UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

APRENDIZAGEM PESSOAL E APRENDIZAGEM AFASTADA: O CASO DO ALUNO DE CÁLCULO

Autor: Dale William Bean
Orientadora: Vera Lucia Xavier Figueiredo
Co-orientadora: Anna Regina Lanner de Moura

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Dale William Bean e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: ....

Assinatura:...

Orientadora

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

____

2004

Catalogação na Publicação elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecário: Gildenir Carolino Santos - CRB-

Bean, Dale William.
B374a Aprendizagem pessoal e aprendizagem afastada : o caso do aluno de cálculo / Dale William Bean. -- Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientadores : Vera Lucia Xavier Figueiredo, Anna Regina Lanner de Moura.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1.Cálculo. 2. Psicologia da aprendizagem. 3. Autoridade – Aspectos sociais. 4. Autonomia. 5. Dependência. 6. Relações sociais. I. Figueiredo, Vera Lucia Xavier. 7. Moura, Anna Regina Lanner. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

03-197-BFE

For my mother and father

as a reminder of the support, understanding and love

we share and that I may continue to share

support, understanding and love with family and my fellow man

Agradecimentos

Às minhas orientadoras, Vera e Anna Regina, por
acreditarem em mim, dando-me a liberdade de viajar neste estudo guiado por uma inquietude
sem rumo definido
construindo meu caminho com os alunos e os aportes teóricos ao longo dos anos

Aos meus colegas da Unicamp e da Unesp – Rio Claro
com quem compartilhei esta jornada
com lembranças especiais para
Gilberto, Maria do Carmo, Diana, Alfonso, Jonei e Jussara

Aos alunos, tutores e professores com quem conversava
ajustando o rumo e abrindo novas possibilidades no meio do percurso, com um abraço especial
para os interlocutores principais deste estudo
Beto, Caio, Lucas, André, Julio, Max, Mariana, Priscila e Rodrigo

À Maria Cristina pela sua compreensão
capaz de ler minha mente, se não meu texto, e respeitar minhas habilidades atuais

À Fátima, que sempre tem uma palavra boa

À minha família
pelo apoio, entendimento e amor
especial

Sumário

Índice

Resumo

Esta pesquisa examina como as atividades e as avaliações desenvolvidas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam a aprendizagem. É uma pesquisa do tipo estudo de caso, na qual alunos da Universidade Estadual de Campinas cursando a disciplina Cálculo de Várias Variáveis participaram em uma série de conversas sobre conceitos e exercícios referentes ao teorema dos multiplicadores de Lagrange, seus estudos em geral e acontecimentos na sala de aula de Cálculo.

A aprendizagem é conceitualizada e tipificada como uma relação que o aluno desenvolve com o conhecimento. Com base nas interações do aluno com a Matemática e tendo como referencial teórico a sociologia de Max Weber, a psicologia de Abraham Maslow e a teoria da ação, são construídos dois "tipos ideais" de aprendizagem: a *aprendizagem pessoal*, uma relação mais próxima e comprometida, e a *aprendizagem afastada* que é mais distante e utilitária.

Entre as características destes "tipos ideais", foram identificados os conceitos de dominação e comunicação. A dominação se manifesta na autoridade do professor em relação à "autonomia" e à "dependência" do aluno nas escolhas referentes às atividades propostas, enquanto a comunicação se faz presente nas formas de "diálogo" e "troca de comunicados" e aparece nas relações sociais que o aluno busca ao longo do seu envolvimento em tais atividades.

Esta pesquisa indica que o currículo e a didática vigentes para a disciplina de Cálculo favorecem a *aprendizagem afastada*, na qual o aluno segue as atividades propostas pelo professor na reprodução de procedimentos-padrão em exercícios típicos e suas interações interpessoais relativas a estas atividades são do tipo *relações de apoio*. Por outro lado, nas ocasiões em que há uma *aprendizagem pessoal*, o aluno é relativamente autônomo com respeito às atividades propostas pelo professor; suas escolhas dependem da sua curiosidade e das suas afinidades, e ele desenvolve estratégias próprias para resolver problemas incomuns que "pedem" uma interação interpessoal dialógica, do tipo *relação de prática*.

Palavras-chave: cálculo, psicologia da aprendizagem, autoridade – aspectos sociais, autonomia, dependência, relações sociais

Abstract

This study examines how the activities and evaluations developed by the professor of Calculus, in the context of the student's program of studies, influences the learning of Calculus. The research is a case study, in which students at the Universidade Estadual de Campinas taking Multivariable Calculus participated in a series of conversations about concepts and exercises related to the Lagrange multipliers theorem, their studies in general and events in the Calculus classroom.

Learning is conceptualized and typified as a relation that the student develops with content knowledge. Two "ideal types" of learning are constructed based on the interactions of the student with Mathematics and theoretical aspects from the sociology of Max Weber, the psychology of Abraham Maslow and the theory of action: *personal learning*, a close and committed relationship, and *distant learning*, a far removed and instrumental relationship.

The concepts of domination and communication were identified from among the characteristics of these "ideal types" of learning. Domination appears in the authority of the professor in relation to the "autonomy" and "dependence" of the student in his choices with regards to the activities proposed by the professor. Communication, present in the forms of "dialogue" and the "exchange of information" appears in the social relationships the student develops during his involvement in the activities.

This study indicates that the current curriculum and didactic practices for Calculus favor a *distant learning*, in which the student follows the activities proposed by the professor, in the reproduction of standard procedures for solving typical exercises and the interpersonal relations relative to these activities are of the type *relations of support*. When *personal learning* occurs, the student is relatively autonomous with respect to the activities proposed by the professor. His choices depend on his curiosity and affinities as he constructs his own strategies to solve challenging problems that "ask" for a dialogical interaction, of the type *relations of practice*.

Key words: calculus, psychology of learning, authority – social aspects, autonomy, dependence, social relations

Introdução

1

Era novembro do ano de 2000, uma época de provas na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e, Julio (2000)[1], um dos interlocutores desta pesquisa, refletia sobre as aulas de Cálculo de Várias Variáveis:

> Em relação às aulas, tive me ausentando delas, algumas aulas, por causa das outras provas e das outras matérias, mas estou tendo dificuldades em me concentrar nas aulas ou mesmo para entender a matéria durante a aula. Às vezes não vou à aula para estudar em casa mesmo. Não sei se é um desânimo da época de provas ou se estou preferindo estudar em casa.

Por várias razões, nem todas explicitadas na citação, Julio encontrava dificuldades em Cálculo. Conseguiu lidar com a matéria, "aprendeu" e foi aprovado na disciplina, mas isso aconteceu mais por obrigação do que por interesse.

O professor percebe essa "indiferença" por parte do aluno. Em uma conversa informal, uma professora de Matemática da Unicamp lamentava que o aluno de hoje não se interessa em aprender. Não se dedica aos estudos. Não valoriza o conhecimento. Ela tinha saudades de anos atrás, dos tempos em que o aluno se esforçava mais, levava mais créditos e mostrava mais interesse pela Matemática.

As falas de Julio e da professora não são atípicas. Existem inquietações tanto de um lado quanto do outro. O professor tem a expectativa de que o aluno aproveitará as aulas, listas de exercícios e outras atividades para envolver-se na disciplina, mas encontra alunos que agem

[1] No texto, ao citar uma fala ou um trabalho de um dos alunos que participou da pesquisa, cito seu primeiro nome, seguido pelo ano no qual ele participou da pesquisa e, quando apropriado, a data da interlocução e a página da transcrição, como por exemplo: Julio (2000) e Julio (2000, 07-11-00, p. 5). Os alunos interlocutores desta pesquisa são Beto (1999), Caio (1999), Lucas (1999), André (2000), Julio (2000), Max (2000), Mariana (2001), Priscila (2001) e Rodrigo (2001).

como se fossem indiferentes à matéria. Por outro lado, o aluno, cumprindo as exigências do seu curso, espera algo na disciplina que desperte seu interesse, mas encontra um professor distante, que parece estar preocupado principalmente em "passar" o conteúdo da ementa. Descompassos como esses dificultam a construção de uma relação envolvente e mais próxima do aluno com a matéria. Às vezes, o aluno acaba se afastando da matéria, aprendendo principalmente com o objetivo de tirar notas nas provas e conseguir sua aprovação na disciplina.

Mas nem sempre o aluno consegue uma nota de aprovação, como demonstram os altos níveis de reprovação em Cálculo revelados no estudo "Disciplinas Problema", apoiado pela Pró-Reitoria de Graduação da Unicamp e levado a cabo no período de 1993 até 1996, como objetivo de identificar na graduação disciplinas com altos índices de reprovação. Para as disciplinas de Cálculo de Uma Variável e Cálculo de Várias Variáveis, o estudo mostrou que, entre os alunos matriculados, 37,3% reprovaram.[2]

O Prof. Dr. José Tomaz Vieira Pereira, o então Pró-Reitor de Graduação da Unicamp, frente aos dados do estudo "Disciplinas Problema" e consciente de que o aluno que reprova implica um custo mais alto para a Universidade, mandou aos diretores das Unidades da Universidade uma Circular na qual sugeriu uma reflexão a partir das seguintes proposições:

- análise do currículo do curso, importância e reflexos dessas disciplinas na cadeia de pré-requisitos, de forma que, por exemplo, seja reavaliado o número de disciplinas cursadas pelo aluno no mesmo semestre, o que pode ser uma das principais causas das reprovações;
- análise dos critérios e metodologias de avaliação utilizadas;
- criteriosa alocação de docentes, procurando-se envolver aqueles com maior/melhor preparo e identificação com essas disciplinas;
- fornecimento a esses docentes das informações sobre o perfil da disciplina problema;
- planejamento no sentido de garantir um acompanhamento mais de perto do aluno pelo Coordenador do Curso, no sentido de orientá-lo no que for necessário; e
- discussão conjunta entre a Coordenação de Graduação responsável pelo oferecimento da disciplina e as Coordenações de Graduação dos Cursos que tenham como obrigatórias disciplinas identificadas como problema.

[2] Porcentagens de reprovação de algumas outras universidades são semelhantes àquelas da Unicamp. Na Universidade de São Paulo (USP), no mesmo período do estudo "Disciplinas Problema", as reprovações em Cálculo de Uma Variável e de Várias Variáveis, são de 35,0%. Na Universidade Estadual Paulista (Unesp) no período de 1995/96, a porcentagem média de reprovações em 22 turmas de Cálculo I e II é de 49,5% [para Cálculo I, II e III (29 turmas) essa porcentagem é de 46,4%].

O Pró-Reitor fechou sua Circular com uma recomendação geral para os diretores:

> Considerando que são muitas as variáveis que podem levar à reprovação, enfatizamos que os estudos realizados com base nos dados quantitativos são referenciais para que as Unidades possam se envolver diretamente na sua continuidade, principalmente, com relação a sua análise sob o aspecto qualitativo. É importante que ocorra uma reflexão sobre o perfil dos alunos matriculados nestas disciplinas, as dificuldades observadas no desenvolvimento do conteúdo planejado e a proposta pedagógica do curso. (Prof. Dr. José Tomaz Vieira Pereira, Pró-Reitor de Graduação da Unicamp em Circular aos Diretores das Unidades,15 de dezembro de 1997).

Enquanto existem questões e sugestões com relação à situação específica da reprovação, também existe uma preocupação com a qualidade da aprendizagem na disciplina de Cálculo. Os professores e os profissionais das áreas que utilizam o Cálculo têm a expectativa de que o aluno aprovado na disciplina seja capaz de aplicar ou aproveitar seus conhecimentos em outras disciplinas e áreas de atuação. Mas, em termos gerais, o que o aluno aprende de Cálculo no ciclo básico é menos que aquilo esperado para seus outros estudos. Isso está de acordo com os achados de Artigue (1999, p. 1380), que, ao fazer um resumo de resultados de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nas últimas duas décadas no âmbito internacional, aponta que muitos alunos não adquirem conhecimento que vá muito além do uso de técnicas e algoritmos para resolver exercícios típicos.

De acordo com Rodrigo (2001), um dos interlocutores deste estudo, o Cálculo é a base de outros estudos no curso, mas "passa batido" porque a matéria passa muito rápido. Rodrigo, que recebeu uma nota 9,1 na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis, conta que o aluno, ele inclusive, acaba aprendendo para fazer as provas e não para adquirir conhecimento.

Mesmo assim, há alunos de Cálculo que, em determinadas ocasiões, encontram na disciplina algo que desperta sua curiosidade e se envolvem com a Matemática de modo crítico e criativo. Por exemplo, Lucas (1999), um outro interlocutor do estudo, mostrou uma tendência, desvinculada das avaliações, para se envolver com a Matemática de uma maneira criativa, em situações nas quais ela se aproximou de suas afinidades.

Convém notar que Lucas desenvolveu tais interações com o Cálculo em um contexto no qual sua turma teve um índice de reprovação de 33% na disciplina. Isso amplia a inquietude referente à questão do ensino e da aprendizagem de Cálculo. Como é que, em situações de índices relativamente altos de reprovação, existem também alunos que se interessam pela Matemática e se envolvem com ela de modo significativo?

Frente às preocupações e inquietudes sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo e da Matemática em geral, comecei esta pesquisa com o intuito de compreender melhor como o currículo e a didática da disciplina de Cálculo, como interpretados e desenvolvidos pelo professor, contribuem para a aprendizagem, tanto aquela que Lucas, em ocasiões, realizava, desvinculada das avaliações, quanto aquela que Rodrigo relata, e que ocorre em função da preparação para as avaliações.

De forma provisória, comecei esta pesquisa conceituando aprendizagem em termos de aprendizagem significativa e aprendizagem superficial, que, por sua vez, se fundamentam em aspectos cognitivos. Essa conceituação foi se transformando no andamento da pesquisa, para se adequar tanto à minha perspectiva de que a aprendizagem é uma unidade de aspectos afetivos e cognitivos quanto às minhas interações com os alunos voluntários da pesquisa e com os aportes teóricos. Entendo que o aprendiz se apropria de, adquire ou constrói conhecimento ao interagir com ele. Esta interação é o mediador da relação entre o aprendiz e o conhecimento. Em outras palavras, concebo a aprendizagem como uma relação que o aprendiz desenvolve com o conhecimento.

Este estudo constrói dois tipos de aprendizagem (no sentido do *tipo ideal* descrito na seção 1.2.2), *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada*, para atender às preocupações e inquietudes que problematizaram do estudo e para servir como instrumentos para alcançar o objetivo da pesquisa, que anunciarei na próxima seção.

1.1 O objetivo e a questão norteadora do estudo

Em 1997, o Pró-Reitor levantou várias proposições que apontam para a necessidade de investigar a aprendizagem através de abordagens capazes de alcançar o tecido das relações que se desenvolvem nas interações entre o aluno e os conteúdos da disciplina, levando em consideração tanto o currículo e a didática vigentes quanto exigências do seu curso em geral. Este estudo aborda a aprendizagem de Cálculo neste contexto amplo para examinar diferentes casos de aprendizagem. O estudo parte da aprendizagem do aluno com o seguinte objetivo:

- Compreender melhor como as atividades desenvolvidas e as avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam a aprendizagem.

Por entender que tanto as relações interpessoais quanto a aprendizagem possuem aspectos afetivos e cognitivos, iniciei o estudo com uma leitura básica a respeito dos aspectos cognitivos e afetivos da aprendizagem. Levo em consideração as observações realizadas por Artigue (1999) a partir de uma perspectiva que se aproxima de, mas não assume, as categorias de aprendizagem mecânica e significativa de Ausubel (de acordo com MOREIRA; MASINI, 1982); procedimental e conceitual (HIEBERT; LEFEVRE, 1986); e instrumental (regras sem razão) e relacional (sabe o que fazer e por que), na nomenclatura de Skemp (1978). E, ao mesmo tempo, busquei informações relativas aos aspectos afetivos, como por exemplo atitudes, crenças e emoções (McLEOD, 1992).

Privilegiei o ponto de vista do aprendiz através de uma pesquisa tipo estudo de caso, por valorizar a importância das escolhas que o aluno faz com relação aos seus estudos. Essas escolhas fundamentam-se nos seus conhecimentos matemáticos e nas suas experiências escolares, realizando-se em função dos seus objetivos, expectativas, interesses, afinidades e necessidades relativas à disciplina de Cálculo e ao seu curso. Os interlocutores principais deste estudo são alunos que freqüentavam as aulas de Cálculo de Várias Variáveis, disciplina com duração de um semestre que faz parte do currículo das Exatas e das Engenharias na Unicamp; a maioria desses alunos cursava seu segundo semestre. Combinei com os alunos (três a cada ano, de 1999 a 2001) no sentido de, ao longo de aproximadamente dois meses do semestre, realizar uma série de conversas individuais em torno da sua aprendizagem em Cálculo.

A questão norteadora que orientava essas interlocuções é a seguinte:

- ***Por que*** o aluno faz determinadas escolhas para construir seu conhecimento e ***como*** ele está sendo construído?

Dirigi minhas indagações e atenção nas conversas com os alunos a características afetivas e cognitivas, problematizando-as através do teorema dos multiplicadores de Lagrange, dos conceitos relacionados ao teorema, dos acontecimentos na sala de aula, dos problemas propostos pelo pesquisador e dos trabalhos da disciplina, tais como exercícios das listas, dos testes e das provas. A problematização através de aspectos cognitivos atende às preocupações cognitivas levantadas por Artigue (1999) e percebidas tanto pelo professor quanto pelo aluno e, ao mesmo tempo, têm a potencialidade de alcançar os aspectos afetivos presentes na aprendizagem.

Entre os diversos assuntos levantados nas conversas, olhava tanto para as preocupações e as ações do aluno em torno dos seus estudos quanto para as justificativas que ele dava para elas. A partir de recortes que acentuam as regularidades nas preocupações e ações do aluno, interpreto o ***por quê*** das suas escolhas com o intuito de chegar ao objetivo deste estudo.

1.2 A metodologia de análise

Fundamental para a metodologia de análise é a construção dos *tipos ideais* de aprendizagem, isto é, construtos conceituais que idealizam e acentuam um recorte unilateral de aspectos de aprendizagem (ver o capítulo 6). A tipificação leva em consideração características da aprendizagem no âmbito do indivíduo que servem como nexos para compreender melhor como, já no âmbito do social, as atividades desenvolvidas e as avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam a aprendizagem.

A construção dos *tipos ideais* de aprendizagem se fundamenta na interpretação das interlocuções (capítulos 5 e 6) e é a partir das características dos *tipos ideais* de aprendizagem que as interpretações e inferências em relação aos aspectos sociais serão desenvolvidas (capítulo 7). Dessa forma, entendo que os *tipos ideais*, neste estudo, além de alcançar os sentidos que o aluno atribui à sua relação com a Matemática, revelam aspectos sociais que interferem na aprendizagem.

A metodologia de análise compreende três fases inter-relacionadas e se fundamenta na sociologia de Max Weber, na psicologia de Abraham Maslow e na teoria da ação.

Ao valorizar a perspectiva do aluno, apóio-me na metodologia de Max Weber. Weber considera a ação do indivíduo como a unidade básica para investigações sociológicas porque é o indivíduo que atribui sentido a seu meio e suas ações. Para este estudo, entendo que se pode chegar a uma compreensão deste sentido através da interpretação das preocupações e das ações do aluno no contexto da sua interação com a Matemática.

1.2.1 A interpretação das conversas

Na primeira fase da análise, desenvolvo uma compreensão intuitiva das diferenças nas preocupações e ações explicitadas pelos alunos em sua interação com a matéria. Procuro fundamentar essa compreensão nos conhecimentos matemáticos do aluno, nas suas experiências escolares e nas exigências atuais, tanto da disciplina de Cálculo quanto do seu curso. Nesta fase da pesquisa, encontro informações gerais coerentes com os achados de Rodrigues (1997)[3] no seu estudo etnográfico na Unicamp no qual a pesquisadora acompanhou atividades em várias Unidades, observando os acontecimentos, com a atenção voltada tanto para os conteúdos das aulas quanto para as relações entre os professores e os alunos.

No capítulo 4, destaco quem são os interlocutores, com breves "biografias". Anoto os cursos dos alunos, o livro-texto principal, o modo como suas médias de aproveitamento na disciplina foram calculadas e as porcentagens de aprovados e reprovados na disciplina. Descrevo a aula do professor com base nas falas dos interlocutores e nas minhas próprias observações.

No capítulo 5, ainda nesta fase de análise, escolhi apresentar recortes das conversas com Lucas (1999) e Rodrigo (2001), dois dos nove interlocutores, por interpretar tendências distintas nas suas interações com a Matemática. Tais tendências se aproximam, por um lado, de uma aprendizagem significativa e, por outro, de uma aprendizagem superficial. Sigo a curiosidade e as estratégias utilizadas por Lucas para compreender exercícios e problemas incomuns. E, no caso de Rodrigo, sigo sua ansiedade e seus estudos no período anterior às avaliações.

Procuro fundamentar as preocupações e as ações do aluno em termos dos *tipos ideais de ação* (fundamentado em Weber) e das necessidades psicológicas (fundamentado em Maslow), que são conceitos elaborados no capítulo 3. Faço, com os recortes das conversas com Lucas e Rodrigo, uma aproximação entre, por um lado, seus trabalhos e suas falas e, por outro, características pessoais que correspondem aos *tipos ideais de ação* e às necessidades psicológicas assumidos nesta pesquisa.

O *tipo ideal de ação* é um construto conceitual que explica o sentido de uma dada ação por uma única razão. Dessa forma, o tipo ideal isola e acentua uma só das múltiplas razões que,

---

[3] Cito o livro de Lea Carvalho Rodrigues (1997), que é baseado na sua dissertação (1996) sobre a "sala de aula" na graduação e a "defesa de tese", desenvolvida no programa de Mestrado em Antropologia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Unicamp. A pesquisadora elaborou e aplicou questionários e realizou entrevistas com alunos e

conscientemente ou não, fundamentam a decisão para agir de uma dada maneira. Por exemplo, a ação baseada na escolha *racional referente a fins*, um dos quatro tipos ideais de ação delimitados por Weber (1991), oferece subsídios para a interpretação da ação do aluno que estuda principalmente para se sair bem numa prova. O aluno, agindo assim, recorre a meios eficientes para alcançar a nota que ele julga adequada. Utilizo combinações dos seguintes tipos ideais de ação, nem todos no sentido weberiano, para caracterizar a aprendizagem: 1) *racional referente a fins*, 2) *cognitiva referente a valores*, 3) *por hábito* e 4) *por afeto*.

As preocupações do aluno encontradas nas interlocuções vão desde a curiosidade até a ansiedade e apontam a importância das interpretações psicológicas para uma compreensão da sua relação com a Matemática. Alguns aspectos da teoria das necessidades psicológicas básicas do ser humano tal como formulada por Maslow (1970) são compatíveis com as interlocuções deste estudo e atendem a essas preocupações. Na perspectiva de Maslow, as ações do indivíduo são motivadas, em parte, pela compensação das deficiências (fisiológicas, de segurança, de pertencimento e de estima) e pela busca de crescimento como ser humano (auto-atualização). Retomando o exemplo do aluno que estuda para tirar nota, ele pode estar sendo movido pela *necessidade de segurança*, agindo para aliviar a ansiedade frente a uma prova. Estudar sob ansiedade tem implicações para a relação que o aluno desenvolve com o conhecimento, influenciando os interesses, expectativas, disposições e objetivos expressos na sua interação com a matéria. Interpreto a importância das *necessidades de segurança*, *de pertencimento* e *de estima*, cada uma no sentido maslowiano, para a aprendizagem na educação institucional. Utilizo também, neste estudo, a *necessidade de crescimento referente a compreensão* que Maslow caracteriza como uma necessidade cognitiva.

Faço a interpretação das interlocuções com os alunos por meio de um “diálogo” entre suas preocupações e ações isoladas e suas tendências globalmente perceptíveis. No capítulo 5, destaco, para Lucas e para Rodrigo, linhas de tendência que servem como base para a construção dos *tipos ideais* de aprendizagem no capítulo 6. Ao desenvolver esses *tipos ideais*, complemento as falas de Lucas e Rodrigo com recortes dos outros interlocutores para amplificar aspectos que julgo importantes para o objetivo deste estudo.

---

professores. Dos alunos obteve dados pessoais, socioeconômicos, informações sobre o curso (conteúdos e formação), expectativas para o mercado de trabalho e avaliação do curso e das disciplinas.

As interpretações, tanto das interlocuções com Lucas e Rodrigo quanto das conversas com os outros interlocutores, estão fundamentadas na teoria da ação que pode ser encontrada em Anscombe (1958), Davidson (1986), Bond (1983) e Cohen (1970) de uma forma que incorpora os tipos ideais de ação (WEBER, 1991) e as necessidades psicológicas (MASLOW, 1970) visando obter uma coerência entre as intenções, as razões e as motivações psicológicas para as preocupações e ações do aluno em relação à sua interação com a Matemática.

1.2.2 Os tipos ideais de aprendizagem

A construção dos tipos ideais de aprendizagem, *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada*, se deu através do isolamento e da acentuação de uma tendência, entre várias, nas preocupações e ações referentes à interação do aluno com a Matemática. Para a *aprendizagem pessoal*, focalizo as interações com a matéria nas quais o aluno demonstra um interesse em compreender ou resolver problemas incomuns. Para a aprendizagem afastada, faço recortes em torno das interações nas quais a Matemática parece ocupar um segundo plano nas preocupações e ações, deslocada por esforços vinculados à resolução de exercícios típicos na preparação para as avaliações na disciplina.

Pode-se encontrar em Frid (1994) tipos ideais de interação com o Cálculo. No caso dessa autora, os tipos ideais classificam a atividade dos alunos com base na sua maneira de falar sobre, e trabalhar com, a Matemática para resolver exercícios. Por meio de entrevistas baseadas em tarefas, essa pesquisadora classificou os alunos de acordo com suas habilidades cognitivas, elaborando as seguintes categorias: "colecionadores" (*collectors*), "técnicos" (*technicians*) e "conectadores" (*connectors*). Os "colecionadores" elaboram resoluções para as tarefas através da correspondência entre as fórmulas matemáticas colhidas na disciplina e os exercícios propostos, sem muita consciência do que estão fazendo. Os "técnicos", além de utilizar as fórmulas e regras, têm clareza a respeito de como desencadear as resoluções dos exercícios. Os "conectadores", além de mostrar êxito na resolução dos exercícios propostos, alcançam um entendimento conceitual do assunto tratado pelos exercícios.

O presente trabalho, por sua vez, se baseia na interpretação das preocupações e ações dos alunos e nos conceitos de conhecimento experiencial e espectador (MASLOW, 1966), caracterizando a aprendizagem como a relação que o aprendiz estabelece com o conhecimento. Esta relação pode ser mais próxima, mais envolvente, comprometida, valorizada, ou seja, *pessoal*. Neste caso, os conhecimentos adquirem significados através de atividades nas quais eles são utilizados em estratégias desenvolvidas pelo próprio aluno para resolver problemas. Em contraposição, a relação pode se dar por obrigação, convenção ou aproveitamento, sendo mais instrumental, ou seja, *afastada*. Aqui os conhecimentos adquirem significado na reprodução dos procedimentos-padrão utilizados para resolver exercícios típicos. Para os dois tipos ideais de aprendizagem, *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada*, utilizo recortes das conversas com os interlocutores para caracterizar a atividade que medeia a aprendizagem e interpreto as razões e as motivações em termos de tipos ideais de ação e necessidades psicológicas, com base em Weber e Maslow.

A *aprendizagem pessoal* está fundamentada na necessidade psicológica de *crescimento referente a compreensão* e nos tipos ideais de ação *cognitiva referente a valores* e por *afeto positivo*. Há indícios que sugerem que a *aprendizagem pessoal* requer condições nas quais o aluno encontra afinidades com a matéria, exerce sua autonomia através da escolha de atividades e tem com quem dialogar sobre sua interação com a matéria.

A *aprendizagem afastada* está fundamentada nos tipos ideais de ação *racional referente a fins*, por *hábito* e por *afeto negativo* ou *neutro*. O *afeto negativo* diz respeito à aprendizagem afastada motivada pela *necessidade de segurança*, enquanto o *afeto neutro* se refere a uma *"indiferença"* que o aluno sente frente às atividades da disciplina, que ele realiza principalmente para cumprir uma obrigação. As condições para a aprendizagem afastada residem principalmente no regulamento do curso do aluno, sendo o Cálculo uma disciplina obrigatória.

1.2.3 Relações sociais

A terceira fase da análise parte dos tipos ideais de aprendizagem para atingir o objetivo do estudo. Encontram-se na *aprendizagem pessoal* e na *aprendizagem afastada* alguns aspectos sociais relacionados às atividades desenvolvidas e às avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo. Utilizo conceitos sociológicos de Weber (1991) e recorro mais uma vez às interlocuções para formular interpretações sobre as características de "autonomia" e "dependência" que aparecem nos tipos ideais de aprendizagem em relação às escolhas que o aluno faz a respeito de seus estudos. Este estudo revela que, no que tange a essas escolhas, a relação de "dominação", na conceituação de Weber (1991), entre o professor e o aluno é um fator significativo na relação que o aluno desenvolve com a matéria. O aluno relativamente autônomo, que possui afinidades com a matéria, tende a seguir tais afinidades sem se importar se elas fazem parte das exigências do professor. Por outro lado, o aluno carente de confiança frente às avaliações tende a ser dependente das diretivas do professor e dos métodos que ele exemplifica para a resolução de exercícios. Já o aluno "indiferente" à disciplina aceita uma certa dependência e procura meios eficientes para cumprir as exigências do professor.

A "comunicação" também aparece nos *tipos ideais de aprendizagem*. Refiro-me principalmente à comunicação entre o aluno e os colegas em relação à sua interação com a Matemática, que se manifesta na forma de "diálogo" e de "troca de comunicados". Para a *aprendizagem pessoal*, a comunicação é dialógica, enquanto que para a *aprendizagem afastada* ela se dá sob a forma de troca de comunicados, como por exemplo, tirando dúvidas.

Há alguns indícios neste estudo que apóiam a conjectura de que o aluno procura o "outro" (principalmente colegas) e desenvolve relações sociais mediadas pela relação que o aluno desenvolve com o conhecimento (ver capítulo 7). Na *aprendizagem pessoal*, o aluno se engaja em *relações de prática*, nas quais o foco da atividade que medeia esta relação torna o conhecimento matemático mais próximo. Essas relações de prática também estão associadas às *necessidades de pertencimento* e *estima*. Na *aprendizagem afastada*, na qual os estudos são motivados pela *necessidade de segurança*, o aluno procura alívio para a ansiedade ou até para o medo frente às avaliações. Entra em *relações de apoio* nas quais ele busca tirar dúvidas e se preparar para as avaliações. Embora exista nessa relação um componente de pertencimento, este acontece de forma utilitária; sendo o foco da atividade a nota, o aluno acaba se distanciando do conhecimento. A estima é obtida na forma de um sinal de conhecimento, como por exemplo a nota numa prova ou a média final na disciplina e não com relação ao conhecimento em si. A aprendizagem afastada por *"indiferença"*, por sua vez, tem por enfoque o cumprimento de obrigações de forma eficiente e pode ser realizada em relativo isolamento dos colegas. O pertencimento e a estima não se mostram importantes nas atividades relativas à matéria e nem no aproveitamento na disciplina.

1.3 Inferências deste estudo

O que os dirigentes das unidades universitárias valorizam em termos de formação do aluno em Cálculo no ciclo básico na graduação não é coerente com o sentido que um número significativo de alunos atribui a uma formação adequada na disciplina. Enquanto os professores e outros profissionais querem que o aluno adquira, através das aulas de Cálculo, um conhecimento proveitoso para outras disciplinas e áreas de conhecimento, o aluno, no caso da aprendizagem afastada, procura adquirir um conhecimento matemático que sirva para aliviar sua ansiedade frente às avaliações ou simplesmente para cumprir as obrigações do seu curso.

Um currículo e uma didática com foco no ensino propedêutico de técnicas de Cálculo de forma transmissora promovem o desenvolvimento de uma relação afastada com a matéria. Os programas institucionais que são criados para sanar as dificuldades que os alunos encontram são coerentes com o currículo e a didática vigentes, oferecendo aportes do tipo *relações de apoio*. Tendem, dessa forma, a perpetuar uma interação com a matéria que pode ser descrita como distanciada do conhecimento.

Enquanto o currículo e a didática vigentes nas disciplinas de Cálculo permanecerem como são, com recortes que enfatizam a reprodução propedêutica de procedimentos e técnicas, atividades e avaliações limitadas a listas de exercícios, testes e provas que cobram exercícios semelhantes àqueles fornecidos nas listas e relações "impessoais/distanciadas" a) entre o professor e seu recorte da matéria da disciplina e b) entre o professor e o aluno em sala de aula, com respeito à matéria, também permanecem como são as motivações e razões que levam o aluno às escolhas que faz nos seus estudos.

As condições para uma *aprendizagem pessoal* (afinidades, autonomia e diálogo com colegas) dificilmente encontram espaço na aula "tradicional". Para promover e apoiar a aprendizagem pessoal, o currículo e a didática da disciplina de Cálculo devem contemplar medidas que levem em consideração afinidades, autonomia e diálogo. Uma aula que considere a heterogeneidade da turma com respeito a habilidades e afinidades, que se aproxime das afinidades do professor, provoque a curiosidade, promova indagações e apóie o diálogo será coerente com a aprendizagem pessoal. Isto sugere que, ao contemplar a didática, deve-se considerar a relação que o professor desenvolve com seu recorte da matéria e com os alunos, a respeito deste recorte, além de se preocupar com uma apresentação bem planejada com respeito aos aspectos lógicos e conceituais dos conteúdos.

A metodologia

2

> Where does the scientist who engages [in inquiries in the social and historical disciplines] derive his methodological principles? Weber answers, from his existence as a participant in the culture. In so far as he feels that his own life has meaning – that is, conducts his life according to a set of ultimate values – he becomes interested in those elements of reality which have a bearing on these values. Thus from the infinite manifold confronting him particular features emerge as significant and calling for investigation.
>
> Albert Soloman (1999, p. 61)

Neste capítulo, delineio a metodologia da interlocução com os alunos voluntários e a metodologia de análise que desenvolvi ao longo do andamento da pesquisa, de forma a contemplar tanto o objeto quanto o objetivo do estudo. Faço referência aos aportes teóricos que utilizo para fundamentar a metodologia, reservando maiores detalhes sobre eles para o próximo capítulo, no qual descrevo como eles se articulam entre si e com o objeto e o objetivo deste estudo.

Esta investigação busca informações tanto sobre as interações do aluno com a Matemática quanto sobre as razões e motivações que norteiam essas interações. Através da interlocução com os alunos, procuro uma interpretação das suas preocupações e ações com o intuito de tipificar a aprendizagem e, a partir desta tipificação, fazer uma análise das relações sociais que interferem na aprendizagem. Neste sentido, as interlocuções com os alunos são a base empírica a ser recortada, analisada e interpretada. Entendo que a qualidade da interlocução com os alunos e, na vigência desta, da atenção dedicada à questão norteadora interferem na qualidade da análise.

2.1 Metodologia da interlocução

Neste trabalho, a aprendizagem que o aluno desenvolve ao estudar Cálculo é abordada através da interlocução com o próprio aluno. Em particular, procuro compreender suas preocupações e suas ações com respeito aos estudos, identificando e interpretando suas justificativas e motivações. Ao reconhecer que "em muitos casos, supostos 'motivos' e 'repressões' (isto é, desde logo, motivos não reconhecidos) ocultam ao próprio agente o nexo real da orientação de sua ação, de modo que também seus próprios testemunhos subjetivamente sinceros têm valor apenas relativo" (WEBER, 1991, p. 7), a metodologia de interlocução, delimitada a seguir, tem por objetivo estabelecer uma interação que permita ao pesquisador conhecer o aluno e suas maneiras de lidar com os estudos dentro e fora da sala de aula.

2.1.1 As turmas e as conversas

No caso da presente pesquisa, a interlocução, que consistiu numa série de estudos de caso, foi realizada com alunos ingressantes dos cursos de Ciências Exatas, Engenharia e Licenciatura em Matemática, no momento em que eles freqüentavam a disciplina Cálculo de Várias Variáveis ministrada por professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp. As conversas aconteceram no decorrer do segundo semestre de 1999, 2000 e 2001, sendo que, a cada ocasião, a disciplina foi ministrada por um professor diferente. Em cada um desses momentos, três alunos participaram como interlocutores. A maioria deles cursava o segundo semestre do ciclo básico dos seus cursos no período da sua participação. As turmas às quais pertenciam os alunos são as seguintes:

1) Turma de Engenharia Química (diurno), 2º semestre de 1999;
2) Turma mista – Mecatrônica, Ciência da Computação, Engenharia Elétrica e Licenciatura em Matemática (noturno), 2º semestre de 2000;
3) Turma do Cursão, composta por alunos que pretendem cursar Matemática (Licenciatura em Matemática ou Bacharelado em Matemática ou Matemática Aplicada) ou Bacharelado em Física (diurno), 2º semestre de 2001.

Eu acompanhava os alunos na sala de aula ao longo do período, com o intuito de observar a apresentação da matéria e de me aproximar deles através de uma experiência em comum.[4] A entrada do pesquisador no ambiente do aluno é importante para melhor entender sua situação e, de certa maneira, fazer parte dela. As experiências de sala de aula muitas vezes forneceram pontos de partida comuns para nossas conversas sobre a compreensão da Matemática e as interferências no desenvolvimento desta compreensão.

Em cada momento, logo no início do semestre, eu fazia um contato com a turma para explicar os objetivos da pesquisa e os compromissos dos interlocutores, recrutando voluntários através de convite escrito e aplicando um questionário preliminar. A escolha de interlocutores entre os voluntários foi aleatória em 1999 e 2001, e estratificada por curso em 2000.

Os encontros, de quatro a oito com cada aluno, foram realizados com intervalos variáveis durante um período de aproximadamente dois meses (para cada um dos três anos). As conversas eram individuais, duravam em média quarenta e cinco minutos e aconteciam em horários mutuamente aceitáveis fora da hora de aula. No ano de 2001, realizei uma conversa coletiva com os três interlocutores para finalizar nossa interação.

É importante destacar que, ao seguir o raciocínio matemático do aluno nas conversas, acompanhando a descrição dos seus entendimentos, investiguei, de acordo com a questão norteadora, *como* o aluno estava construindo seu conhecimento e *por que* ele o fazia desta maneira. As experiências, os pensamentos compartilhados, as preocupações e as ações do aluno em torno do seu trabalho matemático, explicitados durante estas conversas, foram registrados em um caderno de campo (1999, 2000 e 2001) e em gravações em áudio (2000 e 2001).

As conversas, semidirigidas, foram problematizadas pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, pelos conceitos relacionados ao teorema, por acontecimentos na sala de aula, por problemas propostos por mim e por trabalhos da disciplina, tais como exercícios das listas[5], dos testes e das provas. A partir da problematização, deixava o aluno livre para conduzir a conversa

---

[4] Minha presença em sala de aula não foi a mesma nos três semestres, devido às mudanças tanto no entendimento do contexto do problema quanto na agenda de compromissos fora da pesquisa. Acompanhei as aulas, no ano de 1999, durante todo o semestre; no ano 2000, freqüentei três quartos das aulas e, no ano de 2001, apenas a metade referente ao cálculo diferencial.

[5] Na disciplina de Cálculo no ciclo básico da graduação (e na educação matemática em geral), as listas de exercícios para treinar técnicas e algoritmos compõem o meio principal pelo qual o aluno interage com a matéria fora das aulas. É comum que o professor proponha uma lista semanal ou quinzenal de exercícios recomendados do livro-texto

para assuntos de seu interesse naquele dia. Às vezes, eu seguia o aluno, mantendo-me atento à questão norteadora da pesquisa, perguntando para obter esclarecimentos e, outras vezes, deixava-me afastar do foco da pesquisa e conversava de forma amigável, trocando experiências.

As respostas dadas por escrito em dois questionários, o preliminar e o final, complementaram as informações das conversas.

Maiores detalhes sobre os interlocutores e a aula de Cálculo são fornecidos no capítulo 4, para melhor contextualizar as falas apresentadas neste texto com respeito à vivência do aluno no período da interlocução.

Pelo fato de eu acompanhar os interlocutores em sala de aula, o enfoque das indagações variou conforme a) as mudanças na minha compreensão do teorema dos multiplicadores de Lagrange; b) as próprias conversas com os alunos; c) as experiências na sala de aula; d) a re-significação da questão norteadora e do objetivo da pesquisa e e) a construção do sistema de análise segundo os aportes teóricos, encontrados ao longo do andamento da pesquisa.

2.1.2 Os multiplicadores de Lagrange

O teorema dos multiplicadores de Lagrange foi escolhido para problematizar as conversas por envolver uma variedade de definições e conceitos que se entrelaçam, fornecendo um rico ambiente para investigar a compreensão dos alunos. O teorema permite a re-significação de definições, técnicas e conceitos de a) álgebra, como gráficos de funções e resolução de sistemas; b) geometria analítica, como vetores, parametrização e distâncias ótimas; c) Cálculo de uma variável, como máximos e mínimos de funções e d) leis físicas, como a da reflexão da luz e a do tempo mínimo, dentre outros.

O teorema dos multiplicadores de Lagrange trata de problemas de otimização vinculados, encontrados no estudo do cálculo de várias variáveis. Abordando funções em duas variáveis, o teorema se aplica aos problemas que pedem valores máximos e mínimos de uma função $f(x, y)$, restrita a uma curva simples $g(x, y) = 0$, no seu domínio. Segue-se o teorema tal como enunciado por Edwards e Penney (1997, v. 3, p. 57-58).

principal da disciplina para ser resolvida pelo aluno. Às vezes as listas são entregues e fazem parte do cálculo da nota na disciplina. É uma prática comum que as provas sejam elaboradas com base nas listas de exercícios.

O teorema dos multiplicadores de Lagrange
para uma função de duas variáveis e um vínculo

Sejam f (x, y) e g(x, y) funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se o máximo (ou o mínimo) de f sujeito à condição

$$g(x, y) = 0$$

ocorre em um ponto P onde $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$, então

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

para algum λ.

O vetor gradiente de uma função f num dado ponto P, representada por $\nabla f(P)$, é formado pelas derivadas parciais da função f avaliadas no ponto P. Então, a equação $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$ do teorema funciona como um algoritmo para resolver exercícios típicos de extremos vinculados que não exige uma compreensão da matemática por trás do algoritmo nem uma conceptualização mais abrangente das situações e dos conceitos de que ele trata. Neste sentido, a interação do aluno com o teorema me ajuda a abordar a situação atual na qual um número significativo de alunos não consegue ir muito além da aplicação de técnicas específicas a exercícios típicos (ARTIGUE, 1999).

O ensino do método dos multiplicadores de Lagrange foi diferente em cada um dos três momentos da pesquisa. Em 1999, o professor utilizou argumentos geométricos e analíticos; em 2000, os argumentos foram estritamente analíticos e, em 2001, a abordagem foi vetorial com argumentos analíticos e desenhos auxiliares. Nos três momentos, os professores foram além dos procedimentos exigidos nos exercícios típicos dos livros-texto, utilizando argumentos teóricos para justificar o método.

Nos três momentos, para chegar às respostas dos exercícios que envolviam os multiplicadores de Lagrange, tanto nas listas quanto nas provas, era suficiente dominar os procedimentos do método. Nas conversas com os interlocutores voluntários, procurava entender o “grau” de compreensão da matemática por trás do teorema e os significados que o aluno atribuiu a ele. Indaguei sobre os procedimentos que o aluno utilizou; as suas justificativas para os procedimentos; o seu entendimento e a sua interpretação dos meios de representação, principalmente analíticos e geométricos; e suas interpretações e resoluções de exercícios. Nestas interlocuções, permaneci atento tanto aos aspectos cognitivos quanto à manifestação de aspectos afetivos.

2.1.3 Informações complementares

Entendo que o contexto geral da pesquisa tem um papel na sua construção. Além das conversas programadas com os interlocutores principais, fazem parte da pesquisa informações complementares e não antecipadas que partiram de outros alunos, professores e tutores envolvidos com a disciplina de Cálculo.

Meu envolvimento como avaliador interno do programa Cálculo com Aplicações[6] (Cálculo de Uma Variável – 1º semestre de 2000, programa PAEG[7]) e como monitor (Cálculo de Uma Variável – 1º semestre de 2001, programa PED II[8]) me proporcionou uma série de diferentes interações com professores, alunos e outros monitores, pessoas que fazem parte da realidade do ensino e da aprendizagem de Cálculo na graduação da Unicamp.

[6] Cálculo com Aplicações é um programa que tem como objetivos enfatizar a importância das disciplinas básicas de Matemática, reduzir os índices de reprovação e evasão e facilitar a transição do aluno do Ensino Médio para o Ensino Superior. O trabalho do programa é organizado e desenvolvido por uma equipe de professores e tutores que atuam “nas disciplinas de Cálculo de uma e várias variáveis, para alunos dos cursos de Exatas e Tecnológicas. [O] trabalho baseia-se em uma proposta pedagógica em evolução contínua, que se apóia no tripé: ensino por meio de projetos, incorporação de novas tecnologias em sala de aula, e no trabalho reflexivo em equipe”. (CÁLCULO..., 2003). Souza Junior (2000), em tese de doutorado, examina a dinâmica do trabalho de professores e tutores que participaram neste programa, com foco no envolvimento dos indivíduos e no processo de produção de saberes.

[7] PAEG, o Programa de Apoio ao Ensino de Graduação, financia bolsistas (alunos de graduação e pós-graduação) para atuar sob a direção de docentes em disciplinas da graduação com o intuito de aprimorar o ensino.

[8] PED, o Programa de Estágio Docente, tem por objetivo o aperfeiçoamento de estudantes de pós-graduação da Unicamp para o exercício da docência. Tem dois níveis: PED I (exercício de atividade docente plena) e PED II (exercício de atividades de apoio à docência).

2.1.4 Trajetória da interlocução

Quando a pesquisa começou, alguns vinte cinco anos me separavam do meu primeiro contato com o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Não me lembrava desse teorema. Em casa, tirei a poeira do meu livro de cálculo de várias variáveis, e o folheei para verificar se o tema tinha feito parte do meu curso. Encontrei e li o capítulo em questão e acredito que sim, mas não posso dizer com certeza. Lembrei-me de que eu não tinha dado muita importância a essa disciplina. Era apenas mais uma disciplina da Matemática, uma ampliação dos conceitos de Cálculo de uma variável.

Junto com os alunos do ano de 1999, retomei conteúdos como a regra da cadeia, o vetor gradiente, a derivada direcional e a parametrização. Meu comportamento estava muito próximo daquele do aluno. Nossas conversas estavam centradas na Matemática e na resolução dos exercícios. Eu estava aprendendo sobre o teorema junto com o aluno. Procurava as múltiplas relações e suas representações analíticas e geométricas dentro da lógica do teorema. Compartilhamos dúvidas e conjeturas. Minhas questões diziam respeito mais à Matemática e à resolução de exercícios do que a um aprofundamento dirigido a partir da questão norteadora da pesquisa. Eu me senti um "colega" dos alunos no processo de aprendizagem. Para a pesquisa, consegui reunir informações sobre *como* o aluno está desenvolvendo sua compreensão de Matemática.

Depois deste primeiro momento, senti necessidade de investigar *por que* o aluno escolhia de determinada forma os seus meios de estudo. No ano 2000, coloquei as atividades matemáticas e os estudos do aluno em segundo plano, por priorizar as razões e motivações dos mesmos. Afastara-me da minha interação tanto com o teorema quanto com o movimento do aluno em seus estudos. Utilizei minha compreensão do teorema junto com a linha de indagações desenvolvida a partir da minha interação com ele e com os alunos em 1999 para orientar a pesquisa. Afinei as questões do ano de 1999, levando em consideração as diferenças nas turmas, os professores e as exigências dos cursos.

Perdi algo da minha espontaneidade a respeito dos conceitos de Cálculo e das indagações sobre os mesmos; seguia agora questionamentos que correspondiam às informações obtidas no ano de 1999. Além disso, os alunos que participaram da pesquisa no ano 2000, por várias razões, não se envolveram tanto com o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Apesar do acesso às informações a respeito das interferências que, dentro e fora da sala de aula, apontavam para o *porquê*, acabei sentindo falta do *como* o aluno estava desenvolvendo sua compreensão.

No terceiro momento, no ano de 2001, busquei um equilíbrio entre as interações do aluno com a Matemática e os motivos que norteiam suas escolhas em relação ao "tipo" de envolvimento com a Matemática. Os alunos da pesquisa, como no ano 2000, não se envolveram tanto com o teorema dos multiplicadores de Lagrange. As conversas, de novo, ficaram centradas nas dificuldades que eles encontravam ao lidar com a matéria. Foi difícil propor exercícios diferentes dos que eles já haviam trabalhado nas listas. A conversa, em situações como essas, se tornava morosa e forçada.

2.1.5 Abrindo mão dos multiplicadores de Lagrange

Embora o teorema dos multiplicadores de Lagrange e as definições e conceitos com os quais ele se relaciona tivessem norteado as indagações e servissem para problematizar nossas conversas, admito que as questões do pesquisador nem sempre correspondiam às preocupações e interesses do interlocutor no momento.

Ao valorizar o que o interlocutor queria comunicar, deixei que ele levasse a conversa na direção de outros conteúdos matemáticos e outras disciplinas. Seguia o aluno para que suas observações pudessem me ajudar a construir a pesquisa e até a reconsiderar meu olhar. Dessa forma, consegui enxergar melhor o *como* e o *porquê*.

A colocação de Lucas (1999), "Para mim, o método dos multiplicadores de Lagrange não era tão interessante como para você", teve um papel significativo na flexibilização do enfoque da pesquisa. A partir de então, deixei de amarrar o estudo à compreensão do teorema dos multiplicadores de Lagrange. Deixei de me preocupar tanto com os conteúdos Matemáticos específicos para melhor observar e interpretar como o aluno interage com a Matemática em geral e o que motiva essa interação. Levando em conta dessa perspectiva mais abrangente, utilizo as palavras "Cálculo", "Matemática" e "matéria" (referente a uma disciplina universitária) neste texto de acordo com o sentido a elas atribuído pelos seus contextos de uso, sejam eles mais específicos ou mais gerais.

2.2 Metodologia da análise

Entendo que a metodologia de análise remete tanto ao objeto do estudo quanto ao seu objetivo. Este estudo parte de um objeto, a aprendizagem da matemática, que conceituo num primeiro momento como significativa e superficial, com o intuito de chegar ao objetivo, que é uma compreensão de como as atividades desenvolvidas e as avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam no desenvolvimento desses tipos de aprendizagem.

A metodologia da análise foi construída com base em aportes teóricos que se ajustam:

a) à perspectiva de que a aprendizagem se desenvolve na interação entre o aprendiz e o conhecimento, ou seja, a aprendizagem requer uma forma de ação;

b) à perspectiva de que a aprendizagem é uma unidade de aspectos afetivos e cognitivos;

c) à questão norteadora que orienta as indagações: ***Por que*** o aluno faz determinadas escolhas para construir seu conhecimento e ***como*** ele está sendo construído?; e

d) à aproximação do pesquisador em relação ao aluno por meio de conversas semidirigidas como resumido na seção 2.1.1 deste capítulo.

Os aportes teóricos assumidos nesta pesquisa são a teoria da ação, pelos subsídios que ela fornece para a interpretação das conversas com os alunos; Max Weber, por fornecer contribuições tanto para lidar com a complexidade das informações através o *tipo ideal*[9] quanto através de seu individualismo metodológico[10]; e Abraham Maslow, por seu apoio nas interpretações em termos das necessidades psicológicas que levam em consideração aspectos do indivíduo que, por sua vez, se vinculam a aspectos sociais. Uma elaboração mais detalhada desses aportes e da sua utilização nesta pesquisa pode ser encontrada no capítulo 3.

---

[9] De acordo com Weber (2002, p. 106, grifo do autor), "obtém-se um tipo ideal mediante a *acentuação* unilateral de *um ou vários* pontos de vista, e mediante o encadeamento de grande quantidade de fenômenos *isoladamente* dados, difusos e discretos, que se podem dar em maior ou menor número ou mesmo faltar por completo, e que se ordenam segundo os pontos de vista unilateralmente acentuados, a fim de se formar um quadro homogêneo *de pensamento*. Torna-se impossível encontrar empiricamente na realidade esse quadro, na sua pureza conceitual, pois trata-se de uma *utopia*".

[10] De acordo com Boudon (1996, p. 33), o individualismo metodológico implica em admitir que "para explicar um fenômeno social, é necessário descobrir suas causas individuais, ou seja, compreender as razões que levam os atores sociais a fazer o que fazem ou a acreditarem naquilo em que acreditam".

A análise tem três fases principais: 1) Interpretação dos trabalhos e falas do aluno em torno da Matemática, para encontrar nas suas preocupações e ações tendências referentes aos seus estudos, dando atenção especial ao entendimento dos conteúdos matemáticos e às preocupações e ações que levam o aluno a esse entendimento. Procuro aqui delinear, com ajuda da teoria da ação, a lógica interna das razões e motivações para a ação, com base nos *tipos ideais de ação* e nas necessidades psicológicas referentes aos trabalhos de Weber e Maslow; 2) A construção de *tipos ideais de aprendizagem* a partir das interpretações estabelecidas na primeira fase; e 3) Uma análise das características dos tipos ideais de aprendizagem para encontrar nexos entre essas características e os aspectos sociais relativos às atividades desenvolvidas e às avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo. Esta fase da análise se fundamenta em conceitos weberianos – ordem legítima, dominação e relações sociais, que orientam as interpretações ao nível social.

2.2.1 Interpretando as preocupações e as ações do interlocutor

As análises deste estudo se baseiam nas interpretações formuladas a partir de evidências intelectual e intuitivamente compreensíveis[11], referentes aos estudos do aluno. Faço as interpretações em um "ir e vir" entre as preocupações e ações isoladas do aluno e suas tendências globalmente perceptíveis. Para conseguir coerência nas interpretações, concebi um esquema de interpretação baseado na teoria da ação que aparece nas obras de Anscombe (1958), Davidson (1986), Bond (1983) e Cohen (1970) e que incorpora as necessidades psicológicas de Maslow. Destaco intenções, razões e motivações psicológicas para as ações do aluno em relação às suas preocupações e ações, principalmente em função de fatores acadêmicos. No capítulo 3, exemplifico este esquema de interpretação que envolve as intenções do aluno, o currículo e a didática vigentes, os estudos que o aluno realiza em relação às suas intenções e as razões e as motivações para esses estudos.

[11] Weber (1991, p. 4, grifo do autor) diferencia as interpretações feitas com base em evidência racional daquelas baseadas em evidência intuitivamente compreensível. Para Weber, a evidência racional é "o que se compreende *intelectualmente*, de modo cabal e transparente, em sua conexão de sentido visada. Intuitivamente evidente, no caso da ação, é o que se revive plenamente em sua *conexão emocional* experimentada".

2.2.2 A construção dos tipos ideais de aprendizagem

Com base na interpretação das preocupações e ações do aluno em torno da sua interação com a Matemática, focalizo, nesta segunda fase da análise, a tipificação da aprendizagem que inicialmente conceituei como significativa e superficial. Nesta pesquisa, são construídos dois tipos ideais de aprendizagem: *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada* (ver capítulo 6), que se relacionam com a conceituação inicial. Fundamento essas construções conceituais de aprendizagem nos tipos ideais de ação e nas necessidades psicológicas, caracterizando-as pela interação entre o aluno e a Matemática, como interpretada nas interlocuções.

Cada característica do tipo ideal (ver quadro 6-1, p. 143) é vinculada à interação do aluno com a Matemática, de acordo com suas razões e motivações. Mas é pouco provável que as características tomadas em conjunto como está descrito no *tipo ideal*, sejam encontradas na realidade. O *tipo ideal* é um construto conceitual que isola e acentua um recorte unilateral da realidade. O construto pretende ser coerente com o objetivo do estudo e fiel às regularidades das preocupações e das ações do aluno.[12] A construção dos *tipos ideais de aprendizagem* foi realizada em três etapas:

1) Inicialmente, procurei desenvolver uma compreensão intuitiva da relação que o aluno estava estabelecendo com a Matemática, atento à questão norteadora do estudo e ao contexto no qual a interação com a Matemática se realiza. Escolhi dois dos interlocutores, Lucas (1999) e Rodrigo (2001), para fazer uma análise de alguns aspectos da sua interação com a Matemática; interpretando esses dados com base em Maslow e Weber (ver capítulo 5).

2) Em segundo lugar, busquei categorizar as características encontradas na primeira etapa (ver quadro 6-1), recorrendo às conversas com os outros interlocutores para complementar e acentuar as características coerentes tanto com os recortes previamente escolhidos com Lucas e Rodrigo quanto com os aportes teóricos (Maslow e Weber).

3) Finalmente, procurei conceituar as características da segunda etapa de forma relacionada e dinâmica, "idealizando" a atividade através da qual o aluno desenvolve sua relação com a Matemática, isto é, sua aprendizagem (ver quadro 6-2, p. 159).

[12] Podem surgir vários *tipos ideais*, devido tanto à multiplicidade dos objetivos, interesses e perspectivas de pesquisadores quanto à variedade de preocupações e ações do ator social.

2.2.3 Relações interpessoais na aprendizagem

A terceira fase da análise, elaborada no capítulo 7, tem por propósito alcançar o objetivo da pesquisa, isto é, compreender melhor como as atividades desenvolvidas e as avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam a aprendizagem. Essa análise é feita, num primeiro momento, a partir de características dos tipos ideais de aprendizagem definidas por meio das interlocuções e fundamentadas em Maslow e Weber. Dos tipos ideais de aprendizagem, seleciono características que sugerem aspectos sociais na interação do aluno com a Matemática. Coloco essas características em ressonância com as falas dos nove interlocutores e com conceitos weberianos que permitam a interpretação destes aspectos sob a luz do objetivo definido para este estudo.

Nos dois tipos ideais de aprendizagem construídos, manifestam-se as seguintes características: a) "autonomia" e "dependência" em relação às escolhas que o aluno faz nos seus estudos, numa dualidade que assinala a presença de poder ou dominação e b) "diálogo" e "troca de comunicados", que assinala a presença de comunicação, ou seja, possíveis relações sociais.

Utilizo os conceitos weberianos de dominação, ordem legítima e relações sociais para construir uma compreensão do *porquê* das escolhas que o aluno faz no desenvolvimento de uma *aprendizagem pessoal* ou de uma *aprendizagem afastada*.

2.3 Nexos entre os aportes teóricos

A metodologia da interlocução e a metodologia de análise deste estudo se fundamentam em conceitos da sociologia de Max Weber, da psicologia de Abraham Maslow e da teoria da ação. Em relação à interlocução, estes três aportes são coerentes em privilegiar as ações do indivíduo. Enquanto a teoria da ação oferece contribuições para explicar a ação em termos de intenções e razões do indivíduo, em concordância com Weber, Maslow fundamenta suas explicações em termos de motivações que têm base em necessidades psicológicas do ser humano. Neste sentido, os três aportes fornecem meios compatíveis para analisar interferências na aprendizagem de uma ótica abrangente que é capaz de partir do indivíduo e chegar a uma interpretação de fatores sociais.

Enquanto busco na teoria da ação e em Maslow aportes para orientar a interpretação das preocupações e ações do aluno, a metodologia de Weber serve como instrumento para isolar e "idealizar" um recorte da complexidade de múltiplas motivações, intenções e razões socialmente situadas para alcançar uma compreensão dos aspectos sociais a partir dessas interpretações. No próximo capítulo mostro como os três aportes teóricos são interpretados e utilizados para se adequar à aprendizagem, objeto deste estudo, com o intuito de alcançar o objetivo da pesquisa.

A base teórica sócio-psicológica: Max Weber, Abraham Maslow e a teoria da ação

3

No capítulo sobre a metodologia, delimitei resumidamente o uso que faço da sociologia de Max Weber, da psicologia de Abraham Maslow e da teoria da ação neste estudo. Conjuntamente, estes aportes oferecem perspectivas e métodos gerais para investigar aspectos individuais em relação à aprendizagem e, a partir desses, obter uma compreensão de aspectos sociais dessa aprendizagem. Neste capítulo, abordo relações entre conceitos da teoria de ação, da psicologia de Maslow e da sociologia de Weber, além de discutir a adequação desses aportes em relação à aprendizagem enquanto uma relação com características afetivas e cognitivas.

A metodologia deste estudo é baseada primariamente no individualismo metodológico[13] de Max Weber e nas suas concepções de tipos ideais, ordens legítimas, dominação e relações sociais. O individualismo metodológico é um método investigativo que privilegia as ações do indivíduo, na medida em que este interpreta o mundo com base em suas experiências e necessidades, possui intenções, age e atribui significados às suas ações. Neste estudo, é o indivíduo aluno que atribui sentido às suas interações com a Matemática e às escolhas que faz nos seus estudos no âmbito do seu curso universitário. É através desse sentido que o aluno norteia as ações que medeiam a relação que ele desenvolve com o conhecimento matemático.

Ao interpretar as interlocuções com os alunos à luz desses aportes teóricos, entendo que existe uma relação dinâmica e contextualmente sensível entre as expectativas do aluno e suas

[13] "A expressão – 'individualismo metodológico' – foi criada pelo sociólogo e economista austríaco J. Schumpeter (1954) e divulgada pela economista F. von Hayek (1952) e pelo filósofo das ciências K. Popper. Porém, já a encontramos, textualmente, numa carta de Max Weber a seu amigo R. Liefmann, um economista marginalista: 'A sociologia, ela própria também (i.e. tal como a economia de estilo mengeriano), só pode ter origem nas ações de um,

necessidades psicológicas o que, por sua vez, sugere uma análise de suas ações que considere tanto as razões invocadas para elas (intenções) quanto as motivações que elas manifestam (necessidades psicológicas).[14]

Maslow e Weber oferecem subsídios para uma interpretação compreensiva das ações do aluno em torno dos seus estudos. A teoria da ação, por sua parte, aborda a ação em termos lógicos e filosóficos, enquanto as considerações de Weber são mais vinculadas às informações empíricas, como nos seus estudos sobre, por exemplo, economia, religião e burocracia; já Maslow oferece subsídios para uma interpretação que leva em conta as necessidades psicológicas. Ou seja, enquanto a teoria da ação se isola no indivíduo, Weber, de forma explícita, e Maslow, de forma implícita, fornecem vínculos entre o indivíduo e o social.

3.1 As premissas principais deste estudo

Entendo que as relações desenvolvidas nas interações entre pessoas e entre uma pessoa e um objeto provocam no indivíduo o desenvolvimento de significados afetivos e cognitivos que se relacionam com o valor e os sentimentos que o indivíduo atribui ao outro, seja pessoa ou objeto. Nesta perspectiva, fundamento este estudo em duas premissas principais: a) a aprendizagem envolve uma forma de ação na qual o aprendiz interage com o conhecimento e b) a aprendizagem tem características afetivas e cognitivas.

Abordo a afetividade e a cognição referentes à aprendizagem em termos gerais ao caracterizar a relação que o aluno desenvolve com a Matemática. Na tipificação da aprendizagem, os aspectos afetivos e cognitivos fazem parte da ação e se relacionam com o contexto. Por exemplo, no capítulo 5, aponto ao fato de que o desconhecido, em termos de exercícios ou problemas matemáticos, pode ser algo tanto atraente quanto ameaçador. A atividade na qual o aluno encontra e se envolve com um problema por curiosidade, porque sente a

---

de alguns ou de muitos indivíduos distintos. É por isso que tem de adotar métodos estritamente *individualistas*'" (BOUDON, 1996, p. 33, grifo do autor).

[14] Neste estudo, faço uma distinção conceitual entre as palavras "razão" e "motivo". Utilizo as palavras "motivo" e "motivação" fazendo referência às necessidades psicológicas básicas na conceituação de Maslow. Quanto à palavra "razão", assumo a conceituação de Weber: uma conexão de sentido que explica uma ação. Weber não faz uma distinção entre "razão" e "motivo", utilizando os termos de modo intercambiável. Quando Weber (1991, p. 8) utiliza o termo "motivo", ele se refere a "uma conexão de sentido que, para o próprio agente ou para o observador, constitui a 'razão' de um comportamento quanto ao seu sentido".

necessidade de resolvê-lo, é qualitativamente diferente daquela em que o aluno encontra o mesmo problema sob ansiedade característica da preparação para uma prova na qual o problema pode ser cobrado. No primeiro caso, o aluno pode interagir de maneira a encontrar valor e prazer na atividade e, no segundo, principalmente para aliviar a ansiedade.

3.2 A teoria da ação e a interpretação das preocupações e ações do aluno

A teoria da ação[15], basicamente, procura explicações lógico-filosóficas para a ação intencional focalizando as intenções, a própria ação e as razões para tal ação. Entendo que os pressupostos dessa teoria, como delineados por Cohen (1970), correspondem às condições que o aluno leva em consideração ao fazer suas escolhas no que diz respeito aos seus estudos no ciclo básico na graduação (COHEN, 1970, p. 85-86):

> 1. O ator possui objetivos (ou intuitos ou fins); suas ações são efetuadas na busca deles.
> 2. A ação freqüentemente envolve a escolha de meios para a consecução dos objetivos, mas mesmo onde parece que ela não o faz, é ainda possível a um observador distinguir analiticamente entre os meios e os objetivos.
> 3. Um ator sempre possui muitos objetivos; suas ações, efetuadas na busca de qualquer um deles, influenciam suas ações efetuadas na perseguição de outros objetivos e são influenciadas por elas.
> 4. A busca dos objetivos e a escolha de meios sempre ocorre dentro de situações que influenciam o curso da ação.
> 5. O ator sempre formula certos pressupostos referentes à natureza de seus objetivos e à possibilidade de sua consecução.
> 6. A ação é influenciada não apenas pela situação mas também pelo conhecimento que o ator possui dela.
> 7. O ator tem certas idéias ou modos de cognição que influenciam sua percepção seletiva das situações.

[15] No capítulo 2, seção 2.2.1, aponto os trabalhos consultados a respeito da teoria da ação: Anscombe (1958), Davidson (1986), Bond (1983) e Cohen (1970). O uso da teoria da ação neste estudo se limita às interpretações das preocupações e ações do aluno; tais interpretações se apóiam também em Maslow e Weber. Para as interpretações sociais, recorro aos conceitos sociológicos de Weber.

8. O ator possui certas normas e certos sentimentos ou disposições afetivos que influenciam tanto sua percepção das situações quanto sua escolha de objetivos.
9. O ator possui certas normas e certos valores que orientam sua escolha de objetivos e o ordenamento dos mesmos num certo esquema de prioridades.

Os nove pressupostos têm por enfoque o ator, com uma ausência notável do outro, ou seja, uma ausência da caracterização do ator como um ser social, por não considerar relações interpessoais. Para fins interpretativos, isto é coerente com o individualismo metodológico adotado neste estudo. Aproveito aspectos desta teoria de forma intuitiva e reflexiva na busca de uma coerência interna para as interpretações a respeito das preocupações e ações do aluno.

Para esclarecer este processo de interpretação, que não é explícito na análise, descrevo a seguir uma interpretação de preocupações e ações recortadas unilateralmente das conversas com Rodrigo (2001), um aluno do Cursão (ver seção 2.1.1 – As turmas e as conversas, para uma descrição do Cursão). As interpretações se fundamentam em motivações psicológicas – relativas às necessidades básicas delimitadas por Maslow (ver seção 3.3) e razões para ação – relativas aos *tipos ideais de ação* de Weber (ver seção 3.4).

> No ano de 2001, a turma do Cursão, levando em consideração todas as suas disciplinas, foi sujeita a uma programação de aproximadamente duas avaliações por semana. Somente no **contexto** da disciplina de Cálculo (o currículo e a didática vigentes), testes foram administrados e listas de exercícios foram entregues num ritmo quinzenal e os testes cobravam exercícios semelhantes aos das listas.
>
> Em relação aos testes, Rodrigo (2001) adotou como **intenções** principais, adquirir conhecimento matemático e alcançar boas notas. Em várias situações, estudava Cálculo (**ação**) de modo que as elaborações das suas respostas aos exercícios nas listas e nos testes seguissem fielmente os métodos utilizados pelo professor e aqueles exemplificados no livro-texto. Levando em consideração nossa interlocução mais ampla, interpreto esse comportamento com respeito às avaliações como uma ação ***racional referente a fins*** (**razão**). Também, se manifestaram em nossa interlocução indícios de motivação psicológica, tanto nas palavras quanto nas inflexões da voz. Por exemplo, Rodrigo relata que teve "medo" na véspera das avaliações e que, ao sair de um teste "confiante" de que tinha conseguido uma boa nota, sentiu "alívio". Isto indica que seus estudos em preparação para as avaliações foram **motivados**, em parte, pela ***necessidade de segurança***.

Segue-se uma apresentação mais genérica da interpretação acima, levando em consideração as interlocuções com os outros alunos da pesquisa. Dessa forma, me aproximo da conceituação de um tipo ideal de aprendizagem fundamentado em "razões" e "motivações". Enfatizo as relações entre as preocupações e ações do aluno e os conceitos da teoria da ação, tal como adaptados para os fins analíticos deste estudo:

> **Intenção:** Adquirir conhecimento matemático e conseguir uma nota que julga adequada (com respeito às expectativas referentes à aprovação, ao exame, e ao Coeficiente de Rendimento).
>
> **O currículo e a didática vigentes:** Está difícil entender a apresentação da matéria pelo professor em sala de aula. O entendimento do livro-texto requer uma atenção cuidadosa à nomenclatura. Os itens nos testes são semelhantes aos exercícios das listas. Existe uma certa pressão por parte do professor para que o aluno estude.
>
> **Ação:** Estuda para ser capaz de apresentar resoluções para os exercícios das listas na hora da prova. Segue e estuda os procedimentos de resolução como exemplificados pelo professor e os autores dos livros-texto, chegando até a decorar métodos na véspera da prova e admitir a possibilidade de colar.
>
> **Razão:** ***Ação racional referente a fins***. Ser capaz de apresentar resoluções que seriam "inquestionáveis", a fim de **conseguir uma nota** que julga adequada.
>
> **Motivação:** ***Necessidade de segurança*.** Ser capaz de apresentar resoluções que seriam "inquestionáveis", a fim de **aliviar** a **ansiedade** provocada pela prova.

Nesta interpretação, a aprendizagem se desenvolve por razões *racionais referente a fins* e está motivada pela *necessidade de segurança*. Embora o aluno tenha a intenção de adquirir conhecimento matemático e conseguir uma nota que julga adequada, age em função da ansiedade, que indica a presença da *necessidade de segurança*, orientando seus estudos de forma auto-centrada, a fim de obter alívio para esse sentimento. Isso se realiza quando ele tira uma nota adequada na prova. Ele busca meios de estudo e apoio (solução para as dúvidas) eficientes e utilitários, ou seja, do tipo *racional referente a fins*, para conseguir a nota.

A seguir, nas seções 3.3 e 3.4, apresento aspectos da psicologia de Maslow e dos *tipos ideais de ação* de Weber que fundamentam o desenvolvimento da base teórica para os tipos ideais de aprendizagem, conforme as interlocuções com os alunos.

3.3 As necessidades psicológicas básicas de Maslow

Para Maslow, as necessidades psicológicas básicas do ser humano estão entre as principais motivações para as ações do indivíduo. Estas necessidades, de acordo com Maslow, são de dois tipos: de *crescimento* e de *compensar deficiências*. E, de acordo com sua teoria, elas são hierarquizadas de tal modo que, de uma maneira geral, o indivíduo procura satisfazê-las partindo da mais básica até chegar à menos básica.[16] Nessa hierarquia, figuram em primeiro lugar as *necessidades de compensar deficiências*: 1) fisiológicas, 2) de segurança, 3) de pertencimento e 4) de estima; seguidas pela *necessidade de crescimento*, ou seja, 5) de auto-atualização. Nas próximas duas subseções, interpreto conceitos maslowianos de forma a adequá-los ao objeto de estudo desta pesquisa, a aprendizagem.

3.3.1 Necessidade de compensar deficiências

No caso da aprendizagem de Cálculo no ciclo básico da graduação, as necessidades de segurança, de pertencimento e de estima se mostram importantes, enquanto as necessidades fisiológicas não se mostram significativas.

Segurança. Existe segurança na rotina, na ordem e na justiça. O aluno procura uma rotina como, por exemplo, uma programação definida de listas de exercícios, testes e provas. Está seguro 1) quando sabe como será calculada a nota final da disciplina; 2) quando há uma coerência entre as aulas, as listas e o que é cobrado nos testes e nas provas; e 3) quando se sente confiante de que seu entendimento da matéria é suficiente para conseguir a nota que ele julga adequada. A segurança está fortemente ligada aos *hábitos* (um tipo ideal de ação de Weber) de estudo que o aluno desenvolveu ao longo dos anos escolares para ter "sucesso" na educação.

Pertencimento. De modo geral, o aluno sente necessidade de ter um lugar, tanto entre seus colegas quanto na relação com o professor. As interlocuções sugerem que existem diferentes

[16] Maslow (1970) enfatiza que existem muitos determinantes do comportamento além das necessidades e desejos. Incorpora fatores situacionais aos seus argumentos. Aponta que a hierarquia das suas necessidades básicas não é rígida e admite inversões.

qualidades de pertencimento; tais qualidades variam conforme as necessidades que motivam as ações.

Na análise do capítulo 7, a necessidade de pertencimento se manifesta na forma de relações sociais (na conceituação de Weber) de acordo com os tipos ideais de aprendizagem construídos no capítulo 6.

Estima[17]. Com base na análise deste estudo categorizo a estima com base nas atividades e nos resultados: a) O aluno pode ganhar estima através da sua participação em uma atividade desafiadora que requer sua criatividade. Embora o êxito alcançado na atividade seja importante, o processo que leva ao êxito é mais marcante. b) A estima pode se basear nos resultados de uma atividade; por exemplo, a aprovação ou uma nota alta. Os meios para alcançar estes fins têm pouca importância em si. É a representação do êxito, como a nota na disciplina, que possui maior importância.

De acordo com Maslow (1970, p. 68), a tentativa de compensar deficiências é sempre uma ação utilitária, ou seja, de tipo *racional referente a fins*, na nomenclatura de Weber, que está compensada em relação às outras pessoas ou normas. Isso pode criar uma dependência em relação aos outros, o que dificulta a obtenção da autonomia. O indivíduo dependente acaba se conformando ao ambiente mais do que seguindo seu próprio caminho.

3.3.2 Necessidade de crescimento

O indivíduo tem a necessidade natural de crescer e se expressar como pessoa, para utilizar e realizar seu potencial, isto é, para se auto-atualizar. Ao conversar com os alunos a respeito dos seus cursos, percebi que, durante os primeiros semestres da faculdade, eles possuem somente uma idéia geral da profissão escolhida. Por isso, não considero que os alunos deste estudo estão agindo para se auto-realizar, ainda que algumas das ações observadas nesta pesquisa sejam motivadas pela necessidade de crescimento.

[17] Maslow faz uma distinção entre a auto-estima e a estima que vem de outros. Para Maslow, a auto-estima se refere ao sentido de confiança, competência e adequação, enquanto a estima que vem de outros se refere à aceitação, ao reconhecimento, ao prestígio e ao status.

O crescimento, de acordo com Maslow, é "o desenvolvimento constante de talentos, capacidades, criatividade, sabedoria e caráter". (GOBLE, 1970, p. 59). Há indícios desta pesquisa que apontam para uma hierarquia cognitiva que Maslow (1970) concebe à parte da sua hierarquia principal e que aborda somente o conhecimento e a compreensão. Segundo as observações deste autor, a busca de conhecimento e compreensão, além de ser importante para a pessoa atender tanto as necessidades referentes às deficiências quanto a auto-atualização, também se manifestam de modo "desvinculado" dessas necessidades. Maslow (1970, p. 49) cita evidências da existência de impulsos positivos para "satisfazer curiosidade, conhecer, explicar, e compreender".

Entendo que a compreensão indica a aquisição de um grau de apreensão referente a um objeto cognoscível. No âmbito da educação institucional, a aquisição de conhecimento e a compreensão estão vinculadas às necessidades gerais de compensar deficiências e de crescimento (compreensão). Considero que a compreensão, quando satisfaz uma curiosidade do aluno no contexto acadêmico, também está satisfazendo uma necessidade de crescimento. Entendo por *necessidade de crescimento referente a compreensão* o seguinte:

Necessidade de crescimento referente a compreensão. Enquanto uma necessidade de crescimento, a compreensão seria uma carência, consciente ou não, comumente chamada de curiosidade, frente a uma incongruência, um desequilíbrio, um elemento desconhecido no contexto do conhecido, suficientemente "forte" para "pedir" a busca de um entendimento justificável[18]. Se o pedido for atendido, ou seja, se uma compreensão alcançada, a necessidade é, em algum grau, satisfeita.

3.4 A conceituação dos tipos ideais de ação

Faço uma tipificação das razões que impulsionam os estudos do aluno. Tal tipologia admite convergências e divergências com os *tipos ideais de ação* especificados por Weber, mas exige coerência entre as necessidades psicológicas de Maslow e a interpretação das falas dos interlocutores.

[18] Utilizo a palavra "justificável" com o significado a ela atribuído por Lins (1999, p. 88) no Modelo dos Campos Semânticos. Segundo ele, "o papel da justificação [para o indivíduo] é produzir legitimidade para [seu enunciado]".

A dualidade entre o racional e o irracional aparece de forma explícita e implícita no trabalho de Weber, como acontece por exemplo na sua tipificação de ação. Não adoto essa ótica e os conceitos construídos neste estudo tendem a mesclar aspectos racionais e irracionais na busca de uma caracterização de aprendizagem mais unificada em termos dos conceitos cognitivo e afetivo.

Weber afirma que a tipificação da ação com base nas razões que a norteiam é a unidade conceitual básica de análise para sua metodologia. Admitindo uma variedade de tipos de ação, este autor define quatro *tipos ideais de ação social* que servem para fundamentar suas análises de fenômenos sociais. Para Weber, as ações do indivíduo podem ser classificadas da seguinte maneira:

> A ação social, como toda ação, pode ser determinada: 1) *de modo racional referente a fins*: por expectativas quanto ao comportamento de objetos do mundo exterior e de outras pessoas, utilizando essas expectativas como "condições" ou "meios" para alcançar *fins* próprios, ponderados e perseguidos racionalmente, como sucesso; 2) *de modo racional referente a valores*: pela crença consciente no valor – ético, estético, religioso ou qualquer que seja sua interpretação – absoluto e *inerente* a determinado comportamento como tal, independentemente do resultado; 3) *de modo afetivo*, especialmente *emocional*: por afetos ou estados emocionais atuais; 4) *de modo tradicional*: por costume arraigado. (WEBER, 1991, p. 15, grifo do autor).

Mas, como Weber assinala,

> esses modos de orientação de modo algum representam uma classificação completa de todos os tipos de orientação possíveis, senão tipos conceitualmente puros, criados para fins sociológicos, dos quais a ação real se aproxima mais ou menos ou dos quais – ainda mais freqüentemente – ela se compõe. Somente os resultados podem provar sua utilidade para *nossos* fins. (WEBER, 1991, p. 16, grifo do autor).

Utilizo o tipo ideal como um instrumento para lidar com uma variedade de preocupações e ações por parte dos interlocutores. As conversas com os alunos apontam para quatro tipos de ação coerentes com as necessidades psicológicas de Maslow e que representam as razões que norteiam seus estudos de Cálculo.

Racional referente a fins. Utilizo esse tipo de ação no sentido definido por Weber. Para Weber, uma ação do tipo *racional referente a fins* é levada a efeito para alcançar um objetivo. Nela, o fim, o meio e os efeitos colaterais são levados em consideração na decisão para agir. Neste caso, a ação é avaliada em termos da sua efetividade em atingir o objetivo. No contexto educacional, os meios de estudo às vezes são escolhidos em termos da sua eficácia em garantir um bom resultado numa prova. Weber freqüentemente recorre a exemplos econômicos para esclarecer seus conceitos. Encontrei nestes exemplos uma ressonância com situações relacionadas à aprendizagem no âmbito de educação institucional. Por exemplo, o tipo ideal de *ação racional referente a fins* oferece uma perspectiva informativa a respeito da *aprendizagem afastada*.

Cognitiva referente a valores. Por outro lado, ao tentar associar o tipo ideal de ação weberiano, ação *racional referente a valores*, à atividade do aluno que desenvolve uma aprendizagem pessoal, não consegui reconciliar a interpretação da atividade do aluno e a idealização weberiana do valor, na qual, de acordo com Weber (1991), o agente

> age a serviço de sua convicção sobre o que parecem ordenar-lhe o dever, a dignidade, a beleza, as diretivas religiosas, a piedade ou a importância de uma "causa" de qualquer natureza. [...] [É] uma ação segundo "mandamentos" ou de acordo com "exigências" que o agente crê dirigidos a ele. (WEBER, 1991, p. 15).

Weber utiliza "valor" de forma que o termo carrega a conotação de "mandamento". Valor neste sentido não se manifestou nas interlocuções sobre atividades relacionadas com a Matemática.

Ao conceituar o valor, me apoio em Bond (1983) e Maslow (1968) para estabelecer que, de acordo com a análise das conversas com os alunos, foi encontrado um valor, no sentido de uma afinidade com uma atividade ou tópico de estudos. Embora o indivíduo aja pelo valor da atividade em si, sem se importar com as conseqüências, em concordância com a concepção de Weber, o significado do valor neste caso se aproxima daquele proposto por Bond (1983, p. 1-2), que entende por valor "aquilo que vale possuir (incluindo guardar e preservar), obter, ou fazer". De acordo com Maslow (1970, p. 169), uma pessoa que atua pela necessidade de crescimento freqüentemente considera como fins em si experiências e atividades que são por outros consideradas somente meios. Ela está "*somewhat more likely to appreciate for its own sake, and in an absolute way, the doing itself*". Por exemplo, Lucas (1999), um dos interlocutores desta pesquisa, gosta de desafios e de problemas não-típicos. Interpreto como ação *cognitiva referente* *a valores* as ocasiões nas quais o aluno se envolve com problemas para resolvê-los, entendê-los e justifica suas estratégias.

Cito Maslow para esclarecer, ainda mais, o significado do termo valor como utilizado nesta pesquisa:

> Activity can be enjoyed either intrinsically, for its own sake [conceituação de valor utilizada nesta pesquisa], or else have worth and value only because it is instrumental in bringing about a desired gratification [tipo de ação racional referente a fins]. In the latter case it loses its value and is no longer pleasurable when it is no longer successful or efficient. More frequently, it is simply *not enjoyed at all*, but only the goal is enjoyed [ou valorizado]. (MASLOW, 1968, p. 31, grifo do autor).

Hábito. Pode-se encontrar nos estudos do aluno de Cálculo no ciclo básico da graduação, hábitos que são uma "herança" do Ensino Médio. Como os métodos de ensino e avaliação da Matemática na graduação são parecidos com os do Ensino Médio, os hábitos de estudo que foram desenvolvidos pelo aluno no Ensino Médio vão sendo repetidos, com algumas modificações.

Maslow destaca a importância dos hábitos:

> A habit is an attempt to solve a present problem by using a previously successful solution. This implies there must be (1) a placing of the present problem in a certain category of problems, and (2) a selection of the most efficient problem solution for this particular category of problems. Classification, i.e., rubricization, is therefore inevitably involved. (MASLOW, 1970, p. 211-212).

O hábito poupa energia, esforço e pensamento ao lidar com situações repetidas. É uma reação pré-formulada para uma situação, ou uma resposta pronta para um problema repetitivo e familiar. No entanto, hábitos desenvolvem uma certa resistência à mudança.

Afeto. O afeto contribui significativamente para as decisões e as escolhas de ação. Ele se manifesta, em maior ou menor grau, em todas as atividades relativas ao estudo; por exemplo, nas avaliações (como testes e provas) e na postura do professor frente ao aluno. Estes sentimentos criam disposição para agir de uma certa maneira numa dada situação.

Para abordar a aprendizagem, é preciso resignificar o sentido que Weber atribui à ação de *modo afetivo*. A afetividade no sentido de Weber (1991, p. 15) pode ser descrito como "uma reação desenfreada a um estímulo não-cotidiano" ou "como descarga consciente do estado emocional”. Nesta pesquisa, a concepção do afeto é refletida em gostos, desgostos, afinidades e disposições (pró ou contra). Entendo que a afetividade está presente nas ações *racional referente a fins*, *cognitiva referente a valores* e *habitual* sendo que seu grau de sentimento positivo/negativo se relaciona com as carências em termos de necessidades psicológicas.

3.5 Pluralidade de razões motivadas

Foi construída uma base teórica para a tipificação da aprendizagem através da combinação das motivações psicológicas (seção 3.3) com os tipos ideais de ação (seção 3.4). Uma única “forma” de ação, que é baseada numa variedade de razões e motivações, pode ser representada por uma combinação dos *tipos ideais de ação* (com base em Weber) com as motivações psicológicas de Maslow, tal como delineados neste estudo. Como assinala Weber (1991):

> Só muito raramente a ação, e particularmente a ação social, orienta-se exclusivamente de uma *ou* de outra destas maneiras [tipos ideais de ação]. E, naturalmente, esses modos de orientação de modo algum representam uma classificação completa de todos os tipos de orientação possíveis, senão tipos conceitualmente puros, criados para fins sociológicos, dos quais a ação real se aproxima mais ou menos ou dos quais – ainda mais freqüentemente – ela se compõe (WEBER, 1991, p. 16).

Maslow (1970, p. 55), também assinala que as ações de uma pessoa têm base em um complexo de motivações múltiplas, ou seja, uma ação tende a ser motivada por várias ou todas as necessidades simultaneamente em vez de por somente uma delas.

Além das múltiplas razões e motivações, existem interseções entre as motivações psicológicas e os tipos ideais de ação encontrados, formulados e utilizados neste estudo. Por exemplo, tanto a *necessidade de crescimento referente a compreensão* quanto a ação do tipo *cognitiva referente a valores* oferecem contribuições para interpretar por que o aluno age principalmente pelo prazer da atividade em si. De forma similar, a *necessidade de segurança* e a ação *racional referente a fins* fornecem aportes para explicar a ação instrumental na qual o valor da atividade reside na sua eficácia em alcançar os fins.

No capítulo 6, os tipos ideais de ação e as motivações, tal como delimitados neste capítulo, serão utilizados para fundamentar os dois tipos ideais de aprendizagem que, por sua vez, serão caracterizados pela interação entre o aluno e a matéria. Por meio do conceito de *tipo ideal* de Weber, acentuo algumas necessidades psicológicas e alguns tipos ideais de ação delimitados neste capítulo, com o intuito de fundamentar aspectos de aprendizagem que se aproximam tanto da aprendizagem significativa quanto da aprendizagem superficial.

Por entender que o sentido que o aluno atribui ao conhecimento de Cálculo se desenvolve na sua ação que parte da confluência entre, por um lado, seus objetivos, expectativas, interesses e afinidades e, por outro, o ensino e avaliação da disciplina pelo professor universitário, apresento no próximo capítulo informações gerais sobre os nove interlocutores voluntários e a aula dos seus professores de Cálculo, junto com os meios utilizados para calcular o rendimento do aluno na disciplina.

Os interlocutores e a aula de Cálculo

4

Ao fundamentar esta pesquisa nas conversas com os alunos, apresento neste capítulo informações para contextualizar os recortes da interlocução citados no texto. Para concretizar o objetivo desta pesquisa – *compreender melhor como as atividades desenvolvidas e as avaliações elaboradas pelo professor de Cálculo, no contexto das exigências do curso do aluno, influenciam a aprendizagem* – apresento, de forma resumida, informações sobre os interlocutores e a aula de Cálculo.

Anoto os cursos dos alunos, o livro-texto principal de Cálculo, o meio através do qual suas médias de aproveitamento nesta disciplina foram calculadas e as porcentagens de aprovados e reprovados na disciplina.

Apresento "biografias" breves dos alunos que participaram como interlocutores. Cada "biografia" começa com a resposta que o aluno deu para a seguinte questão, proposta no final da sua participação neste estudo: ***Como você descreveria a Matemática? Ou seja, o que é Matemática?***

Descrevo a aula do professor com base nas falas dos interlocutores e minhas próprias observações. As aulas que acompanhei junto com os interlocutores não são muito diferentes daquelas que fazem parte da minha experiência como um aluno e professor de Matemática e estão de acordo com a descrição de Rodrigues (1997):

> É possível dizer que nas disciplinas da área de exatas, principalmente durante o período do curso básico, predominam as aulas expositivas, com pouca participação, onde o comum é que o professor se posicione na lousa – escrevendo ao mesmo tempo em que dá explicações – e os alunos em seus lugares, fazendo as anotações. Essas aulas giram em torno de exercícios: em classe e em casa, devido às muitas listas que são dadas para resolver, e obviamente nas provas. (RODRIGUES, 1997, p. 72).

Na última seção do capítulo resumo, de forma geral, alguns fatores da influência que a aula ministrada pelo professor tem sobre a aprendizagem e exemplifico essa influência através de um caso particular, com as respostas que os alunos deram para a seguinte questão: Você sabe que existe muito mais para se saber sobre o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Por que você escolheu, pelo menos por enquanto, parar de aprender a respeito?

4.1 Turma de Engenharia Química, diurno (1999)

No segundo semestre do ano de 1999, a escolha dos interlocutores foi aleatória dentro de uma lista de voluntários. Escolhi três alunos com o objetivo de conhecê-los tanto como alunos quanto como pessoas. Decidi não selecionar somente um aluno porque isso isolaria as informações na perspectiva de uma única pessoa, o que poderia restringir as interpretações vinculando-as às idiossincrasias desse indivíduo. Por outo lado, um número muito maior de interlocutores poderia criar um trabalho cansativo e massificante para o pesquisador.

Minhas interações e perguntas foram direcionadas pela questão norteadora da pesquisa e pelas colocações do aluno. Justamente porque as pessoas são diferentes, as interações com três alunos poderiam apontar tanto as diferenças quanto os traços comuns referentes ao objetivo da pesquisa.

Usei um caderno para registrar as conversas, anotando as falas e fazendo um recorte do que escrever e não escrever na hora. Não fiz gravações em áudio porque estas me incomodavam por criar um ambiente menos descontraído, enfatizando a separação entre o pesquisador e o aluno. Nas conversas nos anos 2000 e 2001, com base no fato de que senti falta de informações não registradas cuja importância para a pesquisa só pode ser reconhecida no processo de análise e nas citações diretas das falas dos alunos, adotei a gravação em áudio para complementar as anotações no caderno.

Os recortes das falas dos interlocutores, quando não foram retirados dos seus trabalhos escritos e respostas escritas aos questionários, são, em parte, parafraseados do caderno de campo. Fiz as transcrições do caderno logo depois de cada conversa para preservar, na medida do possível, as palavras exatas e, na ausência destas, o sentido do que foi falado.

As aulas aconteciam no horário das 8 às 10 horas, no prédio do Ciclo Básico às segundas e quartas-feiras e num prédio da Engenharia Química às sextas-feiras. As duas salas de aula foram projetadas para aula expositiva. As aulas de sexta-feira aconteciam no prédio da Engenharia Química para facilitar o uso do laboratório de microcomputadores do departamento, sendo que a turma de 54 alunos era dividida em dois grupos. Na primeira hora, metade da turma tinha aula no laboratório de microcomputadores com dois tutores e realizava uma atividade que acompanhava a matéria da aula. Enquanto isso, a outra metade assistia a aula expositiva com o professor, na sala de aula. Na segunda hora, os dois grupos trocavam de lugar, deslocando-se do laboratório para sala de aula e vice-versa. Este esquema funcionou para as primeiras semanas do semestre mas, devido a um problema com o licenciamento do software, acabou sendo descontinuado. Durante o resto do semestre, todas as aulas foram expositivas.

Faziam parte da estrutura do curso:

- **Os tutores**, que se encarregavam do plantão de atendimento para tirar dúvidas dos alunos.

- **O livro-texto**, no caso EDWARDS, C. H. Jr.; PENNEY, David E. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. v. 3, 216 p. Os alunos Caio e Beto consideram este um bom livro-texto para as engenharias.

- **A programação de avaliações**, que era feita em conjunto com a equipe de professores do grupo de Cálculo com Aplicações. Foram planejados testes, provas e um projeto final, mas o professor ajustou a programação logo depois do início das aulas devido ao problema com o licenciamento do software utilizado para as atividades. A turma fez o primeiro teste e o projeto passou a ser opcional. O professor calculou três médias, sendo que o aluno ficava com a maior:

    1) A primeira era baseada nas três provas;
    2) A segunda se baseava nas três provas, no teste e no projeto;
    3) A terceira considerava as três provas e o projeto.

O aluno ficava para exame se sua média fosse menor do que 5,0.

No final deste semestre (segundo semestre do ano de 1999), a estatística de aprovados e reprovados da turma foi a seguinte:

Número de alunos	Aprovados	Reprovados
54	66,7%	33,3%

Neste segundo semestre do ano de 1999, os três alunos voluntários foram Beto (sete conversas), Caio (sete conversas) e Lucas (oito conversas). Todos eles foram aprovados na disciplina Cálculo de Várias Variáveis. As conversas finais com Caio e Lucas foram realizadas no ano letivo de 2000 devido às dificuldades encontradas para marcar reuniões com eles durante o período de provas no final do semestre.

A seguir são apresentadas as "biografias" dos três alunos, começando com sua descrição a respeito do que é a Matemática.

BETO (1999)

> Matemática seriam métodos para se racionalizar problemas que a natureza e o cotidiano nos impõem. Pesquisas de ponta a princípio não têm utilidade mas, como a história nos mostrou, vários métodos matemáticos foram usados para resolver problemas de Física e Química.

Beto, o "vaqueiro", é de São José do Rio Pardo, no interior do estado de São Paulo. Durante o ano letivo, mora no centro de Campinas dividindo um apartamento com amigos.

Beto gosta de Física e das aplicações da Matemática. Gosta de entender as coisas. Gosta de associar idéias e problemas com imagens. Desenvolve seu entendimento do Cálculo primariamente nas aulas ministradas pelo professor: "Minha melhor aprendizagem acontece na sala de aula". Ele usa o livro-texto para complementar as aulas, fazer exercícios e revisar os termos técnicos e as fórmulas. Comentou, depois de perder algumas aulas de Cálculo, que algo que ele aprendeu no Cálculo é que não dá para perder aula.

Gosta de abordar os problemas e entender como resolvê-los. A resolução e a solução, em si, não são tão importantes. Diz que outras pessoas gostam mais de montar, resolver e checar.

Beto gosta de geometria e faz conexões entre o Cálculo e a geometria analítica. Fez referência aos "desenhos malucos" do professor.

Beto não se sente confiante em relação à sua habilidade algébrica: "Acho que é um defeito meu". Ele gosta mais de trabalhar com os conceitos. Tem facilidade com a geometria e enxerga os problemas geometricamente. Quando perguntei o que ele faria num problema de quatro dimensões, onde não se pode apelar para a visualização, Beto respondeu dizendo: "A gente encontra uma maneira para compensar". Ele citou os desenhos do livro de Stephen Hawking, *Uma breve história do tempo*, onde o autor descreve a expansão do universo através de um desenho de perspectiva no qual há uma reta que representa o eixo de tempo.

Sente-se à vontade para tirar dúvidas com o professor, notando que o professor às vezes improvisa uma aula de exercícios quanto existe um grupo de alunos querendo ajuda.

Considera o Cálculo uma disciplina densa, com muita matéria para estudar. Faz uma distinção entre a Matemática para o engenheiro e a Matemática para o Matemático: o engenheiro não tem que se aprofundar tanto nos conceitos como acontece com o Matemático.

Prefere aulas de uma hora em vez das duas horas habituais do curso de Cálculo: "Assim não se fica saturado. O rendimento é maior". Gostaria de ver aulas com "participação ativa dos alunos. O professor deve estimular a discussão e com esta desenvolver o raciocínio a ser exposto. Dar apoio extra-classe. Começar a aula com um problema cotidiano e aí desenvolver a terminologia e o raciocínio em cima deste problema".

Disciplinas que Beto cursou no segundo semestre do ano de 1999:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Química
3. Laboratório de Química
4. Computação (linguagem Pascal)
5. Estatística
6. Direito

CAIO (1999)

Matemática é uma forma algébrica de descrever o mundo real.

Caio gosta de fazer conexões entre a matéria nova e o que ele aprendeu anteriormente. Ele procura a lógica nos conceitos matemáticos. Ao fazer conexões, busca identificar no que é novo aquilo que reconhece. Trabalha os exercícios do livro para obter um entendimento “completo”. Quando não entende parte de um problema, Caio insiste, procurando relacionar aquela dúvida com outros conhecimentos que já domina.

Ele procura entender as fórmulas em vez de decorá-las. Comentou que sua memória não é muito boa, então procura compreender o raciocínio. Quando tem dúvidas, Caio tenta saná-las consultando o livro-texto e as anotações das aulas. Estuda sempre para fazer o melhor possível em todas as matérias.

Caio (1999, 22-11-99) afirma que a visualização é fundamental, acrescentando que, na sua opinião, os alunos na engenharia têm uma tendência para o visual, o material e o real. Entendeu, por exemplo, as integrais dupla e tripla em termos de uma “varredura”: realiza-se o passo linear da vassoura para obter uma área e depois varre-se esta área perpendicularmente para obter o volume. Caio gostou dos laboratórios de atividades com software na disciplina Cálculo de Uma Variável, no primeiro semestre. No semestre em que participou da pesquisa, sentiu falta de conhecimentos de parametrização.

Caio se interessa muito pela Engenharia Química (EQ). Numa conversa com a coordenadora do curso, ele ficou sabendo que o curso de Engenharia Química da Unicamp é considerado um dos melhores, senão o melhor do país na graduação e que a coordenadora e o corpo docente estão trabalhando para que o curso de EQ seja o melhor na pós-graduação também (CAIO,1999, 22-11-99).

No final do primeiro semestre do ano 2000, Caio ansiava por ver uma ligação entre as disciplinas do ciclo básico e a EQ. Ele não conseguiu fazer uma conexão entre a eletricidade, tal como é dada na Física, e suas expectativas na EQ. Além disso, não gostou da disciplina Equações Diferenciais, reclamando do excesso de receitas (para resolver exercícios) e integrais.

Caio (1999, 08-08-00) diz que uma boa aula é aquela que permite a interação entre o professor e os alunos. Gostou de uma aula de Física onde o professor fez um experimento de pensamento. O professor descreveu uma situação com uma bola e perguntou o que os alunos achavam que aconteceria. Um aluno fez uma conjetura. Um outro aluno fez uma conjetura diferente. A turma se dividiu, fornecendo argumentos a favor de uma ou outra conjetura. O professor explicava e questionava com base nas falas dos alunos. Caio comentou que esse procedimento “filosófico” contribuía para fixar mais o raciocínio.

Disciplinas que Caio cursou no segundo semestre do ano de 1999:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Química
3. Laboratório de Química
4. Computação (linguagem Pascal)
5. Estatística
6. Direito

LUCAS (1999)

> A matemática seria uma ferramenta, assim como a língua, voltada para a compreensão da realidade e a transmissão de conhecimento (através da “quantificação” do mundo).

Lucas mora em Goiânia mas, durante o ano letivo, mora com parentes em Campinas.

O Cálculo é a matéria que Lucas mais gosta porque “no Cálculo você pode viajar, pode imaginar”. O Cálculo abre opções para pensar. No Ensino Médio, Lucas encontrou uma Matemática “estreita”, limitada. Era uma rotina de aprendizagem de conteúdos isolados. Ele exemplificou essa situação com seus estudos sobre retas e parábolas. No colégio, estes tópicos tinham feito parte do conteúdo, mas de forma isolada, enquanto no contexto do Cálculo elas estão relacionadas. Por exemplo, o coeficiente angular da reta tangente a uma parábola representa a taxa de variação instantânea dessa parábola, conforme o ponto de tangência.

Quando começou a estudar sozinho para o vestibular, Lucas passou a gostar e se interessar pela Matemática. Para Lucas, é importante entender o que ele está aprendendo. Isto se reflete na crítica que ele faz à correção do Projeto por ele desenvolvido na disciplina Cálculo de Uma Variável, durante o primeiro semestre. Neste trabalho, Lucas justificou seus procedimentos matemáticos, mas a forma de correção indicava que as justificativas nem sequer foram lidas, já que somente as respostas algébricas e numéricas foram marcadas.

Nas aulas, Lucas presta atenção para captar e encarar o que está se passando na disciplina. Ele mantém um caderno caprichado e às vezes fica alguns minutos depois da aula para completar suas anotações. Ele é capaz de anotar e acompanhar a aula com pensamento crítico, como se pode notar através das questões que ele levanta durante o período.

Durante o primeiro mês de Cálculo de Várias Variáveis, Lucas assistiu às aulas, mas não acompanhou este estudo com consultas ao livro e comentou que estava descobrindo sozinho o Cálculo. Por exemplo, ele "pulou matéria" e enxergou áreas de superfícies (um conteúdo a ser trabalhado mais adiante no semestre), fazendo uma associação com a integral abordada em Cálculo de Uma Variável.

Lucas enxerga a Matemática geometricamente: "não penso nos problemas sem geometria" e complementa seu pensamento geométrico com o uso de um software gráfico em casa.

Disciplinas que Lucas cursou no segundo semestre do ano de 1999:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Química
3. Laboratório de Química
4. Computação (linguagem Pascal)
5. Estatística
6. Direito

UMA AULA ATENTA ÀS SUTILEZAS DA DISCIPLINA
O PROFESSOR
(1999)

Os três interlocutores se sentiram próximos, ou pelo menos confortáveis, com relação ao professor. Eles ficaram à vontade para perguntar durante a aula, principalmente para o esclarecimento de pontos abordados na apresentação do professor.

O professor, de acordo com Caio, é "paizão". Ele se interessa pelos alunos como pessoas, tanto na aula quanto fora dela, brinca e tem bom humor. Não era incomum o professor, antes de começar a aula, fazer um comentário sobre um jogo de futebol do dia anterior ou, voltando de um fim-de-semana prolongado, iniciar um bate-papo com um aluno sobre como tinha sido o feriadão na sua cidade.

A didática do professor é canônica: baseia-se em aulas expositivas e segue os conteúdos do livro-texto principal. Caio (29-10-99) comenta que suas anotações de aula são bem semelhantes aos tópicos do livro-texto. O professor combina a apresentação da teoria com exercícios que empregam técnicas que, por sua vez, se baseiam na teoria. O professor capricha nos seus argumentos e explicações durante a aula. Chama a atenção dos alunos para as sutilezas, algo que nem todos os professores se preocupam em fazer. Alguns professores seguem um estilo mais resumido, apresentando apenas um esqueleto dos procedimentos, deixando para o aluno a tarefa de recobrir esse esqueleto com os detalhes.

O professor utiliza formas geométricas e gestos para representar funções e explicar conceitos e técnicas. Recorre com freqüência a metáforas, fazendo alusões, por exemplo, ao copo "telescópico" que levava à escola quando criança, para falar das curvas de contorno e de nível. Da mesma forma, fala do burro que puxa o arado seguindo a curva de contorno e, desse modo, não sobe nem desce. Talvez, brinca o professor, esse burro entenda de Cálculo. Descreve a relação entre a integral dupla e o volume comparando-a com as folhas de um livro.

O clima da aula incentiva as perguntas dos alunos. Caio (1999, 20-09-99) comentou que a postura do professor indica que as perguntas do aluno são bem-vindas.

4.2 Turma mista – Mecatrônica, Ciência da Computação, Engenharia Elétrica e Licenciatura em Matemática, noturno (2000)

No segundo semestre do ano 2000, a turma reuniu alunos de vários cursos. Admitindo a possibilidade de que o curso de origem determinasse diferenças de perspectiva por parte do aluno, adotei uma amostra estratificada por curso. No questionário preliminar, ofereci àqueles que se dispunham a ser voluntários duas opções de interlocução: a) manutenção de um diário com alguns encontros para conversar sobre o que foi escrito e b) conversas programadas fora da sala de aula com gravação em áudio.

Decidi escolher cinco nomes da lista dos 14 voluntários da turma de 66 alunos, de forma a incluir alunos de diferentes cursos e utilizar os dois meios de interlocução: diário e série de conversas.

Inicialmente, os participantes foram Julio, do curso de Ciência da Computação (diário); André, da Licenciatura em Matemática (série de conversas); Max, da Mecatrônica (diário); Adriano, da Engenharia Elétrica (em substituição a um outro aluno; série de conversas) e Iris, da Mecatrônica (série de conversas). Dos cinco interlocutores, Julio, André e Max mantiveram seu compromisso com a pesquisa, enquanto Adriano e Iris deixaram de participar. Julio não teve tempo de colocar seus pensamentos no papel e decidiu optar pelas conversas durante o semestre. Max também optou pelas conversas.

As aulas eram realizadas às segundas-feiras das 19 às 21 horas, às quartas-feiras das 21 às 23 horas e às sextas-feiras das 19 às 21 horas e aconteciam no prédio do Ciclo Básico.

Durante várias noites, a temperatura do dia de verão permanecia na sala de aula, criando um ambiente abafado que dificultava a aula tanto para o professor quanto para o aluno.

Faziam parte da estrutura do curso:

- **Os tutores**, que se encarregavam do plantão de atendimento para tirar dúvidas dos alunos.

- **O livro-texto**, no caso EDWARDS, C. H. Jr.; PENNEY, David E. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. v. 3, 216 p.

- **As avaliações**, que consistiram de quatro testes (**T** = média das três melhores notas nos testes) e duas provas (**P1** e **P2**). A nota final (**N**) na disciplina foi dada por:

$$\mathbf{N} = 0{,}3\mathbf{T} + 0{,}3\mathbf{P1} + 0{,}4\mathbf{P2}$$

Para ser aprovado na disciplina, o aluno deveria obter um valor de **N** maior ou igual a 5. Para o aluno que não atingisse esta nota, existia um exame final, sendo que a nota final seria a média aritmética entre a nota de aproveitamento antes do exame e a nota do exame final.

No final deste semestre (segundo semestre do ano 2000), a estatística de aprovados e reprovados da turma foi a seguinte:

Número de alunos	Aprovados	Reprovados
66	95,5%	4,5%

A seguir, são apresentadas as "biografias" dos três alunos voluntários no segundo semestre do ano 2000: André (cinco conversas), Julio (dois registros no diário e cinco conversas) e Max (seis conversas). Todos eles foram aprovados na disciplina Cálculo de Várias Variáveis.

ANDRÉ (2000)

> Matemática é uma ciência para as outras ciências. [...] De modo geral, a Matemática é básica para o estudo de várias outras coisas.

André é de São Paulo, capital. Freqüentou a Escola Técnica Estadual fazendo Processamento de Dados. No último semestre do Ensino Médio, fez cursinho de preparação para o vestibular. Prestando a Fuvest, queria entrar na Universidade de São Paulo (USP) em Ciência da Computação. Mas como tinha algum dinheiro sobrando, também fez as provas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), da Unicamp e da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC – São Paulo). Passou na PUC – São Paulo em Ciência da Computação, mas o valor da mensalidade não permitiu que ele cursasse. Passou também em Licenciatura em Matemática na Unicamp, sua terceira escolha, depois de Ciência da Computação e de Engenharia de Computação.

André é usuário da Moradia Estudantil. Ele é bolsista, trabalhando 15 horas por semana na Informática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC). Manteve esperanças de entrar em Ciência da Computação e, durante seu envolvimento nesta pesquisa, prestou vestibular de novo, mas não conseguiu passar.

André se preocupa com sua nota na disciplina Cálculo de Várias Variáveis. Ele havia trancado a disciplina no primeiro semestre, quando tirou notas baixíssimas nos primeiros dois testes. Ele ainda quer fazer Computação e gosta da disciplina de Estrutura de Dados.

André não consegue encontrar um assunto, idéia ou conceito que capture seu interesse no Cálculo, mas se anima com alguns tópicos, como as integrais duplas e triplas, quando chega a um entendimento bom da técnica. Quanto aos tópicos que ele não consegue desenvolver ou entender, causam desânimo. No caso dos multiplicadores de Lagrange, por exemplo, André "enrola" na álgebra.

Não aprofunda o que está por trás das técnicas porque às vezes estuda em cima da hora para a prova, e fica tarde demais para correr atrás e resolver dúvidas. Às vezes se sente obrigado a decorar uma fórmula, dizendo: "É chato. É o último recurso". Ele sabe que é errado estudar apenas para a prova. Considera isso um vício: se não tem prova, deixa a matéria parada.

Considera importante que o professor tenha uma boa conexão com os alunos, e que seja capaz de incentivá-los e motivá-los.

Disciplinas que André cursou no segundo semestre do ano 2000:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Física I
3. Estrutura de Dados (MC 102)

JULIO (2000)

> Matemática seria uma ciência aplicada em todos os ramos das Ciências Exatas, que vai muito além dos números.

Julio está fazendo Ciência da Computação. Ele aluga um quarto numa república, onde se sente muito bem e às vezes estuda com seus colegas. Trabalhava 20 horas por semana fora da universidade na primeira parte do semestre; ao final deste, estas 20 horas tinham se transformado em 40.

Julio fez colégio técnico em Processamento de Dados e decidiu continuar na área de Computação. Prestou vestibular duas vezes. Na primeira tentativa, entrou na Universidade

Estadual Paulista (Unesp) em Rio Claro, mas sempre quis fazer seu curso na Unicamp. Não se adaptou à vida universitária em Rio Claro, onde reprovou em Geometria Analítica. Até hoje ele sente um certo desgosto pela geometria. Julio decidiu fazer cursinho durante o segundo semestre do seu curso em Rio Claro, enquanto estudava suas matérias universitárias. Foi aprovado no vestibular da Unicamp em Ciência da Computação.

A preparação para o vestibular era uma combinação de "angústia e cobrança". Julio (2000) relata que

> conciliar os estudos com essas cobranças não é nada fácil. Eu, particularmente, não sofria muita cobrança por parte das outras pessoas. Mas eu me cobrei muito, e achava que não podia dar um passo errado ou então não passar no vestibular. [...] Um peso, um sacrifício que sai das costas do estudante na hora da aprovação.

Julio sempre se interessou por Exatas e gosta da Matemática em si. Na 8ª série, participou da Olimpíada de Matemática na região do Grande ABC e ficou entre os primeiros 25 alunos. Sua mãe contou que, com dois anos, ele podia contar de um até cem e de cem até um. Além disso, durante seus anos escolares, sua mãe sustentou a crença comum de que a Matemática é uma disciplina difícil, dizendo que ele não tinha feriado, tinha Matemática. Até hoje seus amigos reafirmam essa fama da Matemática dizendo que ela é um *bicho-de-sete-cabeças*.

De acordo com Julio, a Matemática ensinada no Ensino Fundamental e Médio era muito limitada e repetitiva, e que de "tanto fazer a gente acabou aprendendo". Ele faz uma crítica da Matemática tal como é ensinada no Ensino Médio: "você não aprende a inter-relacionar os diferentes tópicos ou assuntos".

Disciplinas que Julio cursou no segundo semestre do ano 2000:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Laboratório de Física II
3. Estrutura de Dados (computação)
4. Estatística Elementar

MAX (2000)

> Matemática é um instrumento que codifica o nosso cotidiano e tudo que está ao nosso redor, tornando mais fácil a comunicação e a percepção do universo.

Max é de Volta Redonda, mas há vários anos a sua família está em Campinas. Ele cursa Mecatrônica. Decidiu prestar vestibular para este curso através de conversas com pessoas que atuam na área. Acredita que a Mecatrônica combina com seu "perfil pessoal" e deseja utilizar "o conhecimento adquirido no curso para aplicá-lo de forma positiva na sociedade". Dentro da Universidade, Max pertence a um grupo que estuda automação residencial.

Max também participa da Empresa Júnior, fazendo parte do grupo de Recursos Humanos (RH). Ele considera a Empresa Júnior como uma oportunidade de integração entre os diversos setores da Universidade. Max está no RH porque gosta de lidar com pessoas, aprecia o campo da psicologia. Ele dedica de quatro a seis horas por semana às atividades da Empresa Júnior.

Além disso, Max está envolvido com trabalho voluntário. Alimenta o projeto pessoal de atuar no terceiro setor, contemplando os aspectos sociais através da doação de roupas para as pessoas carentes e de atividades culturais. Gostaria de ver diversas organizações não-governamentais (ONG) embaixo de um mesmo teto para ter a oportunidade de coordenar seus esforços.

Max está consciente dos impactos sociais de alguns projetos na área de Mecatrônica. Por exemplo, seu pai trabalhou na construção da fábrica da Ford na Bahia. Esta empresa mecanizou a fábrica para instalar 220 robôs, o que implica na criação de empregos para pessoas qualificadas, mas não para as pessoas com baixa escolaridade e pouca qualificação.

Max pertence a um grupo sócio-cultural ligado ao Budismo para o qual ele reserva seu fim de semana. Ele também gosta de se distrair jogando bola com os colegas.

No colégio, Max costumava estudar regularmente. Agora sente uma certa dificuldade em manter o ritmo de estudos, deixando as matérias se acumularem até a véspera das provas. Outra dificuldade advém do fato dele se distrair facilmente dos estudos e da sala de aula. É um problema constante que ele está tentando superar. Max reconhece que sua falta de atenção no primeiro semestre (Geometria Analítica e Cálculo de Uma Variável) está atropelando sua aprendizagem atual no Cálculo de Várias Variáveis.

Disciplinas que Max cursou no segundo semestre do ano 2000:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Física
3. Computação (linguagem Pascal)
4. Circuitos lógicos
5. Laboratório da Física, Laboratório de Circuitos e programação em Pascal

UMA AULA SEM RUMO
O PROFESSOR
(2000)

Julio (2000, 23-10-00, diário, p. 2) escreveu sobre as aulas dos professores universitários em termos gerais, de um modo que contrasta com as colocações de Beto, Caio e Lucas sobre a aula de Cálculo de Várias Variáveis no ano de 1999: "Muitos professores parecem não estar dispostos a ensinar. Outros não possuem didática. É nessa hora que a maioria dos alunos rende menos, tendo que se adaptar a mais uma nova rotina".

O professor de 2000 dá aulas expositivas que, de uma forma geral, são difíceis de seguir. É difícil adivinhar para onde ele vai, ou porque ele quer chegar lá. O aluno recebe uma série de conteúdos mais ou menos soltos. Sua aula enfatiza representações analíticas com poucas representações geométricas e, na maior parte do tempo, segue os conteúdos do livro-texto.

O aluno espera do professor motivações e associações capazes de nortear o desenvolvimento da sua aprendizagem. Quando o aluno não percebe o objetivo e nem as motivações para as informações que o professor coloca na lousa, dificilmente compreende o sentido da matéria e, de acordo com Max (2000, 19-10-00, p. 1), "Se eu estou saindo da aula entendendo, tenho mais motivação para estudar. Se eu não estou entendendo, eu enrolo".

Max às vezes sai da sala antes da aula acabar. Ele disse que faz isso quando "perde o fio da meada", devido à falta de atenção ou ao fato da matéria não ter sido bem explicada pelo professor. Conta que ele não tinha como entender o resto da aula, dizendo: "Geralmente quando eu saía assim estava acontecendo isso. Eu prefiro sair e estudar em casa do que ficar lá sem entender nada do que está acontecendo". (MAX, 2000, 20-11-00, p. 6).

Perguntei por que Max não ficava para o fim da aula, quando o professor costumava elaborar alguns exercícios. Max (2000, 20-11-00, p. 7) respondeu: “Quando eu pego, ou mais, entendo o assunto, quando estou entendendo, para mim valia muito a pena ficar e ver o exemplo. Geralmente ele dá dois ou três no final da aula. Quando estou entendendo vale muito a pena. Gravo bastante na minha cabeça”.

O que acaba sendo aproveitado em aulas assim são as informações úteis para fazer exercícios. Por exemplo, o teste para identificar a natureza dos pontos críticos pela derivada segunda. Max (2000, 31-10-00, p. 4) comenta que o professor “fez uma relação muita boa na aula. [...] Ele fez uma relação com o nosso delta de Bhaskara do colegial”.

O professor se preocupa com os alunos. Sabe que muitos têm dificuldades com a matéria. Mas ainda que ele pergunte aos alunos durante a aula se eles estão entendendo, o clima da aula não estimula perguntas e discussão. Julio comenta que o fato da turma ser mista restringe ainda mais as perguntas por causa da falta de proximidade entre os colegas.

4.3 Turma do Cursão[19] – Matemática (Licenciatura em Matemática ou Bacharelado em Matemática ou Matemática Aplicada) e Bacharelado em Física, diurno (2001)

A escolha dos três interlocutores foi aleatória, a partir da lista de voluntários, tal como no ano de 1999. Decidi desprezar a diferença entre os cursos dentro do Cursão, já que poucas diferenças significativas resultaram das interações com os alunos dos diversos cursos no ano 2000. Além disso, os alunos do Cursão ainda não definiram seus cursos, dentro das opções disponíveis.

As aulas aconteceram no prédio do Ciclo Básico às segundas e quartas-feiras, das 8 às 10 horas. As aulas de exercícios, sob responsabilidade dos auxiliares didáticos, tiveram lugar às quintas-feiras, também no prédio do Ciclo Básico.

[19] O Cursão na Unicamp é uma turma de alunos ingressantes que pretendem cursar Física, Matemática Aplicada, Matemática ou Licenciatura em Matemática. Os alunos escolhem entre esses cursos somente após as várias disciplinas do ciclo básico.

Faziam parte da estrutura do curso:

- **Os tutores:** O Cursão teve o apoio de dois auxiliares didáticos do Programa de Estágio Docente, PED I (ver nota rodapé n. 8, na p. 20), que ofereceram, além das aulas de exercícios que aconteciam uma vez por semana em horários diferentes, um outro horário para a monitoria.

- **O livro-texto**, no caso o APOSTOL, Tom M. **Calculus**: multivariable calculus and linear algebra with applications to differential equations and probability. 2. ed. New York: Wiley, 1967. v. 2. Trata-se de um tratamento vetorial do Cálculo. A edição em inglês estava disponível na biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências de Computação. A terminologia e a apresentação do APOSTOL se diferenciam da terminologia de outros autores, o que dificultava a busca de informações complementares em outros textos de referência. Os alunos valorizam e ao mesmo tempo reclamam do "rigor" do APOSTOL.

- **A programação de avaliações**, que previa listas (**L**) de exercícios para entregar a cada duas semanas, testes (**T**) sobre as listas a cada duas semanas e duas provas (**PI** e **PII**) no semestre, além de um exame final para quem não atingisse a média de 7,0 nas listas, testes e provas. A nota de aproveitamento era determinada da seguinte forma:

$$\textbf{Média} = (2\mathbf{L} + 2\mathbf{T} + 3\mathbf{PI} + 3\mathbf{PII})/10$$

A média, para o aluno que ficou para o exame final, era igual à média aritmética entre a nota antes do exame e a nota do exame final. O aluno que atingisse uma média final 5,0 era aprovado na disciplina.

O professor comentou que na disciplina de Geometria Analítica, que ele ministrou no primeiro semestre, o aluno que fazia as listas e os testes dificilmente era reprovado na disciplina. No primeiro semestre, embora alguns alunos tivessem desistido da disciplina, entre aqueles que ficaram, somente três tinham sido reprovados.

No final deste semestre (segundo semestre no ano 2001), a estatística de aprovados e reprovados da turma foi a seguinte:

Número de alunos	Aprovados	Reprovados
84	77,4%	22,6%

Seguem-se as "biografias" dos três alunos voluntários no segundo semestre do ano de 2001: Mariana (quatro conversas), Priscila (quatro conversas) e Rodrigo (quatro conversas). Além das quatro conversas individuais, realizamos uma conversa coletiva da qual os três alunos participaram. Todos eles foram aprovados na disciplina Cálculo de Várias Variáveis.

MARIANA (2001)

> A matemática possibilitou ao homem solucionar muitos problemas do cotidiano.
> A principal função da matemática, para mim, é esta.

Mariana é campineira, mas está morando em Rio Claro há uns dez anos. Durante o ano letivo, ela mora em Campinas, perto da faculdade, dividindo um apartamento com uma amiga. Ela vai para casa em Rio Claro nos finais de semana.

Fez o Ensino Médio numa escola particular, fazendo cursinho para o vestibular no segundo semestre no terceiro ano. Prestou vestibular na Unicamp, Unesp, USP e Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Passou em todos e acabou delimitando sua escolha entre Unicamp e Unesp. Decidiu-se pela Unicamp e pelo Cursão, que dava mais opções – Bacharelado em Matemática, Matemática Aplicada e Física, e Licenciatura em Matemática. Ela queria sair de casa e voltar a Campinas. E, como sua mãe é professora na Unesp, falou que seria um pouco constrangedor cursar essa universidade.

A mãe concordou e Mariana começou o Cursão, planejando fazer Bacharelado em Matemática. Mas agora Mariana está gostando do seu trabalho de Iniciação Científica na área de Educação e pensa em ser professora. Ela consegue arrumar tempo para ler e para escrever seu projeto.

Quanto à disciplina de Cálculo, Mariana acha difícil entender a aula do professor. Não sente que exista uma conexão entre o professor e o aluno. Resolveu não assistir as aulas de Cálculo e aproveitar o tempo estudando em casa ou na biblioteca. Mariana pensou em trancar a sua matrícula na matéria logo no início do semestre, ainda que a sua nota média nas três primeiras listas tenha sido 9,9 e nos dois primeiros testes 8,5.

Pensou que seria melhor reprovar do que trancar. Adota então o mesmo esquema de estudos utilizado no primeiro semestre, na disciplina Geometria Analítica, com o mesmo professor. Ela teve sucesso nesta disciplina estudando a partir do livro e recorrendo à monitoria para receber ajuda no trabalho com os conceitos, mais do que na resolução dos exercícios. Neste semestre, Mariana aproveita a monitoria e as aulas de exercícios ministradas pelos auxiliares didáticos e estuda pelo livro, deixando de ir à aula até mais tarde no semestre, quando sente que está precisando das aulas.

Os testes e as provas mudam o ritmo dos seus estudos. Para se preparar para as avaliações, ela costuma refazer os exercícios. No dia do teste ou prova, ela acorda às duas ou três horas da madrugada para estudar. Dá valor ao Coeficiente de Rendimento (CR). Fez a prova substitutiva no Cálculo de Uma Variável para melhorar sua nota na disciplina, sem sucesso.

Gosta de se sentar com um livro de Cálculo e ler: “Eu adoro pegar um exercício que não sei fazer, ficar olhando para o exercício. Gosto de pegar o livro, procurar. Eu gosto de fazer isso”. Também gosta de estudar em grupo, para ajudar os colegas com exercícios e receber ajuda deles. Mariana se preocupa em desenvolver uma compreensão da Matemática, mas às vezes sabe que acaba decorando.

Mariana comentou que “houve muita decepção” com respeito à Matemática ao longo do ano, mas que também acontecera “uma descoberta”: a sua “paixão pelo ensino da Matemática”.

Disciplinas que Mariana cursou no segundo semestre do ano de 2001:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Física II
3. Álgebra Linear
4. MC 102 (Programação em Pascal)
5. Laboratório Física II

PRISCILA (2001)

> Matemática é a arte de criar e lidar com ferramentas (números, matrizes, integral) para simplificar [sic] um problema da vida real.

Priscila é campineira e continua morando em Campinas. Ela tem uma bolsa-trabalho pela qual trabalha 15 horas semanais fazendo serviço administrativo na Computação.

Priscila se lembra que, desde a primeira série, sempre teve aptidão para a área das Exatas. Seu boletim escolar sempre trazia 9 ou 10 em Matemática. O Português e as outras disciplinas eram "mais ou menos". Ela queria saber como as coisas funcionavam. Queria mexer com tecnologia, etc. Comentou: "Da Matemática eu sempre gostei". No Ensino Médio, gostava de ler biografias de pessoas para conhecer o trabalho do pensamento por trás das grandes invenções. Priscila enfatizou: "Adorava isso. Adorava. A vida da pessoa. Como ele fez aquela coisa; um compositor de música, por exemplo. Têm pessoas que são gênios" (entrevista coletiva, p. 22). Priscila vai ajustando aos poucos sua concepção da Matemática. Escreveu (no questionário final) que "Eu sempre tive uma visão mais romântica da Matemática, mas agora na Unicamp vejo o rigor, as técnicas usadas".

Quando Priscila prestou o vestibular, ficou indecisa entre Engenharia Elétrica e Física. Ela disse:

> Eu estava indecisa por causa de mercado de trabalho. Porque a Física não é considerada "profissional". O que acontece é o seguinte: os estrangeiros vêm para cá, montam uma indústria, só montam o produto aqui e a tecnologia fica lá. Então, não precisa do Físico aqui para fazer pesquisa. O engenheiro tem mais campo de trabalho.

Ela prestou Engenharia Elétrica na Unesp e na USP, e Física na Unicamp. Passou em Engenharia Elétrica na Unesp e em Física na Unicamp. Decidiu permanecer em Campinas, onde mora.

Priscila procura programar seus estudos de acordo com o esquema de avaliações de todas as suas disciplinas. Ela gosta dos testes porque sem os testes ela sente que acabaria deixando a matéria acumular até a véspera das provas, quando seria tarde demais para estudar.

Priscila gosta das matérias difíceis, que propõem desafios, fazendo com que você aprenda. Gosta e ao mesmo tempo não gosta do APOSTOL (o livro-texto principal da disciplina de Cálculo de Várias Variáveis). Diz ela: "Sabe quando a compreensão fica total e você pode dizer:

'isso eu aprendi.'? Daí precisa entrar no APOSTOL". Na mesma conversa, ela aponta as dificuldades no trato com este mesmo livro-texto: "Aqui, o APOSTOL é mais difícil. É muito seco. Ele fala uma definição, ponto. Ele não explica. Não dá um exemplo. Você não sabe o porquê [...]" (PRISCILA, 2001, 16/08/01, p. 7).

As dificuldades que Priscila encontra na disciplina de Cálculo continuam na sala de aula, onde ela dificilmente entende as explicações do professor. Priscila até faltou a algumas aulas de Cálculo para estudar outras matérias.

Priscila estuda a teoria e os exemplos nos livros-texto e recorre às listas de exercícios para aprender os procedimentos e as técnicas de resolução dos exercícios que, ela sabe, irão reaparecer em formas semelhantes, senão as mesmas, nos testes. Quando eu perguntei por que ela não procura se aprofundar e aprender mais do que as técnicas exigidas nas listas, ela apontou, meio brincando e meio a sério, a "lei do mínimo esforço" com respeito aos estudos: "Faz aquilo, sem pensar naquilo, nada mais que aquilo".

Disciplinas que Priscila cursou no segundo semestre do ano de 2001:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Física II
3. Álgebra Linear
4. MC 102 (Programação em Pascal)
5. Laboratório de Física II

RODRIGO (2001)

> A Matemática é a ciência que trabalha com números, explorando e investigando outras tantas situações. Simular e resolver casos diversos fazem parte da esfera de trabalho da Matemática.

Rodrigo freqüentou o Ensino Médio na escola pública. Prestou vestibular logo depois, mas não passou para a segunda fase. Fez cursinho e no ano seguinte entrou na Unicamp, no Cursão. Ele sempre gostou da Matemática. Pretende se formar em Licenciatura e na Matemática Aplicada. Tem vontade de dar aulas para alunos do Ensino Médio. Rodrigo, no seu primeiro ano da faculdade, está se adaptando ao ritmo de estudos, que é bem mais puxado do que no colégio.

Logo no começo do seu curso, Rodrigo pensou que não daria conta das matérias; a dificuldade encontrada tinha superado suas expectativas, ainda que ele soubesse que, em universidades de fama como a Unicamp e a USP, nada seria fácil. Rodrigo (2001, 21-08-01, p. 1) comentou: “Tem que viver no caderno da aula. Tem que se disciplinar. Muita matéria para estudar e pouco tempo. Eu acho que isso é o que assusta”.

Às vezes, Rodrigo volta para casa em Brasópolis, Minas Gerais, para o fim de semana. Lá ele faz parte de um grupo de teatro e, durante a celebração dos cem anos da cidade, Rodrigo integrou a coordenação de um desfile. Rodrigo concorda com as duas colegas que também participaram desta pesquisa: a vida do aluno universitário é mais do que apenas o estudo, embora as exigências dos professores, tomadas coletivamente, limitem consideravelmente a liberdade do aluno. A universidade fornece uma oportunidade, além do estudo: a de conhecer novas pessoas e “abrir a cabeça”.

No segundo semestre, Rodrigo ainda está se adaptando aos estudos. Houve uma semana mais pesada do que o normal, em que ele teve três testes, sendo um deles o de Cálculo de Várias Variáveis. Sua preparação para o teste do Cálculo, por várias razões, ficou abaixo do que ele julgava aceitável: não tinha conseguido completar os exercícios recomendados e nem acompanhar o raciocínio do professor nas aulas. Rodrigo tirou nota 7 neste teste, apesar de ter sofrido um “branco” em parte da resolução do problema de máximos e mínimos usando o teste da derivada segunda.

Seus estudos seguem a programação das listas de exercícios, dos testes e das provas. Rodrigo coloca que às vezes deixa de estudar uma matéria até a véspera de um teste, “não porque quero, mas porque às vezes preciso. Como temos muita coisa para fazer, às vezes não sobra tempo e temos que deixar para a última hora”. Quando há teste em uma matéria, Rodrigo deixa as outras de lado. Rodrigo exemplifica com seus estudos para um teste de Física: “Quando tem teste... quando é véspera de um teste em Física, eu esqueço que eu tenho Cálculo. Só fica a *Física na cabeça*”.

Rodrigo está conseguindo acompanhar o Cálculo de Várias Variáveis. Ele se esforça. Não falta à aula e aproveita as monitorias e aulas de exercícios dadas pelos auxiliares didáticos. Rodrigo quer entender a Matemática e sabe que as aulas de exercícios não adiantam muito se ele não tiver conhecimento da matéria da aula.

Disciplinas que Rodrigo cursou no segundo semestre do ano de 2001:

1. Cálculo de Várias Variáveis
2. Física II
3. Álgebra Linear
4. MC 102 (Programação em Pascal)
5. Laboratório de Física II
6. EL 202 (Faculdade de Educação)

UMA AULA FORA DO ALCANCE DO ALUNO
O PROFESSOR
(2001)

O professor ministra aulas expositivas. Segue o livro-texto com representações analíticas e suas representações geométricas são esboços livres para comunicar a idéia geral, sem referência direta a um problema em particular. É comum que a sua aula esteja além do alcance do aluno. O aluno não tem o conhecimento necessário para fazer as associações que o professor busca. Rodrigo (2001) comentou:

> O professor tem um raciocínio muito à frente da gente. Então ele está falando uma coisa, assim... Não é que eu quero que ele dê aula, que seja uma coisa do primário, ou seja, algo básico. Mas eu acho que tem hora que ele vai muito além do que a gente tem na cabeça. (RODRIGO, 2001, 03-09-01, p. 3).

O tratamento vetorial do cálculo pelo professor se ajusta bem às representações e conceitos encontrados na disciplina Álgebra Linear. Como diz Rodrigo (2001, 20-09-01, p. 4-5): "Pelo lado positivo, eu acho que essa maneira como ele dá esse Cálculo mais aprofundado é boa para a gente; mais indicada para alguém que vai fazer Matemática e Física".

Mas sua aula às vezes não engatilha com os conhecimentos do aluno. Priscila (2001), ao descrever uma aula ruim, cita o professor de Cálculo:

> Muitas vezes, sem nem mesmo identificar o tópico da matéria, o professor já prova um teorema; para provar este devemos saber alguns conceitos que ainda não sabemos. Ele atropela a ordem natural das coisas. Resultado: não

aprendemos o conceito e muito menos o teorema. (PRISCILA, questionário final, questões gerais, n. 11).

Ainda que o professor diga ao aluno que ele deve perguntar quando não estiver entendendo, o aluno não se sente à vontade para perguntar, por falta de compreensão.

Mariana (2001) comentou algumas maneiras de compensar a falta de entendimento na aula:

> Desta vez eu peguei um monte de livros. Eu peguei o SIMMONS. Eu gostei muito do GUIDORIZZI (Algumas seções do GUIDORIZZI são parecidas com o APOSTOL.). Estudei bastante no STEWART. Eu acho que, em comparação com APOSTOL, ele é fraco. [. . .] Sim, eu retirei alguns livros. Eu retirei o LEITHOLD. Eu também ouvi falar de SWOKOWSKI. Eu acho que eu vou atrás dele. Eu gosto muito de sentar e ler um livro, estudar um livro. Eu acho que até rende mais do que assistir uma aula do professor. (MARIANA, 2001, 30-08-01, p. 1).

Mariana (2001) fez uma distinção entre o Cálculo do primeiro semestre e o do segundo semestre:

> Eu fiquei interessada na aula de Cálculo I e eu não me sinto interessada na aula de Cálculo II. Isso eu acho que muda muita coisa, porque se eu estou na sala e eu não estou prestando atenção, eu prefiro sair e estudar. Porque o tempo é precioso. Ficar na aula assim para mim não dá. E na aula de Cálculo de Uma Variável eu prestava atenção. Tentava fazer os exemplos. Era muito diferente. (MARIANA, 2001, 17-09-01, p. 9).

4.4 A aula de Cálculo

Quando a aula expositiva está dentro das capacidades do aluno e este consegue estabelecer associações entre o assunto tratado e seus conhecimentos, vale a pena para o aluno assistir à aula e encarar o assunto abordado. A falta de um entendimento geral a respeito do assunto da aula, seja qual for a razão, deixa o aluno com poucas opções. Pelo hábito, ele segue assistindo às aulas, esperando que melhore ou acreditando que algo que será de ajuda na resolução de exercícios da lista (ou cobrado na prova) vai aparecer. Ou, uma vez que o “tempo é precioso”, o aluno opta por não assistir para aproveitar o tempo estudando outras matérias e o

Cálculo fora da sala de aula. Estuda Cálculo no campus ou em casa e se apóia no livro-texto e em outros livros de Cálculo. As dúvidas que aparecem são resolvidas com a ajuda dos colegas.

A maneira pela qual o professor apresenta a "teoria" na sala de aula pode desanimar o aluno mais do que esclarecer a matéria. De acordo com Julio (2000, questionário final, questões gerais, n. 6), "Uma aula com excessiva carga teórica torna-se cansativa e o aluno começa a não prestar mais atenção, podendo comprometer o entendimento da matéria, não saber aplicá-la em algum modelo prático ou mesmo resultar num descaso com a aula". É comum, como nota Julio, que os alunos não prestem atenção durante uma explicação teórica. Alguns conversam entre si e até saem da sala, principalmente se esta explicação for realizada no final de uma aula de duas horas.

A falta de atenção à parte teórica da aula também tem a ver com a dicotomia entre a "teoria" e a "prática". O que é importante para as avaliações são os exercícios, cuja resolução não exige entendimento da "teoria".

Uma aula que não é inteligível por causa da desorganização, que vai muito além dos conhecimentos atuais do aluno ou tem uma carga teórica excessiva (e aparentemente sem importância para o aluno) complica a aproximação entre o aluno e a matéria. De acordo com Maslow (1966),

> it is difficult to see or hear that which is totally uninteresting or boring. It is also difficult to think about it, to remember it, to keep oneself at the job, to stick to it. All the defensive and restrictive powers of the person can be mobilized into action when one is forced by some external pressure to study something totally uninteresting. One forgets, one thinks of other things, the mind wanders, fatigue sets in, intelligence seems diminished. In a word, one is likely to do a poor job unless one is minimally interested in the task and drawn to it. […] For the best learning, perceiving, understanding, and remembering of a person, it is desirable to be interested, involved, to have "a little bit of love" to be at least a little fascinated and draw. (MASLOW, 1966, p. 109-110).

Quando um tópico não corresponde a uma afinidade do aluno e não é atraente, ou seja, quando o aluno é *"indiferente"* ao tópico, é provável que sua interação com o tópico será tipo *racional referente a fins* (tipo ideal de ação de Weber). Neste estudo, encontrei essa "indiferença" nas conversas com os alunos em relação ao seu envolvimento com o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Nas três turmas houve uma abordagem do teorema em termos dos exercícios do livro-texto. Percebi que os conhecimentos dos alunos, de modo geral, não alcançavam a "teoria" dada nas aulas e elaborada nos livros-texto.

Depois que os alunos completaram a parte diferencial da disciplina, perguntei aos interlocutores porque eles tinham escolhido parar, por enquanto, de aprender mais sobre o teorema dos multiplicadores de Lagrange:

> ***Você sabe que existe muito mais para se saber sobre o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Por que você escolheu, pelo menos por enquanto, parar de aprender a respeito?***

É uma questão que já nasce respondida. O aluno, indiferente ao teorema, não encontra razões para se envolver e aprender, para além daquilo que ele considera suficiente para ser capaz de apresentar soluções para os exercícios típicos das avaliações. A interação com o teorema é do tipo *racional referente a fins*, isto é, o aluno seleciona modos de estudo eficientes para alcançar seu objetivo: respostas corretas na prova. O que eu não antecipei foram as indicações que emergem da "leitura" das respostas dos alunos, no contexto das nossas conversas, que remetem à aula de Cálculo.

Existe uma coerência entre as respostas dentro de cada turma, o que indica uma relação entre as experiências vividas na aula de Cálculo e as preocupações e ações do aluno. Embora os alunos tenham se mostrado relativamente "indiferentes" ao teorema dos multiplicadores de Lagrange, suas interações com ele foram perceptivelmente diferentes conforme a turma a que o aluno pertencia. A seguir, são retomadas as respostas dos alunos para a questão a respeito dos multiplicadores de Lagrange citada acima.

- ***Uma aula atenta às sutilezas da matéria (1999)***

Beto (1999)	Falta de razão para estudar mais. Não tem onde aplicar. Mais para frente, na engenharia, antecipo que nós vamos retomá-lo.
Lucas (1999)	Para mim, o método dos multiplicadores de Lagrange não era tão interessante como para você.

Caio (1999) [Sem resposta – não foi perguntado na conversa final.]

No ano de 1999, os alunos mostraram, além do entendimento de como encadear os procedimentos necessários para resolver exercícios típicos, conhecimentos gerais sobre o teorema, o que incluiu uma mescla de interpretações analíticas e geométricas. As razões para não se aprofundar mais sobre o teorema estão, no caso de Beto, centradas na utilidade atual dos conhecimentos em questão e, no caso de Lucas, na simples falta de interesse. No contexto das conversas, Beto e Lucas antecipavam que encontrariam os multiplicadores de Lagrange no seu curso. É notável que as suas respostas não fizeram referência às provas e às notas da disciplina.

- ***Uma aula sem rumo (2000)***

André (2000) É o mais óbvio. Já passou a prova.

Max (2000) Porque os poucos exercícios que eu fiz, a parte que eu gravei, esta parte aqui [a montagem do sistema de equações com derivadas parciais], resolvia.

Julio (2000) Por falta de tempo, foi um dos maiores fatores. Passou os multiplicadores de Lagrange e já veio outra coisa. Também tinha outras matérias. Não dava para parar para continuar com os multiplicadores de Lagrange. Daí, acabou passando.

No ano 2000, o conhecimento adquirido era principalmente analítico, diretamente relacionado com a resolução dos exercícios do livro-texto. As razões para não se aprofundar mais com os multiplicadores de Lagrange estão centradas no cumprimento dos conteúdos da disciplina. As respostas fornecidas pelos alunos indicam que seus estudos foram utilitários em termos de fazer a prova e ser aprovado na disciplina. Quando a prova passou, não existia razão para saber mais sobre os multiplicadores de Lagrange.

- ***Uma aula fora do alcance do aluno (2001)***

Priscila (2001) Porque não tenho dado conta nem do que eu tenho pra fazer, imagina o resto.

Rodrigo (2001)	Porque existem outros assuntos a serem tratados com mais urgência.
Mariana (2001)	Porque o professor já introduziu outra matéria.

No ano de 2001, as razões para não saber mais sobre o teorema, além de centrada nos estudos utilitários em relação às listas de exercícios e avaliações (cobradas quinzenalmente) estão carregadas com uma ansiedade que os alunos sentiram. Uma aula difícil de entender e uma pressão pelo professor em termos das avaliações e da nota contribui para essa ansiedade. Saber fazer os exercícios sobre os multiplicadores de Lagrange, no qual o conhecimento se restringe principalmente aos procedimentos analíticos, equivalia a um meio eficiente para obter alívio dessa ansiedade. Passada uma avaliação, havia outra matéria e mais exercícios para resolver.

As interações com os multiplicadores de Lagrange que apareceram nas interlocuções apontam, de modo geral, para uma *aprendizagem afastada*. A relação que o aluno desenvolve com o teorema é utilitária e tem por propósito principal a reprodução de procedimentos-padrão. O próximo capítulo examina em mais detalhes, não um conteúdo em si, como os multiplicadores de Lagrange, mas as tendências que o aluno desenvolve em sua interação com a Matemática. Apresento regularidades que aparecem nas preocupações e nas ações de Lucas (1999) e Rodrigo (2001), e que isolam e acentuam tendências que fundamentam, respectivamente, a construção dos conceitos de *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada*.

Lucas e Rodrigo

5

No Cálculo você pode viajar.

Lucas (1999)

Você não aprende para adquirir o conhecimento.
Você aprende para fazer a prova. É aquilo que vai mandar em você. [...]
Parece uma coisa mecanizada.

Rodrigo (2001)

Através de recortes das conversas com Lucas (1999) e Rodrigo (2001), apresento neste capítulo uma aproximação inicial à conceituação de aprendizagem como a relação que o aprendiz desenvolve com o conhecimento. O propósito do capítulo é mostrar, a partir de tendências do aluno na sua interação com a Matemática, a manifestação de algumas das características utilizadas na construção dos tipos ideais de aprendizagem.

A análise destaca Lucas e Rodrigo, dois dos nove interlocutores principais, por causa das suas características comuns e, principalmente, por causa do contraste entre eles. Os dois são habilidosos, têm interesse na Matemática e obtiveram boas notas na disciplina Cálculo de Várias Variáveis. Eles se expressam com fluência e articulação, dando-se a conhecer como pessoas e como alunos, e possibilitando ao interlocutor compreender as suas relações com a Matemática. Mas percebe-se, a partir dessas semelhanças, duas tendências diferentes nas suas interações com a matéria. Lucas, em determinadas ocasiões, interage com a Matemática de uma forma que indica que ele se identifica com a matéria e relaciona-a com suas outras experiências. Sua personalidade se manifesta quando fala sobre as estratégias que ele desenvolve para solucionar problemas. Rodrigo, por sua vez, freqüentemente se preocupa em como lidar com a Matemática em função das avaliações na disciplina. Desenvolve um conhecimento que segue as definições, os teoremas e as técnicas conforme o desdobramento da matéria pelo professor e que é interpretado por Rodrigo nos mesmos termos e maneiras elaborados pelo professor e pelos autores dos livros-texto.

Era comum que Lucas encontrasse no Cálculo "problemas", desafios ou inquietudes que despertavam sua curiosidade de tal maneira que ele procurava resolvê-los, superá-los ou investigá-los. Essas interações pontuais com a matéria se aproximavam de dois tipos de ação: *cognitiva referente a valores* e *por afeto positivo*. Rodrigo, por sua vez, de modo geral, mostrou preocupações e estratégias de estudo que, quando isoladas, se aproximavam das ações do tipo *racional referente a fins*, *por hábito* e *por afeto negativo*.

Lucas possui confiança em si mesmo para abordar e resolver problemas não-típicos e motivação para compreender e expressar-se (*necessidade de crescimento referente a compreensão*), encontrando no Cálculo áreas de interesse e afinidade. Rodrigo, por sua vez, em termos da disciplina de Cálculo e com base na abordagem do professor, desenvolveu uma tendência a buscar uma confiança pontual para lidar com as exigências tanto da matéria quanto do professor, através de adaptações nos seus hábitos e rotinas de estudo (*necessidades de segurança*).

Na tabela 5-1, a seguir, faço referência a Lucas e Rodrigo e a suas notas na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis. Alerto o leitor para o fato de que os componentes sócio-psicológicos presentes na tabela correspondem a recortes que acentuam tendências que mostram como os alunos direcionam suas ações por razões diferentes: *ação cognitiva referente a valores* associada com uma curiosidade desvinculada de preocupações a respeito das avaliações e *ação racional referente a fins* associada com uma certa insegurança a respeito das avaliações.

ALUNO	COMPONENTES SÓCIO-PSICOLÓGICOS		NOTA
	Ação (Fundamentado em Weber)	**Necessidades psicológicas** (Fundamentado em Maslow)	
Lucas	**Cognitiva referente a valores e por afeto positivo**	**Necessidade de crescimento referente a compreensão**	**7,0**
Rodrigo	**Racional referente a fins, por hábito e por afeto negativo**	**Necessidade de segurança**	**9,1**

Os componentes sócio-psicológicos nesta tabela explicitam para Lucas, sua tendência de se envolver com o Cálculo de forma desvinculada das avaliações e, para Rodrigo, sua tendência diretamente vinculada às avaliações.

Tabela 5-1

As relações que Lucas e Rodrigo desenvolvem com a Matemática são exemplificadas pelas respostas que deram a um exercício do questionário final da pesquisa, respondido em casa (figura 5-2). Eles resolveram o exercício (em duas partes) depois de encerrados seus estudos de cálculo diferencial na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis. Lucas recebeu o exercício no fim do semestre e Rodrigo no meio do semestre [nota: o título desta seção do questionário para Lucas foi "Conceitos de Cálculo" e, para Rodrigo, "Problemas Matemáticos"].

Explique como você pode achar a distância entre o ponto P_0 e a curva. Justifique.

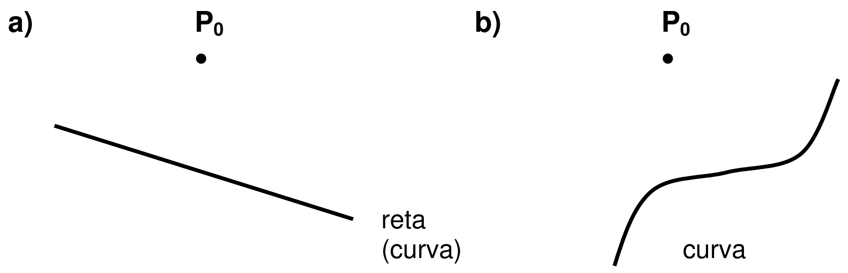


Figura 5-2

Este exercício foi proposto para os alunos por causa da variedade de respostas que ele permite antecipar, uma vez que:

a) os exercícios no livro-texto da disciplina Cálculo de Várias Variáveis e os exemplos na sala de aula tratam de situações envolvendo distâncias mínimas e máximas com o teorema dos multiplicadores de Lagrange;

b) problemas que envolvem distância de um ponto a uma reta são tratados no Ensino Médio; e

c) o enunciado do problema é propositadamente aberto, sem coordenadas para o ponto $\mathbf{P_0}$ nem equações para as curvas.

Lucas utilizou o método dos multiplicadores de Lagrange para tratar os dois problemas de uma só vez. Ele comentou que um outro exercício do questionário era "semelhante, e sua compreensão ajuda na resolução deste exercício" [O enunciado do outro exercício: Encontre a menor e a maior distância da origem à curva $y = x^3 + 1$. Ou, ache os máximos e mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ com o vínculo $g(x, y) = y - x^3 = 1$]. Lucas também fez referência a uma "resolução indireta", pela qual ele interpreta o problema em três dimensões, definindo as funções f e g em duas variáveis:

> A distância pode ser achada através da solução do sistema de Lagrange envolvendo:
>
> • $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad \leftarrow \quad P_0 = (x_0, y_0)$, função que dá o quadrado da distância de P_0 a um ponto qualquer (x, y).
>
> • $g(x, y)$ = curva, função que seria o vínculo pelo qual minimizaríamos f.
>
> É preciso saber "transcrever" o problema do plano para o espaço, ou seja, tratando a questão [em três dimensões e não em duas]. "Resolução indireta".

Lucas resolveu os dois exercícios de uma vez, utilizando um princípio que os dois exercícios compartilham. É possível que a variedade de experiências que Lucas teve com os multiplicadores de Lagrange (as aulas do professor, os exercícios do livro-texto, as provas, as conversas e os exercícios deste estudo desenvolvido pelo pesquisador, o seu projeto de Cálculo e o seu projeto de Iniciação Científica) tenha influenciado seu método de resolução.

Rodrigo, por sua vez, utilizou fórmulas de distância:

a) No caso da reta, baixa-se a perpendicular e calcula-se seu comprimento através da relação*:*

$$d_{P_0,r} = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$ onde A e B vêm da equação da reta.

b) Para calcular a distância de P_0 à curva, deve-se especificar qual o ponto na curva em questão e aplicar a distância entre dois pontos:

$$d_{P_0,r} = \sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2}$$

Rodrigo resolveu cada um dos exercícios preservando suas características particulares e utilizando fórmulas apropriadas. Para Rodrigo, as experiências com o teorema dos multiplicadores de Lagrange incluíram as aulas do professor, os exercícios do livro-texto, as provas e as conversas e exercícios deste estudo desenvolvido pelo pesquisador (que foram menos ricas do que as conversas mantidas com Lucas). É possível que Rodrigo não tenha usado o método de Lagrange em parte por causa do título “Problemas Matemáticos” e por ter relativamente pouca experiência com o teorema.

Além deste exemplo específico, Lucas e Rodrigo demonstram tendências para trabalhar com a Matemática de formas bastante distintas. Lucas encara um exercício procurando e analisando as características do próprio problema, para entender do que se trata. Procura extrair o método de resolução de dentro do próprio problema, interpretando as relações matemáticas que compõem os procedimentos lógicos ou as técnicas de resolução. Rodrigo, por outro lado, procura as características do problema para categorizá-lo, buscando os métodos adequados para resolvê-lo. O método de resolução “vem de fora”, já que ele encaixa o problema nos procedimentos aprendidos, respeitando seu tipo ou categoria.

A seguir, apresento recortes das conversas, estudos e trabalhos de Lucas e Rodrigo com o propósito de demonstrar como desenvolvi, a partir desses, a base para a construção dos tipos ideais de aprendizagem. Os recortes que apresento são propositadamente unilaterais com o intuito de revelar características de uma tendência na interação entre o aluno e a Matemática.

Utilizo, além dos recortes, “caixas de texto” (por exemplo, ver p. 80) que contêm anotações que julgo pertinentes à tipificação das aprendizagens; tais anotações se referem às preocupações e às ações do aluno e são coerentes com os aportes teóricos e a conceituação de aprendizagem como uma relação. Algumas destas caixas destacam comentários dos aportes teóricos[20], outras caixas comentários dos alunos e outras ainda comentários do pesquisador.

5.1 Conversas com Lucas

Lucas adquiriu gosto pela Matemática nos seus estudos individuais para o vestibular. Ele começou a reconhecer e compreender as inter-relações dos conteúdos matemáticos. Foi um contraste com a Matemática que ele encontrava no Ensino Médio, quando os conteúdos eram apresentados e estudados de forma isolada. Esse gosto pela Matemática foi ainda mais estimulado pelo uso de um software gráfico na disciplina Cálculo de Uma Variável, no seu primeiro semestre da faculdade, e no Cálculo de Várias Variáveis, no segundo semestre. Lucas afirma que, como ele sempre enxerga os problemas geometricamente, a disponibilidade do software em casa facilita suas investigações e serve para despertar e satisfazer algumas das suas curiosidades.

Lucas fechou o segundo semestre com média 7,0 na disciplina Cálculo de Várias Variáveis, sendo o 21º colocado numa turma de 55 alunos. A nota média da turma foi 5,4 com mediana 6,2 (fonte: notas afixadas na porta do professor).

Lucas, em termos gerais, é um aluno que estuda Cálculo porque tem interesse na matéria em si. Ele comentou que, embora seu curso seja o de Engenharia Química, o Cálculo é a disciplina que ele mais gosta. Lucas escolhe se aprofundar em alguns tópicos da aula, levando em consideração tanto as preferências do professor quanto os assuntos que tocam suas afinidades. Ele estuda Matemática sem se importar muito com suas notas. Tende a apropriar-se do conhecimento através de ações centradas na compreensão dos exercícios e problemas, na investigação, nas justificações e na criatividade.

Apresento aqui recortes das conversas que tive com Lucas. Tais recortes estão centrados na sua tendência a se envolver com o Cálculo de forma significativa e, da perspectiva da sua relação com o conhecimento, servem como base para a construção do tipo ideal de aprendizagem que denomino *aprendizagem pessoal*. É evidente que essas interações aconteciam desvinculadas de preocupações com respeito a sua nota na disciplina.

---

[20] Neste capítulo, recorro, entre outras, a citações dos trabalhos de Maslow referentes à auto-atualização por entender que a *necessidade de crescimento referente a compreensão*, que conceitualizo neste estudo em relação à aprendizagem, também leva tais caracterizações.

5.1.1 O ritmo da matéria

Falando com convicção, Lucas aponta que, ao chegar à universidade, a mudança mais notável diz respeito ao ritmo dos estudos em todas as disciplinas, em comparação com o colégio. O processo através do qual você chega ao conhecimento também é diferente. No Ensino Médio, Lucas diz que aprendeu apenas o que foi dado na sala de aula, contando que foram poucas as vezes em que ele teve que folhear o livro em casa. As matérias do Ensino Médio consistiam de informações particulares e isoladas. Na faculdade, as matérias consistem de informações mais gerais. Lucas coloca que, “Para entender, você tem que fazer aplicações. Precisa de tempo. A abstração é mais complicada. Leva mais aulas para assimilar. Na universidade, você tem que ter mais tempo para pensar. Tem que se acalmar”. Lucas exemplificou dizendo que leva quatro encontros para entender um conteúdo:

- no primeiro encontro (**Sombra**), a matéria fica no escuro, sem muita clareza;
- no segundo encontro (**Amedrontamento**), o aluno começa a mexer com a matéria desconhecida e receia não entender;
- no terceiro encontro (**Dificuldade**), trabalha, encontrando significados a duras penas; e
- no quarto encontro (**Entendimento**), o aluno consegue compreender o sentido do novo tópico, enxerga as relações e a lógica subjacente à matéria.

A matéria está andando, diz ele, e você precisa de esforço próprio. Mas, ao mesmo tempo, Lucas não sentiu muita pressão para correr atrás dos estudos, comentando: “No Cálculo de Várias Variáveis meu comportamento era tranqüilo. Fui levando sem muitos exercícios. Jogava bola ou saía em vez de estudar. Dediquei-me na sala de aula”. (LUCAS, entrevista final 15-03-00, p. 3).

Mesmo achando o ritmo das matérias na faculdade puxado, Lucas encontrou nas aulas de Cálculo espaço e tempo para encarar aquilo de que a disciplina trata. Gostou do jeito do professor, que aponta as sutilezas do assunto abordado.

5.1.2 A primeira prova – malandragem

Em agosto, o primeiro mês do semestre, Lucas comentou: “Estava descobrindo sozinho o Cálculo. O assunto do dia não era meu primeiro interesse”. Não estudou muito para a primeira prova, acrescentando que faltou a algumas aulas por causa de doença (LUCAS 1999, 15-09-99, p.1-2). Ele chegou a algumas respostas na prova sem saber bem o que estava fazendo. Por exemplo, no segundo item na prova:

> **2. Considere uma placa metálica situada no plano *xy* cuja temperatura é dada por $T(x, y) = x^2y + x$.**
>
> **a) Calcule a taxa de variação instantânea da temperatura no ponto (3, 2) na direção do vetor (2, 3).**
> **b) Para o ponto (3, 2) encontre a direção para qual a taxa de variação é mínima e dê o valor desta taxa.**
> **c) Encontre as direções em que a taxa de variação é zero, partindo de (3, 2).**

O exercício utiliza uma função de duas variáveis, o vetor gradiente e uma direção. Lucas comentou que isso “não era tão claro na hora da prova, somente depois. Depois eu vi minha prova na sala do professor, eu estudei. Na prova, não sabia que tinha que expressar a direção como sendo um vetor unitário”.

Segue-se a resolução tal como desenvolvida por Lucas na prova, acompanhada dos seus comentários durante a nossa conversa de 15-09-99:

Parte 2 a)

$$\nabla T(3, 2) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,2),\ \frac{\partial T}{\partial y}(3,2)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,2) = 2xy + 1 \,\big|_{(3,\,2)} = 2\cdot 3\cdot 2 + 1 = 13$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = x^2 \,\big|_{(3,\,2)} = 3^2 = 9$$

$$\nabla T(3, 2) = (13, 9)$$

$$D_{(2,\,3)}T = \nabla T(3, 2)\ (2, 3)$$

$$= (13, 9)\cdot(2, 3)$$
$$= 26 + 27$$
$$= 53$$

> Na questão, as palavras "taxa de variação instantânea" deram uma dica para derivar. Não é bem como o professor fala. É mais formal. Lembrei algumas coisas, mas fiz a prova de malandragem. O vetor de direção, eu lembrei da disciplina Geometria Analítica. O produto escalar de dois vetores dá um número e a questão pede um número. Mas não sabia que era o vetor unitário na dada direção. Só depois eu reparei na temperatura, nos graus. A superfície tem temperatura e posição, graus por centímetro. Então, tem que ser unitário para dar uma taxa por unidade, por centímetro.

Lucas, em retrospectiva, procura, no próprio problema, justificativas para os procedimentos adotados.

Lucas deixou a **Parte 2 b)** em branco, comentando:

> Não fiz. Não sabia como fazer. Agora sim. Tem que ser o sentido oposto. A questão não está bem escrita, "encontre a direção" para qual a taxa de variação é mínima. Deveria ser "sentido". Acha-se o produto escalar para o máximo, que seria onde o coseno theta, theta sendo o ângulo entre os vetores gradiente e unitário, é máximo. O mínimo seria o oposto.

Para a **Parte 2 c)**, Lucas escreveu:

$$\mathrm{Du}T = 0$$
$$\nabla T(3, 2)\cdot \mathrm{u} = 0$$
$$(13, 9)\cdot(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$$
$$13\mathrm{a} + 9\mathrm{b} = 0$$

> Era malandragem. O produto escalar é igual zero. Então o gradiente vezes o vetor (a, b) dá zero. Obtive uma equação de uma reta, mas não sabia o que representava. Agora sim. É noventa graus, é normal ao gradiente, o que é o máximo. Poderia ir nas duas direções [ao longo de um vetor normal ao vetor gradiente].

> **Malandragem.** Lucas usa a palavra *“malandragem”* como uma autocrítica, indicando que ele está construindo uma resposta a partir das fórmulas e dos procedimentos, com base nas dicas encontradas nas palavras-chave e nos seus conhecimentos prévios a respeito dos procedimentos, mas não sabe bem o que está sendo tratado no exercício em si. Entendo que isto faz parte do processo de decifrar e compreender o sentido de informações simbólicas.

Lucas (1999, 15-09-99, p. 1) diz: “Depois da prova eu peguei o livro e vi que tem três ou quatro exemplos semelhantes à questão 2”.

Isto exemplifica uma atitude frente às avaliações segundo a qual os erros são parte de uma espécie de processo de “tentativa e erro” que caracteriza a aprendizagem. Lucas aproveitou seu erro para aprender o que ele ainda não sabia bem.

5.1.3 O teorema dos multiplicadores de Lagrange

Durante o nosso encontro no dia 5 de outubro, entre outras atividades sobre o teorema dos multiplicadores de Lagrange, eu fiz uma série de perguntas pontuais para Lucas sobre o teorema, tal como encontrado no Edwards e Penney (1997), o livro-texto principal para a disciplina.

O teorema dos multiplicadores de Lagrange

para uma função de duas variáveis e um vínculo

Sejam $f\ (x,\ y)$ e $g\ (x,\ y)$ funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se o máximo (ou o mínimo) de f sujeito à condição

$$g\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y}) = 0$$

ocorre em um ponto P onde $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$, então

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

para algum λ.

DALE: Por que as derivadas parciais têm que ser contínuas para f e g?

LUCAS: Contínua para não ter problemas. Especificamente, não sei, mas é algo comum nos enunciados de teoremas [no Cálculo].

DALE: Por que $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$?

LUCAS: O sistema [de multiplicadores de Lagrange] não funcionaria.
$\nabla f = \lambda \nabla g$ daria zero, e não diria nada.

DALE: Por que $\nabla f = \lambda \nabla g$?

LUCAS: [Olhando e pensando calmamente] Isso eu não sei, não.

A resolução dos exercícios e os problemas que Lucas encontrou nos seus estudos não exigiram um conhecimento sobre por que os vetores gradientes, nesta situação, têm de ser paralelos. Ele podia montar e resolver exercícios pelas técnicas algébricas do método de Lagrange sem necessidade de entrar na teoria. Lucas era capaz de identificar problemas de otimização tratáveis pelo teorema através de palavras-chave e de relações geométricas. Possui os conhecimentos adequados para fazer uma análise geométrica das relações entre o vínculo e a função a ser otimizada.

A relação entre vetores gradientes é uma das principais representações associadas ao teorema dos multiplicadores de Lagrange. Conversando com Lucas em março do ano seguinte, alguns meses depois de ele terminar a disciplina Cálculo de Várias Variáveis, perguntei de novo sobre a relação $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$:

> **Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo ou mínimo da função $z = f(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y)$ = constante, então neste ponto os vetores gradientes de f e g são paralelos, ou seja $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$. Explique por que (Lista de questões para conversa final, p.2).**

Lucas, depois de pensar um tempo, disse: "Condição... Mas por que... ocorre assim? Lembro que você me perguntou isso antes. Não sabia e ainda não posso dizer". (LUCAS, conversa final 15-03-00, p. 1).

Em nossa conversa final, pedi, através de uma lista de opções, que Lucas colocasse em ordem de prioridade os elementos que ele tinha utilizado para desenvolver seu entendimento do método dos multiplicadores de Lagrange. Da lista fornecida, Lucas indicou sete das opções e acrescentou uma que não aparecia na lista:

- Aulas [do professor]
- Conversas com [o professor]
- Tirando dúvidas (com quem?)
- Software *Mathematica*
- Fazendo exercícios
- Tutores
- Sarau
- Fazendo a prova
- Conversa com [Dale]
- Conversa com colegas
- Estudo do livro-texto de Edwards e Penney (como?)
- Estudo por outro livro
- Conversa com outro professor
- Projeto
- Outro

Lucas agrupou suas escolhas em três níveis de prioridade. Segundo ele, desenvolveu uma compreensão a respeito dos multiplicadores de Lagrange:

1) conversando com Dale, trabalhando no Projeto e ***pensando sozinho***;
2) nas aulas do professor e fazendo a prova; e
3) com o software *Mathematica*, fazendo exercícios e lendo e resumindo o Edwards e Penney.

Lucas acrescentou o item "pensando sozinho", que é indicativo da sua iniciativa, do seu interesse e compromisso com a Matemática. Além disso, como ele mesmo coloca, procura relacionar o que ele aprende com o Curso de Engenharia Química (EQ). Lucas explica:

> Penso no que é importante para a Engenharia Química ou como cada coisa cabe na Engenharia Química referente à disciplina EQ 101[21] (aulas ou situações mais relacionadas com EQ). No Laboratório de Química, por exemplo, o professor fala como o laboratório se relaciona com a EQ e com a indústria.

Quando perguntei especificamente sobre qual seria a importância dos multiplicadores de Lagrange, Lucas resondeu: "Genericamente, máximos e mínimos. No dia-a-dia do estudante ou do profissional da Engenharia Química, a maioria dos problemas de máximo e mínimo são vinculados. Por exemplo, maximizar produção e manter gastos atuais de energia". (LUCAS, conversa final, 15-03-00, p. 2).

Os meios de aprender sobre o método dos multiplicadores de Lagrange levados em consideração nas outras conversas com Lucas apontam para uma aprendizagem centrada e dirigida pelas ações do aluno dentro e fora do contexto das oportunidades e das delimitações definidas pelas atividades desenvolvidas pelo professor.

Lucas "encara a matéria" e reconhece os gostos do professor na sala de aula. Ele lê e resume o livro-texto, faz os exercícios "mais representativos"[22] das listas de exercícios fornecidas (mas não cobradas) pelo professor. Sua interação com os multiplicadores de Lagrange inclui a resolução de exercícios do livro-texto e de problemas no Projeto, a reflexão sobre as relações entre o método e o seu Curso e as conversas e exercícios propostos por esta pesquisa.

Quando perguntei: "Você sabe que existe mais informação sobre 'Lagrange'. Por que você escolheu, pelo menos por enquanto, parar de entender mais?", Lucas começou a explicar francamente: "Olhando o curso de Engenharia Química como um todo..." De repente, Lucas parou de falar e refletiu sobre a palavra *escolheu* que usei na pergunta, e disse: "Escolheu, uma palavra certa, genuína". Retornou ao seu pensamento:

> O curso básico do primeiro ano tem muitas disciplinas; portanto, a dedicação mais profunda seria difícil. Depende do gosto. Para mim, o método dos multiplicadores de Lagrange não era tão interessante como para você. (LUCAS, conversa final 15-03-00, p. 2).

Afinidades. Cada aluno tem suas próprias afinidades e faz suas escolhas. O aluno provavelmente irá se aprofundar em um tópico, caso tenha uma afinidade relacionada com ele.

[21] Introdução a Processos e Indústrias Químicas (EQ 101). Ementa: O que é Engenharia Química? Desenvolvimento de um Processo. Ciências da Engenharia Química. Operações Unitárias. Indústria Química (**Catálogo dos cursos de graduação**, Unicamp, 1999).

[22] Na seção 5.1.4 Lucas descreve o que são os exercícios "mais representativos".

‘5.1.4 A segunda prova – abrindo mão

Lucas estudou pouco para a segunda prova, que aconteceu depois de um feriado prolongado. Lucas comentou que deveria ter estudado, mas não estudou, indicando o quanto é difícil estudar nas férias. Voltando do feriado, Lucas se dedicou mais a um relatório de Química e a outros problemas e não chegou a estudar como deveria para a prova de Cálculo. Lucas comentou: “Não fiz muito. Alguns exercícios em casa, o que teve na aula e alguns do livro. Eu selecionei alguns. Não fiz todos. Fiz em cima da hora para a prova.”

O aluno, devido ao ritmo da disciplina, às outras disciplinas e às atividades fora dos estudos, às vezes tem que abrir mão do tipo de estudo que costuma realizar ou que ele sente que deve realizar para dar conta da matéria. Perguntei ao Lucas como ele havia selecionado os problemas com os quais trabalharia. “Pela intuição”, respondeu ele,

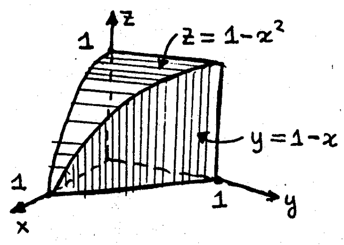
> Pelo que o professor fez na aula. Pela maneira como ele aborda os tópicos. E eu peguei os exercícios mais representativos do livro. Tem, em geral, três tipos de exercícios:
>
> - exercícios prontos, com fórmula, etc. e você só tem que fazer a conta;
> - exercícios onde você tem que dar o primeiro passo, achar a função e depois só aplicar e fazer as contas; e
> - tem os mais representativos, onde você tem que elaborar o modelo na cabeça. Todo o processo. Exige mais da sua cabeça, e depois resta fazer as contas. Isto é mais representativo. Por exemplo, achar a região no plano, depois no espaço, depois os extremos e montar com uma integral tripla. (LUCAS 1999, 26-10-99, p. 1).

Escolha pelo aluno: Lucas, em vez de fazer todos os exercícios da lista (que não vale nota), decide quais resolver, baseado em parte na aula do professor, na apresentação do conteúdo no livro-texto, nos seus interesses e nos seus outros compromissos.

Abrir mão dos estudos também significa abrir mão de conhecimentos e da resolução de exercícios na prova. Por exemplo, Lucas deixou sem completar o exercício 3 da segunda prova.

Exercício 3. A figura ao lado mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} f(x,y,z)dzdydx$$



Reescreva essa integral como uma integral interada equivalente em três outras ordens possíveis.

Lucas comentou:

> O exercício era meio mecânico. Não sabia fazer. Troca de ordem. Algumas pessoas sabem a técnica e vão trocando sem ligar o processo à figura e sem saber o que está sendo feito em termos da figura. Eu gosto de pensar num problema e ver do meu jeito. Às vezes é difícil mudar para um outro jeito de ver, uma outra ordem de integral. Eu comecei fazendo a álgebra para mudar, mas não consegui ver o que estava acontecendo na figura e deixei sem fazer o exercício na prova. (LUCAS, 26-10-99, p. 1).

Esse tipo de problema não agradou Lucas, que descreveu o exercício como sendo "meio mecânico", ou seja, você pode resolvê-lo pela manipulação algébrica sem muito significado. Embora Lucas tivesse uma idéia de como montar uma integral tripla para encontrar um volume "do jeito dele", não conseguiu "ver" um outro jeito.

5.1.5 O "exercício do tubarão"

Nossa conversa sobre o "exercício do tubarão", um exercício do livro-texto, fornece vários indícios de uma aprendizagem envolvida com, e próxima da matéria. Foi na terça-feira, dia 28 de setembro, alguns dias depois desse exercício ter sido apresentado por dois tutores no sarau[23]. Os tutores explicaram como o problema podia ser resolvido com o auxílio de recursos gráficos. Eu gostei do problema porque ele trabalha a diferenciação e a integração de uma maneira à qual os alunos da disciplina não estavam acostumados. Além disso, os tutores aproveitaram a combinação de comandos gráficos para representar geometricamente alguns aspectos do problema com um gráfico 3-d, um gráfico de curvas de nível e um gráfico do campo gradiente. Embora os alunos já tivessem trabalhado com o vetor gradiente e sua representação gráfica, o campo gradiente era algo novo para eles. O gráfico 3-d e o gráfico das curvas de nível eram comuns no livro-texto e na lousa das aulas do professor.

Eu aproveitei este trabalho para uma rodada de conversas com os três alunos da pesquisa. Beto e Caio assistiram o sarau, mas Lucas não. Na conversa com Lucas, eu trouxe uma cópia da questão escrita a mão (EDWARDS; PENNEY, p. 76, exercício n. 26; na lista de exercícios e o tópico do sarau):

O exercício do tubarão

Suponha que a concentração de sangue no oceano, no ponto (x, y)**, seja dada por**

$$f(x, y) = Ae^{-k(x^2+2y^2)},$$

onde *A* **e** *k* **são constantes positivas. Um tubarão nada sempre na direção de** ∇f**.**
Mostre que sua trajetória é uma parábola $y = c\,x^2$**.**
[Sugestão. Mostre que a condição de que $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ **seja múltiplo de** ∇f **implica**

$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2y}\frac{dy}{dt}$**. Antidiferencie então a equação.]**

Eu perguntei ao Lucas como ele "encaixaria" o problema, ou seja, como ele abordaria o problema em termos gerais, não passo-a-passo. Lucas leu o problema sem pressa e, falando em voz alta, analisou as informações contidas no problema, encontrando coisas que ele sabia e outras que não conhecia. Ele procurou identificar as características do exercício e tentou entender o que estava sendo pedido:

[23] O Sarau da Quinta era uma "atividade semanal extra de aproximadamente uma hora de duração no qual professores, estagiários, tutores e alunos apresentam, com recursos multimídia, módulos criados com [o software] *Mathematica*, de forte apelo visual, para estimular a discussão de tópicos do conteúdo de Cálculo". (SARAU, 2004).

- O que é $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$?
- Primeiro, a função. Tenho uma função, não me interessa qual é em particular.
- Objetivo. Direção de ∇f. O caminho em que a função cresce mais rapidamente. O caminho equivale a uma parábola [como está escrito no enunciado do problema].
- Primeiro ∇f, para que aparece? [pensando] Procuro alguma coisa que me chame a atenção.
- Lembro-me que o vetor gradiente aponta na direção do maior crescimento, como na aula, o problema da chapa quente e da formiginha andando na direção mais fria.
- Eu ainda não mexi com uma trajetória.
- Sempre parei achando a direção a partir de um ponto.
- Aqui tem direção ponto a ponto.
- A sugestão dada parece parametrização. Tem *t*. Geralmente quando tem *t* como variável é parametrização. É malandragem de novo [referência a uma conversa anterior].
- [Lucas escreveu] $\nabla f = (x(t), y(t))$ [parou para pensar] A variação, eu preciso de todos os instantes.
- [olhando a expressão $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$] De onde veio isso?
- Por que $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ tem que ser múltiplo de ∇f?

Lucas mostra, nesta seqüência de pensamentos, algumas características que são pertinentes à pesquisa. Este recorte é coerente com as falas e os trabalhos de Lucas nas nossas conversas ao longo do semestre. Tiro daqui, das colocações de Lucas, as falas que caracterizam a sua relação com a Matemática.

Primeiro, Lucas analisou o exercício com calma e curiosidade, sem pressa, sem conclusões precipitadas.

Segundo, Lucas abordou o exercício procurando idéias gerais nas informações dadas. Focalizou sua atenção no cerne do problema. Por exemplo:

- Primeiro, a função. Tenho uma função, não me interessa qual é em particular.

Terceiro, Lucas anotou o que era claro, familiar, no exercício. Procurou comparar as informações disponíveis com suas experiências, fazendo um "registro" de fatos e relações que precisavam ser esclarecidos.

- O que é $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$?
- Eu ainda não mexi com uma trajetória.

Quarto, Lucas destacou o que ele conhece, elaborando significados do conhecimento e tentando "abrir" seu pensamento para estabelecer conexões com as informações tanto conhecidas quanto desconhecidas. Por exemplo, Lucas associa o vetor gradiente de f com a direção na qual a função cresce mais rapidamente:

- Objetivo. Direção de ∇f. O caminho em que a função cresce mais rapidamente. O caminho equivale a uma parábola [como está escrito no enunciado do problema].

Depois disso, Lucas, ainda em busca de relações entre o vetor gradiente e o exercício, "traz de volta" a associação entre o ∇f e a imagem que ele "formulou" na sala de aula, quando o professor falou sobre gradientes utilizando uma imagem mnemônica: uma formiga que procura sair de uma chapa quente caminhando na direção mais fria.

- Primeiro ∇f, para que aparece? [pensando] Procuro alguma coisa que me chame a atenção.
- Lembro-me que o vetor gradiente aponta na direção do maior crescimento, como na aula, o problema da chapa quente e da formiguinha andando na direção mais fria.

Quinto, Lucas procurou descobrir o sentido do exercício através das palavras e símbolos-chave. Por exemplo:

- A sugestão dada parece parametrização. Tem t. Geralmente quando tem t como variável é parametrização. É malandragem de novo [ver a "caixa de texto", p. 80].

Sentir o problema. Cada problema é novo. Procura a resolução dentro do próprio problema. A percepção eficiente da realidade é uma característica da auto-atualização* (MASLOW, 1970, p. 153). Atenção "*free-floating*", paciência, processos primários, pré-consciência e não-consciência fazem parte deste tipo de percepção. (MASLOW, 1966, p. 106).

*Maslow descreve a auto-atualização em termos gerais: "The full use and exploitation of talents, capacities, potentialities, etc. Such people seem to be fulfilling themselves and to be doing the best that they are capable of doing […]" (MASLOW, 1970, p. 150).

Buscando entender o exercício, Lucas tenta estabelecer relações com base nos significados matemáticos que o exercício envolve. Isto é feito através de suas associações com imagens, como a "formiginha" e a "trajetória", e de suas interpretações das representações simbólicas analíticas, como $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ e ∇f. Mas, durante a nossa conversa, percebi que Lucas não estava conseguindo entender o exercício.

Como Lucas não estava encontrando o sentido geral do exercício, eu o interrompi para mostrar a solução dada pelo tutor no sarau:

⟨derivada da direção do tubarão⟩

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle = \alpha A \left\langle\, e^{-k(x^2+2y^2)}(\text{-}2kx)\,,\ e^{-k(x^2+2y^2)}(\text{-}4ky) \,\right\rangle$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A\ e^{-k(x^2+2y^2)}(\text{-}2kx)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha A\ e^{-k(x^2+2y^2)}(\text{-}4ky)$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{1}{x}x' = \frac{1}{2y}y'$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{2y}$$

$$\int \frac{x'}{x}dt = \int \frac{y'}{2y}dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{2y}$$

$$ln|\,x\,| \;+\; c_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\, ln|\,y\,| \;+ c_2$$

$$2\; ln|\,x\,| \;= ln|\,y\,| \;+ c'$$

$$2\; ln|\,x\,| \;= ln|\,y\,| \;+ ln\; k$$

$$2\; ln|\,x\,| \;= ln(\,|\,y\,|\,k\,)$$

$$ln\; x^2 \;= ln(\,|\,y\,|\,k\,)$$

$$x^2 \;=\; |\,y\,|\,k$$

$$\beta\, x^2 \;=\; y$$

Olhando o trabalho do tutor, Lucas reparou no passo das integrais e perguntou para si mesmo: “Por que integrar com respeito ao tempo? A gente não mexeu com isso”.

Lucas saiu da sua análise do problema para questionar se este exercício era apropriado para a lista de exercícios, sendo que este tipo de problema não fez parte da aula nem dos exemplos do livro, ou seja, não faz parte do ensino na disciplina.

Rotina (Necessidade de segurança)**.** O aluno vem para a universidade com a experiência das aulas de Matemática do Ensino Médio. O conteúdo nestas aulas mantém, na maioria das vezes, uma coerência entre os exemplos trabalhados pelo professor, os exercícios do livro/apostila e os exercícios nas provas. Essa **rotina** também é comum nas disciplinas de Matemática no ciclo básico da universidade. Quando este processo é “violado”, o aluno se sente “traído” pelo professor. De acordo com Mariana (2001), existe um sentimento de “injustiça” nestes casos.

Voltando à resolução do exercício, Lucas disse:

> Na Física eu me lembro de fazer a integral dos dois lados. Teve algo a ver com a Lei de Resfriamento de Newton. Fizemos uma manipulação. O que ela significava eu não sei, mas resolveu o problema. Não me importei muito naquele momento. Fizemos no Cálculo também no primeiro semestre, para ver onde usamos o Cálculo.

Esta colocação a respeito de uma manipulação que se realiza sem que se saiba o porquê, traz de volta minha inquietude sobre as aprendizagens significativa e superficial.

Voltando à conversa com Lucas, eu pensei que não valia a pena entrar nos detalhes da resolução do exercício neste momento. Em vez disso, queria saber qual seria seu entendimento geométrico do exercício. Mostrei, um a um, três gráficos (gráficos 5-3, 5-4 e 5-5) relacionados ao exercício e pedi a Lucas que interpretasse os gráficos em termos do exercício.

Mostrando a folha com o gráfico da função (gráfico 5-3), pedi que Lucas o interpretasse em termos do exercício, ou seja, em termos da concentração de sangue e do tubarão. Lucas examinou o gráfico, prestando atenção nas diferentes tonalidades e sombreamentos, mais do que nas relações do gráfico com o exercício, e comentou: “Gostei do gráfico, da maneira que a sombra aparece. Tenho o *Mathematica* em casa. É muito bom”.

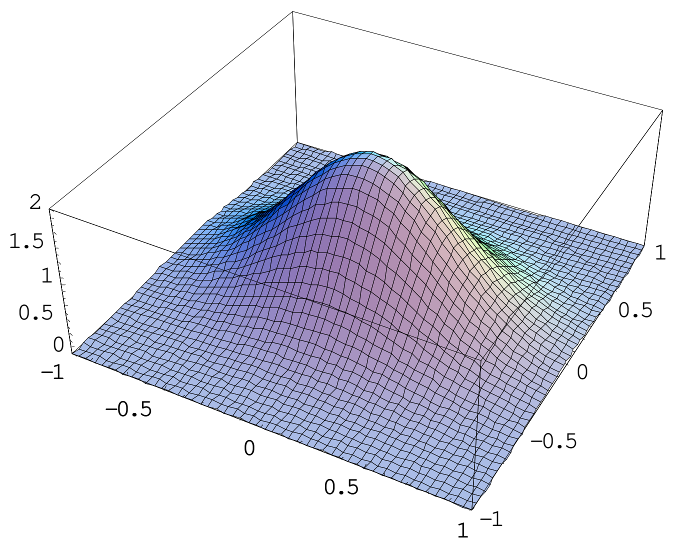


Gráfico da função $f(x, y) = 2e^{-3(x^2+2y^2)}$

Gráfico 5-3

Embora não seja necessário na elaboração deste gráfico, o comando <<Graphics `Master` figurava entre os comandos listados pelo tutor e chamou a atenção de Lucas, que não o conhecia e aproveitou para anotá-lo no seu caderno com o objetivo de explorar suas características em casa.

O comentário de Lucas sobre o gráfico exemplifica sua sensibilidade para os aspectos estéticos que ele encontra nos gráficos da disciplina que complementa sua afirmação de que ele pensa nos problemas matemáticos em termos geométricos. Esta apreciação estética é parte integrante da sua relação com a Matemática.

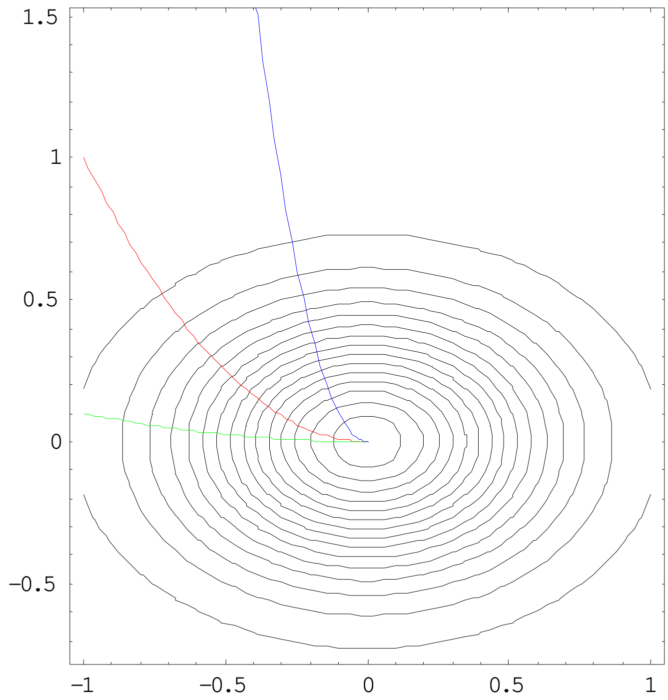
> **Estética.** Maslow (1970, p. 234) aponta que a estética e a expressão estética podem ser necessidades humanas. Acrescento que, de alguma forma, aquilo que a pessoa valoriza em si tem um aspecto estético.

Voltando à minha questão, Lucas notou que o pico do gráfico 5-3 está localizado no ponto de maior concentração de sangue. Logo em seguida, analisando o gráfico, pergunta para si mesmo: “O que é x e y? Distância?”.

Este questionamento faz sentido em termos do enunciado do exercício. Temos sangue no oceano, de modo que sua concentração no ponto (x, y) é dada, no caso do gráfico 5-3, pela função f(x, y) = $2e^{-3(x^2+2y^2)}$. Os valores de x e y no gráfico variam entre –1 e 1. É razoável questionar a coerência desses valores dentro do problema, em termos da situação descrita. Os números –1 e 1 representam o quê? Metros? Quilômetros?

Existe uma abstração da realidade por parte do gráfico da função do exercício na dimensão do espaço, em termos da escala. Pode-se entender o exercício através das informações dadas, mas a escala do gráfico não está explicada e tem que ser subentendida para que este seja analisado. Numa outra ocasião, Lucas também reparou nas unidades de medida de um exercício de prova que tratava a derivada direcional (ver seção 5.1.2).

Dirigi a conversa para o gráfico 5-4, o gráfico das curvas de nível.



Curvas de nível da função f(x, y) = $2e^{-3(x^2+2y^2)}$
e algumas trajetórias do tubarão.

Gráfico 5-4

Neste momento, Lucas assumiu o controle da conversa, desviando-a na direção do Projeto e da "mancha de óleo" (ver figura 5-8, p. 99 ou o anexo), comentando: "No projeto, eu não estou entendendo o que nós temos que fazer. Achar uma função? Gostaria de fazer as curvas de nível em cartolina. Cortar e fazer uma pirâmide. Gostaria de pegar as curvas de nível e levantá-las" [faz um movimento para cima com as mãos, similar ao que nós vimos o professor fazer na sala de aula].

Lucas vai e volta com seus pensamentos, relacionando um assunto com o outro. Ele focaliza, mas não se restringe. Demonstra espontaneidade no pensamento ao relacionar as situações e os conceitos propostos com suas experiências. Agora, eu tenho uma idéia melhor do que ele queria dizer quando afirmou que "no Cálculo você pode viajar".

Associação e imaginação. Lucas, ao pensar no problema do projeto em termos de um modelo de cartolina, se aproxima da idéia do "copo-telescópio" utilizado pelas crianças do Ensino Fundamental na hora do lanche, tal como mostrado pelo professor na aula, no momento de modelar curvas de contorno. De acordo com Ostrower (1977, p. 20), "Provindo de áreas inconscientes do nosso ser, ou talvez pré-conscientes, as associações compõem a essência de nosso mundo imaginativo. São correspondências, conjeturas evocadas à base de semelhanças, ressonâncias íntimas em cada um de nós com experiências anteriores e com todo um sentimento de vida".

Espontaneidade. Espontaneidade e criatividade são características quase sinônimas (GOBLE, 1970, p. 28).

Lucas voltou às curvas de nível do gráfico 5-4, apontando que:

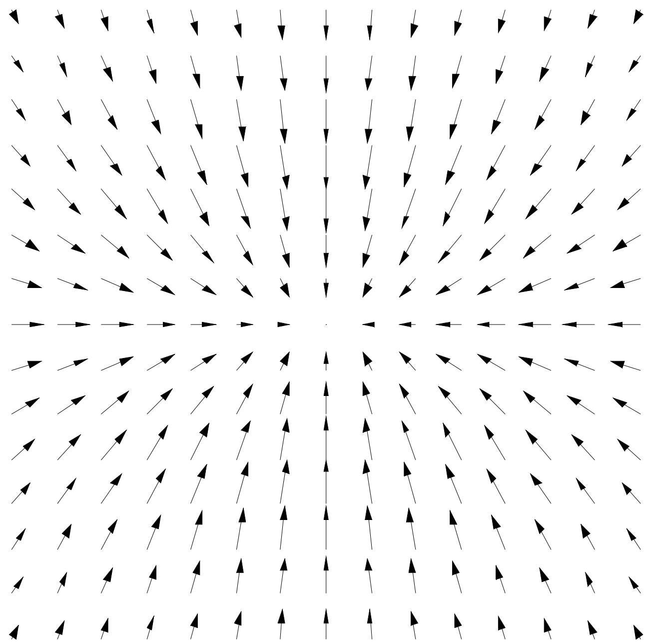
> As curvas de nível significam que o gráfico (gráfico 5-3) está cortado em intervalos regulares, onde a função cresce mais rápido quando a distância entre as curvas é menor e menos rápido quanto maior for a distância.

Enquanto falava, Lucas descrevia esta relação com uma mão acima do gráfico das curvas de nível (gráfico 5-4), variando a inclinação da mão em sincronia com o lápis na outra mão; com o lápis, fazia o movimento de cortar as curvas no plano do gráfico.

Lucas acrescentou, em termos do exercício e das taxas de variação: "Onde a distância entre as linhas é menor, a taxa de aumento de concentração é maior".

Lucas é capaz de comunicar-se com fluidez, relacionando o geral com o específico e vice-versa. A geometria existe tanto na sua fala quanto nas suas mãos. As imagens desempenham um papel importante no seu pensamento, estabelecendo relações. Por exemplo, o gráfico 5-4 levou Lucas a pensar no Projeto, que também envolve curvas de nível.

Em seguida, eu apresentei a Lucas o gráfico do campo gradiente (gráfico 5-5):



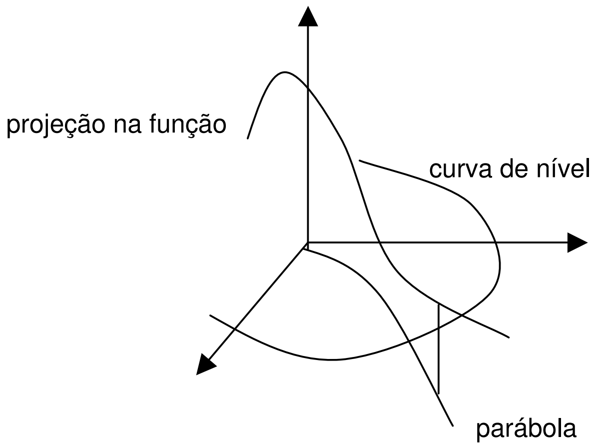
Campo gradiente da função $f(x, y) = 2e^{-3(x^2+2y^2)}$

Gráfico 5-5

Ao ver um campo gradiente pela primeira vez, Lucas demonstrou surpresa e antecipação na sua voz, dizendo: “Eu não tinha idéia disto”. E imediatamente começou a analisá-lo em termos dos outros gráficos (gráficos 5-3 e 5-4) e do seu conhecimento do vetor gradiente. Primeiro, perguntou para si mesmo: como alguém pode determinar se as flechas estão dizendo “aumento” ou “diminuição”? Ele comparou o gráfico das curvas de nível com o campo gradiente. Reparou que as escalas são diferentes e levou isto em consideração. Olhou várias vezes para os gráficos, um após o outro, fazendo comparações. Chegou à conclusão de que a flecha aponta na direção da maior concentração e que o seu tamanho indica a taxa do aumento.

Desconhecido como algo atraente. O desconhecido oferece uma oportunidade. De acordo com MASLOW (1970, p. 154), sentir-se confortável com e até mesmo atraído pelo desconhecido é uma característica da auto-atualização.

Lucas fechou sua análise dos gráficos com um desenho (feito a mão na folha do enunciado do exercício) que incorporou os três eixos mutuamente perpendiculares: uma curva de nível, uma parábola que representa uma trajetória do tubarão e uma "trilha" no gráfico da função que representa a projeção desta trajetória na função (ver figura 5-6).



Representação do desenho integrando os gráficos do "exercício do tubarão", tal como realizada por Lucas.

Figura 5-6

> **Integração de representações.** Lucas une as representações das curvas de nível e da função para construir sua imagem. Sua interação com a Matemática vai além de uma simples "leitura" do que é dado.

No geral, pode-se dizer que Lucas não entendeu muito bem o que o exercício pedia, nem porque $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ tem que ser múltiplo de ∇f. Uma olhada rápida na resolução que eu lhe mostrei, seguindo a lógica dos passos, não foi suficiente. Além disso, as várias relações que Lucas deduziu dos gráficos não ajudaram a esclarecer como ele poderia atacar o problema.

Eu estava em dúvida também, mesmo tendo assistido o sarau e reescrito os passos da resolução do tutor. Estava num beco sem saída, pensando que o vetor $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ variava na direção da curva de nível. Mas não me sentia tranqüilo, porque estava tentando forçar o gradiente a ser tangente às curvas de nível. Não estava conseguindo resolver a situação. Expliquei para o Lucas o que eu estava fazendo, o que eu achava que estava acontecendo no exercício, acrescentando que seria melhor conferir com o professor neste momento.

Encerramos nossa conversa com meu compromisso de fazer cópias dos gráficos e do trabalho do tutor deste exercício para Lucas.

Entreguei estas cópias a Lucas na aula do dia seguinte. Era uma quarta-feira. Na sexta-feira da mesma semana, dia 01 de outubro, na hora em que a aula acabou, Lucas me chamou para mostrar o que ele tinha feito com o *"exercício do tubarão"*. Lucas relatou que não estava entendendo o que o vetor $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ representa. Montou um exemplo mais simples.

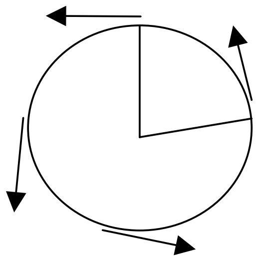
Onde a função do exercício é

$$f(\mathrm{x, y}) = Ae^{-k(x^2+2y^2)},$$

Lucas introduziu a função

$$f(\mathrm{x, y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 4 \quad \text{e a curva de nível} \quad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 4,$$

que são mais facilmente tratáveis. Ele parametrizou a circunferência com variável t para calcular $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$. Testou pontos particulares, como $\frac{\pi}{6}$, e encontrou vetores tangentes à circunferência, todos do mesmo tamanho.



Representação do gráfico da circunferência $x^2 + y^2 = 4$
e alguns vetores tangentes, tal como explicado por Lucas.

Figura 5-7

Lucas comentou sobre a direção destes vetores: “mas não estão indo para o centro da circunferência [como a trajetória do tubarão]. Fiz os cálculos como no exercício e achei y = *k*x. Sempre retas indo para o centro”.

Lucas continuou: “Foi com isso que eu percebi que $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle = \alpha \nabla f$, o primeiro passo [na resolução do tutor] não era um enunciado, mas uma questão: Qual função tem direção paralela ao vetor gradiente?”.

Neste instante, Lucas estava me mostrando a saída para a minha dificuldade com este exercício. Antes, eu tentava forçar $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ na direção das curvas de nível, ou melhor, definira este vetor como tendo a direção das curvas de nível. O vetor $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ não diz respeito às curvas de nível. Representa a direção do tubarão. As curvas de nível servem para orientar o campo de nosso trabalho. Nossa função tem que “andar” de forma perpendicular às curvas de nível, ou seja, paralela aos vetores gradientes.

Enquanto isto estava passando pela minha cabeça, Lucas perguntou: “E se as curvas de nível fossem hipérboles [no lugar das elipses do exercício ou das circunferências do seu trabalho]? Como seria a função *f* ?”.

Curiosidade/conjectura. Lucas demonstra uma curiosidade e um interesse que vão além do exercício em si.

Lucas começou a analisar sua própria questão, enquanto nós dois olhávamos o gráfico de uma sela e suas curvas de nível no livro-texto: “No plano das curvas de nível, a função vai cortar as hipérboles. Seriam hipérboles y = *k*/x?”.

Disse que eu achava que sim, acrescentando que seria fácil calcular.

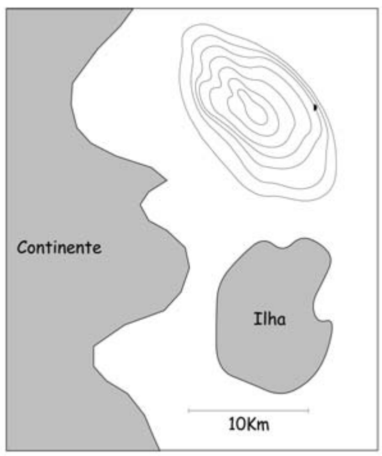
Saindo da sala, vazia já há algum tempo, Lucas e eu concordamos em resolver o problema.

Lucas se identifica com a Matemática. Embora eu estivesse perturbado com a minha inabilidade em compreender o exercício, dei o *“tubarão”* por morto depois da nossa conversa na terça-feira. Mas Lucas ressuscitou-o, dando nova vida ao exercício. Ele adotou o problema, conseguiu compreender como resolvê-lo e levou seu raciocínio para compartilhar comigo. Esclareceu o exercício para mim. E ainda foi além: propôs um problema análogo com hipérboles, conjeturando como chegar a uma solução.

5.1.6 O Projeto

Um projeto chamado “Curvas de nível e otimização: uma visão envolvente do Cálculo” (ver o anexo) foi programado para a turma de Engenharia Química quando da passagem de Lucas pela disciplina Cálculo de Várias Variáveis. A proposta para o projeto inclui, entre vários objetivos, uma busca de mapas de curvas de nível e a descrição dos significados destes mapas, uma simulação de vazamento de óleo de um navio que ameaça a costa[24] (ver figura 5-8), a modelagem de recipientes de lixo, comparando taxas como volume/área e volume/custo e um problema de otimização utilizando multiplicadores de Lagrange.

Mapa



Exemplar da figura do projeto que representa a mancha de óleo perto do litoral.[25]

Figura 5-8

[24] Mello e Santos (2002) no seu artigo “Mancha negra: reflexões sobre um projeto no ensino de Cálculo”, discutem o desenvolvimento deste aspecto do projeto junto com uma análise de trabalhos dos alunos de uma turma da disciplina de Cálculo de Várias Variáveis na Unicamp no ano 1999 (a turma escolhida para o artigo é diferente da turma à qual Lucas pertence).

[25] Figura extraída do *site* <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/2sem1999/projeto/proposta.htm>.

Devido aos problemas de acesso ao software nos laboratórios de micro computadores da Engenharia Química, o professor considerou o projeto optativo para os alunos da turma.

Lucas decidiu, em conjunto com um colega com quem ele já havia trabalhado no projeto para a disciplina Cálculo de Uma Variável no primeiro semestre, aderir ao projeto. Lucas tomou essa decisão dizendo: "Acho que o projeto é legal e ajuda a nota".

Os outros dois interlocutores deste semestre, Beto e Caio, também enfrentaram a decisão para fazer ou não o projeto. No quadro 5-9, apresento algumas das razões para as decisões de Beto, Caio e Lucas para aderir ou não ao projeto; o projeto era concebido tanto como uma oportunidade quanto como um obstáculo em termos da aprendizagem e da nota na disciplina.

Lucas adotou o objetivo mais amplo do projeto, tal como descrito pelas professoras na introdução da proposta:

> Na tentativa de recuperar os valores éticos e estéticos do ensino-aprendizagem, propomos uma integração desta disciplina de Cálculo com os três registros ecológicos: o de meio ambiente, o das relações sociais, e o da subjetividade humana, conforme iniciado no primeiro semestre. (Vera Figueiredo, Margarida Mello e Sandra Santos; Professoras de Matemática, IMECC/Unicamp).

Lucas e seu colega questionaram, no seu relatório do projeto, o papel da Matemática no desenvolvimento sustentável do homem em relação à natureza:

> A grande conquista para a humanidade que entra no século XXI é o que chamamos de "desenvolvimento sustentável", isso é, o conjunto de mecanismos pelos quais o homem irá melhorar a sua relação com a natureza, ao mesmo tempo em que incrementa sua qualidade de vida. A chave para esta conquista é a obtenção limpa de energia, ou, elaborando mais, a obtenção de progresso sem agressão ao meio ambiente. É, portanto, através da otimização (matemática?) da relação homem – natureza que este objetivo será alcançado, ou seja, através da reestruturação da convivência em sociedade, para formas mais justas, bem como da reelaboração da inserção desta sociedade no meio natural, que iremos conseguir o desenvolvimento sustentável. (Reflexões do "Projeto de cálculo: curvas de nível e otimização", MA211 – Cálculo II, novembro de 1999, por LUCAS e um colega, p. 49).

O projeto como oportunidade e obstáculo

Lucas, Caio e Beto, os três interlocutores principais da pesquisa neste semestre, tiveram razões diferentes para fazer ou não o projeto. Atividades como o projeto, com um roteiro de questões norteadoras abertas, desenvolvidas com o intuito de que o aluno dirija o trabalho na direção e com a profundidade que quiser, fornecem oportunidades para o aluno criar e expressar-se com a Matemática. Mas também é preciso considerar o contexto no qual o aluno recebe esta oportunidade. Dependendo da situação, o projeto pode também ser visto como um obstáculo para a aprendizagem da matéria, ou uma oportunidade para tirar nota.

Lucas e um colega decidiram fazer o projeto. Para Lucas, a decisão foi tomada mais pelo seu interesse na atividade em si do que pela "ajuda" que dá na nota. Ele gosta de trabalhar com o software *Mathematica*, tem "uma facilidade com geometria analítica". Além disso, o projeto incluía parametrização, algo que ele conseguira trabalhar no primeiro semestre "brincando" sozinho com o software.

Caio desistiu da idéia de fazer o projeto, embora considerasse que o projeto tem valor, dizendo: "Acho que o projeto é bacana. Tem que usar os conceitos, fazer aplicações. Uma boa idéia, mas consome muito tempo." No primeiro semestre, o projeto tinha sido trabalhoso, com muitas idas e vindas até o professor para clarificar as instruções do projeto (sendo que, às vezes, o professor também tinha dificuldades de interpretação). A nota obtida tinha sido menor do que ele achava que merecia e isto acontecera durante um dos tópicos mais pesados da disciplina (técnicas de integração); sentiu que o tempo dedicado ao projeto tinha comprometido seu conhecimento matemático.

Beto gostava de aplicações fora da Matemática, mas ficou indeciso entre fazer ou não o projeto, dizendo: "Acho que dá para tirar uma melhor nota no projeto do que numa prova, mas leva muito tempo para fazê-lo". Ele e seu parceiro de projeto decidiram fazer o projeto principalmente, como diz Beto, "para melhorar a nota."

Observação: Caio se dedicou aos estudos para a última prova enquanto Beto e seu parceiro abriram mão da matéria no livro-texto; eles fizeram o projeto que ajudou suas notas na disciplina. As notas na última prova, de alguma maneira, refletem isso. Beto e seu parceiro tiraram, respectivamente, 4,1 e 3,0. Caio tirou 7,0.

Quadro 5-9

Lucas trabalhou junto com seu colega, pensando sobre o projeto apenas de forma superficial no dia em que eles o receberam. Um mês antes do prazo de entrega, eles conversaram a respeito de como atacar e resolver os problemas. Eles trabalhavam no projeto nos finais de semana e conversavam nos intervalos entre as aulas. Os desenhos usando o software *Mathematica* estavam prontos quando faltava uma semana para a data-limite. Mas ainda faltava a redação da introdução, das justificativas e das conclusões. Lucas comentou que, no final, "Eu trabalhei na casa do meu amigo por quatro dias com o texto do projeto e atrasamos na entrega".

Sobre seu trabalho no projeto, Lucas declarou:

> Não estou abordando-o como eu falei – um levantamento das curvas de nível do plano. Na primeira parte estamos usando SHENK [um livro-texto de Cálculo com o método sugerido para este item do projeto] para achar a norma do vetor gradiente com medidas. Vou ver um outro método, como na última aula [me mostrando suas anotações da aula] e o vetor de posição e o vetor de velocidade. Tem algo a ver, talvez dê para parametrizar uma curva de nível e achar o vetor de posição e depois a derivada e o vetor de velocidade. (LUCAS 1999, 26-10-99, p. 3).

Lucas acrescentou uma série de observações:

- Teve uma divergência de idéias na turma. A gente fala entre si. Eu falei com o professor. Conversei com o Ricardo. Ele gosta de problemas assim. Um problema assim você não sabe como fazer. Tem poucos fundamentos dados. A importância estaria na justificação: escolher um método e esclarecer o porquê.

- Tem três coisas para encontrar:
  a) a posição do navio às 6 horas;
  b) o vetor gradiente; e
  c) o local onde o óleo atingirá a praia primeiro, o que seria o mais difícil.

  Em geral, tem uma relação, uma função de posição e tempo. A posição pede coordenadas. Eu fiz isso usando uma escala e a planilha do *EXCEL* para as conversões. Tem que fixar a posição do navio às 6 horas. Tão besta! O problema tem tudo: coordenadas, fixação [localização do navio] e função. O eixo do tempo vai por cima. [falando e levantando a mão ao mesmo tempo].

- A primeira tentativa foi através de um ponto para definir uma função. Foi desagradável. Na primeira tentativa, conversei com colegas sobre o problema e, através da conversa, decidi usar a função parabolóide $f(x, y) = ax^2 + by^2$. Usei o vetor gradiente de um ponto só com os parâmetros a e b. Mas usando um ponto só para conseguir uma função, não me senti bem. Mexeu com a cabeça.

- Na segunda tentativa, recorri aos conceitos estatísticos de mínimos quadrados e utilizei oitenta pontos no *EXCEL* para fazer os cálculos. Nós estamos fazendo algo parecido em estatística e também estou fazendo Iniciação Científica com mínimos quadrados de várias variáveis. Então, a soma dos mínimos quadrados é a função $S(a, b)$. Quero minimizar essa função com a derivada parcial de S com respeito a a igual a zero e a derivada parcial de S com respeito a b igual a zero; e minimizar.

- Dá para fazer com matrizes. Tem que rodar, fazer uma mudança de coordenadas. Fiz um estudo no livro de Geometria Analítica [me mostrando algumas folhas de anotações do seu estudo]. Você tem que saber o que você está falando nas justificativas incluídas no projeto. Por exemplo, como a mudança de coordenadas funciona. (LUCAS, 16-11-99, p. 1-2).

Estes trechos mostram uma aprendizagem rica em interações com outras pessoas, com a Matemática e a tecnologia. É um processo que inter-relaciona idéias e conhecimentos. Um processo de tentativas e os erros. Erros percebidos pelo próprio Lucas. Como ele diz, “Mexeu com a cabeça”. O compromisso que Lucas teve com a atividade é exemplificado na sua afirmação “Você tem que saber o que você está falando”. A expressão “Tão besta! O problema tem tudo [...]” mostra que a atividade é pessoal e emocionalmente positiva.

Lucas confirma e justifica os resultados do problema da “mancha de óleo” com base nos seus conhecimentos e nos procedimentos adotados:

> Na análise, o tempo de chegada da mancha de óleo é igual a 10,5 horas. Um pouco estranho. Leva 3,5 horas para chegar a metade da distância e 7 horas para percorrer a outra metade. Mas a função foi construída através de 80 pontos e mínimos quadrados para mostrar a tendência das curvas de nível. Além disso, fisicamente, no meio da mancha o óleo é mais concentrado e se expande mais rápido. A expansão é mais lenta quanto maior a distância do navio. (LUCAS, 1999, 16-11-99, p. 2).

Lucas avalia sua solução em termos do gráfico dado e da situação física. Seu modelo, com oitenta pontos, se aproxima bem das curvas de nível dadas no mapa e faz sentido, para Lucas, que o óleo se espalhe mais rápido perto da sua fonte e mais devagar conforme aumenta a distância em relação a essa fonte.

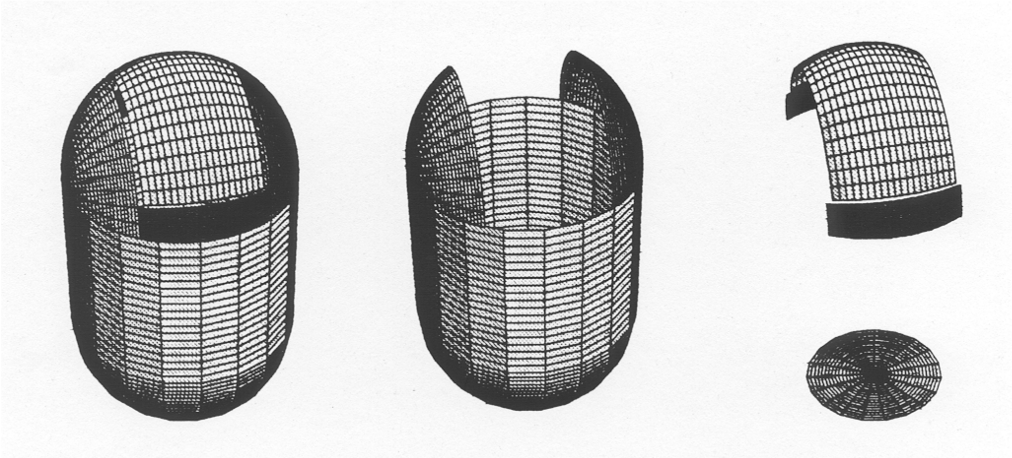
Auto-avaliação. O Lucas se apóia nas suas próprias experiências para avaliar a adequação dos seus resultados.

O projeto também prevê a elaboração de modelos matemáticos para representar recipientes de lixo, usando o software da escolha do aluno. Lucas e seu colega escreveram que, neste processo,

> traduzimos objetos reais em linguagem numérica, e assim podemos manipulá-los de certas maneiras. Esta parte também compreendeu pesquisa, relacionada às características dos recipientes utilizados, sua fabricação, custo, aspecto estético e funcionalidade. (Apresentação e objetivos do "Projeto de cálculo: curvas de nível e otimização", MA211 – Cálculo II novembro de 1999, por LUCAS e um colega, sem número de página).

Lucas gostou de duas coisas, no que diz respeito aos modelos de recipientes para lixo:

> De duas experiências eu gostei: do software *Mathematica* e da parametrização. Não entendi muito bem a parametrização como foi tratada ao longo do curso. Estudei para ser consciente para a prova. Aqui aprendi a fazer parametrização com superfícies. Brinquei com o toro com a parametrização e acabei utilizando esse recurso no projeto para a lixeira. Também era interessante ver a parametrização em outras situações, como quando nós falamos sobre o "exercício do tubarão".
> [...]
> O que é importante é a vontade de saber, de estudar.
> [...]
> Trabalhei com coordenadas esféricas para o recipiente de lixo. Acabei fazendo o R2D2 do filme "Guerras nas estrelas" em vez da lixeira que eu estava tentando fazer. Era maluco tentar trabalhar com um hemisfério. Mas não deu certo. Parametrização era a maneira. Também as translações estão fáceis com a parametrização. Pode mudar onde você quiser.
> [...]
> Trabalhei a Atividade [trata-se de uma atividade programada para laboratório de micros que o professor desenvolveu na sala de aula por causa da falta de acesso ao software] e usei os conceitos para meu trabalho. (LUCAS, 1999, 16-11-99, p. 3).



No alto, a modelagem da lixeira[26]. Acima, R2D2[27].

Figura 5-10

Trans-experiencial. A Matemática se associa livremente com outras experiências positivas. Por exemplo, Lucas associou seu trabalho em modelar uma lixeira com o R2D2 do filme "Guerras nas estrelas".

Um outro recipiente de lixo modelado por Lucas era quadrado, com os lados inclinados. Lucas fez primeiro um modelo perpendicular usando o software, mas, ao imprimi-lo, os lados do

[26] Imagem extraída do projeto de Lucas e seu colega.

[27] Imagem extraída do *site* <http://www.starwars.com/databank/droid/r2d2/index_movie.html>.

desenho pareciam inclinados como a própria lixeira. Lucas confessou: “Não sei o que eu vou fazer”.

Lucas levanta a questão de como lidar com isso no projeto. Vai tentar corrigir? Se não der para corrigir, vai deixar assim? Como justificar?

Lucas não encontrou uma saída e, no projeto, foi escrito:

> Este modelo foi o de mais difícil criação, apresentando boa conservação de características reais, mas, apesar disto, sofreu duas simplificações: ficou sem tampa, a qual consideramos de reprodução muito trabalhosa; e não apresentou a leve inclinação dos planos laterais, tendo portanto, abertura e fundo com as mesmas medidas. (“Projeto de cálculo: curvas de nível e otimização”, MA211 – Cálculo II, novembro de 1999, por LUCAS e um colega, p. 32).

O valor e a ética. Entendo que uma pessoa dificilmente engana a si mesma quando sente prazer e auto-estima no seu desempenho em uma atividade. A maneira como a pessoa se identifica com uma atividade corresponde à maneira como ela lida e se comunica com os outros a respeito da atividade. A ética se desenvolve em ações do dia-a-dia. Quando a pessoa valoriza o que faz e coloca-se na atividade (suas idéias, sua maneira de solucionar, sua criatividade), a atividade se integra à sua pessoa.

Lucas e seu parceiro no projeto atrasaram na entrega, mas o atraso em si não era tão importante para Lucas. Ele mesmo comentou, no dia 26 de outubro, três dias antes do prazo final (que acabou sendo prorrogado): “Vou entregá-lo mais tarde, e talvez a gente perca alguns pontos na nota”. Lucas falou de uma maneira que indicava que ele não se importava tanto com os pontos perdidos se efetivamente precisasse de mais tempo para completar o projeto, fazendo melhor. (LUCAS 1999, 26-10-99, p. 3).

O valor da atividade. A atividade em si assume precedência em relação à nota.

O par recebeu nota *9,5* no projeto. Durante a nossa conversa em março de 2000, forneci uma escala não numérica (ver abaixo) para Lucas e perguntei qual seria a avaliação que Lucas daria para ele mesmo no projeto:

excelente   bom +   bom   bom -   médio +   médio   médio -

Lucas indicou "***bom -***", criticando as explicações e comentários. A comunicação e os argumentos não formam tão bons quanto Lucas desejava que fossem: "Tem que passar suas idéias para a outra pessoa. A introdução e as conclusões formam fracas. O que é importante são as explicações, as justificativas. Faltou tempo". (LUCAS, 1999, entrevista final 15-03-00, p. 4).

Auto-avaliação. Lucas e seu parceiro no projeto obtiveram nota 9,5 no projeto, mas Lucas considerou o empenho deles menos do que bom. Destacou a importância das explicações e justificativas, em relação às quais ele sentiu que ficou faltando algo no seu projeto.

Lucas gostou mais do projeto de Cálculo de Várias Variáveis do que aquele do Cálculo no primeiro semestre, comentando: "Era mais aberto. O projeto de Cálculo de Uma Variável era fechado, bem direcionado. Não gostei disso". (LUCAS, 1999, entrevista final 15-03-00, p. 5).

Lucas considera importantes as aplicações que o projeto trabalha. Ele valorizou o desenvolvimento do processo em geral, organizando um trabalho com introdução, os problemas formando o corpo principal e as conclusões. Gostou de trabalhar com hipóteses e comprovações, geometria analítica e parametrização.

A parametrização se transformou num meio para atingir um fim: o gráfico da lixeira. O meio, a parametrização, requer uma compreensão para que se possa mexer e justificar os procedimentos. Isto é, o meio se torna um fim em si. Não se trata, no entanto, de utilizar a técnica pela técnica.

O projeto de Cálculo de Uma Variável

Lucas, fazendo uma crítica do projeto de Cálculo do primeiro semestre, diz que "o projeto de Cálculo de Uma Variável era essencialmente contas para fazer. Provas avaliam isso. O projeto deve ser diferente: discussão, comentário, algo fora do livro-texto". Além disso, Lucas acrescentou: "Eu dei explicações para os passos na elaboração das resoluções, mas acredito que a pessoa que fez a correção nem olhou para elas. Não houve nenhum comentário sobre as explicações, só marcas nas respostas". Comentando sobre a parte do projeto que trabalhou o erro do polinômio de Taylor, afirma que "*ninguém* entendeu. Acertou sem saber o que a resposta significa". Diz Lucas, fazendo uma observação em geral sobre a aprendizagem de Matemática: "O aluno pode fazer contas sem entender o que ele está fazendo."

(LUCAS, 1999, conversa final, 15-03-00, p. 5)

Max (2000, 19-10-00, p. 1) comentou sobre o projeto: "A parte do polinômio de Taylor, a gente fez sem saber o que é. Joga coisas no software *Mathematica* e vê o que acontece. Tinha que ter uma reta perto da curva".

5.1.7 Vencer

A última conversa com Lucas, no que se refere a esta pesquisa, aconteceu em março de 2000 na minha kitchenette alugada, que fica perto da universidade. Combinamos de conversar lá depois dos nossos compromissos na faculdade durante o dia. Conversamos no pátio, já que a noite era agradável.

Nesta noite, Lucas apontava que o desenvolvimento do interesse por uma matéria acontece na interação com ela:

> Uma disciplina que atrai é uma disciplina onde você vence e, como resultado, anda com facilidade maior.

Quando Lucas disse "vence", fiquei curioso para saber o que ele queria dizer com essa palavra e perguntei: "Como assim, vence?"

Lucas, olhando e apontando o alto do muro entre minha casa e a do vizinho, disse:

> É como subir uma escada até um planalto... Demora para escalar, mas ao chegar lá em cima você anda mais rápido. Como no Cálculo de Uma Variável, por exemplo. Eu tentei fazer um toro, rodar uma circunferência em volta de um eixo no *Mathematica*. Consegui. Levou 10 horas, mas agora eu sei fazer e vai qualquer figura com a técnica. Aprendi sozinho. Sei como funciona.

Em resumo: Os recortes das conversas com Lucas, na maior parte das vezes, destacam uma proximidade entre Lucas e a Matemática. Houve situações em que ele não estudava ou até mesmo não ligava para alguns tópicos como, por exemplo, a mudança de ordem para integração na integral tripla. Já no que se refere aos "problemas"[28] e desafios referentes aos tópicos pelos quais nutria interesse e que se aproximavam das suas afinidades, Lucas procurava desenvolver estratégias para solucioná-los e justificar para ele mesmo como cada um deles funcionava. Ao mesmo tempo, nas entrelinhas dos recortes, é perceptível que Lucas se "alimentava" da interação pessoal em torno das atividades com a Matemática. Na sua interação com o Projeto, conversou com o professor e um colega que gosta de trabalhos como o Projeto. Trabalhava junto comigo no "exercício do tubarão", em função do qual compartilhamos dúvidas, observações e conjeturas.

[28] Entendo por "problema" uma situação que, para ser resolvida, exige da pessoa uma estratégia não conhecida, que é relativamente complexa e, ao mesmo tempo, alcançável a partir dos seus conhecimentos atuais. Utilizo a palavra "problema" entre aspas para indicar esta conceituação.

5.2 Conversas com Rodrigo

Rodrigo desenvolveu seu interesse pela Matemática enquanto estava no colégio. Foi durante este período que ele teve a oportunidade de ser monitor e também viu nascer a vontade de ser professor de Matemática. Rodrigo pretende fazer a Licenciatura em Matemática e o Bacharelado em Matemática Aplicada ao mesmo tempo. Ele estuda com pensamento crítico, procurando encontrar significados na terminologia e entender as razões para os procedimentos da Matemática apresentada na sala de aula e nos livros-texto. Enquanto fala sobre a Matemática, Rodrigo freqüentemente faz referência às abordagens e explicações apresentadas pelos autores e pelo professor. Na disciplina Cálculo de Várias Variáveis, desenvolveu seu conhecimento matemático com base principalmente nas listas de exercícios e no estudo de vários livros-texto, comentando que procura montar a teoria combinando o que leu com a resolução de exercícios.

Rodrigo fechou o segundo semestre com média 9,1 na disciplina Cálculo de Várias Variáveis, sendo o 5º colocado numa turma de 76 alunos. A nota média da turma foi 6,7 com mediana 7,2 (fonte: notas fixadas na porta do professor).

Rodrigo estuda para os testes e as provas de tal forma que, sem querer, sua compreensão da matéria fica relegada a um segundo plano. Rodrigo procura um entendimento da Matemática "importante", tal como esta é definida pelo professor e pelos autores dos livros-texto. Ao mesmo tempo, ele estuda para conseguir notas boas nos testes e nas provas. Suas atividades de estudo são aquelas que ele considera adequadas para alcançar seus fins, dadas as exigências do seu curso. Sua aquisição de conhecimento matemático, neste contexto, é relativamente afastada dos conceitos.

Faço aqui recortes das conversas com Rodrigo, acentuando as suas preocupações e ações na preparação para os testes e as provas tanto no Cálculo quanto nas suas outras disciplinas. Revelam-se, dessa forma, interações superficiais que, da perspectiva da sua relação com o conhecimento, servem como base para a construção do tipo ideal de aprendizagem que denomino *aprendizagem afastada*.

5.2.1 O ritmo da matéria

Rodrigo (2001) me contou que ao ingressar na Unicamp, tinha a expectativa de que os estudos seriam mais rigorosos do no colégio, mas ainda assim se sentiu assustado com o novo ritmo.

> Até você [referente a Dale] perguntou no questionário inicial o que era marcante a respeito da Matemática na Unicamp. Um susto que eu acho que a Unicamp deu em mim. No colégio [...] a pessoa não tem aquele ritmo assim, intensivo: prova de Matemática hoje e Biologia amanhã. Tudo bem. O livro de Matemática tem dois capítulos que você precisa estudar. [...] Você tem em uma semana, duas ou três matérias para estudar para as provas. Estou lembrando as situações com o próprio professor [no Ensino Médio]. "Ô, professor, é muita matéria", não-sei-o-que. Ele falava: "Você não viu nada. Você não fez faculdade ainda". Nunca dava bola para essas coisas. [...] Quando eu entrei na Unicamp, o próprio nome, Unicamp, USP, tem fama. A Unicamp é muito difícil, rígida. Eu entrei sabendo disso. [...] Tem que viver no caderno da aula. Tem que se disciplinar.
>
> Tem que saber dividir essas coisas. Mas aí na Unicamp o ritmo é bem diferente, porque em [um semestre] você vê um livro de Cálculo [diferencial e integral de uma variável], foi uma surpresa. No começo do ano até achei que não daria conta de tudo. Fiquei maluco. Uma hora eu pensei: "estou estudando Cálculo e tenho Física pela manhã", não-sei-o-que. [...] Foi nas primeiras semanas. [...] Eu tinha que me acostumar com a rigidez. Eu acho que isso é o que assusta. Muita matéria para estudar e pouco tempo. Tem que estudar muito mais fora da sala de aula. Essa estratégia eu não usava no Ensino Médio. Mas agora estou me adaptando. Eu acho que eu não me adaptei totalmente. [...] Eu acho que estou conseguindo superar, sabendo programar mais. (RODRIGO, 21-08-01, p. 1-2).

Adaptação. MASLOW (1970, p. 268) aponta que a adaptação ao ambiente é um comportamento passivo. A pessoa se molda às situações e às condições em prejuízo da sua individualidade.

Rodrigo sempre trouxe, no fundo da sua fala, a pressão de ter que se preparar para as avaliações. Nos primeiros dias de setembro, Rodrigo contou:

> Por enquanto, eu acho que tudo está sob controle. Eu acho que eu estou conseguindo levar as matérias conjuntamente. Claro, eu tenho medo das

matérias. Por mais que eu estude, tenho medo. Medo, assim, de na hora dar um branco. Não conseguir fazer. (RODRIGO, 03-09-01, p. 1).

Medo. Uma das motivações por trás da aprendizagem é o medo. Medo do "branco" na hora da avaliação é algo que Rodrigo já experimentou.

Rodrigo programa seus estudos de forma a dar prioridade às matérias que são mais exigentes no momento. Ele citou uma semana de agosto como exemplo. Foram programados para esta semana dois testes (Física e Álgebra Linear) e, para a semana seguinte, um teste de Cálculo. Embora Rodrigo precise estudar Cálculo, os testes da semana ocupam sua atenção.

> O teste de Cálculo é quinta-feira que vem. Vou estudar Física. Eu tenho um testinho amanhã. Amanhã eu pego Álgebra Linear, que tem teste na quinta-feira agora. Estou fazendo a lista dela (Álgebra Linear) já. Só falta terminar alguns exercícios que eu não consegui fazer. Tirar dúvidas. E complementar alguma coisa. (RODRIGO, 21-08-01, p. 2).

Auto-centrado. As preocupações de Rodrigo estão centradas no seu desempenho nas avaliações, e não na interação com a matéria em si.

Sobre a lista de exercícios de Cálculo, Rodrigo comentou: "A lista dele eu não comecei. Pretendo começar quinta-feira. Eu leio a matéria primeiro. Tento entender. Às vezes fico meio perdido na aula, como agora [teoria pesada na segunda-feira]. Faço todos os exercícios, mesmo aqueles que não precisa entregar".

Rodrigo faz referência ao fato que o professor ao colocar as listas na lousa para os alunos anotarem, indica quais exercícios da lista deverão ser entregues para correção e nota.

Rodrigo continua: "Essa estratégia eu usei no Cálculo do primeiro semestre. A professora deu listas de exercícios, mas não falou quais deles ela corrigiria. Tinha que fazer todos. Se houvesse trinta, teria que fazer trinta".

Estratégia de *coping* ("dar conta"). Rodrigo encontrou sucesso em Cálculo, no primeiro semestre, fazendo todos os exercícios da lista, como requerido. Ele leva essa estratégia, que já não é obrigatória, para a disciplina de Cálculo no segundo semestre.

Quando perguntei se o Cálculo do primeiro semestre tinha sido pesado, Rodrigo respondeu em termos das atividades da disciplina:

> Depende na dificuldade da seção. Tinha a matéria MS [laboratório semanal que acompanhou a disciplina Cálculo de Uma Variável usando software para resolver atividades elaboradas pela professora] e o projeto para fazer. Uma lista toda semana. Ficou um pouco cansativo.

Conversamos sobre sua preparação para o primeiro teste e sobre a resolução do mesmo. Rodrigo coloca:

> Como eu falava para você, eu gosto de fazer todas as questões [exercícios das listas]. Bato os olhos no teste e identifico a questão. Tenho que fazer com um certo cuidado. Tenho que ter um certo cuidado quando resolver de novo. Por mais que eu tenha feito a questão, tenho que ler e tomar cuidado. Tento entender. Compreender direito. Tem que ter cuidado. [...] O segundo item do teste, eu fiz facilmente. Tinha feito na lista de exercícios. (RODRIGO, 21-08-01, p. 4).

Sobre a resolução de um exercício num teste, Rodrigo comentou em nossa conversa coletiva em novembro: "Eu coloquei a integral, e vou calcular. Já sei o que dá pela lista de exercícios. Estava errada a integral. Foi escrito no teste corrigido: 'Você lembrava a resposta'". Todos começaram a rir. "E o professor deu um ponto", Rodrigo acrescentou. Ao ouvir isso, as colegas de Rodrigo começaram a tirar sarro dele e ele tentou justificar o ponto da seguinte forma: "Coloquei a matriz. A questão, eu fiz da lista. Mas esqueci". (RODRIGO, conversa coletiva, 08-11-01, p. 8).

Nesta seqüência de falas de Rodrigo, uma prática comum de professores de Matemática é colocada em evidência: o desenvolvimento de testes e provas que cobram as listas de exercícios com questões isomorfas[29], ou seja, de "forma e aparência similar" aos exercícios das listas,

[29] Utilizo a palavra isomorfo num sentido que se aproxima da definição zoológica de isomorfismo encontrada no dicionário Aurélio (FERREIRA, 1999, p. 1142): "Condição em que indivíduos de espécies ou raças diferentes têm forma e aparência similar". Entendo que as avaliações (testes e provas) na disciplina de Cálculo "pedem" que o aluno

repetindo por vezes os mesmos exercícios. Tal prática promove uma aprendizagem que tem por propósito a reprodução dos exercícios.

No contexto deste estudo, uso o termo "isomorfismo" no sentido de que um exercício da avaliação é equivalente a um exercício das listas de exercícios, ou seja, exige a aplicação da mesma técnica da mesma maneira e o encadeamento dos mesmos passos na sua resolução.

5.2.2 Pressão do professor

A postura do professor diante dos alunos e em relação às provas interfere na relação que o aluno desenvolve com a matéria. Além disso, a própria elaboração da prova pode nortear as ações do aluno. Rodrigo comentou que o professor "caprichou" na elaboração de um teste, e questionou se "era para colocar medo na gente". (RODRIGO, conversa coletiva, 08-11-01, p. 8).

Rodrigo reclama que "tem dias em que o professor chega na sala assim: 'Eu acho que a maior parte desta sala vai ficar para o exame.' Como ele sabe? Ele não sabe se a gente vai bem na prova". (RODRIGO, conversa coletiva 08-11-01, p. 7).

> **Pressão.** O professor pode pressionar o aluno através das avaliações. Priscila (conversa coletiva, 08-11-01, p. 8) pegou o gancho da colocação do Rodrigo de que o professor "caprichou" no teste, talvez "para colocar medo na gente". Segundo ela, "O professor percebeu que a gente foi muito mal em Álgebra Linear. Todo mundo estava estudando Álgebra Linear e deixando o Cálculo. Neste sentido, ele queria dizer para a turma: '*Não. Volta. Volta aqui*'".

O aluno precisa acreditar que é capaz de aprender. Se não existe esta confiança, o aluno agirá para conseguí-la. Rodrigo afirma que o professor pode ser instrumental no desenvolvimento desta confiança. Em sua resposta à questão no questionário final – "O que seria um excelente professor?", ele declara:

---

reconheça exercícios de forma e aparência similar àqueles nas listas. Para fazer uma prova, o aluno deve reproduzir as formas dos procedimentos que representam resoluções.

> Um professor excelente seria aquele que passasse segurança e calma aos seus alunos em suas aulas, tornando o ambiente favorável ao aprendizado.

Rodrigo acrescentou: “O professor também deveria motivar a classe a gostar da disciplina que leciona”. (RODRIGO, questionário final, 24-10-01; entregue em 07-11-01).

Segurança. De acordo com MASLOW (1970, p. 39), a pessoa procura libertar-se do medo, da ansiedade e do caos.

O gosto pela Matemática raramente apareceu na fala de Rodrigo, pelo menos durante as nossas conversas. Rodrigo conseguiu uma nota excelente em Cálculo por sua preocupação e esforço com as listas de exercícios, que completava para ter confiança na hora dos testes.

5.2.3 Uma Matemática mais aprofundada

Rodrigo critica e valoriza a aula do professor ao mesmo tempo. Ele valoriza o fato de que o professor dá uma aula que “aprofunda” a matéria, uma abordagem vetorial que se relaciona com a Geometria Analítica e com a Álgebra Linear. Ao mesmo tempo, Rodrigo critica o fato de que, às vezes, o professor “vai muito além do que a gente tem na cabeça”, dificultando o entendimento da matéria:

> Então eu não consigo acompanhar o [professor], estar junto com ele na corrida. Estou olhando para ele; não entendi. Quando penso que estou assistindo, tem hora que ele vai, ele começa a viajar. Tenho que correr atrás. Eu acho que seria negativo isso. Porque a gente fica o tempo todo correndo atrás dele. Mas, pelo lado positivo, eu acho que essa maneira como ele dá esse Cálculo mais aprofundado é boa para a gente; mais indicada para alguém que vai fazer Matemática e Física. (RODRIGO, 20-09-01, p. 4-5).

Algumas aulas do professor foram difíceis de acompanhar. Rodrigo ficou desesperado no começo do semestre, mas se acostumou e procurou aprender mais fora da sala de aula. Foi ele mesmo quem levantou essa situação ao fazer uma auto-avaliação do seu entendimento do Cálculo:

> Eu acho que eu consigo aprender mais fora da sala. Porque o professor, não que eu queira criticar o jeito que ele dá aula, mas ele tem um raciocínio muito na frente da gente. […] Ele fala pelo raciocínio dele. Então ele fala muito além da gente, ele atropela a gente. Ele fala assim: "Se vocês têm dúvidas, vocês perguntem". Mas como a gente vai perguntar alguma coisa se a gente não entendeu o que ele falou? Falei com um colega e ele disse "Não entendi nada". Foi para a aula, das 8 horas da manhã até as 10, e não entendeu nada. Eu nem me desespero mais. Comecei a desesperar. "Ô, meu Deus, como eu vou fazer para estudar essa matéria, para fazer o teste?" Eu li o APOSTOL [o livro-texto principal para a turma], tentei procurar em outros lugares e fui para a monitoria. Eu vou montar a teoria. (RODRIGO, 03-09-01, p. 3).

Esforçar-se. A pessoa que se esforça está fazendo isso por um propósito, com determinação, através de tentativas e estratégias de *coping*. Rodrigo fica ansioso com a matéria, preocupa-se com os testes e com a possibilidade de "dar um branco". Faz esforço para aprender. Maslow faz uma distinção entre "esforçar-se" e "tornar-se" (um termo utilizado por Carl Rogers). Tornar-se é se expressar, crescer e se auto-atualizar (MASLOW, 1970, p. 227). Entendo que essa distinção tem implicações para a educação.

Rodrigo voltou falar sobre a aula quando contou que procura vários livros na biblioteca para ajudar e "extrair mais coisas":

> Acho que quanto mais exemplos você tem, melhor. Mas eu acho que é difícil. Muito colega meu já desistiu de assistir a aula de Cálculo. Eu não faço isso. Por mais que eu não consiga entender nada, eu vou lá para tentar extrair o máximo de coisa, mesmo que seja um mínimo. Tem gente que fica fora da sala olhando o livro do STEWART. Ah, não. Eu vou tentar. Eu nem entendo a mínima coisa, mas eu vou tentar. É assim que eu penso. Por mais que eu não esteja entendo nada, porque esta parte do jacobiano, por exemplo, um dia estava na aula lá e meu colega atrás perguntou: "o que é derivada direcional? É um vetor ou não é?" Eu falei para mim mesmo, "deixa o professor explicar o que é isso aí, porque eu já estudei, e eu vou fazer os exercícios da lista". Daí, quando eu reparei, o professor estava jogando uma matriz no quadro e falando que ele estava calculando a derivada composta. Eu *perdi* essa parte. E foi justamente nos minutos finais da aula que ele fez tudo correndo. Aí bate que eu não entendi e ficou para a próxima. Daí eu falei: pronto, agora ele já explicou isso. Aí vi a vantagem de pegar o APOSTOL. Tenho que entender o jacobiano de uma vez por todas. E aí foi isso. Aprendi. (RODRIGO, 2001, 03-09-01, p. 4).

5.2.4 A matriz jacobiana

> Eu tive que entender o que é aquela jacobiana, aquela que ele falava. Li o APOSTOL. Aí, o APOSTOL foi falando, falando. É difícil entender muito a linguagem dele. Eu fui pegando o que ele escreveu, [e falei para mim] assim: "Tento fazer o exercício agora. Porque ele não deu nenhum exemplo. Eu acho que é assim. Vou tentar fazer". Eu tentei fazer, e deu certo. Então é isso mesmo. Comparei com a resposta no livro. (RODRIGO, 03-09-01, p. 2).

Rodrigo consegue resolver o exercício da matriz jacobiana da lista. Também calculou a matriz jacobiana $D\vec{f}(x, y)$ para $\vec{f}(x, y) = e^x\vec{i} + sen(y+3x)\vec{j}$ que fez parte do item 2 no teste II (30-08-01):

$$D\vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 3\cos(y+3x) & \cos(y+3x) \end{bmatrix}$$

Mas o que significa o jacobiano para Rodrigo? Perguntei o que ele entendeu por jacobiano, acrescentando que eu vi o jacobiano na mudança de variáveis.[30] Neste momento, não sabia que no Apostol (1967, p. 270-271) a matriz jacobiana foi apresentada em termos da derivada total, $\boldsymbol{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$, na qual $\boldsymbol{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{y}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{y}$, onde $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ chama-se a matriz jacobiana. "A derivada total $\boldsymbol{T}_{\mathbf{a}}$ é também escrita como $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{a})$. A derivada $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{a})$ é uma transformação linear; a matriz jacobiana $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ é uma representação matricial dessa transformação." (APOSTOL, 1967, p. 271).[31]

Rodrigo (03-09-01, p. 2) descreveu seu entendimento da matriz jacobiana pelos seus procedimentos de cálculo. Faço referência ao exercício acima para parafrasear o que Rodrigo me relatou: Você pode montar, por exemplo, a matriz jacobiana de uma função vetorial $\vec{f}$ em duas

[30] Eu me lembrava do jacobiano mas me faltava conhecimento a respeito da matriz jacobiana (não estava a par do andamento da matéria) e acabei promovendo uma conversa na qual Rodrigo e eu estávamos pensando em objetos matemáticos diferentes. Pela minha experiência do ano passado, estava entendendo pela jacobiana, o jacobiano, ou seja, o determinante jacobiano. Rodrigo, por sua vez, se referia à matriz jacobiana no contexto dos seus estudos. Apesar dessa incongruência, esse recorte da nossa conversa admite informações significativas para o estudo.

[31] Apostol (1967, p. 254) também define a derivada direcional em termos da derivada total. Quando $\boldsymbol{y}$ é um vetor unitário, a aplicação $\boldsymbol{T}_{\mathbf{a}}$, definida por $\boldsymbol{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ é chamada de derivada direcional de $\boldsymbol{f}$ no ponto $\boldsymbol{a}$ na direção do vetor $\boldsymbol{y}$. É comum que livros de Cálculo definam a derivada direcional pelo limite, quando ele existe, e não façam menção à derivada total. De modo geral, o aluno que está cursando suas primeiras disciplinas de Cálculo consulta uma variedade de livros-texto e as diferenças nas abordagens desses (e às vezes até a nomenclatura) tendem acentuar a importância de aspectos sintáticos utilizados para representar conceitos de Cálculo.

variáveis. Cada uma das coordenadas desta função, $\vec{i}$ e $\vec{j}$, é dada por uma função de duas variáveis. Então o jacobiano da função $\vec{f}$ é a matriz calculada pelo gradiente da coordenada $\vec{i}$ na sua primeira linha. A segunda linha do jacobiano seria o gradiente da segunda função, $\vec{j}$. Se tiver mais coordenadas, terá mais linhas.

Depois desta explicação, eu ainda queria saber qual, no entender de Rodrigo, era a utilidade do jacobiano. O jacobiano faz o quê? É usado para quê? Rodrigo acrescentou:

> Pelo que eu entendia, é que é uma maneira mais didática para você calcular derivadas. Para organizar os dados para encontrar a derivada de uma função. [...] Creio que ela dá as direções porque tem os vetores gradientes. Então eu acho que é isso. Ela dá a derivada parcial da função nas várias direções da função na forma de uma matriz. Isso é o que eu entendi por jacobiano. Por exemplo, eu acho que isso pegou muita gente no teste [teste II, item 2]. Eu tentei. Eu não sei se está certo. (RODRIGO, 03-09-01, p. 2).

Respondi para Rodrigo que eu também não sabia se a resposta dele estava certa porque eu não sabia fazer o jacobiano. Rodrigo (03-09-01, p. 3) explicou: “Eu fiz o exercício na lista. Conferi. Bateu. Só que agora no teste ele mudou. Não colocou as mesmas funções. O que eu fiz na lista eu tentei reproduzir aqui. Não sei se está certo”.

Aprende para reproduzir. O que Rodrigo aprendeu no exercício, tentou reproduzir no teste.

5.2.5 A derivada direcional e a derivada de um campo escalar com relação a um vetor

O primeiro exercício do segundo teste trouxe uma dúvida para os alunos da turma. Deveriam trabalhar com “a derivada de um campo escalar com relação a um vetor” ou com “a derivada direcional?”. O exercício do teste era isomorfo ao exercício da lista (APOSTOL, 1967, p. 263, n. 6). Eu pedi que Rodrigo me contasse o que ele tinha pensado na hora em que fez o teste. As falas de Rodrigo neste trecho vêm da transcrição da nossa conversa do dia 3 de setembro de 2001 (p. 5-6).

Teste II, 30-08-01, exercício 1.

1) **Dado o campo escalar f diferenciavel no ponto *P* em R^2, suponha que $f'(P; v) = 1$ e $f'(P; w) = 2$ onde**
   $v = i + j$ e $w = i - j$.
   a) Qual é o lugar geométrico dos vetores *u* tal que $f'(P; u) = 3$?
   b) Calcule $\nabla f(P)$.
   Observação: o vetor u reside em $T_P R^2$. Não precisa usar isso para resolver esse exercício.

Rodrigo disse: "Eu caí num dilema porque no APOSTOL tinha um exercício parecido com isso aqui, que eu resolvi também quando eu fiz a lista".

APOSTOL, p. 263, exercício 6; fez parte da lista.

6) **Given a scalar field differentiable at a point *a* in R^2. Suppose that $f'(a; y) = 1$ e $f'(a; z) = 2$ where $y = 2i + 3j$ e $z = i - j$. Make a sketch showing the set of all points (x, y) for which $f'(a; xi + yj) = 6$. Also, calculate the gradient $\nabla f(a)$.**

No APOSTOL, ele não falava nada do vetor unitário na questão. Foi assim, eu fui resolvendo a questão, só que na hora de multiplicar pelo vetor ***v*** [semelhante ao exercício 1, teste II, onde $f'(\mathbf{P}; \mathbf{v}) = 1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$] eu pegava o vetor unitário. Ou seja, eu procurava, este vetor tinha módulo 1, por exemplo.

Assimilar o problema à técnica. Rodrigo tenta adaptar o exercício do teste ao formato do exercício da lista. De acordo com MASLOW (1970, p. 13), isto é uma característica da *ação centrada nos meios*, onde existe a preocupação a respeito de *como uma frase é feita*, em detrimento *do que está dito* [ênfase minha].

> Então para eu fazer esse vetor ficar unitário, tive que dividir **i** por raiz de dois e **j** por raiz de dois. Eu tentei fazer isso a primeira vez para resolver no APOSTOL. Daí eu comparei com as respostas no livro e a resposta não deu. Então eu não dividi. Vou usar o vetor; e aí deu. Então deu certo. Eu pensei: o exercício no teste também é assim. Por que aconteceu isso? Só que nesta questão ele não falava da derivada direcional. Eu comparei, e em todas as outras questões ele falava da derivada direcional. Ele dividia pelo módulo do vetor. Tem que encaixar o unitário. Mas nesta questão ele não falou da derivada direcional, então eu falei, se ele não fala da derivada direcional, só pode ser do campo escalar, porque a derivada do campo escalar enquanto vetor é maior que o unitário. É múltiplo do unitário. Como o APOSTOL define. [...] No exercício, ele não fala que é derivada direcional. Daí eu não dividi. Não usei o vetor unitário e deu a resposta, se usava unitário não dava a resposta.

Rodrigo procura formas e palavras-chave nas questões para tirar suas dúvidas. Recorre às definições e à terminologia. Rodrigo até perguntou por que aconteceu isso, mas não procurou descobrir por que existe uma diferença entre a derivada direcional e a derivada de um campo escalar com relação a um vetor.

> **Confirmação pela resposta no livro.** Não há como interpretar o problema, em relação aos procedimentos matemáticos apropriados, para além das definições dadas.

Rodrigo continua a contar sobre sua dúvida na hora do teste:

> Eu falei assim: "É bem parecido com o exercício. Só mudaram os números". Eu até perguntei para o auxiliar didático: "O que é que a gente faz agora?". Porque no livro, se você dividir, não dá a resposta. Se você não dividir, dá. Ele falou que o exercício no teste não "fala nada sobre derivada direcional", e ficou assim. Então não pode dividir. Mas eu acho que, com certeza, tem gente que dividiu. Tem gente que multiplicou por 1 sobre raiz de dois. Agora não sei.

> **Confirmação pelo auxiliar didático.** Procura confirmação do outro.

Contei ao Rodrigo o que eu entendi. Embora não tenha feito os exercícios, achava que era preciso dividir pelo módulo. Na hora da nossa conversa, não sabia que existe uma diferença entre a derivada direcional e uma derivada de um campo escalar com respeito a um vetor. Eu estava duvidando do procedimento de Rodrigo, que foi correto. Então Rodrigo acrescentou: "Lembrando daquilo que eu fiz, não dá para dividir. Vou deixar. A resposta é bonitinha". (RODRIGO, 03-09-01, p. 5-6).

> **Confirmação pela forma da resposta.** Até a forma da resposta pode indicar se os procedimentos utilizados são apropriados.

A interação de Rodrigo com este exercício sobre a derivada de um campo escalar com respeito a um vetor, no teste e na lista, exemplifica o esforço que Rodrigo faz para aprender a matéria e a sua preocupação em acertar os exercícios tanto no teste quanto na lista. Rodrigo, nos estudos, procura entender "por que acontece isso". O meio para entender, neste caso, é uma comparação com outros exercícios no livro-texto. Na falta de muito apoio em significados a respeito do que são estas derivadas, para diferenciar entre a derivada de um campo escalar com relação a um vetor e a derivada direcional, Rodrigo associa os procedimentos de resolução com os tipos de derivadas. Por exemplo, o auxiliar didático forneceu informações importantes para Rodrigo decidir o que fazer no teste quando disse que o exercício não "fala nada da derivada direcional". Na fala de Rodrigo, aparece a importância que ele atribui à tarefa de aprender como acertar os exercícios. Para verificar sua solução, procura nas respostas do livro-texto, faz comparações com os procedimentos de outros exercícios, confirma com o auxiliar didático e até ganha confiança ao constatar que a resposta ficou "bonitinha". A confirmação vem do outro, e não da confiança adquirida por entender o que são as derivadas e porque uma é dividida pelo módulo do vetor de direção e a outra não.

> **Preocupação com estar correto.** De acordo com Maslow, uma superpreocupação no sentido de estar correto caracteriza uma pessoa que se esforça para satisfazer necessidades de deficiência.

5.2.6 Uma curva de nível e o vetor gradiente

Para obter um melhor entendimento da compreensão que Rodrigo está desenvolvendo, eu trouxe para nossa conversa, no dia 03-09-01, um exemplo do APOSTOL que aborda gradientes em termos de uma curva:

> **APOSTOL, p. 265, exemplo 3.**
>
> **Let *f* be a nonconstant scalar field, differentiable everywhere in the plane, and let *c* be a constant. Assume the Cartesian equation *f*(x, y) = *c* describes a curve *C* having a tangent at each of its points. Prove that *f* has the following properties at each point of *C*:**
>
> **(a) The gradient vector ∇f is normal to *C*.**
>
> **(b) The directional derivative of *f* is zero along *C*.**
>
> **(c) The directional derivative of *f* has its largest value in the direction normal to *C*.**

Abri o livro-texto neste exemplo para ver como Rodrigo entende a propriedade pela qual o vetor gradiente ∇f é normal à curva *C* (parte (a) no exemplo do APOSTOL). Depois de ler essa questão, Rodrigo comentou:

> Engraçado. Tudo isso eu tentei entender quando eu estudei. Eu não sei. Mas o STEWART faz um negócio que eu acho até bem simples. Pega uma superfície, coloca uma curva, e ele fala assim, então, como a curva naquele ponto existe e o produto escalar é zero... mais ou menos isso. Então vai concluindo que o vetor gradiente é perpendicular. Ele faz uma demonstração até fácil de entender. Ele é bem mais fácil do que o APOSTOL. (RODRIGO 2001, 03-09-01, p. 9).

Reconhecimento da autoridade. Rodrigo, na sua fala, geralmente explica o que estudou em termos dos autores e do professor. Suas explicações são despersonalizadas.

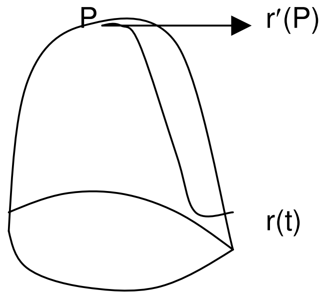
Rodrigo está citando a abordagem geométrica. Eu queria saber, neste ponto, em qual das formas de definição do produto escalar Rodrigo está pensando. Queria saber se ele está pensando mais pelo lado da geometria ou mais analiticamente, e perguntar se o autor STEWART usou coseno ou não para calcular o produto escalar.

Rodrigo respondeu de memória (sem ter a figura de STEWART na mão):

> Não, o STEWART faz os desenhos assim (ver figura 5-12). Usou a intuição. “t” pertence à curva. Ele fala assim, tem uma superfície, corta com um plano, sei lá, tem uma curva assim e ele parametriza a curva. A curva pode ser escrita como a função vetorial. Daí ele fala assim que a derivada dessa curva em qualquer ponto é r′(t). Então você tem, por exemplo, um ponto t. Você quer saber r′ nesse ponto, r′(t). Ele faz um desenho lá e mostra que o vetor gradiente é normal para cima. Ele concluí, fala assim. Ele usa a definição da derivada direcional. Como a derivada no ponto t tem valor e o produto escalar é zero, a coisa é assim. Você pode concluir que o vetor é perpendicular. Uma demonstração até fácil para fazer. (RODRIGO 2001, 03-09-01, p. 9).

Rodrigo sabia, desde a disciplina de Geometria Analítica, que se o produto escalar entre dois vetores é zero, eles são perpendiculares. Eu queria saber qual tinha sido o seu entendimento a respeito da perpendicularidade e do gráfico da situação citada no STEWART. Quando eu comecei a fazer o gráfico de uma curva no plano para representar uma curva de nível e um vetor tangente desta curva, em associação com o exemplo 3 do APOSTOL citado anteriormente (p. 122), Rodrigo tomou posse do papel e da caneta e começou a fazer o desenho de uma superfície (ver gráfico 5-11) que corresponde ao gráfico no STEWART, explicando:

> Você quer saber no ponto P. Eu não sei falar direito. Ele fala que a derivada em qualquer ponto dessa curva seria r′(t). Ele faz esta relação aqui:
>
> $$\nabla f(P) \bullet r'(P) = 0 \qquad (1)$$
>
> sem saber sobre a perpendicular ainda [o vetor gradiente perpendicular à tangente, que seria r′(t)].



Representação do gráfico, tal como realizada por Rodrigo.

Figura 5-11

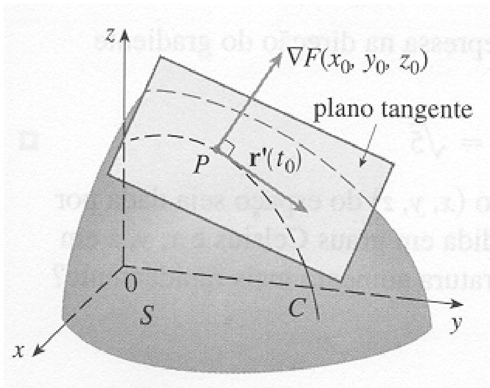


Gráfico extraído do STEWART, v. 2, p. 934.

Figura 5-12

Âncora numa imagem não-maleável. O conhecimento de Rodrigo está "preso" à imagem do livro-texto. Minha tentativa de explicar com uma curva de nível não "combinou" com a superfície que Rodrigo estudou no STEWART. Além disso, STEWART faz referência à *superfície de nível*, algo de que Rodrigo aparentemente não se deu conta na sua interpretação da explicação de STEWART.

Interrompi a fala do Rodrigo para perguntar sobre a equação que ele escreveu: "Você sabe de onde veio esta equação [(1), acima]?".

Rodrigo deu uma resposta rápida: “Definição”, e continuou a explicar: “Daí ele fala assim no livro: bom, como a derivada desse valor existe e é diferente de zero, não nula, então essa relação dá zero e concluímos que isso é perpendicular”. (RODRIGO, 03-09-01, p. 9-10).

São evidentes e comuns, na fala do Rodrigo sobre a Matemática, citações dos autores e do professor. O conhecimento matemático pertence às autoridades. Rodrigo ainda não toma posse daquilo que está estudando. Rodrigo diz que tenta desenvolver sua compreensão dos teoremas, definições, equações e relações elaborados na sala de aula e nos livros-texto através das suas aplicações nos exercícios das listas. Mas os exercícios, na sua maior parte, envolvem o desencadeamento de procedimentos e técnicas indicados pela terminologia, sem exigir conhecimento a respeito do que está por trás dos procedimentos.

Eu desconfiei que Rodrigo, assim como as suas duas colegas que faziam parte da pesquisa, estava fazendo ligações entre as representações geométricas do vetor gradiente e as curvas ou superfícies de nível que eles foram usando nos procedimentos analíticos para a resolução de exercícios. Minha conversa com Rodrigo confirmou que os aspectos geométricos estavam sendo deixados ao lado, uma vez que eles não tinham sido exigidos nos exercícios, não foram bem elaborados na aula e eram escassos no texto principal, o APOSTOL.

5.2.7 Correspondências entre os testes e as listas: Álgebra Linear, Física e Cálculo

A maioria dos recortes das falas de Rodrigo nesta seção foram tiradas das transcrições da nossa conversa do dia 20 de setembro de 2001. Essa conversa aconteceu numa quinta-feira à tarde, no mesmo dia em que, mais cedo, Rodrigo tinha passado por um teste de Cálculo. No dia anterior, ele tivera testes de Física e Álgebra Linear. Rodrigo tinha passado o fim-de-semana anterior em casa, em Brasópolis, onde ele coordenou um dos eventos para a celebração do centenário da sua cidade. Por causa desses compromissos, Rodrigo não conseguiu estudar tanto quanto gostaria, o que aumentou sua preocupação com as avaliações.

No dia anterior, o teste de Álgebra Linear não seguira a lista de exercícios. Rodrigo ficou “nervoso” durante o teste e “travou” na sua resolução. O teste de Física, como sempre, seguiu a lista e Rodrigo passou por ele com “tranqüilidade” e saiu “aliviado”. No teste de Cálculo, naquele mesmo dia, Rodrigo resolvera o primeiro exercício do jeito do professor (que tinha desenvolvido a questão na aula, na véspera do teste), de forma que "seria uma coisa inquestionável".

A Álgebra Linear. O teste de Álgebra Linear representou um desafio. O primeiro teste de Álgebra Linear tinha sido fiel à lista de exercícios. Mas Rodrigo comentou que este teste não correspondia à lista de exercícios, dizendo:

> A professora fugiu totalmente da lista. Exercícios que eu *nunca*... Não. Exercícios que foram difíceis. Mas ela não trabalhava exemplos assim. Daí eu fiquei... Travei na hora. Não consegui fazer. Fui mal neste teste. (RODRIGO, 20-09-01, p. 1).

Logo depois, Rodrigo foi buscar o que ele não tinha conseguido entender no teste, conforme o seguinte comentário:

> Eu peguei até dois livros de Álgebra Linear diferentes do livro-texto para começar a estudar já, [para] esta prova de Álgebra Linear. Sabe por que? Eu estudo. Eu estudei Álgebra Linear. Eu fiz inteirinha a lista. Tirei todas as dúvidas. Deve ser alguma coisa encaixada. A gente presta atenção na aula. Anota tudo. E na hora deu nervoso. Não sei se nervoso, não consegui fazer. Não consegui. Eu fiquei assim meio... Desanimei um pouco. Falei: não posso ficar desanimado por causa de um teste. Tenho que ir atrás agora do prejuízo. (RODRIGO, 20-09-01, p. 1).

Desânimo. A ausência de entendimento suficiente para resolver exercícios provoca desânimo.

Rodrigo fez tudo que sabia fazer para se dar bem no teste: prestou atenção na aula, anotou tudo, fez a lista inteira e tirou todas as dúvidas. Mas, *como* isso foi feito? Pela nossa conversa sobre Álgebra Linear, não podemos dizer *como* Rodrigo fez tudo isso. Prestou atenção com um olhar crítico? Fez as listas para entender o porquê dos procedimentos? Tirou dúvidas que aprofundaram seu entendimento das relações matemáticas? Ou, pelo contrário, sua aprendizagem serviu principalmente para "reproduzir" no teste os métodos de resolução dos exercícios da lista? Rodrigo mesmo responde a isso voltando a falar sobre as questões do teste:

> Eu fiz metade da primeira questão, só. Eu não consegui fazer as outras. Fiquei nervoso. Estava tentando relacionar as coisas, mas acho que se ela tivesse trabalhado exemplos mais assim na sala de aula, neste tipo, ou na lista mesmo, se tivesse sugerido exemplos assim, eu acho que eu não faria tão à toa como eu fiz. Daí eu fiquei desanimado e tenho que correr atrás do prejuízo. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 2).

O desconhecido. De acordo com Maslow (1970, p. 154-155), o desconhecido pode ser considerado tanto como algo atraente quanto como ameaça. Interpreto isso em relação aos exercícios ou problemas desafiadores no âmbito de educação: eles podem ameaçar o aluno em termos da sua segurança na disciplina. Ou, em outras situações, eles podem ser concebidos como oportunidades para explorar e se envolver na matéria.

A Física. Rodrigo contrapõe o teste de Álgebra Linear ao teste de Física, que também acontecera no dia anterior: “No teste de Física eu fui bem. Em Física eu tenho quase certeza que eu fui bem porque eu fiz com tranqüilidade. Quando faço com tranqüilidade, confiante, eu saio mais aliviado. Eu acho que eu fui bem”. (RODRIGO, 20-09-01, p. 2).

Física

Eu entendo a Física assim: eles dão uma lista de vários problemas do HALLIDAY [o livro-texto]. Geralmente, para cada capítulo eles sugerem dez problemas para você resolver, de dez a doze problemas. Então, eu faço todos porque daí na hora do teste eles escolhem um daqueles problemas e colocam no teste. Um problema só. Vale dez pontos. Então é tudo ou nada. Você fez ou não fez. Então, você fica naquela dúvida. Qual deles vai cair? Assim, tem que fazer todos. Qualquer um que cair você já está intimo com ele.

Rodrigo (2001, 20-09-01, p. 3)

> **Alívio.** O alívio que Rodrigo sentia saindo do teste se refere à sua ansiedade ao estudar para o teste que, por sua vez, se refere ao afeto negativo presente nessa interação com a matéria.

O Cálculo. Rodrigo passou a falar sobre a sua preocupação com o teste de Cálculo que tivera naquele dia:

> E da lista de Cálculo eu não fiz todos os exercícios. Fiz o que era para entregar e escolhi alguns dos itens, sem resolver algumas coisas que eu estava vendo lá na lista, mais difíceis, que hoje não sabia fazer. (RODRIGO, 20-09-01, p. 2).

No cronograma da disciplina Cálculo, este teste foi a primeira avaliação onde se cobrou o método dos multiplicadores de Lagrange, justamente na semana que sucedeu a celebração do centenário da sua cidade. Rodrigo comentou que seu estudo para o teste de Cálculo tinha sido "turbulento". Só na véspera do teste Rodrigo conseguira estudar os multiplicadores de Lagrange. Rodrigo não tinha estudado Cálculo desde o último teste, deixando uma lista de aproximadamente 30 exercícios até a última hora. Sobre isso, comentou:

> Fico preocupado com as outras matérias. . . Eu deixei o tempo [passar]. Deixei o Cálculo quieto um pouco. Agora [tenho] testes. Eu fui estudar Física. Eu tinha prova. Teve paralisação na universidade. Cancelou. Perdi um tempo enorme porque eu estudei para Física desde quinta-feira da semana passada. Daí eu estudei. Estudei Álgebra Linear. Cancelou de novo. Deixava as matérias de lado só para aquela, porque ia ter teste. Estudava. Estudava. Cancelou. Eu perdi tempo deixando todas as matérias em débito. (RODRIGO, 2001, 17-09-01, p. 2).

Eu perguntei se daria para estudar as matérias em paralelo, simultaneamente, estudando sem ter teste. Rodrigo respondeu: "Eu estudo. Estudo um pouco. Mas quando tem teste... quando é a véspera de um teste em Física, eu esqueço que eu tenho Cálculo. Só fica a Física na cabeça". (RODRIGO, 2001, 17-09-01, p. 2).

Neste dia, quinta-feira, dia 20-09-01, aconteceu o terceiro teste de Cálculo. Permaneci na sala de aula para pegar os testes emprestados e fazer fotocópias para minhas conversas com os interlocutores da pesquisa. Olhando o primeiro exercício no teste de Rodrigo, vi que sua resolução era uma reprodução da elaboração feita pelo professor na véspera, na sala de aula. O teste teve dois exercícios, sendo o primeiro tratável pela aplicação dos multiplicadores de

Lagrange. Rodrigo acertou a resolução pelos multiplicadores de Lagrange seguindo os passos do professor.

Rodrigo comentou que acreditava que o professor tinha colocado o primeiro exercício no teste “para ajudar todo mundo mesmo”. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 2).

O enunciado do primeiro exercício do teste:

Encontre os pontos da curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ no plano que têm distância mínima e máxima da origem.

é equivalente ao enunciado do APOSTOL, seção 9.15, p. 318, exercício 2 (um dos exercícios da lista para entregar para nota):

Find the maximum and minimum distances from the origin to the curve $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

O enunciado deste exercício, quando proposto pelo professor para resolução em sala de aula, foi o seguinte:

Encontre a máxima e a mínima distâncias da origem ao traço da curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Na aula (caderno do pesquisador, aula de 19-09-01), o professor explicou que é aconselhável fazer uma análise geral do problema antes de tentar encontrar uma solução. Primeiro, identifique a curva: É uma cônica, mas qual cônica? Se fosse uma parábola, não teria uma distância máxima. Iria ao infinito.

Para determinar de qual cônica se trata, o professor desenvolveu a relação:

$$(x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(Ax + By, Bx + Cy)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Ax^2 + Bxy + Bxy + Cy^2$$

e perguntou se $B^2 - 4AC < 0$ seria uma elipse.

Se for uma elipse com a origem no seu interior, não haveria como escapar para o infinito, porque não existe furinho na elipse; trata-se de um conjunto compacto.

O professor colocou a seguinte observação na lousa enquanto descrevia a situação:

Um conjunto $k \subseteq \mathbf{R}^n$ é compacto $\Leftrightarrow$ a) fechado e b) limitado.

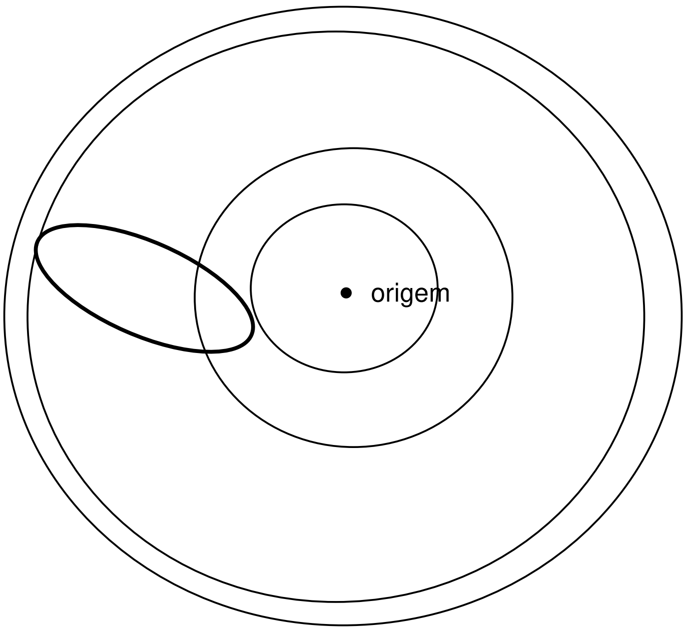
a) k contém todos os seus pontos limite.

b) Existe bola B(0, R) tq $k \subseteq B(0, R)$

a´) $\mathbf{R}^n - k$ é aberto (complemento)

f: "$\mathbf{R}^n$" $\rightarrow$ $\mathbf{R}$ contínua, k compacto $\Rightarrow$ $f|_k : k \rightarrow \mathbf{R}$ tem ponto de máximo e ponto de mínimo.

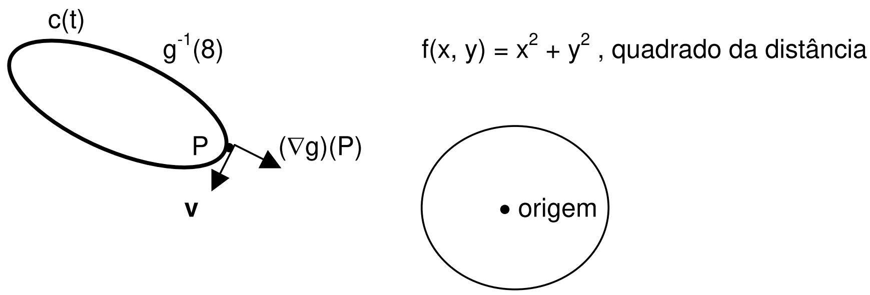
O professor adotou então um olhar geometrizante: Suponha que temos isotérmicas desenhadas como circunferências em $\mathbf{R}^2$ com centro na origem (figura 5-13). Neste caso existe uma distância mínima e uma distância máxima.



Representação de uma elipse e algumas "isotermas", tal como construídas pelo professor.

Figura 5-13

O professor concluiu que tanto o máximo quanto o mínimo existem. Continuou mostrando como o "princípio de Lagrange" pode ser utilizado para encontrar o máximo e o mínimo.



Elaboração geométrica do exercício, tal como realizada pelo professor.

Figura 5-14

Neste momento, o professor afirmou que seu desenvolvimento aproveitava o "princípio de máximo" ou o "princípio de Lagrange".

Para encontrar a distância máxima da origem ao ponto P na elipse, o gradiente da circunferência no ponto P tem que ser perpendicular ao vetor de velocidade da elipse no ponto P, ou seja,

$< \nabla f(P), \mathbf{v} > \; = \; 0$ e

$\nabla f(P) \,||\, \nabla g(P)$, onde

$\nabla(f - \lambda\, g)(P) \; = \; 0$ e
$g(P) \; = \; 8$

$\nabla f \; = \; (2x, 2y) \; = \; 2(x, y)$
$\nabla g \; = \; (10x \; + \; 6y, 6x \; + \; 10y) \; = \; 2(5x \; + \; 3y, 3x \; + \; 5y)$

$5x \; + \; 3y \; = \; \lambda x \qquad (1)$
$3x \; + \; 5y \; = \; \lambda y \qquad (2)$

$(1) + (2) \qquad \lambda \; = \; 8 \qquad\qquad 8(x \; + \; y) \; = \; \lambda(x \; + \; y)$
$(1) - (2) \qquad \lambda \; = \; 2 \qquad\qquad 2(x \; - \; y) \; = \; \lambda(x \; - \; y)$

$\lambda = 8 \Rightarrow 5x + 3y = 8x \Rightarrow x = y$
$\lambda = 2 \Rightarrow 5x + 3y = 2y \Rightarrow x = -y$

1. x = y na cônica: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   A distância da origem é 1.

2. $x = -y$, $x^2 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$
   $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
   $2 = f(P) = f(P')$

Quando o professor encerrou sua resolução, Rodrigo estava com dúvidas e perguntou: "Por que se resolve para os dois valores [de λ]?". O professor respondeu que foi para resolver o sistema. Rodrigo retornou com uma outra pergunta: "Resolvendo normalmente?". O professor respondeu que tem g(P) = 8.

Neste momento, às 9 horas da manhã, o professor passou a resolver mais um exercício. Somente 27 dos 84 alunos da turma estavam presentes. A aula começou com mais ou menos duas dúzias de alunos, provavelmente devido aos testes de Álgebra Linear e Física que aconteceriam naquele dia. No final da aula, Rodrigo, embora ainda presente, desistiu de assistir à resolução do último exercício pelo professor para estudar Física.

No dia seguinte, depois do teste de Cálculo, Rodrigo e eu conversamos sobre a resolução do exercício que utiliza os multiplicadores de Lagrange no teste. Rodrigo afirmou que "foi quase mecânica a resolução dele, porque o professor fez na sala de aula". (RODRIGO, 20-09-01, p. 2). Disse que sua resolução, embora seguindo a resolução do professor, não foi algo que ele decorou. De acordo com Rodrigo, ele tentou resolver como se fosse a primeira vez, acrescentando que, mesmo decorando todos os procedimentos, é preciso saber encadeá-los porque qualquer erro entre um passo e outro compromete todo o exercício.

A resolução desenvolvida por Rodrigo no teste consistiu no seguinte:

Sejam $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, a função distância e $g(x, y) = 8$ a equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$

- Minimizaremos/maximizaremos a função "quadrado da distância": $f(x, y) = d^2$

- Usando os multiplicadores de Lagrange temos que:

$$\begin{cases} \lambda\nabla f = \nabla g & \text{I} \\ g(x, y) = 8 & \text{II} \end{cases}$$

- De I: $\lambda(2x, 2y) = (10x + 6y, 6x + 10y)$

$$\begin{cases} \lambda 2x = 2(5x + 3y) \\ \lambda 2y = 2(3x + 5y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = \lambda x & (1) \\ 3x + 5y = \lambda y & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\longrightarrow$ $8x + 8y = \lambda(x + y)$, $\lambda = 8$
(1) - (2) $\longrightarrow$ $2x - 2y = \lambda(x - y)$, $\lambda = 2$

- Para $\lambda = 8$ temos que $5x + 3y = 8x$, $3x = 3y$, $x = y$

- Para $\lambda = 2$ temos que $3x + 5y = 2y$, $3x = - 3y$, $x = -y$

- Para $x = y$ voltamos à cônica:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \qquad 16x^2 = 8 \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Para $x = - y$ voltamos à cônica:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \qquad 4x^2 = 8\ x = \pm \sqrt{2}$$

Os pontos em questão são:

$$\underset{P_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \underset{P_2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \underset{P_3}{(\sqrt{2}, \sqrt{2})}, \underset{P_4}{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

Para o primeiro grupo de pontos temos:

$f(P_1) = f(P_2) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, sendo pontos de distância mínima.

Para o grupo seguinte:

$f(P_3) = f(P_4) = \sqrt{2 + 2} = 2$, sendo pontos de distância máxima.

Além de seguir a resolução do professor, as justificativas desencadeadas por Rodrigo em torno deste exercício refletem a fala do professor. Levaram-me de volta à aula da véspera. Por exemplo, Rodrigo, como o professor, resolveu o problema usando o "'quadrado da distância': *f*(x, y) = d^2, para não ficar com o trabalho de mexer com a raiz". Diz Rodrigo, parafraseando o professor: “Se a função de distância é máxima, seu quadrado também é”. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 7).

Rodrigo continua: “Aí, eu vejo os multiplicadores de Lagrange. Os gradientes são múltiplos um do outro”. (RODRIGO, 20-09-01, p. 7).

Mas Rodrigo apontou uma diferença entre a forma utilizada pelo professor na lousa e aquilo que encontrou nos estudos com o APOSTOL e o STEWART. De acordo com Rodrigo,

> o que aconteceu, veio uma dúvida com ela. O que o APOSTOL fala é que o gradiente de f é λ vezes o gradiente de g. Este λ estaria aqui com ∇g. Mas na resolução deste exercício feita pelo professor, foi colocado que $\lambda\nabla f = \nabla g$. Ele não fez como no livro, ou seja, $\nabla f = \lambda\nabla g$.

Rodrigo se sentiu incomodado com esta diferença durante a aula da véspera do teste:

> Na hora eu tive vontade de perguntar para ele: “por que você colocou λ do lado de lá e não do lado de cá?”. Será que dá a mesma coisa colocando λ do lado de cá? Daria a mesma coisa? Seria mais complicado, mais fácil? Eu fiquei de perguntar isso para ele, mas acabei não levantando a questão porque eu esqueci. Então, naquela hora eu lembrei que o professor fez assim. Então antes de fazer de uma outra maneira que eu não sei se vai dar certo, vamos fazer do mesmo jeito que o [professor] fez. Que seria uma coisa inquestionável. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 7-8).

“Dependência” da autoridade. Para acertar o exercício, é melhor seguir os procedimentos do professor do que arriscar outra coisa.

Rodrigo, voltando à sua resolução do exercício do teste, que segue aquela do professor, anota: “Daí eu fiz e a resposta saiu. Somei e subtrai [das equações (1) e (2), na maneira mostrada pelo professor]. Nunca aprendi a fazer isso com um sistema linear”. Rodrigo parou e perguntou para si mesmo: “Você pode somar e depois subtrair, e tem os valores? Não sei se é em todo sistema que você pode fazer isso”. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 8).

Eu queria saber qual a interpretação geométrica que Rodrigo estava desenvolvendo a respeito dos multiplicadores de Lagrange. Perguntei se ele podia fazer um esboço para representar este exercício geometricamente, mencionando, mas não mostrando, a representação geométrica escrita pelo professor na lousa (figuras 5-13 e 5-14).

Rodrigo respondeu: "Essa parte de esboço, eu não estou afiado nessa, não". Rodrigo sabia que o professor havia mostrado a curva e uma circunferência que se tocavam. Ele continuou: "Na hora essas curvas de nível se tocam... tem uma coisa assim. Eu não sei explicar como é porque eu estudei meio mecanicamente para este teste. Se tivesse mais tempo para estudar, eu acho que teria aprofundado mais esses conceitos". (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 9).

Eficácia dos meios. Dada a escassez de tempo, os estudos se concentraram na capacidade de desenvolver as resoluções dos exercícios.

Uma vez que Rodrigo não estava enxergando os multiplicadores de Lagrange graficamente, eu queria ter uma idéia do seu entendimento a respeito da relação entre os vetores gradientes, $\lambda\nabla f = \nabla g$, na sua resolução. Perguntei de onde vinha esta relação. Rodrigo respondeu: "quando eu estava estudando, na hora em que as curvas se tocam, os vetores gradientes são paralelos. Se fossem paralelos um seria múltiplo do outro". Neste momento, Rodrigo reparou, pensando sobre a aula da véspera e sobre o que o professor tinha escrito na lousa: "Deve ser por isso que ele colocou λ aqui. Tanto faz um lado ou outro". (RODRIGO, 20-09-01, p. 9).

Neste momento, Rodrigo fez uma ligação entre os vetores paralelos e a proporcionalidade entre eles. Ele saiu das particularidades isoladas deste exercício para um entendimento mais generalizado.

Seguindo a fala de Rodrigo, eu perguntei por que ele estava procurando o ponto onde as curvas se tocam. Rodrigo respondeu:

> É difícil responder a você. Apesar de estar estudando, acho que não ficou fixado na cabeça. Eu acho que eu não seria capaz de responder. Eu até estudei. Eu li o STEWART. O STEWART mostra exemplos, aproximando e afastando. Eu acho que na parte dos exemplos, o STEWART é muito bom. Ele é melhor do que o APOSTOL. Você pode, assim, ver geometricamente o que está acontecendo. (RODRIGO, 2001, 20-09-01, p. 9).

Rodrigo valoriza as representações geométricas num sentido dinâmico, “aproximando e afastando”, mas, como nas representações analíticas, ainda sente dificuldade na hora de enxergar os porquês “por trás” destas representações.

> **Fixar.** Rodrigo procura entender e fixar como é que os procedimentos e definições são utilizados para resolver os exercícios. É essa estrutura, essa cadeia lógica, que ele procura.

5.2.8 Os multiplicadores de Lagrange

No questionário final, que Rodrigo completou em casa, perguntei sobre os multiplicadores de Lagrange: “O que é o método dos multiplicadores de Lagrange para você?”. Rodrigo, coerente com seus estudos, respondeu factualmente à questão: “Consiste em achar máximos ou mínimos de uma função restrita a uma certa condição”. Ao seguinte item do questionário, “Descreva o que seria uma compreensão boa (pelo aluno de Cálculo) do método dos multiplicadores de Lagrange”, Rodrigo respondeu: “Seria ter a dinâmica para resolver as equações que este método exige”.

A interação de Rodrigo com os multiplicadores de Lagrange foi limitada e teve por enfoque as habilidades necessárias para desencadear os passos para resolver exercícios típicos. Ele encontrou dificuldades, como é comum para os alunos, resolvendo o sistema de equações no qual tem que encontrar os valores das variáveis. Sem resolver o sistema, não encontra a solução.

Queria saber quais “recursos” Rodrigo estava aproveitando para desenvolver seu entendimento dos multiplicadores de Lagrange. No questionário final, forneci uma lista com as seguintes instruções: “Liste em ordem de significado as estratégias que você utilizou para desenvolver seu entendimento do método dos multiplicadores de Lagrange”. Segue-se a numeração atribuída por Rodrigo:

__3__	aulas [do professor]	
____	conversa com [o professor]	
__4__	tirando dúvidas (com quem?) →	(Rodrigo anotou na “Monitoria”.)

5	fazendo exercícios
6	aulas de exercícios
____	monitoria
____	conversa com Dale
____	conversa com colegas
7	fazendo o teste e a prova
2	estudo do livro do Apostol.
1	estudo por outro livro (qual/quais?) → (Rodrigo anotou no "STEWART".)
____	conversa com outro professor
____	outro (o que?)

Rodrigo mencionou os livros didáticos, o STEWART, texto principal do primeiro semestre (Cálculo de Uma Variável) e o APOSTOL, o livro-texto principal para sua turma na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis como fontes principais para o seu entendimento. Logo na terceira e na quarta posições, Rodrigo indica "aulas do professor" e "tirando dúvidas na monitoria". Estas quatro indicações são representativas do fato de que seu envolvimento com a matéria é focalizado tanto nas "fontes" do conhecimento matemático quanto em uma preocupação de desenvolver seus argumentos nos moldes daqueles elaborados pelo professor e pelos autores.

5.2.9 Passando "batido"

Na conversa coletiva com os três interlocutores deste semestre, eu retomei a fala de que eles estão estudando para os testes e às vezes, por várias razões, são levados a decorar a matéria. Perguntei: "O que seria melhor para a aprendizagem?". Rodrigo respondeu:

> Não sei. Porque no colegial, por exemplo, era assim: o professor dava o conteúdo, você fazia a prova. Mas lá no final do ano, se você falasse: "como faz este exercício do começo do ano?" Eu sabia fazer. Agora, se você me der um exercício de Lagrange eu não vou batalhar até conseguir me lembrar. Não sei se é porque é muito rápido que passa. Eu acho que os Cálculos de Uma Variável e de Várias Variáveis não deveriam ser dados em um semestre cada um. Essa matéria faz uma base para você começar a aprender as coisas que você vai usar na pós-graduação. Agora, se você passa batido... Tudo bem, você pega porque tem necessidade de pôr todo mundo no caminho, mesmo. [...] Hoje, se me der uma integral onde você tem que usar as técnicas de integração, não dá. Por que? Foi corrido. Foi corrido. Você tem que aprender para fazer a prova. Você não aprende para adquirir o conhecimento. Você aprende para fazer a prova. É aquilo que vai mandar em você. [...] Parece uma coisa mecanizada. (RODRIGO, 2001, conversa coletiva, 08-11-01, p. 22-23).

Em resumo: Rodrigo se preocupou com sua aprendizagem de Cálculo. Procurava tirar o máximo possível da aula e aproveitava as aulas de exercícios e as aulas de monitoria ministradas pelos auxiliares didáticos. Seu esforço enfocava a resolução dos exercícios das listas, que exigiam uma familiarização com a nomenclatura para ser capaz de diferenciar entre os procedimentos a serem aplicados. A fala de Rodrigo não indicou um envolvimento com a Matemática em si, mas uma preocupação no sentido de acompanhar o professor e os autores dos livros-texto para acertar exercícios. Não houve uma procura para compartilhar um desafio ou algo de seu interesse. Minha tentativa de introduzir um exercício não-típico em uma conversa encontrou pouca análise por parte de Rodrigo, que não conseguia utilizar alguns conteúdos fora do contexto dos exercícios das listas.

5.3 A base para a construção dos tipos ideais de aprendizagem

O próximo capítulo constrói no formato do tipo ideal, duas relações diferenciadas que o aluno desenvolve com a Matemática, delimitando tendências específicas que Lucas e Rodrigo demonstraram nas suas interações com o Cálculo. Estes tipos ideais de aprendizagem são fundamentados nos recortes deste capítulo que, para Rodrigo, se centraram nas avaliações e, para Lucas, se mostraram desvinculados das avaliações.

As avaliações na disciplina serviram como pano de fundo para as interações entre Rodrigo e o Cálculo. A sua aprendizagem era dirigida, em grande parte, pelos testes e provas. Ele buscava certezas na reprodução de representações de resoluções para os exercícios propostos pelo professor. Isto corresponde, em parte, às suas dificuldades em acompanhar a apresentação da matéria em aula e pelo autor do livro-texto principal. Estas dificuldades foram amplificadas pela pressão que o professor, às vezes, promoveu para que o aluno estudasse para nota; uma pressão presente na cobrança quinzenal de listas de exercícios e testes.

Lucas também estudou para as provas de Cálculo de forma utilitária, mas com menos preocupação em fazer tudo o que foi proposto pelo professor. Lucas escolhia fazer os exercícios mais representativos, que correspondiam às aulas e aos gostos do professor e à apresentação do livro-texto. Ao se sentir capaz de obter a nota que ele considerava adequada, abria mão do entendimento de alguns tópicos. A cobrança de nota era menos presente do que para Rodrigo, sendo que o programa de avaliações previa somente três provas depois de um único teste no começo do semestre. Lucas, no começo do semestre, explorou no livro de Cálculo assuntos diferentes dos tópicos da aula, correndo atrás do "prejuízo" na véspera da primeira prova. Isto quer dizer que ele desenvolveu um equilíbrio entre seguir seus interesses e afinidades na disciplina e obedecer o programa da disciplina como desenvolvido pelo professor.

Lucas levantava conjecturas, imaginava e arriscava idéias intuitivas e lúdicas ao pensar sobre atividades envolvendo o Cálculo. Desenvolvia estratégias próprias para atacar "desafios" como a construção do toro. Rodrigo, por sua vez, procurava entender o raciocínio do professor e dos autores dos livros-texto de forma a adquirir o conhecimento necessário para desencadear os métodos de resolução para os exercícios das listas. Os exercícios e atividades incomuns que eu levei para algumas das conversas despertaram o interesse de Lucas e abriram caminhos para seu pensamento reflexivo e para seus questionamentos. Por outro lado, tal tipo de atividade criou uma espécie de barreira para a conversa com Rodrigo; provavelmente, em parte, devido ao fato de que sua interação com a matéria era restrita principalmente à resolução de exercícios do livro-texto, de forma carente em significados.

Aprendizagem pessoal e aprendizagem afastada: tipos ideais de aprendizagem

6

> More sensitive observers are able to incorporate more of the world into the self, i.e., they are able to identify and empathize with wider and wider and more and more inclusive circles of living and nonliving things. As a matter of fact, this may turn out to be a distinguishing mark of the highly mature personality. It is likely that some degree of such identification makes possible some corresponding degree of experiential knowledge, by becoming and *being* what is to be known rather than remaining totally the outside spectator.
>
> Abraham Maslow (1966, p. 50, grifo do autor)

O tipo ideal de aprendizagem é um construto conceitual que "idealiza" um número limitado de aspectos de aprendizagem. A construção do tipo ideal neste estudo, de acordo com os procedimentos enumerados na seção 2.2.2, identifica e acentua características da interação do aluno com a Matemática de forma a delinear respostas para as inquietações que deram origem a este estudo, seguindo as pistas dadas pelas "texturas" recorrentes na falas e nos enfoques que apareceram nas conversas com Lucas e Rodrigo. Por meio do que foi falado, do como isso foi dito e das temáticas que eles mesmos escolheram introduzir nas conversas, encontro tendências nas suas preocupações e ações que se referem à sua interação com a Matemática e que fundamentam a construção dos tipos ideais de aprendizagem: *aprendizagem pessoal* e *aprendizagem afastada*.

Enquanto a conceptualização dos tipos ideais de aprendizagem têm base nos recortes unilaterais das conversas com Lucas e Rodrigo, levo em consideração e incluo recortes das interlocuções com os outros alunos, tanto para complementar e acentuar quanto para identificar e caracterizar as tendências apresentadas no capítulo 5. Entendo que uma frase em si ou um recorte isolado de uma conversa não define uma característica do tipo ideal. É a multiplicidade de falas, cada uma contextualmente significativa, que vão dialogar entre si para esclarecer as tendências nas razões e motivações para os estudos do aluno que medeiam sua relação com a Matemática. Desenvolvi a partir desta análise um conjunto de características definidoras referentes à *aprendizagem pessoal* e à *aprendizagem afastada*, que apresento no quadro 6-1. Mais adiante no capítulo, no quadro 6-2, utilizo algumas dessas características para caracterizar as atividades matemáticas que medeiam o desenvolvimento desses tipos de aprendizagem.

Desenvolvi uma concepção de aprendizagem como uma relação que o aprendiz constrói com o conhecimento com base em: a) minha ótica, que leva em consideração os aspectos afetivos e cognitivos das preocupações e ações do aluno referentes à sua interação com a Matemática, b) as interlocuções com os alunos neste estudo e c) os conceitos de conhecimento experiencial e conhecimento espectador (MASLOW, 1966). Utilizo motivações psicológicas junto com o sentido que o aluno atribui às atividades na matéria para fundamentar a tipificação da sua relação com a matéria. Destaco, por um lado, recortes das conversas com os interlocutores e, por outro, os teóricos Maslow e Weber.

A seguir, no quadro 6-1, elaborado por mim, apresenta características da *aprendizagem pessoal* e da *aprendizagem afastada*.

Características dos tipos ideais de aprendizagem

Aprendizagem pessoal	Aprendizagem afastada
Necessidade de crescimento referente a compreensão: Desenvolvimento de compreensão e habilidades Considera o desconhecido atraente	***1) Necessidade de segurança ou 2) uma "indiferença":*** Segurança ou obrigação Considera o desconhecido uma ameaça
Ação cognitiva referente a valores e por afeto positivo: Foco centralizado no problema Espontaneidade Curiosidade Ludicidade Adaptação do meio ao indivíduo	***Ação racional referente a fins, por hábito e por afeto 1) negativo ou 2) neutro:*** Auto-centrada relativa a nota Desenvolvimento de rotina (hábito) Atenção dirigida Esforço Adaptação do indivíduo ao meio
Processo como objetivo da atividade: Busca compreensões e coerências globais em relação à particular. Paciência reflexiva Perde-se na atividade	***Resultado como objetivo da atividade:*** Busca conhecimentos e certezas pontuais. Procura não perder tempo na atividade
Pensamento trans-experiencial: Faz associações livres em torno do "problema" Imagina e cria	***Pensamento contextual:*** Busca associações específicas ao "problema" Categoriza e compartimentaliza
Auto-avaliação: Avalia suas idéias e seus trabalhos em relação às suas próprias experiências.	***Avaliação externa:*** Procura o parecer das autoridades para avaliar suas idéias e seus trabalhos.
Encontra-se na atividade: Identifica-se com a atividade e relaciona-a com suas outras experiências. Através da sua fala, manifesta sua personalidade e seu envolvimento na atividade, além dos conflitos internos desencadeados durante a atividade e da resolução ou não dos conflitos.	***Não se encontra na atividade:*** Preocupa-se em como lidar com a atividade em termos de obter ou manter segurança. Na sua fala predominam as interferências externas e seus êxitos e dificuldades em lidar com a atividade sob essas interferências.
Autonomia/diálogo: Desenvolve idéias e estratégias próprias que se realizam no diálogo.	***Dependência/troca de comunicados:*** Aprende o que o "outro" pensa e o faz sem análise crítica. Troca e arquiva informações.

Quadro 6-1

6.1 Aprendizagem pessoal

A disponibilidade emocional requerida para conhecer uma pessoa é também importante para desenvolver o conhecimento de objetos.

> In such relationships it is characteristic that the knower is involved with what he knows. He is not distant; he is close. He is not cool about it; he is warm. He is not unemotional; he is emotional. He has empathy, intuition for the object of knowledge, i.e., he feels identified with it, the same as it, to some degree and in some manner identical with it. He cares. (MASLOW, 1966, p. 103).

A *aprendizagem pessoal* é uma relação com o conhecimento desenvolvida com base em preocupações diretamente associadas ao conhecimento. Em termos de necessidades psicológicas e tipos ideais de ação (capítulo 3), este tipo ideal de aprendizagem é fundamentado na *necessidade de crescimento referente a compreensão* e na ação *cognitiva referente a valores* e sua associada *afetividade positiva*. Quando a necessidade de compreensão se encontra com o valor cognitivo em uma atividade e com a expectativa de uma experiência positiva, existe a probabilidade de que a *aprendizagem pessoal* se realizará. Mas indícios nas falas dos interlocutores apontam para o fato de que a *aprendizagem pessoal* também exige outras condições para se realizar. As seguintes condições são tão importantes quanto as necessidades psicológicas e os tipos de ideais de ação:

a) **afinidades** – o aprendiz encontra na atividade ou "problema" uma atração valorativa em relação a conceitos, problemas, idéias, relações, técnicas, meios de representação, meios tecnológicos, etc. que já possui ou desenvolve na interação com a matéria;
b) **autonomia** – o aprendiz sente vontade de arriscar (possui *segurança*) e se envolver (compromisso de tempo e energias) com um "problema" (ver p. 109, nota rodapé n. 28 para a conceituação de "problema") com o qual tem afinidades e que desperta a sua curiosidade (*necessidade de crescimento referente a compreensão*); e
c) **diálogo –** o aprendiz encontra alguém com quem pode dialogar em torno dos seus ensaios e erros e estratégias para resolver o "problema".

O aluno motivado pela necessidade de compreensão tende a satisfazê-la por se envolver em atividades com as quais tem afinidades. O *valor cognitivo* e o *afeto positivo* residem principalmente na atividade, e servem como base para que o indivíduo se comprometa com o objetivo da atividade. De acordo com Weber (1991, p. 15), ações *por valor* e *por afeto* "têm em comum que, para elas, o sentido da ação não está no resultado que a transcende, mas sim na própria ação em sua peculiaridade".[32]

Quando este processo traz afetividade positiva e significados cognitivos para o aluno, ele procura um outro ou outros com afinidades e conhecimentos semelhantes para compartilhar a experiência de forma dialógica. A atividade serve como a base para uma interação interpessoal cujas características dependem em parte da atividade, das características pessoais do aluno e do outro e das condições sob as quais se realiza. A diálogo pode ser relativamente freqüente ao longo da atividade ou acontecer com menos freqüência, até acontecer somente no fim da atividade, em um tipo de fechamento.

6.2 Aprendizagem afastada

Nos casos em que o aluno se sente motivado para compensar a necessidade de segurança ou se sente "indiferente" frente a matéria, dificilmente procurará se envolver em atividades além do estritamente necessário para aliviar suas carências. Quando o aluno desenvolve sua relação com a Matemática com base na *necessidade de segurança*, que se caracteriza por ansiedade ou até medo frente as provas, suas ações têm como objetivo principal o alívio desta ansiedade ou medo. O aluno que é "indiferente" à matéria e relativamente confiante de que é capaz de tirar uma nota que ele considera adequada não carrega tal ansiedade na sua relação com a matéria, mas estuda para cumprir uma obrigação. Em ambos os casos, *aprendizagem afastada por necessidade de segurança* e *por "indiferença"*, a relação que o aluno desenvolve com o conhecimento é utilitária, *racional referente a fins*. O aluno se preocupa em seguir o que o professor passa na sala de aula, peneirando esse material, com o objetivo principal de ser capaz de apresentar resoluções

[32] Embora tipifique as ações "cognitiva referente a valores" e "por afeto" com sentidos diferenciados dos tipos ideais de ação "por valor" e "por afeto" de Weber, entendo que a citação de Weber que utilizo aqui é válida para os sentidos que eu atribuo às tipificações "cognitiva referente a valores" e "afeto".

a exercícios típicos nas avaliações. A interação com a matéria é análoga à relação que, segundo Maslow (1966), o cientista ortodoxo mantém com seu objeto de investigação.

> At the beginning of science the word "knowing" meant "knowing of the external physical world," and for the orthodox scientist it still does. It means looking at something that is not you, not human, not personal, something independent of you the perceiver. It is something to which you are a stranger, a bystander, a member of the audience. You the observer are, then, really alien to it, uncomprehending and without sympathy and identification, without any starting point of tacit knowledge that you might already have. You look through the microscope or the telescope as through a keyhole, peering, peeping, from a distance, from the outside, not as one who has a right to be in the room being peeped into. (MASLOW, 1966, p. 49).

Entendo que o aluno possui um "ponto de partida de conhecimento tácito" pelo desdobramento lógico propedêutico da matéria, mas o envolvimento para aliviar a ansiedade ou para cumprir uma obrigação impede, de alguma forma, que o aluno se aproxime da matéria de forma pessoal.

6.2.1 Aprendizagem afastada por segurança

A falta de segurança motiva o aluno a procurar meios eficientes para ser capaz, na hora da prova, de reconhecer os exercícios pelos seus traços externos e rememorar os métodos apropriados para resolvê-los. Procura rotinas de estudo previamente bem sucedidas, que se centram na classificação de exercícios por tipo. Suas interações com o professor, tutor e colegas em torno das atividades (na maioria dos casos, listas de exercícios) consistem primariamente em tirar dúvidas e conseguir soluções para os exercícios recomendados pelo professor. De modo geral, a comunicação em torno deste tipo de atividade se limita a perguntas e respostas, uma espécie de troca de comunicados.

Sair de uma prova "aliviado" reflete a presença da ansiedade na interação com a matéria. O estudo não é primariamente um meio de conhecer, entender e compreender, mas serve para estabelecer a confiança de ser capaz de resolver exercícios na hora da prova e por esse meio aliviar a ansiedade. O aluno procura estratégias ou rotinas que forneçam bons resultados nas provas e poupem tempo e esforço.

Quando as provas avaliam exercícios isomorfos aos exercícios das listas, é eficiente estudar na véspera da prova, adquirindo ou decorando a) uma correspondência entre as dicas lingüísticas nos enunciados dos exercícios e as técnicas que os exercícios utilizam e b) meios para desencadear os passos para conseguir respostas para os mesmos exercícios. E, se na hora de resolver um exercício na prova, o aluno tem um "branco", pode até colar (por exemplo, uma fórmula ou o primeiro passo da resolução) da prova de um colega para engatilhar os procedimentos que já treinou e revisou nos estudos.

6.2.2 Aprendizagem afastada por "indiferença"

Penso em Beto (1999) quando procuro conceptualizar a *aprendizagem afastada por indiferença*. Beto tinha uma predisposição para adquirir o conhecimento de Cálculo a partir da concepção segundo a qual o Cálculo é uma ferramenta para o seu curso de engenharia, no qual o conhecimento matemático necessário seria menor do que aquele exigido do Matemático. Beto foi capaz de relacionar conceitos gerais com os procedimentos das técnicas, mas no âmbito das nossas conversas não mostrava uma aproximação relativa à *aprendizagem pessoal* nem na direção da *aprendizagem afastada* referente à *necessidade de segurança*. Conceptualizo a *aprendizagem afastada por "indiferença"*, como a aprendizagem no qual o aluno se sente relativamente seguro frente às avaliações, mas não encontra na disciplina algo que desperte sua curiosidade para que ele se envolva muito além das exigências básicas do professor.

Maslow ficou surpreso ao encontrar este tipo de "atitude" nos seus estudos sobre motivação e auto-atualização, pois ela estava em dissonância com sua teoria (FRICK, 1975, p. 54-59). De acordo com sua teoria, a pessoa deve agir para satisfazer sua necessidade de crescimento, uma vez que já satisfez suas necessidades de deficiência. Mas, com freqüência, isto não acontece. Maslow reconhece que existem muitas pessoas, principalmente entre os jovens, que têm suas necessidades básicas compensadas, mas não arriscam qualquer ação na direção do crescimento por várias razões, como por exemplo cinismo, niilismo, anomia, impotência, pessimismo, apatia e perfeccionismo.

Maslow, nos últimos anos da sua vida, se preocupou em salvar a integralidade da sua hierarquia; conjeturou que o "impulso" ou a força das necessidades psicológicas varia de pesssoa para pessoa. Algumas pessoas se sentem confortáveis e não avançam além das necessidades de deficiência, enquanto outras, que possuem uma força maior, seriam mais propensas a atuar na direção de crescimento.

Na presente pesquisa, considero que, no âmbito do ciclo básico da graduação e em termos de *aprendizagem afastada por "indiferença"*, interpretações descritivas e explicativas devem levar em consideração, entre outros fatores, a variedade de pressões e obrigações que demandam tempo e energia do aluno. Além disso, devem considerar que o aluno precisa de tempo para se socializar e se envolver em atividades não acadêmicas. Por exemplo, ir a festas e churrascos, jogar baralho, ir ao shopping, praticar uma religião, jogar futebol, ler um livro. Talvez as interpretações maslowianas sofram, em parte, por causa do seu enfoque no desenvolvimento de habilidades mentais e corporais, com um certo desprezo em relação ao lazer e uma desvinculação de aspectos sociais (necessidades de pertencimento) ao descrever a necessidade de crescimento. Este estudo indica que o aluno, às vezes, chega a uma situação que pede mais um descanso do que um compromisso para se envolver em uma atividade atraente na disciplina.

6.3 O aluno e sua relação com a Matemática

Nesta seção, eu me aproximo novamente do aluno com o intuito de acentuar as tendências nas interações com a Matemática que Lucas (1999) e Rodrigo (2001) desenvolveram, mostrando, através de recortes das conversas com vários dos interlocutores, a base maior utilizada na construção dos tipos ideais de aprendizagem.

No primeiro ano da faculdade, após a pressão do vestibular[33], o aluno pode ter uma variedade de preocupações. Pode querer "validar" sua presença na faculdade com um bom rendimento nas suas disciplinas. Se ele for mais confiante nas suas habilidades, procura uma compreensão equilibrada em todas as disciplinas que fazem parte da sua formação profissional. Pode se importar ou não com o seu Coeficiente de Rendimento (CR), que é um critério para a

[33] Conseguir passar no vestibular é um compromisso que o aluno assume consigo mesmo. Existem também expectativas dos pais, parentes e amigos. Retomo a colocação de Julio na sua "biografia". Segundo Julio (2000, 23-10-00, diário, p. 1), "Conciliar os estudos com essas cobranças não é nada fácil. Eu, particularmente, não sofria muita cobrança por parte das outras pessoas. Mas eu me cobrei muito, e achava que não podia dar um passo errado ou então não passar no vestibular. [...] Um peso, um sacrifício que sai das costas do estudante na hora da aprovação".

concessão de bolsas.[34] Ao mesmo tempo, de modo geral, o aluno tem uma disposição para conhecer e compreender o que as várias disciplinas do seu curso têm para oferecer, principalmente em relação à sua futura profissão.

O aluno de Cálculo que é capaz de não se preocupar tanto com sua nota possui condições para se envolver com a matéria de uma maneira mais significativa. Para isso acontecer, o aluno também tem que encontrar na disciplina algo que seja de interesse. Se faltar esse interesse, ou se ele já estiver sendo investido em outra área, acadêmica ou não, o aluno pode deixar as diretivas do professor orientar suas interações com a matéria: leva em consideração as exigências do professor e faz o que considera adequado tanto para a sua formação quanto para garantir sua nota.

Caso as aulas não colaborem com entendimento atual do aluno, nem sejam agradáveis, caso as exigências para aprovação sejam rígidas e as condições para colar na prova pareçam inviáveis, trancar a matrícula ou reprovar são opções.

Os três interlocutores do Cursão no ano de 2001 desenvolveram uma relação afastada com o Cálculo. Mariana, que pretende se formar em Licenciatura em Matemática, encontrou nas suas experiências a paixão pelo magistério. Ela gosta de pegar um livro de Matemática para sentar e folhear, contemplar e resolver exercícios interessantes. Faz Iniciação Científica na área de educação com uma professora do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) no IMECC. Mas, ao mesmo tempo, Mariana se decepcionou com a Matemática. Desistiu de ir às aulas de Cálculo, preferindo utilizar seu tempo para estudar em casa e no campus, fora da sala de aula de Cálculo. Seu envolvimento com a disciplina ficou restrito aos exercícios das listas, que foram cobrados nos testes e nas provas. Encontrou prazer na aplicação de algoritmos de diferenciação, como por exemplo a regra da cadeia, máximos e mínimos com a hessiana e otimização com o método dos multiplicadores de Lagrange.

Mariana admitiu que, às vezes, de tanto fazer e refazer exercícios em preparação para as avaliações, acabou decorando os métodos e era raro que não se lembrasse de uma resposta. Mariana (2001, 08-11-01) disse: “Você faz um exercício, faz outro, faz outro, faz outro. Passa

[34] Na Revista do Vestibulando de 2002, o Coeficiente de Rendimento foi descrito na seguinte forma: “O aluno também deve estar atento ao ‘CR’, como é conhecido o Coeficiente de Rendimento, índice utilizado para avaliar seu rendimento geral no curso. Trata-se de um parâmetro importante na hora de pleitear matrícula em disciplinas eletivas ou extracurriculares, por exemplo. Também é decisivo no momento de se pleitear bolsas para monitoria ou iniciação científica. Por integrar o histórico escolar, torna-se ainda referência na avaliação de currículos de candidatos por parte das empresas” (ENSINO..., 2004). Em relação o “CR”, dois dos interlocutores deste estudo relataram que um colega seu foi desconsiderado para uma bolsa de estudos por causa de um baixo “CR”. Em ambos os casos, o aluno, ao consultar um professor, foi avisado que seu “CR” não era adequado para conseguir a bolsa.

uma semana e você não sabe... não necessariamente você decora, você decora o método que faz. Você não sabe para quê aquilo serve".

Eu, consciente de que o aluno não guarda por muito tempo aquilo que decora e que a prática de cola[35] nos testes e provas é comum, perguntei na conversa coletiva (08-11-01, p. 3) qual seria a diferença entre cola e decoreba. Quase antes de eu terminar perguntar, Mariana (2001) respondeu: "Nada. Nada. A mesma coisa. Na outra semana não lembro [...]". Cortando a fala dela, Rodrigo (2001) acentuou: "Outra semana?! Outra dia!". De modo geral, os interlocutores que tiveram experiência colando sentiam uma certa pressão com respeito à aprovação na disciplina ou ao seu "CR", e o fizeram pontualmente quando, na hora da prova, deu um "branco" ou encontraram um exercício e não tinham idéia de como resolvê-lo.

O professor pode até aumentar a preocupação do aluno em gravar os métodos de resolução dos exercícios por colocar em dúvida a auto-confiança que o aluno possui com respeito à matéria. No último capítulo, citei Rodrigo com relação a essa pressão. Rodrigo (2001, 08-11-01, p. 7), na conversa coletiva, falou do dia em que o professor, ao tentar incentivar a turma para estudar, disse que ele achava que a maioria ficaria para o exame. Na seqüência da conversa, Mariana (2001) e Priscila (2001) esclareceram a postura que o professor pode adotar com respeito aos alunos:

MARIANA: Eu acho que ele vai dar uma prova (a segunda prova) fácil.

PRISCILA: Eu acho que ele é bom. Ele é uma pessoa boa. Ele quer que a gente aprenda. Só que ele quer firmeza, que a gente estude. Ele fica pressionando.

MARIANA: O que eu percebi *bem* no curso de Geometria Analítica [com o professor], e que eu acho que ele vai aplicar no curso de Cálculo, é que qualquer coisa que o professor vá dar, ele quer que você estude. O objetivo principal dele é que você estude. Se ele percebe que você estuda, a prova é...

[35] Entendo que a cola é um meio para conseguir uma "nota" numa atividade que serve para avaliação. Foram levantados dados sobre cola com cinco turmas (Engenharia Elétrica, Mecânica, de Computação, Agrícola e Química) de Cálculo de Uma Variável no primeiro semestre de 1999. Neste estudo sobre cola, dos 256 alunos pesquisados, 70,9% afirmaram que já colaram na universidade. Os alunos indicaram, de uma lista fornecida, razões para colar. Os três itens mais indicados formam: 1) usualmente não cola, mas se a situação apertar, pode recorrer a isso, com 50,9%; a falta de segurança na sua resolução, com 19,6%; e não estudou o suficiente, com 13,2%. (PESQUISA..., 2004).

PRISCILA: ... é fácil.

MARIANA: A prova é fácil. Agora, se ele perceber que todo mundo está relaxado, então...

PRISCILA: ... ele ferra.

Foi no quarto teste do semestre que o professor "caprichou". A nota média da turma foi 2,0. Rodrigo tirou 6,0 e Mariana e Priscila 1,0, que foi a nota mediana.[36]

Mariana refletia sobre sua aprendizagem nestas condições e comentou:

> Eu acho que eu estou entendendo razoavelmente bem. A única coisa é que às vezes eu paro e pergunto e eu não consigo achar uma resposta... "Por que?". Às vezes acho que eu sou lenta. Eu entendo o que fazer, mas não entendo o que significa, o por quê, ou o que eu estou procurando. Em alguns casos eu sinto isso. (MARIANA, 2001, 30-08-01, p. 2).

Mariana (2001, 30-08-01, p. 2) citou o vetor gradiente como um exemplo disso. "Eu entendi como achar o vetor gradiente. Mas eu não tinha entendido para que serve o vetor gradiente. Se eu tinha o vetor gradiente, eu não sabia... não era assim, *palpável*. Como poderia usar isso?".

Em contraposição, o vetor gradiente se tornou "palpável" para Lucas no decorrer do Projeto. Lucas ("Projeto de cálculo: curvas de nível e otimização", MA211 – Cálculo II, novembro de 1999, por Lucas e um colega, página 11), buscando um meio para encontrar a hora e o local onde a mancha de óleo encontra a costa, modelou o dado problema utilizando o vetor gradiente. No projeto de Lucas e de seu parceiro, está escrito que, com a mancha de óleo (ver figura 5-8, p. 99),

> estamos tratando de uma função de duas variáveis, já que uma posição no plano é dada por um ponto genérico (x, y), e que nos dá um valor de tempo para cada ponto (x, y) escolhido. Admitimos a seguinte interpretação física: teríamos uma função f(x, y) que nos daria o tempo com que a mancha de óleo atingiria o dado ponto (x, y). Desse forma, num espaço tridimensional podemos admitir um sistema de coordenadas em que o eixo z recebe o valor da função, sendo portanto o eixo dos tempos, e o plano xy recebe as coordenadas de posição da mancha de óleo.

[36] Embora os alunos sintam um certo desconforto com as aulas do professor e com algumas das medidas tomadas por ele, eles não consideram que o professor é uma pessoa má. Sabem que ele quer que a turma estude.

Gradiente de uma função f(x, y) genérica

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$$

E como interpretar o vetor gradiente desta função? Vemos, pela definição acima, que se trata de um vetor do plano composto pelas "taxas instantâneas" de variação da função em relação às suas variáveis. Sua norma representa, portanto, a "taxa instantânea" de variação da função na direção em que o vetor aponta. Já o vetor gradiente da nossa "função propagação de óleo" é, então, composto pelas variações de tal função nas direções x e y do plano de posição e sua norma representa, então, a "variação instantânea" do *tempo em relação à posição* num dado ponto (x,y). Logo, se é uma variação do tipo tempo sobre espaço, representa o inverso da velocidade (espaço sobre tempo) de propagação da mancha no ponto (x,y):

Norma do gradiente da f(x,y)	**Velocidade de propagação da mancha**
Valor pequeno	Alta
Valor grande	Baixa

Neste tipo de envolvimento com a Matemática, o aluno interage com uma definição, um objeto, uma idéia ou um conceito para justificar a sua utilização na resolução de um problema. Lucas aponta que é através da "aplicação" que o aluno constrói a compreensão. É este tipo de interação com a "aplicação" que medeia a *aprendizagem pessoal*.

É a natureza do envolvimento com uma atividade ou uma "aplicação" que determina o tipo de aprendizagem que o aluno desenvolve. É importante notar que a interação que Lucas estabeleceu com o vetor gradiente não era motivada pelo intuito de ser consciente do que é o vetor gradiente para conseguir uma resposta para um exercício-típico. Era com o objetivo de compreender e resolver um problema que exigiu da sua parte uma compreensão de como o vetor gradiente se relacionava com o problema. Isto é o que interpreto como o sentido que Lucas atribui à palavra "aplicação"[37].

[37] A aplicação tem uma outra conotação referente à "aplicação de uma técnica". Priscila (2001, 21-09-01, p. 11) contextualiza isso em termos de conhecimento matemático: "Mesmo não sabendo o conceito, eu estou sabendo aplicar a técnica. Mesmo não sabendo o conceito. É isso eu vou aplicar depois. Não vá me cobrar o conceito quando eu tiver na Físcia 4; derivar essa equação de n variáveis. Não é verdade? Eles não vão exigir conceitos. Querem que eu faça o problema. Resolva. Isso, eu acho que estou aprendendo". Priscila fez uma pausa e fechou a sua fala em voz baixa, na dúvida: "Eu não sei".

Max (2000, 18-01-01, p.11) aponta que, numa atividade baseada em um problema prático, como as atividades no laboratório da disciplina Circuitos Lógicos que utilizam uma placa de circuitos, a apropriação do conhecimento é melhor. Comenta que, nestes casos, você está fazendo "algo palpável, que você constrói. Vê algo funcionando. Pode tirar dúvidas em cima daquilo. Pode imaginar onde vai ser usado". É importante anotar que, para Max, este laboratório, além de ser uma atividade "pratica" [38], se relaciona com seu interesse em projetos de automação residencial e com seu curso em geral.

Atividades como o laboratório de Circuitos Lógicos para Max e o Projeto de Cálculo para Lucas, quando norteadas por questões semi-abertas, permitem que o aluno siga seus interesses e construa estratégias próprias, seja dentro ou fora das intenções da atividade. Não é a atividade ou o problema em si que aproxima o aluno da matéria, como ficou explicitado nas razões diferentes que Lucas, Caio e Beto tiveram para fazer ou não o Projeto de Cálculo de Várias Variáveis. É o tipo de interação com a matéria em relação ao problema que determina o grau de aproximação.

O aluno que encontra ou desenvolve afinidades relativas aos conteúdos e aos meios de interagir com eles em uma disciplina tomará, às vezes, a iniciativa de buscar ou criar seus próprios "desafios", mesmo que o desdobramento do currículo da disciplina não pareça incentivar tal comportamento por parte do aluno. Lucas, por exemplo, seguindo sua afinidade com a geometria e o software, assumiu como um "desafio" a construção de um toro. A inspiração para explorar também pode ser encontrada num exercício do livro-texto, como o "exercício do tubarão". Existiam vários fatores que podiam ter influenciado o envolvimento de Lucas com este exercício:

- lembranças dos exemplos (não bem entendidos) da Física e do Cálculo de Uma Variável que tratavam de equações diferencias ordinárias;
- representações geométricas com as quais tem afinidade;
- o software gráfico, com o qual ele também tem afinidade;
- objetos conhecidos, como o vetor gradiente, em um novo contexto, contínuo em vez de pontual; e

[38] É notável que em algumas das atividades nas quais o aluno tem um envolvimento maior incorporam tecnologias que permitem estratégias próprias e feedback imediato. Por exemplo; Max no Laboratório de Circuitos Lógicos, citado no texto, Lucas na construção do toro e no seu envolvimento com o Projeto, e Julio na disciplina de Estrutura de Dados, ao fazer um programa.

- o compartilhamento de conjeturas e dúvidas com o pesquisador.

Mas estas incursões nas quais o aluno explora, com mais profundidade, as relações e inter-relações múltiplas, dentro e fora da Matemática, não são representativas da aprendizagem que acontece na disciplina de Cálculo. O que é comum é que os exercícios provoquem uma necessidade relacionada à prova, como no caso da matriz jacobiana para Rodrigo (2001):

- Rodrigo não estava prestando atenção enquanto o professor tirava uma dúvida de um colega sobre um assunto a respeito do qual Rodrigo já se sentia seguro. De repente, a matriz jacobiana foi abordada e explicada antes que Rodrigo tivesse tempo para reparar;

- teve que aprender sozinho de “uma vez por todas”; e

- buscou, no livro-texto, entendimento sobre como representar a matriz jacobiana para fazer o exercício na lista e se preparar para o teste.

O aluno ingressante na graduação tem hábitos e expectativas com respeito à Matemática e aos seus processos de aprendizagem. Sua experiência anterior consiste basicamente em assistir aulas dentro de um sistema de ensino propedêutico de tópicos isolados. As aulas de Matemática no Ensino Médio, de uma maneira geral, não exigem muito estudo fora da aula. O aluno treina com exercícios típicos. André (2000, 07-12-00, p. 3) aponta que, às vezes, ele ainda aplica fórmulas mecanicamente, dizendo que é uma “herança do segundo grau. [...] Fórmula. Aplica a fórmula. Dá a resposta. Pega o problema, aplica a fórmula e dá a resposta”. A construção ou apropriação de conhecimento matemático é associada com um processo de treino e fixação.

De modo geral, isto envolve habilidades como reconhecer diferentes “tipos” ou categorias de exercícios e lembrar como encadear seus métodos de resolução com objetivo de acertar exercícios nas provas. Maslow (1970, p. 218) aponta que o pensamento que tem por propósito a categorização (*rubricizing*) tem as seguintes características:

a) trata somente problemas típicos. Não percebe problemas novos ou, se percebe, reformula-os para classificá-los como familiares;

b) utiliza somente hábitos e técnicas estereotipados e memorizados para resolver problemas; e

c) possui respostas e resoluções prontas.

De acordo com Maslow (1970, p. 219), este tipo de pensamento tem suas vantagens. No caso do aluno, ele pode automaticamente classificar um exercício e aplicar os procedimentos apropriados para sua resolução. Isto dá mais segurança nos estudos e reduz a ansiedade na preparação para as provas. Mas existem desvantagens no pensamento por categorização. O aluno perde as qualidades de flexibilidade e criatividade do pensamento.

Priscila reconheceu que sua aprendizagem se isola nos exercícios. Contou, com uma combinação de frustração e indignação:

> Eu não sei. Eu não estou aprendendo assim de verdade mesmo. Eu estou aprendendo para fazer os exercícios. Técnicas de exercícios. Um exercício você sai por aqui, um outro tenta por ali dar certo e um outro vai por lá, dá certo. Não o conceito. De repente, se você dá um exercício para eu resolver de uma forma diferente daqueles da lista eu não vou saber resolver. (PRISCILA, 2001, 21-09-01, p.2).

O aluno, muitas vezes, sente falta de significados na sua compreensão da Matemática fora da sintática[39] das técnicas utilizadas para resolver exercícios, como Max aponta com relação às suas resoluções de exercícios de integral dupla:

> Até fica um negócio que não considero muito difícil. Mas, a parte que não é muita clara: em que ocasiões eu vou fazer isso? Que sinais que vão me dar que eu tenho que mexer nela? (MAX, 2000, 20-11-00, p. 8).

Embora estes meios de estudo permitam a aquisição de uma nota na prova, as falas de alguns dos interlocutores indicam que o conhecimento adquirido por estes meios é primariamente sintático, carente de nexos de significados fora dos seus vínculos com os enunciados dos exercícios. Por exemplo, Julio (2000) desenvolveu um entendimento da derivada direcional principalmente sintático, utilizando sua fórmula em resposta ao seguinte exercício no segundo teste (Teste 2; Exercício 2 partes a e b; 27-10-00):

[39] Entendo compreensão sintática de uma forma que adota somente uma parte da descrição de Machado (1990, p. 111): "Trata [das] relações dos signos entre si, do modo como se combinam para formar signos compostos".

2) **Suponha que a temperatura T em graus Celsius, no ponto (x, y, z) do espaço seja dada pela expressão T = 50 + xyz.**
   a) **Determine a variação da temperatura em relação à distância, no ponto P(3, 4, 1), e na direção do vetor v = (1, 2, 2).**
   b) **Escreva o que este número obtido significa.**

Julio, embora não mostre clareza sobre o que é a derivada direcional, acertou a solução para a parte (a) trabalhando a fórmula ∇**T.u** :

$$\nabla T = (yz)i + (xz)j + (xy)k \quad (\text{I}) \qquad \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (\text{II})$$

Aplicando o ponto P(3, 4, 1) na relação (I) temos

$\nabla T = 4i + 3j + 12k$ (derivada direcional) (III)

(4, 3, 12) (IV)

Para encontrarmos a taxa de variação temos:

$$\boxed{\Delta T = \nabla T.u}$$

$$\Delta T = (4, 3, 12)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \frac{24}{3} = \frac{34°}{3} \quad C/u.c.$$

Note: Julio identificou incorretamente o vetor gradiente no ponto P(3,4,1) como a derivada direcional.

Perguntei (07-11-00, p. 2) para Julio por que ele usou o vetor unitário, sabendo que é comum o aluno não saber usar o vetor unitário na dada direção ao calcular a derivada direcional. Julio, lembrando a fórmula de Geometria Analítica, respondeu: “Isso é uma boa pergunta. Sabia porque lembrava dessas fórmulas. Mas eu não sei até agora o que é vetor unitário”.

Eu apontei a fórmula que Julio estava utilizando, $\Delta T = \nabla T.u$, e perguntei porque o produto escalar entre o vetor gradiente e o vetor unitário daria a taxa de variação. Julio respondeu que ele não sabia: “Eu não consigo... Eu sei fazer analiticamente, mas não sei o que significa aquela fórmula”. Persistindo, eu perguntei se ele podia fornecer uma interpretação geométrica. Julio conta que procurou no livro-texto para entender quando estudava: “Eu achei que era uma viagem. Não [não posso dar uma interpretação geométrica]. Até tentei entender, mas tudo que

---

Machado trata o sintático de forma mais ampla, por continuar sua descrição: “ . . . abstraindo o significado de cada signo bem como qualquer relação entre os signos e os interpretantes”.

passa de duas dimensões para mim é muito complicado”.[40] Então, Julio (2000, 07-11-00, p. 2) acabou aplicando a fórmula ao exercício. Ao explicar seu trabalho na parte (a), Julio falou: “Aí, peguei a definição da derivada direcional, a derivada parcial em relação ao ‘x’, ao ‘y’ e ao ‘z’. Eu derivei a função. Eu apliquei no ponto [...] Aqui encontrei a derivada direcional”.

Julio conseguiu chegar à solução, mas faltava um entendimento geral. Para a parte (b) do exercício, Julio, sabendo que a derivada fornece a taxa de variação, escreveu no seu teste: “Este número significa a taxa de variação da temperatura em relação à distância (através do vetor gradiente)”. Ou seja, ele reescreveu o que foi escrito no enunciado da parte (a). Em nossa conversa (07-11-00, p. 3), Julio, em referência à sua resposta para a parte (b), disse: “Aí, aqui eu dei uma enrolada. Foi exatamente isso, porque eu não sei o que significa”.

Tendo atribuído poucos significados para as técnicas, o aluno, como nota Priscila (2001), dificilmente consegue resolver exercícios não-típicos. A apropriação do conhecimento baseada na nomenclatura e nas construções sintáticas é mecânica e carente de significados na própria Matemática.

O aluno encontra estratégias e desenvolve hábitos para lidar com a disciplina. Mariana faz os exercícios das listas e, no dia da prova, acorda de madrugada para fazer mais uma revisão. “É melhor do que virar a noite [...] porque eu tenho cansaço o dia inteiro. O trabalho não rende. Olho para o livro, ‘Ô meu Deus, tenho que ler tudo isso’. Mas você acorda, toma café, está de ânimo renovado para começar a estudar”. (MARIANA, 2001, 30-08-01, p. 4).

Como assinala Maslow (1970, p. 217), hábitos são bons para nos ajustar às situações vigentes, mas não para ajustar essas situações a nós. A adaptação unilateral às exigências do professor é uma forma de dependência (ação passiva, de acordo com Maslow). Ao escolher este tipo de ação, o aluno perde (ou não desenvolve) autonomia. Neste caso, a interação com a matéria tende a desenvolver uma *aprendizagem afastada*.

Até agora, a construção dos tipos ideais tem sido demonstrada através da especificação de suas características (ver quadro 6-1) e pela exemplificação da interação do aluno com o conhecimento em várias atividades. Na próxima seção, descrevo os tipos ideais de aprendizagem de forma a integrar algumas das suas características e a interação com a matéria.

---

[40] A disciplina de Geometria Analítica na Unesp em Rio Claro era desagradável para Julio. Em nossas conversas era evidente que alguns conteúdos dessa matéria carregam um significado de “desgosto”.

6.4 As dinâmicas de aprendizagem pessoal e aprendizagem afastada

A tipificação de aprendizagem tem implicações tanto para as tendências que o aluno desenvolve em relação à Matemática quanto para sua escolha de como lidar com vários tipos de atividades. No quadro 6-2, faço um esquema dos tipos ideais de aprendizagem, de forma a sugerir a dinâmica da atividade que medeia o desenvolvimento deles. Reincorporo, neste quadro, algumas das características apresentadas de forma isolada e estática no quadro 6-1.

Quando o aluno encontra ou desenvolve afinidades com a matéria e, ao mesmo tempo, é predisposto a satisfazer sua necessidade de crescimento referente a compreensão, pode se envolver com a Matemática pelo valor e pelo prazer da atividade. Neste caso, o aluno exercita um grau de autonomia, assumindo um desafio com o intuito de resolver um “problema” que, ele sabe, exigirá um compromisso significativo em termos de tempo e energia. O aluno relaciona as características (e as relações entre as várias características) do “problema” com suas experiências anteriores tanto na Matemática quanto em outras áreas de conhecimento. Desenvolve, por ensaio e erro, suas próprias estratégias, que se baseiam tanto na sua criatividade e intuição quanto nas suas habilidades e seus conhecimentos. Neste processo, encontra o alcance e as limitações das técnicas utilizadas, enquanto desenvolve suas habilidades de “fazer” a Matemática. Encontra frustrações nos seus erros e prazer nos acertos no caminho de construir uma estratégia para encontrar uma solução. Avalia seu processo, justificando para si mesmo seus passos e seu raciocínio. Incluído neste processo está um diálogo com um outro – colega, professor, tutor – que compartilha conhecimentos, afinidades e interesses compatíveis, o que permite uma análise do que está sendo feito, através da comparação com idéias e perspectivas diferentes. A interação com o outro se realiza, em geral, ao longo do processo de resolução.

Quando o aluno se envolve em atividades da matéria que não despertam sua curiosidade, pode acabar aceitando uma interação utilitária em termos da sua nota nas avaliações e provas na disciplina. De um modo geral, as provas de Cálculo se ajustam às listas de exercícios propostas pelo professor. A atividade de fazer Matemática torna-se algo mecanizada, um exercício após o outro com uma revisão das resoluções na véspera das provas. O aluno que é inseguro frente às provas tende a procurar meios de estudo eficientes para aliviar sua ansiedade. O aluno que é basicamente confiante e indiferente frente às avaliações, também procura meios de estudo eficientes para se preparar para as provas, mas sem tanta ansiedade. Em situações como essas, o

Tipos ideais de aprendizagem

Aprendizagem pessoal	Aprendizagem afastada
Necessidade de crescimento referente a compreensão	**1) Necessidade de segurança 2) uma "indiferença"**

(Fundamentado em Maslow)

Ação cognitiva referente a valores e por afeto positivo	**Ação racional referente a fins, por hábito e por afeto 1) negativo ou 2) neutro**

(Fundamentado em Weber)

Autonomia		***Dependência***
"Problema" (próprio ou adotado) *Afinidades*		***"Exercício típico" (do outro)*** *Obrigação*
Desenvolve estratégia própria *Pensamento trans-experiencial*		***Encontra "receita" apropriada*** *Pensamento contextual*
	Atividade	
Criatividade/Intuição (espontaneidade)		*Categorização (hábito)*
Implementa estratégia *Compreensão dos procedimentos*		***Aplica "receita"*** *Reprodução da forma dos procedimentos*
Auto-avaliação		***Avaliação externa***
Encontra-se na atividade		**Não se encontra na atividade**
Encontra uma solução ou não		Encontra a resposta ou não
Diálogo com o outro		**Troca de comunicados com o outro**
Busca o próximo "problema"		***Espera o próximo "exercício"***

(Fundamentado na análise das conversas com os alunos)

O esquema acima começa com a base teórica fundamentada em Maslow e Weber, e enquanto desce, segue, de modo geral, a dinâmica da interação do aluno com a matéria e o outro, fundamentada na análise das conversas com os alunos. Entendo que a atividade medeia as relações que o aluno desenvolve com a matéria e com o outro.

Quadro 6-2

prazer que o aluno consegue encontrar no Cálculo consiste em aplicar algoritmos de diferenciação e integração com êxito. Os conhecimentos adquiridos nesse tipo de atividade tendem a se reduzir às técnicas do Cálculo e às formas sintáticas pelas quais os símbolos matemáticos e as relações entre os símbolos estão memorizados e comunicados, sem muito significado. Se não consegue resolver um exercício, o aluno procura ajuda de colegas, o tutor ou o professor para tirar suas dúvidas a respeito de como encaminhar os procedimentos apropriados.

Convém comentar que o aluno desenvolve tendências para interagir com a Matemática com base nos seus objetivos, expectativas, interesses e afinidades, todos transformáveis, embora relativamente estáveis devido à sua vivência na sala de aula de Matemática desde cedo na vida. Existe uma fluidez entre a ação autônoma e a ação dependente nas diretivas do professor. Isto é, o aluno pode começar uma atividade por "obrigação" e no decorrer da atividade se envolver por razões *cognitivas referentes a compreensão*, de forma desligada da obrigação.

De mesma forma, a aprendizagem nem sempre se aproxima de um tipo ou outro, mas é fluida, aproximando-se e afastando-se de acordo com uma multiplicidade de fatores. Aspectos dos dois tipos de aprendizagem estão presentes ao mesmo tempo no seu desenvolvimento, sendo um mais proeminente que o outro em uma dada situação.

6.5 Autonomia – dependência e diálogo – troca de comunicados

Os tipos ideais de aprendizagem têm uma tarefa dupla referente ao objetivo deste estudo. Eles servem como pontos de referência para a análise das influências do currículo e da didática vigentes na aprendizagem (capítulo 7) e como ponto de partida para a análise destes aspectos institucionais e interpessoais. Nesta seção, aponto as características dos tipos ideais que utilizo para fazer a ponte entre a aprendizagem e os aspectos sociais.

As características de autonomia e diálogo, presentes na *aprendizagem pessoal*, e de dependência e troca de comunicados, presentes na *aprendizagem afastada*, se referem, geralmente, às relações que o aluno tem com o professor e com o outro, respectivamente (ver quadro 6-2).

Nas ocasiões de *aprendizagem pessoal*, o aluno é relativamente autônomo nas escolhas que faz com relação às atividades matemáticas propostas pelo professor. O aluno escolhe desafios de acordo com suas afinidades e desenvolve estratégias próprias para sua resolução. Ele interage para compreender para si mesmo. Mas, ao mesmo tempo, ele procura o “outro”, seja um colega, o tutor ou o professor. Procura encontrar-se em alguém. Procura neste outro alguém com quem possa compartilhar dialogicamente suas idéias e estratégias; alguém que possa discutir, justificar, conjeturar e desafiar o outro em torno de afinidades e conhecimentos matemáticos compatíveis.

Por outro lado, nas ocasiões de *aprendizagem afastada*, o aluno é relativamente dependente do professor no que se refere às atividades. O aluno espera as listas de exercícios e segue os procedimentos exemplificados para resolvê-las em antecipação às avaliações. Se for o caso de uma *aprendizagem afastada por necessidade de segurança*, é comum que, na ausência de entendimento e confiança, o aluno procure o outro para tirar dúvidas; estabelecendo uma espécie de troca de comunicados. No caso da *aprendizagem afastada por “indiferença”*, o aluno pode até não procurar o outro em torno das atividades na Matemática e se isola dos colegas em termos das atividades matemáticas.

Utilizo os termos “diálogo” e “troca de comunicados” neste estudo em um sentido que se aproxima do uso das palavras “diálogo” e “comunicado” por Paulo Freire (1981)[41]. Por comunicado entendo a transmissão de informações ou instruções. Utilizo, neste estudo, a palavra comunicado principalmente nas ocasiões em que se trata de “tirar dúvidas” com respeito à resolução de exercícios. A comunicação por comunicados requer, por um lado, uma receptividade (que se manifesta, às vezes, como uma busca para tirar uma dúvida) e, por o outro, uma vontade de passar informações. Entendo que esta relação, em termos de colegas que se reúnem para resolver os exercícios das listas, é mutuamente vantajosa.

O diálogo tem pré-requisitos mais exigentes. De acordo com Freire (1981, p. 95-96), o diálogo se funda “no amor, na humildade, na fé nos homens [...]” e, neste sentido, “o diálogo se faz uma relação horizontal”. Embora Freire (p. 93) aborde questões filosóficas mais amplas do que abordo neste estudo, entendo que sua afirmação de que “não há diálogo, porém, se não há um profundo amor ao mundo e aos homens” tem implicações para as relações que o aluno desenvolve com a Matemática e com o outro em torno de atividades no âmbito da Matemática.

[41] Freire, em **Pedagogia do Oprimido**, trata da comunicação utilizando as palavras “diálogo” e “comunicado” principalmente em referência à relação professor – aluno. Utilizo, neste estudo, comunicação em termos da relação aluno – outro, na qual entendo que o outro é principalmente um colega com quem o aluno compartilha atividades na Matemática. Mas, ao mesmo tempo, não excluo como o “outro” o professor, o tutor ou alguém com conhecimentos compatíveis com a atividade.

No próximo capítulo, analiso alguns aspectos institucionais e algumas relações interpessoais na aprendizagem, a partir do conceito de dominação implícito na autonomia ou dependência que o aluno sente nas suas escolhas em relação aos estudos, conforme as diretivas do professor e o tipo de comunicação – diálogo ou troca de comunicados – que o aluno desenvolve na sua relação com o outro em torno de atividades matemáticas.

A instituição e relações interpessoais na aprendizagem

7

> Quanto mais racional a sociedade, mais cada um de nós está condenado ao que os marxistas chamam de alienação. Sentimo-nos sujeitos a um conjunto que vai além de nós, condenados a só realizar uma parte daquilo que poderíamos ser; condenados a exercer, toda a nossa vida, uma ocupação limitada sem outra esperança de grandeza senão a de aceitar tal limitação.
>
> Raymond Aron (1993, p. 521)

Os conceitos de "dominação" e "comunicação" que se manifestaram na tipificação da aprendizagem apontam para aspectos institucionais e relações sociais na aprendizagem. No contexto deste estudo, a análise da dominação se restringe à influência do professor, como mestre e avaliador, nas escolhas que o aluno faz nos seus estudos. Quanto à comunicação, o interesse principal está centrado nas comunicações entre o aluno e o "outro" – seja colega, tutor ou professor – em torno do seu envolvimento intrapessoal com a matéria. Encontro, inter-relacionada com as escolhas influenciadas pela relação de dominação, uma correspondência entre o tipo de comunicação relativa aos estudos que o aluno realiza, principalmente com colegas, e o tipo de relação que o aluno desenvolve com a matéria.

O esquema apresentado na figura 7-1 corresponde ao esquema dos tipos ideais de aprendizagem do quadro 6-2, e tem por foco a ***atividade*** em torno da matéria. Entendo que a relação que o ***aluno*** desenvolve com o ***outro*** em torno da matéria está mediada pelas atividades que eles compartilham. O aluno, com base em suas necessidades e seus objetivos, expectativas, interesses e afinidades, faz escolhas e interage com a matéria de maneira mais autônoma ou mais dependente no âmbito das atividades propostas pelo professor. Nas ocasiões em que o aluno desenvolve uma *aprendizagem pessoal*, suas escolhas tendem a ser mais autônomas e suas relações interpessoais em torno da matéria tendem a desenvolver um caráter dialógico. Denomino estas relações *relações de prática*[42]. No caso da *aprendizagem afastada*, as escolhas do aluno tendem a seguir as diretivas do professor e as relações interpessoais que o aluno desenvolve em torno da matéria tendem a um caráter utilitário; por exemplo, uma comunicação em torno da matéria pode ter o propósito a tirar de dúvidas. Denomino estas relações *relações de apoio*. Desenvolverei uma descrição destas relações mais adiante neste capítulo.

A atividade serve como mediador da relação social entre o aluno e o outro.

Figura 7-1

[42] Utilizo o conceito "relação de prática" com um significado que se aproxima da expressão "comunidades de prática", de Wenger (2003). De acordo com Wenger, uma comunidade de prática é uma relação informal, de engajamento mútuo, renegociada continuamente entre seus membros. Caracteriza-se por rotinas, sensibilidades, artefatos, vocabulário e estilos compartilhados. Desenvolve-se em torno de "coisas" e conhecimentos importantes para os seus membros. É a comunidade que produz a prática e não qualquer mandato exterior, embora o sentido de um mandato possa coincidir com a atividade da comunidade. É um sistema auto-organizado. São os interesses e as aprendizagens compartilhados (em contraposição a tarefas) que mantêm a comunidade ativa.

As várias relações envolvendo o aluno, a matéria, o professor e o outro têm como pano de fundo as interpretações valorativas dos regulamentos e das regras universitárias, principalmente referentes ao curso do aluno e ao papel formativo da disciplina de Cálculo no curso. Analiso relações levando esta fundamentação em consideração. Utilizo conceitos weberianos aplicáveis a instituições e relações sociais para conceituar as interpretações e inferências deste capítulo.

7.1 Ordem, ordem legítima e vigência de uma ordem legítima

Entendo a formação esperada do aluno de Cálculo como uma valorização de certas competências e habilidades matemáticas, tal como interpretadas no currículo da disciplina por professores e profissionais de áreas que utilizam os conhecimentos do Cálculo. Contextualizo a formação matemática esperada do aluno que cursa Cálculo no ciclo básico (e aquela que o aluno realiza) em termos dos conceitos “ordem”, “ordem legítima” e “vigência” de uma ordem legítima, em conjunto com os conceitos de dominação e comunicação e com as interlocuções.

Entendo que as ações do aluno a respeito do seu curso universitário (e, mais especificamente, da disciplina de Cálculo) são orientadas, de maneira geral, na sua relação com o professor que, por sua vez, interpreta os regulamentos e as regras institucionais referentes à sua responsabilidade de ministrar aulas. Weber (1991, p. 19) define a ação social orientada com base em regulamentos institucionais como uma forma de “ordem”, sendo que a ordem é considerada “legítima” quando o sentido dos regulamentos e das regras é aceito como legítimo pelas pessoas que orientam suas ações de acordo com os regulamentos da instituição. Nesta pesquisa, considero tais pessoas como aquelas que influenciam e são influenciadas pelo ensino universitário, com foco principalmente no aluno e no professor. O aluno, em algum grau, além de acreditar na legitimidade do sistema universitário, aceita seus regulamentos. Além disso, atribui à instituição um dado sentido em termos de formação profissional e age de uma forma que corresponde tanto a este sentido quanto aos seus vários interesses. No entrelaçamento entre, por um lado, os interesses e intenções do professor em ministrar aulas e, por outro, aqueles do aluno relativos ao seu curso, evoluem regularidades nas interações, e é nessas regularidades que o sentido de formação na disciplina se desenvolve e se transforma.

Os regulamentos e as regras dos cursos universitários são estabelecidas, em parte, para a formação profissional do aluno. E, mais especificamente, para a disciplina de Cálculo, essa formação incluiria a aquisição tanto de conhecimentos matemáticos quanto de habilidades para utilizá-los no seu curso. Em termos weberianos (WEBER, 1991, p. 19), a "vigência" desta ordem institucional em relação à disciplina de Cálculo significa que as ações do professor e dos alunos estão orientadas no sentido de possibilitar que os alunos formem habilidades e competências correspondentes àquilo que os dirigentes universitárias interpretam como relevante a partir dos regulamentos, regras e normas universitários.

Mas o sentido atribuído à disciplina de Cálculo não tem que ser o mesmo por parte do professor e dos alunos, nem entre os alunos. As interpretações e inferências desta pesquisa estão em concordância com os achados de Artigue (1999) e indicam que a formação matemática do aluno na disciplina de Cálculo não tem como sentido principal a aquisição de conhecimentos matemáticos proveitosos para outras áreas de atuação, sejam elas acadêmicas ou profissionais. As exigências do curso do aluno em geral, e do professor do Cálculo em particular, criam ou apóiam condições que estimulam o aluno a agir para adquirir um conhecimento matemático centrado na construção "sintática" de métodos de resolução de exercícios categorizados de forma que essas construções e categorias sejam úteis para as avaliações na disciplina.

Alguns subsídios para uma compreensão desta situação residem no currículo e na didática vigentes para a disciplina de Cálculo.

7.2 O professor no seu cargo institucional – o currículo e a didática vigentes

O professor, ao ministrar aulas no seu cargo de mestre e avaliador do aluno, constrói relações com a matéria e relação com o aluno em torno da matéria que influenciam, e até norteiam, os tipos de relações que o aluno desenvolve com a matéria, com os colegas, os tutores e o professor.[43] O professor tem uma posição de autoridade que se manifesta de várias maneiras e

[43] Rodrigues (1997, p. 82), com base em sua dissertação, aponta a interferência da atitude do professor ao ministrar a aula: "Segundo grande parte dos alunos entrevistados, há professores que adentram a sala no primeiro dia de aula, dirigem-se à lousa ou entregam os programas e principiam a exposição sem procurar algum tipo de interação com os alunos. Este tipo de atitude foi relatado principalmente por alunos da área de exatas, onde predominam as aulas expositivas e com pouco espaço para participação. Como constatei que este tipo de atitude é um dos fatores de maior desestímulo para os alunos, influindo no interesse com a disciplina, no relacionamento com os professores e mesmo

em vários graus. Neste sentido, o professor possui um certo poder no estabelecimento do ambiente no qual o aluno desenvolve tendências para *aprendizagem pessoal* ou *aprendizagem afastada*.

O professor, como mestre e avaliador, possui uma posição institucional que o aproxima do conceito weberiano de “autoridade institucional”, isto é, o seu exercício da dominação é

> contínuo, vinculado a determinadas regras, de funções oficiais, dentro de determinada *competência*, o que significa:
> a) um âmbito objetivamente limitado, em virtude da distribuição dos serviços, de serviços obrigatórios,
> b) com atribuição dos poderes de mando eventualmente requeridos e
> c) limitação fixa dos meios coercivos eventualmente admissíveis e das condições de sua aplicação. (WEBER, 1991, p. 142).

A autoridade do professor se manifesta implícita ou explicitamente na relação que ele desenvolve com os alunos de uma turma. Neste estudo, os três professores possuem a mesma autoridade institucional, mas devido, em parte, às personalidades e escolhas diferentes no desenvolvimento da matéria, houve três ambientes diferentes na sala de aula. Numa sala, existia um equilíbrio no qual o professor se preocupava com a aprendizagem dos alunos, apontando as sutilezas da matéria e, ao mesmo tempo, desenvolvia um clima amigável. Entretanto, existia uma certa distância entre o professor e o aluno quanto às atividades na disciplina. Numa outra sala, o professor parecia indiferente tanto à sua aula quanto à aprendizagem do aluno; cada um cumpria seu respectivo papel. Na terceira sala, existia uma tensão no ar, um desconforto na relação entre o professor e o aluno, precipitada por uma aula difícil de acompanhar e por uma coação em relação às provas e notas.

Com base nas falas dos alunos, aponto três fatores pelos quais o professor, ao interpretar e cumprir os regulamentos da instituição referentes às suas aulas, influencia a relação que o aluno desenvolve com a matéria:

a) os recortes que o professor faz da matéria (conteúdos) e o desenvolvimento destes (atividades) para o ensino e a aprendizagem, que têm base em regulamentos

---

com a universidade, julgo importante fazer algumas observações a respeito. O desestímulo pode levar em muitos casos ao mau aproveitamento ou abandono da disciplina e pode gerar insatisfação para com o curso, verificando-se sempre prejuízos quanto ao aproveitamento em ensino/aprendizagem – mesmo que não expresso na avaliação – e na ocorrência de vagas ociosas. Além do mais, o abandono de disciplinas ou a repetência acabam por prejudicar o cumprimento do currículo normal e mesmo inviabilizar a conclusão do curso”.

institucionais (como, por exemplo, a ementa da disciplina) e nas escolhas pessoais do mesmo professor;

b) as relações a) entre o professor e seu recorte da matéria e b) entre o professor e o aluno em sala de aula com respeito a este recorte; e

c) a avaliação do aluno referente os conteúdos e atividades da disciplina.

Estes fatores fornecem uma base a partir da qual o professor e o aluno estabelecem uma relação em torno da matéria. Considero que estes três fatores fazem parte do currículo e a didática vigentes.[44] O aluno, no seu encontro com o professor em sala de aula, tem expectativas tanto com respeito à matéria em si quanto à contribuição dela para sua formação geral. Na confluência entre as necessidades, os objetivos, as expectativas, os interesses e as afinidades do aluno e aqueles do professor é que se desenvolve a relação de dominação que interfere na disposição e nas intenções do aluno de se aproximar ou se afastar da matéria.

7.2.1 Os recortes e o desenvolvimento da matéria

O saber do professor em termos da matéria é essencial para um ensino de qualidade. Ele faz os recortes da matéria e desenvolve esses recortes no seu planejamento de ensino. Os recortes têm base na ementa, na tradição do ensino da matéria, nos livros-texto e nas tecnologias disponíveis. Eles podem incluir, por exemplo: técnicas, argumentos e demonstrações teóricas, problemas clássicos, raízes conceituais, utilização de tecnologias velhas e novas, relações com outras áreas da matemática, relações com outras áreas de conhecimento e relações com assuntos sócio-culturais. O gosto do professor e as suas experiências dentro e fora da sala de aula, bem como seus compromissos para além das aulas, interferem nas suas escolhas sobre o que, e como, desenvolver a matéria com os alunos. Ele pode, por exemplo, desenvolver aulas expositivas, listas de exercícios, projetos, etc.; utilizar uma variedade de formas de expressão para comunicar as idéias matemáticas (analíticas, numéricas, geométricas, gestos, associações metafóricas); e medir o grau de abstração e atenção a detalhes apropriados para o aluno que faz a disciplina.

[44] Entendo por currículo vigente os objetivos, os conteúdos, os métodos e as avaliações desenvolvidos pelo professor. Entendo por didática a maneira pela qual o professor se relaciona tanto com o currículo quanto com o aluno ao ministrar suas aulas.

Neste sentido, o professor seleciona, planeja e desenvolve os conteúdos matemáticos que servem como base para sua interação com os alunos.

Neste estudo, as aulas de Cálculo tiveram por enfoque a "transmissão" de conhecimentos pelo professor de forma expositiva e propedêutica, da mesma forma que acontece nos livros-texto. Experiências e atividades além das aulas, na maior parte das vezes, se restringiram às listas de exercícios, que têm por enfoque a aplicação de técnicas a exercícios típicos.

7.2.2 As relações entre o professor e a matéria e entre o professor e o aluno com respeito à matéria

Os interlocutores citam a didática do professor como um fator importante na apropriação do conhecimento matemático. A didática é considerada como algo que o professor "possui", de alguma forma, e que relaciona com sua habilidade de passar os conteúdos ao aluno. Utilizo as colocações dos alunos a respeito da didática para examinar as relações que o professor desenvolve com a matéria da disciplina e com o aluno, com respeito a essa matéria.

O professor se manifesta uma relação pessoal ou impessoal, ou seja, de afinidade ou de indiferença com o seu recorte da matéria, pela maneira como interage com esse recorte na sala de aula e pelos tipos de atividade que ele propõe para o aluno. Nessa interação que o professor estabelece com o aluno com respeito a matéria é comum encontrar uma aula expositiva carente de "vida". Lucas descreve este tipo de aula:

> É uma aula em que nenhuma situação ou discussão diferente, criativa é proposta. Nesta aula não há participação dos alunos e o professor se limita, simplesmente, a ministrar a matéria da mesma forma convencional que outro professor, há 20, há 50 anos o faria. (LUCAS, 1999, questionário final, pensamentos, n. 6)

O aluno gostaria de uma aula de matemática que fosse além de uma apresentação clara, organizada e com atenção às sutilezas da matéria. De acordo com Lucas,

> uma ótima aula é aquela em que uma situação incomum, ou uma exemplificação, tornam-se atividades originais que contam com a participação/discussão dos alunos. Uma ótima aula envolve os alunos em atividades distintas da rotina de sala, mas para contextualizar os mesmos

conteúdos que são ministrados da forma convencional. (LUCAS, 1999, questionário final, pensamentos, n. 5).

Neste tipo de aula, o professor se identifica com a matéria e busca a participação do aluno. De acordo com Julio, uma excelente aula seria aquela na qual o professor

> saiba mesclar teoria, prática e participação. E participação não se trata de "chamar" um aluno durante a aula, numa espécie de "chamada oral". Trata-se de envolver, com a matéria e com aplicações práticas, o aluno. Uma aula assim, infelizmente, é difícil. Às vezes encontramos uma dessas características, porém dificilmente encontramos todas reunidas. (JULIO, 2000, questionário final, n. 5).

Além de se identificar com a matéria, é importante que o professor construa uma aula compreensível para o aluno. Para isso, o professor precisa desenvolver uma empatia com o aluno a respeito do seu conhecimento matemático e das suas habilidades atuais. Os interlocutores, sentindo uma carência nas suas relações com os professores[45], destacaram a importância da capacidade de ser empático. Por exemplo, Mariana aponta que é importante que o professor esteja atento à compreensão dos alunos no decorrer da sua aula:

> Quanto ao Cálculo de Uma Variável, parece que a professora era mais com a gente. Não quero dizer que o professor de Cálculo de Várias Variáveis seja um mau professor. Mas eu acho que tem uma hora que parece que ele não está muito vendo que a classe não está entendendo. (MARIANA, 2001, 17-09-01, p. 9).

De acordo com Julio (2000, questionário final, questões gerais, n. 3), o professor deve "saber ouvir a opinião das outras pessoas (alunos, colegas de trabalho, etc.), e tentar entendê-las também é importante". Beto (1999, questionário final, pensamentos, n. 3) coloca que, um excelente professor é aquele que, além de dominar a matéria, tem uma didática e "principalmente está próximo dos alunos". Priscila (2001, questionário final, Parte II, n. 8) aponta que é importante que o professor seja consciente da sua relação tanto com a matéria quanto com o aluno: "O professor tem que gostar de dar aula, ser acima de tudo amigo dos alunos". Entendo que, ao usar a palavra "amigo", Priscila queria dizer que o professor, além de desenvolver uma relação amigável, deve estar accessível e disposto para conversar com o aluno a respeito de assuntos em

[45] Rodrigues (1997, p. 67) aponta que "a maioria dos alunos ingressantes são recém-saídos do colegial onde a escola ainda fornece uma certa aura de proteção. Neste ponto, a universidade choca principalmente quando as relações em sala de aula são muito distanciadas".

torno da disciplina. Como Rodrigo (2001, 20-09-01, p. 6) aponta: o professor deve estar "em harmonia com os alunos. Pensando junto com os alunos e os alunos pensando junto com ele". Ao mesmo tempo, o professor deve levar em consideração a heterogeneidade da turma. De acordo com Beto (1999, questionário final, pensamentos, n. 4), o professor deve "aceitar que algumas pessoas têm muito mais dificuldade de assimilar alguns tópicos". Atualmente, o currículo para o Cálculo no ciclo básico não leva tais diferenças muito em consideração.

De acordo com alguns dos interlocutores, não é incomum um professor dar a impressão de que se importa só com a sua aula. Talvez, a "indiferença" que o professor percebe nos alunos seja, em parte, um reflexo de uma certa "indiferença" da sua parte. De acordo com Julio, a

> vontade de dar aula é um fator dos mais importantes em relação à questão [o que seriam características de um excelente professor]. Ultimamente estamos notando que os professores não estão dando aula com vontade, indiferentes ao aprendizado do aluno. (JULIO, 2000, questionário final, n. 3).

Isso provoca uma inquietação: até que ponto a relação professor – aluno se aproxima do conceito weberiano de dominação burocrática? De acordo com Weber, trata-se aqui de

> uma dominação de *impessoalidade* formalista: *sine ira et studio*, sem ódio e paixão, e, portanto, sem "amor" e "entusiasmo", sob a pressão de simples conceitos de dever, sem considerações pessoais, de modo formalmente igual para "cada qual", isto é, cada qual dos interessados que efetivamente se encontram em situação igual – é assim que o funcionário ideal exerce seu cargo. (WEBER, 1991, p. 147, grifo do autor).

A questão da dominação será elaborada na seção 7.3, na qual a avaliação, quando concebida pelo aluno em termos de aprovação, e o Coeficiente de Rendimento, o "CR", podem se tornar um "meio coercitivo", unilateral, disponível para que o professor "convença" o aluno a estudar.

7.2.3 As avaliações

As provas mostram-se, neste estudo, um fator importante em termos da relação que o aluno desenvolve com o Cálculo. O aluno orienta uma parte significativa da sua interação com a matéria às aulas e aos estudos para os testes e as provas. Pelas conversas com os interlocutores, as listas de exercícios são implícita ou explicitamente concebidas como atividades de preparação para os testes e as provas. E, quando se trata da preparação para as provas, os estudos do aluno são principalmente utilitários, com o fim de se sair bem na prova.

O aluno é consciente, de modo geral, de que estudar só para os testes e as provas não é o melhor para sua formação. Por exemplo, Julio (2000, 07-11-00, p.5), ao encontrar dificuldades para justificar um procedimento que ele utilizou para resolver um exercício no segundo teste do semestre, reparou nisso, dizendo: “Está vendo? Este é o problema. Estou estudando para a prova. Não estou estudando para o curso”. Existe uma distinção entre os estudos que o aluno faria para construir ou se apropriar do conhecimento por vontade e interesse e aquele do que ele desenvolve para obter uma nota adequada numa prova. Mariana, sentindo falta de uma aprendizagem que tipifico como *pessoal*, critica o número excessivo de testes, relatórios e provas nas várias disciplinas, apontando que, se só existissem provas, isto é, se as avaliações fossem menos freqüentes,

> a gente poderia dividir muito melhor o tempo. Você estudaria muito mais. Porque tem semanas em que você tem dois testes. Passa os dois, você está morto. Acabado, assim. Então, você perde a semana por causa de dois testes. Você poderia estar estudando, estar revendo. Porque eu não tenho... eu não tenho coragem de, um dia antes do teste de Cálculo, estudar Álgebra [Linear]. Eu não tenho esta estrutura. É psicológico. Então, eu penso que a gente perde muito tempo estudando para os testes. Não que estudando você perde tempo. (MARIANA, 2001, 08-11-01, p. 23).

Priscila (2001, 08-11-01, p. 23), que não encontrou algo de interesse na disciplina, argumentava contra essa posição de Mariana, ao dizer: “Eu acho que se não tivesse testes seria até pior. [...] Motiva para estudar toda semana”. Neste sentido, Mariana até concorda, porque a média para não ficar para o exame é 7,0 e os testes ajudam a aumentar a média.

As falas do aluno apontam que ele é consciente do seu “afastamento” da matéria ao estudar de forma utilitária para as avaliações e sabe que as notas das provas, que avaliam sua habilidade de apresentar resoluções a exercícios isomorfos aos praticados nas listas de exercícios, têm pouca correlação com a apropriação de conhecimento. Aparentemente, o aluno ganha, além da nota, uma familiaridade com os procedimentos e uma noção vaga de alguns conceitos, que estão pouco integrados com suas outras experiências e seus conhecimentos.

7.3 A questão da dominação

A compreensão do domínio da dominação do professor inclui os recortes que ele faz da matéria; o ambiente que ele desenvolve na sala de aula tanto em termos das atividades que ele propõe e administra quanto na sua relação com o aluno com respeito a essas atividades; e a formulação e administração dos instrumentos de avaliação. Por dominação, entendo que existe a probabilidade de que o aluno irá “obedecer” as exigências do professor e que essa obediência se fundamenta em diversas razões (WEBER, 1999, p. 188, 2001, p. 349) e motivações psicológicas. Por exemplo, se o aluno não tem interesse na matéria, não encontra afinidades ou falta confiança frente às avaliações, de uma maneira geral seguirá as propostas do professor. Mas isso não significa que o aluno se submeta à dominação de forma unilateral. Ele aceita a dominação por interesses próprios, de uma forma instrumental que ele julga adequada para a disciplina em si e para o seu curso. Embora existam alguns desacordos entre as expectativas do aluno e o que o professor exige, o aluno aceita a autoridade do professor. Esse comportamento, para Weber, serve como uma espécie de mola que dá continuidade à ordem vigente: “Em toda relação de dever autoritária, certo mínimo de interesse em obedecer, por parte do submetido, continua sendo, na prática, a força motriz normal e indispensável da obediência. Também esta situação é, portanto, bastante variável e flutuante”. (WEBER, 1999, p. 190).

A presença da relação de dominação é menos perceptível para o aluno que se sente relativamente confiante de que é capaz de obter uma nota que julga adequada na disciplina e que esteja desenvolvendo uma relação com a matéria do tipo *aprendizagem pessoal*. Nesta ocasião, o foco da sua interação com a matéria estaria na atividade em si, desvinculado do sentido de dever, além do compromisso com a atividade.

7.4 A atividade como mediadora da relação entre o aluno e o outro

O tipo de comunicação que o aluno desenvolve com o outro em torno das atividades na matéria é um indicador do tipo de relação social que ele tem com o outro, o que, por sua vez, reflete o tipo de relação que ele desenvolve com a matéria e o sentido que ele atribui à mesma. É através destas relações sociais que os padrões no sentido que alunos atribuem às suas interações com a Matemática se desenvolvem e influenciam a vigência da ordem legítima.

O fato de o aluno compartilhar a mesma disciplina e as mesmas atividades com seus colegas, atribuindo a elas um sentimento similar e agindo de maneira similar, não significa que ele orienta suas interações com seus colegas com respeito a este sentimento. De acordo com Weber,

> somente quando, em virtude desse sentimento, as pessoas começam de alguma forma a *orientar* seu comportamento *pelo das outras*, nasce entre elas uma relação social – que não é apenas uma relação entre cada indivíduo e o mundo circundante [...] (WEBER, 1991, p. 26, grifo do autor).

O aluno estuda conforme as exigências dos seus professores, apoiado em suas experiências escolares e seus objetivos, expectativas, interesses, afinidades e necessidades atuais em relação às várias disciplinas que ele está cursando. Às vezes, o aluno prefere estudar sozinho, lidando com a matéria no seu ritmo e resolvendo suas próprias dúvidas. Em outras situações, "força-se" a estudar sozinho por ter deixado a matéria acumular até a véspera da prova. Mas, em geral, o aluno desenvolve relações interpessoais com os colegas, tutores ou com o professor em torno das atividades da disciplina.

Estas relações estão associadas às escolhas que o aluno faz do que estudar e como estudá-lo. Nas ocasiões de *aprendizagem pessoal*, o aprendiz procura alguém com pré-disposição para explorar desafios, construir e discutir estratégias, ou seja, dialogar referente à atividade. Por outro lado, nas ocasiões de *aprendizagem afastada*, o aluno procura alguém com pré-disposição para tirar dúvidas, explicar ou simplesmente passar a resolução de um exercício, ou seja, trocar informações referentes à atividade. Em cada um destes dois tipos de interação, existe uma reciprocidade empática entre os participantes, pela qual eles atribuem aproximadamente o mesmo sentido à atividade e interagem um com o outro em relações sociais.

Weber categoriza as relações sociais em termos de interações racionais e não racionais que correspondem aos seus tipos ideais de ação (seção 3.4):

> Uma relação social denomina-se "relação comunitária" quando e na medida em que a atitude na ação social – no caso particular ou em média ou no tipo puro – repousa no *sentimento* subjetivo dos participantes de *pertencer* (afetiva ou tradicionalmente) *ao mesmo grupo*.
>
> Uma relação social denomina-se "relação associativa" quando e na medida em que a atitude na ação social repousa num *ajuste* ou numa *união* de

> interesses racionalmente motivados (com referência a valores ou fins). (WEBER, 1991, p. 25).

Embora estabelecendo estas duas categorias de relações sociais, Weber (1991, p. 25, grifo do autor) afirma que “a grande maioria das relações sociais, porém, tem caráter, *em parte*, comunitário e, *em parte*, associativo”.

Com respeito à *aprendizagem pessoal* e à *aprendizagem afastada*, as relações sociais que o aluno desenvolve em torno das atividades na matéria são compostas de qualidades racionais e não racionais. Faço uma categorização, neste estudo, com base no *foco* da interação, compartilhado pelos parceiros na relação. Para a *aprendizagem pessoal*, o *foco* da interação é o “problema” que eles estão discutindo ou tentando resolver (ver quadro 6-1 sob *Ação...*, p. 143), caracterizando uma *relação de prática*. No caso da *aprendizagem afastada*, o *foco* da interação é auto-centrado relativo a nota (ver quadro 6-1 sob *Ação...*), ou seja, centrado na procura de segurança na disciplina (ou simplesmente no cumprimento de um dever), o que caracteriza uma *relação de apoio*.

De acordo com Weber (1991, p. 17, grifo do autor), “uma relação social pode ter um caráter inteiramente transitório, bem como implicar permanência, isto é, que exista a probabilidade da *repetição* contínua de um comportamento correspondente ao sentido (considerado como tal e, por isso, esperado)”. Neste estudo, as interações interpessoais motivadas pela necessidade de crescimento referente a compreensão, do tipo *relação de prática*, aparecem com menos freqüência e com menos regularidade do que as *relações de apoio*, sendo que elas dependem de condições mais exigentes, tal como foi delimitado no capitulo 6. As interações motivadas pela necessidade de segurança ou indiferença em torno das avaliações são do tipo *relação de apoio*. Os alunos se reúnem com regularidade na véspera das provas e, às vezes, com mais freqüência.

A seguir, nas seções 7.4.1 e 7.4.2, descrevo em mais detalhes o que entendo por *relação de prática* e por *relação de apoio*.

7.4.1 Relação de prática

A relação de prática se caracteriza por atividades que surgem por escolha do aluno, de acordo com suas afinidades e seu envolvimento intrapessoal. Caracteriza-se por interações dialógicas com outros em torno destas atividades. A relação de prática tem base em atividades intra e interpessoais e pode se iniciar tanto no diálogo quanto na atividade intrapessoal. Nas ocasiões nas quais o aluno se aproximava de uma relação de prática, neste estudo, sua motivação e razão principal estavam desassociadas das avaliações (pelo menos nas preocupações do aluno, se não desvinculadas por completo).

- **Autonomia.** Às vezes, o aluno, no contexto das exigências do seu curso e da disciplina de Cálculo, se envolve com um "problema" de acordo com seus interesses e suas afinidades. Identifica-se com a atividade. Procura interagir com o "problema" para compreendê-lo e desenvolver estratégias próprias para resolvê-lo. Essa interação pode, ao mesmo tempo, requerer que o aluno abra mão de algumas das exigências do professor.

- **Diálogo com o outro.** Utilizo a palavra "diálogo" em um sentido que se aproxima do sentido atribuído à palavra por Paulo Freire (ver seção 6.5). O aluno identifica-se com o outro em relação ao "problema". Neste caso, entendo que a interação se baseia no sentido do valor cognitivo e da afetividade positiva atribuídos à atividade na qual o aluno e o outro encontram a oportunidade de compartilhar afinidades, utilizando conhecimentos e habilidades próximos ou compatíveis.

A interação na atividade está intimamente ligada ao "problema", devido à sua atração desafiadora para o aluno. O enfoque das minhas indagações nas conversas com os interlocutores ficou centrado em aspectos intrapessoais do aluno na sua relação com a matéria; nas poucas ocasiões em que a aprendizagem se aproximava do tipo *pessoal*, houve pouca elaboração, por parte dos interlocutores, do diálogo em torno das atividades. Infiro a presença de diálogo na atividade que Julio compartilhou com um colega na disciplina Estrutura de Dados. Julio (2000, 24-10-00, p. 2) me contou que eles, trabalhando juntos, desenvolveram um programa (de computador), elaborando estratégias próprias. Além disso, alguns exemplos das conversas que eu tive com Lucas indicam que o diálogo ou a procura dele é uma característica significativa da *aprendizagem pessoal*:

- o "exercício do tubarão" que eu levei a um dos nossos encontros;
- a colocação de Lucas, em relação ao projeto, de que ele procurou um colega que também gosta de atividades assim; e
- o fato de Lucas se sentir chateado com a correção do seu projeto de Cálculo no primeiro semestre, porque faltou "retorno" para as justificativas que ele elaborou junto com as respostas às questões.

Na figura 7-1, a *relação de prática*, que se desvincula dos aspectos de dominação do professor, surge das escolhas correspondentes às afinidades do aluno, seja de acordo com a apresentação do professor, com os interesses de um colega ou com focos de interesse encontrados pelo próprio aluno. No decorrer da atividade, o aluno busca uma comunicação dialógica.

7.4.2 Relação de apoio

A relação de apoio se caracteriza pelo entrelaçamento entre as atividades propostas pelo professor e as avaliações, sendo que a comunicação com o outro fica centrada na troca de informações com o intuito de cumprir as atividades sugeridas pelo professor.

- **Dependência.** O aluno estuda para cumprir as exigências do seu curso e da disciplina de Cálculo. Procura seguir e reproduzir os métodos e procedimentos apresentados pelo professor e pelos autores dos livros-texto.

- **Troca de comunicados com o outro.** Há uma identificação com o outro em relação à situação comum. A interação se baseia principalmente no objetivo de aliviar a ansiedade frente às listas de exercícios, testes, provas e outras atividades vinculadas às avaliações. Os alunos se comunicam durante as atividades em busca de meios utilitários e eficientes para cumprir suas obrigações.

Características deste tipo de relação formam comuns nas conversas com os interlocutores. Por exemplo, Rodrigo (2001, 03-09-01, p.13) comentou que tem costume de estudar com três ou quarto colegas na biblioteca, sendo que um explica para o outro quando surgem dúvidas: "Vamos trocando idéias. Acho que assim funciona bem". No mesmo sentido, Max (2000, 07-12-00, p. 3) comentou: "No início do ano eu tive uma experiência muito boa ao estudar com um colega. [...] A gente rendeu bastante fazendo exercícios. Um motiva o outro. Onde um empacava o outro ajudava". Max também anotou que, embora ele não percebesse que os colegas estudavam muito em grupo, eles se juntavam para tirar dúvidas antes de aulas. Mariana complementa a colocação de Max ao descrever um caso particular da resolução de um exercício da lista que caiu no teste: Foi feito por

> um menino da minha classe. Ele me explicou. Era 8 horas da manhã [do dia do teste, que foi administrado às 13 horas]. A gente estava acabando de chegar [na universidade] e eu pedi para ele me explicar. Ele fez no papel. Daí, eu peguei o papel, levei comigo e tentei fazê-lo sozinha. Eu tentei fazer sozinha e não consegui a primeira vez. Eu tinha que ler de novo o papel. Daí eu fiz e expliquei para mais três pessoas. (MARIANA, 2001, 26-09-01, p. 3)[46].

Essas relações têm por base o objetivo de cumprir as exigências da disciplina. Na figura 7-1, o ponto de partida é a dependência em relação às colocações do professor, seja por motivos de segurança ou pela simples obrigação de cumprir as exigências em uma maneira eficiente. A busca de apoio recíproco entre colegas ou a procura de ajuda através do tutor ou professor se dá para fins de troca de informações úteis para as tarefas, na maior parte das vezes, obrigatórias.

7.5 Interpretações com respeito ao ensino-aprendizagem de Cálculo no ciclo básico da graduação

Os diretores das unidades da universidade que têm o Cálculo como uma disciplina obrigatória nos seus programas buscam uma formação do futuro profissional na qual os conhecimentos de Cálculo sejam proveitosos para situações além das encontradas na disciplina em si. Mas, como aponta Artigue (1999), para um grande número de alunos isso não acontece.

Esta situação pode ser descrita nos termos da aprendizagem afastada, na qual o aluno se envolve com a matéria por razões utilitárias, seja por motivação de insegurança ou indiferença. Existe um número significativo de alunos que entra em relações de apoio ou amparo mútuo para lidar com as avaliações. E, nestas relações, os alunos encontram meios eficientes para conseguir a nota. A memorização e a cola, que não são muito diferentes em termos da aquisição de conhecimento, tornam-se meios aceitáveis para atender os seus interesses instrumentais.

A análise desta pesquisa indica que o aluno se adapta, em diferentes graus, aos regulamentos do seu curso e ao currículo e à didática de cada disciplina (como interpretados pelos coordenadores e professores), com a expectativa de uma formação profissional que corresponde às expectativas dos diretores das unidades que oferecem os cursos. Mas, estas expectativas nem sempre se realizam e, até um grau significativo, o sentido que o aluno atribui aos seus estudos se desloca da “formação” para o Coeficiente de Rendimento (notas nas disciplinas) ou pelo menos para a aprovação na disciplina, que permite o seu progresso no curso. Este deslocamento pode ser descrito nos termos da ação racional referente a fins motivada pela necessidade de segurança ou por uma “indiferença”. De acordo com Weber, um

> grande número de regularidades muito salientes no decorrer das ações sociais, particularmente (mas não apenas) das ações econômicas, não se baseia na orientação por alguma norma considerada “vigente” nem no costume, mas unicamente na circunstância de que o modo de agir dos participantes, por sua própria natureza, melhor corresponde, em média, a seus *interesses* normais, subjetivamente avaliados, e que por essa avaliação subjetiva e esse conhecimento orientam sua ação. [...] *Quanto mais rigorosa* a racionalidade referente a fins em suas ações, tanto maior a semelhança de suas reações perante determinadas situações. (WEBER, 1991, p. 18, grifo do autor).

Um fator que tem uma influência significativa nesta situação é a concepção do ensino-aprendizagem de Cálculo e o currículo e a didática vigentes, que têm por base a transmissão propedêutica da matéria na qual o aluno deve adquirir conhecimento de técnicas de Cálculo. O aluno, por sua parte, faz as listas de exercícios propostas, desenvolve a habilidade de classificar os exercícios pelos seus enunciados e pelos capítulos do livro-texto de onde vieram e depois, nas provas que cobram a apresentação de resoluções de exercícios isomorfos àqueles das listas, encaminha, de forma sintática, os procedimentos apropriados.

[46] De modo geral, Mariana (2001, 26-09-01, p. 5) tenta resolver os exercícios sozinha, mas se depois de várias vezes não consegue resolvê-los, ela procura a ajuda de um colega. Ao listar os nomes de alguns colegas que lhe ajudam,

O aluno, de modo geral, combina com colegas para esclarecer dúvidas encontradas nos seus estudos individuais em relação às listas de exercícios. A sua participação em relações de apoio fortalece esse comportamento, que tem por enfoque principal a preparação para as avaliações.

Embora cada aluno escolha suas próprias ações com referência aos seus estudos, seus laços interpessoais com colegas são levados em consideração nas suas decisões de como lidar com os estudos e as avaliações. Weber, ao considerar as relações sociais, aponta para as implicações de ações com base no *hábito* e em interesses *racionais referente a fins* que, por sua vez, são tipos de ação que fundamentam a *aprendizagem afastada*.

> A estabilidade do mero hábito se apóia essencialmente no fato de que aquele que não orienta a sua ação nela procede ou age de "modo impróprio", isto quer dizer, aceita de antemão incomodidades e inconveniências, maiores ou menores, durante todo o tempo em que a maioria dos que formam o seu meio-ambiente acreditam na existência do hábito e dirigem o seu comportamento por ele.
>
> A estabilidade de uma situação de interesse baseia-se analogamente no fato de que alguém que não orienta o seu comportamento nos interesses dos outros – não os inclui no seu "cálculo" – provoca a sua resistência ou acarreta conseqüências não desejadas e nem previstas por ele, e, conseqüentemente, corre o perigo de prejudicar os seus próprios interesses. (WEBER, 2001, p. 422-423).

Quaisquer que sejam as expectativas do professor para a formação matemática do aluno, o aluno, frente às motivações psicológicas e às condições do currículo e da didática vigentes no ciclo básico da graduação, estuda e interage com os colegas, os tutores e o professor de forma a atender às suas necessidades e, nessa atividade, desenvolve sua relação com a Matemática.

No caso de aprendizagem afastada, trata-se de uma espécie de "desvio" do sentido da ordem vigente. E, de acordo com Weber, quando a ação contorna o sentido da ordem tal como entendido pelos dirigentes institucionais e isso

> se converte em *regra*, então a ordem passa a ter "vigência" limitada ou, finalmente, deixa de existir. Entre a vigência e a não-vigência de uma ordem não há, portanto, para a Sociologia, alternativa absoluta, como existe para a jurisprudência (em virtude de sua finalidade inevitável). [Isto é, existem vários graus de vigência.]. (WEBER, 1991, p. 20, grifo do autor).

---

afirma que eles são sempre os mesmos.

De acordo com Weber (1991, p. 20), uma ordem "tem 'vigência' na medida em que efetivamente determina as ações". Acrescento que, no âmbito de educação institucional, o sentido desta ação, que se reflete no tipo de interação que o aluno desenvolve com a matéria, é importante para a vigência da ordem. As exigências relativas à reprodução de técnicas, algoritmos e procedimentos-padrão em exercícios típicos encontram seu reflexo nos estudos utilitários dos alunos que, por sua vez, orientam a forma de cobrança pelo professor para tal reprodução.

7.6 As necessidades de Maslow e as relações de prática e de apoio

A *aprendizagem pessoal* com base na necessidade de crescimento referente a compreensão parece, em alguns casos, gerar a necessidade de pertencimento e atender, de forma significativa, a necessidade de estima. A *aprendizagem afastada* com base na "indiferença" ou na necessidade de segurança, tende a gerar contatos impessoais tanto com o conhecimento quanto com o outro, sendo a estima adquirida relativamente vazia de conteúdo.

Levanto a hipótese de que, na conceituação das necessidades psicológicas de Maslow, dentro do âmbito do currículo e da didática vigentes, o processo de satisfação da necessidade de crescimento referente a compreensão se co-relaciona com e até gera, a necessidade de pertencimento na forma da *relação de prática*. Quando o aluno age de forma relativamente autônoma para explorar um "problema" e procura compartilhar suas idéias e estratégias de forma dialógica, através de uma comunicação centrada no "problema", ele e o outro constroem uma relação emocional e intelectual com base no afeto positivo e no valor cognitivo da atividade. O aluno desenvolve habilidades de construção de saber e, como resultado, desenvolve auto-eficácia. Como "o diálogo se impõe como caminho pelo qual os homens ganham significação enquanto homens" (FREIRE, 1981, p. 93), este tipo de relação atende à necessidade de estima.

Na *aprendizagem afastada*, o aluno satisfaz a necessidade de segurança e estima em termos da nota e do andamento do seu curso, de forma que suas interações com a matéria acabam por distanciá-lo do conhecimento. A falta de segurança frente às avaliações, que se vinculam às listas de exercícios, gera a necessidade de pertencimento a uma *relação de apoio* em torno da resolução das listas. É uma relação empática na qual os participantes compartilham informações utilitárias em preparação para as avaliações. É uma espécie de troca de comunicados ligados a uma obrigação específica, com o intuito de conseguir uma nota adequada e aliviar a ansiedade. O aluno constrói uma confiança pontual para uma tarefa pontual (a prova) por memorizar técnicas e exercícios específicos. A estima que essa atividade gera reside na sua nota, ou seja, numa representação do conhecimento adquirido. Com respeito ao pertencimento, desenvolve laços auto-centrados em relação ao outro e por isso não atende à necessidade de pertencimento.

No caso de aprendizagem afastada por "indiferença", o aluno não se preocupa tanto com as avaliações e não sente necessidade de se comunicar com colegas. Neste caso, o aluno, além de se afastar da matéria, pode até se afastar dos seus colegas com respeito às atividades na disciplina. Além disso, esse aluno não satisfaz e nem procura satisfazer sua necessidade de estima nesta disciplina.

7.7 Considerações finais

Esta pesquisa aborda a aprendizagem no âmbito institucional de forma abrangente, partindo da análise do envolvimento do aluno em atividades e das suas vivências na sala de aula para compreender *como* ele se apropria do conhecimento; passando pela tipificação da aprendizagem, sendo esta conceituada como uma relação que o aluno desenvolve com o conhecimento e, a partir desta tipificação, chegando a interpretações e inferências sobre aspectos institucionais e relações sociais que oferecem uma compreensão do *porquê* da aprendizagem.

Sendo que a base empírica deste estudo reside na interlocução com um número relativamente pequeno de alunos, considero que as interpretações a partir dos tipos ideais que se apóiam nestas interlocuções são indicadores de fatores e relações que possuem valor nas conceituações aqui realizadas, na sua compatibilidade tanto com relação às explicações teóricas quanto com relação à realidade e como fontes para reflexão, ação e estudos futuros.

A partir da conceituação de aprendizagem como uma relação que o aprendiz constrói com o conhecimento, encontro relações vinculadas ao currículo e à didática vigentes para a disciplina de Cálculo no ciclo básico, que promovem ou apóiam uma aprendizagem afastada. Essas relações incluem a relação do professor com o recorte da matéria que ele apresenta em aula. Na maior parte das vezes, este recorte tem por enfoque as técnicas do Cálculo e as preocupações didáticas do professor se centram no desenvolvimento de metodologias para apresentar, exemplificar e "validar" tais técnicas de forma propedêutica. Embora seja possível encontrar diferentes graus de atenção aos detalhes e à organização lógica da aula entre os professores, é comum a aula expositiva na qual o professor apresenta a matéria de forma impessoal, *sem ódio e sem amor*, com relativamente pouca atenção ao aluno.

Uma aula assim dificilmente encoraja o aluno a se envolver na matéria para além do cumprimento das exigências mínimas para sua nota, que depende das avaliações que, por sua vez, dependem das listas de exercícios que são resolvidos de maneira eficiente com vistas à nota. Caso o aluno se sinta inseguro em termos da sua nota, seus estudos se tornam ainda mais instrumentais.

Nas ocasiões em que o aluno interage com o Cálculo de uma forma que se aproxima da aprendizagem afastada, ele *utiliza técnicas* de Cálculo seguindo *procedimentos-padrão*, para resolver *exercícios típicos* com o intuito de chegar à *resposta certa*. Caso encontre dificuldades na resolução destes exercícios, o aluno procura ajuda, estabelecendo *relações de apoio* que, de uma certa forma, são esperadas e caracterizam as atividades interpessoais da disciplina de Cálculo. Relações de apoio também são promovidas por medidas institucionais, como por exemplo as aulas de exercícios e as monitorias. Para o aluno que procura satisfazer a necessidade de segurança, essas relações ajudam a aliviar a ansiedade teste a teste, prova a prova. Mas, de modo geral, essas relações não interferem nos hábitos de estudo que apóiam e promovem a aprendizagem afastada; pelo contrário, apóiam tais hábitos.

Nas ocasiões em que o aluno se envolve com a matéria de uma maneira que se aproxima da aprendizagem pessoal, ele *utiliza técnicas* no desenvolvimento de *estratégias próprias* para resolver *"problemas" incomuns*, em busca de *soluções* que ele mesmo tem necessidade de *justificar*. Neste caso, a interação com a Matemática é desvinculada da preocupação com a nota e a busca de interações interpessoais se dá para uma comunicação dialógica com respeito às estratégias de resolução, para discutir os ensaios e erros e as inter-relações entre as técnicas utilizadas, as estratégias e os "problemas".

Esta pesquisa indica que a aprendizagem pessoal requer condições a partir das quais o aluno pode levar em conta suas *afinidades* e tirar proveito delas na matéria de forma *autônoma*, com oportunidades de *diálogo*. O currículo e a didática vigentes não contemplam essas condições e até se contrapõem a elas. Ao aceitar a importância das afinidades, da autonomia e do diálogo para a aprendizagem pessoal, e desejando apoiar ou promover tal aprendizagem, a didática deve, além de apresentar, exemplificar e "validar" as técnicas, levar em consideração a) a segurança que o aluno sente em termos do seu "rendimento" na disciplina; b) a existência de uma variedade de afinidades (por exemplo, tópicos, idéias, teoremas, meios de representação, tecnologias, relações entre tópicos, relações entre áreas da Matemática e relações interdisciplinares); c) a autonomia e d) o diálogo. Uma aula capaz de provocar curiosidade, promover indagações e apoiar o diálogo fornece um clima para o desenvolvimento da aprendizagem pessoal. Ou seja, a aprendizagem pessoal depende da *relação* que o professor tem com seu recorte da matéria e da *relação* com o aluno em termos deste recorte, além do planejamento cuidadoso da apresentação dos conteúdos.

Retomando a exemplificação das atividades que medeiam os tipos ideais de aprendizagem, nota-se que os dois tipos envolvem a utilização de técnicas. Entendo que a aquisição do conhecimento referente às técnicas seria mais significativa no caso da aprendizagem pessoal, devido às justificativas para as relações entre técnicas, estratégias e "problemas" que o aluno busca, e que são motivadas pela necessidade de crescimento referente a compreensão e pela ação cognitiva referente a valores. Quanto à aprendizagem afastada, o aluno procura nexos sintáticos para encadear os procedimentos-padrão, fazendo relações entre os enunciados dos exercícios e os métodos de resolução, dada uma necessidade de segurança ou uma "indiferença" frente às avaliações da disciplina. A ação é racional referente a fins e se apóia em hábitos bem sucedidos nas tarefas de categorizar, treinar e fixar.

Se quisermos interpretar os efeitos da afetividade nestes dois casos, diremos que na aprendizagem pessoal essa afetividade é positiva, quer dizer, tem efeito positivo nos objetivos, expectativas, interesses e afinidades do aluno. No que se refere à Matemática, apóia a tendência do aluno de buscar "problemas". Para a aprendizagem afastada, a associada afetividade é negativa ou neutra e tem um efeito correspondente nos objetivos, expectativas, interesses e afinidades. Neste caso, o aluno simplesmente espera o próximo exercício, a próxima obrigação.

Entendo que a educação institucional tem por propósito a introdução de uma multiplicidade de conhecimentos antes da necessidade de utilizá-los em situações "práticas". Entendo que a aprendizagem afastada é necessária para lidar com tanta informação. Entendo que treinar e fixar são meios eficientes para gravar informações. Mas, ao mesmo tempo, sinto falta do fazer da Matemática, como na aprendizagem pessoal, que dificilmente acontece para um grande número de alunos de Cálculo. Reconheço que este fazer é algo pontual, centrado em "problemas" particulares, e se apóia em fatores que fogem do currículo e da didática vigentes. Mas também é algo que o aluno pode, em condições apropriadas, estar mais pré-disposto ou interessado em desenvolver.

Entendo que, ao desenvolver a aprendizagem pessoal, o aluno desenvolve habilidades e confiança em si mesmo para abordar e resolver problemas incomuns e, neste processo, desenvolve relações de prática e também uma apreciação da Matemática. Sugiro que a questão da aquisição de conhecimento matemático proveitoso para outras áreas de atuação é intimamente relacionada com a aprendizagem pessoal, que é mediada pelo fazer da Matemática.

Referências bibliográficas

ANSCOMBE, G. E. M. **Intentions**. Oxford: Basil Blackweel, 1958. 93 p.

APOSTOL, Tom M. **Calculus**: multivariable calculus and linear algebra with applications to differential equations and probability. 2. ed. New York: Wiley, 1967. v. 2.

ARON, Raymond. Max Weber. In: ______. **As etapas do pensamento sociológico**. Tradução de Sérgio Bath. Revisão da tradução de Áureo Pereira de Araújo. 4. ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora, 1993. p. 461-557.

ARTIGUE, Michèle. The teaching and learning of mathematics at the university level: crucial questions for contemporary research in education. **Notices of the American Mathematical Society**, Providence, RI: American Mathematical Society, v. 46, n. 11, p. 1377-1385, Dec. 1999.

BOND, E. J. **Reason and value**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 166 p.

BOUDON, Raymond. Ação. In: BOUDON, Raymond (Dir.). **Tratado de sociologia**. Tradução de Teresa Curvelo. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1996. p. 27-63.

CÁLCULO com aplicações: um ambiente de ensino e aprendizagem. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ ~calculo/quemsomos/index.html>. Acesso em: 24 dez. 2003.

COHEN, Percy S. **Teoria social moderna**. Tradução de Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1970. 258 p.

DAVIDSON, Donald. Actions, reasons and causes. In: ______. **Essays on actions and events**. Oxford: Clarendon Press, 1986. p. 3-19.

EDWARDS, C. H. Jr.; PENNEY, David E. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. v. 3, 216 p.

ENSINO e pesquisa – graduação. Disponível em: <http://www.unicamp.br/unicamp/ ensino_pesquisa/ensino_graduacao.html>. Acesso em: 20 jan. 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Aurélio século XXI**: o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. rev. e amp. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FIGUEIREDO, Vera L. X.; SANTOS, Sandra; MELLO, Margarida. **Curvas de nível e otimização**: uma visão envolvente de cálculo. Projeto para alunos que freqüentaram a disciplina cálculo de várias variáveis no programa Cálculo com Aplicações, segundo semestre de 1999, Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/mostra/proposta/html>. Acesso em: 6 fev. 2003.

FREIRE, Paulo. **Pedogogia do oprimido**. 10. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1981. 218 p. (Coleção: O mundo hoje, 21).

FRICK, Willard B. **Psicologia humanista**: entrevistas com Maslow, Murphy e Rogers. Tradução de Eduardo D'Almeida. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1975. 214 p.

FRID, Sandra. Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction. In: DUBINSKY, Ed et al. (Ed.) **Research in Collegiate Mathematics Education. I**. Rhode Island: American Mathematical Society, 1994. p. 69-100.

GOBLE, Frank G. **The third force**: the psychology of Abraham Maslow. New York: Washington Square Press, 1970. 208 p.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patricia. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, James (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge**: the case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999. p. 75-94.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1990. 169 p.

MASLOW, Abraham H. **The psychology of science**: a reconnaissance. New York: Harper and Row, 1966. 168 p. (The John Dewey Society Lectureship Series, n. 83; Arthur G. Wirth, Chairman).

MASLOW, Abraham H. **Toward a psychology of being**. 2. ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1968. 240 p.

MASLOW, Abraham H. **Motivation and personality**. 2. ed. New York: Harper and Row, 1970. 369 p.

McLEOD, Douglas B. Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Simon and Schuster Macmillian, 1992. p. 575-596.

MELLO, Margarida P.; SANTOS, Sandra A. Mancha negra: reflexões sobre um projeto no ensino de Cálculo. **Zetetiké**, Campinas: Cempem, v. 10, n. 17/18, p. 71-112, jan./dez. 2002.

MOREIRA, Marco A.; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982. 112 p.

OSTROWER, Fayga. **Criatividade e processos de criação**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 1989. 187 p.

PEREIRA, José Tomaz Vieira. Of. PRG/405/97 – Circular. 15 dez. 1997. (Relatório não publicado).

PESQUISA sobre cola na universidade. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/mostra/professores/vera/index2.html>. Acesso em: 20 jan. 2004.

RODRIGUES, Lea Carvalho. **Rituais na universidade**: uma etnografia na Unicamp. Campinas: Área de Publicações CMU/Unicamp, 1997. 266 p. (Coleção Campiniana, 15).

SARAU. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/sarau/index.html>. Acesso em: 20 jan. 2004.

SKEMP, Richard R. **The psychology of learning mathematics**: expanded American edition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. 218 p.

SOLOMAN, Albert. Max Weber's methodology. In: TURNER, Bryan S. (Ed.). **Max Weber**: critical responses (methods and theory). London: Routledge, 1999. p. 54-69. v. 2.

SOUZA JUNIOR, Arlindo José de. **Trabalho coletivo na universidade**: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral. 2000. 323 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

WEBER, Max. **Economia e sociedade**: fundamentos da sociologia compreensiva. Tradução da quinta edição revista, anotada e organizada por Johannes Winckelmann. Tradução de Regis Barbosa e Karen Elsabe Barbosa. Revisão técnica de Gabriel Cohn. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1991. v. 1, 422 p., 2 v.

WEBER, Max. **Metodologia das ciências sociais**. Tradução de Augustin Wernet. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p. 211-453, parte 2.

WEBER, Max. **Max Weber**: sociologia. 7. ed. Tradução de Amélia Cohn e Gabriel Cohn. Organização de Gabriel Cohn. São Paulo: Ática, 2002. 167 p. (Coleção: Grandes cientistas sociais; Florestan Fernandes, coordenador).

WENGER, Etienne. **Communities of practice**: learning as a social system. Disponível em: <http://www.co-i-l.com/coil/knowledge-garden/cop/lss.shtml>. Acesso em: 13 maio 2003. (Publicado em **Systems Thinker**, June 1998).

Bibliografia recomendada

ALVESSON, Mats; SKÖLDBERG, Kaj. **Reflexive methodology**: new vistas for qualitative research. London: SAGE Publications, 2000. 319 p.

BOOKMAN, Jack; FRIEDMAN, Charles P. A comparison of the problem solving performance of students in lab based and traditional calculus. In: DUBINSKY, Ed et al. (Ed.). **Research in collegiate mathematics education I**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994. p. 101-116.

CHARLOT, Bernard. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Tradição de Bruno Mange. Porto Alegre: Artmed, 2000. 93 p.

COHN, Gabriel. **Crítica e resignação**: fundamentos da sociologia de Max Weber. São Paulo: TAQ, 1979. 161 p.

COLLINGWOOD, R. G. **The idea of history**. Oxford: At the Clarendon Press, 1951. 339 p.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982. 486 p.

DOSSE, François. **O império do sentido**: a humanização das ciências humanas. Tradução de Ilka Stern Cohen. Bauru, SP: Editora da Universidade do Sagrado Coração, 2003. 448 p.

FAY, Brian; MOON, J. Donald. What would an adequate philosophy of social science look like? In: MARTIN, Michael; MCINTYRE, Lee C. (Ed.). **Readings in the philosophy of social sciences**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1994, p. 21-35.

FREUND, Julien. **Sociologia de Max Weber**. Tradução de Luís Cláudio de Castro e Costa. 5. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2000. 210 p.

GIDDENS, Anthony. **Novas regras do método sociológico**: uma crítica positiva das sociologias compreensivas. Tradução de Maria José da Silveira Lindoso. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1978. 181 p.

GIDDENS, Anthony. **A constituição da sociedade**. Tradução de Álvaro Cabral. São Paulo: Martin Fontes, 1989. 318 p.

GIDDENS, Anthony. **Modernidade e identidade**. Tradução de Plínio Dentzien. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002. 233 p.

GOLEMAN, Daniel. **Inteligência emocional**: a teoria revolucionária que redefine o que é ser inteligente. Tradução de Marcos Santarrita. Rio de Janeiro: Objetiva, 1995. 370 p.

HEKMAN, Susan. **Weber, the ideal type, and contemporary social theory**. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 1983. 213 p.

HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas P. Learning and teaching with understanding. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Simon & Schuster Macmillan, 1992. p. 65-97.

KALBERG, Stephen. **Max Weber's comparative-historical sociology**. Chicago: The University of Chicago Press, 1994. 221 p.

NYE, Robert D. **Três psicologias**: idéias de Freud, Skinner e Rogers. São Paulo: Pioneira/Thomson Learning, 2002. 195 p.

OAKS, Guy. **Weber and Rickert**: concept formation in the cultural sciences. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1988. 190 p.

REDISH, Edward F.; STEINBERG, Richard N. Teaching physics: figuring out what works. **Physics Today**, Woodbury, NY, v. 52, n. 1, p. 24-30, Jan. 1999.

RINGER, Fritz. **Max Weber's methodology: the unification of the cultural and social sciences**. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1997. 188 p.

RUNCIMAN, W. G. **A critique of Max Weber's philosophy of social science**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. 106 p.

RYAN, Richard M.; DECI, Edward L. Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. **Contemporary Educational Psychology**, San Diego, CA: Academic Press, v. 25, n. 1, p. 54-67, Jan. 2000.

SCHIEFELE, Ulrich. Interest, learning, and motivation. **Educational Psychologist**, Hillsdale, NJ: Lawerance Erlbaum Associates, v. 26, n. 3/4, p. 299-323, Summer and Fall, 1991.

SIERPINSKA, Anna. **Understanding in mathematics**. London: The Falmer Press, 1994. 189 p.

SMELSER, Neil J. **Problematics of sociology**. Berkeley: University of California Press, 1997. 111 p. (The George Simmel Lectures, 1995).

WEBER, Max. **The protestant ethic and the spirit of capitalism**. Tradução de Talcott Parsons. London: Unwin Paperbacks, 1987. 292 p.

WEBER, Max. **Economia e sociedade**: fundamentos da sociologia compreensiva. Tradução de Regis Barbosa e Karen Elsabe Barbosa. Revisão técnica de Gabriel Cohn. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999. 580 p., v. 2, 2 v.

WEBER, Max. **Metodologia das ciências sociais**. Tradução de Augustin Wernet. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p. 1-210, parte 1.

ANEXO – projeto, 2º semestre, 1999

< http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/mostra/proposta/html >

Projeto

Curvas de Nível e Otimização: uma Visão Envolvente do Cálculo

Elaborado por Vera Figueiredo, Margarida Mello e Sandra Santos

INTRODUÇÃO

Este projeto pretende dar continuidade ao trabalho que desenvolvemos no primeiro semestre de 1999 explorando, desta vez, técnicas envolvendo funções de várias variáveis e resgatando conceitos de cálculo de uma variável. Tem como objetivo principal explorar o conteúdo matemático presente no tema escolhido (ou proposto) para buscar o envolvimento do aluno com a construção de seu conhecimento de modo a permitir a inter-relação com outros aspectos importantes do processo educacional.

Na tentativa de recuperar os valores éticos e estéticos do ensino-aprendizagem, propomos uma integração desta disciplina de Cálculo com os três registros ecológicos: o do meio ambiente, o das relações sociais, e o da subjetividade humana, conforme iniciado no primeiro semestre.

Para a realização desta importante tarefa apresentamos um roteiro de uma proposta de projeto que deverá nortear a execução deste trabalho. Outros temas podem ser escolhidos para a Parte II (embalagem, transporte, aeromodelo, cúpulas, etc...), desde que o trabalho desenvolvido explore conceitos de otimização de funções de várias variáveis e apresente riqueza e complexidade semelhantes ao proposto. Divulgaremos, em nossa página na Internet, http://www.ime.unicamp.br/~calculo, material de apoio produzido por nossos alunos em anos anteriores para estimular a capacidade criativa.

O projeto constará de duas partes. Na primeira delas exploramos o conceito de curvas de nível. O foco da segunda parte é a aplicação da teoria de Cálculo para a resolução de problemas de otimização.

Parte I Curvas de Nível

Curvas de nível têm aplicações surpreendentes nas mais diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, estudos meteorológicos e pesquisas médicas. Inspire-se nestas e noutras fontes de material para ajudá-lo no desenvolvimento desta parte do projeto.

1. Pesquisa de campo.

   Obtenha três ou mais exemplares de mapas de curva de nível. Por exemplo, mapas de relevo geográfico, conjunto de isotermas, curvas de indiferença (em economia), disseminação de doenças, etc. Descreva em palavras o significado do mapa, e como foi desenhado, ou, caso você não tenha esta informação, como poderia ter sido produzido.

2. Estudo de caso.

   O mapa da Figura 1 indica a propagação de óleo que vaza de um navio. As curvas correspondem à fronteira da mancha nos vários instantes de tempo. Com base nesta figura e utilizando seus conhecimentos de Cálculo estime: a) a localização do navio, b) a velocidade de propagação da fronteira da mancha no ponto indicado no mapa, c) o instante e o ponto em que a mancha atingirá a costa.

3. Criando um novo estudo.

   Formule e responda perguntas pertinentes ao contexto e semelhantes às formuladas no item 2 para um dos mapas que você obteve em sua pesquisa de campo.

Parte II Modelando um recipiente de lixo

1. Explorando a geometria de recipientes.

   a. Pesquise três ou mais recipientes rígidos para lixo. Para cada recipiente, tire uma foto e faça um modelo matemático utilizando qualquer software com o qual esteja habituado.

   b. Compare seu modelo com o original e critique-o. O que foi simplificado? O que permaneceu fiel? A(s) simplificação(ões) prejudica(m) a análise?

2. Fazendo um estudo comparativo:

a. Analise a finalidade, as dimensões, a funcionalidade e o aspecto estético do recipiente.

b. Pesquise sobre as propriedades do material utilizado: durabilidade, custo a longo prazo.

c. Compare algumas taxas: volume/área; volume/custo.

3. Criando um recipiente de lixo (use e abuse de superfícies de revolução):

   a. Visualize-o com o programa *Mathematica*.

   b. Otimize-o, utilizando multiplicadores de Lagrange. Por exemplo, trabalhe com área de superfície mínima para volume fixo ou volume máximo para área de superfície fixa.

   c. Compare-o com os anteriores de acordo com algum critério escolhido por você.

   d. Localize o centro de gravidade de seu recipiente.

Parte III Reflexões

Sensibilizado pelos aspectos ambiental e social dos problemas analisados nas partes I e II, e pela sua nova visão de curvas de nível e otimização, comente sobre o papel que a matemática pode desempenhar fora do mundo acadêmico.

INSTRUÇÕES

Os projetos serão desenvolvidos em grupos de dois alunos. Vocês poderão utilizar os laboratórios e contar com os atendimentos dos tutores para tirar dúvidas e receber as necessárias orientações.

A apresentação do seu trabalho deverá seguir os padrões de um trabalho científico: Introdução, Desenvolvimento, Conclusões, Tabelas e Figuras com legendas, Referências, etc. Caso você não tenha acesso a um editor de texto, seu trabalho pode ser manuscrito.

Serão atribuídos 3 pontos para a Parte I, 5 pontos para a Parte II, 1 ponto para a Parte III e 1 ponto para apresentação.

Os alunos que desejarem poderão construir uma página na Internet. Aconselhamos que todos guardem os disquetes pois os melhores trabalhos serão divulgados.

Mapa