição e subtração. No entanto, a dificuldade não reside no fato de resolver numericamente a operação, pois como foi visto, os sujeitos de nível IB (N=4) sabem seguir os passos que os levam ao êxito, à resposta escrita correta, no momento em que efetuam uma operação, seja ela de adição ou subtração.

Temos o exemplo de BRU (9;6/3ª) (cf. figura 6.2, p. 113) que soluciona o problema de forma errada, contudo, a operação de subtração da qual ele se utiliza no problema está correta.

Assim, a dificuldade não se apresenta no cálculo numérico escrito em si, mas sim nas relações que os sujeitos precisam estabelecer ao resolver os problemas. Isto é, faz-se necessário coordenar os dados que são pertinentes à resolução, para só então passar ao cálculo numérico. Na verdade, esta coordenação dos dados, necessária à resolução do problema, refere-se, ao dizer de Vergnaud (1985/1991), ao cálculo relacional, ou seja, nas relações que devem se estabelecer no enunciado dos problemas para se chegar ao cálculo numérico escrito.

Destacamos, portanto, que apenas a obtenção do êxito, expresso pela resolução escrita correta, não garante que os sujeitos estejam coordenando os dados pertinentes à resolução do problema. Neste sentido, é que os sujeitos pertencentes a esta pesquisa tiveram a oportunidade de solucioná-los em várias situações, além do cálculo numérico escrito. Contudo, em se tratando das resoluções escritas, nosso trabalho evidenciou que, assim mesmo, o maior número de respostas corretas ocorrem com aqueles sujeitos que possuem níveis de construção dialética mais evoluídos.

Quando nos referimos ao estabelecimento de relações não podemos desconsiderar as abstrações reflexivas, uma vez que estas se apóiam nas coordenações das ações e operações dos sujeitos, sendo estas últimas ações já interiorizadas e que supõe a reversibilidade, ou seja, "*a capacidade de executar a mesma ação nos dois sentidos do percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação.*" (Piaget apud Montangero e Naville, 1994/1998, p. 225).

A ausência de reversibilidade, neste sentido, constitui um fator a ser considerado a fim de justificar as resoluções escritas incorretas apresentadas pelos sujeitos de nível IB no que concerne aos problemas de estrutura aditiva. Isto é, o fato desses sujeitos não guiarem, ainda, suas ações no âmbito da reversibilidade, pode vir a explicar os fracassos quando de suas resoluções escritas. Isto porque a reversibilidade, do ponto de vista cognitivo, garante a execução das ações em seus dois sentidos - direto e inverso. Garante, de fato, o predomínio da simultaneidade, a possibilidade de antecipações e retroações aspectos estes observados no decorrer das diferentes resoluções.

Em contrapartida, os sujeitos de nível IIA (N=6) parecem dispor de instrumentos cognitivos mais elaborados e os quais possibilitam um número de erros (E=6) menor (cf. tabela 6.2, p. 114) do que aquele alcançado no nível IB (E=15). Na verdade, estes instrumentos cognitivos se traduzem, ao nosso ver, em um início de adições e subtrações relativas, ou de outra forma, em um início de implicações entre ações aditivas e subtrativas. No entanto, este "início" ainda não é suficiente para comportar êxitos totais nas resoluções escritas 1.

O papel do processo de equilibração, neste caso, é essencial pois este, quando da construção dialética das operações de adição e subtração, se manifesta sob sua forma mais geral que é "*(...) a compensação a assegurar entre os fatores positivos e negativos das transformações.*" (Piaget, 1980/1996, p. 60).

Portanto, o nível IIA, no qual constatamos um início de implicações entre operações de adição e subtração, é marcado, ainda, pelas contradições próprias dos níveis elementares de desenvolvimento. Isto equivale a dizer que neste nível as contradições se apresentam enquanto compensações incompletas, caracterizando, assim, uma assimetria entre aspectos positivos e negativos. Este fato pode vir a explicar os insucessos constatados com os sujeitos deste nível IIA, porém, salientamos que os êxitos (C=30) são bem mais frequentes do que os apresentados no nível anterior IB (C=9).

Os êxitos totais nas resoluções escritas 1, por outro lado, são constantes, para os sujeitos de nível IIB (N=11) e também para o de nível III (N=1), como podemos verificar nas tabelas 6.3 e 6.4, nas respectivas páginas 116 e 118. O que pode estar intervindo nos êxitos sistemáticos destes sujeitos é que nestes níveis

- IIB e III - já há compreensão da "identidade dos contrários". Isto é, a operação de adicionar implica, necessariamente, em uma operação de subtrair. E neste sentido, o processo dialético construtivo adquire seu significado enquanto aspecto inferencial da equilibração, este último se manifestando sob forma de regulações compensatórias entre os fatores positivos e negativos das transformações.

Nestes casos, não falaremos mais em contradições, em compensações incompletas, mas sim de uma simetria entre aspectos positivos e negativos. Portanto, de compensações antecipadas e sobretudo, de implicações entre as operações de adição e subtração. Desta forma, operações que atuam em sentido contrário, mas que, sobremaneira, se complementam.

Sendo assim, os níveis IIB e III são caracterizados pela síntese entre operações de sentidos contrários. Duas operações que até então eram tidas como absolutas adquirem formas "relativas" ou "relativizadas", caracterizando, assim, o jogo de interdependências entre adições e subtrações.

Neste contexto, reafirmamos que os nossos dados demonstram relações entre o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração e as resoluções escritas de problemas aditivos, uma vez que o número de respostas corretas é bem mais frequente naqueles sujeitos de níveis mais evoluídos.

Das resoluções por meio de imagens gráficas, de organização das ações práticas e dos níveis de construção dialética

Todos os sujeitos pertencentes a este estudo (N=22) fizeram uso de imagens gráficas e de organização das ações práticas para explicar a resolução dos problemas sem a utilização do cálculo numérico escrito.

A partir das imagens gráficas efetuadas pelos sujeitos foi possível identificar diferentes formas de representação dos problemas e constatar que estas representações variam conforme o nível de construção dialética por eles alcançado, partindo de representações mais simbólicas do real até as imagens gráficas esquemáticas. Destacando-se, sobretudo, uma diferença qualitativa nestas últimas, as quais se aproximam de representações que consideram a simultaneidade entre parte e todo, refletindo antecipações e retroações, próprias do aspecto operativo do pensamento. O mesmo aconteceu com as resoluções por meio de brinquedos as quais refletiram organizações de ações práticas mais elaboradas e complexas no sentido de determinar uma melhor explicação da resolução efetuada. Na verdade, estas resoluções não diferiram daquelas apresentadas por eles quando de suas imagens gráficas.

A organização das ações práticas e as imagens gráficas desenvolvidas pelos sujeitos de nível IB (N=4) consistem em cópias figurativas dos algoritmos (cf. figuras: 6.15, p.136; 6.16, p.137; 6.28, p.150; 6.29, p.150), ou em representações que ilustram fatos descritos nos enunciados dos problemas (cf. figuras: 6.18, p.140; 6.19, p.141 e 6.20, p.141). Na maioria das situações estes sujeitos se contentam em realizar um arranjo espacial dos dígitos da operação, mesmo quando das ações sobre os objetos.

Neste sentido, vemos uma predominância dos aspectos figurativos do conhecimento. Estes, de acordo com Piaget (apud Montangero e Naville, 1994/1998, p. 209), "*(...) tratam, pois, essencialmente dos estados, cujas configurações são as mais fáceis de traduzir em imagens e, sempre que tratam de movimentos ou transformações, é ainda para representar as configurações sem contribuir para a modificação.*"

De fato, os sujeitos de nível IB (N=4) efetuam representações e organizam os brinquedos de forma estática, prevalecendo o aspecto figurativo das operações e negligenciando, portanto, as transformações, características dos aspectos operativos do pensamento. A figuratividade, neste sentido, "*(...) não dá nenhuma segurança para pensar as transformações como tais.*" (Dolle e Bellano, 1989/1995, p. 88).

Vale ressaltar que o nível IB da prova da construção dialética das operações de adição e subtração é marcado ainda, quando da realização de algumas tarefas, por configurações espaciais, portanto, figurais. Piaget (1980/1996) argumenta que os sujeitos deste nível procedem por constatações empíricas e não por antecipações no sentido de prever as implicações decorrentes das ações de adicionar e subtrair.

Estes aspectos indicam que os sujeitos de nível IB ainda não guiam suas ações no âmbito da reversibilidade, ou seja, suas ações ainda não atingiram o patamar de "operação", ou melhor, o patamar de ações interiorizadas e organizadas logicamente. Portanto, um pensamento lógico e mais objetivo decorre, segundo Piaget, da conquista da reversibilidade.

Além disso, os sujeitos de nível IB também não conseguem estabelecer relações entre as atividades (resolução escrita, imagem gráfica e organização das ações práticas) que acabaram de desenvolver. Ou melhor, eles efetuam comparações entre as tarefas que fizeram, contudo, estas comparações permanecem pautadas nas propriedades físicas dos objetos. BRU (9;6/3ª), por exemplo, afirma que o que tem em comum entre as atividades que realizou é o "**zero da conta**", pois este é igual "**as bolinhas de gude**" do problema. Vemos, portanto, o quanto estes sujeitos fundamentam suas comparações nos aspectos perceptíveis dos objetos, nas suas qualidades físicas, efetuando, neste sentido, abstrações empíricas das quais decorrem apenas generalizações simples ou indutivas, ligadas à extensão do conhecimento e não à sua compreensão.

Por outro lado, alguns progressos foram identificados com os sujeitos de nível IIA (N=6). Estes ultrapassam as organizações espaciais dos dígitos da operação assim como a produção de imagens gráficas estáticas das mesmas. Embora, quando da realização de suas representações, estes sujeitos ainda tragam traços de sinais convencionais utilizados no contexto escolar (cf. figuras 6.21, p. 142 e 6.22, p. 143).

Desta forma, não podemos deixar de salientar o papel do processo de ensino nas representações de nossos sujeitos. É possível que um ensino tradicional em matemática, pautado em regras e sinais destituídos de significado para eles, esteja intervindo em suas formas de representação. Com isso não pretendemos negligenciar o uso de sinais convencionais, nem tão pouco menosprezá-los, apenas chamamos a atenção para que estes venham acompanhados de uma devida compreensão quando de suas utilizações e não se resumam em simples repetições.

Isto é bem evidente com os sujeitos de nível IB (N=4), contudo, os de nível IIA (N=6) evoluem com relação às imagens gráficas iniciais apresentadas por aqueles sujeitos. Para o nível IIA "*as marcas de um ensino tradicional*" (Moro, 1998, p. 411) ainda se fazem presentes; porém, na medida em que progridem em seu entendimento no que diz respeito às implicações entre as operações de adição e subtração, suas representações, gradativamente, vão se tornando mais elaboradas do ponto de vista cognitivo e, consequentemente, vão se distanciando das convenções repassadas pela escola ou pelo menos, compreendendo-as. E esta evolução gradual também é verificada quando da organização dos objetos concretos, pois esta difere daquelas apresentadas pelos sujeitos de nível IB.

Sem contar que as comparações efetuadas pelos sujeitos de nível IIA nas diversas tarefas solicitadas não se resumem à descrição das propriedades físicas dos objetos. FER (9;6/3ª), por exemplo, argumenta que "**é o mesmo problema só que em forma diferente**". As comparações, portanto, não se centram apenas nos conteúdos das ações executadas pelos sujeitos, nos aspectos perceptíveis dos objetos. Há, neste caso, a intervenção de abstrações reflexivas as quais, por meio de seus aspectos solidários de reorganização e transposição, garantem o estabelecimento de relações entre as ações dos sujeitos. Desta forma, engendrando generalizações construtivas, as quais não se dão apenas por via de extensão, mas também de compreensão dos conhecimentos, havendo, portanto, um enriquecimento simultâneo e complementar.

Analisando os níveis IIB (N=11) e III (N=1), constatamos que o fato de compreender a identidade dos contrários, ou melhor, de entender que uma adição implica, simultaneamente, em uma subtração, faz com que os sujeitos pertencentes a estes níveis apresentem progressos em suas representações e em suas resoluções por meio de organização das ações práticas.

Nas imagens gráficas os traços de sinais convencionais e aprendidos no contexto escolar já não se fazem presentes. Assim, os progressos podem ser percebidos na organização das ações práticas, nas imagens gráficas e nas explicações dos sujeitos (cf. figuras: 6.24, p.146; 6.27, p.148; 6.33, p.155; 6.34, p.155). Os sujeitos realizam suas imagens gráficas ou organizam os objetos em um todo e lidam com suas partes simultaneamente, diferentemente dos sujeitos de nível IIA, os quais representavam o todo e mais suas partes de forma justaposta, como se estas não pertencessem a ele. Suas comparações não permanecem em apreensões de características físicas dos objetos, como argumenta CAM (12;1/5ª): "**eles são o mesmo problema só que eles estão representados de maneira diferente**".

Destacamos que para os sujeitos de nível IIB e III os aspectos operativos do pensamento parecem prevalecer sobre os figurativos e neste sentido, eles demonstram compreender os problemas de estrutura aditiva em termos de seus estados, transformações, relações, sendo capazes de coordená-los.

Isto evidencia-se nas resoluções escritas 1, em que o êxito destes sujeitos é constante; nas representações; nas organizações das ações práticas; e, finalmente, nas explicações por eles elaboradas. Ou como argumentam Dolle e Bellano (1989/1995, p. 90): "*(...) apenas a operatividade (...) pode dar razão, ou a explicação da constituição dos estados pelas transformações que os produziram (...).*" Desta forma, ressaltamos que os aspectos figurativos tratam dos estados da realidade "*(...) ainda que se possa perceber ou imitar ou imaginar transformações, mas emprestando-lhes, então, um caráter figural direto ou simbólico (...).*" (Piaget apud Montangero e Naville, 1994/1998, p. 208). Assim a figuratividade fornece imitações, tratando essencialmente dos estados, sem ensejar movimentos e transformações.

Já os aspectos operativos, são fontes de estruturações e de tranformações que consistem em modificar certos estados em outros e reciprocamente. Isto posto, esclarecemos que tanto as imagens gráficas quanto as organizações das ações práticas delinearam um processo gradativo, compreendendo desde as cópias figurativas dos algoritmos até a compreensão dos problemas aditivos em termos de seus estados e transformações.

Neste sentido, verificamos que quanto mais os sujeitos demonstram compreender as noções implícitas às operações de adição e subtração, ou melhor, quanto mais se estabelece a interdependência entre estas operações, mais elaborados são os procedimentos apresentados por eles.

Das resoluções escritas 2

A resolução escrita 2 consistiu em uma etapa muito especial para o nosso trabalho. Foi o momento em que os sujeitos tiveram a oportunidade de resolver os problemas pela segunda vez, isto após tê-los resolvido por meio de imagens gráficas e organização das ações práticas.

A intenção desta etapa não era promover uma intervenção pedagógica, mas tentar verificar se as diferentes situações, nos quais os problemas haviam sidos solicitados, poderiam engendrar modificações nas respostas escritas dos sujeitos.

Como pôde ser constatado na análise dos resultados, 7 dos 12 sujeitos que tinham cometido erros nas resoluções escritas 1 modificaram suas respostas ao resolver os problemas pela segunda vez.

Isto nos faz argumentar que as diversas situações de resolução apresentadas aos sujeitos podem ter contribuído para o aumento de seus êxitos, no sentido de ter desencadeado os mecanismos responsáveis pela construção do conhecimento.

De certa forma os sujeitos foram "convidados" a agir, a parar e pensar sobre o que estavam fazendo, sem contar no interesse que estas situações podem ter despertado durante as atividades das crianças. Ou como explica Piaget (1969/1970, p. 160): "*(...) o interesse verdadeiro surge quando o eu se identifica com uma idéia ou objeto, quando encontra neles um meio de expressão e eles se tornam um alimento necessário à sua atividade.*"

Assim, não podemos negar que o interesse pelas atividades propostas se fez presente em todo o processo de coleta de dados. Isto pode ser evidenciado nas palavras expressas por JUL (11;11/5ª) enquanto resolvia um dos problemas por meio de organização das ações práticas:

> **Você deveria vir mais aqui fazer este trabalho.** Por quê? **Porque é gostoso fazer os problemas assim, na sala também deveria ser assim.** Na sala você não resolve os problemas deste jeito? **Não, só com número, e assim é mais legal.**

Neste sentido, destacamos a importância dos aspectos afetivos na atividade do sujeito. A afetividade, neste caso, é o que impulsiona, é a energética das condutas, o que leva o sujeito a cumprir as tarefas propostas pela experimentadora.

Outro fator importante a salientar é que durante as atividades propostas os sujeitos foram solicitados a trabalhar com os problemas de uma forma não convencional. Isto implica dizer que estas diferentes situações não se assemelham a forma tradicional de como a resolução de problemas é trabalhada, isto é, o exercício puro e simples de operações aritméticas já aprendidas.

Do ponto de vista cognitivo, e este não deve ser dissociado dos aspectos afetivos, os sujeitos, durante as resoluções por meio de imagens gráficas e organização das ações práticas, provavelmente tiveram a oportunidade de interromper o automatismo de suas ações, tomando consciência das mesmas e compreendendo o porquê de suas respostas. Estes aspectos foram evidenciados na medida em que os sujeitos faziam a releitura do problema, pensavam em voz alta, argumentavam.

O fato de elaborar uma imagem gráfica e agir sobre os objetos pode ter proporcionado aos nossos sujeitos a ativação dos mecanismos internos do processo de equilibração, no sentido de compensar as perturbações impostas pelas diferentes situações de trabalho com os problemas, fazendo com que os sujeitos passassem do plano do fazer para o compreender, portanto, da ação à conceituação.

Sem contar que ao agir sobre os objetos os sujeitos tiveram a oportunidade de realizar experiências lógico-matemáticas, ou seja, de fazer abstrações reflexivas, reconstruindo suas ações em um novo plano, um novo patamar, alcançando assim o êxito quando das segundas resoluções escritas.

Obviamente não foi objetivo verificar estes aspectos durante o desenvolvimento deste trabalho. Contudo, não podemos negligenciar o fato de que as modificações nas resoluções escritas dos sujeitos ocorreram, provocando a aprendizagem. Destacaremos que estas diversas formas de solicitar a resolução de um problema pode vir a ser um meio fecundo no sentido de fazer com que o sujeito progrida na construção de seu conhecimento e não apenas acumule séries de exercícios desprovidos de significados. Isto, sem dúvida, deve ser levado para nosso contexto escolar, permitindo o aprender a aprender, pois como afirma Piaget (1972/1975): "*O ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola.*" (p. 353).

Das implicações do estudo

Diante da discussão realizada até o momento reiteramos o nosso posicionamento de que é possível falar em relações entre a resolução de problemas aditivos e a construção dialética entre as operações de adição e subtração.

Vimos durante toda nossa análise e discussão que na medida em que a interdependência entre estas duas operações se configura, os sujeitos evoluem em seus procedimentos, em suas explicações e também apresentam um aumento no número de seus acertos, quando dos cálculos numéricos escritos.

Daí resultam as implicações deste estudo no que diz respeito ao contexto educacional:

- A primeira idéia que ressaltamos é a de que as operações de adição e subtração devam ser trabalhadas ao mesmo tempo pelas crianças e não uma de cada vez como se se tratassem de operações sem relações entre si. Destacamos que esta idéia já foi discutida por Moro (1993, 1998) quando de seus trabalhos com relação à aprendizagem construtivista das operações em questão. Neste sentido, este trabalho vem apenas fortalecer o argumento da pesquisadora.

- Outro ponto a salientar é a importância de se trabalhar a resolução de problemas aditivos em diferentes situações, não se restringindo apenas ao exercício mecanizado de operações já aprendidas. O interessante é que o professor dê oportunidade para que os sujeitos experimentem outras formas de resolução, para que construam novos procedimentos para se chegar às respostas e que com isso entendam os caminhos percorridos por eles para alcançá-las. Estes aspectos, inclusive, fazem parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino das operações aritméticas e para a resolução de problemas.

Com estas considerações queremos destacar a importância de se produzir, no dizer de Macedo (1994), um conhecimento formalizante e não formalizado, interessando, portanto, as ações do sujeito que conhece.

Neste sentido, o papel do professor é conhecer a matéria que ensina para que possa "discutir", para que desenvolva "perguntas inteligentes" e organize "situações-problema" no intuito de fazer com que seus alunos construam seu conhecimento.

De fato, gostaríamos de ressaltar, neste momento, uma prática pedagógica construtivista, com investigação, com experimentação e não apenas com simples transmissão de conhecimento. Ou como afirma Macedo (1994, p. 36): "*Ser construtivista não é fazer uma coisa uma única vez, mas sim praticá-la, exercitá-la; mas com sentido de pesquisa, de descoberta, de invenção, de construção.*"

Sabemos, no entanto, que muitas questões continuam abertas à discussão e à pesquisa, pois temos consciência de que não conseguimos, no âmbito deste estudo, dar conta de todos os aspectos referentes à resolução de problemas aditivos, bem como no que diz respeito à construção gradual das operações de adição e subtração.

Entretanto, todo o nosso trabalho nos leva a refletir que não podemos, enquanto pesquisadores e educadores, deixar de considerar os processos inerentes ao desenvolvimento das estruturas que possibilitam o conhecimento, ou seja, não podemos negligenciar a construção dialética entre as operações de adição e subtração.

A análise do processo dialético construtivo em nossos sujeitos possibilitou constatar porque Piaget (1980/1996) o define como sendo o aspecto inferencial da equilibração. A equilibração, neste sentido, se expressa nas compensações a assegurar entre as ações aditivas e subtrativas. Já o aspecto inferencial consiste nas implicações entre ações e operações, fornecendo suas razões e dirigindo antecipações.

Assim concluímos que os problemas aditivos exigem em suas resoluções um mínimo de compreensão entre as ações de adicionar e subtrair, ou seja, pelo menos um início de interação entre estas duas operações e nada melhor do que as palavras de ALI (10;8/4ª/IIA) para encerrar este trabalho:

> ***Todos os problemas que você já me passou tem que fazer isso, olha! Dá para fazer isso:*** $12 - 7$ ***que é igual a*** 5 ***e*** $7 + 5$ ***que é igual a*** 12***.*** Os problemas que você faz na sala não dá para fazer isto? ***Eu nunca tentei, agora que eu percebi isto. Eu posso fazer de duas formas. Aqui deu para mim fazer de menos, que deu***

igual a* 5*, como também dá para mim somar esses dois que dá $7+5$ ***igual a* 12*.*** O que você conseguiu perceber? ***Que dá para mim fazer de mais e de menos junto.***

"Quando atingires este ponto, o que eu tinha a te dizer em nome dos Mestres já não terá segredos para ti, pois o Mestre serás tu próprio. A partir de então compartilharás o Conhecimento que fará de ti um servidor incondicional da humanidade."

(Um profeta velado)

Bibliografia

[1] BRENELLI, R. P. (1996). *O jogo como espaço para pensar*. Campinas: Papirus.

[2] BUSQUET PRAT, D. (1995). Resolução e formulação de problemas. *In* O. Z. M. de Assis & M. C. de Assis (Orgs), *Construtivismo e Educação* (pp. 75–78). Campinas: Tecnicópias.

[3] BUSQUET PRAT, D. (1995a). Os problemas não formulados. *In* O. Z. M. de Assis & M. C. de Assis (Orgs), *Construtivismo e Educação* (pp. 20–28). Campinas: Tecnicópias.

[4] CAROLL, W. & PORTER, D. (1997). Invented strategies can develop meaningful mathematical procedures. *Children Mathematics*, **March**, 370–374.

[5] CARRAHER, T. N. & SCHIEMANN, A. D. (1983). A adição e a subtração na escola: algorítimos ensinados e estratégias aprendidas. *Revista Brasileira de Pedagogia*, **64** (148), 234–242.

[6] DAMM, R. F. (1994). Aprendizagem dos problemas aditivos e compreensão de textos. *INEP – Série Documentos*, **04**, 01–18.

[7] DOLLE, J. M. & BELLANO, D. (1989). *Essas crianças que não aprendem*. Tr. C. J. P. Saltini. Petrópolis: Vozes, 1995.

[8] FERREIRA, A. B. de H. (1986). *Novo dicionário da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.

[9] FRANCHI, A. (1987). Dificuldades no ensino de adição e subtração: resolução de problemas aditivos. *ANDE*, **06** (12), 55–57.

[10] FUSON, K. & WILLIS, G (1989). Second grader's use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, **81** (04), 514–520.

[11] GARCIA, R. (1980). Dialética, psicogênese e história das ciências. *In* Piaget, J., *As formas elementares da dialética.* Tr. F. M. Luiz (pp. 211–228). São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.

[12] GILL, A. J. (1993). Multiple strategie: product of reasoning and communication. *Arithmetics Teacher*, **40** (07), 380–386.

[13] KAMII, C. & LEWIS, B. (1991). Achievement test in primary mathematics: perpetuating lower-order thinking. *Arithmetics Teacher*, **38** (09), 04–09.

[14] KAMII, C. LEWIS, B. & LIVINGSTON, S. (1993). Primary arithmetic: children inventing their own procedures. *Arithmetics Teacher*, **40** (04), 200–203.

[15] LOPES, S. V. A. (1997). *Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado. Campinas: FE. UNICAMP.

[16] LOPES, S. V. A. & BRENELLI, R. P. (2001). A importância da abstração reflexiva na resolução de problemas de subtração. *In* M. R. F. de Brito (Org), *Psicologia da educação matemática* (pp. 147–166). Florianópolis: Insular.

[17] MACEDO, L. (1994). *Ensaios construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo.

[18] MONTAGERO,J. & NAVILLE, D. M. (1994). *Piaget ou a inteligência em evolução.* Tr. T. B. I. Marques & F. Becker. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

[19] MORGADO, L. (1993). *O ensino da aritmética: perspectiva construtivista.* Coimbra: Livraria Almedina.

[20] MORO, M. L. F. (1998). *Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais: o percurso de três parceiros.* Tese de Titular. Curitiba: Setor de Educação. UFPR.

[21] MORO, M. L. F. & BRANCO, V. (1993). A adição/subtração em crianças de 1ª série. Um estudo sobre aprendizagem construtivista. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, **09** (02), 365–385.

[22] MUNARI, A. (1995). Jean Piaget (1896 – 1980). *In* O. Z. M. de Assis & M. C. de Assis (Orgs), *Construtivismo e Educação* (pp. 1–10). Campinas: Tecnicópias.

[23] NUNES, T. & BRYANT, P. (1996). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

[24] Parâmetros Curriculares Nacionais. (1997). Ensino Fundamental – 1º e 2º ciclos: matemática. Baixado do endereço eletrônico www.bibvirt.futuro.usp.br.

[25] PAGE, A. (1994). Helping students understand subtraction. *Children Mathematics*, **03**, 140–143.

[26] PIAGET, J. (1948). *Para onde vai a educação?* (12ª ed). Tr. F. Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 1994.

[27] PIAGET, J. (1964). *Seis estudos de psicologia.* (21ª ed). Tr. M. A. M. D'Amorim & P. S. L. Silva. Rio e Janeiro: Florense, 1995.

[28] PIAGET, J. (1967). *Biologia e conhecimento.* (2ª ed). Tr. F. M. Guimarães. Petrópolis: Vozes, 1996.

[29] PIAGET, J. (1969). *Psicologia e pedagogia.* Tr. D. A. Lindoso & R. M. R. da Silva. Rio de Janeiro: Forense, 1970.

[30] PIAGET, J. (1972). *Problemas de psicologia genética.* Tr. C. E. A. Di Piero. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

[31] PIAGET, J. (1973). *Observaciones sobre la educacion matematica.* Proceedings of the Second International Congress in Mathematical Education. A. G. Howson (ed). Cambridge: Cambridge University Press.

[32] PIAGET, J. (1974). *Fazer e compreender.* Tr. C. L. de P. Leite. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

[33] PIAGET, J. (1974). *A tomada de consciência.* Tr. E. B. de Souza. São Paulo: Melhoramentos, 1977.

[34] PIAGET, J. (1975). *A equilibração das estruturas cognitivas.* Lisboa: Dom Quixote, 1977.

[35] PIAGET, J. (1977). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais.* Tr. F. Becker e P. B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

[36] PIAGET, J. (1979). Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico. *In* Piatelli–Palmieri, M. (Org.), *Teorias da linguagem e teorias da aprendizagem: o debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky* (pp. 39–49). São Paulo: Cultrix, 1983.

[37] PIAGET, J. (1980). *As formas elementares da dialética.* Tr. F. M. Luiz. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.

[38] PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. (1941). *A gênese do número.* (3^a ed). Tr. C. M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

[39] PIAGET, J. e cols. (1974). *Recherches sur la contradiction: les relations entre affirmations et négations.* Paris: PUF.

[40] PIAGET, J. e cols. (1978). *Investigaciones sobre la generalización.* México: Premia, 1984.

[41] TAXA, F. (1996). *Estudo sobre resoluções de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais.* Dissertação de Mestrado. Campinas: FE. UNICAMP.

[42] VERGNAUD, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, **10**, 263–274.

[43] VERGNAUD, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primária.* México: Trillas, 1991.

[44] VERGNAUD, G. & DURAND, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pedagogie*, **36**, 28–43.

[45] WEARNE, D. & HIEBERT, J. (1994). Place value and addition and subtraction. *Arithmetics Teacher*, **41** (05), 272–274.

[46] ZUNINO, D. L. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Apêndice A

Anexo I – Problemas Aditivos

1. Primeira categoria: compõem-se duas medidas para dar lugar a uma medida;
   Problema: Mariana tem 13 faquinhas e 8 garfinhos de brinquedo. Quantos brinquedinhos Mariana possui para brincar?

2. Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma medida;
   Problema: Pedro jogou uma partida de bolinha de gude e perdeu 18 bolinhas. Agora ele tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas de gude ele tinha antes de jogar sua partida?

3. Terceira categoria: uma relação une duas medidas;
   Problema: Pedro tem 12 carrinhos para brincar. Ele possui 7 carrinhos a mais que João. Quantos carrinhos João tem para brincar?

4. Quarta categoria: duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação;
   Problema: João jogou duas partidas de "bafo". Na primeira ele ganhou 9 figurinhas. Na segunda ele perdeu 16 figurinhas. Quantas figurinhas João perdeu ao final de suas duas partidas?

5. Quinta categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um estado relativo;
   Problema: Paulo deve 17 bolinhas de gude para Carlos. Ele devolve 9 destas bolinhas. Quantas bolinhas de gude Paulo ainda deve para Carlos?

6. Sexta categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo;

   Problema: Mariana deve 11 papéis de carta para Vanessa. Mas Vanessa deve 6 papéis de carta para Mariana. Quantos papéis de carta Mariana precisa devolver para Vanessa?

Apêndice B

Anexo II – Níveis de Construção Dialética

Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996), quando da realização de sua pesquisa, categorizaram seus sujeitos em diferentes níveis de evolução conforme suas condutas, a saber:

- Nível IA: as igualações desenvolvidas pelos sujeitos deste nível resultam de falsas implicações. Para igualar duas colunas de 3(A) e 5(B) elementos, os sujeitos retiram 2 elementos de B e transferem para A, de onde obtém os mesmos valores, só que agora invertidos: 5(A) e 3(B). Os sujeitos não compreendem que toda adição em uma coluna, implica, ao mesmo tempo, uma subtração na outra. Eles não recorrem à caixa de fichas reserva para efetuar as igualações. Os êxitos nas igualações permanecem locais, tratando-se, apenas, de simples simetrias espaciais.
- Nível IB: neste nível há um início de interação entre adições e subtrações. Os sujeitos recorrem espontaneamente à caixa de fichas reserva para efetuar as igualações. Realizam adições/subtrações simples, portanto, compreendem que para igualar duas coleções (A) e (B), das quais a diferença é de n fichas, implica a necessidade de acrescentar n elementos à menor, ou retirar n elementos da maior, se estes são pegos ou recolocados em uma fonte exterior a essas duas coleções, no caso, a caixa reserva.

- Nível IIA: neste nível há um início das adições/subtrações relativas, ou seja, aquelas que procedem por meio dos deslocamentos de fichas entre as colunas. Os sujeitos obtêm êxito nas tarefas; contudo, suas explicações permanecem no estado de descrição ou de cálculo. Não compreendem a "identidade dos contrários", portanto, o fato de que a transferência de fichas entre as colunas significa, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração.

- Nível IIB: a "identidade dos contrários" é compreendida neste nível. Assim, a operação de transferência de fichas é, simultaneamente, adição e subtração. Os sujeitos realizam coordenações entre adições/subtrações simples e adições/subtrações relativas. As explicações dos sujeitos ultrapassam o estado de descrição ou de cálculo. No entanto, algumas transferências ainda são mal sucedidas pelos sujeitos deste nível.

- Nível III: as transferências mal sucedidas do nível anterior IIB são, finalmente, bem compreendidas e explicadas pelos sujeitos. Eles entendem, de fato, as composições de transferências, ou seja, os deslocamentos de fichas efetuados entre três coleções.

Apêndice C

Anexo III – Protocolo

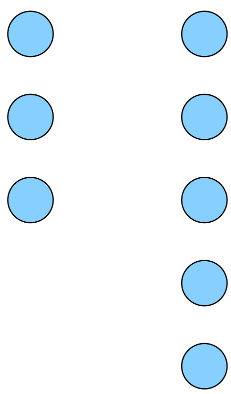
Aluno:

Série:

Idade:

Técnica A

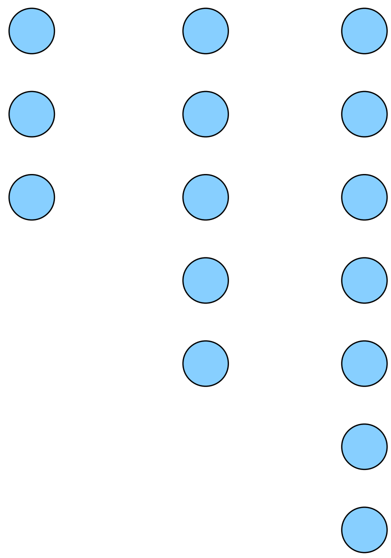
Situação 1: Apresentou-se ao sujeito duas colunas de 3 e 5 fichas respectivamente.



EXP: Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

EXP: Você tem outra idéia?

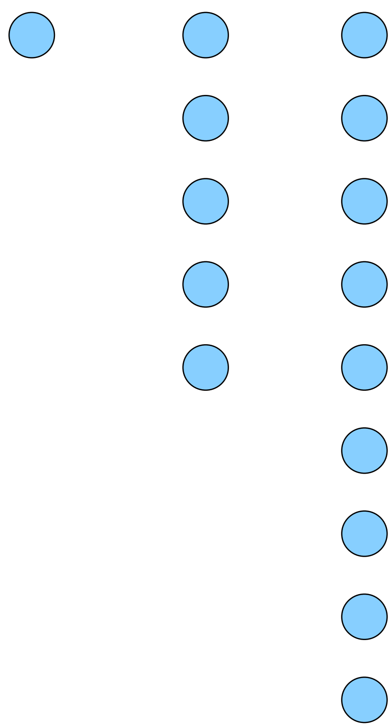
Situação 2: Apresentou-se ao sujeito 3 colunas de 3, 5 e 7 fichas:



EXP: Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas 3 colunas?

EXP: Tem outro jeito de deixar tudo igual?

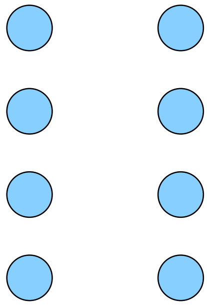
Apresentou ao sujeito outro conjunto: 1, 5 e 9 fichas.



EXP: Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas 3 colunas?

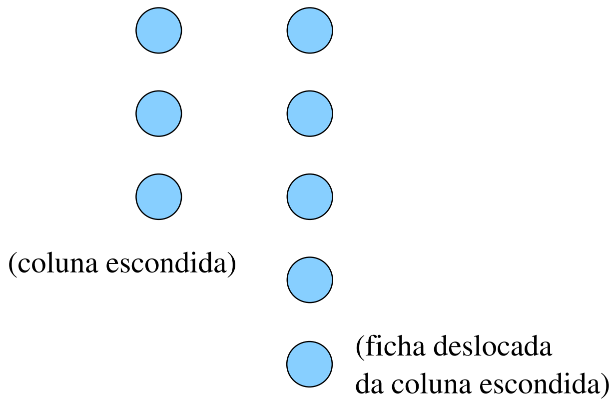
EXP: Tem outro jeito de deixar tudo igual?

Situação 3: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas de 4 fichas cada uma:



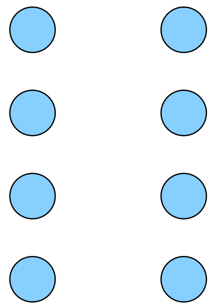
EXP: Tem o mesmo tanto de fichas nas 2 colunas?

Reconhecida a igualdade pela criança, a experimentadora escondeu a primeira coluna e deslocou uma ficha da coluna escondida para a outra coluna.



EXP: Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

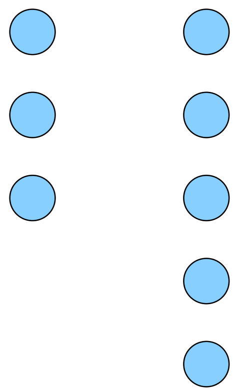
Situação 4: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas de 4 fichas cada uma:



EXP: Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você faria isso?

Técnica B

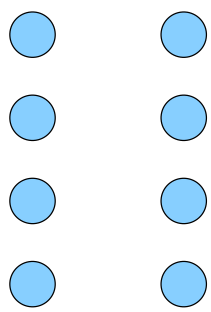
Situação 1: Apresentou-se ao sujeito duas colunas de 3 e 5 fichas respectivamente.



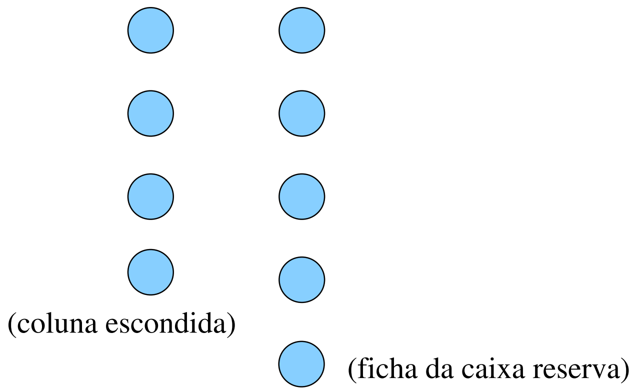
EXP: Você pode, de algum jeito, fazer com que tenhamos o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

EXP: Você tem outra idéia?

Situação 2: Apresentou-se ao sujeito duas colunas com 4 fichas cada uma:

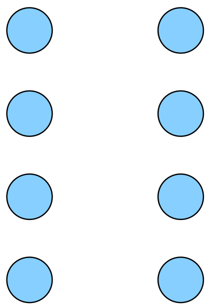


Em seguida a experimentadora escondeu a primeira coluna e acrescentou uma ficha da caixa reserva na coluna que ficou a mostra.



EXP: Quantas fichas eu devo pegar da caixa de reserva para ter de novo o mesmo de tanto de fichas nas duas colunas?

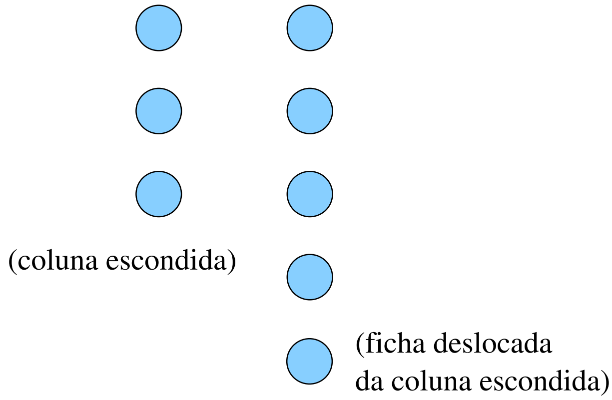
Situação 3: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas de 4 fichas cada uma:



EXP: Tem o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

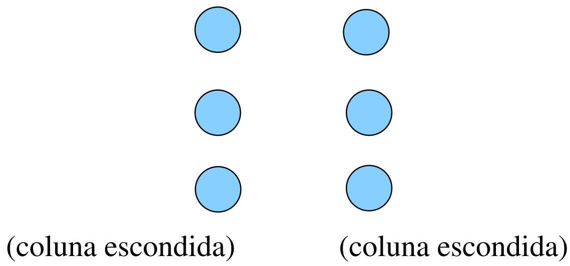
EXP: Elas são iguais?

Reconhecida a igualdade pela criança, a experimentadora escondeu a primeira coluna e deslocou uma ficha da coluna escondida para a outra coluna.



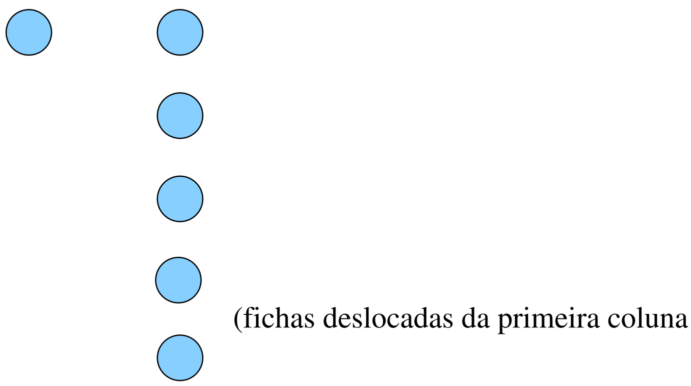
EXP: Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

Situação 4: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas contendo a mesma quantidade de fichas, entretanto as duas colunas estavam escondidas.



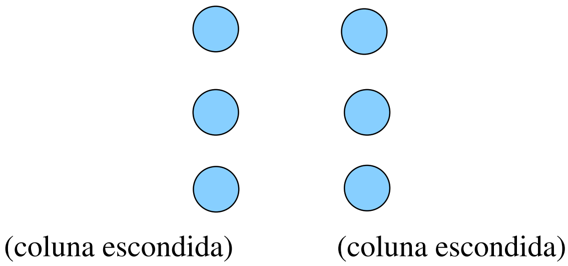
EXP: Temos aqui duas colunas e tem o mesmo tanto de fichas nas duas, elas são iguaizinhas. Agora elas estão escondidas, mas eu coloquei o mesmo tanto de fichas nas duas.

Em seguida a experimentadora deslocou 2 fichas da primeira coluna para a segunda.



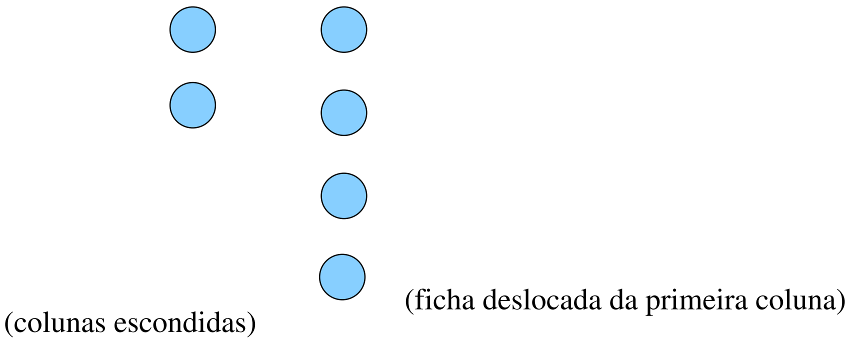
EXP: Quantas fichas eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto de fichas nas duas colunas?

Situação 5: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas escondidas, mas com o mesmo tanto de fichas em cada uma delas.

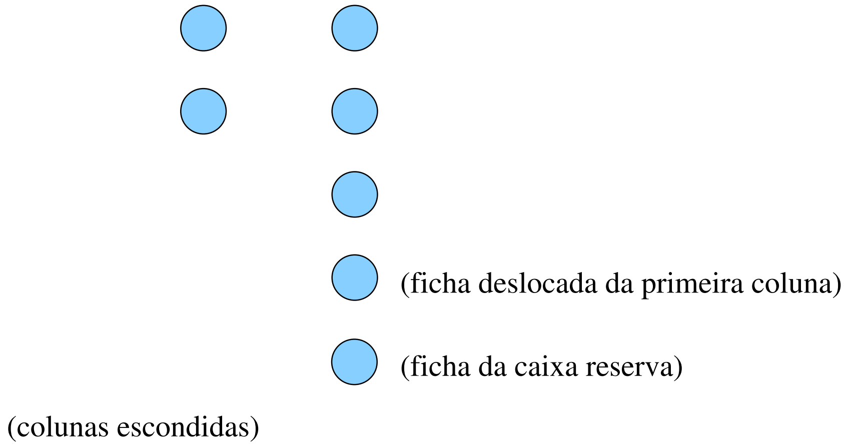


EXP: Temos aqui duas colunas e tem o mesmo tanto de fichas nas duas, elas são iguaizinhas. Agora elas estão escondidas, mas eu coloquei o mesmo tanto de fichas nas duas.

Em seguida a experimentadora deslocou uma ficha da primeira coluna para a segunda.



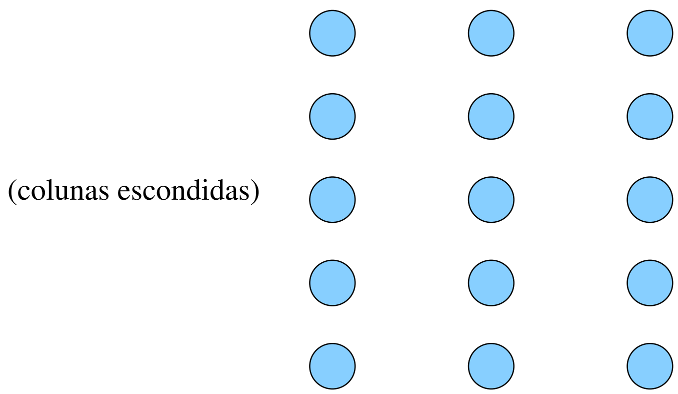
Após efetuar a ação a experimentadora pegou uma ficha da caixa reserva e acrescentou também na segunda coluna.



EXP: Quantas fichas eu tenho que pegar da caixa reserva para ter de novo o mesmo tanto nas duas colunas?

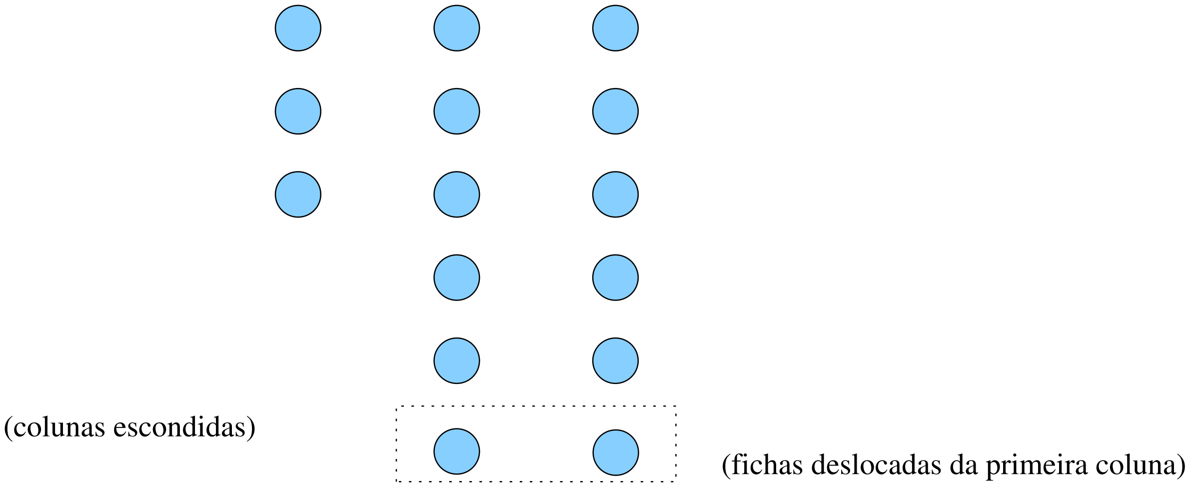
EXP: Quantas fichas esta coluna tem a mais que a outra?

Situação 5: Apresentou-se ao sujeito 3 colunas, todas escondidas, porém com a mesma quantidade de fichas:



A experimentadora explicou ao sujeito que tinha o mesmo tanto de fichas, mas ele não teria conhecimento de quantas fichas cada fileira possuía.

EXP: Eu vou pegar uma ficha da primeira coluna e colocar na segunda. Agora eu vou pegar uma ficha da primeira coluna só que colocarei na terceira coluna.



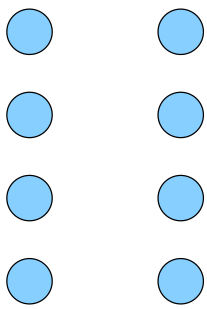
EXP: Qual a diferença entre a primeira coluna e a segunda?

EXP: Quantas fichas a segunda coluna têm a mais que a primeira?

EXP: Qual a diferença entre a primeira coluna e a terceira?

EXP: Quantas fichas a terceira coluna têm a mais que a primeira?

Sitação 7: Apresentou-se ao sujeito 2 colunas de 4 fichas cada uma:



EXP: Eu gostaria que você deixasse uma das colunas com 2 fichas a mais que a outra. Como você faria isso?