UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Área: Desenvolvimento Humano e Educação

Mestrado em Educação

Linha de Pesquisa: Psicopedagogia

A Construção Dialética das Operações de Adição e Subtração no Jogo de Regras Fan Tan

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti

Orientadora:Prof. Drª Rosely Palermo Brenelli

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Construção Dialética das Operações de Adição e Subtração no jogo de regras Fan Tan

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti

Orientadora: Rosely Palermo Brenelli

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Karen Hyelmager Gongora Bariccatti e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: / /

Assinatura:..

Orientadora

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

2003

À minha mãe, Maria Hellenice

“ Aqueles que passam por nós,

não vão sós, não nos deixam sós,

Deixam um pouco de si,

Levam um pouco de nós.”

(Antoine de Saint-Exupery)

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de ter encontrado em meu caminho pessoas tão especiais a serem lembradas eternamente.

À minha família, principalmente aos meus pais, por me terem ensinado o que é o amor e estarem sempre ao meu lado. Em especial, à minha irmã Hellenice, meu cunhado Fernando e sobrinho Nando, pelo acolhimento carinhoso em sua casa.

Ao meu marido Reinaldo e filhos Rafael e Bruna, que agora dão nova razão a meu existir.

À querida professora Rosely Palermo Brenelli, pela excelente orientação e pela amizade demonstrada no desenvolvimento deste trabalho. Obrigada por sua confiança.

Às professoras Dra Orly Z. M. d Assis, Dra Lucila Fini, Dra Amélia D. de Castro, pela contribuição e sugestões sempre enriquecedoras.

A todos os meus professores da Faculdade de Educação e do curso de especialização em Psicopedagogia na Unicamp que, de certa forma, estão presentes neste trabalho.

Aos funcionários da Faculdade de Educação, principalmente Gi e Nadir e a todos os da biblioteca pela colaboração durante estes anos.

A todos os professores, funcionários e alunos das escolas de Toledo, PR, que fizeram parte desta pesquisa.

Ao professor Miguel A. U. Opazo, pelo auxílio nas análises estatísticas.

Aos amigos Fernando e Eloísa, que também estiveram presentes neste momento tão importante da minha caminhada.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Este trabalho objetivou em um primeiro momento, a análise das condutas utilizadas pelos sujeitos de 3ª e 5ª séries, nas situações-problema propostas pelo jogo Fan Tan, envolvendo distintas operações aritméticas. Um segundo objetivo foi o de comparar, nos sujeitos com diferentes rendimentos escolares em Matemática, os níveis de construção de interdependência entre adição e subtração e, por último, analisar a construção destas interdependências nas situações propostas pelo jogo. Participaram do estudo 48 sujeitos, sendo 24 sujeitos de 3ª série e 24 sujeitos de 5ª série (12 com rendimento satisfatório em Matemática e 12 com rendimento insatisfatório). Sabendo-se da importância do trabalho com jogos de regras numa vertente construtivista, o jogo Fan Tan permitiu que as situações sobre a dialética lógico-matemática, voltadas à construção da interdependência entre adição e subtração fossem trabalhadas, conforme o experimento da escola de Genebra. A análise dos dados através de testes estatísticos demonstrou que as condutas dos sujeitos de terceira e quinta séries com rendimento insatisfatório não diferiram. Os sujeitos distribuíram-se principalmente no nível IIA, iniciando a construção da adição e subtração relativas. No grupo de 5ª série com rendimento satisfatório, predominaram as condutas superiores na relação de interdependência entre as operações, em que os sujeitos compreenderam a implicação entre ações aditivas e subtrativas.Os resultados nos conduzem a concluir a importância da construção de interdependências entre as operações, aspecto ainda pouco desenvolvido no âmbito escolar. Para a compreensão dos conteúdos trabalhados na 5ª série em matemática, é necessária a construção da interdependência entre as operações. Se as estruturas não estão presentes em um nível operatório, os sujeitos apresentam lacunas, como foi observado no grupo de quinta série com rendimento insatisfatório.No caso da terceira série o rendimento escolar apresentado pelos sujeitos em matemática não permitiu predizer diferenciações nos níveis de interdependência entre a adição e a subtração, sendo que o grupo com rendimento satisfatório não apresentou condutas superiores ao grupo com rendimento insatisfatório. O rendimento escolar não está considerando o nível de construção operatória dos sujeitos, está voltado para a aquisição de conteúdos transmitidos pelo professor.

ABSTRACT

This work objectified in a first moment, the analysis of the conducts used by the subject of 3a and 5a degree, in them situation-problem proposals for the game Fan Tan, involving different arithmetic operations. A second objective was it of comparing, in the subject with different school yield in Mathematics, the levels of interdependence construction between addition and subtraction and, last, to analyze the construction of these interdependences in the situations proposals for the game. They participated in the study 48 subjects, being 24 subject of 3a degree and 24 subject of 5a degree (12 with satisfactory yield in Mathematics and 12 with unsatisfactory yield). It being known about the importance of the work with games of rules in a source constructivism, the game Fan Tan allowed that the situations on the dialectic logical-mathematics, returned to the construction of the interdependence between addition and subtraction were worked, according to the experiment of the school of Geneva. The analysis of the data through statistical tests demonstrated that the conducts of the subject of third and fifth degrees with unsatisfactory yield didn't differ. The subjects were distributed mainly in the level IIA, beginning the construction of the addition and relative subtraction. In the group of 5a degree with satisfactory yield, the superior conducts prevailed in the interdependence relationship among the operations, in that the subjects understood the implication between addictive and subtractive actions. The results conduct us to conclude the importance of the construction of interdependences among the operations, aspect still not very developed in the school ambit. For the understanding of the contents worked in to 5a degree in mathematics, it is necessary the construction of the interdependence among the operations. If the structures are not present in an operative level, the subjects present lacunas, as it was observed in the group of fifth degree with unsatisfactory yield. In the case of the third degree the school yield presented by the subjects in mathematics didn't allow to predict differentiations in the interdependence levels between the addition and the subtraction, and the group with satisfactory yield didn't present superior conducts to the group with unsatisfactory yield. The school yield is not considering the level of operative construction of the subjects, it is gone back to the acquisition of contents transmitted by the teacher.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Introdução

As discussões sobre o ensino e a aprendizagem na área da matemática não são recentes. Tais discussões apontam, principalmente, para a importância de novos meios para o ensino de matemática, visando à superação de visões tradicionais, em que predominam a técnica, a memorização de fórmulas e o apego excessivo à verbalização pelo professor.

Buscam-se aprendizagens significativas no sentido de tornar o sujeito verdadeiramente "numeralizado", educado pela matemática, capaz de pensar matematicamente sobre as situações. "*Para pensar matematicamente precisamos conhecer os sistemas matemáticos de representação que utilizaremos como ferramentas. Estes sistemas devem ter sentido, ou seja, devem estar relacionados às situações nas quais podem ser usados. E precisamos ser capazes de entender a lógica destas situações, as invariáveis, para que possamos escolher as formas apropriadas de matemática*". (Nunes & Bryant, 1997, p.31)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) MEC/ SEF, 1997, p.62, para que o sujeito esteja, de fato, educado pela matemática, o professor precisa "*estimular os alunos a buscarem explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da matemática, como ela se desenvolveu, como pode contribuir para a solução tanto de problemas do cotidiano, como de problemas ligados à investigação científica*".

Na realidade brasileira, esta tarefa de formar sujeitos educados pela matemática, ainda não se efetiva por completo, segundo o resultado de algumas pesquisas que continuam enfatizando as dificuldades apresentadas pelos sujeitos nesta área.

A Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) realizou uma pesquisa envolvendo 41 países e divulgou seus resultados em 1/7/2003. Pela primeira vez o Brasil foi avaliado. Nos níveis de compreensão de leitura, ele ocupa a 37ª posição, enquanto o desempenho em matemática é ainda inferior, ocupando nosso país a 40ª posição, estando apenas na frente dos índices do Peru. O estudo foi baseado nas informações do Programa Internacional de Avaliação do Estudante (Pisa) realizado no ano de 2000, através de entrevistas com quatro a dez mil alunos em cada país.

As avaliações realizadas com estudantes de quarta e oitava séries do ensino fundamental (Saeb) também apresentam as dificuldades na aprendizagem de matemática. Segundo considerações da Secretaria de Educação do Paraná, presentes no Caderno AVA, 2000, p.57 "*os resultados mostram que os alunos, ao final das oito séries do ensino fundamental, apresentam dificuldades nas quatro áreas* (*números e operações, operações algébricas, noções de estatística e sobretudo, em medidas e geometria*)".

Os dados da Secretaria de Educação apresentam ainda dificuldades no entendimento de problemas envolvendo adição e subtração, principalmente no entendimento das idéias de completar e de comparar que "*são trabalhadas com menos freqüência ou passam despercebidas*". Ressaltam, como sugestões metodológicas que as idéias de juntar, acrescentar, tirar, comparar e completar podem ser exploradas nos problemas que envolvam adição e subtração.

Se os resultados das avaliações não são os esperados, certamente temos um campo de investigação importante para compreendermos, então, como as crianças constroem seu conhecimento matemático, por que não estão utilizando corretamente os conceitos desenvolvidos nesta área, que passos estão dando na caminhada para a compreensão de inúmeros aspectos da matemática.

A este respeito, o presente estudo pode inserir sua contribuição para a investigação de aspectos que envolvem a adição e a subtração, operações que constituem, dentre outros, conteúdos do ensino fundamental em nossas escolas. A aparente simplicidade que estas operações envolvem é um aspecto discutido no presente estudo. Diversos autores ressaltam que a compreensão das operações de adição e subtração vai além do conhecimento que, ao somar, aumenta-se a quantidade e, ao subtrair, a quantidade de elementos diminui. Principalmente propõe-se uma investigação acerca da construção da interdependência entre estas operações, sendo este estudo embasado pelo referencial teórico de Piaget.

Através do trabalho com jogos, podem ser desencadeadas e analisadas as idéias matemáticas dos sujeitos, como as de juntar, tirar, comparar, completar, além das idéias de igualar e construir diferenças. Visando à compreensão do processo de construção de conhecimento pelos sujeitos ativos em seu meio é que o jogo pode se inserir como recurso de aprendizagem, fonte de interações sociais, criações, descobertas e perturbações que desencadeiam, além de outros fatores, a interdependência entre as operações aritméticas fundamentais.

São diversas as obras de Piaget em que o jogar se destaca. Em *O juízo moral na criança* (1932/1994) Piaget, em contato com sujeitos de quatro a treze anos, realizou entrevistas sobre como se joga (no caso dos meninos o jogo de "bola de gude" e, no caso das meninas, "pique" e "amarelinha"), quem havia inventado o jogo e se as regras do jogo podem ser alteradas. Dessa forma, pesquisou a gênese e a evolução da prática e consciência das regras.

Na obra *A formação do símbolo na criança* (1946/1990), Piaget, analisando aspectos da função simbólica, buscou reconstituir a gênese da imitação, a representação cognitiva e, em especial, a obra destaca capítulos sobre o nascimento do jogo, a classificação dos jogos (o exercício, o símbolo e a regra), a explicação e o simbolismo secundário do jogo.

Os jogos como o "Xadrez Simplificado" e com estruturas semelhantes aos conhecidos em nosso meio por "Cara-a-Cara", "Reversi" e "Batalha Naval" estão presentes na obra *As formas elementares da dialética* (1980/1996). Foram analisadas, por um lado, as fases durante o desenvolvimento dos jogos voltadas ao conhecimento e correta utilização das regras, predominando, neste caso,uma fase discursiva, sem modificação das estruturas do pensamento. Por outro lado, analisaram-se as fases dialéticas, que orientam a construção de novas estruturas do pensamento, presentes em jogadas em que predominou a construção de estratégias para vencer o jogo. Piaget também ressalta, nesta obra, as estratégias que utilizam projetos parciais, levando em conta as configurações atuais da jogada e programas de conjunto, considerando as futuras jogadas, as implicações entre jogadas e as antecipações.

Partindo da análise desta última obra, em especial o capítulo escrito com a colaboração de A. Henriques e D. Maurice (ibid) "Um exemplo elementar de dialética lógico-matemática: problemas de igualação e construção de diferenças" é que este estudo se fundamentou e delimita o problema norteador do trabalho, na questão: **existe relação entre as construções de interdependências entre adição e subtração e o desempenho escolar em matemática?** Foram propostas, para tanto, situações-problema no jogo conhecido como Fan Tan com sujeitos de terceira e quinta séries do ensino fundamental, com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática.

Capítulo 1

O processo de equilibração e os mecanismos construtivos do conhecimento

A análise da construção de interdependências entre as operações aritméticas - adição e subtração em situações de jogo – e análise das condutas utilizadas pelos sujeitos nas situações-problema propostas pelo jogo FAN TAN, objetivos do presente estudo, encontra seu embasamento na teoria de Piaget que descreve o desenvolvimento cognitivo, ressaltando a interação sujeito-objeto e o processo de equilibração.

Neste processo de construção de conhecimentos, intervêm aspectos que também merecem destaque na teoria de Piaget, como os esquemas de ação e as estruturas mentais, componentes do sistema cognitivo e mecanismos como a tomada de consciência, abstração reflexiva, a contradição e a dialética.

Na crescente adaptação do sujeito ao meio está presente um sistema cognitivo aberto no sentido das trocas com o meio, e um sistema fechado em ciclos preservando a conservação do sistema (Piaget, 1977 b). Tal sistema é composto por estruturas, definidas como um "conjunto de poder dedutivo": são possibilidades de coordenar idéias.

Uma estrutura apresenta as características de totalidade, transformação e auto-regulação. Por totalidade ou conservação, compreende-se que a relação entre os elementos nunca resulta num elemento estranho ao conjunto, a propriedade de conjunto é mantida. A transformação garante a relação dinâmica entre os elementos da estrutura, consistindo propriedades estruturantes e estruturadas. A auto-regulação acarreta a conservação e fechamento do sistema, visto que nunca uma estrutura é regulada por outra. As estruturas são formadas por um conjunto de esquemas de ação, que são ações interiorizadas, coordenadas, e consiste num saber fazer, por meio do qual o sujeito assimila os objetos.

Conforme afirma Piaget (1966/1993), existem estágios que marcam o aparecimento de estruturas sucessivamente construídas, ocorrendo a aparição em cada estágio de estruturas originais, definindo formas particulares de equilíbrio. Existem estruturas totalmente programadas, como é o caso da maturação sexual, manifestando-se em determinadas épocas do desenvolvimento orgânico, também estruturas parcialmente programadas, como as do sistema nervoso, dependentes, em grande parte, do meio para seu desenvolvimento e construção e estruturas nada programadas, sendo as estruturas mentais, específicas do acesso ao conhecimento.

Num primeiro estágio (do nascimento até aproximadamente dois anos), a inteligência sensório-motora, prática que atua no imediatamente presente, é constituída por estruturas de ritmos, regulações diversas e pelo princípio da reversibilidade através do esquema do objeto permanente. Num momento seguinte, a inteligência representativa ou pré-operacional possibilita que um objeto seja substituído no pensamento por uma representação simbólica. Ainda não existe um conhecimento objetivo, há uma assimilação deformante da realidade, pela parcialidade de coordenação dos esquemas.

Por volta dos 6 aos 7 anos ocorrem mudanças qualitativas que permitem à criança operar em pensamento, atuando sobre objetos, o que significa que suas ações são interiorizadas, reversíveis, atuando em sistemas de conjunto, sendo possível a ação de combinar toda operação com seu inverso, de tal maneira que ambos se anulem mutuamente. A possibilidade de raciocinar sobre hipóteses inicia-se por volta dos onze anos, no nível de operatoriedade formal, quando a reversibilidade por negação e a reversibilidade por reciprocidade estão coordenadas num sistema de conjunto único de estrutura de grupo, ocorrendo a possibilidade de pensamento com manejo de hipóteses e raciocínio sobre proposições.

Os fatores apontados por Piaget (1970) que intervêm na construção das estruturas que permitem o conhecimento são: maturação e hereditariedade, experiência, interações e transmissões sociais e a equilibração. Existem fatores de ordem biológica, como a maturação do sistema nervoso e endócrino que atuam no desenvolvimento cognitivo, mas não são os fatores determinantes deste desenvolvimento, é uma "condição de possibilidades" de atuação no meio. E é através desta atuação que o sujeito realiza experiências empíricas e desenvolve os conhecimentos físicos e lógico-matemáticos. O conhecimento físico provém da ação sobre os objetos, observação de suas propriedades e transformações. O conhecimento lógico-matemático, interligado com a ação sobre os objetos, caracteriza-se pelas relações lógicas construídas pelo sujeito como a comparação, classificação, seriação de elementos, presentes na mente dos sujeitos.

Um terceiro fator do desenvolvimento cognitivo é designado por Piaget como transmissão e interações sociais, que envolvem as informações recebidas de outras crianças ou adultos e que, sendo desafiadoras, são fontes importantes de conflitos, que geram níveis mais elevados de desenvolvimento.

Coordenando e regulando os fatores maturação, experiência e transmissão e interações sociais está o quarto fator, a equilibração. Segundo Piaget (1977 b), a equilibração é um "*processo que leva de certos estados de equilíbrio aproximado para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações*" (p.13). São reações ativas do sujeito às perturbações do meio, uma busca constante de um novo equilíbrio quando o estado de equilíbrio anterior, entre os processos de assimilação e acomodação, não é mais suficiente para garantir as interações entre o sujeito e o objeto. Formam-se equilíbrios novos e melhores, tanto em sua estrutura qualitativa, como no aumento de seu campo de atuação. São denominadas equilibrações majorantes.

O processo de equilibração comporta dois principais postulados:

a) o primeiro refere-se ao processo de assimilação em que os esquemas incorporam elementos do meio exterior compatíveis com a sua natureza.

b) o segundo refere-se ao fato de estes esquemas de assimilação necessitarem acomodar-se aos elementos assimilados. Então modificações são feitas, considerando as suas particularidades, sem contudo perder sua continuidade ou seu poder de assimilação anterior.

Decorrente da interação sujeito e objetos, Piaget distingue três formas de equilibração, sendo a primeira forma a equilibração entre a assimilação destes esquemas de ação e a acomodação dos esquemas aos objetos. Ao mesmo tempo em que os objetos são necessários para o desenvolvimento das ações, estas, conferindo significado aos objetos, podem transformá-los. Existem conflitos entre o sujeito e os objetos se a estrutura que o sujeito possui não puder se acomodar às características do objeto, ou quando as previsões feitas pelos sujeitos não forem confirmadas. A segunda forma de equilibração proporciona a interação entre os subsistemas, quando se utilizam diferentes esquemas para se atingir uma mesma finalidade. Muitas vezes, ocorrem também conflitos entre os subsistemas pela falta de coordenação entre eles. A terceira forma envolve o equilíbrio da diferenciação e da integração, das relações entre os subsistemas e a totalidade, a conservação do todo e das partes. Cada esquema modificado diferencia-se de outros e precisa ser integrado ao sistema total que sofrerá alterações nesta integração.

Para o desenvolvimento cognitivo, além destas diversas formas de equilibração, os desequilíbrios apresentam-se como fontes de progresso, encaminhando os sujeitos a ultrapassarem os estados em que atualmente se encontram, para novas direções. Certamente a teoria de Piaget rompe com modelos inatistas ou empiristas, ao ressaltar a interação sujeito e objeto e destacar o papel dos desequilíbrios e reequilibrações na aquisição de conhecimentos. Neste sentido, nunca encontramos um ponto de parada no desenvolvimento cognitivo, ele não está pré-formado, cada desequilíbrio provoca sempre a busca de equilíbrios mais estáveis, novos problemas vão sendo levantados na medida em que estados de equilíbrio se consolidam e as estruturas estão envolvidas constantemente em diferenciações e integrações em sistemas sempre mais complexos.

A principal razão destes desequilíbrios está na falta de simetria entre as afirmações e as negações, centrando-se as crianças, nos anos iniciais do desenvolvimento, nos aspectos positivos dos objetos, nas afirmações, mais do que nas negações. As negações são construídas pelos sujeitos, marcando um processo mais demorado e complexo. Progressivamente, a negação é integrada no sistema operatório, em que está presente principalmente a reversibilidade do pensamento, resultando na compreensão que a escolha da aplicação de um sistema implica na não aplicação de outro sistema.

O processo de regulação explica o como a equilibração e as reequilibrações ocorrem no desenvolvimento cognitivo. A regulação é uma reação a uma perturbação, não sendo caracterizada quando uma perturbação provocar a repetição da ação, sem modificações. Existem perturbações que compreendem *feedback* negativos, relativas à resistência dos objetos. Há obstáculos que desencadeiam insucessos ou erros, e quando o sujeito se torna consciente destes, os corrige, mudando o que está errado.

Outra classe de perturbações compreende *feedback* positivos, reforços, conservações do que é adequado; é relacionada com esquemas de assimilação já ativados pelo sujeito. Ocorre na presença de lacunas, quando as condições para a conclusão de uma ação não são suficientes ou quando falta um conhecimento na resolução de um problema.

As regulações podem apresentar como características serem automáticas com pouca variação dos meios empregados nas ações, ou ativas. No momento do jogo, é importante que a regulação seja ativa, acarretando uma tomada de consciência dos meios empregados na ação, fator que provoca ou origina uma representação ou conceituação desta ação.

Segundo Piaget (1977 b), as regulações por *feedback* negativo conduzem à compensação, sendo que o sujeito, ao corrigir, modificar sua ação, pode fazê-lo através de uma ação em sentido contrário que anula a perturbação inicial (inversão) ou pode neutralizar a ação, diferenciando o esquema para o acomodar-se ao elemento perturbador (reciprocidade). Importante implicação educacional decorre destes processos de regulação e de compensação:

> *A intervenção de elementos perturbadores e as acomodações resultantes das compensações dão origem a conhecimentos novos, uns relativos aos objetos e outros às próprias ações do sujeito, de maneira que a reequilibração se torna indissociável de construções...(Piaget, 1977, p.45)*

Como a reversibilidade é preparada por níveis de compensação diferentes, é importante definir as três fases em que a compensação ocorre, conforme forem ou não perturbadoras para o sujeito e conforme os procedimentos utilizados por estes sujeitos. A compensação α (Alfa) compreende uma pequena perturbação próxima do ponto de equilíbrio do sistema, alcançada por uma simples modificação introduzida pelo sujeito em sentido inverso da perturbação colocada inicialmente. São compensadoras parcialmente e o equilíbrio que daí resulta é muito instável. Se a perturbação é mais forte ou é implicitamente considerada mais forte pelo sujeito, este anulará a perturbação, pondo-a de lado ou afastando-a.

A fase de compensação β (Beta) integra no sistema o elemento perturbador do meio exterior, não anulando ou rejeitando o elemento novo e, sim, modificando o sistema até tornar assimilável o fato inesperado. Ocorrem modificações que podem sofrer ainda compensações parciais, mas são superiores ao tipo α (Alfa), sendo compensações essencialmente conceituais, modificando o sistema inicial. Nas compensações do tipo γ (Gama), o sujeito consegue antecipar as variáveis, perdendo o caráter de perturbação, já fazendo parte das transformações virtuais do sistema, alcançando um equilíbrio móvel e mais estável.

Inserido neste processo mais geral de equilibração, está um dos mecanismos que asseguram as construções de novidades pelos sujeitos, a abstração reflexiva, termo designado por Piaget (1977/1995), que comporta dois aspectos inseparáveis. O primeiro refere-se ao "*réfléchissement"* uma projeção para um patamar superior do que foi retirado do patamar inferior. O segundo refere-se a uma "*réflexion",* uma ação mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior, do que foi transferido do inferior. Estando a abstração reflexiva, presente nas diversas fases do desenvolvimento cognitivo e nos diversos momentos de construção do conhecimento, também é fonte do conhecimento lógico-matemático, não é restrita à leitura de observáveis do objeto, implica na coordenação das ações dos sujeitos. Como diferencia Piaget (apud Ramozzi-Chiarottino, 1972), na abstração empírica o conhecimento sobre o peso de um objeto já faz parte da constituição deste objeto e não depende da ação do sujeito. No caso do conhecimento lógico-matemático, os conhecimentos derivam das ações exercidas sobre os objetos e da coordenação das ações: "*é a ação de reunir que permite o conhecimento de uma soma como totalidade lógica ou numérica*" (p.72).

A abstração reflexiva pode permanecer inconsciente no sujeito ou pode dar lugar a tomadas de consciência, sendo as abstrações refletidas (*réfléchie*) quando o resultado da ação é consciente para o sujeito.

Para Piaget (1977 a), a tomada de consciência não se reduz a um processo de iluminação, sem modificações no sistema cognitivo. É um processo que exige reconstruções e conceituação, transformando os esquemas de ação em conceitos por meio de coordenações. Envolve também regulações ativas, quando as regulações automáticas não são mais suficientes, o que necessita da consciência das ações. Segundo o autor:

> *O estudo da tomada de consciência na perspectiva geral da relação circular entre o sujeito e os objetos- o primeiro só aprendendo a conhecer-se mediante a ação sobre estes e os segundos só se tornando cognoscíveis em função do progresso das ações exercidas sobre eles. (p.211)*

O mecanismo da tomada de consciência parte da periferia (P) (de objetivos e de resultados) e orienta-se para as regiões centrais da ação (C), chegando ao reconhecimento dos meios utilizados nas ações, os motivos de escolhas ou modificações das ações. De acordo com Piaget (1977 a), este mecanismo aparece como um processo de conceituação que reconstrói e ultrapassa no plano da representação o que era adquirido no plano dos esquemas de ação. A ação é enriquecida pela conceituação, pelo reforço da capacidade de previsão e da criação de um plano de utilização da ação imediata.

A ação constitui um conhecimento (*savoir faire*) autônomo, cuja conceituação se efetiva por tomadas de consciência que procedem da periferia para regiões centrais da ação. Neste sentido, a tomada de consciência parte dos resultados exteriores da ação, para, em seguida, realizar a análise dos meios empregados, em busca de coordenações mais gerais (reciprocidade e transitividade), mecanismos inconscientes da ação.

Ressaltando que no desenvolvimento cognitivo existe, inicialmente, a primazia dos elementos positivos sobre os negativos, os observáveis aparecem perceptivelmente sob seus aspectos positivos antes das negações, situando-se na periferia das atividades do sujeito. As negações tendem a aproximar-se das regiões mais centrais da ação, com relacionamentos, coordenações e inferências cada vez mais complexas (Piaget, 1978).

O processo de interiorização parte da periferia para as regiões centrais da ação, sendo responsável pela construção das estruturas lógico-matemáticas; o sujeito se torna, no nível das abstrações refletidas, capaz de teorias e não mais unicamente de raciocínios concretos. O processo de exteriorização parte da periferia para as regiões centrais dos objetos, envolvendo explicações físicas (causalidade), o sujeito, no nível das abstrações refletidas, torna-se apto a variar os fatores em suas experimentações e considera variedades de modelos para explicar os fenômenos.

Definidos por Piaget (1974/ 1978) os três níveis do conhecimento, temos em um primeiro momento uma ação material, sem conceituação, um sistema de esquemas com saberes elaborados. Pode ser designado por um "fazer" (*réussir*) que é compreender em ação uma dada situação, visando atingir os fins propostos, atingir o êxito. Um segundo nível do conhecimento é o da conceituação que retira seus elementos dos esquemas de ação, por meio das tomadas de consciência. Um terceiro nível é o das abstrações refletidas, envolvendo operações sobre operações, em segunda potência. Estes dois últimos níveis de conhecimento englobam o "compreender", que é o domínio em pensamento das razões das ações, resolvendo possíveis problemas que surgem ou explicando sucessos, podendo preceder a ação ou abster-se dela. Na relação entre a abstração reflexiva, a tomada de consciência e o próprio processo de equilibração, está presente a contradição no sistema cognitivo. A contradição é concebida, na teoria de Piaget, como uma compensação incompleta, decorrente do predomínio dos aspectos positivos, das afirmações, sobre as negações. Podem ser encontradas três grandes classes de contradições: a primeira, a mais simples, em que uma mesma ação pode parecer conduzindo a resultados opostos. A segunda classe é caracterizada por uma oposição incompleta entre classes de objetos, uma classe supõe a negação da outra e o sujeito considera como se tivessem partes em comum, é uma contradição na própria composição das classes. A terceira classe resulta das inferências errôneas ou falsas implicações.

As superações das contradições ocorrem por dois processos complementares: extensão e compreensão, um possibilitando a ampliação do referencial e este último é relacionado à relativização das noções. São necessárias novas compensações entre afirmações e as negações para superação das contradições e novas construções relacionadas com as abstrações reflexivas.

Após sete anos de estudo sobre as contradições, Piaget (1980/1996) apresenta seu estudo sobre a dialética. Afirma o autor que, no decorrer do desenvolvimento cognitivo, assiste-se a alternâncias de fases de “construções dialéticas” e fases de “exploração discursiva” em que o sujeito pode proceder por dedução, a partir de sistemas de conhecimento equilibrado. A seqüência tese-antítese-síntese, definição corrente de dialética, segundo Piaget, pode conter uma construção dialética sem uma contradição a ser superada. A construção da noção do número é um exemplo onde dois subsistemas distintos se coordenam (inclusão e ordem serial), tornando-se interdependentes, formando uma nova síntese.

A dialética caracteriza-se pela construção de interdependências entre domínios ou subsistemas concebidos anteriormente como distintos ou mesmo podem se apresentar sem relação entre si e são concebidos numa nova totalidade. Vale se destacar que o processo dialético não se confunde com qualquer atividade cognitiva, sem uma distinção. É definido de maneira geral, como o “aspecto inferencial” do processo de equilibração, do processo de construção de conhecimentos que implica a formação de estruturas. O que é retirado das estruturas, sem modificações ou enriquecimentos, envolve as inferências discursivas.

Encontra-se na gênese do processo dialético a “implicação entre ações e operações” acarretando transformações nas ações para possibilitar outras novas transformações, consistindo, portanto, na construção de interdependências entre significações sustentadas por construções operatórias ou pré-operatórias.

O processo dialético dá lugar a círculos ou espirais: progressos em um sistema conduzem reorganização de outro sistema, o que repercute também qualitativamente no primeiro sistema. Existem, então, passos proativos e retroativos, sustentados por construções operatórias ou pré-operatórias. De acordo com Ferreiro (2001, p.135) vale se destacar que o pensamento dialético de Piaget está presente em seu modelo de equilibração:

> *Todo esquema em funcionamento necessita do objeto assimilável para sua própria conservação (nesse sentido, os esquemas são concebidos em direta prolongação dos órgãos ao nível biológico); um objeto não assimilável imediatamente constitui uma perturbação; os mecanismos de regulação atuam tentando compensar a perturbação. O modo mais efetivo de compensação é precisamente aquele que consegue tornar assimilável o elemento inicialmente perturbador, o que exige uma modificação do próprio esquema (por diferenciação, integração, estabelecimento de novas relações antes ignoradas etc) e a realização de uma reequilibração.*

Segundo Piaget (1980/1996), algumas características podem ser evidenciadas em situações dialéticas: a primeira, de caráter mais geral, envolve a construção de interdependências entre sistemas, como A e B, opostos ou estranhos e, a partir de sua reunião, formam uma nova totalidade T. A análise das equalizações, objetivo do presente estudo, é um exemplo em que ocorre a coordenação de duas operações, adição de elementos em um conjunto, implica a subtração em outro. Conforme o mencionado:

> *Se toda adição + X sobre um ponto de um sistema qualquer implica a subtração – X em outra região, essa implicação apesar de sua evidência uma vez construída, não preexiste absolutamente à sua elaboração prova em si de que durante longos estágios a adição + X é concebida como uma produção ex nihilo, por falta de compreensão das conservações.* (Piaget, 1980, p.201)

Uma segunda característica é relativa às interdependências entre as partes de um mesmo objeto: a cada aproximação dos objetos com o objetivo de conhecê-los, ocorre um recuo deste, pelas particularidades de cada situação e problemas que podem ser levantados. Como terceira característica, as "superações", geradas por uma nova interdependência, que levam a uma nova totalidade, transformando a totalidade anterior num subsistema. A quarta característica refere-se às circularidades ou espirais que intervêm na construção das interdependências. E uma última característica, de relativização dos subsistemas, que, mesmo sendo de caráter isolado e parecerem absolutos nas situações analisadas, estão em relação de interdependência com outros subsistemas.

No estudo de Piaget sobre *As formas elementares da dialética* (1980/1996), o termo "elementares" não apresenta como sinônimo ser simples, visto que na relação sujeito-objeto na busca de descoberta do real, a dialética está presente e de forma variada, podendo ser destacada em três tipos: na reconstituição das propriedades descobertas nos objetos, tornando-as solidárias; no procedimento em direção à exteriorização, inseparável do processo de interiorização e síntese destes das formas e conteúdos, criando "modelos".

Como aponta Macedo na apresentação da tradução desta última obra de Piaget (1980/1996) é a "*dialética do conhecimento em sua tríplice dimensão: interiorizável (perspectiva do sujeito), exteriorizável (perspectiva do objeto) e sintetizante (modelos)*". Assim, insere-se o trabalho com jogos que pressupõem a atividade construtiva do sujeito, o desafio, o imprevisto, a organização, a construção de estratégias na interação com outros sujeitos, enfim, envolvem formas dialéticas, relacionais.

O gerador destas interdependências, como aponta Piaget (1983/ 1986), o “motor” comum está envolvido com as relações estreitas entre o “possível” e o “necessário”, que possibilita a formação de estruturas operatórias e do real. São duas modalidades descritas na construção de esquemas de ação, como aponta Macedo (1994). Uma delas são os “possíveis” pelos quais a criança compreende o objeto ou sua forma, mesmo que circunstancial e supõe a criação de diferentes meios, procedimentos e diferenciações, numa dada situação. A busca de compreensão dos objetos prevê muitas vezes a diferenciação dos esquemas. Se a solução encontrada não é suficiente, é preciso fazer de outra forma, encontrar novas saídas para os problemas que os objetos nos colocam, “ousar ir além dos limites” (p.8).

Outra modalidade é o “necessário” pelo qual a criança estende suas ações, coordenações no espaço e no tempo, formando novos esquemas integrados no sistema. “Estender significa poder abstrair das formas dos objetos, um conteúdo comum a eles” exige a coerência para o sistema. Ainda podem ser evidenciados os três níveis evolutivos referentes à construção do possível e do necessário.

Conforme Piaget (1981/1985 e 1983/1986), o nível I (entre 4 a 6 anos) se caracteriza por possíveis analógicos e por pré-necessidades e pseudonecessidades. No nível II (entre 7 a 10 anos), surgem os co-possíveis e co-necessários limitados e, no nível III, (a partir de 12 anos) é caracterizado pelos co-possíveis e co-necessários ilimitados. Seguindo uma lei de evolução que engloba o real, o possível e o necessário evidenciam-se três períodos. O primeiro é marcado pela indiferenciação entre o real, o possível e o necessário, o real é acompanhado de múltiplas pseudonecessidades e o possível é reduzido a prolongamentos do real atual. No segundo período, ocorre a diferenciação destes três aspectos (real, possível e necessário): o possível se desdobra em co-possíveis, o necessário ultrapassa as coordenações parciais e o real passa a se estabelecer em conteúdos concretos. Num último período, é estabelecida a integração num sistema total entre o real, o possível e o necessário, aparecendo o real como um conjunto de atualizações entre os possíveis e subordinado aos sistemas de ligações necessárias.

Diante das principais contribuições da teoria de Piaget, como os esquemas de ação, as estruturas mentais, o processo de equilibração, a abstração reflexiva, a tomada de consciência, o possível e necessário, a contradição e a dialética, pode se evidenciar o lugar ocupado pelo jogar em suas obras. Neste sentido, apresentar-se-ão as pesquisas que relacionam a teoria piagetiana e prática pedagógica e psicopedagógica por intermédio dos jogos de regras.

Capítulo 2

O jogar em uma perspectiva construtivista

> *Afinal, de todas as tentativas realizadas para definir o homem, como "um animal racional", ou "um animal econômico", ou "um animal que fala", há uma que, a nosso ver, permanece carente de uma exploração mais consistente: segundo o poeta inglês C. Lamb (1775-1834), "o homem é um animal que joga".*
>
> (Machado, 1992, p.55)

Uma exploração mais consistente sobre o jogar tem envolvido os sentidos de investigação antropológicos e os sentidos psicológicos, na literatura atual.

O jogo é uma atividade universal, encontrada nos vários grupos humanos, em diversos períodos históricos e momentos de diferenciação na organização econômica. Certamente, não são encontrados os mesmos jogos em todas as épocas, não sendo ainda suficientes as informações obtidas sobre as atividades lúdicas das crianças no passado. E, como principal dificuldade, está uma indefinição de infância, de brincar/jogar.

Como coloca Ariès (apud Rossetti, 2001) ainda no início do século XVII "*não existia uma separação tão rigorosa como hoje entre as brincadeiras e os jogos reservados às crianças e as brincadeiras e os jogos reservados aos adultos. Os mesmos jogos eram comuns a ambos*" (p.21). Foi durante os séculos seguintes que a separação entre o mundo das crianças e o mundo dos adultos começou a se concretizar e a infância passou a ser o "repositório dos costumes abandonados pelos adultos", incluindo-se os jogos em grupo típicos da época da colheita, por exemplo.

Muitos autores têm evidenciado o trabalho com jogos, apresentando aspectos diferenciados em suas análises: Huizinga, 1938 –jogo como elemento da cultura, Chateau, 1955,-valor pedagógico do jogo, Callois, 1958,- valor antropológico do jogo, Kamii & DeVries, 1991,- valor escolar , Kishimoto, 1994, - concepção histórica, Wajskop, 1995- o direito de brincar, Vygotsky, 1933/1984, desenvolvimento da linguagem via simbolismo lúdico, Winnicott (1975) leitura psicanalítica do brincar e a realidade.

Para Piaget (1970) o jogo tem grande importância na área educacional, visto que, pela atividade lúdica, a criança assimila ou interpreta a si mesma a realidade. O jogo, no qual prevalece a assimilação pela própria evolução interna, pouco a pouco se transforma em construções adaptadas, exigindo sempre mais de trabalho efetivo.

O jogo constitui um desafio ao pensamento, uma perturbação que é compensada e desencadeia progressos no desenvolvimento do pensamento. Ao jogar, incorporamos os dados da realidade, às nossas estruturas e realizamos para isso, sucessivas acomodações, há desequilíbrios e contradições superadas pelo estabelecimento de ligações entre o conhecido e o desconhecido, o velho e o novo, a situação atual e a anterior.

Como afirma Piaget (1977), parece difícil aceitar a idéia de que o desenvolvimento e a aprendizagem dependem de desequilíbrios. A escola está acostumada com a idéia de ordem, de estabilidade, de certezas. Os desequilíbrios devem ser provocados unicamente na medida em que o nível do desenvolvimento da criança permite um reequilíbrio, em direção a um nível superior ao precedente. Afirma também

> *O jogo é um caso típico das condutas negligenciadas pela escola tradicional, dado o fato de parecerem destituídos de significado funcional. Para a pedagogia corrente, é apenas um descanso ou o desgaste de um excedente de energia. Mas esta visão simplista não explica nem a importância que as crianças atribuem aos seus jogos e muito menos a forma constante de que se revestem os jogos infantis, simbolismo ou ficção, por exemplo.*
>
> (Piaget, 1970, p. 158)

Justamente o que chama a atenção em um jogo é o fato de depararmos com dificuldades, com um desafio que nos intriga, permitindo investigações, levantamento de hipóteses e a busca de superação de dificuldades de ordem afetiva, cognitiva ou psicomotora. Superando o puro prazer da atividade lúdica, o jogo propicia um espaço para o pensar, na medida em que se pode conversar com o jogador sobre suas jogadas, pode-se orientá-las, analisá-las, estabelecer comparações entre as ações e solicitar justificativas, buscando a tomada de consciência necessária para a construção de novas estratégias, por meio de regulações ativas (Brenelli,1996). Inserido no desenvolvimento da inteligência, o jogo não constitui uma conduta à parte ou um tipo particular de atividade dentre outras, fazendo-se presente na ação de cada sujeito. Deste modo, o jogo não tem uma finalidade em si mesma, não deve ser caracterizado como da ordem do espontâneo, de puro prazer somente, sem objetivos ou uma organização que contenha em si uma supramotivação.

O desenvolvimento e a organização dos jogos seguem os estágios definidos por uma estrutura de conjunto, com uma ordem que não sofrerá variações. Em relação a isto, apresentam-se três grandes tipos de estruturas: o exercício, o símbolo e a regra, encontrando-se os jogos de construção entre estas três estruturas e as condutas adaptadas. No período sensório-motor, temos os jogos de exercício, no período pré-operatório, os jogos simbólicos e, no período das operações concretas, os jogos de regras. Tal classificação foi teorizada por

Piaget (1964), outras foram veiculadas por autores como Quérat, Groos e Stern (citados por Piaget, sem data) entre outros, que buscaram categorizar os jogos por seus conteúdos.

No jogo de exercício sensório-motor, o objeto é assimilado a um esquema anterior. Não ocorrendo um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, predomina a assimilação funcional ou reprodutora, menos acomodativa. Na imitação presente no jogo simbólico, o esquema anterior é transformado por acomodação ao modelo real, mas, sem submeter-se às regras da realidade exterior, a assimilação do objeto é deformante. Com a socialização da criança, o jogo adota regras ou adapta a imaginação simbólica aos dados da realidade, em forma de construções cada vez mais próximas do real.

Nos jogos de exercícios, a ação deriva do próprio prazer do funcionamento, sem uma intenção de símbolos ou regras. A atividade lúdica supera os esquemas reflexos e prolonga quase todas as ações. Há uma extinção gradual dos jogos de exercícios, podendo ser pela passagem do exercício simples para combinações sem finalidades e depois combinações com finalidades, no final do período. Ou mesmo, o exercício simples pode se transformar em simbolismos, ou se tornar coletivo, ser regulado e evoluir para os jogos de regras.

No estudo sobre o simbolismo secundário do jogo realizado em A *formação do símbolo na criança,* Piaget (1946) amplia a compreensão do simbolismo infantil. Este estudo procura demonstrar a concomitância entre o simbolismo primário e o simbolismo secundário, no momento do jogo. Esta distinção entre os simbolismos é relativa devido a todos os intermediários que aí se encontram; todo o símbolo é, ao mesmo tempo, primário e secundário. Há símbolos que comportam, além de sua significação imediata e compreendida pelo sujeito, também significações mais profundas que comportam principalmente três grupos de símbolos lúdicos: os que conduzem aos interesses ligados ao corpo, os que se referem aos sentimentos familiares elementares e os referentes às preocupações centradas sobre o nascimento dos bebês.

Para Piaget (1993), o jogo simbólico é indispensável ao equilíbrio afetivo e intelectual da criança, em que a elaboração do real em função das necessidades do eu é a motivação que se sobressai, em relação à adaptação ao real. É importante que a criança possua um meio de expressão próprio, por estar envolta num coletivo que lhe impõe regras e signos arbitrários, como ressalta "*obrigada a adaptar-se, sem cessar, a um mundo social de mais velhos, cujos interesses e cujas regras lhe permanecem exteriores... a criança não consegue, como nós, satisfazer as necessidades afetivas e até intelectuais do seu eu nessas adaptações...*" (p.51)

Os jogos simbólicos comportam a assimilação do real ao eu. Nestes jogos, há uma linguagem de símbolos, um sistema de significantes construídos pelas crianças e modificáveis à medida de suas vontades e de suas necessidades, manifestando-se nas mais diversas formas particulares, principalmente afetivas e por vezes ligadas a interesses cognitivos. O jogo simbólico estimula o desenvolvimento do pensamento sobre os objetos não-existentes representados por esses símbolos. É um passo necessário no caminho do desenvolvimento da inteligência adaptada.

Muitos exemplos são colocados por Piaget e são visíveis as necessidades de simbolismos que permitam à criança reviver acontecimentos e, sobretudo, os conflitos afetivos através de jogos, podendo servir para a liquidação destes conflitos, compensação de necessidades não satisfeitas, inversão de papéis...Também o simbolismo apóia-se em conflitos inconscientes: interesses sexuais, defesa contra a angústia, fobias, agressividade entre outros exemplos.

Importante evidenciar que, segundo Piaget (1946), o inconsciente "*encontra-se em toda a parte, portanto existe tanto um inconsciente cognitivo, quanto um inconsciente afetivo*", entendendo-se por inconsciente cognitivo um saber fazer, sem a percepção do que se está fazendo, onde as estruturas mentais do sujeito não estão conscientes no momento da ação, apenas são usadas, num processo diferenciado da tomada de consciência dos instrumentos utilizados.

Nos jogos simbólicos ocorre a representação fictícia de um objeto ausente, comparações entre um elemento real e um elemento imaginado. Neles são realizadas representações egocêntricas, deformantes, onde a criança passa a descobrir que um objeto pode ser substituído por outro. Quanto mais a criança se adapta às realidades físicas e sociais, menos utiliza as transformações simbólicas, submetendo o eu ao real. A superação desta fase simbólica pode originar-se nos fatos: o conteúdo do simbolismo se torna inútil diante da realidade, o simbolismo compartilhado por várias crianças pode levar à regra e, tornando-se uma imagem imitativa da realidade, pode incorporar-se a uma adaptação inteligente e mais objetiva.

Nos jogos de regras, as relações sociais estão presentes. A regra é uma regularidade imposta pelo grupo e sua violação representa uma falta. Tais jogos se desenvolvem com a idade, persistindo nos adultos. Piaget (1932), em sua obra *O juízo moral na criança* utilizou-se de jogos de regras para estudar o raciocínio moral infantil, jogo de "bola de gude" investigando os meninos e "amarelinha e pique" para as meninas. Em especial destaque a maneira pela qual as crianças aplicam as regras (prática das regras) e a maneira pela qual as crianças de diferentes idades apresentam o caráter de anomia, heteronomia ou autonomia frente às regras do jogo (consciência da regra).

Em relação à prática das regras, Piaget apresentou quatro estágios sucessivos:

a) estágio puramente motor e individual- com manipulação de objetos em função dos desejos e hábitos motores do sujeito.

b) Estágio egocêntrico- mesmo em presença de outras crianças, o sujeito joga para si, sem o estabelecimento de regras.

c) Estágio de cooperação nascente- não há unificação das regras utilizadas em um jogo, apesar da busca de vencer outros jogadores.

d) Estágio da codificação das regras- partidas regulamentadas pela regra única do jogo, combinada pelos jogadores.

Sobre a consciência das regras, num primeiro estágio a regra não é coercitiva, ainda não bem compreendida pelo sujeito, não a considera imposta pelos adultos ou outros seres superiores, como acontece no segundo estágio em que a regra é considerada sagrada e intangível. A regra é considerada como uma lei imposta pelo consentimento mútuo num terceiro estágio, podendo ser alterada se o grupo assim o desejar. A cooperação começa a se instalar em momento da presença de operatoriedade do sujeito, joga-se com o outro, levando-se em conta suas jogadas, ocorrendo a reciprocidade nas relações sociais. O jogar com antecipações também passa a acontecer, criam-se hipóteses de ação. Como afirma Macedo (1997), é o jogar bem que implica em habilidade, inteligência, construções. Difere da moral correspondente ao jogar certo, obedecendo as normas estabelecidas, caso contrário o jogo não acontece ou existe até alguma "punição".

Macedo (1996), apresentando a tradução da obra de Piaget *As formas elementares da dialética* (1980/1996), considera que os jogos de regras são veículos para o processo de desenvolvimento e solicitam, por sua estrutura e conteúdo, formas de interdependência relacional ou dialética. Na análise dos experimentos e dos jogos poder-se-ia esperar que os sujeitos utilizassem inferências discursivas evidentes, respostas já pré-determinadas, mas "*as soluções exigem sínteses e a construção de interdependências as quais não se pode negar um caráter dialético*". Conforme foi citado na introdução deste trabalho, Piaget e colaboradores utilizam o jogo de regras "Xadrez Simplificado", e técnicas bastante semelhantes aos jogos conhecidos como "Batalha Naval" "Cara-a-Cara" e "Reversi" objetivando investigar a formação do pensamento dialético.

Através da análise do jogo "Xadrez Simplificado", Piaget e colaboradores (ibid) diferenciam "projetos locais" e "programas de conjunto" no momento das jogadas dos sujeitos. Segundo os autores, os projetos locais "*dirigem a setores limitados e mantêm-se relativamente rígidos, sem uma consideração suficiente das variáveis possíveis da situação de conjunto e notadamente das interações eventuais com outros setores ou das reações prováveis do parceiro*" (p.71)

Em programas de conjunto, ocorrem implicações compostas entre as jogadas dos sujeitos, em que estes podem considerar várias posições sucessivas, levando em conta a ordem temporal, reciprocidade entre os jogos dos parceiros, antecipações das ações do adversário, deduzir por implicação as conseqüências que teriam a ação do adversário, sem mesmo esta ter sido realizada, é "*uma transformação contínua, atual ou possível das situações*" (p.71)

Foram evidenciados passos discursivos e dialéticos nos diversos experimentos e jogos propostos por Piaget (1980/1996). Os passos discursivos estão presentes em momentos em que se realiza "*a tomada de consciência de uma dedução possível a partir de conteúdos que a comportavam anteriormente*" (p.143) sem modificações nas estruturas do pensamento. Já a fase dialética se caracteriza por novas formas de estruturar o pensamento, ocorrendo implicações entre ações, interdependência entre os processos proativos e retroativos, relativizações ou sínteses.

2.1-Intervenção pedagógica e psicopedagógica com jogos de regras

A psicopedagogia, área de confluência entre a psicologia a e pedagogia, apresenta como campo de atuação a atividade preventiva, de diagnóstico e intervenção nas dificuldades de aprendizagem. Podem ser evidenciadas inúmeras definições para o que sejam dificuldades de aprendizagem. Sisto (2001), ao realizar um resgate histórico das dificuldades de aprendizagem, a diferenciação de problemas no aprendizado, seus tipos e diferentes manifestações, define o termo dificuldades de aprendizagem (p.33)

> *Engloba um grupo heterogêneo de transtornos, manifestando-se por meio de atrasos ou dificuldades em leitura, escrita, soletração e cálculo, em pessoas com inteligência potencialmente normal ou superior e sem deficiências visuais, auditivas, motoras ou desvantagens culturais. Geralmente não ocorre em todas essas áreas de uma só vez e pode estar relacionada a problemas de comunicação, atenção, memória, raciocínio, coordenação, adaptação social e problemas emocionais.*

Para Scoz (2002), os problemas de aprendizagem não estão restritos nem a causas físicas ou psicológicas ou a análises das conjunturas sociais. É preciso compreender estes problemas, a partir de um enfoque multidimensional, "que amalgame fatores orgânicos, cognitivos, afetivos, sociais e pedagógicos, percebidos dentro das articulações sociais". (p.22)

Durante muitos anos, as visões organicistas predominaram na orientação sobre as dificuldades de aprendizagem, visões oriundas do século XVIII na Europa, com o desenvolvimento das ciências médicas e biológicas, principalmente da psiquiatria. O conceito de anormalidade passou a ser transferido dos hospitais para as escolas, sendo as causas para o fato de crianças não acompanharem seus colegas na aprendizagem em sala de aula, buscadas em anormalidades orgânicas.

Itard (médico-educador) já em 1801 afirmava:

> *...o ensino pode e deve ser planejado e esclarecido pela medicina moderna, que é de todas as ciências naturais a que pode cooperar mais intensamente no aperfeiçoamento da espécie humana apreciando as anomalias orgânicas e intelectuais de cada indivíduo, e determinando por conseguinte o que a educação será capaz de fazer por ele e o que dele pode esperar a sociedade*. (apud Bossa, 2000, p.9)

Os conceitos psicanalíticos, passando a orientar a intervenção psicopedagógica, a partir da observação sistematizada das atividades espontâneas das crianças, introduziram aspectos diferenciados na análise dos problemas de aprendizagem. Também a influência ambiental, os primeiros anos de vida da criança, a dimensão afetivo-emocional são aspectos considerados na busca de um conhecimento total da criança e de seu meio. Mauco (1959) psicanalista, cria um Centro Médico Psicopedagógico unindo orientações da psicologia, psicanálise e pedagogia para um trabalho na intervenção com crianças que tivessem dificuldades de aprendizagem.

O corpo teórico da psicopedagogia vem se constituindo atualmente na articulação da psicanálise e da psicologia genética pela necessidade de teorias que conjuntamente trabalhem estruturas cognitivas e afetivas (Bossa, 2000). Referente a isto, temos a contribuição de autores como Vinh-Bang (1990), Paín (1985) e Fernández (1990), Macedo (1992, 1997, 2000) e do GEPESP- Grupo de Estudo e Pesquisa em Psicopedagogia, do departamento de psicologia educacional da faculdade de educação da Unicamp.

Segundo Souza (1996), como principais medidas de intervenção psicopedagógica estão:

1- estratégias que visam à recuperação, por parte das crianças, e conteúdos escolares avaliados como deficitários;

2- procedimentos de orientação de estudos;

3- atividades como brincadeiras, jogos de regras e dramatizações realizadas na escola e fora dela, com o objetivo de promover a plena expressão dos afetos e o desenvolvimento da personalidade de crianças com e sem dificuldades de aprendizagem;

4- atendimento em consultórios de crianças com dificuldades de aprendizagem na escola;

5- pesquisa de instrumentos que podem ser utilizados para auxiliar o processo de aprendizagem de crianças bem como o seu desenvolvimento, no que se refere à inteligência e afetividade.

Diante da importância da utilização de jogos como recurso de intervenção e diagnóstico psicopedagógicos, atualmente podem ser evidenciados muitos estudos sobre jogos de regras inspirados no construtivismo piagetiano. Também se deve destacar a importância do espaço lúdico envolvendo jogos de natureza simbólica na psicologia, no psicodiagnóstico e tratamento de dificuldades em âmbito emocional e orientando o diagnóstico e intervenção nas dificuldades de aprendizagem pelos psicopedagogos. Como ressalta Brenelli (2001, p.173 e 174)

> *O jogo de natureza simbólica constitui, em suma, um espaço de relação e realização. Sua utilidade é bastante considerada na psicoterapia e no psicodiagnóstico, por permitir conhecer a realidade da criança. Em relação às dificuldades de aprendizagem, o jogo simbólico oferece indícios relevantes a respeito dos aspectos emocionais envolvidos no processo de conhecer e de aprender.*

Os jogos de regras, além de serem relevantes na **intervenção** pedagógica e psicopedagógica, são um recurso importante no contexto de **diagnóstico** psicopedagógico.

Segundo Brenelli (1986), o psicopedagogo pode inferir a respeito da estruturação lógica do pensamento infantil, levantando hipóteses diagnósticas no momento em que a criança elabora espontaneamente as regras de um jogo, organiza a partida e pratica as regras por ela propostas. Tais situações estão presentes na situação de "jogo proposto pelo sujeito" ou "jogo espontâneo". Conforme a autora, primeiro são apresentados os materiais de um jogo, de preferência não conhecido pelas crianças e, a seguir, algumas questões são propostas em uma entrevista:

a) Se você jogar com esse material, como você jogaria?

b) Tem um jeito para saber quem começa a jogar?

c) Como termina o jogo?

d) Quem ganhou e quem perdeu?

e) É importante um jogo ter regras? Por quê?

f) Qual é a regra mais justa? Aquela que só depende de você ou aquela que depende do consenso de todos os jogadores?

g) Ela pode ser mudada? Quando?

Brenelli (ibid) apresenta categorias que servem de indicadores para a análise do desempenho das crianças, sendo as mais gerais: 1) coordenação dos observáveis relativa à formulação das regras 2) organização da partida 3) prática das regras. Além de nove categorias caracterizadas por aspectos positivos e negativos, dentre cada categoria geral.

De acordo com a fundamentação teórica de Piaget, Brenelli (1996) e Macedo (1997, 2000) ressaltam o trabalho com os jogos que permitem “espaços para o pensar”, visto que o sujeito ativo, em posse da compreensão das regras do jogo, tendo garantido seu “jogar certo” pode voltar-se para o “jogar bem”, compensando desafios e perturbações que o movimento dos jogos pode evidenciar. Os erros cometidos nas jogadas podem desencadear tomadas de consciência de novos meios a serem empregados, novas criações e descobertas de estratégias são feitas.

Macedo (1992) afirma que a obra de Piaget pode ser aplicada ao contexto psicopedagógico, tanto do ponto de vista teórico, possibilitando a compreensão dos processos e estruturas, segundo as quais os sujeitos produzem o conhecimento e do ponto de vista prático que possibilita a análise crítica das situações favoráveis a esta compreensão. A este respeito, destaca o trabalho com os jogos de regras e de construção, permitindo contextos de observação e diálogo sobre os processos de pensar e construir o conhecimento.

Segundo Macedo, Petty & Passos em seu livro *Aprender com jogos e situações-problema* (2000) o jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, uma vez que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos. Principalmente aprende-se com situações-problema em que certas posições ou movimentos de um jogo são "congelados", visando à reflexão e o aperfeiçoamento de esquemas utilizados pelas crianças. Os autores, fundamentados nas idéias de Piaget (1948), discutem temas como o fracasso escolar, metodologia, avaliação escolar, pais, entre outros, além de apresentar a análise dos jogos "Quilles" e "Sjoelbak", "Caravana" e "Resta Um", "Traverse" e "Quarto". Macedo e integrantes do laboratório de Psicopedagogia da Universidade de São Paulo (LaPp) apresentam diversas pesquisas, análise de jogos de regras e fundamentados na teoria psicogenética de Piaget. Observaram que o processo de conhecimento, com mudanças de nível do jogador, com uma intervenção significativa através dos jogos, passa por quatro etapas:

a) exploração dos materiais e aprendizagem das regras. Para tanto são feitas explorações, ensaios, em que o como jogar é evidenciado.

b) prática do jogo e construção de estratégias. O desafio é como jogar bem, aprender estratégias, levando em conta as jogadas do adversário.

c) resolução de situações-problema. Podem ser propostas ao sujeito de forma diferenciada, como por intervenções orais, pedidos de justificativas de jogadas, remontagem de um momento jogo ou uma situação gráfica, sendo momentos em que a relação com conteúdos escolares pode ocorrer.

d) análise das implicações do jogar. Resgata-se a experiência do jogar, valorizando a conscientização de conquistas e generalização para outros contextos, inclusive o escolar.

Outro trabalho escrito anteriormente por Macedo, Petty e Passos (1997) apresentou a análise dos jogos "Quatro Cores", "Senha" e "Dominó". Em um capítulo sobre os jogos e sua importância psicopedagógica deu-se especial destaque à análise dos jogos de regras e de construção e a relação com a matemática. Os autores destacam que, através dos jogos de regras, a criança pode construir relações quantitativas ou lógicas: "*aprender a raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos*". No jogo de construção (em que a forma se subordina ao conteúdo) a matemática pode ser desenvolvida pela "*problematização, enriquecida pelo estabelecimento de relações e necessidades*", em momentos de superação de dificuldades que surgem no decorrer das jogadas.

Brenelli (1986) analisa a maneira pela qual os sujeitos, em contextos individual e grupal, coordenam os observáveis de um jogo "Quips" com a finalidade de elaborar regras e executá-las, a prática das regras propostas pelo experimentador, assim como a compreensão e a explicação das noções implícitas na situação do jogo. Também foram analisados os fatores como a influência da idade, do nível operatório (quanto à noção de conservação) e da situação grupal no desempenho dos sujeitos, em dois tipos de jogo (proposto pelo sujeito e proposto pelo experimentador). Participaram da pesquisa 12 sujeitos na situação individual e 27 na situação grupal, organizados em grupos de iguais e diferentes níveis operatórios, com idade entre 5 e 9 anos. Pode-se concluir que a idade e o nível operatório se relacionam aos melhores resultados, apresentando os sujeitos mais velhos e os de nível conservador "escores" mais altos no desempenho dos jogos. Sobre a influência da situação grupal, não foram observadas diferenças estatísticas significantes entre os grupos estudados, a não ser entre os sujeitos de nível não conservador, quando interagiram com os de nível intermediário e conservador.

Pesquisas desenvolvidas por Brenelli (1993/1996), fundamentadas na teoria de Piaget, com crianças que apresentam dificuldades de aprendizagem, reafirmam a importância dos jogos de regras em contextos de intervenção pedagógica pois, ao despertar o interesse e desafiar a inteligência das crianças, possibilitam progressos na construção das estruturas do pensamento operatório e das noções da aritmética elementar. Os jogos "Cilada" e "Quilles" utilizados pela autora em situações de intervenção pedagógica, desencadeiam o funcionamento de processos cognitivos, criando "espaços para pensar", no momento em que os sujeitos criaram estratégias, lidaram com contradições, desafios, anteciparam jogadas, refletiram sobre suas jogadas, desencadeando mecanismos que intervêm no processo de equilibração.

Em continuidade a estes estudos, Brenelli (1999) propôs uma intervenção com jogos de regras para toda a classe, sendo eles: "Imagem e Ação", "Cilada", "Senha", "Quilles", "Sopa de Letras", "Cara-a-Cara", "Passa Letra" e "Resta Um". A autora conclui que os jogos contribuíram de maneira expressiva e significativa para a construção das noções operatórias de conservação, inclusão, classificações multiplicativas nas crianças.

As autoras Goñi e González (1993) afirmam que os jogos podem ser utilizados tanto na clínica psicopedagógica como em situação de aprendizagem escolar, sendo válidos como técnicas diagnósticas e como recursos lúdicos que favorecem o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social. Baseadas nas contribuições do construtivismo psicogenético, não estão de acordo com os jogos conhecidos como pedagógicos, pois os elementos que os sujeitos devem organizar exigem mínimas acomodações, por vezes impostas pelo próprio material, existindo uma relação unidirecional: para cada função que se deseja exercitar, utiliza-se um jogo. Os jogos apresentados às crianças terão sua significação de acordo com os esquemas de assimilação que estas apresentam e se constituem um desafio interessante, ocorrerão regulações, construção de novos procedimentos, construção de hipóteses de ação, refletindo avanços na organização estrutural dos sujeitos. As autoras apresentam a análise das operações lógico-matemáticas (agrupamentos) e operações infralógicas espaciais nas situações de variados jogos de regras.

Guimarães (1998), com o objetivo de verificar em que medida uma intervenção pedagógica, via jogo de regras, seria favorável à construção da noção de multiplicação, realizou uma pesquisa com 17 sujeitos de terceira série, na cidade de São José do Rio Preto. Também analisou as relações entre a abstração reflexiva e a construção da noção de multiplicação. O pré-teste e o pós-teste foram constituídos pelas provas de "Abstração reflexiva: construção de múltiplos comuns" e "multiplicação e divisão aritméticas". Os jogos de regras "Pega-Varetas" e "Argolas" foram utilizados nas sessões de intervenção pedagógica. Dentre os sujeitos estudados, 13 apresentaram evolução, seja na abstração reflexiva ou na construção da noção de multiplicação. Segundo a autora, a intervenção via jogos de regras "*permitiu expressivas evoluções nos sujeitos quanto à construção da multiplicação por ter* *engendrado perturbações e regulações compensatórias e desencadeado o processo de equilibração*".

Para Grando (2000), os conceitos matemáticos e as noções matemáticas podem coexistir no momento da ação de jogar. O caráter nocional do jogo é marcado por ações sem uma definição clara dos objetivos a serem atingidos, cumprem-se regras sem uma previsão de estratégias, é "o jogo pelo jogo", pelo prazer da diversão. O caráter conceitual do jogo encontra-se no nível da tomada de consciência das ações e implica que o sujeito compreenda suas ações, planeje, antecipe, crie estratégias, estabeleça relações e justifique suas jogadas. Em sua pesquisa visando à compreensão dos processos desencadeados na construção e ou resgate de conceitos e habilidades matemáticas, a partir da intervenção pedagógica com jogos de regras, verificou-se que as operações de subtração e de divisão eram as mais desprezadas nas situações de jogo.

Piantavini (1999) utilizou o jogo "Senha" na investigação das relações entre os jogos de regras e a construção de possíveis, em situações distintas de intervenção pedagógica: numa situação limitada à estrutura do jogo e outra em que situações problematizadoras eram acrescidas. Dois grupos controle foram constituídos, além de um grupo experimental, e participaram de um pré e pós-teste com a "Prova de arranjos espaciais e Eqüidistância". Como resultados, a intervenção baseada em problematizações foi mais eficaz em propiciar evoluções e construções mais efetivas de possíveis nos sujeitos, analisados pelas próprias estratégias utilizadas no jogo de regras "Senha".

Alves (2001) apresenta uma pesquisa em que utilizou os jogos de regras com os objetivos de motivar os alunos a uma nova aprendizagem e fixar conceitos matemáticos já trabalhados. Os jogos dos “cartões multiuso”, “jogo da memória”, “equipe X equipe”, “jogo de dominó da divisibilidade” entre outros, foram criados e adaptados a conteúdos matemáticos de quinta a oitava série do ensino fundamental, na cidade de Aracaju- SE. Para Alves, os jogos propiciaram uma atitude de aproximação entre colegas e professores, além de propiciar o real crescimento cognitivo dos conteúdos trabalhados em todos os jogos.

O funcionamento cognitivo de crianças com queixa de aprendizagem, foi analisado por Ribeiro (2001) através de jogos de regras, de modo a evidenciar conhecimentos prévios e a construção de novos conhecimentos, em sujeitos de 8 a 12 anos. Foram aplicadas provas de classificação e os sujeitos no jogo usaram os meios que lhes pareceram adequados para ganhar. Num segundo momento, visando à aprendizagem de estratégias empregou-se a técnica de troca de papéis no jogo e a exercitação de esquemas a ele relacionados. No final, foram jogadas partidas sem a troca de papéis, partidas com conteúdos novos de um mesmo jogo e reaplicaram-se as provas de classificação. Os resultados da pesquisa indicam que a troca de papéis foi um recurso que promoveu a aprendizagem de novos meios para jogar, sendo que as categorias correspondentes a aspectos cognitivos e afetivos das condutas permitiram caracterizar o funcionamento cognitivo das crianças, fornecendo sobre o processo de aprendizagem informações que ajudam a compreender aspectos novos da queixa escolar.

Buscando investigar a influência da intervenção pedagógica na construção da noção de soma, Rocha (1995) desenvolveu uma pesquisa com crianças de 7 a 11 anos. 32 sujeitos realizaram um pré-teste onde foram analisados, segundo a prova da noção de soma, o que engloba: a) definição da soma, b) realização da soma graficamente, c) utilidade atribuída à aprendizagem da soma. Na definição de soma, a maioria dos sujeitos, 56,25% apresentou uma descrição pertinente a esta operação. Sobre a realização gráfica da soma, 90,62% os sujeitos utilizaram uma representação gráfica própria da soma, não a convencional. Com relação à utilidade atribuída à aprendizagem da soma, 57,81% entendem como uma finalidade estritamente escolar, sendo que 25,79% não conseguem explicar sua utilidade. A intervenção pedagógica foi desenvolvida com os sujeitos que apresentaram respostas mais elementares na noção de soma, no pré-teste, e envolveu os jogos "Boliche", "Supermercado", "Baralho" (21), "Trilha", entre outros, além de seis atividades individuais que contemplavam a aquisição da noção de conservação de quantidades discretas. Após a aplicação do pós-teste, os resultados analisados apontam que a intervenção com os jogos de regras influenciou positivamente o desempenho dos sujeitos.

Pauleto (2001) analisou situações escolares (segunda série do ensino fundamental) em que os jogos de regras foram introduzidos visando favorecer a construção e o desempenho em operações e problemas de adição e subtração. Dos 52 sujeitos pesquisados, 28 fizeram parte do grupo experimental e participaram de intervenções com os jogos "Construindo o Caminho" e "Faça o maior número". Este grupo obteve melhor desempenho na reconstrução quanto ao conhecimento relativo ao valor posicional e compreensão dos problemas que envolviam estados e transformações e idéias de comparar, separar e igualar na subtração.

Segundo Ortega e Rossetti (2000), a maioria dos estudos num contexto construtivista mostra que a utilização de jogos de regras pode favorecer o desenvolvimento cognitivo e a superação de dificuldades de aprendizagem escolar. O jogo de regras "Senha" foi o mais investigado, tendo sido citado em um maior número de estudos e pesquisas, o que demonstra a revisão dos trabalhos contemporâneos sobre jogos , feita por Rossetti (2001). Ainda segundo os autores, muitos aspectos da teoria de Piaget necessitam ser mais bem investigados, é um terreno fértil a ser explorado a fim de "*fornecer instrumentos que relacionem o aspecto lúdico* *às possibilidades de desenvolvimento cognitivo, o que muito contribuiria para o avanço da psicopedagogia*". Ortega e Rossetti, revisando os trabalhos desenvolvidos sobre jogos de regras e sua importância na pesquisa psicogenética e na prática psicopedagógica construtivista, apresentam as pesquisas que trabalham a questão da dialética.

Rossetti (1996) analisou os processos de formação do pensamento dialético por meio do jogo "Arca de Nóe" (Cara-a-Cara), utilizando o estudo proposto por Piaget (1980/1996), além da estratégia de "inversão de papéis", objetivando verificar a possibilidade de mudança no nível de compreensão dos sujeitos em relação ao jogo utilizado. Concluindo seu estudo, os resultados indicam que o jogo analisado é apropriado na avaliação dos processos cognitivos e na situação de intervenção psicopedagógica.

Em outra pesquisa, Rossetti (2001) buscou investigar diferentes aspectos da preferência lúdica em crianças e adolescentes brasileiros, as definições espontâneas dos sujeitos sobre os conceitos de jogo, brinquedo e brincadeira, bem como as estratégias utilizadas na prática dos jogos de regras de mesa que os sujeitos escolheram como preferidos. Foi possível verificar que as atividades lúdicas continuam ocupando um lugar importante na rotina diária de crianças e de adolescentes, sendo os jogos de regras em espaços abertos os preferidos pela maioria dos sujeitos. No contexto das escolas, os jogos ainda aparecem muito associados às aulas de Educação Física. Os sujeitos entrevistados fizeram uma diferenciação parcial entre os conceitos de jogo, brinquedo e brincadeira. Os sujeitos que escolheram os jogos de regras de mesa como preferidos, em geral, conhecem as regras (jogar certo) e utilizam alguma estratégia para tentar chegar a vitória (jogar bem).

Alves (1997) investigou, num contexto psicogenético, a evolução do pensamento dialético por meio da descoberta das regras de um jogo que envolve uma seqüência de cores, desenvolvido por Piaget (1989/1996). Analisando o desempenho e os argumentos dados pelos sujeitos de diferentes idades, Alves constatou que, com o aumento da idade, ocorre uma melhora na qualidade das respostas dadas pelos sujeitos.

Ortega et al. (1999) também investigaram aspectos psicogenéticos da formação do pensamento dialético, de acordo com estudos de Piaget (1980/1996). Para tanto, utilizaram o jogo "Mastergoal" e "Xadrez" partindo da análise do conhecimento das regras e das estratégias utilizadas pelos sujeitos de diferentes idades. Como objetivo do estudo apresentam: ampliar os dados referentes à compreensão da psicogênese do pensamento dialético e fornecer subsídios para a utilização desse jogo como instrumento de avaliação dos processos cognitivos e de intervenção psicopedagógica. De acordo com os resultados, os sujeitos mais velhos apresentaram, em relação à criação de estratégias para vencer o jogo, melhor desempenho que os mais novos, alcançando um nível mais evoluído na formação do pensamento dialético.

Algumas pesquisas já relatadas ressaltam que o jogar em uma perspectiva construtivista também pode desencadear a construção de aspectos importantes da área matemática. Neste sentido, serão retomados na teoria piagetiana o conceito de número, adição e subtração e algumas considerações de Piaget sobre a matemática.

Capítulo 3

Número, Adição e Subtração no Construtivismo Genético

3.1-Piaget e a matemática: algumas considerações

Diante dos objetivos do presente trabalho envolvendo a construção de interdependências entre adição e subtração, faz-se necessário considerar, ainda que brevemente, antes de entrarmos na construção do número, alguns aspectos colocados por Piaget a respeito do conhecimento matemático. Em seu livro sobre *A Epistemologia Genética*, Piaget (1990) ressalta e discute os três "*problemas principais e bastante clássicos*" da epistemologia das matemáticas (p.77):

1-compreender por que elas são indefinidamente fecundas, a partir de conceitos ou axiomas pouco numerosos e relativamente pobres.

2-por que elas se impõem de maneira necessária e se mantêm, portanto, constantemente rigorosas, apesar do seu caráter construtivo, que poderia ser uma fonte de irracionalidade.

3-por que se harmonizam com a experiência e as realidades físicas, apesar de sua natureza inteiramente dedutiva.

Diante do primeiro problema, sobre a fecundidade da matemática, temos que é um problema tanto genético quanto histórico-crítico, caracterizando-se pela sua necessidade, as novidades engendradas pelos matemáticos, logo que são construídas, não sendo descobertas (não existem de antemão) ou invenções (falta-lhes uma margem de liberdade). A epistemologia genética é importante ao "*mostrar a convergência entre o que dizem os matemáticos e o que revela a análise dos estágios elementares, resultando hipóteses possíveis sobre as raízes psicológicas e mesmo biológicas de tais construções*" (p. 78).

Em relação à fecundidade desta área, os matemáticos atribuem à possibilidade de introduzir indefinidamente operações sobre operações e a construção de estruturas permanecendo aberta. E sobre isto, Piaget (1990) comenta que, "apesar da irreverência" que pode haver na comparação entre um matemático e uma criança, o número inteiro é o resultado de uma dessas operações sobre operações, enquanto síntese da inclusão das classes e da ordem serial, também presentes no processo de abstração reflexiva, introduzindo novas coordenações no que é extraído das formas anteriores.

No tocante ao segundo problema referente à necessidade e ao rigor da matemática, Piaget (1990) ressalta o quão "notável e quase paradoxal" é o fato da fecundidade e da necessidade andarem sempre juntas. No caso da matemática "moderna", há progressos "entre uma construtividade reforçada e um rigor aumentado".(p.81) Se a fecundidade da matemática é garantida pela multiplicação de suas estruturas, as leis de composição internas ou externas das estruturas asseguram a necessidade da matemática, em virtude dos fechamentos que resultam de sua auto-regulagem.

O terceiro problema, de relacionamento da matemática com a experiência e a realidade física, é iniciado por Piaget (1990) com o seguinte postulado: "*na realidade tudo parece ser matematizável, senão sempre no sentido da medida, pelo menos no dos isomorfismos e das* *estruturações*" (p.83) Tal postulado tem seu êxito crescente em fenômenos vitais, um campo ainda resistente, além de compor antecipações surpreendentes, onde estruturas operatórias construídas dedutivamente, sem a busca de aplicações, serviram de quadros de referência ou instrumentos explicativos para fenômenos físicos descobertos depois. Como exemplos, a teoria da relatividade e a física nuclear.

Sobre o relacionamento com a realidade, a epistemologia genética sugere que busquem suas origens nas coordenações orgânicas e biofísicas, pelo fato de as estruturas elementares procederem de coordenações gerais da ação e estas das coordenações nervosas, desta forma: "*a junção entre as operações do sujeito e as estruturas do objeto deverá ser procurada no próprio interior do organismo antes de poder ser confirmada pelos encontros entre a dedução e a experiência externa*". (p.84)

Diferentemente de aprendizagens exógenas e teorias empíricas, as estruturas lógico-matemáticas superam as estruturas anteriores, integrando-as em subestruturas, "*mantendo-se as imperfeições iniciais dentro das fronteiras excessivamente estreitas das formas de partida*". É mantida, desta forma, a continuidade entre as estruturas orgânicas iniciais e as operações formais e continuidade das formas gerais de coordenação.

Alguns procedimentos matemáticos como "*reunir ou dissociar os elementos de um ábaco, verificar a comutatividade pela comutação das sub-coleções*" podem, segundo Piaget (1990), parecer empíricos, extraindo informações das próprias características dos objetos (conhecimento físico), mas a leitura desses procedimentos exige um conhecimento matemático, "*vinculado às propriedades das ações ou operações, e não dos objetos*" (p.85)

Neste sentido, como já pontuado nas páginas 13 e 14, o papel das abstrações reflexivas torna-se relevante.

3.2-Número, adição e subtração

Uma das questões que se pode evidenciar da epistemologia da matemática é a busca de uma definição do que é o número. E esta indagação tem motivado pesquisadores de diversas áreas do pensamento científico, como da área da filosofia, epistemologia, psicologia, e da área educacional. Poderíamos apresentar inúmeras concepções sobre o conceito de número no desenvolvimento de todo o conhecimento matemático.

A Psicologia Genética de Piaget apresentou pesquisas ampliando a compreensão de como o sujeito constrói o conhecimento em muitas categorias, das mais simples às mais complexas, do nascimento à adolescência. Um de seus objetivos foi, segundo o autor, "*Seguir a rede de operações que engendram o número e as quantidades contínuas*, *o espaço, o tempo e a velocidade que nesses domínios fundamentais conduzem da pré-lógica intuitiva e egocêntrica à coordenação racional simultaneamente dedutiva e experimental*". (Piaget, 1981, p.11)

Conforme Piaget (1975, p.68), é necessária uma investigação genética para a explicação do que é o número diante de inúmeras explicações das principais correntes do pensamento matemático.

> *Este contraste entre a evidência instrumental do número e a confusão de teorias epistemológicas para explicá-lo deixa claro a necessidade de uma investigação genética: o desconhecimento do pensamento em relação às engrenagens essenciais do seu próprio mecanismo é, com efeito, o índice psicológico de seu caráter elementar e, em conseqüência, da necessidade de se remontar aos primórdios de sua formação para poder alcançá-las.*

A hipótese da Epistemologia Genética sobre o conceito de número, é que este constitui a síntese operatória da classificação e da seriação, e diante das explicações do intuicionismo e do logicismo, Piaget (1981, p.13) assim coloca:

> *Sabe-se bem, com efeito, quantas discussões o problema das relações entre o número e a lógica ocasionou, com os logísticos procurando, com Russell, conduzir o número cardinal à noção de "classe de classes" e o número ordinal, dissociado do primeiro, à de classe de relações, enquanto seus adversários mantinham, como H. Poincaré e L. Brunschvicg, o caráter sintético e irredutível do número inteiro. É verdade que nossa hipótese, num certo sentido, permite escapar a essa alternativa, porque se o número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo, ele não deriva de tal ou qual das operações lógicas particulares, mas somente da sua reunião, o que concilia a continuidade com irredutibilidade e leva a conceber como recíprocas e não mais como unilaterais as relações entre a lógica e a aritmética. Delas não convinha menos verificar sobre o próprio terreno logístico as conexões assim estabelecidas pela experimentação psicológica e foi o que logo tentamos.*

A "escola estruturalista nas matemáticas", como define Piaget (1979, p.21) a dos Bourbaki, procurou subordinar as matemáticas inteiras à idéia de estrutura, criando um método que conduziu à descoberta de três "estruturas-mãe", fontes de todas as outras e irredutíveis entre si: as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas.

Como ressalta Piaget (1970, p.52-53).

> *Sabe-se, por sua vez, que desde os trabalhos da escola Bourbaki (eles próprios se prolongaram numa seqüência de esforços orientados no mesmo sentido) as matemáticas já não aparecem como um conjunto de capítulos mais ou menos separados, mas como uma vasta hierarquia de estruturas engendrando-se umas às outras a partir de algumas "estruturas-mãe" que se combinam entre si ou se diferenciam de modos diversos. Estas estruturas elementares são em número de três: as estruturas algébricas, caracterizadas por uma reversibilidade em forma de inversão (T-T^{i} $=O$), cujo protótipo é o "grupo", as estruturas de ordem, cuja*

reversibilidade é uma reciprocidade característica dos sistemas de relações, e cujo protótipo é o "encadeamento" e as estruturas topológicas que incidem sobre as noções de continuidade e de vizinhança (correspondências biunívocas e bicontínuas etc.

Segundo Bourbaki (apud Nogueira, 2002), a estrutura é algébrica quando as relações de definição de uma estrutura são leis de composição. Como exemplo, a adição e a multiplicação dos números reais definem uma estrutura de corpo sobre o conjunto destes números. Uma estrutura é de ordem quando a relação que a define é uma relação de ordem. Como exemplo, o conjunto dos números inteiros ou dos números reais. As estruturas topológicas "dão uma formulação matemática abstrata às noções intuitivas de vizinhança, de limite, e de continuidade as quais nos conduzem à nossa concepção de espaço". (p.43)

Referindo-se, ainda, ao conhecimento lógico-matemático, encontramos na teoria de Piaget que ele é inventado pelas crianças, construído através de suas interações dialéticas com o meio ambiente, visão diferenciada de teorias empiristas ou aprioristas. Não pode ser descoberto ou aprendido por transmissão do ambiente, a não ser os sinais convencionais e o sistema de notação que constitui a parte mais superficial da aritmética (Kamii, 1995). É um conhecimento de dupla natureza (empírica e dedutiva), resultante da atividade e coordenação de ações do sujeito.

Segundo Piaget (1981), a adição e a subtração formam um sistema de operações relacionado com a construção do número, compondo um progressivo, lento e complexo processo de aritmetização, partindo de ações iterativas mais elementares acrescentando elementos +1 +1 +1... e retirando –1 -1 -1...até as crianças chegarem a operações reversíveis. Sendo assim, o número se organiza com as operações lógicas, ocorrendo a elaboração dos sistemas de inclusões (hierarquia de classes lógicas) e de relações assimétricas (seriações), é a síntese da classificação e da seriação, séries tanto ordinais como cardinais.

> *O número apresenta-se, portanto, como uma fusão operatória da inclusão de classes e da ordem serial, síntese que se torna necessária logo que se faz a abstração das qualidades diferenciais em que as classificações e as seriações se fundamentam. De fato, é assim que parece efetuar-se a construção dos números inteiros, em sincronização com a formação dessas duas outras estruturas.* (Piaget, 1990, p.34)

Esta síntese que engendra o número é construída progressivamente, sendo que nos níveis elementares existe uma indiferenciação relativa e síntese incompleta, depois uma diferenciação gradual até o alcance da síntese entre a classificação e a seriação. De acordo com Piaget (1990) estas indiferenciações demonstram o desenvolvimento solidário, interdependente, com troca de apoios, entre as três diferentes estruturas.

> *Isso não quer dizer, aliás, que essa síntese do número efetua-se após terem sido realizadas as estruturas de classificação e de seriação, pois já nos níveis pré-operatórios encontram-se números figurais sem conservação do todo, e a construção do número pode favorecer a das inclusões de classes tanto ou, às vezes mais do que o inverso: parece, pois, que a partir das estruturas iniciais já pode haver abstração reflexiva e de ordem para fins múltiplos, com trocas colaterais variáveis entre as três fundamentais de classes, relações e número*.(p.35)

O ensino da matemática pressupõe o domínio da noção de número e a aprendizagem verbal das seqüências numéricas é insuficiente para este domínio, como assinalam Piaget & Inhelder (1981), embora possa auxiliar o processo. Como apresentam: "*no momento em que a correspondência se torna quantificante e dá assim nascimento a começos de equivalência, a numeração falada pode acelerar o processo de evolução. No entanto, como tais, os nomes de números não a engendram...*" (p.97).

A construção do número supõe uma estrutura operatória, onde o todo seja igual à soma das partes e que se conserve independente da disposição espacial dos componentes, além de outros momentos da construção operatória apresentados por Piaget (1990, p.35)

> *Três momentos essenciais de toda construção operatória: uma abstração reflexiva que fornece as ligações de encaixe e de ordem, uma coordenação nova que as reúne num todo {[(I) →(I)] →(I)} e uma auto-regulação ou equilibração que permite percorrer o sistema nos dois sentidos (reversibilidade da soma e da subtração), assegurando a conservação de cada conjunto ou subconjunto.*

Evidenciam-se vários experimentos realizados por Piaget e colaboradores na compreensão da gênese do número. Tais experimentos envolvem a conservação das quantidades e a invariância dos conjuntos, a correspondência termo a termo cardinal e ordinal e as composições aditivas e multiplicativas. Segundo Piaget (1981), o estudo das "operações quantificantes", operações elementares de correspondência ou de igualização constituem a própria lógica do número.

a) A CONSERVAÇÃO DAS QUANTIDADES E A INVARIÂNCIA DOS CONJUNTOS

Sobre a conservação das quantidades e invariância dos conjuntos, assiste-se a uma gradual e progressiva construção de ordem extensiva (igualização das diferenças), superando a quantificação intensiva, perceptiva e qualitativa. A criança consegue conceber uma quantidade como totalidade, coordenando operações aditivas e multiplicativas. Como aponta Piaget (1981, p.24) sobre a necessidade da conservação, condição de toda atividade racional e em especial sobre o pensamento aritmético: "*um número só é inteligível na medida em que permanece idêntico a si mesmo, seja qual for a disposição das unidades das quais é composto: é isso o que se chama de invariância do número*".

A diferenciação entre a quantificação intensiva, extensiva e métrica ou numérica, é exposta por Piaget (1993, p.481) considerando dois conjuntos A e A' cuja reunião constitui o conjunto B. A quantificação é simplesmente "intensiva" quando as operações limitam-se a utilizar as relações $A<B$ e $A' <B$ sem se ocupar com as relações entre A e A'. Tais operações evidenciam que o todo é maior do que a parte, uma parte tem a mesma grandeza que ela mesma, sem se preocupar em saber se uma das partes contém mais ou menos elementos do que a outra. Quantificadores são utilizados como "um, todos, alguns e nenhum" nas relações entre as partes e o todo.

A quantificação é "extensiva" se é possível estabelecer que A contém mais elementos que A', menos ou a mesma quantidade, o uso do quantificador "quase todos" permite a comparação das partes entre si, mesmo sem a utilização da unidade.

A quantificação é "métrica" (no caso dos segmentos) ou "numérica" (no caso dos termos) quando intervém uma unidade na comparação entre A e A' ou entre A (ou A') e B, e pode-se assim dizer quanto A é superior ou inferior a A' (ou quantas vezes A ou A' entram em B). A quantificação extensiva permanece não métrica até que a unidade seja utilizada podendo informar quanto, por exemplo, A é inferior ou superior a A'.

Realizaram-se experimentos sobre a conservação da quantidade contínua e quantidade descontínua e a análise psicogenética demonstra uma construção gradual de fases iniciais de ausência de conservação, início de constituição de conservação e uma terceira fase de conservação e coordenação quantificante.

Na primeira fase da construção da conservação da quantidade contínua (transvazamento do líquido), a quantidade fica reduzida às relações assimétricas, perceptivas, a criança ainda não concebe uma quantidade como totalidade, resultante da coordenação de diversas relações percebidas, "*não ultrapassando o nível das qualidades ou das quantidades brutas*" Piaget, 1981,p.36.

Em um nível intermediário, ocorre a busca da coordenação das relações perceptivas, transformando-as em operatórias. As crianças procuram considerar duas relações ao mesmo tempo e oscilam entre esta coordenação e o apego às relações perceptivas, constituindo as quantidades intensivas com as multiplicações lógicas das relações.

A terceira fase é marcada pela constituição das quantidades extensivas, com a presença da noção de unidade. Com a presença da proporção e da partição numérica, portanto da "*igualização das diferenças que constitui a passagem da quantidade intensiva para a quantidade extensiva e explica a aritmetização da multiplicação lógica*". (p.47)

Os experimentos sobre a conservação da quantidade descontínua permitiram também o estudo da relação entre a conservação das quantidades e o desenvolvimento da correspondência biunívoca e recíproca.

Existe, em uma fase inicial, a ausência de conservação, as coleções de contas são comparadas e avaliadas pelas relações perceptivas. Na fase intermediária, ocorre a multiplicação das relações, coordenação lógica com a existência do conflito entre as relações perceptivas e as de correspondência biunívoca. Este conflito é superado na terceira fase onde a equivalência das coleções antecede as relações perceptivas, ocorrendo a conservação das quantidades e coordenação quantificante, com a conclusão da quantificação intensiva e extensiva (igualizando as diferenças).

b) A CORRESPONDÊNCIA TERMO A TERMO CARDINAL E ORDINAL

Em situações envolvendo a correspondência termo a termo (copos e garrafas, flores e jarras, ovos e oveiros, dentre outros) encontramos uma evolução da correspondência, em três fases.

Num primeiro momento não ocorrem nem correspondência exata, nem equivalência, os conjuntos são comparados por uma avaliação global, espacial, permitindo uma quantificação unidimensional fundada nas qualidades dos elementos correspondentes. Num segundo momento, a criança consegue fazer corresponder os termos, mas as equivalências não são duráveis, sendo ainda fundadas na percepção, nas qualidades dos elementos, é intuitiva e global. A correspondência operatória, numérica ou quantificante que independe da percepção, apresenta mobilidade em sua composição e reversibilidade.

Para garantir a passagem da correspondência qualitativa para a correspondência numérica, é necessária a igualização das diferenças: construção de unidades equivalentes entre si (classe) e possíveis de seriação, diferentes pela ordem de enumeração (relação assimétrica). Ocorre aí a interação necessária do ordinal e do cardinal.

Sobre o valor cardinal do número, Piaget (1981) propõe experimentos em que as crianças realizam correspondência espontânea e assim pode-se analisar como elas avaliam o valor cardinal de uma dada coleção, quais os tipos de correspondência que elas usam. Objetivam verificar se a criança é capaz de construir uma coleção equivalente a uma coleção dada de antemão e verificar qual será o procedimento escolhido.

Em uma primeira fase, as crianças não possuem noções precisas do número cardinal, realizando comparações qualitativas para quantificar as coleções, expressas por termos mais, menos e igual. O caráter perceptivo prevalece em qualidades comparadas sem ainda serem coordenadas entre si.

Na fase intermediária, a correspondência é qualitativa de ordem intuitiva, não se conservando fora do campo perceptivo atual, a equivalência não é durável. Coordenam as relações perceptivas por meio de seriações e multiplicações lógicas, prevalecendo um caráter de semi-operatoriedade.

Na terceira fase, a correspondência é operatória, qualitativa e numérica. As coleções permanecem equivalentes independentemente de sua configuração ou disposição dos elementos.

Sobre a seriação que permite distinguir cada elemento enquanto não equivalente aos outros, existem, segundo Piaget (1981/1964), três operações possíveis: a seriação qualitativa simples, a correspondência qualitativa entre duas seriações (similitude) e a correspondência numérica (ordinal) entre as duas séries.

A análise de diversos experimentos envolvendo a seriação e, principalmente, o que envolve conjuntamente a ordenação e a cardinação, contém fases de desenvolvimento distintas. Na fase inicial, a seriação realizada é global, pré-ordinal. Em uma fase intermediária, a seriação apresenta-se intuitiva, com tateios na construção e dificuldades em intercalar elementos na série. A seriação é operatória na terceira fase, com a coordenação das relações em jogo, correspondência entre a ordenação e a cardinação. Para Piaget (1981, p.196), "*a seriação intuitiva só se constituiria em ordenação verdadeira, a partir do momento em que se torna operatória e que só se torna operatória precisamente a partir do momento em que se coordena com a cardinação*".

c) AS COMPOSIÇÕES ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS

A construção do sistema numérico, segundo Piaget & Szeminska (1981), completa-se com a descoberta das operações aditivas e multiplicativas. Um número qualquer inclui a composição aditiva ao reunir, em totalidades, elementos esparsos ou decompor um total em partes. E, para realizar a correspondência, termo a termo, a criança realiza multiplicações de relações.

Existe uma primeira fase na composição aditiva em que as crianças não estabelecem uma inclusão permanente entre o todo e as partes, as totalidades ainda não constituem classes lógicas, ocorrem partições qualitativas e não a composição aditiva das partes: $B=A+A'$ e $A=B-A'$. Efetuar operações inversas, tanto quanto diretas e combinar análises e sínteses são impossibilitados pela irreversibilidade do pensamento infantil nesta fase inicial. Superando a fase pré-lógica é que a criança consegue incluir, seriar e enumerar.

Foram investigadas por Piaget (1981) duas situações em que a criança deveria igualizar quantidades desiguais, permitindo novas investigações sobre a relação aditiva parte-todo e entre as partes entre si.

Na primeira situação, a criança deveria igualizar bombons recebidos na forma (4+4) com a forma (7+1). Em fases iniciais, as crianças têm dificuldade na compreensão que 7>4 em compensação 1<4 e que estas desigualdades se compensam. Na primeira fase, a criança não concebe uma coleção em relação a outra: ao mesmo tempo em que se acrescentam elementos em uma coleção, retira-se de outra, a totalidade numérica 8 ainda não resulta de uma composição aditiva. Na segunda fase, intuitivamente concebe uma coleção em relação a outra: realizando tateios empíricos para igualizar, consegue realizar constatações corretas com relação às partes, mas conclusões inexatas em relação ao todo. Somente na terceira fase consegue a correspondência e composição operatória. O aumento de uma coleção só se torna uma adição se esse crescimento é colocado em reciprocidade com a subtração de outra coleção. Aí compreende que uma coleção, que perdeu 3 elementos, é compensada pela coleção menor que ganhou os mesmos 3 elementos.

Uma segunda situação de igualização envolve coleções de 8 e 14 elementos, suscitando a realização de subtrações e adições combinadas. Na primeira fase, a criança ainda não compreende que o acréscimo ao monte A' requer a diminuição no monte A que possui 14 elementos. Ela realiza transferências empíricas sem um sistema organizado, fazendo comparações globais, retira alguns elementos da coleção maior e acrescenta a coleção menor. Na segunda fase, existe intuitivamente a compreensão deste equilíbrio, sem antecipação dos resultados e da compensação necessária, utilizando,muitas vezes de construções figurais para igualar as coleções. Em um terceiro momento, existe a reversibilidade e correta transferência de elementos, procedendo por correspondências unívocas e recíprocas.

A adição só é compreendida em termos operatórios, segundo Piaget, quando vai além de enumerações verbais e envolve o mecanismo geral de igualização de diferenças:

> *Consegue-se fazer repetir 2+2=4, 2+3=5 2+4=6 etc, mas só se obtém uma assimilação real se o sujeito é capaz de conceber uma soma qual 6 como uma totalidade englobando as parcelas 2 e 4 a título de partes e de situar as diversas combinações possíveis num grupo de composições aditivas...* (Piaget, 1964, p.261)

Uma terceira situação experimental busca a análise da composição aditiva, estabelecendo a comparação, entre si, das partes de um determinado todo, como a criança partindo de uma soma, constrói duas coleções iguais (metades).

Em um primeiro momento, a criança não concebe a igualdade entre o todo e a soma das partes e nem a equivalência durável entre as duas metades. Na segunda fase, ocorre a construção de duas partes iguais por comparações qualitativas de figuras, com comparações de reuniões ou de dissociações intuitivas. E, num terceiro momento, ocorrem as comparações aditivas, igualdade durável entre as partes consideradas como unidade e a igualdade de sua soma em relação ao todo proposto inicialmente (Monteiro, 1999).

Sobre a composição multiplicativa, Piaget (1981) realiza experimentos que objetivam estudar a correspondência biunívoca entre diversas coleções e a passagem das relações de equivalência para a multiplicação aritmética. Assim que as crianças estabelecem a equivalência durável entre duas coleções, estão aptas a compor relações multiplicativas: "*as* *operações de ordem multiplicativa em jogo na própria correspondência são, assim que constituídas, explicitadas sob a forma de multiplicação propriamente ditas*". (p.281)

A composição das relações de equivalência que engendra a multiplicação evolui em três fases: de uma fase inicial de fracasso da própria correspondência e da composição das equivalências, para uma fase intermediária de correspondência termo a termo sem equivalência durável, culminando na terceira fase de correspondência e coordenações imediatas.

A multiplicação numérica evolui de uma primeira fase em que não existe a correspondência termo a termo entre duas coleções, não há a compreensão que duas coleções são correspondentes se correspondem a uma terceira coleção, são realizadas comparações globais entre as coleções. Em uma segunda fase a multiplicação é resolvida por tentativas fundadas na intuição, a criança resolve as situações propostas através da correspondência entre as coleções até que aos poucos esta chegue a ser múltipla. Na terceira fase, a multiplicação é numérica.

Sobre a igualação de quantidades e a construção de diferenças

Em sua última obra, Piaget (1980) discute, utilizando experimentos e jogos de regras, sua visão sobre os processos dialéticos, processos sempre presentes em suas obras anteriores. Para ele, a dialética constitui o aspecto inferencial de todo processo de equilibração. Tal processo está presente quando ocorrem reações ativas do sujeito às perturbações do meio, é um processo construtivo que conduz à formação de estruturas e se apresenta sob três formas:

(a) a equilibração das relações entre sujeito e objetos (ou entre as assimilações e acomodações), e lembramos sua complexidade a respeito dos retrocessos do objeto; (b) a coordenação dos subsistemas; (c) a equilibração entre as diferenciações e as integrações, podendo ser antagonistas ou solidárias e não consistindo em subsistemas, mas em uma regulagem das interdependências e da construção das novas totalidades. (p.201)

Há, nesta obra, um experimento de Piaget com A . Henriques e D. Maurice (1980/1996) sobre igualação e construção de diferenças que apresenta uma situação dialética com a construção de interdependências entre dois sistemas A e B, cuja reunião termina por considerá-los subsistemas de uma nova totalidade T (ibid), subsistemas estes de direções opostas- adições e subtrações. São propostas às crianças situações para igualar quantidades diferentes com colunas de 3 e 5 elementos ou 1, 5 e 9 elementos e produzir a construção de diferenças quando as quantidades são iguais, como em colunas com 4 elementos cada uma e solicita-se que uma coluna fique com dois elementos a mais que a outra.

Segundo Pinto (2001), as crianças, ao compreenderem que 3 e 5 elementos colocados em coleções dispostas em fileiras podem ser igualadas em 4 e 4 elementos, estão concebendo um conjunto em relação ao outro e ambos em relação a sua soma, estabelecendo relações parte-todo. As relações em jogo formam um sistema operatório tal que o todo, tornado invariante, resulta de uma composição por adição das partes e estas, graças às subtrações e adições combinadas, mantêm entre si relações univocamente determinadas.

Em um primeiro nível de respostas dos sujeitos (**I A**), a igualação de elementos resulta de falsas implicações em que os sujeitos estabelecem, principalmente, as correspondências figurais entre as colunas. As crianças constatam existirem colunas com mais elementos e os transferem, sem entretanto, perceber que a adição em uma coluna implica a subtração em outra e as colunas que se encontravam na disposição 3/5 elementos passam a ficar com 5/3 elementos, por exemplo, sem nada ser modificado nos conjuntos iniciais. Segundo Piaget (1980/1996), neste nível há ilusão de igualações devido aos sentidos contrários das ações, feitas pelos sujeitos: o fato de acrescentar duas quantidades iguais em duas quantidades desiguais acarreta a conservação de suas diferenças. Ainda alguns sujeitos excluem, neste nível a conservação do todo, acreditando haver menos elementos quando os elementos das colunas eram apertados do que quando os elementos eram espaçados.

No nível **I B** há um início das interações entre as adições e as subtrações, em que o sujeito recorre à caixa reserva de elementos para igualizar as coleções desiguais ou introduzir as diferenças em coleções iguais. Realiza "adições ou subtrações simples", acrescentando ou retirando elementos, utilizando a caixa reserva, mais do que "adições ou subtrações relativas" ou por transferências com deslocamentos de elementos de uma coluna a outra. Os sujeitos compreendem que igualar duas coleções nas quais existe uma diferença n implica que n elementos sejam acrescentados à coluna menor (adição simples) ou n elementos sejam retirados da coluna maior (subtração simples), se estes são pegos da caixa reserva, exterior a essas coleções.

O nível **II A** é marcado pelo início da adição e subtração relativas. As crianças, a partir de constatações ou experiências mentais, compreendem que uma transferência consiste em acrescentar elementos a outro conjunto final e também retirar elementos do conjunto inicial. Compreendem que "alguma coisa" precisa ser retirada e colocada em outro conjunto, sem, no entanto, perceberem que deve ser mantida a identidade dos elementos, acrescentando elementos ao conjunto inicial, compensando o que foi retirado. "*É próprio das reações deste* *nível compreender que se empobrecemos Y e enriquecemos Z, é preciso dar a Y um pouco a mais do que lhe retiramos*", ainda não compreendem que seja o dobro. Não compreendem a "identidade dos contrários" uma transferência é, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração.

No nível **II B** começam as coordenações entre as adições absolutas e relativas e os sujeitos realizam a construção de diferenças, vários saltos dialéticos são alcançados pelos sujeitos. As igualizações são realizadas com compensações antecipadas não somente por simples tentativas, as implicações entre as operações não permanecem locais, se encadeiam de maneira inferencial. Alcançam a "identidade dos contrários": os mesmos elementos que são tirados de um conjunto são acrescentados a outro. As operações de adição e subtração "são formadoras e transformadoras" que implicam seu contrário, não são conceitos que contêm seu contrário.

No nível **III** as implicações entre as operações de adição e subtração ocorrem em novas provas, com os sujeitos conseguindo deslocar elementos vindos de diversas colunas conjuntamente. Realizam-se composições complexas, novas, integradas no sistema constituído anteriormente, com sínteses entre operações de sentidos contrários.

É partindo destes experimentos citados, e principalmente sobre o que analisa a igualação e a construção de interdependências que este estudo busca investigar através do jogo FAN TAN, as interdependências, entre as operações de adição e subtração, visto que o jogo envolve estas situações, além de outros desafios. Vale destacar que, para a compreensão da lógica da adição e da subtração, é necessário o entendimento das relações entre estas operações e a composição aditiva do número (Nunes e Bryant, 1997), não sendo suficiente saber que somar aumenta e subtrair diminui uma quantidade de elementos; também devem compreender que estas mudanças exercem efeitos inversos.

Este estudo se justifica pelo número ainda escasso de pesquisas numa vertente construtivista, sobre a interdependência entre as operações de adição e subtração e a possibilidade de analisar as condutas dos sujeitos sobre esta interdependência por meio de um jogo de regras, através de situações-problema envolvendo a igualação de quantidades e construção de diferenças.

Piaget (1981), em sua obra *A gênese do número na criança,* menciona em diversos momentos a importância da igualização das diferenças e a relação entre adição e subtração:

... é esta combinação de igualdades e de diferenças, ou, mais sucintamente, essa igualização das diferenças que constitui a passagem da quantidade intensiva para a quantidade extensiva e explica a aritmetização da multiplicação lógica (p.47)

... é portanto a igualização das diferenças que é fonte da unidade e, por isso mesmo, do número (p.143)

... a construção do número consiste em igualizar as diferenças, isto é, reunir num só todo operatório a classe e a relação assimétrica... (p.145)

... este jogo de subtrações e adições combinadas produz-se espontaneamente quando se pede à criança para igualizar duas quantidades desiguais e permitir-nos-á analisar sob um novo aspecto a relação aditiva das partes e do todo. (p.255)

... um aumento só se torna uma adição se esse crescimento é colocado em reciprocidade operatória com uma subtração (4+3) + *(4-3)*= *8* (p.261)

Em seu estudo sobre a dialética, Piaget (1980/1996) realiza um experimento sobre a igualização das diferenças e construção de igualdades, situação em que este estudo se fundamentou, abordando questões relativas às interdependências entre adições e subtrações. Assim afirma:

A dialética constitui o aspecto inferencial da equilibração . Esta se manifesta, no caso presente, sob sua forma mais geral, que é a compensação a assegurar entre os fatores positivos e negativos das transformações, portanto, entre as ações aditivas e subtrativas (p.60).

Assim, após ser evidenciada a importância de um trabalho com a igualação de quantidades e a construção de diferenças, o que envolve a interdependência entre a adição e a subtração, serão retomados alguns estudos e pesquisas atuais que discutem estes aspectos.

Capítulo 4

Adição e subtração: estudos e pesquisas

Nos estudos sobre o emprego e a gênese dos algoritmos adição e subtração, destacam-se, segundo Fayol (1996), duas grandes categorias de investigação. Uma abordagem mais "clássica", onde se estudam os resultados das operações resolvidas para tentar compreender como os sujeitos procederam. Pode-se, nesta abordagem, enumerar os resultados, categorizar os erros ou elaborar programas que visem sua simulação.

Fayol destaca os estudos, nesta linha de investigação, de Groen e Parkman (1972) sobre as estratégias de como adultos e crianças resolvem adições elementares, partindo da hipótese de que os sujeitos poderiam dispor de categorias de *estratégia reprodutiva*- de recuperação direta dos resultados das adições da memória a longo prazo e a *estratégia reconstrutiva*- com procedimentos de cálculo que permitem reconstituir a resposta. Em continuidade a esta linha de pesquisa, os trabalhos de Aiken e Williams (1973), Ashcraft e Battaglia (1978) e Campbell (1987) apontam que os conhecimentos aritméticos ligados às adições elementares são recuperados da memória a longo prazo nos adultos, o mesmo não ocorrendo com crianças no jardim de infância para somas que não apresentem as duplas parcelas, como 2+2, 3+3, exigindo um conhecimento processual.

Uma segunda abordagem para os estudos sobre a adição e subtração visa seguir o desenrolar dos processos durante sua realização, apresentando diversidade no registro dos comportamentos observados e analisados, podendo-se medir a duração da resolução de problemas, analisar os protocolos verbais, em destaque o método clínico de Piaget.

Nogueira (2002), em seu estudo, pretende deixar evidente existirem interpretações equivocadas sobre a construção do número, por diversos autores, a partir do referencial de Piaget, não existindo um estádio lógico antecedendo um estádio numérico, o que contém explícita ou implicitamente a maioria das propostas metodológicas. Evidencia-se, uma interpretação de uma construção linear do número: primeiro são construídas a classificação e seriação e só então o número emerge como síntese destas duas estruturas. Realizando uma releitura da obra de Piaget *A Gênese do número na criança* (1981) Nogueira enfatiza a solidariedade estreita existente entre a construção da classificação, da seriação e do número, fato presente na obra de Piaget e mal interpretado por diversos autores.

Fundamentada no construtivismo piagetiano, Kamii (1995) busca uma implicação da teoria no sistema educacional, discutindo os conteúdos trabalhados nas séries iniciais do ensino fundamental. Para a pesquisadora, pode-se ensinar a criança a dar respostas corretas a somas como 2+3, mas não se pode ensinar-lhe diretamente as relações envolvidas nesta operação. Aprender a somar, subtrair e multiplicar envolve um raciocínio lógico-matemático e raciocínio não é técnica, não se pode aperfeiçoá-lo apenas pela prática. Se os educadores "*preocupam-se com aspectos superficiais e o significado convencional dos sinais*" iludem-se quanto ao modo de ensinar aritmética.

A respeito do trabalho desenvolvido sobre aritmética, nas séries iniciais, Kamii (ibid.) afirma a importância de estar voltado para a ação mental de adicionar e não para a produção de respostas escritas e ou corretas. Saber uma centena de somas não garante uma sólida base, nem um alto nível em matemática.

De acordo com Busquets (1994), apesar da simplicidade que estes processos de adição e subtração possam aparentar, existem grandes dificuldades a serem superadas: o estabelecimento de uma ordem seqüencial dentro de um processo (relação parte-todo), tomar consciência da ação que causou a transformação do estado inicial, verificar as relações causais deste processo, encontrar a expressão verbal do processo, utilizar a simbolização gráfica e uso espontâneo dos signos aritméticos.... Para a compreensão da seqüência aditiva ou de subtração de elementos, é necessária uma abstração, uma interiorização coordenada e reflexiva dos esquemas de ação, sendo evidente o que resta, o resultado final das operações, deve-se explicar a modificação do valor quantitativo, que fator produziu a transformação.

O estudo de Lopes (1997) evidenciou que, somente com a operatoriedade, o sujeito é capaz de fazer implicações lógicas, organizar suas ações e pensar simultaneamente sobre os estados e as transformações de uma situação, compreendendo as operações de adição e subtração pela abstração reflexiva. Um bom desempenho nas operações não depende de um nível de abstração reflexiva mais evoluído. Foram investigadas 12 crianças de segunda e terceira séries do ensino fundamental que apresentaram diferenciados desempenho e compreensão em situações que envolviam operações de adição e subtração. Lopes utilizou a prova de "Inversão das operações aritméticas" proposta por Piaget (1995) para análise do nível de abstração reflexiva dos sujeitos. Os sujeitos que possuíam um nível de abstração mais evoluído foram os que conseguiram compreender os processos como empréstimos e reagrupamentos, envolvidos na resolução das operações.

Grobecker e Bond (1999) apresentam um estudo com o propósito de examinar a construção da operação de adição pelas crianças. Para isso, analisam a qualidade estrutural do pensamento de crianças de 6 a 8 anos em tipos diferentes de tarefas matemáticas. Foram investigadas 42 crianças nos Estados Unidos através das tarefas: a) "flash", cartão que envolve sinais e símbolos socialmente transmitidos, onde são propostos 14 problemas de adição com somas até 20; b) tarefa não verbal adaptada de Levine (1992) utilizando um tapete e botões para as crianças resolverem os mesmos 14 problemas de adição propostos na tarefa anterior e c) associatividade na tarefa do comprimento (Piaget, 1987), visando examinar o aparecimento das estruturas operatórias nos sujeitos. Foram analisadas as respostas corretas e as estratégias utilizadas. Os resultados indicam existir em cada tarefa, uma construção seqüencial de habilidades cognitivas crescentemente mais complexas. A comparação entre as três tarefas aponta para a relação entre a habilidade para gerar estratégias mais sofisticadas na resolução de problemas de matemática e a evolução de estruturas operacionais. A grande maioria de crianças que usou a estratégia de recuperação da memória para resolução de problemas de números menores que dez, não usou esta estratégia para problemas de números maiores que dez. As estratégias de decomposição e recuperação da memória para problemas de números maiores que dez eram geralmente usadas por crianças que tinham conservado o comprimento.

As relações aditivas, sendo ternárias, podem apresentar maneiras diferenciadas de se relacionar com grande variedade de estruturas aditivas. De acordo com Vergnaud (1991), são seis esquemas ternários fundamentais:

Primeira categoria: duas medidas se compõem para dar lugar a uma medida.

Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma medida.

Terceira categoria: uma relação une duas medidas.

Quarta categoria: duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação.

Quinta categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um estado relativo.

Sexta categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo.

Muitos estudos identificaram os métodos próprios e estratégias criadas pelas crianças para adicionar e subtrair números compostos por multidígitos (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985, Kamii 1989, 1995, Kamii e outros, 1993, 1998, Demby, 1993, Fuson et al 1993, 1997, Mendonça, 1996).

Carraher e Schliemann (1985), analisando o papel dos sistemas de sinais usados pelas crianças para apoiar os cálculos de adição e subtração com números superiores a dez, encontraram um melhor resultado quando as crianças utilizaram outros sistemas de sinais e outros métodos para calcular, diferentes dos ensinados pela escola. As crianças representaram os números através de dedos ou marcas sobre o papel e contaram-nos como se fossem os objetos concretos. Outro método utilizado pelas crianças foi a decomposição dos números, usando fatos numéricos que já conheciam.

Autores como Baroody e Ginsburg (1986) fizeram a distinção em cinco categorias de procedimentos utilizados pelas crianças ao somarem elementos, restringindo-se na descrição de procedimentos, sem suas análises. Encontraram em suas pesquisas desde a contagem efetiva da totalidade dos elementos, contando de um em um, até a adição mental, começando pelo primeiro termo da soma. E num procedimento mais elaborado, as crianças começam pelo maior dos termos, acrescentando-se o de menor valor. O "contar tudo" que as crianças realizam, por exemplo, ao somarem 8 elementos com 5 elementos, contam de um até treze para obterem a resposta da soma ao invés de começarem a contagem pelos oito elementos iniciais, segundo a pesquisadora Kamii, mostra que a adição não é aprendida pela observação e manipulação de objetos. Para adicionar dois números, a criança tem que mentalmente fazer um todo (8 no exemplo) depois outro todo (5) e, a seguir, colocá-los num novo todo homogêneo, no qual 8 e 5 desaparecem num sentido, mas continuam a existir em outro sentido (em seu total 13).

Fuson et al (1997), analisando as estratégias utilizadas pelas crianças, identificam três classes primárias na resolução de adição e subtrações: a) seqüencial b) combinando unidades separadas c) compensação. Em um exemplo de adição 38+26, as crianças podem utilizar as estratégias da seguinte forma:

a) Seqüencial- 30 e 20 são 50 e o 8 = 58. Depois mais 6 são 64.

b) Combinando unidades separadas- 30 e 20 são 50 e 8 e 6 são 14. O 10 do 14 faz 60, então 64.

c) Compensação- 40 (38+2) e 24 (26-2) são 64.

Carpenter et al (1997), após um estudo longitudinal de três anos, com 82 crianças investigando a compreensão de estratégias utilizadas em adições e subtrações, destacam que as estratégias criadas pelas crianças são conectadas com outros conceitos, principalmente com o desenvolvimento do conceito de base dez numérica. Os estudantes que criam suas próprias estratégias de resolução conseguem transferi-las para novas situações, apresentam maior sucesso ao resolverem os problemas, compreendem o que fazem, apresentam menos erros sistemáticos em comparação com grupos que tiveram ênfase nos algoritmos padrões.

Batista (1995) aplicou uma avaliação pedagógica em alunos que cursavam de segunda a quarta séries do ensino fundamental, na região de Campinas. Analisou o desempenho dos alunos em operações aritméticas e de um total de 930 contas, a autora identificou cinco categorias de erros em somas e subtrações: 1) reprodução errada da proposta; 2) erro de contagem; 3) erros na montagem da conta; 4) erros no "vai um" da soma e 5) erros específicos da subtração. Os erros do tipo 3 a 5 foram identificados como devidos à falta de compreensão do valor posicional dos algarismos, no sistema de numeração decimal. Para Batista, é necessária a utilização de estratégias que favoreçam a compreensão do valor posicional e o sentido das operações aritméticas e não apenas o ensino de algoritmos padronizados, úteis em fases mais avançadas do processo.

A análise do desempenho e dos procedimentos corretos ou incorretos de crianças da escola elementar, durante a solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa, foi realizada por Taxa (1996). Foram investigados os procedimentos utilizados pelos sujeitos e a influência de material concreto de apoio no momento da solução. Além destes objetivos, a autora procurou discutir o sentido da intervenção do professor diante da solução destes problemas. De um total de 60 crianças, três grupos foram formados, analisando-se a possível influência da escola em relação à aprendizagem de problemas verbais aritméticos de multiplicação, correspondendo à primeira, segunda e terceiras séries do ensino fundamental. Selecionaram-se problemas usuais de livros didáticos e conjunto de objetos para a resolução dos problemas.

Os sujeitos utilizaram predominantemente a estratégia de contagem para a solução dos problemas. As estratégias aditiva e multiplicativa foram utilizadas por sujeitos mais velhos, através de procedimentos pessoais, não os trabalhados pela escola. Taxa apresenta implicações educacionais de seu estudo. Dentre elas: a importância do professor propor primeiramente situações-problema enunciadas verbalmente e depois se preocupar com a escrita do problema em si, a maior possibilidade de êxito das crianças na solução de problemas quando utilizam o desenho como elemento organizador que explicite o estado inicial, a transformação e o estado final da situação dada, a discussão de variados procedimentos utilizados pelos alunos, a utilização de material concreto como apoio, visto que: "*o processo de ensino-aprendizagem de problemas aritméticos está longe de ser mera aplicação de fórmula matemática, porque supõe um processo de construção conceitual*".

Selva e Brandão (2000) investigaram no Recife como crianças de 4 a 6 anos resolvem problemas de subtração, usando a notação escrita. Trinta crianças resolveram quatro problemas envolvendo pares numéricos maiores e menores que dez. Dois problemas eram do tipo mudança, exemplo: Pedro comprou 8 bombons e deu 5 para a irmã dele, Marcela. Com quantos bombons ele ficou? E dois eram do tipo comparação - exemplo: Marcela comprou 7 pirulitos e Pedro comprou 3. Quantos pirulitos Marcela comprou a mais do que Pedro? Os protocolos das entrevistas foram analisados segundo a influência do registro no papel para o processo de resolução dos problemas e os tipos de registros produzidos. Os problemas do tipo mudança foram mais fáceis de serem resolvidos que os do tipo comparação, mesmo estes envolvendo pares numéricos com valores pequenos. Utilizou-se o registro escrito para apoiar os cálculos realizados, possibilitar o acompanhamento do processo de raciocínio e favorecer o avanço no registro das operações matemáticas. As autoras concluem que resolver problemas no papel pode se constituir uma alternativa interessante para a educação infantil.

Riley e cols (1983) deram problemas de adição e subtração para crianças norte-americanas e permitiram o uso de blocos como materiais de apoio aos cálculos. Crianças de 6 anos cometeram poucos erros ao resolverem cálculos com números pequenos, sendo 87% de acertos nos problemas de adição e 100% nos problemas de subtração, que envolvem uma situação simples. No caso de uma subtração inversa, quando é preciso encontrar uma parte se o todo e a outra parte são conhecidos, 22% de acertos. A grande dificuldade centra-se nos problemas de transformação com o início desconhecido com apenas 9% de acertos pelas crianças.

Outras pesquisas têm destacado que a compreensão da relação existente entre a adição e subtração não se desenvolvem simplesmente por treinos, não sendo tão óbvias para as crianças. Segundo Nunes e Bryant (1997), o conhecimento de que somar a uma quantidade exerce o efeito de aumentá-la e subtrair exerce o efeito de reduzi-la, é logo entendido pelas crianças mais novas. São relações não tão elementares, sendo invariáveis lógicas de grande importância no raciocínio lógico das crianças. Mas não é suficiente a compreensão somente destas invariáveis para se compreender as operações de adição e a subtração. A criança também tem que compreender que estas operações se cancelam, são relações inversas, caso contrário, estarão perdidas em qualquer tarefa que requeira que elas descubram o ponto de partida de uma transformação. Esta compreensão da relação inversa entre adição e subtração também se desenvolve e, segundo os autores, é um "outro exemplo de desenvolvimento lógico que afeta diretamente a compreensão matemática das crianças".

Demby (1993) encontrou, em suas pesquisas na Polônia, com 32 crianças de 4º grau – 11 anos, aproximadamente, que estudaram em anos anteriores a inversão de operações, no momento de serem questionadas em testes escritos e entrevistas, em sua maioria apresentaram dificuldade na resolução das relações entre as operações inversas. As dificuldades foram constatadas desde a não simplificação de expressões mais simples, como 28+75-75=, poucos alunos conseguindo comunicar como resolveram as relações entre as operações inversas e a não percepção dos limites destas relações.

Baroody (1999), procurando investigar se o conhecimento de combinações de adição facilita o saber das combinações de subtração, pesquisou dois grupos de crianças. O primeiro grupo não havia freqüentado o ensino regular e o segundo já estava no primeiro grau do ensino regular. Para os dois grupos, têm se revelado que a complementar relação entre a adição e a subtração não é óbvia para as crianças.

O estudo de Bryant, Rendu e Christie (1999), com crianças de 5 e 6 anos na compreensão da relação entre a adição e a subtração, encontrou como resultado que estas utilizam o princípio da inversão na resolução das questões propostas. Crianças de 6 para 8 anos também utilizaram o princípio da inversão e decomposição para resolverem situações como a+b- (B+1). Os autores concluem que estas compreensões não são baseadas na perícia de resolver cálculos.

Onuchic e Botta (1998), analisando livros didáticos de matemática das séries iniciais, encontraram a apresentação da adição, e posteriormente a subtração. As operações são vistas sem uma relação entre elas e no trabalho com problemas realizam-se algoritmos diferentes dos vistos independentes. De acordo com as pesquisas sobre adição e subtração, as autoras apontam que o trabalho com tais operações aritméticas deveria nas séries iniciais, partir de “problemas aditivos e subtrativos”, permitindo que os conceitos sejam desenvolvidos simultaneamente. Os símbolos e conceitos de adição e subtração deveriam ser apresentados após o trabalho com a construção do significado dos números naturais.

Diante destas pesquisas que ressaltam a importância do trabalho com jogos de regras, em destaque para o desenvolvimento de conceitos matemáticos e as pesquisas que evidenciam a dificuldade e a importância dos sujeitos compreenderem a implicação entre as operações de adição e subtração é que este estudo pode se justificar.

Capítulo 5

Delineamento da Pesquisa

Objetivos:

1) Analisar as condutas utilizadas pelos sujeitos na resolução das situações-problema propostas pelo jogo, que envolvem distintas operações aritméticas.

2) Comparar os diferentes níveis de construção de interdependências entre adição e subtração em sujeitos de terceiras e quintas séries do ensino fundamental que apresentam rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática.

3) Analisar a construção de interdependências entre as operações de adição e subtração em sujeitos de terceiras e quintas séries do ensino fundamental, nas situações propostas pelo jogo Fan Tan.

Problema:

Existe relação entre as construções de interdependências entre adição e subtração e o rendimento escolar em matemática?

Como se apresentam as interdependências entre adição e subtração no jogo de regras Fan Tan em sujeitos com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática e que freqüentam terceiras e quintas séries do ensino fundamental?

Como se caracterizam as condutas desses sujeitos nas situações-problema provocadas pelo jogo, que envolvem distintas operações aritméticas?

Método

a) Sujeitos

Foram estudados 48 sujeitos (N=48) de diferentes escolas públicas estaduais e municipais da cidade de Toledo- PR. Os sujeitos freqüentavam classes de terceiras e quintas séries do ensino fundamental.

A amostra foi composta por sujeitos que apresentavam rendimento satisfatório (média semestral superior a sete) e rendimento insatisfatório (média semestral inferior a cinco) em matemática, de acordo com as notas atribuídas na avaliação escolar do primeiro semestre do ano de 2002 e informações complementares fornecidas pelos professores. Assim foi constituída a amostra:

24 sujeitos de terceiras séries, sendo 12 sujeitos com rendimento satisfatório em matemática e 12 sujeitos com rendimento insatisfatório.

24 sujeitos de quintas séries, sendo 12 sujeitos com rendimento satisfatório em matemática e 12 sujeitos com rendimento insatisfatório nesta área.

O quadro I apresenta a descrição geral dos sujeitos da pesquisa.

Quadro I- Caracterização dos sujeitos da pesquisa

Série Escolar	Rendimento Escolar	Nome	Idade	Sexo
3ª SÉRIE	satisfatório	EDI	9;2	F
		GRA	9;2	F
		KET	9;2	F
		JAQ	9;4	F
		ALI	9;6	F
		DIE	9;6	F
		CRI	9;7	F
		ROB	9;10	M
		ROS	9;11	F
		VAN	9;11	F
		EVE	10;0	M
		FER	10;3	M
	insatisfatório	WIL	8;10	M
		ANA	8;11	F
		JUC	9;4	F
		MAY	9;4	F
		FAB	9;8	M
		SER	10	M
		ALE	10;4	M
		ADR	10;9	F
		JOA	10;11	M
		MAR	11;2	F
		REI	11;11	M
		NAT	12;2	F
5ª SÉRIE	satisfatório	JAQ	10;11	F
		ANG	11;1	F
		THA	11;1	F
		MAR	11;2	M
		NAY	11;3	F
		DAN	11;4	F
		JES	11;4	F
		PAU	11;5	M
		ELI	11;6	F
		ALI	11;10	F
		ADR	12;1	F
		WAN	14;5	F
	insatisfatório	MAR	10;9	F
		MAI	11;3	F
		HEN	11;5	M
		PAT	11;6	F
		ANG	11;9	F
		FEL	11;11	M
		JUC	12;5	F
		ELI	12;6	F
		ADR	12;8	M
		ELI	13;1	F
		LUC	13;4	M
		MAT	14;1	M

b) Materiais

Jogo Fan Tan composto por:

tabuleiro do jogo

80 fichas separadas em 4 caixinhas nas cores: rosa, laranja, verde e preta

grãos de sementes

recipiente para os grãos

1 vareta

tabuleiros individuais

lápis e papel.

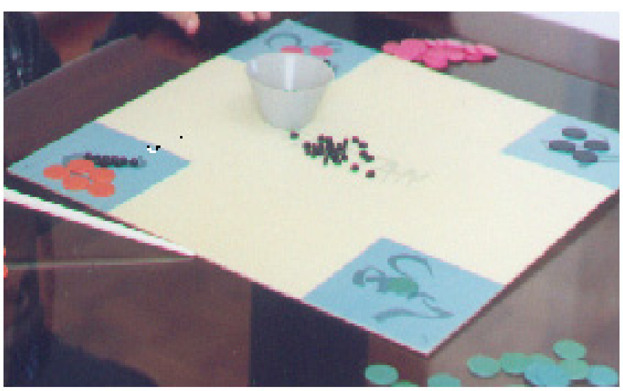


Figura 1 - O jogo Fan Tan

c) Procedimento de coleta de dados

O procedimento de coleta de dados obedeceu a duas etapas, sendo a primeira a organização dos sujeitos em grupos e a segunda etapa a realização do jogo Fan Tan.

1ª etapa- Organização dos sujeitos em grupos.

Obtidas as devidas autorizações para a realização da pesquisa de diretores, coordenadores e professores da área de matemática, de classes de terceira e quintas séries do ensino fundamental, a experimentadora solicitou dos professores uma lista dos alunos de suas respectivas classes que apresentavam rendimento satisfatório (média semestral acima de sete) e rendimento insatisfatório (média semestral inferior a sete), segundo as avaliações efetuadas na área matemática no primeiro semestre do ano letivo de 2002.

Foram combinados com os professores e coordenadores os dias e os horários em que as atividades poderiam ser realizadas e obtidas assim, as devidas autorizações dos pais de alunos das classes de terceiras e quintas séries. Com as terceiras séries, as atividades transcorreram durante o período de aula dos alunos e nas quintas séries no contra-turno, principalmente. Vale ser destacado que todos os alunos com rendimento insatisfatório indicados pelos professores e coordenadores freqüentavam um trabalho de reforço escolar, duas vezes por semana, no período do contra-turno de suas aulas.

Os sujeitos foram organizados em grupos, segundo as séries e o rendimento escolar em matemática. Cada grupo foi composto por quatro integrantes: três sujeitos e a experimentadora, sendo:

4 grupos com sujeitos de terceiras séries com rendimento satisfatório em matemática. (N=12)

4 grupos com sujeitos de terceiras séries com rendimento insatisfatório em matemática. (N=12)

4 grupos com sujeitos de quintas séries com rendimento satisfatório em matemática. (N=12)

4 grupos com sujeitos de quintas séries com rendimento insatisfatório em matemática. (N=12)

2ª etapa: Realização do jogo Fan Tan

A história do jogo FAN TAN se inicia na China, há centenas de anos, mas sua popularização ocorreu na Coréia. Depois este jogo espalhou-se por vários países asiáticos e chegou à Europa, levado pelos portugueses que o conheceram em Macau. E também na Europa conseguiu enorme sucesso. É um tradicional e muito simples jogo de contagem de sementes, em que **FAN** significa "voltar a uma tigela" e **TAN** significa "estender as sementes". É um jogo onde a sorte predomina à primeira vista, mas a sua análise permitiu que situações-problema envolvendo a igualação e a construção de diferenças fossem propostas.

O jogo Fan Tan apresenta como regras:

1- Cada participante (N=4) recebe 20 fichas para suas apostas.

2- Sorteia-se um dos jogadores para ser o banqueiro do jogo, o qual deverá pegar um punhado de grãos e separá-los em grupos de 4 em 4 para cada jogador, até obter um restante de grãos que irá variar de 1 a 4.

3- Cada jogador aposta uma certa quantidade de fichas (1 a 20) nos números 1, 2, 3 ou 4 do tabuleiro, os quais representam os grãos que restaram após a divisão efetuada pelo banqueiro.

4- Observam -se os grãos que sobraram e quem apostou neste número.

5- O vencedor da aposta recebe de cada participante uma certa quantidade de fichas, da seguinte forma: se a aposta do perdedor for maior que a do vencedor, ele deve pagar a mesma quantidade do vencedor, retirando o restante da sua aposta. Se o perdedor efetuou uma aposta menor que a do vencedor, deverá pagar apenas a quantidade que apostou.

6- Nas jogadas seguintes o banqueiro é sempre o vencedor da última jogada.

7- Vencerá a partida quem tiver obtido o maior número de fichas, quando um dos jogadores perder todas as fichas.

Tendo como ponto de partida a pesquisa sobre a dialética desenvolvida por Piaget e A .Henriques e D. Maurice em *As formas elementares da dialética* (1980/1996) presente no segundo capítulo "Um exemplo elementar de dialética lógico-matemática: problemas de igualação e construção de diferenças", fomos inspirados a realizar uma análise psicológica no jogo FAN TAN. Os diversos momentos presentes nas técnicas A e B do experimento (conforme página 43 a 46 da referida obra) estão presentes sob situações-problema desencadeadas durante o jogo.

Assim, o jogo foi utilizado a fim de permitir a descrição e a comparação das condutas dos sujeitos de terceira e quinta séries com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática. Também foram categorizados os níveis de jogo segundo aqueles apontados por Piaget, que versam sobre a igualação e a construção de diferenças.

O princípio do jogo consiste na divisão de grãos de 4 em 4 para cada um dos jogadores, o que propicia a igualação de quantidades, caso o "banqueiro se enganou na divisão correta dos grãos". A construção de diferenças foi proposta através de apostas de fichas de mesma quantidade como, por exemplo, propor que um jogador aposte duas fichas a mais que o outro jogador. Por se encontrarem implícitas nas regras, as operações de multiplicação e divisão puderam ser destacadas.

No período de setembro a dezembro de 2002 realizaram-se sessões de 50 minutos de duração com cada um dos grupos, em uma sala fornecida pelas escolas, perfazendo um total de três sessões, com fases distintas no trabalho com o jogo .

Na primeira fase do jogo, foram trabalhados os seguintes aspectos:

1) Aprendizagem do jogo.

2) Situações-problema com o objetivo de verificar a prática e a compreensão das regras, observando:

2.1-procedimento da divisão dos grãos.

2.2-significado das numerações nas extremidades do tabuleiro.

2.3-determinação do vencedor da partida.

2.4-justificativas apresentadas pelos sujeitos a respeito das quantidades de fichas que foram apostadas na jogada. Justificativa baseada em um procedimento aleatório ou há antecipação por parte do jogador a respeito do restante das fichas. Exemplo: Existindo 20 fichas para serem apostadas, se apostar 4 fichas em cada jogada, poderá jogar 5 partidas.

2.5-resolução de situação-problema relativa ao item 5 da regra do jogo: se o vencedor apostou 8 fichas e os demais jogadores apostaram respectivamente 10, 5 e 2 fichas, quantas fichas o vencedor vai receber de cada um destes jogadores? Quantas fichas terá agora, sendo esta sua primeira jogada?

3) Operações de multiplicação e divisão implícitas no jogo. Observar como os sujeitos solucionam e representam graficamente as seguintes situações-problema:

3.1-O banqueiro pegou 17 grãos para distribuir de 4 em 4 para cada um dos jogadores. Qual é o melhor número para se apostar? 1 2 3 4 Por quê? Como você mostraria o que fez/ pensou? (usando lápis e papel)

3.2-Se o banqueiro pegou 20 grãos para dividir de 4 em 4 entre os jogadores, qual seria o melhor número para se apostar?

1 2 3 4 Por quê? Como você mostraria o que fez/ pensou? (usando lápis e papel)

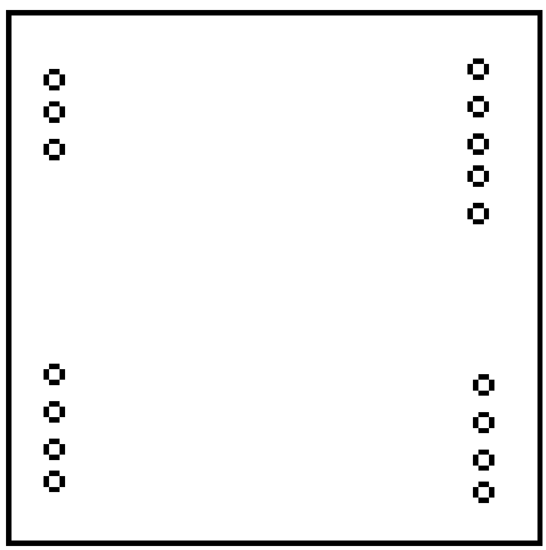
3.3-E se o banqueiro estivesse com 15 grãos, em que número você apostaria? E com 22 grãos, qual seria a melhor aposta? Como você mostraria o que fez/ pensou? (usando lápis e papel)

4)Tem um jeito de descobrir o número de grãos inicial da partida?

A segunda fase envolveu o trabalho com o jogo Fan Tan e as situações de igualação de quantidades e a construção de diferenças.

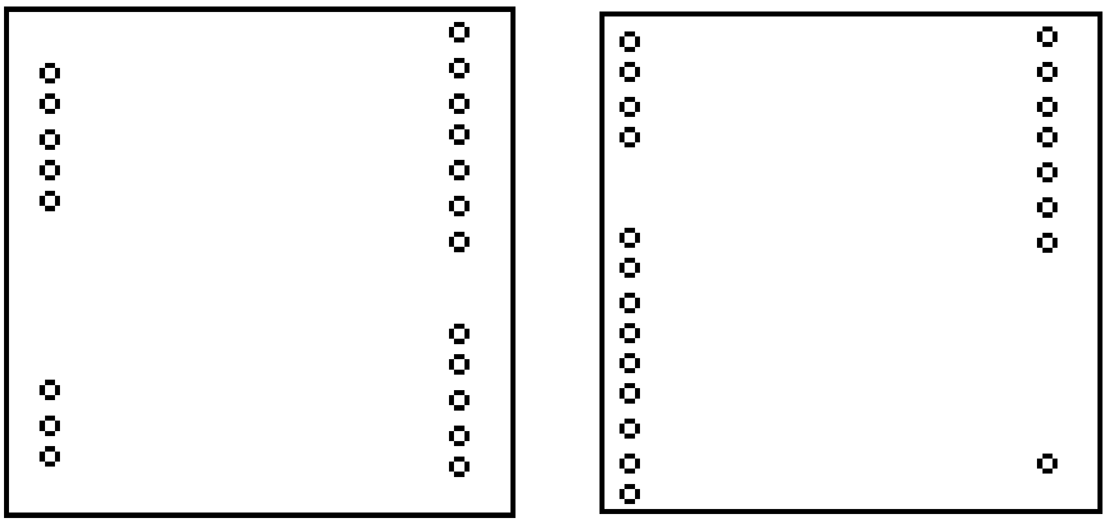
Situação 1 -Igualação de quantidades

Precisamos distribuir 4 grãos de cada vez para os jogadores e sempre cada um deverá receber a mesma quantidade de grãos. Como resolver esta situação, já que o banqueiro se enganou ao fazer a divisão dos grãos? Encontre todas as maneiras possíveis de resolver a situação.



- grãos reserva

Agora, todos os jogadores deverão receber o mesmo número de grãos. Como você resolveria estas situações? Encontre todas as situações possíveis. *grãos reserva

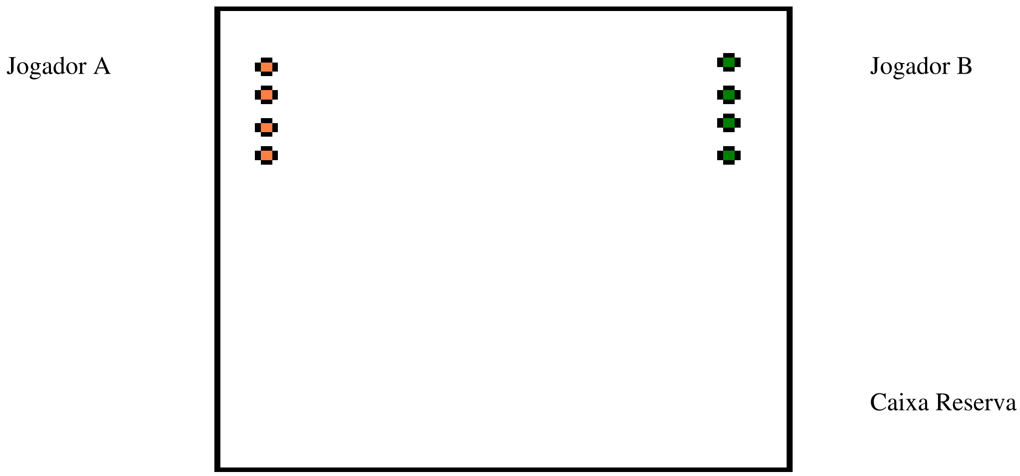


Diversas situações-problema podem ser também propostas para igualação de quantidades no tabuleiro, como: 3/5; 2/0; 6/4; 9/2; 4/5; 5/3; 6/2; 2/10; 1/ 2; 2/4; 3/5/7; 1/9/9; 4/7/4; 5/4/5; 1/3/5; 11/3/1; 1/5/9; 4/3/8; 1/4/9-impossível.

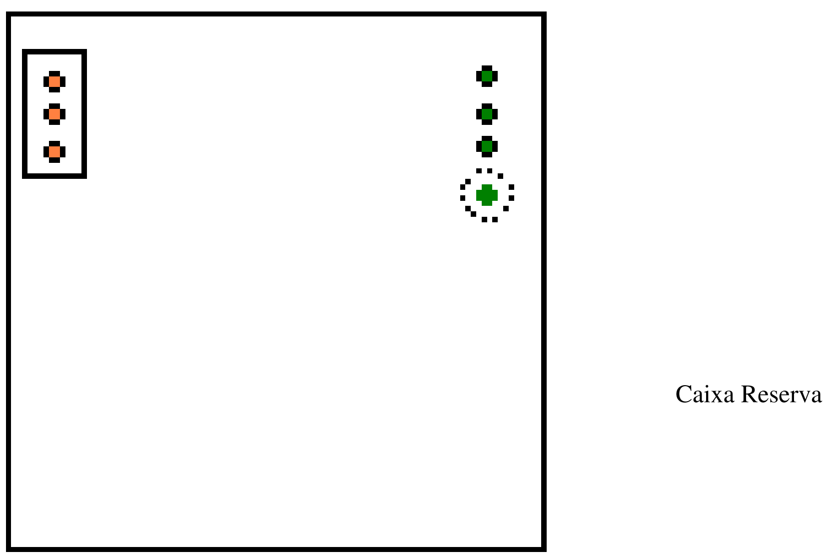
Situação 2- Construção de Diferenças

Apostas iguais na quantidade de fichas:

O jogador A apostou 4 fichas. O jogador B também apostou 4 fichas. Como fazer para que o jogador A aposte 2 fichas a mais que o jogador B?



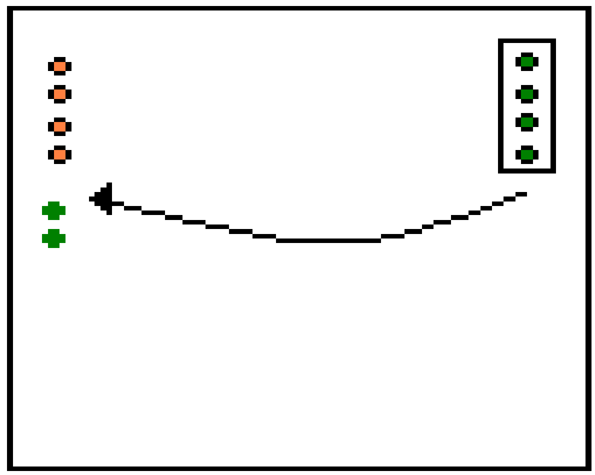
Os jogadores A e B possuíam a mesma quantidade de fichas para apostar. O jogador B resolveu pegar mais uma ficha para apostar. Quantas fichas o jogador A terá que pegar para que os dois apostem a mesma quantidade de fichas?



Obs: O retângulo nas fichas indica que elas serão escondidas, depois de verificada a igualdade no número de fichas.

Os jogadores A e B resolveram apostar 4 fichas. O jogador B resolveu dar 2 fichas para o jogador A. Quantas fichas o jogador deve pegar da caixa reserva para ter agora o mesmo tanto que A?

Jogador A

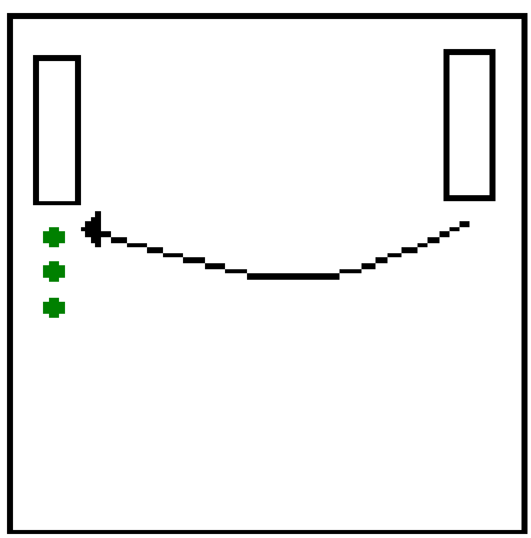


Jogador B

Caixa Reserva

Os dois jogadores A e B possuem a mesma quantidade de fichas para apostar. O jogador A recebeu 3 fichas do jogador B. Como você faria para que os dois jogadores tenham de novo o mesmo tanto para apostar?

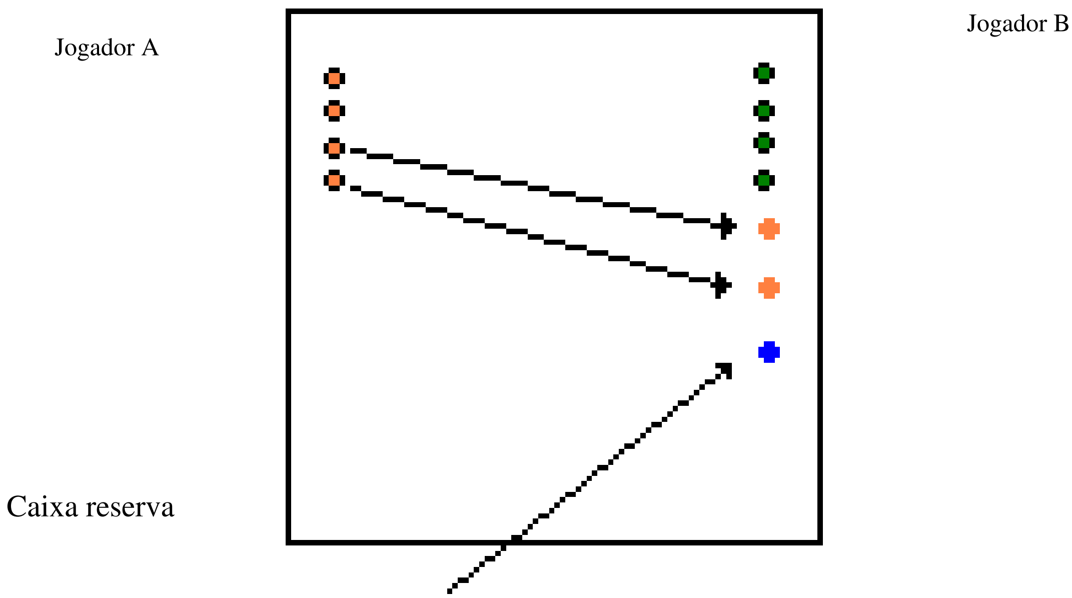
Jogador A



Jogador B

Caixa Reserva

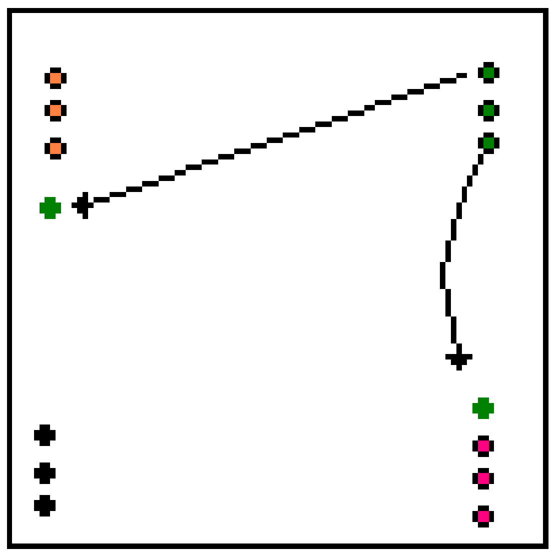
No início da partida, os jogadores resolveram apostar 4 fichas cada um. Depois, o jogador A passou duas fichas para o jogador B. O jogador B, além disso, pegou uma ficha da caixa reserva. Quantas fichas o jogador B tem a mais que o jogador A? Quantas fichas o jogador terá que pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que B?



Todos os jogadores apostaram 3 fichas na partida. O jogador B passa uma das suas fichas para o jogador A e uma ficha para o jogador C. Quantas fichas precisará pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que o jogador C? Quantas fichas precisará pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que o jogador A?

Jogador A

Jogador B



Jogador C

Caixa reserva

Além destas situações-problema descritas, outras foram colocadas:

*Temos 2 caixas de chocolate exatamente iguais. Eu lhe dou um e como todos os outros chocolates. Você come os seus, mais aquele que eu lhe dei. Quantos chocolates você come a mais?

- Invente você mesmo uma pergunta.

d) Procedimento de análise dos dados:

Os resultados foram analisados quantitativamente através de análises estatísticas e qualitativamente, considerando:

-os níveis dos sujeitos quanto às situações do jogo que envolve igualação de quantidades e construção de diferenças, segundo aqueles propostos por Piaget e colaboradores (1980/1996, p.46 a 61).

-categorização das condutas dos sujeitos no jogo, segundo os diferentes procedimentos que foram propostos : prática das regras e resolução de situações- problema.

Capítulo 6

Análise dos resultados

A análise qualitativa dos dados compreende três etapas de acordo com os objetivos propostos neste trabalho. Na primeira etapa, buscou-se uma análise das condutas dos sujeitos diante da compreensão e prática das regras do jogo que compreende distintas operações aritméticas, atendendo ao primeiro objetivo do trabalho.

A segunda etapa, atendendo ao segundo objetivo, centrou-se na comparação entre os níveis de construção de interdependências entre adição e subtração, em sujeitos com rendimento satisfatório (Rs) e rendimento insatisfatório (Ri) em matemática, provenientes de classes de terceiras e quintas séries. Por último, realizou-se uma análise da construção de interdependências entre adição e subtração em cada uma das situações propostas pelo jogo Fan Tan, de acordo com o terceiro objetivo do estudo. Em relação ao segundo e terceiro objetivos, realizaram-se também análises estatísticas.

6.1-Compreensão e prática das regras do jogo Fan Tan

A compreensão e a prática das regras do jogo foram os primeiros aspectos trabalhados com cada um dos grupos da pesquisa. E, conforme os itens já explicitados na página 86 a 88 deste trabalho, um quadro geral com as condutas observadas está descrito, a seguir (Quadro

II). Elaborou-se este quadro a partir da pesquisa de Brenelli, 1986, em que a autora apresenta categorias para análise do "jogo proposto pelo sujeito ou jogo espontâneo".

Assim, após serem expressas as categorias analisadas, através do jogo Fan Tan, teremos uma análise com a tendência dos sujeitos em cada categoria.

Quadro II- Condutas gerais destacadas no jogo Fan Tan

Designação Geral das Categorias	**Características Positivas**	**Características Negativas**
1-Procedimento da divisão dos grãos	Realiza a divisão correta dos grãos, 4 para cada extremidade.	Desconsidera a divisão dos grãos, conforme a regra do jogo.
2- Compreensão das numerações do tabuleiro	Considera, ao jogar, as numerações presentes nas extremidades do tabuleiro de 1 a 4.	Desconsidera as indicações numéricas não compreendendo o sentido de existirem os números nas quatro extremidades do tabuleiro.
3-Determinação do vencedor da partida	Prediz quem será o vencedor da partida, de acordo com os grãos restantes.	O vencedor da partida não é antecipado.
4-Justificativa da quantidade de fichas apostadas.	Procedimento intencional para realizar as apostas.	Procedimento aleatório, sem uma previsão das fichas restantes.
5-Resolução de situações –problema (item 5 da regra do jogo)	Considera a regra do jogo referente às fichas que o banqueiro deve distribuir no final de cada partida.	Desrespeita a regra, desconsiderando a quantidade de fichas apostadas e o vencedor da partida.
6-Resolução de situações-problema envolvendo operações de multiplicação e divisão	Consegue solucionar as situações-problema através de cálculos mentais ou procedimentos com materiais do jogo.	Resoluções incorretas: além do uso incorreto do algoritmo, também os materiais do jogo não serviram para resolver as situações.

1-Procedimento da divisão dos grãos

Referente a este item presente na prática das regras, pode-se afirmar que tanto os sujeitos de terceira, como de quinta série com rendimentos diferenciados em matemática, estiveram atentos na divisão de 4 grãos para cada um dos jogadores, conforme a regra do jogo. Em cada uma das jogadas, todos os sujeitos participantes conferiam e acompanhavam as divisões realizadas pelo banqueiro e aguardavam o resultado de quantas sementes restavam após as divisões.

2-Compreensão das numerações do tabuleiro

Os sujeitos compreenderam o significado das numerações de 1 a 4 nas extremidades do tabuleiro, realizando as apostas no início das jogadas. Por vezes utilizavam alguns recursos para determinar qual seria o número escolhido, sendo o mais utilizado apostar no número que acabara de sair vencedor na jogada anterior. Alguns sujeitos ficaram restritos a apostar somente na extremidade que estava em sua frente.

3-Antecipação do vencedor da partida

Propuseram-se situações em que os sujeitos teriam que antecipar quem seria o vencedor da partida, nas diversas jogadas realizadas com cada um dos grupos. Restando algumas sementes para serem divididas, fazíamos a contagem destas sementes e colocava-se oralmente aos sujeitos a questão. Por exemplo: Com 9 grãos, quem será o vencedor da partida? E agora com 13 sementes, quem vai ganhar, quem apostou no 1, 2, 3 ou 4 no tabuleiro? E assim muitos grupos passaram a contar as sementes que restavam para anteciparem quem seria o vencedor, sem mesmo ser necessário um prévio questionamento.

A conduta mais utilizada pelos sujeitos de terceira série era realizar a divisão das sementes no tabuleiro ou dividir suas próprias fichas de 4 em 4 e observar as que sobravam. Diziam primeiramente que não saberiam a resposta, depois utilizavam o recurso de contar algum material.

Os sujeitos de quinta série, tanto com rendimento satisfatório, como insatisfatório em matemática, antecipavam rapidamente quem seria o vencedor, sem o recurso de contar os grãos no tabuleiro. Muitos faziam as operações oralmente, como exemplo: "...restando 9 sementes, 4 para cada lado e resta 1, então o vencedor é quem apostou no número 1".

4- Justificativa da quantidade de fichas apostadas

A totalidade dos sujeitos de terceira e quinta séries com rendimentos diferenciados em matemática iniciaram suas apostas com apenas uma ficha, justificando que assim poderiam realizar mais jogadas e perderiam poucas fichas. Neste caso, respondiam rapidamente que poderiam realizar vinte jogadas, pois tinham vinte fichas. Os jogadores que acabavam recebendo mais fichas de seus adversários aumentavam suas apostas.

5- Resolução de situações-problema (item 5 da regra do jogo)

Esta regra foi bem compreendida pelos sujeitos de terceira e quinta séries participantes da pesquisa. Como iniciaram suas apostas com poucas fichas, não houve dificuldade em calcular quantas fichas o vencedor da partida ganharia de cada um dos jogadores.

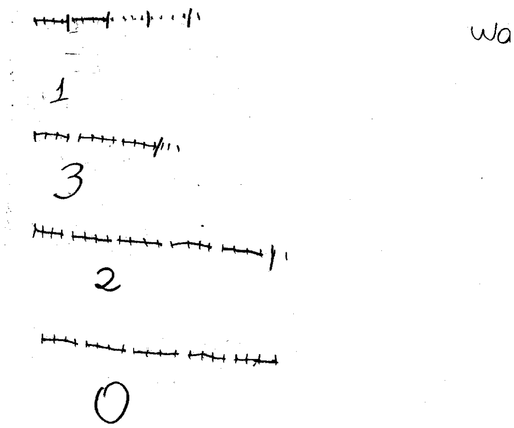
6- Registro de situações-problema envolvendo as operações de multiplicação e divisão

Foram colocadas quatro situações-problema para os sujeitos resolverem, utilizando o registro na folha de papel. Na primeira situação, o banqueiro pegou 17 grãos para distribuir no tabuleiro. Então, qual seria o melhor número para se apostar? 1, 2, 3 ou 4? Por quê? Mostre como pensou. Na segunda situação, eram 15 grãos. Depois foram propostos 20 e, por último, 22 grãos para serem distribuídos e saber o melhor número para se apostar.

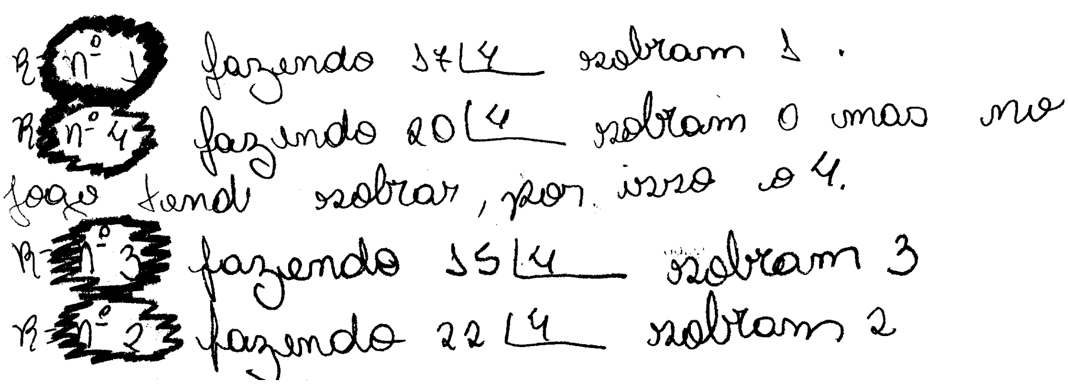
5ª série: Sujeitos Rs e Ri

Os sujeitos de quinta série com rendimento satisfatório (Rs) preferiram realizar as operações na folha (6 sujeitos), outros 3 representaram graficamente as sementes e o restante fez cálculos mentais e depois registrou a resposta.

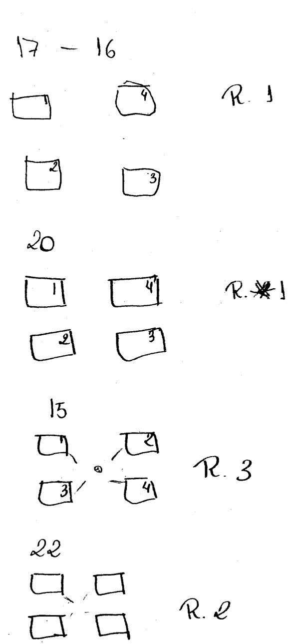
WAN (14;5, 5ª série, Rs) respondeu corretamente três questões, observando os elementos que sobravam nos registros. Como com 20 sementes a serem divididas formam-se grupos exatos com quatro elementos afirmou que apostaria no 0, mesmo sem ter este número no tabuleiro.



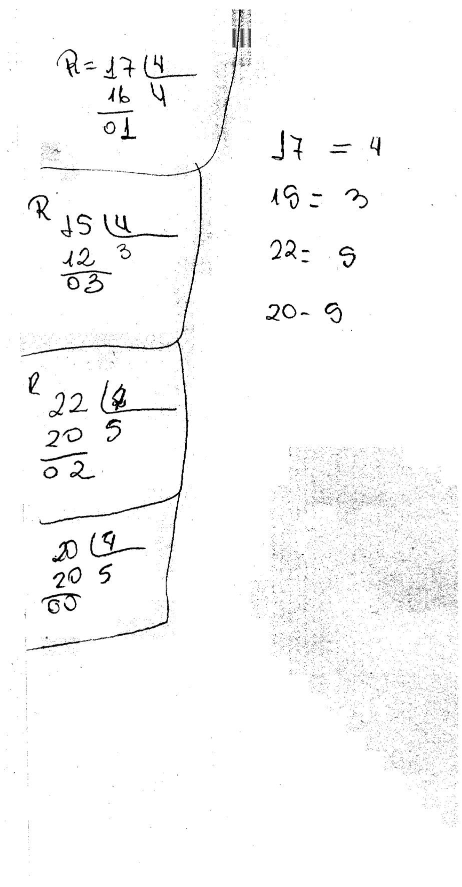
DAN (11;4, 5ª série, Rs) realizou corretamente todas as questões através de operações de divisão, calculadas mentalmente.



THA (11;1, 5ª série, Rs) representou o tabuleiro e fez as divisões das sementes mentalmente. Acertou três questões. Ao verificar que em 20 sementes a operação seria exata com quatro sementes para cada grupo, apostou no número 1 e fez um asterisco dizendo que não tinha certeza da resposta.

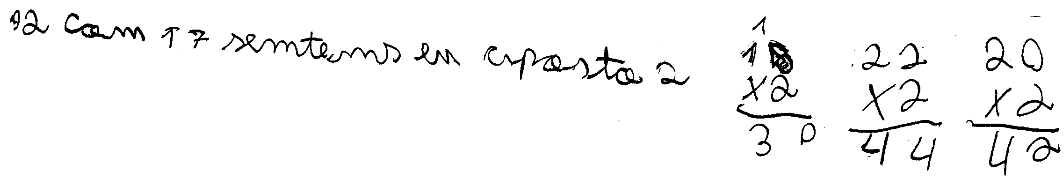


ALI (11;10, 5ª série, Rs) realizou corretamente as divisões através do algoritmo. Não considerou corretamente quantas fichas sobram com 22 e 20 sementes, registrando o quociente das operações e não o resto, conforme a regra do jogo. Não há como se apostar no número cinco.

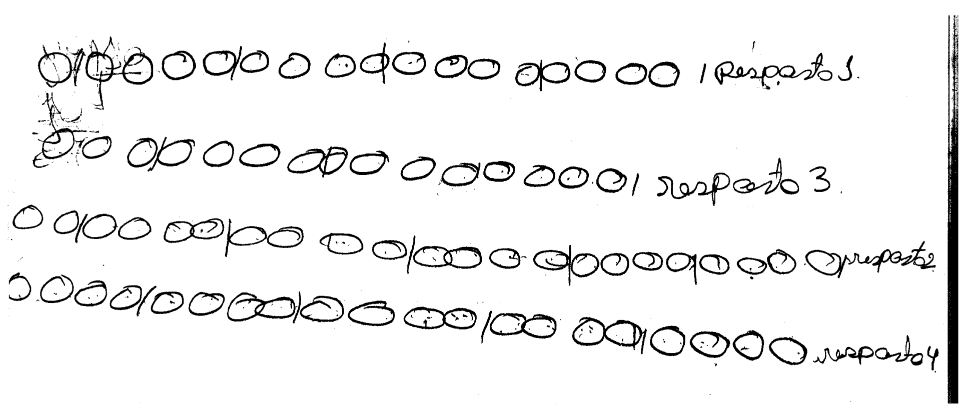


Os sujeitos com rendimento insatisfatório (Ri) em matemática utilizaram a representação do tabuleiro ou das sementes para registrar as respostas (6 sujeitos), e 4 sujeitos fizeram as operações com uso incorreto do algoritmo.

LUC (13;4, 5ª série, Ri) não respondeu corretamente as questões. Utilizou multiplicações para determinar em qual número apostaria. Com 17 sementes apostaria no número 2 (o correto seria 1) e multiplicou também por dois as outras situações-problema propostas.



JUC (12;5, 5ª série, Ri, utilizando a representação das sementes, realizou corretamente todas as questões.



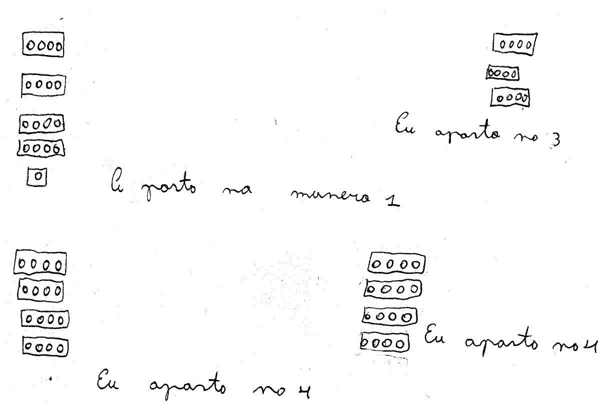
3a série: Sujeitos Rs e Ri

O recurso mais utilizado pelos sujeitos de terceira série foi o de representar graficamente as sementes para fazer as divisões e dar a resposta. Um total de dezesseis sujeitos, onze com rendimento insatisfatório e cinco com rendimento satisfatório, utilizou este recurso.

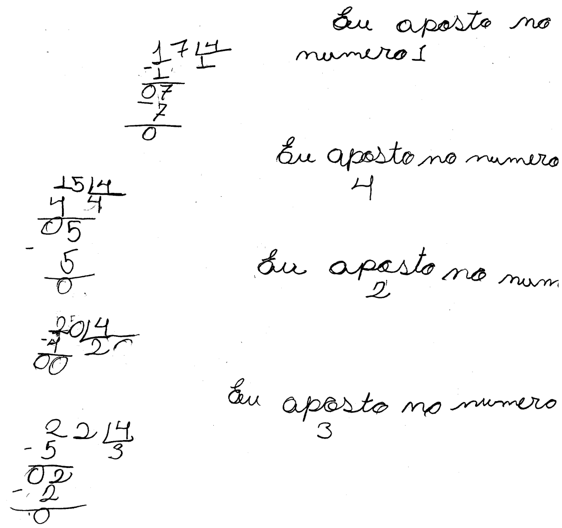
Na questão da utilização do algoritmo convencional da divisão, três sujeitos fizeram as operações através do algoritmo convencional, sendo que apenas um sujeito fez corretamente as divisões.

Um total de cinco sujeitos usou o tabuleiro para dividir as sementes e depois só registraram as respostas na folha.

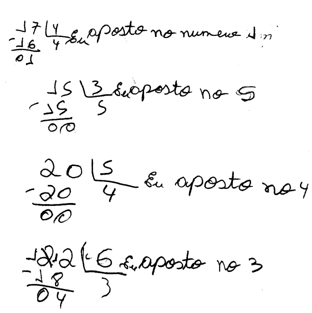
ROB (9;10, 3ª série, Rs), através da representação das sementes, utilizou um dos recursos mais empregados pelos sujeitos de terceira série. Fez três acertos. Não registrou as duas sementes que restariam na situação de possuir 22 sementes para dividir.



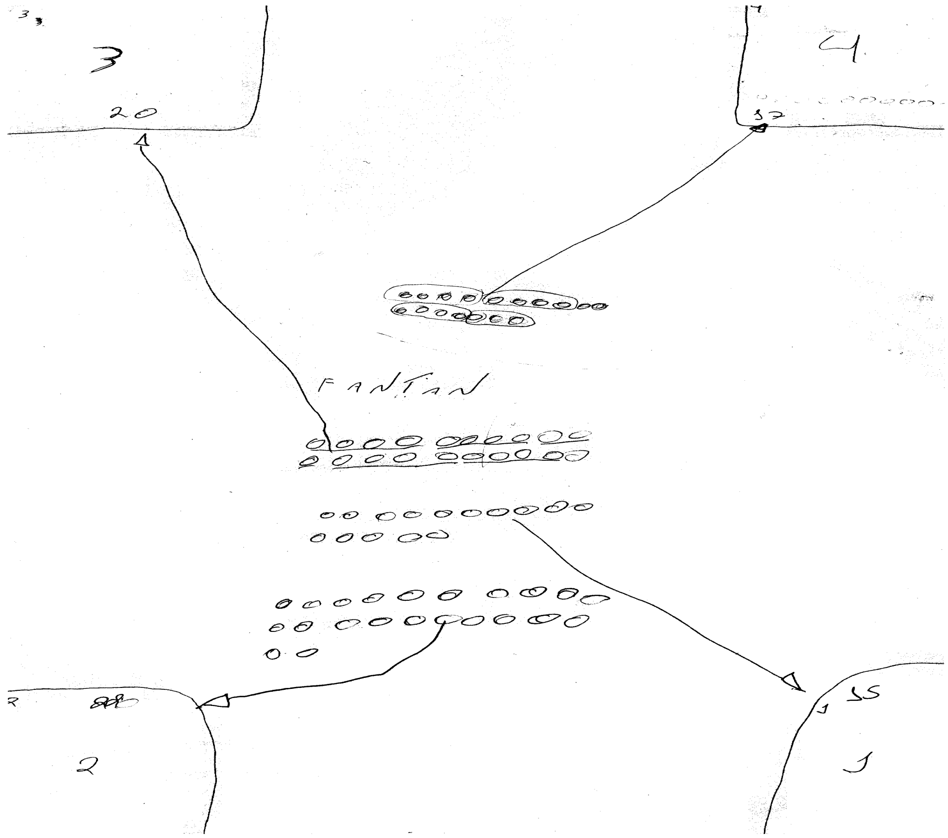
EVE (10;1, 3ª série, Rs) não conseguiu realizar as divisões corretamente através do algoritmo convencional.



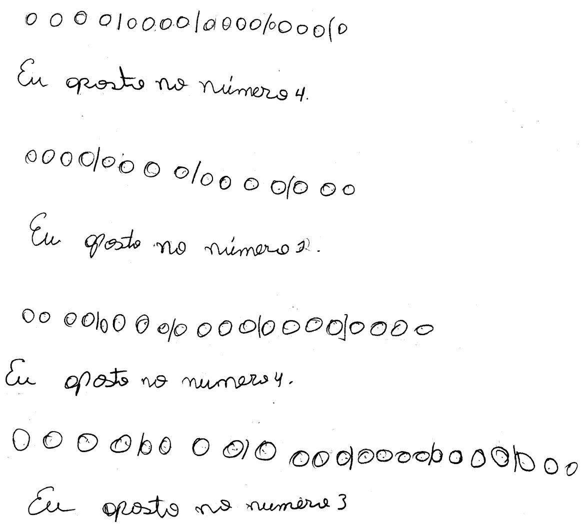
FAB (9;8, 3ª série, Ri) acertou três operações realizadas na folha, mas não considerou a regra do jogo em que valiam as sementes restantes para se fazer as apostas. Não há como se apostar no número 5 e com vinte e duas sementes seria correto apostar no número 2.



JOA (10;11, 3ª série, Ri) desenhou as sementes tentando reproduzir o tabuleiro do jogo FAN TAN. No entanto, a utilização das sementes não serviu para o cálculo correto. Houve apenas um acerto, considerando que com vinte e duas sementes apostaria no número 2.



MAY (9;4, 3ª série, Ri), representou as sementes e conseguiu apenas acertar a questão em que com vinte sementes apostaria no número 4. Não considerou corretamente as sementes que sobraram nas demais situações.



6.2- Análise dos níveis de construção de interdependências entre adição e subtração

Inspirados no experimento de Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) sobre a construção de interdependências entre adição e subtração (técnicas A e B), foram propostas aos sujeitos diversas situações-problema no jogo Fan Tan (conforme páginas 88 a 93) que envolviam a igualação de quantidades e a construção de diferenças. Baseados nos níveis propostos no experimento (ibid.), foi possível verificar a construção dialética das operações de adição e subtração nos sujeitos que apresentavam rendimentos diferenciados em matemática.

Sujeitos pertencentes à 3ª série com rendimento satisfatório e insatisfatório

Os doze sujeitos de terceira série com rendimento satisfatório (Rs) apresentaram os seguintes níveis de interdependência entre adição e subtração: I B (5 sujeitos), II A (5 sujeitos) e II B (2 sujeitos). Pode-se evidenciar que nenhum sujeito foi incluído no nível I A e no nível III.

Dentre os doze sujeitos de terceira série com rendimento insatisfatório (Ri) em matemática, foram encontrados os níveis: I B (2 sujeitos), II A (9 sujeitos) e nível II B (1 sujeito). Nenhum sujeito no nível I A e no nível III.

Em linhas gerais, pode-se afirmar que há uma distribuição de sujeitos de 3ª série com rendimento satisfatório nos níveis I B (N=5) e II A (N=5) enquanto entre os sujeitos que apresentam rendimento insatisfatório a distribuição é maior no nível intermediário II A (N=9).

O quadro III apresenta a distribuição dos sujeitos de terceira série, segundo os níveis de construção dialética entre adição e subtração e o rendimento escolar em matemática.

Quadro III- Níveis de construção de interdependências entre adição e subtração (3ª série)						
Rendimento	Sujeitos	Nível I A	Nível I B	Nível II A	Nível II B	Nível III
Satisfatório	EDI (9;2)			X		
	GRA (9;2)			X		
	KET (9;2)		X			
	JAQ (9;4)			X		
	ALI (9;6)			X		
	DIE (9;6)				X	
	CRI (9;7)		X			
	ROB (9;10)		X			
	ROS (9;11)		X			
	VAN (9;11)		X			
	EVE (10;0)			X		
	FER (10;3)				X	
Insatisfatório	WIL (8;10)			X		
	ANA (8;11)			X		
	JUC (9;4)			X		
	MAY (9;4)			X		
	FAB (9;8)		X			
	SER (10)			X		
	ALE (10;4)				X	
	ADR (10;9)			X		
	JOA (10;11)			X		
	MAR (11;2)		X			
	REI (11;11)			X		
	NAT (12;2)			X		

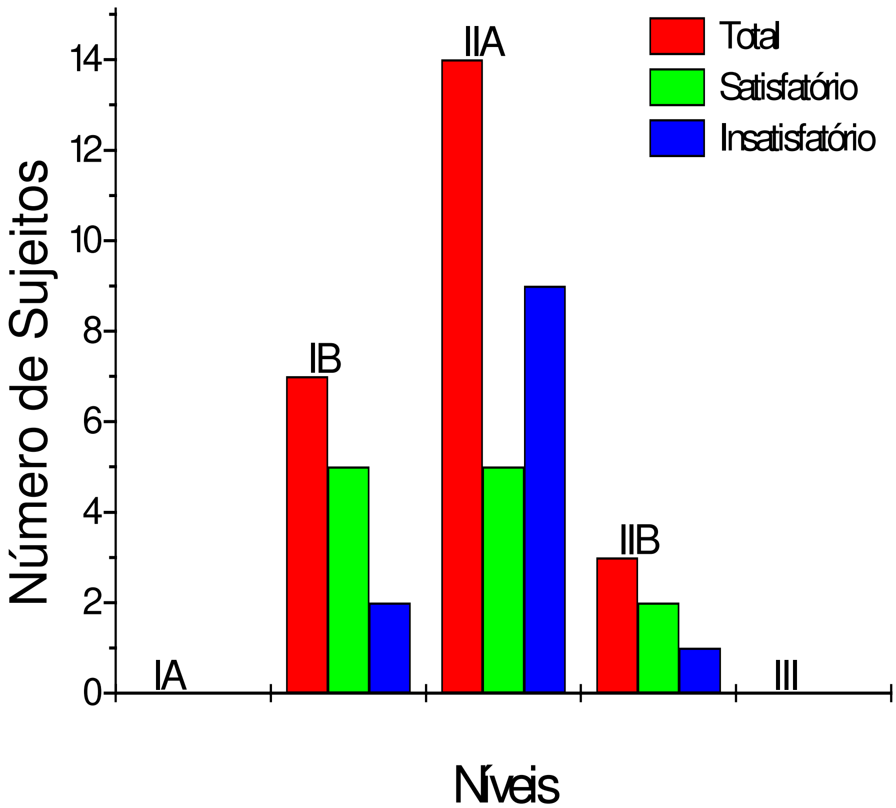


Figura 2 - Gráfico de distribuição de sujeitos de 3a série com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática, segundo os níveis de construção dialética entre adição e subtração.

A partir destes dados representados no gráfico, aplicou-se o teste estatístico t de *Student*, por permitir a comparação entre duas amostras com N= ou inferior a 30. Analisaram-se as médias entre os conjuntos de terceira série com rendimento satisfatório e com rendimento insatisfatório, considerando variâncias diferentes (Tabela 1). A hipótese a ser comprovada é que as médias são diferentes.

Tabela 1 - Tabela com os valores do teste de *Student* para os grupos da 3a série com rendimento satisfatório (Sat 3) e insatisfatório (Insat 3).

	Sat 3	Insat 3
Média	2,75	2,92
Variância	0,568	0,265
Stat t	0,632	
P(T<=t) uni-caudal	0,267	
t crítico uni-caudal	1,729	

A hipótese de que as médias são diferentes não foi comprovada pelo teste estatístico, sendo que o valor do teste foi de 0,632 e o valor esperado seria igual ou superior ao valor 1,729. Pode-se afirmar, então, com certeza de 95%, que as médias das classes de terceira série com rendimento satisfatório não são diferentes das classes de terceira série com rendimento insatisfatório.

Os sujeitos de 3ª série com rendimento satisfatório distribuíram-se, principalmente, entre os níveis I B (5 sujeitos) e o nível II A (5 sujeitos). O nível I B marca o início da compreensão pelos sujeitos, da interação entre adições e subtrações. Os sujeitos utilizam principalmente as "adições e subtrações simples", pelo acréscimo e retirada de fichas, para igualar as colunas e construir diferenças. Utilizam a transferência de fichas nas igualações das fileiras, mas não compreendem esta transferência de fichas na construção de diferenças.

Já o nível II A, em que mais sujeitos de 3ª série com rendimento insatisfatório se encontravam (9 sujeitos), é marcado pelo início das adições e subtrações relativas. As igualações das fileiras são feitas tanto pelo acréscimo de fichas, como pela transferência de fichas entre as fileiras. Para a construção de diferenças, as "adições e subtrações relativas" são utilizadas através de condutas por tentativas, descrições e cálculos para o êxito nas transferências de fichas. Segundo Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) os sujeitos ainda não compreendem a "identidade dos contrários", ou seja, a implicação entre ações aditivas e subtrativas realizadas com antecipações, fato alcançado no nível II B.

Os sujeitos de 3ª série, com rendimento satisfatório e insatisfatório em matemática recorreram principalmente ao uso de materiais como fichas e sementes no tabuleiro para resolverem as situações propostas na construção de diferenças. Neste sentido, estão presentes as abstrações "pseudo-empíricas", termo definido por Piaget (1995) "*quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações*" (p.274).

Sujeitos pertencentes à 5ª série com rendimento satisfatório e insatisfatório

Os sujeitos que freqüentavam a quinta série, com rendimento satisfatório (Rs) em matemática, encontravam-se nos seguintes níveis: 4 sujeitos no nível II A, 5 sujeitos no nível II B e 3 sujeitos no nível III. Nenhum sujeito no nível I A ou I B.

Os doze sujeitos de quinta série com rendimento insatisfatório (Ri) em matemática encontravam-se nos níveis: I B (3 sujeitos), II A (6 sujeitos), II B (3 sujeitos). Nenhum sujeito no nível I A ou III.

Em linhas gerais, mais sujeitos de 5ª série com rendimento satisfatório alcançaram níveis superiores na construção dialética entre adições e subtrações, enquanto sujeitos com rendimento insatisfatório encontram-se em maior número nos níveis iniciais e intermediários desta construção.

O quadro IV apresenta a distribuição dos sujeitos de quinta série, segundo os níveis de construção dialética entre adição e subtração e o rendimento escolar em matemática.

Quadro IV- Níveis de construção de interdependências entre adição e subtração (5ª série)						
Rendimento	Sujeitos	Nível I A	Nível I B	Nível II A	Nível II B	Nível III
Satisfatório	JAQ (10;11)				X	
	ANG (11;1)				X	
	THA (11;1)					X
	MAR (11;2)					X
	NAY (11;3)			X		
	DAN (11;4)				X	
	JES (11;4)				X	
	PAU (11;5)			X		
	ELI (11;6)					X
	ALI (11;10)			X		
	ADR (12;1)				X	
	WAN (14;5)			X		
Insatisfatório	MAR (10;9)		X			
	MAI (11;3)			X		
	HEN (11;5)				X	
	PAT (11;6)			X		
	ANG (11;9)			X		
	FEL (11;11)			X		
	JUC (12;5)		X			
	ELI (12;6)			X		
	ADR (12;8)			X		
	ELI (13;1)				X	
	LUC (13;4)		X			
	MAT (14;1)				X	

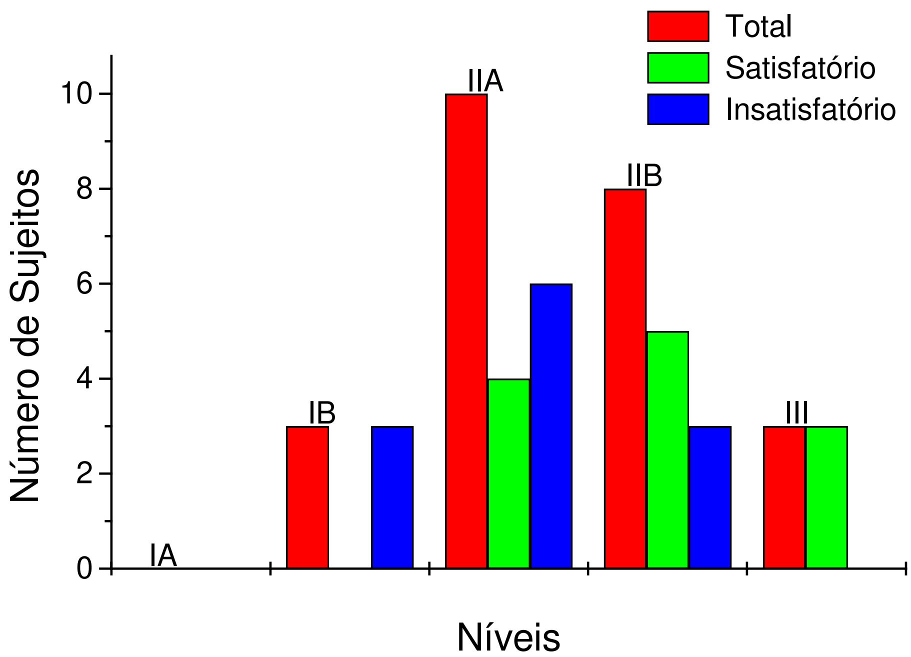


Figura 3 - Gráfico com a distribuição dos sujeitos de 5a série com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática, segundo os níveis de construção dialética entre adição e subtração.

Para os resultados obtidos com os sujeitos da 5ª série, supondo variâncias equivalentes, o teste t comprovou a diferença das médias (Tabela 2), entre o grupo com rendimento satisfatório e insatisfatório.

Tabela 2 - Tabela com os valores do teste de *Student* para os grupos da 5a série com rendimento satisfatório (Sat 5) e insatisfatório (Insat 5).

	Sat 5	Insat 5
Média	3,916	3,000
Variância	0,628	0,545
Stat t	2,930	
P(T<=t) uni-caudal	0,003	
t crítico uni-caudal	1,717	

Neste caso, o valor apresentado no teste estatístico t foi de 2,930 e o valor esperado seria de 1,717. Pode-se, então, afirmar, com certeza superior a 95%, que as médias entre os grupos de quinta série com rendimento satisfatório em matemática são diferentes das com rendimento insatisfatório.

As condutas apresentadas pelos sujeitos de quinta série com rendimento satisfatório foram qualitativamente superiores às condutas apresentadas pelos sujeitos com rendimento insatisfatório em matemática. As condutas destes últimos sujeitos pouco diferiram das condutas apresentadas pelos sujeitos de 3ª série nos níveis I B e II A, realizando a construção de diferença através de tentativas, descrições de jogadas e cálculos, apegando-se a materiais como fichas e sementes para resolverem as situações propostas.

Os sujeitos nos níveis II B e III em maior número com rendimento satisfatório apresentaram avanços na construção da interdependência entre adição e subtração. Alcançaram a "identidade dos contrários" ações aditivas e subtrativas realizadas simultaneamente com ações antecipatórias. No nível III atingem as composições complexas com transferências de fichas entre três colunas. Foram observadas, nestes sujeitos, condutas que apresentavam inúmeras possibilidades na resolução das situações. Segundo Piaget (1981/1985 e 1983/ 1986), os co-possíveis ilimitados marcam a possibilidade de compreensão do objeto ou sua forma, supondo a criação de diferentes meios, procedimentos e diferenciações numa dada situação.

Comparação dos sujeitos de 3ª e 5ª séries com rendimento satisfatório e insatisfatório

Do total de sujeitos de terceiras e quintas séries, constatou-se o maior número de sujeitos no nível intermediário II A (24 sujeitos). Dentre os outros níveis estavam I B (10 sujeitos), no nível II B (11 sujeitos) e 3 sujeitos no nível III.

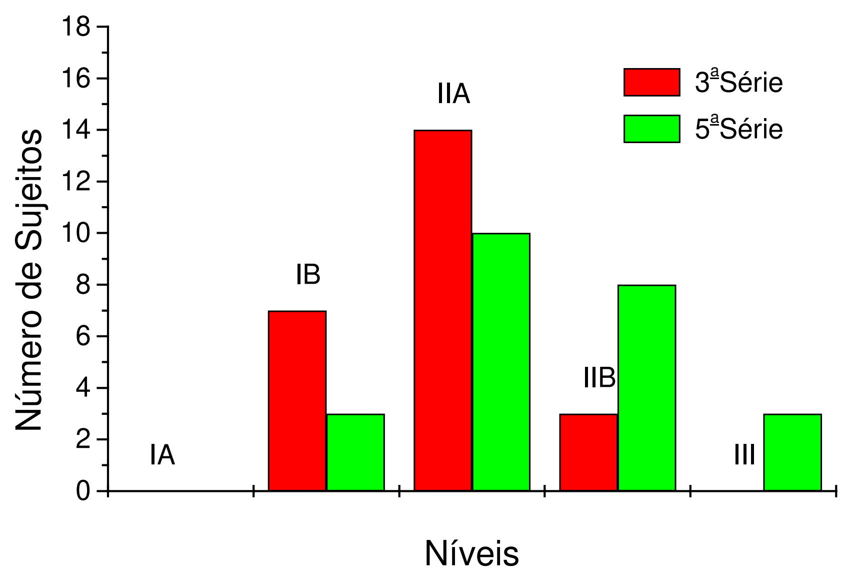


Figura 4 - Gráfico com a distribuição de sujeitos de 3a e 5a séries, segundo os níveis de construção dialética entre adição e subtração.

Ao ser aplicado o teste t no total de sujeitos de terceira série (Insat+sat 3) e quinta (Insat+sat 5) série com rendimento satisfatório e insatisfatório em matemática, supondo variâncias equivalentes, observou-se que as médias entre os grupos são diferentes (Tabela 3).

Tabela 3 - Tabela com os valores do teste de *Student* para os grupos da 5a série com rendimento satisfatório e insatisfatório (Insat+sat 5) e da 3a série com rendimento satisfatório e insatisfatório (Insat+sat 3).

	Insat+sat 5	*Insat+sat 3*
Média	3,458	2,833
Variância	0,780	0,405
Stat t	2,810	
P(T<=t) uni-caudal	0,003	
t crítico uni-caudal	1,678	

A hipótese da diferença entre as médias analisadas foi comprovada, sendo no caso o valor esperado no teste 1,678 e obtido valor superior (2,810). A quinta série apresentou médias superiores às da terceira série.

Ao se compararem as médias da terceira e quinta séries, com os mesmos rendimentos em matemática, observam-se resultados diferenciados no teste estatístico. Segundo tal teste as médias da terceira e quinta séries com rendimento insatisfatório em matemática não são diferentes (Tabela 4), mas para os grupos com rendimento satisfatório o tratamento estatístico indica que as médias são diferentes (Tabela 5).

Tabela 4 - Tabela com os valores do teste de *Student* para os grupos da 5a série com rendimento insatisfatório (Insat 5) e da 3a série com rendimento insatisfatório (Insat 3).

	Insat 5	*Insat 3*
Média	3,000	2,916
Variância	0,545	0,265
Stat t	0,320	
P(T<=t) uni-caudal	0,375	
t crítico uni-caudal	1,724	

O valor obtido para o teste t foi de 0,320, indicando que as médias dos grupos com rendimento insatisfatório não são diferentes, pois, para que as mesmas fossem diferentes, o valor esperado seria igual ou superior a 1,724.

Tabela 5 - Tabela com os valores do teste de *Student* para os grupos da 5a série com rendimento satisfatório (Sat 5) e da 3a série com rendimento satisfatório (Sat 3).

	Sat5	*Sat3*
Média	3,916	2,75
Variância	0,628	0,568
Stat t	3,693	
P(T<=t) uni-caudal	0,001	
t crítico uni-caudal	1,717	

Com a suposição das variâncias serem equivalentes para os grupos com rendimento satisfatório em ambas as séries, o teste t apresentou o valor de 3,693 comprovando que as médias são diferentes com certeza de 99,94%, com a média da quinta série superior à da terceira série.

Desta forma, pode-se ressaltar que a metade dos sujeitos pesquisados apresentou condutas próprias do nível II A, sendo pouca diferenciação entre as condutas de sujeitos de 3ª e 5ª séries com rendimento insatisfatório, demonstrando que o fator escolarização não favoreceu avanços qualitativos na construção dialética entre adição e subtração para estes sujeitos. Os sujeitos com rendimento satisfatório em matemática "naturalmente" prosseguem em sua construção dialética.

Análises mais detalhadas foram realizadas a partir de situações-problema propostas durante o jogo e serão explicitadas, a seguir, de acordo com os procedimentos realizados por Piaget e colaboradores (1980/1996).

6.3 Igualação de Quantidades e Construção de Diferenças

A análise de cada uma das situações-problema desenvolvidas nas jogadas de FAN TAN, envolvendo igualação de quantidades e construção de diferenças, conforme o terceiro objetivo deste estudo (p.79), será apresentada a partir da seguinte organização:

a) Apresentação da situação-problema realizada nas jogadas de FAN TAN, constando a representação gráfica do tabuleiro.

b) Análise das diferentes condutas observadas durante as jogadas. Chamaremos de condutas A as relacionadas às "adições e subtrações simples", em que A se refere à conduta de acrescentar elementos na fileira e retirar elementos na fileira. A conduta B refere-se à transferência de elementos entre as fileiras, em que estão presentes as "adições e subtrações relativas".

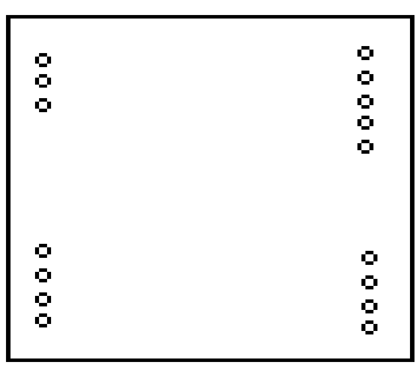
c) Apresentação de uma tabela composta pelo número de sujeitos de 3ª e 5ª séries com rendimentos diferenciados em matemática e as condutas apresentadas em cada situação-problema.

d) Análise qualitativa através de exemplos das condutas dos sujeitos, em cada situação proposta.

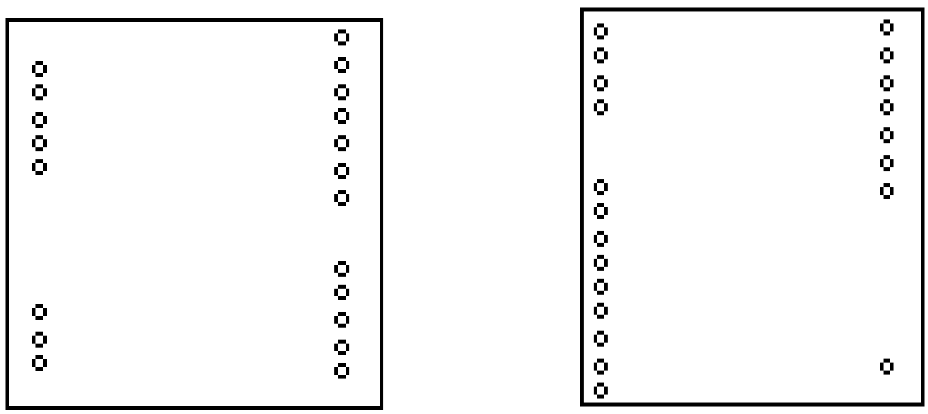
6.3.1- Igualação de Quantidades no jogo Fan Tan

a) Situação-problema:

1-Precisamos distribuir 4 grãos de cada vez para os jogadores e sempre cada um deverá receber a mesma quantidade de grãos. Como resolver esta situação, já que o banqueiro se enganou ao fazer a divisão dos grãos? Encontre todas as maneiras possíveis de resolver a situação.



2-Agora, cada jogadora deverá receber o mesmo número de grãos cada um. Como você resolveria estas situações? Encontre todas as situações possíveis.



b) Análise das diferentes condutas:

Conduta A- acrescentar e retirar grãos para igualar as quantidades.

Esta conduta foi utilizada por vinte e três sujeitos de terceira série. Muitas vezes não era a primeira conduta utilizada, mas, ao serem questionados sobre outras formas de resolver a situação proposta, acrescentavam grãos da caixa reserva ou os retiravam de uma das fileiras. Dez sujeitos de terceira série retiraram os grãos da fileira.

A conduta mais utilizada pelos sujeitos da quinta série foi a de retirar os grãos da fileira, sendo que dos 24 sujeitos pesquisados, 18 retiraram os grãos e 12 os acrescentaram

Conduta B- realizar a transferência de grãos entre as fileiras

Esta conduta foi utilizada por dezessete dos vinte e quatro sujeitos de terceira série. Na quinta série, treze sujeitos utilizaram esta conduta, sete com rendimento satisfatório em matemática e seis com rendimento insatisfatório.

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 6 - Número de sujeitos e as diferentes condutas na igualação de quantidades.

	Conduta A	Conduta B
3ª série (Rs)	12	10
3ª série (Ri)	11	7
5ª série (Rs)	15	7
5ª série (Ri)	9	6
Total	47	33

d)Exemplos das condutas dos sujeitos

Um total de quarenta e sete sujeitos pesquisados utilizaram a conduta de recorrer à caixa reserva ou retirar sementes de uma das fileiras. Mesmo alguns sujeitos que iniciaram a igualação das quantidades através de transferências entre as fileiras, quando solicitados a encontrarem outras formas de igualar as sementes, utilizaram estas condutas. Conforme a denominação de Piaget, A. Henriques e D. Maurice (1980/1996) estes sujeitos realizaram "adições e subtrações simples" sendo que as igualações feitas introduziram novos elementos às coleções ou subtraíram elementos destas coleções. Portanto, foram realizados acréscimos ou retiradas exteriores às coleções.

Segundo os autores (ibid.), os sujeitos compreenderam que a igualação de duas coleções implica a necessidade de acrescentar elementos à coleção menor ou retirar elementos da coleção maior, elementos estes pegos ou recolocados em uma fonte exterior. É um início de construção dialética entre adição e subtração. Tais condutas marcam a superação de condutas elementares de nível I A, em que os sujeitos realizam as igualações por falsas implicações e seus êxitos resultam de simples correspondências espaciais, figurais.

A conduta de transferência de sementes entre as fileiras foi utilizada por trinta e três dos quarenta e oito sujeitos de terceiras e quintas séries pesquisados, compreendendo níveis I B, II A, II B e III de construção dialética. Esta conduta difere qualitativamente das "adições e subtrações simples" pois cada um dos sujeitos deve considerar as várias coleções de sementes conjuntamente. Neste sentido, uma semente que se retire de uma fileira e passe para outra, faz a compensação da diferença de duas sementes existente inicialmente.

Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996) denominaram de "adições e subtrações relativas ou por transferências" quando o sujeito considera simultaneamente a subtração de elementos em uma fileira e a adição destes elementos em outra fileira. O fato de os sujeitos realizarem adequadamente as transferências de sementes entre as coleções não é suficiente para a determinação do nível de construção dialética entre adições e subtrações. Muitas vezes o sujeito procede por repetidas tentativas, por simples constatações, sem uma "prévia inspeção das diferenças". Há, pois, que se considerar também a análise da construção das diferenças para uma análise mais detalhada da síntese dialética entre adições e subtrações.

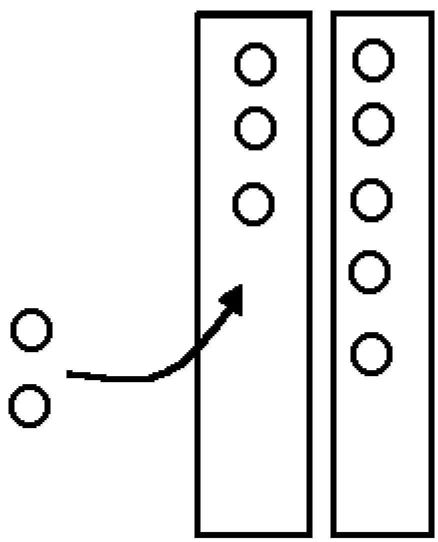
O que se pôde observar é que a situação que prevê a igualação de quantidades foi uma situação de simples resolução, em que sujeitos de todos os níveis de construção dialética conseguiram realizar a transferência de elementos entre as fileiras. Uma questão que deve ser considerada é o próprio jogo FAN TAN como facilitador, pois uma de suas regras prevê em todas as suas jogadas a divisão igualitária de sementes para cada um dos jogadores.

Mesmo sendo evidenciada anteriormente, a facilidade na resolução das situações propostas prevendo a igualação de quantidades através de transferências de elementos entre as fileiras, devem ser explicitadas as condutas observadas que diferem qualitativamente de sujeitos que se encontram nos níveis I B, II A, II B e III. Alguns sujeitos de níveis iniciais ficaram centrados em acrescentar e retirar grãos, realizando poucas possibilidades na resolução da situação. Sujeitos pertencentes ao nível II B e III realizaram o registro na folha, evidenciando inúmeras possibilidades de resolução rapidamente, até mesmo colocando que seriam infinitas as possibilidades.

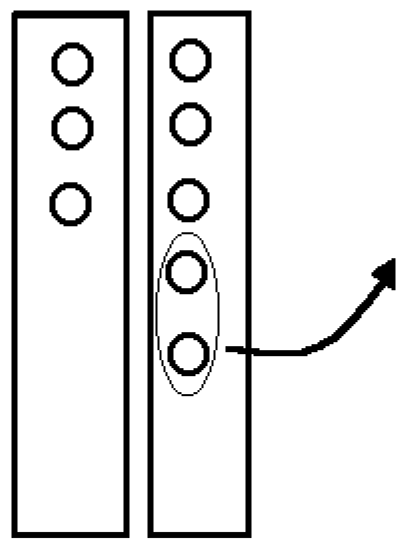
NÍVEL IB:

JUC (12;5, 5ª série, Ri, nível IB) acrescentou sementes da reserva e retirou sementes de uma das fileiras, não realizando transferências entre as fileiras.

Em 3/5: Para que todos os jogadores fiquem com a mesma quantidade de grãos, o que você faria? **Pegaria duas sementes**. (acrescentou 2 sementes da caixa reserva na fileira com 3, ficando 5/5). Você teria outra idéia? **Tiro essas**. (retirou 2 sementes da fileira com 5, ficando 3/3).

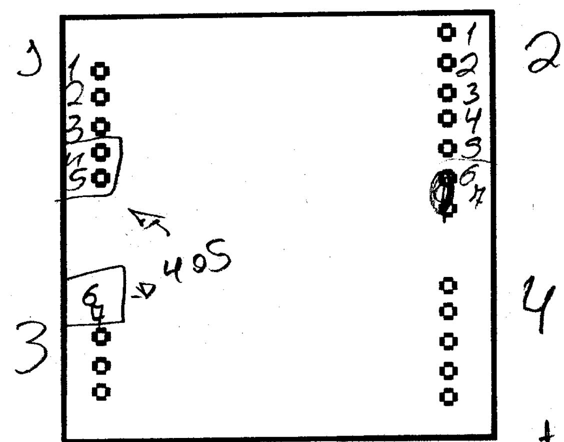


Acrescentar grãos



Retirar grãos

MAR (10;9, 5ª série, Ri, nível IB), registrou duas formas de realizar as transferências entre as fileiras. Numerou cada uma das extremidades e também as sementes para explicar como pensou.



Pegar o 6 e o 7 do monte 2 e colocar no monte 3. Pegar o 4 e o 5 do monte 1 e colocar no monte 3, e o 6 e 7 do monte 3 passar para o 1.

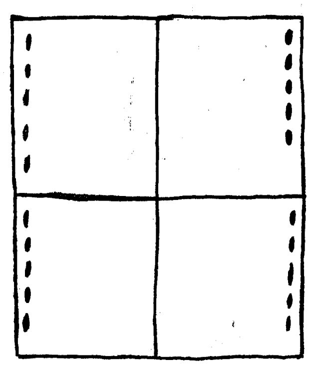
NÍVEL II A:

WIL (8;10, 3ª série, Ri, nível II A) utilizou a caixa reserva para igualar as sementes e também realizou transferências entre as fileiras após algumas tentativas.

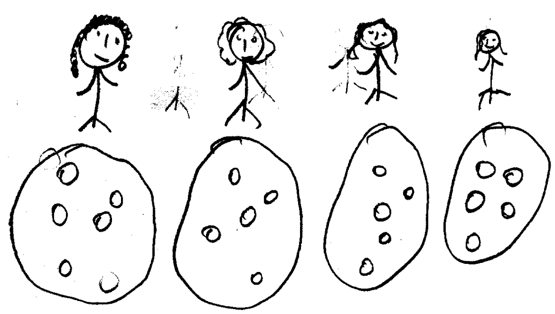
WIL, o banqueiro, se enganou ao fazer a divisão dos grãos, ficando desta forma as fileiras (no tabuleiro 3/5 grãos). Como você faria para que todos recebessem a mesma quantidade de grãos? **Poderia pegar 2 sementes**. (Pegou as duas sementes da reserva e colocou na fileira de 3, ficando 5/5. E outra forma de resolver? **É só passar esta para aqui**. (Transferiu uma semente da coluna de 5 para 3, ficando 4/4).

Em 1/3/5, WIL transferiu uma semente da primeira fileira para a que possui 3. Além disso, pegou mais uma semente da reserva, ficando 0/5/5. E outra forma para que todos os jogadores fiquem com a mesma quantidade de sementes? **Posso tirar uma daqui e colocar nessa e pegar mais daqui**. (Transferiu uma semente das que tinham 5 para as com 3, além de acrescentar 3 sementes da reserva para a fileira com 1 semente, ficando 4/4/4).

ADR (12;8, 5ª série, Ri, nível II A) e EDI (9;2, 3ª série, Rs, nível II A) resolveram a situação 4/9/7/1, contando todas as sementes e dividindo o total pelos 4 jogadores.

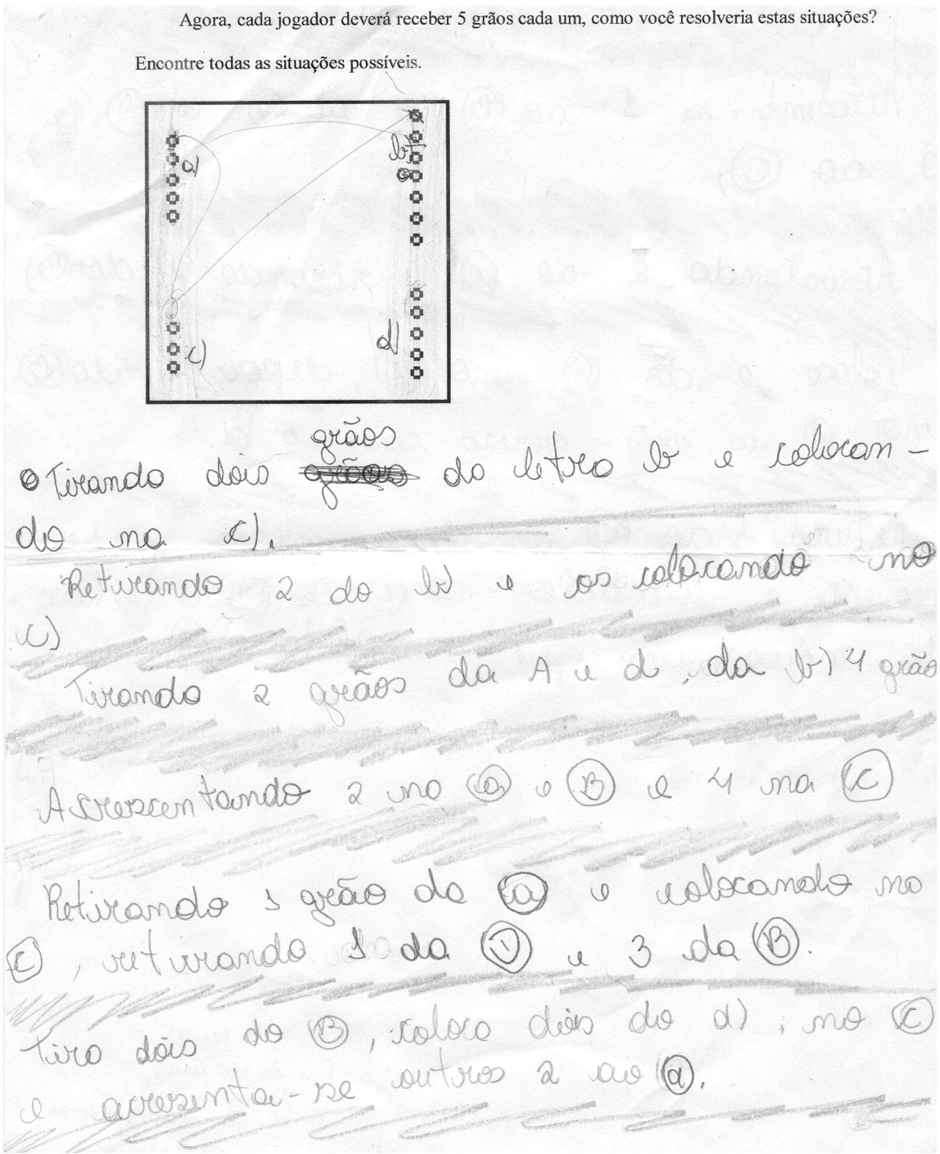


EDI

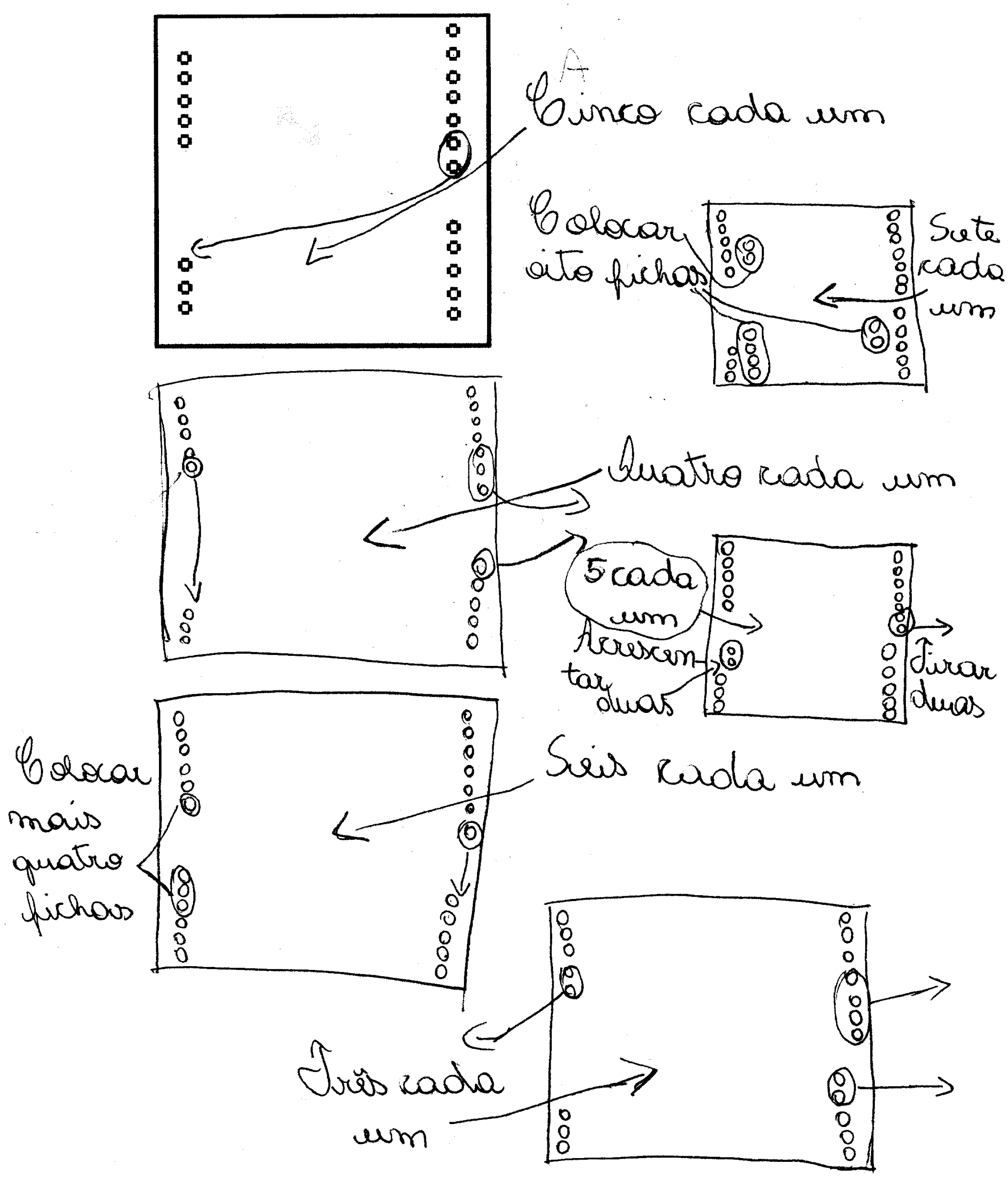


NÍVEL II B e III:

DAN (11;4, 5ª série, Rs, nível II B) comentou que existem várias possibilidades de resolver a situação, disse que "colocando e retirando sementes não existe um fim para escrever as respostas". Registrou rapidamente várias formas de resolução.



THA (11;1, 5ª série, Rs, nível III) em 3/5/7/5 no tabuleiro, registrou rapidamente variadas formas de resolver a situação, transferindo sementes inicialmente, acrescentando sementes, retirando sementes.



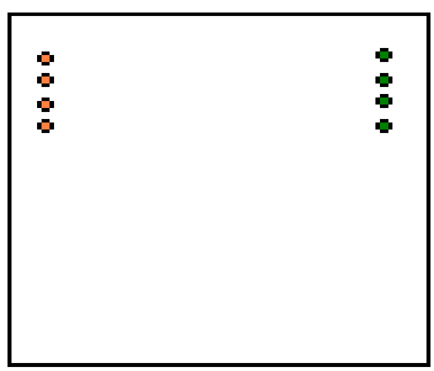
6.3.2- Construção de Diferenças no jogo Fan Tan

Durante as partidas do jogo FAN TAN, foram propostas diferenciadas situações que permitiram a construção de diferenças.

Situação 1

a) Situação-problema:

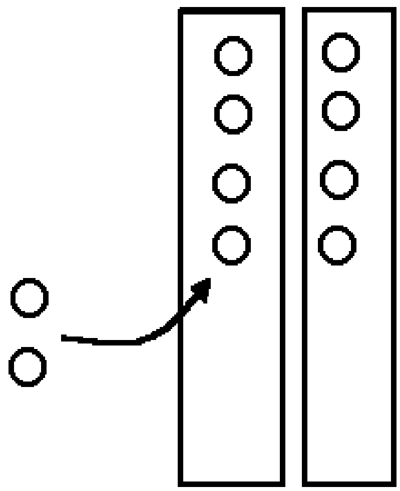
O jogador A apostou 4 fichas. O jogador B também apostou 4 fichas. Como fazer para que o jogador A aposte 2 fichas a mais que o jogador B?



Jogador A Jogador B

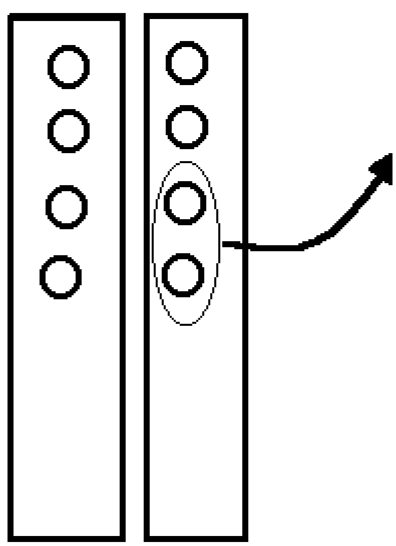
b) Análise das diferentes condutas:

Como na situação anterior de igualação de quantidades, muitos sujeitos recorreram à caixa reserva para resolverem esta situação de construção de diferenças. Para que um jogador fique com duas fichas a mais que o outro jogador, os sujeitos colocaram duas fichas na fileira do jogador A, pegando da caixa reserva.



Acrescentar grãos

Outra resolução da situação foi retirar duas fichas do jogador B.



Retirar grãos

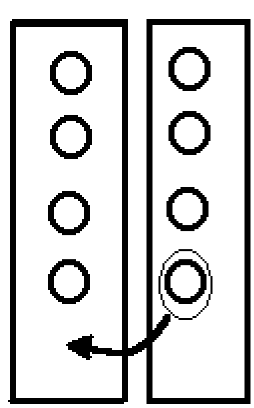
Conduta A- colocar 2 fichas na fileira do jogador A, pegando da caixa reserva e retirar duas fichas do jogador B.

Esta conduta foi utilizada por doze sujeitos de terceira série com rendimento satisfatório e doze sujeitos com rendimento insatisfatório em matemática, num total de vinte e quatro sujeitos. Das classes de quinta série, dezoito sujeitos utilizaram esta conduta, nove sujeitos com rendimento satisfatório e nove com rendimento insatisfatório.

Conduta B- transferência entre as fileiras

A transferência entre as fileiras foi realizada por seis sujeitos de terceira série, sendo quatro com rendimento insatisfatório e dois com rendimento satisfatório.

Das classes de quinta série, cinco sujeitos com rendimento satisfatório e quatro sujeitos com rendimento insatisfatório fizeram a transferência de fichas entre as fileiras, totalizando nove sujeitos.



Transferir grãos

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 7 - Número de sujeitos e as diferentes condutas na situação 1 de construção de diferenças.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	12	2
3ª Ri	12	4
5ª Rs	9	5
5ª Ri	9	4
Total	42	15

d) Exemplos das condutas dos sujeitos

Nestes exemplos de condutas de acrescentar e retirar fichas de uma das fileiras, constatamos novamente a presença de "adições e subtrações simples", em que os sujeitos recorreram a fontes externas para realizar a construção de diferenças, como fizeram ao igualar as quantidades. Ainda não há uma síntese dialética das operações de adicionar e subtrair, mas sim um início de interação entre estas operações.

Poucos sujeitos realizaram corretamente a conduta de transferência entre as fileiras, antecipando que seria necessário passar apenas uma ficha para que a outra fileira fique com duas fichas a mais. Das classes de terceira série, dois sujeitos anteciparam a transferência, sem realizar tentativas anteriores, considerando os sentidos contrários das ações de adicionar em uma fileira e retirar fichas de outra. Nas quintas séries, foram cinco os sujeitos que fizeram as antecipações adequadas.

Podemos evidenciar que, mesmo não obtendo êxito inicialmente nas transferências de fichas entre as fileiras, os sujeitos realizaram condutas importantes na construção da interdependência entre adições e subtrações. Suas constatações de que transferir duas fichas para outra fileira ocasiona uma diferença de quatro fichas a mais e não duas como foi solicitado, causam perturbações em muitos sujeitos, visto que suas previsões não são confirmadas pelo resultado das fichas 2/6. É um passo importante para o entendimento da implicação entre as ações aditivas e subtrativas.

NÍVEL I B:

O protocolo de CRI (9;7, 3ª série, Rs, nível I B) ilustra a conduta de acrescentar fichas, utilizada por muitos sujeitos de terceira série. Estes sujeitos não apresentaram outras possibilidades de resolução da situação.

> Eu apostei 4 fichas e você apostou também 4 fichas. Como fazer para você apostar duas fichas a mais do que eu? **Pego duas fichas**. Outra idéia? **Não**.

NÍVEL II A

REI (11;11, 3ª série, Ri, nível II A) utilizou a conduta de acrescentar fichas e retirar fichas de uma das fileiras.

> Nós dois apostamos 4 fichas nesta jogada. Como fazer para você apostar 2 fichas a mais que eu? **Pego duas**. Tem outra forma? **Tiro duas daqui**. (Retirou duas fichas da minha coleção).

NÍVEL II B e III

Os protocolos de DAN (11;4, 5ª série, rendimento satisfatório, nível IIB) e THA (11;1, 5ª série, rendimento satisfatório, nível III) exemplificam as condutas utilizadas pelos sujeitos na transferência de fichas. Iniciaram a resolução da situação através destas transferências e quando questionadas a encontrarem outras formas de resolução, acrescentaram e retiraram fichas das fileiras.

> DAN, já que nós duas apostamos 4 fichas, como você faria para apostar duas fichas a mais do que eu? **Pegaria duas fichas suas**. (Pegou as fichas da outra fileira, percebendo que ficaram com 6 e 2). **Não, ficou com quatro a mais**. (Devolveu uma ficha, ficando 5/3). **Agora tem duas a mais**.

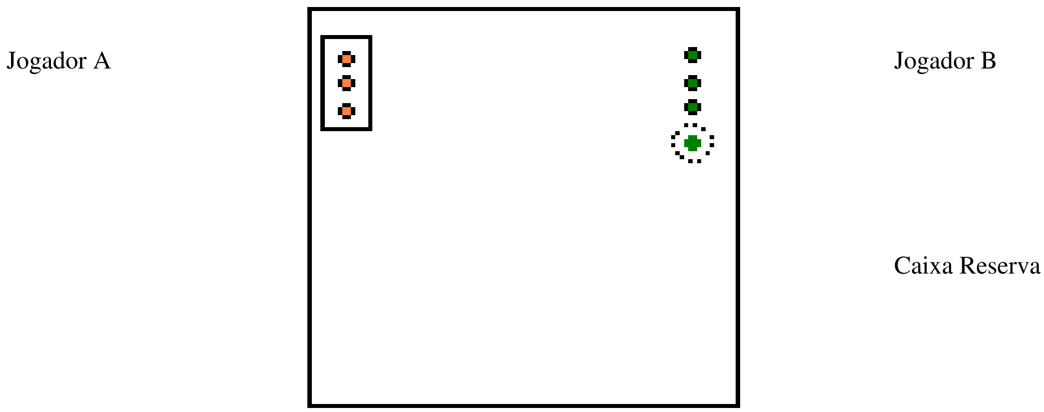
> THA, como fazer para que você aposte duas fichas a mais do que eu, já que nós duas apostamos quatro fichas? **É só passar uma ficha para cá, você fica com 3 e eu com 5 fichas. Duas a mais**.

Situação 2-

a)Situação-problema:

Os jogadores A e B possuíam a mesma quantidade de fichas para apostar. O jogador B resolveu pegar mais uma ficha para apostar. Quantas fichas o jogador A terá que pegar para que os dois apostem a mesma quantidade de fichas?

Obs: O retângulo nas fichas indica que elas serão escondidas, depois de verificada a igualdade no número de fichas.



b) Análise das condutas dos sujeitos:

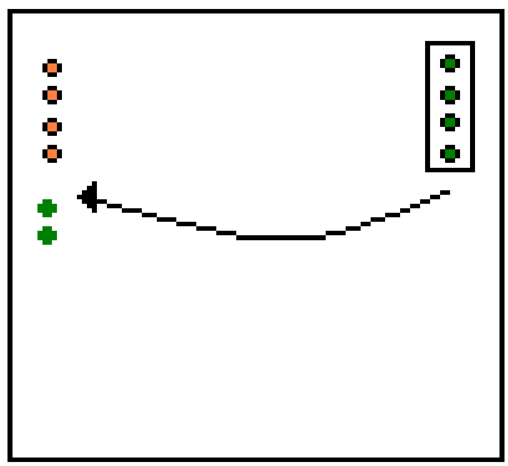
Todos os quarenta e oito sujeitos pesquisados responderam rapidamente que o jogador A precisa pegar mais uma ficha para apostar a mesma quantidade.

Confirmando os resultados da situação de igualação de diferenças em que todos os sujeitos utilizaram "adições e subtrações simples", novamente os sujeitos não tiveram dificuldade em realizar a adição de um elemento utilizando uma fonte exterior. Nesta situação, não havia a necessidade de considerar simultaneamente as duas fileiras para transferências de sementes.

Situação 3

a) Situação-problema:

Os jogadores A e B resolveram apostar 4 fichas. O jogador B resolveu dar 2 fichas para o jogador A Quantas fichas o jogador deve pegar da caixa reserva para ter agora o mesmo tanto que A?



Caixa Reserva

b) Análise das diferentes condutas:

Conduta A: responderam o acréscimo de 2 fichas.

Nesta situação, dezesseis sujeitos de terceira série responderam duas fichas, onze com rendimento satisfatório em matemática e cinco com rendimento insatisfatório. Dos sujeitos de quinta série, quatorze responderam duas fichas, sendo cinco com rendimento satisfatório e nove com rendimento insatisfatório em matemática.

Conduta B: responderam o acréscimo de 4 fichas.

Apenas dois sujeitos de terceira série com rendimento satisfatório responderam quatro fichas. Cinco sujeitos com rendimento insatisfatório deram esta resposta, totalizando sete sujeitos de terceira série. Das classes de quinta série, onze sujeitos responderam quatro fichas, sete com rendimento satisfatório e quatro com rendimento insatisfatório.

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 8 - Número de sujeitos e as diferentes condutas registradas na situação 3.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	11	2
3ª Ri	5	5
5ª Rs	5	7
5ª Ri	9	4
Total	30	18

d) Exemplos das diferentes condutas:

Os sujeitos de terceira série consideraram apenas a transferência que adicionou duas fichas para a outra fileira, sem, entretanto, considerar a diferença de quatro fichas ocasionada por esta transferência, o que implica ações aditivas e também subtrativas. Tanto nos sujeitos de terceira como de quinta série observaram-se condutas cujas respostas previam o acréscimo de somente duas fichas para que as duas fileiras ficassem com o mesmo tanto de fichas.

Outra conduta registrada foi a que previa pelos sujeitos o acréscimo de quatro fichas em uma das fileiras. Valendo-se das implicações existentes entre adjunções e supressões simultâneas, os sujeitos demonstraram compreender que, ao transferir duas fichas para outra fileira, a diferença estabelecida passa a ser de quatro fichas. Como afirmam Piaget, Henriques e Maurice (1980/1996), os sujeitos passam nos níveis II B e III a compreender a "identidade dos contrários", ou seja, uma transferência é, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração. Tal conduta foi mais freqüentemente apresentada pelos sujeitos de quinta série .

Os sujeitos do nível II A realizam descrições ou cálculos para encontrarem uma resposta, já compreendendo que uma transferência entre coleções consiste em acrescentar elementos a um conjunto, retirando elementos do conjunto inicial.

Um exemplo de conduta do nível I B é de CRI (9;7, 3ª série, Rs), que ao ser indagada sobre quantas fichas seriam necessárias pegar da caixa reserva na transferência de duas fichas do jogador B para o jogador A, respondeu duas fichas desconsiderando a subtração e a adição simultâneas.

> Todos apostaram 4 fichas nesta partida. E se você me passasse 2 fichas, CRI, quantas precisaria pegar da reserva para ter o mesmo tanto que eu? **Duas**. Como você pensou? **Aqui tinha 4 e passou duas para lá precisa de 2 para ficar o mesmo tanto.**

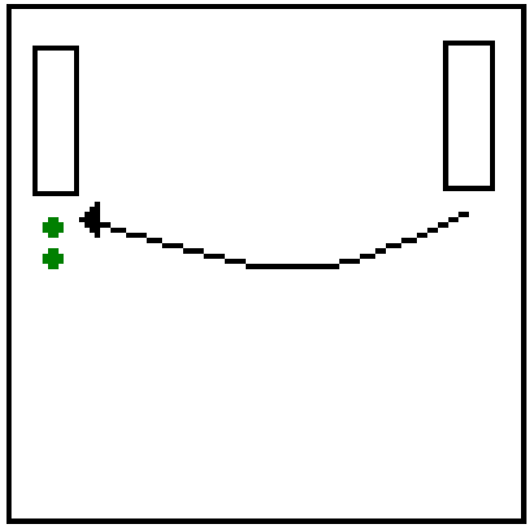
THA (11;1, 5ª série Rs) exemplifica uma conduta de nível III procedendo com antecipações corretas para compensar as diferenças criadas.

Ao ser proposta a situação 3, THA respondeu rapidamente 4 fichas. Como você pensou? **Se eu tinha quatro fichas passo duas fiquei com a metade do que eu tinha. Agora você tem seis e eu duas. Preciso pegar quatro fichas para ter o mesmo tanto.**

No caso de termos duas caixas idênticas de bombons e eu passar um bombom dos meus para você comer, quantos bombons você come a mais do que eu? **Dois.** Como você pensou? **Você tinha uma caixa de bombons era igual as duas. Aí você pegou e deu um para mim e você já ficou com um a menos que tinha e eu... fiquei com mais... Você ficou com um a menos e quando dá um para mim eu fico com dois a mais, já tinha um a mais.**

Situação 4

a) Situação-problema: Os dois jogadores A e B possuem a mesma quantidade de fichas para apostar. O jogador A recebeu 3 fichas do jogador B. Como você faria para que os dois jogadores tenham de novo o mesmo tanto para apostar?



b)Análise das diferentes condutas:

Conduta A: previa o acréscimo de 3 fichas.

Um total de dezessete sujeitos de terceira série respondeu três fichas, dez com rendimento satisfatório e sete com rendimento insatisfatório. Na quinta série, dez sujeitos, sendo cinco com rendimento satisfatório e cinco com rendimento insatisfatório deram esta resposta.

Conduta B: previa o acréscimo de 6 fichas.

Esta resposta foi dada por dez sujeitos de terceira série, sete com rendimento satisfatório e três com rendimento insatisfatório. Na quinta série, onze sujeitos, cinco com rendimento satisfatório e seis com rendimento insatisfatório consideraram as adições e subtrações relativas presentes na situação proposta.

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 9 - Número de sujeitos e as diferentes condutas registradas na situação 4.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	10	5
3ª Ri	7	5
5ª Rs	7	5
5ª Ri	3	6
Total	27	21

d) Exemplos das condutas dos sujeitos:

Uma conduta observada nesta quarta situação foi a de os sujeitos considerarem apenas a transferência das três fichas para a fileira do jogador A, então respondiam que seria preciso acrescentar 3 fichas da caixa reserva. Consideram as “adições simples” feitas pelo jogador B e não a implicação entre as ações aditivas e subtrativas.

Outra conduta dos sujeitos foi a que previa o acréscimo de seis fichas da caixa reserva para compensar a diferença entre as coleções. Neste caso, passaram a considerar as “adições relativas” com simultâneos aumentos e diminuições entre as fileiras.

MAR (10;9, 5ª série, Ri, nível I B) considerou apenas o acréscimo de 3 fichas.

Como fazer para os jogadores ficarem de novo com o mesmo tanto para apostar? **Pega 3 fichas e coloca aqui** (apontou para a fileira do jogador B). Como você pensou? **Esse tem agora 3 fichas a mais é só o outro também pegar 3 fichas e eles ficam iguais**.

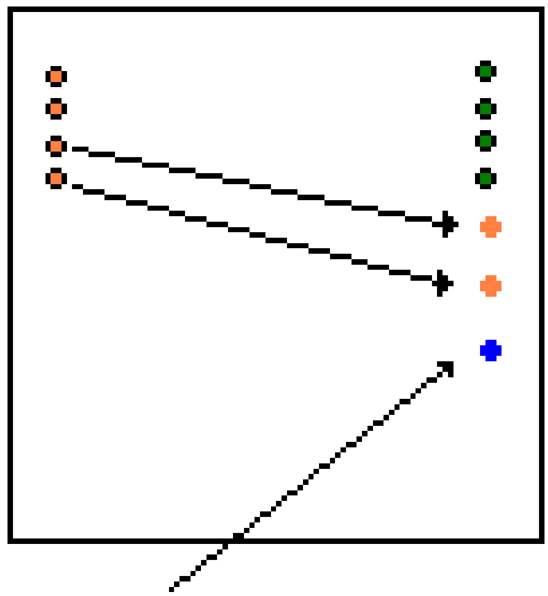
ANG (11;9, 5ª série, Ri, nível II A) nesta situação apresentou condutas próprias do nível II A, necessitando realizar cálculos para responder a quantidade de fichas, sendo desconhecido o número inicial de fichas.

> Como você faria para que os jogadores tenham de novo a mesma quantidade de fichas para apostar? **Quantas fichas tinha cada um**? Os jogadores tinham o mesmo número de fichas para apostar. **Se aqui tivesse três e aqui três esse passa todas para cá, então fica sem nenhuma o outro fica com seis. Então precisa de seis para ficar com o mesmo tanto.** (utilizou as fichas do jogo para fazer os cálculos e ir descrevendo suas ações).

Situação 5

a) Situação-problema:

No início da partida, os jogadores resolveram apostar 4 fichas cada um. Depois, o jogador A passou duas fichas para o jogador B. O jogador B, além disso, pegou uma ficha da caixa reserva. Quantas fichas o jogador B tem a mais que o jogador A? Quantas fichas o jogador A precisa pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que B?



b) Análise das diferentes condutas:

Primeira questão: Quantas fichas o jogador B tem a mais que o jogador A?

Conduta A- consideraram as adições simples.

Um total de vinte e três sujeitos de 3ª série apresentaram dificuldade em considerar as adições relativas e o acréscimo de uma ficha da caixa reserva. As respostas variaram em sete fichas a mais (7 sujeitos), quatro a mais (5 sujeitos), três fichas a mais (6 sujeitos) e menos de três fichas (3 sujeitos).

Conduta B- as adições relativas e a adição simples de uma ficha.

Apenas um sujeito de 3ª série respondeu que seriam cinco fichas a mais, considerando as transferências simultâneas.

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 10 - Número de sujeitos e as diferentes condutas registradas na situação 5a.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	12	0
3ª Ri	11	1
5ª Rs	6	6
5ª Ri	10	2
Total	39	9

Esta quinta situação compreendendo, além de transferências simultâneas, o acréscimo de uma ficha de uma fonte externa, permitiu a investigação de um passo a mais na construção da interdependência entre a adição e a subtração. Os sujeitos de quinta série com rendimento satisfatório apresentaram saltos dialéticos compondo as compensações necessárias entre as ações de sentido contrário “acrescentar” e “retirar”, além de considerar o acréscimo de uma ficha da caixa reserva.

Os sujeitos não consideraram que o jogador A havia passado duas de suas fichas para o jogador B, ficando apenas com duas fichas, e ainda uma ficha foi acrescida da caixa reserva, sendo que a diferença agora entre os jogadores seria de cinco fichas. Alguns sujeitos ficaram centrados no fato de o jogador B ter ficado com sete fichas no total, então respondiam que ele tinha sete fichas a mais, outros, só consideraram as três fichas recebidas e respondiam três fichas a mais.

Os sujeitos de 3ª série com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório não consideraram os sentidos contrários das ações de adicionar e subtrair. Anunciaram resultados considerando, como resposta, sete ou três fichas. Sendo assim, não fizeram a compensação de cinco fichas ocasionada na situação-problema.

Nas classes de quinta série, oito sujeitos responderam que seriam cinco fichas, mais sujeitos com rendimento satisfatório compreenderam a situação-problema. Cinco sujeitos responderam sete fichas e nove sujeitos responderam três fichas. E dois sujeitos com rendimento insatisfatório também responderam quatro fichas a mais.

Segunda questão: Quantas fichas o jogador A precisa pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que B?

Conduta A- consideraram apenas as adições simples de fichas

Novamente os vinte e três sujeitos de 3ª série desconsideraram as adições relativas e simples que estavam previstas simultaneamente na situação-problema. Um total de treze sujeitos responderam que pegariam três fichas da caixa reserva, três sujeitos responderam que seriam necessárias sete fichas e sete sujeitos responderam que seriam necessárias quantidades menores que três fichas. Na quinta série, onze sujeitos apresentaram esta conduta, tendo respondido que seriam necessárias duas fichas (3 sujeitos), três fichas (5 sujeitos), quatro fichas (2 sujeitos) e sete fichas (1 sujeito).

Conduta B: previa as múltiplas transferências entre as fileiras e caixa reserva.

A segunda questão foi respondida corretamente por um sujeito de terceira série com rendimento insatisfatório que considerou novamente as adições relativas e simples, respondendo cinco fichas. Os sujeitos de quinta série responderam que pegariam cinco fichas (treze sujeitos, nove com rendimento satisfatório).

Tabela 11 - Número de sujeitos e as diferentes condutas registradas na situação 5 b segunda questão.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	12	0
3ª Ri	11	1
5ª Rs	3	9
5ª Ri	8	4
Total	34	14

Exemplos de condutas dos sujeitos:

ROS (9;11, 3ª série, Rs, nível I B) respondeu considerando as três fichas do jogador B, sem considerar que duas fichas foram recebidas do jogador A e uma ficha adicionada da caixa reserva.

> Quantas fichas o jogador B tem a mais que o jogador A? **O jogador b 3 fichas**. E quantas fichas o jogador A precisa pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que B? **O jogador a falta 3 para completar 7**.

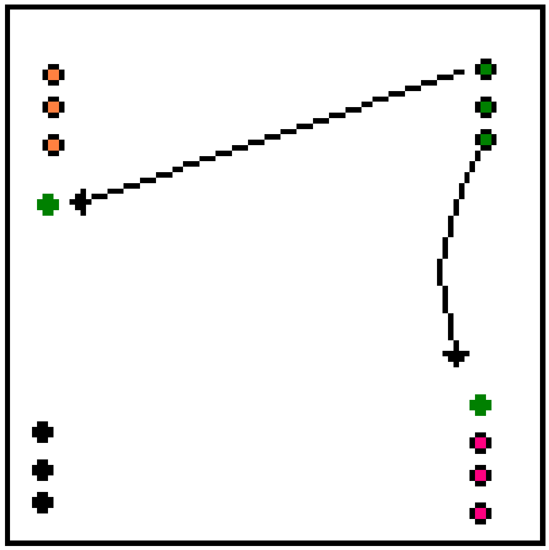
ALE (10;4,3ª série, Ri, II B) único sujeito da 3ª série que considerou as múltiplas transferências e acréscimo da caixa reserva.

> Quantas fichas o jogador B tem a mais que o jogador A? **Tem 5 fichas**. Quantas fichas o jogador A precisa pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que o jogador B? **Precisa de 5 fichas também**. **Esse aqui passou duas fichas para o outro ficou com menos e o outro ficou já com duas a mais e pegou mais uma. Tem que pegar 5 para ficar igual.**

Situação 6

a) Situação-problema:

Todos os jogadores apostaram 3 fichas na partida. O jogador B passa uma das suas fichas para o jogador A e uma para o jogador C. Quantas fichas precisará pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que o jogador C? Quantas fichas precisará pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que o jogador A?



b) Análise das diferentes condutas:

Conduta A- considerar as adições simples de uma ficha em cada fileira.

Um total de dezenove sujeitos de 3ª série considerou apenas as adições simples de uma ficha para o jogador A e para o jogador C. Esta conduta foi utilizada por quatorze sujeitos de 5ª série.

Conduta B- considerar as múltiplas transferências entre as três fileiras.

Os sujeitos de quinta série, seis com rendimento satisfatório e quatro com rendimento insatisfatório responderam corretamente a questão. Um total de cinco sujeitos de 3ª série considerou o acréscimo de 3 fichas, o que seria o necessário para compensar as múltiplas transferências do jogador B.

c) Tabela com as diferentes condutas

Tabela 12 - Número de sujeitos e as diferentes condutas registradas na situação 6.

	Conduta A	Conduta B
3ª Rs	10	2
3ª Ri	9	3
5ª Rs	6	6
5ª Ri	8	4
Total	33	15

d)Exemplos das condutas dos sujeitos

Nesta situação, estão presentes as composições complexas prevendo múltiplas transferências entre três fileiras, o que exige sínteses entre operações de sentidos contrários. A conduta mais utilizada pelos sujeitos foi a de considerar apenas o acréscimo de uma ficha em cada um dos jogadores e então os sujeitos previam que seriam necessárias uma ou duas fichas da caixa reserva para que B tivesse o mesmo tanto que A e C. Desconsideraram as subtrações e adições simultâneas.

Outra conduta, mais utilizada por sujeitos de 5ª série, com rendimento satisfatório, previa o acréscimo da caixa reserva de 3 fichas para o jogador B compensar as desigualdades criadas.

KET (9;2, 3ª série, Rs nível I B) considerou que o jogador A recebeu uma ficha e o jogador C também recebeu uma ficha e previu que seriam necessárias duas fichas da caixa reserva para que B ficasse com o mesmo tanto que os outros jogadores. Ficou centrada nas adições simples de uma ficha que cada jogador apresentou na situação.

Quantas fichas o jogador B (no caso KET) precisa pegar da caixa reserva para ter o mesmo tanto que eu? **Duas**. E para ter o mesmo tanto que FAB? **Duas**. Como você pensou? **Eu passei uma ficha pra cá e uma pra lá, precisa pegar duas para ficar com o mesmo tanto que vocês.**

FER (10;3, 3ª série, Rs, nível II B) considerou as múltiplas transferências e previu rapidamente que seriam necessárias três fichas da caixa reservas para ficar com o mesmo tanto que seus colegas.

Quantas fichas você precisa pegar da caixa reserva para ficar com o mesmo tanto que seu? **Três**. E para ficar com o mesmo tanto que MAR? **É três também**. **Passei duas de minhas fichas fiquei com uma só e cada um ficou com 4, então precisa de três fichas pra ficar tudo de novo igual.**

Aplicou-se o "teste Z" na comparação da proporção entre as condutas A e B nos grupos de terceira série com rendimento satisfatório e insatisfatório. Este teste estatístico confirma ou rejeita a igualdade entre duas proporções. No caso foi aplicado para comparar a conduta B (por envolver as adições e subtrações relativas) nos grupos com rendimentos diferenciados. A tabela 13 apresenta os resultados gerais do teste, em que P_1 indica a proporção de sujeitos que apresentaram a conduta B com rendimento satisfatório em matemática e P_2 indica a proporção que apresentou a conduta B com rendimento insatisfatório.

Comparando as proporções com o teste Z com uma certeza de 90% na primeira e terceira questões, o teste rejeita a igualdade. Nas demais situações-problema de construção de diferenças, sendo as mais complexas, as proporções entre as respostas na conduta B dos sujeitos com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório são iguais. Os números negativos na tabela indicam que o grupo com rendimento insatisfatório foi superior ao com rendimento satisfatório.

Tabela 13 - Tabela com os números de condutas apresentadas pelos sujeitos de 3a série nas situações do jogo, as proporções das condutas (P1 e P2) e o teste Z.

	Condutas 3ª série (Rs)		Condutas 3ª série (Ri)				
Situação-problema	A	B	A	B	P_1	P_2	Teste Z
1	12	10	11	7	0,833	0,583	1,35
2	12	2	12	4	0,167	0,333	-0,94
3	11	2	5	5	0,167	0,417	-1,35
4	10	5	7	5	0,417	0,417	0,00
5-a	12	0	11	1	0,000	0,083	-1,02
5-b	12	0	11	1	0,000	0,083	-1,02
6	10	2	9	3	0,167	0,250	-0,50

Com as classes de 5ª série, o fator rendimento satisfatório em matemática gerou diferenças nos grupos, sendo que mais sujeitos apresentaram condutas qualitativamente superiores na questão de interdependência entre adições e subtrações, principalmente as situações que envolviam composições mais complexas. Um exemplo seria o resultado da quinta situação-problema expresso na tabela 10 p.135 em que trinta e nove sujeitos utilizaram a conduta A prevendo adições e subtrações simples, enquanto nove sujeitos (oito de 5ª série, destes, seis com rendimento satisfatório) utilizaram a conduta B através de compensações antecipadas das diferenças, prevendo adições relativas por transferências entre as fileiras.

A tabela 14 apresenta o resultado geral das condutas A e B presentes nas situações-problema propostas aos sujeitos de 5ª série. Como na tabela anterior, P_1 indica a proporção de respostas na conduta B de sujeitos com rendimento satisfatório e P_2 indica a proporção de respostas da conduta B de sujeitos com rendimento insatisfatório.

Neste caso, em duas situações-problema (quinta-a e quinta-b) o teste Z indica que as proporções são diferentes, com 90% de certeza, pois, no teste, o valor apresentado é superior a 1,28. Evidencia-se que mais sujeitos com rendimento satisfatório em matemática apresentaram a conduta B que previa adições e subtrações relativas.

Tabela 14 - Tabela com os números de condutas apresentadas pelos sujeitos de 5a série nas situações do jogo, as proporções das condutas (P1 e P2) e o teste Z.

	Condutas 5ª série (Rs)		Condutas 5ª série (Ri)				
Situação-problema	A	B	A	B	P_1	P_2	Teste Z
1	15	7	9	6	0,682	0,600	0,41
2	9	5	9	4	0,643	0,692	0,42
3	5	7	9	4	0,417	0,692	1,23
4	7	5	3	6	0,583	0,333	-0,41
5-a	6	6	10	2	0,500	0,833	1,73
5-b	3	9	8	4	0,250	0,667	2,05
6	6	6	8	4	0,500	0,667	0,83

De forma geral, analisando as diversas situações-problema propostas nas jogadas de FAN TAN, pode-se considerar que há um predomínio das condutas denominadas neste estudo como A que previam acréscimos e subtrações simples. A conduta B, que previa a transferência de elementos entre as fileiras, exigindo a construção de sínteses dialéticas entre adições e subtrações, foi menos utilizada, principalmente pelos sujeitos de terceira série. Neste caso, o fator rendimento em matemática satisfatório ou insatisfatório não foi um fator relevante que desencadeasse diferenças na utilização desta conduta. Em algumas situações, o grupo com rendimento insatisfatório da terceira série até apresentou condutas que previam mais a transferência de elementos entre as coleções.

Ao serem analisadas as seis situações-problema propostas aos sujeitos, pode-se afirmar que elas efetivamente apresentaram uma crescente ordem de complexidade, sendo que as situações que envolviam a igualação de quantidades foram mais facilmente resolvidas dos que as que previam a construção de diferenças e múltiplas transferências de elementos.

Discussão dos Resultados e Considerações Finais

> Emília examinou-a (tabuada de somar) com tôda a atenção e disse:
>
> Mas aqui só está a soma dos números pequenos, que vão de 2 a 9. E depois de 9? Como se somam os números compridos?
>
> Isso já é mais complicado. Temos que fazer uma conta. O melhor é chamar Dona Regra para ensinar o jeitinho - disse o Visconde, estalando o chicote.
>
> Dona Regra apareceu.
>
> Faça o favor de explicar ao respeitável público como se faz uma soma de números grandes.
>
> Com todo o gôsto – respondeu a madama. Mas não estou vendo aqui nenhum quadro-negro. Sem quadro-negro nada posso fazer...
>
> (Lobato, Monteiro. **Aritmética da Emília**, 1981, p.47-48)

"*Tabuada de somar, conta mais complicada, regras, jeitinhos de resolver, quadro-negro...*" palavras que descrevem uma metodologia empregada no ensino da matemática, há décadas. Mas será que já estão em desuso? Ainda não constatamos um ensino voltado às operações de somar e subtrair que enfatize o emprego de regras, os "jeitinhos" transmitidos pelo professor para a resolução das contas, exigindo dos alunos infinitas memorizações e absoluta concentração para garantir o acerto nos resultados?

Observa-se que os conteúdos obedecem à seguinte organização: primeiro, são ensinadas as somas, depois as subtrações, a seguir as multiplicações e, finalizando, as divisões. Pouco se constata do trabalho envolvendo a interdependência entre as operações aritméticas. Retomando as palavras de Piaget (1980/1996, p.41-42), "*os matemáticos falam muito pouco de dialética, enquanto sua disciplina é, sem dúvida, a que produz o maior número de superações por síntese e a que mais constrói seus próprios conteúdos*".

Assim, a partir da perspectiva teórica deste autor e considerando o experimento sobre a dialética lógico-matemática, envolvendo problemas de igualação de quantidades e a construção de diferenças, buscou-se delinear o problema da pesquisa: Existe, em matemática, relação entre as construções de interdependência entre adição e subtração e o rendimento escolar?

Investigou-se como se apresentam as interdependências entre as operações de adição e subtração, num total de quarenta e oito sujeitos, englobando sujeitos de terceira e quintas séries, tanto com rendimento satisfatório, como com rendimento insatisfatório em matemática. Também a investigação possibilitou a caracterização das condutas dos sujeitos em situações que envolviam as operações de multiplicação e divisão.

Mas será que "sem o quadro-negro nada podemos fazer"?

Neste sentido, temos a importante contribuição dos jogos de regras que propõem desafios ao pensar. São fontes de descobertas, além de serem meios para um trabalho efetivo e significativo com a matemática, conforme os estudos e pesquisas apresentados no segundo capítulo deste trabalho. Através do jogo de regras Fan Tan, utilizado num contexto de diagnóstico pedagógico, o qual pode ser ampliado ao campo psicopedagógico, foi possível que situações-problema envolvendo igualação de quantidades e construção de diferenças, fossem propostas aos sujeitos.

Comparação dos níveis de interdependência entre adição e subtração e análise das condutas dos sujeitos nas situações do jogo Fan Tan

Os resultados encontrados envolvem dados muito importantes. De forma geral, ao se analisarem os dados obtidos no trabalho com os sujeitos de terceira série (N=24), constatou-se que as condutas dos sujeitos com rendimento satisfatório e rendimento insatisfatório em matemática pouco diferiram. Pôde-se verificar que as condutas dos sujeitos com rendimento insatisfatório até foram superiores ao outro grupo, em diversos momentos. Para os grupos de quinta série (N=24) houve diferenciação, apresentando o grupo com rendimento satisfatório em matemática condutas superiores ao grupo com rendimento insatisfatório.

Os sujeitos de terceira encontravam-se principalmente nos níveis IB (N=7) e IIA (N=14) e IIB (N=3) desta construção dialética. Portanto, sete sujeitos apresentaram condutas de um início das interações entre as operações de adição e subtração. Catorze sujeitos iniciam a construção da adição relativa (com transferência de elementos entre as coleções) e três sujeitos apresentaram condutas em que a dialética está presente na relação entre ações aditivas e subtrativas.

As condutas que foram mais utilizadas pelos sujeitos de terceira série foram as que previam “adições e subtrações simples”, como denominam Piaget e seus colaboradores. Os sujeitos compreendem que o igualar ou construir diferenças nas coleções implica a necessidade de acrescentar elementos na coleção menor ou retirá-los no caso de uma coleção maior, recorrendo a uma fonte exterior. As transferências de elementos entre as coleções foram utilizadas acertadamente em momentos de igualação de quantidades e poucas vezes na construção de diferenças, em que aspectos mais complexos estavam envolvidos.

Os sujeitos de quinta série com rendimento satisfatório em matemática apresentaram níveis mais complexos na construção das interdependências entre a adição e a subtração. Foram capazes de resolver as situações que previam múltiplas transferências, exigindo sínteses entre operações de sentidos contrários. Também apresentaram as condutas envolvendo "adições e subtrações relativas", passando a compreender a identidade dos contrários, como ressalta Piaget (1980/1996), ao considerarem que uma transferência é, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração de elementos. Os sujeitos encontravam-se nos níveis IIA (N=4), IIB (N=5) e III (3) na construção de interdependências entre adição e subtração.

Os dados analisados, do ponto de vista da teoria psicogenética, demonstram que, para uma aprendizagem significativa ou para apresentar um "rendimento satisfatório em matemática", na quinta série, os mecanismos da aprendizagem operatória são necessários, aliados à presença de estruturas que garantam a assimilação dos conteúdos. Ao serem trabalhados os conteúdos que envolvem as operações sobre operações (potenciações), a resolução de equações e sua simplificação, a descoberta do estado inicial de uma relação ternária, tais conteúdos necessitam da interdependência entre as operações. Conforme afirma Becker (2001, p.32) "*o conteúdo do* *conhecimento ou do pensamento humano não surge do nada nem subsiste por si mesmo. Ele nasce da ação do sujeito e sua complexidade está diretamente ligada à complexidade das estruturas que o sujeito vai construindo*". Se as estruturas não estão presentes em um nível operatório, os sujeitos apresentam lacunas, como se observou no grupo de quinta série com rendimento insatisfatório em matemática. As condutas apresentadas por este grupo não foram diferentes das apresentadas pelos grupos de terceira série, o que os testes estatísticos também confirmaram.

No caso da terceira série, o rendimento escolar apresentado pelos sujeitos em matemática não permitiu predizer diferenciações nos níveis de interdependência entre a adição e a subtração, sendo que o grupo com rendimento satisfatório não apresentou condutas superiores ao grupo com rendimento insatisfatório. Neste caso, afirma Becker (ibid, p.31) "*a compreensão escolar convencional de aprendizagem - no sentido estrito- como repetição de conteúdos prontos transmitidos pelo professor não dá conta do conhecimento-estrutura*".

Assim, a escola, mais do que se preocupar com os conteúdos a serem transmitidos, deve ir além, compreendendo como os sujeitos constroem o conhecimento pelo processo de equilibração ou de abstração reflexiva e, no caso particular da pesquisa, como compreendem as implicações entre as operações de adição e subtração. É importante acompanhar "*as passagens progressivas de puras constatações pseudo-empíricas (sem o êxito das antecipações ou deduções) a inferências por implicações entre operações a igualar quantidades desiguais ou introduzir uma diferença entre quantidades iguais*" (Piaget,1980/1996, p.43).

Deve-se ainda destacar ainda que os estudos sobre adição e subtração, apresentados no terceiro capítulo deste trabalho, ressaltam que a realização das adições e subtrações envolve aspectos complexos, superando a aparente simplicidade na ação de acrescentar ou retirar elementos. É necessária uma construção operatória, segundo Piaget (1990) para que a compreensão do número e das operações aritméticas se efetive. Esta construção engloba três momentos: uma abstração reflexiva, uma coordenação nova e uma equilibração (que permite a reversibilidade da soma e da subtração). De posse do mecanismo geral de igualização de diferenças é que os sujeitos conseguem compreender a soma.

Analisando mais detalhadamente as condutas dos sujeitos nas diversas situações-problema propostas nas jogadas de Fan Tan que previam a igualação de quantidades e a construção de diferenças, um primeiro aspecto a se destacar é a importância da ação sobre os materiais acompanhada da reflexão sobre a mesma, na construção de conceitos e relações. Deve ressaltar que metade dos sujeitos da pesquisa encontravam-se no nível IIA da construção das relações entre adição e subtração e necessitaram dos materiais ou de sua representação para solucionarem as situações-problema, conforme exemplos na p. 95.

Como aponta Piaget (1973, p.221): "*... nos alunos jovens a ação sobre os objetos resulta totalmente indispensável para a compreensão, não somente das relações aritméticas, como também das geométricas*". Em outro momento, afirma Piaget (1948/1996, p.59)

> *A matemática porém consiste em primeiro lugar, e acima de tudo, em ações exercidas sobre as coisas, e as próprias operações são também sempre ações, mas bem*

coordenadas entre si e simplesmente imaginadas, ao invés de serem executadas materialmente. ...A verdadeira causa dos fracassos da educação formal decorre pois essencialmente do fato de se principiar pela linguagem (acompanhada de desenhos, de ações fictícias ou narradas, etc) ao invés de o fazer pela ação real e material.

Assim como no estudo de Lopes (2002) em que, quanto mais os sujeitos demonstraram compreender as relações entre as operações de adição e subtração, mais elaborados são os procedimentos utilizados por eles, neste estudo os sujeitos de quinta série com rendimento satisfatório e em níveis II B e III na construção destas interdependências também apresentaram condutas mais elaboradas. Verificou-se que estes sujeitos apresentaram, além de condutas que previam a transferência de elementos entre as fileiras (as adições e subtrações relativas), também uma maior possibilidade de respostas. Como Dan (5ª série Rs) comentou que, em uma situação, haveria infinitas possibilidades de respostas para igualar as quantidades, visto que poderiam ser acrescidos e retirados infinitos elementos de cada uma das fileiras.

As situações-problema que envolviam a igualação de quantidades foram resolvidas facilmente. A própria regra do jogo previa que as sementes fossem divididas igualmente nas extremidades do tabuleiro. Neste caso, mais sujeitos conseguiram realizar a transferência de sementes entre as fileiras. Nas situações-problema que previam a construção de diferenças, observou-se uma crescente complexidade que apenas sujeitos da quinta série, com rendimento satisfatório em matemática, conseguiram compreender, principalmente as situações 5 e 6, que previam múltiplas transferências.

Análise das condutas dos sujeitos em situações-problema no jogo Fan Tan que envolvem distintas operações aritméticas

Ao se analisarem as condutas dos sujeitos em situações de jogo que envolviam distintas operações aritméticas, constatou-se a relação entre a construção da interdependência entre a adição e subtração e as operações de divisão e multiplicação. O algoritmo convencional da divisão foi utilizado corretamente apenas por sujeitos da quinta série com rendimento satisfatório em matemática que apresentaram níveis IIB e III na construção destas interdependências. Pode-se afirmar que, para a compreensão e a utilização correta do algoritmo convencional é necessário que estejam presentes mecanismos da aprendizagem operatória. Somente treinos para se resolver o algoritmo, a busca de memorização de fórmulas, uma metodologia baseada na transmissão de regras para a sua resolução não garantem uma efetiva compreensão e utilização significativa do algoritmo. Também tal conhecimento envolve a construção do sujeito nesta conceituação. Para Piaget (apud Becker, 2001)

> *O conhecimento consiste essencialmente , com efeito, não apenas em adquirir e acumular informações, mas ainda e, sobretudo (porque sem isso estas ficariam inoperantes e por assim dizer cegas) em organizá-las e regulá-las por sistemas de autocontroles orientados no sentido das adaptações, isto é, no sentido da solução de problemas.*

Na terceira série e quinta série com rendimento insatisfatório, os sujeitos utilizavam os materiais e os representavam nas situações que previam a divisão de quantidades. Poucos sujeitos conseguiram utilizar corretamente o algoritmo convencional. Neste caso, para a compreensão da soma e da subtração, e também dos mecanismos da multiplicação e divisão, faz-se necessária a construção da interdependência entre estas operações, ressaltando mais uma vez a importância da reversibilidade das operações, enquanto regulador cognitivo de ordem superior. Como afirma Kamii (1995), o trabalho desenvolvido sobre aritmética nas séries iniciais deve estar voltado para a ação mental de adicionar, subtrair, dividir e não para a produção de respostas escritas e ou corretas. Para Nunes e Bryant (1997, p.31) "*não é suficiente aprender procedimentos, é necessário transformar esses procedimentos em ferramentas de pensamento*".

Na resolução de situações-problema envolvendo igualação de quantidades, observou-se que os sujeitos, a partir do nível IIB, também utilizaram as divisões. Neste caso, é uma conduta importante, visto que os sujeitos não atuam mais por simples tentativas sem uma previsão. Ao realizarem uma inspeção prévia das diferenças, conseguem antecipar com facilidade a transferência dos grãos nas coleções. Como exemplo, ao igualarem as fileiras com 3 e 5 elementos, os somam mentalmente, obtendo 8 elementos e os dividem por dois num total de 4 para cada coleção.

O jogo de regras Fan Tan

A análise do jogo de regras Fan Tan permitiu que inúmeras considerações importantes sejam feitas. Iniciaremos pela compreensão e prática das regras.

O jogo Fan Tan possui regras que foram facilmente compreendidas, apesar de ser um jogo inicialmente desconhecido pelos sujeitos da pesquisa. É um jogo que requer simples materiais em sua confecção. No entanto, envolveu aspectos importantes a serem destacados. O primeiro aspecto é o caráter de motivação e interesse despertado pelo jogo evidenciado pelo fato de os vinte e quatro alunos de quinta série retornarem à escola em outro período exclusivamente para jogarem Fan Tan e participarem da pesquisa. Também os alunos de terceira série demonstraram por palavras (**Vamos jogar mais?! Que pena já acabou!**) e gestos (sorrisos, expressões de expectativa para ver quantas sementes sobraram...) seu interesse pelo jogo. Como, durante as jogadas, pediram muitas vezes, para levar para casa o tabuleiro em tamanho reduzido, foi confeccionado para cada um dos sujeitos um conjunto dos materiais do jogo contendo o tabuleiro, as fichas e a vareta para a divisão dos grãos.

Este jogo de regras despertou interesse em crianças de diferentes faixas etárias, partindo dos quatro anos até os adolescentes da oitava série do ensino fundamental que pediram para jogar Fan Tan ao virem que estávamos jogando na escola. Conforme afirma Brenelli (2001, p.185) "*os jogos de regras não só servem aos interesses infantis como também aos dos adolescentes, ultrapassando as barreiras que, com o avanço da idade, são impostas ao brincar*". A autora ainda ressalta que os jogos são poderosos instrumentos que vêm contribuir para o desenvolvimento e a aprendizagem de sujeitos de diferentes idades e diferentes níveis evolutivos.

Além do aspecto motivacional, os trabalhos relatados neste estudo ressaltam a importância do jogar numa visão construtivista, servindo como diagnóstico, como foi utilizado o jogo Fan Tan, como investigação do funcionamento cognitivo (Ribeiro, 2001) e possibilidades de intervenção com crianças que apresentem dificuldades de aprendizagem. Ao possibilitar que os desafios e as perturbações sejam compensados (Macedo, 1997, 2001), permitem o espaço para o pensar (Brenelli, 1996).

Durante as jogadas de Fan Tan, podem se identificar fases em que prevalecem os projetos parciais, levando em conta as jogadas atuais, por exemplo, quando os sujeitos constatam que restando uma semente, o vencedor foi o que apostou nesta extremidade do tabuleiro. Também existem fases com programas de conjunto, como aponta Piaget (1980/1996), em que futuras jogadas são consideradas, são realizadas antecipações e compensações por regulações ativas, portanto são dialéticas com construção de novas estruturas do pensamento. Um momento importante neste aspecto foi aquele em que a seguinte situação-problema foi proposta: existindo 20 sementes no tabuleiro, qual o melhor número para se apostar? Os sujeitos compreenderam que teriam que dividir as 20 sementes em grupos de quatro, até que restasse o tanto de sementes de uma das extremidades, então 1 a 4 seria o esperado. Mas, ao realizarem a divisão de 20 sementes por 4, a operação é exata. Alguns sujeitos então responderam que apostariam no número 5, outros no 0, mesmo não existindo estes números no tabuleiro. Esta questão causou perturbação em muitos sujeitos, como em THA, 5ª série, Rs (p.101), que colocou um asterisco em sua resposta, que foi inicialmente 1, depois retomou a questão e superou o conflito, apostando no 4.

O jogar também é um espaço de criação e desenvolvimento de novos procedimentos, como se observou na pesquisa com o jogo de regras Fan Tan. Ao registrarem na folha seu modo de pensar sobre a situação-problema descrita na p.92 deste estudo, foram encontradas inúmeras formas de registro contendo, por exemplo, a representação do tabuleiro, das sementes, o registro do algoritmo da divisão. É um importante momento em que os sujeitos passam da ação para a conceituação e envolve a descrição das jogadas, a explicação do que fez, a comparação dos registros. Existe, portanto, a possibilidade de construção de noções lógicas através do processo de abstração reflexiva, em que se faz pensar sobre as jogadas, pode-se tomar consciência dos erros ou acertos nas jogadas.

Para expressarem suas idéias em diversas situações-problema, os sujeitos utilizaram recursos como as flechas, as numerações, formação de conjuntos, manipulação de materiais como as fichas e o tabuleiro para as contagens. Foram procedimentos que não se repetiram nos sujeitos. Neste caso, além de possibilitar a ação sobre os objetos, o jogo permitiu a interação social com a experimentadora e com os colegas. Ao se expressarem, ocorre a troca de idéias, a possibilidade de passagem do fazer para o compreender suas próprias ações. Como ressalta Castro, (2001, p.13) ao propor um olhar construtivista sobre a educação, há "*duas faces na abstração: um fator social e o fator pessoal. O fator social indica a importância da conversa na escola, do diálogo entre as crianças que permite a troca de experiências e amplia a discussão*".

Algumas pesquisas relatadas neste estudo, como as de Riley e cols (1983), Taxa (1996), Selva e Brandão (2000), Lopes (2002) apontam para a importância do trabalho com materiais ou os registros escritos para apoiarem a realização das operações e situações-problema. É um aspecto a ser ressaltado no trabalho em sala de aula, visto que cada sujeito conseguiu criar sua própria forma de registro da resposta, sem necessitar de um padrão determinado pelo professor ou pelo livro didático.

Um outro aspecto importante ressaltado por Piaget (1948/1996), presente no trabalho com o jogo Fan Tan, é que os problemas são colocados aos sujeitos sem que estes percebam que se trata da matemática. Uma matemática que difere da tradicionalmente desenvolvida nas escolas e que, muitas vezes, é fonte de fracassos e desmotivação. Segundo o autor (p.57), os "*alunos assumem uma atitude totalmente diferente quando o problema emana de uma situação concreta e tem a ver com outros interesses*". No contexto do jogo, solicita-se uma atividade autônoma onde o sujeito pode "descobrir por si mesmo as correlações e as noções e assim, pode recriá-las".

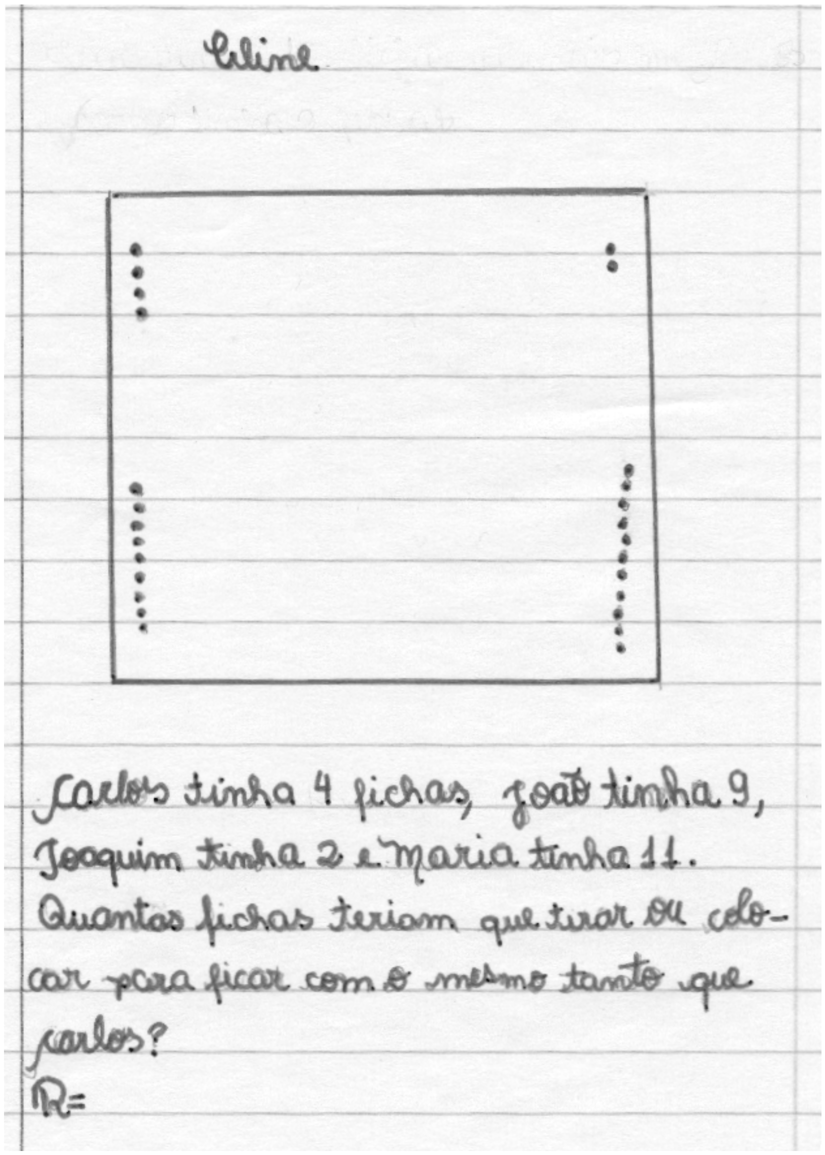
Diferenciados aspectos da área matemática podem ser desenvolvidos no trabalho com os jogos, conforme apontam os trabalhos de Rocha (1995), Guimarães (1998), Grando (2000), Alves (2002), Pauleto (2001). Neste estudo, foram investigados e analisados os níveis de construção da interdependência entre a adição e a subtração, em sujeitos de terceira e quinta séries, através do jogo Fan Tan . Também este jogo pode ser fonte de aprendizagens no sentido amplo, comportando, além de conteúdos externos aos sujeitos, a possibilidade de um trabalho que desencadeie o processo de equilibração, responsável pela construção de estruturas cognitivas, ao permitir que as transformações, as retroações, as antecipações e múltiplas transferências entre as coleções fossem propostas aos sujeitos.

Considerações finais.

Além de toda a análise realizada sobre a igualação de quantidades e a construção de diferenças, o jogo permitiu que outros aspectos da área educacional fossem discutidos, como é o caso do ensino do algoritmo convencional da divisão, a importância de materiais a serem manipulados pelos sujeitos, a "avaliação" do rendimento dos sujeitos em matemática, o ensino da adição e da subtração.

Constatou-se que no jogo Fan Tan estão presentes momentos importantes de ação sobre os materiais, oportunidades de representações gráficas e explicações de como cada sujeito pensou para resolver as diversas situações–problema. Este jogo é, portanto, um recurso a ser utilizado, tanto como reforço escolar para sujeitos que apresentem lacunas na construção do conhecimento matemático, como em séries iniciais do ensino fundamental no trabalho a envolver a igualação de quantidades e a construção de diferenças, aspecto ainda pouco trabalhado em nossas escolas.

Também o fato de oportunizarmos momentos em que os sujeitos podem criar suas situações-problema, a partir do jogo, possibilita oportunidades de análises das interdependências entre a adição e a subtração. Tivemos alguns exemplos, como é o caso da situação criada por Aline, 5ª série:



Observa-se que na própria elaboração do enunciado da questão estão previstas as adições e subtrações simples, ao citar “quantas fichas teriam que **tirar** ou **colocar** para ficar com o mesmo tanto”.

O fato de que o desempenho escolar não revela a compreensão que os sujeitos têm sobre as operações mais uma vez foi demonstrado neste estudo. Principalmente nos sujeitos de terceira série, o fator desempenho satisfatório ou insatisfatório em matemática não ocasionou diferenças entre os grupos ao ser investigada a interdependência entre as operações de adição e subtração. No entanto, sujeitos da quinta série que apresentaram lacunas nesta construção, apresentaram um rendimento insatisfatório em matemática. Os conteúdos trabalhados na quinta série são mais complexos, exigem a compreensão de operações realizadas sobre operações, como é o caso da potenciação, exigem a interdependência entre as operações ao se descobrir o estado inicial de uma relação ternária, ao se resolver ou simplificar uma equação.

Cientes da limitação deste estudo que investigou quarenta e oito sujeitos de terceiras e quintas séries do ensino fundamental, deixamos questões que ainda merecem um maior aprofundamento referentes à construção dialética das operações de adição e subtração. Tais questões poderiam verificar esta construção em outras séries, um estudo longitudinal também poderia ser desenvolvido, acompanhando a construção da relação entre estas operações em sujeitos que freqüentem as fases iniciais do ensino fundamental e até mesmo acompanhar os sujeitos de terceira série participantes desta pesquisa.

Referências Bibliográficas

AIKEN, L. R. & Williams, E.N. (1973).Response times in adding and multiplying single-digit numbers. **Perceptual and Motor Skills**, 37, 3-13.

ALVES, E.M.S. (2001). **A ludicidade e o ensino de matemática: uma prática possível**. Campinas: Papirus.

ALVES, R.M. (1997). **A interdependência na descoberta das regras de um jogo: uma análise piagetiana**. Dissertação de Mestrado, Vitória: UFES, Programa de Pós-graduação em Psicologia.

ASHCRAFT, M.H. & BATTAGLIA, J. (1978). Cognitive arithmetic: evidence for retrieval and decision processes in mental addition. **Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory**, 4 (5), 527-538.

BAROODY, A.J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. **Cognition and Instruction**, v.17, n.2 , p.137-175.

BAROODY, A. J.& GINSBURG, H.P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J.Hiebert (Ed) **Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics**. Hillsdale:Erlbaum.

BATISTA, C. G. (1995). Fracasso escolar: Análise de erros em operações matemáticas. **Zetetiké**, ano 3, n. 4, p.61-72.

BECKER, F. (2001). Conhecimento escolar: conteúdo ou forma. In: ASSIS, M.C. de e ASSIS, O Z.M. de (orgs) **Anais do XIX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE, Construtivismo e Formação de Professores**. Campinas: LPG/FE/Unicamp.

BOSSA, N.A (2000). Avaliação psicopedagógica da criança de 0 a 6 anos: abordagem da prática. In: OLIVEIRA, V.B. de e BOSSA, N.A (orgs.) **Avaliação Psicopedagógica da criança de zero a seis anos**. Petrópolis: Vozes, p.7-19.

BRASIL. (1997) Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília MEC/SEF.

BRENELLI, R.P. (1986). **Observáveis e coordenações em um jogo de regras: influência do nível operatório e interação social**. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

_________. (1993). **Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem**. Tese de Doutorado, Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

_________. (1996). **O Jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e Aritméticas**. Campinas:Papirus.

________. (1999). Jogo de regras em sala de aula: um espaço para construção operatória. In SISTO, F.F. (org.). **O cognitivo, o social e o afetivo no cotidiano escolar**. Campinas: Papirus, p.69-88.

_________. (2001). Espaço lúdico e diagnóstico em dificuldades de aprendizagem: contribuição do jogo de regras. In: SISTO, F.F. (org.). **Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico**, Petrópolis: Vozes, p.167-189.

BUSQUETS, M.D. (1994). Lógica Aritmética In: ASSIS, M.C. de e ASSIS, O Z.M. de (orgs) **Anais do XI Encontro Nacional de Professores do PROEPRE,** Campinas: LPG/FE/Unicamp.

CAMPBELL, J. I. D.(1987). Production, verification , and priming of multiplication facts. **Memory and Cognition**, 15 (4), 349-364.

CARPENTER, T.P., FRANKE, M.L., JACOBS, V.R. FENNEMA, E. and EMPSON, S.B. (1997). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction, **Journal for Research in Mathematics Education**, vol.29, n.1, p.3-20.

CARRAHER, T.N. , CARRAHER, D.W. and SCHLIEMANN, A D. (1985). Mathematics in the streets and in school. **British Journal of Developmental Psychology**, 3, 21-29.

CARRAHER, T.N. and SCHLIEMANN, A D. (1985). Computation routines prescribed by schools: help or hindrance? **Journal for Research in Mathematics Education**, 16, 37-44.

CASTRO, A.A. F.D. (2001). Educação e Epistemologia Genética. In:ASSIS, O. Z. M. de et al (orgs). **Um olhar construtivista sobre a educação** –Amélia Americano Domingues de Castro, Campinas, SP: Vieira.

DEMBY, A. (1993). Use of compensation for addition-subtraction and multiplication-division by eleven-year-old pupils. **Educational Studies in Mathematics,** 24: 239-249.

EVES, H. (1995). **Introdução à história da matemática**. Campinas, S.P. Unicamp.

FAYOL, M. (1996) **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas**, Porto Alegre: Artes Médicas.

FERNÁNDEZ, A (1990). **A inteligência aprisionada**. Porto Alegre: Artes Médicas

FERREIRO, E. (2001). **Atualidade de Jean Piaget**, Porto Alegre: Artmed.

FUSON, K. et al (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, v28, n2 p130-62, mar.

GOÑI, A M.; GONZÁLEZ, A (1993). **EL niño y el juego.** Volume 2. Buenos Aires: Catari.

GRANDO, R.C. **O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula**. Tese Doutorado, Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

GROEN G.J. & PARKMAN J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. **Psychological Review**.79(4) 329-343.

GROBECKER, B. BOND, T. (1999). Children's construction of the operation of addition. **Archives de Psychologie**, 67, p. 95-121.

GUIMARÃES, K.P. (1998). **Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação via jogos de regras: em busca de relações**. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

KAMII, C. (1995). **A criança e o número**. Campinas, S.P. Papirus.

LOBATO, M. (1981). **Aritmética da Emília**, São Paulo, Brasiliense, 18ª edição.

LOPES, S.V. A (1997). **Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Campinas, UNICAMP, Faculdade de Educação.

MACEDO, L. (1992). Para uma psicopedagogia construtivista. In: **Novas contribuições de Psicologia aos processos de ensino e aprendizagem**. (org. ALENCAR, E:S.).São Paulo: Cortez.

________(1994). **Ensaios Construtivistas**. São Paulo, Casa do Psicólogo.

MACEDO, L.; PETTY, A PASSOS, N.(1997). **4 cores, senha e dominó. Oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica.** São Paulo: Casa do Psicólogo.

_________.(2000). **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed.

MACHADO, N.J. (1992). **Matemática e Realidade**, Cortez.

MONTEIRO, M.T.de L.(1999). **Construção das operações- nova metodologia para o ensino de matemática- as tabuadas pelo esquema operatório**, Petrópolis: Vozes.

NOGUEIRA. C.M.I (2002). **O desenvolvimento das noções matemáticas na criança e suas implicações pedagógicas: o caso particular do número.** Tese de Doutorado, Marília , SP UNESP, Faculdade de Educação

NUNES, T. e BRYANT, P.(1997). **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes médicas.

ONUCHIC, L.R. e BOTTA, L.S. (1998) Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática**. SBEM, São Paulo, ano6, n.4, p. 19-26.

ORTEGA, A C. et al (1999). **Aspectos psicogenéticos do pensamento dialético no jogo Mastergoal**. Vitória: UFES, programa de pós-graduação em Psicologia 16p. (mimeografado).

ORTEGA, A C. e ROSSETTI, C.B. (2000). O jogo nos contextos psicogenético e psicopedagógico In: SILVA, A de A e BARROS, M. E de B. (orgs.). **Psicopedagogia: alguns hibridismos possíveis**. Vitória: Saberes Instituto de Ensino, p.63-82.

PAÍN, S. (1985). **Diagnóstico e tratamento dos problemas de aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas.

PARANÁ.(Estado). (2000) Secretaria de Educação - **Caderno AVA 2000 Matemática: uma análise pedagógica.**

PAULETO, C.R.P. (2001). **Jogos de regras como meio de intervenção na construção do conhecimento aritmético em adição e subtração**. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

PIAGET, J.(1970). **Psicologia e pedagogia**. Rio de Janeiro/São Paulo: Forense.

_______.(1932). **O juízo moral na criança**. São Paulo: Summus,1994.

_______.(1946). **A formação do símbolo na criança-imitação, jogo e sonho, imagem e representação.** Rio de Janeiro, LTC editora,1990.

_______. (1948). **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro, José Olympio, 1996.

_______.(1974). **A tomada de Consciência**. São Paulo, EDUSP,1977(a).

______ (1977 b). **O Desenvolvimento do Pensamento- Equilibração das Estruturas Cognitivas**, Lisboa, Publicações Dom Quixote.

______(1995). **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre, Artes Médicas.

______ (1990). **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes.

______(1980). **As formas elementares da dialética**. São Paulo, Casa do Psicólogo,1996.

______(1974). **Fazer e compreender**. São Paulo, EDUSP,1978.

_______(1979). **O estruturalismo**. Rio de janeiro: DIFEL.

_______(1981). **O possível e o necessário. Volume 1: evolução dos possíveis na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

_______(1983). **O possível e o necessário. Volume 2: evolução dos necessários na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

PIAGET J. e INHELDER, B. (1993). **A Psicologia da Criança.** Rio de Janeiro, Bertrand.

_____________(1975). **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança**. Rio de Janeiro: Zahar.

____________ (1993). **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: artes Médicas.

PIAGET J. e SZEMINSKA, A (1981). **A Gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar.

PIANTAVINI, F.N.O (1999). **Jogo de regras e a construção de possíveis: análise de duas situações de intervenção psicopedagógica**. Dissertação de Mestrado, Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

PINTO, C. K. (2001) Subtração – atividades que auxiliam na construção das noções de diminuir, **Revista do professor**, Porto Alegre, 17 (66): 23-29 abr/jun.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. R. (1972). **Piaget: Modelo e Estrutura**. Rio de Janeiro, José Olympio Editora.

RIBEIRO, M.P.O (2001). **Funcionamento Cognitivo de Crianças com Queixas de Aprendizagem- Jogando e Aprendendo a Jogar**. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, Instituto de Psicologia.

RILEY, M.S. GREENO, J.G., and HELLER, J.J. (1983). Development of children’s problem solving ability in arithmetic. In: GINSBURG, H.P. **The Development of Mathematical Thinking**, New York: Academic Press Inc, p.153-196.

ROCHA, R. G. P. (1995). **A influência da intervenção pedagógica na construção da noção de soma** (pesquisa de iniciação científica orientada pela Profa Dra. Orly Z.M. de Assis, Unicamp).

ROSSETTI, C.B. (1996)**. O pensamento dialético no jogo de regras: uma abordagem piagetiana**. Dissertação de Mestrado. Vitória: UFES, programa de pós-graduação em Psicologia.

________. (2001). **Preferência lúdica e jogos de regras: um estudo com crianças e adolescentes**. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, Instituto de Psicologia.

SCOZ, B. (2002). **Psicopedagogia e Realidade Escolar: o problema escolar e de aprendizagem**. Petrópolis: Vozes.

SELVA, A C. V. BRANDÃO, A C.P. (2000). A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, vol.16, n. 3, p.241-249.

SISTO, F.F. (2001). Dificuldades de aprendizagem. In: SISTO, F.F. (org.). **Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico**, Petrópolis: Vozes, p.19-39.

SOUZA, M.T.C.C. (1996). Intervenção psicopedagógica: como e o que planejar? In: SISTO F.F. (org) **Atuação Psicopedagógica e Aprendizagem Escolar**. Petrópolis: Vozes, p.113-126.

TAXA, F. de O. (1996). **Solução de problemas verbais aritméticos nas primeiras séries do 1º grau.** Dissertação de Mestrado, Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação.

VERGNAUD, G. (1991). **El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas.

VINH-BANG (1990). A intervenção psicopedagógica. **Archives de Psychologie**, 58, p.123-135.

WINNICOTT, W.D. (1975). **O brincar e a realidade**. Rio de Janeiro: Imago Editora.

Anexos

Um exemplo elementar de dialética lógico-matemática: problemas de igualação e construção de diferenças (Piaget, Maurice e Henriques 1980/1996)

Técnicas: Dispomos de pequenos objetos idênticos (macarrão ou grãos de feijão) que apresentamos em 2 ou 3 coleções e uma caixa aberta de reserva que chamaremos de X.

Técnica A: Ela coloca problemas de igualação de colunas ou de conjuntos numericamente diferentes e comporta as seguintes situações:

1-3/5 (A/B) a igualar: Apresentamos à criança duas colunas de 3 e 5 elementos respectivamente; a disposição espacial respeita uma correspondência de termo a termo. Pedimos para a criança igualar as duas colunas.

2-3/5/7 (A/B/C) a igualar: Apresentamos à criança 15 elementos dispostos em três conjuntos: 3,5,7; ou, em seguida, outras divisões, tal como 1, 5, 9, e lhe pedimos, como anteriormente, para igualar os três conjuntos.

3-4/4 (A/B) 1 A em B (diferença=2n): Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma. Uma vez que a igualdade é reconhecida pela criança, escondemos uma coluna. Deslocamos 1 ou 2 elementos de uma para a outra (da coluna escondida para a coluna descoberta) e perguntamos à criança: "Quantos eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo a mesma coisa?"

4-A=B, tornar igual: Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma. Pedimos para fazer alguma coisa para que uma das colunas tenha dois elementos a mais que a outra (ou para criar uma diferença de 2 elementos entre as colunas).

Técnica B

1-Idem ao ponto 1 da técnica A.

2-4/4 (A=B) +1X em A: Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma; escondemos uma coluna e acrescentamos na outra coluna 1 elemento pego na caixa. (reserva=X).

3-2/4 (A/B) 1 A em B (diferença =2n) como na técnica A.

4-A=B= N escondidos. Mesmo procedimento da técnica A apenas com o número de elementos que compõem a coluna inicial é desconhecido.

5-A=B= n escondidos 1 A em B, 1X em B. Nesta situação, para responder corretamente, trata-se de compor dois tipos de ação: o que consiste em acrescentar a um conjunto de elementos provenientes da caixa (fonte exterior) e o que consiste em deslocar os elementos de uma coluna a outra (transferência interna).

6-C_1, C_2, C_3 escondidos .O experimentador desloca n(=1ou 2) elementos de um dos montes aos dois outros. Pergunta: qual é a diferença entre C_1 e C_2; depois entre C_1 e C_3?

7-A=B, tornar desigual, como na técnica A.